

Keyifli Okumalar Dileriz

Binlerce kategoride milyonlarca PDF e-kitap, ders kitapları, dergiler ve romanlara platformumuz üzerinden ücretsiz ulaşabilirsiniz.

RESMİ WEB SİTEMİZ

<https://rantey.org>

Yedek ve Duyuru Kanallarımız

Sitemize erişim engeli gelmesi veya adres değişikliği durumunda aşağıdaki kanallardan güncel giriş adresine erişebilirsiniz:

- Telegram: <https://t.me/birkitapbir>
- WhatsApp Kanalımız : <https://whatsapp.com/channel/0029VbDHv8uE50Us4lvMoc0Y>

Yaşayan Matematik

Theoni PAPPAS




doruk

ODORUK YAYINCILIK, - ISTANBUL

Yaşayan Matematik

Tam Hakları Saklıdır. İzinsiz alına yapılamaz.

Yazarı:

Theoni Pappas

Çeviren:

Yıldız Silier

ISBN:

975-553-400-8

Kasım 2007

Baskı

Ufuk Matbaası

Dizgi:

Doruk Yayıncılık

Sayfa Düzeni

Doruk Yayıncılık

Kapak Tasarım:

Doruk Yayıncılık



Himaye-i Etfal Sokak No: 6/2 Cağaloğlu/İSTANBUL

Tel: (0212) 514 61 58 - (0212) 514 61 57

www.dorukyayincilik.com

e-posta: info@dorukyayincilik.com

Theoni PAPPAS

YAŞAYAN MATEMATİK

Çeviren: Yıldız Silier



İÇİNDEKİLER

Önsöz	11
Onlu Taban Sisteminin Evrimi	13
Halley Kuyruklu Yıldızı	15
Olanaksız Üçgen	18
Olasılık ve π	19
Beyaz Saray'ın Parabol Biçimli Tavanı	21
Fibonacci Dizisi	23
Üçlü Halkalar- Topolojik Bir Model	25
İnsan Vücudu ve Altın Oran	26
Sonsuzluk Oteli	28
Pascal Üçgeni, Fibonacci Dizisi ve İkiterimli Teoremi	29
Möbius Şeridi ve Klein Şişesi	31
Matematik ve Kağıt Katlama	34
Matematikçi Lewis Carroll	38
Sonsuzluk ve Çember	41
Sanat ve İzdüşümsel Geometri	42
Napier Kemikleri	44
Doğadaki Altınlar	46
Şehirli Kareler	48
Yonca Biçimli Düğüm	54
Oransız Sayılar ve Pisagor Teoremi	55
Asal Sayılar	57

Sihirli Küp	59
Öklit Dışı Geometrilere	60
Küçük Yerlerdeki Sonsuzluk	63
Platon'un Beş Katı Cismi	65
Sihirli Kareler Oluşturmak İçin Piramit Yöntemi	67
Göz Aldatıcı Sarmal	68
Zenon Paradoksu: Aşıl ve Kaplumbağa	69
Mozaklar	71
Königsberg Köprüleri Problemi ve Topoloji	74
Graf (Çizge) Teorisi	76
Pergel ve Cetvelle Yapılamayan Çizimler	78
Çevre, Alan ve Sonsuz Seriler	81
Satranç Tahtası Problemi	83
Müziğin Matematiği	84
Beklenmedik Sınav Paradoksu	88
Dört Renk Problemi	89
Sonluötesi Sayılar	91
Bir Mantık Problemi	94
Kar Kristali Eğrisi	95
Japon Sihirli Dairesi	97
Küre Bıçimli Kubbe ve Suyun Antılması	99
Sihirli 'Çizgi'	100
Gözü Aldatan Görüntülerin Tarihçesi	101
Eşkenar Üçgenin Doğumu	104
Sahte Para Bulmacası	105
Olasılık ve Pascal Üçgeni	106
Duvar Karşısında Üç Adam	109
Geometri ve Fibonacci Dizisi	110
Labirent	111
Konikler	114
Arşimet Burgusu	116

Kaç Boyut Vardır?	117
Sonlu mu? Sonsuz mu?	119
Matematik ve Sabun Köpüğü	120
Bilardo Masasının Matematiği	121
Reversi Oyunu	122
Keplerin Dairenin Alanını Bulma Yöntemi	125
Paradokslar.	126
7,11,13 ve Bazı Tek Sayılar	130
Boşluk Dolduran Eğriler ve Nüfus	131
İlk Hesaplama Aletleri	132
Kahve Fincanı ve Simit	136
Matematiksel Eşya.	137
Asal Sayıların Geometrik Açıklaması	140
Pisagor Teoremi Üstüne	141
Kürelerin Müziği	143
Ölçüm Problemi	144
Gezegenlerin Olağandışı Yörüngeleri	145
Einstein'in Genel Görelilik Teorisinin Sınanması	146
Üçgen Oluşturma Bulmacası.	148
Riemann Geometrisinin Dünyası.	149
Arşimet Bir Açığı Nasıl Üç Eşit Parçaya Ayırdı ?	151
Fraktaller ve Egreltilotu.	153
Sayıların Evrimi	154
Çokgensel Sayılar	158
İstatistik ve Matematik.	160
Kaos Teorisi: Düzensizlikle Bir Düzen Var mı?	162
Sarkaç	167
Sekiz Dama Taşı Bulmacası	170
Orman Yangınının Matematiği.	171
Pisagor Teoreminin Bir Adım Ötesinde	172
Okyanus Dalgalarının Matematiği	174

Pisagor Teoremi'nin Zarif bir Kanıtı	177
Sayıların Şaşırtıcı Bir Özelliği	178
Hiperuzay: Matematik ve Görünmezlik	179
Sihirli İkili Kartlar	182
Pong hau k'i	183
Bilgisayar Modelleri	184
Ve π Devam Ediyor	186
Mayalar'ın Kullandığı Matematik	188
Format'ın Son Teoremi :	
Kanıtlandı mı? Kanıtlanmadı mı?	193
Hangi Gün Doğdunuz?	195
Kübün İzdüşümü.	197
Einstein'ın "Gizi"	198
Matematik ve Boş İnançlar	200
Üst üste Gelen Kareler Problemi	201
Ada Byron ve Bilgisayar Programlaması	202
Çözümler	205

“...evren her an gözlemlerimize açıktır; ama onun dilini ve bu dilin yazıldığı harfleri öğrenmeden ve kavramadan, anlaşılamaz. Evren, matematik diliyle yazılmıştır; harfleri üçgenler, daireler ve diğer geometrik biçimlerdir. Bunlar olmadan tek sözcüğü bile anlaşılmaz; bunlarsız ancak karanlık bir labirentte dolaşılır.”

Galileo

ÖNSÖZ

YAŞAYAN MATEMATİK'te, matematiksel kavramlar, düşünceler, sorular, tarihsel bilgiler, problemler ve oyunlar ele alınarak matematiğin etkisi ve doğası ortaya konmaktadır.

Matematik zevkini tatmak için matematiğin çevremizdeki nesnelerle çok az ilgisi olan, yalıtılmış bir konu olmadığını kavramak gerekir. Matematik, gelir-gider dengesini bulmak için kullanılan ya da karmaşık hesaplamalarıyla bizi sıkan bir konu değildir. Çok az kişi matematiğin çevremizle ve yaşamımızla iç içe olan gerçek doğasını kavrar. Çevremizdeki pek çok olgu matematikle anlatılabilir. Matematiksel kavramlar, canlı hücrelerin yapısında bile bulunur.

Bu kitabın amacı, yaşamımızın çeşitli alanlarından kısa görüntüler ve örnekler sunarak, matematik ile dünya arasındaki bu ayrılmaz ilişkinin farkına varmamızı sağlamaktır.

Matematikten duyulan zevk bir şeyi ilk kez keşfetme deneyimine benzer. Çocuksu bir hayranlık ve şaşkınlık insanı sarar. Bu deneyimi bir kez yaşadıktan sonra, bu duyguyu unutamazsınız. Bu duygu, ilk kez mikroskoba bakıp da, daha önce çevrenizde her zaman var olan ama, göremediğimiz şeyleri gördüğünüz anki kadar heyecan verici olabilir.

YAŞAYAN MATEMATİK'i tasarlarken akla hemen belirli başlıklar geliyor, örneğin, matematik ve doğa; matematik ve bilim, matematik ve sanat gibi. Ama matematik ve onun çevremizle ilişkisi belirli hazır kalıplarla kavranamaz. Matematik

ve onunla ilgili olgular birdenbire bir sürpriz gibi ortaya çıkar. Bu nedenle kitabın başlıkları, keşfetmenin özünü korumak amacıyla gelişigüzel düzenlenmiştir. YAŞAYAN MATEMATİK herhangi bir sayfanın açılıp okunabileceği bir kitaptır. Her bölüm, ne kadar büyük ya da küçük olursa olsun, kendi içinde bir bütündür.

Matematığın zevkine varıldıktan sonra onun değeri anlaşılır; bundan sonra da daha çok öğrenme arzusu gelir.

“Matematığın hiçbir dalı yoktur ki, ne kadar soyut olursa olsun, bir gün gerçek dünyada uygulama alanı bulmasın.”

Lobachevsky

Onlu Taban Sisteminin Evrimi

Saymanın eski biçimlerinde basamaklı sayı sistemi¹ yoktu. MÖ 1700'de 60'lı taban bulundu. Mezopotamyalılar, bunu 360 günlük takvimleriyle bağlantılı olarak geliştirdiler ve çok yararlandılar. Bilinen en eski gerçek basamaklı sayı sistemini Babilliler, Sümer 60'lı sayı sisteminden türeterek, geliştirdi. Bu sistemde 0'dan 59'a kadar sayıları yarmak için 60 simge yerine 2 simge kullanıldı; Υ - 1 ve $\angle$ - 10. Bu simgelerle gelişkin matematiksel hesaplamalar yapılabiliyordu; ama, "0" için

- = $\equiv$ Υ Υ 6 7 5 7

Hint (Brahmi) - MÖ yaklaşık 300

1 2 3 4 5 6 7 8 9 .

Hint (Ovaliori) - MS 876

१ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ ०

Hint (Devanagari) - 11. yy

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Bab Arap (Qhabar) - 11. yy

1 2 3 4 5 6 7 8 9 .

Doğu Arap - 1575

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Avrupa - 15. yy

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Avrupa - 16. yy

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Bilgisayar rakamları - 20. yy

1 Basamaklı sayı sisteminde her basamağın yeri onun değerini etkiler. Örneğin, 10'lu taban sisteminde, 375 rakamındaki 3 yalnızca 3 değerinde değil, yüzler basamağında olduğu için aynı zamanda 300 değerindedir.

hiçbir simge bulunamamıştı. "0" ı belirtmek için rakamda bir boşluk bırakılıyordu.

MÖ 300 civarında "0" için bir simge bulundu:  ya da . Bundan sonra 60'lı taban sistemi çok kapsamlı bir biçim de geliştirildi. Milattan sonraki ilk yıllarda, Yunanlılar ve Hintliler 10'lu taban sistemini kullanmaya başladılar; ama basamakları, simgelerle gösteremiyorlardı. Saymak için alfabelerinin ilk 10 harfini kullanıyorlardı. MS 500 yıllarında bir Hintli, 10'lu taban için basamakları simgelerle gösterme yöntemini buldu. 9'dan küçük rakamlar için kullanılan harfler yerine ilk 9 simgeyi kullandı. MS 825 civarında Aral matematikçi Al-Hvorizmi, Hint rakamları hakkında ilginç bir kitap yazdı. 10'lu taban sistemi İspanya'ya II. yy civarında, Ghobar sayılarının bulunduğu dönemde ulaştı. Avrupa kuşkucuydu ve yavaş değişiyordu. 10'lu taban sistemiyle kesirleri göstermenin kolay bir yolu olmadığı için bilginler ve bilimle uğraşanlar, bu sistemi kullanmak istemiyorlardı. Ama, tüccarların hesaplamaları bakımından çok kullanışlı olan bu sistem, onların kullanmaya başlamasıyla yaygınlaştı. Daha sonra, 16. yy'da ondalık kesirler bulundu; 1617'de John Napier ondalık noktayı kullandı.

Belki de bir gün, gereksinimlerimiz ve hesaplama yöntemlerimiz değiştikçe, 10'lu taban sistemimin yerine, yeni bir sistem bulunabilir.

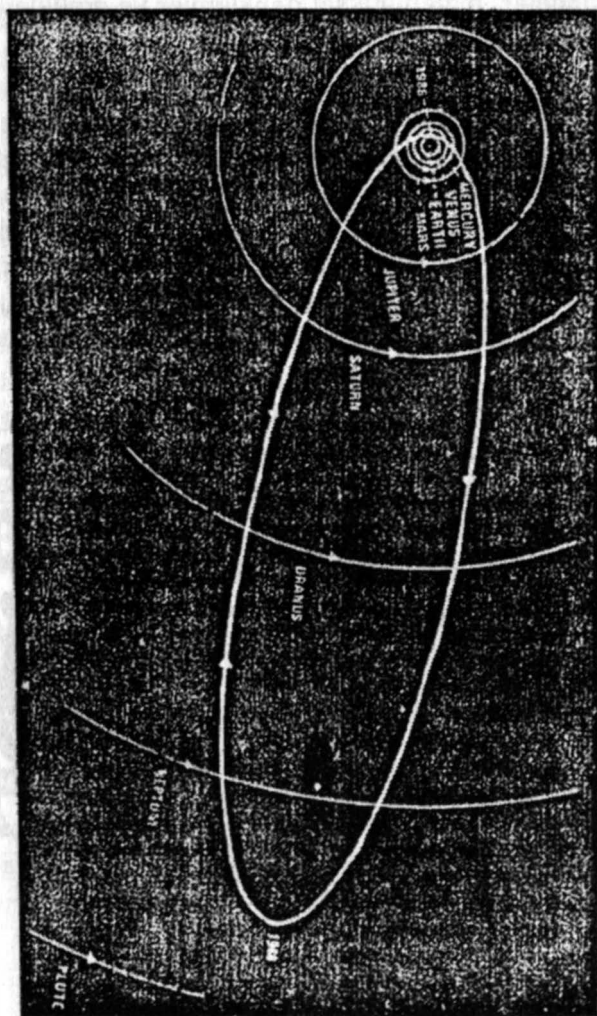
Halley Kuyruklu Yıldızı

Yörüngeler, matematiksel denklemler ve grafiklerle kolayca tanımlanabilen kavramlardır.

Grafikleri incelerken bazen yörüngelerin çevrim ve dönemleri görülebilir. Halley kuyruklu yıldızı örneğinde de böyle olmuştur. 16. yy'a kadar kuyruklu yıldızlar. Kopernik ve Kepler'in Güneş sistemi yasalarına uymayan, açıklanamayan astronomik olgulardı. 1704'te Edmund Halley, hakkında veri bulunan çeşitli kuyruklu yıldızların yörüngeleri üzerinde çalışmaya başladı. En kapsamlı kayıtlardan bazısı 1682'de görülen kuyruklu yıldızla ilişkindi. Halley, bu kuyruklu yıldız ile



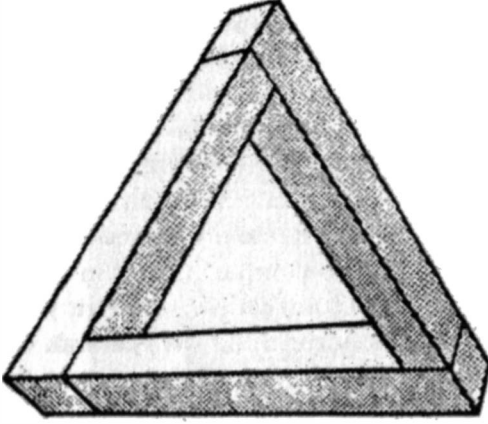
Bir Bayeux duvar halısına işlenen Halley kuyruklu yıldızı.



1456, 1531 ve 1607 yıllarında görülen kuyruklu yıldızların hemen hemen aynı yörüngeyi izlediklerini saptadı. Böylece, Güneş'in çevresini her 7576 yılda bir eliptik bir yörüngede dolanan tek bir kuyruklu yıldız olduğu sonucuna vardı. 1758'de bu kuyruklu yıldızın geri döneceğini başarıyla öngördü; işte bu kuyruklu yıldız Halley'in adı verildi. Yeni araştırmalar Halley kuyruklu yıldızının MÖ 240'ta Çinliler tarafından da gözlemlenmiş olabileceğini göstermektedir. Halley kuyruklu yıldızının her görünüşünde kuyruğu, son görüldüğü 1985-86'da olduğu gibi yavaş yavaş kaybolmaktadır. Kuyruklu yıldızların Güneş'in çevresinde, Güneş'ten 12 ışık yılı uzaklıkta, dairesel yörüngelerde dolanan buzdan küçük gezegenler (asteroid) olduğu düşünülmektedir. Buz ve metal parçalarından oluşan bu küçük gezegenler, Güneş sistemimizin dış kenarlarında, dondurucu soğuklarda, dakikada 3 mil hızla dolanırlar. Güneş'in çevresinde bir kez dolanmaları 30.000.000 yıl alır. Ara sıra yakın yıldızların çekim kuvveti, küçük gezegenleri yavaşlatarak Güneş'e doğru düşmelerine yol açar. Bunun sonucunda, dairesel yörüngeleri, eliptik yörüngeye dönüşürken, buzların bir bölümü de gaz haline gelir. Gazlar ve küçük parçacıklar kuyruklu yıldızın, Güneş rüzgârları nedeniyle her zaman Güneş'ten uzağa yönelen kuyruğunu oluşturur. Güneş, kuyruğu aydınlatır. Eğer Jüpiter ve Satürn'ün çekim kuvveti olmasaydı, kuyruklu yıldız sürekli olarak Güneş'in çevresinde eliptik bir yörüngede dolanacaktı. Kuyruklu yıldız Güneş'in yakınlanna sürüklendikçe, daha çok buz erir ve kuyruğu uzar. Kuyruk, kuyruklu yıldız daha büyük gösterir (sıradan bir kuyruklu yıldızın çapı 10 km'dir). Göktaşları (meteor) kuyruklu yıldızın buz katmanları arasında yolculuklarını sürdürür. Göktaşları, kuyruklu yıldız parçalandıktan sonra yörüngede kalan kalıntılardır. Yörüngeleri Dünya'nın yörüngesiyle çakışınca da meteor yağmuru görülür.

Olanaksız Üçgen

Birçok deseni, resmi herkes tanır ve öylece kabul eder. *British Journal of Psychology*'nin (İngiliz Psikoloji Dergisi) Şubat 1958 sayısında Roger Penrose'un olanaksız üçgeni yayımlandı.



Penrose bunu üç boyutlu, dikdörtgen biçiminde bir yapı olarak tanımlıyordu. Üç dik açının normal görünmesine karşın bu, uzaysal olarak olanaksızdır. Bu üç dik açı bir üçgen oluşturuyor gibi görünür; ama üçgen düzlemseldir (üç boyutlu değildir) ve iç

açıların toplamı 270 değil, 180 derecedir.

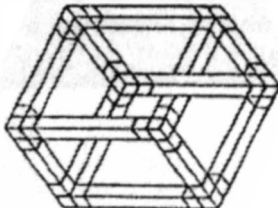


Burgu

Penrose daha sonra "burgu" (twistor) teorisini ortaya attı. Burgular görünmez oldukları halde Penrose, uzay ve zamanın, bunların karşılıklı etkileşimiyle birbiriyle kaynaştığını düşünmektedir.

Hyzer'in görsel aldatmacasının da neden matematiksel olarak olanaksız olduğunu

bulabilir misiniz?



Hyzer'in görsel aldatmacası

Olasılık ve π

π her zaman matematikçiler ile bilim insanlarının merak ve ilgisini uyandırmıştır. π , TV Uzay Yolu dizisinin bir bölümünde şeytansı bir bilgisayarın bozunca, ona karşı yeni bir ilgi dalgası kabarmıştır. π 'nin birçok işlevi vardır: Dairenin çevresinin, çapına oranıdır, aşkın (transandant) bir sayıdır (katsayıları tam sayı olan cebirsel bir denklemin çözümü olamayan sayı).

3.141592653589793238462643
383279502884197169399375
105820974944592307816406
286208998628034825342117
067982148086513282306647
093844609550582231725359
4081284811174502841027 ...

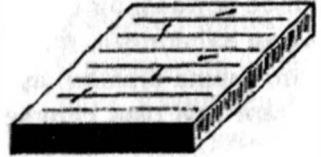
Binlerce yıldır insanlar π 'nin daha çok ondalık basamağını hesaplamaya çalışıyor. Örneğin, Arşimet bir dairenin içine çizdiği çokgenin kenar sayısını artırarak π 'nin $3 \frac{1}{7}$ ile $3 \frac{10}{71}$ arasında olduğunu yaklaşık olarak hesaplamıştı. İncil'de, krallık tarihçelerinde ve tarihsel kayıtlarda π , 3 olarak gösterilir. Bunu Mısırlı matematikçiler yaklaşık 3,16 olarak bulmuştu. MS 150'de Batlamyus, π 'yi 3,1416 olarak hesaplamıştır.

Arşimet'in yaklaşık olarak hesaplama yöntemi sürdürülebilirdi. Ama diferansiyel ve integral hesabın bulunmasından sonra Eski Yunan yöntemi bırakıldı; π 'yi yaklaşık olarak hesaplamak, yakınsak sonsuz seriler, çarpımlar ve sürekli kesirler kullanıldı. Örneğin,

$$\pi = 4 / (1 + 1^2 / (2 + 3^2 / (2 + 5^2 / (2 + 7^2 / (...))))).$$

π 'yi hesaplamak için kullanılan en ilginç yollardan birini 18. yy'da Fransız doğa bilimci Buffon (Kontu), *George Igne Problemi*'nde kullanmıştır. Bir düzlem, aralan d birim olan paralel çizgilerle ayrılmıştır. Uzunluğu d 'den kısa olan bir iğne, bu çizgili yüzeye düşürülür. Eğer iğne bir çizginin üzerine düşerse, iyi atış olarak kabul edilir.

Buffon'nun şaşırtıcı buluşu, iyi atışların, kötü atışlara oranının π 'yi içeren bir açıklamasının olmasıydı. Eğer iğnenin uzunluğu d birimse, iyi atış olasılığı $2/\pi$ 'di. Atış sayısı artı-



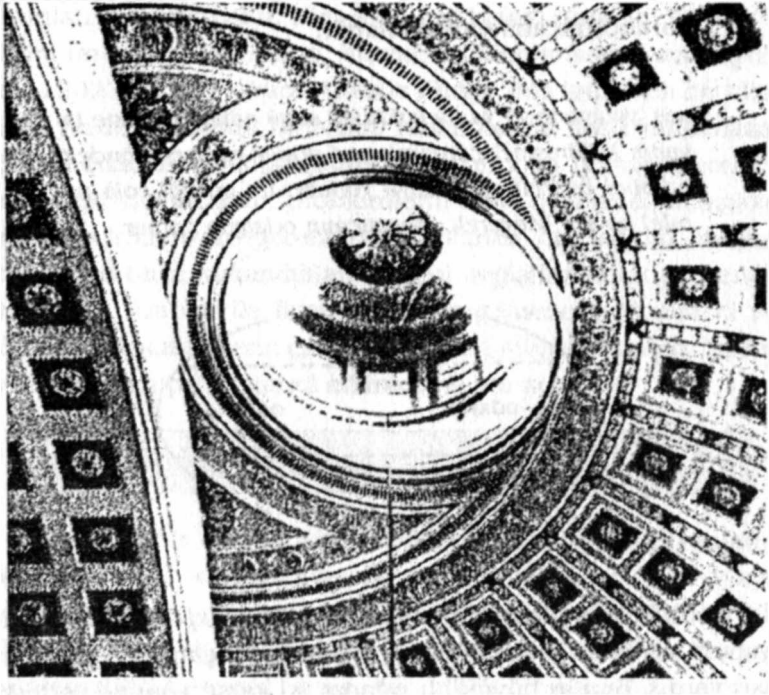
nıldıkça, sonuç π 'ye daha çok yaklaşıyordu. 1901'de İtalyan matematikçi Lazzerini 3.408 atış yaparak π 'nin değerini 3,1415929 olarak hesapladı ki bu 6 ondalık basamağa kadar doğrudu. π 'yi hesaplamak için başka bir olasılık yöntemi 1904'te R. Charles tarafından bulundu. Buna göre, rasgele yazılan iki sayının göreceli asal* olmalarının olasılığı $6/\pi$ 'dir.

π 'nin geometri, olasılık, diferansiyel ve integral hesaplamalarında nasıl değişken bir biçimde kullanıldığını görmek gerçekten de ilginçtir.

* Çev.not: Göreceli asal sayıların 1 dışında ortak bölenleri yoktur. Örneğin, 7 ve 9 , ya da 3, 25 ve 11.

Beyaz Sarayın Parabol Bıçımlı Tavanı

Çağımızın yüksek teknoloji dünyasından bakıldığında, 19. yy'da tasarlanan Beyaz Saray'da elektronik olmayan gizli bir dinleme düzeninin bulunması tuhaf gelebilir. ABD'deki Beyaz Saray'ın planını 1792'de Dr. William Thornton yaptı; yapı 1814'te işgalci İngiliz askerleri tarafından yakıldıktan sonra 1819'da yeniden yapıldı.

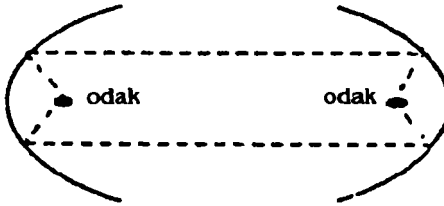


Beyaz Saray'daki Heykelli Salon'un tavanının bugünkü görünümü

Çok büyük bir kubbesi olan salonun güneyinde Heykelli Salon bulunur. 1864'te her eyaletten, ünlü kişilerinden ikisinin heykellerini buraya göndermelerle istenmiştir. Böylece bu tarihten başlayarak, buraya Heykelli Salon adı verilmiştir. Temsilciler Meclisi 1857'ye kadar burada toplanmıştır. Temsilciler Meclisi üyesi olan John Quincy Adams, bu salonun akustik özelliğini keşfetmiştir. Adams, belirli noktalardan, salonun öbür ucundaki konuşmaların duyulabileceğini; aradaki insanların hiçbir şey duymadığını ve onların gürültüsünün, salonun öbür ucundan duyulabilen sesi engellemediğini fark etmiştir. Adams'ın masası *parabol biçimli yansıtıcı tavanın tam odağındaydı*. Böylece o, bir başka odağın yakınında bulunan meclis üyelerinin özel konuşmalarını gizlice dinleyebiliyordu.

Parabol biçimli yansıtıcılarda:

ses, yansıtıcıya (ya da yukarıda sözü edilen ömekte tavanın kubbesine) çarparak geri döner ve karşı yöndeki parabol biçimli yansıtıcıya yönelir, ilk geldiği yola paralel bir yol izleyerek, yansıtıcının odağına çarpar.



California, San Francisco'daki *The Exploratorium* adlı yapıda herkesin kullanımına açık parabol biçimli ses yansıtıcıları vardır. Bunlar büyük bir odanın iki karşıt yönüne yerleştirilmiş ve odakları belirtilmiştir. Bu odalarda duran iki kişi normal bir ses tonuyla birbirleriyle konuşabilir. Ne odada bulunan kişi sayısı, ne de gürültü düzeyi, bu iki kişinin birbirini duymasını engelleyebilir.

Fibonacci Dizisi

Ortaçağın önde gelen matematikçilerinden Fibonacci¹, aritmetik, cebir ve geometriye yaptığı katkılarla tanınır. Pisalı Leonardo Fibonacci (1175-1250) Kuzey Afrika'da Bougie liman kentinde çalışan bir gümrük memurunun oğluydu. Babasının işi nedeniyle yaptığı yolculuklarda doğu ve Arap kentlerini tanıyan Fibonacci, buralarda basamaklı sayı sistemi ve sıfır için bir simgenin kullanıldığı Hint-Arap ondalık sistemiyle tanıştı. Bu dönemde İtalya'da hesaplama işlerinde Romen rakamları kullanılıyordu. Hint-Arap sayılarının değerini ve güzelliğini fark eden Fibonacci, bunların kullanılmasını savunuyordu. 1202'de *Liber Abaci* (Abaküs Kitabı) adlı kapsamlı bir elkitabı yazdı; kitabında Hint-Arap rakamlarının nasıl kullanılacağını, bunlarla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin nasıl yapılacağını, problemlerin nasıl çözüleceğini açıkladı. Ayrıca cebir ve geometri sorunlarına da değindi. İtalyan tüccarları önce kullandıkları sistemi değiştirmemekte direndiler; ama, Araplar ile ticari ilişkilerin gelişmesi, Fibonacci ve öbür matematikçilerin çalışmaları, Hint-Arap sisteminin, yavaş da olsa, Avrupa'da kabul edilmesine yol açtı.

Fibonacci dizisi 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,...

İlginç bir rastlantıyla Fibonacci'ye ününü sağlayan sayı dizisi *Liber Abaci*'de sıradan bir problemin çözümünde ortaya çıkmıştır. Oysa bu problem, yazıldığı dönemde zihinsel bir jimnastik olarak algılanmıştı. Daha sonra 19. yy'da Fransız matematikçi Edouard Lucas, dört ciltlik bir eğlenceli matematik kitap dizisi hazırlarken *Liber Abaci*'deki problemin çözümünde görülen diziye Fibonacci'nin adını verdi. Fibonacci dizisini yaratan *Liber Abaci*'deki problem şöyleydi:

1 Fibonacci, Bonacci'nin oğlu demektir.

1) Bir aylık bir çift (dişi ve erkek) tavşan var. Bunlar ancak iki aylık olduklarında, yavru lamaya başlayabilir. Bu tavşan çiftin iki aylık olduktan sonra, her ay yeni bir çift (dişi ve erkek) tavşanın doğduğunu varsayalım.

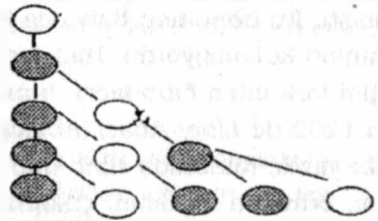
2) Eğer dünyaya gelen her yeni çift de yukarıda belirtildiği gibi yavrulursa, her ayın başında kaç çift tavşan olur?

● = üremeye başlayabilecek olgunluğa erişen çift

○ = üremek için henüz çok genç olan çift

çift sayısı

- 1 = F1 = 1. Fib. sayısı
- 1 = F2 = 2. Fib. sayısı
- 2 = F3 = 3. Fib. sayısı
- 3 = F4 = 4. Fib. sayısı
- 5 = F5 = 5. Fib. sayısı



Fibonacci dizisindeki her sayı, kendisinden önceki iki sayının toplamına eşittir ve şu formülle gösterilir:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

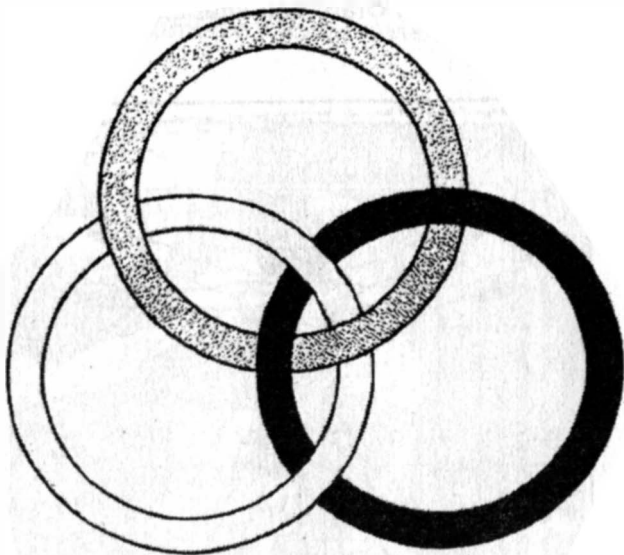
Fibonacci, bu diziye inceleyip, ona özel bir önem vermemişti. Bu dizi 19. yy'da matematikçilerin ilgisini çekince, özellikleri ve hangi alanlarda ortaya çıktığı araştırıldı.

Fibonacci dizisinin görüldüğü alanlar şunlardır:

- I. Pascal üçgeni, ikiterimli (binom) teoremi, olasılık teorisi
- II. Altın oran ve altın "dörtgen"
- III. Doğa ve bitkiler
- IV. İlgili çekici matematiksel hileler
- V. Matematiksel eşitlikler

Üçlü Halkalar Topolojik Bir Model

Bir halka çıkarıldığında ne olur?

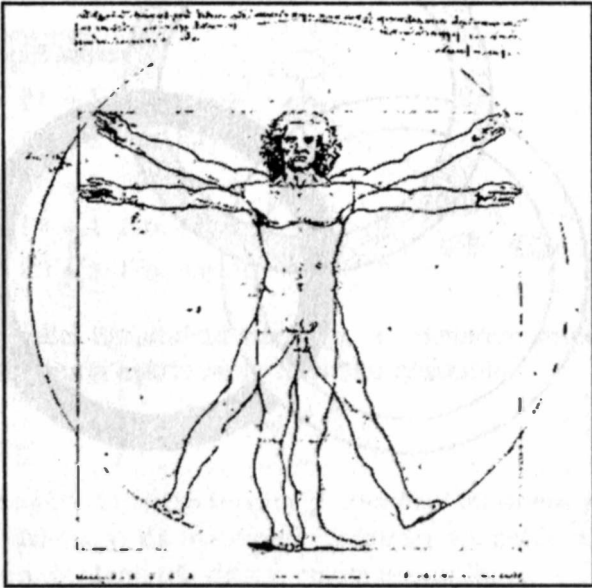


Herhangi iki halka birbirine bağlı mıdır?

Üç halka birbirine bağlı mıdır?

İnsan Vücudu ve Altın Oran

Leonardo da Vinci insan vücudunun oranlarını incelemiştir. Aşağıdaki çiziminde altın oran¹ görülmektedir. Bu çizim matematikçi Luca Pacioli'nin 1509'da yayımlanan *De Divina Proportionone* (Kutsal Oran) adlı kitabında yer almıştır.



- 1 Altın oran'a altın kesit, altın ortalama, altın orantı da denir. Aşağıda görüldüğü gibi, belirli bir doğru parçasının geometrik ortalamasıdır. B noktası, AC doğru parçasını

$$(|AC| / |AB|) = (|AB| / |BC|)$$

olacak şekilde ayır. Altın oranın

değeri şöyle belirlenir: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1,6$

A B C

Leonardo da Vinci'nin 1483 civarında yaptığı ama bitiremediği *Aziz Jerome* adlı yapıtında da altın orana rastlanır. Resimde görüldüğü gibi Jerome'nin vücudu tam altın "dörtgen" içinde kalır. Bunun bir rastlantı olmadığına, Leonardo'nun bilerek resmini altın orana uygun yaptığına inanılmaktadır. Çünkü o, pek çok yapıtında ve düşüncelerinde matematiğe ve uygulamalarna yoğun bir ilgi göstermiştir. Leonardo'nun deyişiyle "... Matematiksel açıklamalar ve yöntemler kullanılmadan yapılan hiçbir araştırmaya bilimsel denemez."



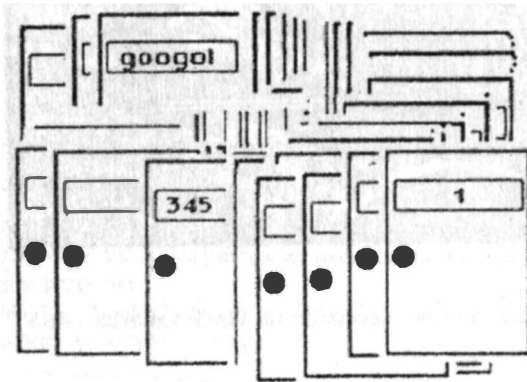
Aziz Jerome. Leonardo da Vinci. yaklaşık 1483

Sonsuzluk Oteli

Sonsuzluk Oteli'nde danışma görevlisi olabilmek için gereken niteliklerden biri de sonsuzlukla ilgili bilgileri kavramış olmaktır. Paul bu işe başvurdu, mülakattan geçerek ertesi akşam çalışmaya başladı. Paul, niye otelde çalışan tüm görevlilerin sonsuzluk, sonsuz kümeler ve sonluötesi (transfinite) sayıları bilmeleri gerektiğini düşündü. Otelin sonsuz sayıda odası olduğu için, müşterilere oda bulmanın sorun olmaması gerekiyordu. İşteki ilk gecesinden sonra, sonsuzluk hakkında bilgisi olduğu için sevindi.

Gündüz çalışan danışma görevlisi, görevi ona devrederken, otelin sonsuz sayıda odasının dolu olduğunu söyledi. O gittikten sonra, yer ayırmış olan yeni bir müşteri geldi. Paul'un müşteriye hangi odayı vereceğine karar vermesi gerekiyordu. Biraz düşündükten sonra, her müşteriyi bir büyük numaralı odaya kaydirdi, böylece 1 numaralı oda boşaldı. Paul tam çözümünden hoşnut olmaya başlıyordu ki, sonsuz sayıda müşteriyi le dolu bir otobüs geldi. Onları odalara nasıl yerleştirebilirdi?

bkz. çözümler



Bir sonsuzluk oteli düşüncesi ilk kez Alman matematikçi David Hilbert'in (1862-1943) aklına geldi.

Pascal Üçgeni, Fibonacci Dizisi ve İkiterimli Teoremi

Ünlü Fransız matematikçi Blaise Pascal (1623-1662), dini inançlar, kötü sağlığı, matematiksel bir konu üzerinde yoğun çalışma isteksizliği olmasaydı, en büyük matematikçilerden biri olabilirdi. Babası oğlunun da kendisi gibi matematiğe yoğun ilgi duymasından korkuyor, çok yönlü bir eğitim almasını istiyordu. Başka ilgi alanları geliştirebilmesi, matematik okumaması için elinden geleni yaptı. Ama Pascal'ın 12 yaşında geometride üstün yetenek göstermesinden sonra, matematiğe eğilimini destekledi. Çok yetenekli olan Pascal 16 yaşında, koniklerle ilgili olarak yazdığı makalesiyle matematikçileri hayretler içinde bıraktı. Bu makalesinde, sonradan Pascal teoremi olarak adlandırılacak teorem de vardı. Burada, *bir koninin içine çizilen altıgenin karşıt kenarlarının, aynı doğru üzerinde bulunan üç noktada kesiştiği* belirtiliyordu. 18 yaşındayken ilk hesap makinelerinden birini buldu. Bu sırada sağlığı kötüleşti ve matematik çalışmayı bırakacağına dair tannya yemin etti. Ama üç yıl sonra Pascal üçgeni ve özellikleri hakkındaki çalışmasını kaleme aldı. 23 Kasım 1654 gecesi yaşadığı dinsel bir bunalım sonucunda yaşamını dine adayan Pascal, matematik ve bilimle uğraşmayı bıraktı. 1658-1659 arasındaki kısa bir dönem dışında, bir daha hiç matematikle uğraşmadı.

Matematigin, birbiriyle ilgisiz gibi görünen düşünceleri ilişkilendirmek için belli yöntemleri vardır. Pascal üçgeni, Fibonacci dizisi ve Newton'un ikiterimli (binom) teoreminin hepsi birbiriyle ilişkilidir. Şekilde bunların bazı ilişkileri gösterilmiştir.

Pascal üçgeninde, çapraz sıralardaki sayıların toplamının Fibonacci dizisini oluşturur. Pascal üçgeninin her satırı, $(a+b)$ ikiterimlisinin belirli üslerinin açılımındaki katsayıları gösterir.

Örneğin,

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$

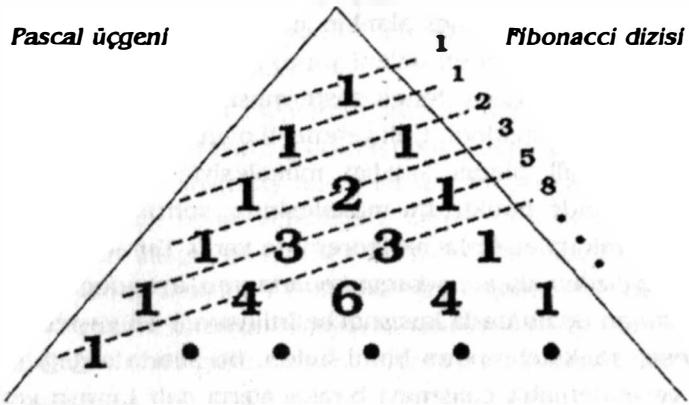
$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

Pascal üçgeni

Fibonacci dizisi

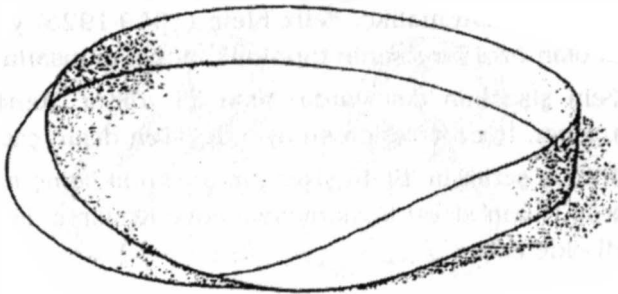


Möbius Şeridi ve Klein Şişesi

Topoloji uzmanları birtakım büyüleyici nesneler yaratırlar. Alman matematikçi Augustos Moebius'un (1790-1868) yarattığı Möbius şeridi bunlardan biridir.

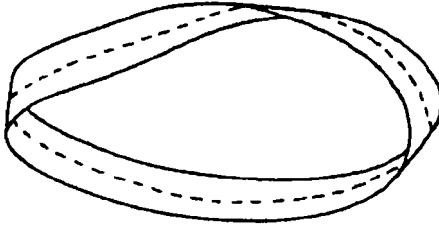


Yukandaki şekilde, bir kâğıt şeridin uçları birbirine yapıştırılarak bant haline getirilmiştir. Kâğıdın bir yüzü bantın içinde, diğer yüzü ise dışında kalır. Bantın dışından yürümeye başlayan bir örümceğin, içe geçmesi için, bir biçimde şeridin kenarını aşması gerekir.



Bu şekilde, bir kâğıt şeridin, bir ucunun yarım derece (180 derece) döndürülerek, öbür uca yapıştırılmasıyla elde edilen Möbius şeridi gösterilmektedir. Artık kâğıt şeridin iki

yüzü değil, tek yüzü vardır. Möbius şeridinin üzerinde ilerleyen bir örümcek, hiçbir kenardan geçmeden tüm şeridi katedebilir. Bunu kanıtlamak için bir kalem alıp, şerit boyunca ortadan bir çizgi çizin. Kalemınızı kaldırmadan bütün şeridi geçip başlangıç noktasına döndüğünüzü göreceksiniz.



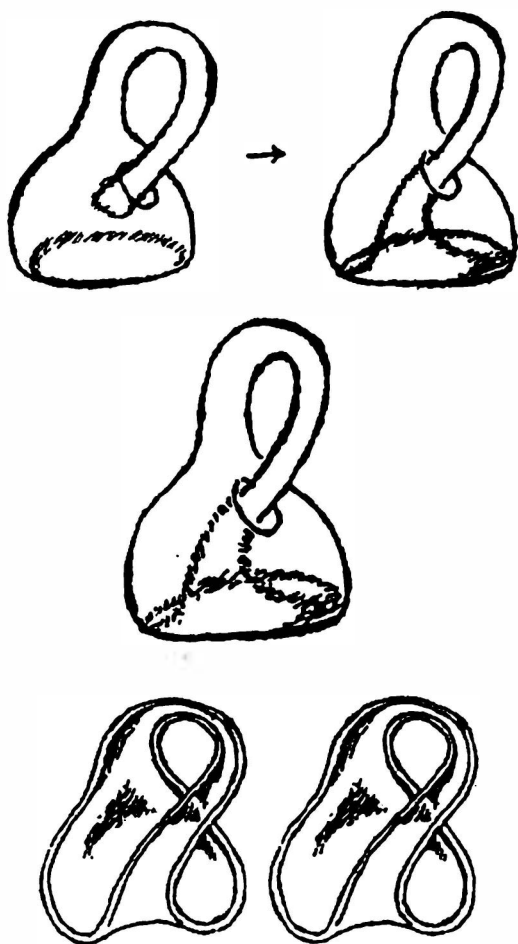
Möbius şeridinin bir başka özelliğini keşfetmek için ortasından çizdiğiniz çizgi boyunca kesmeyi deneyin.

Otomobillerin vantilatör kayışları ya da başka mekanik aletlerin kayışları olarak kullanılan Möbius şeritleri, eski tip kayışlarla karşılaştırıldığında, daha düzgün bir biçimde yıprandıkları için sanayiye de yakından ilgilendirmektedir.

Möbius şeridi kadar ilginç başka bir nesne de Klein şişesidir. Alman matematikçi Felix Klein (1849-1925) yalnızca tek yüzü olan özel bir şişenin topolojik modelini tasarlamıştır.

Klein şişesinin dışı vardır; ama içi yoktur. Kendisinin içinden geçer. İçine dökülen su aynı delikten dışarı çıkar.

Möbius şeridi ile Klein şişesinin arasında ilginç bir bağlantı vardır. Klein şişesi boylamasına ikiye kesilirse, iki Möbius şeridi elde edilir!



Matematik ve Kâğıt Katlama

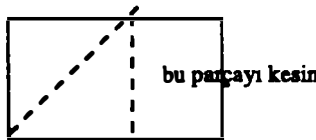
Çoğumuz geçmişte bir kâğıdı katlayıp, sonra bir kenara atmıştır; ama, herhalde az sayıda kişi matematiksel düşünceleri geliştirmek amacıyla kâğıt katlamıştır. Kâğıt katlamak hem öğretici, hem de eğlendirici olabilir. Lewis Carroll* bile kâğıt katlamaya çok meraklıydı. Kâğıt katlama birçok uygarlıkta görülür; ama, bunu "origami" denen sanat haline getiren ve yaygınlaştıran, Japonlar'dır.

Kâğıt katlamanın bazı matematiksel yönleri

Kâğıt katlarken, doğal olarak, birçok geometrik kavram ortaya çıkar. Bunlardan bazıları şunlardır: kare, dikdörtgen, dik üçgen, eşleşim (benzerlik, eş olma durumu), köşegen, orta nokta, kiriş, alan, yamuk, orta dikme, Pisagor teoremi, geometri ve cebirle ilgili kavramlar.

İşte, bu kavramların kullanımını gösteren bazı kâğıt katlama biçimleri:

- 1) *Dikdörtgen biçimli bir kâğıttan kare oluşturalım.*

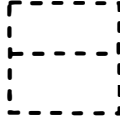


- 2) *Kare biçimli kâğıttan 4 eş dik üçgen oluşturalım.*



* Çev. not: Bu kitapta hakkında yazı olan matematikçi Lewis Carroll, *Alis Harikalar Diyarında* kitabının da yazarıdır.

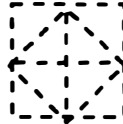
3) Karenin bir kenarının orta noktasını bulalım.



4) Kare biçimli bir kâğıdın içinde (kiriş olacak biçimde) kare oluşturalım.



ya da

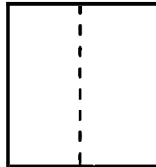


5) Kâğıdın kat yerlerini inceleyince, içteki karenin alanının dıştaki karenin alanının yansı kadar olduğunu fark edeceksiniz.

6) Kare biçimli bir kâğıt alarak, kat yeri merkezden geçecek şekilde katlayarak iki eş *yamuk* oluşturalım.

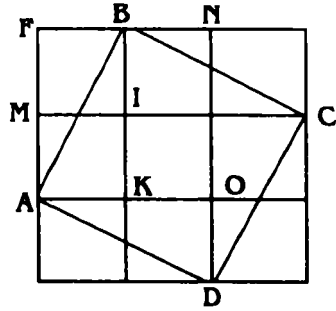


7) Kareyi ortadan ikiye katlayınca oluşan kat yeri, karenin bir kenarının *orta dikmesini* oluşturur.



8) *Pisagor teoremini* gösterin. Kare biçimli kâğıdı, şekilde gösterildiği gibi katlayın.

c^2 = ABCD karesinin alanı
 a^2 = FBIM karesinin alanı
 b^2 = AFNO karesinin alanı

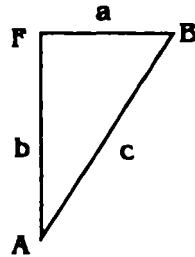


Eş şekilleri karşılaştırsak, FBIM karesinin alanı = Δ ABK üçgeninin alanı

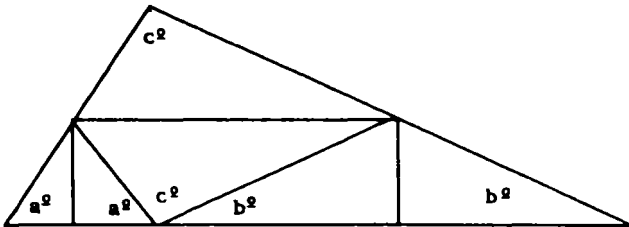
ve

AFNO karesinin alanı = BCDK'nın alanı (ABCD karesinin geriye kalan alanı).

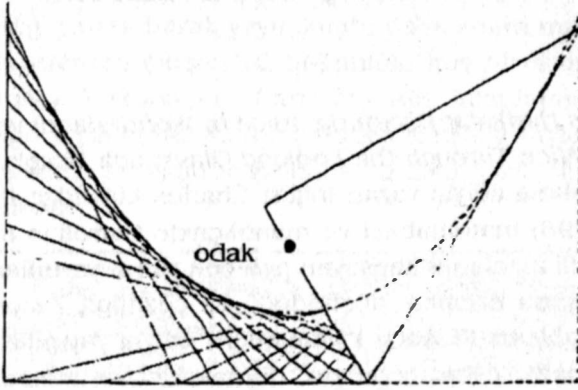
Sonuçta, $a^2 + b^2 = c^2$ çıkar.



9) Herhangi bir üçgen alıp, kesik çizgilerden şekildeki gibi katlayarak bir üçgenin iç açılarının toplamının 180 derece olduğunu belirten teoremi açıklayın.



$a^2 + c^2 + b^2 = 180^2$ bu açılar bir doğru oluşturur.



10) *Teget doğruları* katlayarak bir *parabol* yapalım.

Yöntem

Parabolün odağını bir sayfanın kenarından birkaç cm uzağa yerleştirin. Kâğıdı şekilde gösterildiği gibi 20-30 kere katlayın. Bu kat izleri parabolün tegetleridir ve parabolü belirler.

Matematikçi Lewis Carroll

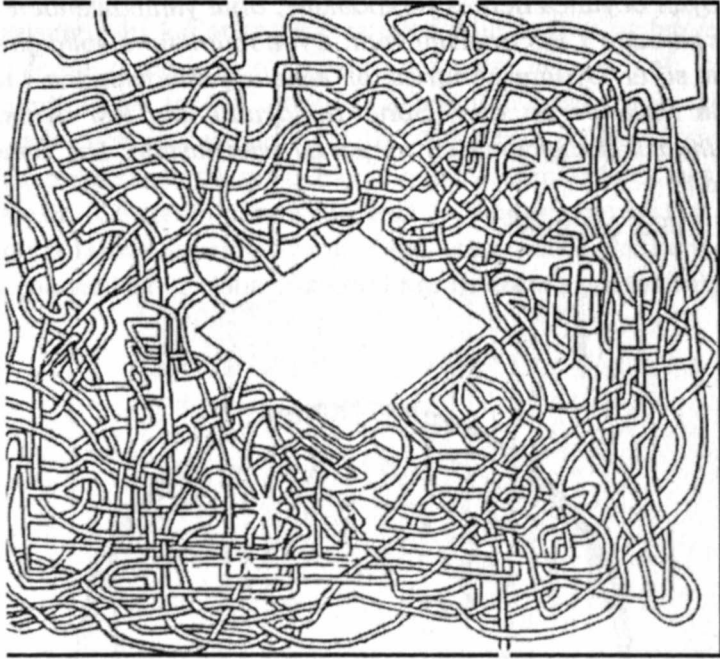
Alis Harikalar Diyarında (Alice in Wonderland) ve *Tılsımlı Ayna (Alice Through the Looking Glass)* adlı kitapları Lewis Carroll takma adıyla yazan İngiliz Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898) matematikçi ve mantıkçıydı. Carroll'ın matematiğin çeşitli alanlarını kapsayan pek çok yazısı yayımlandı. Geceleri uykusu kaçınca, düşündüğü ve çözdüğü 72 problemi *Pillow Problems* (Başucu Problemleri) adıyla yayımlayan Carroll, aritmetik, cebir, geometri, diferansiyel ve integral hesap ve aşkın (transandant) olasılık hesapları üzerinde çalıştı.



“Aksine” diye devam etti Tweedledee, “eğer öyle olsaydı, öyle olabilirdi; ve eğer öyleydiyse, öyle olacaktı; ama öyle olmadığına göre, öyle değil. İşte bu mantıktır.”

Lewis Carroll

A Tangled Tale (Karmaşık Bir Öykü) adlı yapıtı önce aylık bir dergi yazısı olarak yayımlandı; daha sonra matematiksel bilmecelerden oluşan 10 bölümlük, hoş bir kitap ortaya çıktı. Kraliçe Victoria'nın, Carroll'ın *Alis* kitaplarından çok hoşlandığı ve çıkan her kitabını hemen aldırıldığı söylenir. Kraliçe, karşısında bir yığın matematik kitabını görünce, çok şaşırmış olmalı!



Bu labirenti Lewis Carroll 20 yaşındayken çizmiştir. Labirentteki yollar birbirinin altından ve üstünden geçer. Amaç, merkezden çıkan yolu bulmaktır.

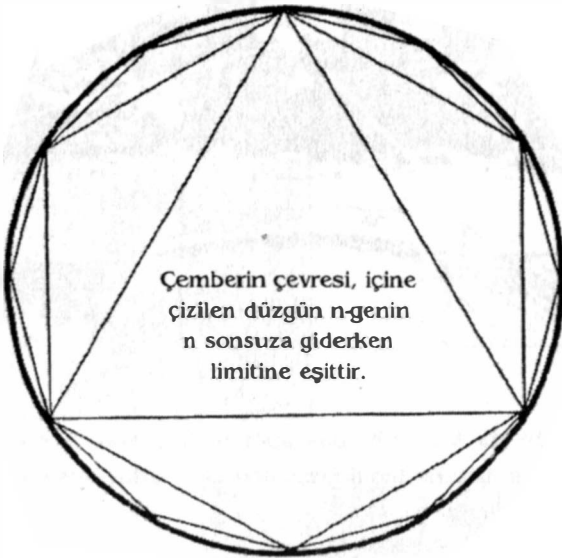
Bağucu Problemlerinin 8. problemi:

“Çember biçiminde oturan insanların her birinin yanında iki kişi olur. Herkesin bir miktar parası vardır. Birinci kişinin, ikinciden 1 lira fazla; ikincinin ise üçüncüden 1 lira fazla parası vardır. Bu kural oyuna katılan bütün kişiler için geçerlidir. Birinci, ikinciye 1 lira verir; ikinci, üçüncüye 2 lira verir; ve oyun boyunca herkes yanındakine, öbür yanındakinden aldığı paradan 1 lira fazlasını verir. Oyun mümkün olabildiğince uzun sürer. Oyunun sonunda, bir kişinin, yanındakinden 4 kat daha fazla parası olur. Soru: Bu oyunu kaç kişi oynadı? Oyunun başlangıcında en az parası olan kişinin, kaç parası vardı?”

bkz. çözümler.

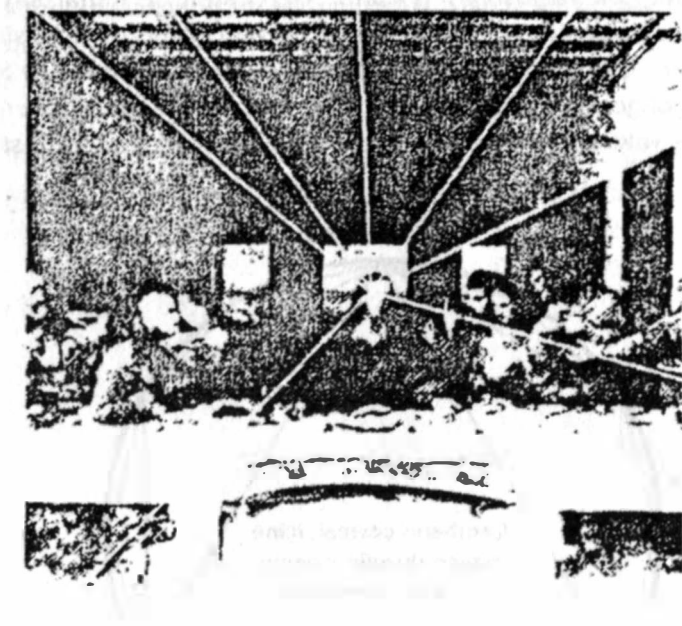
Sonsuzluk ve Çember

Her çemberin, sonlu bir miktarın uzunluğunu gösteren, sabit bir çevresi vardır. Çemberin çevresinin formülünü çıkarmanın bir yolu, sonsuzluk kavramını kullanmaktır. İç içe çizilmiş düzgün çokgenlerin çevrelerini inceleyelim. (Düzgün bir çokgenin tüm kenarları eşit uzunluktadır ve tüm açıları eşittir.) İç içe çizilmiş her çokgenin çevresini hesaplırsak, çokgenlerin kenar sayıları arttıkça, çevrelerinin çemberin çevresine daha çok yaklaştığını görürüz. Gerçekten de kenar sayısı sonsuza yaklaştıkça, çokgenin çevresi de çemberin çevresine yaklaşır. (Çokgenin çevresinin limiti çemberin çevresidir.) Şekilde çokgenin kenar sayısı arttıkça, kenarlarının çembere daha çok yaklaştığı, daha çok çembere benzediği gösterilmiştir.



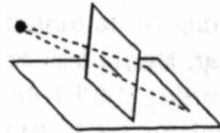
Sanat ve İzdüşümsel Geometri

Yüzyıllar boyunca matematik, sanatı ve sanatçıları etkilemiştir. İzdüşümsel geometri, altın oran, boyutlar, oranlar, görsel yanılsamalar, simetriler, geometrik biçimler, desenler, modeller sonluluk, sonsuzluk ve bilgisayar uygulamaları, matematiğin değişik dönemlerde, değişik sanat akımlarını (ilkel, klasik, Rönesans ve modern sanat) etkileyen bazı alanlardır.



Leonardo da Vinci'nin başyapıtlarından *Son Akşam Yemeği*'ndeki birbirinin üstüne bindirilmiş doğrular, izdüşümsel geometriyi kullandığını gösterir.

Bir ressam iki boyutlu bir tuvale, üç boyutlu bir manzaraı resmederken, değişik uzaklıklardan ve konumlardan resmin öğelerinin nasıl deęiőeceęine karar vermelidir. İşte, tam da bu konuda, izdüşümsel geometri Rönesans sanatını büyük ölçüde etkilemiştir. İzdüşümsel geometri, biçimlerin izdüşümlerinin özellikleri ve uzaysal ilişkileri ile uğraşan, matematiğin bir alanıdır; dolayısıyla perspektif sorunlarını da içerir. Rönesans ressamları, üç boyutlu gibi görünen resimlerini yaratırken, şimdi genel kabul gören izdüşümsel geometri kavramlarını kullanmışlardır. Bunlar, izdüşüm noktası, paralel yakınsak (yakınlaőan) doğrular ve yok oluş noktasıdır. İzdüşümsel geometri, gelişen ilk Öklit dışı geometrilerden biridir. Sanatçılar gerçeği betimlemek istiyordu. Onlar, bir manzaraya pencerenin tek bir merkezi noktasından baktıklarında, gördüklerini çeşitli bakış açıları noktaları olarak pencereye yansıtabileceklerini düşünüyordardı. Böylece, pencere tuval yerine geçebilirdi. Ressamların pencereyi gerçek bir tuval gibi kullanabilmeleri için çeşitli düzenekler geliştirildi. Albrecht Dürer'in yaptığı bu tahta oyma baskılarda böyle iki düzenek görölmektedir. Sanatçının gözünün sabit bir noktada olduğuna dikkat edin.

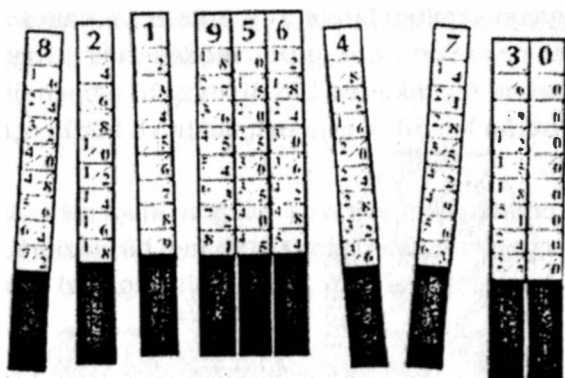


Napier Kemikleri

Karışık sayılarla uğraşmak, özellikle astronomiye ilişkin hesaplamalar yapan bilim insanları, denizcilik sorunlarının uygulamalarıyla ilgilenenler ve tüccarlar için gitgide daha usandırıncı olmuştu. 17. yy'da ünlü İskoç matematikçi John Napier (1550-1617) logaritmayı (karmaşık sayılarla çarpma ve bölme yaparken, üsleri kullanarak, bu işlemleri toplama ya da çıkarmaya dönüştürme yöntemi)¹ bularak hesaplamada devrim yarattı. Napier'nin logaritmalan ve kendi geliştirdiği tablolarıyla bulduğu hesaplama yöntemi, çarpma, bölme, üsler, kök bulma gibi karışık işlemleri kolaylaştırdı. Logaritmik ve üstel (exponential) fonksiyonlar teorisi matematiğin önemli alanlarından biri olmasına rağmen, modern elektronik hesap makineleri ve bilgisayarların bulunmasıyla logaritma tabloları, sığulü hesap cetveli gibi kullanılmaz oldu. Ama, bu tabloları ve kestirme yolları yüzyıllar boyunca matematikçiler, muhasebeciler, denizciler, astronomlar ve bilim insanları kullandılar.

Napier, tüccarların hesaplamalarını kolaylaştırmak için, logaritmalan kullanarak, üzerinde rakamlar yazılı olan ve genellikle kemikten yapıldıkları için *Napier kemikleri* olarak bilinen çubukları yaptı. Bundan sonra tüccarlar, çarpma, bölme, karekök ve küpkök alma işlemlerini yapabilmek için yanlarında fildişi ya da tahtadan yapılmış çubuk takımını taşımaya başladılar. Her çubuk en üstündeki sayının çarpım tablosunu gösteriyordu. 298'i 7 ile çarpmak için 2, 9 ve 8 çubukları yan yana sıralanır ve 7. sıradaki sayılar, şekilde gösterildiği gibi toplanırdı.

1 Örneğin, $3600/0,072$ işlemini yapmak için bu sayılar logaritma tabloları kullanılarak üstel (ya da logaritmik) hale getirilir. Aynı tabandan üstel sayılar biçiminde yazılan sayıları bölmek için üslerini çıkarmak yeterlidir. Yani 3600 ve 0,072 için iki logaritmik sayı birbirinden çıkarılır ve sonuç logaritma tabloları kullanılarak yeniden 10^4 'lu tabana çevrilir.



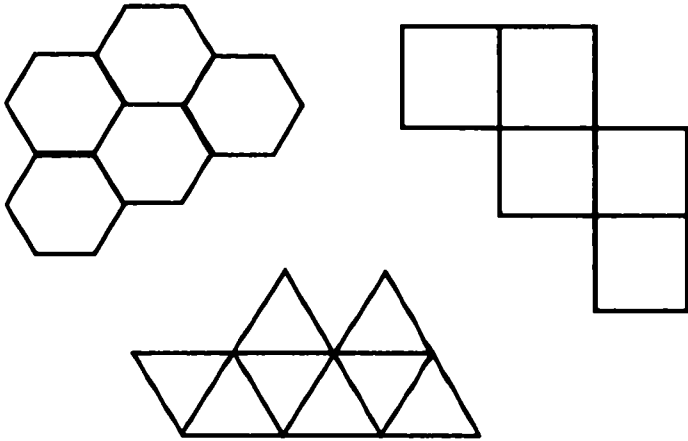
2	9	8
4	1	1
6	8	6
2	7	4
3	3	3
8	6	2
1	4	4
0	5	0
1	5	4
2	4	8
1	6	5
4	3	6
1	7	6
6	2	4
1	8	7
8	1	6

$$\begin{array}{r}
 298 \\
 \times 7 \\
 \hline
 2086
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \longrightarrow \\
 + \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 165 \\
 436 \\
 \hline
 2086
 \end{array}$$

Doğadaki Altıgenler

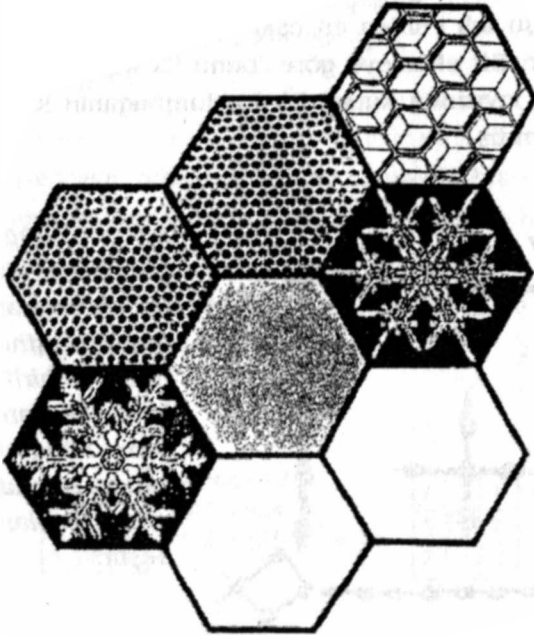
Doğanın yarattığı birçok şey, kareler ve daireler gibi matematiksel nesnelerin çok güzel modelleridir. Doğada bulunan geometrik biçimlerden biri de düzgün altıgendir. Düzgün altıgenin bütün kenarları aynı uzunlukta ve bütün açılan birbirine eşittir.

Matematikçiler, yalnızca düzgün altıgenler, kareler ve eşkenar üçgenlerle, istediğimiz herhangi bir düzlemi, hiç boşluk kalmaksızın, mozaik gibi kaplayabileceğimizi göstermiştir.



Alanları eşit olan bu üç biçimden en küçük çevreye sahip olanı altıgendir. Bal petegini altıgenlerden oluşturan arı, daha az balmumu kullanır ve daha az iş yapmış olur. Altıgen biçime, bal peteklerinde, kar tanelerinde, moleküllerde, kristallerde, denizaltındaki yaşamda ve birçok başka alanda rastlanır.

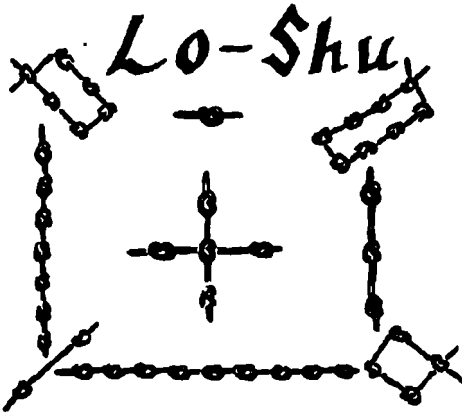
Kar yağarken çok değişik geometrik biçimlerin ortasında yürürüz. Kar kristali, doğadaki altıgen simetrisinin en güzel örneklerinden biridir. Her kar kristalindeki altıgenlerin oluşumunu görebiliriz. Sonsuz sayı ve bileşimdeki altıgen biçimler nedeniyle iki kar kristalinin Hiçbir zaman aynı olmadığına ilişkin yaygın bir kanı vardır.¹



1 Boulder, Colorado'daki Ulusal Atmosfer Araştırmaları Merkezi'nden Nancy C. Knight 1 Kasım 1986'da ilk kez birbirinin aynı olan bir çift kar kristaline rastladı.

Sihirli Kareler

Sihirli kareler yüzyıllardır insanların ilgisini çekmiştir. Eski zamanlardan beri bunların, doğaüstü ve büyülü bir dünyayla ilgili oldukları düşünülmüştür. Sihirli karelere eski Asya kentlerindeki arkeolojik kazılarda rastlanmıştır. Sihirli karelere ilişkin lo-şu adı verilen en eski belge MÖ 2200'de Çin'de bulunmuştur. Bir efsaneye göre, bunu ilk kez İmparator Yu, Sarı Irmağın kıyısında kutsal bir kaplumbaganın kabuğunun üzerinde görmüş.



Siyah düğümler çift, beyaz düğümler tek sayıları gösterir. Bu sihirli karenin "sihirli" toplamı (herhangi bir satır, sütun ya da çapraz sıradaki sayıların toplamı) on beştir.

Batıda sihirli karelerden ilk kez MS 130'da İzmirli Theon'un yapıtında söz edilir. 9. yy'da ise Arap astrologlar horoskop (gök haritası) çizim ve hesaplarında sihirli kareleri kullanıyorlardı. MS 1300'de Eski Yunanlı matematikçi Moschopoulos'un çalışmalarıyla batı dünyası da sihirli kareler ve özellikleriyle tanıştı; özellikle Rönesans döneminde bu konuya ilgi arttı.

Sihirli Karelerin Bazı Özellikleri

Sihirli karenin "derecesi", satır ya da sütun sayısı olarak tanımlanır. Örneğin, bu sihirli karenin derecesi 3'tür, çünkü 3 satır vardır.

16	2	12
6	10	14
8	18	4

Sihirli kareyi, sihirli kare yapan, sahip olduğu şaşırtıcı özelliklerdir. İşte, bunlardan bazıları:

1) Her satır, sütun ve her iki çaprazda bulunan sayıların toplamı aynıdır. Bu sihirli toplam, şu yollardan biriyle bulunur:

- a) Sihirli karenin derecesi olarak " n "'i alıp $1/2 (n(n^2+1))$ 'in değerini bulun. Sihirli kare 1, 2, 3,... n^2 doğal sayılarından oluşmuştur.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

derecesi 3
sihirli sayı =
 $1/2(3(3^2+1)) = 15$

1	2	5
4	8	6
7	8	9

- b) Herhangi boydaki bir sihirli kareyi alıp, sol üst köşeden başlayarak tüm sayıları sırasıyla, her satıra yerleştirin. Karenin herhangi bir çaprazındaki sayıların toplamı sihirli sayıyı verir.

2) Merkezden eşit uzaklıkta bulunan herhangi iki sayı (aynı satır, sütun ya da çaprazdaki) birbirini tamamlar. Toplamları sihirli karedeki en küçük ve en büyük sayının toplamına eşit olan iki sayı birbirini tamamlar.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Bu sihirli karede birbirini tamamlayan sayılar:
8 ve 2; 6 ve 4; 3 ve 7; 1 ve 9'dur.

Bir Sihirli Kareyi Başka Bir Sihirli

Kareye Dönüştürme Yolları

3) Herhangi bir sayı, sihirli karedeki bütün sayılara eklenir ya da bütün sayılarla çarpılırsa, yine sihirli kare elde edilir.

4) Eğer merkezden eşit uzaklıkta bulunan iki satır ya da sütunun yerleri değiştirilirse, oluşan kare sihirli karedir.

5) a) Çift dereceli sihirli karedeki çeyreklik bölümlerin yeri değiştirilirse sonuç, bir sihirli karedir.



çeyrek sihirli karenin
dörtte birlik bölümüdür.

b) Tek dereceli sihirli karede, yaklaşık olarak çeyreklik bölümlerin ve satırların yerleri değiştirilirse, sonuç yine bir sihirli karedir.

Matematiksel eğlencelerden en çok sihirli kareler hakkında yazı yazılmıştır. Benjamin Franklin zamanının önemli bir bölümünü sihirli kareler oluşturmak için yöntemler tasarlayarak geçirmişti. İlk 25 sayma sayısını 5 x 5'lik bir sihirli kare oluşturacak şekilde düzenlemek oldukça zevklidir. Tek sayıda satır ya da sütunu olan sihirli karelere tek dereceli, çift sayıda satır ya da sütunu olanlara çift dereceli sihirli kare denir. Herhangi bir büyüklükte çift dereceli sihirli kareler yapmak için kullanılacak genel bir yöntem henüz bulunamamıştır. Öte yandan, herhangi büyüklükte tek dereceli bir sihirli ka-

re yapımında kullanılabilecek birçok genel yöntem vardır. En tanınmışlarından biri La Loubere'in bulduğu basamak yöntemidir. Şekillerde bu yöntemle yapılan 3x3'lük sihirli kare gösterilmiştir.

BASAMAK YÖNTEMİ
3x3'lük sihirli kare için

1. ADIM

	1	
		2

2. ADIM

	1	
5		
		2

3. ADIM

	1	
3		
4		2

4. ADIM

	1	
3	5	
4		2

5. ADIM

	1	6
3	5	
4		2

6. ADIM

8	1	6
3	5	7
4		2

7. ADIM

8	1	6
3	5	7
4		2

8. ADIM

8	1	6
3	5	7
4	9	2

SON DURUM
3x3

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Basamak Yöntemi

1) 1 Sayısını en üst satırın ortasındaki kareye yerleştirerek başlayalım.

2) Her koyduğumuz sayının sağ üst çaprazına bir sonraki sayıyı koyalım. Eğer burası sihirli karenin dışındaki hayali bir karedeyse, sihirli karede bu yere denk gelen kutuyu bulup, buraya sayımızı yerleştirelim.

3) Eğer sihirli karedeki sağ üst çapraz doluyorsa, o zaman sayıyı bir önceki sayının altındaki kutuya yerleştirelim (4 ve 7 sayılarında olduğu gibi).

4) 2. ve 3. basamakları uygulamayı sürdürerek sihirli karedeki diğer sayıların yerlerini bulun.

Şimdi, ilk 25 sayıyı ve basamak yöntemini kullanarak 5x5'lik sihirli kareyi yapmayı deneyebilirsiniz. Ayrıca, sihirli kareyi değiştiren yöntemleri de deneyebilirsiniz.

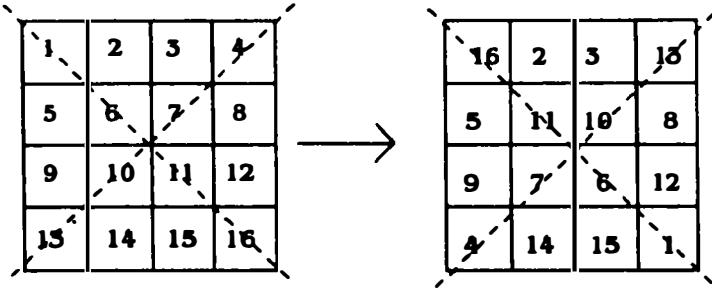
Yaptığınız sihirli karedeki her sayıyı, sabit bir sayıyla çarpın. Sonuçta çıkan kare, sihirli kare mi?

Çift dereceli sihirli kareler yapmak için, yalnızca bazı çift dereceli sihirli kareler oluştururken kullanılabilen çeşitli yöntemler bulunmuştur.

Ömek: Çapraz yöntemi yalnızca 4x4'lük sihirli kareyi yaparken kullanılabilir.

Yöntem:

Sayıları sol üst köşeden başlayarak, sırasıyla sihirli karenin tüm satırlarına yerleştirin. İki çaprazda yer alan sayılar ile onları tamamlayan sayıların yerlerini değiştirin.



4x4'lük bir sihirli kare, satırlarının ya da sütunlarının yerleri değişse de sihirli kare olarak kalır. Ayrıca, çeyreklik bölümlerinin yerleri değişince de sonuç yine bir sihirli karedir.

Çeşitli çift dereceli sihirli kareleri oluşturmak için yöntemler bulmaya ya da tüm çift dereceli sihirli karelerde kullanılabilecek genel bir yöntem bulmaya çalışabilirsiniz.¹

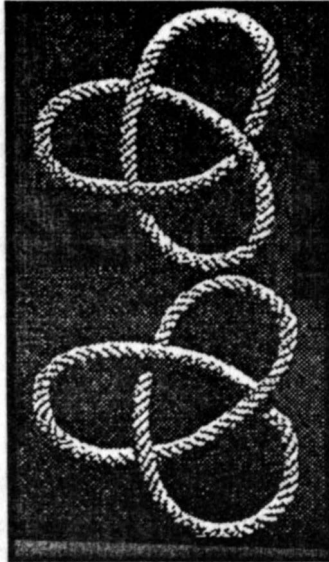
1 Pek çok kişi çift dereceli sihirli kare oluşturma'nın genel yöntemini bulmak için büyük çaba ve zaman harcamıştır. Newlersey, Howell'den Hyman Sirchuck böyle bir yöntem bulduğunu iddia etmektedir.

Yonca Biçimli Düğüm

Düğüm atmak, kendi başımıza ayakkabımızı bağladığımız andan beri bizim için sıradan bir iş olmuştur. Ama düğüm atmak aynı zamanda bir sanat olabilir; bunu geminin halatlarıyla ustaca uğraşan bir denizciyi görünce anlayabiliriz. Ayrıca düğümler, matematiğin topoloji alanındaki görece yeni bir konusunu ilgilendirir. Onlar hakkında şimdiye kadar kanıtlanmış en önemli düşünce düğümlerin en fazla üç boyutlu olabileceğidir.

Yonca biçimli bir düğüm atmak

Aşağıda gösterilen yonca biçimli düğümü yapabilmek için uzun bir kâğıt şeridi alın ve bir buçuk devirlik (yanım devir = 180 derece) döndürün; sonra uçlarını birbirine yapıştırıp, tüm şerit boyunca ortadan kesin. Sonuçta ortaya yonca biçimli bir düğüm çıkacak.



Oransız Sayılar ve Pisagor Teoremi

Oransız (irrasyonel) sayılar ondalık basamakları herhangi bir noktada son bulmayan ve belirli rakam dizileri halinde yinelenmeksizin sürüp giden sayılardır.

Örnek: $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; π ; $\sqrt{48}$; e ; $\sqrt{235}$; φ ...

Oransız sayıların ondalık açılımlarını yazmaya çalıştığımızda, yinelenmeksizin sonsuza kadar sürdüğünü görürüz.

Örnekler:

$$\sqrt{2} = 1,41421356...$$

$$\sqrt{235} = 15,3297097...$$

$$\pi = 3,141592653$$

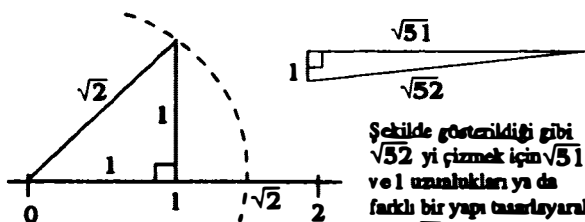
$$e = 2,71828182$$

$$\varphi = 1,61803398... \text{ - altın oran}$$

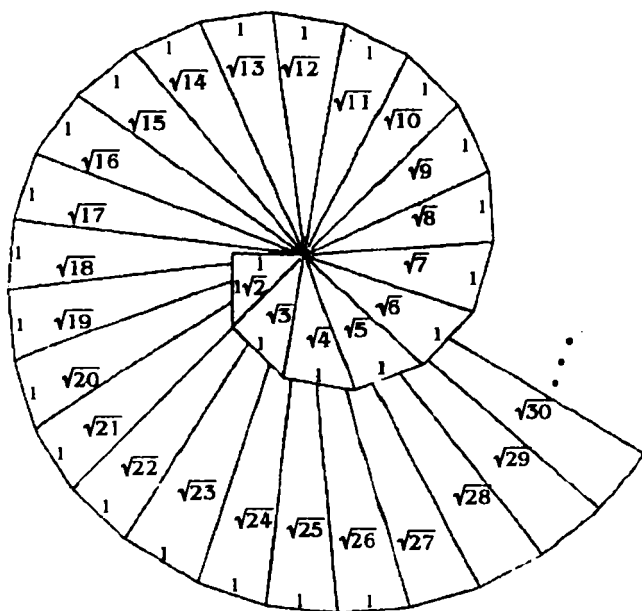
Binlerce yıldır matematikçiler oransız sayıların daha çok ondalık basamağını elde etmek için yöntemler bulmaya çalışıyor. Yüksek kapasiteli bilgisayarlar ve sonsuz seriler sayesinde, yaklaşık olarak hesaplamalarını istedikleri ondalık basamağa kadar sürdürebiliyorlar. Bu yöntemleri bulmak için harcanan zaman ve çabayı göz önüne alırsak, birçok oransız sayının kesin yerini Pisagor teoremini kullanarak bulabilirmiz gerçekten harika bir olaydır. Eski Yunanlı matematikçiler Pisagor teoremini kanıtlamış¹, teoremi oransız sayıların kesin uzunluklarını bulmak için kullanmışlardır.

Sayı doğrusunda $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$,... yerini bulmak için, hipotenüsleri bu uzunlukta olan dik üçgenler oluşturun. Sonra pergel kullanarak sayı doğrusundaki yerini, şekilde gösterildiği gibi yay biçiminde belirleyin.

¹ π ve e oransız olmalarının yanı sıra aşkın (transandant) da oldukları için yalnızca pergel ve cetvel kullanarak oluşturulamaz.



Şekilde gösterildiği gibi $\sqrt{52}$ yi çizmek için $\sqrt{51}$ ve 1 uzunlukları ya da farklı bir yapı tasarlayarak 7 ve $\sqrt{3}$ gibi uzunluklar kullanılabilir.



Asal Sayılar

1'den ve kendisinden başka sayılara bölünmeyen sayılara **asal sayı** adı verilir.

Asal sayılar, 1'den ve kendisinden başka sayılara bölünmeyen sayılardır. İlk 25 tane asal sayı şunlardır: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Bu sayılar, matematik tarihinde önemli bir yer tutar. Özellikle, 1800'lerden itibaren bilgisayarlar kullanılarak, çok büyük asal sayılar bulunmuştur. Örneğin, 1975'te bulunan 221701-1, 1976'da bulunan 223209-1 ve 1979'da bulunan 244497-1, o dönemdeki en büyük asal sayılardır. Bu sayılar, matematik tarihinde önemli bir yer tutar. Özellikle, 1800'lerden itibaren bilgisayarlar kullanılarak, çok büyük asal sayılar bulunmuştur. Örneğin, 1975'te bulunan 221701-1, 1976'da bulunan 223209-1 ve 1979'da bulunan 244497-1, o dönemdeki en büyük asal sayılardır.

30 Ekim 1978, saat 21:00'de bulunan yukarıdaki sayı, o güne kadar bulunan en büyük asal sayıydı. Bilgisayar 1800 saat çalıştıktan sonra Laura Nickel ve Curt Noll (Hayward, C.A. lise öğrencileri) 221701-1 asal sayısını buldular. Daha sonra tek başına işi sürdüren Curt Noll, birkaç ay sonra daha büyük bir asal sayı olan 223209-1 sayısını buldu. Mayıs 1979'da Livermore Laboratuvarı'nda Hary Nelson, Noll'un bulduğunun yaklaşık iki katı olan 244497-1 asal sayısını buldu.

Bugün asal sayıları belirleyebilmek için bilgisayarları kullanıyoruz. Oysa, Eski Yunanlı matematikçi Eratosthenes (MÖ 275-194) belirli bir sayıdan küçük asal sayıları elde etmek için sayısal kalbur yöntemini bulmuştu. Şekilde 100'den küçük asal sayılar yuvarlak içine alınmıştır.

Eratosthenes'in Kalburu

1	(2)	(3)	4	(5)	6	(7)	8	9	10
(11)	12	(13)	14	15	16	(17)	18	(19)	20
21	22	(23)	24	25	26	27	28	(29)	30
(31)	32	33	34	35	36	(37)	38	39	40
(41)	42	(43)	44	45	46	(47)	48	49	50
51	52	(53)	54	55	56	57	58	(59)	60
(61)	62	63	64	65	66	(67)	68	69	70
(71)	72	(73)	74	75	76	77	78	(79)	80
81	82	(83)	84	85	86	87	88	(89)	90
91	92	93	94	95	96	(97)	98	99	100

Yöntemi

1) 1 asal olarak tanımlanmadığı için üzerine çarpı konarak elenmiştir.

2) Bütün çift sayılar içinde yalnızca 2 asal sayıdır; 2'yi yuvarlak içine alın. Sonra 2'nin tüm katlarını çarpı koyarak eleyin.

3) Bir sonraki asal sayı olan 3'ü yuvarlak içine alın ve 3'ün tüm katlarını eleyin. Bazıları 2'nin de katı olduğu için daha önceden elenmiş olabilir.

4) Bir sonraki işaretlenmemiş sayı olan 5'i yuvarlak içine alın ve sonra 5'in tüm katlarını eleyin.

5) Bu işlemi 100'e kadar bütün sayılar ya yuvarlak içine alınıp ya da elenmiş duruma gelinceye kadar sürdürün.

Sihirli Küp

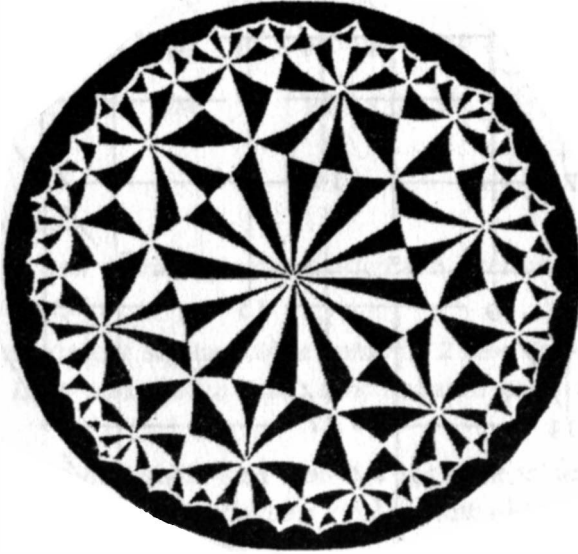
Bu 3 x 3'lük sihirli küpte ilk 27 doğal sayı öyle düzenlenmiştir ki, her 3 sayılık satır ve sütunun toplamı 42'dir.

	10	26	6
24	1	17	
8	15	19	
	3	16	
7	14	21	
12	25	5	
	9	13	20
11	27	4	
22	2	18	

Öklit Dışı Geometriler

19. yy, siyaset, sanat ve bilimde devrimci düşüncelerin çağıydı. Matematikte de Öklit dışı geometriler bu dönemde gelişti. Tıpkı izlenimci resmin, modern resmin başlangıcı olması gibi Öklit dışı geometrilerin gelişmesi de modern matematiğin başlamasına neden oldu.

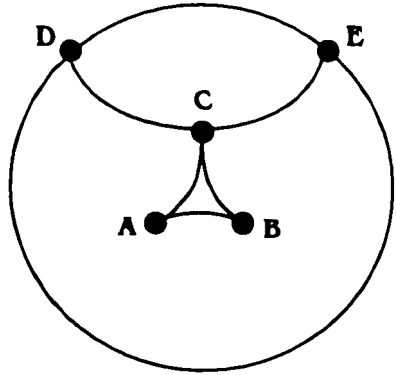
Bu dönemde Rus matematikçi Nicolai Lobachevsky (1793-1856) ve Macar matematikçi Johann Bolyai (1802-1860) birbirlerinden bağımsız olarak hiperbolik geometriyi (Öklit dışı geometrilerden biri) buldular.



Poincaré'nin hiperbolik geometrik modelinin soyut bir çizimi

Hiperbolik geometrinin diğer Öklit dışı geometriler gibi, bize yabancı gelen özellikleri anlattığını düşünürüz. Bunun nedeni, geometriyi, Öklit geometrisinin terimleriyle düşünmeye koşullanmamızdır. Örneğin, hiperbolik geometride bir doğru'nun düz olması gerekmez ve paralel doğrular kesişmemelerine rağmen asimtot oldukları için birbirlerinden eşit uzaklıkta kalmaz. Öklit dışı geometriler ayrıntılı olarak incelendiğinde, evrenimizdeki olgulara daha doğru açıklamalar getirdikleri görülür. Kısaca, içinde bu geometrilerin yer alabileceği değişik dünyalar tanımlanmaktadır.

Bu dünyalardan biri, Fransız matematikçi Henri Poincaré'nin (1854-1912) yarattığı modeldir. Onun düşsel evreni, merkezinde sıcaklığın "0" derece olduğu bir daireyle (üç boyutlu bir model için bir küre olduğunu düşünün) belirlenmiştir. Merkezden uzaklaştıkça, çevredeki sıcaklık artar. Bu evrendeki nesnelerin ve yaşayan varlıkların sıcaklık değişikliklerinden habersiz olduklarını, her şeyin büyüklüğünün hareket ettikçe değiştiğini varsayalım. Her nesne ve canlı, merkeze yaklaştıkça büyür ve merkezden uzaklaşıp, sınırlara yaklaştıkça orantılı olarak küçülür. Her şeyin büyüklüğü değiştiği için, kimse büyüklüklerin değiştiğini fark edemeyecek ve bundan haberi olmayacaktır. Herhangi birinin adımları sınırlara yaklaştıkça küçülecek ve sanki sınıra hiç yaklaşmıyormuş gibi görünecektir. Dolayısıyla bu dünya sonsuzmuş gibi görünür.



Burada iki nokta arasındaki en kısa yol bir egridir; Çünkü A'dan B'ye gitmek için merkeze doğru bir yay biçiminde ilerlersek daha az adım atarız (adımlarımız daha büyük olduğu için). Bu dünyadaki herhangi bir üçgenin kenarları, şekildeki ABC üçgeninde olduğu gibi, yaylardan oluşmuştur. Paralel doğrular bile farklı görünecektir. Hiçbir zaman kesişmeyecekleri için DCE doğrusu AB doğrusuna paraleldir.

Aslında Poincaré'nin evreni bizim yaşadığımız Dünya'yı anlatıyor olabilir. Eğer evrendeki konumumuza bakabilip, ışık hızıyla yolculuk edebilseydik, belki de boyumuzda değişiklik-

ler olduğunu fark edebilirdik. Gerçekten de Einstein'ın görelilik teorisine göre, bir cetvelin uzunluğu, ışık hızına yaklaştıkça kısalır.



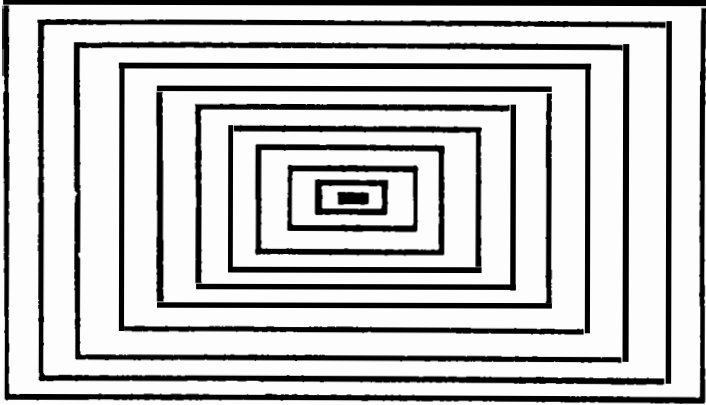
Henri Poincaré

Poincaré yaratıcı bir düşünürdü. Paris'teki Sorbonne Üniversitesi'nde profesörken (1881'den 1912'ye kadar) ders verdiği konuların çeşitliliği, onun bu özelliğini gösterir. Çalışmaları, elektrik, hidrodinamik, termodinamik, olasılık hesabı, gök

mekanigi, ıraksak seriler, asimtotik açınım teorisi, integral değişmezleri, yörüngelerin kararlılıkları, gök cisimlerinin biçimleri gibi konuları kapsar. Çalışmaları 20. yy'ın matematiksel düşüncesini yönlendirmiştir.

Küçük Yerlerdeki Sonsuzluk

Sonsuzluğu düşleyebilir misiniz? Sonsuzluk hiçbir zaman bitmeyendir ve kavranması güçtür. 7 sayısının, 7 elmayı ve 1 milyarın (1.000.000.000) bir kavanozdaki kum tanelerinin sayısını gösterdiğini kolaylıkla kavrayabiliriz. Ama, sonsuzluğun sınırı yoktur. Sonsuzluk kavramını fiziksel olarak hissetmenin çok ilginç bir yolu, küçük bir aynayı, daha büyük bir aynanın tam karşısında tutmaktır. Göreceğiniz şey, bir aynanın içinde bir ayna, onun içinde de bir ayna...yani sonu hiç görünmeyen iç içe aynalar dizisidir.



Birçok kişi sonsuz bir miktarın çok fazla yer kaplaması gerektiğini düşünür; ama, bu küçük AB doğru parçasında A_____B sonsuz sayıda nokta vardır.

Bunu kanıtlamak için her iki noktanın arasında başka bir noktanın bulunduğu düşüncesini kullanacağız. Buna göre, eğer A ve B noktaları bir doğru parçasının üzerindelerse ara-

larında bir C noktası vardır. Sonra, hem A ile C noktaları, arasında, hem de C ile B noktaları arasında başka bir nokta bulunur. Bu, herhangi iki nokta arasında başka bir nokta bulma süreci sonsuza dek sürer. Böylece AB doğru parçasında sonsuz sayıda nokta olduğu ortaya çıkar.

Pire öyküsü, sonsuz bir miktar anlatmanın bir başka yolunu gösterir.

Pire bir oda boyunca sıçramak ister. Arkadaşı ona, eğer her sıçrayışta, kalan yolun yansı uzunluğunda sıçrarsa, odanın karşı tarafına asla ulaşamayacağını söyler. Pire ise odanın karşı tarafına rahatlıkla gidebileceğini iddia eder. Önce yolun yarısına kadar sıçrar; sonra kalan yolun yansı kadar ...ve bu böyle sürer. Karşı tarafa çok yaklaştığında bile, bu kurala uyması gerekir, yani her sıçrayış, kalan yolun yansı uzunluğunda olmalıdır. Sonunda pire, her zaman, yansı kadar sıçraması gereken bir yol kalacağını ve bunun kendisi pes etmezse sonsuza kadar süreceğini görür.

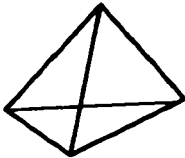
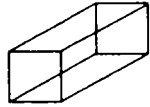


Böylece, sonsuzluğun hiçbir sayı ile gösterilemeyen, hiç bitmeyen bir miktar olmasına rağmen, büyük bir yer gibi, küçük bir yere de sığabileceğini gördük.

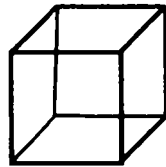
Platon'un Beş Katı Cismi

Eflatun'un (Platon) katı cisimlerinin kenarları, düzgün, eş çokgenler oluşturur. Bunlar dışbükey cisimlerdir. Yalnızca beş katı cisim bu tanıma uyar.

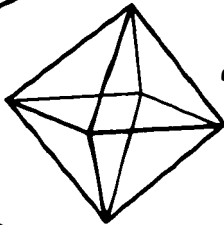
Katı sözcüğü, kaya, çekirdek, küre, piramit, kutu, küp gibi üç boyutlu herhangi bir cisim için kullanılır. Katı cisimlerin özel bir çeşidi olan düzgün katı cisimler Eski Yunanlı düşünür Eflatun tarafından bulunmuştur. Düzgün katı cisimlerin bütün yüzleri aynı boy ve biçimdedir. Küp düzgün bir katı cisimdir çünkü bütün yüzleri, aynı büyüklükte olan karelerdir; ama yanda görülen kutu, düzgün bir katı cisim değildir çünkü yüzleri aynı boyda dikdörtgenlerden oluşmamıştır. Eflatun yalnızca beş düzgün cisim olduğunu kanıtlamıştır. Bunlar dörtyüzlü (üçgen piramit) küp ya da altı yüzlü, sekizyüzlü,



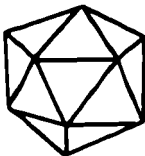
dörtyüzlü



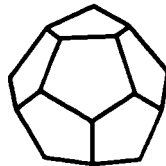
altıyüzlü ya da küp



sekizyüzlü

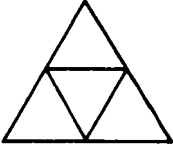


onkiyüzlü

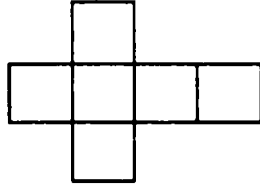


yirmiyüzlü

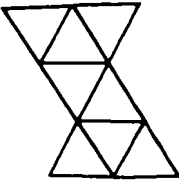
*onikiyüzlü ve yirmi yüzlüdür. Aşağıda bu beş düzgün katı cis-
mi oluşturmak için gereken kalıplar gösterilmiştir. Niye onları
bir kâğıda geçirip, keserek üç boyutlu biçimlerine dönüştür-
müyorsunuz?*



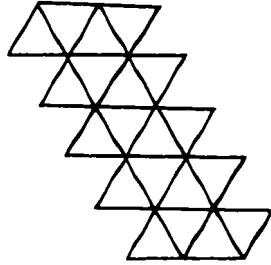
dört yüzlü



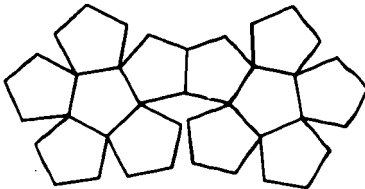
altı yüzlü ya da küp



sekiz yüzlü



oniki yüzlü



yirmi yüzlü

Sihirli Kareler Oluşturmak İçin Piramit Yöntemi

Piramit yöntemi, tek dereceli sihirli kareler oluştururken kullanılan yöntemlerden biridir. Aşağıdaki örnekte 5x5'lik bir sihirli karenin nasıl yapılacağı gösterilmiştir.

Yöntem:

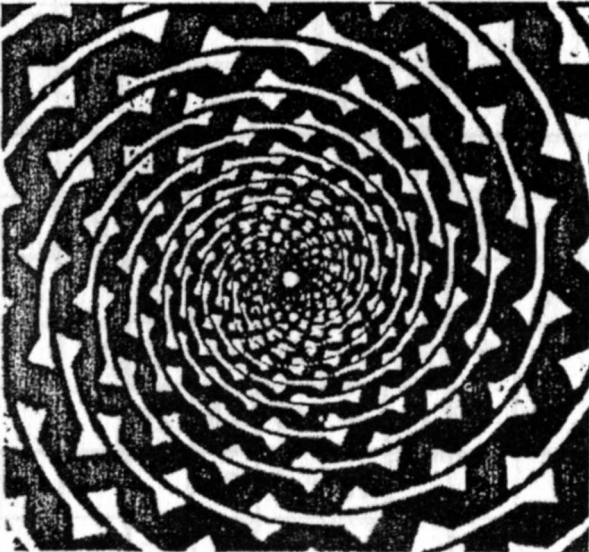
1) 1 'den 25'e kadar sayılan sihirli karenin çapraz kutularına gösterildiği gibi yerleştirin.

2) Sihirli karenin dışındaki sayıları, karenin içinde, ilgili yerlere yerleştirin (içi doldurulmamış sayılar, yeniden yerleştirilenlerdir).

				5					
			4		10				
		3	16	9	22	15			
	2	20	8	21	14	2	20		
1		7	25	13	1	19		25	
	6	24	12	5	18	6	24		
		11	4	17	10	23			
			16		22				
				21					

Göz Aldatıcı Sarmal

Bu çizim sarmal gibi görünüyor; ama daha yakından baktığınızda, ortak merkezli dairelerden oluştuğu fark edilir. Çizimdeki yön doğrultusu birimi Dr. James Fraser tarafından bulunmuş ve Ocak 1908'de *British Journal of Psychology*'de (İngiliz Psikoloji Dergisi) açıklanmıştır. Bu tür göz yanılsamasına bükülmüş ip etkisi denir. Karşıt renklerdeki iki ip, bükülerek tek ip haline getirilir. Sonra bu, değişik zeminlerin üstüne konur. Göz aldatıcı görüntü öylesine inandırıcıdır ki, göz yanıltıcı sarmal görüntüyü yok etmek için, ortak merkezli dairelerin izini sürdüğümüz zaman bile, aldatıcı görüntüden kurtulmak çok zordur.



Zenon Paradoksu Aşıl ve Kaplumbağa

Matematığın önemli bir parçası olan paradokslar ilginç ve eğlencelidir. Paradokslar, düşünceleri açıklarken ve kanıtlarken açık vermemenin önemini vurgular. Matematikte, matematiksel düşüncelerin mümkün olabildiğince çok yönü kapsamasına; yani bir kavramı genelleyerek çok sayıda olaya açıklık getirmesine çalışınız. Genelleme önemlidir; ama aynı zamanda tehlikeli de olabilir. Bu nedenle dikkatli olmak gerekir. Bazı paradokslar bu tehlikeye işaret eder.



MÖ 5. yy'da Zenon sonsuzluk, diziler ve kısmi toplam-
larla ilgili bilgilerini kullanarak ünlü bir paradoks geliştirmiştir.
Zenon, Aşil ile kaplumbağa arasındaki bir yarışta, kaplumba-
ğanın yarışa 1000 metre önden başlamasını önerir. Aşil'in
kaplumbağadan 10 kat daha hızlı koşabildiğini varsayın. Yarış
başladığında ve Aşil 1000 metre ilerlediğinde, kaplumbağa
Aşil'in 100 metre önünde olacak. Aşil, daha sonraki 100 met-
reyi aştığında, kaplumbağa 10 metre ileride olacak.

Zenon'a göre, Aşil sürekli olarak kaplumbağaya yaklaşa-
cak; ama ona hiçbir zaman yetişemeyecek. Zenon'un düşün-
cesi doğru mu? Eğer Aşil kaplumbağayı geçecek olsa, bu ya-
nışın hangi noktasında olabilir?

bkz. çözümler

Eublides ve Zenon Paradoksları

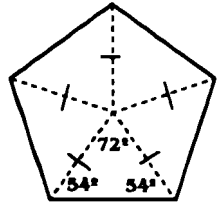
Eski Yunanlı düşünür Eublides, hiçbir zaman bir kum yı-
ğını oluşturulamayacağını öne sürmüştü. Doğal olarak, bir
kum tanesi, bir kum tepesi olarak ele alınamaz. Eğer bir kum
tanesine, bir tane daha eklersek, bunlar da bir yığın oluşturu-
maz. Bu nedenle eğer bir kum yığınınız yoksa ve elinizde ola-
na bir ekleyerek, bir yığınınız olmuyorsa, o zaman hiçbir za-
man bir kum yığınınız olmayacak.

Benzer bir akıl yürütmeyle Zenon, bir doğru parçasının
üzerindeki noktalara bakar. Zenon'a göre, eğer bir noktanın
boyutu yoksa, o zaman bir noktaya, bir nokta daha eklendi-
ğinde bunun da boyutu olmayacaktır. Bu nedenle, noktaları
birleştirerek herhangi bir boyutu olan bir nesne elde edile-
mez. Ama eğer bir noktanın boyutu olsaydı, o zaman bir doğ-
ru parçası sonsuz uzunlukta olurdu; çünkü bu sonsuz sayıda
noktadan oluşurdu.

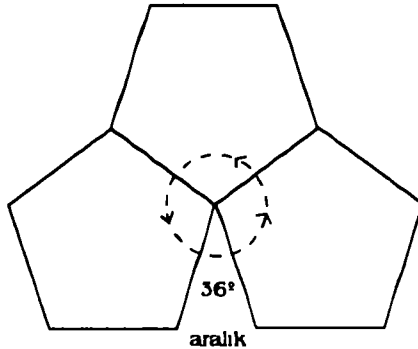
Mozaikler

Bir yüzeyin mozaiklerle kaplanması, aralarında hiç boşluk kalmayacak biçimde, yassı taşlarla döşenmesi anlamına gelir. Çeşitli taş biçimleriyle yüzeyin böyle kaplanıp kaplanamayacağı, gerçekten bunu denemeye gerek kalmadan matematikğin yardımıyla bulunabilir. Bunun için dairenin 360 dereceden oluştuğunu bilmemiz yeter.

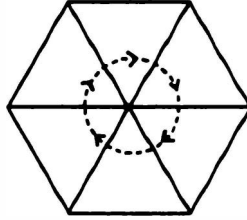
Bir düzlemi düzgün beşgenlerle kaplamayı deneyelim. Düzgün beşgenin, beş eşit kenarı ve beş eş açısı vardır. Beşgenin bir iç açısının değerini bulmak için şekilde gösterildiği gibi üçgenlere bölelim. Her üçgenin iç açılarının toplamının 180 derece olduğunu biliyoruz. Beşgeni oluşturan, beş üçgenin hepsi, karşılıklı kenarları ve karşılıklı açılar eşit olduğu için eş üçgenlerdir. Buna göre, beşgenin iç açılarının her biri 108 derecedir. Yani düzgün beşgenleri yan yana koyduğumuzda arada bir boşluk kalır; çünkü beşgenler bir daire ya da 360 derece oluşturamaz.



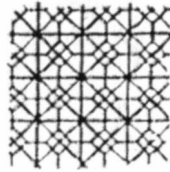
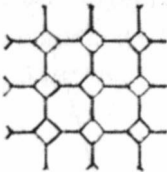
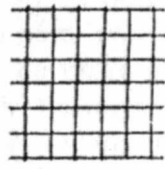
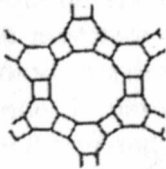
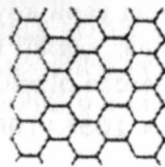
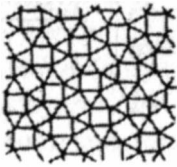
$$(108^{\circ} + 108^{\circ} + 108^{\circ} = 324^{\circ}).$$



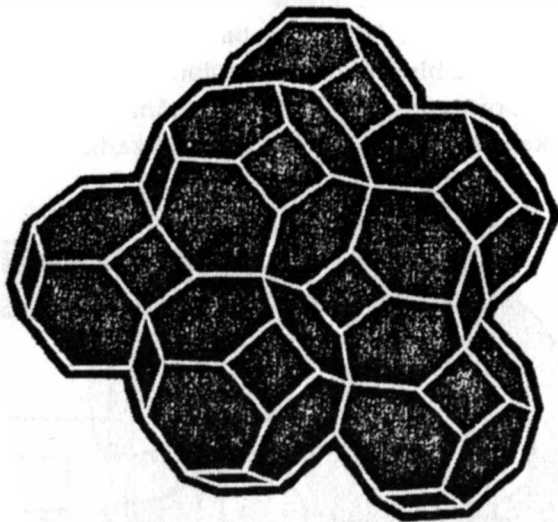
Şimdi de yüzeyi, eşkenar üçgenler kullanarak mozaiklerle kaplamayı deneyelim. Eşkenar üçgenin her açısı 60 derecedir. Altı birbirinin aynı eşkenar üçgeni birleştirerek bir daire oluşturabiliriz.



Acaba kareler, altıgenler, sekizgenler ya da bunların birleşimlerini kullanarak da mozaik oluşturabilir miyiz?



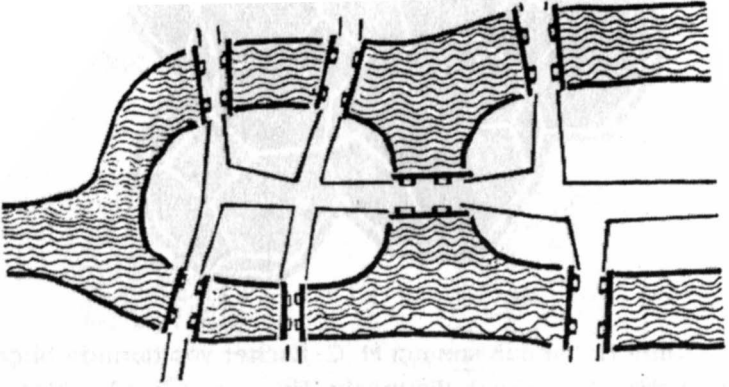
Benzer bir biçimde uzay da üç boyutlu cisimlerin oluşturduğu mozaiklerle kaplanabilir. Aşağıdaki şekilde tepeleri kesilmiş sekizyüzlüler gösterilmiştir. Arşimet çokyüzlülerinden yalnızca bunlar, başka biçimli katı cisimler kullanılmadan, uzayı arada boşluk kalmayacak bir biçimde kaplayabilirler.



Ünlü Hollandalı sanatçı M. C. Escher yapıtlarında birçok matematiksel kavram kullanmıştır. Bunlardan bazıları Möbius şeridi, keseller (bir yüzey üzerinde kalarak iki noktayı birleştiren en kısa yol), izdüşümsel geometri, görsel yanılsama, olanaksız üçgen, yonca biçimli düğüm ve mozaiklerdir. Escher, birçok ünlü yapıtında kendi yarattığı ilginç mozaikleri kullandı; bunlardan bazıları şunlardır: *Metamorphosis* (Metamorfoz), *Horseman* (Binici), *Smaller and Smaller* (Gitgide Küçülen), *Square Limit* (Kare Limit), *Circle Limit* (Daire Limit). Mozaikle kaplanmış uzayla ilgili uygulamalar, sanattan başka mimarlık, iç mimarlık ve paketlemede kullanılır.

Königsberg Köprüleri Problemi ve Topoloji

Topolojinin başlangıcı, ünlü Königsberg Köprüleri Problemi'nin 1736'da çözülüşüne dayanır. Königsberg¹, Pregel Irmağı üzerindeki iki adadan oluşan bir kenttir. Adalar yedi köprüyle birbirine bağlanır. Adalardan biri ırmagın iki kıyısına ikişer köprü; diğeri de birer köprü ile bağlanmıştır. Ayrıca iki ada arasında bir köprü vardır. Kentte pazar günleri her köprüden yalnızca bir kez geçerek, bütün köprülerin üzerinden geçmeye



Königsberg Köprüleri Problemi'nin çizimi

çalışmak gelenekselleşmişti. Bu problem İsviçreli matematikçi Leonhard Euler'in (1707-1783) dikkatini çekinceye kadar hiç kimse tarafından çözülememişti. O sırada Euler St. Petersburg'da Rusya çaricesi Büyük Katerina'nın hizmetindeydi. Euler bu problemi çözerken matematiğin topoloji alanının te-

1 18. yy'da Königsberg bir Alman kentiydi; günümüzde Rusya'dadır.

mellerini attı. Königsberg Köprüleri Problemi'ni, topolojinin günümüzde graf (çizge) teorisi olarak bilinen alanını kullanarak çözdü. Grafları kullanarak her köprüden bir kez geçmenin olanaksız olduğunu kanıtladı.

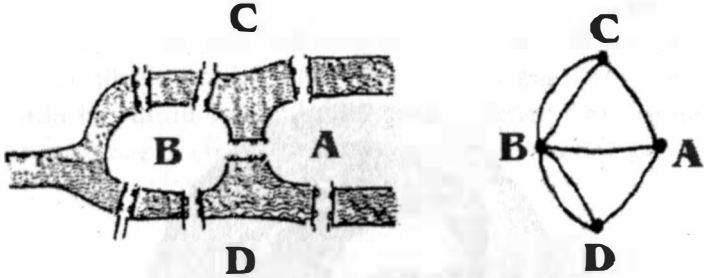
Topoloji, görece yeni bir alandır. 19. yy. matematikçileri, diğer Öklit dışı geometrilerle birlikte topoloji alanında da çalışmalar yapmışlardı. Topoloji konusunda ilk kitap 1847'de yazılmıştır.



Euler

Graf (Çizge) Teorisi

Graf*, temel olarak bir problemin çizimidir. Königsberg Köprüleri Problemi'ni gösteren çizge aşağıdadır.

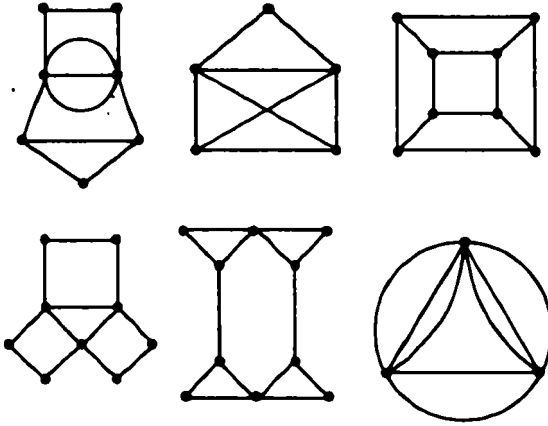


Königsberg Köprüleri Problemi'nin grafi

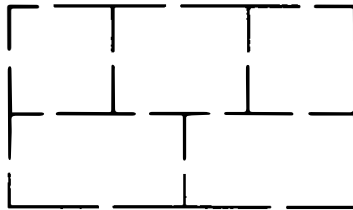
Bir graf düğümler ve kırışlerden oluşur. Her kırıştan yalnızca bir kez geçerek bütün kırışlerden geçerse, grafi dolaşmış oluruz. Düğümlerden istediğimiz kadar geçebiliriz. Çizimde Königsberg Köprüleri Problemi'ndeki düğümler A, B, C, D olarak gösterilmiştir. Her düğümden geçen kırışlerin sayısına bakarsak, A, C ve D'den 3'er, B'den 5 kırış geçtiğini görürüz. Hepsi tek sayı olduğundan bunlara *tek dereceli düğümler* denir. *Çift dereceli bir düğümden* çift sayıda kırış geçer. Euler, bir grafın tek dereceli ve çift dereceli düğümlerinin sayılarına ve grafın dolaşılabilir olmasına ilişkin birçok özellik buldu. Bir düğümün tek dereceli olması için, grafi dolaşmaya ya o düğümden başlanması ya da orada bitirilmesi gerektiğini belirtti. Bir grafın yalnızca tek bir başlangıç ve tek bir bitiş noktası olması gerektiğini; böylece dolaşılabilir bir grafın yalnızca

* Çev.not: Graf teorisi (network) elektrik devreleri, iletişim ağıları (bilgisayar), yol şebekeleri gibi alanlarda kullanılmaktadır.

2 tane tek dereceli düğümünün olabileceğini ortaya çıkardı. Bunun sonucunda, Königsberg Köprüleri Problemi'nin grafinde 4 tane tek dereceli düğüm olduğu için, bu grafin dolaşamaz olduğu bulundu.



Yukandaki graflardan hangisi, her kırıştan yalnızca bir kez geçerek çizilebilir?



Kaleminizi kaldırmadan her kapıdan yalnızca bir kez geçebilir misiniz? Çözümünüzü bir graf çizerek kanıtlamaya çalışın.

Pergel ve Cetvelle Yapılamayan Çizimler

Matematiksel bir problemin güzelliği, yanıtında değil, çözerken kullanılan yöntemlerde saklıdır, çözümsüz problemler de vardır. Bir problemin sonunda, çözümsüz olduğu görülebilir ve bu düş kırıklığı yaratabilir. Ama asıl sonuca varılmasını sağlayan düşünme yöntemi ve süreci büyüleyici güzelliğindedir. Bu süreçte yeni, ilginç düşünceler ortaya çıkar. *Eskiçağın en ünlü üç probleminde de böyle olmuştur.*

- | | | |
|--|---|--|
| <i>Bir açıyı üç eşit parçaya ayırmak</i> | — | açıyı üç eş açıya bölmek |
| <i>Bir küpü iki katına çıkarmak</i> | — | belirli bir küpten, hacmi bunun iki katı olan başka bir küp oluşturmak |
| <i>Bir daireyi kareleştirmek</i> | — | Bir dairenin alanına eşit alanı olan bir kare oluşturmak. |



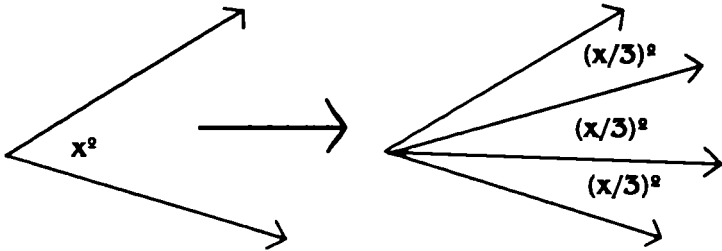
Bu problemler 2000 yılı boyunca matematiksel düşünce ve buluşların derinden etkiledi. 19. yy'da bu *çizim problemlerinin* yalnızca pergel ve cetvel kullanarak çizilemeyeceği kanıtlandı. Cetvelin, doğrusal (birinci dereceden) denklemleri olan doğru parçalarının çiziminde

kullanılabileceği ortaya çıkarıldı. Örnek: $y = 3x - 4$. Öte yandan, pergelle ikinci derece denklemleri olan çemberler ve yaylar çizilebilir. Örnek: $x^2 + y^2 = 25$. Bu denklemler birlikte çö-

zıldüklerinde, en fazla ikinci dereceden denklemler oluşurlar. Ama üç çizim problemini cebirsel olarak çözerken ortaya çıkan denklemler, birinci ya da ikinci dereceden denklemler değil, üçüncü dereceden ya da aşkın (transandant) sayıları içeren denklemlerdir. Bu nedenle yalnızca pergeli ve cetveli kullanarak, bu tür denklemler ya da sayılar türetilmez.

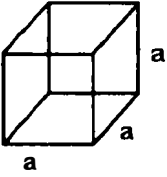
Bir açıyı üç eşit parçaya ayırmak

135 derece ya da 90 derece gibi bazı özel açılar, yalnızca pergeli ve cetveli kullanılarak çizilebilir. Ama verilen herhangi bir açıyı yalnızca pergeli ve cetveli kullanarak üç eşit parçaya ayırmak olanaksızdır. Çünkü bu problemi çözerken kullanılan denklem, üçüncü dereceden, $a^3 - 3a - 2b = 0$ denklemdir.



Bir küpü iki katına çıkarmak

Bir küpün hacmini iki katına çıkarmak için, kenarlarının uzunluğunu iki katına çıkarmayı deneyebiliriz. Ama bunun sonucunda hacmi, başlangıçtaki küpün sekiz katı olan bir küp ortaya çıkar.

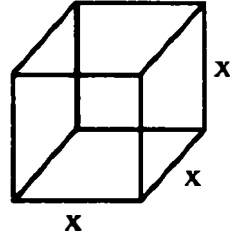


Başlangıçtaki
küpün hacmi = a^3

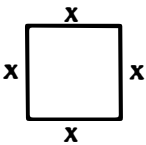
Küpü iki katına çıkarmak için hacmi başlangıçtaki küpün iki katı olan yani $2a^3$ olan bir küp oluşturmamız.

$$x^3 = 2a^3 \text{ yani } x = a\sqrt[3]{2}$$

İşte, yine yalnızca pergeli ve cetvelle çizemeyeceğimiz üçüncü dereceden bir denklem ortaya çıktı.



Bir daireyi kareleştirmek

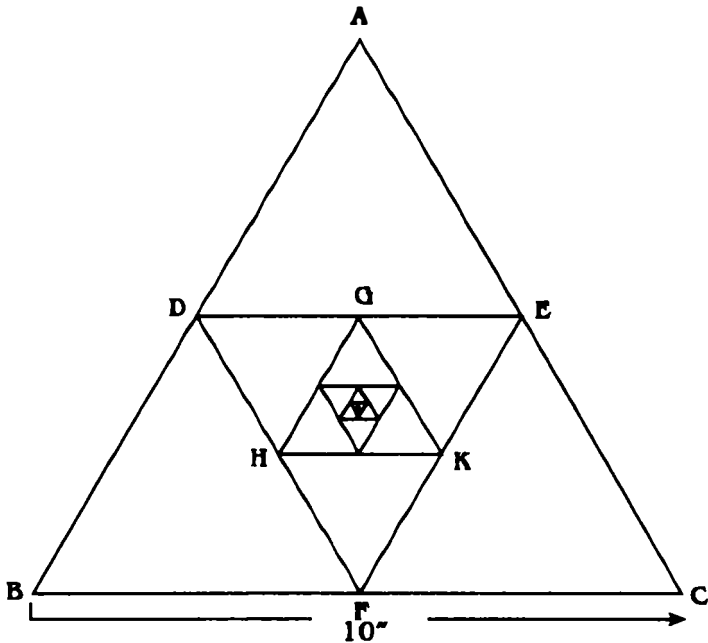


Yarıçapı " r " olan bir dairenin alanı πr^2 'dir; biz de alanı πr^2 olan bir kare oluşturmak istiyoruz. $x^2 = \pi r^2$ ya da $x = r\sqrt{\pi}$ aşkın bir sayı olduğu için sonlu bir sayı olarak ya da gerçek köklerle ifade edilemez. Bu nedenle daire de pergeli ve cetvelle kareleştirilemez.

Eskiçağın bu üç probleminin, pergeli ve cetvelle çözülmemesine karşın, çözmek için ilginç yöntemler geliştirilmiş ve aletler tasarlanmıştır. Nicomedes'in kavku eğrisi (konkoit), Arşimet sarmalı, Hippias'ın kuvadratik eğrisi, konikler, 3. ve 4. dereceden eğriler, birkaç aşkın eğri, bu üç problemde çıkan düşüncelerden bazılarıdır.

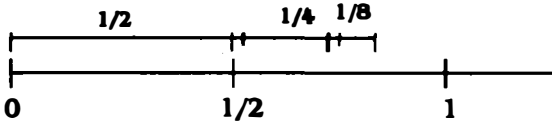
Çevre, Alan ve Sonsuz Seriler

Aşağıdaki şekilde sonsuz sayıda üçgen vardır. İç içe çizilmiş her üçgen, onu çevreleyen üçgenin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek oluşturulmuştur. Bu üçgenlerin çevrelerinin toplamını bulmak için şu seriye bakalım:



$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 + 1/128 + \dots$$

Sayı doğrusuna bakarak bu kesirlerin toplamını bulabiliriz. Seriye eklenen her kesrin serinin toplamını 1'e daha yaklaştırdığını ve toplamın 1'i aşamayacağını görürüz. Böylece serinin toplamının 1 olduğu sonucuna varırız.



Bu bilginin, üçgenlerin çevrelerinin toplamını bulmamıza nasıl yardım edeceğini düşünmüş olabilirsiniz. Önce bütün üçgenlerin çevrelerini sıralayalım:

30, 15, 15/2, 15/4, 15/8, 15/16, 15/32, 15/64, 15/128,¹

Şimdi, üçgenlerin çevrelerinin toplamını bulmak içirt bu sayılan toplayalım.

30+ 15+ 15/2+ 15/4+ 15/8+ 15/16+ 15/32+ 15/64+ 15/128...

sadeleştirirsek:

45+15(1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+1/64+1/128+...)

Serinin toplamı yerine önceden bulduğumuz gibi 1'i koyarsak;

45+15(1)=45+15=60 sonucu çıkar.

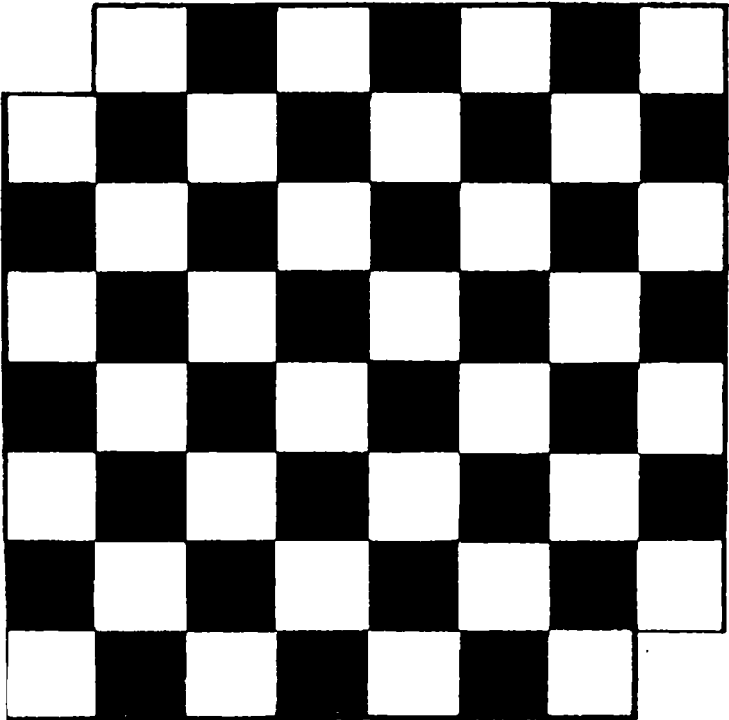
Üçgenlerin alanlarının toplamını bulmak da ilgi çekicidir. Bunun için yeni bir sonsuz serinin toplamı üzerinde çalışmak gerekir.

1 Bu değerler geometrinin şu teoremi kullanılarak bulunmuştur: Bir üçgenin iki kenarının orta noktalarını birleştiren bir doğru parçası, karşısındaki kenarın yansı uzunluğundadır.

Satranç Tahtası Problemi

İki çapraz köşesi çıkarılmış bir satranç tahtası, domino taşlarıyla tamamen kaplanabilir mi? Her domino taşının satranç tahtasının iki karesi boyutunda olduğunu varsayın. Domino taşları üst üste yerleştirilemez.

bkz. çözümler



Müziğin Matematikçi

Eskiçağlardan beri müzik ile matematik birbiriyle ilişkilidir. Ortaçağda eğitim programlarında müzik, aritmetik, geometri ve astronomi ile aynı grupta yer alırdı. Günümüzde bilgisayarlar aracılığıyla bu bağ sürüyor.

Matematikçi, müzik üzerindeki etkisinin açıkça görülebildiği alan, müzik parçalarının yazımıdır. Bir müzik parçasında ritim (4:4'lük, 3:4'lük gibi), belirli bir ölçüye göre vuruş, birlik, ikilik, dördlük, sekizlik, on altılık...notalar bulunur. Bir ölçüye göre x sayıda nota yazmak, matematikte ortak paydayı bulmaya benzer; çünkü belirli bir ritimde, değişik uzunluktaki notalar belirli bir ölçüye uydurulur. Besteciler, yapıtlarını nota yazısının katı kalıpları çerçevesinde, mükemmel bir biçimde ve zorlanmadan yaratırlar. Karmaşık bir beste incelendiğinde, her ölçünün, değişik uzunlukta notaları kullanan belirli sayıda vuruştan oluştuğu görülür.



Pisagor

Matematik ile nota yazımının arasındaki bu ilişkinin yanı sıra müzik, oranlar, üstel eğriler, periyodik (dönemli) fonksiyonlar ve bilgisayar alanıyla da ilgilidir. İlk kez oranlar ile müziği Pisagorcular (MÖ 585-400) ilişkilendirmiştir. Sesin, çekilen bir telin uzunluğuna bağlı olduğu fark edilerek, müzikte armoni ile tamsayılar arasındaki ilişki bulundu. Uzun-

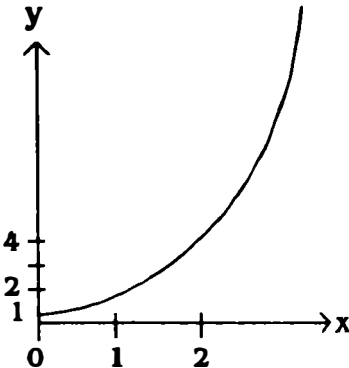
lukları tamsayı oranlarında olan gergin tellerin de armonik sesler verdiği görüldü. Gerçekten de, çekilen tellerin her armonik bileşimi tamsayıların oranı olarak gösterilebilir. Örne-

ğın, C(do) notasını çıkaran bir teli ele alalım. C'nin uzunluğunun 16/15'i B'yi (si) verir, C'nin uzunluğunun 6/5'i A'yi (la); C'nin uzunluğunun 4/3'ü G'yi (sol); C'nin uzunluğunun 3/2'si F'yi (fa); C'nin uzunluğunun 8/5'i E'yi (mi); C'nin 16/9'u D'yi (re); C'nin uzunluğunun 2/1'i pes C'yi verir.



Kuyruklu piyanonun biçiminin niye öyle olduğunu hiç düşündünüz mü? Gerçekten de birçok müzik aletinin biçimi matematiksel kavramlarla bağlantılıdır. Üstel fonksiyonlar ve eğriler böyle kavramlardır. Üstel bir eğrinin denklemi: $y = k^x$ ($k > 0$). Örnek: $y = 2^x$. Bunun grafiği yanda gösterilmiştir. Telli ya da üflemeli çalgıların biçimleri bu üstel eğrinin biçimine benzer.

Müzikal seslerin niteliğinin 2 incelenmesi 19. yy'da matematikçi Joseph Fourier'ın çalışmalarıyla doruğa çıktı. O, müzik aleti ve insandan çıkan bütün müzikal seslerin matematik-

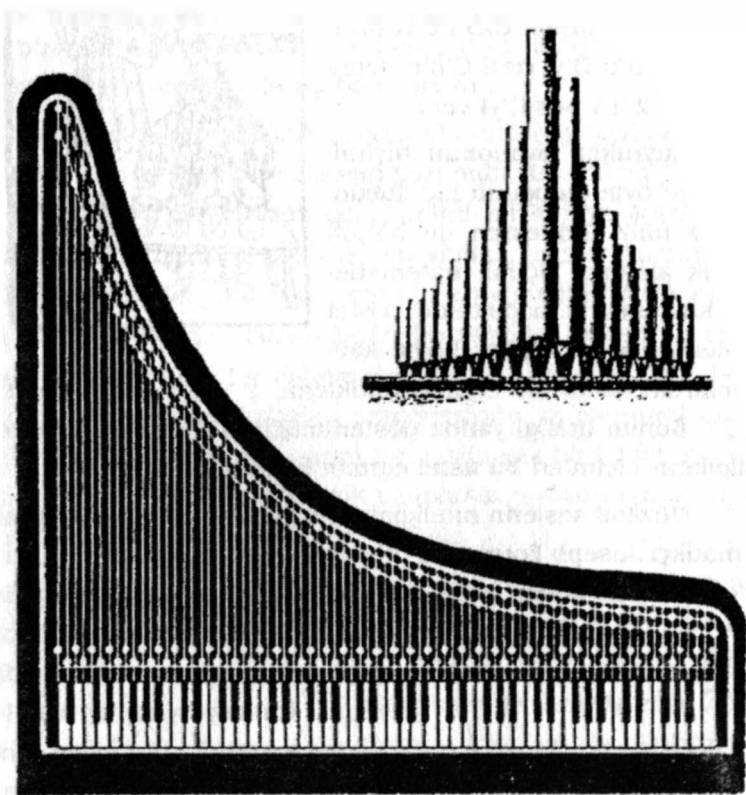


sel ifadelerle tanımlanabileceğini, bunun da basit periyodik sinüs fonksiyonlarıyla olabileceğini kanıtladı. Her sesin, onu başka müzikal seslerden ayırt eden üç özelliği vardır: Perdesi, yüksekliği ve dokusu.

Fourier'in buluşu, sesin bu üç özelliğinin grafikte gösterilmesini sağlamıştı. Ses dalgası, eğrinin frekansı; sesin yüksekliği,

eğrinin genliğiyle (amplitude) ve sesin dokusu periyodik fonksiyonun biçimiyle ilişkilidir.

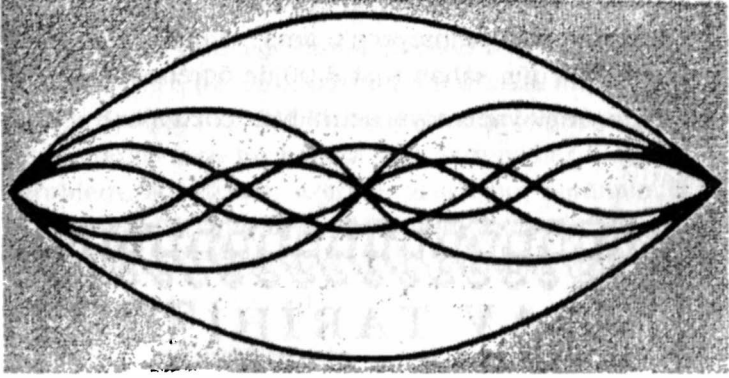
Müziğin matematiğinin kavranmasıyla, beste ve müzik aletleri yapımında bilgisayarlardan yararlanmak olanaklı olmuştur. Periyodik fonksiyonlar gibi matematiksel buluşlar,



Üstsel eğriler, bu büyük piyanonun tellerinde ve orgun borularında görülebilir.

modern müzik aletlerinin ve sesli bilgisayarların tasarımlarında çok önemli bir rol oynamıştır. Birçok müzik aleti yapımcısı, yaptığı aletlerin periyodik ses grafiğini, bu aletler için ideal olan grafiklerle karşılaştırır. Elektronik müzik kayıtları da periyodik

dık grafiklerle yakından ilişkilidir. Müziğin yaratılmasında ve yeniden üretilmesinde, müzisyenler ile matematikçilerin birlikteliği çok önemlidir.

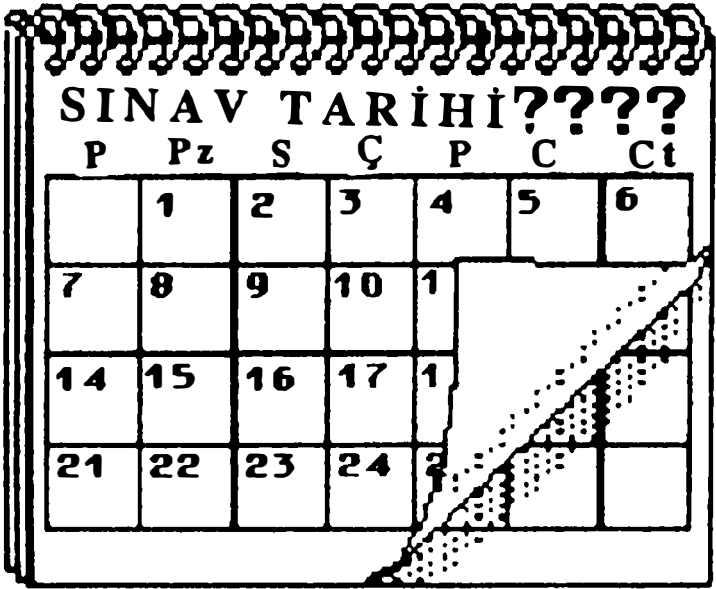


Bu çizimde, bölümler halinde ve bütün olarak bir telin titreşimleri görülüyor. En uzun titreşim, ses perdesini; daha küçük titreşimler, armonileri oluşturur.

Beklenmedik Sınav Paradoksu

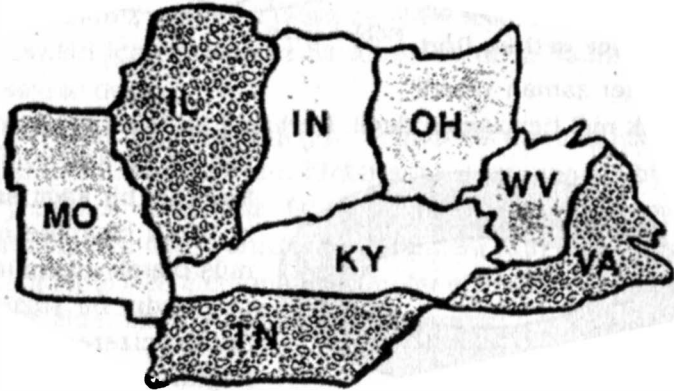
Öğretmen, gelecek hafta beş okul gününden birinde sınav olacağını söyler ve sınıfa şu açıklamayı yapar: "Bu sınavın günü önceden ilan edilmeyecek; ama, saat 13.00'te gireceğiniz sınavı, aynı gün sabah saat 8.00'de öğrenebileceksiniz."

Niçin sınav yapılmayacaktır? bkz. çözümler



Dört Renk Problemi

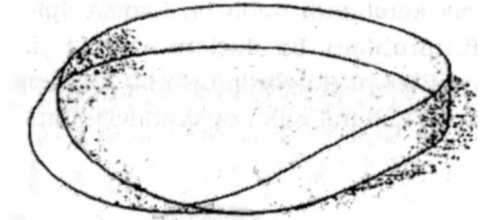
Bir düzlem ya da kürenin üzerine çizilen bir haritada, değişik ülkeleri birbirinden ayırt edecek biçimde boyamak için dört rengin yeteceği, harita çizenlerin eskiden beri bildiği bir kuraldı. 1976'da, ünlü *dört renk problemi* Illinois Üniversitesi'nden K. Appel ve W. Haken tarafından bilgisayar kullanılarak kanıtlandı; ama bu kanıtla ilgili tartışmalar hâlâ sürüyor. Bu problem, bir düzlem üzerine çizilen her haritanın, birbirine komşu iki yörenin farklı renklerde olması koşuluyla, dört renk kullanılarak boyanabileceğinin kanıtlanmasına ilişkindi.



Şimdi de değişik topolojik modeller üzerindeki haritaların boyanmasına bakalım. Topoloji uzmanları simit, Möbius şeridi gibi yüzeylerle uğraşır. Onlara göre, bir küre yüzeyinde bir delik açılıp, düzleştirilerek, bir düzleme dönüştürülebilir. Bu nedenle bir düzlemi ve küreyi boyamak için aynı sayıda boya gerekir. Topoloji, bir cismin biçimi bozulunca (gerilme, büzüşme gibi) değişmeyen özelliklerini inceler: Topoloji ka- uçuk bir levha üzerine çizilen şekillerin geometrisi olarak da düşünülebilir. Bu koşullar altında hangi özellikler değişmeden

kalabilir? Topoloji cisimlerin bozulmasına izin verdiği için, onların büyüklükleri, biçimleri gibi özellikleriyle ilgilenmez; sert ve bükülmez cisimlerle uğraşmaz. Topoloji uzmanları, cismin bir eğrinin içinde ya da dışındaki noktalarının durumları ve yerleri, yüzey sayısı, basit, kapalı bir eğri olup olmaması, iç ve dış bölgelerin sayısı gibi özellikleriyle ilgilenirler. Bu topolojik cisimlerin üzerindeki haritaları boyama problemi, dört renk problemine uymadığı için, yepyeni bir problem ortaya çıkar.

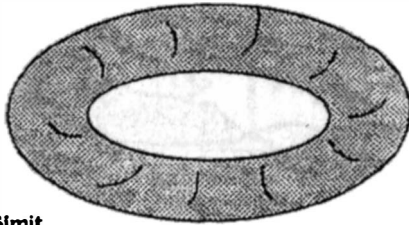
Bir kâğıt şeridin üzerinde çeşitli harita boyama biçimlerini deneyin. Sonra bir ucunu yanına devir (180 derece) döndürüp öbür uca yapıştırarak Möbius şeridi haline getirin. Dört



Möbius şeridi

renk her zaman yeterli

olacak mı? Her zaman değil. Herhangi bir haritayı boyamanız



Simit

için en az kaç renk gerekir? Düz bir kâğıt sayfasını, simit biçimine dönmüş olarak düşünün. Önce kâğıdın bir yüzüne bir harita çizerek boyayın. Kâğıdı silindirik haline dönüştürün ve uçlarını bir araya getirerek, simit biçimi verdiğiniz düşünün. Simiti boyamak için en az kaç renk gerektiğini bulabilir misiniz?

Sonluötesi Sayılar

Aşağıdaki kümelerin kaç elemanı vardır?

$$\{ a, b, c \}$$

$$\{ 1, 5, 6, 4, 1/2 \}$$

$$\{ \}$$

Eğer yanıtınız 3, 5 ve 0 ise, aslında bu kümelerin kardinallerini (nicelik) söylüyorsunuz.

Peki $\{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$ kümesinin kaç elemanı vardır?

Eğer yanıtınız "sonsuz" ise, farklı sonsuz kümeler olduğu için, yanıtınız yeterince kesin değildir. Aslında, sonsuz kardinal sayıları içeren, sonsuz bir küme vardır ki, buna sonluötesi sayılar denir.

Adından da anlaşıldığı gibi, sonluötesi kardinal, sonsuz bir miktan anlatan "sayı"dır. Hiçbir sonlu sayı, sonsuz bir kümeyi yeterince anlatamaz. İki kümenin aynı kardinal sayıyla gösterilebilmesi için, kümelerden birindeki tüm elemanların, diğer kümenin tüm elemanlarıyla, hiçbir eleman açıkta kalmayacak şekilde, bire-bir eşlenebilmesi gerekir.

Örneğin, $\{ a, b, c, d \}$ kümelerinin

$$\begin{array}{cccc} | & | & | & | \\ \hline \end{array}$$

$$\{ 1, 2, 3, 4 \}$$

kardinalleri 4'tür, yani bu kümelerin dörder elemanı vardır.

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n \dots \}$$

$$B = \{ 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots, n^2, \dots \}$$

A ve B kümelerinin kardinalleri eşittir, çünkü kümelerin bütün elemanları gösterildiği gibi bire-bir eşlenebilir. Ama bu, çelişkili gibi gözüküyor, çünkü A kümesinde tam kare olmayan sayılar olmasına rağmen, eşlemenin sonunda hiçbir eleman açıkta kalmıyor.*

19. yy'da Alman matematikçi Georg Cantor, sonsuz kümelerle ilgili yeni bir sayı sistemi yarattı. Sonsuz kümelerin elemanı "sayısı" için, $\aleph$ (alef) simgesini (İbrani alfabesinin ilk harfi) kullandı. $\aleph_0$ (alef sıfır) simgesi, en küçük, sonluötesi kardinal sayıyı belirtmek için kullanılır.

$\aleph_0$ şu kümelerin eleman sayısını belirtir:

pozitif tamsayılar	= { 1, 2, 3, 4, 5, ..., n, ... }
doğal sayılar	= { 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., n-1, ... }
negatif tamsayılar	= { ..., -1, -2, -3, -4, ..., -n, ... }
tamsayılar	= { ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... }
oranlı(rasyonel)sayılar	= { ..., 3/2, 1, 0, 1/8, 3.. }
	= { a/b: a ve b tamsayı, b $\neq$ 0 }

Buradaki n, herhangi bir pozitif tamsayıyı gösterir.

Bütün bu kümelerin ve pozitif tamsayılarla bire-bir eşleştirilebilen diğer kümelerin kardinallerinin $\aleph_0$ olduğu kabul edilir. Aşağıdaki örneklerde pozitif tamsayılarla, çeşitli kümeleri bire-bir eşleştirmenin bazı yolları gösterilmiştir.

{ 1, 2, 3, 4, 5, ... n, ... } pozitif tamsayılar

| | | | |

{ 0, 1, 2, 3, 4, ... n-1, ... } doğal sayılar

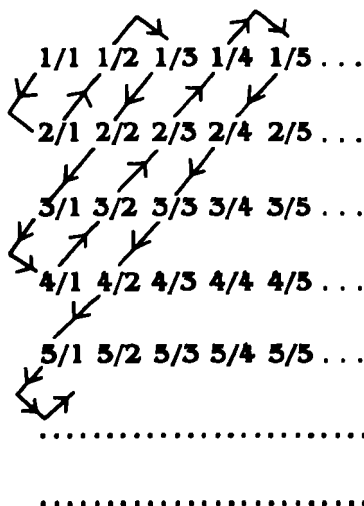
* Çev.not: A kümesinde tüm doğal sayılar, B kümesinde ise yalnızca, doğal sayıların bir alt kümesi olan tam kare sayılar vardır. Bunun için A kümesinin, B'den çok elemanı varmış gibi görünür.

{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, } pozitif tamsayılar

| | | | | | | |

{ 1/1, 2/1, 1/2, 1/3, 2/2, 3/1, 4/1, 3/2, 2/3, ... } pozitif oranlı sayılar

Aşağıdaki çizelgede, pozitif oranlı sayıların nasıl, biraz önce yazdığımız kümedeki şekilde sıralandığı gösterilmiştir.



Bu köşegen yöntemini bulan Cantor, bu yolla, belirli bir düzen içinde, bütün oranlı sayıları kapsayan bir sıralama biçimi bulmuştur.

Cantor, ayrıca sonluötesi sayılar için kapsamlı bir aritmetik sistemi yaratmıştır:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \dots, \aleph_n, \dots$$

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \dots < \aleph_n, \dots$$

olduğunu ve $\aleph_1$ 'in gerçek sayıların, bir doğru parçasındaki noktaların, düzlemin ve diğer çok boyutlu cisimlerin herhangi bir bölümündeki noktaların kardinal sayısını gösterdiğini bulmuştur.

Bir Mantık Problemi

Bu mantık problemi 8. yy. belgelerine dayanır.

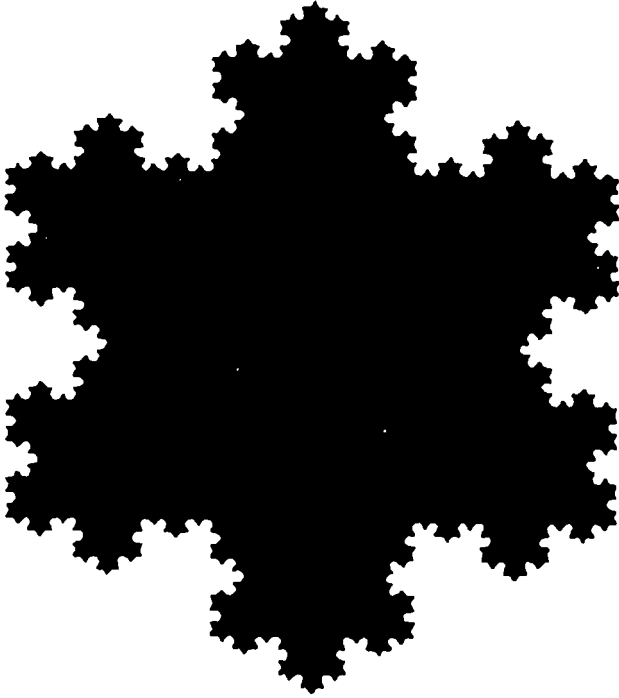
Bir çiftçi keçisini, kurdu ve lahanayı ırmağın karşı kıyısına geçirecektir. Teknesi, kendisinden başka keçi, kurt ve lahanadan yalnızca birini geçirecek büyüklüktedir. Eğer kurdu yanına alırsa, keçi lahanayı yiyecektir. Eğer lahanayı yanına alırsa kurt, keçiyi yiyecektir. Yalnızca çiftçinin varlığı, lahanayı ve keçiyi yok olmaktan kurtarabilmektedir. Çiftçi bunları karşı kıyıya nasıl geçirecektir?

bkz. çözümler

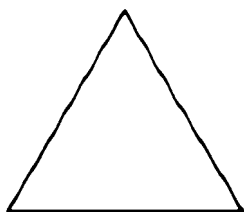


Kar Kristali Egrisi

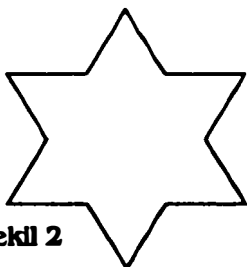
Kar kristali egrisinin adı, çizim ilerledikçe bir kar kristaline benzemesinden gelir.



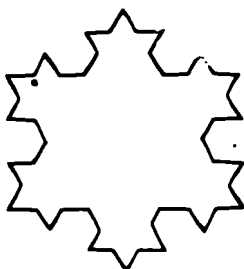
Kar kristali egrisini oluşturmak için 1. şekilde gösterildiği gibi bir eşkenar üçgen çizeriz. Sonra bu üçgenin her kenarını üç eşit parçaya ayırıp, her birinin ortasındaki parçadan dışarıya bakan eşkenar üçgenler çizeriz. Sonra başlangıçtaki üçgenin kenarları üzerinde kalan, bu üç üçgenin tabanlarını sileriz. Böylece 2. şekli elde ederiz. Bu işlemi (her kenarı üçe ayırıp, yeni üçgenler çizip, tabanlarını silmeyi) sürdürürsek 3. şekle ulaşırız. Bu işlemi sürdürerek, kar kristali egrisini oluşturabiliriz.



Şekil 1



Şekil 2



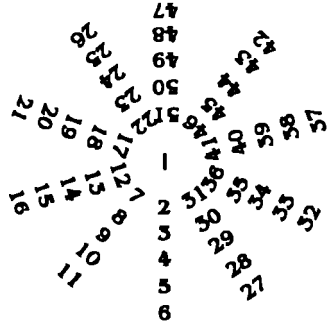
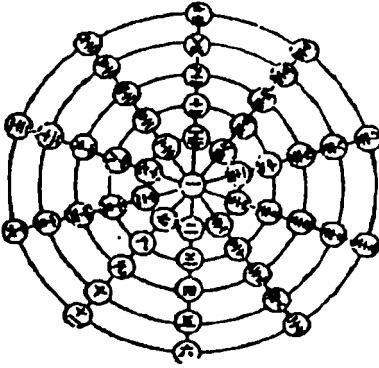
Şekil 3

Kar kristali eğrisinin şaşırtıcı bir özelliği, alanının sonlu, çevresinin sonsuz olmasıdır.

Çevresi sürekli olarak, sınırsız bir biçimde artar. Alanı sonlu olduğu için, bu eğri küçük bir kâğıda çizilebilir. Alanı başlangıçtaki üçgenin $8/5$ 'i kadardır.

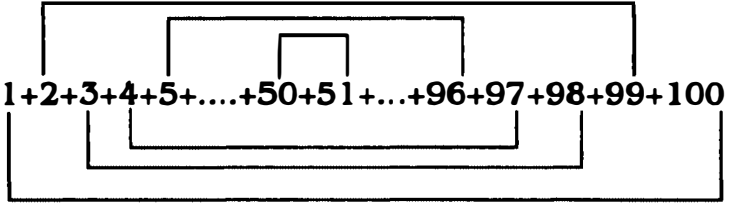
Japon Sihirli Dairesi

Bu Japon sihirli dairesini 17. yy'da Japon matematikçi Seki Kowa yapmıştı. Ayrıca, diferansiyel ve integral hesabın bir biçimini ve denklem sistemlerini çözmeye yarayan matris (değişkenler arasında ilişkiyi gösteren tablo) işlemlerini bulmuştu.



Yukandaki sihirli dairenin bütün çaplarındaki sayıların toplamı birbirine eşittir. Bu sihirli daireyi oluşturmak için kullanılan yöntem, Gauss'un ilk 100 doğal sayıyı toplamak için kullandığı yöntemle benzer.

Söylentiye göre, Gauss ilkokuldayken, öğretmenini sınıftakilere ilk 100 doğal sayıyı toplamalarını ödev olarak verir. Diğer öğrenciler bildikleri eski yöntemle sayıları alt alta yazıp toplamaya başlarken, Gauss düşünmektedir. Öğretmen, onun hayal kurduğunu sanıp, ödevine dönmesi için uyardığında, Gauss problemi çoktan çözdüğünü söyler ve çözümünü gösterir.

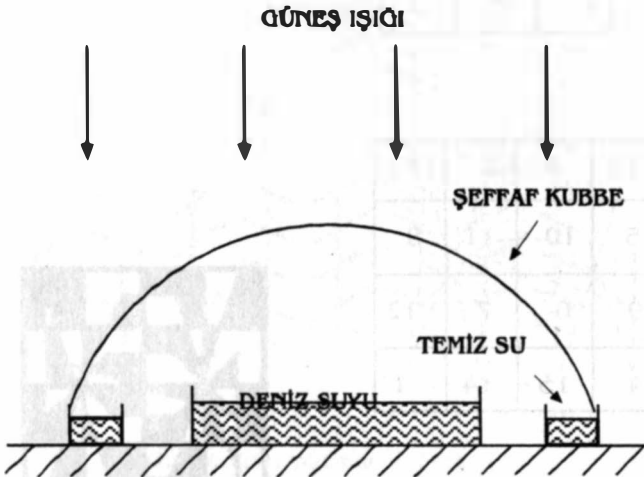


Gauss bütün sayıları, toplamları 101 olan çiftlere ayırmış ve böyle 50 çiftin olduğunu bulmuştur. Böylece toplamın $(50).(101) = 5050$ olduğu ortaya çıkar.

Küre Biçimli Kubbe ve Suyun Arıtılması

Günlük yaşamda, çeşitli geometrik biçimlerin kullanıldığı pek çok alan vardır. Bunun olağandışı bir örneği Yunanistan'ın açığındaki Syml adasındaki güneş enerjisi kullanan su arıtma sistemidir. Yanküre biçimindeki bu sistemle, adada yaşayan 4.000 kişiye, her gün kişi başına 5 litre temiz su sağlanıyor.

Bu sistemde güneş ısısı büyük depodaki deniz suyunu buharlaştırır. Yoğunlaşan ve tuzdan arındırılan su buharı saf su haline gelir. Bu su, şeffaf kubbeden süzülerek kenardaki yerlerde toplanır.



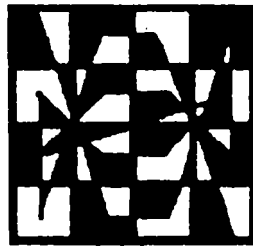
Sihirli "Çizgi"

1900'lerde Claude F. Bragdon, sihirli karelerle nasıl sanatsal desenler yapılabileceğini buldu. Sihirli karedeki birbirini izleyen sayılar art arda birleştirildiğinde sihirli çizgiler olarak adlandırılan ilginç desenlerin oluştuğunu gördü. Aslında sihirli çizgi, bir çizgi değil, çizgilerin oluşturduğu desendir. Bu desenler ya da çizgilerin aralanı sırasıyla siyaha ve beyaza boyandığında, ilginç desenler yaratılır. Bragdon bir mimar olarak, sihirli çizgileri, mimari süslemelerde, kitap ve kumaş desenlerinde kullandı.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Bilinen en eski sihirli kare olan lu şu'nun sihirli çizgisi. MÖ 2200 yılına ait bu sihirli kare Çin'de bulunmuştur.

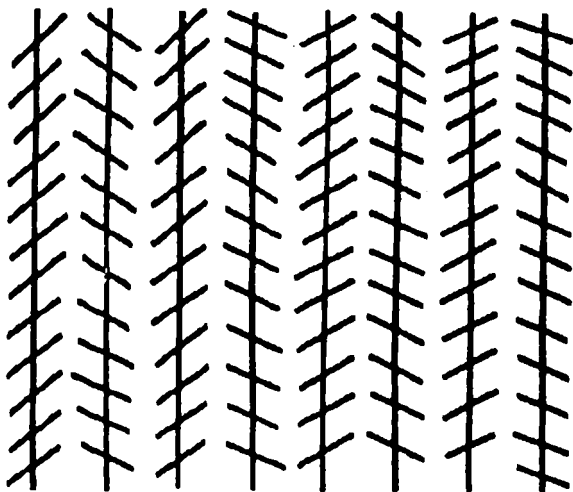
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1



Albrecht Dürer'in 1514'te yaptığı sihirli karenin, sihirli çizgisi.

Gözü Aldatan Görüntülerin Tarihçesi

19. yy'ın ikinci yansında gözü aldatan görüntü olayına büyük bir ilgi vardı. Bu dönemde fizikçiler ve psikologlar tarafından gözü aldatan görüntüler ve bunların nedenlerine ilişkin yaklaşık 200 makale yazılmıştır. Gözü aldatan görüntüler göz yapımız, beynimiz ya da her ikisiyle birlikte yaratılır. Bu nedenle gördüğümüz şeylere dayanarak hemen sonuçlara ulaşmamalı; gördüklerimizi mümkünse gerçek ölçümlerle de doğrulamalıyız.



Zollner'in gözü aldatan görüntüsü

Zollner'in yaptığı bu gözü aldatan görüntü 19. yy'da bu alandaki çalışmalara ilginin başlamasına neden oldu. Astrofizikçi ve astronomi profesörü olan Johann Zollner (1834-1882) kuyruklu yıldızların, Güneş'in ve gezegenlerin incelenmesine katkıda bulunmuş ve ışıkölçer aletini yapmıştır. Çizimi verilen bu kumaş deseni bir gün Zollner'in ilgisini çekti. Dikey çizgiler birbirine paraleldi, ama öyle görünmüyordu. Bu gözü aldatan görüntüye ilişkin bazı açıklamalar şunlardır:

1) *Paralel doğru parçalarının değişik yönlerindeki dar açılann aralarındaki farklılıklar.*

2) *Gözdeki ağtabakanın (retina) kavisli oluşu.*

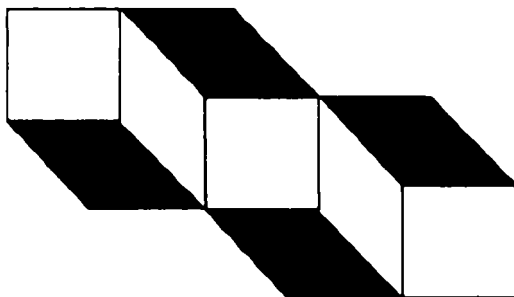
3) *İki kenarı dışbükey olan göz merceği esnek olduğu için birbirinin üzerine bindirilmiş doğru parçalarını yakınlaşıyor ve uzaklaşıyormuş gibi görür; bu da paralel doğruların eğriymiş gibi görünmesine yol açar.*

Gözü aldatan görüntülerin en çok çapraz doğruların, paralel doğrularla 45 derecelik açılar oluşturdukları zaman ortaya çıktığı saptanmıştır.



Bu ünlü gözü aldatan görüntü karikatürcü W. E. Hill tarafından 1915'te yayımlanmıştır.

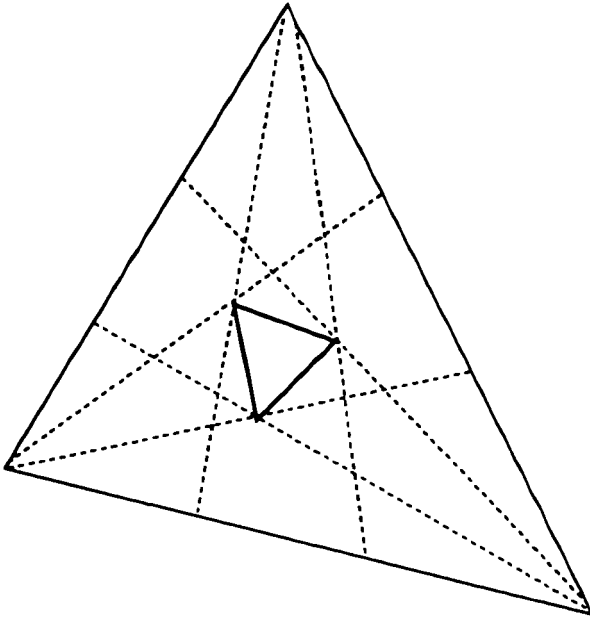
Salınan göz yanılsaması diye tanımlanan bu resimde, gözlerimiz yaşlı bir kadın ile genç bir kız arasında gidip gelir.



Bu küplerin siyah yüzlerini hem üstlerine, hem de altlarına yerleşmiş olarak görebiliyor musunuz?

Eşkenar Üçgenin Doğumu

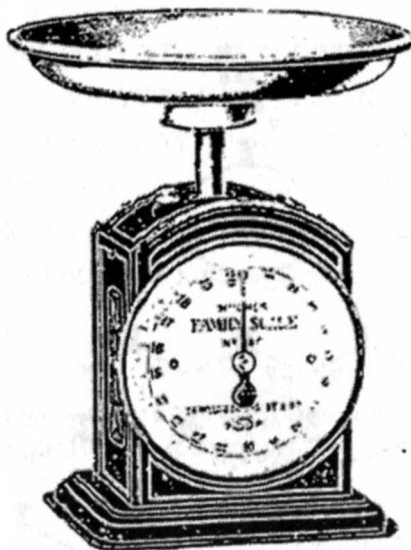
Geometri birçok düşünce, kavram ve teorem ortaya çıkarmıştır. Geometrik cisimlerin çok değişik özellikleri vardır. Örneğin, herhangi bir üçgeni alıp, üç açısını da üç eşit parçaya ayıralım. Sonra açılan bölen bu çizgileri inceleyelim. Şimdi ne görüyorsunuz?¹



1) Açıları üçe bölen bu çizgilerin her zaman eşkenar bir üçgen oluşturdukları kanıtlanabilir. Bu özellik baştaki üçgenin biçimine bağlı değildir; tüm üçgenler için geçerlidir.

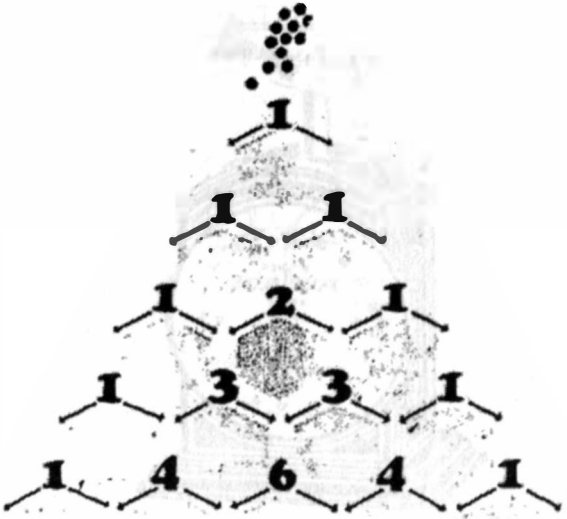
Sahte Para Bulmacası

10 torbada 10'ar gümüş lira olsun. Siz, bir gerçek gümüş liranın ağırlığını biliyor olun. Size, her sahte gümüş liranın, gerçek gümüş liradan 1 gram daha ağır olduğunu ve 1 torba paranın tamamen sahte paralardan oluştuğunu söylüyorlar. Bu problemi çözmek için elinizde bir tartı aleti var. Sahte para torbasını bulmak için en az kaç ölçüm yapmanız gerekir? bkz. çözümler



Olasılık ve Pascal Üçgeni

Aşağıda gösterilen, altıgen kutulardan oluşturulmuş üçgen, kendine özgü bir biçimde Pascal üçgenini ortaya çıkarır. Üstteki depodan bırakılan topar, altıgen engellerin aralarından geçerek, altta toplanır. Her altıgenle karşılaşan topun, onun sağına ya da soluna yuvarlanma şansı birbirine eşittir. Gösterildiği gibi topar Pascal üçgenindeki sayılara göre dağılır. Aşağıda toplanan topar, *düzgün dağılımı* gösteren çan biçimli çan eğrisini oluşturur. Bu eğri, sigorta şirketlerinin primleri belirlemesinde, bilimde moleküllerin davranışlarının incelenmesinde ve nüfus dağılımını bulmak için kullanılır.



Pierre Simon Laplace (1749-1827) bir olayın gerçekleşme olasılığını, olayın gerçekleşebileceği durumların sayısının, toplam olası durum sayısına oranı olarak tanımladı. Diğer bir deyişle, bir madeni parayı havaya attığımızda, tura gelme olasılığı

$$\frac{1}{2} = \frac{\text{madeni paradaki tura sayısı}}{\text{olası durum sayısı (yazı ve tura) olur.}}$$

Pascal üçgeni değişik bileşimleri (kombinasyon) ve toplam olası bileşimleri hesaplamak için kullanılabilir. Örneğin, 4 tane madeni parayı havaya attığımızda gelebilecek olası bileşimler şöyledir:

4 tura -TTTT = 1

3 tura ve 1 yazı -TTTY, TTYT, TYTT, YTTT = 4

2 tura ve 2 yazı -TTYT, TYTY, TYYT, YTTY, YTYT, YYTT = 6

1 tura ve 3 yazı -TYYY, YTTY, YYYT, YYYT = 4

4 yazı -YYYY = 1

Pascal üçgeninin üstten 4. satırı bu olası sonuçları, yani 1 4 6 4 1'i gösterir. Kısaca, 3 yazı ve 1 tura gelme olasılığı:

$$\frac{4}{16} = \frac{(3 \text{ yazı ve } 1 \text{ turadan oluşan bileşim})}{(\text{toplam olası bileşimler})}$$

Büyük bileşim hesaplamalarında Pascal üçgenini uzatarak kullanmak çok sıkıcı olabilir. Böyle durumlarda, Newton'un ikiterimli (binom) teoremi kullanılabilir. Pascal üçgeninin her satırında, ikiterimli $(a + b)^n$ 'in açılımındaki katsayılar bulunur. Örneğin, $(a+b)^3$ 'ün katsayılarını bulmak için en üst satırdan sonra gelen 3. satıra bakılır (en üst satır 0 olarak kabul edilir, çünkü $(a + b)^0 = 1$ 'i verir).

Üçüncü satırda

$$1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 = (a+b)^3$$

ün katsayıları olan 1 3 3 1 vardır. İkiterimli formülü, Pascal üçgeninin "n." satır için kullanılabilir.

İkiterimli formülü:

$$(a+b)^n = a^n + n \binom{n-1}{1} a^{n-1} b^1 + n \binom{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n$$

$$= C(n,0)a^n + C(n,1)a^{n-1}b^1 + C(n,2)a^{n-2}b^2 + \dots + C(n,n)b^n$$

r. katsayı $\frac{n!}{r!(n-r)!}$

n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısı

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

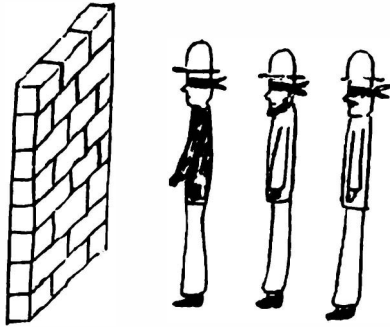
10 cisimden üçerli kaç değişik grup oluşturulabilir?

$$C(10,3) = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 120 \text{ tane}$$

Aynı sonucu Pascal üçgeninin 10. satırındaki sayıları toplayarak da bulabilirsiniz.

Duvar Karşısında Üç Adam

Üç adam duvarın karşısında dikey bir doğru oluşturacak biçimde sıraya dizilir. Gözleri bağlıdır. 3 kahverengi ve 2 siyah şapkanın bulunduğu şapka kutusundan 3 şapka çıkarılıp adamlara giydirilir. Adamlara da bu bilgi verilir. Sonra göz-bağları çıkarılır. Her adama hangi renk şapka giydiği sorulur.



Duvarın en uzağındaki adam önündeki 2 adamın şapkasının rengini gördüğü için "Ben ne renk şapka giydiğimi bilmiyorum" der. Bu yanıtı duyan ve önündeki adamın şapkasının rengini gören ikinci adam da aynı şeyi söyler. Yalnızca duvarı gören ve her iki yanıtı da duyan üçüncü adam,

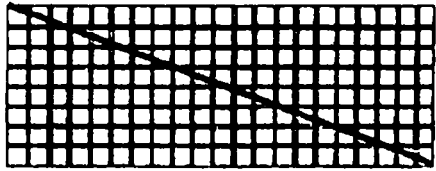
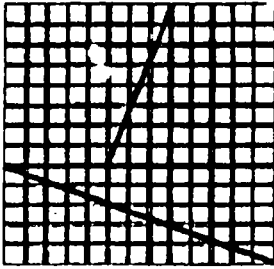
"Ben ne renk şapka giydiğimi biliyorum" der.

Bu adam ne renk şapka giyiyor ve bunu nasıl bildi?

bkz. çözümler

Geometri ve Fibonacci

Eğer Fibonacci dizisindeki birbirini izleyen iki sayının toplamı, bir karenin kenarlarının uzunluğu olarak alınırsa, ilginç bir geometrik aldatmaca ortaya çıkar.



Örnek:

1) Fibonacci dizisinin birbirini izleyen 5 ve 8 sayılarını alın.

2) 13x13'lük bir kare yapın.

3) Şekilde gösterildiği gibi kesin. Şimdi de karenin ve dörtgenin alanlarını bulun. Karenin alanı, dörtgenin alanından 1 birim fazla olacaktır.

4) Aynı işlemi Fibonacci dizisindeki 21 ve 34 sayılar için yapın. Burada dörtgenin alanı, karenin alanından 1 birim fazla çıkacak.

Bir birimlik fark, hangi birbirini izleyen Fibonacci dizisi sayılarının kullanıldığına bağlı olarak kare ile dörtgen arasında değişecektir.¹

1 Birbirini izleyen Fibonacci sayılarından çıkan oranlar dizisi: $1/1$, $2/1$, $3/2$, $5/3$, $8/5$, $13/8$, ..., F_{n+1}/F_n , altın oranın ya üstünde ya da altında olur. Bu dizinin limiti altın orandır: $(1+\sqrt{5}) / 2$

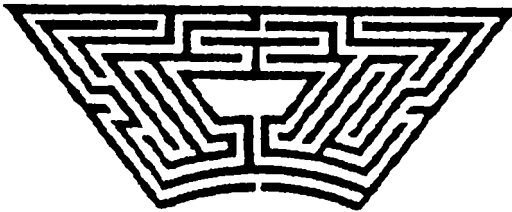
Labirent

Bugün labirent sözcüğü aklımıza eğlenceli bulmacaları getirir; oysa daha önceleri bu sözcük, gizem, tehlike ve karışıklığı akla getirirdi. Eskiçağlarda labirentler kaleleri korumak amacıyla yapılırdı. İşgalci kuvvetlerin labirentte uzun bir süre yollarını bulmaya uğraşması, onların püskürtülmesini kolaylaştırırdı.

Labirentler yüzyıllar boyunca dünyanın değişik yerlerinde yapılmıştır. Bunlardan bazı örnekler:

- İrlanda'daki Kayalık Vadi taş oymaları -yaklaşık MÖ 2000
- Girit Adası'ndaki Minos uygarlığı döneminde yapılan labirent -yaklaşık MÖ 1600
- İtalyan Alpleri, Pompei, İskandinavya
- İngiltere'deki çeşitli bahçe düzenlemeleri
- Avrupa'daki çeşitli kiliselerin yer döşemelerindeki mozaikler
- Afrika kumaş desenleri
- Arizona Hopi yerlilerinin kaya oymaları

Günümüzde psikoloji ve bilgisayar alanlarında labirentlerle özel olarak ilgileniliyor. On yıllar boyunca psikologlar labirentleri, insanların ve hayvanların öğrenme süreçlerindeki



Hampton Court'ta bir bahçe

davranışlarını incelemek amacıyla kullandılar. Günümüzde daha geliştirilmiş öğrenme makinelerinin yapımına ilk adım olarak labirent problemleri çözmeye programlanmış bilgisayar kumandalı robotlar tasarlanıyor.

Matematığın bir dalı olan topoloji, labirentleri graf (çizge) teorisinin bir altbölümü olarak ele alıp inceliyor. Jordan eğrisi, sık sık labirentle *kaşıtılır*. Topolojiden Jordan eğrisinin, kendiyi kesişmeden içeriye doğru bükülmüş bir çember olduğunu öğreniyoruz.

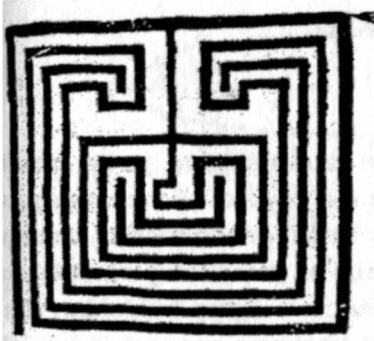
Robotlar labirentleri çözmeye kullanıldığı için, labirentlerin çözümünde sistematik yöntemlerin geliştirilmesi gerekiyor.

Labirentleri Çözme Yöntemleri

- 1) Tek bir labirent için gördüğünüz çıkmaz yollar ve kapalı devreleri karalayın. Geri kalan yollar labirentten çıkış amacına uygun olacaktır. Bunlardan en doğru giden yolu seçin. Eğer labirent çok *kaşıksa* bu yöntemi uygulamak çok zordur.
- 2) Ya sağ ya da sol elinizi labirentin bir duvarından ayırmadan labirentin yollarından geçin. Bu yöntem kolaydır, ama bütün labirent tipleri için uygulanamaz. Bunun istisnaları: (a) iki girişi olan ve girişleri bağlayan yolun çıkıştan geçmediği; (b) çıkışın çevresinde kapalı devre yapan yolların olduğu labirentlerdir.
- 3) Fransız matematikçi M. Trémaux herhangi bir labirenti çözmek için genel bir yöntem geliştirmiştir.

yöntem:

- (a) Labirentte ilerlerken sürekli sağa doğru bir çizgi çizin.
- (b) Yeni bir kavşağa geldiğinizde, istediğiniz yolu seçin.
- (c) Eğer bu yolda eski bir kavşağa ya da çıkmaz yola rastlarsanız, geldiğiniz yoldan geri dönün.
- (d) Eğer bildiğiniz bir yolda geri dönerken, bildiğiniz bir kavşağa rastlarsanız, herhangi bir yeni yola girin. Yeni yol kalmadıysa, bildiğiniz başka bir yola girin.
- (e) İki yanı işaretlenmiş (çizgi çizilmiş) bir yola asla girmeyin.



Novojo yerlilerinin battaniye
desenindeki bir labirent

Belki biraz zaman alır, ama bu yöntemin geçerliliğini tam olarak kanıtlayabilirsiniz.

İster çok büyük, isterse de bir kalemle üstünden gidebilecek boyutta olsun, labirentlerle uğraşmak çekici, gizemli ve eğlencelidir.



WATERLOO CADDESİ Londra labirenti Nisan 1908'de *The Strand* dergisinde şu açıklamayla yayımlandı: "Waterloo Caddesi'nden St. Paul Katedraline gitmek isteyen yolcu, yol tamiri için konan engellere takılmadan amacına ulaşmalıdır."

Konikler

Çogu kişi matematikçilerin yalnızca ilginç, ya da merak uyandırıcı olduğu için bir problemin ya da düşünceinin peşine düşmelerini şaşırtıcı bulur. Eski Yunan düşünürlerine baktığımızda, onların çeşitli düşünceleri o an yararlı olup olmadığına bakmadan, yalnızca heyecan verici ve ilginç buldukları için araştırdıklarını görürüz. Konikleri araştırmalarında da böyle olmuştı.

Bu eğrilerle ilgilenmelerinin başlıca nedeni, üç eski çizim problemini (daireyi kareleştirmek, küpü iki katına çıkarmak, bir açığı üç eşit parçaya ayırmak) çözmek içindi. Bu problemlerin o dönemde hiçbir uygulama alanı yoktu ama düşünsel olarak ilginç problemlerdi ve matematiksel düşünceyi derinden etkilediler.

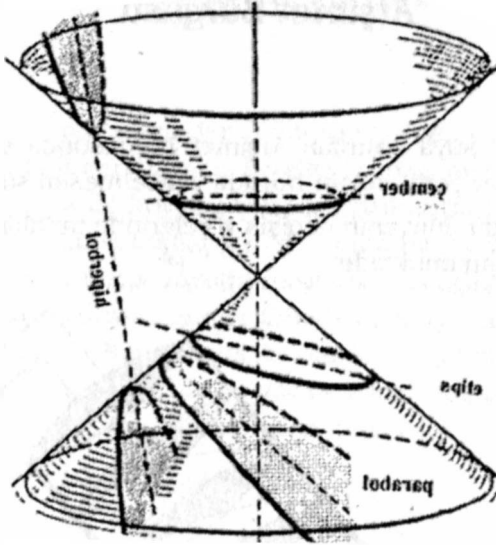
Genellikle belirli bir matematiksel düşüncenin uygulamaya geçirilebilmesi yıllar alır. MÖ 3. yy'da yaratılan konikler, 17. yy. matematikçilerinin çeşitli eğriler hakkındaki teorileri, formül haline getirmelerinin temeli oldu. Örneğin, Kepler gezegenlerin yörüngelerini elipsler kullanarak tanımladı. Galileo mermilerin yörüngelerinin parabol biçimli olduğunu buldu.

Şekilde çift koniyi kesen bir düzlemin nasıl çember, elips, parabol ve hiperbol oluşturduğu gösterilmiştir.

Soru: Düzlem, koniyi bir doğru, iki kesişen doğru ya da bir nokta oluşturacak şekilde nasıl kesebilir?

Evrende bu eğrileri oluşturan birçok örnek bulunur. Güncel ve ilginç bir örnek de elips biçiminde yörüngesi olan Halley kuyruklu yıldızıdır.*

* Bkz. Halley kuyruklu yıldızı



Bu eğrilerin evrende görüldüğü yerler:

parabol:

fışkıran suyun çizdiği yay

el fenerinin düz bir yüzeye düşen ışın demetinin şekli

elips:

bazı gezegen ve kuyruklu yıldızların yörüngeleri

hiperbol:

Bazı kuyruklu yıldızlar ve diğer gök cisimlerinin yörüngeleri

çember:

su yüzeyinin taş atınca dalgalanması

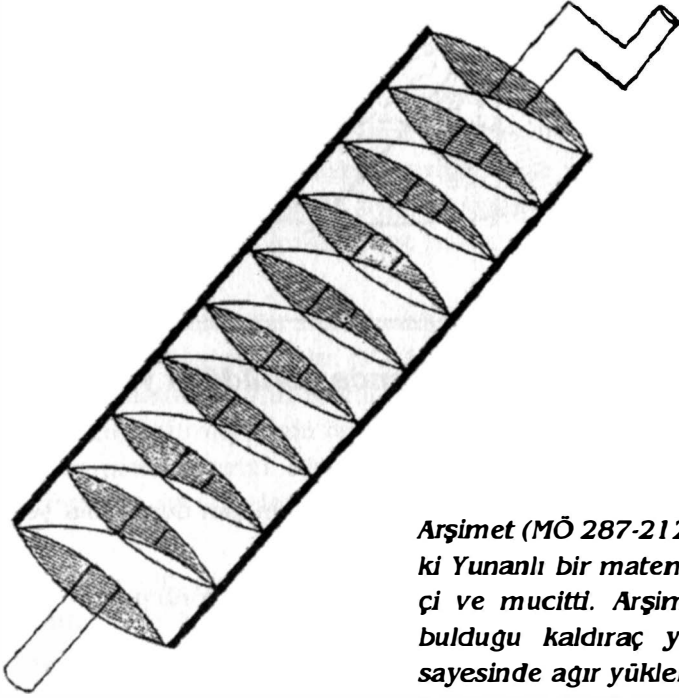
dairesel yörüngeler

tekerlek

Arşimet Burgusu

Bir ucu suya batırılan Arşimet burgusunda sürekli dönen sarmal bir şerit, suyun boruda yükselmesini sağlar.

Bu burgu dünyanın değişik yörelerinde tarlaları sulamak için hâlâ kullanılmaktadır.

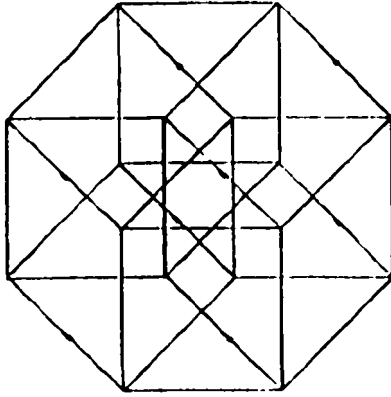


Arşimet (MÖ 287-212) Eski Yunanlı bir matematikçi ve mucitti. Arşimet'in bulduğu kaldırma yasası sayesinde ağır yükleri kolayca kaldırabilen makineler (makaralar) yapıldı. Ayrıca, suya batırılmış nesnelerin hacimlerini karşılaştırma yöntemini

(hidrostatik suyun kaldırma kuvveti diferansiyel ve integral hesabın kullanılması), mancınığı ve dev aynaların yardımıyla güneş ışınlarını belirli bir yere odaklamayı bulmuştur.

Kaç Boyut Vardır?

Magara resimlerinden Rönesans ressamına, Bizans kilise resimlerinden izlenimcilere kadar uzanan resim sanatında, ya iki ya da üç boyutlu varlıklar çizilmiştir. Sanatçılar, bilim insanları, matematikçiler ve mimarlar kendilerine göre nesnelerin dördüncü boyutta nasıl görüneceğini yorumlamışlardır. Buna bir örnek, mimar Claude Bragdon'un 1913'te çizdiği *4-boyutlu* bir küp olan hiperküptür. Bragdon tasarımlarında hiperküpü ve diğer *4-boyutlu* desenleri kullanmıştır. Bunlardan biri Rochester Ticaret Odası binasıdır.

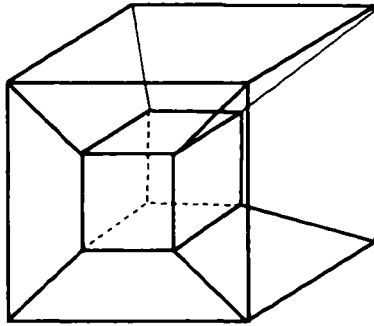


Claude Bragdon'ın çizdiği hiperküp

Üçüncü boyutun ötesindeki diğer boyutların düşünülmesi her zaman ilgi çekici olmuştur. Matematiksel olarak diğer boyutların da olması, mantıksal bir düşünce zincirinin sonucudur.

Örneğin, *0-boyutlu* bir nesne olan noktayla işe başlayalım. Noktayı sağa ya da sola bir birim ilerletirsek, bir doğru parçası oluşur. *Doğru parçası 1-boyutlu* bir nesnedir. Şimdi de doğru parçasını bir birim yukarı ya da aşağı kaydırarak bir ka-

re oluşturalım. *Kare*, 2-boyutlu bir nesnedir. Aynı işlemi sürdürerek kareyi alıp bir birim içeriye ya da dışarıya doğru ilerletirsek, 3-boyutlu bir nesne olan küpü oluşturmuş oluruz. Bundan sonraki adım küpü dördüncü boyuttaki yönlerden birine doğru, bir birim ilerlettigimizi düşünmektir. Böylece tesseract adıyla da anılan hiperküp oluşturulur. Benzer bir biçimde, 4-boyutlu bir küre olan hiperküreye de ulaşılabilir. Ama matematik dördüncü boyutla sona ermez; n-boyutları da ele alır. Değişik boyutlardaki nesnelerin köşeleri, kenarları ve yüzleriyle ilgili bilgiler toplanıp, düzenlendiğinde şaşırtıcı matematiksel sonuçlar ortaya çıkar.



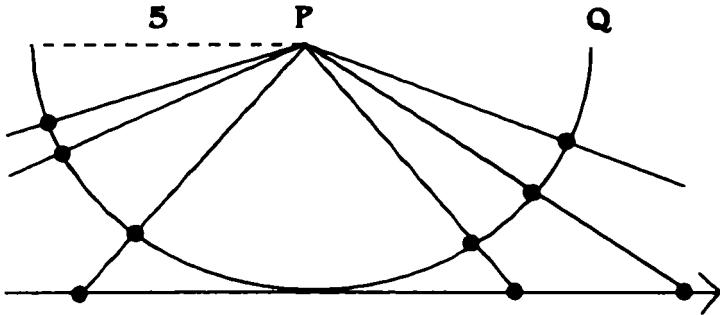
Tesseract

Dördüncü boyutun varlığı birçok insanın ilgisini çekmiştir. Ressamlar ve matematikçiler nesnelerin dördüncü boyutta nasıl görüneceğini hayal etmeye ve çizmeye çalıştılar. Şekillerde görülen tesseract ve hiperküp, küpün 4-boyutlu gösterimleridir. Bir kâğıda çizilen küp 3-boyutlu olduğunu daha iyi yansıtmak için perspektif kullanılarak çizilir. Yani kâğıda çizilen bir tesseract, perspektifin perspektifidir.

Sonlu mu? Sonsuz mu?

Şekilde, sonlu uzunlukta olan yarım çemberi oluşturan noktaların, sonsuz uzunluktaki bir doğruyu oluşturan noktalarla nasıl bire-bir eşlendiği gösterilmiştir. Bu yarım çemberin çevresi 5π birimdir. Yarım çembere teğet olan doğru, sonsuz uzunluktadır. Bitiş noktası P olan bir ışın (yan doğru = bir ucu sınırlandırılmış, öbür ucu sonsuza giden doğru parçası) hem yarım çemberi, hem de doğruyu keser. Böylece yarım çemberi kestiği nokta ile doğruyu kestiği nokta bire-bir eşlenmiş olur. Işın, yarım çemberi keserek ilerlemeyi sürdürür; PQ ışınına yaklaştıkça, doğruyu gitgide daha uzak noktalarda kesmeye başlar.

Işın PQ durumuna gelince ne olur?



1 Işın, doğruya paralel duruma gelir.

Matematik ve Sabun Köpüğü

Ne tür matematiksel kavramlar, sabun köpüğüyle ilgili olarak kullanılabilir? Sabun köpüğü tabakasında oluşan şekiller, yüzey gerilimiyle belirlenir. Yüzey gerilimi, yüzeyin alanını daraltır. Bunun sonucunda her sabun köpüğü kabarcığı daha az hava içerir ve yüzeyin alanı, belirli bir miktar hava için, en aza iner. Bu, tek bir sabun kabarcığının küre biçiminde, kabarcıklar kümesinin şeklinin ise daha değişik olmasını açıklar. Sabun köpüğünde, sabun kabarcıklarının üç kenarı üçlü kesişim noktasında buluşur ve 120 derecelik açılar oluşturur. Doğadaki pek çok olguda da (balık pulları, muzun içi, mısır taneleri, kaplumbağanın kabuğundaki tabakalar gibi) üçlü kesişim noktası görülür ki bu, doğanın bir denge noktasıdır.

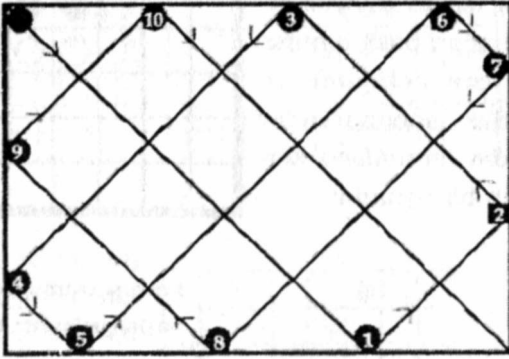


Bilardo Masasının Matematiği

Matematik bilmenin bilardo oynamaya yardımcı olacağı kimin aklına gelir? Kenarları tamsayı oranlarda olan (7'ye 5 gibi) dikdörtgen bir bilardo masasını ele alalım. Köşeden 45 derecelik açıyla atılan top, masanın kenarlarındaki bantlara belirli bir sayıda çarpıp geri döndükten sonra köşelerden birinde durur. Aslında topun bantlardan dönme sayısı masanın boyutlarına bağlıdır. Bir köşeye ulaşmadan önceki bantlardan dönüşlerin sayısı şu formülle gösterilir:

masanın boyu + eni - 2.

başlangıç noktası



10 kez banttan döndükten

sonraki bitiş noktası

Yukardaki masada toplam 10 banttan dönüş olmuştur:

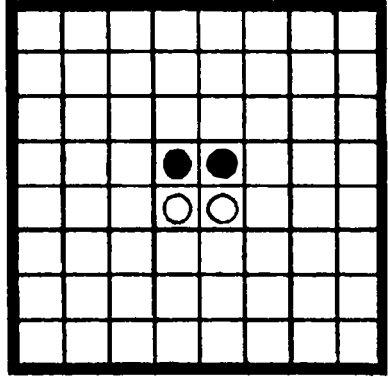
$$7+5 - 2 = 10.$$

Topun gideceği yolu, oluşan ikizkenar dik üçgenlerin belirlediğine dikkat edin.

Reversi Oyunu

Reversi, 1800'lerde yaygınlaşan bir oyundur. Günümüzde bu oyunun birçok değişik biçimi vardır. Bir biçiminde altı yüzü farklı renkte boyanmış bir küp kullanılır; böylece altı kişi aynı anda oynayabilir. Bilgisayar oyunu olarak da bulunan bu oyunu, bilgisayarla değişik hız ve zorluk derecelerinde oynayabilirsiniz.

Reversi, satranç tahtasında, yüzleri farklı iki renkte olan 64 taşla oynanır. Adından da anlaşılacağı gibi oyunun amacı taşları tersyüz etmektir. Kuralları basit olmasına karşın çok çekişmeli ve hızlı oynanan, sonuna kadar beklenmedik durumlarla karşılaşılabilen bir oyundur.



Reversi oyununda olası başlangıçlardan biri

Oyunun Kuralları

- 1) Her oyuncu 32 taşla başlar. Herkes rengini seçerek, sırası gelince taşlarını yerleştirir.
- 2) İlk 4 taş ortadaki 4 kareye yerleştirilmelidir. Bazı olası başlangıçlar şekilde gösterilmiştir.
- 3) Her oyuncu, sırası geldikçe, taşını rakibinin taşının bulunduğu bir karenin yanına koyar. Amacı rakibinin taşlarını ele geçirmektir.

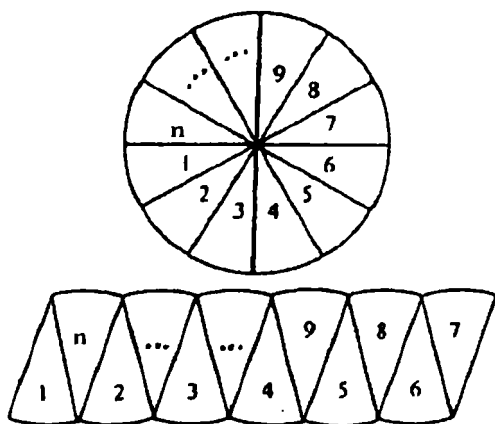


- 7) *Eger oyunculardan biri hamlesinde, hiçbir taşı ele geçiremezse, sıra karşı oyuncuya geçer.*
- 8) *İki oyuncu da hiçbir taşı ele geçiremeyecek bir duruma gelince oyun biter.*
- 9) *Oyun tahtasında en çok hangi renk taş varsa, o renkteki taşlara sahip olan oyuncu, kazanmış olur.*

İYİ EĞLENCELERİ

Kepler'in Dairenin Alanını Bulma Yöntemi

Johannes Kepler (1571-1630) dairenin alanı formülünün nasıl türetildiğini açıklayan, çok ilginç bir yöntem geliştirdi.



Daireyi eş, ikizkenar üçgenler biçiminde "n" dilime (daire kesmesi) ayırdığımızı düşünelim. Bu ikizkenar üçgenleri, daireden elde ettiğimize göre, her birinin yüksekliği, dairenin yarıçapına eşit olmalıdır. Şekildeki gibi bir araya getirildiklerinde, paralelkenara benzer bir biçim oluştururlar. Paralelkenarın alanı, taban uzunluğu ile yüksekliğin çarpımıdır. Bu durumda, paralelkenarın tabanı, dairenin çevresinin yansı yani $(1/2)2\pi r = \pi r$ uzunluğundadır. Paralelkenarın yüksekliği, onu oluşturan ikizkenar üçgenlerden birinin yüksekliğine yani r 'ye eşittir. Böylece, dairenin alanı = paralelkenarın alanı = $(\pi r) \cdot r = \pi r^2$ olarak bulunur.

Paradokslar

"Ünlü paradokslar, on yıllar bazen de yüzyıllar boyunca mantıksal düşünceyi beslemiştir"

Nicolas Bourbaki

"Bu sayfada yazılı olan hiçbir şeyi okumayın." Buna benzer paradokslar ya kendileriyle çelişiyor gibi görünür, anlamsız ya da şaşırtıcı sonuçlara varır; ya da kısır döngü biçimindedir (dönüp dolanıp başlangıç noktasına gelir). Paradokslar yüzyıllar boyunca insanları büyülemiş ve hayrete düşürmüştür. Paradokslara edebiyat, bilim ve matematikten, günlük yaşama kadar çok değişik alanlarda rastlanır. Ne tür bir paradoks olursa olsun, ortaya çıkan sorular ve kanışıklık hem ilginç, hem de eğlendiricidir. Özellikle matematiksel paradokslar yeni buluşlara yol açabilir. Bazı bilinen paradokslardan örneklerle bakalım.

MÖ 5. yy'da Zenon, sonsuzluk, diziler ve kısmi toplamlarla ilgili bilgilerine dayanarak şu paradoksları düşünmüştü:

İkide Bölme Paradoksu: Yolcu, belirli bir uzaklığa gidecektir. Önce gideceği yolun yansını; sonra kalan yolun yansını; sonra kalanın yansını,... yürümek zorundadır. Bu durumda hiçbir zaman gideceği yolun sonuna ulaşamayacaktır. *

Aşıl ve Kaplumbağa Paradoksu: Aşıl ile kaplumbağa arasında bir yarış olacaktır. Kaplumbağa yarıya 1000 metre ileriden başlayacaktır, çünkü Aşıl kaplumbağadan 10 kez daha hızlı koşabilmektedir. Yarış başladığında ve Aşıl 1000 metre ilerlediğinde, kaplumbağa 100 metre ileridedir. Aşıl bu 100 metreyi aştığında, kaplumbağa gene 10 metre önündedir. Zenon'a göre Aşıl sürekli olarak kaplumbağaya yaklaşacak, ama onu hiçbir zaman yakalayamayacaktır. Bu akıl yürütme doğru mudur? * *

* bkz. 'Küçük Yerlerdeki sonsuzluk'

** bkz. 'Zenon Paradoksu'

Eublides Paradoksu: Eski Yunanlı düşünür Eublides (MÖ 4. yy.) hiçbir zaman bir kum yığını oluşturulamayacağını iddia etmiştir. Ona göre, 1 kum tanesi, bir kum tepesi ya da yığını değildir. Ve eğer bir kum tanesinin üstüne başka bir kum tanesi konursa, bunlar da bir kum yığını oluşturmaz. Eğer başlangıçta kişinin bir kum yığını yoksa, elinde olana bir ekleyerek bir yığın oluşturulamaz; bu nedenle hiçbir zaman bir kum yığınına sahip olunamaz. Eublides ayrıca şu paradoksla da tanınır:

“Yaptığım açıklama yanlıştır.”

Epimenides Paradoksu (Yalancı Paradoksu): Epimenides Giritli’ydi ve paradoksu şöyleydi: “Bütün Giritliler yalancıdır.”

Cebirsel Paradokslar: Cebirsel paradokslar sayısaldır. İşte bunlardan birkaçı:

Eğer $a = b$ ise $1 = 2$ ’dir.

Kanıt:

$$\begin{aligned} a=b &\rightarrow a^2=ab \rightarrow a^2b^2=ab \cdot b^2 \rightarrow \\ (a^2 \cdot b^2) / (a \cdot b) &= (ab \cdot b^2) / (a \cdot b) \rightarrow \\ (a \cdot b) (a+b) / (a \cdot b) &= b(a \cdot b) / (a \cdot b) \rightarrow a+b = b \rightarrow \\ a+a-a &\rightarrow 2a-a \rightarrow \therefore 2=1 \text{ ya da } 1=2 \end{aligned}$$

1= 1’in kanıtı:

$$\begin{aligned} -1 &= (\sqrt{-1}) = (\sqrt{-1}) \cdot (\sqrt{-1}) \\ &= \sqrt{(-1)} (-1) = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

Walt Kelley Paradoksu: “Düşmanla karşılaştık ve o bizziz.”

Berber Paradoksu: Bu paradoks 1918’de çıkmıştır. Bir köyde, bir berber, kendi traş olmayan herkesi traş eder. Berberi kim traş edecek?

* bkz. ‘Zenon Paradoksu’

Oscar Wilde Paradoksu: "Günah işlememenin tek yolu onu kabul etmektir."

Don Kışot Paradoksu: Sanço Panço, Barataria adasının yöneticisidir. Adaya gelenler niye geldiklerini belirtmek zorundadır. Eğer doğruyu söylerlerse serbest kalacaklar, yalan söylerlerse asılacaklardır. Günün birinde bir yolcu gelir ve "Ben asılmak için buradayım" der. Şimdi Sanço ne yapmalı?

Anonim bir Paradoks: "Bu açıklamayı yok sayın."

Sonsuzlukla İlgili Paradoks:

{ 1, 2, 3, 4,...,n,... } doğal sayılar

{ 1, 4, 9, 16,...,n²,... } doğal sayıların kareleri

Bu iki küme bire-bir eşlenebilir. Bu kümelerin eleman sayıları nasıl birbirine eşit olabilir?

Cantor Paradoksu: Küme teorisinin babası Georg Cantor (1845-1918) kümelerin alt kümelerinin, asıl kümeden daha çok elemanı olduğunu göstermiştir. Bu, bütün kümelerin kümesi için de geçerli midir?

Russell Paradoksu: Bertrand Russell'ın (1872-1970) paradoksu küme üyeliğine ilişkindir. Bir küme ya kendisinin bir üyesidir, ya da değildir. Kendisinin bir üyesi olmayan kümelere düzenli diyelim. Örneğin, "insanların kümesi"nin kendisi, bir insan olmadığı için, kendisinin bir üyesi değildir (kendini içermez). Kendisini içeren kümeleri düzensiz olarak adlandıralım. Örneğin, "beş elemandan fazla elemanı olan kümelerin kümesi" kendini içerir. "Bütün düzenli kümelerin kümesi" düzenli midir? yoksa düzensiz midir? Eğer düzenliyse; kendinin bir üyesi olamaz. Tüm düzenli kümeleri içerdigine göre ve kendisinin de düzenli olduğunu kabul ettiğimiz için, kendisini içermelidir. Ama eğer kendisini içeriyorsa, tanıma göre düzensizdir. Düzenli olduğunu varsayıp, düzensiz olduğu çelişkili sonucuna vardık. Diğer taraftan, eğer düzensiz ise, kendisini elemanı olarak içerir. Ama elemanlarının sadece düzenli kümeler olduğunu biliyoruz. Demek ki düzensiz ise düzenli ol-

duğu sonucu ortaya çıkıyor. Russell paradoksu, Alman matematikçi Gottlob Frege'e büyük bir darbe indirmiştir. Frege, bu paradoksu öğrendiğinde, aritmetiğin mantıksal gelişimi hakkındaki kitabının ikinci cildini yeni bitirmişti. 2. cildin ek bölümü şöyle başlar: "Bir bilim insanı için en üzücü olay, yapıtı tam bitmişken, temellerinin çökmesidir. Bertrand Russell'ın bana gönderdiği mektup sonucunda, bu duruma düştüm..."

Bunlar paradoksların yalnızca küçük bir kısmıdır. Paradokslar bilinçlice ya da bilinçsizce sürekli yeniden yaratılmaktadır. Günlük yaşamımızda ya da matematiksel düşüncelerle uğraşırken, bir paradoks hem gözümüzü korkutabilir, hem de öğrenme aracı olur. Matematik değişik yollardan gelişir. Bir problemin üstünde çalışan matematikçi, yeni bir yol bulabilir ya da yeni bir matematiksel sistem yaratabilir (örneğin, Öklit dışı geometrinin bulunması). Öte yandan, matematikçi matematik kullanarak, gerçek dünyadaki bir şeyi tanımlamaya ya da açıklamaya çalışabilir; bunun için yeni düşünceler geliştirir (örneğin, fraktaller ve kaos teorisi). Bu süreçte isteyerek ya da istemeyerek paradokslar çıkabilir. Kanıtlamaksızın genellemeler yapmak, sıfır ile bölmek, yine kanıtlamaksızın bir şeyin var olduğunu varsaymak ve tanımlara dikkat etmemek gibi bazı davranışlar şaşırtıcı paradokslar yaratmıştır. *

Bazı önemli paradokslardan örnekler:

Curie'nin üçgen paradoksu, Euler paradoksu, Grelling paradoksu, sonsuz gerileme paradoksları, Leibnitz paradoksu, harita paradoksu, Protogoras paradoksu, Newcomb paradoksu, Petersburg paradoksu, geçişken olmayan paradokslar.

7, 11, 13 ve Bazı Tek Sayılar

Üç basamaklı herhangi bir sayı (abc) alalım. Bu sayının rakamlarını iki kez yan yana yazarak yeni bir sayı (abc abc) oluşturalım. Bu yolla oluşturulan bütün sayılar 7, 11, 13, 77, 91, 143 ve 1001'e bölünebilir! Nasıl?

762

762.762

$$762.762 \div 7 = 108.966$$

$$762.762 \div 11 = 69.342$$

$$762.762 \div 13 = 58.674$$

$$762.762 \div 77 = 9.906$$

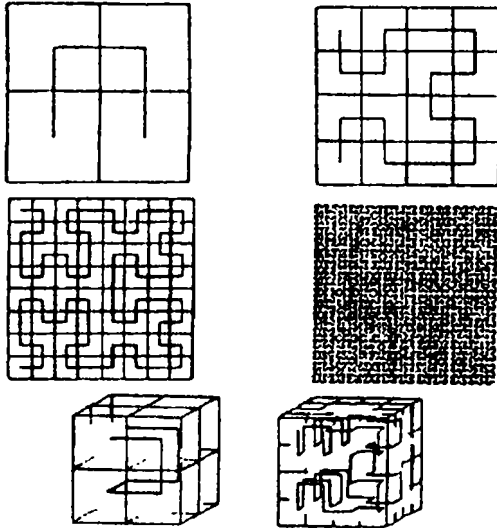
$$762.762 \div 91 = 8.382$$

$$762.762 \div 143 = 5.334$$

$$762.762 \div 1001 = 762$$

Boşluk Dolduran Eğriler Ve Nüfus

Belirli bir düzlemde ya da üç boyutlu uzayda her nokta işaretlenir ve boşluk dolduran eğri, yavaş yavaş bütün boşlukları kaplar. Bu eğrinin genişleme biçimi nüfus artışına benzer. Peano boşluk dolduran eğrisi, bu eğrinin belirli bir alanda nasıl sürekli genişlediğini gösterir. Bir kentin ya da dünyanın nüfusu belirli sınırlar içinde sürekli genişliyor. Fraktalleri, boşluk dolduran eğrileri ve bilgisayarları kullanarak dünyanın değişik yörelerinde gelecekteki nüfus yoğunlukları tahmin edilebilmektedir.



Bu ömekte boşluk dolduran eğrinin, bir küpü bütünüyle kaplamasının aşamaları görülmektedir.

İlk Hesaplama Aletleri

Matematiksel uygulamalarda, büyük sayıların çarpımı, bölünmesi, kare ve küpköklerinin alınması kadar yorucu bir iş olamaz... Bu nedenle, bu sıkıcı işlerden nasıl kurtulunabilir diye düşünmeye başladım.

John Napier

Fazla uzak olmayan bir geçmişte sürgülü hesap cetveli bilim dünyasında ve öğrenciler arasında taşınabilir bir hesap makinesinin işlevini görüyordu. Günümüzde bu cetvellerin yerini

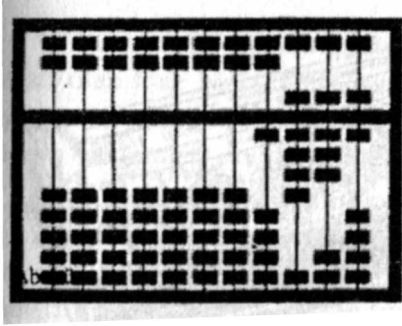


Kuipu, İnkalar'ın kullandığı bir hesaplama düzeneği idi. Düğüm atılmış iplerden oluşuyordu ve bütün İnka imparatorluğunun hesapları bunun üzerine kaydedilmişti.

programlanabilen küçük hesap makineleri almıştır. Bu makinelerle çok basamaklı sayılarla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme yapılabilmekte, n . kök ve üsler bulunabilmekte, π ve e değerleri hesaplanmakta, ölçü sistemleri birbirine dönüştürülebilmekte, borçların geri ödeme süreleri hesaplanabilmekte ve hatta fonksiyon hesaplarıyla onların grafikleri çizilebilmektedir. Şimdiki ileri teknoloji ürünü makinelerin evrimine bakmak ilgi çekicidir.

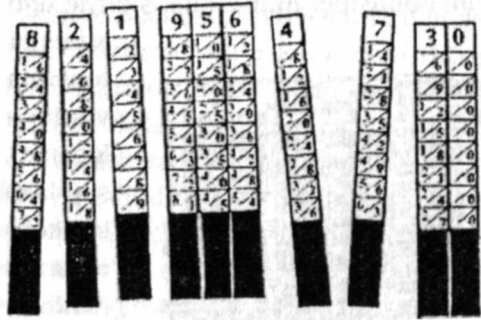
Bizim ilk hesap makinemiz ellerimiz(di). Zamanla aynı dili konuşmayan tüccarlar ve diğerleri arasında el sayı dili gelişti. Günümüzde de genç öğrenciler sayarken parmaklarını kullanırlar.

Sayısal rakamlar 10 parmağımızı aşınca, yeni yöntemler araştırılmaya başlandı. Çakıl taşlarıyla sayıla-



rın belli gruplara ayrılması-
na, çakıl taşı yöntemi dendi.
Ama bu yöntemle işin çoğu-
nu insan yapıyordu. Bu sıra-
larda, taşınabilir bir çakıl ta-
şı aleti yapma düşüncesi or-
taya atıldı. Bundan abaküs
geliştirildi. Çin, Eski Yunan
ve Roma'da değişik tür aba-

küsler kullanıldı. Günümüzde de Asya'nın birçok yöresinde
abaküs kullanılmaktadır. Çinliler MÖ yaklaşık 542'de bambu
kamışlarla hesaplama yapıyorlardı. Onların bu abaküsüyle
dünyanın geri ka-
lan bölümü 12.
yy'da tanıştı. Ve
bundan sonraki
yüzyıllar boyunca
abaküs geleneksel
hesaplamalar için
yeterli sayıldı.¹ Ma-
tematikçiler ya çok
büyük ya da çok
küçük sayılarla ve
karışık ondalık ba-

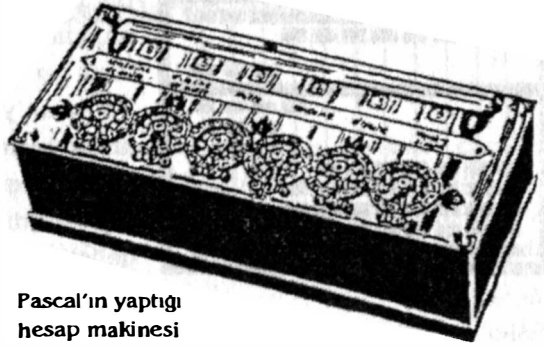


Napier kemikleri

samakları içeren problemlerle uğraşmaya başlayınca abaküs
yetmez oldu; elle hesaplama hem çok uzun zaman almaya
başladı, hem de yanlışlara yol açıyordu. Yeni bir yöntem bu-
lunmalıydı. 17. yy'da İskoç John Napier, Napier kemikleri de-
nen logaritma çubuklarını keşfetti. Böylece tüccarlar hesapları
için fildişi ya da tahtadan yapılmış bir takım Napier kemiği ta-
şımaya başladı. Logaritma keşfedilmeseydi, yaklaşık 1620'de
İngiltere'de Edmo und Gunter sürgülü hesap cetvelini keşfe-

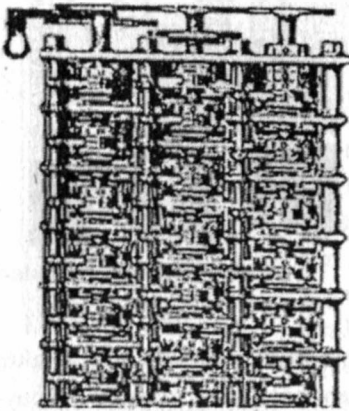
1 Gemiciler, yıldızların ve gökyüzünün haritasını çizebilmek için özel he-
saplama yöntemlerine gerek duyuyorlardı. Bu iş için eski çağlarda ustur-
lab ya da astrolab kullanılıyordu. Daha sonra usturlabın yerini sekstant al-
dı (1757).

demezdi. Logaritma matematiği ile birlikte üslerin ve köklerin bulunmasını, karışık bölme ve çarpma işlemlerini kolaylaştıran kapsamlı logaritma tabloları yayımlandı.



Pascal'ın yaptığı hesap makinesi

1642'de Fransız matematikçi Blaise Pascal 18 yaşındayken ve babasının muhasebe işleriyle uğraşırken ilk hesap ma-



Babbage'ın diferansiyel makinesi

kinesini yaptı. Bu makine toplama ve çıkarma yapabiliyordu; ama kullanımı yaygınlaşmadı, çünkü tüccarlar hesap işlerini yaptıracak insanlar kolaylıkla buluyorlardı ve onlara ödenen ücret, makinenin maliyetinin ve bakım masrafının altındaydı. Ama bu makine daha gelişkin makinelerin yapımında ilk adım oldu. 1673'te Alman matematikçi Gottfried Wilhelm von Leibnitz çarpma ve bölme yapabilen bir hesap ma-

kinesi yaptı. Bu makineler ilk biçimleriyle mükemmel değildi; ama çok önemli başlangıçlardı, sürekli olarak geliştirildiler ve sonunda günümüzün hesap makinelerine ulaşıldı. 1812 civarında İngiliz Charles Babbage, basılan tren tarifeleri ve başka çizelgelerdeki yanlışlıklardan usanarak, verileri önceden belirlenen amaçlara göre işlemek üzere programlanabilen bir makine yapmaya karar verdi.

Ne yazık ki, o dönemin teknolojisiyle bu makine için gerekli olan ince bir işçilikle işlenmiş dişli ve çarklar yapılamıyordu. Buna rağmen Babbage'ın ve Ada Lovelace'in² programlama çalışmaları, modern bilgisayarın temeli oldu.

Bundan sonraki atılım İngiltere'de nüfus sayımına ilişkin olarak gerçekleşti. 1880 nüfus sayımını elle hesaplamak 10 yıl almıştı. Hesaplamalar bittiğinde, ikinci sayımın zamanı gelmişti. 1887'de nüfus sayımı idaresi, sayımların güvenli yapılması ve hızlı bir biçimde değerlendirilmesi amacıyla halka açık bir yarışma düzenledi. Mucit Hermann Hollerith yarışmaya bir makineyle girdi. Bu makinede karşılıklı hareket eden çarklar ve elektromagnetik düzenleyiciler, verilerin delinerek kartlara işlendiği bir sistemle, bilgileri çeşitli işlemlerden geçirilebiliyordu. Yarışma elemelerinde sona kalmasına rağmen önce bu buluş inandırıcı gelmedi. Sona kalan üç yarışmacı arasında düzenlenen yarışta Hollerith'in makinesi verilen işi 5,5 saatte yaptı. Onun en yakın rakibi ise işi 44 saatte bitirebildi. Sonunda Hollerith yarışı kazandı ve 1890 nüfus sayımı işi ona verildi. Bu sayımın sonuçlarını Hollerith ve makinesi bir ayda ortaya çıkardı. Ama bu makine Charles Babbage'ın düşündüğü gibi verileri (belleğinde) saklayamıyor ve bu verilerle işlem yapamıyordu.

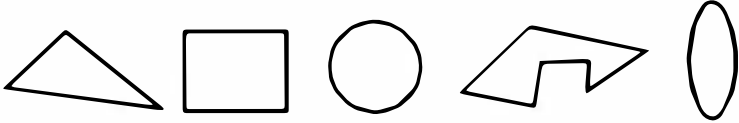
20. yy. modern bilgisayarın doğuş yüzyılıdır. Bu yüzyılda, on yıllarla ölçülen zaman dilimlerinde teknoloji olağanüstü gelişti. Elektrikle işleyen makinelerden lambalı devrelere uzanan süreç, transistörün, birleşik elektronik devrelerin ve silisyumdan yapılan, her biri kendi içinde tam bir devre oluşturan mikroçiplerin bulunmasına yol açtı. Böylece, bilgisayar teknolojisi dev adımlarla gelişti ve kişisel bilgisayarların yapımı olanaklı oldu.

2 Charles Babbage ve Ada Lovelace'in anısına IBM analitik hesap makinesinin çalışan bir modelini yapmıştır. Ada Lovelace, Babbage'a teknik programlama yardımı yapmış ve maddi destek sağlamıştır.

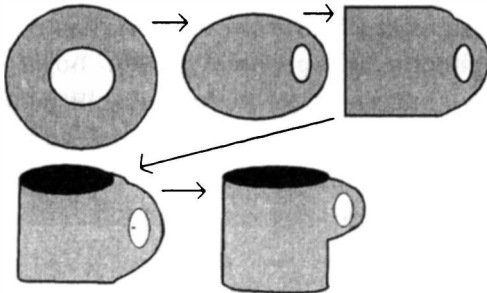
Kahve Fincanı ve Simit

Simit ile kahve fincanı topoloji açısından eşdeğer nesnelerdir.

Her iki nesnenin de bir deliği vardır; uzatarak, bükerek ve kalıba dökerek birbirlerine dönüştürülebilirler. Topoloji, nesnelerin bu tür dönüştürülmelerinde değişmeyen özelliklerini inceleyen bir alandır. Örneğin, aşağıdaki şekillerin hepsi eşdeğer midir?

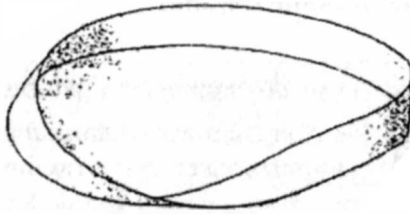


Topolojide nesnelerin kauçuk bir düzlemde olduğu; bu nedenle çekilebileceği, uzatılabileceği düşünülür. Bu esnek geometri de yukarıdaki şekillerin hepsi aynı biçime dönüştürülebilir; bu yüzden eşdeğer nesnelerdir. Topolojide uzunluk ve büyüklük anlamsız kavramlardır. Buna karşılık, nerede, neyin arasında, içinde ve dışında incelenir. Şimdi simitin nasıl kahve fincanına dönüştüğünü izleyelim.

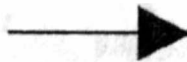
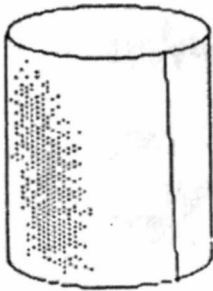


Matematiksel Eşya

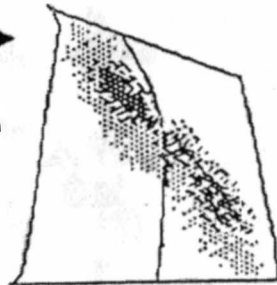
Yaratıcı insanlar sayesinde soyut matematiksel düşünceler, gündelik kullanıma geçirilebilir. Örneğin Möbius şeridi, düzgün yıpranan tek yüzlü vantilatör kayışları yapımında model alınmıştır.



Dört yüzlü, içine içeceklerin konacağı bir kabın tasarlanmasında; fraktaller ise bilgisayarların gerçeğe yakın manzara oluşturmasında kullanılmıştır.

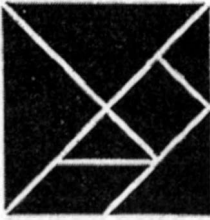


Silindirik biçimli
bir kağıt rulosundan
dört yüzlü bir kap
oluşturulabilir.



Dört yüzlü kap

Üç ayaklı bir tabureyi ele alalım. Aynı doğru üzerinde bulunmayan üç nokta, bir düzlemi belirler matematiksel deyişi, niye bir ayağı diğerlerinden kısa olan dört ayaklı bir iskemlenin sallandığını; ama üç ayaklı taburenin her zaman yere sağlam bastığını açıklar (üç ayağı da her zaman tek bir düzleme dayanır).

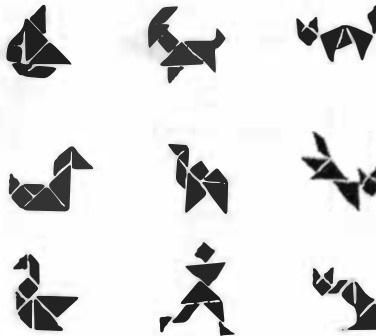


Tangram 7 parçasından
kare oluşturulması

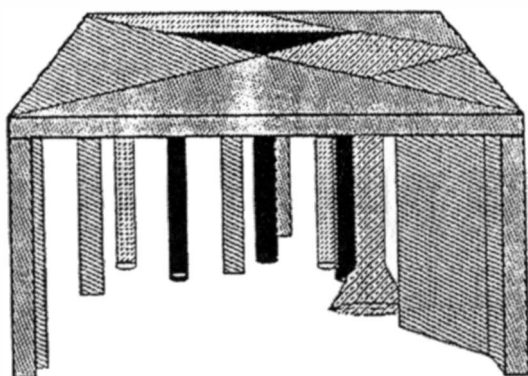
Liste böylece uzayıp gidebilir.

Bir Çin bulmacası olan tangram 19. yy'da yaygınlaşmıştır. 5'i ikizkenar üçgen, 1'i kare ve sonuncusu paralelkenar biçiminde olan 7 parçadan oluşmuştur. Bu 7 parçanın tümü kullanılarak 1600'den fazla kare desen oluşturulmuştur. Bunlar, geleneksel tangram karesi, deve, kuş, kayık,

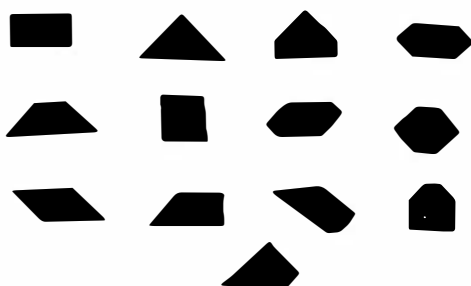
insan ve birçok başka nesneyi içerir.



Şimdi de İtalyan tasarımcı Massimo Morozzi çok işlevli tangram masasını yarattı ve Milano'daki yıllık tasarım fuarında sergiledi. Bu masa tangramın 7 parçasının her birine değişik biçimlerdeki ayakların eklenmesiyle yapılmıştı. Parçaların her biri, birbirinden bağımsız olarak ayakta durabiliyordu. Sonuç olarak, masa tangramla yapılan bütün şekillerde düzenlenebilir. Geleneksel dikdörtgen biçimli masadan, kedi biçimine kadar birçok değişik düzenleme yapılabilir.



Tangram masası



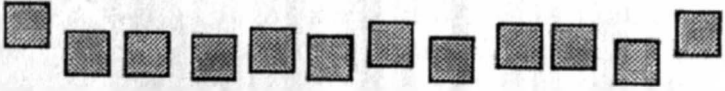
Tangram parçalarıyla 13 değişik çokgen biçim oluşturulabilir. Böylece kare biçimli masa, bu biçimlerden herhangi birine dönüştürülebilir. Nasıl yapıldığını bulabilir misiniz?

Asal Sayıların Geometrik Açıklaması

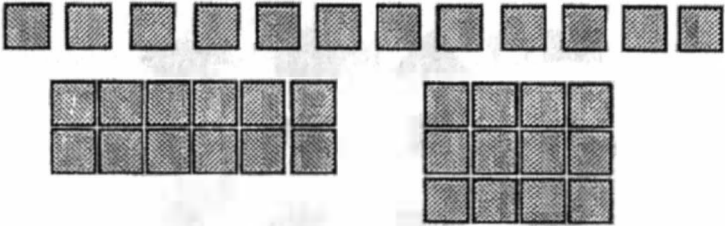
Matematiksel düşüncelerin geometrik açıklamaları genellikle bize başka bir bakış açısı kazandırır ve bir kavramın görsel anlamını kavramamızı sağlar. Çarpanları yalnızca 1 ve kendisi olan sayılara asal sayı denir. Şimdi bu tanımlı geometrik olarak nasıl gösterebileceğimize bakalım.

12 kareyi ele alalım.

Bunları düzenleyerek çeşitli biçimlerde dikdörtgenler oluşturalım.



Aşağıdaki her dikdörtgen, 12'nin çeşitli çarpanlarını (1×12 ; 2×6 ; 3×4) yani 1, 12, 2, 6, 3 ve 4'ü gösterir.

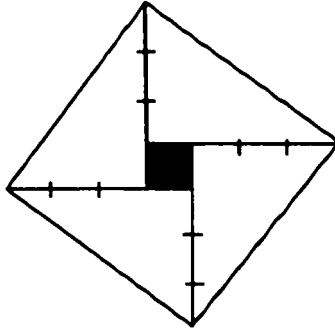


Bir sayı asal sayı ise, örneğin 5, yalnızca bir dikdörtgen oluşturabilir.



Bu da 5'in çarpanlarının yalnızca 1 ve 5 olduğunu gösterir.

Pisagor Teoremi Üstüne



Kanıt:

Dik kenarları 3 ve 4 birim olan bir dik üçgenin hipotenüsü 5 birimdir.

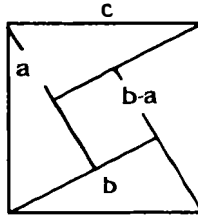
Dik kenarları 3 ve 4 birim olan 4 dik üçgenden, yukarıda gösterildiği gibi bir kare oluşturalım. Bu 4 dik üçgenin alanlarının toplamı 24 birim, içteki küçük karenin alanı 1 birimdir. Bu da bize büyük karenin alanının 25 birim, yani her kenarının 5'er birim olduğunu gösterir. Böylece, dik kenarları 3 ve 4 birim olan bir üçgenin hipotenüsünün 5 olduğunu, yani $3^2 + 4^2 = 5^2$ buluruz.

Bu hoş kanıt yaklaşık olarak MÖ 300 yılına ait bir Çin kitabı olan *Çu-Pei Suan King*'de bulunmuştur. Pisagor teoreminin tersinden söylenişinin, teoremin kendisi kullanılmadan, kanıtlanması özellikle ilgi çekicidir. Dik kenarları 3 ve 4 birim olan bir üçgenden yola çıkarak bu biçimde 4 eş üçgen kullanılarak bir kare oluşturulmuştur. Kanıt özellikle 3-4-5 dik üçgeniyle yapılmış olsa da, yöntemi, dik kenarları a ve b birim olan tüm dik üçgenler için genelleştirilebilir. Böylece, Pisagor teoremini tersinden kanıtlamak için önemli bir yol ortaya çıkar.

Kanıtı genelleştirmek için dik üçgenin dik kenarlarını a ve b , hipotenüsünü c olarak adlandıralım. Sonra karenin alanını iki yoldan hesaplayalım:

1) 4 dik üçgenin alanlarının toplamı+içteki karenin alanı =

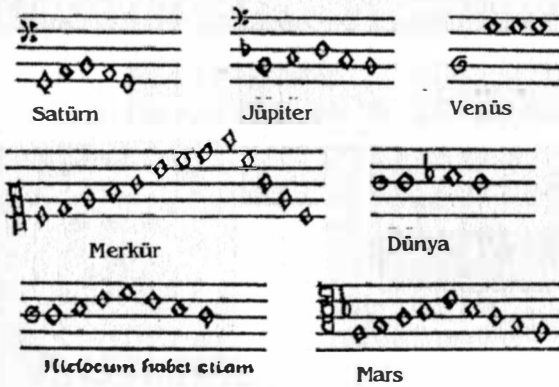
2) büyük karenin alanı



$$\begin{aligned}
 (1/2) a \cdot b + (1/2) a \cdot b + (1/2) a \cdot b + (1/2) a \cdot b + (b-a)^2 &= c^2 \\
 2(a \cdot b) + (b - a)^2 &= c^2 \\
 a^2 + b^2 &= c^2
 \end{aligned}$$

Kürelerin Müziği

Eski Yunanistan'da matematik, müzik ve astronomi birlikte okutulurdu. Pisagorcular sayılar ile müzik gamlarını ilişkilendirmişlerdi. Matematik, müzik ve gezegenlerin yörüngeleriyle ilgili bilgilerine dayanarak, müzik ile astronomiyi birbirine *Kürelerin Müziği* kavramıyla bağlamışlardı. Johannes

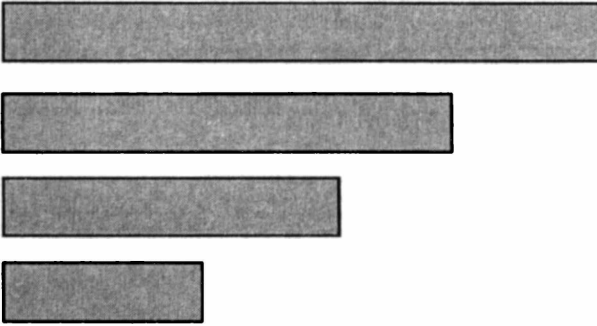


Kepler (1571-1630) evrensel düzenle uyumlu olan belirli bir düzeni ve karşılıklı ilişkileri içeren kavramları bulmayı istiyordu. 1618'de *Harmony of the World* (Dünyanın Uyumu) kitabını yayımladı. Gezegenlerin eliptik yörüngelerindeki hızları ile müzikteki armoniyi ilişkilendirdi.* Gezegenlerin en büyük ve en küçük hızlarını müzik gamlarına bağladı. Böylece, Eski Yunanlılar'ın *Kürelerin Müziği*'ni yücelten Kepler, bunu en büyük başarılarından biri olarak gördü.

* Bugün astronomi ile müzik ilişkisine bilimsel bir önem verilmemektedir. Ama, Kepler'in bu alandaki çalışmaları astronomide çok önemli buluşlara yol açtı; örneğin, Kepler, Dünya'nın eliptik yörüngesindeki hızını hesapladı.

Ölçüm Problemi

140 birim arasındaki bir uzunluğu ölçmek için 4 cetvel kullanabilirsiniz. Hangi uzunluktaki cetvelleri seçersiniz? Bir cetveli yalnızca bir kez kullanabilirsiniz.



Örneğin, 1, 2 ve 4 birimlik cetvellerle ölçülebilecek en fazla uzaklık 7 birim olacaktır.



1 birim + 2 birim + 4 birim

3 birimlik bir uzaklık için iki yol vardır:



4 birim - 1 birim



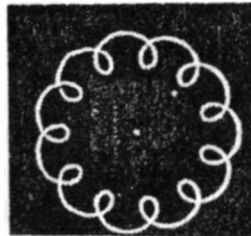
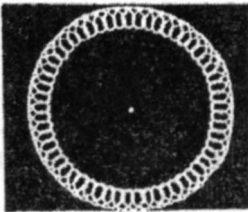
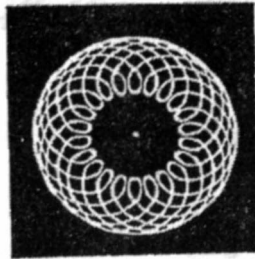
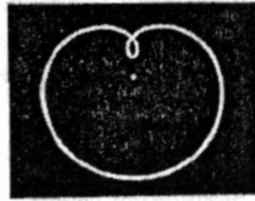
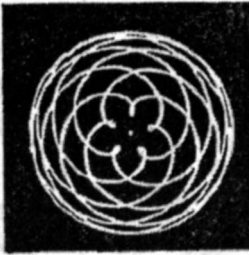
1 birim + 2 birim

Soruyu yineleyelim. Hangi uzunluktaki cetvellerle 140 birim arasını kesintisiz bir biçimde ölçebilirsiniz? bkz. çözümler

Gezegenlerin Olağandışı Yörüngeleri

Genellikle gezegenlerin yörüngelerinin eliptik olduğunu düşünürüz; oysa, gök cisimlerinin yörüngelerinin oluşturduğu desenler ve simetrik biçimler gerçekten olağanüstü ilginçtir.

Aşağıda dünyadan görüldüğü biçimiyle Merkür, Venüs, Mars, Jüpiter ve Satürn'ün yörüngeleri gösterilmiştir.

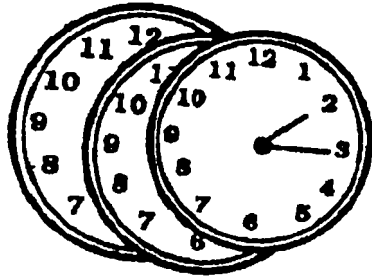


Einstein'ın Genel Görelilik Teorisinin Sınanması

Şimdiye kadar Einstein'ın teorilerinin değişik bölümleri sınanmıştır. Ama, onun genel görelilik teorisi hâlâ teorik düzeyde kalma özelliğini koruyor. Einstein'ın özel görelilik teorisinde ışığın hızı sabittir.

Işığın hızı saniyede 300.000 km'dir. Işık hızının yarısı kadar hızı olan bir uzay gemisinde bir ışık kaynağına (yıldıza) yaklaştığınızı varsayın.

Bu yıldızdan size ulaşan ışığın hızı her zaman saniyede 300.000 km. olacaktır; bu, sizin hızınızdan bağımsızdır. Bu olayı açıklamak için gemideki aletlerin daha yavaş çalışmaya başladığını düşünebilirsiniz; ama, görünüşte bunu kanıtlayacak göstergeler yoktur. Yer istasyonunu uyararak bilgi istediğinizde, onların göstergeleri gemideki canlı, cansız her şeyin hareketinin yavaşladığını ve boyutların küçüldüğünü gösterecektir.

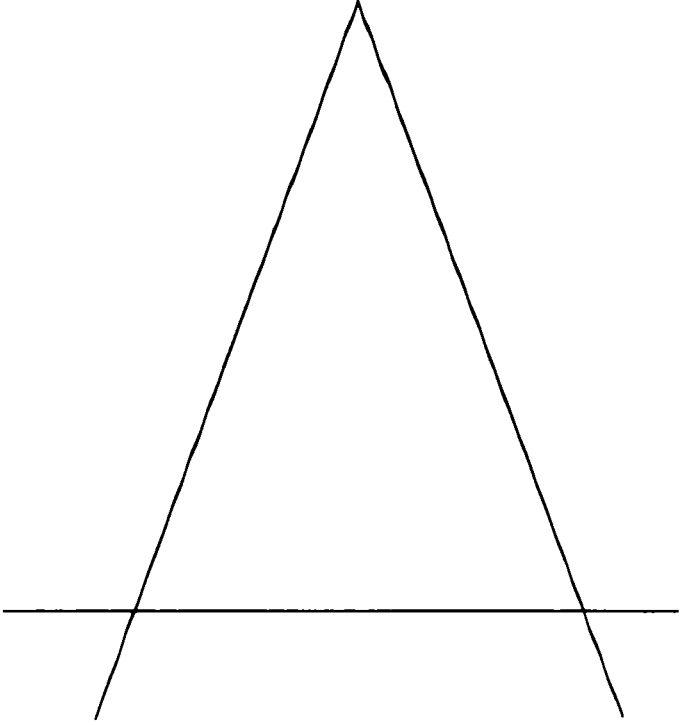


Uzay ve zamanın ölçümü hıza bağlıdır; hız arttıkça, zaman yavaşlayacak, uzaklık (uzunluk ya da büyüklük) azalacaktır. Bu durum 1972'de yanlarına bir atom saati alan iki ABD'li bilim adamının bir jet uçağıyla dünyanın çevresini dolışmaları sırasında da görülmüştür. Yolculuklarının sonunda

uçaktaki saatin, başlangıçta aynı ayar da olan yer saatine göre, saniyede 89 milyar birim kadar daha yavaş çalıştığı görülmüştür. Aynı yönde hareket eden hızlandırıcılarla yapılan deneyler de $E = mc^2$ 'nin yer aldığı Einstein'ın özel görelilik teorisini doğrulamıştır. Yakın bir gelecekte Einstein'ın genel görelilik teorisi de Stanford Üniversitesi* bilim insanları ile ABD uzay araştırmaları örgütünün (NASA) ortak yürüttüğü çalışmaların sonucunda yapılacak yeni bir uzay mekiği projesinde sınanacaktır. Uzay mekiği dev bir topa taşımaya, Einstein'ın kütleçekim kuvvetinin uzay ve zamanda eğrilğe yol açtığına ilişkin görüşü sınanacaktır. Einstein, yıldızlar ve gezegenler gibi kütleli olan cisimlerin uzay ve zamanda eğri bir çizgi boyunca yol aldıklarını belirtmiş; bu eğrilğin ise büyük ve küçük bütün cisimlerin hareketlerini belirlediğini söylemiştir. Bu sınamaya çalışmalarının sonuçları ne olursa olsun, bilim dünyasında heyecan yaratacağı öngörülebilir.

Stanford Üniversitesi'nde bilim insanları bu konunun üstünde 30 yılı aşan bir süredir çalışmaktadır.

Üçgen Oluşturma Bulmacası



Yukandaki çizime iki doğru parçası ekleyerek, 10 üçgen oluşturun. bkz. çözümler

Riemann Geometrisinin Dünyası

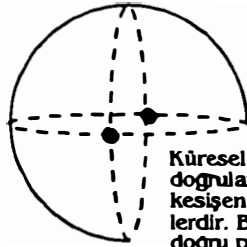
Öklit'in 5. belitini (kanıtlanmaksızın doğruluğu varsayılan önerme) ortaya koymasından sonra bazı matematikçiler bunun kanıtlanabileceğini, dolayısıyla da bir belit olamayacağını düşünüyordu. 1854'te G. F. Bernhard Riemann küresel (ya da eliptik) geometri

üstüne bir makale yazdı.

5. belit'in¹ (paralellik beliti) dolaylı bir kanıtını kullanarak tersini şöyle kabul etti: Bir noktadan, dışındaki bir çizgiye hiçbir paralel doğru çizilemez.

Ayrıca, Öklit'in başka bir belitini de (bir doğru parçası doğrusal bir çizgi

üzerinde sürekli uzatılabilir) değişik bir biçimde yorumladı. Bunu, bir doğru sınırsızdır, ama sonsuz değildir yani, doğrunun başlangıç ve bitiş noktaları yoktur, ama uzunluğu sonludur, olarak değiştirdi. Bu gibi özellikler, tüm doğruların büyük çemberler² olduğu kürenin yüzeyindeki geometride gerçekleşebilir. Bir küreyi incelerken, her iki büyük çemberin her zaman iki noktada kesiştiğine; diğer bir deyişle, hiçbir doğrunun (büyük çemberin) paralel olmadığına dikkat edin. Küresel geometride üçgenin iç açılarının toplamının 180 dereceden büyük olduğunu ve üçgenin alanı büyüdükçe açılarının toplamının da arttığını görürüz.



Küresel geometrideki doğrular iki noktada kesişen büyük çemberlerdir. Bu yüzden hiçbir doğru paralel değildir.

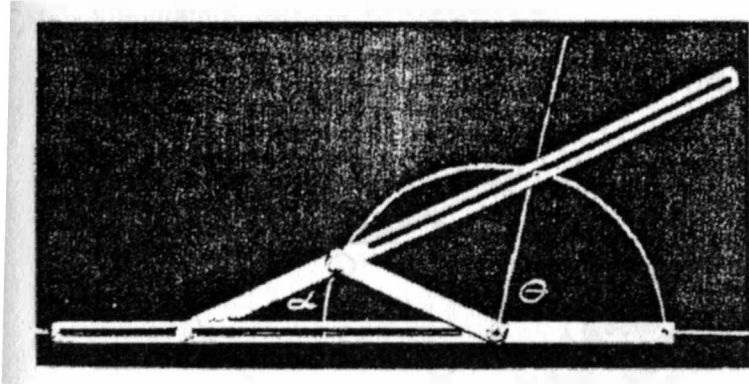
Böyle bir dünya nerede var olur? Belki de bizim evreni-

-
- 1 5. belite göre, bir noktadan geçen, dışındaki bir doğruya paralel, tek bir doğru çizilebilir.
 - 2 Büyük çember, merkezi kürenin merkezi olan, kürenin yüzeyindeki bir çemberdir.

miz böyledir. Eger evrenin kütlesi yeterince büyükse, kütleçekim kuvveti evrenin Büyük Patlama'dan sonra başlayan genişlemesini durduracaktır. Böylece, evren büzülüp, küresel bir biçim alacaktır. Milyarlarca yıl sonra bu küresel evren, büzüle büzüle sonsuz ısı ve yoğunluğu olan bir nokta durumuna gelecektir. Eger kütleçekim kuvveti onu büzecek kadar büyük değilse, belki de o zaman evrenin genişlemesinin durduğu bir denge noktasına ulaşılır.

Arşimet Bir Açrı Nasıl Üç Eşit Parçaya Ayırdı?

Yalnızca cetvel ve pergel kullanarak bir açrı üç eşit parçaya ayırma problemi eskiçağlardan beri ilgi çekici bulundu ve bazı şaşırtıcı matematiksel düşüncelerin, aletlerin geliştirilmesine yol açtı. Bunlardan biri de Arşimet'in kayan bağlantısıydı.



Arşimet bir açrı üç eşit parçaya ayırmak için bu aleti nasıl kullandı?

< AOB açısını üç eşit parçaya bölmek istediğimizi varsayalım.

< AOB açısının kenarlarını şekilde gösterildiği gibi uzatın.

< O merkezli çemberin yarıçapı r 'dir.

< AOB açısı, $\triangle OBD$ üçgeninin bir dış açısıdır. Bu nedenle

$$Z = y^\circ + x^\circ$$

$$(m < (AOB) = m < (ODB) + m < (DBO))$$

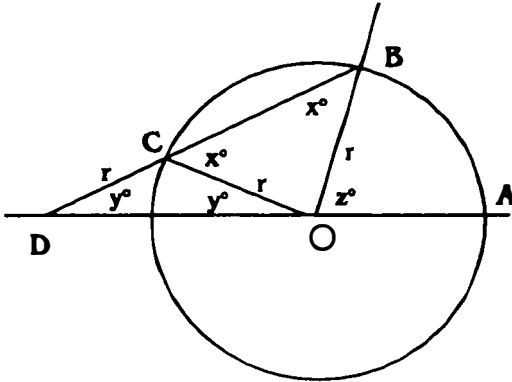
Benzer bir biçimde, $\angle BCO$ açısı $\triangle CDO$ üçgeninin bir dış açısıdır,

Yani:

$$x^\circ = y^\circ + y^\circ = 2y^\circ$$

$$(m < (BCO) = m < (CDO) + m < (COD))$$

Önceki denklemde yerine koyarsak, $z^\circ = y^\circ + 2y^\circ$ yani $z^\circ = 3y^\circ$. Böylece y° , $\angle AOB$ açısının $1/3$ 'ü kadardır ve $\angle AOB$ açısı üç eşit parçaya bölünmüş olur.



Fraktaller ve Egreltiotu

Fraktal geometri, doğanın geometrisi olarak da bilinir. Öklit geometrisiyle tanımlanamayan doğadaki nesneler, matematiksel olarak fraktallerle açıklanır. Geometrik fraktali, kendini sonsuzca yineleyen bir kalıp ya da desen olarak düşünün. Ama desen kendini giderek küçülen boyutta yineler. Bu nedenle geometrik bir fraktalin bir bölümü büyütüldüğünde, tam olarak aslına benzer. Buna karşılık, dairenin bir bölümü büyütüldüğünde daha az kavisli görünür.

Egreltiotu fraktal yinelenmenin ideal bir örneğidir. Herhangi bir parçası, aslının aynıdır. Fraktal egreltiotu, bilgisayarla da yaratılabilir.



Sayıların Evrimi

Sayıların gelişimini birkaç sayfaya sıkıştırmak son derece güç. Doğal sayılar, tamsayılar, oranlı (rasyonel) ve oransız (irrasyonel) sayılar, sanal ve gerçek sayılar karmaşık sayılar nerede, ne zaman ve nasıl bulundu?

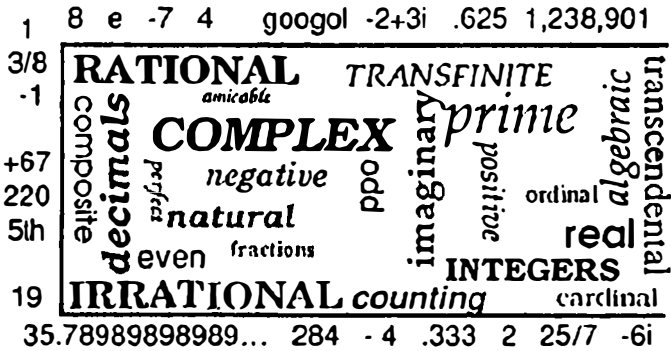
Matematiksel birçok düşünce gibi, bunlar da ya kazara, ya gereksinimden, meraktan ya da düşünceler ülkesini araştırma tutkusunun sonucunda ortaya çıktı.

Çeşitli problemleri, belirli bir sayı kümesinin sınırları içinde çözmeye çalışmanın nasıl bir şey olacağının hayal edilmesi bile çok zordur. Genellikle problemlerin tanım ve değer kümeleri sınırlanmıştır. Ama en azından, diğer türlerdeki sayıların bilincinde olmamızın sonucunda, bu tip problemler uygulamaya yönelik olarak kullanılır.

Şu anda tüm karmaşık sayıları biliyoruz. Ama bir de, negatif sayıları bilmeden $x + 7 = 5$ denklemini çözmeye çalıştığınızı düşünün. Ne gibi sonuçlara varırdık? Problemin hatalı olduğunu, çözümünün olmadığını ya da denklemin yanlış olduğunu düşünürdük.¹ İyi ki, bazı cesur ve kendine güvenen matematikçiler, tehlikeyi göze alarak, denklemin çözümünün henüz bulunmamış bir sayılar kümesinde olduğunu savundu. Daha da ileri giderek yeni bir sayı kümesini tanımladılar. Sözü edilen problemi çözmek için negatif bir sayı yaratmanın heyecanını ya da belirsizliği düşünmeye çalışın. İlgili çekici başka bir nokta da bu yeni sayıların o zamana kadar kullanılan sayı kümesinin belitlerine (aksiyom, kanıtsız olarak doğruluğu varsayılan önerme) uyup uymadığını bulmaya çalışmaktır.

1 Avrupa negatif sayılarla Arap yapıtları sayesinde tanıştı. Ama 16. yy. ve 17. yy'ın birçok matematikçisi bu sayıları kabul etmeye istekli değildi. Nicholas Chuquet (15. yy) ve Michael Stifel (16. yy) negatif sayıları anlamsız buluyorlardı. Jerome Cardan, negatif sayıları denklemlerin çözümü olarak verdiği halde bunları olanaksız yanıtlar olarak kabul ediyordu. Blaise Pascal bile şöyle demişti: 'Öyle insanlar tanıyorum ki, 0'dan 4 çıkarıldığında 0 kaldığını anlamıyor.'

Değişik sayıların ortaya çıktığı dönemleri kesin olarak belirlemek hemen hemen olanaksızdır. Buna karşılık, yeni bir sayı türünün ortaya çıkmasını sağlayacak problemleri yeniden oluşturabiliriz.



Belki de dünyanın değişik bölgelerinde yaşayan insanlar, yüzyıllar boyunca yalnızca doğal sayıları kullandı. Belki de başka tür sayılara gereksinimleri yoktu. Doğal olarak kullanılan simgeler ve yazma sistemleri farklı kültürü olan halklar arasında değişiyordu.²

Sıfır ilk kez 2. bin yılda Babilililer'in kil tabletlerinde kullanılmıştır. Önceleri sıfır, kil tablette rakamda bir boşluk bırakılarak gösteriliyordu. Sonraları  ya da  simgeleri kullanılarak gösterilmeye başlandı. Ama buradaki sıfır, sayı olarak değil, sayı basamağında yer belirlemek için kullanılıyordu. Maya ve Hint sayı sistemlerinde sıfır, ilk kez hem yer belirleyici, hem de sıfır rakamı olarak kullanıldı.

Sonradan ortaya çıkan sayılar oranlı sayılar olabilir. İnsanlar bir somun ekmek gibi bütünlüğü olan nicelikleri bölmeye gereksinim duyuyordu. Bu sayıları belirtmek için simgeler kul-

2 Babilililer doğal sayıları basamaklı sayı sistemiyle yazıyorlardı. 1 için  ve 10 için  simgelerini kullandılar. Mısırlılar'ın basamaklı sayı sistemleri yoktu. 1 için  10 için  100 için  1000 için  simgelerini kullanıp, öbür sayıları bu simgeleri yineleyerek yazarlardı.

gereksinim duyuyordu. Bu sayıları belirtmek için simgeler kullanmasalar da, eskiçağ insanları kesirli niceliklerin farkındaydılar. Mısırlılar kesirleri yazmak için *ağız simgesi* olan  şeklini kullandılar.

Örneğin,

$$\text{𐀀} \quad 1/3\text{'u}; \quad \text{𐀁} \quad 1/10\text{'u}; \quad \text{𐀂𐀃𐀄𐀅} \quad 1/223\text{'u}$$

gösteriyordu. Eski Yunanlılar çeşitli nicelikleri göstermek için doğru parçalarının uzunluklarını kullandılar. Sayı doğrusundaki her sayının doğal ve oranlı sayılarla gösterilemeyeceğini biliyorlardı. Bu aşamada oransız sayılar ortaya çıktı. İlk oransız sayının $\sqrt{2}$ mi olduğu sorusunun yanıtı hâlâ bilinmemektedir.³

$\sqrt{2}$ dik kenarları 1'er birim olan bir dik üçgene, Pisagor teoremi uygulanarak bulunabilir. Belki de ilk oransız sayı altın oranı gösteren "phi" yani $1 + \sqrt{5}/2$ 'dir. Altın oran, altın dörtgen kullanılarak bulunmuş olabilir. Bu soruların yanıtları ne olursa olsun, o dönemlerde oransız sayıların kullanıldığını kesin olarak biliyoruz.

Tarihin de gösterdiği gibi eski problemleri çözmek için yaratılan yeni sayılar, aynı zamanda yeni problemler yaratır. Yeni bir sayı kümesinin bulunmasıyla onun tanımlarının ve mantıksal sisteminin türetilmesi birbirinden ayrı işlerdir. Ayrıca bu sistemin kabul edilmesi ve genel kullanıma girmesi de yıllar alır.⁴ Avrupalı matematikçiler 17. yy'da bile negatif sayı-

3 Oransız sayılardan eş ölçülerle ölçülemez, oranlar olarak söz ediyorlardı. Bir söylentiye göre bu sayıları ilk bulan MÖ 5. yy'da yaşamış Hippias'tır. Onun bu buluşunu bir deniz yolculuğundayken açıkladığı ve Pisagorcular tarafından denize atılarak ödüllendirildiği söylenir. Bu buluş, Pisagorcular'ın her şeyin tam sayılara ya da onların oranlarına indirgenebileceği görüşüyle çelişiyordu. Buna rağmen dolaylı akıl yürütmeyle $\sqrt{2}$ 'nin oransız bir sayı olduğunu ilk kez Pisagorcular kanıtladı.

4 Tam sayılar, oranlı, oransız ve negatif sayılarla çalışmanın mantıksal temellerinin kurulmasına rağmen Hintliler ve Araplar bu sayıları hesaplama-larında özgürce kullandılar. Pozitif sayıları mallarını, negatif sayıları borçlarını göstermek için kullandılar. Ticari hesap işlerine gömüldükleri için kullandıkları sayıları geometrik olarak geçerli olup olmamasıyla ilgilenmiyorlardı. Bu yüzden onların kullandığı aritmetik, geometriden bağımsızdı.

ları benimsemekte güçlük çekiyorlardı. Karekökün kullanımı belirli bir sayı kümesiyle sınırlandırılmamıştı; böylece $i^2 = -1$ denklemiyle ilk sanal sayılar yaratıldı. Dünyanın pek çok yerinde, çözümleri sanal sayıları içeren çok terimli (polinom) denklemler kullanıldı. Böyle denklemlerden biri $x^2 = -1$.

Bütün bu sayıları birbiriyle ilişkilendirmek için evrensel bir kümenin tasarlanması gerekiyordu. Böylece, $x^2 + 2x + 2 = 0$ gibi ikinci dereceden denklemlerin çözümü olan karmaşık sayılar işin içine girdi. Karmaşık sayılar ($a + bi$ biçiminde yazılır, buradaki a ve b gerçekte sayılardır ve $i^2 = -1$ 'dir) 16. yy'da kullanılmaya başlandı. Yukarıda sözü edilen tüm sayılar karmaşık sayı olarak belirtilebilir. Örneğin, bir gerçekte sayı, sanal parçası "0" olan bir karmaşık sayıdır ve bir sanal sayı gerçekte parçası "0" olan bir karmaşık sayıdır.

Sanal ve gerçekte sayılar geometrik olarak gösterilince daha somutlaşır. Eski Yunanlılar gerçekte sayıların yerini, sayı doğru üzerinde gösteriyorlardı. Karmaşık sayılar ise karmaşık sayı düzlemi üzerinde gösterilir. Düzlemdeki her nokta, tek bir karmaşık sayıyı belirtir, bunun tersi de doğrudur (her karmaşık sayı, düzlemde tek bir nokta ile belirlenir). Böylece $x^5 = 1$ denkleminin çözümü de geometrik olarak gösterilebilir.

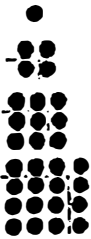
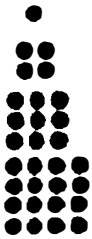
Karmaşık sayılar iki boyutlu noktaları gösterdiğine göre, mantıksal olarak, daha üst boyutlardaki noktalar hangi tip sayılarla gösterilir, diye sorulabilir. Dördey denilen bu tip sayılar dört boyutlu sayılardır. "Sayılar bu noktada bitiyor mu?" sorusu hâlâ yanıtlanamamıştır. Yeni matematiksel düşünceler geliştikçe, uygulamalar genellikle yeni sayıları ortaya çıkarır.

* Çev; not: $a + ib$ karmaşık sayısının sanal parçası b sayısı, gerçekte parçası a gerçekte sayıdır.

Çokgensel Sayılar

Baçimleri düzgün çokgenlerle ilgili olan sayılara çokgensel sayılar denir. Bunlardan bazıları aşağıda gösterilmiştir.

üçgensel sayı					
karesel sayı					
beşgensel sayı					
altıgensel sayı					
yedigensel sayı					
sekizgensel sayı					



-1

$$-1+3=4=2^2$$

$$1+3+5=9=3^2$$

$$1+3+5+7=16=4^2$$

Sayıların oluşturduğu biçimler incelenerek matematiksel özellikler ortaya çıkarılmıştır. Örneğin, karesel sayıların biçimleri incelenerek, tek sayılar serisinin toplamı bulunabilir.

$$1+3+5+7+9+11+13...=?$$

İstatistik ve Matematik

Ortalamalar, yüzdeler, en çok elde edilen değerler, yüzdelik dağılımlar, grafikler...bunların hepsi sayısal değerleri belirli işlemlerden geçirme yollarıdır. Örneğin, iki sayıyı ele alalım: 6 ve 8. Değişik karşılaştırmalar yapabiliriz: 6'nın 8'e oranı, $3/4$ kesri, yüzde 75. Bir durumu açıklamaya çalışmak amacıyla sayısal değerler toplamaya başladığımız zaman istatistik alanına giriyoruz demektir. Yararlı ya da yanıltıcı olsun, istatistikler her zaman çok etkileyicidir.

İstatistikleri kullanarak tahminler yapılan bazı alanlar şunlardır:

Başkanlık seçimi (Gallup anketi), istatistiksel göstergeler (SAT göstergeleri), ekonominin durumu (enflasyon rakamları, gayrisafi milli gelirin büyüme hızı, işsizlik rakamları, faiz oranlarının yükselişi ya da düşüşü), DOW (ABD'de hisse senedi borsasındaki fiyat ortalamaları), sigorta prim oranları, nüfus verileri, hava durumu tahminleri, ilaçların etkililiğini ve yan etkilerini inceleyen eczacılık araştırmaları, kumar bahisleri, okyanus dalgaları ve gelgitlerin oluş sıklığı...

İstatistiğin alanı sürekli genişliyor. Ama, istatistiksel analizin sonuçları titizlikle incelenmeli, aşırı, zorlama yorumlardan kaçınılmalıdır. Örneğin büyüklüğüne ve verileri toplama yönteminin, toplanan diğer örneklem verileriyle tutarlılığına dikkat edilmeli. Örneğin, eğer belirli bir seçime katılmama oranı araştırılıyorsa, örneklem mümkün olduğunca büyük ve rasgele olmalıdır. Eğer anket belirli bir eğilimin ağır bastığı bir bölgede yapılırsa, buna dayanan sonuçlar gerçekdışı olur.

Bir günlük gazetenin şöyle bir haber yayımladığını düşünelim: "Günlük Arayış'ın anketine göre, ankete katılanların %75'i bu yıl gribe yakalanmış." Böyle bir açıklamayı gören ba-

zı insanlar nüfusun yaklaşık %75'inin gribe yakalandığı sonucuna varabilir; çünkü *Günlük Arayış* yaptığı anketin büyüklüğünü belirtmemiştir. Belki de bürolarında çalışanlardan yalnızca 4 kişiye bu soru sorulmuş, 3'ü gribe yakalandığını söylemiştir. Bu nedenle hiç kimse örneklemin büyüklüğünü ve ne kadar rasgele olduğunu bilmeden sonuçlara ulaşmamalıdır. Ama, ne yazık ki, sık sık istatistikler verilirken bu veriler, belki önemsenmediğinden, belki de bilerek, verilmez.

İstatistiklerle oynamanın başka bir yolu örneklemin içeriğini ve yöntemini değiştirmektir. Örneğin, işsizlik oranı saptanırken sivil istihdam (çalışanlar) rakamları kullanılırken, birdenbire 1980 sonrasında askeri kesimde çalışanlar da kapsanırsa, bu doğal olarak çalışan kişi sayısını artıracak ve işsizlik oranını düşürecektir. Bu durumda 1980 öncesi işsizlik verileriyle 1980 sonrasını karşılaştırmak anlamsız olan geçersiz bir yöntemdir.

Bilgisayarların kullanılmaya başlanmasıyla çok büyük miktarda veriyi toplama, sınıflandırma ve inceleme olanakları artmıştır. İstatistikleri toplayan ve yayımlayan kurumların tarafsız olması ve istatistiksel sonuçlarla oynamaması durumunda istatistiksel veriler ve bilgiler daha güvenilir olacaktır. İstatistiklerin etkisi ve gücü gerçekten çok büyüktür. Onlarla insanlar ikna edilebilir, kandırılabilir ya da bir şeyden vazgeçirilebilir. Örneğin, eğer insanlar, oylarının sonucu değiştirmeyeceğine ikna edilirse, oy verme zahmetine katlanmaya değmez diye düşünebilirler; özellikle de oylamanın bitiş saatinden birkaç saat önce, oy vermeme eğiliminin yükseldiğine ilişkin istatistikler açıklanırsa. İstatistik güçlü ve yönlendirici bir matematiksel araçtır. Bir durum rakamlarla açıklanırsa, izleyicinin gözünde daha inandırıcı olabiliyor. Sorumlu bir istatistikçinin görevi, daha önce bir konuda bilgisi olmayanların ya da saf izleyicilerin, gerçeği yansıtmayan verilerle yanıltulmasına ve kandırılmasına karşı gelmektir; çünkü, bunun herhangi bir yalandan farkı yoktur.

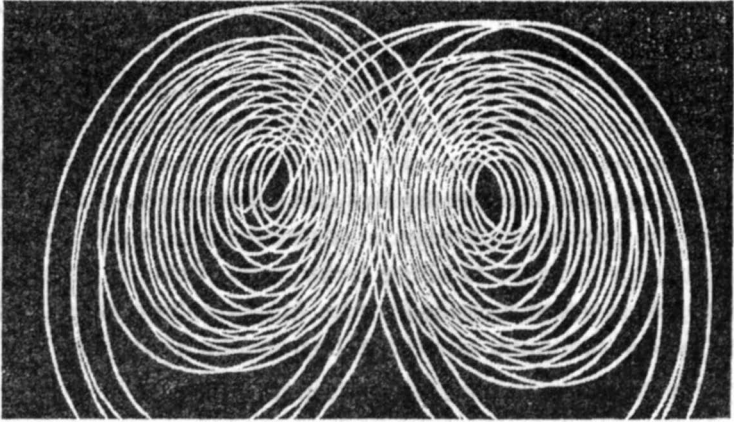
KAOS TEORİSİ: Düzensizlikte Bir Düzen Var mı?

Eskiçağın bilge ve falcılarından günümüzün tarot kartlarına, astroloji çizelgelerine, falcılarına ve kristal kürelerine kadar uzanan yol, insanın geleceği bilme isteğini gösterir. Ayrıca, değişik alanlarda da geleceği öngörebilmek isteriz. Buna örnek olarak bazı alanları sıralayabiliriz:

- hava durumu
- depremler
- fiyatlar
- hisse senedi borsasındaki fiyatlar
- faiz oranları
- ekonomilerin geleceği

Karmaşık, pahalı alet ve yöntemler geliştirmeye çalışarak yaşamımızı düzenlemek isteriz. Ama, acaba değişik alanlarda uzun dönem için tahmin yeteneğimiz güvenilir mi? Doğa olayları tahmin edilebilir bir düzen mi izliyor? Bunlar devresel olarak yineleniyor mu? Yıllarca değişik bilimler, teorilerini ve genel yasalannı belirli kalıplara, modellere dayanarak ortaya koymuştur. Ama şimdi, kaos ya da düzensizlik teorisi bilim dünyasını sarsmaktadır. Fizikçiler ve geleneksel bilimsel öğretilerini izleyen diğer alanlardaki bilim insanları artık kaos teorisini daha ciddiye almaya başlıyorlar. Dünyamızdaki çok basit olaylardan, evrenin temel ve karmaşık olaylarına kadar yüzyıllar boyunca geliştirilen formüllerin ve bilimsel yasalann her zaman gelecekte neler olacağını öngöremeyebileceğini kabul etmek, oldukça rahatsız edici duygulara yol açabilir. Değişik alanlardaki bilim insanları, kendi alanlarında günün birinde kaos olursa, bunu fark edebilmek ve anlayabilmek için matematiksel becerilerini geliştiriyorlar.

Kaos öyküsünün başlangıcı 1960'ların ilk yıllarına uzanır. Bu yıllarda, meteoroloji uzmanı ve deneyimli matematikçi Edward Lorenz, bir bilgisayar programı kullanarak sıcak havanın yükselişindeki değişikliklerle ilgili basit bir deney yaptı. Lorenz başlangıç verilerindeki çok küçük değişikliklerin, sonuçta çok büyük değişikliklere yani karmaşık sonuçlara yol açabileceğini buldu. Hava durumu tahminlerinde bu bulgu Kelebek Etkisi olarak adlandırıldı. Bu ad şöyle bir benzetmeye dayanıyordu: Dünyanın bir tarafında kelebeğin kanatlarını çırpması (küçük bir değişiklik) küçük hava çalkantılarına yol açabilir ve bu çogalarak dünyanın başka bir yerinde fırtınaya neden olabilir. Teknik olarak bu olgu başlangıç koşullarına bağlı duyarlılık olarak tanımlandı. Hava durumu tahminlerinde



Bir sanatçının çizdiği Lorenz çekim alanı

sürekli olarak küçük değişiklikler olmakta, ama bunların uzun dönemli genel etkisi tahmin edilememektedir, çünkü ne kadar basit ya da küçük olursa olsun, tüm değişiklikleri kaydetmek olanaksızdır. Verilerde küçük yanılğalar olarak ele alınan bu kaydedilmeyen değişiklikler çoğalarak karmaşık bir olaya yol açabilir.

Lorenz'in deney sonuçlarını üç boyutlu bir grafikte göstermesiyle kaos alanındaki ilk resim yaratılmış oldu. Buna Lorenz çekim alanı dendi. Kaos teorisinde bu olgunun genel adı yabancı çekim alanıdır. Bunun çok boyutlu uzayda grafiğı çizilebilir. Yabancı çekim alanı sürekli olarak ilmiık biçiminde değişir, ama hiçbir zaman kendini tam aynı biçimde yinelemez. Lorenz'in çalışması 1963'te *The Journal of Atmospheric Sciences*' da (Atmosfer Bilimleri Dergisi) yayımlandı. Ne yazık ki, bu sırada başka alanlardaki bilim insanları ya bu makaleyi görmediler ya da görmezden gelmeyi yeğlediler.

Ancak 1970'lerde, bilgisayarlarda bilgilerin modeller çerçevesinde işlendiğı sıralarda, bazı matematikçiler ve bilim insanları da benzer sonuçlar elde etmeye başlamıştı.¹ Çalışmalar birbiriyle tümüyle ilişkisiz gibi görünen çok geniş ve değişik bir alanlar yelpazesinde yürütölüyordu; ama, sonuçlar şaşırtıcı bir biçimde birbirine benziyordu. Yabancı çekim alanıyla tekrar tekrar karşılaşılıyordu. Araştırmalarının kaos teorisinin geçerli olduğunu gösterdiği bazı alanlar şunlardır:

- 1) Nil Nehri'nin kaydedilen taşkınları
- 2) Depremler

1 Matematikçi Benoit Mandelbrot, birbiriyle ilişkisiz gibi görünen çeşitli alanlarda yabancı çekim alanının olduğunu en önce fark edenlerden biriydi. Ayrıca, Mandelbrot'un fraktallerle ilgili çalışmaları kaos teorisinin geliştirilmesine yardımcı oldu. Mandelbrot, fraktallerle ilgili çalışmalarında geometrik ya da rasgele olarak sonsuz değişimlerle bilgisayarda resimler oluşturuyor, resimler büyütölüdüğü zaman ayrıntılar kaybolmuyordu. Bu geometrik nesneler giderek küçülen ölçeklerde, kendilerini sonsuz kez yineleyebiliyor; her yinelenen bölüm (kar kristali egrisinde olduğu gibi) orijinalin minyatür bir kopyası oluyor. Fraktaller doğanın geometrisi olarak tanımlanır. Günümüzde bilgisayarların yardımıyla fraktal geometri doğadaki belli oluşumları (bulutlar, zencefil kökü, sahiller) tanımlayabiliyor; oysa, geçmişte Öklit geometrisi yöntemleriyle bu olanaksızdı.

- 3) Pamuk fiyatları
- 4) Düzgün akışlı sıvılar ile şiddetli çalkantılar arasındaki geçiş noktaları
- 5) İstatistiksel ekonomi
- 6) Telefon hatlarındaki elektrik akımının gürültü ya da parazit ile kesintiye uğraması
- 7) Gök cisimlerin yörüngelerindeki değişiklikler
 - Satürn'ün en küçük uydusu Hyperion'un yörüngesi
 - Plüton'un yörüngesi
 - Mars ve Jüpiter'in bazı uydularının yörüngeleri
- 8) Jüpiter'de Büyük Kızıl Benek denen lekedeki değişiklikler
- 9) Sıvı akışkanlığındaki değişiklikler
 - Damlayan bir muslukta suyun akışının gösterdiği değişiklikler
 - Su çarkında akan suyun gösterdiği değişiklikler
- 10) Doğrusal olmayan trigonometrik fonksiyonlar
- 11) Çevrebilim
 - Meksika'da Sonora eyaletinin yüksek yörelerindeki çöllerde yaşayan karınca nüfusunun gösterdiği değişiklikler
 - Öğrenciler arasında çıkan kızamık salgınlarnın iniş-çıkış grafiği
 - Avustralya'daki böcek istilaları
 - Kanada vaşagının nüfustaki değişiklikler

Kaos Teorisi. Basit ya da karmaşık, yinelenen bir olguya ilişkin oluşumların tahmin edilebilir bir düzeni yoktur; ama, tahminler yapılamasa da kaosta bir düzen biçimi (yabancı çekim alanı) vardır. Değişiklikler yabancı çekim alanı düzenini izlese de, yabancı çekim alanının niteliği, gelecekteki oluşumların tahminini imkansız kılar.² Bu çift sarmallı eğrinin bir özel-

2 Dünya, milyonlarca yıl tahmin edilebilir bir yörüngeyi izledikten sonra birdenbire bir düzensizliğin içine girebilir. Evrenin yaşamında milyonlarca yılın, çok küçük bir zaman dilimi olduğunu hatırlayalım.

liğı hiçbir zaman kesişmemesidir. Bu düzenli görünümlü güzel eğriyi kendini yinelemeyen ve kesişmeyen sonsuz sayıda değişim oluşturur. Kaos teorisi ile uğraşılırken yepyeni bir bilimsel deney³ alanı ortaya çıkmıştır. Bu alandaki araştırmalarda matematik ve bilgisayar, başlıca araçlardır. Kaos teorisi, her alandaki bilim insanlarının, araştırma sonuçlarının anlamını daha iyi kavrayabilmek için, yüksek düzeyde matematiksel bilgi ve becerilerini geliştirmelerini gerektirmektedir. Matematik, doğal çevredeki şekilsiz, asimetrik ve rasgele oluşumları tanımlayabilmek ve açıklayabilmek için fraktaller alanına doğru genişlemiştir. Kaos teorisine ilişkin olarak gerçekleşen yeni buluşlar matematikçileri düzensizliğin düzenini bulma aşamasına getirmiştir.

3 *Science News* (Bilim Haberleri) dergisinin 26 Ocak 1991 sayısında Deniz Savaşı Merkezi'ndeki uzmanların uğraştığı bir deney yayımlandı. Buna göre esnek bir magnetik bantın düzensiz hareketleri, bir magnetik alan karşısında küçük küçük değişimlerle bir düzene sokulabiliyordu. Diğer bir deyişle, düzensizliğe yol açtığı saptanan küçük değişimler kullanılarak düzensizlik denetlenilebiliyordu.

Sarkaç

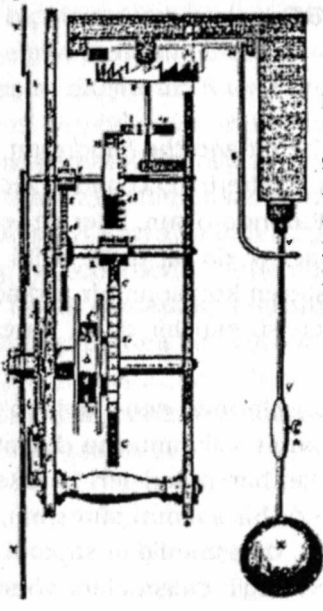
İster Edgar Allan Poe'nun *The Pit and the Pendulum* (Çukur ve Sarkaç) öyküsünde, ister Umberto Eco'nun *Foucault Sarkacı* (*Foucault's Pendulum*) kitabında olsun, ister dededen kalan büyük bir duvar saati sarkacı ya da bir doğa tarihi müzesinde Dünya'nın hareketini gösteren kocaman bir sarkaç olsun, hepsinde gizemli ve uyutucu sürekli bir dalga hareketi vardır.

Sarkacın öyküsü 16. yy'ın sonlarında genç Galileo'nun bir katedraldeki tünçten bir lambanın sallanmasına dikkat etmesiyle başlar. Nabzının atışı ile lambanın ileri-geri hareketini yani salınımını karşılaştıran Galileo, bir salınım süresinin, salınımın büyüklüğü ne olursa olsun, değişmediğini saptadı. Bu gözlemi, onu sarkacın özellikleriyle ilgili çalışmalara yöneltti. Daha sonra şunları keşfetti:

- 1) *Sarkacın salınım süresi, salınımın genliğinden* bağımsızdır.*
- 2) *Sarkacın salınım süresi topuzun ağırlığından bağımsızdır; bu nedenle topuzun ahşap ya da kurşundan yapılmış olması salınım süresini etkilemez.*
- 3) *Sarkacın salınım süresini, sarkacın asılı olduğu nokta ile topuzun (ağırlığın) merkezi arasındaki uzaklık (sarkaç uzunluğu) belirler; zaman böyle ölçülür.*
- 4) *Salınım süresi, sarkaç uzunluğu değiştirilerek, istendiği gibi belirlenebilir.*

1600'lerin ortalarında Hollandalı bilim adamı Christian Huygens sarkaç hareketini araştırdı. Sarkacın salınım süresinin tam olarak salınımın genliğinden bağımsız olmadığını fark etti. Çok küçük de olsa belli değişik durumları gördü. Bunları yok ederek salınımda eşzamanlılığı sağlamayı ve sarkacı saat

* Çev.not: Sarkacın duraklama konumu ile salınım sınırı arasındaki açısız uzaklığa sarkacın genliği denir.



Bu çizimler Huygens'in 1673'te yaptığı sarkacı gösteriyor. Altaki çizim Huygens'in sarkacın bir çevrim eğrisi yayı gibi sallanması için yaptığı düzeneği gösteriyor.



yapımında kullanmayı düşündü. Bu sorunu o dönemde üstünde çok çalışılan çevrim ya da teker eğrisiyle (sikloit eğrisi) çözebileceğini fark etti. (Bir doğru üzerinde kaymaksızın yuvarlanan bir çemberin bir noktasının çizdiği eğri.) Bu buluşa kadar, sarkaç hareketi çember yayıyla ilişkilendiriliyordu. Huygens, matematik çalışmalarıyla, salınımın çevrim eğrisinin yolunu izlemesini sağlayan, topuzun asılacağı telin uzunluğunu hesapladı. Ve ilk sarkaçlı saati yaptı.

Huygens araştırmalarında değişik sarkaç tiplerinin, değişik kullanım alanlarının olduğunu da gösterdi.

Küresel sarkaç'ta salınımlar gözle fark edilemeyen çark hareketlerinden oluşur.

Burulma sarkacı'nda sarkacın asılı olduğu tel bükülürse, yay özelliği kazanır. Bu 400-gün saatlerinde kullanılır.

Bifilar sarkacı (Lord Kelvin'in geliştirdiği) depremölçer olarak kullanılır; yerçekimi ivmesini ölçer. Bu sarkaçla Dün-

ya'nın kendi ekseni çevresinde dönüştüğünün sabit olmadığı; zaman zaman hafifçe azalır, çoğaldığı gösterilmiştir. Bu değişimler Güneş'in ve Ay'ın, Dünya'nın yerçekimi kuvvetinden etkilenmesinden kaynaklanır.

Foucault sarkacı Fransız bilim adamı Jean Foucault tarafından 1851'de bulundu. Bu tür sarkaçlar genellikle doğa tarihi müzelerinde sergilenen çok büyük sarkaçlardır. Foucault sarkacı Dünya'nın kendi ekseni çevresinde döndüğünü gösterir; sarkacın salınım doğrultusu yön değiştirir gibi görünür; oysa, yön değiştiren, ekseni çevresinde dönen Dünya'dır.

Sarkaç Deneyleri

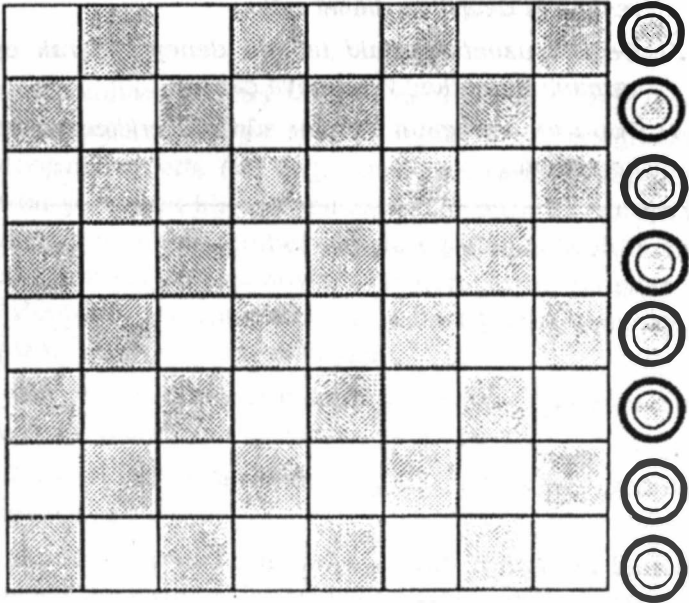
- 1) *Salınımın yüksekliğini değiştirin, salınım süresinin değişip, değişmediğini saptayın.*
- 2) *Sarkaç tellinin uzunluğunu değiştirin ve salınım süresindeki değişime dikkat edin.*
- 3) *Değişik uzunluklardaki tellerle deney yaparak eş-zamanlı bir sarkaç yaratmaya çalışın.*
- 4) *Topuzun ağırlığının salınım süresini etkilemediğini kanıtlayın.*

Sekiz Dama Taşı Bulmacası

Bu eski bulmaca yıllar boyunca uyarlanarak kullanılmıştır. 8 parçayı 64 birim karelik dama tahtasına yerleştirmenin 4 milyondan fazla yolu vardır.

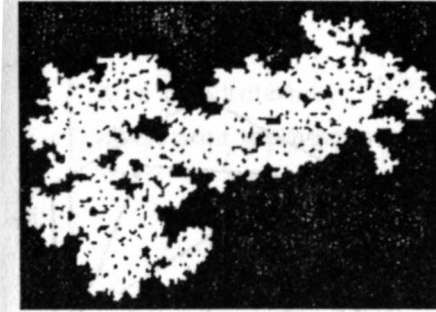
Sekiz Dama Taşı Bulmacası

8 dama taşını hiçbir 2 taş aynı satır, sütun ya da çaprazda bulunmayacak şekilde dama tahtasına yerleştirin.



Orman Yangınının Matematığı

1960'ların sonuna doğru birbirini etkileyen parçacık sistemi olasılık teorisinin bir dalı olarak gelişmeye başladı ve ilerleyen bir alan durumuna geldi. Çeşitli doğa olaylarının yaygınlığını incelemek amacıyla matematiksel ve bilgisayar mo-



Orman yangınının yayılmasının
bilgisayar görüntüsü

delleri kullanılıyor. Matematikçiler, dama tahtasını kullanarak örneğin, ağaçlar gibi rasgele bir dağılım gösteren parçaların modelini yapar. Tahtanın ortasındaki her işaretli birim ya da küme ağaçları temsil eder. Bu birimler ya yakulmuş, ya yanıyor ya da zarar görmemiş

olur. Yanan bir birimin, her bir zaman diliminde, yangını dört komşu birimden birine (eğer buradaki birimler daha önce yanmamışsa) sıçratma olasılığı vardır.

Şimdiye kadar bu modeller gerçek yaşamdaki durumlar kadar karmaşık değildi. Benzer modeller salgın hastalıkların yayılmasına ilişkin olarak da kullanılmaktadır. Bu durumda, her birim sağlıklı, hasta ya da bağışıklığı olan bir kişiyi temsil eder.

Matematikçiler değişik olasılık derecelerini ve bunların bilgisayar modellerinde nasıl geliştirileceğini araştırmaktadır. Karmaşık bilgiler, matematiksel modellerle işlenebildiği ölçüde, bu çalışmaların sonuçları ve tahminleri belirli doğa olaylarının kavranmasında ve denetlenmesinde önemli bir rol oynayacaktır.

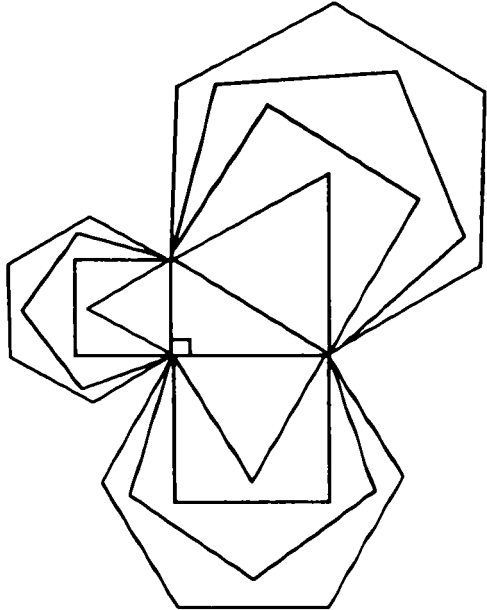
Pisagor Teoriminin Bir Adım Ötesinde

Pisagor teoremi binlerce yıldır biliniyor; ama onun değişik kanıtları ve bunlardan çıkan düşünceler bize hâlâ çok çekici geliyor. Bu teorem çeşitli şekillerde belirtilebilir.

Örneğin Bir dik üçgende, dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı hipotenüsün (dik açının karşısındaki kenar) uzunluğunun karesine eşittir.

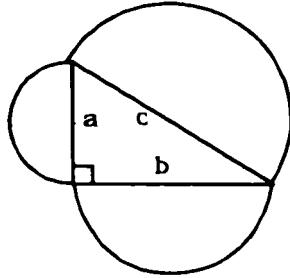
ya da

Bir dik üçgende, dik kenarlardan oluşturulan karelerin alanlarının toplamı, hipotenüsten oluşturulan karenin alanına eşittir.



Şimdi bu teoremin son biçiminin değişik bir durumuna bakalım. Kenarlardan oluşturulan karelerin alanlarını kullanmak yerine, diğer benzer geometrik biçimleri kullanıp, teoremin onlar için de geçerli olup olmadığını görelim. Aşağıda yarımların daireleri için nasıl yapılacağını gösterdik. Bu teorem her zaman benzer biçimler için de geçerli midir?

$$\begin{aligned}
 \text{A dairesinin alanı} &= (1/2) (a/2)^2 \pi = (a^2 \pi)/4 \\
 \text{B dairesinin alanı} &= (1/2) (a/2)^2 \pi = (b^2 \pi)/4 \\
 \text{C dairesinin alanı} &= (1/2) (b/2)^2 \pi = (b^2 \pi)/4 \\
 \text{A ve B dairelerinin} \\
 \text{alanlarının toplamı} &= (a^2 + b^2) \pi / 4 = (c^2) \pi / 4
 \end{aligned}$$



Okyanus Dalgalarının Matematigi

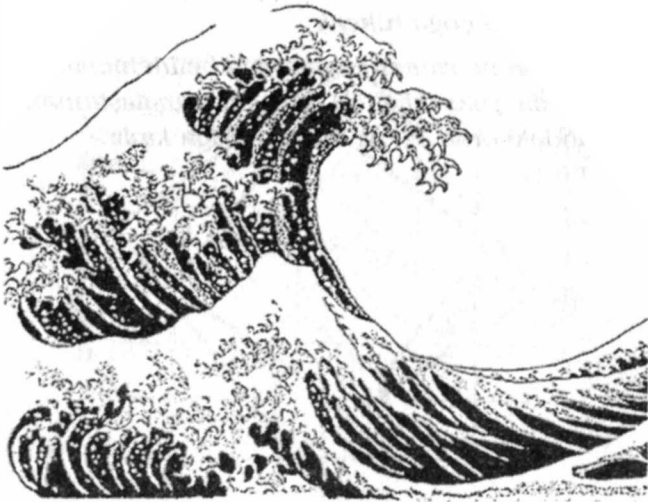
Okyanus dalgalarının kimi zaman ibik, kimi zaman sorğu gibi olan, kabaran, yuvarlanan ve kıyılarda kınlan muhteşem biçimleri, deniz yaratıklarını akla getirir. Onları tanımlamak için yüzyıllar boyunca gelişkin matematiksel denklemler geliştirilmiş ve özellikleri araştırılmıştır. Dalgaların değişik biçimlerini, boylarını ve özelliklerini açıklayan matematiği anlayabilmemiz için önce dalgaya ilişkin genel bilgilere bir göz atalım.

Eğer bir ipin iki ucundan tutan iki kişi, ipi dalgalandırorsa, dalganın ip boyunca hareketini görürüz. İp iki kişiden birine doğru daha yakınlaşmaz. İki insan arasında iletilen enerjidir. Böylece, dalgaların bir ortamda enerji taşıyan hareketler olduğu görülür. Verilen örnekte, enerjiyi taşıyan ortam iptir. Bu ortam su (okyanus dalgaları), Dünya (yersarsıntısı dalgaları), elektromagnetik alan (radyo dalgaları) ya da hava (ses dalgaları) olabilir. Dalga, ortamın dengesini bozan herhangi bir çalkantı nedeniyle oluşur.

Okyanus dalgaları da suyun (ortamın) rüzgar, deprem ya da bir cisim (hareket eden bir gemi) ve/ya da Ay'ın, Güneş'in yerçekimi (gelgitler) tarafından tedirgin edilmesiyle oluşur. Okyanus dalgaları suyun yüzeyinde hareket eder. Eğer birçok tedirginlik kaynağı varsa, dalgalanma düzensizmiş gibi görünür.

1804'lerde okyanus dalgalarının matematiğine ilişkin pek çok araştırma yapıldı. Deniz gözlemleri ve denetlenebilir laboratuvar koşullarında yapılan deneyler, bilim insanlarının ilginç sonuçlara ulaşmalarını sağladı. Bu tür çalışmalar 1802'de Çekoslovakya'da Franz Gertner'in ilk dalga teorisini bulmasıyla başladı. Gertner gözlemlerini yazarken dalgadaki su zerreci-

rinin dairesel bir biçimde hareket ettiğini belirtti. Dalganın tepesinde* su, dalga yönünde; en çukur* yerinde ise aksi yönde hareket eder. Suyun yüzeyinde her su zerresi, ilk durumuna gelmeden önce, dairesel bir hareket gerçekleştirir. Bu dairenin çapı, dalganın tepesinden en çukur yerine kadar olan dalga yüksekliğine* eşittir. Suyun derinliklerinde de su zerrecilerinin dairesel hareketleri sürer; ama su derinleştikçe daire küçülür. Dalga boyunun* $1/9$ 'u derinliğindeki bir yerde, dairenin çapı, suyun yüzeyindeki çapının yaklaşık yansı kadardır.



Dalgalar, dairesel olarak hareket eden su zerrecileriyle ilgilidir. Sinüs eğrisi* (sinüzoidal) ve çevrim eğrisinin* (sikloit ya da teker eğrisi) biçimleri de, eksenleri üzerinde dönen dairelere bağlı olduğu için, bu matematiksel eğriler ve denklemler, okyanus dalgalarını tanımlamak amacıyla kullanılır. Ancak, okyanus dalgalarının sinüs eğrisi ya da başka bir saf matematiksel eğriyle tam tamına çakışmadığı da keşfedildi. Suyun derinliği, rüzgânın şiddeti ve gelgitler, dalgaları tanımlarken göz önünde bulundurulması gereken değişkenlerden ba-

zılandır. Günümüzde okyanus dalgaları, olasılık teorisi ve istatistiksel yöntemler kullanılarak incelenmektedir. Çok sayıda küçük dalga incelenerek, bu veriler bazı tahminlere dönüştürülmüştür.

Okyanus dalgalarının bazı ilginç matematiksel özellikleri şunlardır:

- 1) *Dalga boyu, dalga periyoduna bağlıdır.*
- 2) *Dalga yüksekliği, dalga boyuna ya da periyoduna bağlı değildir (dalga boyu ve periyodunun, çok az da olsa, etkili olduğu bazı durumlar vardır).*
- 3) *Dalga, tepesindeki aç 120 dereceyi aştığında kırılır ve enerjisinin çoğu tükenir.*
- 4) *Dalğanın ne zaman kırılacağını belirlemenin bir başka yolu da yüksekliği ile boyunu karşılaştırmaktır; aralarındaki oran $1/7$ 'yi aşarsa, dalga kırılır.*

* Tanımlar

tepe dalğanın en üst noktası

çukur dalğanın en alt noktası

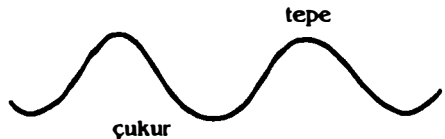
dalga yüksekliği tepe ile çukur arasındaki dikey uzunluk

dalga boyu birbirini izleyen iki tepe arasındaki uzunluk

dalga periyodu bir dalga tepesinin, bir dalga boyu gitme süresi

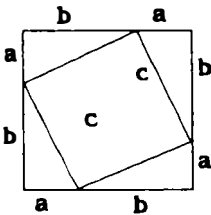
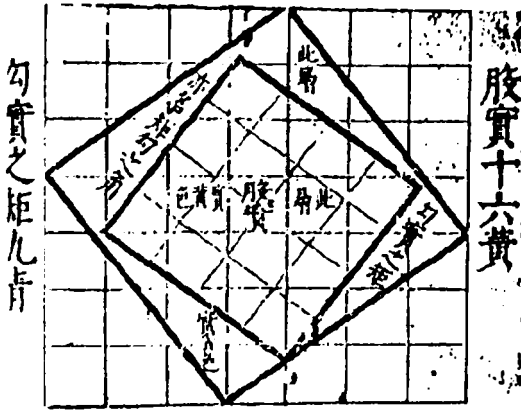
sinüs eğrisi kendini düzenli bir biçimde yineleyen bir trigonometrik fonksiyonun eğrisi

çevrim (sikloit ya da teker) **eğrisi** bir doğru üzerinde kaymaksızın yuvarlanan bir çemberin bir noktasının çizdiği eğri



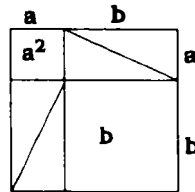
Pisagor Teoreminin Zarif Bir Kanıtı

Pisagor teoremini gösteren bu şekil, Çin elyazması Çu Pei'den alınmıştır. (Bu yapıtın tarihiyle ilgili çelişen görüşler vardır; bazıları bunun MÖ 1200'de, bazıları da MS 100'de yazıldığını öne sürer.) Bu yapıtın başlıca konusu astronomiye ilişkin hesaplamalar ve bununla ilgili matematiktir.



Bu karedeki taranmamış bölgenin alanı

=



Bu karedeki taranmış bölgenin alanı

Bu şekil incelenip yeniden düzenlendiğinde Pisagor teoreminin zarif bir kanıtı ortaya çıkar.

Sayıların Şaşırtıcı Bir Özelliği

Herhangi bir tamsayının basamaklarını istediğiniz gibi düzenleyin. Başlangıçtaki sayı ile bu sayının farkı her zaman 9'a bölünebilir.

Başlangıç Sayısı	Yeniden Düzenlenmiş Sayısı	Aradaki Fark
------------------	----------------------------	--------------

12563	23651	11088
-------	-------	-------

9'a bölününce = 1232

87	78	9
----	----	---

9'a bölününce = 1

33333	33333	0
-------	-------	---

9'a bölününce = 0

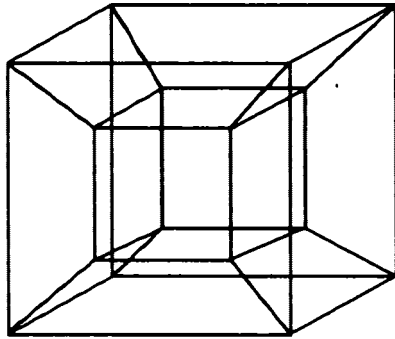
672636	666372	6264
--------	--------	------

9'a bölününce = 696

HİPERUZAY: Matematik ve Görünmezlik

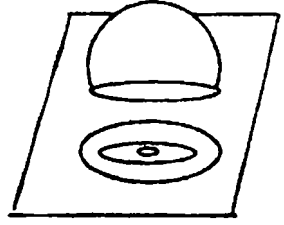
Teserakt ya da hiperküp, hiperküre ve diğer bütün 4-boyutlu cisimlerin içinde bulunduğu hiperuzay, matematikçilerin hayal dünyasını süsler. Bu, biz 3-boyutlu varlıkların yalnızca hayallerimizle gidebileceğimiz bir dünyadır. Boyutlar hakkında bildiklerimiz ve bunların mantıksal olarak birbirinden türetilme biçimleri, böyle bir dünyanın olması gerektiğini gösterir. 3-boyutluların dünyası ile 2-boyutluların dünyalarını karşılaştırmak, hiperuzayı anlamamızı kolaylaştırır.

Hiperuzayda ne gibi olaylar olur? Hiperyaratıklar neler yapar ve niye onların yaptıkları işler bize çok yabancı ve tuhaf gelir? Bir hiperyaratık kolayca, gözlerimizin önündeki cisimleri uzaklaştırabilir. Bu durumda biz cisimlerin ortadan yok olduğunu sanırsınız. Hiperyaratık 3-boyutlu cisimlerin ve canlıların içini görebilir ve isterse onların içinden bir şeyi çıkartabilir. 3-boyutlu düğümler, hipercanlının elinde hemen çözülür. Bir çift eldiven kolayca iki sağ eldivene ya da iki sol eldivene dönüşebilir. Bu gibi olaylar çok anlaşılmasa da, matematiksel olarak çok mantıklı olaylardır.

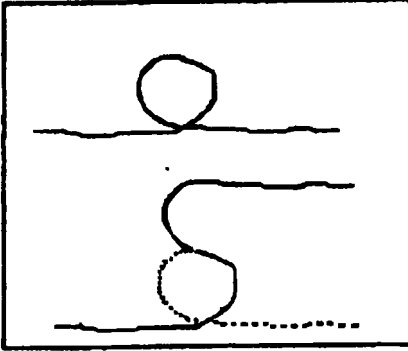


Teserakt, küpün 4-boyutlu gösterimidir. Bir kâğıda çizilen küp, 3-boyutlu olması nedeniyle, belirli bir perspektifle çizilir. Kâğıda çizilen teserakt, perspektifin perspektifi ya da teseraktın 3-boyutlu gölgesinin gölgesidir.

Bir hiperyaratık dünyamıza, uzayımızla kesişerek girer. Bu, bir kürenin 2-boyutlu bir dünyaya, düzlemlle kesişerek girmesine benzer. Bizim gördüğümüz izlenim, yalnızca onun kesitlerinden biri olacaktır. Bir küre düzlemin içinden geçerken, kesitleri iç içe daireler olarak görülür. Kürenin, 2-boyutlu dünyada yaşayanların hiçbir zaman göremeyeceği bir derinliği vardır. Aynı olay hiperyaratık ve bizim 3-boyutlu dünyamız için de geçerlidir. Biz 3-boyutlu canlılar, 2-boyutlu dünyadaki bir cismi, çekerek üçüncü boyuta çıkartabiliriz. 2-boyutlu dünyadaki varlık bu olayı cismin yok



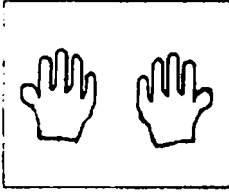
Bir düzlemden geçen kürenin kesitleri, düzlemin üzerinde daireler biçiminde görülür.



2-boyutlu dünyadaki düğüm, düz bir ilimdir. Şekilde 2-boyutlu bir yarabın bu düğümü nasıl çözdüğü gösterilmiştir. 3-boyutlu bir canlı, 2-boyutlu düğümü üçüncü boyuta kaldırarak, kolayca çözer.

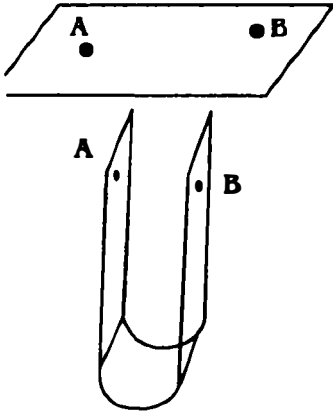
ya da görünmez olması olarak algılayacaktır.

2-boyutlu yaratığın attığı düğüm, 3-boyutlu canlı tarafından kolayca çözülür, çünkü ona göre, 2-boyutlu bir düğüm, bir ilimikten başka bir şey değildir. İlimiğin bir ucunu, üçüncü boyuta kaldırıncı, 2-boyutlu düğüm çözülmüş olur. Aynı şeyi bir hiperyaratık, bizim 3-boyutlu düğümlemimize yapabilir.



İki boyutlu dünyadaki sağ eldiven, üçüncü boyutta ters çevrilerek kolayca sol eldivene dönüştürülür.

da 3-boyutlu uzayı dördüncü boyuta kıvrabiliriz.



3-boyutlu dünyamızdan farklı boyutlu dünyaların var olup olmayacağına ilişkin inancınız ne olursa olsun, farklı dünyaları açıklayan matematiksel düşünceler çok inandırıcıdır.

Eğer 2-boyutlu dünyada eldiven kullanılısaydı, 3-boyutlu canlı, bir sağ eldiveni omlet çevirir gibi, üçüncü boyutta çevirir ve bir sol eldivene dönüştürürdü.

Bir hiperyaratıkla 3-boyutlu dünyada yolculuğa çıkmak ne hoş olurdu ve yaşamı çok kolaylaştırırdı. 3-boyutlu canlının, 2 noktayı yan yana getirebilmek için uzayı (düzlemi) kıvrabildiği gibi, hiperyaratık

Hiperyaratıkların 3-boyutlu dünyada harika yaratıklar olarak görüleceği açıktır. Onların ne muhteşem cerrahlar olabileceklerini bir düşünün! Kolayca 3-boyutlu canlıların içine girip ameliyata gerek kalmadan, sorunlu organı çıkartabilir ya da tedavi edebilirler. Benzer bir biçimde biz de 2-boyutlu dünyanın herhangi bir yerine girebiliriz.



3-boyutlu canlı, bu 2-boyutlu evin herhangi bir odasına üstten (üçüncü boyuttan) girip, istediği nesneyi, kapılardan ve koridorlardan geçerek almak yerine, üçüncü boyuta kaldırarak alabilir.

Sihirli İkili Kartlar

İkili taban sistemi "sihirli" kartlar oluştururken kullanılabilir.

E KARTI

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

16'nın yeri

D KARTI

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

8'in yeri

C KARTI

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

4'ün yeri

B KARTI

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

A KARTI

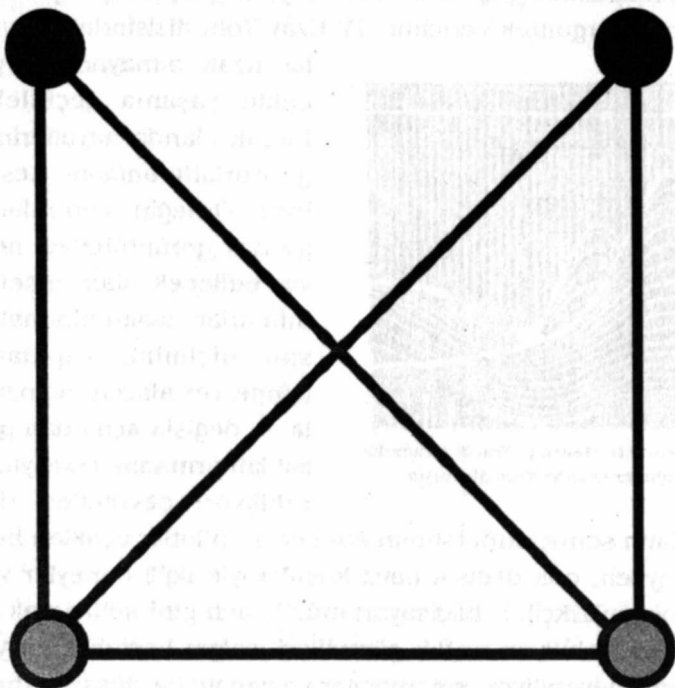
1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

Bu beş kartta 1 -31 arasındaki sayılar özgün bir biçimde gösterilmiştir. Örneğin 21, ikili tabanda 10101'dir. Bu nedenle 21 yalnızca E, C ve A kartlarında bulunur. Hiçbir iki sayı aynı kartlarda yer almaz; çünkü hiçbir iki sayı, ikili tabanda aynı biçimde gösterilmez. Eğer biri, aklından bir sayı tutup, bunun E, C ve A kartlarında olduğunu söylerse, hızlı bir hesaplamayla $(16+4+1)$ bu sayının 21 olduğu ortaya çıkar!

-
- İkili taban sisteminde herhangi bir sayı yazarken yalnızca 1 ve 0 kullanılır. Her kart ikili tabanda bir basamağın değerini gösterir. Örneğin E kartı 16'nın yeridir ya da 24'ün. Sayının ikili tabandaki yazılış biçimi, onun hangi kartlara yerleştirileceğini gösterir. 0'ın bulunduğu herhangi bir yerde, sayı o kartta değildir.

Pong Hau k'i

Çin'de bu oyunun adı *Pong Hau Pong k'i*, Kore'de *Ou-moulko-no*'dur. Oyun tahtası çok küçük olduğu ve oyun yalnızca 4 taşla oynandığı için çok kolaymış gibi görünüyor. Ama görünüşe aldanmayın!

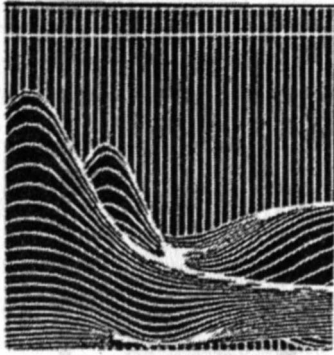


Oyunun kuralları

Her iki oyuncunun elinde ikişer oyun taşı olur. Oyuncular taşlarını sırayla, birer birer oyun tahtasına yerleştirir. 4 taş da yerleştikten sonra sırası gelen oyuncu, taşını yandaki boşluğa koyar. Oyunun amacı, karşı oyuncunun taşlarını yürütmesini engelleyerek, kımıldayamayacak duruma getirmektir.

Bilgisayar Modelleri

Günümüzde matematikçiler, bilgisayarları bir zamanlar düşünölemeyecek dünyalara dalmak, bunları görsel olarak canlandırmak ve modeller yaratmak için kullanıyor. "Gözümüzün önünde değişiyor" deyiimi, bilgisayar dünyasındaki yenilikler için özellikle geçerlidir. Son on yılda gerçekleşen yenilikler akıllara durgunluk vericidir. TV Uzay Yolu dizisindeki kavram-



Bu görüntü Melvin L. Pruett tarafından *Computer Graphics*'ten alınmıştır.

lar uzak olmayan bir gelecekte yaşama geçirilebilir. Birçok alanda hayallerin bilgisayarlarla anlatımı keşfediliyor. Örneğin, cerrahlar bilgisayar görüntüleriyle ameliyat edilecek alanı inceliyor; mimarlar tasarımlarının en son biçimini, yapıtlarının içinde yer alacağı manzara ve değişik açılardan gelen ışıklandırmanın etkisiyle görebiliyor; çevreciler, doğal

olayların sonuçlarını tahmin edebiliyor; pilotlar uçakları henüz yerdeyken, çok değişik hava koşullarıyla ilgili deneyler yapabiliyor, müzikçiler, bilgisayarın müzik aleti gibi kullanarak besteler yaratabiliyor; sağlık görevlileri, salgın hastalıkların yayılmasını izleyebiliyor; sinemacılar ve sanatçılar düşsel sahneleri bilgisayarda görebiliyor ve liste böylece uzayıp gider.

Matematikçiler, grafik ve bilgisayar uzmanlarıyla birlikte yüksek teknoloji yöntemleri kullanarak yeni görüntüler yaratmaya çalışıyorlar. Şimdiye kadar yalnızca matematikçilerin kafasında olan düşünceleri kavramak ve araştırmak için çok renkli, gerçekçi modeller yaratabilmek amacıyla gelişkin bilgisayar programlarıyla birlikte karmaşık yöntemler de geliştirilmektedir.

Problem çözmeye ve tahminler yapmaya yarayan bu modellerin kullanıldığı bazı alanlar şunlardır: Düğüm teorisi, sabun kabarcıkları, hiperuzay, uzayın mozaiklerle kaplanması (arada hiç boşluk kalmayacak şekilde düzgün çokyüzlülerle kaplanması), Öklit dışı modeller.

Zihnimizdeki birçok problem ya da düşünce, bilgisayar modelleri aracılığıyla, başkalarıyla paylaşılabilir.

Ve π Devam Ediyor

Elbette çoğu kişi için π 'nin değerini 4 ondalık basamağa kadar bilmek günlük yaşam için yeterlidir.

İngiliz matematikçi William Shanks 20 yıl boyunca hesaplamalar yaptıktan sonra π 'nin değerini 707 ondalık basamağa kadar buldu; ama, ne yazık ki, 528. basamakta 1945 yılına kadar keşfedilemeyen bir yanlış yapmıştı.

$$\pi = 3.14159265358979323846...$$

Niye biri bugün süper bilgisayarlarla yapıldığı gibi, π 'nin değerini milyonlarca basamağa kadar hesaplamak istesin? π 'nin ondalık basamaklarına karşı bu ilginin kaynağı nedir?

- *Bu, süper bilgisayarların donanım ve yazılımlarının kapasitelerinin ölçülmesinde kullanılır.*
- *Hesaplama yöntemleri, yeni düşüncelerin ve kavramların ortaya çıkmasını sağlar.*

- Gerçekten, π 'nin bir düzeni, kalıbı yok mu? Sonsuz çeşitlilikte kalıplar mı içeriyor?*

π 'nin içindeki bazı sayılara daha sık mı rastlanıyor? Öyleyse bu sayılar tam da rasgele dağılmış değil mi acaba?

Belki de matematikçilerin yüzyıllar boyunca π 'ye duydukları ilgi ve hayranlık, dağcılar hep daha yükseklerle tırmanmaya yönelten güçlü istek ve duygulara benzetilebilir.

* π 'nin ondalık basamaklarında bazı sayılara daha sık rastlanır. π 'nin şimdiye kadar bulunan ondalık basamaklarında e'nin 6 ondalık basamağı 8 kez geçer. 2'nin ilk 8 basamağı π 'nin 52.638'inci basamağından itibaren bulunur; π 'nin ilk 6 basamağı, π 'nin ilk 10 milyon ondalık basamağında en az 6 kez yinelenir.

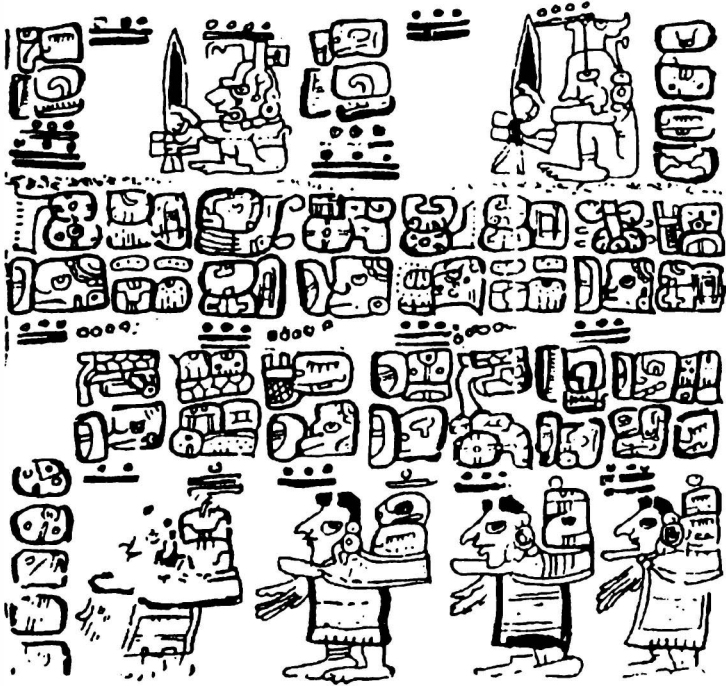
Mayaların Kullandığı Matematik

Engizisyon mahkemelerinin aşırı bağnazlığı ve Yenidünya'yı fetheden İspanyollar'ın açgözlülüğü, Maya uygarlığına ait kayıtların ve belgelerin pek çoğunun kaybolmasına yol açmıştır.

Madrid'deki İspanyol Kraliyet Akademisi kütüphanesinde bulunan Mayalar'a ilişkin *Relacion de las cosas de Yucatan* adlı kitap, uzun yıllar boyunca önemsenmediği için gün ışığına çıkamamıştır. 1869'da Fransız rahip Charles Etienne Brasseur de Bourbourg, bu kitabı ve Maya uygarlığını yeniden keşfetmiştir. Bu kitap, Maya hiyeroglif yazısıyla yazılan belgeleri yakarak Maya uygarlığını tarihten silmeye çalışan Diego de Landa tarafından yazılmıştı. De Landa, Katolik dinini yayma tutkusuyla, Maya yazı yöntemlerini yok ederek Mayalar'ı İspanyolca öğrenmeye ve Katolik dinini benimsemeye zorlayabileceğini düşünmüştü. De Landa'nın kitabı, yok edilen Maya yazısından bazı örnekleri sergilemekte ve Maya kültürel geleneklerinden bahsetmektedir. Astronomi ve zaman hesaplamalarında kullanılan Maya sayısal simgeleri, yalnızca Maya takvimleri aracılığıyla günümüze kalmıştır. Maya matematiği ile mimari başarılarına ait belgeler olmadığından, bu konudaki değerlendirmeler, bazı varsayımlara dayanmak zorundadır.

D. Drucker G. Kubler ve H. Harleston tarafından geliştirilen teoriler, Meksika piramitlerindeki mimari ölçüleri, Pisagor sayılan, π , e ve altın oranla ilişkilendirmeye çalışır.

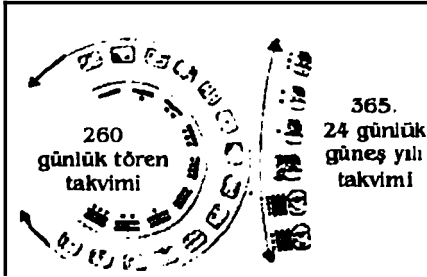
Mayalar'ın matematiği ile ilgili belgeler, basamaklı sayı sistemlerini, sınıf ve zamanı izlemek için geliştirdikleri yöntemleri içerir.



Maya takvim kayıtlarından bir sayfa

Ne yazık ki, pek çok Maya yazısı henüz çözülememiştir. Ama, onların 20'şer, 20'şer saydıklarını biliyoruz. Günlük kullanımda yararlandıkları sistemi ise bilmiyoruz; çünkü bu alandaki belgeler yok edilmiştir. Bu nedenle, yalnızca astronomi ve takvim kayıtlarına dayanarak bazı bilgiler ortaya konabiliyor. Mayalar istedikleri kadar büyük sayıları göstermek için basamaklı sayı sistemini geliştirmişlerdi. Ayrıca, bir birimin yokluğunu göstermek için bir simge kullanıyorlardı; dolayısıyla "sıfır" kavramı vardı. Yaşamlarında dinin ve törenlerin önemli bir yeri olduğu için astronomi ve takvim kayıtları oldukça kapsamlıydı.

Mayalar'ın geliştirdiği takvimler, günümüzün Gregoryan takviminden ya da herhangi bir uygarlığın geliştirdiği takvimden daha doğrudur.



Güneş ve tören takvimleri 52 yılda bir çakışırdı; buna takvim dairesi denirdi.

tören takvimindeki tarih	Güneş takvimindeki tarih
13 AHAU	18 CUMKU

Tören ve Güneş takvimlerindeki semboller kullanılarak yazılan tarihler

Mayalar üç takvim geliştirdi: Tören takvimi (260 gün), Güneş takvimi (365+1 gün) ve Venüs takvimi (585 gün).

Maya Güneş takviminde yanlış payı 1 günün 1,98/10.000'i kadardı. Oysa, günümüzün Gregoryan takviminde bu rakam 3,02/ 10.000'dir. Palenque kentinin astronomları, birbirini izleyen iki dolunay döneminin ortalama uzunluğunu 81 Ay ayına göre 2.392 gün, yani 29.5308642 gün olarak hesaplamışlardı; günümüzdeki hesaplara göre bu rakam 29.53059'dur.

Maya takvimleri yalnızca zamanın ölçümüyle ilgili değildi. Kutsal varlıkların adları belirli tarihlerle ilişkilendirilmişti. Her tarihte bir tanrının, hayırlı ya da değil, belirli bir yükümlü-

lüğünün olduğu düşünülürdü. Bu tarihler devresel olarak düzenlenmişti. Birbirini izleyen gün, ay, yıl devreleri, sürekli yinelenen, devrelere bağlanmıştı.

260 günlük tören takvimi (*tzolkin*), her biri bir tanrının adını taşıyan 20 günlük devrelere bölünmüştü. Her tanrının adına, 113 arasında değişen bir sayı da verilmişti. Böylece, 260 günlük takvimin her gününün, tanrılarla ilişkili özel bir adı ve başka bir gün için yinelenmeyen bir sayısı vardı. Kısaca, tanrıların adları ile 1'den 13'e kadar birbirini izleyen ve yinelenen sayılar arasında bire-bir uyum oluyordu. Örnek:

tanrı adı: A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T

A B C D E F G...

sayılar: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 1 2 3 4 5
6 7 8 9 10 11 12 13 1...

Astroloji alanında yaptıklarına benzer bir biçimde Mayalar, 260 günün her birinin olumlu ya da olumsuz bir şeyi gösterdiğini düşünerek, günleri simgelerle belirlemişlerdir. Onlara göre, kişinin doğduğu gün onun karakterini ve tüm yaşamını belirler.

Güneş takvimi (*haab*) 20 günlük, 18 aydan oluşuyordu. 365 günlük Güneş takviminin geriye artan 5 günü (*uayeb*) cansız ve yararsızdı. İnsanlar bu beş günde çok az şey yapar, dinsel inançları doğrultusunda hareket ederlerdi.

Güneş ve tören takvimleri birlikte kullanılırdı. Bu nedenle bir günde iki takvimin özellikleri bulunurdu. Her iki takvim sistemi tek bir sistem gibi ele alındığından, bütün sistem kendini 52 yılda bir yineliyordu. Bu birleşik takvimlere takvim daireleri deniyordu. $365 \times 260/5 = 18.980$ gün = 52 Güneş yılı ya da 73 törensel takvim yılı (260 ve 365'in en küçük ortak katı OKEK 18.980' dir). Bu sistemde 52 yıl boyunca, her yılın kendine özgü bir adı vardır.

Bunların yanı sıra, dünyadan bakıldığında, Venüs'ün, Güneş'in karşı yönünde görüldüğü gün sayısına dayanan Venüs takvimi de kullanılırdı. Böylece binlerce yıl boyunca, her

günün özel adı bu üç takvime dayandırılmıştır. Venüs'ün 5 tam dolanma süresinin ortalaması olarak bir tam dolanma süresi 580-588 gün arasında değişir. Bu ortalama 583,92 gün eder; Mayalar ise gün sayısını 584 olarak bulmuşlardı. Mayalar, 301 dolanımında bir ortaya çıkan 24 günlük farkı düzeltmek için hesaplamalar yapmış ve yanlış payını 6.000 yılda 1 güne indirmişlerdir.

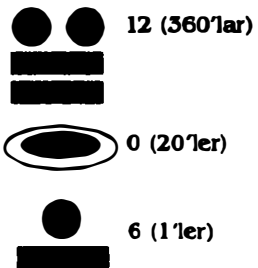
Doğal olarak, bütün bu takvimlerin ve günlerin adlarının altında gizemli Maya bilgileri ve dinsel gelenekleri vardır; bunların araştırılması çok zevkli olabilir. Maya takvimlerine göre bizim şimdi içinde bulunduğumuz devre, MÖ 12 Ağustos 3113'te başladı ve 24 Aralık 2011'de dünyanın yok olmasıyla sona erecek. Maya sayısal sistemi, takvimlerinden büyük ölçüde etkilenmiştir. Gelişkin bir 20 basamaklı sayı sistemi kullandıkları için rakamlarını yalnızca 3 simge kullanarak dikey yazarlardı. Bir için ● beş için ■ ve sıfır için ○ simgeleri kullanılırdı. Ama basamaklı sayı sistemleri, 20'li taban sistemin, kesin bir biçimde izlemezdi. Örnek:

$$1 = 20^0, 20 = 20^1, 400 = 20^2, 8.000 = 20^3, 160.000 = 20^4.$$

Üçüncü basamaktan sonra bir sapma görülür:

$$1=20^0, 20=20^1, 360=18 \times 20^1, 7.200=18 \times 20^2, 144.000 = 18 \times 20^3, \dots$$

Bu örnekler, Güneş ve tören takvimlerinde kullanılan 18 ve 20 sayılarının kullanım biçimini de gösteriyor. Sıfır için kullandıkları simge hem bir "yer tutar" (basamaktaki yeri gösterir), hem de bir "miktar" gösterir. Mayalar 4.326'yı şöyle yazardı:



FERMAT'IN SON TEOREMİ: Kanıtlandı mı? Kanıtlanmadı mı?

Matematikteki en güncel, çözülmemiş problemlerden biri de "Fermat'ın Son Teoremi"dir. Asıl mesleği avukatlık olan Pierre de Fermat (1601-1665), boş zamanlarında matematikle ilgilenirdi. Kitaplarından birinin kenarına şöyle yazmıştı:

Bir sayının küpünü, iki sayının küplerinin toplamı biçiminde yazmak; bir sayının 4. üssünü, iki sayının 4. üslerinin toplamı olarak yazmak; genel olarak söylersek, bir üstel sayıyı, aynı üstten iki sayının toplamı olarak yazmak olanaksızdır. Bunun gerçekten dikkat çekici güzellikte bir kanıtını buldum ancak, sayfadaki boşluk, kanıtı yazamayacak kadar küçük.

Yani, tekrar belirtirsek:

$a^n + b^n = c^n$ denkleminin $n > 2$ ve sıfırdan farklı a, b, c sayıları için çözümü yoktur.

Bu not, Fermat'ın ölümünden sonra bulundu. Yüzyıllar boyunca en ünlü matematikçiler de içinde olmak üzere, birçok

$n > 2$, $\forall$ tamsayılar, a, b , ve c .

$$a^n + b^n = c^n$$

matematikçi bunu kanıtlamaya çalıştı. Bu teoremi kanıtlamaya çalışırken ortaya çıkan teoriler, teoremden bile daha önemli sonuçlar doğurdu. Bazı insanlar, Fermat'ın bu problemi gerçekten çözmemiş olduğunu, meslektaşlarını zorlamak için böyle yaptığını düşünüyor. Her şeye karşın, bu teorem 350 yıl boyunca birçok önemli matematiksel düşünceyi ve buluşu

yönlendirdi. 1988'de Japon matematikçi Yoichi Miyaoka kanıtını açıkladı. Ama açıklamasından 6 hafta geçmeden kanıtını geri aldı. Kanıtında yeni bir düşünce denemiş, ama hemen çözülemeyecek engeller ortaya çıkmıştı. Fermat'ın Son Teoremi hâlâ matematiksel düşünceye meydan okuyor.*

* Çev.not: Bu problemle uzun süre uğraşan matematikçi Wolfskehl 1908'de öldüğünde, vasiyetinde bu problemi gelecek 100 yıl içinde kanıtlayan kişiye verilmek üzere 100.000 mark bıraktı. 1993 Haziranı'nda matematikçi Andrew Wiles, Cambridge Üniversitesi'nde bu teoremi kanıtladığını açıkladı. Onun kanıtının doğru olup olmadığına dünya matematikçileri karar verecek.

Hangi Gün Dogdunuz?

Haftanın hangi gününde belirli bir olayın ger ekleştirdini ya da gerçekleşeceğini kolayca bulabiliriz.

AY SAYILARI

Ocak	1
şubat	4
Mart	4
Nisan	0
Mayıs	2
Haziran	5
Temmuz	0
Ağustos	3
Eylül	6
Ekim	1
Kasım	4
Aralık	6

GÜN SAYILARI

Pazar	1
Pazartesi	2
Salı	3
�arşamba	4
Perşembe	5
Cuma	6
Cumartesi	7

Eğer artıkylsa, ocak "0", şubat 3'tür.

YÜZYIL SAYILARI

1800 - 1899 (2 ekleyin)
1900 - 1999 (0 ekleyin)
2000 - 2099 (6 ekleyin)
2100 - 2199 (4 ekleyin)

Ömek: 27 Ağustos 1990.

- 1) Yılın son iki rakamını alın (90).
- 2) Bunu 4'e bölün, ondalık noktadan sonraki rakamları hesaba katmayın ($90/4 = 22$)
- 3) Ay çizelgesine gidin, ağustosun sayısını bulun (3).
- 4) Ömegimizde ağustosun 27. günü vardı. Bu rakama 1-3 - adımlarında bulduğunuz rakamları ekleyin
($27 + 90 + 22 + 3 = 142$).
- 5) Bu toplamı 7 ile bölün ($142/7=20$) Ondalık noktadan sonraki 2'yi ekleyin. (Eğer ondalık noktadan sonraki rakam "0" ise bunun yerine 7 rakamını kullanın.)
- 6) Yüzyıl çizelgesinden, ilgili yüzyılın sayısını bulun. (0)
- 7) Bunu 5. adımdaki ondalık noktadan sonra bulduğunuz rakama ekleyin ($2 + 0 = 2$).

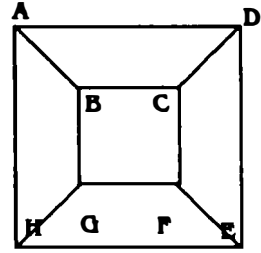
2 rakamı haftanın gününü gösterir. Gün çizelgesinden 2'ye karşılık gelen günü bulun. (Pazartesi)

Hangi gün doğdunuz? Nasıl hesaplayacaksınız?

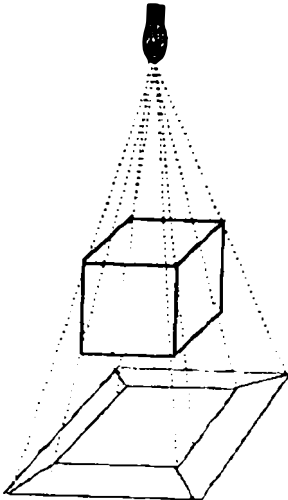
Küpün İzdüşümü

İzdüşümsel düzlem geometrisi, bir düzlemde bulunan bir nesnenin başka bir düzleme izdüşümü düşürüldüğünde, değişmeyen özelliklerini inceler.

Örneğin, bir düzlemdeki şekillerin, bir noktadan, başka bir düzleme izdüşümleri düşürüldüğünde, bazı özellikleri değişir, bazıları ise değişmez. Doğruların izdüşümleri doğrular, üçgenlerin üçgenler olur. Ama, dairelerin izdüşümlerinin daireler olması gerekmez. İzdüşümün alındığı noktaya bağlı olarak, elips biçimine dönüşebilirler. Bütün bu durumlarda, uzaklık, açı ölçümleri ve birbirine eş şekiller aynı kalmaz.



Küpün 6 kare yüzü, ABCD, ABQH, HGFE, CDEF ve BCFG biçimine dönüşmüştür.



Üç boyutlu cisimlerin, bir düzlemdeki izdüşümlerine bakıldığında ilginç özellikler ortaya çıkar. Aşağıdaki şekilde bir küpün üç boyutlu görüntüsünün, iki boyutlu düzleme geçirilmesi gösterilmiştir. Sonuçta küpün 6 kare biçimli yüzünün hepsi aynı anda görülebilir. Hayal gücünüzü zorlayıp, dört boyutlu bir hiperküpün, üç boyutlu uzaydaki izdüşümünü gözünüzün önünde canlandırabilir misiniz?

Einstein'in "Gizi"

Bilimi Geliştirmek için Amerikan Birliği'nin Şubat 1990 tarihli toplantısında Einstein'ın bütün teorilerinin yalnızca kendisine ait olup olmadığına ilişkin hararetli bir tartışma çıktı. Bu tartışmaya Senta Troemel-Ploetz'in *In the Shadow of Albert Einstein: The Tragic Life of Mileva Einstein Maric* (Einstein'in Gölgesinde :Mileva Einstein Maric'in Trajik Yaşamı) adlı kitabı yol açtı. Einstein ve Maric 1896'da İsviçre, Zürich'teki Teknoloji Enstitüsü'nde öğrenciyken tanıştılar. 1903'te evlendiler, 1914'te ayrıldılar. Yazara göre, Einstein çalışmalarını kansıyla birlikte yürüttü ve bunlar ortak bir çabanın ürünüydü.

$$(E = mc^2)$$

Yazar bu görüşünü şu noktalara dayandırmıştır:

- 1) Her ikisi de aynı dersleri aldı.
- 2) Bitirme tezlerini aynı alanda yazdılar.
- 3) 1900'de ikisi de yıl sonu sınavlarını geçemedi; ama Einstein mezun edildi.
- 4) 1982'ye kadar İsviçre üniversitelerinde kadınlar ile erkeklere farklı akademik ölçütler uygulanıyordu.
- 5) Eger Maric çok parlak olmasaydı, çoğunluğu erkek olan bu okulda fizik okumasına izin verilmezdi.
- 6) Maric babasına, Einstein ile birlikte çok önemli bir çalışmayı bitirdiklerini ve bunun Einstein'ı çok ünlü yapacağını yazmıştır. Aynı yıl Einstein, özel görelilik teorisini, Brown hareketi ve fotoelektrik etkisine ilişkin çalışmalarını yayımlamış ve bu yayınla 1921 Nobel ödülünü almıştır.

- 7) *Einstein, Maric'e bütün ödül parasını vermiş; o da bu ruh hastası olan oğlunun bakımı için harcamıştır.*
- 8) *Einstein, Maric'e yazdığı 41 mektupta sürekli olarak "bizim araştırmamız" ve "bizim çalışmamız"dan söz etmektedir. Maric'in Einstein'a gönderdiği mektuplardan yalnızca 10'u bugüne kalmıştır. Bu mektuplarda hiç fizikten söz edilmez. Ama, Einstein'ın mektuplarından, Maric'in şimdi elde olmayan mektuplarında sorduğu fizik ile ilgili sorulara yanıt verdiği anlaşılmaktadır. Einstein, mektuplarında her zaman fizik konusundan söz etmektedir.*
- 9) *Maric, fizikçi Paul Habricht ile birlikte elektrik akımının ölçülmesi için bir makinenin yapımı üstünde çalışmıştı. Bu makinenin patenti Einstein-Habricht adlarına alınmıştır.*
- 10) *Yazar, o dönemde erkeklerin, kadınların yaptığı işlerin üstüne konmasının çok yaygın olduğunu belirtiyor. Ayrıca, Einstein'ın üniversiteye atanabilmesi için Maric'in katkılarının gizli kalmasını kararlaştırmış da olabilirler.*

Matematik ve Boş İnançlar

Yüzyıllar boyunca insanlar sayılara özel bir yer vermiştir. Bazı insanlar bazı sayıların uğurlu olduğuna inanır. Bazıları ise sayılara rakamsal değerlerinin ötesinde anlam yükler. Pek çok insanın bir uğurlu sayısı vardır. Çok değişik halklar arasında 13'ün uğursuz sayıldığı da görülür.

Pisagorcular sayıların evreni yönettiğini düşünüyorlardı. Tam sayılara özel önem veren Pisagorcular'a göre, tamsayıların nasıl kullanılacağına ustalaşırsa, evrenin düzeni kavranabilir ve bu



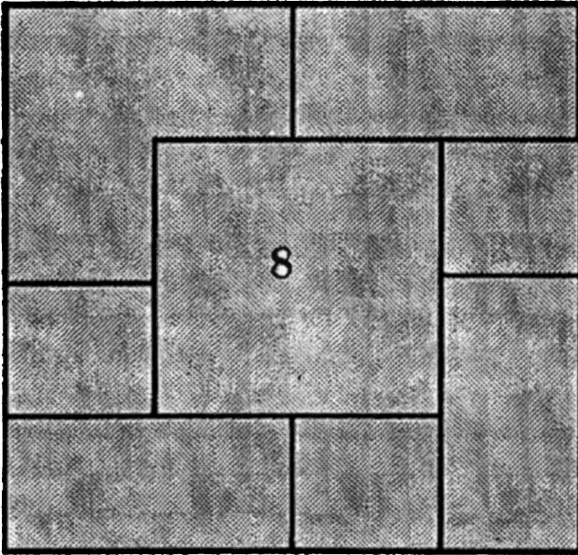
Bu eski dinsel simgede 4 sayısının özel bir yeri vardı.

düzeni etkilemek olanaklı olabilirdi. Ayrıca, sayıların akı, sağlığı, adaleti ve evliliği etkilediğini de düşünüyorlardı. Örneğin 1, bütün sayıların başlangıcıydı. Çift sayılar kadındı ve ilk çift sayı olan 2, farklı düşüncelerin simgesiydi. 1 ve 2'den oluşan (birlik ve çeşitlilik) ilk tek sayı olan 3, erkekti ve uyumun simgesiydi. Bir tam kare sayı olan 4 adaleti gösteriyordu. 5 evliliğin simgesiydi; ilk kadın ve erkek sayılardan oluşmuştu.

Üst Üste Gelen Kareler Problemi

8 birbirine eşit kare, üst üste, tabakalar halinde yerleştirilmiştir. Eğer en son yerleştirilen 8 numaralı kare ise, diğer 7 karenin hangi sıraya göre, şekilde gösterildiği gibi, üst üste yerleştirildiğini bulun.

bkz. çözümler



Ada Byron ve Bilgisayar Programlaması

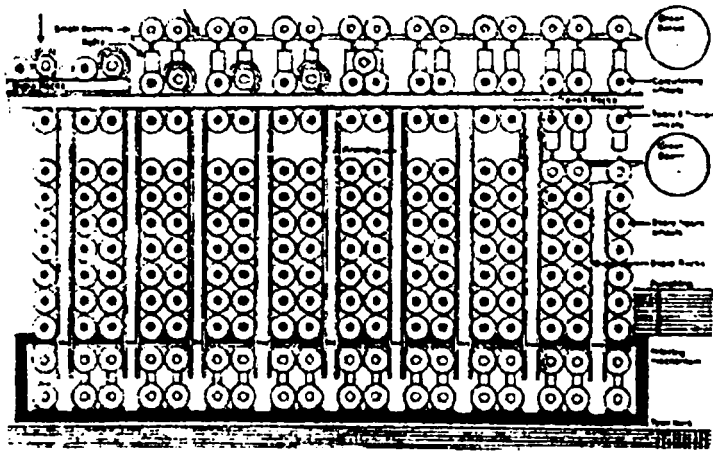
Analitik hesap makinesinin herhangi bir şeyin öncüsü olacağı gibi bir iddiası yoktur. O ancak bizim bildiğimiz şeyleri yapabilir: Düzenleme ve iş. Analiz yapabilir ama, ileriye dönük analitik açıklamalarda gerçeği öngöremez. Onun görevi, bizim zaten bildiğimiz şeylerde bize yardımcı olmaktır.

Ada Byron Lovelace

Günümüzde belki de yabancı diller kadar çok bilgisayar dili vardır. Bir bilgisayar programcısı belirli bir programla çalışırken, gereksinimlerini tam karşılayamazsa programda değişiklikler yapar ve böylece yeni bir bilgisayar dili doğmuş olur. Bütün bu diller ne zaman, nerelerde ve nasıl doğdu?

Bilgisayarın öncüsünün öyküsü Charles Babbage'in (1792-1871) diferansiyel ve analitik hesap makinelerini yapmasıyla başlar. Ne yazık ki, o dönemin teknolojisiyle bu ilk girişimler daha da geliştirilip, verilerin bilgisayar programları aracılığıyla işlendiği gelişkin makinelere döndürülemedi.

Adı matematik tarihi kitaplarında yer almasa da Ada Byron Lovelace ilk bilgisayar programcılarından biriydi. 1821'de Augusta ve İngiliz şairi Lord Byron'un kızı olarak dünyaya geldi. Her zaman matematiğe karşı büyük ilgisi ve sevgisi vardı. Kadınların bilimlerle ilgilenmelerinin istenmediği ve bu alanlardaki öğrenim programlarından dışlandığı bir çağda yaşayan Ada'nın şansı aile dostu Mary Sommervill'e matematikle ilgili sorular sorabilmesi ve Augustus de Morgan'ın da özel hocası olmasıydı. 19 yaşında Kont Lovelace ile evlendi. İki oğlu bir kızı oldu. Eşi onun matematiğe karşı ilgisinin sürmesini destekledi. Şimdi, Ada'nın bilgisayar programcılığına girişinin öyküsünü anlatalım.



Analitik hesap makinesi tasarımının bir çizimi.

On yaşındayken bir grup erişkin insanla birlikte Babbage'ın Londra'daki laboratuvarını gezen Ada Byron, harika hesap makinesine ilişkin sorduğu akıllı sorularla Babbage'ı çok etkilemişti. 21 yaşındayken Babbage'a yazarak bir özel öğretmen bulmasına yardımcı olmasını istedi. Bir yıl sonra Babbage'ın analitik hesap makinesiyle ilgili bir yazıyı Fransızca'ya çevirdi. Aslında, Ada yazıyı yalnızca çevirmekle kalmadı, makineyle nasıl işlem yapılacağını anlatan uzun açıklamalarda bulundu. Devletin bu projeden desteğini çekmesi nedeniyle parasal sıkıntılardan başladığı zamanlarda bile, matematik sevgisi üstüne temellenen Babbage-Ada ilişkisi sürdü. Ada, analitik hesap makinesinin yapılabilmesi için mücevherlerini sattı; Babbage ile birlikte olasılık hesabındaki matematiksel yeteneklerini kullanarak bir sistem geliştirdiler ve para kazanmayı umarak at yarışlarında oynadılar. Ne yazık ki, Ada çalışmalarını sonuçlandıramadan 36 yaşında kanserden öldü.

Babbage'ın analitik hesap makinesi tasarımı, bunun kesinlikle modern bilgisayarların öncüsü olduğunu göstermektedir. Nitekim, IBM Babbage ve Ada Lovelace'in anısına, işleyen bir analitik hesap makinesi modeli yapmıştır. Bilgisayar programcılığındaki çalışmaları nedeniyle de bir bilgisayar program diline onun adı verilmiştir: Ada.

ÇÖZÜMLER

1) Sonsuzluk Otel

Her odadaki kişiyi 2 kat büyüklükte numarası olan odalara kaydirmaya karar verdi. Böylece bir numaralı odada kalan, 2 numaralı odaya, 2 numaralı odadaki 4 numaraya, 3 numaralı odadaki 6 numaraya,...kaydırıldı. Bunun sonucunda tüm tek sayılı odalar, gelen sonsuz sayıda müşteri için boşaltıldı.

2) Bagucu Problemlerinin 8. Sorusu

Lewis Carroll'un açıklaması:

m = kişi sayısı

k = son (en az parası olan) kişinin parasının miktarı

Oyunun birinci turunun sonunda, her kişinin 1 lira daha az parası olur; ve ortada dolaşan para kesesinde " m " lira vardır. Paralar herkesin elinden " k " kere geçtikten sonra, her ; kişinin " k " lira kadar daha az parası olur; en son kişinin elinde para kalmaz ve ortada dönen toplam para miktarı " mk " lira olur. Oyun, son kişinin elinde $(mk + m-1)$ kadar lira kalınca, biter. Son oyuncunun yanındakinin, hiç parası kalmaz; birinci kişinin $(m-2)$ miktarında parası olur. Yan yana oturanlardan, yalnızca birinci ve sonuncu kişiler 4'e 1 oranında paraya sahip olabilir. Böylece, ya

$$mk + m-1 = 4(m-2) \text{ ya da}$$

$$4(mk + m-1) = m-2 \text{ olabilir.}$$

$$\text{Birinci denklem: } mk = 3m-7, \text{ yani } k = 3-(7/m)$$

Bu denklemin $m=7$ ve $k=2$ 'den başka tamsayı çözümü yoktur.

$4mk = 2-3m$ olan ikinci denklemin pozitif tamsayı çözümü yoktur.

Sonuç: 7 kişi; 2 liradır.

3) Zenon Paradoksu: Aşil ve Kaplumbağa

Aşil, kaplumbağaya 1111 1/9 metrede yetişir. Eger yarıştıkları yol bundan kısa ise, kaplumbağa yarışı kazanır. Eger yol tam bu uzunluktaysa, başa baş kalırlar, daha uzunsa, Aşil kaplumbağayı geçer.

4) Satranç Tahtası Problemi

Şekli değiştirilmiş satranç tahtasını tamamen domino taşlarıyla kaplamak olanaksızdır. Bir domino taşı bir beyaz ve bir siyah kareyi kaplamak zorundadır. Çıkarılan iki köşe de aynı renkte olduğu için, geriye kalan siyah ve beyaz karelerin sayısı birbirini tutmaz.

5) Beklenmedik Sınav Paradoksu

Sınav cuma günü olamaz; çünkü bu haftanın son günüdür (yanım gün) ve bu perşembeden tahmin edilebilir. Böylece perşembe sınavın verilebileceği son gün olur. Ama sınav perşembe günü de verilemez; çünkü çarşamba gününe geldiğinizde, önünüzde perşembe ve cuma günlerinin kaldığını biliyorsunuz. Bu durumda sınav perşembe günü de yapılamaz; çünkü önceden ilan edilmeyeceği açıklanmıştı. Bu durumda yalnızca çarşamba kalıyor, ama çarşamba da yapılamaz; çünkü o zamana kadar sınav yapılmadıysa, salı gününden, çarşamba gününde sınav olacağınızı düşünebilirsiniz. Bu tür bir akıl yürütmeyi sürdürürseniz, haftanın bütün günleri elenir.

6) Mantık Problemi

Çiftçi önce keçiyi karşı kıyıya geçirir. Sonra döner, kurdun geçirir ve keçiyi yanına alır. Keçiyi ilk yolculuğa başladığı kıyıda bırakır, lahanayı kurdun yanına götürür. Tekrar öbür kıyıya dönüp keçiyi alır, kurdun ve lahananın bulunduğu karşı kıyıya geçer.

7) Sahte Para Bulmacası

Bir kez.

Tartının üstüne birinci torbadan 1, ikinci torbadan 2, üçüncü torbadan 3...ve öbür torbalardan da benzer biçimde birer lira koyun. Eğer paraların hiçbiri sahte değilse, toplam ağırlığın ne olacağını biliyorsunuz. Bu nedenle hangi torbanın sahte para torbası olduğunu saptamak için, tartıda gösterilen ağırlığa bakın ve ne kadar fazla ağırlık olduğunu hesaplayın.

Bulduğunuz rakam, sahte paranın bulunduğu torbanın kaçın-
cı torba olduğunu gösterecektir. Örneğin, eğer toplam ağırlık,
olması gerekenden 4 gram fazlaysa, dördüncü torba sahte
para torbasıdır; çünkü tartıya ondan 4 lira koymuştunuz.

8) Duvar Karşında Üç Adam

Duvarın en uzağındaki adam ya 2 kahverengi ya da 1
kahverengi ve 1 siyah şapka görür. Eger 2 siyah şapka görsey-
di, kendi şapkasının kahverengi olduğunu bilebilirdi. Ortadaki
adam, önünde 1 kahverengi şapka görür; eger 1 siyah şapka
görseydi, birinci adamın yanıtından, kendisinin kahverengi bir
şapkası olduğunu bilebilirdi. Bu nedenle duvara en yakın olan
adam kendisinin, ortadaki adamın gördüğü, yalnızca kah-
verengi bir şapka giyebileceği sonucuna ulaşır.

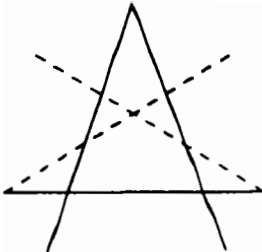
9) 7, 11, 13, ve Bazı Tek Sayılar

" a b c a b c" sayısı basamaklarına göre değeren-
dirilerek yazılırsa, $100.000a + 10.000b + 1.000c + 100a +$
 $10b + c = 100.100a + 10.010b + 1.001c$ elde edilir. $7 \times 11 \times$
 $13 = 1.001$ sayısı $100.100, 10.010$, ve 1.001 sayılarının ortak
böleni olduğu için 7, 11 ve 13 sayıları her zaman " a b c a b
c;" sayısını bölecektir. 7, 11 ve 13'ün diğer bütün bileşimleri
de " a b c a b c" sayısının bölenleri olacaktır. Bunlar 77, 91,
143 ve 1.001 sayılandır.

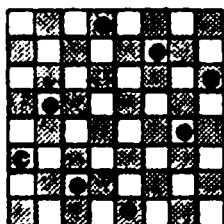
10) Ölçüm Problemi

Kullanabileceğiniz 4 cetvel uzunluğu: 1, 3, 9 ve 27'dir

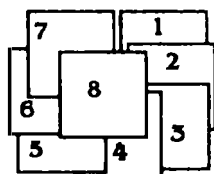
12) Üçgen Oluşturma Bulmacası



11) Sekiz Dama Taşı Bulmacası



13) Üst Üste Gelen Kareler Problemi



Lewis CARROLL

BULMACALAR DİYARINA YOLCULUK

MATEMATİK AYNASININ ARDINDAKİ DÜNYAYA BİR GEZİ.

*KİMBİLİR, BELKİ DE ORADA TAVŞANIYLA
BİRLİKTE ALICE BEKLİYORDUR SİZİ.*

Bu kitaptaki masallarda Lewis Carroll (C.L.Dodgson) son derece akıl kaşırtıcı matematik bulmacaları sunmaktadır. Bulmacaların her biri yazarın doyumsuz ve ilginç anlatımıyla okuyucuyu bu kez matematik aynasının öteki tarafındaki şaşırtıcı dünyaya taşımaktadır. Masallar ilk kez Nisan 880'den başlayarak dizi halinde The Monthly Packet dergisinde yayımlanmıştır. Kitap, yayımlandığı dönemde gönderilen yanıtlara Lewis Carroll'ın yeni bir bulmaca tadındaki yanıtlarını da içermektedir.

Bulmacalar Diyarına Yolculuk'ta hem şaşırtıcı ve kafa kaşırtıcı matematik problemleri karşısında kendinizi sınama hem de yazarın diğer yapıtlarında göz ardı edilen matematiksel örgüyü yakalama şansını yakalayacaksınız.

Matematik aynasının ardındaki Bulmacalar Diyarı'na iyi yolculuklar...

Barry. R. CLARKE

ÇÖZ BAKALIM

Eger düşünmeyi seviyorsanız ÇÖZ BAKALIM tam size göre bir kitap. Her türden beyin zevkine uygun bulmacayla karşılaşacaksınız bu kitapta: Mantık problemleri, sözcük bulmacaları, cebirsel oyunlar, görsel-uzamsal bilmeceler, mantıkdışı çözümlü sorular...

Kitaptaki hiçbir öykü lise düzeyinin üstünde bir matematik bilgisi gerektirmiyor –güçlü bir zekânın dışında tabii...

ÇÖZ BAKALIM’da güçlük durumuna göre iki tür bulmacayla karşılaşacaksınız. İlk bölümde mütevazı bir dikkatle gizlerini çözebileceğiniz öyküler yer alıyor –ama yine de kendinize çok güvenmeyin. İkinci bölümde ise biraz daha yoğunlaşmanız gerekecek.

James F. FXX

SÜPER ZEKÂLARA HODRİ MEYDANI! BİLMECELER

Çok mu zekisiniz?

Süper-zekâ mısınız yoksa?

İşte bu kitap, bu soruların yanıtını verecektir size.

En azından egonuzu şişirecek, zihin açıcı bir keyifle zaman geçirecek –ya da tam tersine, sizi çılgına çevirecek...

İlk bakışta bulmacaların çözümü yokmuş gibi gelebilir; ancak ısrar ve küçük bir yaratıcılık, sizi şaşırtıcı bir mutlu sona vardıracaktır.

Hadi, açın kaleminizin ucunu ve korkmadan deneyin kendinizi!

Görelim bakalım ne kadar üstatsınız!

Lewis CARROLL'dan

OYUNLAR VE BİLMECELER

Daha çok Alice Harikalar Diyan'nda ve diğer kitapların yazarı olarak tanınan Lewis Carroll (Charles L. Dodgson) aynı zamanda matematikte ve bulmaca bulmaca yaratmada çok yetenekliydi. Yaşamının sonuna kadar matematiksel bulmacalar ve oyunlarla ilgili bir kitap üzerinde çalıştı ancak tamamlayamadan öldü. Bu kitap, Carroll'un kendisinden daha fazla yaşayan bulmecelerinin ve oyunlarının bir derlemesidir. Lewis Carroll hakkında pek çok araştırma yapmış ve matematik üzerine yazılar yazan Edward Wakeling tarafından bir araya getirilmiştir. Carroll'un, hazırladığı koleksiyona katmayı tasarladığı pek çok problemi içermektedir.

Carroll'un orijinal oyunlarının yanında, editör kendisinin yarattığı birkaç oyunu da eklemiştir. Bazı ipuçları ve çözümlerle sizlere yardımcı olmaya çalışmıştır.

Çogu ilk defa bu kitapta yayımlanan problemler oldukça şaşırtıcı zihinsel oyunlar içeriyor. John Tenniel'in ünlü çizimleriyle daha da güzelleşen kitap, bulmaca fanatiklerine ve "Alice" kitaplarını sevenlere iki kat daha fazla zevk verecek.

Yaşayan Matematik

Theoni PAPPAS

Googol nedir? Sonsuzluk otelini ziyaret etmek ister misiniz? 8. yüzyılda yaşayanların içinden çıkamadıkları belalı mantık problemi acaba sizin de kafanızı karıştıracak mı? Theoni Pappas, elinizdeki kitapla, bir oyun alanı olarak matematiğin eğlenceli dünyasına doğru yolculuğa çıkarıyor bizleri. Theoni Pappas'ın arı bir dille yazdığı bu kitapta; matematiğin büyüğü en beklenmedik yerlerde, karmaşık formüllerin, sıkıcı denklemlerin çok ötesinde; ağaç yapraklarında, telefon tellerinde, sanat eserlerinde, kısacası yaşamımıza ve dünyaya ait ne varsa orada karşımıza çıkıyor. Kitapta kullanılan illüstrasyonlar, grafikler ve fotoğraflarla, matematik yalnızca akla dayalı bir etkinlik olmaktan çıkıyor ve aynı zamanda görsel bir deneyim haline de geliyor. Matematik oyunları, bulmacalar ve kavramlar içeren bu kitap, matematiğin yepyeni bir yanını sergiliyor okuruna.

Yaşayan Matematik, küçük ve büyük yetişkinler için...

Doruk Bilim

ISBN 978-975-553-400-8



9 789755 534008

www.dorukyayinlari.com

