

Keyifli Okumalar Dileriz

Binlerce kategoride milyonlarca PDF e-kitap, ders kitapları, dergiler ve romanlara platformumuz üzerinden ücretsiz ulaşabilirsiniz.

RESMİ WEB SİTEMİZ

<https://rantey.org>

Yedek ve Duyuru Kanallarımız

Sitemize erişim engeli gelmesi veya adres değişikliği durumunda aşağıdaki kanallardan güncel giriş adresine erişebilirsiniz:

- Telegram: <https://t.me/birkitapbir>
- WhatsApp Kanalımız : <https://whatsapp.com/channel/0029VbDHv8uE50Us4lvMoc0Y>

Tosun Terzioğlu

Bir Analizcinin Defterinden Seçtikleri

Gözden geçirilmiş 2. baskı

NESİN MATEMATİK KÖYÜ



Tosun Terzioğlu

Lise diplomasını 1961 'de Robert Kolej'den, lisans derecesini 1965'te matematik dalında Newcastle upon Tyne Üniversitesi'nden, doktora derecesini aynı dalda 1968'de Frankfurt Üniversitesi'nden aldı. 1968-1994 yılları arasında Michigan, Wuppertal ve ODTÜ'de ders verdi. 1974-1975 ve 1989-1991 arasında ODTÜ Matematik Bölümü Başkanlığı, 1977-1982 arasında aynı üniversitede Fen ve Edebiyat Fakültesi Dekanlığı yaptı. 1979-1981 arasında Üniversitelerarası Kurul Üyesi, 1990-1991 arasında ODTÜ Senato Üyesi olarak hizmet verdi. 1992-1997 yıllarında TÜBİTAK Başkanlığı yapan Terzioğlu, ayrıca TTGV Yönetim Kurulu, MAM Yönetim Kurulu, KOSGEB İcra Kurulu, TÜBİTAK Bilim Kurulu gibi pek çok kurula üyelik ya da başkanlık yapmıştır. Temmuz 1997-Temmuz 2009 arasında Sabancı Üniversitesi rektörü olarak görev yapmıştır. Akademik ve idari görevlerine ek olarak 1989-2008 arasında Türk Matematik Derneği Yönetim Kurulu Başkanlığı'nı yürütmüştür. Türkiye Üçüncü Sektör Vakfı (TÜSEV) ve Türkiye Ekonomik ve Sosyal Etüdler Vakfı (TESEV)'de, Anne Çocuk Eğitim Vakfı'nda (AÇEV) yönetim kurulu üyesi olarak çalışmıştır.

Editörlük ve yazı kurulu üyelikleri de bulunan Terzioğlu, ayrıca matematik alanında 50'nin üzerinde bilimsel makalenin ve 4 kitabın yazarıdır.

Nesin Yayıncılık A.Ş.
Eskişehir Mahallesi Dolapdere Caddesi Şahin Sokak No: 84/A-C Şişli/İstanbul
Tel: 0212 291 49 89 • Faks: 0212 234 17 77
nesin@nesinyayinevi.com • www.nesinyayinevi.com

Tosun Terzioğlu
Bir Analizcinin Defterinden Seçtikleri

İlk basım Mayıs 2013 (1000 adet)
İkinci basım Kasım 2014 (1000 adet)

Soyut Matematik 7
Nesin Matematik Köyü Kitaplığı: 18

049 01 01 001 - 198
ISBN 978-605-4702-16-9
Sertifika No: 18231

Editör
Ali Nesin

Grafik Danışmanı
İlhan Bilge

Bu kitabın telif hakkı yazarı tarafından Nesin Vakfına bağışlanmıştır.

Baskı ve cilt
Yazın Basın Yayın Matbaacılık Turizm Tic. Ltd. Şti.
İkitelli Çevre Sanayi Sitesi 8. Blok No:38-44 Başakşehir/İstanbul
Tel: 0212 565 01 22 Sertifika No: 12028

Tosun Terzioğlu

**Bir Analizcinin
Defterinden Seçtikleri**

NESİN MATEMATİK KÖYÜ



İçindekiler

Önsöz	1
1 Pisagor Teoremi ve Üçlülere	5
2 Asal Sayılar	17
3 Fermat Amcaya Bayram Ziyareti	33
4 Bazı Eşitsizlikler ve Sonsuz Çarpım	37
5 Topoloji, Metrik ve Norm	49
6 Bir Garip Fonksiyon	63
7 Kuvvet Serileri	71
8 Stone-Weierstrass Yaklaşım Teoremi	101
9 Banach Sabit Nokta Teoremi	111
10 Sayılar ve Polinomlar	121
11 Riemann Zeta Fonksiyonu	139
12 Brouwer Sabit Nokta Teoremi	159
13 Kürede Geometri	173

Önsöz

Geçen yüzyılın ünlü matematikçilerinden Paul Erdős, sanki Tanrı'nın mükemmel kanıtları sakladığı bir kitabı olduğunu, Tanrı'ya inanmasalar bile matematikçilerin bu kitaba inanması gerektiğini sık sık söylerdi. Erdős'ün bu sözünden etkilenen iki matematikçi, bazı teoremlerin olağanüstü güzel kanıtlarını bir kitapta derlediler. Aigner ve Ziegler'in bu kitabının 1988 yılındaki ilk basımı beklenmedik bir ilgi gördü. Genişletilmiş üçüncü basımı ise A. Muhammed Uludağ tarafından Türkçeye çevrildi ve “Kitaptan Deliller” ismiyle 2009 yılında İstanbul Bilgi Üniversitesi tarafından yayımlandı. Bunun üzerine bir süredir aklımda olan sevdiğim matematik teoremlerini içeren karma bir ders verme düşüncesi iyice canlandı. Sabancı Üniversitesi'nde verdiğim bu derse “Defterden Kanıtlar” ismini koydum. İşte bu kitap da o dersten doğdu.

Çoğu kişi matematiği kuru, soğuk, korkutucu ve sevimsiz bulur. Oysa matematikçiler, matematikten derin bir estetik haz alırlar; zaman zaman matematik kavramlarını, kanıtlardaki kıvrak akıl yürütmeleri, “güzel”, “zarif” ve “çarpıcı” gibi sıfatlarla nitelendirirler. Bertrand Russell'a göre matematik duru, berrak, yalın ama yüce bir güzellik taşır. Matematik öğrenirken ve öğretirken karşılaştığım olağanüstü parlak fikirlerin, akıl yürütmelerin ve zarif teoremlerin bende uyandırdığı heyecan ve hazzı bu kitapta okurlarla paylaşmaya çalıştım. Bundan böyle kısaca “Kitap” diye anacağım “Kitap'tan Deliller”in konu seçiminde beni etkilediğini belirtmeliyim. Aslında yaptığım matematiğin bazı eşsiz mücevherlerini derleyip bir arada sergilemekten ibaret. Bu arada eski bir sandığın dibinde unutulmuş birkaç değerli parçayı çıkardım ve tozunu alıp sergime kattım.

Düzlem geometrisinde öğrendiğimiz ünlü Pisagor teoreminin Hintli matematikçi Bhaskara II tarafından bulunan zarif ve tümüyle görsel olan kanıtıyla başlayan birinci bölümde, Pisagor üçlülerinin nasıl hesaplanacağını anlattım. İkinci bölümde ise asal sayıları ele aldım. Günümüzden yaklaşık 22 yüzyıl önce, Öklid tarafından verilen sonsuz sayıda asal sayı olduğunun kanıtı, matematiğin klasik güzelliklerinden birisidir. Bu kanıttan sonra, her doğal sayının asal sayıların çarpımı olarak yazabileceğimizi belirten aritmetiğin temel teoremi gelmekte. Binom katsayıları, Fermat'ın küçük teoremi de bu bölümde yer almakta.

17'nci yüzyılın ünlü bilginlerinden Pierre de Fermat, okumakta olduğu kitabın bir sayfasının kenarına yazdığı notta, 2'den büyük her n doğal sayısı için $x^n + y^n = z^n$ denkleminin doğal sayılarla çözülemeyeceğini kanıtladığını, ancak sayfadaki boşluğun bulduğu kanıtı yazmaya yetmediğini belirtir. Oysa her Pisagor üçlüsü $x^2 + y^2 = z^2$ denkleminin çözümüdür. Ölümünden sonra Fermat'ın notları oğlu tarafından bir kitapta derlenir ve böylece "Fermat'ın Son Teoremi" adını alan bu problem matematikçilerin ilgisini çekmeye başlar. Kes-tirme yoldan üne kavuşmak isteyen amatörler de Fermat'ın Son Teoremi'ni kanıtlamaya çabalarlar. Mutlu sona ancak 1995'te ulaşılır. Andrew Wiles'in verdiği kanıtı anlayabilmek için bu kitapta öngörülenin çok ötesinde bilgi gerekir. Bu bölümde Fermat'ın çok etkin kullandığı sonsuz iniş yöntemini tanıtmakla yetindim.

İlk üç bölümü anlamak için liselerimizde okutulan matematiğin yeterli olacağı kanısındayım. Eşitsizliklerin konu edildiği dördüncü bölüm ve son-rasında ise üniversitelerimizin birinci sınıfında okutulan temel analiz ile doğ-rusal cebire gereksinim var. Dördüncü bölümde sonsuz çarpımlarla sonsuz top-lamlar (yani seriler) arasındaki ilişkiyi de anlattım. Beşinci bölümde, topoloji, metrik uzaylar ve normlu uzaylar konularını kısaca tanıtarak, bazı teorem ve kavramları ardarda verdim. Amacım temel analizin ötesinde olan bu konu-ları özetleyerek kitabımızın kendi içinde yeterli olmasını sağlamaktır. Altıncı bölümün konusu her yerde sürekli ancak hiçbir yerde türevi olmayan bir fonk-siyonu tanıtmak... Bu fonksiyonu elde etmek için limit kavramını ustaca kul-lanmak gerekiyor.

Yedinci bölümün konusu kuvvet serileri. Burada iyi bildiğimiz geometrik serinin toplamından yola çıkarak nasıl farklı serilerin toplamının bulunacağını gösterdim. Newton'un yaklaşımını kullanarak, iyi bilinen bazı klasik fonksi-yonların kuvvet serisi olarak açılımı konusunu işledim ve Bernoulli sayılarını tanıtmaya çalıştım.

19'uncu yüzyılın sonu ile 20'nci yüzyılın başlarında matematikte bir so-yutlaşma akımı başladı. Kümeler teorisi ve topoloji gibi yeni alanlar ortaya çıktı. İlk başta bazı ünlü matematikçiler bu akıma şüpheyle baktılar. Kümeler zaten daha önce de vardı. Marshall Stone ise bu yenilikleri ustaca kullanarak, Weierstrass yaklaşım teoremini hem genelleştirdi hem de kolay anlaşılır kav-ramsal bir kanıtı vermeyi başardı. Sekizinci bölümde Stone'un zarif kanıtını anlattım. Dokuzuncu bölümün konusu ise soyut metrik uzaylarda geçerli olan bir sabit nokta teoremi. Birçok ilginç uygulaması olan Banach'ın bu teoremini kanıtlamak oldukça kolay; teoremin kendisi de olabildiğince yalın ve güzel.

Onuncu bölümde rasyonel, cebirsel ve aşkın sayıları tanımladım. Cebirin temel teoremiyle başlayarak Liouville sayılarının aşkın olduğunu kanıtını ver-dim. Doğal logaritmanın tabanı olan e sayısının aşkın olduğunu gösteren Hil-bert'in zarif yöntemini anlattım. Analitik sayılar teorisi, olasılık gibi alanların yanısıra istatistik ve fizikte önemli uygulamaları olan ünlü Riemann zeta fonk-

siyonu onbirinci bölümün konusu. Fonksiyonlar teorisi gerektiren bazı sonuçları kanıtsız olarak verdiğim bu kısa bölümde, Euler'in çarpım teoreminin kanıtını anlattım ve zeta fonksiyonunun çift sayılarda değerlerini hesapladım. Onikinci bölümde Brouwer sabit nokta teoremini ele aldım. Teoremin topolojik karakterini anlattım ve bir halde Sperner teoremini kanıtlayarak, ekonomi, oyunlar teorisi gibi alanlarda uygulamaları olan bu sabit nokta teoreminin nasıl elde edileceğini gösterdim. Klasik geometriyle başladığımız yolculuğun son durağında, geometriye geri dönüp kürenin geometrisini ele aldım ve düzlem geometriyle karşılaştırdım. Bu son bölüm daha önce Matematik Dünyası'nda yayımlanan bir yazımın neredeyse aynısı.

Her bölümün sonundaki notlarda bazı önemli açık problemlere değindim ve o bölümde adı geçen ünlü matematikçilerin hayat hikâyelerine yer verdim. Kaynaklar listesini olabildiğince kısa tuttum. Sabancı Üniversitesi'nde verdiğim dersi alan öğrencilerimden Süha Orhun Mutlugil ilk altı bölümü satır satır okudu. Bazı yanlışlarımı düzeltmekle kalmayarak eleştiri ve önerileriyle bana yardımcı oldu. Zehra Öner zor okunan el yazımı sökerek kitabı sabırla bilgisayarda yazdı. Her ikisine de teşekkür borçluyum.

Tosun Terzioğlu
Aralık 2012

Kitabı geçen yılın Aralık ayında Ali Nesin'e teslim ettim. Titiz bir editör olarak her bölümü tekrar tekrar özenle okudu. Bulduğu hataları düzeltmekle yetinmeyerek bazı önemli boşlukları gidermeme de yardımcı oldu. Ayrıca yazdığı eklerle içeriğin zenginleşmesini sağladı. Bu süreç sırasında belli bir boşluğu gidermek için bazı günler telefonda 10-15 kez konuştuğumuzu hatırlıyorum. Ali Nesin'e ne kadar teşekkür etsem azdır.

Kitabın nihai halini Ali Törün okudu ve birçok düzeltme yaptı. Ali Törün'e de çok teşekkürler.

Tosun Terzioğlu
19 Mart 2013

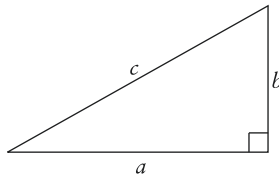
1. Pisagor Teoremi ve Üçlüleri

Antik çağın en önemli düşünür ve bilginlerinden olan **Pythagoras**, Kuşadası'nın hemen karşısındaki Sisam (Yunanca Samos) adasında doğmuş, gençlik yıllarında dünyayı dolaşmış ve sonra da doğduğu yere dönüp öğrenci-müritlelerinden oluşan yarı gizli bir topluluk kurmuş. MÖ 570-495 yıllarında yaşadığı sanılan Pythagoras'tan bugüne gelen herhangi bir kitap veya yazılı belge yok. Türkçede Phytagoras'a **Pisagor**, Pisagoras veya Pitagoras deriz.

Düzlemdeki dik açılı herhangi bir üçgenin kısa kenarlarının karelerini alıp toplarsak bulduğumuz sayının dik açının karşısına gelen uzun kenarın karesine eşit olduğunu ifade eden teoreme **Pisagor teoremi** denir. ABC üçgeninde ACB açısı, yani C köşesindeki açı 90° ise Pisagor teoremini

$$a^2 + b^2 = c^2$$

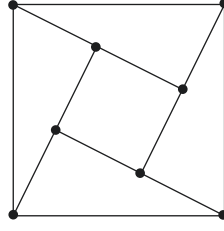
olarak ifade ederiz. Burada üçgenin A köşesi karşısındaki kenarın uzunluğunu a , B köşesi karşısındaki kenarın uzunluğunu b ve C köşesinin karşısındaki kenarın uzunluğunu da c ile gösteriyoruz.



Dik Açılı Üçgen

Bu teoremin birbirinden farklı yüzlerce kanıt olduğu gibi birçok genellemesi de var. Bizim vereceğimiz kanıt Hintli bilgin **Bhaskara II** (1114-1185) tarafından bulunmuş ve aslında tümüyle görsel.

Herhangi bir dik açılı üçgen alalım ve bu üçgenin üç kopyasını çıkaralım. Birbirinin tıpatıp aynı bu dört üçgeni masamıza bir kare şeklinde dizebiliriz (bkz. aşağıdaki şekil). Bu karenin dış kenarları üçgenlerimizin dik açılarının karşısındaki uzun kenarlar olsun.



Bhaskara bu şekli çizdikten sonra ”bak ve gör” diyor. Kanıt bundan ibaret! Bhaskara’yı dinleyip görmek için bakalım.

Dört üçgenimizin oluşturduğu dış karenin alanı c^2 . Bu karenin içinde, her birinin alanı $ab/2$ olan dört üçgen var. Ama bu üçgenlerin arasında, ortada bir de delik var ve o da kare biçiminde. Bu küçük karenin kenar uzunluğu ise $a - b$. Burada genellikle bir şey kaybetmeden $a \geq b$ varsayımını yaptık. Şimdi bu alanları toplarsak

$$4 \times \frac{ab}{2} + (a - b)^2 = a^2 + b^2$$

elde ederiz ve bu da tabii c^2 ’ye eşit.

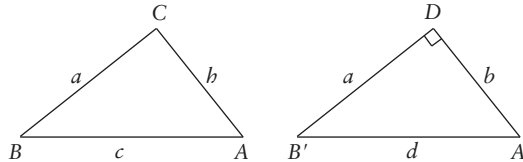
Eğer $a = b$ olsaydı kanıtımız daha da basitleşirdi, çünkü büyük karenin içinde delik kalmayacaktı.

Bu kanıttaki yaratıcılık aslında çok yalın. Bir karenin alanını iki farklı ve basit yöntemle hesapladık ve sonuç bize Pisagor teoreminin sık bir kanıtını verdi. Dik açılı üçgenleri bir biçimde yanyana yerleştirerek elde edilen şeklin alanlarını farklı yollarla hesaplayıp Pisagor teoremini kanıtlayan başka matematikçiler de var tarih boyunca. Hatta Amerika’nın 20’nci başkanı James A. Garfield (1831-1881) de bunlardan biri. Garfield’ın verdiği kanıt Matematik Dünyası dergisinin 2010 yılının 2’nci sayısında bulabilirsiniz. Ama bana göre, Bhaskara’nın kanıtı en yalın, güzel ve dramatik olanı...

Aslında Pisagor teoreminin tersi de doğru; yani düzlemdeki bir üçgenin kenarlarının uzunlukları

$$a^2 + b^2 = c^2$$

denklemini sağlarsa, bu üçgen dik açılı bir üçgendir.



Bazı kaynaklarca **marangoz teoremi** diye anılan bu sonucun kanıtı çok kolay. Verilen üçgenimizin köşeleri A , B ve C ise, bir de iki kenarının uzunlukları a ve b olan ve D açısı dik olan bir $A'B'D$ üçgeni çizelim. (Bkz. yukarıdaki

şekil.) Pisagor teoremi bize D köşesinin karşısındaki kenarın uzunluğunun $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ olduğunu söylüyor. Öyleyse $c = d$ ve üç kenarı eşit olan üçgenler eşit olduğundan ABC ile $A'B'D$ üçgenlerinin iç açıları eşit. Demek ki ABC dik açılı bir üçgen. Kanıtladıklarımızı bir araya getirip teorem olarak yazalım.

Teorem 1.1. *Düzlemdeki bir üçgenin kenar uzunluklarının $a^2 + b^2 = c^2$ denklemini sağlaması için bu üçgenin dik açılı bir üçgen olması yeterli ve gereklidir.*

Artık kenar uzunlukları 3, 4 ve 5 olan üçgenin dik açılı olduğunu biliyoruz. Uzunca bir ip üzerinde $3 + 4 + 5 = 12$ eşit parçayı bir biçimde işaretleyip, ipin iki ucunu birbirine bağlarsanız, dik açı elde etmek için pratik bir aletiniz olur. Herhalde Pisagor teoreminin tersine marangoz teoremi denmesinin nedeni de bu olmalı. Bu yöntemin Pisagor'dan çok önceleri Eski Mısır'da yapı ustaları tarafından kullanıldığını biliyoruz.

Peki, geometriyi bir an için unutup $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini ele alalım. $(3, 4, 5)$ üçlüsü dışında bu denklemin doğal sayılardan oluşan başka çözümü var mı? Kaç tane var? Böyle sorarsak cevap kolay, çünkü 1'den büyük herhangi bir k doğal sayısını alırsak, $(3k, 4k, 5k)$ üçlülere de $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini sağlar. Tabii $(4, 3, 5)$ de bir çözüm. Ama böyle yüzeysel ve ucuz akıl yürütmeleri bir yana bırakıp bir de $(5, 12, 13)$ üçlüsüne bakalım. Bu da $x^2 + y^2 = z^2$ denkleminin bir çözümü ve $3k = 5$, $4k = 12$, $5k = 13$ eşitliklerinin hepsini sağlayan bir k sayısı olmadığından her $m = 1, 2, 3, \dots$ ile elde edilen $(5m, 12m, 13m)$, sayıları farklı bir çözüm ailesi veriyor.

$x^2 + y^2 = z^2$ denkleminin çözümü olan (a, b, c) doğal sayı üçlülerine **Pisagor üçlülere** denir. Pisagor üçlüsü tanımına bir de $a \leq b < c$ koşulunu ekleyelim. $a = b$ olamayacağından, istersek $a < b < c$ varsayımını da yapabiliriz.

Eğer bir (a, b, c) Pisagor üçlüsü bir başka (e, f, g) Pisagor üçlüsünün bir katı değilse, yani 1'den büyük bir m doğal sayısı için $me = a$, $mf = b$ ve $mg = c$ eşitliklerinin hepsi birden sağlanmıyorsa, o zaman (a, b, c) üçlüsüne **temel Pisagor üçlüsü** adını verelim.

Birden fazla temel Pisagor üçlüsü olduğunu gördük, çünkü en az iki tane temel Pisagor üçlüsü olduğunu biliyoruz: $(3, 4, 5)$ ve $(5, 12, 13)$. Şimdi sorularımızı daraltıp, ciddileştirelim.

1. Kaç tane temel Pisagor üçlüsü var?
2. Temel Pisagor üçlülerini hesaplamaya yarayan bir yöntem var mı?

$x^2 + y^2 = z^2$ gibi polinom denklemlerinin $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ doğal sayılar kümesindeki çözümlerini aramak bizi matematikte **Diofant analizi** adını taşıyan bir alana götürür. Milattan sonra 3'üncü yüzyılda İskenderiye'de yaşayan **Diophantus**'un ismini taşıyan bu alanda hâlâ çalışan birçok matematikçi var.

Şimdi denklemimizi z^2 'ye bölüp yarıçapı 1 olan çemberin denklemine bakalım; yani x/z yerine x , y/z yerine y yazıp $x^2 + y^2 = 1$ denklemini ele alalım.

Tabii bu denklemi doğal sayılarla çözmeye kalkmayacağız, çünkü böyle bir çözüm yok. Ama doğal sayıların kesirlerine, yani **rasyonel sayılara**, bakalım. $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ ile elde edilen

$$x = \frac{a}{b} \text{ ve } y = \frac{c}{d}$$

rasyonel sayıları $x^2 + y^2 = 1$ denklemini sağlarsa, yani

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{d^2} = 1$$

ise

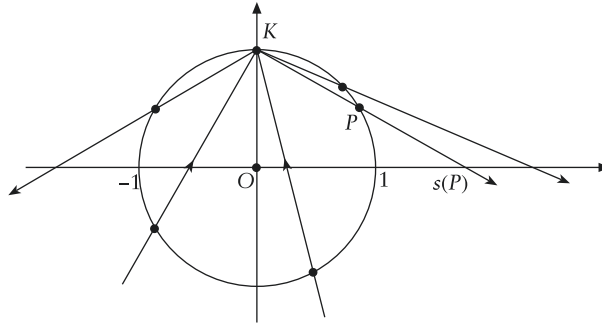
$$(ad)^2 + (bc)^2 = (bd)^2$$

olur, yani (ad, bc, bd) üçlüsü bir Pisagor üçlüsüdür. Dolayısıyla $x^2 + y^2 = z^2$ denkleminin doğal sayı çözümlerini bulmakla $x^2 + y^2 = 1$ denkleminin pozitif rasyonel çözümlerini bulmak aynı şey. Böylece ele aldığımız probleme eşdeğer başka bir problem bulduk.

Artık birim çember üzerinde olan hem X hem de Y koordinatı pozitif rasyonel sayı olan noktaları arayacağız. İlk bakışta problemimizin bu yeni hali başladığımız halden daha zor ve karmaşık gelebilir. Ama biraz sabır ve matematik bizi pek temiz bir sonuca vardıracak.

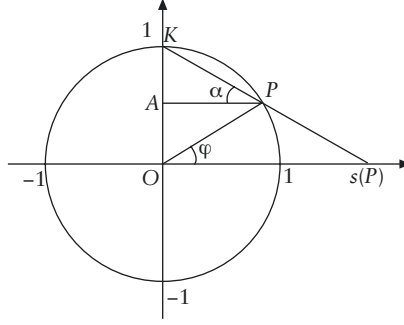
Düzlemde merkezi $(0, 0)$ noktası ve yarıçapı 1 olan çemberi S^1 ile göstereyim. Şimdi S^1 kümesinden kuzey kutbunu, yani $K = (0, 1)$ noktasını atarsak geri kalan $D = S^1 \setminus \{(0, 1)\}$ kümesinden $\mathbb{R}$ ile gösterilen gerçel sayılar kümesine giden bir fonksiyon tanımlayalım.

Stereografik izdüşüm adı verilen bu fonksiyonun tanımını geometrik olarak kolayca anlatabiliriz. Bunun için aşağıdaki şekli kullanacağız. D kümesinde bir P noktası alalım ve kuzey kutbundan bu noktaya bir doğru çizelim. Çemberimizin KP kirişi olan bu doğruyu uzatırsak, X -eksenini belirli bir $s(P)$ noktasında kesecek. İşte $s : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun tanımı bu.



Stereografik izdüşüm, yani $s : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, farklı noktaları farklı sayılara götürür. Yani D kümesindeki iki farklı P_1 ve P_2 nokta alırsak, stereografik izdüşümüm tanımından, $s(P_1) \neq s(P_2)$ olduğunu hemen görürüz.

Ayrıca, X ekseninde bir nokta, yani bir x gerçel sayısı seçelim. Bu noktayla K arasındaki doğru D kümesini bir P noktasında keser. Dolayısıyla $s(P) = x$ olur. Demek ki $s : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu **birebir** ve **örten** bir fonksiyondur; bu da bize bu fonksiyonun bir tersi $s^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow D$ olduğunu söyler. Aslında yukarıda $s(D) = \mathbb{R}$ kanıtını verirken $s^{-1}(x_0)$ değerini bulduk ve böylece s^{-1} fonksiyonunu da gene geometrik olarak tanımladık.



Stereografik İzdüşüm

Stereografik izdüşümün, S^1 üzerindeki $(1,0)$ noktasını 1'e, $(-1,0)$ noktasını -1'e ve $(0,-1)$ noktasını da 0'a gönderdiğini kolayca görebiliriz.

S^1 birim çemberinin herhangi bir noktasını $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ olarak yazabiliriz. Böylece s fonksiyonunun tanım kümesi

$$D = \{(\cos \varphi, \sin \varphi) : 0 \leq \varphi < 2\pi, \varphi \neq \pi/2\}$$

olarak yazılabilir. φ açısı $[0, \pi/2)$ aralığındaysa, $P = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ noktası için $s(P)$ sayısı 1'den küçük olamaz. Yani $1 \leq s(P)$ olur. P noktası çember üzerinde K noktasına yaklaştıkça $s(P)$ sayısı büyür. Kısacası s fonksiyonu

$$\{(\cos \varphi, \sin \varphi) : 0 \leq \varphi < \pi/2\}$$

yayını $[1, \infty)$ aralığına resmeder. Benzer biçimde, s fonksiyonu altında

$$\{(\cos \varphi, \sin \varphi) : \pi/2 < \varphi \leq \pi\}$$

yayının resminin $(-\infty, -1]$ aralığı olduğunu görebiliriz.

$$\{(\cos \varphi, \sin \varphi) : \pi < \varphi < 2\pi\}$$

yayı ise s tarafından $(-1, 1)$ aralığına resmedilir.

Buraya kadar stereografik izdüşüm hakkında anlattıklarımızı farklı bir şekilde özetleyelim. S^1 olarak bir lastik alalım ve $(1,0)$ ile $(-1,0)$ noktalarını sağlam birer çiviyle X -ekseninin 1 ve -1 noktalarına çakalım. Lastiğimizi K noktasında keselim ve sağ ucu iyice gererek X -ekseni üzerinde $[1, \infty)$ aralığına

yatıralım. Tabii bu işlemde ne kadar çekersek çekelim lastiğimizi hiç koparmadan istediğimiz kadar uzatabileceğimizi kabul ediyoruz! K noktasındaki kesiğin sol ucunu da benzer şekilde gererek $(-\infty, -1]$ aralığına yatıralım. Buraya kadar lastiğimizi hep çekerek uzattık. Ama iş

$$\{(\cos \varphi, \sin \varphi) : \pi < \varphi < 2\pi\}$$

yayına gelince, tam tersine bu yayı bir şekilde büzerek tam $(-1, 1)$ aralığı üzerine yatırmamız gerekir.

Şimdiye kadar anlatılanları kavramak ve hayalimizde canlandırmak bize $s : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve tersi $s^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow D$ hakkında epeyce sezgi kazandırmış oldu. Ama iş $s(\sqrt{3}/2, 1/2)$ veya $s^{-1}(5)$ gibi değerleri hesaplamaya gelince, böyle geometrik akıl yürütmeler yetersiz kalır. Onun için şeklimize geri dönelim. $s(P)$ değerini bulmak için ilkin K ve P noktalarından geçen doğrunun denkleminin

$$y = (-\tan \alpha)x + 1$$

olduğunu görelim. Bu denklemde $y = 0$ alırsak $x = \frac{1}{\tan \alpha}$ buluruz. Kısacası

$$s(P) = \frac{1}{\tan \alpha}$$

olur. $\tan \alpha = AK/AP$ ve $AP = \cos \varphi$, $AK = 1 - OA = 1 - \sin \varphi$ olduğundan

$$s(\cos \varphi, \sin \varphi) = \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

sonucuna ulaşmış olduk. Burada $0 \leq \varphi < 2\pi$ ve $\varphi \neq \pi/2$ olduğunu unutmamalım.

Bir de $s^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow D$ fonksiyonuna bakalım. Bu fonksiyonu yazabilmek için, herhangi bir $r \in \mathbb{R}$ sayısı verildiğinde $s(P) = r$ denklemini sağlayan $P = (\cos \varphi, \sin \varphi) \in D$ noktasını bulmamız gerekiyor, çünkü $s^{-1}(r) = P$ olacak. Böylece

$$r = \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

denklemini $\cos \varphi$ ve $\sin \varphi$ cinsinden çözmeliyiz. Trigonometrik fonksiyonlara alışkınsak hemen $1 + r^2$ değerini hesaplarız ve

$$1 + r^2 = 1 + \frac{\cos^2 \varphi}{1 - 2\sin \varphi + \sin^2 \varphi} = \frac{1 - 2\sin \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{(1 - \sin \varphi)^2} = \frac{2}{1 - \sin \varphi}$$

elde ederiz. Bu da bize

$$\sin \varphi = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$$

formülünü verir. Şimdi de buradan hareketle $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ formülünü kullanarak

$$\cos \varphi = \frac{2r}{r^2 + 1}$$

sonucuna varırız.

Sonuçta şuraya vardık:

$$s(\cos \varphi, \sin \varphi) = r \Leftrightarrow r = \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \frac{2r}{r^2 + 1} \\ \sin \varphi = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \end{cases}$$

Artık $s(\sqrt{3}/2, 1/2)$ veya $s^{-1}(5)$ gibi değerleri hesaplamak hiç de zor değil ama bizim amacımız daha genel bir sonuca varmak. Yukarıdaki formülleri incelersek, $\cos \varphi$ ve $\sin \varphi$ rasyonel sayılarsa, $r = s(\cos \varphi, \sin \varphi)$ sayısının da rasyonel olduğunu hemen görürüz. Tersine, rasyonel bir r sayısı verildiğinde

$$\cos \varphi = \frac{2r}{r^2 + 1} \text{ ve } \sin \varphi = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$$

sayıları da rasyoneldir. $\mathbb{Q}$ ile **rasyonel sayılar kümesini** gösterelim. $\mathbb{Q}^2$ de düzlemde, her iki koordinatı da rasyonel sayı olan noktaların kümesi olsun. Şimdi kanıtladığımızı şöyle ifade edebiliriz.

Teorem 1.2. $s : D \rightarrow \mathbb{R}$ stereografik izdüşüm fonksiyonu $D \cap \mathbb{Q}^2$ kümesini $\mathbb{Q}$ kümesi üzerine resmeder. $\square$

Daha da kısa olarak $s(D \cap \mathbb{Q}^2) = \mathbb{Q}$ yazabilirdik.

Artık temel Pisagor üçlülerini arama işine geri dönebiliriz. Hatırlarsak, Pisagor üçlülerini bulma problemini $x^2 + y^2 = 1$ denklemini sağlayan $(0, 1)$ aralığındaki rasyonel sayıları bulma problemine dönüştürmüştük.

Ama artık böyle $P(x, y)$ sayılarının stereografik izdüşüm altında $s(P)$ rasyonel sayısına gittiğini biliyoruz. $m > n$ eşitsizliğini sağlayan $m, n \in \mathbb{N}$ doğal sayıları için $r = m/n$ yazıp,

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{r}{r^2 + 1} = \frac{2m/n}{m^2/n^2 + 1} = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \\ \sin \varphi &= \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} = \frac{(m/n)^2 - 1}{(m/n)^2 + 1} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \end{aligned}$$

olduğunu görürüz. Böylece Pisagor üçlülerini tam olarak bulduk.

Teorem 1.3. $m > n$ doğal sayılarsa, $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ bir Pisagor üçlüsüdür ve her Pisagor üçlüsü bu şekilde bulunur. Üçlünün temel Pisagor üçlüsü olması için gerek ve yeter koşul m ve n 'nin aralarında asal olması (yani 1'den başka ortak bölenlerinin olmaması) ve ikisinden birinin çift olmasıdır.

Kanıt: İlk kısmı kanıtladık. Pisagor üçlüsünü veren formülde hem m , hem de n aynı sayıya bölünüyorsa, $2mn$, $m^2 - n^2$ ve $m^2 + n^2$ sayıları da aynı sayıya bölünür. Ayrıca hem m , hem de n tek sayılarsa bu sayıların her biri 2'ye bölünür. Diğer yandan $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ temel bir Pisagor üçlüsüyse, elbette m ve n aralarında asal olmalı ve $m^2 - n^2$ tek olmak zorunda olduğundan hem m hem n tek olamaz.

Dolayısıyla böyle sayılarla sadece ve sadece temel Pisagor üçlülerini elde etmek istiyorsak, yukarıdaki teoremdaki sayıları m tek ve n çift veya m çift ve n tek doğal sayı olarak seçmeliyiz. $\square$

Örnek olarak $n = 1$ alalım ve bazı çift sayılarla elde edilen Pisagor üçlülerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} m = 2 : & \quad (4, 3, 5) \\ m = 4 : & \quad (8, 15, 17) \\ m = 6 : & \quad (12, 35, 37) \\ m = 8 : & \quad (16, 63, 65) \\ m = 10 : & \quad (20, 99, 101) \end{aligned}$$

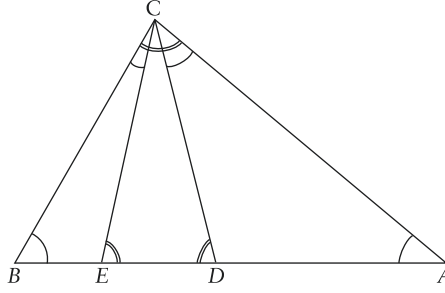
Bir de $n = 2$ alalım ve bu kez m sayısını tek sayı seçerek bazı Pisagor üçlülerini bulalım.

$$\begin{aligned} m = 3 : & \quad (12, 5, 13) \\ m = 5 : & \quad (20, 21, 29) \\ m = 7 : & \quad (28, 45, 53) \\ m = 9 : & \quad (36, 77, 85) \\ m = 11 : & \quad (44, 117, 125) \end{aligned}$$

Herhalde bu bölümü okumadan önce $(4, 3, 5)$ ve $(12, 5, 13)$ dışında yukarıda bulduğumuz Pisagor üçlülerini bilmiyorduk.

Son olarak Pisagor teoreminin bir genellemesine bakalım. Bu sonuç herhangi bir üçgenin kenar uzunlukları hakkında ve limit halinde Pisagor teoremine dönüşüyor. İşe basit bir gözlemle başlayalım.

Düzlemdeki bir üçgen ya eşkenar bir üçgendir ya da en az bir köşe açısı 60° 'den büyüktür. Eşkenar olmayan herhangi bir ABC üçgeni alalım. A köşesine karşılık gelen kenarın uzunluğunu a , B köşesinin karşısındakinin uzunluğunu b ve C köşesinin karşısındakinin uzunluğunu da c ile gösterelim. C köşesindeki ACB açısı 60° 'den büyük olsun. Bu açıyı θ° ile gösterelim. Burada $60^\circ < \theta^\circ < 90^\circ$ olduğunu varsayıyoruz. Şimdi bu üçgenimizin içine tepesi C' 'de ve tabanı AB doğrusu üzerinde olacak biçimde, her iki taban açısı da θ° 'ye eşit bir ikizkenar üçgen CED yerleştirelim.



BD doğru parçasının uzunluğu r ve EA 'nı de s olsun. Artık yüzyıllar önce **Sabit ibn Kurra** tarafından bulunan sonucu yazalım ve kanıtlayalım.

Teorem 1.4. $a^2 + b^2 = (r + s)c$.

Kanıtımızın yöntemi benzer üçgenler bulmaya dayanıyor. CBA ve DBC üçgenlerini ele alalım. Bu iki üçgenin ortak köşesi olan B 'deki iç açıları eşit. BCA açısı θ° , ama BDC açısı da gene θ° . Öyleyse CBA üçgeninin iç açıları DBC üçgeninin iç açlarına eşit. Demekki CBA ve DBC benzer üçgenler. Öyleyse kenar uzunluklarının oranları da eşit olmalı. Böylece

$$\frac{a}{c} = \frac{r}{a}$$

ve $a^2 = rc$ elde ederiz. Aynı yoldan CBA ile ECA üçgenlerinin benzer olduklarını kanıtlarız. Bu benzerlik bize $b^2 = cs$ verir. Böylece aradığımız sonuca ulaştık. $\square$

Bu teoremden üçgenin en az bir açısının 60° 'den büyük olduğunu varsaymıştık. Oysa eşkenar bir üçgen alsaydık E noktası B ve D noktası da A ile aynı olacaktı. Tabii bu durumda $a = b = c$ ve $r = s = c$. Sonuç gene

$$a^2 + b^2 = 2a^2 = (r + s)c = c^2$$

doğru ama ilginç değil.

Kanıtımıza geri dönersek, θ açısı 90 dereceye yaklaşırken, E ve D noktalarının birbirlerine giderek yaklaştığını, yani CED ikizkenar üçgeninin tabanının daraldığını görürüz. Limitte θ açısı 90° olduğunda, ABC üçgenimiz dik açılı bir üçgene dönüşür ama bu takdirde $r + s = c$ olur. Böylece Pisagor teoreminin farklı bir kanıtını elde etmiş oluruz.

NOTLAR

Antik çağın en ünlü filozof ve bilginlerinden olan Samos'lu **Pisagor** aynı zamanda Pisagorculuk denilen dini hareketin de kurucusudur. MÖ 570-495

yılları arasında yaşadığı sanılan Pisagor'dan hiçbir kitap veya belge günümüze ulaşmamıştır. Hayatı, düşünce sistemi, matematik, astronomi ve müziğe katkıları kendisinden birkaç yüzyıl sonra yazılanlara dayanır. Bu kaynaklara göre Pisagor gençlik yıllarında Mısır'a, Babil'e, Fenike'ye gitmiş ve her gittiği yerde yeni bilgiler peşinde koşmuştur. Sonunda doğum yeri olan Sisam adasına dönmüş ve Pisagorculuk hareketini şekillendirmeye başlamıştır. Sisam'ın Yunançada ismi Samos'tur. Matematik, astronomi ve müzik ile iç içe geçmiş olan bu dinî akım zamanla çok taraftar toplamış ve Pisagor etrafında öğrenci-müridlerinden oluşan yarı gizli bir topluluk ortaya çıkmıştır.

Eski kaynaklardan öğrendiğimize göre Pisagorcular sayılara mistik anlamlar yüklerlermiş. Ölümden sonra bedeni terk eden ruhun yeni doğan bir canlıya geçtiğine inanırlarmış. Kendi düşünce sistemlerine uygun bir yaşam sürdüren Pisagorcular oldukça seçkin tavırlarıyla ve gizlilik kurallarıyla tepki de çekmişler. MÖ 530 yılında Pisagor Sisam'dan ayrılarak bugün Güney İtalya'da olan Kroton şehrine yerleşmiş ve burada da hızla taraftar toplamış. Pisagor ve Pisagorcuların toplumda giderek artan etkileri, Kroton halkında önce kıskançlık, sonra da düşmanlık yaratmış. Pisagorcularca dışlanan bazı ileri gelen kişilerin kışkırtmasıyla Kroton halkı Pisagorculara saldırmış ve toplandıkları yerleri yakmış. Bu saldırı sonucunda sağ kalan Pisagorcular Kroton'dan kaçarak dört bir yana dağılmışlar. Bazı kaynaklara göre Pisagor'un kendisi bu saldırıdan kurtulmuş ve Kroton'dan kaçarak yakındaki Tarentum'a sığınmış. Ama bu şehirden de atılmış ve Metapontum'a giderek ölüm orucu sonucunda orada ölmüş.

Pisagor üçlülerinin Pisagor'dan çok önceleri Babil, Hint ve Çin uygarlıklarında bilindiğine dair elimizde yazılı kaynaklar bulunmaktadır. Hatta Pisagor teoreminin bazı özel haller için kanıtı Hint kaynaklarında yeni ortaya çıkmıştır. Bu ünlü teoremin değişik kanıtları Amerika'da Matematik Öğretmenleri Konseyi isimli bir kuruluş tarafından bir kitapta toplanmış [1]. Bu kaynakta 370 farklı kanıt verilmektedir. Bizim seçtiğimiz görsel kanıt ise **Bhaskara II** (1114-1185) isimli Hintli bir bilgeye aittir. Bhaskara II, matematik ve astronomiye önemli katkılar yapmış, hatta türev kavramını Leibniz ve Newton'dan çok önceleri kullanarak bazı astronomi problemlerini çözmeyi başarmıştır. Ayrıca bazı Diofant denklemlerinin genel çözümlerini vermiştir. Kendisine Bhaskara II denmesinin nedeni ise 600-680 yılları arasında yaşayan ve ondalık sayı sistemini ilk kuran başka bir Hint matematikçisi Bhaskara'dan ayırt etmek içindir.

Pisagor teoreminin değişik genellemeleri arasında seçtiğimiz sonuç (Teorem 1.4) **Sabit ibn Kurra** (826-901) tarafından bulunmuştur. Sabit ibn Kurra Harran'da doğmuş, daha sonraları zamanın başlıca kültür ve bilim merkezi olan Bağdat'ta çalışmıştır. Süryanice ve Yunanca da bilen bu ünlü bilgin, Ptoleme astronomi sisteminin ilk reformcusu sayılır. İsmi Batı dillerinde Thebit veya Thebit olarak geçer. Eserleri erken rönesans yıllarında Latinceye çevrilmiştir. Aynı yüzyıldaki bir kratere Thebit ismi verilmiştir. Sabit ibn

Kurra'nın verdiğimiz sonucunu 20'nci yüzyılda bilim dünyasına Ord. Prof. Dr. **Aydın Sayılı** tarafından kazandırılmıştır [2]. Bilim tarihçisi Aydın Sayılı'nın fotoğrafı, bugün kullandığımız 5 liralık banknotlarımızın arkasında yer almaktadır.

Milattan sonra 3'üncü yüzyılda zamanın önemli kültür merkezlerinden birisi olan İskenderiye'de yaşamış olan **Diophantus** Yunanca yazdığı 13 kitap-tan oluşan **Aritmetika** isimli eseriyle tanınır. Bunlardan sadece 6'sı günümüze ulaşmıştır. Aritmetika aslında pek sistematik olmayan bir problem koleksiyonudur. Ancak 1575 yılında Latinceye çevrilmiş ve 16'ncı ve 17'nci yüzyılda Avrupa matematikçilerini çok etkilemiştir.

Kaynaklar

[1] E. S. Loomis, **The Pythagorean Proposition**, National Council of Teachers of Mathematics 1968.

[2] Aydın Sayılı, *Thabit ibn Qurra's Generalization of the Pythagorean Theorem*, Isis 51 (1960) 35-37.

2. Asal Sayılar

Tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$ üzerine tanımlanmış olan hepimizin âşına olduğu $\leq$ sıralamasının ilginç bir özelliği vardır. **İyi sıralama ilkesi** adı verilen bu özelliğe göre, tamsayılar kümesinin boş olmayan herhangi bir S altkümesi aldığımızda, bu küme üstten sınırlıysa, S kümesindeki sayılar arasında mutlaka en büyük olanı vardır. Bu sayıyı $\max S$ ile göstereceğiz. Benzer şekilde, S alttan sınırlıysa, S kümesi içinde en küçük sayı vardır. Onu da $\min S$ ile göstereceğiz. $\mathbb{Z}$ kümesinin kendisi ne üstten ne de alttan sınırlıdır.

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

kümesi ise sadece alttan sınırlıdır ve $\min \mathbb{N}_0 = 0$ olur. Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ de sadece alttan sınırlıdır ve $\min \mathbb{N} = 1$ olur.

$$A = \{-3k - 1 : k \in \mathbb{N}_0\}$$

kümesi üstten sınırlıdır ve bu örnekte $\max A = -1$ olur.

$a \geq b$ olmak üzere iki doğal sayı alırsak,

$$B = \{k \in \mathbb{N} : a - kb \geq 0\}$$

kümesi mutlaka üstten sınırlıdır. Bu kümenin en büyük öğesini $q = \max B$ ile gösterirsek, $r = a - qb \in \mathbb{N}_0$ eşitliğiyle tanımlanan r sayısı için

$$a = qb + r$$

eşitliğini elde ederiz. Buradaki $r \in \mathbb{N}_0$ sayısı b 'den büyük veya b 'ye eşit olsaydı, o zaman

$$a - (q + 1)b = r - b \geq 0,$$

yani $q + 1 \in B$ olurdu. Ama $q = \max B$ idi. Böylece her $a \geq b$ için

$$a = qb + r$$

eşitliğini sağlayan $q \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq r < b$ tamsayılarının varlığını kanıtlamış olduk.

Aslında burada yaptığımız iyi bildiğimiz **bölme işlemi**. Bu işlem sonucunda kalan sayı $r = 0$ ise, yani $a = qb$ olarak yazılabilirse, b sayısı a sayısını **böler** deriz ve bunu $b|a$ ile gösteririz. Doğal sayılar için tanımlanan bölme işleminin hemen kanıtlayabileceğimiz bazı basit özelliklerini sıralayalım:

$$\begin{aligned} 1|a \\ a|a \\ a|b \text{ ve } b|a \text{ ise } a = b \text{ olur.} \\ a|b \text{ ve } b|c \text{ ise } a|c \text{ olur.} \end{aligned}$$

Eğer bir p doğal sayısı sadece 1 ve kendisiyle bölünürse, bu sayıya **asal sayı** denir. 1 sayısını baştan asal sayı olarak kabul etmeyeceğiz. 2 ve 3 asal sayılardır. 4 ise asal değildir, çünkü 2'ye bölünür. 2'den büyük herhangi bir çift sayı asal olamaz, çünkü mutlaka 2'ye bölünür. 5 ve 7 asaldır ama 9 tek sayı olmasına rağmen asal değildir, çünkü 3'e bölünür. Bu basit yöntemle şu sayılar listesine bir bakalım.

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots, 30.$$

İlkin, asal olmadıklarını bildiğimiz 2'den büyük çift sayıları bu listeden eleyelim. Geriye

$$2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29$$

kaldı. Şimdi bu listedeki 3'ten büyük sayılardan 3'e bölünenleri de listemizden atalım. Bu işlemden sonra geriye kalanları yazarsak

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29$$

elde ederiz. Şimdi de 5'ten büyük sayılara bakalım ve bunların arasında 5'e bölünenleri dışarıda bırakalım. Bu kez listemizden sadece 25'i attık. Geriye

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$$

kaldı. Yaptığımızı tekrarlarsak, yani yukarıdaki sayılar arasında sırasıyla 7'ye, 11'e, ... bölünen bu sayılardan büyük sayıları ararsak artık bulamayız. Dolayısıyla 30'a kadar olan sayılar arasında asal olanları bulduk. Ardarda sıralanan doğal sayılar arasında asal olanları **Erastothanes eleği** adı verilen bu zahmetli ayıklama yöntemiyle bulabiliriz.

$\mathbb{P}$ ile tüm asal sayılardan oluşan kümeyi gösterelim. Yukarıda 2 ve 30 arasında 10 tane asal sayı olduğunu gördük. Listemizi büyütüp, 2 ve 200 arasındaki asal sayıları ararsak, bunların da 46 tane olduğunu görürüz. Erastothanes eleği yöntemi gerçekten de pek pratik değil. Örneğin 4000'inci asal sayının 37.813 olduğunu hesaplamak için tatsız tuzsuz birçok bölme denememiz gerekir. Ayrıca bu yöntem aklımıza bir de şu soruyu getirir. Acaba asal sayılar

kümesi $\mathbb{P}$ sonlu mu? Çünkü giderek daha büyük doğal sayılara baktığımızda bu sayıyı bölmeye aday olan daha çok sayı var. Belki de $\mathbb{P}$ kümesi üstten sınırlı. Bu soruyu ele almadan önce şu bölme işlemine bir daha bakalım.

1'den büyük herhangi bir m doğal sayısı seçelim. Bu sayı asal değilse, gene 1'den büyük ama m 'den küçük bir m_1 sayısına bölünür. Eğer m_1 asal değilse, o da 1'den büyük ama m_1 'den küçük bir m_2 sayısına bölünür. Aynı şeyi m_2 ile yapalım. Bunu böyle, devam edebildiğimiz kadar devam edelim.

$$m > m_1 > m_2 > m_3 > \dots > 1$$

diye 1'den büyük ve küçüğün büyüğü böldüğü doğal sayılardan oluşan bir dizi elde ederiz. Her doğal sayı kümesinin en küçük elemanı olduğundan, bu süreç sonsuza kadar süremez, sonlanmalı. İşte sürecin bittiği bu son sayı bir asal sayı olmak ve m 'yi bölmek zorundadır. Böylece 1'den büyük her doğal sayının bir asala bölündüğünü kanıtladık.

Gene 1'den büyük herhangi bir m doğal sayısı seçelim. Bir önceki paragrafa göre m sayısı bir asala bölünür. m 'yi bölen en küçük asala p_1 adını verelim. Diyelim

$$m = p_1 m_1.$$

Eğer $m_1 > 1$ ise aynı şeyi m yerine m_1 ile yapalım: m_1 'i bölen en küçük asala p_2 diyelim ve bir m_2 doğal sayısı için

$$m_1 = p_2 m_2$$

yazalım. Eğer $m_2 > 1$ ise bu süreci devam ettirelim. Böylece küçüğün büyüğü böldüğü

$$m > m_1 > m_2 > \dots$$

sayı dizisini elde ederiz. İyi sıralama ilkesine göre bu dizinin en küçük elemanı olması gerektiğinden, süreci sonsuza kadar sürdüremeyiz, yani bir zaman sonra 1'e rastlamalıyız; diyelim $m_{k-1} > 1$ ama $m_k = 1$. O zaman, $m_{k-1} = p_k m_k = p_k$ ve

$$m = p_1 m_1 = p_1 p_2 m_2 = \dots = p_1 p_2 \dots p_k$$

olmalı. Demek ki 1'den büyük her doğal sayı asalların çarpımı olarak yazılabilir.

Birkaç örneğe bakalım.

$$\begin{aligned} 6 &= 2 \cdot 3 \\ 8 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \\ 10 &= 2 \cdot 5 \\ 12 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 \end{aligned}$$

gibi küçük sayıları asal çarpanlarını ayırmak kolay. Biraz daha büyük bir sayıyı alalım: 340. Bu sayı 2 asalına bölünür.

$$340 = 2 \cdot 170$$

olarak yazalım. 170 de 2 asalına bölünüyor: $170 = 2 \cdot 85$. Dolayısıyla

$$340 = 2 \cdot 170 = 2 \cdot 2 \cdot 85 = 2^2 \cdot 85.$$

Sırada 85 var. O da 5'e bölünüyor: $85 = 5 \times 17$. Demek ki

$$340 = 2^2 \cdot 85 = 2^2 \cdot 5 \cdot 17.$$

Sırada 17 var ama bu sayı bir asal. Böylece 340 asal çarpanlara ayrışmış oldu.

Peki, her doğal sayıyı bazı asal sayıların çarpımı olarak yazabiliyoruz ama bu yazılıştaki asallar farklı olabilir mi? Tabii

$$340 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 17$$

yazılışında asalların yerlerini değiştirip

$$340 = 5 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 2$$

olarak da yazabilirdik. Ama sorumuz bu değil. Acaba en az bir tanesi 2, 5, veya 17 olmayan $q_1, \dots, q_k$ asal sayılarla $340 = q_1 \cdots q_k$ yazabilir miyiz? Ya da çarpımda 2 asalını ikiden daha fazla ya da daha az kullanabilir miyiz? Cevabımız olumsuz olacak ama önce biraz çalışmamız gerekiyor.

Herhangi a ve b doğal sayılarıyla kurulan

$$S = \{na + mb > 0 : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

kümesini ele alalım. Tabii a ve b de S kümesinde ve bu küme alttan sınırlı. Şimdi $\min S = d$ olsun. Tabii $d \leq a$ ve $d \leq b$. Bu d sayısının hem a 'yı hem de b 'yi böldüğünü kanıtlayalım. Bunu çelişkiye vararak yapacağız. a 'yı d 'ye bölüp, q ve $0 \leq r < d$ tamsayıları için

$$a = qd + r$$

olarak yazalım. Eğer $r \neq 0$ olsaydı, bir $n, m \in \mathbb{Z}$ tamsayı çifti için geçerli olan $d = na + mb$ ifadesini kullanarak

$$r = a - qd = (1 - qn)a + (-qm)b$$

yazardık. O zaman $r \in S$ ve $r < d$ olurdu. Ama S 'de d 'den daha küçük bir sayı olamaz. Demek ki $r = 0$ olmalı; yani d sayısı a sayısını böler. a ve b arasında hiçbir fark yok. Öyleyse d sayısı b sayısını da böler. Hem a hem de b sayısını bölen bir c sayısı, $d = na + mb$ eşitliğinden dolayı d sayısını da böler. Yani d sayısı a ve b sayılarının **en büyük ortak bölenidir**. Bir başka deyişle d 'den büyük bir sayı ya a sayısını ya da b sayısını bölmez. İki sayının en büyük ortak bölenini ebob(a, b) ile göstereceğiz. Kanıtladığımızı yazalım.

Teorem 2.1. Her a, b doğal sayısı için,

$$\text{ebob}(a, b) = na + mb$$

eşitliğini sağlayan $n, m \in \mathbb{Z}$ tamsayıları vardır. □

Örneğin $\text{ebob}(12, 42) = 6$ ve teoremde söylendiği gibi 6'yı

$$6 = 4 \cdot 12 + (-1) \cdot 42$$

olarak yazabiliriz. Şöyle de yazabilirdik:

$$6 = (-10) \cdot 12 + 3 \cdot 42.$$

Daha genel olarak her $a \in \mathbb{Z}$ için,

$$6 = (4 + 7a) \cdot 12 + (-1 - 2a) \cdot 42$$

olur.

En büyük ortak bölen kavramına alışmak için her $m \geq 1$ doğal sayısı için geçerli olan

$$\begin{aligned} \text{ebob}(a^m, a) &= a \\ \text{ebob}(1, a) &= 1 \\ \text{ebob}(a, b) &= \text{ebob}(b, a) \\ \text{ebob}(ab, b) &= b \end{aligned}$$

gibi basit sonuçları hemen gözlemleyelim.

Şimdi asal sayılara bakalım. $p \in \mathbb{P}$ ve $a \in \mathbb{N}$ ise ya p verilen a sayısını böler ya da $\text{ebob}(p, a) = 1$ olur. q ve p sayıları farklı asallarsa, $\text{ebob}(p, q)$ mutlaka 1'e eşittir. Tabii 2 ve 16 örneğinde olduğu gibi bir asal sayı verilen bir sayıyı birkaç kez bölebilir. Bir p asal sayısı için

$$\{n \in \mathbb{N}_0 : p^n | a\}$$

diye tanımlanan küme üstten sınırlıdır. O halde

$$k(a, p) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : p^n | a\}$$

yazalım. $k(a, p)$ sayısı p sayısının verilen a sayısını en fazla kaç kez böldüğünü veriyor. Tabii $p^0 = 1$ olduğu için $k(a, p) = 0$ demek ile p sayısının a sayısını bölmediğini söylemekle aynı şey.

Teorem 2.2. $\text{ebob}(a, c) = 1$, ve $c|ab$ ise c sayısı b sayısını böler. Özel olarak, p asal ve $p|ab$ ise, p ya a sayısını ya da b sayısını böler.

Kanıt: Teorem 2.1 bize $1 = na + mc$ eşitliğini sağlayan $n, m \in \mathbb{Z}$ sayılarının olduğunu söylüyor. İki tarafı da b ile çarparsak

$$b = nab + mcb$$

elde ederiz. $c|ab$ varsayımından $c|b$ olduğunu görürüz.

Bir $p \in \mathbb{P}$ asal sayısı a sayısını bölmezse $\text{ebob}(p, a) = 1$ olur. Dolayısıyla bir önceki paragrafta kanıtladığımızdan, $p|ab$ koşulunun $p|b$ koşulunu gerektirdiğini görürüz. $\square$

1'den büyük her doğal sayının asal çarpanlara ayrıştırıldığını bölme işlemini ardarda tekrarlayarak kanıtlamıştık. Bir doğal sayı farklı asal sayıların çarpımı olarak yazılabilir mi sorusunu da artık cevaplandırabiliriz.

$$p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_j$$

asal olmak üzere, s sayısı

$$(1) \quad s = p_1 \cdots p_k = q_1 \cdots q_j$$

olarak çarpanlara ayrılmış olsun. Buradaki çarpımda bazı asallar tekrarlanabilir. Yani $12 = 2^2 \cdot 3$ değil de $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ olarak yazıyoruz. Bir de ayrıca asal sayıları küçükten büyüğe doğru sıraya dizelim, yani

$$p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k \text{ ve } q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_j$$

varsayımını yapalım. Amacımız

$$p_1, p_2, \dots, p_k$$

listesiyle

$$q_1, q_2, \dots, q_j$$

listesinin aynı liste olduğunu, yani $j = k$ ve

$$p_1 = q_1, p_2 = q_2, \dots, p_k = q_k$$

eşitliklerini kanıtlamak. Listelerin aynı olmadığı doğal sayıların olduğunu varsayalım ve bu sayıların en küçüğünü s ile gösterelim. (Burada da iyi sıralama ilkesini kullandık.) Genelliği bozmadan $p_1 \leq q_1$ varsayımını yapabiliriz.

$s = q_1(q_2q_3 \cdots q_j)$ yazarsak Teorem 2.2'den ya $p_1|q_1$ veya $p_1|q_2q_3 \cdots q_j$ olduğunu görürüz. Diyelim ikinci durum geçerli. Aynı akıl yürütmeyi tekrarlayarak ya $p_1|q_2$ veya $p_1|q_3q_4 \cdots q_j$ olduğunu görürüz. Bunu böylece devam edersek, p_1 'in bir q_i 'yi böldüğünü görürüz. Ama q_i bir asal olduğundan, bundan $p_1 = q_i$ çıkar. Bu durumda da

$$p_1 \leq q_1 \leq q_i = p_1$$

eşitsizliklerinden $p_1 = q_1$ elde ederiz. (1)'de sadeleştirmeyi yaparak

$$s_1 = p_2 \cdots p_k = q_2 \cdots q_j$$

buluruz. Ama $s_1 < s$ olduğundan,

$$p_2, \dots, p_k$$

listesiyle

$$q_2, \dots, q_j$$

listesi aynı olmalı. İlk listenin başına p_1 , ikinci listenin başına (p_1 'e eşit olan) q_1 'i getirirsek, istediğimiz eşitliği elde ederiz.

Aritmetiğin temel teoremi adı verilen önemli teoremi kanıtladık.

Teorem 2.3. *1'den büyük her doğal sayı asal sayıların çarpımı olarak yazılır ve çarpımda beliren asal sayılar küçükten büyüğe sıraya dizilirse, bu liste tektir¹.* $\square$

Tabii sayının kendisi pekâlâ asal olabilir. Yukarıdaki teoremin ifadesinde bu hal de kapsanmakta.

Şimdi de asal sayılar kümesinin sonlu olmadığını kanıtlayalım. Kanıtımız yaklaşık 22 yüzyıl önce **Oklid** (*Euclides*) tarafından verilmiş!

Teorem 2.4. *Sonsuz sayıda asal sayı vardır.*

Kanıt: İddiamızın aksine bir an için $\mathbb{P}$ kümesinin sonlu olduğunu kabul edelim. Bu kabul bizi bir çelişkiye götürecek ve böylece teoreminizi kanıtlamış olacağız. $\mathbb{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ olsun ve

$$a = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

sayısına bakalım. a 'nın bir asala bölündüğünü biliyoruz. Ancak her p_i ile a sayısını böldüğümüzde mutlaka 1 kalır. Demek ki a 'yı bölen asal $\mathbb{P}$ 'de olamaz. İşte aradığımız çelişkiye vardık. $\square$

$k(a, p)$ ile $a \geq 2$ doğal sayısının çarpanları arasında p asal sayısının kaç kez yer aldığını gösteriyorduk. Eğer p bu listede yoksa, $k(a, p) = 0$ yazarız. Zaten

$$k(a, p) = \max \{n \in \mathbb{N}_0 : p^n | a\}$$

olarak tanımlanmıştı ve $p^0 = 1$. Eğer $\mathbb{N}_2$ ile 2 veya daha büyük tüm doğal sayılar kümesini gösterirsek, yukarıda tanımladığımız $k : \mathbb{N}_2 \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{N}_0$ fonksiyonuna **listeleme fonksiyonu** adını verelim. Örnek olarak $a = 490$ sayısını alalım ve çarpanlarına ayıralım:

$$a = 2 \cdot 5 \cdot 7^2.$$

¹İ teoremden muaf tutmanın matematiksel bir nedeni yoktur, çünkü 1 de hiç tane asaldan çarpımı olarak yazılır! Matematikte boşkümenin elemanlarının çarpımı 1 olarak tanımlanır.

Demek ki $k(490, 2) = 1$, $k(490, 5) = 1$ ve $k(490, 7) = 2$. Ayrıca 2, 5 ve 7 dışında kalan herhangi bir p asal sayısı için $k(490, p) = 0$ olur çünkü sadece 2, 5 ve 7 asalları 490'ı böler. Listeleme fonksiyonunu kullanarak aritmetiğin temel teoremini kısaca

$$a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{k(a,p)}$$

olarak yazabiliriz. Buradaki sonsuz gibi görünen çarpımdan korkmayalım, çünkü eğer 1 ile çarpmayı çarpmadan saymazsak, her $a \in \mathbb{N}_2$ için bu sonlu bir çarpım. Yani $k(a, p)$ ancak sonlu sayıda asal için 0'dan büyüktür.

Listeleme fonksiyonunun kullanışlı iki özelliğini bir yardımcı teorem, yani bir önsav olarak yazalım. Kanıtı vermeye gerek bile yok!

Önsav 2.5. *Her n doğal sayısı için*

$$\begin{aligned} k(ab, p) &= k(a, p) + k(b, p), \\ k(a^n, p) &= nk(a, p) \end{aligned}$$

olur. □

Tanımladığımız k fonksiyonunu kullanarak en büyük ortak bölen kavramına farklı bir bakış açısı getirelim. Bunun için $\mathbb{N}_2$ kümesinden herhangi iki a ve b elemanı alalım. Her $p \in \mathbb{P}$ için

$$m(p) = \min\{k(a, p), k(b, p)\}$$

olsun.

$$d = \prod_{p \in P} p^{m(p)}$$

tanımını yapalım. Böylece hem a hem de b 'yi bölen asal sayıları çarparak d sayısını tanımladık. $p^{m(p)}$ sayısı hem $p^{k(a,p)}$ hem de $p^{k(b,p)}$ sayısını böldüğü için yukarıda tanımlanan d sayısı da a ve b sayılarını böler. Bu özelliğe sahip herhangi bir $c \in \mathbb{N}$ alalım. Yani c sayısı hem a hem de b 'yi bölsün. $c = 1$ ise tabii d 'yi böler. $c > 1$ olduğunu varsayalım. Herhangi bir p asal sayısı için $k(c, p) \geq 1$ ise $p^{k(c,p)}$ sayısı c 'yi böldüğü için a ve b sayılarını da böler. Bu ise bize $k(c, p) \leq k(a, p)$ ve $k(c, p) \leq k(b, p)$ eşitsizliklerini verir. Dolayısıyla her $p \in P$ için $k(c, p) \leq m(p)$ sağlanır ve c sayısı d 'den büyük olamaz. Böylece $d = \text{ebob}(a, b)$ olduğunu gördük.

En büyük ortak bölen için bulduğumuz bu formül ancak verilen sayıları kolayca asal çarpanlarına ayırabiliyorsak kullanışlıdır. Örnek olarak $a = 1020$ ve $b = 525$ alalım. Asal çarpanlara ayırıp $1020 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$ ve $525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$ yazalım. Formülümüzden hemen

$$\text{ebob}(1020, 525) = 3 \cdot 5 = 15$$

sonucunu elde ederiz.

Ama asal çarpanları bulmadan da iki sayının en büyük ortak bölenini bir dizi bölme işlemiyle hesaplayabiliriz. Gene aynı örneği alalım ve 1020'yi 525'e bölelim.

$$1020 = 525 + 495.$$

1020 ve 525'i bölen her sayı, 495'i ve 525'i böler; Ayrıca 495'i ve 525'i bölen her sayı 1020'yi ve 525'i böler. Yani

$$\text{ebob}(1020, 525) = \text{ebob}(525, 495)$$

olur. Bu sefer 525'i 495'e bölersek

$$525 = 495 + 30$$

buluruz. Devam edelim.

$$495 = 16 \cdot 30 + 15$$

ve sonuçta

$$30 = 2 \cdot 15$$

olur. İşte bu yöntemle $15 = \text{ebob}(1020, 525)$ olduğunu bulduk. Aslında yaptığımıza biraz dikkatli bakarsak

$$\text{ebob}(1020, 525) = \text{ebob}(525, 495) = \text{ebob}(495, 30) = \text{ebob}(30, 15) = 15$$

eşitliklerini de görürüz. **Öklid algoritması** denen bu yöntem hem pratik hem de öğretici. Bu algoritmayı aslında verilen bir rasyonel sayıyı sadeleştirmek için ilkokulda bile kullandık. Örneğimize geri dönersek, $r = 525/1020$ sayısında pay ve paydayı $\text{ebob}(1020, 525) = 15$ ile bölerek

$$r = \frac{35}{68}$$

olarak yazabiliriz. Bu ifade daha fazla sadeleşmez, çünkü artık

$$\text{ebob}(68, 35) = 1$$

olur. $\text{ebob}(495, 30) = 15$ olduğunu da biliyoruz. Gene pay ve paydayı 15'e bölerek

$$\frac{30}{495} = \frac{2}{33}$$

sadeleştirmesini yaparız. Şimdi bu basit örneklerden yola çıkarak genel bir sonuca varalım.

Teorem 2.6. Her r pozitif rasyonel sayısı, $\text{ebob}(a, b) = 1$ eşitliğini sağlayan a ve b doğal sayıları için $r = a/b$ biçiminde yazılabilir.

Kanıt: u ve $v \in \mathbb{N}$ için $r = u/v$ ve $d = \text{ebob}(u, v)$ olsun. $u = da$ ve $v = db$ ise $r = a/b$ olur. $\text{ebob}(a, b)$ sayısı 1'den büyük olamaz, çünkü bu takdirde d 'den daha büyük olan $\text{ebob}(a, b)d$ sayısı hem u 'yu hem de v 'yi bölerdi. $\square$

Dik açılı bir ikizkenar üçgenin dik açısının karşısındaki kenarın uzunluğu c , diğer kenarların uzunluğu a ise, Pisagor teoremine göre $a^2 + a^2 = 2a^2 = c^2$ eşitliği bulunur. Burada $a = 1$ alırsak karesi 2'ye eşit bir sayı söz konusu. Böyle bir sayı tabii 1'den büyük ama 2'den küçük olacak. Pisagor'un yaşadığı çağlarda her sayının tamsayıların bir kesri olarak yazılabileceği sanılıyordu. Yani her sayı mutlaka rasyonel olmak zorundaydı. Pisagor okulunda karesi 2'ye eşit rasyonel sayıyı bulmak için uğraşanlar ya bir açmaza giriyorlar, yahut da daha kötüsü bir çelişkiye düşüyorlardı. Sonunda bu derin sorunun okul dışında kalan kişilerle konuşulması yasaklandı. Ama bir öğrenci dayanamadı ve bu sırrı açıkladı. Karesi 2'ye eşit bir sayı arandığında çelişkiye düşülmesi o çağların düşünürleri arasında ciddi bir bunalıma yol açtı. Oysa biz, asalların köklerinin rasyonel olamayacağını kolayca kanıtlayacağız. Demek ki rasyonel sayılar dışında kalan başka sayılar da var.

Teorem 2.7. *Her $n \geq 2$ için bir asal sayının n 'inci kökü rasyonel değildir.*

Kanıt: Savın aksini kabul ederek çelişkiye varacağız. Bir p asal sayısı ve $n \geq 2$ için eğer $p^{1/n}$ rasyonel olsaydı, bu sayıyı $\text{ebob}(a, b) = 1$ olan iki $a, b \in \mathbb{N}$ ile

$$p^{1/n} = \frac{a}{b}$$

olarak yazardık. Dolayısıyla

$$b^n p = a^n.$$

Demek ki p asalı a^n sayısını bölüyor. Bundan p 'nin a 'yı böldüğü çıkar. Bundan da p^n 'nin $a^n = b^n p$ sayısını böldüğü çıkar. Demek ki p^{n-1} sayısı b^n sayısını böler. $n \geq 2$ olduğundan, p 'nin b^n 'yi, dolayısıyla b 'yi böldüğü anlaşılır. Böylece p 'nin hem a 'yı hem de b 'yi böldüğünü kanıtlamış olduk. İşte bu çelişkiyle kanıtımız sonlandı. $\square$

En büyük ortak böleni 1 olan doğal sayı çiftlerinin rasyonel sayıların en sade biçimde bir kesir olarak ifade edilmesinde nasıl kullanıldığını gördük. Ancak bu sayı çiftlerinin başka yararlı özellikleri de var. İki farklı p ve q asal sayısının en büyük ortak böleninin 1 olduğunu biliyoruz. Ama 4 ve 9 asal değil; gene de $\text{ebob}(4, 9) = 1$. Şimdi $\text{ebob}(a, b) = 1$ eşitliğinin anlamını daha iyi anlayabilmek için en büyük ortak böleni asal çarpanları cinsinden nasıl yazdığımıza bir daha bakalım. $\text{ebob}(a, b) = 1$ demek her p asal sayısı için $\min\{k(a, p), k(b, p)\}$ sayısının 0 olması demektir. Bunu $k(a, p)k(b, p) = 0$ olarak ifade edebiliriz. Diğer bir deyişle bu durumda bir asal sayı hem a hem de b 'nin çarpanı olamaz.

Teorem 2.8. *$\text{ebob}(a, b) = 1$ ve bir $m \geq 1$ için $ab = c^m$ olsun. O zaman $a = d^m$ ve $b = e^m$ eşitliklerini sağlayan d ve e doğal sayıları vardır.*

Kanıt: Her iki sayının da 1'den farklı olduğunu kabul edebiliriz, çünkü $a = 1$ olsaydı $d = 1$ ve $e = c$ alabiliriz. Şimdi

$$\mathbb{P}_0 = \{p \in \mathbb{P} : k(a, p) + k(b, p) > 0\}$$

kümesine bakalım. Bu tabii sonlu bir küme ve

$$mk(c, p) = k(c^m, p) = k(ab, p) = k(a, p) + k(b, p)$$

denklemini bize

$$c = \prod_{p \in \mathbb{P}_0} p^{k(c, p)}$$

olduğunu söyler, çünkü $\mathbb{P}_0$ kümesinde yer almayan her q asalı için

$$mk(c, q) = k(a, q) + k(b, q) = 0$$

ve dolayısıyla $m(c, q) = 0$ olur. $\mathbb{P}_0$ kümesini şöyle iki parçaya ayıralım:

$$\mathbb{P}_1 = \{p \in \mathbb{P}_0 : k(a, p) > 0\}$$

ve

$$\mathbb{P}_2 = \{p \in \mathbb{P}_0 : k(b, p) > 0\}.$$

$\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\text{ebob}(a, b) = 1$ koşulu bize $\mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2 = \emptyset$ olduğunu veriyor, çünkü $p \in \mathbb{P}_1$ ise $k(b, p) = 0$ oluyor. Şimdi

$$c = \prod_{p \in \mathbb{P}_1} p^{k(c, p)} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}_2} p^{k(c, p)}$$

olarak yazalım. Eğer

$$e = \prod_{p \in \mathbb{P}_1} p^{k(c, p)} \quad \text{ve} \quad f = \prod_{p \in \mathbb{P}_2} p^{k(c, p)}$$

ise, hemen $a = e^m$ ve $b = f^m$ eşitliklerini görebiliriz; çünkü örneğin $p \in \mathbb{P}_1$ ise $k(b, p) = 0$ olduğundan

$$mk(e, p) = mk(c, p) = k(a, p)$$

elde ederiz. □

İçinde n tane bilya olan bir torbadan k tane bilyayı kaç farklı şekilde seçebiliriz sorusunun yanıtını veren

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

sayısı aynı zamanda $(a + b)^n$ ifadesinin açılımında da

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

karşımıza çıkar. $n!$ ile $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n$ çarpımını gösteriyoruz ve $0! = 1$ olduğunu varsayıyoruz. Bu sayılara **binom sayıları** denir. Tanımdan hemen

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

olduğunu görürüz. Torbamızdan k tane bilya seçersek torbanın içinde $n - k$ tane bilya kalır. Yani k bilyayı kaç farklı şekilde seçersek $n - k$ bilyayı da o kadar farklı şekilde seçeriz. Tabii torbadan n tane bilya seçmek için tüm bilyaları dışarı almalıyız. Bu da

$$\binom{n}{n} = 1$$

sonucu ile uyumlu. Genel olarak, n tane öğesi olan bir kümenin her birinde k tane öğe olan altkümelerinin sayısı

$$\binom{n}{k}.$$

Öyleyse böyle bir kümenin tam

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1 + 1)^n = 2^n$$

tane altkümesi var.

Binom sayılarının birçok ilginç özelliği var. Biz şimdilik bunların birkaçıyla yetineceğiz. Biraz hesap yaparak

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

sonucuna ulaşırız. Ayrıca

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

formülünü kullanarak **Pascal üçgeni** denen şu sonsuz tabloyu üretebiliriz.

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

Eğer

$$a = qb + r$$

ise $a = r \pmod{b}$ yazarız ve bunu “ a eşittir r modülo b ” diye okuruz. Öyleyse $a = 0 \pmod{b}$ demekle $b|a$ demek aynı şey.

Teorem 2.9. p asal bir sayı ise her $1 \leq k \leq p - 1$ için

$$\binom{p}{k} = 0 \pmod{p}.$$

Kanıt: Her binom sayısının doğal sayı olduğunu biliyoruz. Notasyonda kolaylık olması için

$$m = \binom{p}{k} = \frac{p!}{(p-k)!k!} = \frac{p(p-1) \cdots (p-k+1)}{k!}$$

yazalım. Demek ki

$$p(p-1) \cdots (p-k+1) = k!m$$

olacak. Öyleyse $p|k!m$. Ama p asal olduğu için ya m sayısını böler ya da $k!$ sayısını (Teorem 2.2). Dolayısıyla $k!$ sayısının p 'ye bölünmediğini gösterirsek kanıtımız tamamlanır. Bu ise aşikâr, çünkü bir asal sayı $k!$ sayısını bölerse

$$k, k-1, k-2, \dots, 2$$

sayılarından en az birini böler ama bu sayıların her biri p sayısından küçük. $\square$

Bu teoremi kullanarak **Fermat'nın küçük teoremi** diye anılan şu sonucu vereceğiz.

Teorem 2.10. p asal bir sayı ise her $n \in \mathbb{N}$ için $n^p = n \pmod{p}$ olur.

Kanıt: n üzerinden tümevarımla sonuca ulaşacağız. $n = 1$ hali aşikâr. Şimdi $n^p = n \pmod{p}$ olduğunu varsayalım ve $(n+1)^p$ sayısına bakalım. Binom açılımı bize

$$(n+1)^p = 1 + n^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k$$

verir. Bir önceki teoremden her $1 \leq k \leq p - 1$ için

$$\binom{p}{k} = 0 \pmod{p}$$

olduğunu biliyoruz. Demek ki $(n+1)^p$ sayısını p 'ye bölersek $n^p + 1$ kalacak. Yani $(n+1)^p = n^p + 1 \pmod{p}$. Ama varsayımımız bize n^p sayısını p 'ye böldüğümüzde n kaldığını veriyor. Öyleyse

$$(n+1)^p = (n+1) \pmod{p}$$

olmalı. $\square$

Şimdi bir $j \in \mathbb{N}$ için

$$a^j - b^j = (a - b) \sum_{k=0}^{j-1} a^k b^{j-1-k}$$

eşitliğine bakalım. Bunu sağ taraftaki çarpımı yaparak kolayca kanıtlayabiliriz. Herhangi bir $r \in \mathbb{N}$ ve 1'den büyük bir tek tamsayı s verildiğinde

$$a = 2^r, j = s \text{ ve } b = -1$$

alırsak ve s sayısının tek olduğunu hatırlayarak

$$2^{rs} + 1 = (2^r + 1) \sum_{k=0}^{s-1} (2^r)^k (-1)^{j-1-k}$$

elde ederiz. Toplama işaretiyle verilen sayıyı $c \in \mathbb{N}$ ile gösterelim. Böylece

$$(2^r + 1)c = 2^{rs} + 1$$

olduğunu gördük. Tabii $1 < 2^r + 1 < 2^{rs} + 1$. Demek ki $2^{rs} + 1$ sayısı asal olamaz; yani $2^n + 1$ sayısı asalsa n bir tek sayıya bölünemez, yani n , 2 'nin bir kuvveti olmalı. Kanıtladığımızı şöyle ifade edelim.

Teorem 2.11. *Eğer 1'den büyük bir $n \in \mathbb{N}$ için $2^n + 1$ sayısı asal ise, bir $m \in \mathbb{N}$ için $n = 2^m$ eşitliği sağlanır.* $\square$

$F_m = 2^{2^m} + 1$ şeklinde yazılabilen sayılara **Fermat sayıları** denir. Bu tanımda $m = 0, 1, 2, \dots$ olarak alınır. İlk birkaç Fermat sayısını hesaplamak kolay:

$$F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257.$$

Bu sayıların hepsi asal. Bir de $m = 4$ alalım. Bu sayıyı bulmak o kadar kolay değil, ama

$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65.537$$

ve bu da asal bir sayı. Kanıtladığımız teoremin acaba tersi de doğru mu? Yani her Fermat sayısı asal mı? Fermat, her Fermat sayısının asal olduğunu öne sürmüştü. Oysa, bir sonraki Fermat sayısını hesaplayan Euler

$$F_5 = 641 \times 6.700.417$$

olduğunu göstererek bu savı kolayca çürüttü. Bazı matematikçiler Fermat sayıları arasında sonsuz sayıda asal olduğunu tahmin etmekte. Bazıları ise, tam tersine, ilk beş Fermat sayısı dışında asal sayı olmadığını düşünüyor. Son yıllarda, masaüstü bilgisayarların boş zamanlarından yararlanarak **Fermat araması** (*Fermat Search*) isimde bir proje başlatıldı. Bu projede amaç Fermat sayılarını çarpanlara ayırmak.

2012 yılının Şubat ayına kadar sadece F_5 'ten F_{32} 'ye kadar olan Fermat sayılarının asal olmadıkları anlaşıldı. $F_5, F_6, F_7, F_8, F_9, F_{10}$ ve F_{11} sayıları ise asal çarpanlara ayrıldı. Ama kaç Fermat sayısının asal olduğu hâlâ açık bir problem olarak matematikçilerin önünde durmakta.

NOTLAR

Geometrinin babası olarak anılan **Öklid** (Yunanca Eukleides) MÖ 330-275 yıllarında zamanın önemli bir kültür merkezi olan İskenderiye şehrinde yaşamıştır. Yunanca yazdığı 13 kitaplık **Öğeler** (*Elements*) isimli kapsamlı eserinde Öklid, düzlem geometrisini, aritmetiği, sayılar kuramını ve katı cisimleri sistematik bir biçimde ele almıştır. Aksiyomatik yaklaşımı, her yeni teoremin daha önceki sonuçlar ve aksiyomlar kullanılarak kanıtlanması, kanıtlardaki sağlam mantığı ve sonuçların verilmesindeki tutarlılığı ile bu eser modern bilimin gelişiminde öncü bir rol oynamıştır. Einstein bu eser hakkında “Gençliğinde bu kitabın büyümesine kapılmamış birisi, bilimde önemli bir atılım yapabileceği hayaline kapılmasın” demiştir.

Öklid geometrisi 19'uncu yüzyılın başına kadar rakipsiz kalmıştır. Hatta 20'nci yüzyılın ortalarında bile okullarda geometri dersleri Öğeler kitabını esas alarak verilmekteydi. Öklid geometriyi kurmaya on aksiyomla başlar. Bunlardan beşini şöyle ifade edebiliriz:

1. İki noktadan tek bir doğru geçer.
2. Bir doğru parçası iki yöne de sınırsız uzatılabilir.
3. Merkezi ve üzerinde bir nokta verilen çember, çizilebilir.
4. Tüm dik açılar eşittir.
5. Düzlemdeki bir doğruya dışında kalan bir noktadan geçen tek bir paralel doğru çizilebilir.

Düzlemdeki iki noktayı birleştiren doğru, bu noktalar arasındaki en kısa yoldur. Oysa küre üzerinde alınan iki noktayı birleştiren en kısa yol bu noktalardan geçen büyük çemberdir. Düzlemde iki doğru ya tek bir noktada kesişir ya da hiç kesişmez; yani paraleldir. Ama küredeki iki büyük çember mutlaka iki noktada kesişir. Kitabın son bölümünde kürenin geometrisi ile Öklid geometrisinin birbirlerinden ne kadar farklı olduğunu göreceğiz. 19'uncu yüzyıl başlarında ilk Öklid dışı ve tutarlı geometriler keşfedilmiştir.

Asal sayıların sonsuz sayıda olduğunu kanıtlayan Öklid, bu bölümde verilen aritmetiğin temel teoremini kanıtlamakta kullandığımız algoritmayı, yani bölme işlemini bulmuş ama bu önemli teoremi tam olarak ifade edememiştir.

Binlerce yıllık geçmişine karşın asal sayılar hakkında hâlâ bilmediğimiz birçok şey var. Bir asal sayıya 2 eklediğimizde gene asal bir sayı elde ediyorsak bu iki sayıya **ikiz asallar** denir. 5 ve 7, 11 ve 13, 59 ve 61 ikizler için bazı örnekler. Asal sayılar tablosuna bakarsak 37.811 ile 37.813 sayılarının da

burada yer aldığını görürüz. Peki kaç tane asal ikiz var? Sonsuz tane olduğunu sanıyoruz ama bu hâlâ açık ve çözülmesi zor bir problem. Bu alandaki en iyi sonuçlardan bir tanesi, C. Yalçın Yıldırım ve D. Goldston tarafından elde edildi [1]. Bu önemli probleme son yıllarda yaptıkları önemli katkılar nedeniyle Cem Yalçın Yıldırım, D. Goldston, H. Pintz ve Y. Zhang'a Amerikan Matematik Derneği (AMS) tarafından 2014 yılında Cole Ödülü verildi [3].

Christian Goldbach isimli Alman matematikçi 1742 yılında zamanın ünlü matematikçilerinden Leonhard Euler'e yazdığı bir mektupta, yaptığı hesaplarda 2'den büyük her çift sayıyı iki asal sayının toplamı olarak yazabildiğini ama gözlemini genel bir teorem olarak kanıtlayamadığını belirtti. Birkaç örneğe bakalım.

$$52 = 5 + 47$$

$$54 = 7 + 47 = 11 + 43$$

$$56 = 13 + 43$$

$$58 = 5 + 53 = 11 + 47$$

$$60 = 7 + 53 = 13 + 47 = 17 + 43 = 19 + 41$$

Euler de bir kanıt bulmaya çalışmış ama başaramamıştır. Goldbach hipotezi diye anılan bu problemi kanıtlayana Clay Matematik Enstitüsü tarafından milyon dolarlık bir ödül verilecek! [2]

Blaise Pascal (1623-1662) matematik, fizik ve felsefeye yaptığı katkılarla tanınan Fransız bir bilim adamıdır. Babası tarafından eğitilen Pascal genç yaşlarında mekanik bir hesap makinesi icat etmiştir. Projektif geometri hakkında yazdığı ilk makaleyi babası zamanın ünlü matematikçilerine göstermiş ama onları bu makalenin onaltı yaşındaki oğlu tarafından yazıldığına inandıramamıştır. Şans oyunları ile ilgilenen bir arkadaşının sorduğu sorular üzerine Pascal bu konuda Fermat ile yazışmıştır. Bu yazışmalardan olasılık teorisinin doğduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca Pascal, din ve felsefe konularında da birçok eser vermiştir.

Daha onsekiz yaşındayken ağır bir hastalık geçiren Pascal, hiçbir zaman tam iyileşememiştir. Giderek insanlardan kaçan Pascal'ın sağlığı otuz beş yaşındayken tekrar bozulmuştur. İyi bir Hristiyanın acı çekmesi gerekir anlayışıyla doktor müdahalesini kabul etmeyen Pascal, otuz dokuz yaşında ölmüştür.

Kaynaklar

[1] K. Soundararajan, *Small gaps between prime numbers, The work of Goldston-Pintz-Yıldırım*, Bull.Amer.Math.Soc. 44 (2007) 1-18.

[2] www.claymath.org/millennium.

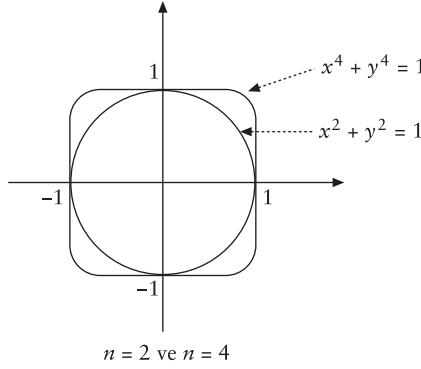
[3] T. Terzioğlu, *İkiz Asallar Sanısı ve Cole Ödülü*, Matematik Dünyası dergisi 2014-I sayısı, sayfa 20-22.

3. Fermat Amcaya Bayram Ziyareti

Diophantus'un **Aritmetika** isimli kitabının o yıllarda yeni basılan Latince çevirisini okuyan **Pierre de Fermat** (1601-1665) bu kitabın bir sayfasının kenarına yazdığı notta 2'den büyük her $n \in \mathbb{N}$ için $x^n + y^n = z^n$ denkleminin doğal sayılarla çözülemeyeceğini kanıtladığını, ancak sayfa kenarındaki boşluğun bu güzel kanıtı yazmaya yetmediğini söyler. Kendisinin ölümünden sonra Pierre de Fermat'nın matematik notları oğlu tarafından bir kitapta toplanır ve böylece **Fermat'nın Son Teoremi** adını taşıyan zor problem matematikçilerin olağanüstü ilgisini çekmeye başlar. Tabii “son teorem” kanıtlanmadığı için aslında teorem değil, sadece 17'nci yüzyılın önemli matematikçilerinden olan Fermat'nın bir tahmini. Bir kitabın sayfa kenarına yazılmış olan bu not yüzyıllar boyunca bir çok ünlü matematikçinin ilgisini çeker. Fermat'nın son teoremini kanıtlama çabası sayesinde cebirsel sayılar teorisi gibi yeni alanlar ortaya çıkar ve gelişir. Böylece Fermat'nın son teoremi matematiğin en önemli teoremlerinden veya daha doğrusu meşhur açık problemlerinden birisi olur.

Fermat'nın kendisi $n = 4$ için teoremin kanıtını verir. Ondan sonraki iki yüzyılda 3, 5 ve 7 için farklı kanıtlar bulunur. Özellikle 19'uncu yüzyılda yeni gelişmeler ortaya çıkar ve daha sonra bu sonuçlara dayanan bilgisayar hesaplarıyla Fermat'nın son teoreminin 20'nci yüzyılın sonlarında dört milyondan küçük tüm asal sayılar için doğru olduğu gösterilir. 1983'te **G. Faltings**'in kanıtladığı yeni bir teorem bize Fermat'nın son teoreminin bir n_0 kuvvetinden büyük tüm doğal sayılar için doğru olduğunu söyler. Ancak bu n_0 sayısı hakkında Faltings'in kanıtı bir bilgi içermez ve bu nedenle de Fermat'nın son teoremini bilgisayar yardımıyla kanıtlamak söz konusu olamaz.

1984 yılında **Gerhard Frey** eliptik eğriler teorisini kullanarak bu çetin ceviz problemi çözmek için yeni bir strateji ortaya atar. Bu yeni stratejiyi yaklaşım olarak kabul eden **Andrew Wiles** 1993'te Fermat'nın son teoremini kanıtladığını öne sürer. Ancak bu kanıtta da önemli bir boşluk olduğu anlaşılır. **Richard Taylor**'ın da yardımıyla Wiles bu boşluğu da giderir ve 1995'te mutlu sona ulaşılır. Fermat'nın son teoremi artık gerçek bir teoremdir! Tam 358 yıl sonra...



Pisagor üçlülerine geri dönersek $x^2 + y^2 = 1$ eğrisi üzerinde her iki koordinatı da rasyonel sayı olan sonsuz sayıda nokta olduğunu stereografik izdüşüm yardımıyla bulmuştuk (Teorem 1.2). Üstelik bu noktaların koordinatlarını tam olarak hesaplayabiliyorduk. Fermat'ın son teoremi ise bize $n > 2$ için

$$x^n + y^n = 1$$

eğrisi üzerinde, her iki koordinatının da rasyonel olduğu sadece

$$(1, 0), (0, 1), (-1, 0) \text{ ve } (0, -1)$$

noktalarının olduğunu söylüyor. Bu biraz şaşırtıcı, çünkü $\mathbb{Q}^2$ kümesinin düzlemde yoğun olduğunu biliyoruz. Yani düzlemdeki her noktaya istediğimiz kadar yakın $\mathbb{Q}^2$ kümesinden bir nokta seçebiliriz; demek ki $n = 4$ için $x^4 + y^4 = 1$ eğrisi üzerinde herhangi bir (a, b) noktası alırsak, bu noktaya istediğimiz kadar yakın ve $\mathbb{Q}^2$ kümesinde olan noktalar bulabiliriz. Örnek olarak $x^4 + y^4 = 1$ eğrisi üzerinde $(1/2, \sqrt[4]{15}/2)$ noktasını alalım. Şimdi her $n = 1, 2, \dots$ için

$$\left(\frac{1}{2} - r_n\right)^2 + \left(\frac{\sqrt[4]{15}}{2} - s_n\right)^2 < \frac{1}{n}$$

eşitsizliği sağlayan rasyonel r_n ve s_n sayıları bulabileceğimizi biliyoruz. Böylece $\mathbb{Q}^2$ kümesinde olan $((r_n, s_n))_n$ dizisinin limiti $(1/2, \sqrt[4]{15}/2)$ noktasıdır ama Fermat'ın son teoremi bize bu (r_n, s_n) noktalarının **hiçbirinin** $x^4 + y^4 = 1$ eğrisi üzerinde olmadığını söylüyor!

Bu şaşırtıcı sonuçtan sonra, Fermat'ın çok sevdiği **sonsuz iniş** yöntemini kullanarak $x^4 + y^4 = z^2$ denkleminin doğal sayılarla çözülemeyeceğini kanıtlayacağız. $\mathbb{Z}$ kümesinin alttan sınırlı ve boş olmayan bir altkümesini S ile gösterelim. Bu küme üzerinde tanımlı bir $f : S \rightarrow S$ fonksiyonu her $s \in S$ için $f(s) < s$ eşitsizliğini sağlarsa, $s_0 = \min S$ için $f(s_0) < s_0$ çelişkinine varırız. Yani böyle bir $f : S \rightarrow S$ fonksiyonu tanımlanamaz. İşte sonsuz iniş yönteminin özü bu kadar basit. Fermat teoreminin özel bir hali bu yöntemle kanıtlanabilir. Belki de Fermat bu hali genelleştirebileceğini sanıyordu!

Teorem 3.1. *Hiçbir $n \geq 1$ doğal sayısı için $x^{4n} + y^{4n} = z^{4n}$ denkleminin doğal sayı çözümü yoktur.*

Kanıt: Eğer bir $n \geq 1$ için $a^{4n} + b^{4n} = c^{4n}$ eşitliğini sağlayan $a, b, c \in \mathbb{N}$ olsaydı, $(a^n)^4 + (b^n)^4 = (c^n)^4$ yazarak, $x^4 + y^4 = z^4$ denkleminin de doğal sayı çözümü (a^n, b^n, c^n) olduğunu bulmuş olurduk. Dolayısıyla teoreminizi $n = 1$ halinde kanıtlamamız yeterli olacak. Ama biz

$$x^4 + y^4 = z^2$$

denkleminin doğal sayı çözümü olmadığını kanıtlayacağız. Bu iddiamızdan daha genel, çünkü $a^4 + b^4 = c^4$ denklemi $a, b, c \in \mathbb{N}$ ile sağlanırsa (a, b, c^2) üçlüsü $x^4 + y^4 = z^2$ denkleminin çözümü olurdu.

Şimdi iddiamızın aksine $x^4 + y^4 = z^2$ denkleminin bir doğal sayı çözümü (x, y, z) olduğunu varsayalım. Sonsuz iniş yöntemini

$$S = \{z \in \mathbb{N} : x^4 + y^4 = z^2 \text{ ve } x, y \in \mathbb{N}\}$$

kümesine uygulayacağız. Genellikten hiçbir şey kaybetmeden x, y, z doğal sayılarının ikiye ikiye en büyük ortak bölenlerinin hep 1 olduğunu varsayalım. O takdirde (x^2, y^2, z) temel bir Pisagor üçlüsü olurdu. Gene genellikten bir şey kaybetmeden x^2 'nin tek ve y^2 'nin çift sayı olduğunu kabul edersek, Teorem 1.3'e göre, aralarında asal olan $u, v \in \mathbb{N}$ sayıları için

$$x^2 = u^2 - v^2, y^2 = 2uv, z = u^2 + v^2$$

yazabiliriz. Şimdi buradaki ilk denklemi $x^2 + v^2 = u^2$ şeklinde yazarak (x, v, u) üçlüsünün de temel bir Pisagor üçlüsü olduğunu görelim. x^2 tek sayı olduğu için x sayısı tek, v de çifttir. Dolayısıyla aralarında asal olan u_1, v_1 doğal sayıları için

$$x = u_1^2 - v_1^2, v = 2u_1v_1, u = u_1^2 + v_1^2$$

olur. Şimdi de

$$y^2 = 2uv = 4u_1v_1(u_1^2 + v_1^2)$$

denkleminde bakalım. Buradaki u ve v ile $u_1v_1, u_1^2 + v_1^2$ sayılarının ortak bölenleri hep 1'e eşit. Dolayısıyla u_1v_1 ile $u_1^2 + v_1^2$ doğal sayıların karesi olarak yazılabilir. Burada Teorem 2.8'i kullanıyoruz. Demek ki

$$u_1v_1 = w^2 \text{ ve } u_1^2 + v_1^2 = z_1^2$$

olarak yazabiliyoruz. Aynı şekilde ebob(u_1, v_1) = 1 olduğundan

$$u_1 = x_1^2 \text{ ve } v_1 = y_1^2$$

denklemlerini sağlayan $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$ bulalım. Şimdi

$$x_1^4 + y_1^4 = u_1^2 + v_1^2 = z_1^2$$

denklemini bize yeni bir çözüm üçlüsü (x_1, y_1, z_1) olduğunu gösterdi. Yani $z_1 \in S$.

$$1 < z_1 < z_1^4 = (u_1^2 + v_1^2)^2 = u^2 < u^2 + v^2 = z$$

eşitsizliği, her (x, y, z) çözümü için $z_1 < z$ eşitsizliğini sağlayan bir (x_1, y_1, z_1) çözüm üçlüsü olduğunu veriyor. O zaman $f : S \rightarrow S$ fonksiyonunu $f(z) = z_1$ olarak tanımlayabilirdik. Oysa S kümesi alttan sınırlı. Yani çözüm varsa, sonsuz iniş yöntemi bizi bir çelişkiye götürüyor. $\square$

Fermat Amcamıza ziyaretimiz kısa sürdü ama zaten bayram ziyareti de kısa olur.

NOTLAR

René Descartes ve **Pierre de Fermat** (1601-1665) 17'nci yüzyılın en etkili matematikçileridir. Bask kökenli zengin bir deri tüccarının oğlu olan Pierre de Fermat, Fransa'nın güneybatısındaki Beaumont-de-Lomage şehrinde doğmuştur. İlk eğitimini üç kardeşiyle birlikte evinde özel hocalardan almıştır. Önce Toulouse Üniversitesi'ne girmiş ama sonra Bordeaux Üniversitesi'ne geçmiştir. Matematiğe olan ilgisi Bordeaux'da iyice ortaya çıkmışsa da buradan da ayrılarak Orleans Üniversitesi'ne geçmiş ve hukuk okumuştur. 1631 yılında Toulouse Yüksek Mahkemesi'nde önemli bir göreve getirilmiş ve soyluluk simgesi olarak de Fermat unvanını kullanmaya başlamıştır. Fransızca'nın yanısıra Latince, Baskça, İtalyanca ve eski Yunanca bilen Pierre de Fermat, matematikte Diofant denklemlerini incelemiş, Descartes ile analitik geometrinin ve Pascal ile de olasılık teorisinin temellerini atmıştır. Bu kalıcı katkılarına rağmen çoğu matematikçi tarafından hep bir amatör olarak sayılmıştır. Çünkü kendisi matematiğe katkılarını, çoğu zaman kanıtsız olarak, mektuplarla tanıdıklarına yollamakta ayrıca kitap veya makale yazmamaktaydı. Ölümünden sonra oğlu tarafından babasının matematik notları bir kitapta derlenmiştir. Böylece hem *son teorem* olağanüstü bir ilgiye kavuşmuş ve Pierre de Fermat'ın matematiğe olan katkısı daha iyi anlaşılabilmiştir.

Fermat'ın son teoreminin kanıtının öyküsü ve Simon Singh'in kitabında çok canlı anlatılmaktadır. Bu kitabı okumak için çok matematik bilmeye de gerek yok.

Kaynaklar

- [1] Simon Singh, **Fermat's Last Theorem**, Fourth Estate (1997).

4. Bazı Eşitsizlikler ve Sonsuz Çarpım

Matematikteki eşitsizlikler, kanıtları ve kullanım alanlarıyla tek başına birçok kitaba konu teşkil eder. Bu kısa bölümde amacımız eşitsizlik elde etmeye yarayan birkaç basit fakat genel yöntemi tanıtmak olacak. Tanıtacağımız yöntemlerden birincisi aradeğer teoremini kullanmayı içeriyor. Bu teoreme göre $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevi olan bir $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verildiğinde, (a, b) açık aralığındaki bir x_0 noktası için

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$$

eşitliği sağlanır. Teorem bize sadece x_0 noktasının varlığını veriyor, değerini değil. Örnek olarak, $f(x) = e^x$ fonksiyonunu alırsak, her $x > 0$ için

$$e^x - 1 = xe^{x_0}$$

denklemini sağlayan ve 0 ile x arasında kalan bir x_0 noktasının varlığını elde ederiz. Üssel fonksiyon e^x artan bir fonksiyon. Demek ki $1 < e^{x_0} < e^x$. Böylece her $x > 0$ için,

$$x < e^x - 1 < xe^x \quad (4.1)$$

eşitsizliğine varırız.

Bir başka örnek olarak $f(x) = \log x$ fonksiyonunu ve $n \in \mathbb{N}$ ve $a > 0$ olmak üzere $[n, n + a]$ aralığını alalım. Bu fonksiyon e tabanına göre tanımlı **doğal logaritma** fonksiyonu. Logaritmanın türevi olan $1/x$ azalan bir fonksiyondur. Bu kez aradeğer teoremi bize, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{a}{n + a} \leq \log \frac{n + a}{n} \leq \frac{a}{n} \quad (4.2)$$

eşitsizliğini verir. Bundan da

$$\frac{an}{n + a} \leq n \log \frac{n + a}{n} \leq a$$

elde ederiz. Üç tarafın da n sonsuza giderken limitini alırsak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\frac{n+a}{n} \right)^n = a$$

buluruz. Böylece logaritmanın özelliklerini, üssel fonksiyonun sürekli olduğunu ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+a}{n} = 1$$

eşitliğini kullanarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+a}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+a}{n} \right)^{n+1} = e^a$$

elde ederiz.

Sonsuz toplamaları, yani serileri biliyoruz. Şimdi her terimi pozitif bir $(u_n)_n$ gerçel dizisi verildiğinde, c_k **sonlu kısmi çarpımlarını**

$$c_k = u_1 u_2 \cdots u_k = \prod_{n=1}^k u_n$$

olarak tanımlayalım. Kısmi çarpımlar dizisi $(c_k)_k$ yakınsak ise,

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

“sonsuz çarpımına” **yakınsak çarpım** diyeceğiz. Ayrıca $\lim c_k = c$ ise, aynen serilerde olduğu gibi

$$c = \prod_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^k u_n$$

yazacağız. Sonsuz çarpımlarla seriler arasındaki ilişkilere bir örnek olarak ileride sıkça yararlanacağımız bir teoremi ele alalım.

Teorem 4.1. Her n için $a_n \geq 0$ ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak olması,

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

sonsuz çarpımının yakınsaklığı için yeterli ve gereklidir.

Kanıt: Kısmi toplam ve çarpımları

$$t_k = \sum_{n=1}^k a_n \quad \text{ve} \quad c_k = \prod_{n=1}^k (1 + a_n)$$

olarak yazalım. $1 + a_n \geq 1$ olduğu için $t_{k+1} \geq t_k$ ve $c_{k+1} \geq c_k$ olduğunu hemen görürüz.

Artan bir dizinin limitinin var olması için bu dizinin üstten sınırlı olması yeterli ve gereklidir. Bu gözlemden yola çıkarak ilkin her k için $t_k \leq c_k$ olduğunu tümevarımla gösterebiliriz.

$k = 1$ için eşitsizlik aşikâr. Herhangi bir n için $t_n \leq c_n$ eşitsizliğini varsayarak ve $c_n \geq 1$ eşitsizliğini dikkate alarak

$$t_{n+1} = t_n + a_{n+1} \leq c_n + a_{n+1} \leq c_n(1 + a_{n+1}) = c_{n+1}$$

elde ederiz.

Demek ki $(c_k)_k$ üstten sınırlı ise, $(t_k)_k$ dizisi de üstten sınırlıdır; yani $(c_k)_k$ dizisinin limiti varsa $(t_k)_k$ dizisinin de limiti vardır. Bu da bize sonsuz çarpım $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ yakınsaksa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin de yakınsak olduğunu gösterir. Bu işin kolay bölümüydü.

Şimdi $\sum a_n$ serisinin yakınsak olduğunu varsayalım. Bu varsayımla $(t_k)_k$ dizisinin üstten sınırlı olduğunu kabul etmek aynı şey. Öte yandan

$$1 + a_n \leq e^{a_n}$$

eşitsizliğini (4.1)'den biliyoruz. Bu da bize $c_k \leq e^{a_1} e^{a_2} e^{a_3} \dots = e^{t_k}$ eşitsizliğini verir. Buradan da $(t_k)_k$ dizisi üstten sınırlıysa $(c_k)_k$ dizisinin üstten sınırlı olduğunu görerek hemen kanıtımızı bitiririz. $\square$

$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ serisine **harmonik seri** denir. (4.2)'deki eşitsizliği ardarda kullanarak

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n+1} \leq \log(k+1) \leq \sum_{n=1}^k \frac{1}{n}$$

elde ederiz. Burada

$$\log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \dots + \log \frac{k+1}{k} = \log(k+1)$$

özdeşliğini kullandık. Böylece

$$\log(k+1) \leq H_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n}$$

sonucuna vararak, harmonik serinin kısmi toplamlar dizisinin sınırsız olduğunu görürüz. Demek ki harmonik seri yakınsak değil, ıraksak! İlk eşitsizliğin sol tarafını dikkate alarak

$$H_k + \frac{1}{k+1} - 1 \leq \log(k+1)$$

eşitsizliğine varırız. Böylece bu son iki eşitsizlikten

$$1 \leq \frac{H_k}{\log(k+1)} \leq 1 + \frac{1 - \frac{1}{k+1}}{\log(k+1)}$$

elde eder ve limit alarak sonunda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{H_k}{\log(k+1)} = 1,$$

yani

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{H_k}{\log k} = 1$$

sonucuna varırız. Demek harmonik serinin kısmi toplamaları dizisi $(H_k)_k$, limitte $(\log k)_k$ dizisi gibi davranıyor. Peki farklardan oluşan $(H_k - \log k)_k$ dizisi yakınsar mı, yakınsarsa da kaçaya yakınsar?

$$\gamma_k = H_k - \log k$$

olsun. $\log k < \log(k+1) \leq H_k$ olduğundan, $\gamma_k > 0$ olur. Ayrıca (4.2) sayesinde

$$\gamma_{k+1} - \gamma_k = (H_{k+1} - H_k) - (\log(k+1) - \log k) = \frac{1}{k+1} - (\log(k+1) - \log k) \leq 0$$

elde ederiz. Demek ki $(\gamma_k)_k$ dizisi pozitif ve azalan bir dizidir. Dolayısıyla bir limiti vardır. **Euler-Mascheroni sabiti** adı verilen bu limit γ olarak yazılır. Değeri yaklaşık olarak 0,57721'dir. Matematikte sık sık karşılaşılan bu sayının rasyonel olup olmadığını bile bilmiyoruz!

Hazır harmonik seriden söz etmişken bir de asalların harmonik serisine bakalım. Asal sayıları, hiçbirini unutmadan, sırasıyla $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ olarak yazarak elde edilen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

serisine **asalların harmonik serisi** denir. Bu serinin de ıraksak olduğunu gösteren Erdős'ün kanıtı Kitap'ta var. Bizin amacımız ise biraz daha fazlasını göstermek. Önce hazırlık yapmamız gerekecek, her sayıyı "karesiz" bir sayıyla bir tamkarenin çarpımı olarak yazacağız: Aritmetiğin temel teoremi bize her $n \in \mathbb{N}$ sayısının

$$n = \prod_p p^{k(n,p)}$$

şeklinde asalların çarpımı olarak yazılabileceğini söyler. Elimize iki torba alalım. Verilen n sayısı için $k(n, p)$ tek bir sayı ise p sayısını birinci torbaya atalım;

geriye bu çarpandan $k(n, p) - 1$ tane, yani çift sayıda kalır; bu $p^{k(n, p)-1}$ sayısını da ikinci torbaya atalım. Eğer $k(n, p)$ sayısı çift ise $p^{k(n, p)}$ sayısını da hemen ikinci torbaya atalım. Birinci torbadaki sayıların çarpımı r olsun. Bu r sayısı 1'den farklı bir doğal sayının karesine bölünmez, yani “karesiz” bir sayıdır. İkinci torbadakilerin çarpımı ise bir sayının karesidir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ sayısını, 1'den farklı bir kareye bölünmeyen bir r sayısı için

$$n = rm^2$$

olarak yazabiliriz. Burada r sayısı içinde kare barındırmaz, yani 1^2 dışında hiçbir kareye bölünmez; bütün kareleri m^2 'ye taşıdık. Örnek olarak $504 = 2^3 3^2 7$ sayısına bakalım. Birinci torbada 2 ve 7, ikincisinde ise 2^2 ve 3^2 var. Dolayısıyla $r = 14$, $m = 2 \cdot 3 = 6$ ve $504 = 14 \cdot 6^2$ olur.

İşe harmonik seriden başlayalım. Biraz önce vardığımız sonucu kullanarak her $i \in \mathbb{N}$ sayısını

$$i = r_i m_i^2$$

olarak yazalım. $(p_k)_k$ ile asal sayılar dizisini gösterirsek, bu tür kare barındırmayan her sayıyı her $\epsilon(k)$ ya 0 ya da 1 olacak şekilde

$$r = \prod_{k=1}^{\infty} p_k^{\epsilon(k)}$$

biçiminde ifade ederiz. Harmonik seri için

$$\log(n+1) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

eşitsizliğini biliyoruz. Her i sayısını $i = r_i m_i^2$ şeklinde yazarsak

$$\log(n+1) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i m_i^2}$$

sonucuna varırız. Tabii bu toplamdaki m_i sayıları tekrarlanabilir; $12 = 3 \cdot 2^2$ ve $20 = 5 \cdot 2^2$ gibi. Öyleyse

$$I(k) = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} : m_i = k\}$$

yazalım ve p_{j_n} ile de her $n \geq 2$ için bu n sayısından büyük olmayan en büyük asal sayıyı gösterelim. Yani $p_{j_n} \leq n < p_{j_{n+1}}$ olsun. Bir de

$$P_n = \left\{ \prod_{k=1}^{j_n} p_k^{\epsilon(k)} : \epsilon(k) \in \{0, 1\} \right\}$$

kümesini tanımlayalım. P_n tam tamına, n 'den küçük asalların çarpımı olan kararsiz sayılar kümesidir. Yukarıdaki eşitsizlikte yeralan her r_i sayısı P_n kümesine ait. Öyleyse

$$\sum_{i \in I(k)} \frac{1}{r_i m_i^2} = \left(\sum_{i \in I(k)} \frac{1}{r_i} \right) \frac{1}{k^2} \leq \left(\sum_{r \in P_n} \frac{1}{r} \right) \frac{1}{k^2}$$

eşitsizliği geçerli. Sağ tarafta beliren sonlu toplam k 'dan bağımsızdır. Bu toplamı

$$\sum_{r \in P_n} \frac{1}{r} = \prod_{\ell=1}^{j_n} \left(1 + \frac{1}{p_\ell} \right)$$

biçiminde yazabiliriz. Bunu görmek için çarpımı açmak yeterlidir. Sonuçta

$$\log(n+1) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \prod_{\ell=1}^{j_n} \left(1 + \frac{1}{p_\ell} \right) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

eşitsizliğini elde ettik. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki seri yakınsak. Toplamını A ile gösterebiliriz¹ ve $j_n \leq n$ olduğunu hatırlayalım. Böylece

$$\log(n+1) \leq A \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{p_k} \right)$$

eşitsizliğini bulduk. Bu eşitsizliğin sağ tarafına $1+x \leq e^x$ eşitsizliğini uygularsak

$$\log(n+1) \leq A e^{\sum_{k=1}^n 1/p_k}$$

sonucuna varırız. Tekrar logaritma alarak

$$\log(\log(n+1)) \leq \log A + \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k}$$

elde ederiz. Ama

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \log(n+1) = \infty.$$

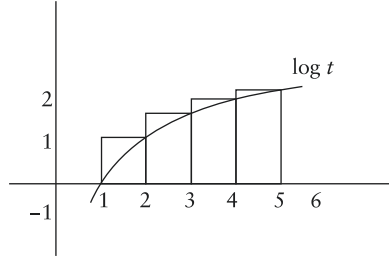
Öyleyse $\sum_{k=1}^{\infty} 1/p_k$ ıraksak bir seri.

Eşitsizlikler elde etmenin başka bir yöntemi de sürekli bir eğrinin altında kalan alanın bir integral olduğunu kullanmaktan geçer. Örnek olarak, $\log t$ eğrisi altında kalan ve $[1, n]$ aralığında olan alana bakalım. Bu alanı integral olarak

$$\int_1^n \log t \, dt = x \log x - x \Big|_1^n = n \log n - n + 1$$

kolayca hesaplarız.

¹Burada A ile gösterdiğimiz sayının $\pi^2/6$ olduğunu ileride Bölüm 11'de göreceğiz.



$\log t$ artan bir fonksiyon olduğundan, her $t \in [k, k+1]$ için,

$$\log k \leq \log t \leq \log(k+1)$$

olur. Demek ki $[k, k+1]$ aralığındaki $\log t$ eğrisi altında kalan alan $\log(k+1)$ 'den küçük ama $\log k$ 'dan büyük. Böylece

$$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) \leq n \log n - n + 1 \leq \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n,$$

yani

$$\log(n-1)! \leq n \log n - n + 1 \leq \log n!$$

eşitsizliklerini bulduk. Buradan da

$$(n-1)! \leq e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!$$

elde ederiz. Amacımız $n!$ sayısını alttan ve üstten sınırlamak. Bunun için yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafını n ile çarpalım ve böylece

$$n! = n \cdot (n-1)! \leq en \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

sonucuna varalım. Sonuç olarak

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (4.3)$$

elde ettik. Bunu şöyle yazalım:

$$\frac{e}{\sqrt{n}} \leq \frac{n!}{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \leq e\sqrt{n}.$$

Aslında bundan daha iyi bir sonuç var: **Stirling formülü** adını taşıyan bir teorem bize

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \sqrt{2\pi}$$

limitini verir. Ama uygulamada çoğu kez **Stirling yaklaşımı** denilen (4.3) yeterlidir. Bir örnek olarak (4.3)'teki eşitsizliğin sol tarafını kullanarak

$$\frac{e}{n!} \leq \left(\frac{e}{n}\right)^n$$

elde ederiz. Her iki tarafın n 'inci kökünü alırsak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/n}} = 0, \text{ yani } \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = \infty \quad (4.4)$$

sonucuna varırız.

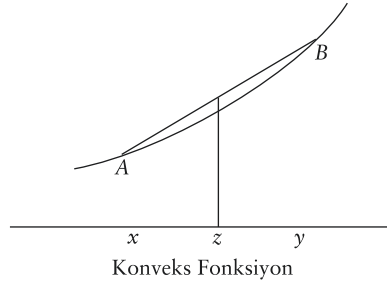
Gerçel sayıların bir D aralığı üzerinde tanımlı bir $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x, y \in D$ ve her $0 \leq \alpha \leq 1$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

eşitsizliğini sağlarsa, f 'ye **konveks fonksiyon** denir. Bu tanımın geometrik yorumunu yapmak için $x, y \in D$ alalım. Şimdi x ve y arasında kalan bir z sayısını bir $0 \leq \alpha \leq 1$ için $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ olarak yazalım ve $A = (x, f(x))$ ve $B = (y, f(y))$ noktalarını birleştiren doğruya bakalım. Bu doğru üzerindeki noktaları bir $\alpha \in [0, 1]$ için

$$(\alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y))$$

olarak ifade edebiliriz. Dolayısıyla x eksenindeki $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ noktasından bir dik çıkarırsak bu doğru **önce** $(z, f(z))$ noktasını, **sonra da** A ile B arasındaki AB kirişini keser. İşte bir fonksiyonun konveks olmasının geometrik yorumu bu. Resim aşağıda.



Eğer $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyonsa, D bölgesinden seçeceğimiz sonlu sayıda $x_1, \dots, x_n$ noktası ($n \geq 2$) ve $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ eşitliğini sağlayan $0 \leq \alpha_i \leq 1$ sayıları için

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

eşitsizliği sağlanır. Farklı f fonksiyonları seçerek **Jensen eşitsizliği** diye anılan bu genel sonuçtan çok sayıda yeni eşitsizlik elde edilir.

İlkin bu genel eşitsizliğin kanıtını verelim. Burada n üzerinden tümevarım kullanacağız. Önce $n = 2$ halinde sonuç zaten konveks fonksiyonun tanımı

olduğunu görelim. Şimdi de $n = k$ için sonucun doğru olduğunu varsayalım ve

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} = (1 - \alpha_{k+1}) \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{k+1}} x_i + \alpha_{k+1} x_{k+1}$$

olarak yazalım. O zaman f konveks olduğundan,

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{k+1} x_{k+1}) \leq (1 - \alpha_{k+1}) f\left(\sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{k+1}} x_i\right) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1})$$

elde ederiz. Öte yandan $\sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{k+1}} = 1$ olduğu için tümevarım varsayımımızı ilk terime uygulama hakkımız var. Demek ki

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{k+1} x_{k+1}) &\leq (1 - \alpha_{k+1}) \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{k+1}} f(x_i) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i f(x_i). \end{aligned}$$

Jensen eşitsizliği böylece kanıtlanmış oldu.

Eğer her $x \in D$ için $f''(x) > 0$ ise, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olduğunu analiz derslerinden biliyoruz. Mesela $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere x^{2k} ve e^x fonksiyonları konvekstir, dolayısıyla Jensen eşitsizliğini bu fonksiyonlara uygulayabiliriz. Bu örneklerin hepsinde $D = \mathbb{R}$. Tek kuvvetlere, yani x^{2k+1} fonksiyonuna bakarsak, ikinci türev olarak, bunların $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ bölgesinde konveks olduğunu hemen görebiliriz. Böylece birçok eşitsizlik elde ederiz.

Eğer $-f$ fonksiyonu konveks ise, Jensen eşitsizliği tersine döner. Yani bu durumda

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

eşitsizliği sağlanır. Doğal logaritma $\log x$ böyle bir fonksiyon, çünkü

$$-\log x = \log \frac{1}{x}$$

fonksiyonu $x > 0$ bölgesinde konveks. Şimdi Jensen eşitsizliğinde

$$f(x) = \log \frac{1}{x}$$

fonksiyonunu alalım; her biri 0'dan büyük $a_1, \dots, a_n$ sayıları ve $0 \leq \alpha_i \leq 1$ olmak üzere $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$ eşitliğini sağlayan $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sayıları seçelim.

$$\log \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \log \frac{1}{a_i} = \log \prod_{i=1}^n \frac{1}{a_i^{\alpha_i}}$$

eşitsizliğinden hemen, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ eşitliğini sağlayan $\alpha_i \geq 0$ sayıları için

$$\prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \quad (4.5)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Özel olarak her i için $\alpha_i = 1/n$ alırsak

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad (4.6)$$

sonucuna varırız. Bu eşitsizlikteki sol tarafa $a_1, \dots, a_n$ sayılarının **geometrik ortalaması**, sağ tarafa da **aritmetik ortalaması** denir.

Yeni bir eşitsizlik türetmek için ilkin (4.5) yardımıyla

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{a_i + b_i} \right)^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{a_i}{a_i + b_i}$$

yazalım. Aynı işlemi b_i 'ler için yapıp toplayarak

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{a_i + b_i} \right)^{\alpha_i} + \prod_{i=1}^n \left(\frac{b_i}{a_i + b_i} \right)^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

elde ederiz. Buradan da

$$\prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i} + \prod_{i=1}^n b_i^{\alpha_i} \leq \prod_{i=1}^n (a_i + b_i)^{\alpha_i} \quad (4.7)$$

eşitsizliğine varırız.

Herhangi bir $p \geq 1$ gerçel sayısı verilmiş olsun. $\mathbb{R}^m$ uzayından seçilen bir

$$C = (c_1, \dots, c_m)$$

vektörü için,

$$\|C\|_p = \left(\sum_{i=1}^m |c_i|^p \right)^{1/p}$$

tanımını yapalım. (Böylece her $p > 1$ için $\mathbb{R}^n$ üzerinde ayrı bir norm tanımlamış oluruz. Normun genel tanımını merak edenler hemen bir sonraki bölüme bakabilir.)

Şimdi de $\mathbb{R}^m$ uzayından her birini $C^k = (c_1^k, \dots, c_m^k)$ ile göstereceğimiz n tane vektör seçelim ($k = 1, 2, \dots, n$). Her k için seçilen $p_k \geq 1$ sayıları

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$$

eşitliğini sağlasın. Son olarak

$$a_i^k = \left(\frac{|c_i^k|}{\|C^k\|_{p_k}} \right)^{p_k} = \frac{|c_i^k|^{p_k}}{\sum_{i=1}^m |c_i^k|^{p_k}}$$

tanımını yapalım. Şimdi (4.5) eşitsizliğini uygulayarak her $i = 1, \dots, n$ için

$$\frac{|c_i^1|}{\|C^1\|_{p_1}} \dots \frac{|c_i^n|}{\|C^n\|_{p_n}} = (a_i^1)^{1/p_1} \dots (a_i^n)^{1/p_n} \leq \frac{1}{p_1} a_i^1 + \dots + \frac{1}{p_n} a_i^n$$

elde ederiz. Bu eşitsizlikte iki tarafı da i üzerinden toplarsak, sağ taraf 1'e eşit olur çünkü

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{p_1} a_i^1 + \dots + \frac{1}{p_n} a_i^n \right) &= \frac{1}{p_1} \sum_{i=1}^m a_i^1 + \dots + \frac{1}{p_n} \sum_{i=1}^m a_i^n \\ &= \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1. \end{aligned}$$

Demek ki

$$\sum_{i=1}^m \frac{|c_i^1|}{\|C^1\|_{p_1}} \dots \frac{|c_i^n|}{\|C^n\|_{p_n}} \leq 1.$$

Şimdi eşitsizliğimizin sol tarafındaki paydaları sağa atarak

$$\sum_{i=1}^m |c_i^1| \dots |c_i^n| \leq \|C^1\|_{p_1} \dots \|C^n\|_{p_n} \quad (4.8)$$

sonucuna varırız. Bu önemli eşitsizliğe **genel Hölder eşitsizliği** denir.

Tekrar $\mathbb{R}^m$ uzayından A ve B gibi iki vektör seçelim ve $p \geq 1$ olsun. Amacımız **Minkowski eşitsizliği** denilen

$$\|A + B\|_p \leq \|A\|_p + \|B\|_p \quad (4.9)$$

sonucunu kanıtlamak. Tabii $p = 1$ için bu eşitsizliği biliyoruz. O zaman $p > 1$ olsun. İlk her i için

$$|a_i + b_i|^p = |a_i + b_i| |a_i + b_i|^{p-1} \leq |a_i| |a_i + b_i|^{p-1} + |b_i| |a_i + b_i|^{p-1} \quad (4.10)$$

elde ederiz. Şimdi

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$$

olsun. Hölder eşitsizliğini sağ taraftaki her iki terime de uygularsak,

$$\sum_{i=1}^m |a_i| |a_i + b_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^m |a_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^m |a_i + b_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q}$$

ve

$$\sum_{i=1}^m |b_i| |a_i + b_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^m |b_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^m |a_i + b_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q}$$

buluruz. Bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak, (4.10) ile birlikte,

$$\|A + B\|_p^p \leq (\|A\|_p + \|B\|_p) \left(\sum_{i=1}^m |a_i + b_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q}$$

sonucuna varırız. Öte yandan $(p-1)q = p$. Öyleyse

$$\|A + B\|_p^p \leq (\|A\|_p + \|B\|_p) \|A + B\|_p^{p/q},$$

yani

$$\|A + B\|_p^{p-p/q} \leq \|A\|_p + \|B\|_p.$$

Bu son eşitsizlik ve $p - p/q = 1$ eşitliği Minkowski eşitsizliğinin kanıtını bitirir.

NOTLAR

Eşitsizlikler matematiğin zengin konularından biridir. Bu bölümde sadece ileride kullanacağımız bazı temel eşitsizlikleri ele aldık ve farklı kanıt yöntemlerini kullandık.

Eşitsizlikler hakkında yazılmış olan birçok kitap arasında belki de en çok tanınmış olanı Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından yazılmış olandır [1].

Bu bölümde ismi geçen **Herman Minkowski** (1864-1909) Litvanya doğumlu tanınmış bir Alman matematikçisidir. Minkowski daha öğrenciyken Fransız Bilimler Akademisi'nin matematik ödülünü kazanma başarısı göstermiştir. Königsberg Üniversitesi'nden doktorasını aldıktan sonra Bonn ve Zürich'te çalışmış, 1902 yılında Göttingen Üniversitesi'nde profesör olmuştur. Kuadratik formlar kuramı ve sayıların geometrisi gibi alanların yanı sıra, 1907 yılında dört boyutlu uzay-zaman geometrisini ortaya atarak **Einstein**'ın özel görelilik kuramının daha iyi anlaşılmasını sağlamıştır. Bu uzay günümüzde Minkowski uzayı olarak anılır. Göttingen'de çağın en tanınmış matematikçilerinden David Hilbert ile yakın dost olan Hermann Minkowski erken yaşta apandisitten ölmüştür.

Kaynaklar

[1] G. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, **Inequalities**, Cambridge U.P. 1999.

5. Topoloji, Metrik ve Norm

Bu bölümde topoloji, metrik uzaylar ve normlu uzaylar konularına kısaca değineceğiz, ileride yararlanacağımız bazı kavramları birbiri ardına sıralayacağız ve teoremleri çoğu kez kanıtsız olarak vereceğiz. Zaten bu konuların her birinin sistematik ve kapsamlı olarak ele alındığı çok sayıda kitap var. (Türkçe kaynak için bkz. [2], [3], [4] ve [6].) Bizim amacımız ise kitabımızın bir ölçüde kendine yeterli olmasını sağlamaktan ibaret...

Verilen bir X kümesi üzerinde topoloji bu kümenin altkümelerinden oluşan bir küme aracılığıyla tanımlanır. Böyle bir τ kümesi aşağıda verilen koşulları sağlarsa, (X, τ) çiftine **topolojik uzay** ve τ kümesine de **topoloji** denir.

T1. X ve boşküme τ kümesindedir.

T2. τ kümesindeki iki kümenin arakesiti de τ kümesindedir.

T3. τ kümesinden seçilen kümelerin bileşimi de τ kümesindedir.

Böyle tanımlanan topolojide τ kümesine ait altkümelere **açık** küme denir. Eğer $X \setminus A$ kümesi açık ise, A kümesine **kapalı** küme denir. X ve boşküme her topolojide hem açık hem de kapalıdır. Sonlu sayıdaki kapalı kümenin bileşiminin kapalı olduğunu kolayca gösterebiliriz. Bir kapalı kümeler ailesinin ara kesiti gene kapalı bir küme verir. Böylece verilen bir A için $\bar{A}$ ile bu kümeyi kapsayan tüm kapalı kümelerin arakesitini gösterirsek, $\bar{A}$ kümesi verilen A kümesini kapsayan en küçük kapalı küme olur. Bu kümeye A 'nın **kapanışı** denir.

Verilen bir $x \in X$ noktasını eleman olarak içeren açık kümeye x noktasının **açık komşuluğu** denir. Daha genel olarak, eğer bir A kümesi x 'in bir açık komşuluğunu kapsıyorsa A kümesi x noktasının **komşuluğudur**. Açık bir küme içindeki her noktanın bir komşuluğudur. Bir topolojik uzayda birbirinden farklı her iki noktanın kesismeyen komşulukları varsa, bu uzaya **Hausdorff uzayı** denir. Diğer bir deyişle Hausdorff uzayında noktaları birbirlerinden ayıracak kadar çok açık küme vardır.

Aynı X kümesi üzerinde tanımlı τ_1 ve τ_2 topolojileri verildiğinde, τ_1 kümesine ait her küme τ_2 kümesine de aitse, τ_1 topolojisi τ_2 topolojisinden **zayıftır**. Salt boşküme ve X 'ten oluşan küme X üzerindeki en zayıf topolojiyi tanımlar.

X 'in tüm altkümelerinin tanımladığı topoloji ise X üzerinde tanımlı en kuvvetli topolojidir ve bu topolojiye **ayrık topoloji** denir. Ayrık topoloji mutlaka bir Hausdorff uzayıdır. Aksi belirtilmedikçe, bundan böyle bu kitapta yer alan **tüm topolojik uzayların Hausdorff uzayı olduğunu kabul edeceğiz**.

(X, τ) bir topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ verildiğinde,

$$\tau_Y = \{O \cap Y : O \in \tau\}$$

kümesinin Y kümesi üzerinde bir topoloji tanımladığını kolayca görebiliriz. Bu topolojiye **altuzay topolojisi** denir.

Eğer açık kümelerden oluşan bir $(A_i)_{i \in I}$ obasının bileşimi, yani $\bigcup_{i \in I} A_i$ kümesi tüm uzaya eşitse, bu obaya **açık örtü** denir. Eğer X uzayının her açık örtüsü içinden bileşimi tüm uzaya eşit olan sonlu sayıda küme bulabiliyorsak, (X, τ) uzayına **tıkız** (kompakt) topolojik uzay diyeceğiz. Bir (X, τ) topolojik uzayı verildiğinde, X 'in bir A altkümesi için (A, τ_A) tıkız bir topolojik uzay ise, A kümesi **tıkız kümedir**. Her tıkız küme mutlaka kapalıdır; bunun tersi genel olarak yanlıştır ama tıkız bir topolojik uzayın kapalı altkümeleri tıkızdır.

Bir de topolojik uzay üzerinde tanımlı fonksiyonların sürekliliğine kısaca değinelim. X ve Y topolojik uzayları ve $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu verildiğinde, bir $x_0 \in X$ için $f(x_0)$ noktasının Y uzayındaki her U açık komşuluğunun

$$f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}$$

ters görüntüsü X uzayında açık bir küme ise, f fonksiyonu x_0 noktasında **süreklidir**. Tanım uzayının her noktasında sürekli olan bir fonksiyona **sürekli fonksiyon** denir. $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun sürekli olması ile Y uzayındaki her O açık kümesi için $f^{-1}(O)$ kümesinin X 'de açık olması eşdeğerdir. Bilinen

$$X \setminus f^{-1}(U) = f^{-1}(Y \setminus U)$$

eşitliğini kullanarak, $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun sürekli olması için Y 'nin her kapalı altkümesinin ters görüntüsünün de X uzayında kapalı olması koşulunun yeterli ve gerekli olduğunu kolayca kanıtlarız. Ayrıca $f : X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon ve X tıkız ise, $f(X)$ kümesi Y uzayında tıkız olur.

(X, τ) topolojik uzayı içinde $(x_n)_n$ dizisi verilsin. Eğer bir x noktasının her U komşuluğuna karşılık,

$$\text{her } n \geq n_0 \text{ için } x_n \in U$$

olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, $(x_n)_n$ dizisi x **noktasına yakınsıyor** denir ve $\lim x_n = x$ yazılır. Bu tanımdaki x noktasına $(x_n)_n$ dizisinin **limiti** denir. Bir dizinin limiti varsa, uzayın Hausdorff özelliği bu limitin tek olduğunu verir. Kapalı bir küme içinden seçilen $(x_n)_n$ dizisinin limiti varsa, bu limit de aynı kümededir.

İlk bakışta topolojik uzay ve açık, kapalı, tıkız küme gibi topolojik kavramlar çok soyut gözükebilir. Bazı durumlarda bir topolojiyi uzaklık kavramını kullanarak tanımlayabilir ve tıklılık, açıklık, süreklilik gibi kavramları da uzaklık cinsinden biraz daha somut olarak ifade edebiliriz.

$\mathbb{R}_+ = \{\xi \in \mathbb{R} : \xi \geq 0\}$ ve X bir küme olsun. $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu şu koşulları sağlasın:

$$\text{U1. } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{U2. } d(x, y) = d(y, x)$$

$$\text{U3. her } x, y, z \text{ için } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Bu durumda bu fonksiyona **uzaklık fonksiyonu** veya **metrik** denir.

Gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde

$$d(\xi, \eta) = |\xi - \eta|$$

formülüyle tanımlanan fonksiyon hepimizin iyi bildiği bir uzaklık fonksiyonudur. Daha genel olarak m -boyutlu $\mathbb{R}^m$ Öklid uzayı üzerinde, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ve $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ noktaları arasındaki bildiğimiz

$$\left(\sum_{i=1}^m (\alpha_i - \beta_i)^2 \right)^{1/2}$$

uzaklık tanımı gene bir metrik olur.

(X, d) çiftine **metrik uzay** denir. Verilen bir $r > 0$ sayısı ve $x \in X$ için

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

ile tanımlanan kümeye **merkezi** x , **yarıçapı** r olan **açık yuvar** denir. Eğer yukarıda tanımladığımız $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında çalışıyorsak, yuvar yerine **açık küre** demeyi tercih edebiliriz.

Şimdi sıra, verilen metrik aracılığıyla metrik topolojisini tanımlamaya geldi. X uzayının bir U altkümesi içindeki her $x \in U$ için $B(x, r) \subseteq U$ sağlayan bir $r > 0$ sayısı bulunursa, bu U kümesi τ_d kümesine ait olsun. τ_d kümesi X üzerinde bir topoloji tanımlar ve böylece metrikten (X, τ_d) topolojik uzayı elde edilir. Şimdi metrik uzaylarda hemen her topolojik kavramın diziler aracılığıyla nasıl belirlendiğini görelim.

Metrik uzayın bir altkümesinin kapalı olması için bu kümeden seçilen her yakınsak dizinin limitinin de aynı kümede olması yeterli ve gereklidir. X ve Y metrik uzayları arasında tanımlanmış $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun bir $x \in X$ noktasında sürekli olması ile limiti x olan her $(x_n)_n$ dizisi için $\lim f(x_n) = f(x)$ olması koşulları eşdeğerdir. Tıkız bir metrik uzaydaki her dizinin bir alt dizisi yakınsaktır. Bu koşul aynı zamanda bir metrik uzayın tıkız olması için yeterlidir.

Bir metrik uzayda bir yuvarın altkümelerine **sınırlı** denir. Bir metrik uzayda tıkHz bir altkümenin kapalı ve sınırlı olduğu kolayca ispatlanabilir. Ama bunun tersi genellikle doğru değildir. Öte yandan ünlü Heine-Borel teoremine göre $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının tıkHz altkümeleri aynen kapalı ve sınırlı altkümeleridir. Örneğin $[a, b]$ aralıkları $\mathbb{R}$ 'de tıkHzdır. TıkHz bir altkümenin sürekli bir fonksiyon altında görüntüsü tıkHz olduğundan, eğer $f : X \rightarrow Y$ süreklirse ve Y bir metrik uzaysa, X 'in tıkHz altkümelerinin görüntüleri kapalı ve sınırlıdır.

(X, d) metrik uzayında bir $(x_n)_n$ dizisi verilsin. Bir $\epsilon > 0$ için n_0 'dan büyük her n ve m için

$$d(x_n, x_m) < \epsilon$$

eşitsizliğinin geçerli olmasını sağlayan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulabilirsek, $(x_n)_n$ dizisine **Cauchy dizisi** denir. Yakınsak bir dizi mutlaka bir Cauchy dizisidir. Bunun tersi de doğrudur, yani her Cauchy dizisi yakınsaksa, (X, d) metrik uzayına **tam metrik uzay** denir. Tam metrik uzayın kapalı bir altkümesi de tamdır. TıkHz metrik uzay keza tam bir metrik uzaydır.

E ile gerçel veya karmaşık sayılar cismi K üzerinde tanımlı bir vektör uzayını gösterelim. E üzerinde tanımlı, $x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}_+$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa **norm** denir:

$$N1. \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$N2. \text{ Her } x \in E \text{ ve } \alpha \in K \text{ için } \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \text{ olur.}$$

$$N3. \text{ Her } x, y \in E \text{ için } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ eşitsizliği geçerlidir.}$$

N2 ve N3 koşullarını kullanarak, tümevarım yöntemiyle **genel üçgen eşitsizliği** adını taşıyan

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|x_i\|$$

eşitsizlik kanıtlanır.

K üzerinde mutlak değerin kendisi bir norm tanımlar. Öklid uzayı $\mathbb{R}^m$ 'de ise vektör uzunluğu olan

$$\|(\alpha_1, \dots, \alpha_m)\| = \left(\sum_{i=1}^m (\alpha_i)^2 \right)^{1/2}$$

gene bir norm verir. E üzerinde tanımlı bir norm aracılığıyla tanımlanan

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

bir uzaklık fonksiyonudur. $(E, \|\cdot\|)$ ikilisine **normlu uzay** adı verilir. Böylece her normlu uzay mutlaka bir metrik uzaydır.

Normlu uzaylarda yakınsak dizilere kısaca bir göz atalım. Normlu uzayda $\lim x_n = x$ olması için $\lim(x_n - x) = 0$ koşulu yeterli ve gereklidir. Eğer

$\lim x_n = x$ ise, her $\alpha \in K$ için $\lim(\alpha x_n) = \alpha x$ sağlanır. Ayrıca $\lim x_n = x$ ve $\lim y_n = y$ ise N3'ü kullanarak kolayca $\lim(x_n + y_n) = x + y$ elde ederiz.

Üçgen eşitsizliği denilen N3 bize

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

eşitsizliğini verir. Burada x ve y 'nin yerlerini değiştirirsek sonunda

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

eşitsizliğine varırız. Şimdi $\lim x_n = x$ olsun. Öyleyse

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|$$

eşitsizliğinden $\lim \|x_n\| = \|x\|$, yani $\lim \|x_n\| = \|\lim x_n\|$ elde ederiz. Buna “normun sürekliliği” diyelim.

Bir metrik uzayı olarak tam olan normlu uzaya **Banach uzayı** denir.

Normlu uzayda serilerden söz edebiliriz. E uzayında bir $(x_n)_n$ dizisi verildiğinde

$$s_k = \sum_{n=1}^k x_n$$

olarak tanımlanan **kısmi toplamı** ele alalım. Eğer bu $(s_k)_k$ kısmi toplamlar dizisi yakınsaksa

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

serisi **yakınsaktır** denir ve $(s_k)_k$ dizisinin limiti bu sonsuz toplamın değeri olur.

Teorem 5.1. *Bir Banach uzayından seçilen bir $(x_n)_n$ dizisinin normlarının serisi yakınsaksa $\sum x_n$ serisi de yakınsaktır ve*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt: Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$s_k = \sum_{n=1}^k x_n$$

ise, $m \geq k$ olduğunda

$$s_m - s_k = \sum_{n=k+1}^m x_n$$

ve buradan da genel üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\|s_m - s_k\| \leq \sum_{n=k+1}^m \|x_n\|$$

elde ederiz. Öte yandan gerçel sayılar serisi $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ yakınsak. Öyleyse bir $\epsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulabiliriz ki her $m \geq k > n_0$ için

$$\|s_m - s_k\| \leq \sum_{n=k+1}^m \|x_n\| < \epsilon$$

sağlanır. Böylece $(s_k)_k$ kısmi toplamlar dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gördük. Uzayımız tam olduğu için bu dizi yakınsaktır. Limitini s ile gösterirsek ve yukardaki eşitsizliğin m sonsuza giderken limitini alırsak, normun sürekliliğinden ve tanımdan

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

elde ederiz. Öte yandan $\lim_{m \rightarrow \infty} \|s_m\| = \|s\|$. Demek ki

$$\|s\| = \lim \|s_m\| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$$

olur. □

Verilen bir S kümesi üzerinde tanımlı, gerçel değerler alan ve sınırlı olan fonksiyonların kümesini $B(S)$ ile gösterelim. f ve g fonksiyonlarının $f + g$ toplamını her zaman olduğu gibi

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s), \quad (s \in S)$$

şeklinde tanımlarsak ve gene

$$(\alpha f)(s) = \alpha f(s), \quad (\alpha \in \mathbb{R}, s \in S)$$

tanımını kullanırsak, bu tanımlarla $B(S)$ kümesinin $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olduğunu hemen görebiliriz. Bu uzay üzerinde

$$\|f\| = \sup\{|f(s)| : s \in S\}$$

ile bir norm tanımlarız. Burada kısacası $\sup$ ile ifade ettiğimiz şey üstten sınırlı bir gerçel sayılar kümesinin en küçük üstsınıridir. Bu tanımın bir norm verdiğini kolayca görebiliriz. Bu norma **düzgün yakınsaklık normu** veya **sup normu** denir. Gerçekten de bu norma göre $\lim f_n = f$ ile $(f_n)_n$ dizisinin

f fonksiyonuna S kümesi üzerinde düzgün yakınsadığını söylemek aynı şey. Ayrıca $\lim f_n = f$ ise

$$|f_n(s) - f(s)| \leq \|f_n - f\|$$

eşitsizliğinden her $s \in S$ için $\lim f_n(s) = f(s)$ olduğunu hemen görürüz. Bunun tersinin doğru olmadığını bir örnekle gösterelim: S olarak $(0, 1)$ aralığını ve

$$f_n(s) = \frac{1}{ns + 1}$$

formülüyle tanımlanan $f_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları ele alalım. Her $0 < s < 1$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s) = 0$ ama öte yandan

$$\frac{1}{2} = \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \|f_n\|.$$

Dolayısıyla $(f_n)_n$ dizisi $B((0, 1))$ normlu uzayında yakınsak olamaz.

Şimdi de düzgün yakınsaklık normu altında sınırlı fonksiyonlar uzayının tam olduğunu kanıtlayacağız.

Teorem 5.2. $B(S)$ bir Banach uzayıdır.

Kanıt: $B(S)$ normlu uzayından bir $(f_n)_n$ Cauchy dizisi alalım. Önce

$$|f_n(s) - f_m(s)| \leq \|f_n - f_m\|$$

eşitsizliğinden her $s \in S$ için $(f_n(s))_n$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu görelim. Gerçek sayıların tam olduğunu biliyoruz. Demek ki her $s \in S$ için $(f_n(s))_n$ yakınsak bir dizisidir. Bu dizinin limitini $f(s)$ ile göstererek bir $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlamış oluruz. Kanıtımızı bitirmek için önce bu fonksiyonun sınırlı olduğunu, sonra da sup normu altında $(f_n)_n$ dizisinin f 'ye yakınsadığını göstereceğiz.

Bir $\epsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ seçelim ki her $m, n \geq n_0$ için

$$\|f_n - f_m\| < \epsilon$$

sağlansın. İlk $m = n_0$ alalım ve $|f_n(s) - f_{n_0}(s)| < \epsilon$ eşitsizliği kullanarak her $s \in S$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(s) - f_{n_0}(s)| \leq \epsilon$$

sonucuna varalım. Buradaki limit ise $|f(s) - f_{n_0}(s)|$ sayısına eşit. Böylece

$$|f(s)| \leq |f(s) - f_{n_0}(s)| + |f_{n_0}(s)| \leq \epsilon + \|f_{n_0}\|$$

sonucuna varırız. Demek ki f sınırlıdır, yani $B(S)$ uzayındadır. Hemen hemen aynı yoldan giderek her $n > n_0$ için

$$|f_n(s) - f(s)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(s) - f_m(s)| \leq \epsilon$$

elde ederiz. Dolayısıyla supremum olarak her $n > n_0$ için $\|f_n - f\| \leq \epsilon$ sonucuna varırız. $\square$

Özel olarak, S kümesi üzerinde bir topoloji olduğu hale bakalım. Bu durumda sürekliliği ele alabiliriz. $B(S)$ uzayında sup normu altında yakınsayan $(f_n)_n$ dizisinin her terimi belirli bir $s_0 \in S$ noktasında sürekli olsun. Bu dizinin limiti $f \in B(S)$ ise, herhangi bir $s \in S$ için

$$f(s) - f(s_0) = (f(s) - f_n(s)) + (f_n(s) - f_n(s_0)) + (f_n(s_0) - f(s_0))$$

yazalım. Bir $\epsilon > 0$ verildiğinde $\|f_n - f\| < \epsilon/3$ eşitsizliğini sağlayan bir n seçelim. O takdirde

$$|f(s) - f(s_0)| < \frac{2}{3} \epsilon + |f_n(s) - f_n(s_0)|$$

sonucuna varırız. f_n fonksiyonunun s_0 noktasında sürekli olduğunu kullanarak s_0 'ın öyle bir U komşuluğunu bulabiliriz ki her $s \in U$ için

$$|f_n(s) - f_n(s_0)| < \epsilon/3$$

sağlansın. Böylece her $s \in U$ için

$$|f(s) - f(s_0)| < \epsilon$$

eşitsizliğinin geçerliliğini gösterir. Kanıtladığımızı şöyle ifade edelim.

Teorem 5.3. *S topolojik bir uzay ve $B(S)$ metrik uzayının $(f_n)_n$ dizisi sup normu altında yakınsak olsun. Bir $s_0 \in S$ noktasında her $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise, dizimizin limiti olan $f = \lim f_n$ fonksiyonu da s_0 noktasında süreklidir.* $\square$

Tıkız bir S topolojik uzayı üzerinde tanımlı bir sürekli $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu mutlaka sınırlıdır. Bu fonksiyonların kümesini $C(S)$ ile gösterirsek, $C(S)$ sınırlı fonksiyonlar uzayı $B(S)$ 'nin bir altuzayıdır. Teorem 5.3 ise $C(S)$ uzayının $B(S)$ içinde kapalı olduğunu söylüyor. Dolayısıyla Teorem 5.2 bize $C(S)$ uzayının bir Banach uzayı olduğunu verir.

Bu arada $\mathbb{R}^m$ içindeki her kapalı ve sınırlı kümenin tıkız olduğunu hatırlayalım. $\mathbb{R}$ 'de sınırlı ve kapalı bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonları ele alalım ve düzgün yakınsaklıkla türev ve integral alma işlemleri arasındaki ilişkileri inceleyelim.

$C[a, b]$ uzayından seçilen bir $(f_n)_n$ dizisi alalım ve $f = \lim f_n$ olsun. Eğer $x \in [a, b]$ için

$$g_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$$

olarak tanımlanırsa, $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ süreklidir ve $\|g_n\| \leq (b - a)\|f_n\|$ eşitsizliği sağlanır. Aynı şekilde, $x \in [a, b]$ için,

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

olarak tanımlanan fonksiyonun sağladığı

$$\|g_n - g\| \leq \sup \left\{ \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt : a \leq x \leq b \right\} \leq (b - a) \|f_n - f\|$$

eşitsizliğinden, şimdi vereceğimiz sonucu kolayca kanıtlarız.

Teorem 5.4. $C[a, b]$ uzayında sup normu altında $\lim f_n = f$ ise,

$$g_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt \text{ ve } g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

olsun. Bu durumda $(g_n)_n$ dizisi g fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsar, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n(t) dt = \int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt$$

olur ve yakınsaklık düzgündür. $\square$

Bu sonuçta düzgün yakınsaklık koşulundan vazgeçemeyiz. Örnek olarak, $0 \leq t \leq 1$ için

$$f_n(t) = n^2 t(1 - t)^n$$

formülüyle tanımlanan sürekli fonksiyonlara bakalım. Kolaylıkla gösterilebileceği üzere her $t \in [0, 1]$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$ olur ama integral alırsak

$$\int_0^1 f_n(t) dt = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$$

elde ederiz. Bu dizinin limiti ise 1'e eşittir! Öte yandan $f_n(t)$ 'nin tanımında $t = 1/n$ alırsak

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > n$$

buluruz, dolayısıyla $(\|f_n\|)_n$ dizisi üstten sınırlı bile değil, düzgün yakınsaklık söz konusu olamaz.

Teorem 5.4'te verilen sonucu başka bir şekilde şöyle ifade edebiliriz: Eğer $(f_n)_n$ dizisi $C[a, b]$ uzayında yakınsaksa, limit ve integral alma işlemlerinin sırasını değiştirebiliriz. Kısacası bu halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n(t) dt = \int_a^x \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right) dt$$

eşitliği geçerlidir. İntegral alma yerine türev almaya bakarsak durumun çok farklı olduğunu bir örnekle görelim. Eğer $x \in [0, 1]$ için

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$

ise, $\|f_n\| \leq 1/\sqrt{n}$ eşitsizliğinden $(f_n)_n$ dizisinin $[0, 1]$ üzerinde 0'a düzgün yakınsadığını hemen görürüz. Oysa

$$f'_n(x) = \sqrt{n} \cos nx$$

ve $f'_n(0) = \sqrt{n}$. Demek ki $(f'_n)_n$ türevler dizisi 0 noktasında bile yakınsak değil! Ama fazladan bir varsayımla durumu kurtarabiliriz:

Teorem 5.5. *Her n için $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türevi olan bir fonksiyon olsun ve $(f'_n)_n$ dizisinin (a, b) üzerinde düzgün olarak bir $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna yakınsadığını varsayalım. Ayrıca (a, b) aralığındaki bir x_0 için $(f_n(x_0))_n$ dizisi de yakınsak olsun. Bu durumda $(f_n)_n$ dizisi (a, b) aralığında düzgün yakınsaktır ve $f = \lim f_n$ ise, f türevlenebilir ve $f' = g$ eşitliği sağlanır; bir başka deyişle*

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$$

olur.

Kanıt: Bir $\epsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ seçelim ki her $n \geq n_0$ ve (a, b) aralığındaki her t için

$$|f'_n(t) - g(t)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

sağlansın. Teorem 5.3'e göre $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon. İntegral alarak, eğer $n > n_0$ ise,

$$\begin{aligned} \left| f_n(x) - f_n(x_0) - \int_{x_0}^x g(t) dt \right| &= \left| \int_{x_0}^x (f'_n(t) - g(t)) dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f'_n(t) - g(t)| dt < \epsilon \end{aligned}$$

sonucuna varırız. Eğer $\lim f_n(x_0) = \xi$ ise, bu eşitsizlik bize, $(f_n)_n$ dizisinin, $x \in (a, b)$ için

$$f(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt + \xi$$

olarak tanımlanan f fonksiyonuna (a, b) aralığında düzgün yakınsadığını verir. Türev olarak $a < x < b$ için

$$f'(x) = g(x)$$

sonucuna ulaşırız. □

Diziler için elde ettiğimiz sonuçlardan yola çıkarak seriler için sonuçlara ulaşmak hiç de zor değil. Örnek olarak son kanıtladığımız teoreme bakalım. Ama önce bir tanım. Bir $\sum_n f_n$ serisinin bir f fonksiyonuna düzgün yakınsaması, kısmi toplamlar dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsadığı anlamına gelir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $h_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu türevi de sürekli olan bir fonksiyon olsun ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} h'_n$$

serisi (a, b) aralığında düzgün yakınsasın. Bir $a < x_0 < b$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x_0)$$

yakınsak bir seriye, $\sum h_n$ serisi de (a, b) aralığında düzgün yakınsar ve

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} h_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} h'_n$$

geçerlidir. Bu sonucu elde etmek için teoreminizi $f_n = \sum_{i=1}^n h_i$ kısmi toplamlar dizisine uyguluyoruz.

Bu bölümde son olarak **Weierstrass M-testi** adı verilen bir teoremi kanıtlayacağız. Aslında bu sonuç daha önce yaptıklarımızdan kolayca elde edilebilen bir yan ürün ama uygulamada son derece yararlı.

Teorem 5.6. Her $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve her $s \in S$ için $|f_n(s)| \leq M_n$ ve $\sum_n M_n < \infty$ sağlansın. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ serisi S üzerinde düzgün yakınsaktır. Ayrıca $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ bu serinin toplamı ise, $f \in B(S)$ ve

$$\|f\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt: Her f_n fonksiyonunun S üzerinde sınırlı olduğunu ve $\|f_n\| \leq M_n$ eşitsizliğinin sağlandığını hemen görürüz. Teorem 5.2'yi uygularsak istediğimiz sonuca ulaşırız. $\square$

Bu bölümü somut bir uygulamayla bitirelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} = \frac{x}{n(x+n)}$$

olarak tanımlanan fonksiyon $[0, 1]$ aralığında

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

eşitsizliğini sağlar. Böylece $\sum 1/n^2$ serisi yakınsak olduğu için Teorem 5.6'yı uygulayabiliriz. Öte yandan

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{n} - \log(n+1) + \log n$$

integralinden yola çıkarak

$$\sum_{n=1}^k \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} - \log(k+1)$$

eşitliğini elde ederiz. Sağdaki ilk terim harmonik serinin k 'ncı kısmı toplamı. Teorem 5.4 bize sol tarafın limitinin varlığını veriyor. Öyleyse sağ tarafın da limiti var. Euler-Mascheroni sabiti adı verilen bu limiti sayfa 40'ta

$$\gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^k \frac{1}{n} - \log(k+1) \right)$$

ile göstermiştik. Böylece Euler sabitinin varlığını ikinci kez kanıtlamış olduk.

NOTLAR

Topoloji alanının kurucularından olan Alman matematikçi **Felix Hausdorff** (1868-1942) kümeler kuramı ve ölçüm kuramına da önemli katkılar yapmıştır. 1891 yılında Leipzig Üniversitesi'nden doktorasını aldıktan sonra 1910 yılına kadar aynı üniversitede çalışmış, daha sonra Bonn Üniversitesi'nde profesör olmuştur. Naziler iktidara gelince Yahudi olmasına rağmen, dünyaca tanınmış bir matematikçi ve akademik çevrelerde saygın yeri olan yaşlıca bir profesör olarak Hausdorff kendisini güvende hissetmiştir. Ama 1935 yılında üniversiteden atılmış ve makalelerinin Alman dergilerinde yayımlanması yasaklanmıştır. Araştırmalarını Polonya dergilerinde yayımlamayı sürdürmüştür. Giderek Alman akademik çevrelerince yalnız bırakılmış; ABD'de iş aramış ama bulamamıştır. 1942 yılının Ocak ayında toplama kampına gönderileceğini haber alınca eşi ve baldızı ile birlikte intihar etmiştir.

Newton ve Leibniz tarafından temelleri atılan diferansiyel ve integral hesap matematikte yepyeni bir çığır açmıştır. Ancak sonsuz küçük değerler kullanılarak verilen kanıtlar her zaman kolay anlaşılmıyordu. Ayrıca limit, süreklilik, türev gibi temel kavramların standart tanımları da yoktu. 19'uncu yüzyılın ünlü matematikçilerinden **Augustin-Louis Cauchy** (1789-1857) bu yeni alanı sağlıklı tanımlara kavuşturma, teoremlerin sağlam kanıtlarını bulma projesine başlamıştır. Çağdaşları üzerinde derin izler bırakan Cauchy, matematiğin ve matematiksel fiziğin hemen her konusunda özgün ve kalıcı yeni sonuçlar elde etmiştir. 800 kadar araştırma makalesi ve beş ders kitabı yazmıştır.

Cauchy'nin babası Paris polisinde önemli bir görevde bulunmaktadır. Fransız ihtilali ile birlikte aile Paris'ten kaçmış ve ancak 1794 yılında geri dönebilmıştır. Napolyon'un iktidarında baba Cauchy, Fransız senatosunun genel sekreterlik görevine getirilmiştir. Genç Cauchy'nin eğitiminde babasının dostu

olan Lagrange'in önerileri önemli rol oynamıştır. Cauchy önce Ecole Polytechnique'i bitirmiş, sonra da Ecole des Ponts et Chaussées ("Köprüler ve Yollar Okulu") isimli okuldan 1810 yılında inşaat mühendisi olarak en iyi dereceyle mezun olmuştur. Napolyon'un isteği üzerine Cherbourg'da kurulmakta olan deniz üssünün inşaatında üç yıl çalışan Cauchy, yoğun işleri arasında iki matematik makalesi yazmayı başarmıştır. Mühendisliğe olan ilgisi azalırken, matematiğin yalın güzelliği ona giderek daha çekici gelmeye başlamıştır. Paris'e dönmüş ve sağlık nedenleriyle üç yıl ücretli izin alarak matematik araştırmalarında çok verimli bir döneme girmiştir.

Hayatı boyunca Katolik Kilisesine sıkı sıkıya bağlı olan Cauchy, Fransız ihtilaliyle yıkılmış olan Bourbon hanedanı taraftarıdır. Napolyon'dan sonra bu hanedandan 18'inci Louis Fransa Kralı olunca, Fransız Akademisi'nin ünlü üyeleri Carnot ve Monge politik nedenlerle Akademi'den atılmış ve 27 yaşındaki Cauchy Akademi üyesi olmuştur. Akademi üyeliğini bu koşullarda kabul etmesi akademik çevrelerde hiç hoş karşılanmamıştır. Ama 1830'a kadar süren baskıcı Bourbon rejiminden Cauchy hiçbir rahatsızlık duymamıştır. Cauchy'nin en verimli olduğu bu yıllar 1830 devrimiyle birlikte son bulmuştur. İktidara gelen liberallere duyduğu derin nefret yüzünden Cauchy ailesini geride bırakarak İsviçre'ye geçmiştir. Yeni iktidara bağlılık yemini etmeyi reddettiği için Akademi üyeliği dışındaki tüm pozisyonları kaybetmiştir. Daha sonra İtalya'ya geçen Cauchy, 1833 yılında Prag'a gitmiş ve son Bourbon kralının oğlunun özel öğretmeni olmuştur. Bu dönemde hemen hemen hiç araştırma yapmamış ama Baron unvanını kazanmıştır. 1838'de Paris'e dönen Cauchy, yeni iktidara bağlılık yemini etmediği için ders verememektedir. 1848 yılı Avrupa'da devrimler yılıdır. Fransız kralı Louis-Phillippe de tahtını bırakıp İngiltere'ye kaçmıştır. Bağlılık yemini kaldırılmış ve Cauchy yeniden ders vermeye başlamıştır. 1852'de Fransa'da yeniden imparatorluk dönemi başlamış ve Napolyon Bonapart'ın yeğeni III. Napolyon olarak tahta çıkmıştır. Bağlılık yemini tekrar yürürlüğe girmiş ama bir bakan imparatoru ikna ederek, Cauchy'nin bu zorunluluktan muaf tutulmasını sağlamıştır. Analizi sağlam temellere kavuşturma projesini başlatan, matematiğin hemen her alanında kalıcı, etkili ve özgün yeni teoremler kanıtlayan Cauchy, böylece hayatının sonuna kadar profesör olarak ders vermeyi sürdürebilmiştir.

Modern fonksiyonel analizin kurucusu sayılan Polonyalı **Stefan Banach** (1892-1945) o yıllarda Avusturya-Macaristan İmparatorluğu'nun sınırları içinde olan Krakov şehrinde doğmuştur. Babası olan Stefan Greczek annesinin soyadı olan Banach'ı oğlunun soyadı olarak kayıtlara geçirmiştir. Oysa annesi bebek daha dört günlük iken onları terk etmişti. Daha sonraki yıllarda tüm ısrarlarına rağmen Stefan Banach babasından annesinin kim olduğunu öğrenememiştir. Stefan Banach babaannesi tarafından büyütülmüştür. Bir aile dostu ona çocuk yaşta Fransızca öğretmiştir. Okulunda ise Latince, Yunanca gibi klasik dillerin yanı sıra tarih, coğrafya gibi beşeri bilimlere önem veriliyor,

matematik ise oldukça geri planda kalıyordu. Ama genç Stefan okul dışında kendi kendine sürekli matematik problemleri çözmektedir. Liseden sonra mühendis olmak için bir politeknik okuluna kayıt yaptıran Banach bir yandan da çalışmak, hayatını kazanmak zorunda kalmıştır. Bu nedenle dört yılda ancak üçüncü sınıfa geçebilmiş ve Birinci Dünya Harbi başladığında eğitimini yarıda kesmek zorunda kalmıştır. Gözleri zayıf ve solak olduğu için askere alınmamış; özel dersler vererek hayatını kazandığı bu yıllarda ünlü matematikçi Hugo Steinhaus ile tesadüfen tanışmıştır. Steinhaus kendi kendine matematik öğrenmiş olan genç Banach'a hayran olmuştur. İkisi arasında yıllarca süren bir dostluk başlamıştır. Steinhaus genç Banach'ı akademik çevreye sokmuş, herhangi bir üniversiteden mezun olmadan doktora almasını sağlamıştır. Doktora tezi akademik çevrelerde iyi karşılanmış ve Banach 1922 yılında Lwow Politeknik'te profesör olmuştur. İki yıl sonra Polonya Akademisi'ne seçilmiştir. Banach'ın etrafında toplanan matematikçiler "Lwow okulu" olarak anılır. 1929 yılında bu grup bir dergi çıkarmaya başlamıştır. "Studia Mathematica" isimli bu dergi fonksiyonel analizin gelişmesine çok katkı yapmıştır. 1932 yılında Fransızca'ya çevrilen "Théorie des opérateurs linéaires" monografı Banach'ın ününün dünyaya yayılmasını sağlamıştır.

İkinci Dünya Savaşı'nın başında Polonya, Almanya ve Sovyetler Birliği tarafından paylaşılmış ve Lwow şehri Sovyet kontrolüne geçmiştir. Banach'ın Sovyet matematikçileriyle arası iyiydi. Almanya, Sovyetler Birliği'ne saldırıncaya kadar çalışmalarını sürdürebilmiştir. 1941 yılında Almanlarca işgal edilen Lwow şehrinde üniversiteler kapatılmış, öğretim üyeleri işsiz kalmıştır. Lwow'daki Tifus Araştırma Enstitüsü'nün başında bulunan Alman Profesör Weigl, Banach ve arkadaşlarına bit besleyicisi olarak iş vermiştir. Böylece onları Gestapo'dan korumuştur. 1944'te Kızıl Ordu Lwow şehrini Almanlardan geri alınca Banach üniversiteye geri dönebilmiştir. Ama kısa bir süre sonra akciğer kanserinden ölmüştür.

Kaynaklar

- [1] Norman B. Haaser and Joseph A. Sullivan, **Real Analysis**, Dover Publications 1991.
- [2] Timur Karaçay, **Genel Topoloji**, Ankara 2009.
- [3] Ali Nesin, **Analiz IV**, Nesin Yayıncılık, Nesin Matematik Köyü Yayınları 2012.
- [4] Erdoğan S. Şuhubi: **Fonksiyonel Analiz**, İTÜ Vakfı 2001.
- [5] Tosun Terzioğlu, **An Introduction to Real Analysis**, Matematik Vakfı 2000.
- [6] Tosun Terzioğlu, **Fonksiyonel Analizin Yöntemleri**, Matematik Vakfı 1998.

6. Bir Garip Fonksiyon

Bazan derste sürekliliği anlatırken kalemimizi kâğıttan kaldırmadan grafiğini çizebildiğimiz fonksiyona sürekli deriz. Tabii bu ifade matematiksel bir tanım olmaktan uzak ama gene de sürekliliği görsel ve sezgisel olarak anlamamıza yardımcı olur. Gerçekten de gerçel sayılar üzerinde tanımlı ve gerçel değerler alan sürekli bir fonksiyonun grafiği yükselir, alçalır, iner, çıkar ama hiç kesintiye uğramaz. Böyle bir grafik üzerinde yürüyen bir karınca kimi zaman yokuş çıkar, belki bir doruğa varır ve inmeye başlar. Bir vadinin dibine gelir, belki biraz düz yürür ve gene yokuş yukarı tırmanır. Karıncanın yürüdüğü bu yol hiçbir yerde kesilmez; karıncamız bir yerden başka bir yere sıçramadan yoluna devam eder.

Örnek olarak $f(x) = -x^2$ fonksiyonuna bakalım. Bu fonksiyonun grafiği üzerinde $(-2, -4)$ noktasından sağa doğru yürümeye başlayan karıncamız eğimi giderek azalan bir yokuşu tırmanmaktadır. $(-1, -1)$ noktasına geldiğinde eğim azalmıştır ama yokuş sürmektedir. $(0, 0)$ noktasında ise yokuş biter. Karıncamız artık bir doruktur. Belki bir an soluklanıp yoluna devam ederse artık inişe geçmiştir. Yolun eğimini ise fonksiyonumuzun türevine bakarak belirleyebiliriz. $(-2, -4)$ noktasında eğim 4, $(-1, -1)$ noktasında 2, $(1, -1)$ noktasında ise -2 olur. Çünkü $f(x) = -x^2$ fonksiyonun türevi $f'(x) = -2x$. Dorukta, yani $(0, 0)$ noktasında ise eğim 0'a eşit.

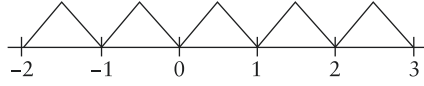
Bir de

$$t(x) = \inf\{|n - x| : n \in \mathbb{Z}\}$$

olarak tanımlanan **testere fonksiyonunu** inceleyelim. Burada kullandığımız $\inf$ (infimum) ile alttan sınırlı bir gerçel sayılar kümesinin en büyük altsınırını gösteriyoruz. Her $x \in \mathbb{R}$ için $t(x)$ bu x noktasının en yakın tamsayıya olan uzaklığından başka bir şey değil. Tanımdan her $x \in \mathbb{R}$ için $t(x+1) = t(x)$ olduğunu hemen görebiliriz. Dolayısıyla testere fonksiyonumuz periyodik bir fonksiyon. $[0, 1]$ aralığında ise

$$t(x) = \begin{cases} x & \text{eğer } 0 \leq x \leq 1/2 \text{ ise} \\ 1 - x & \text{eğer } 1/2 \leq x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. Bunu gördükten sonra, testere fonksiyonunun grafiğini kolayca çizebiliriz.



Testere Fonksiyonu

Karımız bu sonsuz uzunluktaki testere üzerinde gene sıçramak zorunda kalmadan yürüyebilir. $(0, 0)$ noktasında sağa doğru yürürken eğimi hep aynı olan yokuşu tırmanacaktır. Ama $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ noktasına geldiğinde durup soluklanacak bir hali yoktur, çünkü eğim birden değişir. Bunu şöyle irdeleyebiliriz:

Her $0 < x < \frac{1}{2}$ için $t'(x) = 1$ ve $\frac{1}{2} < x < 1$ için de $t'(x) = -1$. Ama $0 < x < \frac{1}{2}$ ise

$$\frac{f(x) - f(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = \frac{x - \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} = 1$$

ve $\frac{1}{2} < x < 1$ için de

$$\frac{f(x) - f(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = \frac{1 - x - \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} = -1.$$

Böylece $x = 1/2$ noktasında testere fonksiyonunun türevi olamayacağını gördük. Aynı şekilde her $n \in \mathbb{Z}$ için n ve $n + 1/2$ noktalarında da türev yok ama bu noktalar gerçel sayılar kümesi içinde birbirinden ayrık noktalar.

18'inci yüzyılda matematikçiler sürekli fonksiyonların, belki bazı ayrık noktalar dışında, her yerde türevi olduğunu sanıyorlardı. Ancak 1872 yılında **Weierstrass** hiçbir noktada türevi olmayan ama her yerde sürekli olan bir fonksiyon buldu. Biz de bu bölümde testere fonksiyonunu kullanarak her yerde sürekli ama hiçbir yerde türevi olmayan bir fonksiyon inşa edeceğiz. Bizim fonksiyonumuz **van der Waerden** tarafından Weierstrass'tan çok sonra bulunmuş. Kanıtı ise şaşırtıcı şekilde yalın ve güzel!

Şimdi her $x \in \mathbb{R}$ için

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t(10^n x)}{10^n}$$

olsun. Testere fonksiyonunun tanımından elde ettiğimiz eşitsizlik bize

$$0 \leq \frac{t(10^n x)}{10^n} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$$

verir. Dolayısıyla, Weierstrass M -testini (Teorem 5.6) kullanırsak, w fonksiyonunu tanımlayan serinin $\mathbb{R}$ kümesinde düzgün yakınsadığını ve bundan dolayı $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun her noktada sürekli olduğunu görürüz. Ayrıca geometrik serinin toplamı için bildiğimiz formül bize

$$0 \leq w(x) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{9}$$

eşitsizliğini verir. Böylece w fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli ve sınırlı olduğunu gördük.

Şimdi $[0, 1)$ aralığında herhangi bir x noktası alalım ve fonksiyonumuzun bu noktada türevi olduğunu kabul edelim. O zaman limiti 0 olan herhangi bir $(h_m)_m$ dizisi için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{w(x + h_m) - w(x)}{h_m}$$

limiti mutlaka olmalı. Bundan sonra 0'a yakınsayan öyle bir $(h_m)_m$ dizisi bulacağız ki, yukarıdaki limit olmayacak. Bu çelişkiden de w fonksiyonunun **hiçbir yerde türevi olmadığını** görmüş olacağız.

Ama isterseniz w fonksiyonunu tanımlayan serideki ilk fonksiyonları biraz daha görsel olarak tanımaya çalışalım. t fonksiyonunu tanımiştık. Bu fonksiyonun grafiği her bir dişi $1/2$ yüksekliğinde olan bir testere ve testeremizin dişleri $[0, 3]$ aralığında, $1/2, 3/2, 5/2$ noktalarında.

Bir sonraki fonksiyonumuz

$$x \mapsto \frac{t(10x)}{10}$$

ise gene bir testere. Bu sefer testeremizin her dişi daha küçük, yani yüksekliği $1/20$ ama dişler çok daha sık. Gene $[0, 3]$ aralığını alırsak, $1/20, 3/20, 5/20, \dots$ gibi bütün noktalarda bir diş var. Yani $[0, 3]$ aralığında 3 yerine 30 tane diş olacak. Tabii $x \mapsto t(100x)/10^2$ fonksiyonunun grafiğine bakarsak, $[0, 3]$ aralığında 300 diş olduğunu ama her dişin de $1/200$ yüksekliğinde olduğunu görürüz. n sayısı büyüdükçe,

$$x \mapsto \frac{t(10^n x)}{10^n}$$

fonksiyonu, dişleri daha küçük ama diş aralıkları giderek sıklaşan bir testere oluyor!

Şimdi herhangi bir $0 \leq x < 1$ sayısının bildiğimiz ondalık açılımına

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

bakalım. Burada her $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$ ve her zaman ondalık açılımda kabul ettiğimiz gibi, bu açılımın 9 sayısının ardarda tekrarlarıyla bitmediğini varsayarsak, genellikle hiçbir şey kaybetmeyiz.

Her $n = 0, 1, 2, \dots$ için $t(10^n x)$ sayısını bulalım. Şunu görmemiz zor olmasa gerek:

$$t(10^n x) = \begin{cases} 0, a_{n+1} a_{n+2} \dots & \text{eğer } a_{n+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \text{ ise} \\ 1 - 0, a_{n+1} a_{n+2} \dots & \text{eğer } a_{n+1} \in \{5, 6, 7, 8, 9\} \text{ ise} \end{cases}$$

Şimdi her $m \in \mathbb{N}$ için h_m sayısını

$$h_m = \begin{cases} -1/10^m & \text{eğer } a_m = 4 \text{ veya } 9 \text{ ise} \\ 1/10^m & \text{eğer } a_m \in \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\} \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Tabii $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m = 0$. Bir de

$$b_m = \begin{cases} a_m - 1 & \text{eğer } a_m = 4 \text{ veya } 9 \text{ ise} \\ a_m + 1 & \text{eğer } a_m \in \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\} \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanmışsa $x + h_m$ sayısının ondalık açılımı

$$x + h_m = 0, a_1 a_2 \dots a_{m-1} b_m a_{m+1} \dots$$

olur. Yani x ve $x + h_m$ açılımları arasında tek fark $1/10^m$ 'nin katsayısında. Diğerleri ise aynı. Şimdi $t(10^n x)$ sayısına bakalım. Her $n \geq m$ için

$$t(10^n(x + h_m)) = t(10^n x)$$

olduğunu görmek kolay, çünkü ondalık virgülünü n hane sağa kaydırarak ve t altında ilk m hane yok oldu. Dolayısıyla fonksiyonumuzun x ve $x + h_m$ noktalarında aldığı değerlerin farkı,

$$w(x + h_m) - w(x) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{t(10^n(x + h_m)) - t(10^n x)}{10^n},$$

sonlu bir toplam. $n = m - 1$ haline ileride özel bir ilgi göstermek üzere şimdilik unutup $0 \leq n < m - 1$ için $a_{n+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ise $t(10^n x) = 0, a_{n+1} \dots b_m \dots$ olduğunu görelim. Eğer $a_{n+1} \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ise

$$t(10^n x) = 1 - 0, a_{n+1} \dots a_m \dots$$

ve

$$t(10^n(x + h_m)) = 1 - 0, a_{n+1} \dots b_m \dots$$

olur.

Şimdi $n = m - 1$ haline bakalım. Eğer $a_m \in \{0, 1, 2, 3\}$ ise $b_m = a_m + 1 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ve eğer $a_m \in \{5, 6, 7, 8\}$ ise bu kez $b_m = a_m + 1$ ve $b_m \in \{6, 7, 8, 9\}$ olacak. a_{n+1} katsayısı $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesindeyse

$$t(10^n(x + h_m)) - t(10^n x) = \frac{b_m - a_m}{10^{m-n}}$$

eşitliğini görelim. Eğer $a_m = 4$ veya 9 ise $b_m - a_m = -1$ ve $h_m = -1/10^m$ ama bu katsayı 4 ve 9 'dan farklı ise, yani $a_m \in \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$ halinde, $b_m - a_m = 1$ ve $h_m = 1/10^m$. O halde $a_{n+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ise mutlaka

$$\frac{t(10^n(x + h_m)) - t(10^n x)}{10^n h_m} = 1$$

olacak.

Şimdi de $a_{n+1} \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ halini ele alalım. Bu halde

$$t(10^n(x + h_n)) = 1 - 0, a_{n+1} \dots b_m \dots$$

ve

$$t(10^n x) = 1 - 0, a_{n+1} \dots a_m \dots$$

Dolayısıyla

$$t(10^n(x + h_m)) - t(10^n x) = \frac{1}{10^{m-n}} (a_m - b_m).$$

$a_m = 4$ veya $a_m = 9$ için yukarıdaki fark 1 ve $h_m = -1/10^m$. Dolayısıyla

$$t(10^n(x + h_m)) - t(10^n x) = -10^n h_m.$$

Ama $a_m \in \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ için ise $a_m - b_m = -1$ ve $h_m = 1/10^m$. Demek ki her durumda

$$\frac{t(10^n(x + h_m)) - t(10^n x)}{10^n h_m} = -1.$$

Herhangi bir $m \in \mathbb{N}$ verilince

$$S_1^m = \{n : 0 \leq n \leq m-1 \text{ ve } a_{n+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$$

ve

$$S_2^m = \{n : 0 \leq n \leq m-1 \text{ ve } a_{n+1} \in \{5, 6, 7, 8, 9\}\}$$

olarak iki küme tanımlarsak, $S_1^m \cap S_2^m = \emptyset$ olduğundan, bu iki kümenin elemanlarının sayısının toplamı başladığımız m sayısına eşittir. Şimdi w fonksiyonunu tanımlayan terimlere bir bakalım. $n \in S_1^m$ ise

$$\frac{t(10^n(x + h_m)) - t(10^n x)}{10^n h_m} = 1$$

ve aksi halde, yani $n \in S_2^m$ ise

$$\frac{t(10^n(x + h_m)) - t(10^n x)}{10^n h_m} = -1$$

olduğunu artık biliyoruz. Demek ki

$$\frac{w(x + h_m) - w(x)}{h_m} = |S_1^m| - |S_2^m|.$$

Şimdi m bir çift sayı olsun. $|S_1^m| + |S_2^m| = m$ olduğu için ya hem $|S_1^m|$ ve $|S_2^m|$ çift sayıdır ya da her ikisi de tek sayı olur. Her iki halde de $|S_1^m| - |S_2^m|$ bir çift sayıdır. Burada sıfırın çift sayı olduğunu hatırlamakta yarar var. Öte yandan

m bir tek sayı ise, $|S_1^m|$ çift ve $|S_2^m|$ tek veya $|S_1^m|$ tek ve $|S_2^m|$ çift sayı olmak zorunda. Her iki halde de $|S_1^m| - |S_2^m|$ bir tek sayı. Eğer

$$d_m = \frac{w(x + h_m) - w(x)}{h_m}$$

ise d_{2i} her zaman bir çift tamsayı ve d_{2i+1} ise bir tek tamsayı. Yani

$$|d_{2i+1} - d_{2i}| \geq 1.$$

Böyle bir $(d_m)_m$ dizisi asla yakınsak olamaz! □

Bu garip w fonksiyonun grafiği üzerine karıncamızı koysak herhalde şaşkınlıktan nasıl yürüyeceğini bilemez, olduğu yerde donar kalırdı. Çünkü üzerinde yürüyeceği yolun eğimi her yerde tanımsız!

NOTLAR

Alman matematikçi **Karl Weierstrass** (1815-1897) daha lisedeyken matematiğe olağanüstü ilgi göstermesine rağmen, devlette iyi bir görev alabilmek için Bonn Üniversitesi'nde hukuk, ekonomi ve finans okumaya başlamıştır. Ama bu konular yerine matematikle ilgilendiği için öğrenimi yarıda kalmıştır. Daha sonra Münster Üniversitesi'nde matematik okumuş ve lisede matematik ve fizik dersleri vermeye başlamıştır. 1850'de uzun süren bir hastalık geçirmiş, ama bu dönemde önemli araştırma makalelerini ardarda yayımlamıştır. Berlin Teknik Üniversitesi'nde bir kürsüye atanan Weierstrass, hayatının son üç yılını tekerlekli sandalyede geçirmiştir.

"Modern analizin babası" diye anılan Weierstrass, Bolzano ve Cauchy tarafından başlatılan diferansiyel ve integral hesap teorisini sağlam temeller üzerine kurma projesini tamamlayan matematikçidir.

Cauchy sürekli fonksiyonların limitinin de sürekli olduğunu sanıyordu. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } 0 \leq x \leq 2 - \frac{1}{n} \text{ ise} \\ nx + (1 - 2n) & \text{eğer } 2 - \frac{1}{n} < x < 2 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } 2 \leq x \leq 3 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $[0, 3]$ aralığında süreklidir. Aslında yaptığımız şey $(2 - 1/n, 0)$ noktasından $(2, 1)$ noktasına bir doğru çekmek. Tabii n sayısı büyüdükçe $2 - 1/n$ sayısı 2'ye giderek yaklaşır ve böylece

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } 0 \leq x \leq 2 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } 2 \leq x \leq 3 \text{ ise} \end{cases}$$

elde edilir. Yani limit fonksiyonu $x = 2$ noktasında sürekli değil. Cauchy yanılmıştı!

Sürekliliği ϵ - δ yöntemiyle tanımlayan Weierstrass, düzgün yakınsaklık ile noktasal yakınsaklık arasındaki önemli farkı görmüş ve böylece Cauchy'nin yanlışını düzeltmeyi başarmıştır (Teorem 5.3). Ayrıca Bolzano-Weierstrass ve Heine-Borel teoremleri gibi analizin temel sonuçlarını kanıtlamıştır. Weierstrass varyasyonlar hesabını da âdeta yeniden inşa etmeyi başarmıştır. Öğrencileri arasında Sofia Kovalevskaya, G. Mittag-Leffler, H. Schwarz gibi ünlü matematikçiler bulunmaktadır.

1903-1996 yıllarında yaşayan Hollandalı matematikçi **Bartel Leendert van der Waerden**, Amsterdam Üniversitesi'ni bitirdikten sonra Göttingen Üniversitesi'nde doktora yapmıştır. Henüz 27 yaşındayken iki ciltlik Cebir kitabını yayımlamıştır. Cebir alanını bir bütün olarak ele alan bu kitapta Noether, Hilbert, Dedekind ve Artin gibi önemli matematikçilerin araştırmaları sistematik olarak yer alır. Leipzig Üniversitesi'nde profesör olan van der Waerden, İkinci Dünya Savaşı sırasında Almanya'da kalmayı tercih etmiş ve bu nedenle savaş sonrasında Hollanda'daki üniversitelerde iş bulmakta sıkıntı çekmiştir. 1951'de Zürich Üniversitesi'nde profesör olmuş ve kariyerini burada sürdürmüştür. Kendisinin 40 doktora öğrencisi olmuştur. Son yıllarında yazdığı matematik ve astronomi tarihi kitapları arasında yer alan bir tanesi **Bilimin Uyanışı** başlığıyla Orhan İçen tarafından Türkçeye çevrilmiş ve Türk Matematik Derneği tarafından yayımlanmıştır.

7. Kuvvet Serileri

Daha önce

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k a_nx^n$$

şeklinde yazılan serilerle karşılaşmıştık. Bu tür serilere **kuvvet serileri** denir. Kuvvet serilerinde değişken olarak yer alan x 'in kuvvetlerinin katsayıları olan a_n 'ler gerçel veya karmaşık sayılar olabilir. Ama biz bu bölümde hemen her zaman sadece gerçel sayılarla çalışacağız. Yukarıdaki seride x 'i bir gerçel sayı olarak aldığımızda elde edilen fonksiyon her x gerçel sayısında tanımlı olmayabilir ama en azından $x = 0$ noktasında tanımlı, çünkü $x = 0$ alırsak, serinin toplamı a_0 olur. Bu bölümdeki ilk amacımız bir kuvvet serisinin tanımlı olduğu kümeyi bulmak.

Daha fazla ilerlemeden önce **geometrik seri** adı verilen

$$1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

serisine bir bakalım. Bu serinin k 'ıncı kuvvete kadar olan

$$t_k(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k$$

kısmi toplamını x ile çarpıp kendisinden çıkarırsak

$$(1 - x)t_k(x) = 1 - x^{k+1}$$

elde ederiz. Buradan da $|x| < 1$ için limit alarak

$$(1 - x) \lim_{k \rightarrow \infty} t_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - x)t_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - x^{k+1}) = 1$$

buluruz. Öyleyse $|x| < 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{k \rightarrow \infty} t_k(x) = \frac{1}{1 - x}$$

sonucuna vardık. Her $x > 1$ için $\lim x^n = \infty$ ve $x \leq -1$ içinse $(x^n)_n$ dizisinin limiti yok. Eğer bir seri yakınsaksa serinin terimlerinin limiti 0 olmak zorundadır. Ama $x = 1$ için bu limit 1. Demek ki geometrik seri sadece $(-1, 1)$ aralığında yakınsak ve toplamı da $\frac{1}{1-x}$.

Genel olarak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisinin bir $\xi > 0$ değeri için yakınsadığını varsayalım. O zaman $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \xi^n = 0$ olur; özel olarak $(a_n \xi^n)_n$ dizisi sınırlıdır. Şimdi

$$M = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n \xi^n|$$

tanımını yapalım. $|x| < |\xi|$ ve $q = |x|/|\xi| < 1$ olsun. Bu tanımlardan $|a_n||x|^n \leq q^n M$ eşitsizliğini görürüz. Ama geometrik serinin her $q \in [0, 1)$ için yakınsadığını biliyoruz. Dolayısıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \leq \frac{M}{1-q} < \infty$$

olur ve karşılaştırma testi bize serinin **mutlak** yakınsak olduğunu veriyor.

Verilen kuvvet serisi için tanımlanan

$$P = \left\{ x : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ yakınsak} \right\}$$

kümesini ele alalım. 0'ın bu kümede olduğunu biliyoruz. Şimdi $r = \sup P$ olsun. Eğer P sınırlı değilse $r = +\infty$ yazacağız. Yukarıda kanıtladığımızı kullanırsak her $x \in (-r, r)$ için kuvvet serimizin mutlak yakınsak olduğunu görürüz. r 'nin tanımı gereği, eğer $|x| > r$ ise seri iraksaktır. Bu şekilde tanımladığımız r sayısına serinin **yakınsaklık yarıçapı** denir. Yakınsaklık yarıçapının sonsuz olması halinde ise serimiz her $x \in \mathbb{R}$ için mutlak yakınsaktır. Uç noktalarında, yani $x = \pm r$ 'de ise ne olduğunu genelde bilmiyoruz.

Yakınsaklık yarıçapını serinin katsayıları cinsinden hesaplamak için serimizin katsayılarından oluşan $(|a_n|^{1/n})_{n>0}$ dizisine bakılır. Bu dizi sınırlı değilse yakınsaklık yarıçapı 0'dır. Aslında yakınsaklık yarıçapı

$$\frac{1}{r} = \limsup |a_n|^{1/n}$$

formülüyle elde edilir¹. Eğer $\limsup |a_n|^{1/n} = 0$ ise $r = \infty$ olur ve eğer $\limsup |a_n|^{1/n} = \infty$ ise $r = 0$ olur. Demek ki $1/\infty = 0$ ve $1/0 = \infty$ anlaşmalarını yaparsak, yukardaki formül $\limsup |a_n|^{1/n} = 0$ ya da ∞ iken de geçerlidir.

¹Bir $(b_n)_n$ dizisinin $\limsup$ 'ü şöyle tanımlanmıştır: $\limsup b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{b_k : k \geq n\}$. Bu bir gerçel sayı olabileceği gibi ∞ de olabilir. Eğer $\limsup b_n = r$ ise her $\epsilon > 0$ için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq n_0$ için $x_n < r + \epsilon$ olur. (Burada $\infty + \epsilon = \infty$ anlaşması yapıyoruz.) Bu son önerme $\limsup$ kavramının ikinci bir tanımı olarak algılanabilir.

Tabii $(|a_n|^{1/n})_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin limiti varsa

$$\frac{1}{r} = \limsup |a_n|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$$

olur. Yakınsaklık yarıçapını hesaplamak için yararlı bir başka sonuç da eğer $(|a_{n+1}|/|a_n|)_n$ dizisinin limiti varsa gene

$$\frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

olmasıdır. Bu sonuçları kanıtsız olarak veriyoruz.

Geometrik serinin yakınsaklık yarıçapının 1 olduğunu ve bu serinin $x = \pm 1$ olan uç noktalarında ıraksak olduğunu görmüştük. Herhangi bir $r > 0$ sayısı ile tanımlanan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} x^n$$

kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı bu r sayısı. Serimiz aynı geometrik seri gibi $\pm r$ noktalarında ıraksak. Öte yandan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^n} x^n$$

serisinin yakınsaklık yarıçapı sonsuz. Serimiz her gerçel sayı için mutlak yakınsak.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^n x^n$$

kuvvet serisi ise sadece $x = 0$ noktasında yakınsaktır.

Son olarak ilginç bir seriyi ele alalım. Sıfırdan büyük rasgele iki F_1 ve F_2 sayısı seçip, her $n \geq 3$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ olarak tanımlanan sayılara **Fibonacci sayıları** denir. Başlangıç değerleri olarak $F_1 = F_2 = 1$ seçersek $(F_n)_n$ dizisi

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

ama $F_1 = 5, F_2 = 7$ alırsak dizimiz

$$5, 7, 12, 19, 31, 50, 81, \dots$$

olur. Ancak F_1 ve F_2 sayılarını nasıl seçersek seçelim $\lim_{n \rightarrow \infty} (F_{n+1}/F_n)$ limiti vardır ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

olur. Aynı zamanda $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin büyük kökü olan a sayısına **altın oran** denir. Fibonacci sayıları ve altın oran müzikte, mimaride ve başka

sanat dallarında yaygın olarak kullanılır ve doğada da çok sık karşımıza çıkar. Tabii,

$$0 < F_2 < F_3 < F_4 < F_5 < \dots$$

olur, yani Fibonacci dizisi sınırsız olarak artar. $(a_n)_n$ dizisini

$$a_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$$

formülüyle tanımlarsak her $n \geq 2$ için

$$a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$$

elde ederiz. $(F_n)_n$ artan bir dizi olduğundan, her $a_n \geq 1$ ve dolayısıyla $1/a_n \leq 1$ olur. Yukarıdaki eşitsizlikten de her $n \geq 3$ için

$$1 < a_n < 2$$

eşitsizliğini elde ederiz. $(a_n)_n$ dizisinin sınırlı olduğunu gördük. Her yakınsak dizi sınırlı ama bunun tersi doğru değil. $(a_n)_n$ dizisinin limitinin olup olmadığını bilmiyoruz henüz. Gene de limiti olduğunu varsayalım ve bu limiti a ile gösterelim. Yukarıdaki eşitsizlik bu a sayısının $[1, 2]$ aralığında olması gerektiğini söylüyor. Öyleyse

$$\lim \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{a}$$

ve böylece

$$a = \lim a_n = \lim \left(1 + \frac{1}{a_{n-1}} \right) = 1 + \frac{1}{a}$$

yani

$$a = 1 + \frac{1}{a}$$

elde ederiz. Demek ki varsa bu limit

$$g(x) = x^2 - x - 1$$

fonksiyonunun köklerinden birisi olmalı.

$$x^2 - x - 1 = 0$$

denkleminin kökleri,

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ve } \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ama $1 \leq a \leq 2$. Öyleyse

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

olmalı.

Bu noktada ilginç bir şeye dikkat edelim. Fibonacci dizisinin $(F_n)_n$ ve dolayısıyla $(a_n)_n$ dizisi başlangıç değerleri olan F_1 ve F_2 'ye bağlıdır. Örnek olarak $F_1 = F_2 = 1$ alırsak $(a_n)_n$ dizisinin ilk birkaç terimi

$$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots$$

olur. Ama $F_1 = 2$ ve $F_2 = 5$ olsaydı bu terimler

$$\frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{12}{7}, \frac{19}{12}, \frac{31}{19}, \frac{50}{31}, \dots$$

olacaktı. Ama her iki halde de limit varsa bu limitin mutlaka altın oran olması gerektiğini bulduk. Bu gözlem $(a_n)_n$ dizisinin yakınsaklığından kuşku duymamıza neden olabilir ama yine de yolumuza devam edelim.

Alttan ve üstten sınırlı olan $(a_n)_n$ dizisinin arttığını veya azaldığını gösterebilsek, dizimizin yakınsadığını hemen kanıtlamış olurduk. Oysa yukarıdaki örnekte

$$a_2 < a_3 \text{ ama } a_4 < a_3, a_4 < a_5, a_6 < a_5, \dots$$

İkincisinde ise

$$a_2 > a_3 \text{ ama } a_3 < a_4, a_5 < a_4, a_5 < a_6, \dots$$

Yani her iki halde de diziler artan veya azalan değil. Ama esas diziden birer terim atlayarak elde edilen $(a_{2n})_n$ dizisi ya artan ya da azalan bir dizi sanki. Bir başka gözlem de şu: Eğer $a_i > a$ ise $a_{i+1} < a$ oluyor, çünkü

$$a_{i+1} = 1 + \frac{1}{a_i} < 1 + \frac{1}{a} = a.$$

Bunun tersi de doğrudur, yani $a_i > a$ ile $a_{i+1} < a$ eşdeğer koşullar. Demek ki bir i için $a_i > a$ ise hep

$$a_{i+2} > a, a_{i+4} > a, a_{i+6} > a, \dots$$

ve

$$a_{i+1} < a, a_{i+3} < a, a_{i+5} < a, \dots$$

olacak. Sanki $(a_n)_n$ dizisinin terimleri seksek oynuyor. Yani bir terim altın orandan büyükse sonraki terim altın orandan küçük, bir sonraki büyük ve bu hep böyle devam ediyor. Peki ya bir i için $a_i = a$ olsa ne olurdu? O zaman,

$$a_{i+1} = 1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{1}{a} = a$$

olurdu, yani bir sonraki terim de a 'ya eşit olurdu, demek ki a_i 'den sonra gelen tüm terimler a 'ya (altın orana) eşit olurdu. Sanki altın oran seksek oyunu-muzda bir kuyu, bir tuzak. Oraya bir düştük mü çıkamıyoruz. Tabii bu halde dizimiz hep sabit ve dolayısıyla da yakınsak.

Şimdi $(a_n)_n$ dizisinin terimlerine birer aralıkla bakalım. Daha önceki gözle-mimizi iki kez kullanırsak

$$a_{n+2} = 1 + \frac{1}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}} = \frac{2a_n + 1}{a_n + 1}$$

elde ederiz. Öyleyse $g(x) = x^2 - x - 1$ tanımıyla,

$$a_{n+2} - a_n = \frac{2a_n + 1}{a_n + 1} - a_n = \frac{-a_n^2 + a_n + 1}{a_n + 1} = -\frac{g(a_n)}{a_n + 1}$$

olur. Eğer $a_n > a$ ise $g(a_n) > 0$ ve dolayısıyla $a_{n+2} - a_n < 0$ olur. Demek ki a_3 sayısı altın orandan büyükse

$$a_3 > a_5 > a_7 > a_9 > \dots$$

ve tabii $a_4 < a$. O zaman da yukarıdaki sonuç bize

$$a_4 < a_6 < a_8 < a_{10} < \dots$$

verecek. Kısacası eğer $a_3 > a$ ise $(a_{2n})_n$ artan ve $(a_{2n+1})_n$ ise azalan bir dizi. Diğer hal ise $a_3 < a$ ve dolayısıyla $a < a_4$. O halde $(a_{2n})_n$ azalan ve $(a_{2n+1})_n$ ise artan bir dizi olacak.

Demek ki her durumda alttan ve üstten sınırlı olan $(a_{2n})_n$ ve $(a_{2n+1})_n$ dizileri yakınsak. Şimdi

$$\lim a_{2n} = b \text{ ve } \lim a_{2n+1} = c$$

yazalım ve

$$a_{2n+1} = 1 + \frac{1}{a_{2n}} \text{ ve } a_{2n} = 1 + \frac{1}{a_{2n-1}}$$

olduğunu bildiğimiz için n üzerinden limit alınarak

$$c = 1 + \frac{1}{b} \text{ ve } b = 1 + \frac{1}{c}$$

elde ederiz. Demek ki

$$cb = 1 + c \text{ ve } bc = 1 + b.$$

Buradan da $b = c$ çıkar. Artık $(a_n)_n$ dizisinin yakınsadığını göstermek çocuk oynacağı sayılır.

Katsayıları Fibonacci sayıları olan

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$$

kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \simeq 0,61804$$

olduğunu gördük. Şimdi de bu serinin toplamını hesaplayalım. Önce

$$f(x) = F_1 x + F_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} F_n x^n = F_1 x + F_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2} x^n$$

yazalım. Sağdaki birinci seriye bakalım.

$$\sum_{n=3}^{\infty} F_{n-1} x^n = x \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} = x(f(x) - F_1 x).$$

İkinci seriyi de benzer şekilde yazarak

$$\sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2} x^n = x^2 \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} = x^2 f(x)$$

elde ederiz. Öyleyse

$$f(x) = F_1 x + (F_2 - F_1)x^2 + x f(x) + x^2 f(x)$$

olduğunu bulduk. Bu da bize

$$f(x) = \frac{(F_2 - F_1)x^2 + F_1 x}{1 - x - x^2}$$

verir. Özel olarak başlangıç değerlerini $F_1 = F_2 = 1$ alırsak, bu halde toplam

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

olur. Tabii her zaman $|x| < (\sqrt{5} - 1)/2$ koşulu gerekli aksi halde $f(x)$ 'ten söz edemeyiz bile. $1 < k \in \mathbb{N}$ için son formülümüzden

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{k^n} = \frac{k}{k^2 - k - 1}$$

gibi ilginç bir sonuca varırız.

Örneklerimizin sonuna geldik. Şimdi buraya kadar yaptıklarımızı ve daha ötesini toparlayalım.

Teorem 7.1. *Yakınsaklık yarıçapı $0 < r \leq \infty$ olan*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

kuvvet serisinin toplamı $f(x)$ olsun. Seri $(-r, r)$ aralığında mutlak ve düzgün olarak yakınsaktır. Toplamı veren $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun tanımlandığı $(-r, r)$ aralığında türevi vardır ve türevi, yakınsaklık yarıçapı gene r olan

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

kuvvet serisidir. Toplam fonksiyonun integrali, yakınsaklık yarıçapı gene r olan

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

kuvvet serisidir.

Kanıt: Yakınsaklık yarıçaplarının aynı olduğunu görmek zor değil, bunun için,

$$\limsup |a_n|^{1/n} = \limsup ((n+1)|a_{n+1}|)^{1/n}$$

eşitliğini kanıtlamak gerekiyor. Okura bırakıyoruz. Kuvvet serisinin $(-r, r)$ aralığında düzgün yakınsadığını görelim. $x \in (-r, r)$ olsun. $q = |x|/r < 1$ olsun. q sayısından biraz daha büyük ama hâlâ daha 1'den küçük bir p sayısı alalım. Mesela $p = \frac{1+q}{2}$ olabilir.

$$\limsup |a_n x^n|^{1/n} = \frac{1}{r} |x| = q < p$$

eşitsizliğinden dolayı, öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulabiliriz ki her $n \geq n_0$ için $|a_n x^n| \leq q^n$ sağlanır. Buradan da Weierstrass M -testini kullanarak kuvvet serisinin $(-r, r)$ aralığında düzgün yakınsadığını görürüz. Öte yandan $x \mapsto x^n$ fonksiyonun türevi vardır. Dolayısıyla Teorem 5.5'ten ve bu teoremden sonra gelen iki paragraftan toplama işareti altındaki her terimin türevini alarak

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

sonucuna varırız. İntegral için de bu kez Teorem 5.4'ü uygularız. □

Eğer $x \in (-r, r)$ için

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ise, $f(0) = a_0$ ve $f'(0) = a_1$ eşitlikleri aşikârdır. Türev almaya devam edersek

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

sonucunu elde ederiz. Bu da bize $f''(0) = 2a_2$ verir. Bu şekilde k 'ıncı türev için

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = a_k$$

sonucunu tümevarımla kolayca kanıtlarız. *Özetlersek, bir kuvvet serisinin toplamı olan fonksiyonun her mertebeden türevi vardır ve serinin katsayıları toplamı veren fonksiyonun 0 noktasındaki türevleri cinsinden yazılabilir, yani*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

olur.

Bundan da hemen şu çıkar: Eğer 0'ı içeren bir açık aralıkta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ oluyorsa, o zaman her n için $a_n = 0$ olur. Ya da 0'ı içeren bir açık aralıkta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ oluyorsa, o zaman her n için $a_n = b_n$ olur. Bu söylediğimizi hiç türev konusuna girmeden şöyle de kanıtlayabiliriz. Diyelim bir $R > 0$ ve her $x \in (-R, R)$ için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$. Elbette $a_0 = 0$ olur. Şimdi $a_1 = 0$ eşitliğini gösterelim. $x \neq 0$ için,

$$-a_1 = x \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^n$$

olduğundan, $a_1 = 0$ eşitliğini göstermek için, $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^n$ serisinin 0 içeren bir aralıkta sınırlı olduğunu göstermek yeterli. Eğer $0 \neq x \in (-R, R)$ ise,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^n = -\frac{a_1}{x}$$

olduğundan, $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^n$ serisi de yakınsaktır; dolayısıyla mutlak yakınsaktır. Şimdi $0 < S < R$ olsun. O zaman her $0 < x < S$ için,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}| |x|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}| S^n = B$$

olur. Böylece $a_1 = 0$ eşitliği ispatlanmış oldu. Aynı yöntemle $a_2 = a_3 = \dots = 0$ eşitlikleri gösterilebilir.

Geometrik serinin toplamının $-1 < x < 1$ için $\frac{1}{1-x}$ olduğunu, yani

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (7.1)$$

eşitliğini biliyoruz. Değişken değiştirip, toplama işareti altında türev veya integral alıp geometrik seriden birçok yeni ve ilginç sonuç elde edeceğiz. İlk olarak hemen $-1 < x < 1$ için x yerine $-x$ yazıp

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (7.2)$$

eşitliğini bulalım. Toplama işareti altında integral almamıza izin var. Her iki tarafın da integralini alarak bir c sabiti için

$$\log(1+x) = c + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

sonucuna varırız. Bu eşitliği $x = 0$ 'da değerlendirirsek $c = 0$ buluruz. Demek ki

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \quad (7.3)$$

Bir defa daha integral alalım. Soldaki fonksiyonun integrali (integral sabitini 0 alarak),

$$\int_0^x \log(1+t) dt = (x+1) \log(1+x) - x.$$

Sağdaki sonsuz toplama altındaki her terimin integralini alarak yukarıda yaptığımız gibi

$$(x+1) \log(1+x) - x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

elde ederiz. Burada x mutlaka $(-1, 1)$ aralığında olmak zorunda.

Gene geometrik seriden hareketle $-1 < x < 1$ için

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (7.4)$$

serisine bakalım. İntegral alarak bu kez $-1 < x < 1$ için

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (7.5)$$

açılımını elde ederiz.

Son bir örnek olarak geometrik serinin türevini alıp x ile çarpalım. Böylece

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \quad (7.6)$$

sonucuna varırız. Bu işlemi tekrarlırsak

$$x \frac{1+x}{(1-x)^3} = x \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

elde ederiz. Mesela (7.6)'da $m > 1$ için $x = 1/m$ alırsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{m^n} = \frac{m}{(m-1)^2}$$

gibi ilginç bir seri toplamına varırız. Bu yöntemle her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^j}{m^n}$$

serisinin toplamını m ve j cinsinden hesaplayabiliriz.

Bir de yakınsaklık aralığının uç noktaları için bir örnek verelim.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı 1'e eşit ama seri $-1 \leq x \leq 1$ aralığında yakınsak. Türev olarak elde ettiğimiz

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

serisi ise $-1 \leq x < 1$ aralığında yakınsar. Tekrar türev alırsak

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n} x^{n-2}$$

elde ederiz. Bu seri ise sadece $(-1, 1)$ aralığında yakınsaktır.

Buraya kadar bu bölümde hep belirli bir kuvvet serisinden yola çıkarak, bu serinin yakınsaklık yarıçapını hesapladık ve geometrik seri gibi bazı hallerde serinin toplamını bulduk. Bunu başaramadığımızda türev veya integral olarak

yeni seriler ürettik. Şimdi ise $(a - r, a + r)$ aralığında istediğimiz mertebeden sürekli türevleri olan bir f fonksiyonu ile işe başlayalım. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

olarak yazılan seriye f fonksiyonunun a etrafındaki **Taylor serisi açılımı** denir. Bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını nasıl hesaplayacağımızı biliyoruz. Bunun için daha önce yaptıklarımızda x yerine $x - a$ almak yeterli. Ama a noktasından farklı herhangi bir $x \in (a - r, a + r)$ için Taylor serisinin toplamının $f(x)$ 'e eşit olup olmadığını bilmiyoruz. Örnek için $a = 0$ olsun ve

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{eğer } x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bakalım. Bu fonksiyonun 0'daki türevini bulmak için

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x}$$

limitini hesaplamamız gerekecek. Ama $t = 1/x$ yazarak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-t^2} = 0$$

elde ederiz. Bu da bize

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = 0$$

verir. Benzer yöntemle her n için $f^{(n)}(0) = 0$ sonucuna varırız. Bu fonksiyonun 0'daki türevleri hep 0'a eşittir, dolayısıyla fonksiyonun 0'daki Taylor serisi açılımı 0'a eşittir, ama her $x \neq 0$ için $f(x) > 0$ olur. Bu örnek bize verilen bir fonksiyonun Taylor serisinin her zaman fonksiyona eşit olmadığını gösteriyor.

Bir fonksiyonun a etrafındaki Taylor serisi açılımının davranışını incelemek için serinin n 'inci dereceye kadar olan terimlerini toplayalım:

$$R_n(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n.$$

Burada bir $r > 0$ için fonksiyonumuzun ve ilk n türevinin $[a - r, a + r]$ aralığında ve $n + 1$ 'inci türevinin de $(a - r, a + r)$ aralığında sürekli olduğunu varsayıyoruz. İlk olarak $n = 1$ haline bakalım.

$$R_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$$

kalanını farklı bir biçimde ifade edeceğiz. $u = f'(t)$ ve $v = t$ dersek,

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

formülü bize,

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \int_a^x f'(t) \, dt = xf'(x) - af'(a) - \int_a^x t f''(t) \, dt \\ &= \left(x \int_a^x f''(t) \, dt + x f'(a) \right) - af'(a) - \int_a^x t f''(t) \, dt \\ &= \int_a^x (x - t) f''(t) \, dt + (x - a) f'(a) \end{aligned}$$

verir. Böylece birinci fark

$$R_1(x) = f(x) - f(a) - (x - a)f'(a) = \int_a^x (x - t)f''(t) \, dt$$

formülüyle ifade edilir. Artık genel hale bakabiliriz.

Teorem 7.2. *Bir $r > 0$ sayısı için f fonksiyonunun n 'inci türevi $[a - r, a + r]$ aralığında ve $(n + 1)$ 'inci türevi de $(a - r, a + r)$ aralığında sürekliyse*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n \, dt$$

eşitliği $x \in (a - r, a + r)$ aralığında geçerlidir. Ayrıca bir $\xi \in [a, x]$ için,

$$R_n = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n \, dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} (x - a)^{n+1}$$

olur.

Kanıt: Teoremimizi $n = 1$ için kanıtladık. Aynı yöntemi kullanarak tümevarımla sonuca ulaşacağız. Bir k için

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^k \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i + \int_a^x \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x - t)^k \, dt$$

olduğunu varsayalım. Son integrali

$$dv = \frac{(x - t)^k}{k!} \, dt \text{ ve } u = f^{(k+1)}(t)$$

tanımlarıyla şöyle yazarız:

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k dt &= - \left[\frac{f^{(k+1)}(t)}{(k+1)!} (x-t)^{k+1} \right]_a^x \\ &+ \int_a^x \frac{f^{(k+2)}(t)}{(k+1)!} (x-t)^{k+1} dt. \end{aligned}$$

Bunu varsayımımıza yerleştirerek istediğimizi elde ederiz.

Taylor serisindeki n 'inci fark

$$R_n = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt$$

ise, integral için ortalama değer teoremi bize

$$R_n = f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

eşitliği sağlayan bir ξ noktasının uç noktaları a ve x olan kapalı aralıkta var olduğunu söyler. Son integrali de kolayca hesaplayarak n 'inci farkı

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

şeklinde de ifade edebiliriz. □

Fonksiyonun Taylor serisine eşit olması için yukardaki teoremdeki R_n kalanının n sonsuza giderken 0'a gitmesi gerekli ve yeterlidir.

Şimdi bazı önemli fonksiyonların Taylor serisi açılımlarına bakalım. Burada hep $a = 0$ alacağız. Bu özel Taylor serisine **MacLaurin serisi** de denir. İlk fonksiyonumuz $f(x) = e^x$ olsun. Bu fonksiyonun açılımı

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

olarak kolaylıkla hesaplanır. Serinin yakınsaklık yarıçapı sonsuz çünkü

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Demek ki serimiz her yerde yakınsak ama limitte toplamı e^x sayısına eşit mi sorusu hâlâ cevapsız. Bunun için Teorem 7.2'yi kullanarak fark teriminin n sonsuza giderken nasıl davrandığını incelememiz gerekir. Her x için

$$R_n = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$$

eşitliğini sağlayan bir ξ olduğunu biliyoruz. Eğer $|x| < r$ ise, ξ de 0 ile x arasında olduğundan

$$|R_n| \leq e^r \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}$$

eşitsizliği sağlanır. Ama

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Böylece her $x \in \mathbb{R}$ için

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad (7.7)$$

elde ederiz.

İkinci olarak $f(x) = \sin x$ fonksiyonunu ele alalım. Bu halde

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x$$

olduğunu biliyoruz. Demek ki açılımımız

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

olacak. Fonksiyonumuzun her türevi ya $\pm \sin x$, ya da $\pm \cos x$. Öyleyse n 'inci fark terimi

$$|R_n| \leq \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}$$

eşitsizliğini sağlar. Dolayısıyla gene her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (7.8)$$

elde ederiz.

Çok benzer bir örnek $f(x) = \cos x$ fonksiyonu. Bu halde ardarda türev alarak

$$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \sin x, \quad f^{(4)}(x) = \cos x, \dots$$

elde ederiz. Aynı sinus fonksiyonunda olduğu gibi $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun Taylor açılımının her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (7.9)$$

olduğunu kanıtlarız.

Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ verildiğinde $(x + b)^n$ ifadesini binom katsayılarını kullanarak

$$(x + b)^n = b^n + nb^{n-1}x + \cdots + \binom{n}{k}b^{n-k}x^k + \cdots + x^n$$

şeklinde yazabileceğimizi biliyoruz. Buradaki açılım sonlu. Şimdi n yerine herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ alalım ve

$$f(x) = (x + b)^\alpha$$

fonksiyonunun açılımına bakalım. Ama

$$(x + b)^\alpha = b^\alpha \left(1 + \frac{x}{b}\right)^\alpha$$

yazıp, biraz daha basit olan

$$f(x) = (1 + x)^\alpha$$

fonksiyonunun Taylor açılımını incelemek yeterli olacak. Bu halde $x > -1$ ise

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \\ &\dots \\ f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \end{aligned}$$

olduğunu görmek kolay. Öyleyse fonksiyonumuzun Taylor açılımındaki n 'inci katsayı

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

olacak. Bu katsayıyı, binom açılımındaki notasyondan esinlenerek,

$$\binom{\alpha}{n}$$

olarak göstereceğiz. Eğer α bir doğal sayıysa, bu aynen binom katsayısıdır. Serimizin yakınsaklık yarıçapını hesaplamak kolay, çünkü

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(0)n!}{f^{(n)}(0)(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| = 1.$$

Demek ki $f(x) = (x + 1)^\alpha$ fonksiyonunun Taylor serisi $(-1, 1)$ aralığında yakınsak ama hâlâ serinin toplamı fonksiyonumuza mı eşit bilmiyoruz. Bunun için gene Teorem 7.2'yi kullanmayı deneyebiliriz ama bu yolla sonuca

ulaşmak hiç de kolay değil. Başka bir yöntem deneyelim. $(-1, 1)$ aralığında g fonksiyonunu

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

olarak tanımlayalım. $(-1, 1)$ aralığında bu fonksiyonun türevini serideki her terimin türevini alıp toplayarak buluruz ve sonucu $1 + x$ ile çarparak şöyle elde ederiz:

$$(1+x)g'(x) = (1+x) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Sağdaki iki seriyi bir kuvvet serisi olarak yazalım. İlk terim α 'dan başka birşey değil. n 'inci terim ise

$$(n+1) \binom{\alpha}{n+1} + n \binom{\alpha}{n}.$$

Kısacası

$$(1+x)g'(x) = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1) \binom{\alpha}{n+1} + n \binom{\alpha}{n} \right) x^n.$$

Ama kolay bir hesapla görüleceęi üzere

$$(n+1) \binom{\alpha}{n+1} + n \binom{\alpha}{n} = \alpha \binom{\alpha}{n}.$$

Yani

$$(1+x)g'(x) = \alpha + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Sağdaki serinin toplamı ise $\alpha g(x)$. Demek ki $(-1, 1)$ aralığında

$$(1+x)g'(x) = \alpha g(x)$$

sağlanır. şimdi yeni bir fonksiyon tanımlayalım.

$$h(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^\alpha}$$

olsun. Türev olarak

$$h'(x) = \frac{(1+x)^\alpha g'(x) - \alpha(1+x)^{\alpha-1} g(x)}{(1+x)^{2\alpha}}$$

elde ederiz. Ama $(1+x)g'(x) = \alpha g(x)$; öyleyse $(-1, 1)$ aralığındaki her x için $h'(x) = 0$, yani bu aralıkta h fonksiyonu sabit olacak. Bu fonksiyonun 0'daki değeri ise $h(0) = g(0) = 1$. Böylece

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

elde ettik. **Binom serisi** denilen ve Newton'un bulduğu bu önemli sonucun birçok uygulaması olduğunu göreceğiz.

Teorem 7.3. *Herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı için $(-1, 1)$ aralığında*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (7.10)$$

sağlanır. □

Binom serisi açılımının ilk uygulaması olarak $b \neq 0$ için $(x+b)^\alpha$ fonksiyonuna bakalım.

$$(x+b)^\alpha = b^\alpha \left(1 + \frac{x}{b}\right)^\alpha = b^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{x^n}{b^n}$$

yazarak $|x| < |b|$ için

$$(x+b)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} b^{\alpha-n} x^n \quad (7.11)$$

sonucunu kolayca elde ederiz. Geometrik seriyi incelerken $\alpha = -1$ ve $\alpha = -2$ halindeki sonuçları zaten bulmuştuk. $\alpha = 1/2$ ve $b = 1$ için

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots \quad (7.12)$$

serisini elde ederiz. Diğer bir ilginç örnek ise $\alpha = -1/2$ hali. Bu durumda

$$\frac{1}{(1+x)^{1/2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \quad (7.13)$$

sonucuna ulaşırız. Eğer x yerine $-x$ alırsak,

$$\frac{1}{(1-x)^{1/2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \quad (7.14)$$

buluruz. Son olarak x yerine x^2 alalım:

$$\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots \quad (7.15)$$

çıkar. Serimiz $-1 \leq x \leq 1$ aralığında yakınsak ama eşitlik sadece $-1 < x < 1$ için geçerli. İntegral alarak buradan, bir c sabiti için,

$$\arcsin x = c + x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots$$

eşitliğini elde ederiz. İki tarafı da $x = 0$ değerinde değerlendirirsek c sabitinin 0 olduğu görülür. Demek ki

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots \quad (7.16)$$

$(-1, 1)$ aralığında geçerli olan bu sonuca bu yoldan değil de doğrudan ulaşmak istersek, $f(x) = \arcsin x$ fonksiyonunun ardarda türevlerini almamız ve Taylor açılımındaki fark teriminin davranışını incelememiz gerekirdi. Bu ise oldukça zordur.

Binom serisinin bakacağımız son özel hali

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \dots \quad (7.17)$$

eşitliği olacak. Bu eşitlik (7.13)'te x yerine x^2 alınarak hemen çıkar. Sol tarafın integralini biliyoruz: $\log(x + \sqrt{1+x^2})$. Öyleyse bir c sabiti için, $x \in (-1, 1)$ ise

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) = c + x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

eşitliği geçerlidir. Eğer $x = 0$ alırsak sabitin gene 0'a eşit olduğunu görürüz. Demek ki,

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

olur.

Bu bölümün başında sadece geometrik serinin toplamını bulduk. Daha sonra e^x , $\sin x$, $\cos x$ gibi fonksiyonların Taylor serisi açılımlarını yazdık. Binom serisi bize $(1+x)^\alpha$ fonksiyonunu değişik α değerleri için kuvvet serisi olarak yazma olanağını sağladı. Elde ettiğimiz hemen her serinin türevini veya integralini alarak yeni ilginç seri açılımları elde ettik. Bilinen seri açılımlarından yeni seriler elde etmenin bir başka yolu da yakınsak serilerin çarpımlarını gene bir seri olarak yazmaktır. Yakınsaklık yarı çapları $0 < r_1 \leq \infty$ ve $0 < r_2 \leq \infty$ olan iki kuvvet serisi alalım. Eğer

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ ve } g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

ise $h(x) = f(x)g(x)$ fonksiyonun Taylor serisi açılımını bulmaya çalışalım. Bunun için h fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki türevlerini hesaplamamız gerekecek.

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

olduğunu biliyoruz. Tekrar türev alırsak kolayca

$$h''(x) = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$

elde ederiz. Aslında bir çarpımın tüm türevlerini veren

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

Leibniz formülünü n üzerinden tümevarımla kanıtlamak hiç de zor değil. Leibniz formülü bize

$$h^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^n n! \frac{f^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$$

verir. Ama

$$\frac{f^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} = a_{n-k} \text{ ve } \frac{g^{(k)}(0)}{k!} = b_k.$$

Demek ki

$$\frac{h^{(n)}(0)}{n!} = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \cdots + a_0 b_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

olacak. Ama bu ise h fonksiyonunun açılımındaki n 'inci katsayı. Öyleyse

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \cdots + a_0 b_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

dersek

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

sonucuna varırız. Bazen h serisine f ve g serilerinin **Cauchy çarpımı** denir. Bu yeni kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının $\geq \min\{r_1, r_2\}$ olduğunu kanıt vermeden belirtelim [2].

Şimdi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{eğer } x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyonu ele alalım. Bu fonksiyonun Taylor serisi açılımını

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

olarak yazalım. Buradaki B_n katsayılarına **Bernoulli sayıları** denir. f fonksiyonunun sonsuz türevli olduğu ve Taylor serisinin fonksiyona eşit olduğu çok bariz değil. Bu olguyu kabul edip devam edelim. Tabii $B_n = f^{(n)}(0)$ olmak zorunda ama bu yoldan Bernoulli sayılarını hesaplamak hiç de kolay değil. Biz bambaşka bir yol deneyeceğiz. Önce her x için geçerli olan

$$x = (e^x - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \quad (7.18)$$

formülünü yazalım. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

olduğunu biliyoruz. Tabii

$$x = 0 + x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots$$

Demek ki

$$0 + x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \right).$$

Öyleyse iki serinin çarpımının katsayıları hakkında daha önce Leibniz formülü yardımıyla bulduğumuzu bu özel duruma uygulayalım.

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot \frac{B_0}{0!} \\ 1 &= 0 \cdot \frac{B_1}{1!} + \frac{1}{1!} \cdot \frac{B_0}{0!} \\ 0 &= 0 \cdot \frac{B_2}{2!} + \frac{1}{1!} \cdot \frac{B_1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{B_0}{0!} \\ 0 &= 0 \cdot \frac{B_3}{3!} + \frac{1}{1!} \cdot \frac{B_2}{2!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{B_1}{1!} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{B_0}{0!} \\ &\dots \\ 0 &= \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!} \frac{B_j}{j!} \\ &\dots \end{aligned}$$

İlk denklem birşey vermiyor. İkincisinden $B_0 = 1$ elde ederiz. Bunu üçüncü denklemde kullanarak $B_1 = -1/2$ buluruz. Dördüncü ise bize

$$B_2 = -2 \left(\frac{B_1}{2} - \frac{B_0}{6} \right) = 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6}$$

verir. Bu yolla

$$B_3 = 0, B_4 = \frac{-1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, \dots$$

değerlerini buluruz. Demek ki

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{30} + \frac{x^6}{42} + \dots$$

Bernoulli sayılarını bu yöntemle hesaplamak için kullandığımız denklemlere dikkatlice bakarsak, her Bernoulli sayısının rasyonel olduğunu kolayca kanıtlayabiliriz. Ayrıca $B_1 = -1/2$ ancak hesapladığımız diğer tek indeksli katsayılar $B_3 = B_5 = 0$. Bu durumu incelemek amacıyla

$$h(x) = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = \frac{x}{2} \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right) = \frac{x}{2} \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}}$$

fonksiyonuna bakalım. Her x için $h(x) = h(-x)$ olduğu hemen görülüyor. Öyleyse her $k \in \mathbb{N}$ için $B_{2k+1} = 0$. Sonuç olarak

$$h(x) = \frac{x}{2} \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

eşitliğini buluruz. Bu aşamada hiperbolik kotanjant fonksiyonunun tanımını anımsayalım:

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Böylece hiperbolik kotanjant fonksiyonunu kullanarak

$$\frac{x}{2} \coth \frac{x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

sonucunu buluruz. Burada x yerine $2x$ koyarak

$$x \coth x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \quad (7.19)$$

serisine varırız. Şimdi karmaşık sayılar ve

$$\coth x = i \cot ix$$

eşitliğini kullanacağız. Yukarıda x yerine $-ix$ yazarsak hiperbolik kotanjan yerine normal kotanjan'a geçip

$$x \cot x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \quad (7.20)$$

elde ederiz. Bu açılım $(-\pi, \pi)$ aralığında geçerli. Bir de $2 \cot 2x = \cot x - \tan x$, yani

$$\tan x = \cot x - 2 \cot 2x$$

özdeşliğini uygularsak, biraz hesapla, tanjan fonksiyonunun açılımını Bernoulli sayıları yardımıyla

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_{2n} x^{2n-1} \quad (7.21)$$

yazarız. Bu eşitlik ise $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığında geçerli.

Hazır karmaşık sayılara geçmişken e^x fonksiyonunun açılımında x yerine ix koyalım. Tabii

$$i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = i, \dots$$

olduğunu biliyoruz. Elde ettiğimizi gerçel ve karmaşık kısımlara ayırarak

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

sonucuna varalım. Ama sağ taraftaki serileri tanıyoruz. Böylece her $x \in \mathbb{R}$ için geçerli olan

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (7.22)$$

formülünü elde ettik.

Euler formülü ya da **özdeşliği** olarak bilinen bu çarpıcı formül trigonometrideki birçok özdeşliği içinde barındırmakta... Bir örnek görelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

geçerli; ama aynı zamanda

$$e^{inx} = (e^{ix})^n = (\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \cos^{n-k} x \sin^k x$$

var. Böylece $\cos nx$ ve $\sin nx$ fonksiyonlarını $\cos x$ ve $\sin x$ fonksiyonlarının kuvvetleri olarak ifade ederiz. Bu yolla, $n = 3$ için

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x \\ \sin 3x &= 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x \end{aligned}$$

elde etmek çok kolay.

Logaritma fonksiyonunu kuvvet serisi olarak (7.3)'te yazmıştık:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Bu eşitlik $(-1, 1)$ açık aralığında geçerli ama $x = 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

yakınsak bir seri. Acaba bu serinin toplamı $\log 2$ olabilir mi? Bunun gibi soruların yanıtı kanıtı biraz uzun olan Abel teoreminde veriliyor.

Teorem 7.4 (Abel). *Yakınsaklık yarıçapı $0 < r < \infty$ olan bir kuvvet serisinin toplamı*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

olsun. Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ yakınsak bir seriyse

$$\lim_{x \uparrow r} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

eşitliği doğrudur.

Kanıt: İlk olarak $r = 1$ ve her $x \in (-1, 1)$ için

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

olduğunu varsayalım. Ayrıca $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ yakınsak bir seri olsun. Eğer $k \geq 1$ için

$$t_k = \sum_{n=0}^k a_n$$

tanımını yaparsak, $a_n = t_n - t_{n-1}$ eşitliğini kullanarak

$$\sum_{n=0}^k a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^k (t_n - t_{n-1}) x^n = a_0 + a_k x^k - a_0 x - \sum_{n=1}^{k-1} t_n (x^{n+1} - x^n)$$

yazalım. Buradan hareketle a_0 yerine t_0 yazarak

$$\sum_{n=0}^k a_n x^n = (1-x)a_0 + a_k x^k - \sum_{n=1}^{k-1} t_n (x^{n+1} - x^n) = a_k x^k + (1-x) \sum_{n=0}^{k-1} t_n x^n$$

elde ederiz. $(-1, 1)$ aralığındaki her x için $\lim a_k x^k = 0$. Dolayısıyla k 'yı sonsuza götürürsek

$$f(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$$

sonucuna varırız. Şimdi

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

olsun. Geometrik serinin toplamını kullanırsak $-1 < x < 1$ için

$$t \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{t}{1 - x}$$

buluruz. Böylece

$$f(x) - t = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} (t_n - t) x^n$$

sağlanır. Amacımız $\lim_{x \uparrow 1} f(x) = t$ olduğunu göstermek. Herhangi bir $m \in \mathbb{N}$ verildiğinde yukarıdaki seriyi iki parçaya ayırıp

$$|f(x) - t| \leq |1 - x| \left(\sum_{n=0}^{m-1} |t_n - t| |x|^n + \sum_{n=m}^{\infty} |t_n - t| |x|^n \right)$$

eşitsizliğine varırız. Ama $\lim t_n = t$ ve dolayısıyla bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde $m \in \mathbb{N}$ sayısını öyle seçebiliriz ki her $n \geq m$ için $|t_n - t| < \epsilon/2$ sağlanır. Öyleyse

$$|f(x) - t| \leq |1 - x| \left(\sum_{n=0}^{m-1} |t_n - t| |x|^n + \frac{\epsilon}{2} \sum_{n=m}^{\infty} |x|^n \right)$$

elde ettik. Amacımız x alttan 1'e yaklaşırken limit almak. Onun için sadece $(0, 1)$ aralığına bakalım. Sağdaki ikinci terimde geometrik serinin toplamını kullanırsak

$$\sum_{n=m}^{\infty} |x|^n = \frac{|x|^m}{1 - x} \leq \frac{1}{1 - x}$$

elde ederiz. Demek ki elimizde

$$|f(x) - t| \leq (1 - x) \sum_{n=0}^{m-1} |t_n - t| x^n + \frac{\epsilon}{2} \leq (1 - x) \left(\sum_{n=0}^{m-1} |t_n - t| \right) + \frac{\epsilon}{2}$$

var. Şimdi

$$\delta = \frac{\epsilon}{2} \left(\sum_{n=0}^{m-1} |t_n - t| \right)^{-1}$$

ise $1 - \delta < x < 1$ aralığında

$$|f(x) - t| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon$$

sağlanır. Öyleyse

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

olacak.

Genel halde ise

$$f(x) = g(rx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n x$$

yazarız. Daha önce kanıtladığımız özel hal bize

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \uparrow r} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

verir. □

Abel teoremini $\log(1+x)$ fonksiyonuna uygularsak

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (7.23)$$

gibi çarpıcı bir sonuç elde ederiz. Bir de $\arctan x$ fonksiyonuna bakalım. $(-1, 1)$ aralığında

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

olduğunu (7.5)'ten biliyoruz. Ama $\arctan 1 = \pi/4$ ve

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

serisi de yakınsak. Öyleyse şu sonuca vardık:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \quad (7.24)$$

İlginç bir sonuç.

NOTLAR

Sir Isaac Newton (1642-1727) fizik, mekanik, matematik ve astronomiye katkılarıyla bilimde bir çığır açmıştır. 1687 yılında yayımlanan “*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*” isimli kapsamlı eserinde klasik mekaniğin temellerini kurmuş, hareket yasalarını ve evrensel yerçekimi yasasını bulmuş ve dünya üzerindeki cisimlerin hareketleriyle uzaydaki gezegenlerin, yıldızların aynı doğa yasalarına uygun olarak hareket ettiklerini kanıtlamıştır. Newton prizmadan geçen güneş ışığının farklı renklere ayrıştığını göstermiş ve kullanışlı ilk ayna teleskobu yapmıştır. Ses hızını ve soğuma sürecini inceleyen Newton, Gottfried Leibniz ile hemen hemen aynı zamanda bugün diferansiyel ve integral hesap adını verdiğimiz teoriyi ortaya atmış, geliştirmiş ve uygulamıştır. Dindar bir kişi olan Newton İncil hakkında da birçok kitap yazmıştır.

Zengin bir çiftçi olan Newton’un babası, oğlunun doğumundan üç ay önce ölmüş ve Isaac daha üç yaşındayken annesi yeniden evlenmiştir. Isaac Newton üvey babasını hiç sevmemiş ve anneannesi tarafından büyütülmüştür. Okulda hayalperest, dikkatini toplayamayan bir öğrenci olan genç Newton başarısız olunca ailesi tarafından okuldan alınarak çiftçilik yapması istenmiştir. Çiftçilikten nefret eden Newton, müdürünün ısrarıyla tekrar eski okuluna dönmüş ve bu kez okulun en parlak öğrencilerinden birisi olmuştur. 1661 yılında Cambridge Üniversitesi’ne kaydolmuş, buradaki eğitim Aristo’nun öğretileri üzerine temellendirilmiş olmasına rağmen, Newton daha çok Descartes, Kopernik, Kepler ve Galile’nin eserlerini okumayı tercih etmiştir. Üniversiteden mezun olmadan önce binom serisi teoremini bulan Newton, diferansiyel ve integral hesap teorisini de aynı yıllarda geliştirmeye başlamıştır. 1665 yılında Newton diplomasını aldıktan hemen sonra İngiltere’de ortaya çıkan büyük bir salgın nedeniyle üniversite önlem olarak kapatılmıştır. Onsekiz aylık bu süre boyunca bir köyde karantina altında yaşamak zorunda kalan Newton kendi ifadesiyle en yaratıcı dönemini burada yaşamıştır. Elma ağacının altında otururken başına düşen elmadan esinlenerek yerçekimi yasasını bulma efsanesi bu zaman dilimine aittir. Cambridge’de çalışmasını sürdüren Newton bir yıl kadar milletvekilliği yapmış ve 1696 yılında Kraliyet Darphanesi’nin müdürü olarak atanmıştır. Bu görevini büyük bir ciddiyetle ele almış ve İngiliz sterlininin gümüş standardından altın standardına geçmesinde, kalpazanları ortaya çıkarılıp cezalandırılmasında önemli roller üstlenmiştir. 1705 yılında Kraliçe Anne Newton’a “Sir” ünvanı vermiştir. Hiç evlenmeyen Newton, 31 Mart 1727 tarihinde Londra’da uykusunda ölmüş ve Westminster Abbey’de toprağa verilmiştir. Bir ara simyaya merak salmış olan Newton’un civa zehirlenmesinin etkisinde kalarak öldüğü de öne sürülmüştür.

Bir felsefe profesörünün oğlu olan **Gottfried Leibniz** (1646-1716), yedi yaşından itibaren babasının özel kütüphanesinden yararlanmaya başlamış, bu sayede daha ondört yaşındayken Leipzig Üniversitesi’ne kaydolmuştur. On-

sekiz yaşında felsefe yüksek lisansını tamamlamış ve bir yıl sonra da hukuk lisansını almıştır. Nürnberg’de simyacı olarak çalışan Leibniz, daha sonra hukukçu olarak da görev yapmış, 1672’de Fransız hükümetinin davetlisi olarak bulunduğu Paris’te C. Huygens ile tanışarak, matematik ve fizik ile ilgilenmeye başlamıştır. Bu yıllarda diferansiyel ve integral hesap teorisini, Newton’dan bağımsız olarak bulmuştur. Fransız Akademisine yabancı onur üyesi olarak seçilen Leibniz, 1673 yılında diplomatik bir görevle Londra’ya gitmiş, burada yapmış olduğu mekanik bir hesap makinasını tanıtmış ve Royal Society’nin yabancı üyeliğine seçilmiştir. Leibniz hayatının geri kalanını Hanover dükalığında siyasal ve hukuk danışmanlığı ile geçirmiştir.

1711 yılında Royal Society’nin dergisinde John Keill bir makale yayımlayarak Newton’un diferansiyel ve integral hesap teorisini Leibniz tarafından alındığını öne sürmüştür. Newton’un müridlerinden olan Keill’in makalesi üzerine bu önemli yeni teorinin önce kimin tarafından bulunduğu tartışması başlamış ve zamanın önde gelen bilim adamlarının hemen hepsi bu tartışmaya katılarak ya Newton’un ya da Leibniz’in tarafını tutmuşlardır. Tartışmalar tam sönmeğe yüz tuttuğu sırada Newton’un ithamlarıyla yeniden alevlenmiştir. Bugünün bilim tarihçilerine göre Newton ve Leibniz birbirlerinden habersiz ve bağımsız olarak aynı sonuçları elde ettiklerini ve bu nedenle o zamanki tartışmanın anlamsız olduğunu biliyoruz.

O yıllardaki bu ateşli tartışmalara katılanlar arasında **Jacob Bernoulli** (1654-1705) ve **Johann Bernoulli** (1667-1748) de yer almışlardır. İspanyol baskısı karşısında 16’ncı yüzyılda Antwerp’ten Basel’e göç eden Bernoulli ailesinden çok sayıda matematikçi, bilim adamı ve sanatçı yetişmiştir. Leibniz ve Newton’un eserleriyle ortaya çıkan yeni matematiği hemen öğrenen ve benimseyen Bernoulli’lerden Johann, diferansiyel ve integral hesabı ilk bulan Leibniz olduğunu, önceliğin Leibniz’e verilmesi gerektiğini ateşli bir şekilde savunmuştur. Kardeşi Jacob ile de bazı matematik problemlerini önce kimin çözdüğü konusunda tartışan Johann, kardeşinin ölümünden sonra da kendi oğlu Daniel Bernoulli (1700-1782) ile de benzer tartışmalara girmiştir.

Norveçli matematikçi **Niels Henrik Abel** (1802-1829) kendisi geliştirmek ve ülkesinde elde ettiği sonuçları daha iyi tanıtabilmek için Paris’e gitmiş ve zamanın ünlü matematikçilerinden Cauchy’e bir çalışmasını sunmuştur. Cauchy ise bu çalışmayı okumadan kaybetmiştir. Ondan sonra genç Abel makalelerini doğrudan yayımlamaya başlamış, özellikle 5’inci dereceden polinomların kökleri hakkındaki çalışmasıyla dikkat çekmiştir. Elde ettiği parlak sonuçlara rağmen kendisini matematik çevrelerine bir türlü kabul ettirmemiş ve düzgün bir iş bulamamıştır. Daha 26 yaşındayken yokluk içinde veremden ölen Abel’in adına ölümünden iki gün sonra gelen bir mektupta, Berlin Üniversitesi tarafından 19’uncu yüzyılın bu genç dehasına iyi bir iş teklif edilmekteydi.

Kuvvet serileri ve bazı fonksiyonların seri açılımları diferansiyel ve integral teorisi ortaya çıkmadan önce ele alınan konulardan birisidir ama bu yeni

teoriyle birlikte hem sonuçlar zenginleşmiş ve hem de sağlam kanıtlar ortaya çıkmıştır. Bugün birçok analiz kitabında kuvvet serileri kapsamlı olarak anlatılır. Benim yararlandığım kaynak [1] ise oldukça eski ama gerçek bir ustanın eseri.

Dizilerin limitleri, seriler için yakınsaklık koşulları gibi temel sonuçlar ve kavramlar için [2]'yi öneririm.

Kaynaklar

- [1] R. Courant, **Differential and Integral Calculus**, Blackie 1934.
- [2] Ali Nesin, **Analiz I**, Nesin Yayınevi, Nesin Matematik Köyü serisi, 2'nci basım, 2011.

8. Stone-Weierstrass Yaklaşım Teoremi

Kapalı bir $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli herhangi bir f fonksiyonu ve $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde, her $s \in [a, b]$ için

$$|f(s) - p(s)| < \epsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir p polinomu vardır. Bu önemli teoremi **Weierstrass** kanıtlamış. Weierstrass'ın teoremini soyut olarak şöyle ifade edebiliriz: A ile tüm polinomların kümesini gösterirsek, bu kümenin kapanışı olan $\overline{A}$ kümesi $C[a, b]$ uzayına eşittir. Burada $C[a, b]$ ile $[a, b]$ aralığında sürekli tüm fonksiyonlardan oluşan ve üzerinde

$$\|f\| = \sup\{|f(s)| : a \leq s \leq b\}$$

normu olan Banach uzayını gösteriyoruz. Bölüm 5'te bu normu düzgün yakınsaklık normu adı altında tanımlamıştık. Aslında Weierstrass teoremi oldukça şaşırtıcı bir sonuç. Çünkü bu teoreme göre her yerde sürekli ama hiçbir noktada türevi olmayan (Bölüm 6'da tanımladığımız) w fonksiyonuna bile (sonsuz kez türevlenen) polinomlarla düzgün olarak istediğimiz kadar yaklaşabiliyoruz; yani öyle bir polinom dizisi $(p_n)_n$ bulabiliriz ki, $C[a, b]$ uzayında $\lim p_n = w$ olur!

Weierstrass'tan epeyce sonra 1936'da Marshall Stone bu teoremi soyut bir alana taşıyarak genelleştirdi. Üstelik Stone'un çok daha genel olan teoreminin kanıtı hiç de zor değil. Kanıtta tıkız uzayların temel özellikleri ustaca kullanılıyor.

S ile tıkız bir topolojik uzayı gösterelim. Bu uzayda tanımlı ve sürekli tüm $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının

$$\|f\| = \sup\{|f(s)| : s \in S\}$$

normu ile bir Banach uzayı oluşturduğunu Teorem 5.3'ten hemen sonra gelen paragrafta görmüştük. Bu uzayı $C(S)$ ile göstermiştik. Sürekli iki fonksiyonun

çarpımı da sürekli ve $\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$ eşitsizliği geçerli. Dolayısıyla $C(S)$ değişmeli bir **Banach cebiridir**. Ayrıca eğer e her noktada 1 değeri alan sabit fonksiyonsa, her $f \in C(S)$ için $fe = ef = f$ olur. Demek ki bu cebirde bir de **birim öge** var.

Önsav 8.1. $C(S)$ 'nin her altcebirinin kapanışı gene bir altcebirdir.

Kanıt: Bu sonucu göstermek için $\lim f_n = f$, $\lim g_n = g$ ise $\lim f_n g_n = fg$ olduğunu kanıtlamak yeterli olacak. Şimdi

$$f_n g_n - fg = f_n g_n - f_n g + f_n g - fg$$

yazarak

$$\|f_n g_n - fg\| \leq \|f_n g_n - f_n g\| + \|f_n g - fg\| \leq \|f_n\| \|g_n - g\| + \|f_n - f\| \|g\|$$

eşitsizliğine varırız. Yakınsak bir dizi sınırlıdır. Eğer $M > 0$ sayısı $(\|f_n\|)_n$ dizisini üstten sınırlıyorsa

$$\|f_n g_n - fg\| \leq M \|g_n - g\| + \|f_n - f\| \|g\|$$

elde ederiz. Kanıtımız böylece tamamlandı. $\square$

$C(S)$ uzayı üzerinde bir de **kısmi sıralama** var. Eğer her $s \in S$ için $f(s) \leq g(s)$ ise $f \leq g$ yazacağız. Bu bir kısmi sıralama. Sürekli f ve g fonksiyonları için

$$\begin{aligned} (f \vee g)(s) &= \max\{f(s), g(s)\}, \\ (f \wedge g)(s) &= \min\{f(s), g(s)\} \end{aligned}$$

eşitlikleriyle tanımlanan $f \vee g$ ve $f \wedge g$ fonksiyonları da süreklidir. Ayrıca her $s \in S$ için $|f|(s) = |f(s)|$ eşitliğiyle tanımlanan $|f|$ fonksiyonu da süreklidir çünkü $|f| = f \vee (-f)$ olur.

Düzgün yakınsaklık noktasal yakınsaklık verir ama bunun tersinin doğru olmadığını Bölüm 5'te görmüştük. Dini teoremi adı verilen özel bir halde ise noktasal yakınsaklıktan düzgün yakınsaklık elde edilir.

Önsav 8.2. *Tıkız bir S topolojik uzay üzerinde $(f_n : S \rightarrow \mathbb{R})_n$ sürekli fonksiyon dizisi için $f_n \leq f_{n+1}$ eşitsizliği sağlansın. Her $s \in S$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s) = f(s)$ varsa ve böylece elde edilen f fonksiyonu sürekliyse, o zaman $(f_n)_n$ dizisi $C(S)$ uzayında f fonksiyonuna yakınsar.*

Kanıt: Bir $\epsilon > 0$ sayısı ve $s \in S$ verilsin. $\lim f_n(s) = f(s)$ ve $f_n(s) \leq f_{n+1}(s)$ olduğundan öyle bir $n(s) \in \mathbb{N}$ buluruz ki, her $m \geq n(s)$ için

$$0 \leq f(s) - f_m(s) < \epsilon/3$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi

$$U_s = \{x \in S : |f(x) - f(s)| < \epsilon/3 \text{ ve } |f_{n(s)}(x) - f_{n(s)}(s)| < \epsilon/3\}$$

kümesine bakalım. Hem f hem de $f_{n(s)}$ sürekli olduğundan U_s açık bir kümedir. Eğer $x \in U_s$ ise

$$0 \leq f(x) - f_{n(s)}(x) \leq |f(x) - f(s)| + |f(s) - f_{n(s)}(s)| + |f_{n(s)}(s) - f_{n(s)}(x)| < \epsilon$$

olur. $(U_s)_{s \in S}$ uzayımızın açık bir örtüsü ve S tıkız bir uzay. Demek ki sonlu sayıda $s_1, \dots, s_j \in S$ noktası için

$$S = \bigcup_{i=1}^j U_{s_i}$$

olur. Seçilen her $n(s) \in \mathbb{N}$ sayısı tabii s noktasına bağımlı. Ama

$$n_0 = \max\{n(s_i) : i = 1, \dots, j\}$$

ise her bir $x \in S$ noktası bir U_{s_i} açık kümesinde olacak ve dolayısıyla $n \geq n_0$ için

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq f(x) - f_{n_0}(x) \leq f(x) - f_{n(s_i)}(x) < \epsilon$$

sağlanacak. Böylece her $n \geq n_0$ için $\|f - f_n\| < \epsilon$ elde ettik. $\square$

Şimdi de $[0, 1]$ aralığında tanımlanmış olan $k(s) = \sqrt{s}$ karekök fonksiyonuna bakalım. $p_1(s) = 0$ ve tümevarımla

$$p_{n+1}(s) = p_n(s) + \frac{s - p_n(s)^2}{2}$$

formülüyle tanımlanan p_n fonksiyonlarının her birinin polinom olduğunu görmek kolay. Tümevarımla her n için $p_n(0) = 0$ olduğunu da kolayca kanıtlarız. Şimdi her $0 \leq s \leq 1$ için

$$0 \leq p_n(s) \leq k(s) = \sqrt{s} \quad (8.1)$$

olduğunu kanıtlayalım. Tümevarım kullanacağız. Eşitsizlik bir n için doğruysa

$$p_{n+1}(s) = p_n(s) + \frac{s - p_n(s)^2}{2}$$

formülünden, $p_n(s)^2 \leq s$ olduğundan $0 \leq p_{n+1}(s)$ hemen bulunur. Bir de

$$\sqrt{s} - p_{n+1}(s) = (\sqrt{s} - p_n(s)) \left(1 - \frac{\sqrt{s} + p_n(s)}{2}\right)$$

yazalım. $p_n(s) \leq \sqrt{s}$ eşitsizliği bize

$$\frac{\sqrt{s} + p_n(s)}{2} \leq \sqrt{s} \leq 1$$

verir. Demek ki yukarıdaki formüldeki sağ taraftaki iki çarpan da 0'dan büyük veya eşit, yani $\sqrt{s} \geq p_{n+1}(s)$. Böylece (1) kanıtlanmıştır. Öyleyse

$$p_{n+1}(s) - p_n(s) = \frac{1}{2}(\sqrt{s} - p_n(s))(\sqrt{s} + p_n(s)) \geq 0$$

eşitsizliği doğru ve bu bize $p_n(s) \leq p_{n+1}(s)$ verir. Her $s \in [0, 1]$ için $(p_n(s))_n$ artan ve üstten $\sqrt{s}$ ile sınırlı bir dizi. Dolayısıyla bu dizinin limiti $p(s)$ var. Tanımımıza geri dönersek

$$p_{n+1}(s) = p_n(s) + \frac{s - p_n(s)^2}{2}$$

bize

$$p(s) = p(s) + \frac{s - p(s)^2}{2}$$

yani $p(s) = \pm\sqrt{s}$ verir. Ama $0 \leq p_n(s) \leq p(s)$. Demek ki $p(s) = \sqrt{s}$. Bu diziye, Dini teoremini uygulayarak şu ara sonucu elde ederiz. Bu sonuç aslında Weierstrass teoreminin çok özel bir hali.

Önsav 8.3. $[0, 1]$ aralığında tanımlanmış $s \mapsto \sqrt{s}$ fonksiyonuna düzgün yakınsayan bir polinom dizisi vardır. $\square$

Bundan sonraki teorem bize $C(S)$ uzayının bir altkümesinin cebir olması ile kısmi sıralama arasındaki ilişkiyi veriyor.

Teorem 8.4. A ile $C(S)$ uzayının kapalı bir altcebiriyse ve $C(S)$ 'nin e birim ögesi A 'daysa, o zaman A altcebirinden seçilen her f ve g için $|f|$, $f \vee g$ ve $f \wedge g$ fonksiyonları da A 'dadır.

Kanıt: A bir altcebir olduğu için $f \in A$ ise $\frac{f^2}{\|f\|^2}$ fonksiyonu da A 'ya aittir. Önsav 8.3'te varlığı ispatlanan karekök alma fonksiyonuna düzgün yakınsayan bir $(p_n)_n$ polinom dizisini alalım. O zaman, p_n bir polinom olduğundan,

$$s \mapsto p_n \left(\frac{f(s)^2}{\|f\|^2} \right)$$

formülüyle tanımlanmış fonksiyon da A 'dadır. Önsav 8.3 bize bu fonksiyonların $C(S)$ içinde $\frac{|f|}{\|f\|}$ fonksiyonuna yakınsadığını söylüyor. A kapalı olduğu için bu fonksiyon da A 'da ve sonuçta $|f|$ de A içinde. Son olarak,

$$f \vee g = \frac{f + g + |f - g|}{2} \quad \text{ve} \quad f \wedge g = \frac{f + g - |f - g|}{2}$$

formüllerini kullanarak kanıtımızı tamamlarız. $\square$

E ile $C(S)$ uzayının bir altkümesini gösterelim. Eğer S uzayından seçilen herhangi iki farklı s_1 ve s_2 noktası için $f(s_1) \neq f(s_2)$ koşulunu sağlayan bir $f \in E$ varsa, E kümesi S uzayının **noktalarını ayırıyor** diyeceğiz.

(S, d) bir metrik uzay olsun. Seçeceğimiz bir $s_1 \in S$ ile tanımlanan

$$f(s) = d(s, s_1)$$

fonksiyonuna bakalım. Herhangi bir $s' \in S$ için üçgen eşitsizliği kullanırsak

$$d(s, s_1) \leq d(s, s') + d(s', s_1)$$

elde ederiz. Demek ki

$$d(s, s_1) - d(s', s_1) \leq d(s, s').$$

Burada s ile s' nin yerlerini değiştirirsek

$$|d(s, s_1) - d(s', s_1)| \leq d(s, s')$$

yani

$$|f(s) - f(s')| \leq d(s, s')$$

sonucuna varırız. Öyleyse $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve eğer $s_2 \neq s_1$ ise $f(s_1) = 0 \neq f(s_2)$. Böylece bir metrik uzayın noktalarının sürekli fonksiyonlarca ayrıldığını kanıtladık.

Aslında metrik uzaylardan daha genel topolojik uzaylar için de $C(S)$ 'nin S uzayının noktalarını ayırdığını biliyoruz. Ama bu uzayları incelemek için daha fazla topoloji bilmemiz gerekir. Bu konu için Bölüm 5'te verilen kaynakları referans gösterelim ve sadece tıkHz bir topolojik uzayı S üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların bu uzayın noktalarını ayırdığı belirtmekle yetinelim.

S uzayının noktalarını ayırmak için mutlaka her sürekli fonksiyonu kullanmak gerekli olmayabilir. Örneğin gerçel sayıların herhangi bir altkümesini alırsak, $f(x) = x$ fonksiyonu tek başına bu uzayın noktalarını ayırır. Şimdi S tıkHz bir uzay ve A da $C(S)$ içinde yoğun bir küme olsun. Herhangi iki farklı s_1, s_2 noktasını ayıran bir $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu seçelim. Buradan

$$\rho = |f(s_1) - f(s_2)| > 0$$

sayısını tanımlayalım. $f \in \overline{A}$ olduğu için

$$\|f - g\| < \rho/3$$

eşitsizliğini sağlayan bir $g \in A$ seçebiliriz. Şimdi

$$f(s_1) - f(s_2) = f(s_1) - g(s_1) + g(s_1) - g(s_2) + g(s_2) - f(s_2)$$

yazalım. Üçgen eşitsizliği bize

$$\begin{aligned} \rho = |f(s_1) - f(s_2)| &\leq \|f - g\| + |g(s_1) - g(s_2)| + \|f - g\| \\ &< \frac{2\rho}{3} + |g(s_1) - g(s_2)| \end{aligned}$$

verir. Demek ki

$$0 < \frac{\rho}{3} < |g(s_1) - g(s_2)|$$

olur. Böylece $C(S)$ 'nin yoğun bir altkümesinin S uzayının noktalarını ayırdığını kanıtlamış olduk. Yoğunluk için gerekli olan bu koşul şimdi kanıtlayacağımız Stone-Weierstrass teoreminde geçiyor.

Teorem 8.5 (Stone-Weierstrass). *$C(S)$ uzayının bir A altceberi sabit fonksiyonları kapsıyor ve S 'nin noktalarını ayırıyorsa, $C(S)$ içinde yoğundur.*

Kanıt: Bir $f \in C(S)$ ve $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\|f - h\| \leq \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir $h \in \overline{A}$ bularak kanıtımızı vermiş olacağız. Önsav 8.1'e göre $\overline{A}$ 'nın bir altcebir olduğunu unutmayalım.

S uzayından iki farklı x ve y noktası seçelim. A içinden bu noktalarda farklı değerler alan bir g alalım. Her $s \in S$ için

$$h_{xy}(s) = f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} (g(s) - g(x))$$

ile tanımlanan fonksiyon da A kümesinin bir ögesidir, çünkü hem g hem de herhangi bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için λe fonksiyonları A cebirine aittir. A kümesine ait bu h_{xy} fonksiyonunun x 'teki değeri $f(x)$ 'e ve y 'deki değeri de $f(y)$ 'ye eşittir. Böylece hiç olmazsa bu iki noktada f fonksiyonuna istediğimiz kadar yaklaştık. Şimdi x noktasını sabit tutalım ve her $y \neq x$ için

$$U(y) = \{s \in S : h_{xy}(s) < f(s) + \epsilon\}$$

kümesini tanımlayalım. x ve y noktaları bu açık kümeye aittir. $(U(y))_{y \in S}$ obası uzayın açık bir örtüsüdür. S tıkız olduğu için $y_1, \dots, y_m$ gibi x 'ten farklı öyle sonlu sayıda nokta bulabiliriz ki,

$$S = \bigcup_{i=1}^m U(y_i)$$

sağlanır. Şimdi sabit tuttuğumuz x için

$$h_x = h_{xy_1} \wedge h_{xy_2} \wedge \dots \wedge h_{xy_m}$$

fonksiyonunu alalım. Teorem 8.4 bize bu fonksiyonun $\overline{A}$ 'da olduğunu verir. Her $s \in S$ için

$$h_x(s) < f(s) + \epsilon$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu kez her $x \in S$ için

$$V(x) = \{s \in S : h_x(s) > f(s) - \epsilon\}$$

ile tanımlanan açık kümeleri alalım. $h_x(x) = f(x)$ olduğundan, $x \in V(x)$ doğrudur. Dolayısıyla $(V(x))_{x \in S}$ obası tıkHz S uzayının açık bir örtüsüdür. Gene $x_1, \dots, x_n$ gibi öyle sonlu sayıda nokta bulalım ki,

$$S = \bigcup_{j=1}^n V(x_j)$$

sağlansın. Bu takdirde

$$h = h_{x_1} \vee \dots \vee h_{x_n}$$

ile tanımlanan fonksiyon da $\overline{A}$ uzayına aittir. Burada Teorem 8.4'ü $\overline{A}$ cebirine uyguluyoruz. Böylece her $s \in S$ için

$$f(s) - \epsilon < h(s) < f(s) + \epsilon$$

sağlanır, yani $\|h - f\| < \epsilon$. Böylece f 'nin $\overline{\overline{A}}$ kümesine ait olduğunu gördük. Ama $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. $\square$

Karmaşık değerli sürekli fonksiyonları ele almadan önce bu teoremin önemli bir özel haline bakalım. Burada S olarak herhangi bir $[a, b]$ kapalı aralığı alacağız. Gerçel katsayılı tüm polinomlardan oluşan kümeyi A ile gösterelim. A kümesi $C[a, b]$ içinde bir altcebirdir. Ayrıca A 'nın $[a, b]$ aralığının farklı noktalarını ayırdığı da aşikârdır. Böylece $\overline{A} = C[a, b]$ sağlanır. Demek ki Stone-Weierstrass teoreminin özel bir hali, şimdi vereceğimiz Weierstrass teoremi...

Teorem 8.6 (Weierstrass). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun. Verilmiş her $\epsilon > 0$ için öyle gerçel katsayılı bir p polinomu vardır ki

$$|f(s) - p(s)| < \epsilon$$

eşitsizliği her $s \in [a, b]$ için sağlanır. $\square$

$f : S \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli ise $f^*(s) = \overline{f(s)}$ ile tanımlanan f^* fonksiyonu da S üzerinde sürekli olur¹. f^* fonksiyonuna f fonksiyonunun **eşleniği** adı verilir.

$$\operatorname{Re} f(s) = \frac{1}{2}(f + f^*)(s), \quad \operatorname{Im} f(s) = \frac{1}{2}(f - f^*)(s)$$

ile tanımlanan gerçel değerli sürekli fonksiyonlarla, verilen f fonksiyonunu

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$$

¹Eğer $a, b \in \mathbb{R}$ için $z = a + bi$ bir karmaşık sayıysa, $\bar{z} \in \mathbb{C}$ elemanı $a - bi$ olarak tanımlanır ve z 'nin **eşleniği** olarak adlandırılır.

ifade ederek, gerçel değerli fonksiyonlar cinsinden yazabiliriz.

Karmaşık ve gerçel değerli sürekli fonksiyonların uzaylarını sırasıyla $C_{\mathbb{C}}(S)$ ve $C_{\mathbb{R}}(S)$ ile gösterelim. A ile $C_{\mathbb{C}}(S)$ cebirinin sabit fonksiyonları kapsayan, S uzayının noktalarını ayıran ve eşlenik alma işlemi $*$ altında kapalı bir altcebirini gösterelim. $f \in A$ ise $f^* \in A$ olduğundan $\operatorname{Re} f$ ve $\operatorname{Im} f$ fonksiyonları da A uzayındadır. $A_{\mathbb{R}}$ ile A kümesinin gerçel değerler alan öğelerinin oluşturduğu altkümeiy gösterelim. $A_{\mathbb{R}}$ cebirine Stone-Weierstrass teoreminin gerçel halini uygularsak

$$\overline{A_{\mathbb{R}}} = C_{\mathbb{R}}(S)$$

elde ederiz. Bir $f \in C_{\mathbb{C}}(S)$ verilsin. Bu sonucu kullanarak, $g_n \in A_{\mathbb{R}}$ ve $h_n \in A_{\mathbb{R}}$ fonksiyonlarını

$$\operatorname{Re} f = \lim g_n \text{ ve } \operatorname{Im} f = \lim h_n$$

olacak şekilde seçelim. Öte yandan

$$f_n = g_n + ih_n$$

ile tanımlanan f_n fonksiyonu A uzayındadır ve $\lim f_n = f$ sağlanır. Böylece Stone-Weierstrass Teoremi'nin karmaşık halini kanıtladık.

Teorem 8.7 (Stone-Weierstrass). $C_{\mathbb{C}}(S)$ uzayının bir A altcebirini tüm sabit fonksiyonları içersin ve S uzayının noktalarını ayırsın. Eğer her $f \in A$ için f^* fonksiyonu da A cebirindeyse, o zaman A cebiri $C_{\mathbb{C}}(S)$ içinde yoğundur. $\square$

T ile karmaşık düzlemdeki merkezi 0 olan birim çemberi gösterelim. T üzerinde tanımlı bir F fonksiyonu aracılığıyla

$$f(t) = F(e^{it})$$

tanımlanan fonksiyon f her $t \in \mathbb{R}$ için

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

denklemini sağlar; yani f periyodu 2π olan periyodik bir fonksiyondur. Tersine, 2π periyodu olan bir f fonksiyonu verildiğinde, yukarıdaki denklem ile bu kez F fonksiyonunu T üzerinde tanımlarız. Böylece $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı 2π -periyodlu fonksiyonlarla T kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonları özdeşleştirebiliriz. $C(T)$ ile T üzerindeki karmaşık değerli sürekli fonksiyonların oluşturduğu $C_{\mathbb{C}}(T)$ uzayını gösterelim. $F(e^{it})$ yerine genelde $F(t)$ yazacağız ($-\pi \leq t \leq \pi$). Bu notasyonla $C(T)$ uzayının normu

$$\|F\| = \sup\{|F(t)| : -\pi \leq t \leq \pi\}$$

ile gösterilecek. Euler özdeşliği denilen

$$e^{int} = \cos nt + i \sin nt$$

eşitliğinden esinlenerek

$$p(t) = \sum_{n=-m}^m c_n e^{int}$$

eşitliğiyle tanımlanan fonksiyonlara **trigonometrik polinomlar** adını verdiğimiz. Trigonometrik polinomlar Stone-Weierstrass teoreminin tüm varsayımlarını sağlayan bir cebir oluştururlar. Böylece şu önemli özel hali elde ederiz.

Teorem 8.8. *Trigonometrik polinomlar $C(T)$ uzayı içinde yoğundur.* $\square$

Şimdi sürekli bir $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\int_a^b t^n f(t) dt = 0$$

olsun. Öyleyse herhangi bir polinom p için gene

$$\int_a^b p(t) f(t) dt = 0$$

sağlanır. Şimdi Weierstrass teoremini kullanarak $[a, b]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsayan bir $(p_n)_n$ polinom dizisi bulalım. Böylece

$$\int_a^b f(t)^2 dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) p_n(t) dt = 0$$

olduğunu görürüz. Eğer bir $t_0 \in (a, b)$ için $f(t_0) \neq 0$ ise

$$\epsilon = \frac{f(t_0)^2}{2}$$

olsun. O zaman öyle bir $\delta > 0$ bulalım ki her $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) = I \subseteq [a, b]$ için

$$|f(t)^2 - f(t_0)^2| < \epsilon$$

sağlansın. Demek ki her $t \in I$ için

$$\frac{f_0(t)^2}{2} < f(t)^2$$

geçerlidir. $m(I)$ ile I aralığının uzunluğunu gösterirsek

$$0 < \frac{f(t_0)^2}{2} m(I) \leq \int_I f(t)^2 dt \leq \int_a^b f(t)^2 dt = 0$$

elde ederiz. Bu çelişki bize her $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\int_a^b t^n f(t) dt = 0$$

ise $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunun her $a \leq t \leq b$ için $f(t) = 0$ olması gerektiğini verir. Bir teorem kanıtladık:

Teorem 8.9. *Eğer $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}_0$ için*

$$\int_a^b t^n f(t) dt = 0$$

eşitliğini sağlıyorsa, $f = 0$ olur. □

NOTLAR

ABD Yüksek Mahkemesi'nin başyargıcı Harlan Stone'un oğlu olan **Mars-hall Harvey Stone** (1903-1986) Harvard Üniversitesi'ne hukuk okumak için devam ederken matematiği çok sevdiğini anlamış ve matematiğe geçmiştir. 1926 yılında diferansiyel denklemler konusunda yaptığı doktorasını tamamlamış ve Harvard, Yale, Columbia Üniversitelerinde çalıştıktan sonra 1937 yılında Harvard Üniversitesi'nde matematik profesörü olmuştur. İkinci Dünya Savaşı'ndan sonra 1946 yılında Chicago Üniversitesi Matematik Bölümü başkanı olan Stone, bu bölümü ABD'nin en önemli matematik merkezlerinden birisi haline getirmeyi başarmıştır. Stone 1968 yılında Chicago'dan ayrılarak Massachusetts Üniversitesi'ne geçmiştir.

19'uncu yüzyıl sonu ve 20'nci yüzyıl başlarında önce kümeler teorisi, sonra da topoloji gibi yeni alanların ortaya çıkmasıyla matematikte bir soyutlaşma akımı başlamıştır. Ancak bu akım matematikçiler arasında bir kutuplaşmaya yol açmıştır. Cantor'un ortaya attığı kümeler teorisini Kronecker gibi bazı ünlü matematikçiler fazla soyut ve gereksiz bulurken Weierstrass ve Dedekind ise bu yeni teoriyi desteklemişlerdir. Ama ilk başta çok soyut bulunan bu yeni alanların genel kabul görmesi ve benimsenmesi kolay olmamıştır. Weierstrass'ın ünlü yaklaşım teoremini yeni teorilerin sağladığı araçlarla Stone tarafından geliştirilmesi bu yeni teorilerin benimsenmesinde önemli bir aşama, bir kilometre taşı olmuştur.

Weierstrass'ın teoremine göre Stone-Weierstrass teoremi çok daha geneldir ve uygulama alanı çok geniştir [1]. Ayrıca Stone'un yeni yöntemlerle verdiği kanıt yalın bir güzelliğe sahiptir ve oldukça kolay anlaşılır. Stone bu kanıtta sürekli fonksiyonlar uzayı üzerinde tanımlı norm ile sıralama bağıntısı ve uzayın cebirsel yapısı arasındaki bağlantıları ustaca kullanmıştır. Stone-Weierstrass teoremi bugün fonksiyonel analizin temel sonuçları arasında yer almaktadır.

Kaynaklar

[1] M. H. Stone, *The Generalized Weierstrass Approximation Theorem*, Mathematics Magazine 21 (1948) 167-184.

[2] T. Terzioğlu, **Fonksiyonel Analizin Yöntemleri**, Matematik Vakfı (1998).

9. Banach Sabit Nokta Teoremi

Matematiğin değişik alanlarındaki bir çok problem $\theta(x) = x$ şeklinde yazılan bir denkleme çözmeye indirgenebilir. Verilen bir $\theta : X \rightarrow X$ dönüşümü için $\theta(x) = x$ denklemini sağlayan noktalara **sabit noktalar** denir. Böyle bir dönüşümün hangi koşullar altında sabit noktaları var? Kaç tane sabit nokta var? Bu noktaları nasıl buluruz? İşte bu gibi soruları yanıtlayan sonuçlara **sabit nokta teoremleri** adı verilir. Sabit nokta teoremleri arasında belki de en yaygın uygulaması olan Banach sabit nokta teoremi ve bu teoremin bazı sonuçları bu bölümümüzün konusu olacak. Bu önemli teoremin kanıtı ise hiç de zor değil.

İlkin X topolojik uzayı üzerinde tanımlı olan sürekli bir $\theta : X \rightarrow X$ dönüşümüne bakalım. Uzayımızdan herhangi bir x_0 noktası seçelim ve dönüşümümüzü bu noktaya ardarda uygulayarak

$$x_1 = \theta(x_0), \quad x_2 = \theta(x_1), \quad x_3 = \theta(x_2), \dots$$

dizisine bakalım. Yani $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$x_{n+1} = \theta(x_n)$$

olsun. Bir x_0 başlangıç noktasından yola çıkarak böylece tanımladığımız $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak olduğunu varsayalım. Eğer $x = \lim x_n$ ise, dönüşümümüzün sürekli olması bizi

$$\theta(x) = \lim \theta(x_n) = \lim x_{n+1} = x$$

sonucuna götürür, yani $\theta(x) = x$. Dolayısıyla tümevarım yöntemiyle tanımladığımız dizinin limiti varsa, bu limit dönüşümün bir sabit noktası olur.

Bu basit yöntem tek başına her zaman çok kullanışlı olmayabilir. Çünkü dönüşümümüzü ardarda uygulayarak elde ettiğimiz dizinin davranışı başlangıç noktasına göre pekâlâ farklı olabilir. Basit bir örnek olarak $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $\theta(x) = x^2$ dönüşümüne bakalım. $(-1, 1)$ aralığından seçeceğimiz herhangi bir x_0 noktasına dönüşümümüzü ardarda uygulayarak elde edeceğimiz

$(x_0^{2^n})_n$ dizisi 0'a yakınsar ve tabii 0 bir sabit nokta. Öte yandan $x_0 > 1$ veya $x_0 < -1$ olarak seçilirse $(x_0^{2^n})_n$ dizisi sınırlı bile değildir. Ama başlangıç noktası olarak 1 veya -1 alırsak, diğer sabit nokta olan 1'i bu yöntemle elde ederiz.

(X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer bir $0 < \alpha < 1$ sabiti için her $x, y \in X$ verildiğinde

$$d(\theta(x), \theta(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $\theta : X \rightarrow X$ dönüşümüne **büzülme dönüşümü** denir. Eğer x ve y böyle bir dönüşümün iki sabit noktasıysa,

$$d(x, y) = d(\theta(x), \theta(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

eşitsizliğinden $d(x, y) = 0$, yani $x = y$, elde ederdik. Demek ki büzülme dönüşümünün en fazla bir sabit noktası olabilir. Ayrıca büzülme dönüşümünün X üzerinde sürekli olduğunu tanımdan hemen görebileceğimizi belirtelim. Artık sıra Banach sabit nokta teoremine geldi.

Teorem 9.1 (Banach Sabit Nokta Teoremi). *Tam bir metrik uzay üzerinde tanımlı her büzülme dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır.*

Kanıt: Metrik uzay X , büzülme dönüşümü de θ olsun. $\alpha \in (0, 1)$ sayısını her $x, y \in X$ için

$$d(\theta(x), \theta(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

eşitsizliği geçerli olacak biçimde seçelim.

Kanıtımızın adımlarını şöyle sıralayabiliriz.

1. Rastgele seçilen x_0 başlangıç noktasıyla $n = 0, 1, 2, \dots$ için tümevarımla

$$x_{n+1} = \theta(x_n)$$

formülüyle tanımlanan dizi Cauchy koşulunu sağlar.

2. Uzayımız tam olduğu için bu dizinin limiti vardır. Büzülme dönüşümü süreklidir. Demek ki bu limit dönüşümün sabit noktasıdır.
3. Büzülme dönüşümünün en çok bir sabit noktası olabilir.

Öyleyse kanıtımızı tamamlamak için sadece birinci adımı göstermemiz yeterli olacak çünkü diğer iki adımı daha önce kanıtladık. Şimdi herhangi bir $x_0 \in X$ alalım ve $(x_n)_n$ dizisinin terimlerini $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$x_{n+1} = \theta(x_n)$$

olarak tanımlayalım. Önce

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(\theta(x_n), \theta(x_{n-1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1})$$

eşitsizliğini ardarda uygulayarak her $j = 0, 1, 2, \dots$ için

$$d(x_{n+j+1}, x_{n+j}) \leq \alpha^{j+1} d(x_n, x_{n-1}) \quad (9.1)$$

sonucuna varırız. Bu eşitsizlik dizimizin ardarda gelen terimleri arasındaki uzaklığın nasıl davrandığını veriyor. Ama bize gereken $d(x_n, x_{n+p})$ sayılarının davranışı. Önce üçgen eşitsizliğini kullanarak, herhangi bir p için,

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p})$$

yazalım. Sağ tarafa ilk elde ettiğimiz eşitsizliği uygularsak

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq (\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^p) d(x_{n-1}, x_n)$$

sonucuna varırız. Geometrik serinin toplamı

$$\frac{\alpha}{1 - \alpha} = \alpha + \alpha^2 + \dots$$

olduğundan, bu eşitsizlik bize

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} d(x_{n-1}, x_n)$$

verir. Ama (9.1)'de n yerine 1 ve j yerine $n - 2$ alarak bulacağımız

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq \alpha^{n-1} d(x_0, x_1)$$

sonucunu da kullanırsak

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1)$$

eşitsizliğine varırız. Şimdi verilen bir $\epsilon > 0$ için

$$\frac{\alpha^{n_0}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) < \epsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ seçelim. O zaman her $n \geq n_0$ ve $p \in \mathbb{N}$ verildiğinde

$$d(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$$

sağlanır. □

Teoremi kanıtladık ama bir de kanıtta $\lim x_n = x$ ile elde ettiğimiz yegâne sabit noktaya hangi hızla yaklaştığımızı görelim. Tabii $\lim_{p \rightarrow \infty} x_{n+p} = x$. Öyleyse $\lim_{p \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+p}) = d(x_n, x)$ ve yukarıdaki eşitsizlik bizi

$$d(x_n, x) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1)$$

sonucuna götürür. Böylece sabit nokta olarak x yerine x_n kullanırsak, yapacağımız hatanın üstsınırı hakkında bilgi edinmiş olduk.

Diferansiyel denklemler teorisinin temel sorunlarından biri

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

eşitlikleriyle ifade edilen **başlangıç değer probleminin** çözümünün varlığı ve tekliğidir. Buradaki f , düzlemin (x_0, y_0) noktasını da içeren bir altkümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyonu simgelemektedir. f verilmiştir. Problem, x_0 noktasında y_0 değerini alan ve x_0 civarında türevi $f(x, y)$ olan bir y fonksiyonu bulmak. Yani yukardaki eşitlikler aslında,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

olarak ifade edilmeliydi. Şimdi bir $r > 0$ sayısı için $I = [x_0 - r, x_0 + r]$ olsun ve $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu varsayalım. Bu halde

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

integral denkleminin çözümü olan y fonksiyonu başlangıç değer problemi-mizin de çözümüdür. Tabii bunun tersi de doğru. Diferansiyel denklemler kuramındaki varlık ve teklik teoremleri arasında **Picard teoremi** diye adlandırılan sonuç bu kuramın temel teoremlerinden biridir.

Teorem 9.2 (Picard Teoremi). *Bir $b > 0$ sabiti için*

$$|f(s, t_1) - f(s, t_2)| \leq b|t_1 - t_2|$$

eşitsizliği her $s \in I = [x_0 - r, x_0 + r]$ ve her $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ için sağlanıyorsa, başlangıç değer probleminin $I = [x_0 - r, x_0 + r]$ aralığında tek bir çözümü vardır.

Kanıt: Önce aralığımızı $I_1 = [x_0, x_0 + r]$ ve $I_2 = [x_0 - r, x_0]$ olarak iki parçaya ayıralım. Eğer y_1 fonksiyonu I_1 aralığında ve y_2 de I_2 aralığında verilen başlangıç değer problemimizin çözümleriyse, bunları uçuca yapıştırarak elde ettiğimiz

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{eğer } x \in I_1 \text{ ise} \\ y_2(x) & \text{eğer } x \in I_2 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu aradığımız çözümü verir. Öyleyse I_1 aralığında çalışarak y_1 fonksiyonunu bulmakla yetinelim. Diğer aralıktaki çözümü hemen hemen aynı yöntemle bulabiliriz. Bundan böyle $I = I_1 = [x_0, x_0 + r]$ olsun.

$C(I)$, I aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayını temsil ediyor. I tıkmaz olduğundan, I üzerine sürekli fonksiyonlar sınırlıdır. Teorem 5.2'den bu uzayın supremum metriği d altında tam olduğunu biliyoruz. Bir de

$$\rho(g, h) = \sup \left\{ e^{-2b(x-x_0)} |g(x) - h(x)| : x \in I \right\}$$

ile tanımladığımız $\rho : C(I) \times C(I) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyona bakalım. Bu şekilde $C(I)$ üzerinde yeni bir metrik tanımlandığını kolayca görürüz. Ayrıca

$$e^{-2br} = \min \{ e^{-2b(x-x_0)} : x \in I_1 \} < \max \{ e^{-2b(x-x_0)} : x \in I_1 \} = 1$$

olduğu için bu iki metrik arasında çift taraflı

$$e^{-2br} d(g, h) \leq \rho(g, h) \leq d(g, h)$$

eşitsizliğini hemen elde ederiz. Bu eşitsizliğin sol tarafı bize $(C(I), \rho)$ uzayındaki bir Cauchy dizisinin $(C(I), d)$ uzayında da Cauchy olduğunu gösterir. Ama $(C(I), d)$ tam. Öyleyse dizimiz $(C(I), d)$ uzayında yakınsaktır. Eşitsizliğin sağ tarafı ise dizimizin $(C(I), \rho)$ uzayında da yakınsadığını söyler. Demek $(C(I), \rho)$ tam bir metrik uzay.

Şimdi her $y \in C(I)$ ve $x \in I$ için

$$\theta(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

olarak tanımlansın. Elbette

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(y)}{dx} &= f(x, y) \\ \theta(y)(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Dolayısıyla teoremi kanıtlamak için $\theta(y) = y$ eşitliğini sağlayan bir $y \in C(I)$ bulmalıyız.

Eğer $x < x'$ ise

$$|\theta(y)(x) - \theta(y)(x')| \leq \int_x^{x'} |f(t, y(t))| dt$$

eşitsizliğine bakalım. Sürekli olan y fonksiyonu I aralığını kapalı bir J aralığı üzerine resmeder. Öyleyse f fonksiyonumuz $I \times J$ tıkmaz kümesinde sürekli olduğundan

$$L = \sup \{ |f(t, y(t))| : t \in I \}$$

sayısını tanımlayabiliriz. Yukarıdaki eşitsizlikten

$$|\theta(y)(x) - \theta(y)(x')| \leq L|x - x'|$$

elde ederiz. Böylece $\theta(y) \in C(I)$ olduğunu gördük. Bu şekilde tanımladığımız $\theta : C(I) \rightarrow C(I)$ dönüşümüne bakalım. Önce

$$|\theta(g)(x) - \theta(h)(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, g(t)) - f(t, h(t))| dt \leq b \int_{x_0}^x |g(t) - h(t)| dt$$

elde ederiz. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $e^{-2b(x-x_0)}$ ile çarparak

$$\begin{aligned} e^{-2b(x-x_0)} |\theta(g)(x) - \theta(h)(x)| &\leq b \int_{x_0}^x e^{-2b(x-x_0)} |g(t) - h(t)| dt \\ &= b \int_{x_0}^x e^{-2b(x-t)} \left(e^{-2b(t-x_0)} |g(t) - h(t)| \right) dt \end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Sağ taraftaki integralde beliren ifadenin, her $t \in I$ için

$$e^{-2b(t-x_0)} |g(t) - h(t)| \leq \rho(g, h)$$

eşitsizliğini sağladığını görürüz. Öyleyse

$$\begin{aligned} e^{-2b(x-x_0)} |\theta(g)(x) - \theta(h)(x)| &\leq b \rho(g, h) \int_{x_0}^x e^{-2b(x-t)} dt \\ &= \frac{\rho(g, h)}{2} e^{2b(x_0-x)} \leq \frac{\rho(g, h)}{2}. \end{aligned}$$

Burada $x_0 \leq x$ olduğunu kullandık. Şimdi sol tarafın I üzerinde supremumunu alırsak

$$\rho(\theta(g), \theta(h)) \leq \frac{1}{2} \rho(g, h)$$

sonucuna varır ve Banach sabit nokta teoremini uygulayarak kanıtımızı bitiririz. $\square$

Şimdi $I = [a, b]$ için $K : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonları ve $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ verilsin. Uygulamada sık sık karşılaşılan

$$f(t) = \lambda \int_a^b K(t, s) f(s) ds + g(t) \quad (t \in I)$$

denkleminin **Fredholm integral denklemi** adı verilir. Bu denklemde bilinmeyen f fonksiyonudur. Aslında (çekirdek fonksiyonu olarak adlandırılan) K fonksiyonuna yedirilerek λ 'nın 1'e eşit olduğu varsayılabilir ama gelenek λ 'yı yazmak yönündedir.

Denklemin çözümünün varlığını irdelemek amacıyla her $f \in C(I)$ için

$$\theta(f)(t) = \lambda \int_a^b K(t, s) f(s) ds + g(t)$$

formülüyle verilmiş fonksiyonu tanımlayalım ve $\theta(f) = f$ denkleminin çözümünün olduğunu kanıtlayalım. θ 'nın $C(I)$ uzayından $C(I)$ uzayına giden bir fonksiyon olduğu aşikâr.

Önce $\theta(f)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. $f = 0$ için bu bariz olduğundan $f \neq 0$ varsayımını yapalım. Düzgün süreklilikten dolayı (kapalı bir aralık üzerine tanımlanmış sürekli fonksiyonlar düzgün süreklidirler), bir $\epsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $\delta > 0$ saptayalım ki her $|t' - t| < \delta$ için

$$|g(t) - g(t')| < \frac{\epsilon}{2}$$

ve

$$|K(t, s) - K(t', s)| < \frac{\epsilon}{2|\lambda|(b-a)\|f\|}$$

eşitsizlikleri birlikte sağlansın. Öyleyse

$$|\theta(f)(t) - \theta(f)(t')| \leq |\lambda| \int_a^b |K(t, s) - K(t', s)| \|f\| ds + |g(t) - g(t')|$$

eşitsizliğini kullanarak $|t - t'| < \delta$ halinde $|\theta(f)(t) - \theta(f)(t')| < \epsilon$ olduğunu elde ederiz. Böylece θ ile $C(I)$ uzayı üzerinde bir dönüşüm tanımlanmış olduk. Şimdi bu dönüşümün ne zaman büzülme dönüşümü olduğunu irdeleyelim. $C(I)$ uzayından seçeceğimiz f_1 ve f_2 için

$$|\theta(f_1)(t) - \theta(f_2)(t)| \leq |\lambda| \|f_1 - f_2\| \int_a^b |K(t, s)| ds$$

elde ederiz. Öyleyse sağdaki integral yerine

$$A = \sup \left\{ \int_a^b |K(t, s)| ds : t \in I \right\} \leq \max\{|K(t, s)| : t \in I, s \in I\} (b - a)$$

sayılarına bakalım. Yukarıdaki eşitsizlikte sol tarafın $t \in I$ üzerinde supremunu alarak

$$\|\theta(f_1) - \theta(f_2)\| \leq |\lambda| A \|f_1 - f_2\|$$

sonucuna varırız. Öyleyse $|\lambda|A < 1$ halinde tanımladığımız θ dönüşümü $C(I)$ Banach uzayı üzerinde büzülme dönüşümü olur. Bu dönüşümün tek bir sabit noktası ise başladığımız Fredholm denkleminin tek çözümüdür.

Bir X kümesi üzerinde tanımlı θ dönüşümünü ardarda uygulayarak

$$\theta^2, \theta^3, \theta^4, \dots$$

gibi bir dizi dönüşüm elde ederiz. Şimdi bir X tam metrik uzayı üzerinde tanımlı θ dönüşümü için $\theta^i : X \rightarrow X$ büzülme dönüşümü ise, Banach sabit nokta teoremi bize

$$\theta^i(x) = x$$

denklemini sağlayan tek bir $x \in X$ olduğunu söylüyor. Ama bir de $\theta(x)$ noktasına bakalım.

$$\theta^i(\theta(x)) = \theta^{i+1}(x) = \theta(\theta^i(x)) = \theta(x).$$

Öyleyse $\theta(x)$ noktası da θ^i dönüşümü altında sabit kalıyor. Ama bu dönüşümün tek sabit noktası var. Demek ki $\theta(x) = x$ olacak. Öte yandan θ dönüşümünün bir sabit noktası mutlaka θ^i dönüşümünün de sabit noktasıdır. Böylece Banach sabit nokta teoreminin daha genel bir halini hemen kanıtlamış olduk.

Teorem 9.3. *Tam bir metrik uzay üzerinde tanımlı θ dönüşümü verildiğinde herhangi bir $i \in \mathbb{N}$ için $\theta^i : X \rightarrow X$ bir büzülme dönüşümü ise, θ dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır.* $\square$

Daha önce incelediğimiz Fredholm integral denklemindeki notasyonu tekrar kullanarak yazdığımız

$$f(t) = \lambda \int_a^t K(t, s) f(s) ds + g(t)$$

Volterra integral denklemini ele alalım. Bu denklemin Fredholm denkleminin tek farkı integralin üst limitinde. Gene $C(I)$ uzayı üzerinde

$$\theta(f)(t) = \lambda \int_a^t K(t, s) f(s) ds + g(t)$$

ile θ dönüşümünü tanımlayalım. Bu tanımdan her sürekli $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\theta(f)$ fonksiyonunun da I üzerinde sürekli olduğunu görmek kolay. M sayısını

$$M = \sup\{|K(t, s)| : t \in I, s \in I\}$$

olarak tanımlarsak, $C(I)$ uzayından seçilen f_1 ve f_2 için gene

$$|\theta(f_1)(t) - \theta(f_2)(t)| \leq |\lambda| M(t - a) \|f_1 - f_2\|$$

sonucuna varırız ve buradan da I aralığında supremum alarak

$$\|\theta(f_1) - \theta(f_2)\| \leq |\lambda| M(b - a) \|f_1 - f_2\|$$

elde ederiz. Bu yöntem bize

$$|\lambda| M(b - a) < 1$$

ise, θ dönüşümünün büzülme dönüşümü olduğunu verir. Çözümün varlığı ve tekliği λ , M ve $b - a$ değerlerine bağlı. Ama sabit nokta teoreminin genelleştirilmiş halini kullanarak çok daha iyi bir sonuç elde edeceğiz. θ yerine θ^2

kullanırsak

$$\begin{aligned}
 |\theta^2(f_1)(t) - \theta^2(f_2)(t)| &\leq |\lambda| \int_a^t |K(t, s)| |\theta(f_1)(s) - \theta(f_2)(s)| \\
 &\leq |\lambda|^2 M^2 \int_a^t (s - a) ds \|f_1 - f_2\| \\
 &\leq \frac{|\lambda|^2 M^2 (t - a)^2}{2!} \|f_1 - f_2\|
 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu yöntemi tekrarlayarak her $i \in \mathbb{N}$ için

$$|\theta^i(f_1)(t) - \theta^i(f_2)(t)| \leq \frac{(|\lambda|M)^i}{i!} (t - a)^i \|f_1 - f_2\|$$

sonucuna varırız ve her iki tarafın supremumu alarak

$$\|\theta^i(f_1) - \theta^i(f_2)\| \leq \frac{(|\lambda|M(b - a))^i}{i!} \|f_1 - f_2\|$$

eşitsizliğine ulaşırız. Herhangi bir $r > 0$ sayısı için

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{r^i}{i!} = 0$$

olduğunu biliyoruz. Öyleyse yeteri kadar büyük bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{(|\lambda|M(b - a))^n}{n!} < 1$$

sağlanır. Demek ki θ^n büzülme dönüşümü ve böylece her λ , K ve g için Volterra integral denkleminin tek bir çözümü olduğunu Teorem 9.3'ü kullanarak kanıtlamış olduk.

NOTLAR

X ile gösterdiğimiz bir metrik uzay üzerinde tanımlı θ dönüşümü bu uzaydaki noktalar arasındaki uzaklığı belirli bir oranda daraltması veya büzleştirilmesi, Banach sabit nokta teoreminin ana fikridir. Ancak bu büzüşme verilen noktalardan bağımsız bir oranda olmalıdır. Örnek olarak $X = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ uzayı üzerinde $\theta(x) = x + x^{-1}$ ile tanımlanan dönüşüme bakalım. X uzayından seçeceğimiz farklı iki x ve y noktası için $|\theta(x) - \theta(y)| < |x - y|$ eşitsizliğinin sağlandığını kolayca görürüz ama bu dönüşümün sabit noktası yok. Demek ki farklı iki nokta x ve y için $\theta : X \rightarrow X$ dönüşümünün $d(\theta(x), \theta(y)) < d(x, y)$ koşulunu sağlaması bu dönüşümün sabit noktası olması için yeterli değil.

Bu bölümdeki örneklerde gördüğümüz gibi somut bir problemi Banach sabit nokta teoremi aracılığıyla çözmek için esas zorluk X olarak uygun bir metrik uzay tanımlamaktır. İntegral ve diferansiyel denklemler alanında Banach sabit nokta teoreminin bu bölümde değindiklerimiz dışında da birçok uygulaması vardır. Teoremin fraktaller uzayındaki ilginç uygulamaları için [2]'yi öneririm.

Kaynaklar

- [1] Norman B. Haaser and Joseph A. Sullivan, **Real Analysis**, Dover Publications 1991.
- [2] Erdoğan S. Şuhubi, **Fonksiyonel Analiz** İTÜ Vakfı 2001.
- [3] T. Terzioğlu, **An Introduction to Real Analysis**, Matematik Vakfı 2000.

10. Sayılar ve Polinomlar

Polinomların köklerini bulmak matematikçilerin çağlar boyu araştırdıkları konulardan biri olmuştur. Bu köklerle farklı sayı kümeleri arasındaki ilişkiye bir gözatalım. Birinci dereceden ve katsayıları tamsayı olan $a_1x + a_0$ gibi polinomların köklerini bulmak kolay; burada kök tabii $-a_0/a_1$, yani rasyonel bir sayı. Rasyonel sayıların hepsini bu yolla elde ederiz. Ama hemen bir üst dereceye geçtiğimizde rasyonel sayılar yetersiz kalır. Bir asal sayının kare kökünün rasyonel olmadığını biliyoruz. Demek ki herhangi bir p asal sayısı verildiğinde $x^2 - p$ polinomunun kökleri olan $\sqrt{p}$ ve $-\sqrt{p}$ sayıları rasyonel olmayan gerçel sayılardır.

$\mathbb{Q}$ ile rasyonel sayılar kümesini $\mathbb{R}$ ile de gerçel sayılar kümesini gösterirsek, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kümesindeki sayılara **irrasyonel sayılar** denir. Her gerçel sayıyı terimlerinin hepsi rasyonel olan bir dizinin limiti olarak yazabiliriz. Diğer bir deyişle $\mathbb{Q}$ kümesi $\mathbb{R}$ içinde yoğundur. Öte yandan rasyonel sayılar sayılabilir, fakat $\mathbb{R}$ ise sayılamaz. Bunu ileride kanıtlayacağız. Kabaca ifade edersek, rasyonel sayıdan çok daha fazla irrasyonel sayı vardır diyebiliriz. Rasyonel sayılar kümesini genişleterek gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ 'ye ulaşmak matematik tarihinde önemli bir yeri olan sonuçtur. Ancak polinomların köklerinin her zaman gerçel olmadığını da biliyoruz. Çünkü hiçbir gerçel sayı $x^2 + 1 = 0$ denkleminin çözümü olamaz. Demek ki gerçel sayılar cismini bir kez daha genişletmemiz gerekecek. Bunu yaptığımız zaman da bilindiği gibi $i = \sqrt{-1}$ sembolünü kullanarak $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$z = a + ib,$$

biçiminde yazılan **karmaşık sayıları** elde ederiz. İki karmaşık sayı için

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

olarak toplamayı ve

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

olarak çarpmayı tanımlarsak, karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$ üzerine cisim yapısı koyarız. Nasıl rasyonel sayılar cismi $\mathbb{Q}$, gerçel sayılar cisminin bir altcismi ise, gerçel sayılar cismi $\mathbb{R}$ de karmaşık sayıların bir altcismidir.

Katsayıları $a_0, a_1, \dots, a_n$ karmaşık sayıları olan n 'inci dereceden

$$p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n, \quad a_n \neq 0$$

polinomunun bir kökü z_1 ise, uzun bölme işlemiyle

$$p(z) = (z - z_1)q(z)$$

elde ederiz. Buradaki q polinomu $n-1$ 'inci derecedendir. Derecesi 1'den büyük veya 1'e eşit her karmaşık katsayılı polinomun en az bir kökü olduğunu biliyorsak, bu işlemi tekrarlayarak verilen polinomu

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

biçiminde çarpanlara ayırırız. Bu ayırımdaki $z_1, \dots, z_n$ karmaşık sayıları polinomun bütün köklerini verir. Kökler, $z^2 - 2z + 1 = (z - 1)^2$ örneğinde olduğu gibi tekrarlanabilir. **Cebirin temel teoremi** adı verilen teorem karmaşık katsayılı her polinomun en az bir kökü olduğunu söyler. Bu önemli teoremin birçok farklı kanıtı var. Bilinen klasik kanıtlarda analitik fonksiyonlar teorisinin bazı kavram ve teoremleri kullanılır. Biz, cebirin temel teoreminin en taze kanıtını vereceğiz.

Teorem 10.1 (Cebirin Temel Teoremi). *Derecesi 1 veya daha büyük olan karmaşık katsayılı bir polinomun karmaşık sayı olan en az bir kökü vardır.*

Kanıt: Savımızın tersine, derecesi n olan bir

$$p(z) = a_nz^n + \dots + a_1z + a_0$$

polinomunun her $z \in \mathbb{C}$ için $p(z) \neq 0$ olduğunu varsayalım. Burada $a_n \neq 0$ ve $n \geq 1$.

$$p(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right)$$

ifadesinden yola çıkarak,

$$\frac{|p(z)|}{|z^n|} = \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right|$$

elde ederiz. Her z karmaşık sayısını, $r \geq 0$ ve $\theta \in [0, 2\pi)$ olmak üzere

$$z = re^{i\theta}$$

şeklinde tek bir biçimde yazabileceğimizi biliyoruz. Burada θ 'yı sabit tutup r sonsuza giderken limit alırsak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|p(re^{i\theta})|}{r^n} = |a_n|$$

buluruz. Dolayısıyla her $\theta \in [0, 2\pi)$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|p(re^{i\theta})|} = 0$$

olur. Şimdi $g : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunu

$$g(r, \theta) = \frac{1}{p(re^{i\theta})}$$

olarak tanımlayalım. Demek ki

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|p(re^{i\theta})|} = 0.$$

İki değişkenli $g(r, \theta)$ fonksiyonunun zincir kuralıyla kısmi türevlerini alalım. O zaman $p'(z) = dp/dz$ tanımıyla,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \theta} &= \frac{p'(z)}{p(z)^2} rie^{i\theta}, \\ \frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{p'(z)}{p(z)^2} e^{i\theta} \end{aligned}$$

olur ve dolayısıyla

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = ir \frac{\partial g}{\partial r}$$

elde ederiz. Şimdi de

$$F(r) = \int_0^{2\pi} g(r, \theta) d\theta$$

fonksiyonuna bakalım. İntegral altında türev olarak

$$irF'(r) = \int_0^{2\pi} ir \frac{\partial g}{\partial r} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial \theta} d\theta = g(r, 2\pi) - g(r, 0) = 0$$

olduğunu görürüz. Demek ki $F'(r) = 0$, yani F sabit bir fonksiyon. Öyleyse her r için

$$F(r) = F(0) = \frac{2\pi}{p(0)} \neq 0$$

ama $\lim_{r \rightarrow \infty} g(r, 0) = 0$. Bu çelişkiyle kanıtımız sona erer. $\square$

Herhangi bir p asal sayısı için $p^{1/n}$ ($n = 2, 3, \dots$) sayılarının irrasyonel olduğunu biliyoruz. Şimdi de

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

sayısına bakalım.

$$\frac{1}{(k+1)!} < \sum_{n>k} \frac{1}{n!} = \frac{1}{k!} \sum_{n>0} \frac{1}{(k+1) \cdots (k+n)} < \frac{1}{k!} \sum_{n>0} \frac{1}{(k+1)^n} < \frac{1}{k!} \frac{1}{k}$$

olur. Dolayısıyla eğer

$$c_k = k! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} \right) \in \mathbb{N}$$

tanımını yaparsak,

$$e = \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} \right) + \sum_{n>k} \frac{1}{n!}$$

eşitliğinden,

$$c_k < k! e < c_k + \frac{1}{k}$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Şimdi $s \in \mathbb{N}$ olsun ve diyelim a ve $b > 0$ tam-sayılarıyla $e^s = a/b$ olarak yazılabiliyor. O halde her $k \in \mathbb{N}$ için

$$c_k^s < k!^s \frac{a}{b} < \left(c_k + \frac{1}{k} \right)^s$$

ve

$$(bc_k)^s < b^{s-1} k!^s a < \left(bc_k + \frac{b}{k} \right)^s \quad (10.1)$$

elde ederiz. Ama $\lim_{h \rightarrow 0} (bc_k + h)^s = (bc_k)^s$ olduğundan, yeterince büyük bir k doğal sayısı için,

$$\left(bc_k + \frac{b}{k} \right)^s - (bc_k)^s < 1$$

olur ve böylece (10.1)'den

$$(bc_k)^s < b^{s-1} k!^s a < (bc_k)^s + 1$$

eşitliğini elde ederiz. Ama $(bc_k)^s$ ve $b^{s-1} k!^s a$ birer tamsayı olduğundan bu mümkün değildir. Demek ki e^s sayısı rasyonel bir sayı değildir. s bir doğal sayıyken e^s rasyonel bir sayı olamayacağından, $q > 0$ kesirli bir sayıysa da e^q rasyonel olamaz.

İşte Fourier 1815'te e sayısının irrasyonel olduğunu böyle kanıtlamıştı. Aynı sonucun çok şık olan Kitap'taki kanıtını da verelim [1].

Teorem 10.2. *0'dan farklı her rasyonel r sayısı için e^r irrasyoneldir.*

Kanıt: $r > 0$ varsayımını yapabiliriz. O zaman $s, t \in \mathbb{N}$ için $r = s/t$ şeklinde yazabiliriz. Eğer e^r rasyonel olsaydı, $e^s = (e^r)^t$ sayısı da rasyonel olurdu. Öyleyse teoreminizi kanıtlamak için bir $s \in \mathbb{N}$ verildiğinde e^s sayısının irrasyonel olduğunu göstermek yeterli olacak. Şimdi bir $s \in \mathbb{N}$ için e^s sayısının rasyonel olduğunu varsayalım ve buradan bir çelişki elde ederek teoreminizi kanıtlayalım. $a, b \in \mathbb{N}$ için

$$e^s = \frac{a}{b}$$

olsun.

Geçmişte (4.4) olarak kanıtladığımız $\lim_{n \rightarrow \infty} n!^{1/n} = \infty$ bilgisini kullanarak $n! > as^{n+1}$ eşitsizliğini sağlayan bir $n \in \mathbb{N}$ seçelim ve

$$p(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

polinomunu tanımlayalım. Elbette $(0, 1)$ aralığında

$$0 < p(x) < \frac{1}{n!}$$

eşitsizliği sağlanır. Derecesi $2n$ olan bu polinomu

$$p(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{2n} c_i x^i$$

şeklinde yazalım. Buradaki c_i katsayıları birer tamsayıdır.

Bu polinomun 0'daki türevlerine bakalım. Her $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ için $p^{(k)}(0) = 0$ ve $k = n, \dots, 2n$ içinse

$$p^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!} c_k = k(k-1) \cdots (k-n+1) c_k$$

olur. Demek ki 0'daki türevlerin hepsi birer tamsayı. 1'deki türevleri ise

$$p(x) = p(1-x)$$

özdeşliğinden

$$p^{(k)}(1) = (-1)^k p^{(k)}(0)$$

olarak elde ederiz. Bunlar da tamsayı o zaman. Bu polinom yardımıyla tanımlanan

$$F(x) = s^{2n} p(x) - s^{2n-1} p'(x) + s^{2n-2} p''(x) - \cdots + p^{(2n)}(x)$$

fonksiyonuna bakalım. Her $k > 2n$ için $p^{(k)}(x) = 0$ olduğundan bu toplamı sonsuz toplam gibi de düşünebiliriz. Türev alarak

$$F'(x) = s^{2n} p'(x) - s^{2n-1} p''(x) + \cdots$$

elde ederiz. Bu da bize

$$F'(x) = -sF(x) + s^{2n+1}p(x)$$

denklemini verir. Ama ayrıca

$$\frac{d}{dx}(e^{sx}F(x)) = se^{sx}F(x) + e^{sx}F'(x)$$

olduğundan,

$$\frac{d}{dx}(e^{sx}F(x)) = s^{2n+1}e^{sx}p(x)$$

buluruz. Şimdi x 'e göre integral alalım.

$$\int_0^1 s^{2n+1}e^{sx}p(x) dx = e^sF(1) - F(0).$$

Varsayımımıza göre $be^s = a$. Öyleyse

$$aF(1) - bF(0) = b \int_0^1 s^{2n+1}e^{sx}p(x) dx = I$$

olmalı. Buradaki a , b , $F(1)$ ve $F(0)$ sayıları birer tamsayı. Demek ki yukarıdaki integralin değeri olan I da tamsayı. Öte yandan integralini aldığımız fonksiyon $[0, 1]$ aralığında

$$bs^{2n+1}e^{sx}p(x) < \frac{bs^{2n+1}e^s}{n!} = \frac{as^{2n+1}}{n!} < 1$$

eşitsizliğini sağlar. Bu da bize $I < 0$ verir. Ama $(0, 1)$ açık aralığında $e^{sx}p(x)$ fonksiyonu hep pozitif değer alıyor ve bu fonksiyon sürekli. Öyleyse $I > 0$. İşte aradığımız çelişki. $\square$

Katsayıları tamsayı olan polinomların köklerine **cebirselsel sayı** denir. $r = a/b$ rasyonel sayısı tabii $bx - a$ polinomunun kökü. Dolayısıyla her rasyonel sayı cebirselsel bir sayıdır. Ama $x^2 - 2$ polinomunun kökleri olan $\sqrt{2}$ ve $-\sqrt{2}$ cebirselsel sayıları rasyonel değil. Daha genel olarak, herhangi bir p asal sayısı ve 1'den büyük bir n doğal sayısı verildiğinde $x^n - p$ polinomunun kökü olan $p^{1/n}$ sayısı rasyonel olmayan cebirselsel sayıdır. Tabii $x^2 + 1$ polinomunun kökü olan i de cebirselsel bir sayı ve kesirli değil.

Rasyonel katsayılı bir f polinomunun tüm katsayılarının paydalarını çarparak bulduğumuz $m \in \mathbb{Z}$ sayısını alalım ve $g(x) = mf(x)$ olarak tanımladığımız polinoma bakalım. Eğer $f(a) = 0$ ise tabii a aynı zamanda g 'nin de kökü ve g polinomunun katsayıları birer tamsayı. Demek ki rasyonel katsayılı polinomların kökleri de cebirselsel sayılar.

Cebirin temel teoremine göre n 'inci dereceden bir polinomun en çok n tane kökü var. Her m ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$P_{n,m} = \left\{ a_n z^n + \cdots + a_0 : a_i \in \mathbb{Z}, a_n \geq 0 \text{ ve } 1 \leq \sum_{i=0}^n |a_i| \leq m \right\}$$

olsun. $P_{n,m}$ kümesinin sonlu sayıda ögesi olduğunu kolayca görebiliriz. Öyleyse $\mathbb{A}_{n,m}$ ile tanımladığımız $P_{n,m}$ kümesindeki polinomların köklerini gösterirsek, $\mathbb{A}_{n,m}$ kümesi de sonlu olur. Buradan da

$$\mathbb{A} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{A}_{n,m}$$

kümesinin sayılabilir bir küme olduğunu bulabiliriz. Tabii $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A} \cap \mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$ ve böylece sayılabilir sonsuzlukta cebirsel sayı olduğunu görmüş oluruz. Tabii böylece rasyonel sayıların da sayılabilir sonsuzlukta olduğunu kanıtlamış olduk. Cebirsel olmayan gerçel sayıların varlığını göstermek için **Cantor'un çapraz** yöntemini kullanarak gerçel sayıların sayılamayacağını kanıtlayalım.

Bunun için sadece $\xi_i \in \{0, 1\}$ tamsayılarını kullanarak

$$s = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\xi_i}{10^i}$$

şeklinde yazılabilen sayıların kümesini $\mathbb{S}$ ile gösterelim. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{S}$ birebir fonksiyon olsun. Bu durumda $f(\mathbb{N})$ kümesindeki her sayıyı $f(1), f(2), \dots$ olarak gösterir ve şu tabloyu buluruz

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, x_{11} x_{12} x_{13} \dots \\ f(2) &= 0, x_{21} x_{22} x_{23} \dots \\ f(3) &= 0, x_{31} x_{32} x_{33} \dots \\ &\dots \\ f(n) &= 0, x_{n1} x_{n2} x_{n3} \dots x_{nn} \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Tabii bu tablodaki her x_{ij} ya 0 ya 1. Şimdi $\xi_n = 1 - x_{nn}$ ile tanımladığımız

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\xi_i}{10^i}$$

sayısını ele alalım. Tabii $x \in \mathbb{S}$ ama $\xi_n = 1 - x_{nn} \neq x_{nn}$. Dolayısıyla $x \in \mathbb{S} \setminus f(\mathbb{N})$. Yani birebir olan herhangi bir $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{S}$ fonksiyonu örten olamaz. Tanımladığımız $\mathbb{S}$ ise gerçel sayıların bir altkümesi. Demek ki $\mathbb{R}$ de sayılabilir

değildir. Böylece gerçel cebirsel sayılardan çok daha fazla gerçel sayı olduğunu görmüş olduk. Cebirsel olmayan gerçel sayılara **aşkın** denir. Ama elimizde henüz somut bir aşkın sayı örneği yok. Böyle örnekler bulmak için işe bir tanımla başlayalım.

Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $p \in \mathbb{N}$ ve $2 \leq q \in \mathbb{N}$ varsa x gerçel sayısına **Liouville sayısı** denir. Önce Liouville sayılarının irrasyonel olduğunu görelim. Eğer bir x Liouville sayısı rasyonelse $c \in \mathbb{N}$ ve $2 \leq d \in \mathbb{N}$ sayılarıyla $x = c/d$ yazalım. Verilen her $n \in \mathbb{N}$ için

$$0 < \left| \frac{c}{d} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^n}$$

eşitsizliğini sağlayan p_n ve 1'den büyük q_n tamsayılarını seçelim. O halde

$$0 < \left| \frac{cq_n - p_nd}{dq_n} \right| < \frac{1}{q_n^n}$$

olur. Demek ki $cq_n - p_nd \neq 0$. Öyleyse

$$\frac{1}{dq_n} \leq \left| \frac{cq_n - p_nd}{dq_n} \right| < \frac{1}{q_n^n}.$$

Şimdi $2^{n-1} > d \geq 2$ eşitsizliğini sağlayan bir $n \in \mathbb{N}$ seçelim ve $q_n \geq 2$ olduğunu hatırlayalım. Bu halde

$$\frac{1}{q_n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}q_n} < \frac{1}{dq_n} < \frac{1}{q_n^n}$$

buluruz. Bu çelişkiyle her Liouville sayısının irrasyonel olduğunu kanıtladık.

Dikkat ederseniz bu kanıtta Liouville sayılarının tanımının tüm gücünü kullanmadık, çelişki $2^{n-1} > d \geq 2$ eşitsizliğini sağlayan özel bir n 'den kaynaklandı. Birazdan tanımın tüm gücünü kullanarak Liouville sayılarının aşkın olduklarını göreceğiz.

Fazla ilerlemeden önemli bir örneğe bakalım. Sonsuz bir seri olarak tanımladığımız

$$c = \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!} \quad (10.2)$$

sayısını ondalık sistemde yazarsak, c 'nin virgülden sonra her $n!$ 'inci basamağında 1, diğer basamaklarda 0 olan bir sayı olduğunu görürüz:

$$c = 0,1100010 \dots 010 \dots 010 \dots 010 \dots$$

Burada ardarda gelen 1'ler arasındaki 0'larla dolu olan gedik giderek genişlemekte çünkü

$$(j+1)! - j! = j \cdot j!$$

olduğundan, terimleri $j!$ olan dizi hızlı artan bir dizidir. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ verildiğinde

$$q_n = 10^{n!} \text{ ve } p_n = \left(\sum_{j=1}^n 10^{-j!} \right) 10^{n!}$$

ile iki doğal sayı tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} c - \frac{p_n}{q_n} &= \sum_{j=n+1}^{\infty} 10^{-j!} = \frac{1}{10^{(n+1)!}} + \frac{1}{10^{(n+2)!}} + \dots \\ &= \frac{1}{10^{(n+1)!}} \left(1 + \frac{1}{10^{n+2}} + \frac{1}{10^{(n+2)(n+3)}} + \dots \right) \\ &< \frac{1}{10^{(n+1)!}} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{10^{(n+1)!}} \frac{10}{9} < \frac{1}{(10^{n!})^n} = \frac{1}{q_n^n} \end{aligned}$$

elde ederiz. Demek ki yukarıda tanımladığımız c bir Liouville sayısı. Bu tanımında $j!$ yerine $j n_j < n_{j+1}$ eşitsizliklerini sağlayan doğal sayıları kullanarak elde edilen

$$\sum_{j=1}^{\infty} 10^{-n_j}$$

sayısının da gene bir Liouville sayısı olduğunu aynı yöntemle kanıtlayabiliriz.

Esas amacımız her Liouville sayısının aşkın bir sayı olduğunu kanıtlamak. Herhangi bir gerçel sayıyı her teriminin paydası 1'den büyük bir tamsayı olan rasyonel sayıların limiti olarak ifade edebileceğimizi biliyoruz. Ama bir x Liouville sayısı için

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

eşitsizliğinden $(p_n/q_n)_n$ dizisinin x sayısına hızlı yaklaştığını görürüz. Oysa Liouville sayısı irrasyonel. Önce irrasyonel olan cebirsel sayılara rasyonel sayılarla yaklaşımın hızını sınırlayan Liouville'in bir teoremini ele alalım.

Teorem 10.3. *İrrasyonel bir α sayısı, derecesi $n > 0$ olan, tamsayı katsayılı bir polinomun köküyse, öyle bir $A > 0$ sayısı vardır ki her $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, için*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{A}{q^n}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt: $c_0, c_1, \dots, c_n$ tamsayılarıyla tanımlanan

$$f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$$

polinomunun derecesi n olsun. Demek ki $c_n \neq 0$. Bir α sayısı bu f polinomunun kökü ise diğer kökleri $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ile gösterelim. Şimdi

$$M = \max\{|f'(x)| : \alpha - 1 \leq x \leq \alpha + 1\}$$

yazalım.

Bu sayı 0 olsaydı, $(\alpha - 1, \alpha + 1)$ aralığında f polinomu sabit olurdu. Ama bir polinomun sonlu sayıda kökü var. Demek ki $M > 0$. Şimdi A sayısını

$$A = \frac{1}{2} \min \left\{ 1, \frac{1}{M}, |\alpha - \alpha_1|, \dots, |\alpha - \alpha_m| \right\}$$

olarak tanımlayalım. Varsayımızın tersine öyle $p \in \mathbb{Z}$, $0 \neq q \in \mathbb{N}$ sayıları olsun ki

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{A}{q^n} \leq A \leq \frac{1}{2} < 1$$

sağlansın. Öyleyse p/q sayısı $[\alpha - 1, \alpha + 1]$ aralığında ve ayrıca her $i = 1, \dots, m$ için

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq A \leq \frac{|\alpha - \alpha_i|}{2} < |\alpha - \alpha_i|$$

geçerli. Demek ki p/q sayısı polinomumuzun kökü olamaz. Ara değer teoremini f' 'ye uygularsak α ve p/q sayıları arasındaki (dolayısıyla $[\alpha - 1, \alpha + 1]$ aralığındaki) bir x_0 için

$$0 \neq -f\left(\frac{p}{q}\right) = f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\alpha - \frac{p}{q}\right) f'(x_0)$$

elde ederiz. Dolayısıyla $|f'(x_0)| > 0$. Şimdi

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\sum_{j=0}^n c_j p^j q^{n-j}}{q^n}$$

eşitliğine yoğunlaşalım. Bu kesrin payı 0'dan farklı bir tamsayı. Demek ki

$$\left| \sum_{j=0}^n c_j p^j q^{n-j} \right| \geq 1.$$

Öyleyse

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| |f'(x_0)| \geq \frac{1}{q^n}$$

eşitsizliği geçerli. Bu da bizi

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^n M} > \frac{A}{q^n}$$

sonucuna götürür. Bir çelişki. $\square$

α ile göstereceğimiz bir Liouville sayısı alalım. Her Liouville sayısının irrasyonel olduğunu kanıtlamıştık. Eğer α cebirsel bir sayı ise, Liouville teoremini (Teorem 10.3) kullanarak öyle $A > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ buluruz ki her $p \in \mathbb{Z}$ ve $q \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{A}{q^n}$$

sağlanır. Bu A sayısı yardımıyla $2^{-r} \leq A$ eşitsizliğini sağlayan bir $r \in \mathbb{N}$ seçelim ve $m = r + n$ yazalım. α bir Liouville sayısı olduğu için bu $m \in \mathbb{N}$ verildiğinde

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b^m}$$

eşitsizliğini sağlayan $a \in \mathbb{Z}$ ve $b > 1$ tamsayılarını bulabiliriz. Ama buradan

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b^m} = \frac{1}{b^{r+n}} \leq \frac{1}{2^r b^n} \leq \frac{A}{b^n}$$

elde ederiz. Bu da Liouville teoreminden elde ettiğimiz yukarıdaki eşitsizlikle çelişir. Böylece şu sonucu kanıtlamış olduk.

Teorem 10.4. *Her Liouville sayısı aşkın bir sayıdır.* $\square$

Liouville sayısı olmayan aşkın sayılara örnek olarak π ve e sayılarını gösterebiliriz. Bir başka örnek de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k}}$$

olarak tanımlanan sayı. Bu sayı Liouville sayısı örneğimizi andırıyor ama Erdős bu sayının Liouville sayısı olmayan aşkın bir sayı olduğunu kanıtladı. 1882 yılında Lindemann 0'dan farklı her a cebirsel sayısı için e^a sayısının aşkın olduğunu göstermeyi başardı. Öte yandan $e^{i\pi} = -1$. Demek ki π sayısı da aşkın bir sayı. Bir sayının aşkın olduğunu kanıtlamak için oldukça ileri teknikler kullanmak gerekir. Bu bölümde son olarak e sayısının aşkın olduğunu Hilbert'in 1893'te bulduğu yalın ve güzel bir yöntemle kanıtlayacağız. Aslında e 'nin aşkın olduğunu ilk kanıtlayan Hermite.

$a > 0$ ve $j \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\int_0^a x^j e^{-x} dx$$

integralini

$$\int_0^a x^j e^{-x} dx = -x^j e^{-x} \Big|_0^a + j \int_0^a x^{j-1} e^{-x} dx$$

olarak yazalım. Üssel fonksiyon her polinomdan çok daha hızlı artar. Yani herhangi bir polinom p için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$$

olur. Öyleyse limit alarak

$$\int_0^\infty x^j e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a x^j e^{-x} dx = j \int_0^\infty x^{j-1} e^{-x} dx$$

sonucuna varırız. Burada $j = 1$ alırsak

$$\int_0^\infty x e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-x} dx = 1$$

buluruz. Artık j üzerine tümevarımla, $j = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\int_0^\infty x^j e^{-x} dx = j! \quad (10.3)$$

eşitliğini kolayca kanıtlayabiliriz. Bu ilginç sonucu birazdan kullanacağız.

Teorem 10.5. *e aşkın bir sayıdır.*

Kanıt: Tam tersine e 'nin cebirsel olduğunu varsayalım; diyelim $c_n \neq 0$ olmak üzere $c_1, c_2, \dots, c_n$ tamsayılarıyla

$$c_0 + c_1 e + c_2 e^2 + \dots + c_n e^n = 0$$

olsun. Sabit k ve n doğal sayıları için

$$I(a, b) = \int_a^b x^k [(x-1)(x-2)\dots(x-n)]^{k+1} e^{-x} dx$$

yazalım. Bu integral aslında bir p polinomu için

$$\int_a^b \frac{p(x)}{e^x} dx$$

biçimde. Parçalayarak integrali

$$\int_a^b \frac{p(x)}{e^x} dx = -\frac{p(x)}{e^x} \Big|_a^b + \int_a^b \frac{p'(x)}{e^x} dx$$

olarak yazalım ve b sonsuza giderken limit alalım. Bu durumda

$$\int_a^\infty \frac{p(x)}{e^x} dx = \frac{p(a)}{e^a} + \int_a^\infty \frac{p'(x)}{e^x} dx$$

elde ederiz. Buradaki polinomun derecesi m ise, $p'(x)$ polinomunun derecesi de $m - 1$ 'dir. Derecesi 0 olan polinom ise sabit ve

$$\int_a^\infty \frac{dx}{e^x} = 1.$$

Böylece tümevarım kullanarak

$$\int_a^\infty \frac{p(x)}{e^x} dx$$

integralinin yakınsadığını kanıtlarız. Demek ki

$$I(a, \infty) = \int_a^\infty x^k [(x-1)(x-2) \cdots (x-n)]^{k+1} e^{-x} dx$$

yazmamıza izin var. Bu sayı sabit olarak tuttuğumuz k ve n sayılarına bağımlı ama ne olursa olsun

$$P = c_0 I(0, \infty) + c_1 e I(0, \infty) + \cdots + c_n e^n I(0, \infty) = 0$$

eşitliği doğru. Her $j \in \mathbb{N}$ için $I(0, j) + I(j, \infty) = I(0, \infty)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} P_1 &= c_0 I(0, \infty) + c_1 e I(1, \infty) + \cdots + c_n e^n I(n, \infty), \\ P_2 &= c_1 e I(0, 1) + c_2 e^2 I(0, 2) + \cdots + c_n e^n I(0, n) \end{aligned}$$

tanımlarını yaparak,

$$P = P_1 + P_2 = (c_0 + c_1 e + \cdots + c_n e^n) I(0, \infty) = 0$$

buluruz. İlk olarak integrallerin sonlu kısımlarına göz atalım ve bunlardan en büyüğü olan

$$I(0, n) = \int_0^n x^k [(x-1) \cdots (x-n)]^{k+1} e^{-x} dx$$

integralini ele alalım. İntegralini aldığımız fonksiyonu

$$[x(x-1) \cdots (x-n)]^k \cdot [(x-1) \cdots (x-n)e^{-x}]$$

olarak iki fonksiyonun çarpımı biçiminde yazalım. Bu çarpımdaki ilk fonksiyonun $[0, n]$ aralığındaki mutlak değeri

$$n^{(n+1)k} = (n^{n+1})^k$$

sayısını aşmaz. İkincisinin mutlak değeri ise aynı aralıkta n 'ye bağlı ama k 'dan bağımsız bir sayıyla üstten sınırlı. Ayrıca her $j \leq n$ için $I(0, j) \leq I(0, n)$ doğru. Böylece k 'dan bağımsız öyle bir $A > 0$ sayısı bulabiliriz ki $|P_2| \leq A^k$ eşitsizliği geçerli olur. Tabii bu A sayısı da n 'ye bağlı. Şimdi

$$0 \leq \frac{|P_2|}{k!} \leq \frac{A^k}{k!}$$

eşitsizliğinden

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_2}{k!} = 0$$

elde ederiz.

Şimdi sıra P_1 sayısında. Buradaki j 'inci terimi ele alalım ve

$$\begin{aligned} c_j e^j I(j, \infty) &= c_j e^j \int_j^\infty x^k [(x-1) \cdots (x-n)]^{k+1} e^{-x} dx \\ &= c_j \int_j^\infty x^k [(x-1) \cdots (x-n)]^{k+1} e^{j-x} dx \end{aligned}$$

yazalım.

Önce $j = 0$ durumu irdeleyelim. $c_0 I(0, \infty)$ integralinin içindeki polinomu açtığımızda, $a_k, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$ için ($m = k + n(k+1)$, ama bunun bir önemi yok)

$$a_k x^k + \cdots + a_m x^m$$

buluruz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} c_0 I(0, \infty) &= c_0 \int_0^\infty x^k [(x-1) \cdots (x-n)]^{k+1} e^{-x} dx \\ &= c_0 \sum_{i=k}^m a_i \int_0^\infty x^i e^{-x} dx = c_0 \sum_{i=k}^m a_i i! \end{aligned}$$

olur çünkü kanıttan hemen önce, (10.3)'te

$$\int_0^\infty y^i e^{-y} dy = i!$$

eşitliğini görmüştük. Demek ki

$$c_0 I(0, \infty) \equiv c_0 a_k k! \pmod{(k+1)!}$$

Buradaki a_k 'yi daha dikkatli hesaplayalım.. Kolay bir hesaplama

$$a_k = [(-1)(-2) \cdots (-n)]^{k+1} = (-1)^{k+1} n!^{k+1}.$$

Demek ki

$$c_0 I(0, \infty) \equiv c_0 (-1)^{k+1} n!^{k+1} k! \pmod{(k+1)!}$$

Şimdi $j \neq 0$ olsun. $c_j e^j I(j, \infty)$ integraline bakalım. Eğer $y = x - j$ değişken değişikliğine gidersek

$$c_j e^j I(j, \infty) = c_j \int_0^\infty (y+j)^k [(y+j-1) \cdots (y+j-n)]^{k+1} e^{-y} dy \quad (10.4)$$

elde ederiz. Polinomu açalım. Bu sefer y 'nin kuvvetleri $k+1$ 'den başlar. Aynen önceki paragraftaki gibi hesaplayarak, $j > 0$ için,

$$c_j I(j, \infty) \equiv 0 \pmod{(k+1)!}$$

elde ederiz.

Son iki paragraftan

$$P_1 \equiv c_0 (-1)^{k+1} n!^{k+1} k! \pmod{(k+1)!}$$

çıkar. Demek ki $P_1/k!$ bir tamsayı ve

$$\frac{P_1}{k!} \equiv c_0 (-1)^{k+1} n!^{k+1} \pmod{(k+1)}.$$

Şimdiye kadar k üzerine hiçbir koşul koymadık. Eğer $k+1$ sayısını $n!$ ve c_0 'dan büyük bir asal sayı olarak seçersek $\frac{P_1}{k!}$ tamsayısı $k+1$ sayısına bölünmez, yani

$$\frac{P_1}{k!} \not\equiv 0 \pmod{(k+1)}.$$

Dolayısıyla $\frac{P_1}{k!}$ sayısı 0 olmayan bir doğal sayı. Bir de ayrıca $k+1$ asal sayısını

$$-1 \leq \frac{P_2}{k!} < 1$$

eşitsizliğini sağlayacak kadar büyük seçelim. O zaman

$$\frac{P_1 + P_2}{k!} = \frac{P_1}{k!} + \frac{P_2}{k!}$$

sayısı 0'a eşit olamaz. Ama

$$\frac{P_1 + P_2}{k!} = \frac{P}{k!} = \frac{0}{k!} = 0.$$

İşte aradığımız çelişkiye ulaştık. □

Bir sayının aşkın olduğunu kanıtlamak hemen her zaman oldukça ileri teknikler kullanmak gerektirir. (10.2)'de tanımladığımız c Liouville sayısının aşkın

olduğunu gördük. π ve e^π sayılarının da aşkın olduğunu biliyoruz. e^2 sayısının irrasyonel olduğunu kanıtlamıştık ama bu sayının aşkın olup olmadığını bilmiyoruz. Ayrıca $\pi + e$, πe , πe^{-1} , π^e , π^π sayılarının aşkın oldukları sanılmakta ama hiçbirisi için kanıt yok.

İlk kez 1900 yılında Paris'te yapılan Uluslararası Matematikçiler Kongresi'ndeki konuşmasında David Hilbert 23 açık problemi ortaya attı. Bu listedeki 7'nci problemi 1934 yılında birbirlerinden bağımsız olarak çözen **A. Gelfond** ve **T. Schneider** şu genel teoremi kanıtladılar: *0 ve 1'den farklı bir cebirsel a sayısı ve irrasyonel bir cebirsel b sayısı için a^b mutlaka aşkın bir sayıdır.*

Aşkın sayılar hakkında en genel sonuç olan Gelfond-Schneider teoremi bize herhangi bir p asal sayısı, $n \geq 2$ ve 0 ve 1'den farklı a cebirsel sayısı ile yazılan

$$a^{p^{1/p}}$$

sayısının aşkın olduğunu söylüyor. Hilbert sabiti denilen $2^{\sqrt{2}}$ bu aileden sadece bir örnek. Karmaşık sayıları kullanarak

$$e^{i\pi/2} = i$$

yazalım. Buradan yola çıkarak $e^{-\pi/2} = i^i$ elde ederiz. Böylece $e^{-\pi/2}$ sayısının aşkın olduğunu kanıtlarız. Buradan kolayca e^π 'nin aşkın olduğu çıkar.

Notlara geçmeden önce sayfa (10.3)'te

$$\int_0^\infty x^k e^{-x} dx = k!$$

eşitliğini ispatladığımızın farkına varalım.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$$

eşitliğiyle tanımlanan fonksiyon **gama fonksiyonu** olarak bilinir. Demek ki, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\Gamma(k+1) = k!$$

Yani gama fonksiyonu bildiğimiz faktoriyel fonksiyonunun bir genişlemesi. Bir sonraki bölümde bu fonksiyonu kullanacağız.

NOTLAR

Bu bölümde ele aldığımız rasyonel sayılar $\mathbb{Q}$, gerçel sayılar $\mathbb{R}$, kompleks sayılar $\mathbb{C}$ ve cebirsel sayılar $\mathbb{A}$ kümelerinin hepsi sayı cisimleridir. Bu terminolojiyi kullanırsak, cebirin temel teoremini karmaşık sayılar cismi cebirsel olarak kapalıdır diye ifade edebiliriz.

Cebirin temel teoremi (Teorem 10.1) 17'nci yüzyıldan beri matematikçilerin gündeminde olmuştur. Bu sonucu kanıtlamak için d'Alembert, Euler, Lagrange ve Laplace gibi ünlü matematikçiler uğraşmışlardır. Teoremin zamanında ilk kabul gören kanıtını ise Gauss vermiştir.

Ünlü Alman matematikçi ve bilim adamı **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) sayılar kuramı, analiz, diferansiyel geometri, istatistik gibi farklı matematik alanlarına derin ve kalıcı katkılar yapmış, ayrıca astronomi, elektrik ve manyetizma teorisi, jeodezi ve optik konularında da çalışmıştır. Babası oğlunun kendisi gibi taş ustası olmasını istemesine rağmen, dehasını daha çocuk yaşlarında keşfeden öğretmenlerinin ve annesinin teşvikleriyle Gauss önce Braunschweig'da sonra da Göttingen Üniversitesi'nde okumuştur. Daha ondokuz yaşındayken kenar sayısı bir Fermat asalı olan her düzgün çokgenin salt pergel ve cetvel kullanılarak çizilebileceğini kanıtlamış ve karesel karşılıklık ilkesi olarak bilinen sayılar teorisinin önemli teoremini ortaya atmıştır. 1799 yılında Göttingen Üniversitesi'ne sunduğu doktora tezinde cebirin temel teoreminin bir kanıtını vermiştir. Bu kanıtta bir boşluk olduğunun ortaya çıkması üzerine Gauss üç farklı kanıt daha sunacaktır. 1849 yılında verdiği son kanıt o yıllarda tüm matematikçiler tarafından kabul görmüştür. Ama yıllar sonra 1920'de bu kanıtta da bir boşluk olduğu ortaya çıkmıştır.

Kariyerinin ilk yıllarında Braunschweig Dükü'nün kendisine verdiği bursla geçinen Gauss, bu bursu yetersiz bularak 1807 yılında Göttingen Üniversitesi'nde astronomi profesörü ve gözlemevi müdürü olarak çalışmaya başlamıştır. En karmaşık hesapları aklından yapabilme yeteneği Gauss'a astronomi kariyerinde çok yardımcı olmuştur. 1831 yılında fizikçi Weber ile çalışmaya başlamış ve elektrik ve manyetizma konularında önemli buluşlar yapmıştır. 78 yaşında hayata gözlerini yuman Gauss'un beyni hala Göttingen Üniversitesi Tıp Fakültesi'nde korunmaktadır. 1989-2001 yılları arasında Gauss'un bir resmi ve onun buluşu olan normal dağılım eğrisi, 10 marklık Alman banknotları üzerinde yer almıştır.

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), henüz dokuz yaşındayken anne ve babasını kaybetmesi üzerine bir askeri okula kaydolmuştur. Bir terzinin oğlu olduğundan subay olamayacağını anlamış ve bir manastıra kaydolarak askeri papaz olmayı düşünmüştür. Arkadaşları ise onu matematik öğretmeni olmaya ikna etmişlerdir. 1787 ile 1794 arasında orta dereceli okullarda öğretmenlik yapan Fourier, Fransız devrimi sırasında önemli görevlerde bulunmuş ve 1794'te bir süre hapiste yatmıştır. Daha sonra Ecole Normale ve Ecole Polytechnique'de çalışan Fourier, Napolyon tarafından Mısır seferine giden bilim heyetinin başkanı olarak görevlendirilmiştir. Isı iletimi konusunda 1807 yılında Akademiye sunduğu önemli eseri o tarihte anlaşılamamıştır. Belki de en önemli eserini 1807-1822 yılları arasında yazmıştır. Bu eserde bugünkü adıyla Fourier analizinin temelleri atılmıştır.

Joseph Liouville (1809-1882) Ecole Polytechnique'ten mezun olduktan sonra Paris'te birçok okulda asistanlık yapmış, daha sonra 1838 yılında mezun olduğu okula profesör olarak atanmıştır. 1850 yılında ise College de France'ın matematik kürsüsüne geçen Liouville kısa bir süre politikaya girmiş, 1848 yılında kurucu meclis üyesi olmuştur. Sayılar teorisi, karmaşık analiz, diferansiyel geometri gibi farklı alanlarda çalışan Liouville, Galois'nın basılmamış eserinin derinliğini kavramış ve bu önemli eserin kendi kurduğu *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* dergisinde yayımlanmasını sağlamıştır.

1895 ile 1929 yılları arasında Göttingen Üniversitesi'nde profesörlük yapmış olan **David Hilbert** (1862-1943) 20'nci yüzyıl başlarında Alman matematik okulunun önderi olmuştur. Göttingen'deki daha ilk yıllarında cisim kavramını ortaya atmış ve cebirsel sayılar kuramını kurmayı başarmıştır.

İnvaryantlar kuramının temel yasalarını ortaya koyan Hilbert, geometriyi bir dizi aksiyoma indirgeyen araştırmalarının sentezini **Geometrinin Temelleri** adlı eserinde 1899 yılında yayımlamıştır. İlk defa 1900 yılında Paris'te yapılan Dünya Matematik Kongresi'nde ana konuşmacı olarak bir program sunmuştur. **Hilbert Problemleri** diye adlandırılan bu program, matematik araştırmalarına yeni bir yön vermiş ve birçok matematikçiye esin kaynağı olmuştur. İntegral denklemlere ilişkin araştırmalarıyla Fonksiyonel Analizin öncülerinden olan Hilbert'in ismi bugün de Hilbert uzayları teriminde yaşamaktadır. Soyutlamadan kaçınmayan Hilbert, aksiyomatik yaklaşımlarla matematikte yepyeni konuları ortaya atmakta başarılı olmuştur.

Göttingen Üniversitesi'nden emekli olduktan hemen sonra, 1930 yılında doğum yeri olan Königsberg (Kaliningrad) şehrinin fahri hemşeriliğine seçilmiştir. Bu nedenle yapılan törende *Naturerkennen und Logik* (Doğanın Anlaşılması ve Mantık) başlıklı konuşmasını şöyle bitirmiştir:

Wir müssen wissen, wir werden wissen

Bilmeliyiz, bileceğiz!

Kaynaklar

- [1] A. R. Schep, *A simple complex analysis and an advanced calculus proof of the fundamental theorem of algebra*, Am. Math. Monthly 116 (2009) 67-78.
- [2] *Bibliography for the fundamental theorem of algebra*, //http://math.fullerton.edu/mathews/c2003/FunTheoremAlgebraBib/Links/FunTheoremAlgebraBib_lnk_2.html.

11. Riemann Zeta Fonksiyonu

Her $s > 1$ gerçel sayısı için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

serisinin yakınsak olduğunu biliyoruz. Bu serinin toplamını $\zeta(s)$ ile göstereyim. İlk olarak serinin toplamını asallar cinsinden sonsuz bir çarpım olarak yazacağız. Önce

$$\frac{1}{2^s} \zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \dots$$

yazalım ve bunu $\zeta(s)$ değerinden çıkaralım. Böylece

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \dots$$

elde ederiz. Sağ taraftaki terimlerin paydalarında 2^s ve 2^s 'nin katları artık yok oldu. Bunu $1/3^s$ ile çarpıp bulduğumuz

$$\frac{1}{3^s} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \dots$$

sayısını yukarıdaki ifadeden çıkarırsak

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{17^s} + \frac{1}{19^s} + \dots$$

serisini elde ederiz. (Kalan sayılar asal gibi görünse de bu yanıltıcı, örneğin sağdaki toplamda $1/25^s$ de belirir.) Böylece sağ tarafın paydalarındaki 3^s 'nin katları da kayboldu.

Asal sayılar dizisini $(p_k)_k$ ile gösterelim. Yaptığımız işlemi $p_1, \dots, p_m$ için ardarda m kez tekrarlırsak $\sum 1/n^s$ serisinden $p_1^s, \dots, p_m^s$ ve katları yok olur (ve serimiz elbette $1/p_{m+1}^s$ ile başlar). Her adımda sırasıyla 2, 3, 5, 7, $\dots, p_m$ asal sayılarının s 'inci kuvvetinin katlarını sağdaki serinin paydalarından eliyoruz. Bu sonucu

$$\prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) \cdot \zeta(s) = \sum_{p_1 \nmid n, \dots, p_m \nmid n} \frac{1}{n^s} \leq \zeta(s)$$

olarak yazalım. Sağdaki seriyi kolaylık olsun diye $\zeta_m(s)$ olarak gösterelim:

$$\zeta_m(s) = \sum_{p_1 \nmid n, \dots, p_m \nmid n} \frac{1}{n^s} \leq \zeta(s).$$

Demek ki

$$\prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) \cdot \zeta(s) = \zeta_m(s).$$

Şimdi biraz hesap yapalım:

$$1 \leq \zeta_m(s) = \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) \cdot \zeta(s) = \frac{\zeta(s)}{\prod_{k=1}^m \frac{p_k^s}{p_k^s - 1}}$$

olduğundan,

$$\prod_{k=1}^m \frac{p_k^s}{p_k^s - 1} \leq \zeta(s)$$

olur, dolayısıyla

$$0 \leq \zeta(s) - \prod_{k=1}^m \frac{p_k^s}{p_k^s - 1} = \prod_{k=1}^m \frac{p_k^s}{p_k^s - 1} \cdot (\zeta_m(s) - 1)$$

elde ederiz. Buradaki $\prod_{k=1}^m \frac{p_k^s}{p_k^s - 1}$ çarpımlarının yakınsaklığını incelemek için

$$1 + a_k = \frac{p_k^s}{p_k^s - 1}$$

yazalım ve $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin yakınsaklığına bakalım (bkz. Teorem 4.1). Tabii

$$a_k = \frac{1}{p_k^s - 1}$$

ama k 'inci asal sayı p_k daima k 'dan büyük. Bunu kanıtlamak çok kolay. Öyleyse

$$p_k^s \geq (k+1)^s \geq k^s + 1$$

olacak. Demek ki

$$a_k = \frac{1}{p_k^s - 1} \leq \frac{1}{k^s}.$$

Bu da bize $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin yakınsak olduğunu verir. Böylece Teorem 4.1 aracılığıyla

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^s}{p_k^s - 1}$$

sonsuz çarpımının yakınsadığını kanıtlamış olduk. Bu çarpımın değerini kısaca b ile gösterelim. Elbette

$$0 < \prod_{k=1}^m \frac{p_k^s}{p_k^s - 1} \leq \prod_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^s}{p_k^s - 1} = b$$

olur. Bir önceki sayfadaki eşitsizlikten ve bundan

$$0 \leq \zeta(s) - \prod_{k=1}^m \frac{p_k^s}{p_k^s - 1} \leq b(\zeta_m(s) - 1)$$

eşitsizliğine varırız. Ama sağdaki

$$\zeta_m(s) - 1 = \frac{1}{p_{m+1}^s} + \dots$$

serisi, yakınsak olan $\zeta(s)$ pozitif serisinin kuyruğundan küçük, dolayısıyla 0'a yakınsar. Demek ki verilen bir $\epsilon > 0$ için öyle bir $m_0 \in \mathbb{N}$ bulabiliriz ki, her $m \geq m_0$ için

$$\zeta_m(s) - 1 < \frac{\epsilon}{b}$$

sağlanır ve her $m \geq m_0$ için

$$0 \leq \zeta(s) - \prod_{k=1}^m \frac{p_k^s}{p_k^s - 1} < \epsilon$$

olur. Kanıtladığımızı yazalım.

Teorem 11.1. $s > 1$ ise $\zeta(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_k^{-s}}$ olur. □

Zeta fonksiyonu için **Euler çarpım formülü** adı verilen bu sonuç birçok bakımdan ilginç. Burada bir serinin toplamı sonsuz çarpım olarak yazılıyor. Seride her tamsayı yer alırken sonsuz çarpımda ise sadece asal sayılar gözüktüyor. Çarpımdaki her terim

$$\frac{1}{1-p_k^{-s}} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_k^s} \right)^i$$

olarak bir geometrik serinin toplamıdır.

Ashında

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

serisi gerçel kısmı 1'den büyük her s karmaşık sayısı için de yakınsak. **Riemann zeta fonksiyonu** adı verilen bu fonksiyon $\{s : \text{Re } s > 1\}$ olarak ifade

edilen açık yarı düzlemde yukarıdaki gibi tanımlanır. 1859 yılında bu tanımdan yola çıkarak Riemann, analitik genişletme yöntemiyle zeta fonksiyonunu tüm $\{s \in \mathbb{C} : z \neq 1\}$ kümesinde tanımlamayı başardı. Bu genişletilmiş tanımdan hareketle

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta(s) = 1$$

olduğunu görebiliriz. Böylece Riemann zeta fonksiyonu karmaşık düzlemde tanımlı bir meromorfik fonksiyon olur. Bu fonksiyon $s = 1$ dışında analitiktir ve $s = 1$ değerinde kalanı 1'e eşit olan basit bir kutbu vardır.

Riemann ayrıca zeta fonksiyonunun

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

özdeşliğini sağladığını kanıtlayarak, fonksiyonun s ve $1-s$ değerleri arasındaki ilişkiyi buldu. Buradaki ***gama fonksiyonu***

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

olarak karmaşık düzlemde $\text{Re } z > 0$ bölgesinden tanımlanır. Daha önce $j \in \mathbb{N}$ için

$$\Gamma(j+1) = \int_0^\infty t^j e^{-t} dt = j!$$

sonucunu kanıtlamış ve kullanmıştık. (Bkz. sayfa 132.) Dolayısıyla gama fonksiyonu bir anlamda faktöryel fonksiyonunun bir genişletilmesi. Riemann'ın bu sonucundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\zeta(-2n) = 0$ olduğunu hemen görebiliriz, çünkü $\sin(-n\pi) = 0$. Negatif çift sayılara zeta fonksiyonunun aşikâr kökleri veya sıfırları denir. Zeta fonksiyonunun diğer kökleri ise ***Riemann hipotezi-nin*** konusudur. Bu hipoteze göre zeta fonksiyonunun aşikâr olmayan sıfırları karmaşık düzlemde mutlaka $\text{Re } s = 1/2$ doğrusu üzerindedir. Riemann hipotezi belki de tüm zamanların çözülmemiş en önemli matematik problemidir ve 2000 yılında ***milenyum problemleri*** diye adlandırılan listenin içinde yer almıştır.

Riemann zeta fonksiyonunun matematikte analitik sayılar teorisinde, olasılık teorisinde, istatistikte ve fizikte önemli uygulamaları vardır. Bu fonksiyonun kökleri ile asal sayıların dağılımı arasındaki derin ilişkilere burada daha fazla değinme imkânımız yok. Bu genel bilgilerden sonra zeta fonksiyonunun çift sayılardaki değerlerine eğilelim.

İlk olarak zeta fonksiyonunun $s = 2$ için değerini bulalım. Riemann zeta fonksiyonunun 2'deki değerini hesaplamak için Bernoulli ailesi çok çabalamış ama $\zeta(2) = \pi^2/6$ sonucuna ilk ulaşan Euler olmuştur. Bernoulli ailesinin yaşadığı Basel şehri nedeniyle $\zeta(2)$ değerini hesaplamak ***Basel problemi*** diye

anılır. Bugün Basel probleminin birbirinden farklı yöntemlerle çözülebileceğini biliyoruz. Biz burada üç farklı yöntem göstereceğiz.

Birinci Yöntem. Bu iş için bir bölge üzerindeki belirli bir fonksiyonun çift katlı integralini iki farklı yöntemle hesaplayacağız. Bu ilginç ve şık yöntemi ilk olarak kimin kullandığını bilmiyoruz. Bölgemiz

$$B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

yani bir kare. Şimdi

$$I = \iint_B \frac{1}{1-xy} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy$$

integralini hesaplamak için ilkin $0 < xy < 1$ olduğunu varsayarak

$$\frac{1}{1-xy} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n y^n$$

yazalım. O zaman serinin her teriminin integralini alıp, toplarsak

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n dx dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \zeta(2)$$

sonucuna varırız. Burada aslında B bölgemizden önce $(1, 1)$ noktasını attık, integrali

$$B_r = \{(x, y) : 0 \leq x \leq r, 0 \leq y \leq r\}$$

bölgesinde aldık ($0 < r < 1$) ve sonunda r alttan 1'e yaklaşırken limiti hesapladık. Şimdi integralimizde değişkenleri şu şekilde değiştireceğiz:

$$\begin{cases} x &= u - v \\ y &= u + v \end{cases}$$

Yeni değişkenlere göre integrali hesaplamak için önce

$$g(x, y) = \frac{1}{1-xy}$$

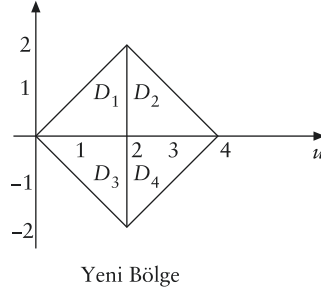
fonksiyonunun yerine

$$h(u, v) = \frac{1}{1-u^2+v^2}$$

fonksiyonunu koyacağız. B bölgesi $x = 0$, $x = 1$ ve $y = 0$, $y = 1$ doğruları arasında kalan sınırlı bölge. $(x, y) \mapsto (u, v)$ dönüşümü altında

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ doğrusu } & u = v \text{ doğrusuna,} \\ x = 1 \text{ doğrusu } & u = v + 1 \text{ doğrusuna,} \\ y = 0 \text{ doğrusu } & u = -v \text{ doğrusuna,} \\ y = 1 \text{ doğrusu da } & u = -v + 1 \text{ doğrusuna} \end{aligned}$$

dönüşür. uv -düzleminde bu doğrular arasında kalan bölgeyi D ile gösterelim.



Artık integralimizi yeni değişkenlere göre yazarsak

$$I = \iint_D h(u, v) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv$$

sonucuna varırız. Buradaki Jakobyen determinanı ise

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

h fonksiyonu u ve v eksenlerine göre simetrik, yani

$$h(u, v) = h(u, -v) = h(-u, v).$$

Böylece D bölgesini şekilde olduğu gibi D_1 , D_2 , D_3 ve D_4 bölgelerine ayırırsak

$$I = 2 \iint_{D_1} h(u, v) 2 du dv + 2 \iint_{D_3} h(u, v) 2 du dv$$

sonucuna varırız. İlk olarak D_1 üzerindeki integrale bir bakalım. Bu integrali

$$I_1 = \iint_{D_1} h(u, v) du dv = \int_0^{1/2} \left(\int_0^v \frac{dv}{1 - u^2 + v^2} \right) du$$

olarak iki katlı integral şeklinde yazalım. Şimdi

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

formülünü kullanarak

$$I_1 = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} du$$

sonucuna varırız. Bu aşamada bir an düşünüp,

$$f(u) = \arctan \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}}$$

fonksiyonunun türevini alarak

$$f'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

olduğunu görelim. Böylece ilk integralimizi kolayca hesaplayarak

$$I_1 = \int_0^{1/2} f(u)f'(u) du = \frac{1}{2}f(u)^2 \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2} \arctan^2 \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{72}$$

sonucuna ulaşırız. D_3 bölgesi üzerinde ise

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_{D_3} h(u, v) du dv = \int_{1/2}^1 \int_0^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2} du \\ &= \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} du \\ &= \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} du \end{aligned}$$

sonucunu benzer şekilde elde ederiz. Bu kez

$$f(u) = \arctan \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}$$

olsun. Bu takdirde

$$f'(u) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Demek ki

$$I_3 = -2 \int_{1/2}^1 f(u)f'(u) du = -f(u)^2 \Big|_{1/2}^1 = \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{36}.$$

Böylece

$$\zeta(2) = I = 4I_1 + 4I_3 = 4 \cdot \frac{\pi^2}{72} + 4 \cdot \frac{\pi^2}{36} = \frac{\pi^2}{6}$$

sonucuna ulaştık. □

İkinci Yöntem. $\zeta(2)$ değerini verdiğimiz yöntemden daha da basit, bambaşka bir yolla hesaplayabiliriz. Şimdi ilkin tek ve çift sayılarla

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$$

şeklinde yazalım. Öyleyse

$$\zeta(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4} \zeta(2).$$

Demek ki

$$\zeta(2) = \frac{4}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}. \quad (11.1)$$

Kısacası $\zeta(2)$ 'yi veren serinin toplamını sadece tek sayılar üzerinden bulmak yeterli olacak. Bu gözlemden sonra bir de iyi bildiğimiz

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

sonucundan yola çıkarak, sırasıyla,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \sin^2 \frac{x}{2^n} = x^2 \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n \sin^2 \frac{x}{2^n}} = \frac{1}{x^2}$$

limitlerine varalım. Bu son limitte x yerine $\frac{(2k+1)\pi}{2}$ koyalım ve böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n \sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

olduğunu görelim.

İşte trigonometrik fonksiyonları kullanarak $\zeta(2)$ değeri bulma umudu buradan doğuyor!

Önce $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ özdeşliğini kullanarak

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \right]$$

elde edip,

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \sin^2 \frac{\pi + x}{2}$$

özdeşliğini kullanır ve burada $x = \pi/2$ alırsak

$$1 = \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{4}} \right]$$

sonucuna ulaşırız. Yaptığımızı $x = \pi/4$ ve $x = 3\pi/4$ için tekrarlırsak sırasıyla,

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{5\pi}{8}} \right] \quad \text{ve} \quad \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{7\pi}{8}} \right]$$

buluruz. Bunları toplarsak ilk bulduğumuz eşitlik

$$1 = \frac{1}{16} \left[\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{5\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{7\pi}{8}} \right]$$

haline bürünür. Öyleyse bu yöntemi n kez uygulayıp

$$1 = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}$$

sonucuna varalım. Bir önceki eşitliği bir gözden geçirelim. Burada

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = \sin^2 \frac{7\pi}{8} \quad \text{ve} \quad \sin^2 \frac{3\pi}{8} = \sin^2 \frac{5\pi}{8}$$

çünkü $\sin a = \sin(\pi - a)$ olduğunu biliyoruz. Bu gözlemimizi yukarıdaki toplama uygularsak

$$1 = \frac{2}{4^n} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}$$

elde ederiz. Kolaylık olsun diye

$$x_{n,k} = \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}$$

tanımını yapalım. O zaman yukardaki eşitlik

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{4^n \sin^2 x_{n,k}} \quad (11.2)$$

olarak yazılır. Şimdi n sonsuza giderken sağdaki ifadenin limitini alacağız ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{4^n \sin^2 x_{n,k}} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad (11.3)$$

bulacağız. Solda toplanan terimlerin limitinin

$$\frac{4}{\pi^2} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

olduğunu zaten biliyoruz; ama limit alırken karşımıza bir de terim sayısı n ile değişen bir toplam çıkıyor. O nedenle dikkatli olmamız gerekir.

Sav. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = 0$.

Kanıt: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ olduğundan $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = 0$ eşitliğini kanıtlamak yeterli. Kuvvet serilerini kullanacağız. $x \neq 0$ iken doğru olan

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots}{x \sin x} = x \frac{x}{\sin x} \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \cdots \right)$$

eşitliklerinden istediğimiz çıkar.

Şöyle de kanıtlayabilirdik. $x \geq 0$ iken $f(x) = x - \sin x - x^3/6$ olsun. O zaman $f'(x) = 1 - \cos x - x^2/2$ ve $f''(x) = \sin x - x \leq 0$ olur. Demek ki f' azalır. Ama $f'(0) = 0$. Demek ki $f'(x) \leq 0$ ve f de azalır. Ama $f(0) = 0$, dolayısıyla $f(x) \leq 0$. Buradan $x - \sin x \leq x^3/6$ ve x , 0'a sağdan yaklaşırken

$$0 \leq \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} \leq \frac{x^3/6}{x \sin x} = \frac{x}{\sin x} \frac{x}{6} \rightarrow 0$$

bulunur. Demek ki x , 0'a sağdan yaklaşırken

$$x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) \rightarrow 0$$

olur. Elbette aynı şey, x , 0'a soldan yaklaşırken de doğrudur. $\square$

Şimdi bu savda x yerine $x_{n,k} = \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}$ koyup n 'yi sonsuza götürürsek ve sadeleştirmeleri yaparsak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{\sin^2 x_{n,k}} - \frac{1}{x_{n,k}^2} \right) = 0$$

elde ederiz. Demek ki $\epsilon > 0$ verilmişse öyle bir n_0 vardır ki, eğer $n > n_0$ olursa.

$$0 \leq \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{\sin^2 x_{n,k}} - \frac{1}{x_{n,k}^2} \right) < \epsilon,$$

yani (ikinci $x_{n,k}$ yerine değerini koyarak ve gereken basit düzenlemeleri yaparak),

$$0 \leq \frac{1}{4^n \sin^2 x_{n,k}} - \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{\epsilon}{2^n} \quad (11.4)$$

olur.

Ayrıca $\frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ serisi yakınsak olduğundan, öyle bir n_1 vardır ki, eğer $n > n_1$ ise,

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{k=2^{n-1}}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{\epsilon}{2} \quad (11.5)$$

olur.

Şimdi $n > \max\{n_0, n_1\}$ alalım ve üçgen eşitsizliğini ve (11.4) ve (11.5) eşitsizliklerini kullanarak (11.3) limitini gösterelim:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{4^n \sin^2 x_{n,k}} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \right| \\ & \leq \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left| \frac{1}{4^n \sin^2 x_{n,k}} - \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{(2k+1)^2} \right| + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=2^{n-1}}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\ & \leq 2^{n-1} \frac{\epsilon}{2^n} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

olur ve istediğimiz kanıtlanır.

Buradan (11.2) sayesinde

$$\frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{4^n \sin^2 x_{n,k}} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

ve (11.1) sayesinde, nihayet,

$$\zeta(2) = \frac{3}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

elde ederiz. □

Üçüncü Yöntem. $\zeta(2)$ değerine en kestirme yoldan ulaşan yöntem Boo Rim Choe [2] tarafından bulunmuş. Bu yöntemde sinüs fonksiyonunun tersinin kuvvet serisiyle

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots$$

ile işe başlıyoruz. Bölüm 7'de gördüğümüz bu serinin yakınsaklık yarıçapı 1, ama Abel teoremi (Teorem 7.4) bize bu açılımın $[0, 1]$ aralığında geçerli olduğunu verir. Bu açılımda x yerine $\sin t$ koyalım. Böylece

$$t = \sin t + \frac{1}{2} \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\sin^5 t}{5} + \dots$$

elde ederiz. Tabii bu açılım $0 \leq t \leq \pi/2$ için geçerli ve Weierstrass M -testine göre seri düzgün yakınsak. İşte Boo Rim Choe'nun güzel buluşu bu kadar yalın. Bundan sonrası oldukça sıradan. İki tarafın integralini alacağız. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$$

yazarsak

$$\frac{\pi^2}{4} = \int_0^{\pi/2} t \, dt = I(1) + \frac{1}{2} \frac{I(3)}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{I(5)}{5} + \dots$$

elde ederiz. $I(n)$ ile gösterdiğimiz integrali hesaplamak hiç zor değil, çünkü $u = \sin^{n-1} t$, $dv = \sin t \, dt$ yazarsak

$$I(n) = -\sin^{n-1} t \cos t \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} \cos^2 t \, dt$$

sonucuna ulaşırız. Sağdaki ilk terim 0'a eşit ve

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} \cos^2 t \, dt = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t \, dt - \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt = I(n-2) - I(n).$$

Öyleyse

$$I(n) = (n-1)I(n-2) - (n-1)I(n).$$

Demek ki

$$I(n) = \frac{n-1}{n}I(n-2)$$

ve $I(1) = 1$. Buradan hemen

$$I(2n+1) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$$

elde ederiz. Yerli yerine koyarsak gene

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

sonucuna varırız. Devamını nasıl getireceğimizi (11.1)'den biliyoruz. $\square$

Zeta fonksiyonunun asal sayılarla olan ilişkisini Euler çarpım teoreminde görmüştük ama bu fonksiyonun 2'deki değerinde birden karşımıza π sayısı çıktı. Bu bir rastlantı değil. Şimdi amacımız her $k \in \mathbb{N}$ için $\zeta(2k)$ değerini hesaplamak. Burada hem π^{2k} sayısı ile hem de Bernoulli sayılarıyla karşılaşacağız.

Önce karmaşık sayılar kullanarak

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{ve} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

yazalım. O zaman

$$x \cot x = x \frac{\cos x}{\sin x} = ix \frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} - 1}$$

buluruz. Sağ tarafta ix yerine $z/2$ yazarak

$$= \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1}$$

elde ederiz. İkinci terim tanıdık, çünkü Bernoulli sayılarının tanımını hatırlarsak

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$$

sonucuna varırız. Bernoulli sayıları hakkında bildiklerimizi hatırlayalım. $B_1 = -1/2$ ve diğer her tek sayı n için $B_n = 0$. Öyleyse z yerine tekrar $2ix$ koyarsak

$$x \cot x = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k} \frac{(2ix)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}$$

sonucunu elde ederiz. Yukarıda kuvvet serisi açılımını Bernoulli sayıları cinsinden yazdığımız $x \cot x$ fonksiyonunun Euler 1755 yılında farklı bir açılımı bulmuş ve

$$x \cot x = 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{\pi^2 n^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{\pi n}\right)^2}$$

olarak yazmış. Bunun kanıtını bu bölümün sonunda ek olarak bulacaksınız. Geometrik seri açılımı bize

$$\frac{x^2}{\pi^2 n^2} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{\pi n}\right)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2k}$$

verir. Öyleyse

$$x \cot x = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\pi n}\right)^{2k} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}\right) x^{2k}$$

sonucuna vardık. Bu açılımda x^{2k} 'nin katsayısı

$$-\frac{2}{\pi^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{2}{\pi^{2k}} \zeta(2k).$$

Öyleyse

$$-\frac{2}{\pi^{2k}} \zeta(2k) = \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} B_{2k}.$$

Bulduklarımızı bir teorem olarak yazalım.

Teorem 11.2. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k} \pi^{2k}$$

olur. □

Bernoulli sayılarının ilk birkaçını hesaplamıştık daha önce:

$$B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, \dots$$

Böylece teoremimiz bize

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$$

verir. Bu olağanüstü güzel sonuç zeta fonksiyonunun çift sayılardaki değerlerini π ve Bernoulli sayıları cinsinden vermekte. Eğer B_{100} sayısını biliyorsak $\zeta(100)$ değerine hesaplamak çok kolay.

Oysa tek sayılar için $\zeta(2k+1)$ hakkında çok az şey biliyoruz. Apéry 1979 yılında $\zeta(3)$ sayısının irrasyonel olduğunu kanıtladı. Tüm $\zeta(2k+1)$ sayılarının irrasyonel olduğu sanılmakta. Ama bu da açık bir problem.

Ek. $\sin z$, $\cot z$ ve $z \cot z$ Üzerine¹

Bu ekte Euler'in bulduğu

$$\sin \frac{\pi z}{2} = \frac{\pi z}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(2k)^2}\right) \text{ ve } \cos \frac{\pi z}{2} = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(2k+1)^2}\right) \quad (11.6)$$

eşitliklerini kanıtlayacağız. Eğer birinci formülde z yerine $2z/\pi$ alırsak,

$$(+)\quad \sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(k\pi)^2}\right)$$

eşitliğini buluruz. Ayrıca (+)'dan yararlanarak $x \cot x$ fonksiyonunun Taylor serisini bulacağız. Yazımızın içeriği ve yöntemi tamamen [3] ve [4]'tendir.

$$I_n(z) = \int_0^{\pi/2} \cos zt \cos^n t \, dt$$

olsun. Elbette $I_n(z)$, z 'nin sürekli bir fonksiyonudur ve

$$I_0(0) = \frac{\pi}{2}, I_1(0) = 1 \text{ ve } z \neq 0 \text{ için } I_0(z) = \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{z} \quad (11.7)$$

olur. $n \geq 1$ için $I_n(z)$ integraline kısmi integral alma tekniğini uygulayalım:

$$u = \cos^n t \text{ ve } dv = \cos zt \, dt$$

olsun. Uzun formülleri kısaltmak için $\cos t$ ve $\sin t$ yerine sırasıyla $c(t)$ ve $s(t)$ kullanalım. Ayrıca $z \neq 0$ varsayımında bulunalım. O zaman

$$du = -nc^{n-1}(t) s(t) \, dt \text{ ve } v = \frac{s(zt)}{z}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} I_n(z) &= c^n(t) \frac{s(zt)}{z} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{n}{z} \int_0^{\pi/2} c^{n-1}(t) s(t) s(zt) \, dt \\ &= \frac{n}{z} \int_0^{\pi/2} c^{n-1}(t) s(t) s(zt) \, dt \end{aligned}$$

¹Bu ek Ali Nesin tarafından yazılmıştır.

olur. Sağdaki integral için bir defa daha aynı tekniğe başvuralım. İlk önce $n \geq 2$ varsayımında bulunalım. Bu sefer

$$u = c^{n-1}(t) s(t) \text{ ve } dv = s(zt) dt$$

olsun. O zaman

$$du = [-(n-1)c^{n-2}(t) s^2(t) + c^n(t)] dt \text{ ve } v = \frac{-c(zt)}{z}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} c^{n-1}(t) s(t) s(zt) dt \\ &= c^{n-1}(t) s(t) \frac{c(zt)}{z} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{z} \int_0^{\pi/2} [(n-1)c^{n-2}(t)s^2(t) + c^n(t)] c(zt) dt \\ &= -\frac{1}{z} \int_0^{\pi/2} [(n-1)c^{n-2}(t)(1-c^2(t)) + c^n(t)] c(zt) dt \\ &= -\frac{(n-1)I_{n-2} + nI_n}{z} \end{aligned}$$

olur. Bu iki eşitlikten,

$$I_n(z) = -\frac{n}{z} \frac{(n-1)I_{n-2} + nI_n}{z}, \quad (11.8)$$

yani

$$(n^2 - z^2)I_n(z) = n(n-1)I_{n-2}(z) \quad (11.9)$$

bulunur. Eğer $n = 1$ ise aynı yöntem bize

$$(1 - z^2)I_1(z) = \cos \frac{\pi z}{2} \quad (11.10)$$

verir; kolay hesabı okura bırakıyoruz.

$I_n(z)$ sürekli bir fonksiyon olduğundan, (11.8) formülünde $z \rightarrow 0$ limitini alarak

$$n^2 I_n(0) = n(n-1)I_{n-2}(0) \quad (11.11)$$

buluruz. Bundan ve (11.8)'den, $n \geq 2$ için

$$\frac{I_{n-2}(z)}{I_{n-2}(0)} = \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \frac{I_n(z)}{I_n(0)}$$

çıkar. Böylece, (11.7) ve (11.9)'dan dolayı,

$$\frac{2}{\pi z} \sin \frac{\pi z}{2} = \frac{I_0(z)}{I_0(0)} = \left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right) \frac{I_2(z)}{I_2(0)} = \dots = \left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{(2n)^2}\right) \frac{I_{2n}(z)}{I_{2n}(0)}$$

ve

$$\frac{\cos \frac{\pi z}{2}}{1 - z^2} = \frac{I_1(z)}{I_1(0)} = \left(1 - \frac{z^2}{3^2}\right) \frac{I_3(z)}{I_3(0)} = \dots = \left(1 - \frac{z^2}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2}\right) \frac{I_{2n+1}(z)}{I_{2n+1}(0)}$$

bulunur. Şimdi amacımız

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n(z)}{I_n(0)} = 1$$

eşitliğini kanıtlamak. Böylece istenen (11.6) eşitlikleri kanıtlanmış olacak.

Kolayca kanıtlanabileceği üzere her $u \in \mathbb{R}$ için

$$1 - \cos u \leq \frac{u^2}{2}$$

olur. Demek ki $I_n(z)$ integralinin tanımından dolayı

$$\begin{aligned} |I_n(0) - I_n(z)| &= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos zt) \cos^n t \, dt \\ &\leq \int_0^{\pi/2} \frac{z^2 t^2}{2} \cos^n t \, dt \\ &= \frac{z^2}{2} \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^n t \, dt. \end{aligned}$$

Ayrıca her $t \in [0, \pi/2]$ için $0 \leq t \leq \tan t$ olduğundan (kanıtı kolay), yukardaki eşitsizlikleri devam ettirerek, (11.10)'dan

$$\begin{aligned} |I_n(0) - I_n(z)| &\leq \frac{z^2}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^{n-2} t \, dt \\ &= \frac{z^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \cos^{n-2} t \, dt \\ &= \frac{z^2}{2} (I_{n-2}(0) - I_n(0)) \\ &= \frac{z^2}{2} \frac{n^2}{n(n-1)} I_n(0) - I_n(0) = \frac{z^2}{2} \frac{I_n(0)}{n-1} \end{aligned}$$

çıkar ve buradan da, $I_n(0)$ sınırlı olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n(z)}{I_n(0)} = 1$$

bulunur. Böylece (11.6) eşitlikleri, dolayısıyla (+) eşitliği kanıtlanmış oldu.

Şimdi (+) eşitliğini kullanarak $x \cot x$ fonksiyonunun Taylor serisini bulalım.

$$(\log \sin z)' = \frac{\sin' z}{\sin z} = \frac{\cos z}{\sin z} = \cot z$$

eşitliği kolay. Madem öyle

$$(+) \quad \sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(k\pi)^2} \right)$$

formülünün önce logaritmasını alalım:

$$\log \sin z = \log z + \sum_{k=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{z^2}{(k\pi)^2} \right),$$

sonra da türevini:

$$\cot z = (\log \sin z)' = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - (k\pi)^2}.$$

Buradan biraz hesapla $z \cot z$ 'nin Taylor serisini bulabiliriz: Eğer $|z| < \pi$ ise,

$$\begin{aligned} z \cot z &= 1 - 2z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^2} \frac{1}{1 - (z/k\pi)^2} = 1 - 2z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{k^{2j} \pi^{2j}} \\ &= 1 - 2z^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{\pi^{2j}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^2} \frac{1}{k^{2j}} = 1 - 2z^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{\pi^{2j+2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2j+2}} \\ &= 1 - 2z^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{\pi^{2j+2}} \zeta(2j+2) = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2\zeta(2j+2)}{\pi^{2j+2}} z^{2j+2} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\zeta(2k)}{\pi^{2k}} z^{2k} \end{aligned}$$

olur. Buradan da mesela

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - z \cot z}{z^2}$$

gibi ilginç eşitlikler çıkar.

Bulduğumuz her şey karmaşık z sayıları için de geçerlidir. Kanıt aynıdır ama

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n(z)}{I_n(0)} = 1$$

eşitliğini kanıtlamak birazcık daha zahmetlidir. [3]'te bunun ayrıntıları bulunabilir.

Notlar

Riemann zeta fonksiyonunun tanıtıldığı bu bölümde ana kaynağımız [1]. Özellikle zeta fonksiyonunun çift sayılardaki değerlerini Bernoulli sayıları cinsinden veren Teorem 11.2 Kitap'tan alındı. Bu değerleri Fourier serileri kullanılarak hesaplayabiliriz ama Fourier serileri konularımız arasında değil. Bu arada $\zeta(2)$ değeri için [2]'yi bir kaynak olarak öneren Tunç Mısırhoğlu'na teşekkür ederim.

Zeta fonksiyonuna adını veren **Bernhard Riemann** (1826-1866) fakir bir papazın oğlu olarak Hanover Krallığı'nda doğmuş, genç yaşta annesini kaybetmiştir. Daha çocuk yaşlarında matematikdeki olağanüstü yeteneklerinin ortaya çıkmasına rağmen babası onun filoloji ve teoloji okumasını istemiş, ancak 1846 yılında Göttingen Üniversitesi'nde matematik eğitimi almasına razı olmuştur. Göttingen'de doktorasını ünlü Gauss'la yapan Riemann, 1859 yılında Göttingen matematik bölümü başkanı olmuştur. Hanover ve Prusya arasındaki savaş nedeniyle Göttingen'den kaçmış ve 1866 yılında İtalya'da tüberküloz sonucunda ölmüştür.

Riemann özellikle analiz ve geometri arasında yepyeni ilişkiler bularak, cebirsel geometri, karmaşık analiz ve Riemann geometrisi diye anılan yeni araştırma alanlarının ortaya çıkmasını sağlamıştır. Kısa bir makalesinde zeta fonksiyonunu tanımlamış, bu fonksiyonun asal sayıların dağılımıyla olan ilişkisini göstermiş ve Riemann hipotezi denilen problemi ele almıştır. Ölümünden iki yıl sonra negredilen Geometri kitabında, bugün Riemann metriği adını taşıyan kavramı kullanarak çok boyutlu diferansiyel geometriye yepyeni bir bakış açısı getirmiştir. Bu yaklaşım daha sonra Einstein'ın genel görelilik kuramının temelini oluşturacaktır.

İsviçreli matematikçi **Leonhard Euler** (1707-1783) daha onüç yaşındayken bir papaz olan babasının isteği üzerine Basel Üniversitesi'nde teoloji, Yunanca ve İbranice okumaya başlamıştır. Cumartesi günleri zamanın ünlü matematikçisi Johann Bernoulli'den özel ders alan genç Euler'in matematiğe olan üstün yeteneği ortaya çıkmış ve Bernoulli, baba Euler'i ikna ederek onun matematik okumasını sağlamıştır. 1727 yılında Basel Üniversitesi'nde bir kadroya başvuran Euler, buradan ret cevabı alınca, hocası Johann Bernoulli'nin oğulları Daniel ve Nicolas'ın izini takip ederek St. Petersburg'daki Rusya İmparatorluk Bilimler Akademisi'nde çalışmaya başlamıştır. Çar Büyük Petro (Türkçede Deli Petro) tarafından kurulan akademinin amacı Rusya ile Batı Avrupa arasında bilimde olan arayı kapatmak ve Rus eğitim sistemini geliştirmektir. Mali kaynakların zenginliği, kütüphanesi ve ders yükünün az olması nedeniyle yabancı bilginler için çekici bir yer olan Akademi'de Euler 1727-1741 yılları arasında çalışmıştır. Petro'dan sonraki yeni çarın baskıcı politikaları nedeniyle, Prusya Kralı Büyük Frederik'in çağrısına uyarak Berlin'e taşınmıştır. Burada yirmi beş yıl çalışmış ve 380'den fazla makale yazmıştır. Ancak za-

manla Büyük Frederik ile aralarında çıkan kişilik uyuşmazlığı, Berlin Akademisi'ne davet edilen Voltaire gibi ünlü filozofların kendisinin dindarlığı ve matematik sevgisiyle alay etmeleri sonucunda, Euler tahta çıkan Çariçe Katerina'nın davetini kabul ederek 1766 yılında St. Petersburg'a geri dönmüştür. Daha Berlin'de iken kaybetmeye başladığı görme yeteneği Euler'in araştırmalarını fazla etkilememiş, katiplerin yardımıyla hemen her hafta bir makale yazmayı hayatının sonuna kadar sürdürmüştür.

Analiz, cebir, geometri, sayılar kuramı, trigonometri gibi matematiğin hemen her alanında çalışan Euler ayrıca fizik, astronomi ve mantık konularına da özgün katkılar yapmıştır. 1907 yılında İsviçre Bilimler Akademisi, Euler'in tüm eserlerini toplu olarak neşretmeye karar vermiştir. Bugüne kadar 80 cilt basılmış, daha 4 cilt baskıya hazırlanmaktadır. Ünlü Fransız matematikçi Laplace'ın meslektaşlarına şu öğüdü tekrarladığı söylenir: *Euler'i okuyun! Euler'i okuyun! O hepimizin ustasıdır.*

Kaynaklar

- [1] Martin Aigner ve Günter M. Ziegler, **Kitap'tan Deliller**, (çev. M. Uludağ) İstanbul Bilgi Üniversitesi Yayınları 2009.
- [2] T-L. T. Radulescu, V. D. Radulescu, T. Andreescu, **Problems in real analysis: advanced calculus on the real axis**, Springer Verlag 2009.
- [3] K. Venkatachaliengar, *Elementary Proofs of the Infinite Product for Sin Z and Allied Formulae*, Amer. Math. Monthly 69 (1962) 541-545.
- [4] *Evaluating of $\zeta(2n)$ in terms of Bernoulli numbers*. Anonim (internetten).
- [5] Boo Rim Choe, *An elementary proof of $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$* . Amer. Math. Monthly 94 (1987) 662-663.

12. Brouwer Sabit Nokta Teoremi

Gerçel sayılar üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların önemli bir özelliği de tüm aradıkların almasıdır. Daha kesin bir ifadeyle, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekliyse, $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki her y sayısı için $f(x) = y$ eşitliğini sağlayan bir $x \in [a, b]$ vardır. Şimdi kapalı bir aralıkta tanımlı $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ dönüşümünün mutlaka bir sabit noktası olduğunu görelim. Eğer $f(a) = a$ veya $f(b) = b$ ise kanıtlayacak bir şey yok. O halde $a < f(a)$ ve $f(b) < b$ olsun. Tabii $g(x) = x - f(x)$ sürekli bir fonksiyon ve $g(a) < 0 < g(b)$. Aradığımız teoreme göre bu fonksiyonun $[a, b]$ aralığında en az bir kökü x_0 var. Ama $g(x_0) = 0$ ise $f(x_0) = x_0$ olur.

Gerçel sayılarda kolayca kanıtladığımız bu sonucu n boyutlu uzaya taşıma-ya çalışalım. $\mathbb{R}$ uzayında kapalı bir aralık tıkmaz bir küme ama her tıkmaz küme bir aralık değil. Bir vektör uzayının A kümesinden alınan herhangi x ve y noktalarını birleştiren doğru parçası olan $\{\alpha x + (1 - \alpha)y : 0 \leq \alpha \leq 1\}$ kümesi A içinde kalıyorsa, bu A kümesine **konveks** denir. Gerçel sayılar uzayının konveks kümeleri aralıklardan başka birşey değildir. Ama daha üst boyutlarda konveks kümeler birbirlerine hiç de benzemezler. Örnek olarak $\mathbb{R}^2$ içinde

$$A_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < 1\}$$

$$A_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$A_3 = \{(x, y) : x \geq 1, y \in \mathbb{R}\}$$

kümelerine bakalım. Bunlardan A_1 bir kare, A_2 bir daire ve A_3 ise yarım bir uzay. A_2 ve A_3 kapalı, A_1 ise ne açık ne de kapalı. A_1 ve A_2 sınırlı ama A_3 sınırsız bir küme. Dolayısıyla bu üç basit örnek arasında sadece A_2 hem konveks hem de tıkmaz.

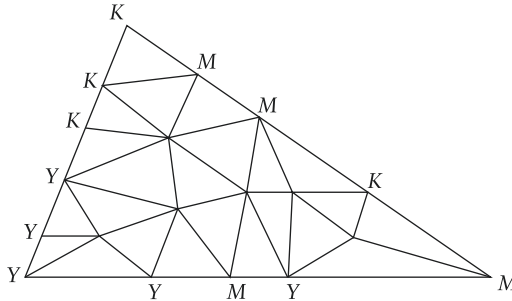
Bu bölümdeki ana amacımız 1912 yılında **L. Brouwer** tarafından kanıtlanan ünlü sabit nokta teoremini irdelemek ve en azından özel bir halini kanıtlamak olacak. Matematikğin birçok alanının yanı sıra, ekonomide de yaygın bir şekilde uygulanan bu önemli teoremini şöyle ifade edebiliriz:

Teorem 12.1. $B \subset \mathbb{R}^n$ konveks ve tıkkız ise her sürekli $f : B \rightarrow B$ dönüşümünün mutlaka bir sabit noktası vardır.

Brouwer teoremini Banach sabit nokta teoremi ile kısaca karşılaştıralım. Dönüşümün tanımlandığı uzay Banach sabit nokta teoreminde herhangi bir tam metrik uzaydı. Oysa Brouwer'in teoreminde çok daha özel bir hal, $\mathbb{R}^n$ uzayındaki tıkkız ve konveks kümeler söz konusu. Buna karşın Brouwer teoreminde dönüşüm üzerindeki tek koşul sürekli olması. Banach'ın teoreminde ise dönüşümün daha özel olarak bir büzülme dönüşümü olması isteniyordu. Ayrıca Banach sabit nokta teoreminde tek bir sabit noktanın varlığını elde ediyorduk ve en azından yaklaşık olarak bu noktayı hesaplayabiliyorduk. Brouwer'in teoremi ise sadece en az bir sabit noktanın varolduğunu söylüyor. Bu noktayı nasıl bulacağımız hakkında bir bilgi vermiyor.

Bir topolojik uzayı kendine dönüştüren her sürekli dönüşümün sabit bir noktası varsa, bu uzayın **sabit nokta özelliği** vardır diyelim. Brouwer teoremi $\mathbb{R}^n$ 'nin tıkkız ve konveks kümelerinin sabit nokta özelliği olduğunu söylüyor bize... A uzayının sabit nokta özelliği olsun. Bu uzayın D ile göstereceğimiz bir topolojik kopyasını alalım. Bundan kastettiğimiz, birebir, örten, kendisi ve tersi de sürekli bir $g : A \rightarrow D$ fonksiyonun varlığından başka birşey değil. Eğer $f : D \rightarrow D$ sürekliyse, $g^{-1}fg : A \rightarrow A$ fonksiyonu da sürekli bir dönüşüm olur. Bu dönüşümün bir sabit noktası a olduğunu biliyoruz. Ama $g^{-1}(f(g(a))) = a$ ise, tabii $f(g(a)) = g(a)$ olacak. Dolayısıyla $g(a)$ da f dönüşümünün sabit noktası. Demek ki sabit nokta özelliği olan bir topolojik uzayın topolojik kopyalarının da aynı özelliği vardır. Böylece Brouwer sabit nokta teoreminin topolojik özelliğini de görmüş olduk.

Şimdi Brouwer teoremini düzlemdeki üçgenler için kanıtlayacağız. Bu özel halde bile kanıt epeyce zor ve uzunca bir hazırlık gerektiriyor. İlk iş olarak düzlemde bir üçgen alalım ve köşelerini kırmızı (K), mavi (M) ve yeşil (Y) olarak işaretleyelim. Bu üçgenin içini istediğimiz gibi küçük üçgenlere ayırştıralım. Bu ayırştırmada, birbirine komşu küçük üçgenlerin kenarları birbirine tam uymalı, yani herhangi bir küçük üçgenin herhangi bir köşesi bir başka küçük üçgenin kenarında olmamalı. (Bkz. aşağıdaki şekil.)



Şimdi küçük üçgenlerin köşelerini basit bir kurala göre renklendirelim: Büyük üçgenimizin kırmızı köşesini mavi köşeye birleştiren doğru üzerindeki küçük üçgenlerin köşesi kırmızı veya mavi, mavi köşeyi yeşil köşeye birleştiren doğru üzerindeki mavi veya yeşil, yeşil köşeyi kırmızı köşeye birleştiren doğru üzerindeki de yeşil veya kırmızı olsun. Büyük üçgenimizin içinde kalan küçük üçgen köşelerini ise istediğimiz gibi kırmızı, mavi ve yeşil renklerden biriyle boyayalım. (Bkz. Şekil 12.1.) Bu kurala göre renklendirilmiş küçük üçgenlerden en az birinin kırmızı, mavi ve yeşil köşeleri vardır. **E. Sperner**'in bu ilginç teoremi, Brouwer teoreminin kanıtının temeli olacak¹.

Masalımsı bir kanıt için köşelerinde kırmızı (K), mavi (M) ve yeşil (Y) kuleler olan üçgen biçiminde bir perili köşk düşünelim. Köşkün içi de üçgen odalara ayrılsın ve bu küçük odaların köşeleri Sperner kuralına göre üç renge boyanmış olsun. Bir köşesi mavi, diğer köşesi yeşil renge boyanmış olan her duvarda bir kapı var. Diğer duvarlar ise geçit vermiyor. İşte köşkümüz böyle bir yer.

Şimdi odaların kapılarını sayalım. Eğer bir odanın köşeleri MYM ya da YMY ise bu odanın iki kapısı, köşeleri KYM olan odalarının ise tek bir kapısı var. Diğer odaların kapısı yok. Masalımızda bir de meraklı, afacan bir çocuk var. Köşkün içine girip gezmek, sonra da dışarı çıkmak istiyor. Afacan köşkün her kapısını açabilen bir anahtar bulmuş bir yerden. Ancak köşkümüz perili köşk... Bizim afacanın elindeki anahtar her kapıyı sadece bir kez açıyor. O girdikten sonra kapı hemen kapanıyor ve sihirli biçimde kilidi değişiyor. Artık anahtar o kapıyı açmıyor. Afacan gezintisini bitirip köşkün dışına çıktığında değişen kilitleri açan yeni bir anahtar buluyor ve böylece tekrar köşke girebiliyor.

Mavi ve yeşil kuleler arasındaki dış duvarda olan bir kapıdan köşke girsin meraklı afacan. Girdiği küçük üçgen oda ya MYM , MMY ya da MYK olacak. İçeri girdiği kapı ardından kapandı ve kilidi değişti. Eğer girdiği oda MYM veya MMY ise ikinci bir kapı var. Onu açıp devam eder yoluna bizim afacan. Ama ilk girdiği oda MYK ise kapanan kapı dışında başka kapı yok. Afacan oracıkta hapis kaldı. Birisinin gelip onu kurtarması gerek. İlk girdiği oda MYM ya da MMY ise, ikinci kapıyı açıp yeni bir odaya girebilir. Şansı varsa gezintisinde hiç MYK odaya rastlamaz ve dış duvardaki bir kapıyı açıp kendini köşkün dışına atar. Köşkün dışına çıktığı son kapı içeriye girdiği ilk kapı olamaz, çünkü anahtarı her kapıyı yalnız bir kez açıyor. Yani köşke bir kapıdan girip başka bir kapıdan çıkmak zorunda. Peki yeni gezintisine biraz önce çıktığı kapıdan girerek başlasa ne olur? Tabii bu sefer de ilk gezintisine başladığı kapıdan dışarı çıkacak. Zaten bir dış kapıyı seçip köşke girdikten sonra afacanın hiçbir seçme hakkı yok. Ya hep iki kapalı odalara girip yoluna devam edecek ya da bir MYK odasına düşüp orada hapis kalacak. Köşkün

¹Bölüm sonundaki Ek 2'de Sperner teoreminin biraz farklı bir kanıtını daha bulabilirsiniz.

ününü bilen meraklı afacanımız tedbirli davranıp seçtiği kapının üzerine 1G yazıyor ve köşke giriyor. Dışarıya çıktığı kapının üzerine de 1Ç yazıyor. Böylece mavi ve yeşil kuleler arasında kalan dış kapılar 1G (giriş), 1Ç (çıkış), 2G, 2Ç gibi giriş ve çıkışta ikiye ikiye işaretlenmiş oluyor.

Mavi ve yeşil kuleler arasındaki duvarda mavi veya yeşil renkle içerideki odaların köşeleri belirtilmiş. Bu işaretlerden kaç tane olduğu tabii köşkün içini üçgenlere nasıl ayırdığımıza bağlı. Ama dışarıdan köşkün içine açılan kapı sayısı mutlaka tek sayı. Bunu kanıtlamak için dış duvardaki mavi ve yeşil işaretler üzerinden tümevarım yöntemini kullanacağız.

Mavi ve yeşil kuleler arası boş ise, yani başka bir kule yoksa, kapı sayımız bir. Başka kapı yok. Şimdi bir biçimde üçgenlere ayırdırdıktan sonra köşke dışarıdan $2k + 1$ tane kapı açıldığını varsayalım. İşaretlerimize bir tane daha ekleyelim, tabii M veya Y . Diyelim ki yeni ekleyeceğimiz işaret M olsun. Şimdi bu işareti ya iki M arasına koyup MMM elde edeceğiz ya da M ile Y arasına koyup MMY bulacağız. Her iki halde de yeni bir kapı açmadık. Kapı sayımız hala $2k + 1$. Ama bir seçenek daha var. Yeni işaretimizi iki Y arasına koyarsak, YMY elde ederiz. Şimdi iki yeni kapı açtık. Bu halde kapı sayımız $2k + 3$ oldu. Gördüğümüz gibi ne olursa olsun tek sayıda dış kapımız var.

Dış kapılarımızı her giriş ve çıkıştan sonra 1G, 1Ç, 2G, 2Ç gibi ikiye ikiye işaretlemiştik. Tek sayıda kapımız olduğu için en az bir kapımızda işaret yok. Öyleyse o kapıdan girerse bizim afacan dışarı çıkamayacak. Demek ki içeride en az bir oda MYK . İşte Sperner toeriminin kanıtı!

Artık sıra Brouwer teoremini üçgen için kanıtlamaya geldi. Üçgenimizi bir üst boyutlu uzay $\mathbb{R}^3$ içinde alacağız. $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ vektörleri cinsinden her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ vektörünün

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

biçiminde yazıldığını iyi biliyoruz. Böylece

$$\Delta = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1 \text{ ve } x_i \geq 0, i = 1, 2, 3\}$$

kümesi köşeleri $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ve $\mathbf{e}_3$ olan üçgendir. Savımızın tersine, sabit noktası olmayan sürekli bir $f : \Delta \rightarrow \Delta$ dönüşümünün var olduğunu kabul edelim. Demek ki özel olarak $f(\mathbf{e}_1) \neq \mathbf{e}_1$ ve dolayısıyla eğer

$$f(\mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_1)_1\mathbf{e}_1 + f(\mathbf{e}_1)_2\mathbf{e}_2 + f(\mathbf{e}_1)_3\mathbf{e}_3$$

ise, $f(\mathbf{e}_1)_2 = f(\mathbf{e}_1)_3 = 0$ olamaz. Burada $f(\mathbf{e}_1)_i$ ile $f(\mathbf{e}_1)$ vektörünün i 'inci koordinatını gösteriyoruz. Olsaydı $f(\mathbf{e}_1)_1 = 1$ olurdu, çünkü $f(\mathbf{e}_1) \in \Delta$. Öyleyse ya $f(\mathbf{e}_1)_2$ ya da $f(\mathbf{e}_1)_3$ sayısı 0'dan büyük ve dolayısıyla $f(\mathbf{e}_1)_1$ de 1'den küçük.

Bu özel durumu bir yana koyup genel olarak Δ üçgeninden iki farklı

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \text{ ve } \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$$

noktasına bakalım. O zaman $x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3$ sayılarından en az biri 0'dan farklı olacak. Genellikten birşey yitirmeden $x_1 - y_1 < 0$ diyelim. Ama

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

yani

$$(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + (x_3 - y_3) = 0$$

Demek ki ya $x_2 - y_2$ ya da $x_3 - y_3$ sayısı 0'dan büyük.

Δ 'nın herhangi bir üçgenlere ayrışımını alalım ve $\mathbf{v}$ köşesi için

$$\lambda(\mathbf{v}) = \min\{i : f(\mathbf{v})_i < v_i\}$$

sayısını tanımlayalım. Tanımda bir sorun yok, çünkü $f(\mathbf{v}) \neq \mathbf{v}$ ve bir önceki paragrafa göre $\lambda(\mathbf{v})$ var.

$f(\mathbf{e}_1) - \mathbf{e}_1$ vektörünün ikinci ve üçüncü koordinatları 0'dan küçük değil. O zaman birinci koordinatı 0'dan mutlaka küçük. Yani $\lambda(\mathbf{e}_1) = 1$. Aynı şekilde $\lambda(\mathbf{e}_2) = 2$ ve $\lambda(\mathbf{e}_3) = 3$. Üçgenlere ayrıştırılmada ortaya çıkan bir $\mathbf{v}$ köşesi $\mathbf{e}_1$ ile $\mathbf{e}_2$ arasındaki doğrudan ise

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2$$

olarak yazılır. Tabii $v_1 = 1 - v_2$ ve $0 \leq v_2 \leq 1$ olacak. Ayrıca $f(\mathbf{v})_3 \geq 0 = v_3$. Demek ki $\lambda(\mathbf{v})$ ya 1 ya da 2. Aynı şekilde $\mathbf{v}$ köşesi $\mathbf{e}_2$ ile $\mathbf{e}_3$ arasındaki doğrudan seçilmiş ise $\lambda(\mathbf{v})$ ya 2 ya da 3 olur. Böylece $\lambda(\mathbf{v}) = 1$ olan köşeleri maviye, $\lambda(\mathbf{v}) = 2$ olan köşeleri yeşile ve $\lambda(\mathbf{v}) = 3$ olanları da kırmızıya boyayarak Sperner teoremindeki kurala uygun olarak üçgenlerimizin köşelerini renklendiririz.

Üçgenimizi giderek küçülen üçgenlere ayrıştıracağız. Bir τ üçgenlemesi için $\delta(\tau)$ ile en büyük kenar uzunluğunu gösterelim. Δ üçgenimiz için $(\delta(\tau_n))_n$ dizisinin 0'a yakınsadığı bir $(\tau_n)_n$ üçgenlemeler dizisi bulmak zor değil. Mesela τ_n içindeki her küçük üçgeni daha küçük üçgenlere uygun biçimde ayrıştırarak elde ettiğimiz τ_{n+1} üçgenlemesi olsun. İşte bu yöntem istediğimiz $(\tau_n)_n$ dizisini verir. Sperner teoremine göre her τ_n üçgenlemesi için köşeleri mavi, yeşil ve kırmızıya boyalı en az bir küçük üçgen var. Her n için böyle bir küçük üçgenin köşelerini sırasıyla $\mathbf{v}^n(m), \mathbf{v}^n(y), \mathbf{v}^n(k)$ ile gösterelim.

Δ tıkHz bir küme. Öyleyse mavi köşeler dizisinin bir alt dizisinin Δ içinde kalan bir limiti $\mathbf{v}$ vardır. Bu alt diziyi $(\mathbf{v}^{n_i}(m))_i$ ile gösterelim. $(\delta(\tau_n))_n$ dizisi 0'a yakınsadığından $(\mathbf{v}^{n_i}(y))_i$ ve $(\mathbf{v}^{n_i}(k))_i$ dizileri de yakınsaktır. Öte yandan

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}^{n_i}(m) - \mathbf{v}^{n_i}(y)\| &\leq \delta(\tau_{n_i}), \\ \|\mathbf{v}^{n_i}(m) - \mathbf{v}^{n_i}(k)\| &\leq \delta(\tau_{n_i}) \end{aligned}$$

ve

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta(\tau_{n_i}) = 0.$$

Böylece yeşil ve kırmızı köşeler dizisinin de aynı limite yakınsadığını görürüz. f sürekli olduğundan

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{v}^{n_i}(m) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{v}^{n_i}(k) = \mathbf{v}$$

bize

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(\mathbf{v}^{n_i}(m)) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(\mathbf{v}^{n_i}(y)) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(\mathbf{v}^{n_i}(k)) = f(\mathbf{v})$$

verir. Şimdi

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 \text{ ve } f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v})_1 \mathbf{e}_1 + f(\mathbf{v})_2 \mathbf{e}_2 + f(\mathbf{v})_3 \mathbf{e}_3$$

noktalarına bakalım. Her i için $\lambda(\mathbf{v}^{n_i}(m)) = 1$. Dolayısıyla $f(\mathbf{v})_1 \leq v_1$. Aynı şekilde $\lambda(\mathbf{v}^{n_i}(y)) = 2$, $\lambda(\mathbf{v}^{n_i}(k)) = 3$ bize $f(\mathbf{v})_2 \leq v_2$ ve $f(\mathbf{v})_3 \leq v_3$ verecek. Ama $f(\mathbf{v}) \neq \mathbf{v}$. Dolayısıyla bu eşitsizliklerden en az biri mutlak. Böylece

$$1 = f(\mathbf{v})_1 + f(\mathbf{v})_2 + f(\mathbf{v})_3 < v_1 + v_2 + v_3 = 1$$

elde ettik. İşte aradığımız çelişki! □

Brouwer sabit nokta teoreminin oyunlar teoresinde, ekonomide ve fizikte önemli uygulamaları var. Biz bu ünlü teoremin topoloji içindeki yerini belirgin hale getiren bir sonucu ele alacağız. $\mathbb{R}^n$ içindeki birim küre

$$B_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

ise, onun yüzeyi

$$\partial B_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in B_n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

olur. Brouwer teoreminden B_n birim küresinin sabit nokta özelliği olduğunu biliyoruz. Ama kürenin yüzeyi ∂B_n konveks değil. Nitekim $x \mapsto -x$, birim kürenin yüzeyini kendisine götüren ve sabit noktası olmayan bir dönüşümdür. Bölüm sonundaki Ek 1'de birim kürenin sabit noktası olmayan başka dönüşümler bulacağız.

Şimdi sınırdaki noktaları sabit bırakan sürekli bir $h : B_n \rightarrow \partial B_n$ fonksiyonunun varlığını kabul edelim. Kürenin yüzeyini kendine gönderen ama hiç bir noktayı sabit bırakmayan bir g dönüşümü için

$$f = g \circ h : B_n \rightarrow B_n$$

fonksiyonu süreklidir ve Brouwer teoremine göre bir sabit noktası vardır. Ama

$$f(x) = g(h(x)) = x$$

ise, $h(x) \in \partial B_n$ ve $g(\partial B_n) \subseteq \partial B_n$ olduğu için bu x noktası da ∂B_n kümesinde olacak. Demek ki $h(x) = x$ ve $x = f(x) = g(h(x)) = g(x)$. Ama $g(x)$ ile x eşit olamaz. Öyleyse h sürekli değildir.

Böylece Brouwer teoremini kullanarak cebirsel topolojinin önemli bir sonucunu kanıtlamış olduk.

Teorem 12.2. ∂B_n kümesinin öğelerini sabitleyen sürekli bir $h : B_n \rightarrow \partial B_n$ fonksiyonu yoktur. $\square$

Aslında bu teorem Brouwer teoreminden bağımsız olarak cebirsel topoloji yöntemleriyle de kanıtlanabilir. Ama bu kanıt hiç de kısa değildir; oldukça uzun hazırlık gerektirir. Ancak Teorem 12.2'yi kullanarak Brouwer teoremini kanıtlayabiliriz. Şimdi bunu görelim. Brouwer teoreminin B_n için doğru olmadığını kabul edip öyle bir sürekli $h : B_n \rightarrow \partial B_n$ fonksiyon bulacağız ki her $x \in \partial B_n$ için $h(x) = x$ sağlansın.

Öyleyse $f : B_n \rightarrow B_n$ sürekli dönüşümünün sabit noktası olmasın. Her $x \in B_n$ için $f(x)$ noktasını x noktasına birleştiren doğru

$$D_x = \{\alpha x + (1 - \alpha)f(x) : -\infty < \alpha \leq 1\}$$

belirli bir noktada ∂B_n kümesini keser. Bu noktayı $h(x)$ ile göstererek tanımladığımız $h : B_n \rightarrow \partial B_n$ fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlamaya bile gerek yok! Ama $x \in \partial B_n$ ise $h(x) = x$ olacak. İşte böylece cebirsel topoloji yöntemleriyle Teorem 12.2'yi elde etmişsek, Brouwer teoremini de bu teoremi kullanarak hemen kanıtlayabileceğimizi gördük.

Brouwer sabit nokta teoremi değişik yollardan genelleştirilebilir. Bu genelleştirmelerden biri olan **Schauder teoremi** Brouwer'in sonucunu genel normlu uzaylara taşır.

Bu teoremin kanıtında tıklılık özelliğini kullanarak ele aldığımız sorunu sonlu boyuta, yani Brouwer teoremine indirgeyeceğiz.

Teorem 12.3 (Schauder). *Herhangi bir normlu uzayın tıkHz ve konveks alt-kümesinin sabit nokta özelliği vardır.*

Kanıt: Normlu bir E uzayının K tıkHz ve konveks bir altkümesi ve $f : K \rightarrow K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Merkezi x noktası olan açık küreleri

$$B_\epsilon(x) = \{y \in E : \|y - x\| < \epsilon\}$$

ile gösterelim. K tıkHz olduğu için bir $\epsilon > 0$ verildiğinde K içinden öyle sonlu sayıda $x_1, x_2, \dots, x_n$ noktası seçebiliriz ki

$$K \subseteq B_\epsilon(x_1) \cup B_\epsilon(x_2) \cup \dots \cup B_\epsilon(x_n)$$

sağlanır. Bu noktalarının doğurduğu konveks küme

$$\text{con}\{x_1, \dots, x_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i : \alpha_i \geq 0 \text{ ve } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

tabii K içinde kalır. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $g_i : K \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$g_i(x) = \begin{cases} \epsilon - \|x - x_i\| & \text{eğer } x \in B_\epsilon(x_i) \cap K \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x \notin B_\epsilon(x_i) \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu fonksiyonlar aşıkâr olarak sürekli ve her $x \in K$ için

$$\sum_{r=1}^n g_r(x) > 0.$$

Şimdi $x \in K$ için

$$g(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n g_i(x)} (g_1(x)x_1 + \cdots + g_n(x)x_n)$$

yazalım. Bu şekilde tanımlanan $g(x)$ noktasının $\text{con}\{x_1, \dots, x_n\} = K_\epsilon$ içinde kaldığını tanımdan hemen elde ederiz. Böylece sürekli bir

$$g : K \rightarrow \text{con}\{x_1, \dots, x_n\}$$

fonksiyonu tanımladık. Bu fonksiyon her $x \in K$ için $\|g(x) - x\| < \epsilon$ eşitsizliğini de sağlar.

Bu $x_1, \dots, x_n$ noktaları yardımıyla $T : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ fonksiyonunu

$$T(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i$$

olarak tanımlayalım. Bu fonksiyonun sürekli ve doğrusal olduğunu hemen görebiliriz. Ama

$$B = \left\{ (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |\xi_i| \leq 1 \right\}$$

tıkız bir küme. Öyleyse $K_\epsilon = T(B)$ kümesi de tıkız ve tabii konveks. K_ϵ kümesini

$$i \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

dönüşümü ile B içine gömeriz. Şimdi artık

$$i \circ g \circ f \circ T : B \rightarrow B$$

fonksiyonuna Brouwer teoremini uygulayalım. Teorem bize bir $b \in B$ için

$$i(g(f(Tb))) = b$$

sağlandığını söyler. $T(b) = z \in K_\epsilon$ yazarsak, her iki tarafa T uygulayarak

$$g(f(z)) = z$$

elde ederiz. Öyleyse bu $z \in K_\epsilon$ için

$$\|f(z) - z\| = \|f(z) - g(f(z))\| < \epsilon$$

geçerlidir. Tabii bu bulduğumuz z noktası verilen ϵ sayısına bağlı. Her $\epsilon = 1/m$ için şimdi K içinden

$$\|f(z_m) - z_m\| < \frac{1}{m}$$

eşitsizliğini sağlayan bir z_m noktasını geliştirdiğimiz yöntemle seçelim. K tıktık için $(z_m)_m$ dizisinin bir alt dizisi $(z_{m_i})_i$ bir $z_0 \in K$ noktasına yakınsar. Tabii

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(z_{m_i}) = f(z_0).$$

Böylece yukarıdaki eşitsizlikten $f(z_0) = z_0$ elde edip kanıtımızı sonlandırırız.

□

Ek 1. n Boyutlu Birim Küre B_n 'nin Bazı Dönüşümleri²

Birim kürenin ve yüzeyinin tanımlarını anımsayalım:

$$B_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

ve

$$\partial B_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in B_n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

Her şeyden önce koordinatları karmak B_n 'nin ve ∂B_n 'nin sürekli dönüşümleri verir. Böylece $\text{Sym } n$ grubunu B_n 'nin dönüşümleri olarak gerçekleştirebiliriz. (Matematikte buna tasvir denir.) Ama bu dönüşümlerin sabit noktaları vardır. Örneğin koordinatları $x_1 = \dots = x_n = 1/\sqrt{n}$ olan noktalar tüm bu dönüşümler altında sabitlenirler. Bu dönüşümler elbette ∂B_n 'yi kendisine götürür.

Bunun dışında, koordinatların bazılarını (örneğin hepsini!) -1 ile çarparak B_n 'nin dönüşümleri buluruz. Bu sayede $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ grubu B_n 'nin dönüşümlerinden oluşan grubun içine gömülür. Bu dönüşümler de elbette ∂B_n 'yi kendisine götürür. Tüm koordinatları -1 ile çarpma dışında, bu paragrafta sözü edilen diğer tüm dönüşümlerin ∂B_n üstünde en az bir noktayı (ve çift sayıda noktayı) sabitler.

Bu bulduklarımız dışında B_n 'nin başka dönüşümleri de bulabiliriz. Amacımız ∂B_n 'yi de kendisine götüren dönüşümleri bulmak. (Zaten sürekli ve tersinir olan dönüşümlerin ∂B_n 'yi kendisine götürmekten başka şansları yoktur.)

Eğer $n = 1$ ise $B_1 = [-1, 1]$ ve $\partial B_1 = \{-1, 1\}$ olur. Bu durumda $x \mapsto x$ ve $x \mapsto -x$ olarak tanımlanmış Id ve $-\text{Id}$ fonksiyonları B_1 'i B_1 'e götürür ve bunu yaparken ∂B_1 'i gene kendisine götürür. Ayrıca ikincisinin tek bir sabit noktası vardır: ∂B_1 'de olmayan 0 noktası. Bu kolaydı ve zaten ikinci paragrafta sözü edilmişti. Şimdi $n \geq 2$ durumuna bakalım.

²Bu ek Ali Nesin tarafından yazılmıştır.

Eğer $n = 2$ ise bildiğimiz birim daireyi ve birim çemberi elde ederiz. Birim dairenin birçok sürekli dönüşümü vardır ama bu sürekli dönüşümler arasında en düzgün olanları belli bir açıda O noktası etrafında döndürmedir. Eğer açı θ ise, bu dönüşüm,

$$\rho_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

formülüyle verilir. Eğer $\theta \in (0, 2\pi)$ ise bu dönüşümün yegâne sabit noktası dairenin merkez noktasıdır elbette. Geometrik olarak bu gözlem bariz olduğu gibi, cebirsel olarak da kanıtlamak çok zor değil. Ayrıca bu dönüşüm ∂B_2 birim çemberini kendine yollar ve çemberin hiçbir noktasını sabitlemez. Bu dönüşüm sadece ∂B_2 birim çemberini kendisine yollamakla yetinmez, r yarıçaplı $\partial B_2(r)$ çemberlerini de kendilerine yollar.

r_θ 'dan yararlanarak, her n için B_n küresinin bir dönüşümünü kolaylıkla yaratabiliriz. Şöyle yaparız: Herhangi iki koordinata (mesela ilk iki ya da son iki koordinata) r_θ 'yı uygulayalım ve diğer koordinatları sabit bırakalım. Bu dönüşüm de ∂B_n 'yi kendisine götürür. Ama birçok sabit noktası vardır: ρ_θ 'yı uyguladığımız iki koordinattaki girdileri 0 olan her nokta bu dönüşüm altında sabittir.

Yukardaki yöntemi genelleştirebiliriz. $n \geq 3$ olsun. $k, \ell > 0$ tamsayılar olmak üzere $n = k + \ell$ olsun. O zaman elbette

$$B_n = \bigcup_{r+s=1} \partial B_k(r) \times \partial B_\ell(s)$$

olur. Eğer $f : B_k \rightarrow B_k$ ve $g : B_\ell \rightarrow B_\ell$ dönüşümleri yukarıdaki paragraflarda bulunan dönüşümler gibi (sırasıyla) $\partial B_k(r)$ ve $\partial B_\ell(s)$ çemberlerini kendilerine götürüyorsa, o zaman $f \times g$ dönüşümü B_n 'yi kendisine götürür ve bunu yaparken de ∂B_n 'yi de kendisine götürür. Eğer ne f 'nin ne de g 'nin O_k ve O_ℓ merkezlerinden başka sabit noktası varsa, $O = O_n = (O_k, O_\ell)$ noktası $f \times g$ dönüşümünün yegâne sabit noktasıdır.

Eğer $n = 2m$ çift ise $\theta_1, \dots, \theta_m \in (0, 2\pi)$ için

$$\rho_{\theta_1} \times \dots \times \rho_{\theta_m}$$

dönüşümlerinin B_n 'nin O noktası haricinde sabit noktası yoktur (hatta sabit bir eksen bile yoktur) ve ∂B_n 'yi kendisine götürür.

Eğer $n = 2m + 1$ tekse, B_n 'yi B_n 'ye götüren her lineer dönüşümün (yukarıda bulduğumuz tüm dönüşümler lineerdi) sabit bir eksen olduğunu göstermek zor değildir; bunun için Teorem 10.1'i ve biraz lineer cebir bilmek yeter. Dolayısıyla sabitlenen bu eksenin ∂B_n ile kesişimleri olan iki nokta, diyelim P ile $-P$, birbirine gitmek zorundadır. Demek ki ∂B_n üzerinde sabit nokta istemiyorsak, bu P noktası $-P$ 'ye gitmeli. Gerekirse koordinat değişikliğine giderek

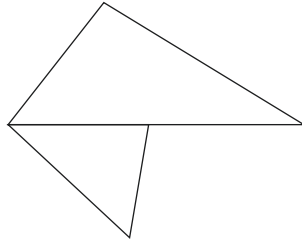
P 'nin $(0, \dots, 0, 1)$ noktası olduğunu varsayabiliriz. Örnek olarak $\theta_1, \dots, \theta_m \in (0, 2\pi)$ için

$$\rho_{\theta_1} \times \dots \times \rho_{\theta_m} \times -\text{Id}$$

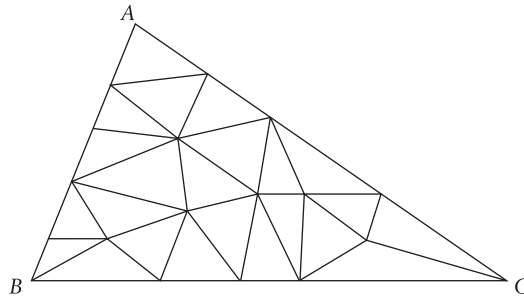
türünden dönüşümleri verebiliriz. (Bunların determinantlarının -1 olduğuna dikkatinizi çekeriz, dolayısıyla döndürü değildirler. Eğer n tekse, mesela $n = 3$ ise, her döndürünün ∂B_n üzerinde en az iki sabit noktası olduğu gösterilebilir.)

Ek 2. Sperner Teoreminin Bir Başka Kanıtı³

Herhangi bir ABC üçgeni alın. Büyük üçgen adını vereceğimiz bu üçgeni daha küçük üçgenlere istediğiniz gibi bölün, yani ABC üçgenini üçgenleyin, ama bunu yaparken bir üçgenin bir köşesinin bir başka üçgenin kenarına değmemesine özen gösterin, bir köşe ancak başka köşelere değebilir; yani şöyle bir şekil belirmesin:

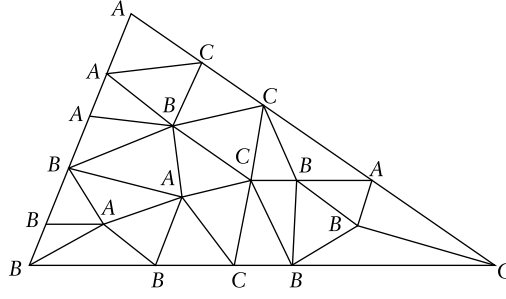


Ama şöyle bir şekil olabilir.

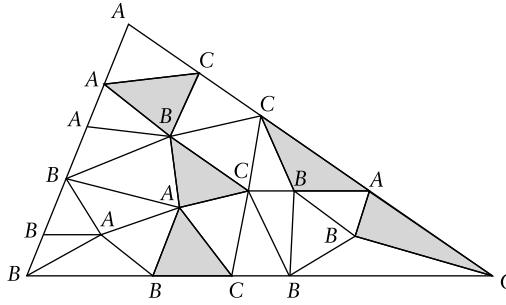


Şimdi AB kenarındaki noktalara rastgele A ya da B adını verin. İsterseniz hepsine A diyebilirsiniz, isterseniz yarısına A yarısına B diyebilirsiniz. Paşa gönlünüz nasıl isterse... AC kenarındaki noktalara da A ya da C adını verin. Ve BC kenarındaki noktalara B ya da C adını verin. Ve son olarak üçgenin içindeki noktaları istediğiniz gibi adlandırın.

³Bu ek Ali Nesin tarafından yazılmıştır.



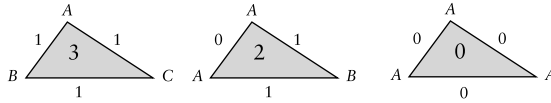
Şimdi iddiayı ortaya atıyorum: ABC diye adlandırılan küçük üçgen sayısı tek-tir... (Demek ki mutlaka en az bir tane böyle üçgen olmak zorundadır.) Örneğin yukarıdaki şekilde tam 5 tane ABC üçgeni belirmiştir. Aşağıda bu beş üçgeni griye boyadık.



İddiamızı kanıtlıyoruz.

Eğer küçük üçgenlerin bir kenarı AA , BB , CC diye adlandırılmışsa, o kenara 0 puan verelim. Aksi taktirde, yani AB , BC ve CA diye adlandırılan kenarlara 1 puan verelim. Bunlara kenar puanları diyelim.

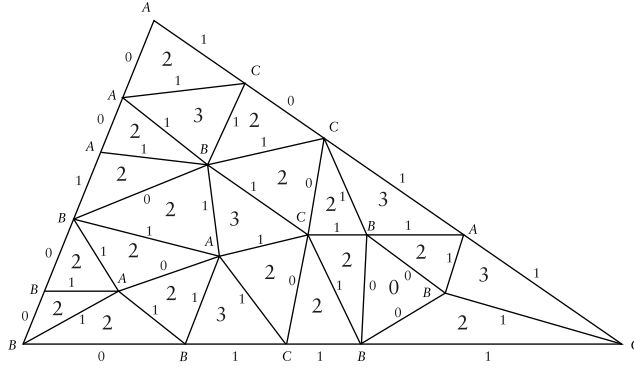
Küçük üçgenlerin ortasına da üç kenar puanının toplamını yazalım. Bu puanlandırmaya göre üç çeşit küçük üçgenimiz olabilir. İşte o üç tür üçgen:



Aşağıdaki büyük şekilde örneğimizin numaralanmış halini bulacaksınız.

Şimdi bu küçük üçgen puanlarını toplayalım. Bu toplama T diyelim. Bir sonraki paragrafta T 'nin bir tek sayı olduğunu kanıtlayacağız. Bunu şimdilik kanıtladığımızı varsayalım, diyelim T bir tek sayı.

XXY ve XXX türünden üçgenlerin puanı çift (2 ya da 0) olduğundan ve her ABC üçgeninin T katkısı 3 (bir tek sayı) olduğundan ABC üçgen sayısı tek olmak zorundadır.



Demek ki T tek olduğunu kanıtlamalıyız. T sayısını bulmak için küçük üçgenlerin puanlarını topladık, ama küçük üçgenlerin puanları kenar puanlarının toplamı olarak hesaplandığından, T aynı zamanda tüm kenar puanlarının toplamıdır. Ama bazı kenar puanları iki defa toplanmıştır. Hangi kenarların puanları iki defa toplanmıştır? Üçgenin içinde olan kenarlar tam iki üçgenin kenarları olduğundan bu kenarların puanları iki defa toplanmıştır. Demek ki büyük üçgenin içindeki kenarların T 'ye katkısı bir çift sayı kadardır. Dolayısıyla büyük üçgenin kenarlarındaki kenar puanlarının toplamının tek olduğunu kanıtlamalıyız. Üç büyük kenar olduğundan, her bir kenarın toplama katkısının tek olduğunu kanıtlarsak işimiz biter.

Herhangi bir kenardan başlayalım, diyelim AB kenarının T toplamına olan katkısının tek olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Büyük üçgenin A köşesinden başlayıp B köşesine doğru gidelim. A köşesinden B köşesine gittiğimizden bir zaman sonra bir B köşesine rastlamalıyız (katkı 1). Devam edelim. Eğer bu B köşesinden sonra karşımıza hep B köşesi çıkarsa, sorun yok, bu kenarın toplam katkısı 1 olur ve 1 bir tek sayıdır. Eğer karşımıza tekrar bir A köşesi çıkarsa, bu A 'dan sonra mutlaka bir B köşesi daha çıkmalı... Toplama katkısı 3 oldu. Bu hep böyle ikiye ikiye devam eder, karşımıza her A köşesi çıktığında bir zaman sonra tekrar bir B köşesi çıkmalı. Demek ki büyük üçgenin AB kenarının katkısı bir tek sayı olmalı. Bunun gibi üç kenarı olduğundan istediğimiz kanıtlanmış olur.

NOTLAR

Hollandalı matematikçi **Luitzen Egbertus Jan Brouwer** (1881-1966) topoloji, ölçüm kavramı ve karmaşık analiz konularında çalışmıştır. Daha öğrencilik yıllarında felsefeyle de yakından ilgilenen Brouwer, matematiğe de sezgisellik felsefesiyle yaklaşmış ve Hilbert'in aşırı formalist yaklaşımını sert biçimde eleştirmiştir. 1920'lerde ünlü **Mathematische Annalen** dergisinin editörlük politikasını kendi yaklaşımları doğrultusunda olmasını isteyen bu

iki matematikçi arasında uzun süren tartışmalar yaşanmıştır. Biraz da bu tartışmalar sonucunda Brouwer matematikçiler arasında yalnızlığa itilmiştir. Yaşamının son yıllarında aşırı şüphecilik, hastalık korkusu ve karamsarlık içinde olan Brouwer, 85 yaşında evinin önünde bir otomobilin çarpması sonucunda ölmüştür.

Polonyalı matematikçi **Juliusz Pawel Schauder** (1899-1943), daha çocuk yaşlarında Birinci Dünya Savaşı'nda Avusturya-Macaristan ordusu tarafından askere alınmış ve İtalya cephesinde esir düşmüştür. Savaştan sonra 1923 yılında doktorasını bitirmiş, ancak üniversitelerde iş bulamadığı için lise öğretmeni olarak çalışmıştır. 1932'de kazandığı bir bursla Paris'e giden Schauder, 1935'te Lwow Üniversitesi'nde profesör olarak çalışmaya başlamıştır. Fonksiyonel analizin öncülerindendir. İkinci Dünya Savaşı sırasında, Alman işgali altındaki Polonya'da BBC dinlediği için Gestapo tarafından 1943 yılında kurşuna dizilmiştir.

Alman matematikçi **Emanuel Sperner** (1905-1980) doktorasını Hamburg Üniversitesi'nden almış ve 1934 yılında Königsberg Üniversitesi'nde profesör olmuştur. Bu bölümde verilen Sperner teoremi Sperner önsavı olarak bilinir. Sperner bu sonucu ölçüm kuramında kullanmak üzere kanıtlamış, ancak daha sonra bu sonuçla Brouwer sabit nokta teoreminin, homolojik cebir kullanmadan, doğrudan kanıtlanabileceği anlaşılmıştır.

Kaynaklar

[1] M. Aigner ve Günter M. Ziegler, **Kitap'tan Deliller**, (çev. M. Uludağ) İstanbul Bilgi Üniversitesi Yayınları 2009.

13. Kürede Geometri

Günlük hayatımızda geometriyle ilgili bazı kavramları kullanma ihtiyacı hissettiğimizde nedense hep kendimizi düzlem geometriye kısıtlarız. Sorulduğunda, iki nokta arasındaki en kestirme yol, bu noktaları birleştiren doğru parçasıdır deriz. Bir üçgenin iç açılarının toplamı mutlaka 180 derecedir. Herhangi bir doğruyu, üzerindeki iki nokta belirler. İki doğru ya tek bir noktada kesişir ya da birbirlerine paraleldir. Fazla düşünmeden bu ve benzeri ifadeleri hep kullanırız. Oysa üç boyutlu uzayda bile birbirini kesmeyen ama paralel de olmayan doğrular olduğunu görmek hiç de zor değil. Kesişmeyen doğruların mutlaka paralel olmaları ancak düzlemdeki doğrular için söz konusu. Gene düzlemdeki bir üçgenin iç açılarının toplamı 180 dereceye eşittir demiş olsaydık gerçeği ifade etmiş olurduk. Ama anlaşılan iki boyutlu bir uzayda; yani düzlemde yaşıyormuşuz gibi düşünmeye alışkanlık kazanmışız. Olsa olsa düzleme bir boyut daha ekleyerek elde ettiğimiz üç boyutlu uzay $\mathbb{R}^3$ sanki en gelişmiş düşünme modelimizi oluşturur. Geometri öğrenirken ilkin düzlemi ele alırız; sonra da üç boyutlu uzayı, yani $\mathbb{R}^3$ 'ü. Oysa üzerinde yaşadığımız gök cismi, yani dünyamız, hiç de düz değil! Dünyamız, çapı 12.756 km olan bir küre. Aslında tam bir küre bile değil. Kutuplar arasında bir basıklığı var. Çünkü ekvator çemberinin çapı 12.756 km iken kuzey ve güney kutupları arasındaki uzaklık biraz daha az, 12.714 km, ama kutuplar arası uzunluğu, ekvatorun çapına bölersek 0,997 elde ederiz. Yani dünyanın basıklığı çok az. Dolayısıyla dünyamızı yarıçapı 6.378 km. olan bir küre olarak düşünmek oldukça gerçekçi.

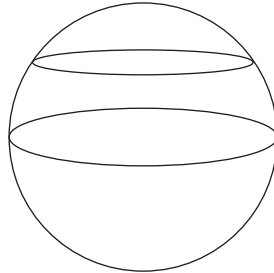
Üstelik bu küre üç boyutlu uzayda yerinde de durmuyor. Kutuplardan geçen eksenin etrafında, batıdan doğuya doğru dönüyor ve bu dönüşün bir turunu bir günde tamamlıyor. Ayrıca dünyamız güneşin de etrafında bir elips çizerek dönüyor. Bu yazıyı yazmakta olduğum odanın bulunduğu koridorun öbür ucunda bulunan dekanlık ofisini soran bir öğrenciye yönü gösterip ”dos-doğru git” dersem ona en kestirme, en kısa yolu göstermiş olurum, ama İstanbul’dan kalkan bir uçağın pilotuna İstanbul’la aynı enlemde olan New York’a gitmesi için “hep batı yönünde uç” desem, ona en kısa yolu mu önermiş olurum? En iyisi kürenin geometrisini incelemeye başlayalım. Küredeki geometrinin düzlem geometrisinden çok farklı olduğunu göreceğiz.

Yarıçapı $r > 0$ ve merkezi $(0, 0, 0)$ noktasında olan küre, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ denklemini sağlayan (x, y, z) üçlülerinin kümesidir. Kürenin geometrik özelliklerinin yarıçaptan bağımsız olduğu için biz bu yazımızda aksini belirtmedikçe yarıçapı 1 birim olan ve merkezi de $\mathbf{O} = (0, 0, 0)$ noktasında bulunan standart küreyi ele alacağız ve $\mathbb{R}^3$ 'te yaşayan bu kümeyi S ile göstereceğiz. Tabii bulduğumuz sonuçları dünyamıza uygularken, örneğin İstanbul-New York arasındaki uzaklığı hesaplarken, dünyamızın yarıçapı 6378 km olan bir küre olduğunu hatırlayacağız!

$\mathbb{R}^3$ uzayında bir ℓ doğrusu ile S küresinin hiçbir ortak noktası olmayabilir. Eğer $\ell \cap S$ kümesi boş değilse, ya ℓ doğrusu küremize tek bir noktada değer (yani ℓ doğrusu kürenin bir teğetidir) ya da ℓ küreyi iki farklı noktada keser. Özel olarak, ℓ doğrusu kürenin merkezinden geçiyorsa bu kesişme noktalarına **karşıt noktalar** denir. Kuzey kutbunu kürenin merkezine birleştiren doğru, küreyi bir de güney kutbunda keser. Dolayısıyla kuzey ve güney kutupları karşıt noktalardır. $\mathbb{R}^3$ 'teki noktaların birer vektör olduğunu hatırlayalım. Böylece $\mathbf{A} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ise $-\mathbf{A} = (-x, -y, -z)$ veya daha genel olarak herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha\mathbf{A} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ yazmaktan kaçınmayacağız. $\mathbf{A} \in S$ ise $-\mathbf{A}$ da bu noktanın küre üzerindeki karşıt noktasıdır.

Şimdi de herhangi bir Δ düzlemiyle kürenin ilişkisine bir göz atalım. Δ ile S küresinin hiçbir ortak noktası olmayabilir veya Δ düzlemi küreye teğet olan bir düzlemdir; yani $\Delta \cap S$ tek bir noktadan ibarettir. Çok daha ilginç olan hal ise düzlemin küreyi birden fazla noktada kesmesidir. Bu takdirde $\Delta \cap S$ bir çemberdir. Eğer Δ düzlemi kürenin merkezinden geçiyorsa, $\Delta \cap S$ daireesine **büyük çember** denir. Büyük çemberin yarıçapı kürenin yarıçapına eşittir.

Kuzey kutbuna teğet olan bir düzlemi gözümüzün önüne getirelim ve bu düzlemi yönünü değiştirmeden tam güney yönüne doğru kaydırmaya başlayalım. Düzlemimiz yarıçapları giderek büyüyen çemberler kesmeye başlar küreden. Tam yarı yolda ise kürenin merkezi de düzlemin üzerinde olduğu zaman yarıçapı kürenin yarıçapına eşit olan büyük daireyi elde ederiz. Bu özel büyük çembere **ekvator** denir.



Enlem Dairesi ve Ekvator

Bu işleme devam edersek düzlemimizin küreden kestiği çemberlerin yarıçapları giderek azalmaya başlar. Son olarak da düzlem güney kutbunda küreye

teğet olur. Bu süreçle ortaya çıkan dairelere *enlem çemberleri* veya kısaca *enlemler* denir. Enlemlerden sadece biri, yani ekvator, büyük çemberdir.

Küremizin üzerinde karşıt olmayan **A** ve **B** iki nokta gibi alalım. Bu iki nokta ve kürenin merkezi olan **O** noktası aynı doğru üzerinde olamaz; çünkü böyle olsaydı $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$, yani **A** ve **B** karşıt noktalar olurdu. Demek ki uzayda **O**, **A** ve **B** noktalarını içeren tek bir düzlem vardır. Bu düzlem ile kürenin kesişimi mutlaka bir büyük çemberdir, çünkü kürenin merkezi olan **O** noktası da bu düzlem üzerindedir. Basit ama önemli bu sonucu teorem olarak yazalım.

Teorem 13.1. *Küre üzerinde karşıt olmayan iki noktadan tek bir büyük çember geçer.* $\square$

Eğer küre üzerindeki iki karşıt noktayı birleştiren doğruyu ℓ ile gösterirsek, bu doğru kürenin merkezinden de geçer. Bir doğruyu içeren istediğimiz sayıda düzlem bulabiliriz $\mathbb{R}^3$ uzayında. Bu düzlemlerin küreyle kesişimleri her biri verilen iki karşıt noktayı ihtiva eden büyük çemberler meydana getirir. Kutuplardan geçen büyük çemberlere ise *boylam çemberleri* denir. Keşifler çağında denizciler için boylamı sağlıklı bir şekilde saptamak en büyük sorunlardan birisi olmuştur. (Bkz. [1].)

Teorem 13.2. *Kürenin herhangi iki karşıt noktasından geçen sonsuz sayıda büyük çember vardır.*

Şimdi Δ_1 ve Δ_2 ile küremizin merkezi olan **O** noktasını da içeren iki farklı düzlemi gösterelim. Bu takdirde $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \ell$ bir doğrudur ve **O** noktası da bu doğru üzerindedir. Şu ifade

$$\Delta_1 \cap \Delta_2 \cap S = \ell \cap S$$

bize Δ_1 ve Δ_2 düzlemleriyle, ℓ doğrusunun küreyle kesiştiği noktaların aynı ve bu noktaların da karşıt noktalar olduğunu verir.

Teorem 13.3. *Kürenin iki büyük çemberi iki karşıt noktada kesişir.*

Küremizin üzerindeki bir **A** noktasına bir karınca koyalım. Karıncamız bu noktayı başka bir **B** noktasına birleştiren büyük çember üzerinde yürümeye başlasın. Büyük çemberden hiç ayrılmadan **B** noktasına varan karıncamız, $\angle AOB$ açısı α radyana eşitse, $r\alpha$ kadar yol yürümüş olur. Karıncamız gene **A** noktasından aksi yönde yola çıkıp, büyük çemberden ayrılmadan **B** noktasına gelseydi bu kez $r(2\pi - \alpha)$ kadar yol yürümüş olacaktı. İsterseniz karıncamızın büyük çember üzerinde kısa olan yay parçası ile uzun olanı ayırt edebilmesi için $0 < \alpha \leq \pi$ olduğunu varsayalım. Karıncamız **A**'dan herhangi bir yönde yola çıkıp, büyük çember boyunca yürüyerek, **B** noktasında kısa bir yemek ve ihtiyaç molası verip yoluna devam ederek tekrar **A** noktasına gelse, tam

$2\pi r$ kadar yol yürüyecekti. Küre üzerindeki karıncamız acaba büyük çember üzerinde yürümekle akıllıca bir iş mi yapıyor? İki nokta arasında bu noktaları birleştiren büyük çemberden daha kısa bir yol yok mu? İlk yolun matematiksel bir tanımını yapalım.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ sürekli bir fonksiyon olsun. Böyle bir fonksiyona $f(a)$ **noktasını** $f(b)$ **noktasına birleştiren yol** denir. Vektör değerli bu fonksiyonu koordinatlar cinsinden, $a \leq t \leq b$ olmak üzere $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ olarak yazalım ve yolumuzun çok ani ve keskin virajlardan arınmış olduğunu varsayalım.

Burada t değişkenini zaman olarak düşünebiliriz. Ayrıca x, y ve z fonksiyonlarının t değişkenine göre sürekli olan türevleri varolsun. Bu türevleri

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y' \quad \text{ve} \quad \frac{dz}{dt} = z'$$

olarak gösterelim. Bu takdirde

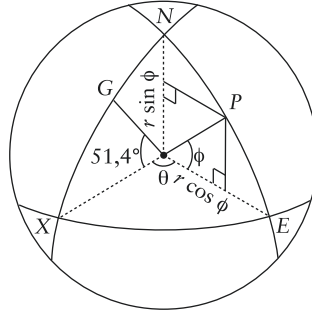
$$h(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

fonksiyonuna hız olarak bakabiliriz. Yol boyunca hızı zamanla çarpıp toplarsak, yani integralini alırsak

$$\int_a^b h(t) dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

$f(a)$ noktasından $f(b)$ noktasına verilen f yolunu kullanarak gittiğimizde kattığımız mesafeyi buluruz.

Küremiz üzerinde bir $\mathbf{P} = (x, y, z)$ noktası alalım. Bu noktadan geçen boylam çemberinin ekvatoru kestiği noktaya $\mathbf{E}$ diyelim. POE açısına $\mathbf{P}$ **noktasının enlemi** denir. ϕ ile göstereceğimiz bu açıyı kullanarak $z = r \sin \phi$ olduğunu hemen görebiliriz. $r \cos \phi$ ise $\mathbf{P}$ noktasının ekvator düzlemindeki izdüşümünü gösterir. Enlem açısından başka bir de boylamı belirlememiz gerekecek. Bunun için herhangi bir boylam çemberini referans boylamı olarak seçelim. Coğrafyada Greenwich boylamı terimiyle karşılaşmışsınızdır. Gerçekten Londra yakınlarındaki Greenwich gözlemevinden geçen boylam çemberi dünya üzerindeki noktaların boylamları için referans alınır. Biz de referans boylamımıza Greenwich boylamı ismini verelim. Bu boylam çemberi ekvator düzlemini $\mathbf{X}$ noktasında kessin. Bu takdirde XOE açısına $\mathbf{P}$ noktasının boylamı denir. Bu açıyı da θ ile gösterelim. $\theta = 0$ referans yani Greenwich boylamını gösterir.



Enlem ve Boylam

Boylam açısının doğuya doğru artı, batıya doğru eksi değerler alması adet olmuştur. Dolayısıyla boylam açıları -180° ile 180° arasında değişir. Aslında $\theta = 0$, $\theta = -180^\circ$ ve $\theta = 180^\circ$ dereceleri hep Greenwich boylamı çemberi üzerindeki noktaları belirler. Enlem açısı ϕ ise güney kutbuna doğru eksi, kuzey kutbuna doğru artı değerler alır. Bu da bir gelenektir. Yani $\phi = 0^\circ$ ekvatoru, $\phi = -90^\circ$ güney kutbunu ve $\phi = 90^\circ$ de kuzey kutbunu gösterir.

Böylece yarıçapı r olan bir küre üzerindeki $\mathbf{P} = (x, y, z)$ noktasını bu koordinatlarla

$$x = r \cos \phi \cos \theta, \quad y = r \cos \phi \sin \theta, \quad z = r \sin \phi \quad (13.1)$$

olarak ifade ederiz. Küre üzerindeki yolları incelemek istiyoruz. Öyleyse t 'ye göre türev alırsak (13.1)'den

$$\begin{aligned} x' &= r(-\theta' \cos \phi \sin \theta - \phi' \sin \phi \cos \theta) \\ y' &= r(\theta' \cos \phi \cos \theta - \phi' \sin \phi \sin \theta) \\ z' &= r\phi' \cos \phi \end{aligned}$$

elde ederiz. Sadeleştirme yaparak

$$h(t) = r(\theta'^2 \cos^2 \phi + \phi'^2)^{1/2}$$

ifadesine varırız.

Yarıçapı 1'e eşit olan küre üzerinde enlem ve boylam cinsinden koordinatlarıyla $A = (\phi_1, \theta_1)$ ve $B = (\phi_2, \theta_2)$ noktalarını alalım. Ayrıca $f : [a, b] \rightarrow S$ fonksiyonu da $f(a) = A$ noktasını $f(b) = B$ noktasına birleştiren küre üzerinde bir yol olsun. Bu yolun uzunluğunu bulmak ve büyük çember yolunun uzunluğu ile karşılaştırmak istiyoruz. Yolun uzunluğunu bulmak için

$$\int_a^b (\theta'^2 \cos^2 \phi + \phi'^2)^{1/2} dt$$

integralini hesaplamamız gerekecek. Ama θ ve ϕ fonksiyonlarını da bilmiyoruz. İntegral de pek sevimli görünmüyor. O zaman biraz düşünelim.

A ve **B** noktalarından geçen büyük çembere dik ve bu daireden geçen bir ℓ doğrusunu ele alalım. Bu doğru sanki küremize taktığımız elma şekeri sapı olsun. Küremizi bu doğruyu ekvatorдан geçen düzleme yatıracak şekilde döndürelim. İkinci olarak ℓ doğrusunu, yani küremizin sapını, kendi etrafında öyle döndürelim ki **A** noktası da ekvator düzlemine gelsin. Bu iki hareketten sonra **B** noktası güney yarım kürede kalmışsa, sapımızı ekvator düzleminde kaldırıp, **A** noktası bu düzlemde kalacak şekilde, kuzey kutbunun olduğu yerden geçirip 180° döndürerek gene ekvator düzlemine yatıralım. Şimdi **B** noktası kuzey yarım kürede artık. ℓ doğrusunu ekvator düzleminde kaydırarak **A** noktasını ekvator ile Greenwich boylamının birleştiği noktaya getirelim. Bu dört hareketten sonra **A** noktasının enlem ve boylamı 0 derece olur. **B** noktası ise **A** noktasının tam kuzeyinde, Greenwich boylam çemberi üzerinde kalır. İki noktanın yerlerini değiştirdik ama dikkat ederseniz bu noktalar arasındaki yolun uzunluğu aynı kaldı. Tabii yolun yönü değişti ama bizi ilgilendiren sadece yolun uzunluğu. Demek ki yolun uzunluğunu bu özel halde hesaplamakla genel halde hesaplamak aynı sonucu verecek. **A** ve **B** arasındaki açı α ise, $0 \leq \alpha \leq \pi$, t değişkenini de $t = \phi$ olarak alabiliriz. Burada ϕ artık 0° ile 90° arasında değişen coğrafi boylam değil, 0° ile α arasında değişen açı. Bu durumda hız fonksiyonumuz

$$h(t) = (\theta'^2 \cos^2 t + 1)^{1/2}$$

olarak sadeleşecek. Büyük çember üzerinde ayrılmadan **A** noktasından **B** noktasına gidersek, geçtiğimiz mesafe

$$\alpha = \int_0^\alpha 1 \, dt$$

olacak. O halde

$$\int_0^\alpha \left((\theta'^2 \cos^2 t + 1)^{1/2} - 1 \right) dt$$

integrali bize f yolu ile büyük çember yolu arasındaki mesafe farkını verecek. Ama θ' ne olursa olsun her $t > 0$ için

$$(\theta'^2 \cos^2 t + 1)^{1/2} \geq 1$$

eşitsizliği aşıkârdır. Bu eşitsizlik ancak her $t > 0$ için $\theta'(t) = 0$ ise özdeşliğe dönüşür. Demek ki f yolu her zaman büyük çember yolundan uzundur. ($\theta'(t) \equiv 0$ ise f büyük çember yolundan başka birşey değildir.) Sonuçta şu önemli teoremi kanıtladık.

Teorem 13.4. *Kürenin iki noktasını birleştiren yollardan en kısa olanı bu iki nokta birleştiren büyük çemberin iki nokta arasında kalan yay parçalarından daha kısa olanıdır.* $\square$

Geometride iki nokta arasındaki en kısa yolu veren geometrik şekle **jeodezik** denir. $\mathbb{R}^2$ düzleminde veya $\mathbb{R}^3$ uzayında doğrular jeodeziktir. Kürede ise jeodezikler büyük çemberlerdir. Şimdi düzlemdeki jeodeziklerle, yani doğrularla, kürenin jeodezikleri hakkında bildiklerimizi karşılaştıralım.

Düzlemde iki jeodezik, yani iki doğru, ya bir noktada kesişir ya da hiç kesmezler. Kürede ise iki jeodezik mutlaka iki noktada kesişir. Düzlemde veya $\mathbb{R}^3$ 'te iki noktadan tek bir doğru geçer. Kürede ise iki karşıt noktadan (kutuplar gibi) istediğimiz sayıda jeodezik yani büyük çember geçer. Düzlemde belirli bir noktadan hareket edip bir doğru üzerinde yürüyen karınca yönünü değiştir-medikçe bir daha o noktaya dönemez. Durmadan yürür de yürür. Yani ömür biter, yol bitmez! Ama kürede herhangi bir büyük çember üzerinde yürüyen karıncamız bir tur sonra başladığı noktaya döner. Gördüğümüz gibi küre ile düzlem geometrileri birbirlerinden çok farklı!

Küre üzerinde iki nokta arasındaki en kestirme yolun büyük çember olduğunu artık biliyoruz. Gelin bir de uzaklığı hesaplayalım. Küremizin yarıçapı r ise $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ arasındaki yolların en kestirmesi bu noktaları birleştiren jeodezik, yani büyük çemberdir. Eğer AOB açısını α ile gösterirsek, $0 \leq \alpha \leq \pi$, bu uzaklık $r\alpha$ olur. Peki bu açıyı nasıl bulacağız? Bu da zor değil. Vektörlerin iç çarpımlarını hatırlayalım. $\mathbf{A} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\mathbf{B} = (x_2, y_2, z_2)$ ise, bu iki vektörün **iç çarpımı**

$$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

olarak tanımlanır. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ küremizdeki iki noktaysa $(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = r^2 \cos \alpha$ olur. Enlem ve boylam koordinat sistemine geçerseniz (bkz. [1]), $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ sayısı

$$r^2(\cos \theta_1 \cos \phi_1 \cos \theta_2 \cos \phi_2 + \cos \phi_1 \sin \theta_1 \cos \phi_2 \sin \theta_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2)$$

sayısına eşit olur. Trigonometrik özdeşliklerle sadeleştirme yaparak

$$\cos \alpha = \cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin \phi_1 \sin \phi_2 \quad (13.2)$$

formülüne ulaşırız. İstanbul'un enlemi 41° kuzey ve boylamı da 29° doğu. Bunlar yaklaşık sayılar tabii. Derecenin $1/60$ olan dakikaları gözönüne almadık. Aynı şekilde New York da 41° kuzey enleminde ve boylamı da 73° batı. Dolayısıyla bu iki şehir arasındaki açı

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{41\pi}{180} \cos \frac{102\pi}{180} + \sin^2 \frac{41\pi}{180}$$

ile bulunur. Hesaplarsak $\alpha = 1,2535$ ve $r\alpha$, yani uzaklık da 7994,8 kilometre olacaktır.

Uçağımız İstanbul'dan kalkıp New York'a doğru, büyük çember rotası yerine iki şehrin aynı enlemde olduğunu düşünerek hep tam batı yönüne uçarak yol

alsaydı acaba bu yolculuk kaç kilometre olurdu? Bu sorunun yanıtı kolay. Bizim enlemimizde enlem çemberinin yarıçapı $6378 \cos(41\pi/180)$ km. Bunu $102\pi/180$ radyanla çarparsak yaklaşık 8600 kilometre uçmamız gerekeceğini görürüz. İki rota arasında ciddi fark var. Pilotumuz için enlem çemberi boyunca uçmak kolay. İyi bir pusulamızın olduğunu kabul edersek tek yapacağımız iş uçağın burnunu hep batı yönünde tutmak. Bir de en kestirme yol olan büyük çember boyunca uçmak için gereken rotayı inceleyelim. Standart küre üzerinde iki nokta $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ alalım. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ve O noktalarının belirlediği düzlem Δ olsun. Δ ile kürenin kesişimi bize $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ noktalarından geçen büyük çemberi verecek. α da (13.2)'de tanımlanan açı. $\mathbf{B}$ ve $-\cos \alpha \mathbf{A}$ noktaları Δ düzlemine ait. O zaman $\mathbf{B} - \cos \alpha \mathbf{A}$ noktası da Δ düzleminde ve bu vektör $\mathbf{A}$ 'ya dik, çünkü

$$(\mathbf{A}|\mathbf{B} - \cos \alpha \mathbf{A}) = (\mathbf{A}|\mathbf{B}) - \cos \alpha (\mathbf{A}|\mathbf{A}) = \cos \alpha - \cos \alpha = 0$$

$\mathbf{B} - \cos \alpha \mathbf{A}$ vektörünün uzunluğunu bulmak için kendisiyle iç çarpımını alırsak

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} - \cos \alpha \mathbf{A}|\mathbf{B} - \cos \alpha \mathbf{A}) &= (\mathbf{B}|\mathbf{B}) - 2 \cos \alpha (\mathbf{A}|\mathbf{B}) + \cos^2 \alpha (\mathbf{A}|\mathbf{A}) \\ &= 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla $\mathbf{A}_B = (1/\sin \alpha)(\mathbf{B} - \cos \alpha \mathbf{A})$ vektörünün uzunluğu 1'e eşit. Bu vektörü şöyle de yazabiliriz.

$$\mathbf{A}_B = \csc \alpha \mathbf{B} - \cot \alpha \mathbf{A} \quad (13.3)$$

$\mathbf{A}_B$ vektörü $\mathbf{A}$ noktasında $\mathbf{B}$ noktasına doğru büyük çember üzerindeki yönümüzü belirler.

Peki pusulamıza göre bu yönü nasıl tayin edeceğiz? Bunun için biraz daha hesap yapmamız gerekecek. Yukarıdaki akıl yürütmede $\mathbf{B}$ yerine kuzey kutbunu, yani $\mathbf{K} = (0, 0, 1)$ noktasını alalım. $\mathbf{A}$ ile $\mathbf{K}$ arasındaki açının $\pi/2 - \phi_1$ olduğunu biliyoruz. Böylece bu özel halde (13.3)'ten

$$\mathbf{A}_K = \sec \phi_1 \mathbf{K} - \tan \phi_1 \mathbf{A} = (-\cos \theta_1 \sin \phi_1, -\sin \theta_1 \sin \phi_1, \cos \phi_1) \quad (13.4)$$

elde ederiz. $\mathbf{A}_K$ vektörü bize $\mathbf{A}$ noktasında kuzey yönünü gösteriyor. Benzer şekilde tam doğu yönünü gösteren vektörün

$$\mathbf{A}_D = (-\sin \theta_1, \cos \theta_1, 0) \quad (13.5)$$

olduğunu buluruz. $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_K$ ve $\mathbf{A}_D$ vektörleri birbirlerine diktir, yani

$$(\mathbf{A}|\mathbf{A}_K) = (\mathbf{A}|\mathbf{A}_D) = (\mathbf{A}_K|\mathbf{A}_D) = 0. \quad (13.6)$$

Şimdi (13.3)'e geri dönelim:

$$(\mathbf{A}_K|\mathbf{A}_B) = \csc \alpha (\mathbf{A}_K|\mathbf{B}) - \cot \alpha (\mathbf{A}_K|\mathbf{A}).$$

Demek ki

$$(\mathbf{A}_K|\mathbf{A}_B) = \csc \alpha (\mathbf{A}_K|\mathbf{B}). \quad (13.7)$$

Aynı şekilde

$$(\mathbf{A}_D|\mathbf{A}_B) = \csc \alpha (\mathbf{A}_D|\mathbf{B}) \quad (13.8)$$

elde ederiz. Bu iç çarpım bize $\mathbf{A}$ noktasında $\mathbf{B}$ yönüne büyük çember rotasının doğu yönüyle yaptığı δ açısını

$$\cos \delta = \csc \alpha \cos \phi_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (13.9)$$

formülü yardımıyla verir. Kosekant hiçbir zaman 0 olamaz. Dolayısıyla $\cos \delta = 0$ olması hali rotamızın tam kuzey veya tam güney olmasına eşdeğerdir. Bu durum ancak $\cos \phi_2 = 0$ veya $\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0$ hallerinde sağlanır. Birinci halde $\phi_2 = \pm 90^\circ$ yani $\mathbf{B}$ noktası kuzey veya güney kutbudur. $\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0$ ise $\theta_2 = \theta_1$, $\theta_2 - \theta_1 = \pm \pi$ hallerinde sağlanır. Bu durumda $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ noktaları aynı boylam çemberi üzerindedir. Yani bu noktaları birleştiren büyük çember bir boylam çemberidir. Tabii $\theta_2 = \theta_1 + \pi$ bize $\mathbf{B}$ noktasının $\mathbf{A}$ 'ya göre dünyanın uzak tarafında olduğunu verir.

$\mathbf{X}$ ile $\mathbf{A}$ 'dan $\mathbf{B}$ 'ye giden büyük çember rotası üzerindeki herhangi bir noktayı gösterelim ve $\mathbf{X}$ ile $\mathbf{A}$ arasındaki açı da x olsun. $\mathbf{X}$ noktası Δ düzleminde ve $\mathbf{A}$ ile $\mathbf{A}_B$ vektörleri birbirlerine dik. Dolayısıyla

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}|\mathbf{A})\mathbf{A} + (\mathbf{X}|\mathbf{A}_B)\mathbf{A}_B = \cos x \mathbf{A} + \sin x \mathbf{A}_B$$

ve bundan da $\mathbf{X}$ noktasında $\mathbf{B}$ yönünü gösteren $\mathbf{X}_B$ vektörünü

$$\mathbf{X}_B = -\sin x \mathbf{A} + \cos x \mathbf{A}_B$$

olarak yazarız. $\mathbf{A}_B$ yerine (13.3)'ü kullanarak, $0 \leq x \leq \alpha$ olmak üzere

$$\mathbf{X}_B = (-\sin x - \cos x \cot \alpha)\mathbf{A} + \cos x \csc \alpha \mathbf{B} \quad (13.10)$$

formülüne varırız. $x = 0$ halinde $\mathbf{X}_B = \mathbf{A}_B$ ve $x = \alpha$ ise $\cot \alpha \mathbf{B} - \csc \alpha \mathbf{A} = \mathbf{B}_A$ elde ederiz. Bu iki özel hal dışında x değiştikçe $\mathbf{X}_B$ de sürekli olarak değişiyor. Yani tam büyük çember üzerinde uçmak için pusulaya göre sürekli yön değiştirmemiz gerekiyor. Ancak çok özel hallerde, yani hem $\mathbf{A}$ hem de $\mathbf{B}$ ekvator üzerinde veya her ikisi de aynı boylam çemberi üzerindeyse, pusulamıza göre uçagımızın burnu ya hep batıyı veya doğuyu ya da hep kuzeyi veya güneyi gösterecek. (13.10)'a geri dönelim ve $\mathbf{X}_B$ vektörünün üçüncü koordinatını şöyle yazalım:

$$(-\sin x - \cos x \cot \alpha) \sin \phi_1 + \cos x \csc \alpha \sin \phi_2.$$

Büyük çember üzerinde bu koordinat sıfıra eşit olduğu zaman rotamız kutba en yakın noktada olacak. Yani o sırada tam doğu-batı yönünde uçuyor olacağız. Yukarıdaki ifadeyi sıfıra eşitlersek

$$\tan x = \frac{\csc \alpha \sin \phi_2}{\sin \phi_1} - \cot \alpha \quad (13.11)$$

elde ederiz. Bu noktayı (3)'ü kullanarak

$$\mathbf{X} = \cos x \mathbf{A} + \sin x \mathbf{A}_B = \cos x \mathbf{A} + \sin x \csc \alpha \mathbf{B} - \sin x \cot \alpha \mathbf{A}$$

yani

$$\mathbf{X} = (\cos x - \sin x \cot \alpha) \mathbf{A} + \csc \alpha \sin x \mathbf{B}$$

olarak ifade edelim. Rotamızın kutba en yakın noktasının enlemi λ olsun. Yukarıdaki vektör denkleminin üçüncü koordinatı $\sin \lambda$ olduğuna göre

$$\sin \lambda = \sin \phi_1 (\cos x - \sin x \cot \alpha) + \sin \phi_2 \csc \alpha \sin x \quad (13.12)$$

formülünü elde ederiz. Özel olarak $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ haline bakalım. (13.11)'den

$$\tan x = \csc \alpha - \cot \alpha$$

çıkar. α 'yı bildiğimize göre buradan x 'i buluruz. (13.12) ise bu özel halde

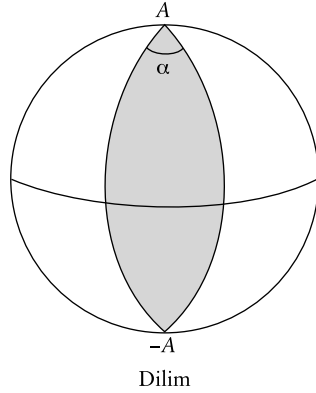
$$\sin \lambda = \sin \phi \sec x$$

olarak sadeleşir.

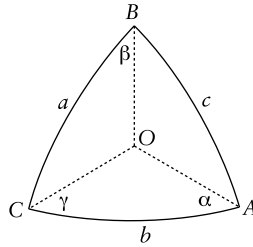
Büyük çember rotasını kullanarak yapılan İstanbul-New York uçuşunda bu değer 54° 'den biraz fazladır. İstanbul ve New York'un enlemi 41° olduğuna göre bu şehirler arasındaki büyük çember rotası oldukça kuzeyden geçiyor. Rotamızın kuzey kutbuna en yakın olduğu yerin koordinatları yaklaşık olarak 54° kuzey, 22° batı. Bu nokta Atlantik Okyanusu'nda bir yerde. Bu noktanın kuzey kutbuna olan uzaklığı ise 4007 km. Gene de bir fikir vermesi için Hamburg şehrinin enleminin yaklaşık 53° kuzey olduğunu ve İstanbul'un kutba uzaklığının yaklaşık 5455 km. belirtelim.

En optimal rota büyük çember üzerindedir ama aslında uçaklar bu rotayı takip etmekte hiç serbest değil. Uluslararası hava koridorlarını kullanarak İstanbul-New York arasında uçmak zorundalar. Büyük çember rotası en kestirme yol, ancak özellikle denizde bu rota bazı tehlikeleri de beraberinde getirir. Titanik transatlantiğin bu rotayı takip ederken buzdağına çarptığını hatırlayalım!

Yarıçapı r olan kürenin yüzey alanı $4\pi r^2$ 'ye eşittir. Dünyamızın uydusu olan ayı bir model olarak alalım. Dünyamızın uydusunu her gece tam olarak görmeyiz. Tam gördüğümüzde, yani tam mehtapta, parlak yüzeyin alanı $2\pi r^2$ 'ye eşittir. Yarım ayın ise alanı πr^2 'dir. Burada r tabii ayın yarıçapı. Kürenin kuzey ve güney kutupları birleştiren iki büyük çember, yani iki boy-lam çemberi alalım. Bu iki çember arasında kalan **dilimin alanı** $2\alpha r^2$ 'ye eşit. Buradaki α iki çember arasındaki kuzey veya güney kutbundaki açı. Dilimi iki büyük daire belirliyor. (Bkz. aşağıdaki şekil.)

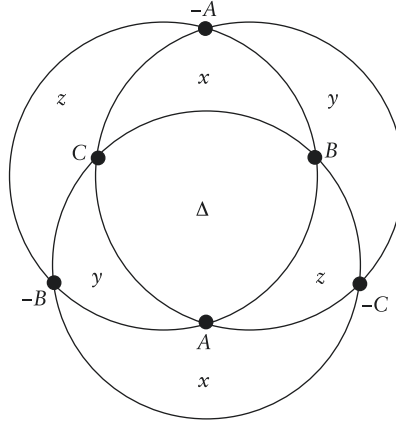


Düzlemdeki her üçgenin iç açılarının toplamının 180° olduğunu biliyoruz. Şimdi de küre üzerindeki üçgenleri ele alalım. Küremizin yarıçapı gene 1 olsun. Düzlemdeki jeodeziklerin doğrular, kürede ise büyük çemberler. Dolayısıyla üç büyük çember tarafından belirlenen şekle **küresel üçgen** dememiz gayet doğal. Bu çemberler **A**, **B** ve **C** noktalarında kesişiyorsa, **ABC** üçgeninden söz edeceğiz. Küresel üçgenlerin aslında ilginç olan altı açısı var. **A**, **B** ve **C** köşelerindeki **köşe açıları**. Bunları sırasıyla α , β ve γ ile gösterelim. Bir de BC yayına a , CA yayına b ve AB yayına da c dersek, bunlar da esasında birer açı. Örneğin a açısı BC yayını merkezden gördüğümüz açıdan başka birşey değil. a , b ve c 'ye de kenar açıları diyelim. (Bkz. aşağıdaki şekil.)



Kürede Üçgenin Açıları

ABC üçgeninin alanını Δ ile gösterelim. Sezgilerimizi güçlendirmek için özel bir hale bakalım. Burada **A** kutup noktası ve **B**, **C** noktaları da ekvatorda olsun. $\beta = \gamma = 90^\circ$ olduğunu görmek kolay. Öyleyse bu özel halde ABC üçgeninin alanı Δ , $ABC(A)$ diliminin alanının yarısına eşit olacak; yani $\Delta = \frac{1}{2}(2\alpha) = \alpha$. Küresel üçgenlerin köşe açıları ile alanı arasındaki ilişkiyi genelde araştırmak için şimdi köşe noktaları **A**, **B**, **C** olan herhangi bir küresel üçgen düşünelim. İlk $ABC(-A)$ dilimine bakalım. Bu dilimin alanı α 'ya eşit. (Bkz. aşağıdaki şekil.)



Girard Teoremi

$BC(-A)$ üçgeninin alanını x ile gösterirsek $2\alpha = \Delta + x$ olur. şimdi bir de $BAC(-B)$ dilimine bakalım. Bu dilimin alanı β ve $AC(-C)$ üçgeninin alanı y ise $2\beta = \Delta + y$ olur. Aynı şekilde $AB(-C)$ üçgeninin alanını z ile gösterirsek $2\gamma = \Delta + z$ elde ederiz. Toplarsak

$$3\Delta + x + y + z = 2(\alpha + \beta + \gamma)$$

buluruz. Bir üçgenin köşelerinin karşıtlarını alarak yeni bir üçgen elde ederiz. Bu yeni üçgenin ilkiyle eşit alana sahip olduğunu görmek hiç de zor değil. Dolayısıyla $(-A)B(-C)$ üçgeninin alanı $A(-B)C$ üçgenine yani y 'ye eşit. O zaman $x + y + z + \Delta$ tam mehtabın alanını yani 2π 'yi veriyor. Yani $\Delta + \pi = \alpha + \beta + \gamma$.

Küre üzerinde yaptıklarımızı gözünüzde canlandırmakta güçlük çekiyorsanız internette şu adrese bir bakmanızı öneririm: <http://math.rice.edu/~pcmi/sphere/gos4.html#1>

Kanıtladığımız bu teoreme **Girard Teoremi** denir. Standart kürede yaptığımızı yarıçapı r olan küreye uygulayıp teoreminizi yazalım.

Teorem 13.5. *Köşe açıları α, β ve γ olan bir küresel üçgenin alanı Δ ile açıları arasında şu ilişki vardır: $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \Delta/r^2$.*

Bu teoremin düzlemde benzeri yoktur. Demek ki küresel üçgenlerin köşe açılarının toplamı mutlaka 180° 'den fazla! Ayrıca alanı da sadece kürenin yarıçapı ve köşe açıların toplamına bağlı.

Standart küremizdeki ABC üçgenine geri dönelim (Bkz. yukarıdaki şekil) Kenar açılarını iç çarpımla

$$\cos a = (\mathbf{B}|\mathbf{C}), \quad \cos b = (\mathbf{A}|\mathbf{C}), \quad \cos c = (\mathbf{A}|\mathbf{B})$$

olarak yazalım. Köşe açısı olan α 'yı ise

$$\cos \alpha = (\mathbf{A}_C | \mathbf{A}_B)$$

olarak yazabiliriz, çünkü $\mathbf{A}_C$ vektörü $\mathbf{A}$ noktasında $\mathbf{C}$ noktasına büyük dairenin yönünü vermekte. Yani α bu iki yön arasındaki açıdan başka birşey değil. $\mathbf{A}_B = \csc c \mathbf{B} - \cot c \mathbf{A}$ olduğunu hatırlayalım ve şu iç çarpıma bakalım.

$$\begin{aligned} \cos \alpha = (\mathbf{A}_C | \mathbf{A}_B) &= \csc b \csc c (\mathbf{B} | \mathbf{C}) - \cos c \cot b (\mathbf{B} | \mathbf{A}) \\ &\quad - \cot c \csc b (\mathbf{A} | \mathbf{C}) + \cot b \cot c (\mathbf{A} | \mathbf{A}). \end{aligned}$$

Herşeyi açılar cinsinden yazarsak

$$\cos \alpha = \csc b \csc c \cos a - \csc c \cot b \cos c - \cot c \csc b \cos b + \cot b \cot c$$

buluruz. Sadeleştirirsek şu teoremi elde ederiz.

$$\csc a = \cos \alpha \sin b \sin c + \cos b \cos c. \quad (13.13)$$

Bu sonuca **kenarlar için kosinus kuralı** diyeceğiz. Formülümüz bize kenar açılarıyla bir köşe açısı arasındaki ilişkiyi veriyor. Biraz dualite kullanarak küresel üçgenlerin açıları hakkında başka bir ilginç teorem daha kanıtlayabiliriz:

$$\cos \alpha = \cos a \sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma \quad (13.14)$$

Köşe açıları için kosinus kuralı denen bu sonucun ispatını bu yazı için yararlanılan kaynaklarda ([2], [3]) bulabilirsiniz.

Şimdi yerküre üzerinde özel bir üçgene bakalım. $\mathbf{A}$ köşesi İstanbul, $\mathbf{B}$ köşesi New York ve $\mathbf{C}$ de kuzey kutbu olsun bu üçgenin. Gene de biz dünyamızı standart küre gibi düşünelim. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ köşelerin karşısında olan a ve b kenarları $90^\circ - 41^\circ = 49^\circ$ veya $49\pi/180$ radyan. Kutupdaki α köşe açısı ise 102° . Ayrıca c kenarını daha önce $1,2535$ radyan olarak bulmuştuk. Teorem 7'yi kullanırsak

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Aritmetik bize $\cos \alpha = 0,39077$ veya $\alpha = 67^\circ$ verir. Demek ki kalkıştan hemen sonra uçağımızın burnu pusulada $360 - 67 = 293$ dereceyi göstermeli. Bu hesabı daha önce de (13.9)'u kullanarak yapabiliydik. Bu tabii büyük çember üzerindeki ilk yön. Uçtukça pusulada okuyacağımız yönün sürekli değişmesi gerektiğini unutmayalım.

Bu üçgenimizin köşe açılarının toplamı $67 + 102 + 67 = 236$ derece. Bundan 180 dereceyi çıkarırsak, İstanbul, New York ve kuzey kutbu arasında kalan üçgenin alanını Girard teoremiyle

$$\frac{56 \cdot \pi}{180} 6378^2 = 39.590.000$$

kilometre kare olduğunu görürüz.

NOTLAR

Günlerce hiçbir kara parçası görmeden açık denizlerde yelkenli gemilerle seyir sırasında, keşifler çağı denilen 15 ila 18'inci yüzyıllar arasında birçok sorunla karşılaşmıştır. Doğru haritalar yapılması, açık denizde yer saptama, seyir rotasını belirleme, gelgitlerin zamanı bu sorunlardan sadece birkaçıdır. Bu ve benzeri sorunlar o tarihlerde birçok matematikçi ve astronomu yakından ilgilendirmiştir [1]. Londra yakınlarındaki Greenwich Gözlemevi denizcilere yardım amacıyla kurulmuş ve ilk olarak sağlıklı gel-git tabloları burada hazırlanmıştır. Gençliğinde Euler Fransız Akademisi'nin açtığı bir yarışmaya katılarak yelken direklerinin en optimal yerini matematiksel olarak belirlemeye çalışmış ve bu yarışmada ikincilik kazanmıştır.

Bu bölüm Sabancı Üniversitesi'nde Halil Berktaş ile geliştirip verdiğimiz “İnsanlar, Gemiler ve Denizler” isimli tarih dersi için geliştirilmiştir. Ayrıca Matematik Dünyası'nda bir makale olarak çıkmıştır.

Kaynaklar

- [1] Dava Sobel ve William J. H. Andrewes, **Boylam**, Çev. M. Göktepeli, TÜBİTAK Popüler Yayınları 2004.
- [2] Roger Fenn, **Geometry**, Springer 2001.
- [3] George A. Jennings, **Modern Geometry with Applications**, Springer 1994.

Dizin

- $\vee$, 102
 $\wedge$, 102
- A, 127
Abel, Niels Henrik, 98
Abel teoremi, 94
açık komşuluk, 49
açık küme, 49
açık küre, 51
açık örtü, 50
açık yuvar, 51
Aigner, Martin, 1, 157, 172
altın oran, 73
altküme sayısı, 28
altuzay topolojisi, 50
analitik sayılar teorisi, 2
Andreescu, Titu, 157
Andrewes, William J. H., 186
 $A_{n,m}$, 127
Anne (Büyük Britanya kraliçesi), 97
Apéry, Roger, 152
aradeğer teoremi, 37
arcsin, 89
arctan, 80
Aristo, 97
aritmetiğin temel teoremi, 23, 24
aritmetik ortalama, 46
Aritmetika, 15, 33
Artin, Emil, 69
asal sayı, 1, 17–32
asalların harmonik serisi, 40
aşkın sayı, 2, 128, 131, 136
ayrık topoloji, 50
- başlangıç değer problemi, 114
Babil, 14
Banach cebiri, 102
Banach sabit nokta teoremi, 111–120, 160
Banach, Stefan, 2, 61
Banach uzayı, 53
Basel problemi, 142
Berktaş, Halil, 186
Bernoulli, Daniel, 98, 156
Bernoulli, Jacob, 98
Bernoulli, Johann, 98, 156
Bernoulli, Nicolas, 156
Bernoulli sayıları, 2, 91, 151
Bhaskara I, 14
Bhaskara II, 1, 5, 6, 14
Bilimin Uyanışı, 69
binom sayısı, 28
binom serisi, 88
birim çember, 108
birim küre, 164
birim öge, 102
 B_n , 164
Bolzano, Bernard, 68
Bolzano-Weierstrass teoremi, 69
Bourbon hanedanı, 61
boydam çemberleri, 175
bölme işlemi, 18
bölmek, 18
Brouwer, Luitzen Egbertus Jan, 159, 171
Brouwer sabit nokta teoremi, 3, 159–172
 $B(S)$, 54
büyük çember, 174
büzlme dönüşümü, 112
 $B(x, r)$, 51
- $C[a, b]$, 101
Cantor, Georg, 110
Cantor'un çapraz yöntemi, 127
Carnot, Nicolas Léonard Sadi, 61
Cauchy, Augustin-Louis, 60, 68, 69, 98
Cauchy çarpımı, 90
Cauchy dizisi, 52
 $C_{\mathbb{C}}(S)$, 108
cebirin temel teoremi, 2, 122, 137
cebirsel sayı, 126
Choe, Boo Rim, 149
Clay Matematik Enstitüsü, 32
cos, 152
cot, 152
Courant, Richard, 99
 $C_{\mathbb{R}}(S)$, 108
 $C(S)$, 56
 $C(T)$, 108
- d'Alembert, Jean le Rond, 137
 ∂B_n , 164
Dedekind, Julius Wilhelm Richard, 69
Dedekind, Richard, 110
Descartes, René, 36, 97
dik üçgen, 5, 7
Dini teoremi, 102
Diofant analizi, 7

- Diophantus, 7, 15, 33
 doğal logaritma, 2, 37
 doğal sayılar kümesi, 7
 düzgün yakınsaklık normu, 54
 düzgün yakınsaklık (serilerde), 58
 düzlem geometrisi, 3

 e sayısı, 2, 124, 131, 132
 ebob, 20
 eğim, 63
 Einstein, Albert, 31, 48, 156
 ekonomi, 3
 ekvator, 174
 en büyük ortak bölen, 20, 24
 enlem, 175, 176
 enlem çemberleri, 175
 Erastothanes eleği, 18
 Erdős, Paul, 1, 40, 131
 Eski Mısır, 7
 eşitsizlikler, 37–48
 eşlenik, 107
 Euclides, 23
 Eukleides, 31
 Euler çarpım formülü, 141
 Euler formülü, 93
 Euler, Leonhard, 3, 30, 32, 137, 151, 152, 156, 157, 186
 Euler özdeşliği, 93, 108
 Euler-Mascheroni sabiti, 40, 60
 e^x , 37

 f^* , 107
 Faltings, Gert, 33
 Fenike, 14
 Fenn, Roger, 186
 Fermat araması, 30
 Fermat asalı, 137
 Fermat, Pierre de, 2, 32–36
 Fermat sayıları, 30, 31
 Fermat'ın küçük teoremi, 1, 29
 Fermat'ın son teoremi, 2, 33
 Fibonacci sayıları, 73
 F_m , 30
 fonksiyonel analiz, 62
 fonksiyonlar teorisi, 3
 formalizm, 171
 Fourier, Jean-Baptiste Joseph, 124, 137
 Frederik (Büyük), 156
 Fredholm integral denklemi, 116
 Frey, Gerhard, 33

 Galile (Galileo Galilei), 97
 Galois, Evariste, 138
 gama fonksiyonu, 142
 Garfield, James A., 6
 Gauss, Carl Friedrich, 137, 156
 Gelfond, Aleksandr, 136
 Gelfond-Schneider teoremi, 136
 genel Hölder eşitsizliği, 47
 genel üçgen eşitsizliği, 52
 geometrik ortalama, 46
 geometrik seri, 71
 gerçel sayılar kümesi, 8
 Girard teoremi, 184
 Goldbach, Christian, 32
 Goldbach hipotezi, 32
 Goldston, Daniel, 32
 Greczek, Stefan, 61
 Greenwich boylamı, 176

 Haaser, Norman B., 62, 120
 Hardy, Godfrey Harold, 48
 harmonik seri, 39
 Hausdorff, Felix, 60
 Hausdorff uzay, 49
 Heine-Borel teoremi, 52, 69
 Hermite, Charles, 131
 Hilbert, David, 2, 48, 69, 131, 136, 138, 171
 Hilbert problemleri, 138
 Hilbert sabiti, 136
 Hilbert uzayları, 138
 H_k , 39
 Hölder eşitsizliği, 47
 Huygens, Christiaan, 98

 $\text{Im } f$, 108
 i , 121
 iç çarpım, 179
 İçen Orhan, 69
 ikiz asallar, 31
 inf, 63
 infimum, 63
 irrasyonel sayı, 121
 İskenderiye, 15, 31
 iyi sıralama ilkesi, 17

 Jakobyen determinantı, 144
 Jennings, George A., 186
 Jensen eşitsizliği, 44
 jeodezik, 179

 $k(a, p)$, 21
 kapalı küme, 49
 kapanış, 49
 Karaçay, Timur, 62
 karmaşık değerli fonksiyonlar, 107
 karmaşık sayılar, 121
 karşıt noktalar, 174
 Katerina, 157
 Keill, John, 98
 Kepler, Johannes, 97
 kısmi toplamlar, 53
 Kitaptan Deliller, 1
 komşuluk, 49
 kompakt, 50
 konveks fonksiyon, 44
 konveks küme, 159
 Kopernik, Nicolaus, 97

- kosinüs kuralı, 185
 Kovalevskaya, Sofia, 69
 Kronecker, Leopold, 110
 Krotón, 14
 kuvvet serileri, 2, 71–99
 kümeler teorisi, 2
 kürenin geometrisi, 3
 küresel üçgen, 183
- Lagrange, Joseph-Louis, 14, 61, 137
 Laplace, Pierre-Simon, 137, 157
 Leibniz formülü, 90
 Leibniz, Gottfried, 60, 97, 98
 lim, 50
 limit, 50
 lim sup, 72
 Lindemann, Ferdinand von, 131
 Liouville, Joseph, 138
 Liouville sayısı, 2, 128, 131
 listeleme fonksiyonu, 23
 Littlewood, John Edensor, 48
 log, 37, 80
 logaritma, 37
 Loomis, Elisha Scott, 15
 Louis, XVIII, 61
 Louis-Philippe, 61
- Mısır, 14
 MacLaurin serisi, 84
 marangoz teoremi, 6, 7
 Matematik Dünyası, 3, 6, 186
 Mathematische Annalen, 171
 max, 17
 Metapontum, 14
 metrik, 51
 metrik uzay, 2, 51
 Mısırlıoğlu, Tunç, 156
 milenyum problemleri, 142
 min, 17
 Minkowski eşitsizliği, 47, 48
 Minkowski, Herman, 48
 Minkowski uzayı, 48
 Mittag-Leffler, Magnus Gustaf (Gösta), 69
 mod, 29
 modülo, 29
 Monge, Gaspard, 61
 mutlak yakınsak, 72
 Mutlugil, Süha Orhun, 3
- N, 7
 N_0 , 17
 Napolyon Bonapart, 60, 61
 Napolyon III (Louis-Napoléon Bonaparte), 61
 Nesin, Ali, 3, 62, 99, 152, 167, 169
 Newton, Isaac, 2, 14, 60, 88, 97–98
 Noether, Emmy, 69
 nokta ayırmak, 105
 norm, 46, 52
 normlu uzay, 2, 52
- normun sürekliliği, 53
- oyunlar teorisi, 3
 Öğeler, 31
 Öklid, 1, 23, 31
 Öklid algoritması, 25
 Öklid dışı geometri, 31
 Öklid geometrisi, 31
 Öner, Zehra, 3
- $\mathbb{P}$, 18, 19, 23
 Pascal, Blaise, 32
 Pascal üçgeni, 28
 Petro (Büyük/Deli), 156
 π , 131
 Picard teoremi, 114
 Pintz, János, 32
 Pisagor, 5, 13, 14, 26
 Pisagor okulu, 26
 Pisagor teoremi, 1, 5–15
 Pisagor üçlülere, 1, 2, 5–15, 34
 Pisagoras, 5
 Pisagorcular, 14
 Pisagorculuk, 13
 Pitagoras, 5
 polinomlar, 121–138
 Pólya, George, 48
 Pythagoras, 5
- $\mathbb{Q}$, 11, 121
- $\mathbb{R}$, 8, 121
 $\mathbb{R}_+$, 51
 Radulescu, Teodora-Liliana T., 157
 Radulescu, Vicentiu D., 157
 rasyonel sayı, 8, 26
 rasyonel sayılar kümesi, 11, 121
 $\operatorname{Re} f$, 108
 Riemann, Bernhard, 156
 Riemann hipotezi, 142
 Riemann zeta fonksiyonu, 3, 139–157
- $\mathbb{S}$, 127
 Sabit ibn Kurra, 13–15
 sabit nokta, 111
 sabit nokta özelliği, 160
 sabit nokta teoremi, 2
 sabit nokta teoremleri, 111
 Samos, 5, 14
 sayılabilir, 121
 sayılamaz, 121
 Sayılı, Aydın, 15
 Schauder, Juliusz Pawel, 165, 172
 Schauder teoremi, 165
 Schep, Anton R., 138
 Schneider, Theodor, 136
 Schwarz, Hermann, 69
 seri, 2, 38
 sezgisellik felsefesi, 171

- sınırlı küme, 52
 sin, 152
 Singh, Simon, 36
 Sisam, 5, 14
 Sobel, Dava, 186
 sonlu kısmi çarpımlar, 38
 sonsuz çarpım, 2, 38
 sonsuz iniş, 2, 34
 sonsuz toplam, 2, 53
 Soundararajan, Kannan, 32
 Sperner, Emanuel, 161, 172
 Sperner teoremi, 3, 161, 169
 Steinhaus, Hugo, 62
 stereografik izdüşüm, 8–11
 Stirling formülü, 43
 Stirling yaklaşımı, 43
 Stone, Harlan, 110
 Stone, Marshall Harvey, 2, 101, 110
 Stone-Weierstrass yaklaşım teoremi, 2, 101–110
 Stone-Weierstrass yaklaşım teoremi ($\mathbb{C}$ için), 108
 Studia Mathematica, 62
 Sullivan, Joseph A., 62, 120
 sup normu, 54
 sürekli fonksiyon, 50, 63
 süreklilik, 69
 Şuhubi, Erdoğan S., 120

 T , 108
 tam metrik uzay, 52
 tamsayılar kümesi, 17
 Tarentum, 14
 Taylor, Richard, 33
 Taylor serisi açılımı, 82
 temel Pisagor Üçlüsü, 7
 Terzioğlu, Tosun, 62, 110, 120
 testere fonksiyonu, 63
 tıkız küme, 50
 tıkız uzay, 50
 topoloji, 2, 49
 topolojik uzay, 49
 Törün, Ali, 3
 trigonometrik polinomlar, 109

 Uludağ, Muhammed A., 1, 157, 172
 uzaklık fonksiyonu, 51
 üçgen eşitsizliği, 53

 van der Waerden, Bartel Leendert, 64, 69
 Venkatachaliengar, K., 157
 Voltaire, François-Marie (Arouet), 157
 Volterra integral denklemini, 118

 Weber, Wilhelm Eduard, 137
 Weierstrass, Karl, 64, 68, 101, 110
 Weierstrass yaklaşım teoremi, 2
 Weierstrass M -testi, 59
 Weigl, Rudolf, 62
 Wiles, Andrew, 2, 33

 yakınsak çarpım, 38
 yakınsak seri, 53
 yakınsaklık yarıçapı, 72
 yakınsamak, 50
 Yıldırım, Cem Yalçın, 32
 yol (kürede), 176

 $\mathbb{Z}$, 17
 $\zeta(2)$, 142–150
 $\zeta(2k)$, 150–151
 $\zeta(2k+1)$, 152
 $\zeta(3)$, 152
 $\zeta(s)$, 139
 zayıf topoloji, 49
 Ziegler, Günter M., 1, 157, 172

Tosun Terzioğlu

Bir Analizcinin Defterinden Seçtikleri

Çoğu kişi matematiği kuru, soğuk, korkutucu ve sevilensiz bulur. Oysa matematikçiler, matematikten derin bir estetik haz alırlar; zaman zaman matematik kavramlarını, kanıtlardaki kıvrak akıl yürütmeleri, "güzel", "zarif" ve "çarpıcı" gibi sıfatlarla nitelendirirler. Bertrand Russell'a göre matematik duru, berrak, yalın ama yüce bir güzellik taşıır. Matematik öğrenirken ve öğretirken karşılaştığım olağanüstü parlak fikirlerin, akıl yürütmelerin ve zarif teoremlerin bende uyandırdığı heyecan ve hazzı bu kitapta okurlarla paylaşmaya çalıştım.

Tosun Terzioğlu

Kitabın ilk üç bölümünü anlamak için liselerimizde okutulan matematik yeterli olacaktır. İzleyen bölümlerde çita giderek yükselecek. Pisagor teoreminden başlayarak topolojiye, kuvvet serilerine, sayılardan geometriye doğru uzanan bu matematik yolculuğunda iyi okumalar dileriz.



ISBN 978-605-4702-16-9



9 786054 702169

NESİN MATEMATİK KÖYÜ

