

Keyifli Okumalar Dileriz

Binlerce kategoride milyonlarca PDF e-kitap, ders kitapları, dergiler ve romanlara platformumuz üzerinden ücretsiz ulaşabilirsiniz.

RESMİ WEB SİTEMİZ

<https://rantey.org>

Yedek ve Duyuru Kanallarımız

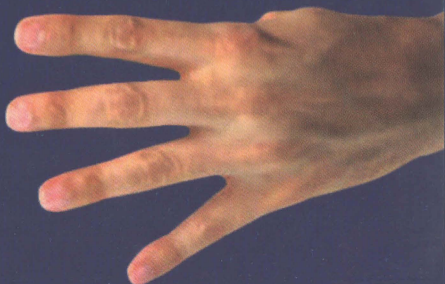
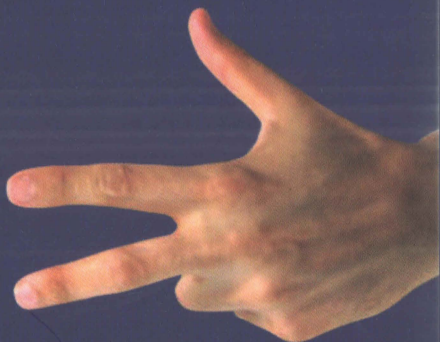
Sitemize erişim engeli gelmesi veya adres değişikliği durumunda aşağıdaki kanallardan güncel giriş adresine erişebilirsiniz:

- Telegram: <https://t.me/birkitapbir>
- WhatsApp Kanalımız : <https://whatsapp.com/channel/0029VbDHv8uE50Us4lvMoc0Y>

TOBIAS DANTZIG

Sayı

Bilimin Dili



metis bilim

17

Sayı kavramı tarih boyunca nasıl bir gelişim izledi? Einstein'ın "hiç kuşkusuz sayının evrimi üzerine okuduğum en ilginç kitap" diye nitelediği bu klasikleşmiş eserinde matematikçi Tobias Dantzig, bu sorudan yola çıkarak sayıyı mercek altına yatırıyor.

"Mevcut okul müfredatları matematiği kültürel içeriğinden ayırıp sadece teknik detaylardan meydana gelen bir iskelet olarak bırakarak pek çok iyi beyni kaçırmıştır. Bu kitabın amacı bu kültürel içeriği tekrar kazandırmak ve sayının evrimini gerçekten olduğu gibi derin bir insani öykü olarak sunmaktır," diyen Dantzig, matematik tarihini emin adımlarla ilerleyen bir süreç olarak değil, rastlantıların ve sezginin büyük rol oynadığı bir süreç olarak canlandırıyor.

Üzerinde nadiren durduğumuz sıfır kavramının icadı, sayıların mistik anlamları ve onlara atfedilen gizem, sayı ibadeti, ilginç paradokslar, matematikçileri asırlardır düşündüren problemler ve daha birçok konu, Dantzig'in anlattığı ilginç öykünün birbirine bağlı halkalarını oluşturuyor. Bu kitabı okurken görüyoruz ki, yaşadığımız gerçekliğin dokusuna bu kadar derinlemesine işlemiş olan sayı kavramını daha yakından tanımak, bize kendi düşünce yapımız hakkında da önemli ipuçları veriyor.

Metis Bilim

ISBN-13: 978-975-342-823-1



Metis Yayınları
www.metiskitap.com



TOBIAS DANTZIG

Sayı

Bilimin Dili

1884'te Letonya'da doğdu. Çar karşıtı propaganda yaptığı için ülkesinden ayrılmak durumunda kalınca Paris'e gitti. Sorbonne Üniversitesi'nde Fransız matematikçi Henri Poincaré ile birlikte çalıştı. 1910 yılında eşiyle birlikte Amerika'ya göç etti. Dil sorunu yüzünden bir süre Oregon'da odunculuk yapan Dantzig, 1917'de Indiana Üniversitesi'nde matematik doktorasını tamamladı. John Hopkins, Columbia ve Maryland üniversitelerinde ders verdi. 1956 yılında Los Angeles'ta öldü. 1930 tarihli *Sayı* kitabının yanı sıra, 1937 tarihli *Aspects of Science* (Bilimin Veçheleri) kitabının da yazarıdır.



Metis Yayınları
İpek Sokak 5, 34433 Beyoğlu, İstanbul
Tel: 212 2454696 Faks: 212 2454519
e-posta: info@metiskitap.com
www.metiskitap.com

Sayı, Bilimin Dili
Tobias Dantzig

İngilizce Basımı:
Number, The Language of Science
Pi Press, 2005

© Macmillan Company, 1930, 1954.

Önsöz, Notlar, Sonsöz ve Ek Okumalar

© Pearson Education, Inc., 2005

Bu eser, orijinali Scribner, Simon & Schuster Inc.
tarafından yayımlanmış 4. Basımın tekrar basımıdır.

© Türkçe yayım hakları Metis Yayınları'na aittir, 2011
Çeviri Eser © Barış Cezar, 2011

Birinci Basım: Kasım 2011

Yayıma Hazırlayan: Özde Duygu Gürkan
Kapak Tasarımı: Emine Bora

Dizgi ve Baskı Öncesi Hazırlık: Metis Yayıncılık Ltd.
Baskı ve Cilt: Yaylacık Matbaacılık Ltd.
Fatih Sanayi Sitesi No. 12/197-203
Topkapı, İstanbul Tel: 212 5678003

ISBN-13: 978-975-342-823-1

TOBIAS DANTZIG

Sayı Bilimin Dili

Çeviren:
Barış Cezar



metis

İçindekiler

Önsöz	9
Editörün Bilimsel Başyapıt Basımına Notu	15
Dördüncü Basıma Önsöz	17
İlk Basıma Önsöz	19
1 Parmak İzleri	21
2 Boş Sütun	35
3 Sayı Bilgisi	48
4 Son Sayı	64
5 Semboller	79
6 Ağza Alınamayanlar	97
7 Akıp Giden Dünya	113

8	Oluş Sanatı	127
9	Boşlukları Doldurmak	147
10	Sayı Bölgesi	159
11	Sonsuzun Anatomisi	179
12	İki Gerçeklik	197

Ekler

A. Sayıların Kaydedilişi Üzerine	213
B. Tamsayılar Üzerine	228
C. Kökler ve Köklü İfadeler Üzerine	250
D. İlkeler ve Argümanlar Üzerine	270
Sonsöz	283
Notlar	289
Ek Okumalar	309
Dizin	317

Önsöz

Barry Mazur

Elinizde tuttuğunuz kitap Sayı üzerine çokyönlü bir tefekkür ve matematikğin güzelliklerine bir methiyedir.

Bu klasik eser Sayı kavramının evrimi üzerinedir. Evet: Sayı bir *evrim* sürecinden geçmiştir ve geçmeye devam edecektir. Sayının doğuşu nasıl olmuştur? Bu konuda tahminde bulunmaktan fazlasını yapamıyoruz.

Sayının dile ilk girişi bir sıfat olarak mıydı? Üç inek, üç gün, üç kilometre. "Üç inek" ile "üç gün" arasında birleştirici bir nokta olduğu ve aralarındaki bu ortak "üçlük" noktasına eğilmenin harcanan zamana değeceği yönündeki o çarpıcı düşünceyi ilk fark eden insanın hissetmiş olabileceği heyecanı bir düşünün. Tek bir anda tek bir kişi tarafından fark edilmiş olsaydı, bu ileri doğru benzersiz bir adım olurdu, zira tek başına üçlük kavramı –ad olarak üç– ineklerden ve günlerden çok daha fazlasını içerir. Bu aynı zamanda örneğin bir gün ile üç gün arasında karşılaştırmalar yapılmasının da yolunu hazırlar: Üç gün bir günün üç katı olarak ele alındığında, *üç*e başka bir açıdan daha, yani *üçle çarpma* fiilindeki *üç* olarak bakmayı da beraberinde getirir.

Belki de Sayı başka bir yoldan ortaya çıkmıştır: örneğin "Bir iki üç, söylemesi güç..." diye devam eden tekerlemeler ya da kafiyeli sözler biçiminde.

Nasıl başlamış olursa olsun, bu öykü hâlâ devam ediyor ve bildiğiniz o mütevazı Sayının, *var olanı* anlama konusunda çok merkezi bir role sahip olduğu gittikçe daha açık görülüyor. İlk Pisagorcular mağaralarında dans ediyor olmalı.

Eğer matematik hakkında bir şeyler öğrenmeye niyetli ama buna hiç zaman bulamamış biri olsaydım ve kendimi o ünlü "ıssız ada"da mahsur kalmış bulsaydım, yanımda olmasını ilk isteyeceğim kitap,

gerçeği söylemek gerekirse, yüzme üzerine iyi bir kılavuz olurdu. Ama ikincisi de herhalde bu kitap olurdu. Çünkü Dantzig bu kitapta bilimsel sunum açısından vazgeçilmez olan şu işleri başarıyla yerine getiriyor: Okurlarının genel bir eğitimden fazlasına sahip olmadığını varsaymak, anlatılan öykü açısından en hayati materyali açık ve canlı bir şekilde ifade etmek, önemli bir öykü anlatmak, ve fikirlere sadece göndermeler yapmak yerine onları açıklamak (ki en nadir başarıları da budur).

Sayının öyküsündeki en güzel yan öykülerden biri, matematikçiler sayı cumhuriyetinin sınırlarını genişlettikçe kavramın nasıl değiştiğidir: Sayma sayılarıyla (1, 2, 3, ...) başlayan küme daha sonra negatif sayılarla sıfırı da içine almış (... -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...), nihayetinde de kesirleri, reel sayıları, karmaşık sayıları ve farklı bir kolonileşme tarzıyla sonsuzluğu ve sonsuzluklar hiyerarşisini de kapsayacak şekilde genişlemiştir. Dantzig bu genişlemelerin her birinin ardında yatan nedenleri de ortaya koyuyor: Gerçekten de bu farklı adımları aynı öykünün parçası kılan ortak bir nokta var. Sayı kavramının kapsamının genişlemesini anlatırken Dantzig arada XIV. Louis'den bir alıntı yapıyor. Dış siyasetinin ardındaki ana ilkenin ne olduğu sorulduğunda XIV. Louis şöyle cevap vermiş: "İlhak! Daha sonra işi kılıfına uyduracak akıllı bir avukat bulmak her zaman mümkündür." Ama Dantzig'in kendisi avukatlara iş bırakmıyor. Matematiğin doğum sancılarına yakından bir bakış sunarken bir yandan da bu öykü boyunca sürekli sorulan önemli bir soruya odaklanıyor: Matematiksel bir nesnenin var olması ne demektir? Karmaşık sayıların ortaya çıkışı üzerine bir yorumunda Dantzig şöyle diyor: "[Karmaşık sayılar kavramı] yüzyıllar boyunca akıl ile hayal gücü arasında bir tür mistik bağ görevi görmüştür." İnsanların zekâsını meşgul eden bu soruna dair Leibniz'in sözlerini aktarıyor:

İlahi Ruh, negatif birimin, yani -1'in, imajiner kökü dediğimiz bu analiz harikasında, ideal dünyanın bu alametinde, varlıkla varlık olmayan arasındaki bu ikiyaşayışlı mahlukta kendisini gösterecek yüce bir çıkış yolu bulmuştur. (177)

Dantzig ilk başlarda kendi yaşadığı şaşkınlıktan da söz ediyor:

Kendi hissettiklerimi hatırlıyorum da... Karmaşık sayıların gizemine daha yeni vâkıf olmuştum. Nasıl şaşırdığımı hatırlıyorum: Karşımda açıkça

imkânsız olan ama somut sonuçlar veren işlemlere tabi tutulabilen sayılar vardı. Bir tatminsizlik, huzursuzluk, bu hayali yaratıkların, bu içi boş sembollerin içini doldurma arzusuymdu duyduğum. Daha sonra bana bu varlıkları geometrik olarak, somut bir şekilde nasıl yorumlayacağım öğretildi. O anda adeta bir bulmacayı çözmüşçesine, beni korkutan bir hayaletin aslında hayalet değil de içinde bulunduğum ortamın tanıdık bir parçası olduğu ortaya çıkmışçasına bir rahatlama hissettim. (208)

Cebir ile geometri arasındaki karşılıklı etkileşim matematiğin ana temalarından biridir. Geometrik açıdan ilgi çekici eğrilerin basit cebir formülleriyle ifade edilmesini ve basit denklemlerin çözülmesiyle geometrinin gizli niteliklerinin açığa çıkarılmasını sağlayan lise düzeyindeki analitik geometrinin büyüğü serpilerek, modern matematikte karşılıklı birbirini pekiştiren cebirsel ve geometrik sezgilerin güçlü bir bileşimine dönüşmüştür. René Descartes şöyle demişti: "Geometri ile cebirin en iyi yanlarını alır ve birinin tüm kusurlarını diğeriyle düzeltirdim." Çağdaş matematikçilerden Michael Atiyah yakın tarihli bir yazısında geometrik sezginin ihtişamını cebirsel metotların olağanüstü etkililiğiyle karşılaştırırken şöyle diyor:

Cebir adeta şeytanın matematikçiye yaptığı bir teklif gibidir. Şeytan şöyle der: Sana istediğin her soruyu cevaplayacak bu güçlü makineyi vereceğim. Tek yapman gereken bana ruhunu vermek: Geometriden vazgeçersen bu harika makineye sahip olursun. (Atiyah, Michael, *Special Article: Mathematics in the 20th Century*, s. 7; *Bulletin of the London Mathematical Society*, no: 34, 2002, s. 1-15.)

Aritmetik ile geometrinin arasındaki binlerce yıllık flörtü bu aşk öyküsünün Faustvari yönlerini kaybetmeden anlatmak ancak Dantzig'in inceliği ile mümkün olabiliyor.

Geometrinin Öğeleri adlı kitabında Öklit "doğru"yu şöyle tanımlıyor: "Tanım 2. Doğru eni olmayan bir uzunluktur." Bugünlerde, düzlem geometrisinin temel taşı olan doğruya başka açılardan da bakabiliyoruz. Örneğin üzerinde pozitif, negatif, tam, kesirli veya irrasyonel sayıların kendi konumlarına sahip oldukları ve her iki yönde sonsuza dek uzanan bir yatay düz çizgi olarak gösterilen sayı doğrusu var. Yine zamandaki farklılıkları resmedebilmek ve içinde yaşadığımızı düşündüğümüz o derin, her daim akıl karıştırıcı ve her daim hareketli geçmiş/şimdiki zaman/gelecek çerçevesini sembolleştirmek adına aynı kaba örnekten, yine her iki yönde de sonsuza

dek uzanan yatay bir düz çizgi olarak gösterilen zaman doğrusundan yararlanırsınız. *Doğruya* dair bu farklı kavrayışların birbirleriyle nasıl bir alışveriş içinde olduklarının öyküsü de yine Dantzig'in anlatışında ele alınmıştır.

Zaman ile matematik arasındaki ilişkiyi ele aldığı kısımda Dantzig konuya hâkimiyetini gözler önüne seriyor. Sonsuz süreçlerle dolu olan ve "açıkça dinamik" olarak nitelediği Cantor'un kuramıyla "statik" olarak bahsettiği Dedekind'in kuramını karşılaştırıyor. Dedekind, diyor Dantzig, reel sayı tanımının hiçbir yerinde açıkça *sonsuz* sözcüğünü veya *eğilim*, *ölçülebilenin ötesinde*, *büyüme*, *yakın-sama*, *limit*, *atanabilir miktardan azı* gibi kelimeleri (ya da bunların yerine geçen terimleri) kullanmaz. Anlatının bu noktasında nihayet bir sonuca varmışsınız gibi görünüyor, zira Dantzig şöyle diyor:

Dolayısıyla ilk bakışta [Dedekind'in reel sayılar tanımında] sayı kavramını zaman sezgisi boyunduruğundan tamamen kurtarmayı başarmışsınız gibi görünür. (155)

Tabii ki bu "tam kurtuluş" Dantzig meseleye bir kez daha baktığında dağılıp gidiyor; böylece zamana ve zamanın matematiksel ifadesine, süreye (*continuum*) ve süreyin fiziksel zamanla veya bizim tecrübe ettiğimiz zamanla ilişkisine dair ebedi meseleler, Zenon'dan beri farkında olduğumuz sorunlar bu kitapta okuyacağınız sayının evrimi öyküsünün daimi eşlikçileri olmaya devam ediyor.

Dantzig soruyor: Dünya –bilim dünyası– matematiksel dünya üzerinde ve matematiksel dünya da bilim dünyası üzerinde ne ölçüde önemli bir etkiye sahiptir?

Biliminsanı bu dünya *sanki* kendi düşünceleri veya eylemlerinden bağımsız yasalarca yönetilen mutlak bir bütünmüşçesine hareket eder; ama ne zaman çarpıcı basitlikte, geniş bir evrensellikte veya kâinattaki mükemmel uyuma işaret eden bir yasa keşfetse, "Acaba zihnim bu keşifte ne rol oynadı? Sonsuzluk havuzunda gördüğüm güzel imge bu sonsuzluğun doğasını mı ortaya çıkarıyor yoksa kendi zihnimin yansımasından başka bir şey değil mi?" diye düşünecek bilgelikte olacaktır. (199)

Dantzig şöyle diyor:

Matematikçi, yaptığı giysileri giyecek yaratıklardan tamamen bihaber olan bir giysi tasarımcısına benzetilebilir. Kuşkusuz bu zanaatın çıkış nedeni böyle yaratıklar için giysiler gerekmesiydi, ama bu çok uzun zaman ön-

ceydi; bugün ara sıra giysinin adeta kendisi için yapılmışçasına uyduğu bir şekil ortaya çıkar. İşte o zaman büyük bir şaşkınlık ve sevinç yaşanır! (198)

Bu, tarz olarak kısmen fizikçi Eugene Wigner'in ünlü makalesi "Matematiğin Doğa Bilimleri Alanındaki Mantıkdışı Etkililiği"ni andırıyor, ama Dantzig bizlere kendi son derece şahsi *öznel gerçeklik* ve *nesnel gerçeklik* nosyonlarını sunarak devam ediyor. Dantzig'e göre nesnel gerçeklik, insanlığın (örneğin bilimsel araçların kullanımı yoluyla) elde etmiş olduğu tüm verileri de içeren son derece geniş bir kaptır. Sayı ile nesnel gerçeklik arasındaki ilişkiye dair analizine zemin hazırlamak amacıyla Poincaré'nin nesnel gerçeklik tanımını ("çok sayıda düşününen varlık için ortak olan ve herkes için ortak olabilecek şey") kabul ediyor.

Immanuel Kant'ın o çok önemli iki sözcüğe, *özne* ve *nesne*'ye dair çok sayıdaki biçimlenimlerinden en az birinde, kendi *sensus communis** kavramı baskın bir rol oynar. Bu incelikli kavram, bir şekilde her birimizin içinde oluşan ve insanlığın geri kalanının çeşitli durumları nasıl karşılayacağına dair beklentilerimizin kaynağı olan içsel bir "genel ses"tir.

Buna benzer bir yönde, Poincaré ile Dantzig'in öznel gerçekliği de bir tür iç ses, içimizde, insanlığın geri kalanı hakkında bize bir şeyler söyleyen bir yetiyi gerektiriyormuş gibi görünüyor: Poincaré-Dantzig nesnel gerçekliği, genel olarak nesnel kabul edilmiş veya kabul *edilebilir* olana dair temelde öznel bir konsensüstür. Bu görüş bizi hemen nesnellik ve sayı üzerine pek çok tartışmanın, özellikle de Wigner'in makalesinde ifade edilen düşüncelerin altında bir döngüsellik yattığı konusunda uyarır. Dantzig bu konuya pek değinmiyor.

Kardeşim Joe ile ben o zaman 70'li yaşlarının başında olan babamız Abe'e *Sayı: Bilimin Dili*'nden bir tane hediye etmiştik. Abe liseden sonra matematik eğitimi görmemişti ama hâlâ orada öğrenmiş olduğu cebire karşı tutkulu bir sevgi besliyordu. Bir keresinde, biz daha küçükken, Abe cebirin güzelliklerinden bazılarını bizimle paylaşmıştı: "Size bir sır vereceğim," demişti gizemli bir ses tonuyla. X sembolünün o büyümlü gücünü kullanarak *iki katı alınıp bir eklendi-*

* Lat. Ortak hissiyat anlamında. Kant bunu tüm insanlığın paylaştığı yargılardan söz ederken kullanır. —ç.n.

ğinde II eden o sayıyı nasıl bulabileceğimizi anlatmaya başladı. Ben her şeyi olduğu gibi kabul eden bir çocuk olarak *X*'in gerçekten ailemize ait bir sır olduğunu düşünüyordum; ta ki birkaç yıl sonra matematik dersinde gözüm açılana dek.

Abe hediye ettiğimiz kitabı şaşırtıcı derecede çok beğendi. Onu dikkatle okudu, kenarlarını aldığı notlarla, hesaplamalarla, yorumlarla kapkara hale getirdi; tekrar tekrar okudu. Sayılarla bu kitaptaki şekilde etkileşime girdi; Goldbach Varsayımı'nın kendine ait değişkelerini denedi ve onlara kendi *Goldbach Değişimleri* adını verdi. Tam anlamıyla mest olmuştu.

Ama bunların hiçbiri şaşırtıcı değil, çünkü Dantzig'in kitabı hem ruhu hem de zekâyı tutsak ediyor; bu kitap gerçekten herkesçe erişilebilir olan az sayıdaki açıklayıcı matematik klasiklerinden biri.

Editörün Bilimsel Başyapıt Basımına Notu

Sayı'nın bu basımının metni, 1954'te yayımlanan dördüncü basıma dayanır. Bu basıma yeni bir önsöz, sonsöz, notlar ve detaylı bir kaynakça da eklenmiş ve orijinal çizimler tekrar çizilmiştir.

Dördüncü basım iki kısma ayrılmıştı. 1. Kısım –"Sayı Kavramının Evrimi"– bu basımın metnini meydana getiren 12 bölümden oluşuyordu. 2. Kısım –"Eskisiyle Yenisiyle Problemler"– ise daha teknikti ve belli kavramları derinlikli bir şekilde ele alıyordu. Bu basımda her iki kısım da korunmuştur, ancak 2. Kısım metinden ayrılarak ekler haline getirilmiş ve her iki kesimin başındaki "kısım" sözcüğü kaldırılmıştır.

2. Kısım'da Dantzig'in dili daha az açıklayıcı, daha sembolik, düşünceler üzerinde daha az, yöntemler üzerinde daha çok duran ve yazarın teknik detayları daha özlü bir şekilde aktarmasını sağlayan bir hal alıyor. Burada artık notlara veya daha detaylı yorumlara gerek yokmuş gibi görünüyor. Matematikte yarım yüzyıllık gelişmelerin "Eskisiyle Yenisiyle Problemler" başlıklı bir bölümde birtakım değişiklikler yapılmasını zorunlu kılacağı düşünülebilir, ama bu başlık yanıltıcı; bu bölümdeki problemler eski ya da yeni değil, sadece Dantzig tarafından matematiğin nasıl yapıldığını göstermek amacıyla seçilmiş birtakım klasik fikirlerden ibaret.

Sayı'nın daha önceki basımlarında, bölümler içinde numaralanmış kesimler vardı. Bu numaralandırma farklı paragraflardaki düşünceleri birbirinden ayırma dışında bir amaca hizmet etmediğinden, numaralar silinmiş ve yerlerini tek satırlık bir boşluk almıştır.

Dördüncü Basıma Önsöz

Çeyrek yüzyıl önce bu kitap ilk yazıldığında, bu çalışmayı öncü bir çaba olarak görmek için nedenlerim vardı, zira *sayı kavramının evrimi*, profesyonel matematikçiler, mantıkçılar ve düşünürler arasında ateşli tartışmalara konu olmakla beraber, genel kamuoyuna kültürel bir mesele olarak henüz sunulmamıştı. Hatta o dönemde bu kitabın basımını haklı çıkaracak sayıda meslek dışından okur olup olmadığından emin bile değildik. Esere gerek yurtiçinde gerekse yurtdışında verilen tepkiler ve ardından çıkan aynı genel temaya sahip çok sayıda kitap bu kuşkuları ortadan kaldırdı. Matematiğin ve matematiğe dayanan bilimlerin kültürel yönleriyle ilgilenen kayda değer bir okur kitlesinin varlığı bugün rakamlarla sabittir.

Yaşamının sonbaharındaki bir yazar için ilk edebi çabasına yönelik sürekli talebin yeni bir basımı gerektirmesi heyecanlandırıcı bir deneyim ve ben de bu kitabın elden geçirilmesi işine bu ruh hali içinde yaklaştım. Ama çalışma ilerledikçe kitabın son basımından beri meydana gelmiş çok sayıda değişimin farkına varmaya başladım. Teknolojideki gelişmeler, istatistiksel yöntemin yayılması, elektronüğün yükselişi, nükleer fiziğin ortaya çıkışı ve en çok da otomatik bilgi sayıcıların gittikçe artan önemi – tüm bunlar matematiksel etkinliklerin sınırında yaşayan insanların sayısını öngörülemez şekilde artırırken, bir yandan da genel matematiğe eğitiminin düzeyini yükseltmişti. Dolayısıyla hem sayıca çok artmış, hem de yirmi küsur yıl önce hitap ettiğimden çok daha gelişmiş ve hata kabul etmez bir okur kitlesiyle karşı karşıyaydım. Bu düşünceler söz konusu yeni basımın planlanmasını fazlasıyla etkiledi. Değişim dolu bu dönemin getirdikleriyle başa çıkıp çıkamadığım sorusunun cevabınıysa okura bırakıyorum.

Güncellenmiş birkaç paragraf dışında mevcut basımın 1. Kısım –*Sayı Kavramının Evrimi*– orijinal metnin bire bir aynısıdır. Buna karşın 2. Kısım –*Eskisiyle Yenisiyle Problemler*– her açıdan yeni bir kitaptır. Dahası, 1. Kısım büyük ölçüde kavramlar ve fikirler üzerinedir. Yine de 2. Kısım orijinal metin üzerine bir yorum olarak değil, *sayı alanında yöntem ve argümanların gelişiminin* öyküsü olarak alınmalıdır. Buradan *Eskisiyle Yenisiyle Problemler*'in dört bölümünün, metnin on iki esas bölümünden daha teknik olduğu sonucu çıkarılabilir, ki gerçekten de öyledir. Öte yandan, ele alınan konulara genel olarak ilgi çeken bazı konular da eklenmiştir ve "atlayarak okuma" sanatında ehil bir okur daha teknik kısımları atlama-sına rağmen konuyu takip etmekte zorlanmayacaktır.

Tobias Dantzig
Pacific Palisades, California
1 Eylül 1953

İlk Basıma Önsöz

Bu kitap yöntemler değil, fikirler üzerinedir. Tüm gereksiz teknik bilgilerden özenle kaçınılmıştır ve ele alınan meseleleri anlamak için ortalama lise müfredatında verilenden daha ileri bir matematiksel araca gerek olmayacaktır.

Ama her ne kadar bu kitap okurun belli bir matematik eğitimiyle sahip olduğunu varsaymasa da, en az onun kadar ender rastlanan başka bir şeyi varsayar: fikirleri özümseme ve değerlendirme yetisini. Dahası, konunun teknik yönlerinden uzak durmakla birlikte, bu kitap semboller karşısında yatıştırılmaz bir korku duyanlar veya doğuştan biçim körü olanlar için yazılmamıştır. Matematik üzerine bir kitaptır bu: Sembol ve biçimi konu alır, bir de bunların ardındaki fikirleri.

Yazara göre, mevcut okul müfredatları matematiği kültürel içeriğinden ayırıp sadece teknik detaylardan meydana gelen bir iskelet olarak bırakarak pek çok iyi beyni kaçırmıştır. Bu kitabın amacı bu kültürel içeriği tekrar kazandırmak ve sayının evrimini gerçekten olduğu gibi derin bir insani öykü olarak sunmaktır.

Konunun tarihi üzerine bir kitap değildir bu. Ancak, sezginin matematiksel kavramların evriminde oynadığı rolü ortaya çıkarmak amacıyla tarihsel yöntemden serbestçe yararlanılmıştır. Böylece sayının öyküsü burada bir fikir geçidi olarak aktarılmanın yanı sıra, bu fikirleri ortaya atan insanlara ve o insanları yaratan dönemlere de yer verilmiştir.

Sayı biliminin temel meseleleri bilimin o ince aygıtının bütünü için içine sokulmadan sunulabilir mi? Bu kitap, yazarın bunun yapılabileceğine inancının ilanıdır. Nihai takdir okura ait.

Tobias Dantzig
Washington, D.C., 3 Mayıs 1930

Parmak İzleri

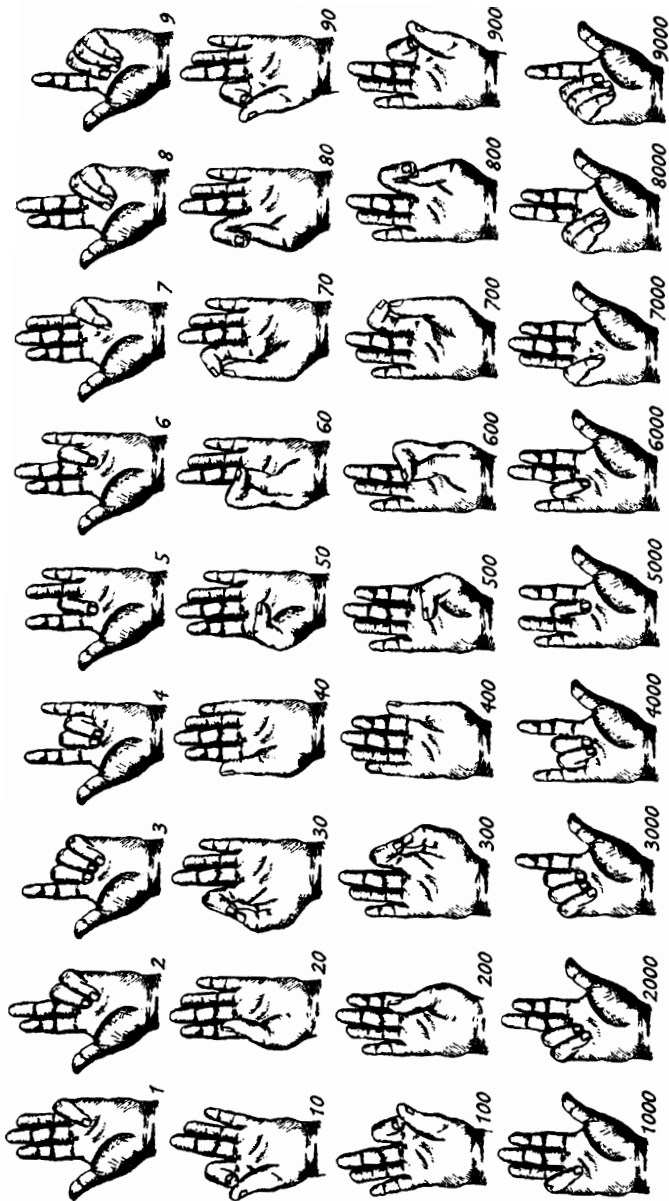
Ayın on dönüşünden meydana gelirdi Roma yılı:
El üstünde tutulurdu o zaman bu sayı,
Belki on parmağımızı kullanarak saydığımızdan,
Veya kadınlar çocuklarını on ayda doğurduğundan,
Veya sayılar birden ona kadar gittikten sonra
Aynı düzenlerde yeni bir tura başladığından.

OVIDIUS, *Fasti*, III

İnsanlar daima, gelişimin alt seviyelerinde bile, daha iyi bir isim bulana kadar *Sayı Duyusu* adını vereceğim bir yetiye sahip olagelmıştır. Bu yeti, insanın, küçük bir nesne yığınının kendi doğrudan bilgisi dışında bir şey alındığında veya yığına bir şey eklendiğinde ortada bir değişiklik olduğunu anlamasını sağlar.

Sayı duyusu muhtemelen çok daha sonraları ortaya çıkan ve göreceğimiz gibi son derece karışık bir zihinsel süreç olan sayma ile karıştırılmamalıdır. Bildiğimiz kadarıyla sayma sadece insanlara mahsus bir niteliktir, oysa birtakım ilkel türler bizimkine benzer bir sayı duyusuna sahip gibi görünüyorlar. En azından ehil hayvan davranışı gözlemcilerinin görüşü bu ve bu kuram kayda değer miktarda kanıtla da destekleniyor.

Örneğin pek çok kuş böyle bir duyuya sahip. Dört yumurta bulunan bir yuvadan bir tanesini sorun çıkarmadan almak mümkün, ama iki tane alınırsa kuş genellikle yuvayı terk eder. Anlaşılmaz bir şekilde kuş iki ile üçü birbirinden ayırabiliyor. Ama bu yeti kesinlikle kuşlarla kısıtlı değil. Aslında bildiğimiz en çarpıcı örnek "soliter eşekarısı" olarak bilinen böcektir. Anne eşekarısı yumurtalarının her birini ayrı bir hücreye yerleştirir ve her yumurtaya, yumurtadan çıktığında yavrunun beslenmesi için bir miktar canlı tırtıl tedarik eder.



PARMAK İŞARETLERİ
(1520'DE BASILAN BİR ELKİTABINDAN)

Belli eşekarısı türleri için bu kurbanların sayısı şaşırtıcı derecede sabittir: Bazı türler 5, bazıları 12, bazılarıysa hücre başına tam 24 tırtıl tedarik eder. Ama en çarpıcı olanı erkeğin dışıdan çok daha küçük olduğu *Genus Eumenes* vakasıdır. Gizemli bir şekilde anne yumurtadan erkek mi yoksa dişi mi larva çıkacağını bilir ve yiyecek miktarını ona göre ayarlar; avın türünü veya boyunu değiştirmez, ama yumurta erkekse beş kurban, dişiye on kurban ayırır.

Eşekarısının davranışlarındaki düzen ve bu davranışların böceğin yaşamındaki temel bir işleve bağlı olduğu gerçeği, bu vakayı bir sonrakinden daha az ikna edici kılıyor. Aşağıda anlatılan vakada kuşun davranışları neredeyse bilinçliymiş gibi görünüyor:

Bir toprak sahibi malikânesinin gözetleme kulesine yuva yapan bir kargayı vurmayı kafaya koymuş. Tekrar tekrar kuşu şaşırtmaya çalışmış ama nafiye: Adam yaklaşıncı karga yuvasını terk ediyormuş. Uzak bir ağaçtan seyrederek adam kuleyi terk edene dek bekliyor ve daha sonra yuvasına dönüyormuş. Bir gün toprak sahibi bir hileye başvurmuş: İki adam kuleye girmiş, biri içeride kalırken diğeri dışarı çıkıp gitmiş. Ama kuş aldanmamış: İçerideki adam da çıkana kadar uzakta beklemeyi sürdürmüş. Daha sonraki günlerde deney iki, üç, daha sonra dört adamla tekrarlanmış ama başarılı olmamış. En sonunda beş adam gönderilmiş: Daha önceki gibi hepsi kuleye girmiş ve dördü dışarı çıkıp uzaklaşırken biri içeride kalmış. Burada karga hesabı şaşırmış. Dörtle beşi birbirinden ayıramayan karga yuvasına dönmüş.

Bu tür kanıtlara karşı iki argüman geliştirilebilir. Birincisi böyle bir sayı duyusuna sahip türlerin son derece az olduğu, böyle bir yetiye memeliler arasında rastlanmadığı ve maymunların bile bundan yoksun olduğudur. İkincisiye bilinen tüm vakalarda hayvanların sayı duyusunun gözardı edilebilecek denli kısıtlı olduğudur.

İlk nokta gayet isabetlidir. Gerçekten de o ya da bu biçimiyle sayı algılama yetisinin kimi böcekler, kuşlar ve insanlarla sınırlı olması çarpıcı bir olgudur. Köpekler, atlar ve diğer evcil hayvanlar üzerine yapılan gözlem ve deneyler herhangi bir sayı duyusu ortaya çıkaramamıştır.

İkinci argümana gelince, bu iddia pek anlamlı değildir çünkü insanların sayı duyusunun kapsamı da gayet kısıtlıdır. Sayıyı algılama-

sı gereken her türlü pratik vakada medeni insan bilinçli veya bilinçdışı olarak doğrudan sayı duyusuna simetrik örüntü okuma, zihinsel gruplama veya sayma gibi araçlarla yardım eder. Özellikle *sayma* zihinsel araçlarımızın o denli bütünleşmiş bir parçası haline gelmiştir ki, sayı algımıza dair psikolojik testlerde çok büyük zorluklarla karşılaşılır. Yine de birtakım ilerlemeler sağlanmıştır; dikkatlice yürütülen deneyler ortalama medeni insanın doğrudan *görsel* sayı duyusunun nadiren dördü aştığı ve *dokunsal* sayı duyusunun daha da sınırlı olduğu yolundaki kaçınılmaz sonuca işaret etmiştir.

İlkel insanlar üzerine yapılan antropolojik araştırmalar da bu sonuçları şaşırtıcı bir derecede destekliyor. Bu araştırmalar *henüz parmakla sayma evresine erişmemiş* vahşilerin sayı algısından neredeyse tümüyle yoksun olduğunu gösteriyor. Avustralya, Güney Denizi Adaları, Güney Amerika ve Afrika'daki çok sayıda kabilede durum böyle. İlkel Avustralya üzerine kapsamlı araştırmalar yapmış olan Curr'a göre yerlilerin pek azı dördü algılayabiliyor ve medeniyete karışmamış hiçbir Avustralya yerlisi yediyi algılayamıyor. Güney Afrikalı Buşmanların *bir, iki* ve *çok* dışında sayı sözcükleri yok ve bu sözcükler de o kadar muğlak ki yerlilerin bunlara net anlamlar yüklediklerinden emin olamıyoruz.

Kendi uzak atalarımızın daha iyi durumda olduklarına inanmak için hiçbir nedenimiz yok, hatta bundan kuşku duymak için pek çok gerekçemiz var, çünkü neredeyse tüm Avrupa dilleri bu tür erken dönem kısıtlamalarının izlerini taşır. Tıpkı Latince'deki *ter* gibi İngilizce *thrice* (üç kere) sözcüğü de çift anlama sahiptir: üç kere ve çok. Latince *tres* yani üç ile *trans* yani öte arasında akla yatkın bir bağlantı vardır; aynı şey Fransızca *très* yani çok ve *trois* yani üç için de söylenebilir.

Sayının doğuşu sayısız tarihöncesi çağın geçit vermez perdesinin ardında gizlidir. Kavram deneyimlerden mi doğmuştur, yoksa deneyimler yalnızca zaten ilkel zihinde yatanı açık hale mi getirmiştir? Burada metafizik akıl yürütmeler için büyüleyici bir konu yatıyor, ama tam da bu nedenle bu çalışmanın dışında bırakıldı.

Kendi uzak atalarımızın gelişimini çağdaş kabilelerin zihinsel durumlarına benzetecek olursak, başlangıcın son derece mütevazı olduğu sonucuna varmamız kaçınılmazdır. Sayı kavramının çıktığı çekirdeği, kuşlarınkinden daha kapsamlı olmayan ilkel bir sayı du-

yusu meydana getiriyordu. Ve eğer bu doğrudan sayı algısına kalmış olsaydı kuşkusuz insan da sayma sanatında kuşlardan daha ileri gidemezdi. Ama bazı kayda değer koşullar sayesinde insan bu aşırı derecede sınırlı sayı algısını gelecekteki yaşamı üzerinde müthiş bir etkisi olacak bir beceriyle desteklemeyi öğrenmiştir. Bu beceri *saymadır* ve evrenimizi sayılarla ifade etme konusundaki olağanüstü ilerlemeyi saymaya borçluyuz.

Gökkuşağının her rengi için sözcüklere sahip olup da renk için bir sözcüğe sahip olmayan ilkel diller vardır; bazı dillerdeyse bütün sayı sözcükleri vardır ama sayı için bir sözcük yoktur. Bu başka kavramlar için de geçerlidir. İngilizce belli türde derlemeler için kullanılabilecek ifadeler konusunda çok zengindir: *Flock* (davar), *herd* (sürü), *set* (küme), *lot* (parti) ve *bunch* (öbek) gibi İngilizce kökenli sözcükler belli nesne ya da canlılar için kullanılır; ancak *collection* (derlem) ve *aggregate* (yığışım veya küme) sözcükleri yabancı kökenlidir.

Somut, soyuttan önce gelmiştir. Bertrand Russell, "Bir çift sülün ile iki günün her ikisinin de iki sayısına örnek olduğunu keşfetmek çağlar sürmüş olmalı," diyor. Bugün *iki* idesini ifade edebileceğimiz pek çok sözcük var: eş, çift, takım, ikiz vs.

İlkel sayı kavramının fazlasıyla somut oluşuna çarpıcı bir örnek, Britanya Kolombiyası'ndaki bir kabilenin konuştuğu Tsimtsian dilinden verilebilir. Burada yedi ayrı sayı sözcüğü kümesine rastlıyoruz: biri yassı nesneler ve hayvanlar için, biri yuvarlak nesneler ve zaman için, biri insanlar için, biri uzun nesneler ve ağaçlar için, biri kanolar için, biri ölçüler için, biri belli bir nesneden bahsedilmezken saymak için. Bu sonuncusu muhtemelen daha sonraki bir gelişmedir; diğerleriyse kabile üyelerinin henüz saymayı bilmediği eski dönemlerin kalıntıları olmalı.

İlkel insanların tipik özelliği olan somut ve dolayısıyla heterojen çoğulluk nosyonunu matematiği mümkün kılan *homojen soyut sayı kavramına* dönüştüren, saymadır.

Ancak, tuhaf gibi görünmekle beraber, mantıklı ve net bir tanıma sahip bir sayı kavramına sayma becerisine başvurmadan da ulaşmak mümkündür.

Bir konser salonuna giriyoruz. Karşımızda iki derlem duruyor. Oditoryumun koltukları ve seyirci. *Saymadan* iki derlemin eşit olup olmadığını ve eğer değilse hangisinin daha fazla olduğunu görebiliriz. Çünkü tüm koltuklar doluysa ve kimse ayakta değilse, *saymadan* iki derlemin eşit olduğunu *biliriz*. Eğer tüm koltuklar doluyorsa ve seyircilerden bir kısmı ayaktaysa, *saymadan* insanların koltuklardan daha fazla olduğunu *biliriz*.

Bu bilgiyi tüm matematiğe hâkim olan ve *bire bir mütakabiliyet* denen bir süreçten elde ederiz. Bu süreçte bir derlemdeki her bir nesneye diğer derlemden bir nesne atanır ve bu süreç derlemlerden biri veya her ikisi tükeninceye kadar devam eder.

Pek çok ilkel halkın sayı teknikleri böylesi bir eşleştirme veya çetele tutma ile sınırlıdır. Sürülerinin veya ordularının kaydını bir tahtaya atılan çentikler veya bir yere yığılmış çakıl taşlarıyla tutarlar. Atalarımızın bu tür yöntemlerde usta olduklarını *tally* (çetele) ve *calculate* (hesaplama) sözcüklerinin etimolojisinden anlayabiliyoruz: Bunlardan ilki Latince *talea* yani çentik, ikincisiyse Latince *calculus* yani çakıldan gelir.

İlk bakışta mütakabiliyet süreci sadece iki derlemi karşılaştırmaya imkân veriyormuş, ama sözcüğün mutlak anlamıyla sayıyı yaratması mümkün değilmiş gibi görünüyor. Ancak görelî sayıdan mutlağa geçiş zor değil. Tek gerekli olan, olası derlemleri sembolize eden *model derlemler* yaratmak. Bunu yaptıktan sonra herhangi bir derlem ile ilgili tahminde bulunma işi, öğeleri eldeki derlemin öğeleriyle eşleştirilebilecek bir modeli seçmeye indirgenmiş oluyor.

İlkel insan bu tür modelleri kendi yakın çevresinden bulur: Bir kuşun kanatları iki sayısını, yoncanın yaprakları üçü, bir hayvanın bacakları dördü ve kendi elindeki parmaklar beşi sembolize edebilir. Sayı sözcüklerinin kökenlerinin böyle olduğunun kanıtlarına pek çok ilkel dilde rastlamak mümkündür. Elbette bir kere *sayı sözcüğü* yaratıldıktan ve kullanıma alındıktan sonra, ilk başta temsil ettiği nesne kadar iyi bir model haline gelir. Ödünç alınan nesnenin adıyla sayı sembolünün kendisi arasında ayırım yapma ihtiyacı doğal olarak genellikle seste bir değişime yol açar, ta ki zamanla bu ikisi arasındaki bağlantı hafızalardan silininceye kadar. İnsan diline giderek daha fazla bel bağladıkça, sesler temsil ettikleri imgelerin yerini alır ve başlangıçtaki somut modeller sayı sözcükleri gibi soyut

bir biçime bürünür. Hafıza ve alışkanlıklar bu soyut biçimlere somutluk kazandırır ve dolayısıyla tek başlarına sözcükler çoğulluk ölçütü haline gelir.

Yukarıda anlattığım kavrama *kardinal sayı* denir. Kardinal sayı müteakabiliyet ilkesine dayanır; işin içinde saymanın *olmadığını* ima eder. Bir sayma süreci yaratmak için, her ne kadar kapsamlı da olsalar bir dizi karışık model yeterli değildir. Bunun için bir sayı *sistemi* meydana getirmek gerekir: Modeller kümemiz artan büyüklüğe göre bir sıralanmış dizi (*ordered sequence*), *doğal dizi* şeklinde düzenlenmelidir: bir, iki, üç... Bu sistem yaratıldıktan sonra, *bir derlemi saymak* derlem tükenene dek her üyeye doğal dizideki bir kavramı *düzenli bir ardıllıkla* atamak demektir. Derlemin *son* üyesine atanan doğal dizi terimine o derlemin *ordinal sayısı* adı verilir.

Ordinal sistem tespiti gibi somut bir biçime bürünebilir, ama tabii ki bu şart değildir. İlk birkaç sayı sözcüğü *düzenli ardışıklık içinde* hafızaya kazındığında ve daha büyük bir sayıdan onun *ardılına* geçmek için fonetik bir yol bulunduğunda, *ordinal* sistem varlık kazanmış olur.

Kardinal sayılardan ordinal sayılara geçmeyi öğrenmemiz çok kolay olduğu için bu ikisi bize aynı gibi görünüyor. Bir derlemin çoğulluğunu, yani kardinal sayısını belirlemek için artık onu eşleştirebileceğimiz bir model derlem bulmakla uğraşmıyoruz, onun yerine onu *sayıyoruz*. Ve sayının bu iki yönünü tanımlayabilmemiz matematikteki ilerlememiz sayesinde mümkün oluyor. Çünkü her ne kadar bizi gerçekten ilgilendiren kardinal sayı olsa da, kardinal sayı bir aritmetik yaratamaz. Aritmetik işlemleri *her zaman için herhangi bir sayıdan ardılına geçebileceğimiz* yönünde örtülü bir varsayımaya dayanır, ki "ordinal" kavramının özü de budur.

Dolayısıyla tek başına eşleştirme bir sayma sanatı yaratamaz. Nesneleri sıralı ardışıklık içinde düzenleme becerimiz olmasaydı pek ilerleme sağlanamazdı. Tüm matematiğin –hayır, tüm titiz düşünce sistemlerinin– içine işlemiş olan iki ilke, müteakabiliyet ve ardıllık, sayı sistemimizin bizzat dokusunda mevcuttur.

Bu noktada kardinal sayı ile ordinal sayı arasındaki bu ince ayrımın sayı kavramının erken dönem tarihinde bir rol oynayıp oynamadığını sormak doğaldır. Yalnızca eşleştirmeye dayanan kardinal sayının hem eşleştirme hem de sıralama gerektiren ordinal sayıdan önce geldiğine kanaat getirmek çekici görünüyor. Ancak ilkel kültür ve filoloji üzerine en dikkatli araştırmalar bile böyle bir öncelik ortaya çıkaramıyor. Herhangi bir sayı tekniğinin bulunduğu her yerde, sayının her iki yönü de bulunuyor.

Ama, aynı zamanda sayma tekniği adına layık bir tekniğin bulunduğu her yerde, görünen o ki *parmakla sayma* ya ondan önce geliyor ya da onunla birlikte mevcut. Dolayısıyla parmaklar kardinal sayılardan ordinal sayılara fark edilmeden geçilmesini sağlayan bir araç işlevi görüyor. Bir kimse belli bir derlemin dört nesne içerdiğini belirtmek istediği zaman *aynı anda* dört parmağını kaldıracak veya indirecektir; aynı derlemi saymak istediğindeyse bu parmakları *ardışık* olarak kaldıracak veya indirecektir. İlk örnekte parmaklarını kardinal sayı modeli olarak, ikincideyse ordinal bir sistem olarak kullanır. Saymanın kökeninin buradan çıktığına dair kesin izlere neredeyse tüm ilkel dillerde rastlanır. Bu dillerin çoğunda "beş" sayısı "el" tarafından ifade edilir, "on" sayısıysa "iki el" veya bazen "insan" ile ifade edilir. Dahası, pek çok ilkel dilde dörde kadar sayı sözcükleri dört parmağa verilen adlarla aynıdır.

Daha medeni diller sözcüklerin orijinal anlamlarını ortadan kaldıran bir yıpranma sürecinden geçmiştir. Ancak burada da "parmak izlerine" rastlamak mümkündür. Örneğin, Sanskritçede "beş" anlamına gelen *pantça* sözcüğüyle Farsçada "el" anlamına gelen *pençe* sözcüğünü ve Rusçada "beş" anlamına gelen *piat* sözcüğüyle "açık el" anlamına gelen *piast* sözcüğünü karşılaştıralım.

İnsan hesaplamadaki başarısını *hünerli on parmağına* borçludur. Ona saymayı öğreten ve böylece sayının ufkunu tamamen açan bu parmaklardır. Bu alet olmadan insanın sayı tekniği ilkel sayı duyusunun ötesine geçemezdi. Parmaklarımız olmadan sayının, dolayısıyla da maddi ve entelektüel ilerlememizi borçlu olduğumuz sağı bilimlerin gelişiminin ümitsiz derecede kısıtlı kalacağı çıkarımında bulunmak hiç de mantıksız olmaz.

Ancak, çocuklarımız hâlâ parmaklarıyla saymayı öğrenmelerine ve biz de bazen vurguda bulunmak adına bu harekete başvurmamıza rağmen, parmakla saymak medeni halklar arasında kaybolmuş bir sanattır. Yazının, basitleştirilmiş numaralandırmanın ve evrensel eğitimin yükselişi bu sanatı demode ve gereksiz kılmıştır. Bu koşullar altında parmağın sayma tarihinde oynadığı rolün boyutlarını azımsamamız doğaldır. Daha birkaç yüzyıl önce parmakla sayma Batı Avrupa'da o kadar yaygın bir âdet ki, bu yöntemle dair tam kapsamlı talimatlar içermeyen bir aritmetik elkitabı eksik sayılırdı (bkz. sayfa 22).

O zamanlar, sayarken ve basit aritmetik işlemlerini yaparken parmaklarını kullanmak eğitilmiş insanların becerilerinden biriydi. Parmak hesabıyla sayıları toplama ve çarpmaya dair kurallar geliştirme konusunda çok büyük bir yaratıcılık söz konusuydu. Nitekim günümüzde Fransa'nın orta kesiminde (Auvergne) yaşayan çiftçiler hâlâ 5'in üzerindeki sayıları birbiriyle çarpma için ilginç bir yöntem kullanıyorlar. 9×8 çarpma işlemi için, sol ellerinin 4 parmağını (9 ile 5'in farkı 4 olduğu için) ve sağ elinin 3 parmağını ($8 - 5 = 3$) kapatıyorlar. Bunu yaptıklarında kapattıkları parmakların toplamı sonucun onlar hanesini verirken ($4 + 3 = 7$) açık parmakların çarpımı da birler hanesini veriyor ($1 \times 2 = 2$).

Aynı türden hilelere Moldavya, Sırbistan ve Suriye gibi birbirinden çok ayrı bölgelerde rastlanmıştır. Bunların çarpıcı benzerliği ve tüm bu ülkelerin bir zamanlar büyük Roma İmparatorluğu'nun parçası olmuş olmaları, bu yöntemlerin Roma kökenli olduğu kuşkusunu uyandırıyor. Ancak bu yöntemlerin benzer koşulların benzer sonuçlara yol açmasıyla birbirinden bağımsız olarak geliştiği de aynı derecede inandırıcılıkla savunulabilir.

Bugün bile çoğunluk parmaklara bel bağlarken, ilkel insan için bunun gündelik yaşamının basit hesaplamalarını yapmanın tek yöntemi olduğunu unutmamak gerekir.

Sayı dilimiz ne kadar eski? Sayı sözcüklerinin ortaya çıktığı dönemi kesin olarak belirtmek mümkün değil, ancak yazılı tarihten binlerce yıl daha eski olduğuna dair tartışılmaz kanıtlar var. Zaten değindiğimiz bir nokta: Avrupa dillerindeki sayı sözcüklerinin orijinal anlamlarının izleri, muhtemelen beş (*five*) sözcüğününki hariç kayıp-

tır. Sayı sözcüklerinin olağanüstü bir istikrara sahip olduğu düşünüldüğünde bu durum daha da ilgi çekici bir hal alıyor. Zaman her yönden kökten değişimlere yol açarken, sayı sözcüklerinin bundan neredeyse hiç etkilenmemiş olduğunu görüyoruz. Öyle ki, filologlar bu istikrardan birbirinden uzak gibi görünen dil gruplarının arasındaki bağlantıların izlerini takip etmek için yararlanıyorlar. (Okuru bölümün sonunda standart Hint-Avrupa dillerinin sayı sözcüklerinin karşılaştırıldığı tabloyu incelemeye davet ediyorum.)

O zaman bu istikrara rağmen orijinal anlamın izlerine nasıl olur da rastlanamaz? Mantıklı bir tahmin, her ne kadar sayı sözcükleri çıktıkları günden beri değişmeden kalmış olsa da, bunların ödünç alındığı somut nesnelerin adlarının köklü bir dönüşüm geçirmiş olması yönündedir.

Sayı dilinin yapısına gelince, filolojik araştırmalar neredeyse evrensel bir benzerlik ortaya çıkarıyor. İnsanın on parmağı her yerde kalıcı bir iz bırakmış durumda.

Gerçekten de on parmağımız sayı sistemimizin temelini "seçimi" üzerinde inkâr edilemez bir etkiye sahiptir. Tüm Hint-Avrupa dillerinin yanı sıra Moğol ve Sami dillerinde ve en ilkel dillerde sayısal taban ondur, yani ona kadar bağımsız sözcükler vardır, ondan sonraysa 100'e kadar türetme ilkesine başvurulur. Tüm bu dillerde 100 ve 1000 için, hatta bazı dillerde onun daha yüksek katları için bağımsız sözcükler vardır. Görünürde İngilizcedeki *eleven* (on bir) ve *twelve* (on iki) ile Almancadaki *elf* (on bir) ve *zwölf* (on iki) gibi istisnalar vardır, ama bunların da *ein-lif* ve *zwo-lif* sözcüklerine dek izleri sürülmüştür (*lif* eski Almancada "on" demektir).

Ondalık sistemin yanı sıra iki başka tabanın da epey yaygın olduğu doğrudur, ama bunların nitelikleri de sayma yöntemlerimizin *insanbiçimliliğini* teyit eder. Bu iki sistem 5'li taban ve 20'li tabandır.

Beşlik sistemde *beşe* kadar bağımsız sayı sözcükleri vardır ve türetme oradan sonra başlar (bkz. bölümün sonundaki tablo). Anlaşıldığı kadarıyla sayarken tek ellerini kullanan halklar arasında ortaya çıkmıştır. Ama insan neden kendisini tek elle kısıtlasın? Mantıklı bir açıklama, ilkel insanın nadiren silahsız dolaşması olabilir. Saymak istediğinde silahını kolunun altına alır, ki genellikle bu sol koldur ve sol eliyle sayarken sağ elini de sağlama amaçlı kullanır. Bu,

sol elin sağlaklarca saymada kullanılmasının neden neredeyse evrensel olduğunu açıklayabilir.

Pek çok dilde halen beşlik sistemin izlerini görmek mümkündür ve kimi ondalık sistemlerin de beşli evreden geçmiş oldukları akla yatkındır. Bazı filologlar Hint-Avrupa dillerinin bile beşli bir kökene sahip olduğunu iddia eder. Yunancada "beşer beşer sayma" anlamına gelen *pempazein* sözcüğüne ve Roma rakamlarının yadsınamayacak beşli özelliğine dikkat çekerler. Ne var ki bu yönde başka kanıtlar yoktur ve dil grubumuzun öncül bir *yirmili* evreden geçmiş olması çok daha muhtemeldir.

Yirmilik sistem muhtemelen el parmaklarının yanı sıra ayak parmaklarıyla da sayan ilkel kabileler arasında ortaya çıkmıştır. Bu tür bir sisteme en çarpıcı örneklerden biri Orta Amerika'daki Maya yerlilerince kullanılırdı – Eski Azteklerin sistemi de aynı genel niteliklere sahipti. Aztek günü 20 saate bölünmüştü; ordunun bir tümeninde 8000 (8000 = 20 x 20 x 20) asker bulunurdu.

Sadece yirmilik sistemin kullanıldığı durumlara çok ender rastlanmakla beraber, ondalık ve yirmilik sistemlerin kaynaşmış olduğu çok sayıda dil vardır. Örneğin İngilizcede *score* (20), *two-score* (2 x 20) ve *three-score* (3 x 20); Fransızcadaysa *vingt* (20) ve *quatre-vingt* (4 x 20) sözcükleri kullanılır. Eski Fransızlar bu biçimi daha da çok kullanırlardı: Paris'te aslen 300 kör gazi için inşa edilmiş olan bir hastanenin adı tuhaf bir şekilde *Quinze-Vingt*'dir (on beş-yirmi); 220 kişiden oluşan bir polis birliğineyse *Onze-Vingt* (on bir-yirmi) adı verilirdi.

Avustralya'nın ve Afrika'nın en ilkel kabileleri arasında 5, 10 veya 20 tabanlı olmayan bir sayı sistemi vardır. Bu *ikili* bir sistemdir. Bu vahşiler henüz parmakla saymayı keşfetmemişlerdir. Bir ve iki için bağımsız sayılara, altıya kadar da bileşik sayılara sahiptirler. Altıdan sonraki her şey "yığın" sözcüğüyle ifade edilir.

Yukarıda Avustralya kabileleriyle ilgili olarak alıntıladığımız Curr bunların çoğunun çift çift saydığını iddia ediyor. Curr'e göre yerlilerin bu alışkanlığı o denli güçlüdür ki, yedi iğnenin bulunduğu bir sıradan iki iğne alındığında bunu pek ender fark ederler, ancak bir iğne çıkarıldığında hemen fark ederler. *Çiftelik* duyusu sayı duyusundan daha güçlüdür.

İlginç olan şu ki, bu en ilkel taban daha yakın zamanlarda çok önemli biri, Leibniz tarafından da savunulmuştu. Tabloda da görebileceğimiz gibi, ikili sayma tüm diğer sayıların ifade edilmesinde de kullanılan iki sembole -0 ve 1'e- gerek duyar sadece:

Ondalık	1	2	3	4	5	6	7	8
İkilik	1	10	11	100	101	110	111	1000

Ondalık	9	10	11	12	13	14	15	16
İkilik	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000

Taban iki'nin avantajı az sembol kullanması ve işlemlerde çok büyük kolaylık sağlamasıdır. Unutmayalım ki her sistem toplama ve çarpma tablolarının hatırlanmasını gerektirir. İkilik sistemde bunlar $1+1=0$ ve $1 \times 1 = 1$ 'den ibarettir; oysa ondalık sistemde her tabloda 100 kalem vardır. Ancak bu avantaj sayıların çok yer kaplaması nedeniyle dezavantaja çevrilir: Örneğin ondalık sayı $4096=2^{12}$ 'nin ikilik sistemde karşılığı 1.000.000.000.000'dır.

İkilik sistemin gizemli zarafeti Leibniz'e şu ünlü sözünü söyletmiştir: *Omnibus ex nihil ducendis sufficit unum* (Hiçlikten her şeyi elde etmek için bir yeterlidir). Laplace şöyle diyor:

Leibniz ikili aritmetiğinde Yaradılışın imgesini görüyordu. ... Ona göre Bir Tanrı'yı ve Sıfır da boşluğu sembolize ediyordu; Yüce Varlık her şeyi boşluktan çekip çıkarıyordu, tıpkı sayı sisteminde bir ve sıfırın tüm sayıları ifade etmesi gibi. Bu düşünce Leibniz'in o kadar hoşuna gitmişti ki, bunu bilimlere çok meraklı olan Çin İmparatoru'nun din değiştirmesini sağlayacağı umuduyla Çin matematik heyeti başkanı Cizvit Grimaldi'ye iletti. Bu nu sırf çocukluktan gelme önyargıların en büyük adamların bile görüşünü nasıl bulandırabileceğini göstermek için anlatıyorum!

İnsan esnek parmaklar yerine sadece iki "hantal" kola sahip olsaydı kültür tarihinin nasıl gelişeceğini hayal etmeye çalışmak ilginçtir. Bu koşullar altında herhangi bir sayı sisteminin geliştirilebilmesi durumunda, bu muhtemelen ikilik bir sistem olurdu.

İnsanoğlunun ondalık sistemi kabul etmiş olması *fizyolojik bir rastlantıdır*. Her şeyde İlâhi Takdir'in elini görenlerin İlâhi Takdir'in

kötü bir matematikçi olduğunu kabul etmeleri gerekir. Zira fizyolojik avantajları dışında ondalık sistemin tercih edilmeyi gerektirecek pek bir özelliği yoktur. Neredeyse tüm diğer tabanlar da (muhtemelen *dokuz* hariç) aynı derecede, hatta belki daha iyi sonuçlar verirdi.

Gerçekten de, taban tercihi bir uzmanlar grubuna bırakılmış olsa muhtemelen *on iki* gibi en çok sayıda böleni olan bir sistemde ısrar eden pratik insanlarla, taban olarak *yedi* veya *on bir* gibi asal bir sayı isteyen matematikçiler arasında bir çekişmeye şahit olurduk. Aslına bakılırsa *on* sekizinci yüzyılın sonlarında büyük doğabilimci Buffon *on* ikilik sistemin (taban 12) evrensel olarak kabul edilmesini önermişti. 12'nin 4 böleni varken 10'un sadece iki böleni olduğuna dikkat çekmiş ve ondalık sistemimizin eksikleri asırlardır derinden hissedildiği için, evrensel taban *on* olmasına rağmen çoğu ölçünün 12 ikincil birime sahip olduğunu iddia etmişti.

Öte yandan büyük matematikçi Lagrange asal bir tabanın çok daha yararlı olduğunu iddia etmişti. Bir asal tabanda tüm sistematik kesirlerin basitleştirilemez olacağına ve dolayısıyla kendi başına benzersiz bir sayıyı ifade edeceğine dikkat çekmişti. Örneğin mevcut sayı sistemimizde ondalık kesir $0,36$ aslında $36/100$, $18/50$ ve $9/25$ gibi pek çok kesir yerine geçer. *On bir* gibi asal bir tabanın kabul edilmesi durumunda bu tür belirsizlikler azalırdı.

Ama bu tercihi bıraktığımız bilge grup ister asal isterse bileşik bir tabana karar versin, *on* sayısının üzerinde düşünülme ihtimalinin bile olmadığını bilirdik, zira ne asaldır ne de yeterli sayıda böleni vardır.

Hesaplama aletlerinin zihinsel aritmetiğin yerini büyük ölçüde aldığı bizim çağımızdaysa kimse bu önerileri ciddiye almazdı. Kazanılacak avantaj o kadar az, *on* ve katlarıyla sayma geleneği o denli güçlü ki böyle bir meydan okuma gülünç geliyor.

Kültür tarihi açısından da bir taban değişimi, pratikte mümkün olsa bile hiç de arzulanır bir şey olmazdı. İnsan onar onar saydığı sürece, *on* parmağı ona zihinsel yaşamının bu en önemli evresinin kökenini hatırlatmaya devam edecektir. Öyleyse bırakalım da ondalık sistem şu önermenin yaşayan bir anıtı olarak kalsın:

Her şeyin ölçüsü insandır.

**KİMİ HİNT-AVRUPA DİLLERİNDE SAYI SÖZCÜKLERİNİN
İNANILMAZ İSTİKRARINI GÖSTEREN SAYI SÖZCÜKLERİ**

	Sanskrit	Yunanca	Latince	Almanca	İngilizce	Fransızca	Rusça
1	eka	en	unus	eins	one	un	odyn
2	dva	duo	duo	zwei	two	deux	dva
3	tri	tri	tres	drei	three	trois	tri
4	catur	tetra	quatuor	vier	four	quatre	chetyre
5	panca	pente	quinque	fünf	five	cinq	piat
6	sas	hex	sex	sechs	six	six	shest
7	sapta	hepta	septem	sieben	seven	sept	sem
8	asta	octo	octo	acht	eight	huit	vosem
9	nava	ennea	novem	neun	nine	neuf	deviat
10	daca	deca	decem	zehn	ten	dix	desiat
100	cata	ecaton	centrum	hundert	hundred	cent	sto
1000	sehastre	xilia	mille	tausend	thousand	mille	tysiaca

**TİPİK BİR BEŞLİK SİSTEM:
YENİ HEBRİD ADALARI'NDAN
API DİLİ**

	Sözcük	Anlamı
1	tai	
2	lua	
3	tolu	
4	vari	
5	luna	el
6	otai	diğer bir
7	olua	diğer iki
8	otolu	diğer üç
9	ovair	diğer dört
10	lua luna	iki el

**TİPİK BİR YİRMİLİK SİSTEM:
ORTA AMERİKA'DAN
MAYA DİLİ**

1	hun	1
20	kal	20
20 ²	bak	400
20 ³	pic	8.000
20 ⁴	calab	160.000
20 ⁵	kinchel	3.200.000
20 ⁶	alce	64.000.000

TİPİK BİR İKİLİK SİSTEM: TORRES BOĞAZI'NDAN BİR BATI KABİLESİ

1 urapun	3 okosa-urapun	5 okosa-okosa-urapun
2 okosa	4 okosa-okosa	6 okosa-okosa-okosa

Boş Sütun

Bizlere tüm sayıları, her sembolün mutlak bir değerin yanı sıra bir de konum değeri kazandığı on sembolle ifade etmek gibi dâhice bir yöntemi veren Hindistan' dır; bu muhteşem ve önemli düşünce artık bize o denli basit geliyor ki gerçek değerini gözardı ediyoruz. Oysa bu basitlik ve tüm hesaplarda sağladığı o büyük kolaylık aritmetiğimizi yararlı icatlar listesinde ilk sıraya koyuyor. Ayrıca bunun antikçağların yetiştirdiği en büyük adamlardan ikisi olan Arşimet ile Apollonios'un dehasından kaçmış olduğunu anımsadığımızda bu başarının boyutlarını daha da iyi anlarız.

LAPLACE

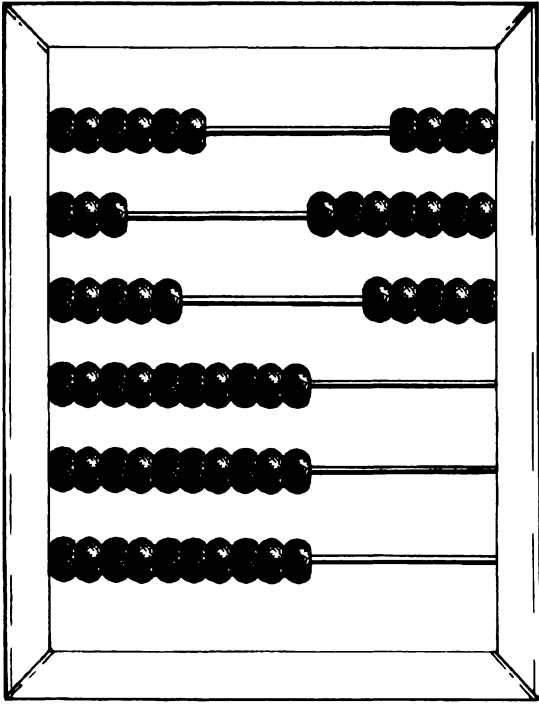
Bu satırları yazarken kulaklarımda eski bir tekerleme çınlıyor:

"Okuma, Yazma, Aritmetik,
Falakanın sesiyle öğrendik!"

Bu bölümde "okuma, yazma, aritmetik"ten en eskisi olmasına rağmen insana en zor geleninin öyküsünü anlatmayı amaçlıyorum.

Parlak başarılar, kahramanlıklar veya soylu fedakârlıkların öyküsü değil bu. Kör topal tökezlemelerin ve rasgele keşiflerin, karanlıkta el yordamıyla yol bulmaların ve ışığı reddetmelerin öyküsü. Cehalet yandaşlığının ve önyargıların, geleneğe bağlılık nedeniyle doğru muhakemenin gölgelenişinin ve aklın uzun süre geleneklerin kölesi oluşunun öyküsü. Kısacası, insani bir öykü.

Yazılı numaralandırma muhtemelen özel mülkiyet kadar eskidir. İnsanın hayvan sürülerinin ve diğer mallarının kaydını tutma arzu-



BİR SAYMA TAHTASININ TEMSİLİ RESMİ

sundan kaynaklandığından pek kuşku yoktur. Bir sopa veya ağaca atılmış çentikler, taş ve kayalardaki çizikler, kilde izler: Bunlar sayıları yazılı semboller aracılığıyla kaydetme yönündeki en erken çabaların aldığı biçimlerdir. Arkeologlar çok eski zamanlara dayanan bu tür kayıtlara Avrupa, Afrika ve Asya'da tarihöncesi insanın yaşadığı mağaralarda rastlamışlardır. Numaralandırma en azından yazılı dil kadar eskidir ve ondan daha eski olduğuna dair kanıtlar da mevcuttur. Hatta belki de sayıların kaydedilmesi seslerin kaydedilmesini akla getirmiş olabilir.

Yazılı sayıların sistematik şekilde kullanıldığı en eski kayıtlar eski Sümer ve Mısırlılardan kalma olanlardır. Tümünün izini aşağı yukarı aynı döneme, yaklaşık MÖ 3500'e kadar sürmek mümkün-

dür. Bunları incelediğimizde kullanılan ilkeler arasında çarpıcı bir benzerlikle karşılaşırız. Tabii ki, aralarındaki mesafeye rağmen bu halkların bir şekilde iletişim kurmuş olması mümkündür. Ancak, numaralandırmayı asgari direnç çizgisi doğrultusunda geliştirmiş olmaları, yani sayılarının doğal çetele tutma sürecinin bir uzantısı olması daha muhtemeldir (bkz. aşağıdaki şekil).

	1	2	3	4	5	9	10	12	23	60	100	1000	10000
SÜMER MÖ 3400	Y	YY	YYY	YY	YY	YYY	<	<Y	<Y	<<	Y-	<Y-	<<Y-
HİEROGLİFLER MÖ 3400							A	AAAA	AAAA	AAAA	C	⌚	⌚
YUNAN	α β γ δ ε	γ	γ	δ	ε	θ	ι	ι	κ λ	ξ	ρ	α	ι

ANTİK NUMARALANDIRMALAR



İNGİLİZ ÇETELE TAHTASININ TEMSİLİ RESMİ

Gerçekten de, ister eski Babillilerin çivi yazısı, ister Mısır papi-rüslerindeki hiyeroglifler, ister erken dönem Çin kayıtlarındaki tu-haf şekiller olsun, her yerde kesin olarak bir *kardinal sayı* ilkesi ge-çerlidir. Dokuza kadar tüm sayılar sırf bir çizgi derleminden ibaret-tir. Aynı ilke dokuzdan sonra da kullanılmış, onlar, yüzler gibi daha yüksek sınıf birimler ise özel sembollerle ifade edilmiştir.

Tam yaşı bilinmemekle birlikte muhtemelen çok eski olan İngiliz çetele tahtası da bu bariz kardinal sayı niteliğine sahiptir. Yukarıda çetelenin şematik bir resmi verilmiştir. Ufak çentiklerin her biri bir sterlini, daha büyükleriyse 10 sterlini, 100 sterlini vb. sembolize eder.

Modern numaralandırmaların yayılmasıyla gülünç derecede de-mode kalan İngiliz çetele sisteminin buna rağmen yüzyıllarca devam etmiş olması ilginçtir. Hatta bu sistem Parlamento'nun tarihindeki önemli bir olaydan da sorumludur. Olaydan birkaç yıl sonra Charles Dickens İdari Reform üzerine bir konuşmasında açık bir alaycılıkla şöyle der:

Çağlar önce Hazine'ye hesapların çentikli sopalar üzerinde tutulmasını içeren ilkel bir yöntem getirilmiş ve hesaplar Robinson Crusoe ıssız adası-nda takvimini nasıl tutuyorsa öyle tutulur hale gelmişti. Bir sürü muhasebeci-ler, defterdarlar ve görevliler doğup öldü. ... Resmi uygulama hâlâ sanki Anayasa'nın sütunlarıymışçasına o çentikli sopalara meyilliydi ve Hazine hesapları hâlâ *çetele* adı verilen birtakım karaağaç parçaları üzerinde tutul-maya devam ediyordu. III. George zamanında devrimci bir şahsiyet tarafın-dan, artık kalem, mürekkep ve kâğıdımız, karatahtalarımız ve kurşunkalem-lerimiz olduğuna göre bu geri kalmış geleneğe inatçı bağlılığın sürdürülme-sine gerek var mıdır yoksa bir değişiklik yapma vakti gelmiş midir diye sorulmuştu. Bu cesur ve orijinal düşüncenin dile bile getirilmesi karşısında ül-kedeki tüm bürokratlar kulaklarına kadar kıpkırmızı olmuştu; neticede bu sopalardan kurtulmak 1826'yı buldu. 1834'te kayda değer bir sopa birikimi olduğu fark edildi ve böylesi aşınmış, kurtlanmış, çürümüş tahtalarla ne ya-pılacağı sorusu gündeme geldi. Sopalar Westminster'da depolanıyordu; do-ğal olarak kafası çalışan herkes bunların o semtte yaşayan yoksul insanlarca yakılmak üzere alınmalarına izin verilmesinden daha kolay bir şey olama-yacağını görürdü. Ancak, bugüne kadar hiç işe yaramamışlardı ve resmi uy-gulama hiçbir zaman da yaramamalarını gerektiriyordu, dolayısıyla bunla-rın özel olarak ve gizlice yakılmaları emri geldi. Sonunda Lordlar Kamarası'nda bir ocakta yakıldılar. Bu küstah sopalarla ağızına kadar doldurulmuş olan ocak duvarı tutuştu; duvar Avam Kamarası'nı tutuştu; her iki bi-

na da küle döndü; yenilerini inşa etmek üzere mimarlar çağrıldı ve şimdi de bunun maliyetinin ikinci milyonundayız.

İlk kayıtların bu sadece kardinal sayılara dayalı niteliğinin tersine, bir de sayıların okunma sırasına göre alfabadeki harflerle ifade edildiği ordinal numaralandırma vardır.

Bu ilkeye dair en eski kanıt Fenike numaralandırma yöntemidir. Bu yöntem muhtemelen artan bir ticaretin karmaşıklığının getirdiği sığdırma ihtiyacından doğmuştu. Hem İbrani hem de Yunan numaralandırma yöntemlerinin Fenikeli kökene sahip olduklarına kuşku yoktur: Fenike sistemi toptan, alfabeye birlikte kabul edilmişti, hatta harflerin sesleri bile aynı kalmıştı.

Öte yandan, günümüze kadar gelmiş olan Roma numaralandırma yöntemi belirgin bir şekilde daha önceki asıl sayı yöntemlerine dönüş yapıldığını gösteriyor. Yine de on için X, yüz için C ve bin için M gibi belli birimleri temsil eden harf sembollerde Yunan etkisini görmek mümkün. Ama Kaldelilerin veya Mısırlıların daha resimsel sembolleri yerine harfler konulmuş olması ilkedden bir ayrılma teşkil etmez.

Antikçağlarda numaralandırmanın evrimi son ifadesini Yunanlıların ordinal sisteminde ve Roma'nın kardinal sisteminde buldu. Hangisi daha üstündü? Bir numaralandırma yönteminin tek amacı niceliklerin kısıtlı yere sığdırılması olsaydı bu soru anlamlı olabilirdi. Ama asıl mesele bu değildir. Şu çok daha önemli bir sorudur: Sistem aritmetik işlemlere ne kadar uygundur ve hesaplamalara ne denli kolaylık sağlar?

Bu açıdan iki yöntem arasında pek bir tercih yapmak mümkün değildi: Hiçbiri ortalama zekâyâ sahip biri tarafından kullanılabilecek bir aritmetik yaratamazdı. İşte bu yüzden tarihin başlangıcından bizim modern *konumsal* numaralandırmamıza kadar hesaplama sanatında bu kadar az ilerleme sağlanmıştı.

Bu sayılarla hesap yapma üzerine kurallar geliştirme çabaları yok değildi. Bu kuralların ne denli zor olduğunu, hesap yapanlara o günlerde ne kadar hayranlıkla bakıldığından anlayabiliriz. Bu sanatta yetenekli olan birisi neredeyse doğaüstü güçlere sahipmiş hissi uyandırır. Bu durum rahiplerin neden ezelden beri aritmetik üzerinde gay-

retle çalıştığını açıklayabilir. Erken dönem matematiğin dinsel ayinler ve gizemlerle bu bağlantısını daha sonra ele alacağız. Bu sadece bilimin din etrafında inşa edildiği eski Doğu için geçerli değildi, aydın Yunanlılar bile kendilerini hiçbir zaman bu sayı ve biçim mistisizminden tam olarak kurtaramadı.

Bu hayranlık bugün de belli ölçüde devam ediyor. Ortalama insan matematik becerisini sayılarla çabuk işlem yapmakla bir tutuyor. "Demek matematikçisin? O zaman gelir vergini hesaplamakta hiç zorluk çekmiyorsundur!" Hangi matematikçiye kariyerinde bu soru en azından bir kere yöneltilmemiştir? Bu sözcüklerde belki de bilinçdışı bir ironi var, çünkü çoğu profesyonel matematikçinin fazla gelirden yana pek derdi olduğu söylenemez!

On beşinci yüzyılda yaşamış bir Alman tüccarına dair bir öykü vardır. Öykünün doğruluğunu teyit ettiremedim, ama o zamanki durumu o kadar tipik şekilde gösteriyor ki anlatmadan edemeyeceğim. Anlaşılan tüccarın ileri düzeyde bir ticaret eğitimi almasını istediği bir oğlu varmış. Bir üniversitenin önde gelen profesörlerinden birine oğlunu nereye göndermesi gerektiğini sormuş. Cevap, genç adamın matematik eğitimi toplama ve çıkarma ile sınırlı kalacaksa bu eğitimi bir Alman üniversitesinde alabileceği, ama çarpma ve bölme sanatının İtalya'da çok gelişmiş olduğu ve profesöre göre de böyle ileri bir eğitimin alınabileceği tek ülkenin orası olduğu yönündeymiş.

Aslında o günlerde yapıldığı şekliyle çarpma ve bölmenin aynı ada sahip modern işlemlerle pek alakası yoktu. Örneğin çarpma, bir dizi *ikiye katlama* (yani bir sayının ikiyle çarpılması) işleminden ibaretti. Aynı şekilde, bölme de *yarılamaya* (yani bir sayıyı yarıya bölmeye) indirgenmişti. Ortaçağda hesaplamanın durumunu daha iyi anlayabilmek için bir örneğe bakalım. Modern yazışla:

Bugün

On üçüncü yüzyıl

46

$46 \times 2 = 92$

13

$46 \times 4 = 92 \times 2 = 184$

138

$46 \times 8 = 184 \times 2 = 368$

46

$368 + 184 + 46 = 598$

598

İnsanlığın neden inatla abaküs, hatta çetele gibi araçlara tutunduğunu anlamaya başlıyoruz. Şimdi bir çocuğun yapabileceği hesaplamalar için o zaman bir uzmanın yardımına ihtiyaç vardı ve bugün birkaç dakika alan bir işlem on ikinci yüzyılda günlerce süren hassas bir çalışma gerektiriyordu.

Bugün ortalama insanın sayılarla işlem yapmasındaki çok büyük kolaylık çoğu kez insan zekâsının gelişiminin delili olarak kabul edilmiştir. Aslında o zaman çekilen zorluklar kullanılan numaralandırmadan –basit, net kurallara tabi olmayan bir numaralandırmadan– kaynaklanıyordu. Modern konumsal numaralandırmanın keşfi bu engelleri ortadan kaldırdı ve aritmetiği en zayıf zihne bile erişilebilir kıldı.

Yaşamda, sanayi ve ticarete, toprak ve köle mülkiyetinde, vergilendirmede ve askeri örgütlenmede artan karmaşıklıklar – tüm bunlar az çok incelikli, ama parmakla sayma tekniğinin kesinlikle ötesinde olan hesaplamalar gerektiriyordu. Halihazırdaki katı, kullanışsız numaralandırma talebe yanıt vermekten âcizdi. İnsan modern numaralandırmadan önceki beş bin yıllık medeniyet yaşamında bu zorluklarla nasıl başa çıkıyordu?

Bunun cevabı, en başından beri, yeri ve dönemine göre biçimi değişmekle beraber tümü aynı ilkelere dayanan mekanik aletler kullanmak zorunda kalmasıydı. Bunun tipik bir örneğini Madagaskar'da bulunan ilginç bir asker sayma yönteminde görebiliriz. Askerler dar bir geçitten geçiriliyor ve her biri için bir çakıl taşı bırakılıyor. 10 çakıl sayıldığında, onlar basamağını temsil eden bir diğer yığına bir çakıl atılıyor ve bu şekilde sayım devam ediyor. İkinci yığında 10 çakıl biriktiğinde yüzleri temsil eden üçüncü bir yığına bir çakıl bırakılıyor ve tüm askerler bitene kadar buna devam ediliyor.

Buradan o ya da bu biçimde bir sayım tekniğine sahip olan neredeyse her ülkede bulunan *hesap tahtasına* veya *abaküse* yalnızca tek bir adım vardır. Genel biçimiyle abaküs birbirine paralel sütunlara ayrılmış ve her bir sütunun birler, onlar, yüzler gibi ayrı bir onlar sınıfını temsil ettiği düz bir tahtadan ibarettir. Tahtada her bir sınıftaki birimleri gösteren bir dizi sayaç bulunur. Örneğin, abaküste 574'ü göstermek için, son sütuna 4, sondan bir sonrakine 7 ve sondan üçüncü sütuna da 5 sayaç konur (bkz. şekil, s. 36).

Çoğu hesap tahtası arasındaki tek fark sütunların yapısı ve sayaçların türüdür. Yunan ve Roma türlerinde serbest sayaçlar varken, Çin'de günümüzde kullanılan Suan-Pan'daysa bambu çubuklarda kayan delikli toplar vardır. Rus Szczety de Çin türü gibi üzerinde sayaç olarak kayan düğmeler bulunan tel çubukların takılı olduğu tahta bir iskeletten ibarettir. Nihayet, eski Hindu *toz tahtasının* da ilke olarak, sayaçların yerini kuma yazılan silinebilir işaretlerin aldığı bir abaküs olması son derece muhtemeldir.

Abaküs sözcüğünün kökeni kesin değildir. Kimileri izini Sami dilindeki *abak* yani "toz" sözcüğüne kadar sürerken, bazıları Yunanca *abax* yani "levha" sözcüğünden geldiğine inanıyor. Söz konusu araç Yunanistan'da yaygın olarak kullanılırdı; Herodotos ve Polybios'ta ondan söz edildiğini görebiliriz. Polybios, *Historia* (Tarih) adlı eserinde Makedonyalı II. Philippos'un sarayından bahsederken şu düşündürücü sözleri sarf ediyor:

Hesaplayıcının keyfine göre bir an bir *talent* ederken bir an sonra bir *chalcus* eden abaküs sayaçları gibi, saray efradı da Krallarının başının bir işaretiyle bir an refahın zirvesindeyken bir an sonra acınası duruma gelir.

Hesap tahtası bugün hâlâ Rusya ve Çin'in kırsal kesimlerinde gündelik kullanımdadır ve modern hesaplama aygıtlarıyla serbest rekabet içindedir. Ama Batı Avrupa ve Amerika'da abaküs çok az insanın resimler dışında görmüş olduğu ilginç bir nesne olarak varlığını sürdürür. Pek az kimse daha birkaç yüzyıl önce kendi ülkelerinde abaküsün ne kadar yaygın olarak kullanıldığının ve hantal bir numaralandırmanın gücünün ötesinde olan zorluklarla baş ettiğinin farkındadır.

Konumsallık ilkesinin icadına kadar hesap tarihini inceleyen biri ilerlemelerin durgunluğuna hayret edecektir. Neredeyse beş bin yıllık bu uzun dönem, her biri arkasında bir edebiyat, sanat, felsefe ve din mirası bırakmış pek çok medeniyetin yükselişine ve düşüşüne şahit olmuştur. Peki ya insan tarafından icra edilen ilk sanat olan hesaplama alanında net olarak ne elde edilmiştir? Hesaplamayı neredeyse imkânsız kılacak denli kaba, esneklikten yoksun bir numaralandırma ve kapasitesi son derece kısıtlı olduğundan en basit hesaplamaların bile bir uzmanın yardımını gerektirdiği bir hesaplama ay-

gıtı. Dahası, insanlar bu aygıtları binlerce yıl boyunca, araçta kayda değer tek bir geliştirme yapmadan, sisteme önemli tek bir düşünce katmadan kullanmıştır.

Bu eleştiri acımasız gelebilir; ne de olsa uzak bir çağın başarılarını kendi hızlanmış ilerleme ve hummalı etkinlik dönemimizin standartlarıyla yargılamamak gerekir. Ancak, ortaçağda düşüncenin yavaş bir gelişim izlediği göz önünde tutulduğunda bile hesaplama tarihi tuhaf bir kısır duraklama tablosu sunuyor.

Bu gözle bakıldığında, çağımızın ilk yüzyıllarında *konumsallık ilkesi*'ni keşfeden o bilinmeyen Hindu'nun başarısı dünya çapında bir olay boyutu kazanıyor. Bu ilke yönetsel açıdan kökten bir farklılık getirdiği gibi, o olmadan aritmetikte hiçbir ilerlemenin mümkün olmadığını da artık biliyoruz. Ancak ilke o kadar basit ki bugün en zor öğrenen ilkokul öğrencisi bile onu anlamakta zorlanmıyor. Bizzat sayı dilimizin yapısı bize bunun ipuçlarını bir ölçüde veriyor. Gerçekten de, hesap tahtasındaki eylemleri rakamların diline çevirme yönündeki ilk çaba konumsallık ilkesinin keşfiyle sonuçlanmış olmalı diye düşünüyor insan.

Bizim için en anlaşılmasız olan, neden klasik dönem Yunan matematikçilerinin bu düşünceye varamamış olduğudur. Sebep Yunanlıların, uygulamalı bilimleri –çocuklarının eğitimi bile kölelere bırakacak denli– küçümsemeleri miydi? Ama öyle olsa, bize geometriyi veren ve bu bilimi böylesine ileri götüren bu ulusun en ilkel haliyle bile bir cebir yaratamamasını nasıl açıklarız? Modern matematiğin temel taşı olan cebirin de konumsal numaralandırma ile aynı dönemlerde yine Hindistan'dan çıkmış olması da aynı derecede ilginç değil midir?

Modern numaralandırmamızın anatomisine yakından bir bakış bu soruları aydınlatabilir. Konumsallık ilkesi sayıta, sadece temsil ettiği doğal dizi elemanına değil, aynı gruptaki diğer sembollere göre konumuna da bağlı olan bir değer vermekten ibarettir. Dolayısıyla 2 rakamı 342, 725, 269 gibi üç sayıda farklı anlamlara sahiptir: İlkinde iki, ikincisinde yirmi, üçüncüsündeyse iki yüze karşılık gelir. Aslında 342 sadece üç yüz artı dört on artı iki bir için bir kısaltmadır.

Nitekim hesap tahtasının tasarımı da tam olarak böyledir. Bura da 342 şöyle gösterilir:



Daha önce de değindiğim gibi, kabaca bugün elimizde olan sistemi elde etmek için bu tasarımı rakamların diline çevirmek yeterli gibi görünüyor.

Doğru! Ama tek bir zorluk var. Bir hesap tahtası işleminin kalıcı kaydını yapmak için $\equiv$ gibi bir simge yazıldığında, bu simge birçok sayıya karşılık gelebilir: 32, 302, 320, 3002, 3020 vb. Bu muğlaklığa yol açmamak için boşlukları göstermeye yönelik bir yöntemin de olması şarttır, yani bize gereken *boş sütunlar için bir semboldür*.

Dolayısıyla *boş* bir sınıf için bir sembol, *hiçbir şey*'i temsil eden bir sembol, modern *sıfır* icat edilene dek herhangi bir ilerleme mümkün değildi. Eski Yunanlıların pratik aklı, bırakın boşluğa bir sembol atamayı, onu bir sayı olarak dahi düşünemiyordu.

Bilinmeyen Hindu da sıfırı hiçliğin sembolü olarak görmemişti. Sıfır için kullanılan Hintçe kavram *sunya*, "boş" veya "dolu olmayan" anlamına geliyordu, ama "boşluk" veya "hiçlik" anlamı yoktu. Dolayısıyla, anlaşıldığı kadarıyla sıfırın keşfi bir hesap tahtası işleminin muğlak olmayan kalıcı bir kaydını yapma çabasından kaynaklanan bir rastlantıydı.

Hintlilerin *sunya*'sının bugünün sıfırına dönüşmesi kültür tarihinin en ilginç bölümlerinden birini oluşturur. Onuncu yüzyılda Araplar Hint numaralandırma yöntemini benimsediklerinde Hintçe *sunya*'yı, Arapçada boş anlamına gelen kendi *sifr*'lerini kullanarak çevirdiler. Hint-Arap numaralandırması İtalya'ya ilk girdiğinde *zephirum* olarak Latinceleştirildi. Bu on üçüncü yüzyılın başlarında gerçekleşti ve sonraki yüzyıl boyunca en sonunda İtalyanca *zero*'da son bulan bir dizi değişimden geçti.

Aşağı yukarı aynı dönemde Jordanus Nemorarius Arap sistemi-ni Almanya'ya tanıttı. Arapça sözcüğü kullanıp onu hafifçe *cifra* olarak değiştirdi. Avrupa'nın eğitilmiş çevrelerinde bir dönem *cifra* ve türevlerinin sıfır olarak kullanıldığının delili, on dokuzuncu yüzyılın Latince yazan matematikçilerinin sonuncusu büyük Gauss'un *cifra* sözcüğünü hâlâ bu anlamda kullanmasıdır. İngilizcede *cifra* sözcüğü *cipher* halini almış ve orijinal sıfır anlamını korumuştur.

Sıradan halkın bu yeni numaralandırmaya karşı tavrı, bu sözcüğün Avrupa'ya girişinden sonra *cifra* sözcüğünün gizli bir işaret anlamında kullanılmasından anlaşılabilir; ama bu anlam daha sonraki yüzyıllarda kaybolmuştur. *Decipher* (şifre çözme) fiili bu ilk dönemlerin bir kalıntısıdır.

Bu gelişmedeki bir sonraki evre hesap sanatının daha da çok yayılmasına şahit olmuştur. Bu yeni sistemde sıfırın oynadığı yaşamsal rolün kitlelerin gözünden kaçmamış olması dikkat çekicidir. Hatta kitleler bu yeni sistemi en çarpıcı niteliği olan *cifra* ile özdeşleştirmiştir, ki bu da bu sözcüğün *ziffer*, *chiffre* vb. farklı biçimlerinin bugün Avrupa'da sahip olduğu "rakam" anlamına gelişini açıklar.

Cifra'nın halk arasında "rakam", eğitimliler arasındaysa "sıfır" anlamına gelmesi hatırı sayılır karışıklıklara yol açmıştı. Araştırmacılar sözcüğün orijinal anlamını kurtarmaya uğraştılar ama nafile: Popüler anlamı artık kalıcılaşmıştı. Eğitimliler popüler kullanımı kabul etmek zorunda kaldı ve en sonunda İtalyanca *zero*'nun bugün kullanıldığı anlamda benimsenmesiyle konu çözüme ulaştı.

Algoritma sözcüğü de aynı derecede ilginçtir. Bugün kullanıldığı haliyle her biri kendisinden önce gelen adımın sonuçlarına uygulanan belli bir sayıda adımdan oluşan herhangi bir matematiksel süreci ifade eder. Ama onuncu ve on beşinci yüzyıllar arasında *algoritma* konumsal numaralandırma ile eşanlamlıydı. Artık sözcüğün dokuzuncu yüzyılda yaşamış olan Arap matematikçi El Harizmi'nin adının bozulmuş hali olduğunu biliyoruz – El Harizmi'nin kitabının Latince çevirisi, bu konuda Batı Avrupa'ya ulaşan ilk eserdi.

Konumsal numaralandırmanın gündelik yaşamımızın bir parçası olduğu günümüzde, bu yöntemin üstünlüğü, yazılımının kısalığı, hesaplara getirdiği kolaylık ve zarafet onun çabucak ve yaygın bir şekilde kabul edilmesini sağlamış olmalı diye düşünüyor insan. Gerçekteyse bu dönüşüm pek de ani olmadı; uzun yüzyıllar boyunca sürdü. Eski gelenekleri savunan *Abaküsçüler* ile reformu savunan *Algoristler* arasındaki mücadele on birinci yüzyıldan on beşinci yüzyıla dek devam etti; cehalet yandaşlarının ve diğer bazı kesimlerin olağan tepkilerinden nasibini aldı. Arap rakamlarının kullanımı, kimi yerlerde resmi belgelerde, kimi yerlerdeyse tümüyle yasaklandı. Fakat her zamanki gibi, *yasak* bunun kökünü kazımayı başaramadı

ve *kaçak* kullanımı yaymaktan başka işe yaramadı. On üçüncü yüzyıl İtalyası'nın arşivlerinden anlaşıldığı kadarıyla tüccarların Arap rakamlarını bir tür gizli şifre olarak kullanması bunu ziyadesiyle kanıtlıyor.

Ancak bir süre için tepki ilerlemeyi durdurmakta ve yeni sistemin gelişimini kösteklemekte başarılı oldu. Gerçekten de bu geçiş yüzyılları boyunca hesap sanatına temel bir değere veya kalıcı bir etkiye sahip pek az katkı yapıldı. Sadece rakamların dış görünüşleri bir dizi değişimden geçti; ancak bu da gelişme arzusundan değil, söz konusu dönemde bu konudaki kaynakların elle yazılmasından kaynaklanıyordu. Öyle ki matbaanın icadına kadar rakamlar istikrarlı bir biçim kazanamadı. Burada parantez içinde, matbaanın istikrar kazandırıcı etkisinin bugünkü rakamların neredeyse on beşinci yüzyıldakilerle aynı olmasını sağlayacak denli büyük olduğu eklenebilir.

Algoristlerin zaferi için kesin bir tarih söylemek zor. On altıncı yüzyılın başlarında yeni numaralandırmanın üstünlüğünün artık tartışmasız kabul edildiğini biliyoruz. O dönemden başlayarak gelişme engellenmeden devam etti, böylece sonraki yüz yıl boyunca hem tamsayılar hem de adi ve ondalık kesirlere dair her türlü işlemin kuralları bugün okullarımızda öğretilen kapsam ve biçime ulaştı.

Bir yüzyıl sonraysa Abaküsçüler ve savundukları şeyler tümünden unutulmuştu; öyle ki Avrupa'daki çeşitli halkların her biri konumsal numaralandırmayı kendi ulusal başarısı olarak görmeye başladı. Bu nedenle, örneğin on dokuzuncu yüzyılın başlarında Almanya'da Arap rakamlarına (yabancı kaynaklı olarak görülen Roma rakamlarından ayırmak için) Alman rakamları denirdi.

Abaküsün kendisine gelince, on sekizinci yüzyılda Batı Avrupa'da hiçbir izine rastlamak mümkün değil. On dokuzuncu yüzyılın başlarında tekrar ortaya çıkması çok ilginç bir şekilde olmuştu. Napolyon'un generallerinden olan matematikçi Poncelet Rusya seferinde tutsak düşmüş ve Rusya'da savaş tutsağı olarak uzun yıllar geçirmişti. Fransa'ya döndüğünde pek çok başka ilginç nesnenin yanı sıra bir Rus abaküsü getirmişti. Uzun yıllar boyunca Poncelet'nin getirdiği bu nesne "barbar" kökenli bir acibe olarak kabul edilmişti. Kültür tarihinde böyle ulusal amnezi örnekleri çok yaygındır. Bugün bile eğitilmiş insanlardan kaçısı daha dört yüz yıl önce parmak he-

sabının ortalama insanın tek sayma aracı olduğunu, hesap tahtası-
nınsa yalnızca zamanın profesyonel hesapçılarında bulunduğunu
biliyor?

Muhtemelen hesap tahtasındaki boş bir sütun için bir sembol olarak
düşünülen Hintlilerin *sunya*'sı, yokluğu modern bilim, sanayi ve ti-
careti imkânsız kılacak bir gelişmenin dönüm noktası olmaya yaz-
gılıydı. Ve bu büyük keşfin etkileri kesinlikle yalnızca aritmetikle
sınırlı değildi. Bu olay genel bir sayı kavramının yolunu hazırlaya-
rak matematiğin neredeyse her dalı için temel bir rol oynadı. Sıfırın
keşfi, her zaman için insan ırkının kültür tarihindeki en büyük başa-
rılarından biri olarak kalacaktır.

Büyük bir keşif! Evet. Ama erken dönemlerde yapılmış ve insan-
lığın yaşamını etkilemiş pek çok keşif gibi bu da uzun ve zorlu araş-
tırmaların ödülü olmaktan ziyade safi şansın bize armağanıdır.

Sayı Bilgisi

Güzel, kesin ve bilgimiz dahilinde olan şeyler, doğası gereği, belirsiz, anlaşılmaz ve çirkin olana üstündür.

NIKOMAKHOS

Matematikte aritmetik ve *Sayı Kuramı* kadar birbirine zıt iki dal daha yoktur.

Kurallarının muazzam genelliği ve basitliği aritmetiği en akılsızın bile anlamasını sağlar. Öyle ki, hesaplama yeteneği aslında sadece bir bellek meselesidir ve yıldırım hızıyla hesap yapan kişiler de yalnızca insan makinelerdir (tabii mekanik makinelerden daha hareketli olmak gibi bir avantajları vardır).

Öte yandan sayı kuramı tüm matematiksel disiplinlerin açık ara zorudur. Doğru, problemlerin ifadesi bir çocuğun bile anlayabileceği kadar basittir. Ama kullanılan yöntemler her bir problem için o kadar kendine mahsustur ki doğru yaklaşımı bulabilmek olağanüstü bir yaratıcılık ve çok büyük bir beceri gerektirir. Burada sezgiler serbest bırakılır. Bilinen niteliklerin pek çoğu bir tür *tümevarım* ile keşfedilmiştir. Yıllarca doğru kabul edilmiş ifadelerin daha sonra yanlış olduğu ispatlanmıştır ve bugüne bugün en büyük matematikçilere bile meydan okumuş, hâlâ çözüme kavuşturulamamış problemler vardır.

İster saf ister uygulamalı olsun, aritmetik tüm matematiğin temelidir. Tüm bilimlerin en kullanışlısıdır ve muhtemelen insan bilgisinin kitleler arasında daha yaygın olan bir türü yoktur.

Öte yandan sayı kuramı matematiğin en az uygulamaya sahip dadır. Bugüne dek teknik ilerleme üzerinde etkili olamadığı gibi saf

matematik dünyasında bile hep soyutlanmıştır, bilimin geneline sadece ince bir bağla bağlıdır.

Kültür tarihine faydacı bir yorum getirmeye meyilli olanlar aritmetiğin sayı kuramından önce ortaya çıktığı sonucuna varabilir, ama işin aslı bunun tersidir. Tamsayı kuramı matematiğin en eski dallarından biriymken modern aritmetik yalnızca dört yüz yıllıktır.

Bunun izlerini sözcüğün tarihçesinde de görebiliriz. Yunanca *arithmos* sözcüğü sayı anlamına geliyordu ve *arithmeticke* de on yedinci yüzyıla değin sayı kuramıydı. Bugün aritmetik dediğimize Yunanlılar *logistike* derlerdi. Ortaçağdaysa *algorizm* denildiğini daha önce görmüştük.

Ama her ne kadar anlatmak üzere olduğum olağanüstü öykünün diğer matematiksel kavramların gelişimiyle doğrudan pek fazla alakası yoksa bile, bu kavramların evrimini hiçbir şey daha iyi ortaya koyamaz.

Tamsayıların bireysel özellikleri ilk günlerden beridir insanların aklını meşgul ederken, daha bünyevi nitelikleri sorgulanmadan kabul edilmişti. Bu tuhaf fenomen nasıl açıklanabilir?

Montesquieu'nun ünlü özdeyişiyle, insanın yaşamı bir dizi boş ümit ve yersiz korkudan ibarettir. Bugün ifadesini muğlak ve soyut bir dinsel mistisizmde bulan bu ümit ve korkular o eski dönemlerde çok daha hissedilir ve somut biçimler alıyordu. Yıldızlar ve taşlar, hayvanlar ve otlar, sözcükler ve sayılar insan kaderinin belirtileri ve failleriydi.

Bilimin doğuşunun izi bu okült etkilere yönelik ilk düşüncelere dek sürülebilir. Astroloji astronomiden önce gelmiş, kimya simyadan doğmuştur; sayı kuramının selefiyse bugün açıklanamayan kehanetler ve batıl inançlarda varlığını sürdüren bir tür nümerolojidir.

Yedi gün boyunca yedi rahip yedi borazanla Eriha'yı kuşatarak yedinci günde kentin çevresini yedi kere dolandılar.

Nuh Tufanı'na yol açan yağmur kırk gün kırk gece sürdü. Musa Sina Dağı'nda Yehova ile kırk gün kırk gece görüştü. İsrailoğulları çölde kırk yıl dolaştılar.

Altı, yedi ve kırk İbranilerin kehanet dolu sayılarıydı; Hristiyan teolojisi de yediyi buradan miras aldı: Yedi ölümcül günah, Tanrı'nın

yedi ruhu, Meryem Ana'nın yedi sevinci, Magdelenli Meryem'in içinden kovulan yedi iblis.

Babilliler ve Persler altmış ve katlarını tercih ediyorlardı. Kserkses Hellespont'u (Çanakkale Boğazı) 300 kırbaçla cezalandırmıştı, Dareios kutsal atlarından biri ırmakta boğulduğu için Gyndes'in (Gediz) 360 hendeğe gömülmesini emretmişti.

Poincaré dinsel değerlerin enlem ve boylamlarla değiştiğini söylemişti. 3, 7, 10, 13, 40 ve 60'ın özellikle tercih edilmesine rağmen, farklı yerlerde ve farklı zamanlarda neredeyse tüm sayılara okült anlamlar atfedilmiş olduğunu görüyoruz. Örneğin Babilliler tanrılarından her birini 60'a kadar bir sayı ile ilişkilendirirdi ve o sayı tanrının göksel hiyerarşideki yerini belirtirdi.

Pisagorcuların ibadetleri de Babillilerinkine çarpıcı derecede benziyordu. Neredeyse bir sayıyı gözardı ederek kızdırma korkusundan, elliye kadarki çoğu sayıya ilahi önem atfediyorlardı.

En saçma ama en yaygın nümeroloji türlerinden biri *Gematria* (ebced) adı verilendi. İbrani ya da Yunan alfabesindeki her harfin hem bir ses hem de bir sayı olarak çifte anlamı vardı. Sözcüğün harfleri tarafından ifade edilen sayıların toplamı *sözcüğün sayısı* idi ve ebced toplamı aynı olan iki sözcük aynıydı. Ebced'in ilk günlerden itibaren Kitabı Mukaddes pasajlarının yorumunda kullanılmasının yanı sıra, Kitabı Mukaddes yazarlarının da buna başvurduklarına dair göstergeler mevcuttur. Örneğin kardeşi Eliezer'in yardımına koşan İbrahim 318 köleyi önüne katar. İbranice Eliezer sözcüğünün toplamının 318 olması sadece bir rastlantı olabilir mi?*

Yunan mitolojisinde de çok sayıda ebced örneğine rastlanır. Patroklos, Hektor ve Akhilleus adlı kahramanların isimlerinin toplamaları sırasıyla 87, 1225 ve 1276'dır. Akhilleus'un üstünlüğü buna bağlanmıştır. Thamagoras adındaki şahsi düşmanını utandırmak isteyen bir şair, bu adın bir tür salgın hastalık adı olan *loimos*'a eşit olduğunu ispatlamıştı.

* Yazar hikâyeyi aktarırken olayı biraz karıştırmış gibi görünüyor. Kitabı Mukaddes'e göre, yeğeni Lût'un tutsak düşmesi üzerine onu kurtarmaya giden İbrahim yanına 318 köle alır. Kölelerden biri, aynı zamanda İbrahim'in dostu olan Eliezer'dir. —y.n.

Hristiyan teolojisi de hem geçmişî yorumlarken hem de geleceği öngörmeye çalışırken ebcedden özellikle yararlanmıştı. Özel öneme sahip sayılardan biri Vahiyler kitabındaki Canavar'ın sayısı olan 666'dır. Katolikler Canavar'ı Deccal olarak yorumlamıştı. Luther döneminde yaşayan Katolik ilahiyatçılardan Peter Bungus nümeroloji üzerine neredeyse 700 sayfalık bir kitap yazmıştı. Bu eserin geniş bir bölümü Luther'in adına eşit olduğunu bulduğu mistik 666 sayısına ayrılmıştı; Bungus bunu Luther'in Deccal olduğunun kesin kanıtı olarak yorumluyordu. Buna cevaben Luther de 666'yı Papalık rejiminin hüküm süresinin öngörüsü olarak yorumladı ve büyük bir hızla sona yaklaşmasını sevinçle karşıladı.

Ebced günümüzde sofı İbranilerin ders programlarında yer alır. Bu araştırmacıların İncil'deki sözcüklerin böyle ikili yorumlanmasında ne kadar becerikli oldukları, imkânsız gibi görünen şu marifetten belli oluyor: Talmud âlimi belli bir sıra kuralına uymayan ve kimi zaman 500'den büyük olabilen sayılar söyler. O buna yaklaşık on dakika boyunca devam ederken yardımcısı da sayıları yazar. Âlim daha sonra aynı sayıları hatasız olarak ve aynı sırada sayar. Bu, sayıları ezberlemiş olduğu anlamına mı gelir? Hayır, tek yaptığı İbrani kutsal metinlerinden bir pasajı ebced diline çevirmektir.

Ama sayılara ibadete dönelim. Bu durum nihai ifadesini Pisagorcuların felsefesinde bulmuştur. Çift sayıları çözümlenebilir, dolayısıyla uçucu, kadınsı ve dünyevi; tek sayılarıysa çözümlenemez, erkeksi ve göksel doğaya sahip olarak kabul ediyorlardı.

Her sayı bir insan niteliğiyle özdeşleştirilirdi. *Bir* akla karşılık gelirdi ve bu nedenle değişmezdi; *iki* görüşe; *dört* ilk tam kare olduğundan adalete; *beş* ilk dişil ve eril sayıların birleşimi olduğundan evliliğe karşılık gelirdi. (Bir, tek sayı olarak değil, tüm sayıların *kaynağı* olarak kabul edilirdi.)

İlginç bir şekilde, Çin mitolojisinde de çarpıcı bir benzerliğe rastlanır. Burada tek sayılar beyazı, günü, ısıyı, güneşi, ateşi; öte yandan çift sayılar siyahı, geceyi, soğuğu, maddeyi, suyu, toprağı sembolize ederdi. Sayılar Lo-Çou adı verilen ve doğru kullanıldığında sihirli özelliklere sahip olan kutsal bir tahtada dizilirdi.

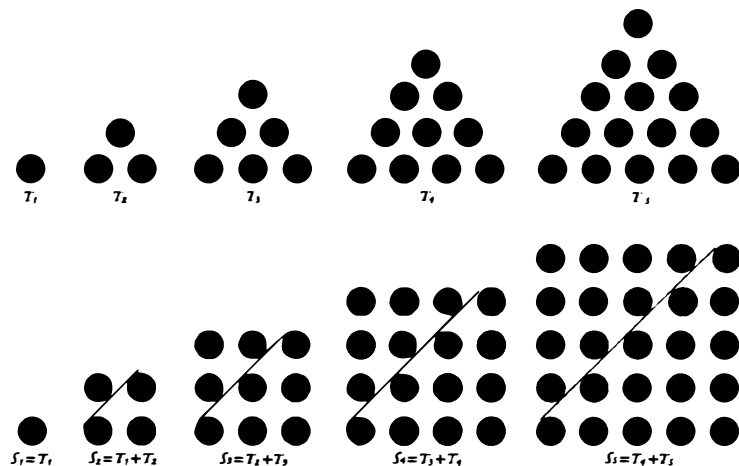
Kutsa bizi ilahi sayı, ey sen tanrıları ve insanı yaratan! Ey kutsal, kutsal *tetraktis*, durmadan akan yaradılışın kökü ve kaynağı! Zira ilahi sayı yüce,

saf birlikten başlayıp kutsal dörde kadar gelir; daha sonra da her şeyin ana-sı, her şeyi kucaklayan, her şeyi sınırlayan, ilk doğan, asla yolundan sapmayan, hiç yorulmayan kutsal onu, her şeyin anahtarını elinde tutanı doğurur.

Pisagorcuların *tetraktis*'e, ateş, su, hava ve topraktan oluşan dört elementi temsil ettiğine inanılan kutsal dürtlüye duası böyleydi. Kutsal 10; 1, 2, 3, 4'ün toplamıyla ilk dört sayıdan elde edilirdi. Pisagor'un yeni bir müride dörde kadar saymayı emrettiği ilginç bir öykü vardır:

Bak gördün mü, dört sandığın aslında ondur, bütün bir üçgen ve bizim parolamız.

Burada bütün bir üçgene yapılan gönderme önemlidir: Anlaşılan bu erken Yunan döneminde sayılar noktalarla yazılıyordu. Aşağıdaki şekilde üçgen-sayılar 1, 3, 6, 10, 15'in yanı sıra kare-sayılar 1, 4, 9, 16, 25 de gösterilmiştir. Bu, sayı kuramının asıl başlangıcı olduğundan, geometrik sezgilere böylesine bel bağlanması çok ilgi çekicidir. Pisagorcular biliyordu ki, herhangi bir dereceden bir kare-sayı, aynı dereceden bir üçgen-sayıyla öncülünün toplamına eşittir.



Şekilde de görüldüğü gibi bunu noktaları ayırıp sayarak ispatlıyorlardı. Bu yöntemi günümüzde zeki bir lise öğrencisinin kullanacağı yöntemle karşılaştırmak ilginç olurdu. n dereceden bir üçgen sayı doğal olarak $1 + 2 + 3 + \dots + n$ şeklinde bir aritmetik dizinin toplamıdır ve $1/2n(n + 1)$ 'e eşittir. Aynı nedenle öncülü de $1/2(n - 1)n$ 'dir. Daha sonra basit cebir işlemleriyle birbirine eklenen iki sayının n^2 , yani dereceyi ifade eden n 'nin karesini verdiğini görebiliriz (bkz. s. 52'deki şekil).

Günümüzde bu geometrik kökenden tek geriye kalanlar *kare* ve *küp* sözcükleridir. Üçgen ve daha genel anlamda çokgen-sayılar bilimsel açıdan pek ilgi çekici değildir. Ancak Nikomakhos'un zamanında (MS 100) bile bunlar aritmetik araştırmaların ana konusuydu.

Pisagorcuların Platon ve Aristoteles dahil tüm Yunan düşünürlerinde bu denli derin izlenimler bırakan mistik felsefelerinin kaynağı hâlâ tartışmalıdır. Sayılara yönelik bu şaşaalı tapınma, rasyonalizmle donanmış modern zihniyete *sistem haline getirilmiş batıl inanç* gibi görünebilir. Tarihsel açıdan bakarsak olaya daha sıcak yaklaşabiliriz. Dinsel mistisizminden arındırıldığında, Pisagorcu felsefe insanın evrenin gerçek doğasını sadece sayı ve biçimler aracılığıyla kavrayabileceği yönündeki temel düşünceyi içeriyordu. Pisagor'un en yetenekli müridi Philolaos ve bir yeni-Pisagorcu olarak nitelendirilebilecek Nikomakhos tarafından bu tür düşünceler dile getirilmişti.

Bilinebilecek her şeyin sayısı vardır; zira sayı olmadan herhangi bir şeyin kavranabilmesi veya bilinebilmesi imkânsızdır. (*Philolaos*)

Doğa tarafından ustaca hazırlanmış bir plana göre düzenlenmiş olan her şey, hem bireysel hem bir bütün olarak, Önbilgi ve Akıl tarafından seçilmiş ve düzene sokulmuş gibi görünür. Bunlar her şeyi Sayı'ya göre yaratmıştır; o Sayı ki sadece zihin tarafından kavranabilir, dolayısıyla tamamen madde dışıdır; ama gerçektir, hatta asıl gerçek ve ebedi olandır. (*Nikomakhos*)

"Arkadaş nedir?" diye sorulan Pisagor şöyle cevaplamış: "Diğer ben olan, tıpkı 220 ile 284 gibi." Modern sözcüklerle bu şu demekti: 284'ün bölenleri 1, 2, 4, 71 ve 142'dir ve bunların toplamı 220 yapar; öte yandan 220'nin bölenleri 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 ve 110'dur; bunların toplamı da 284 yapar. Pisagorcular bu tür sayılara *dost* sayılar derlerdi.

Böyle sayı çiftlerinin keşfi Yunanlılara göre hem çok ilgi çekici hem de gayet zor bir problem. Böylesi çiftlerden sonsuz sayıda olup olmadığı sorusu bugüne kadar cevaplanamamıştır, ancak yaklaşık yüz kadarından haberimiz var.

Hindular bu dostane sayıları Pisagor'dan bile önce biliyordu. Ayrıca Kitabı Mukaddes'teki belli pasajlar da İbranilerin bu tür sayılarla iyi özellikler atfettiğini gösteriyor.

Adının ebced sayısı 284 olan bir prense dair doğrulanmamış bir ortaçağ öyküsü vardır. Bu prens adı 220 sayısını temsil eden bir eş arıyormuş, zira bu sayede Cennet'in mutlu bir evliliği garantileyeceğine inanıyormuş.

Bir de *mükemmel* sayılar vardı. İlk önce 14 gibi bir sayıyı ele alalım; 1, 2 ve 7 olan bölenlerini toplarsak 10 eder. Dolayısıyla 14 sayısını kendi bölenlerinin toplamından büyüktür ve bu nedenle *aşırı* olarak adlandırılır. Öte yandan, 12'nin bölenlerinin toplamı 16, yani 12'den büyüktür ve bu nedenle 12'nin *eksik* olduğu söylenir. Ama *mükemmel* bir sayıda ne aşırılık ne de eksiklik vardır; sayı kendi bölenlerinin toplamına eşittir.

Mükemmel sayıların en küçükleri olan 6 ile 28, hem Hindular hem de İbranilerce bilinirdi. Bazı Kitabı Mukaddes yorumcuları 6 ile 28'i Yüce Mimar'ın temel sayıları olarak kabul ederler. Yaradılışın 6 gününe ve ayın 28 günlük döngüsüne dikkat çekerler. Diğerleriyle ikinci yaradılışın kusurlu olmasını Nuh'un gemisiyle altı yerine sekiz canın kurtulmuş olmasıyla açıklarlar.

Aziz Augustinus şöyle demiş:

Altı kendi içinde mükemmel bir sayıdır, ama Tanrı her şeyi altı günde yarattığı için değil; aslında tam tersi geçerlidir: Tanrı her şeyi altı günde bu sayı mükemmel olduğu için yaratmıştır, yani altı günlük bu süreç olmasaydı da altı sayısı mükemmel olurdu.

Daha sonraki iki mükemmel sayıysa Nikomakhos'un keşfi gibi görünüyor. *Arithmetike* adlı eserinden:

Ama öyledir ki, nasıl güzel ve mükemmel olanlar nadir ve az sayıdayken çirkin ve kötüler bol sayıdaysa, aynı şekilde aşırı ve eksik sayılar da çok ve düzensizdir, keşifleri de sistematik değildir. Ama mükemmel olanlar hem kolayca sayılabilir hem de uygun bir sırada gelirler: Çünkü birlerde sadece

bir tane, 6; onlarda sadece bir tane, 28; yüzlerin ortasında bir tane, 496; binlerin sınırında, on bine ramak kalmışken de bir tanedir, 8128. Ortak özellikleri 6 veya 8 ile bitmeleridir ve hepsi çift sayıdır.

Nikomakhos her onlar sınıfında bir tane mükemmel sayı olduğunu söylemek istediye yanılmış demektir, zira bir sonraki mükemmel sayı 33.550.336'dır. Ama tahmini diğer tüm açılardan doğrudur. Her ne kadar tek sayı olan bir mükemmel sayının imkânsızlığı hiçbir zaman ispatlanamadıysa da bilinen bir örnek yoktur. Dahası çift mükemmel sayıların 6 ya da 8 ile bitmesi gerektiği de doğrudur.

Yunanlıların mükemmel sayılara verdikleri önem Öklit'in *Öğeler* (Elementler) kitabının bir bölümünü bu konuya ayırmış olmasından anlaşılabilir. Burada $2^{p-1} (2^p - 1)$ biçimindeki sayının, $2^p - 1$ 'in asal olması durumunda mükemmel olacağını ispatlamıştır. Yakın zamana kadar bu koşulları kesin olarak yerine getiren sadece on iki sayı biliniyordu. Bu mükemmel sayılar için $\sum p$ 'nin değerleri şunlardır:

$$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 61, 107, 127, 257$$

Yeni hızlı hesap makinelerinin gelişmesiyle bu listeye beş tane daha eklenmiştir.

Asal sayılar ilk dönemlerden beri çok büyük ilgi kaynağı olmuştur. Başvurulan çeşitli yöntemlerden en ilginç *Kalbur* adı verilen ve Arşimet'in çağdaşı Eratosthenes'e atfedilen bir yöntemdir. İlk 100 sayı için Eratosthenes'in kalburu bir sonraki sayfada gösterilmiştir. Yöntem bütün tamsayılar doğal sıralarında yazıldıktan sonra, önce 2'nin, sonra kalanlardan 3'ün, daha sonra 5'in vb. katlarının silinmesinden ibarettir. Örneğin binden küçük tüm asal sayıları belirlemek istiyorsak 31'in katlarının ötesine geçmemiz gerekmez, çünkü $31^2 = 961$ bir asal sayının 1.000'den küçük karelerinin en büyüğüdür. Biraz daha değiştirilmiş olarak bu yöntem bugün de asal sayı tablolarının yaratılmasında kullanılır. Modern tablolar 10.000.000'a kadar çıkar.

Bu ayıklama yöntemi ne kadar dâhiyane olsa da tümüyle tümevarımsaldır, dolayısıyla asal sayıların genel niteliklerini ispatlayamaz. Mesela, doğal olarak akla gelen ilk soru asal sayılardan sonsuz sayıda olup olmadığıdır. Başka bir deyişle, asalların sayısı sınırsız

Eratosthenes'in Kalburu 100'den Küçük Asalları Verir Halde									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

mıdır yoksa en büyük asal sayı diye bir şey var mıdır? Öklit'in bu temel probleme bulduğu çözüm matematik tarihine bir mükemmellik örneği olarak yazılmıştır.

Bu ispatta Öklit bugün *faktöriyel sayılar* adını verdiğimiz sayıları ilk defa kullanıyor. Baştan ardışık n adet tamsayının çarpımından meydana gelen bu sayılar matematiksel sorularda çok önemli rol oynar. Bu sayılar $n!$ simgesiyle ifade edilir. Dolayısıyla faktöriyel yedi, $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ 'dir. 11'e kadarki faktöriyellerin tablosu s. 60'ta verilmiştir.

En büyük asal sayı diye bir şey olmadığını ispatlamak için Öklit n 'nin herhangi bir asal sayı olması durumunda ya $(n! + 1)$ 'in de asal olduğunu ya da n ile $(n! + 1)$ arasında başka asal sayılar olduğunu gösteriyor. Her iki vaka da mümkündür: Örneğin n sayısı 3 olduğunda buna karşılık gelen Öklit sayısı bir asal sayı olan 7'dir; ama n

sayısı 7 olduğunda, $n! = 5040$ ve buna karşılık Öklit sayısı da bileşik bir sayı ve tam kare (71×71) olan 5041'dir. Dolayısıyla 7 ile ($7! + 1$) arasında asal sayı 71 vardır.

Bunu genel anlamda da ispatlamak için Öklit esas olarak şu şekilde devam ediyor: Ardışık iki sayının ortak böleni olamaz; bu durum $n!$ ve $(n! + 1)$ için de geçerlidir; burada $(n! + 1)$ 'in herhangi bir asal böleni varsa bunlar $n!$ 'den ve $n!$ 'den önce gelen herhangi bir sayıdan farklı olmalıdır. Buna göre $(n! + 1)$ Öklit sayısı ya $n!$ 'den büyük bir asal bölene sahiptir ya da kendisi asaldır: Her iki durumda da $n!$ 'den büyük asal sayılar vardır.

Öklit böylece en büyük asal sayı diye bir şey olamayacağı sonucuna varır ki bu da asal sayıların sonsuz tane olduğunu söylemenin bir başka yoludur.

Bir sonraki soru asal sayıların dağılımıyla ilgidir. Asal sayıların yoğunluğundan, yani mesela, herhangi bin sayı içindeki asalların miktarından söz edebiliriz. Tabii ki belli bir sayıdan küçük olan asal sayıları saymakla aynı şeydir bu. Pek çok modern matematikçi bu soruyu çözmek için gerçekten dâhice fikirler üretmiştir, ama tamamen tatmin edici bir çözüme henüz ulaşılamamıştır. Yine de sayılar ilerledikçe asal sayıların görülme sıklığının kayda değer derecede azalmadığını biliyoruz.

1845'te Fransız matematikçi Bertrand bir sayıyla o sayının iki katı arasında en azından bir asal sayının olduğunu iddia etti. Bu iddiasını asal sayılar tablosu üzerinde yapılmış ampirik bir çalışmaya dayandırdı. Elli yıl boyunca bu iddia *Bertrand Postülası* olarak bilindi. En sonunda çok daha dar aralıklar içinde bile asal sayıların olduğunu gösteren büyük Rus matematikçisi Çebişev tarafından ispatlandı. En son olarak da 1911'de İtalyan matematikçi Bonolis, x ile $3/2x$ arasındaki asal sayıların sayısı için yaklaşık bir formül elde ederek bu problemde ciddi ilerleme sağladı. Bu formüle göre 100.000.000 ile 150.000.000 arasında en azından bir milyon tane asal sayı vardır.

Öte yandan ikiz asallar adı verilen (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), (41,43) gibi çiftlerin sayılar arttıkça daha ender hale geldiği gösterilmiştir. Bu hayranlık verici teorem de Hollandalı matematikçi Bruns tarafından 1919'da ispatlanmıştır.

Belli bir sayının asal mı yoksa bileşik mi olduğunu nasıl anlarız? 5, 0 veya çift bir rakamla biterse bileşik olduğunu biliyoruz. Ama diyelim ki 3, 7 veya 9 ile bitti. Bu durumda da 3 veya 9 ile bölünebilirliği için basit bir test var: Eğer tüm rakamların toplamı 3'ün veya 9'un katıysa o zaman sayının kendisi de 3 veya 9'un katıdır. Bu *dokuz kuralı* çok eskidir.

Diğer bölenler için koşullar çok daha kapsamlıdır. 1654'te Pascal'ın ve yüz yıl sonra da Lagrange'ın çok genel teoremler getirdikleri doğrudur, ama bunlar pratik değerden çok matematiksel incelik açısından dikkat çekiciydi. *History of the Theory of Numbers* (Sayı Kuramı Tarihi) adlı eserinde Profesör Dickson şu tipik yorumu yapıyor:

15 veya 20 basamaklı belli bir sayının asal olup olmadığını, elimizde sınırsız zaman olsa ve halihazırda bilinen tüm yöntemlerden yararlansak bile başaramayız.

Bu sebeple yüzyıllar boyunca tüm asal sayılara uyacak genel bir matematiksel formül ya da en azından asal sayı üretmek için belli bir yöntem bulma çabalarına girişilmiş olması şaşırtıcı değildir. 1640'ta büyük Fransız matematikçi Fermat sadece asal sayıları gösteren bir formül bulduğunu ilan etti. Bu şekilde elde edilen sayılara günümüzde Fermat sayıları denir.

İlk dört Fermat sayısı:

$$2^2 + 1 = 5; 2^{2^2} + 1 = 17; 2^{2^3} + 1 = 257; 2^{2^4} + 1 = 65537$$

Fermat bu ilk sayıların asallığını kontrol etti ve bir süre için teoreminin genelliğine ikna oldu. Ancak daha sonra kuşkulananmaya başladı. Nitekim yaklaşık yüz yıl sonra, Euler beşinci Fermat sayısının bileşik olduğunu ve çarpanlarından birinin 641 olduğunu gösterdi. O zamandan beridir altıncı, yedinci ve daha yüksek bir düzine Fermat sayısı için de aynı durum ispatlanmıştır.

Bu durum *eksik* tümevarımın tehlikesini gösterir. Kimi ikinci dereceden ifadeler daha da çarpıcı örnekler meydana getirir:

$$f(n) = n^2 - n + 41$$

Sayıları yerlerine yerleştirdiğimizde: $f(1) = 41$, $f(2) = 43$, $f(3) = 47$, $f(4) = 53$ vb. çıkar. Bunların tümünün de asal olduğu $n = 40$ 'a kadar doğrulanabilir. Ama $n = 41$ için bariz şekilde bileşik bir sayı elde ederiz. $f(41) = 41 \times 41$.

Asal sayı türetmek için genel bir formül elde edilememesi asallığın sınanması için dolaylı kıstasların ileri sürülmesine yol açtı. Fermat şu teoremle böyle bir kıstas bulduğunu düşünmüştü: *n herhangi bir tamsayı olmak üzere, p asalsa $n^p - n$ binomu p'nin katıdır.* Bunu göstermek için $p = 5$ 'i ele alalım:

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 + 1)(n^2 - 1)$$

Buradan da görülebileceği gibi n ne olursa olsun, üç çarpanından biri 5'in katı olmak zorundadır.

Fermat teoreminin doğruluğu Leibniz, Euler ve diğerlerince gösterilmiştir. Buradaki sorun, bu koşulun doğru olmakla birlikte bir *kıstas* olmamasıdır, yani *gerekli*dir ama *yeterli değildir*. Örneğin, 341 asal değildir, ancak $2^{341} - 2$ 'nin çarpanları arasında 341 vardır.

Bir kıstas, yani hem gerekli hem de yeterli bir koşul *Wilson Teoremi* adı verilen teoremce sağlanır. Aslında teoreme, bu koşulun gerekli olduğunu ilk ispatlayan Leibniz'in adını vermek daha adil olurdu. Yüz yıl sonra Lagrange bu koşulun aynı zamanda yeterli de olduğunu gösterdi. Aşağıda faktöriyelleri ve ardılları olan $n! + 1$ Öklit sayılarını gösteren tabloyu ele alalım. Dikkat edersek, $n + 1$, hepsi asal sayı olan 2, 3, 5, 7, 11'e eşit olduğunda, $(n + 1)!$ 'in $(n! + 1)$ 'in bir böleni olduğunu görüyoruz; oysa 4, 6, 8, 9, 10 gibi bileşik değerler için $n! + 1$ 'in $n + 1$ 'e bölümü bir kalan bırakacaktır. Bu gayet genel bir özelliktir: *p'nin asal olması için gerekli ve yeterli koşul $(p - 1)!$ 'in ardılının çarpanları arasında p'nin bulunmasıdır.*

Bu hayranlık verici önerme kuramsal açıdan çok ilgi çekicidir. Ancak, $(p - 1)! + 1$ 'in bölenlerinden birinin p olup olmadığının doğrulanması, p büyük bir sayı olduğunda p 'nin asal olup olmadığının test edilmesi kadar zordur.

O zamandan beridir pek çok dolaylı önermelerde bulunulmuştur. En ilginçlerinden biri Euler'in çağdaşı olan *Goldbach'ın postülasıdır*. Bu postülaya göre *her çift sayı iki asal sayının toplamıdır*. Bu postüla 10.000'e kadar bütün sayılar için ve bunun ötesinde de kimi

WILSON KISTASI				
Wilson endeksi $(n-1)!+1$ 'in n ile bölüm işleminin kalanıdır.				
Wilson endeksi 0 olduğunda sayı asaldır.				
n	Niteliği	Faktöriyel $(n-1)!$	$(n-1)!+1$ Öklit Sayıları	Wilson Endeksi
2	Asal	$1! = 1$	2	0
3	Asal	$2! = 2$	3	0
4	Bileşik	$3! = 6$	7	3
5	Asal	$4! = 24$	25	0
6	Bileşik	$5! = 120$	121	1
7	Asal	$6! = 720$	721	0
8	Bileşik	$7! = 5.040$	5.041	1
9	Bileşik	$8! = 40.320$	40.321	1
10	Bileşik	$9! = 362.880$	362.881	1
11	Asal	$10! = 3.628.800$	3.628.801	0
12	Bileşik	$11! = 39.916.800$	39.916.801	1

sayılar için ispatlanmıştır. Ama bu önemli iddianın ispatı matematikçilerin dehasını meşgul etmeye devam etmektedir.

Bir küpü iki küpe, dördüncü üssü iki dördüncü üsse ya da genel olarak kareden büyük herhangi bir üssü aynı dereceden iki üsse ayırmak imkânsızdır. Buna dair gerçekten harika bir ispat keşfettim, ancak ne yazık ki bu kenar bunun için çok dar.

Bu ünlü kenar notu yakında üç yüz yıllık olacak ve o zamandan beri pek çok matematikçi keşke Fermat bunu yazdığında daha geniş bir kenarı olsaydı diye düşünmüştür.

Bu sorunun geçmişi, 3:4:5 oranında kenarlara sahip dik üçgenin varlığından haberdar olan Mısırlılara kadar uzanır. Hatta bu üçgeni bir çeşit marangoz gönyesi olarak kullanırlardı. Anladığım kadarıyla Çinliler buna benzer bir yöntemi bugün bile kullanıyor.

Kenarları tamsayı olarak ifade edebilecek tek dik üçgen bu mu? Hayır, böyle üçlemelerden sonsuz sayıda vardır ve Pisagorcular çok sayıda örneğini bilirdi. MS üçüncü yüzyılda yaşamış İskenderiyeli Diophantos *Arithmetike* adlı eserinde bu sayıları belirlemek için bir kural vermiştir. Modern yazılışta bu problem,

$$x^2 + y^2 = z^2$$

denkleminin tamsayılarla çözümüne eşittir. Aşağıdaki tabloda bu Pisagor sayılarından bazıları verilmiştir ve tablonun başındaki formül bizlerin de hepsi Pisagor sayıları olan sayılar türetmemizi sağlar. Bu formülden $x^2 + y^2 = z^2$ denkleminin çözüm olarak tamsayıları kabul ettiği ve aynı zamanda bu tür çözümlerden sonsuz tane var olduğu görülebilir.

Aynı şeyin daha yüksek dereceden denklemler için de doğru olup olmadığı sorulması doğaldır.

Diophantos'un *Arithmetike*'sinin yeni bir basımı 1621 dolaylarında Fransa'da yayımlandı ve bir kopyası da Fermat'ın eline geçti. Fermat bu kitabın sayfalarından birine o zamandan beri matematik dünyasının aklını kurcalayan kenar notunu yazdı. Modern söylemde Fermat'ın ifadesi şöyle formüle edilebilir:

$$x^n + y^n = z^n$$

x , y ve z 'nin tamsayı olduğu bu denklemin n 'nin ikiden büyük bir tamsayı olması durumunda imkânsız olduğunu göster.

Bu problemde mevcut durum nedir? Euler n 'nin 3 veya 4 olması durumundaki imkânsızlığı göstermiştir; Dirichlet bunu $n = 5$ için is-

PİSAGOR SAYILARI							
2uv'nin tam kare olduğu herhangi u ve v değerleri için bir Pisagor üçgeni elde ederiz.					$\begin{cases} x = u + \sqrt{2uv} \\ y = v + \sqrt{2uv} \\ z = u + v + \sqrt{2uv} \end{cases}$		
2uv	uv	$\sqrt{2uv}$	u	v	x	y	z
4	2	2	1	2	3	4	5
16	8	4	1	8	5	12	13
16	8	4	2	4	6	8	10
36	18	6	1	18	7	24	25
36	18	6	2	9	8	15	17
36	18	6	3	6	9	12	15
64	32	8	1	32	9	40	41
64	32	8	2	16	10	24	26

patlamıştır. Bu önermenin n 'nin asal değerleri için doğru olması durumunda bileşik ögeler için de doğru olacağı ispatlanmıştır. İfadenin üssün çok çeşitli değerleri için doğru olduğu ve n 'nin 269'dan küçük olması durumunda Fermat denkleminin bir çözümünün olmadığı da gösterilmiştir. Ancak genel önerme ispatlanamamıştır ve Fermat'ın kendi teoremi için genel bir ispata sahip olduğundan da ciddi olarak şüphelenilebilir.

Tam çözümü için 100.000 mark ödül verileceği şeklindeki sansasyonel bir duyuru nedeniyle Fermat problemi kamuoyunun fazlasıyla ilgisini çekmiştir. Bu fon probleme çok zaman harcamakla birlikte çözüme bir katkıda bulunamayan Dr. Wolfskoel adında biri tarafından 1908'de bağışlanmıştır. O zamandan beridir çabalarını *çemberin kareleştirilmesi, bir açının üçe bölünmesi* veya *devridaim makinelerinin* icadı gibi problemlere yönelten pek çok amatör, Fermat teoremi üzerinde durmaya başlamıştır. Ödül komitesine 1908-1911 arasında binden fazla bu tür "tam" çözümlerin ulaştığı tahmin ediliyor. Neyse ki yanıtların basımının şart koşulması çoğu katılımcının hevesini kırmıştır. Sunulan "çözüm"lerden pek çoğunun yazarların kendilerince yayımlanmış olması da ilginçtir. Tüm bu çabaların tipik özelliği yazarların bugüne kadar sarf edilen muazzam çabayı gözardı etmeleri ve zorluğun nerede olduğunu öğrenmekle pek ilgilenmemeleridir.

Problem son üç yüzyılın en büyük matematikçilerinin ilgisini çekmiştir: Euler ve Lagrange, Kummer ve Riemann – hepsi onu ispatlamaya veya çürütmeye uğraşmıştır, ama nafile. Bunun ve bağlantılı konuların üzerine yayımlanmış makaleler toplansa küçük bir kütüphaneyi doldururdu.

Fermat problemini çözme çabalarından orijinal problemten çok daha önemli bir bilim filizlendi. Bu sonuçlardan kimileri o denli önemli ve kapsamlıdır ki orijinal problemin çözülmemiş olmasını bir şans olarak görebiliriz. Örneğin, Fermat teoremini ispatlamaya çalışırken Eduard Kummer on dokuzuncu yüzyılın en temel ve bereketli başarılarından biri olan ünlü *ideal sayılar* kuramını buldu. Ancak bu kitabın boyutları, bu çok önemli kuramın bir özetini bile sunmama izin vermez.

Dinsel mistisizmden doğan tamsayı kuramı bir bilim statüsü kazana dek istikrarsız bir bulmaca çözme sürecini andıran bir dönemden geçti.

Mistik olanı soyut olanla özdeşleştirenler için bir paradoks niteliği taşısa da, sayı mistisizminin temelleri yeterince somuttu. İki fikir etrafında dönüyordu. Pisagorcuların çok eskilere dayanan sembolik anlamlı sayıları *biçim* ile *sayı* arasındaki yakın bağı gösteriyor. Üçgenler, kareler, piramitler ve küpler gibi basit ve düzenli biçimleri temsil eden sayıların kavranması daha kolaydı ve dolayısıyla özel bir öneme sahip olduklarına karar verilmişti. Öte yandan, bölünebilirlik açısından özel niteliklere sahip olan mükemmeller, dostaneler ve asallar da söz konusudur. Sümer kil tabletlerinin ve Mısır papirüslerinin açıkça gösterdiği gibi, bunların izi de eskilerin *dağılım* problemlerine verdikleri öneme kadar sürülebilir.

Bu somutluk erken dönemlerin deneysel niteliğini de açıklar, ki kuram bu niteliği bugüne kadar az çok korumuştur. Burada sözü günümüzün en ileri gelen sayı kuramcılarından bir olan, kısa süre önce kaybettiğimiz İngiliz matematikçi G. H. Hardy'ye bırakıyorum:

Sayı kuramı, matematiğin diğer dallarına kıyasla çok daha deneysel bir bilim olarak başladı. En ünlü teoremleri bazen ispatlanmadan yüz yıl veya daha fazla süre önce ileri sürülmüş ve bir yığın hesaplamanın ışığında ortaya atılmıştır.

Somut soyuttan her zaman önce gelmiştir. Sayı kuramının aritmetikten önce gelmesinin nedeni budur. Somut olan her zaman için bir bilimin gelişmesinin önündeki en büyük engel olmuştur. Tıpkı tek tek yıldızlara yönelik somut ilginin bilimsel bir astronominin gelişimini uzun süre geciktirmesi gibi, *tek tek sayıların* insan zihnini ezelden beridir tuhaf bir şekilde cezbetmiş olması da *kolektif* bir sayı kuramının yani bir aritmetiğin gelişiminin önündeki en büyük engeldi.

Son Sayı

Ama bir kere söylenmiş olan her zaman tekrarlanabilir.

ELEALİ ZENON, Simplikios tarafından aktarıldığı şekliyle

Matematiği sağın bilimler denilen bilimlerin kabul edilmiş modeli ve henüz bu ayrıcalığı kazanmamış olan daha yeni bilim dallarının ideali kılan nedir? Gerçekten de, matematiğin hâkimiyetini kabul etmiş bilimlerin sürekli kabaran listesine kabul edilmeyi sağlayacak standartlar ve yöntemler geliştirmek, biyoloji veya sosyal bilimler gibi alanlardaki araştırmacıların –en azından gençlerin– başlıca amaçlarından biridir.

Sadece sağın bilimlerin kendi yapılarını tasarlarken örnek aldıkları bir model olmanın ötesinde, matematik bu yapıyı bir arada tutan çimentodur. Aslında incelenen fenomen bir matematik yasası olarak ortaya konulamadığı sürece bir problem çözülmüş sayılmaz. Neden gözlem, deney ve spekülasyona sağın bilimlerin gerektirdiği o sağlam kesinliği yalnızca matematiğin kazandırabileceğine inanılır?

Bu matematiksel süreçleri incelediğimizde iki kavrama dayandıklarını görüyoruz: sayı ve fonksiyon. Fonksiyonun kendisi nihai olarak sayıya indirgenebilir; genel olarak sayı kavramı ise doğal diziyeye (bir, iki, üç...) atfettiğimiz niteliklere dayanır. O zaman matematiksel akıl yürütmeye yönelik bu örtülü inancın ipuçlarını tamsayıların niteliklerinde bulmayı umabiliriz.

Bu niteliklerin ilk pratik uygulaması aritmetiğin temel işlemleri biçimini alıyor: tamsayıların *toplanması*, *çıkarılması*, *çarpılması* ve

bölünmesi. Bu işlemleri yaşamımızın başlarında öğreniriz ve çoğumuzun bunları nasıl öğrendiğimizi tamamen unutmuş olması da şaşırtıcı değildir. Hafızamızı bir tazeleyelim:

$1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, ... şeklindeki tabloyu ezberleyerek başlarız. Ona kadar herhangi iki sayıyı hiç duraksamadan toplayabilene dek tekrar tekrar alıştırmayı yaparız. Eğitimimizin bu ilk evresinde $5 + 3 = 3 + 5$ olduğunu ve bunun bir rastlantı değil genel bir kural olduğunu gözlemlememiz öğretilir. Daha sonra toplamanın bu niteliğini sözcüklerle ifade etmeyi öğreniriz. *Toplam, içerdği terimlerin sırasına bağlı değildir*. Matematikçi bunu, *toplama değişmeli bir işlemdir*, diyerek özetler ve sembollerle şöyle yazar:

$$a + b = b + a$$

Daha sonra $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$ olduğu gösterilir. Bununla, $(2 + 3) + 4$ derken 2'ye 3 ekleyip bu toplama 4 eklememize rağmen aslında hangi sırada topladığımızın önemi olmadığı, zira $(3 + 4)$ 'ün 'toplamına 2 eklendiğinde de aynı sonucun elde edildiği anlatılmak istenir. Matematikçi bunu *toplama birleşmeli bir işlemdir*, diyerek özetler ve şöyle yazar:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Bu ifadelere fazla önem atfetmeyiz, ancak çok temeldirler. Daha büyük sayıları toplamanın kuralı bunlara dayanır.

$$\begin{array}{r} 25 \\ 34 \\ 56 \\ \hline 115 \end{array}$$

sadece

$$\begin{aligned} 25 + 34 + 56 &= (20 + 5) + (30 + 4) + (50 + 6) = \\ &= (20 + 30 + 50) + (5 + 4 + 6) = 100 + 15 = 115 \end{aligned}$$

daha kısa yazımından ibarettir ve burada değişme ve birleşme özellikleri temel bir rol oynar.

Daha sonra *çarpmaya* geçeriz. Yine ona kadar herhangi iki sayının çarpımını mekanik olarak söyleyene dek uzun bir tablo ezberle-

riz. Tıpkı toplama gibi, *çarpmanın da hem değişmeli hem de birleşmeli* olduğunu gözlemleriz. Bu sözcükleri kullanmayız ama demek istediğimiz budur.

Hem çarpma hem de toplamayı ilgilendiren ortak bir nitelik daha vardır. $7 \times (2 + 3)$ 'ün anlamı, yedinin $(2 + 3)$ 'ün toplamıyla, yani 5 ile çarpılmasıdır; ama aynı sonucu (7×2) ve (7×3) şeklinde iki çarpmanın sonucunu toplayarak da elde edebiliriz. Matematikçi bunu genel bir ifadeyle şöyle dile getirir: Çarpmanın toplama üzerine *dağılma* özelliği vardır. Yani

$$a(b + c) = ab + ac$$

İşte 10'dan büyük sayıları çarpmakta kullandığımız yöntemin altında bu dağılma özelliği yatar. Gerçekten de,

$$\begin{array}{r} 25 \\ 43 \\ \hline 75 \\ 100 \\ \hline 1075 \end{array}$$

işlemine incelediğimizde bunun sadece dağılma özelliğinin özgürce kullanıldığı bir işlemler zincirinin kısaltması olduğunu görüyoruz.

$$25 \times 43 = (20 + 5) \times (40 + 3) = [(20 + 5) \times 3] + [(20 + 5) \times 40] = (20 \times 3) + (5 \times 3) + (20 \times 40) + (5 \times 40) = 75 + 1000 = 1075.$$

Tüm düşünen insanların, hatta biraz da olsa okul görmüş tüm insanların matematik eğitiminin temelini meydana getiren olgular bunlardır. Bu olguların üzerine matematiğin temeli olan, saf ve uygulamalı tüm bilimlerin temelinde yatan *aritmetik* inşa edilmiştir, ki o da tüm teknik ilerlemelerin bereketli kaynağıdır.

Daha sonra zihinsel donanımımıza yeni olgular, yeni düşünceler, yeni kavramlar eklenmiştir, ama bunların hiçbiri daha altı yaşındayken öğrendiğimiz tamsayıların bu nitelikleriyle aynı sağlamlığa, aynı güçlü temele sahip değildir. Bu durum, ifadesini şu popüler deyişte bulur: iki artı ikinin dört ettiği kadar bariz.

Bunları, her şeyin "nasıl" işlediğiyle ilgilendiğimiz bir yaşta öğreniriz. "Neden?" diye soracak yaşa geldiğimizde bu kurallar sürekli kullanılmaktan zihinsel donanımımızın o kadar ayrılmaz bir parçası haline gelir ki artık olağan kabul edilir.

Gelişimi sırasında bireyin, ait olduğu türün evrimini tekrar yaşadığı iddia edilir. Bu ilke insan zekâsı için de kısmen geçerlidir. Matematik tarihinde "nasıl" her zaman "neden"den önce, konunun tekniği felsefesinden önce gelmiştir.

Bu, aritmetik açısından özellikle geçerlidir. Sayma tekniği ve hesap kuralları Rönesans döneminin sonunda yerleşmiş olgulardı. Ama sayı felsefesi on dokuzuncu yüzyılın son çeyreğine kadar olgunlaşmadı.

Yaşımız ilerledikçe bu kuralları gündelik işlerimizde uygulamak için yeterince fırsat buluruz ve genelliklerine gittikçe daha çok güvenir hale geliriz. Aritmetiğin gücü *mutlak genelliğinde* yatar. Kuralları istisnaya izin vermez: *Tüm* sayılar için geçerlidir.

Tüm sayılar! Her şey bu kısa ama çok önemli *tüm* sözcüğüne bağlıdır.

Bu sözcük, sonlu bir nesne, canlı veya koşul sınıfına uygulandığında herhangi bir gizem içermez. Örneğin, "yaşayan tüm insanlar" dediğimizde, ona çok belli bir anlam yüklemiş oluruz. Tüm insanlığın bir tür sıra şeklinde dizildiğini gözümüzün önüne getirebiliriz: Bu sırada da bir *ilk* insan ve bir *son* insan olur. Emin olmak adına, tüm yaşayan insanlar için doğru olan bir niteliği sağlam şekilde ispatlamak istiyorsak bunu her bir birey için ispatlamalıyız. Her ne kadar uygulamada böyle bir işin aşılabilir zorluklar içereceğini görsek de, bu zorlukların tamamen *teknik* olduğunu, *kavramsal* olmadığını hissederiz. Bu durum her tür *sonlu* grupta için, yani bir *ilk* bir de *son* üyesi olan her tür grupta için geçerlidir, çünkü *böyle bir grupta sayarak tüketilebilir*.

Tüm sayılar dediğimizde de aynı şeyi kastedebilir miyiz? Burada da grupta bir sıra olarak düşünülebilir ve bu sıranın bir *ilk* üyesi, *bir* sayısı olacaktır. Peki ya sonuncusu?

Cevap hazır: *Son sayı diye bir şey yoktur!* Sayma sürecinin görülebilir bir sonu yoktur. *Her sayının bir ardılı vardır. Sonsuz tane sayı vardır.*

Ama eğer son sayı yoksa, *tüm* sayılar demekle ve özellikle de *tüm sayıların niteliği* demekle ne kastederiz? Böyle bir niteliği nasıl ispatlayabiliriz? Kuşkusuz her bir bireysel vakayı deneyerek değil, çünkü daha başlamadan tüm vakaları tüketmemizin imkânsız olduğunu biliriz.

Matematiğin eşiğinde, büyülu bahçenin girişini koruyan efsanevi ejder misali bu *sonsuzluk ikilemini* buluruz.

Bu sonsuzluk kavramının, sayma sürecinin bitmezliğine dair bu inancın kaynağı nedir? Tecrübe mi? Kuşkusuz hayır! Tecrübe bize her şeyin, tüm insani süreçlerin sonluluğunu öğretir. Sayıları sayarak tüketmeye yönelik herhangi bir çabanın kendi tükenişimizle biteceğini biliyoruz.

Sonsuzun varlığı matematiksel olarak da ispatlanamaz, çünkü sonsuzluk, sayma sürecinin tükenmezliği, tüm matematiğin dayandığı matematiksel bir varsayım ve *aritmetiğin temel varsayımıdır*. O zaman bu doğüstü bir hakikat, Yaradan insanı evrene çıplak ve cahil ama kendi başının çaresine bakmakta özgür bir varlık olarak fırlattığında ona bahsettiği birkaç armağandan biri midir? Yoksa sonsuzluk kavramı insanla birlikte, hatta insanın son sayıya ulaşma yönündeki nafil çabalarından mı ortaya çıkmıştır? Yoksa bu kavram insanın sayılar aracılığıyla evrenin sonuna erişme konusundaki aczinin bir itirafı mıdır?

"En son sayı vardır, ama buna ulaşmak insanların yapabileceği bir şey değildir, çünkü o tanrılara aittir." Çoğu antik dinin ana teması budur. Göklerdeki yıldızlar, kum taneleri, okyanustaki damlalar insanın aklının erişemeyeceği bu *en nihai* sayının örnekleridir. Mezmurlar'ın yazarı, Yehova için şöyle der: "O, yıldızları saydı ve hepsine ad verdi." Tanrı'nın seçilmiş halkına vaadini hatırlatan Musa ise şöyle der: "Topraktaki toz tanelerini saymaya kadir olan, sizin tohumunuzu da sayacak."

Kimileri vardır ki, Kral Gelon, kumların sayısının sonsuz olduğunu düşünür, ki bunu derken sadece Siraküz çevresinde ve Sicilya'nın geri kalanındaki kumları değil, ister yerleşilmiş ister yerleşilmemiş olsun her bölgede bulunan kumları kastediyorum. Yine kimileri de bunu sonsuz olarak düşünmemekle beraber bu kadar büyük bir sayının dile getirilmemiş olduğunu düşünür. Böyle düşünenler, tüm denizleri ve çukurları en yüksek dağın

seviyesine kadar kumla dolu olan, dünyanın kütesine eşit bir madde yığını hayal ettiklerinde, bu kadar çok kuma karşılık gelecek büyüklükte bir sayının ifade edilebileceğini de idrak edemezler elbette. Ama sizin de anlayabileceğiniz geometrik ispatlarla göstermeye çalışacağım üzere, Zeuxippus'a gönderdiğim çalışmada sunduğum ve bizzat adlandırdığım sayılardan kimileri sadece tarif ettiğim dünyayı dolduracak miktarda kumun sayısını aşmakla kalmıyor, aynı zamanda evreni dolduracak miktarda kumun sayısını da aşıyor. (Arşimet: Kum Sayıcı)

Arşimet'in evreni sabit yıldızlarca sınırlanmış bir küreydi. Bu kürenin çapının 10.000 dünya çapına eşit olduğunu tahmin ediyordu. Bir haşhaş tohumunu dolduracak kum sayısının 10.000 ve dünyanın çapının en fazla 15.000 kilometre (300.000 *stadia*) olduğunu varsayarak, evreni dolduracak kum tanelerine karşılık gelen muazzam bir sayı bulmuştu: bizim numaralandırma sistemimize göre 52 basamaklı bir sayı. Bu sayıyı ifade etmek için Arşimet bizim 100.000.000'umuza karşılık gelen *oktad* adlı yeni bir birim icat etmişti.

Daireyi kareleştirmeye yönelik çabaların tarihçesi başka bir örnek daha oluşturur. Orijinal haliyle problem, cetvel ve pergelle belli bir daireyle eşit alana sahip bir kare oluşturmaktı. Düzgün, örneğin 8 kenarlı bir çokgene eşit bir kare meydana getirmek mümkündür. Öte yandan, kenarların sayısı 16'ya, 32'ye, 64'e vs. çıkarıldığında dairenin alanına gittikçe daha yakın bir alan elde edildiği gözlemlenmiştir. Kimi Yunanlı geometricilerin bunu yaklaşık bir çözümden ziyade daireye ulaşmanın yolu olarak gördüklerine, yani bu sürece yeterince uzun devam edildiğinde sonunda her noktada çemberle kesişen nihai çokgene ulaşacaklarını düşündüklerine şüphe yok.

Sonsuzluğun ilk başlardaki kavranışının "sayılamaz" yerine "henüz sayılmamış" olması akla yatkın bir hipotezdir. Son sayı *sabır* ve *sebat* demektir ve bu nitelikler insanda eksik gibiydi. Babil Kulesi'nin öyküsündeki göklere ulaşma amacıyla aynı türden bir çabaydı bu. Tıpkı gökler gibi son sayı da Tanrı'ya aitti. Kıskaç gazabıyla hırslı inşaatçıların dillerini karıştıracaktı.

Bu dil karışıklığı bugüne kadar varlığını sürdürmüştür. Zenon'un argümanlarından Kant ve Cantor'un çatışkalarına kadar matematiğin tüm paradoksları sonsuzluğun çevresinde serpilmiştir. Bunun öyküsünü başka bir bölümde anlatacağız. Burada bizi ilgilendiren bu pa-

radoksların aritmetiğin temellerine yönelik daha eleştirel bir tavrın oluşmasında rol oynamış olmasıdır. Tamsayıların nitelikleri matematiğin temelini meydana getirdiğine göre, eğer bu nitelikler *formel* mantık kurallarıyla ispatlanabilirse bu tüm matematiğin mantıksal bir disiplin olduğu anlamına gelecektir. Ancak, eğer mantık bu nitelikleri ispatlamaya yetersizse, o zaman matematik salt mantıktan öte bir şeyin üzerine inşa edilmiş demektir: Yaratıcı gücü insan *sezgisi* denilen o ele avuca sığmaz, elle tutulmaz şeye dayanır.

Bir yanlış anlama olmasın! Burada sorgulanan, sayıların bu niteliklerinin geçerliliği değildir; mesele bu niteliklerin geçerliliğini ispatlama iddiasında olan argümanların geçerliliğidir. Matematiğin temelleri ilk kez analize tabi tutulduğundan beri tartışılan ve matematikçileri *sezgiciler* ile *biçimciler* olarak birbiriyle çekişen iki gruba bölen sorular şunlardır: Matematiksel ispatı meydana getiren nedir? Genel olarak akıl yürütmenin ve özellikle de matematiksel akıl yürütmenin niteliği nedir? *Matematiksel varlık* ne demektir?

Sağlam akıl yürütmenin yasaları dağlar tepeler kadar eskidir. İlk kez Aristoteles tarafından sistematik bir şekilde ortaya konmuş olmalarına rağmen ondan çok önceleri de bilinirlerdi. Aslında bunlar insan zekâsının iskeletinin ta kendisidir: Her zeki adam bu yasaları gündelik yaşantısında kullanacağı fırsatlar bulur. Sağlam bir akıl yürütme için kişi ilk önce öncüllerini net olarak tanımlamalıdır; daha sonra mantığın kurallarını adım adım uygulayarak, kullanılan mantıksal sürecin *yegâne* sonucu olacak bir varlığa ulaşacaktır.

Eğer gözlemlediğimiz olgularla bu varlığın sağlaması yapılmıyorsa, o zaman ilk adım bu kuralları doğru uygulayıp uygulamadığımızı bulmaktır. Burası bu kuralların geçerliliğini analiz etmenin yeri değildir. Bu eleştirel çağın kavurucu alevlerinden nasiplerini almadıklarından değil! Tam tersine: İçlerinden biri, çeyrek yüzyıldır süregelen ve hiç de yatışacağı benzemeyen bir ihtilafın merkezindedir. Ne var ki bu başlı başına bir öyküdür ve yeri geldiğinde anlatılacaktır.

Mantık kurallarının doğru uygulanmış olduğu görülürse, o zaman mevcut uyumsuzluk (şayet varsa), öncüllerimizde yanlış bir şeyler olduğu anlamına gelebilir. Belki varsayımlarımızda bir yerlerde

bir tutarsızlık gizlidir veya öncüllerimizden biri bir diğeriyle çelişiyordur.

Herhangi bir bilgi bütünü için bir dizi varsayım belirlemek kolay iş değildir. Sadece muazzam bir analitik muhakeme gücü değil, aynı zamanda büyük beceri de gerektirir. Zira varsayımların birbirleriyle çelişmemesine ek olarak birbirlerinden bağımsız olmaları ve tüm sistemin kapsamlı olması, yani söz konusu soruyu tamamıyla kapsamaması arzulanır. Matematiğin bu tür problemlerle uğraşan dalı Peano, Russell ve Hilbert gibi kişilerce geliştirilmiş olup *belitke* (*aksiyomatik*) adıyla anılır. Daha önce felsefenin bir dalı olan mantık böylece yavaş yavaş matematiğin bütününe katılmaya başlamıştır.

Problemimize dönecek olursak, öncüllerimizi incelediğimizi ve çelişkisiz bulduğumuzu kabul edelim. O zaman vargımızın mantıksal olarak hatasız olduğunu söyleriz. Ancak, eğer bu vargı gözlemlenen olgularla uyuşmuyorsa, yaptığımız varsayımların, uygulandıkları somut probleme uymadıklarını biliriz. Elbisenin dikiminde bir sorun yoktur. Bazı yerlerde bol gelip diğerlerinde dar geliyorsa, suç *makastarındır*.

Yukarıda anlatılan sürece *tümdengelim*sel akıl yürütme adı verilir. *Tanımlar, postülalar, belitler* (*aksiyomlar*) biçimini alan çok genel niteliklerden başlayarak, mantık kuralları aracılığıyla bunlardan, belli vakalarda ortaya çıkan şeyler veya koşullarla ilgili ifadeler elde etmekten ibarettir.

Tümdengelim süreci matematiksel akıl yürütmenin tipik özelliğidir. Geometride kendine, neredeyse tamamen gerçekleştirebileceği bir alan bulmuştur ve bu nedenle de geometrinin mantıksal yapısı tüm sağın bilimler için bir örnek olmuştur.

Bilimsel araştırmada kullanılan diğer yöntem olan *tümevarım* ise çok farklıdır. Çoğunlukla özelden genele doğru ilerler diye tarif edilir. Belli bir sınıf nesnenin bir niteliğini bulmak için gözlemleri veya testleri olabildiğince çok defa ve mümkün olduğunca benzer koşullarda tekrarlarız. Daha sonra gözlem veya deneylerimiz sonucunda belli bir eğilim ortaya çıkabilir. O zaman bu eğilim o sınıfın niteliği olarak kabul edilir. Örneğin, yeterince çok sayıda kurşun örneğini ısıya tabi tutarsak ve her seferinde de erimenin termometre 328 dereceye ulaştığında başladığını görürsek, kurşunun erime noktasının 328

derece olduğu sonucuna varırız. Bunun ardında yatan, ne kadar çok örneği deneye tabi tutarsak tutalım, koşullar değişmedikçe sonuçların aynı olacağına ilişkin inancımızdır.

Tüm deneysel bilimlerin temelinde yatan bu tümevarım süreci, ciddi matematikten *sonsuz* kadar atılmıştır. Matematiksel bir önermeye böyle bir ispat hem gülünç kabul edilir, hem de yerleşik hakikatlerin doğrulanması olarak bile kabul edilemez olurdu. *Çünkü matematiksel bir önermeyi ispatlamak için tek tek vakalardan elde edilen kanıtlar –ne kadar çok olursa olsun– yetersiz kalırken, aksini ispatlamak için tek bir örnek yeterlidir.* Matematiksel bir önerme hiç mantıksal çelişkiye yol açmıyorsa doğrudur, aksi takdirde yanlıştır. *Tümdengelim yöntemi ise sadece ve sadece çelişki ilkesine dayanır.*

Tümevarımın matematikte yasaklı olmasının iyi bir nedeni vardır. Önceki bölümde bahsettiğim ikinci dereceden ($n^2 - n + 41$) ifadesini ele alalım. İfadeye $n = 1, 2, 3$ vb. değerlerini 40'a kadar yerleştirdiğimizde, bu vakaların her birinde sonuçta bir asal sayı elde ederiz. O zaman bu ifadenin n 'nin tüm değerleri için asal sayıları temsil ettiği sonucuna mı varmalıyız? Matematik eğitimi en az olan okur bile böyle bir sonucun yanlışlığını görecektir; ama pek çok fizik yasası çok daha az kanıta dayanaçak doğru kabul edilmiştir.

Matematik tümdengelimsel bir bilimdir, aritmetikse matematiğin bir dalıdır. Tümevarım kabul edilemez. Aritmetiğin önermeleri, örneğin işlemlerin en basit hesaplamalarda bile rol oynayan birleşme, değişme ve dağılma özellikleri tümdengelimsel yöntemlerle ispatlanmalıdır. Buradaki ilke nedir?

Bu ilkeye *matematiksel tümevarım*, *tam tümevarım* ve *yinelenmeye dayalı akıl yürütme* gibi farklı adlar verilmiştir. Sadece bu sonucunu kabul edilebilir bir isimdir, diğerleriyse aldatıcı isimlendirmelerdir. Tümevarım kavramı yönetime dair tamamen yanlış bir fikir verir, çünkü sistematik denemeler söz konusu değildir.

Bildik bir alandan örnek vermek gerekirse, bir sıra asker hayal edelim. Her birine edinmiş olabileceği bilgiyi sağındakine iletme talimatı verilmiştir. Alana yeni giren komutan *tüm* askerlerin belli bir olaydan haberdar olmasını istiyordur. Her askere mi sorması gerekir? Eğer bir askerin bildiğini sağındaki komşusunun bildiğinden de eminse buna gerek yoktur, zira soldaki *ilk* askerin o olaydan haberi

olduğundan emin olursa, *tüm* askerlerin de onu bildiği sonucuna varabilir.

Burada kullanılan argüman yinelenmeye dayalı akıl yürütmeye bir örnektir. İki evresi vardır. Önce söz konusu önermenin Bertrand Russell'ın *kalıtsal* olarak adlandırdığı türden olduğu gösterilir (kalıtsal önermede, önerme bir dizinin herhangi bir üyesi için doğruysa, o üyeden *bir sonraki* için de doğru olması mantıksal bir zorunluluktur). İkinci olarak ise, önermenin dizinin ilk üyesi için doğru olduğu gösterilir. *Tümevarım* adını verdikleri işte bu ikinci adımdır. Buradaki mantığa göre, kalıtsal doğası göz önünde bulundurulduğunda, ilk kavram için doğru olan önerme ikinci için de doğru olmalıdır, ikinci için doğru olduğuna göre üçüncü için de olmalıdır vb. Tüm diziye tüketene, yani *son* üyesine ulaşana dek böylece devam ederiz.

İspatın her iki adımı da –tümevarım ve kalıtsallık– gereklidir; her ikisi de tek başına yeterli değildir. Fermat'ın iki teoreminin tariheşi buna bir örnektir. İlk teorem $2^n + 1$ ifadesinin n 'nin tüm değerleri için asal olduğuna dairdir. Fermat bizzat deneme yoluyla bunun $n = 0, 1, 2, 3, 4$ için doğru olduğunu göstermiştir. Ama kalıtsal niteliğini ispatlayamamıştır ve zaten $n = 5$ için bunun doğru olmadığını gösteren Euler önermenin doğru olmadığını ispatlamıştır. İkinci teoreme $x^n + y^n = z^n$ eşitliğinin n 'nin 2'den büyük olduğu durumlarda tamsayılar için çözülemeyeceğini iddia eder. Burada tümevarım adımı bu önermenin $n = 3$ olduğunda doğru olduğunu, yani $x^3 + y^3 = z^3$ 'ün tamsayılarla çözülemeyeceğini göstermekten ibarettir. Fermat'ın buna dair bir ispatı olması mümkündür, eğer öyleyse bu o ünlü kenar notunun bir yorumu olabilir. Her halükârda, gördüğümüz gibi bu ilk adım Euler tarafından başarılmıştır. Geriye bu niteliğin kalıtsal olduğunun, yani n 'nin bir değeri, mesela p için doğruysa o zaman $x^{p+1} + y^{p+1} = z^{p+1}$ eşitliğinin de tamsayılarla çözülememesinin mantıksal bir zorunluluk olduğunun gösterilmesi kalıyor.

Yinelenme ilkesinin açıkça ortaya konmasını Fermat'ın çağdaşı ve arkadaşı olan Blaise Pascal'in dehasına borçlu olmamız da dikkat çekicidir. Pascal ilkeyi 1654'te yayımlanan "Aritmetik Üçgen" başlıklı bir yazısında dile getirmişti. Ancak daha sonra bu yazının özünün Pascal ile Fermat arasında kumarla ilgili bir probleme dair bir mektuplaşmada yer aldığı keşfedildi; aynı mektuplaşma artık ola-

sılık kuramının çıktığı çekirdek olarak kabul ediliyor.

Kuramsal matematikte son derece temel bir yere sahip olan yinelenmeye dayalı akıl yürütme ilkesi ile tüm tümevarımsal bilimlerin temeli olan olasılık kuramının iki kumarbazın sonuçlanmamış oyunundaki ihtimallerin ayrıştırılması için bir yol ararken ortaya çıkmış olması, kuşkusuz mistik düşüncelere uygun bir konudur.

Matematiksel tümevarım ilkesinin aritmetiğe nasıl uygulanabileceği, en iyi, tamsayıların toplanmasının *birleşmeli* bir işlem olduğunun kanıtlanmasıyla açıklanabilir. Bu, simgelerle ifade edildiğinde şu anlama gelir:

$$(1) \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

$a + b$ işlemini analiz edelim: a sayısına 1 eklendiği, sonuca tekrar 1 eklendiği ve bu sürecin b kez tekrarlandığı anlamına gelir. Aynı şekilde, $a + (b + 1)$, a 'ya 1'in peş peşe $b + 1$ kez eklendiği anlamına gelir. Buna göre:

$$(2) \quad a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

Bu da (1) önermesinde $c = 1$ iken elde edilen denklemdir. Şu âna kadar yaptıklarımız, kanıtımızın *tümevarım* aşamasını oluşturur.

Şimdi kalıtsallık özelliğine bakalım. Önermenin c 'nin bir değeri, diyelim n için doğru olduğunu varsayalım:

$$(3) \quad a + (b + n) = (a + b) + n$$

Her iki tarafa 1 eklendiğinde:

$$(4) \quad [a + (b + n)] + 1 = [(a + b) + n] + 1$$

ki bu da (2)'ye bağlı olarak şu şekilde yazılabilir:

$$(5) \quad (a + b) + (n + 1) = a + [(b + n) + 1]$$

Ve aynı nedenden

$$(6) \quad (a + b) + (n + 1) = a + [b + (n + 1)]'e\ denktir.$$

Bu ise (1) önermesinde $c = n + 1$ durumunda elde edilen denklemdir.

Böylece, önermenin n sayısı için doğru olduğu gerçeği, beraberrinde söz konusu önermenin *mantıksal bir zorunluluk* olarak bu sayının ardılı yani $n + 1$ için de doğru olması gerektiği olgusunu geti-

rir. 1 için doğru olan 2 için de doğrudur; 2 için doğru olan 3 için de doğrudur ve bu *sonsuz*a kadar gider.

Burada uygulandığı daha genel biçimiyle matematiksel tümevarım ilkesi şöyle formüle edilebilir: Bir dizi içeren bir önermenin dizideki ilk sayı için doğru olduğunu biliyorsak; ayrıca önermenin dizinin belli bir elemanı için doğruluğunun varsayılmasının, mantıksal bir sonuç olarak o önermenin söz konusu sayının takipçisi için de doğruluğunu kapsadığını biliyorsak, bu durumda önermenin dizinin tüm sayıları için doğru olduğu sonucuna varabiliriz. Askerler vakasında kullanıldığı gibi *kısıtlı* ilke ile aritmetikte kullanıldığı gibi *genel* ilke arasındaki fark, sadece *tüm* sözcüğünün yorumundadır.

Şunu tekrarlayayım: Sayının gizemleriyle ilk tanıştırıldığımızda aritmetik işlemlerinin sorgulamadan kabul ettiğimiz geçerliliği, kısıtlı değil genel matematiksel tümevarım ilkesiyle oluşturulmuştur.

Aşağıdaki bölümdeki alıntılar Henri Poincaré'nin "Matematiksel Akıl Yürütmenin Yapısı" başlıklı makalesine aittir. Bu çığır açıcı yazı 1894'te, sağın bilimlerin temellerine yönelik bir dizi araştırmanın ilki olarak ortaya çıkmıştır. Çok sayıda başka matematikçinin klasik kavramları revize etmeyi amaçlayan ve mantığın neredeyse tamamen matematiğin bütününe katılmasıyla sonuçlanacak bir hareket başlatmaları için bir işaret sayılmıştır.

Poincaré'nin konuya hâkimiyeti, yazım tarzının güzelliği ve cüretkâr putkırıcı fikirleri, eserini kısıtlı matematik cemaatinin ötesine taşımıştır. Biyografisini yazanlardan bazıları, yazılarının kendisinden önce hiçbir matematikçinin erişemediği yarım milyonluk bir okur topluluğuna ulaştığını tahmin ediyor.

Matematiğin, fiziğin ve gök mekaniğinin hemen her dalında son derece yaratıcı olan Poincaré, kendi başarılarının kaynaklarını analiz edebilmesini sağlayan muazzam bir içgözlem yeteneğine sahipti. Keskin zekâsı özellikle alışkanlığın kalın kabuğunun neredeyse nüfuz edilemez kıldığı en temel kavramlarla ilgileniyordu: İşte *sayı*, *zaman* ve *mekân* bu kavramlardandır.

Bir matematik biliminin var olma ihtimalinin bizzat kendisi çözümsüz bir çelişki gibi görünür. Bu bilim sadece görünüşte tündengelimli ise, kimenin şüphe bile edemediği bu mükemmel kesinlik nereden geliyor? Eğer

bunun aksine, ileri sürdüğü tüm önermeler formel mantık kuralları ile birbirinden çıkarılabiliyorsa, neden matematik muazzam bir totolojiye indirgenmiyor? Kıyas bize özünde yeni hiçbir şey öğretemez ve eğer her şey özdeşlik ilkesinden çıkıyorsa, her şey buna indirgenebiliyor olmalıdır. O halde ciltler dolduran teoremlerin, A'nın A olduğunu söylemenin dolambaçlı yollarından başka bir şey olmadığını kabul mü etmeliyiz?

Şüphesiz, tüm bu akıl yürütmelerin kaynağı olan belitlere dönebiliriz. Bunların çelişki ilkesine indirgenemeyeceğine karar verirse, ayrıca bunlarda deneysel olgu da görmezsek, ... bunları *a priori* (önsel) hükümler olarak görmemiz mümkündür. Ama bu da güçlükleri çözmeyecek, sadece adını koyacaktır. ...

Yinelenmeye dayalı akıl yürütme kuralı çelişki ilkesine indirgenemez. ... Bu kurala deneyimarcılığıyla da varamayız. Deneyim, kuralın ilk on veya yüz sayı için doğru olduğunu gösterebilir; bu şekilde sonsuz sayı dizisini değil, bu dizinin kısa veya uzun, ama her zaman için kısıtlı bir kısmını elde edebiliriz.

Dizinin sadece bir kısmı söz konusu olsaydı, çelişki ilkesi yeterli olablirdi; dilediğimiz kadar kıyas yapmamız her zaman mümkün olurdu. Bu mantık ilkesi, sadece tek bir formül içine sonsuz tane kıyas katmak söz konusu olduğunda, yalnızca sonsuzluğun karşısında çöker ve deneyim de burada güçsüzleşir.

O halde neden bu hüküm kendini böyle karşı konulmaz bir güçle bize dayatıyor? Çünkü bu sadece, imkân dahilinde olan bir eylemin sonsuz kez tekrarını tasavvur edebileceğini bilen zihnin gücünün teyididir.

Kabul etmeliyiz ki, bununla olağan tümevarım prosedürü arasında çarpıcı bir benzerlik vardır. Fakat temel bir fark da mevcuttur. Doğa bilimlerinde uygulandığı şekliyle tümevarım, evrende genel, bizim dışımızda bir düzen olduğu inancına dayandığı için daima belirsizdir. Bunun aksine matematiksel tümevarım, yani yinelenmeye dayalı kanıt, sadece zihnin bir özelliği olduğu için kendini bir gereklilik olarak dayatır. ...

Yalnızca bize yeni bir şeyler öğretebilecek tek şey olan matematiksel tümevarımla yükselebiliriz. Fiziksel tümevarımdan farklı fakat onun kadar verimli olan bu tümevarımın yardımı olmaksızın, tümdengelim bir bilim oluşturamayacak kadar âciz olacaktır.

Son olarak, bu tümevarımın yalnızca aynı işlem sonsuz kez tekrarlandığında mümkün olduğuna dikkat ediniz. Satranç teorisi işte bu nedenle asla bir bilim olamaz: Oyunun farklı hamleleri birbirlerine benzemez.

Son söz ustaya ait olmalıdır. Bu yüzden bölümü böyle tamamlamış olmak isterdim. Ama tarih kişileri saymaz: Poincaré'nin fikirleri şiddetini bugüne kadar koruyan bir tartışmaya yol açtı. Bu nedenle, sorunun her iki tarafındaki seçkin kişilerce etraflıca ele alınmış mese-

lelere katkıda bulunmak umuduyla değil, asıl meselenin net bir şekilde açığa çıkarılabilmesi için kendi düşüncelerimi de eklemeliyim.

Sonlu sayı dizilerine uygulanan yinelenmeye dayalı akıl yürütme, mantıksal olarak çürütülemez. İlke bu *kısıtlı* anlamıyla, bir önerme kalıtsal tipte olduğunda, eğer dizinin ilk terimi doğru (veya yanlış) ise dizideki herhangi bir terimin de doğru (veya yanlış) olduğu nu öne sürer.

Bu *kısıtlı ilke*, sonlu, sınırlı bir aritmetik oluşturmak için yeterli olacaktır. Örneğin, doğal diziyi sayma sürecinin fizyolojik veya psikolojik sınırlarında, diyelim 1.000.000'da sonlandırabiliriz. Bu tür bir aritmetikte toplama ve çarpma (mümkün olduğu zaman) *birleşmeli* ve *değişmeli* olacaktır; fakat işlemler daima mümkün olmayacaktır. $(500.000 + 500.001)$ veya (1000×1001) gibi ifadeler anlamsız olacaktır ve anlamsız durum sayısının anlamlıları çok gerilerde bırakacağı aşikârdır. Tamsayılardaki bu kısıtlama kesirlerde de buna karşılık gelen bir kısıtlamaya neden olacaktır; hiçbir ondalık kesirde 6 basamaktan fazla bulunmayacaktır ve $1/3$ gibi bir kesrin ondalık kesre çevrilmesinin bir anlamı olmayacaktır. Sonu olmayan bölünebilme sonu olmayan artıştan daha anlamlı olmayacaktır ve herhangi bir nesneyi bir milyon eşit parçaya bölerek bölünemeze ulaşmamız mümkün olacaktır.

Düzlemi sonsuz şekilde her yöne uzanır düşünmek yerine kendimizi düzlemin *sınırlı bir bölgesiyle*, diyelim bir daireyle kısıtlamamız durumunda geometride de benzer bir durum oluşacaktır. Bu kısıtlı geometride iki doğrunun kesişimi bir olasılık meselesi olacak; rasgele çizilen iki doğru bir açı oluşturmayacak; rasgele çizilen üç doğru bir üçgen oluşturmayacaktır.

Yine de, bu sınırlı aritmetik ve bu sınırlı geometri sadece mantıksal olarak gediksiz olmakla kalmayıp, her ne kadar başta garip gibi görünse bile, duyularımızın gerçekliğine insan ırkının mirası olan sınırsız çeşitlerinden daha yakın olurdu.

Matematiksel tümevarıma dair kısıtlı ilke, her biri kendi içinde tutarlı olan sonlu bir kıyas zinciri içerir: Bu nedenle bu ilke klasik mantığın bir sonucudur.

Ama aritmetiğin ispatında kullanılan yöntem, tam tümevarımın *genel* ilkesi, kısıtlı ilkenin dayattığı sınırların ötesine geçer. 1 sayısı

için doğru olan bir önermenin, bir sayı için doğruysa takip eden sayı için de doğru olması koşuluyla tüm sayılar için doğru olduğunu söylemek yeterli değildir. *Bu tüm sayıların bir ardılı olduğunu zımnen ileri sürmek demektir.*

Bu sav, klasik mantık yasalarının bir sonucu olmadığından mantıksal bir zorunluluk değildir. Karşıtı olan sonlu sayı serisi postülası da aynı şekilde kabul edilebilir sınırlı bir aritmetiğe yol açtığından, bu sav kendini tek makul sav olarak *dayatmaz*. Bu sav duyularımızın doğrudan deneyimlerinden *elde edilmez*, zira deneyimlerimizin tümü bunun yanlışlığını beyan eder. Ve son olarak bu sav deneysel bilimlerin tarih içindeki gelişiminin bir sonucu *değildir*, zira en son kanıtlar sınırlı bir evrene işaret etmektedir ve atom yapısındaki en son keşiflerin ışığında maddenin sonsuz bölünebilirliğinin bir efsane olduğu ortaya çıkmıştır.

Yine de sonsuzluk kavramı, bize mantık veya deneyimle dayatılmamış olmakla beraber, *matematiksel bir zorunluluktur*. O halde, bir kez mümkün olan bir eylemin sonsuz tekrarını düşünebilen bu zihinsel gücün ardında yatan nedir? Bu çalışma sırasında bu soruya birçok kez döneceğim.

Semboller

Bu matematik formüllerinin kendilerine ait bağımsız bir varlığa ve zekâyâ sahip olduğu, bizlerden, hatta kâşiflerinden daha bilge oldukları ve onlar için harcanan çabaya karşılık bize çok daha fazlasını geri kazandırdıkları duygusundan kaçamazsınız.

HEINRICH HERTZ

Günümüzde kullanılan geniş anlamıyla cebir, sembolik biçimlerle yapılan işlemleri ele alır. Dolayısıyla sadece matematiğe bütünüyle yayılmakla kalmayıp biçimsel mantık, hatta metafizik alanına da uzanır. Dahası, bu şekilde yorumlandığında cebir insanın genel önermelerle uğraşma yetisi kadar, *bazı ile herhangi bir* arasında ayrım yapma becerisi kadar eskidir.

Burada ise cebiri çok daha dar bir anlamda, genel cebirin gayet uygun bir biçimde *denklem kuramı* olarak adlandırılan kısmı anlamında ele alıyoruz. Cebir terimi başlangıçta bu dar anlamda kullanılmıştır. Kelime Arapça kökenlidir. Arapça *cebr* kelimesi ise yerleştirmek, yerine (geri) koymak anlamına gelir. İspanya'da *algebrista* kelimesi halen, bir tür kiropraktik uzmanı olan çıkıkçıları tanımlamakta kullanılır.

Cebir kelimesinin Muhammed bin Musa el-Harizmi'nin (basamaklı sayı sisteminin gelişimine büyük katkıda bulunduğunu gördüğümüz el-Harizmi'nin ta kendisi) yazdığı bir kitabın adının değişmiş hali olması da gayet uygun düşüyor. Söz konusu kitabın tam adı *Cebr ve'l-Mukabele* olup kelimesi kelimesine "Yerine Koyma ve Denkleştirme" şeklinde tercüme edilebilir. Bin Musa cebir kelimesini *yer değiştirme* teriminin günümüzdeki anlamıyla, yani $3x + 7 =$

25'ten $3x = 25 - 7$ 'ye geçerken terimlerin denklemin bir tarafından diğer tarafına kaydırılmasına karşılık kullanmıştır.

Sümer kil tabletlerinde ilkel halinin izlerine rastlanan cebir, muhtemelen eski Mısır'da epey gelişmiş bir seviyeye ulaşmıştır. Gerçekten de, MÖ on sekizinci yüzyıldan önce yazılan Rhind papirüsü yiyecek ve diğer malzemelerin *paylaşımına* dair problemlerle ilgilidir; bunların sonucunda ortaya basit denklemler çıkmıştır. Bu denklemlerdeki bilinmeyen, *hau* (yığın) hiyeroglifiyle gösterilir; toplama ve çıkarma işlemleri ise işlenene yaklaşan veya ondan uzaklaşan bir adamın bacaklarıyla. Papirüs, Ahmes adında birinin imzasını taşır. Gelgelelim, metindeki birçok bariz hataya bakılırsa, Ahmes bunları içeriklerini pek de anlamaksızın kopyalayan basit bir kâtipten başkası değildir. Dolayısıyla Eski Mısır'ın bilgi düzeyinin bu papirüsün düşündürdüğünden daha ileri olduğu varsayılmıştır. Her ihtimalde, Mısır cebirinin bu papirüsten yüzyıllar öncesine dayandığına şüphe yoktur.

Cebirin çeşitli ülkelerdeki gelişiminde sırasıyla üç aşamadan geçtiği genelde doğrudur: *retorik*, *kısaltmalı* ve *sembolik*. Retorik cebirde hiç sembol yoktur – tabii sembolik anlamlarıyla kullanılan kelimelerin kendisi dışında. Sembollerle $a + b = b + a$ şeklinde gösterilen bir denkleğin bugün retorik cebirdeki karşılığı, "Toplam, terimlerin sırasından bağımsızdır" şeklinde bir ifadedir.

Tipik bir örneği Mısır'da görülen *kısaltmalı* cebir, retorik cebirin daha gelişmişidir. Sık kullanılan belirli kelimeler peyderpey kısaltılır. Nihayetinde bu kısaltmalar o kadar daraltılır ki kökenlerinin ne olduğu unutulur, sembollerin temsil ettikleri işlemle belirgin bir bağlantısı kalmamıştır artık. *Kısaltmanın kendisi bir sembole dönüşmüştür.*

(+) ve (–) sembollerinin tarihi konuyu daha iyi açıklayabilir. Ortaçağ Avrupası'nda (–) sembolü uzun süre *minus* (eksi) kelimesiyle ifade edilmiş, daha sonra da ilk harf olan *m*'nin üzerine kısa bir çizgi çekilerek gösterilmiştir. Nihayetinde harfin kendisi düşmüş ve sadece üstteki sembol kalmıştır. *Plus* (artı) işareti de benzer bir dönüşümden geçmiştir. Standart sembollerin kronolojik tarihi için bkz. aşağıdaki tablo.

Diophantos öncesi Yunan cebiri esas olarak retorikti. Yunanlıla-

rın sembollerle ifade etme konusunda neden bu kadar yetersiz olduklarına ilişkin çeşitli açıklamalar öne sürülmüştür. En güncel teorilerden biri, Yunan alfabesindeki harflerin rakam yerine geçtiği, bu nedenle harflerin genel niceliklerin ifadesinde de kullanımının açıkça karışıklığa neden olacağı yönündedir. Diophantos'un Yunancada ς (sigma) sesinin σ ve ς şeklinde iki yazılı biçimi olmasından yararlanıldığına dikkat çekilir: σ 60'ı ifade ederken, ς sayısal değere sahip değildir ve Diophantos bu yüzden bilinmeyi simbole etmek için bu işareti kullanmıştır.

İşin aslı, Diophantos'un bilinmeyen için seçtiği sembol muhtemelen Yunancadaki *arithmos* (sayı) sözcüğünün ilk hecesinin kısaltmasıdır ve Diophantos sayı ile de problemdeki bilinmeyi kastetmiştir. Ayrıca, bu kuram Yunan alfabesinde sadece küçük harflerin rakam olarak kullanıldığını dikkate almıyor gibi görünüyor. Yunanlılar kendi tasarruflarındaki büyük harfleri sembol olarak kullanabiliyordu, zaten kullanıyorlardı da.

Yine de bu semboller *işlemsel* anlamda değil, sadece *etiket* olarak, geometrik bir biçimlenimin farklı noktalarını veya unsurlarını belirtmekte kullanılmıştır. Bu tür betimleyici semboller günümüzde geometrik bir şeklin çeşitli noktalarını tanımlamakta kullanılmakta olup bu âdetin bize Yunanlılardan miras kaldığı unutulmamalıdır.

Hayır! Yunan düşüncesi esasında cebirsel değil çünkü son derece somuttu. Fiziksel içeriklerinden bilinçli olarak ayrılmış nesnelerle ilgilenen soyut cebir işlemleri, bizatihi nesnelerle yoğun biçimde ilgilenen zihinlerce bulunmuş olamazdı. *Sembol sadece bir formalite değildir*, cebirin özünün ta kendisidir. Sembol olmaksızın, nesne bir insan algısıdır ve insan duyularının bir nesneyi kavrama aşamalarının tamamını yansıtır; yerine bir sembol geçtiğinde nesne tam bir soyutlama, belirtilen işlemlere tabi salt bir *işlenen* haline gelir.

Yunan düşüncesi plastik evreden yavaş yavaş çıkarken çöküş dönemi başladı. Helen kültürünün bu çöküş günlerinde iki kişi öne çıkar. İkisi de MS üçüncü yüzyılda yaşamıştır, ikisi de İskenderiyelidir, ikisi de çağdaşlarının özümseyemeyeceği fakat yüzyıllar sonra önemli bilim dallarına dönüşecek kadar ileri ve yeni teorilerin tohumlarını atmıştır. Pappos'un "porizmleri" *izdüşüm geometrisini* öncelerken, Diophantos'un problemleri modern denklem kuramının yolunu açmıştır.

Diophantos kesirleri sayı olarak açıkça kabul eden ilk Yunan matematikçisidir. Aynı zamanda sadece basit denklemleri değil, ikinci ve daha yüksek dereceden denklemleri de ilk kez sistemli bir biçimde ele almıştır. Yetersiz sembolizmine, yöntemlerinin incelikten uzak olmasına karşın modern cebirin öncüsü kabul edilmelidir.

Fakat Diophantos sönmekte olan bir mum alevinin son kıpırtısıydı. Bu alev sönmeye, Batı dünyasının üzerine karanlık çağın uzun gecesi çöktü. Helen kültürünün tohumları yabancı topraklarda filizlenmeye yazgılıydı.

Hintliler Yunan biliminin bazı yalın gerçeklerini miras almış olabilirler, fakat Yunanlıların ferasetini almamışlardır. Meleklerin adım atmaya korktuğu yerde budalalar koşturur. Hintliler titizlik derdine düşmüyorlardı, yaratıcı hayal güçlerinin uçuşunu durduracak sofistleri yoktu. Sayı ve oranlarla, sıfır ve sonsuzlukla, keza birçok kelimeyle oynuyorlardı. Örneğin, başlangıçta boşluk anlamına gelen ve nihayetinde sıfır halini alan *sunya*, aynı zamanda bilinmeyeni tanımlamakta da kullanılıyordu.

Yine de Hintlilerin naif biçimciliği, cebiri Yunanlıların eleştirel titizliğinden daha fazla geliştirdi. Doğru, onlarınkı kısaltmalı cebirin âlâsıydı. Semboller nesneleri veya işlemleri belirten kelimelerin ilk hecelerinden başka bir şey değildi; yine de sadece temel işlemler ve eşitlik için değil, negatif sayılar için de sembolleri vardı. Ayrıca basit ve ikinci dereceden denklemlerin dönüşümü için tüm kuralları geliştirmişlerdi.

Ele aldıkları problem türleri oldukça basit ve cebirin bu aşaması için gerçekten tipikti. Milattan sonra sekizinci yüzyılda yazılmış, genel teoloji üzerine bilimsel bir eser olan *Lilawati*'den iki alıntı yapalım:

Bir yığın saf lotus çiçeğinin üçte biri, beşte biri ve altıda biri sırasıyla tanrılar Şiva, Vişnu ve Güneş'e sunuldu; dörtte biri Bhavani'ye sunuldu. Kalan altı çiçek muhterem öğretmene verildi. Çiçeklerin toplam sayısını çabucak söyle bakalım...

Âşıkların mücadelesi sırasında kolye koptu. İncilerin üçte biri yere düştü, beşte biri yatağın üstünde kaldı, altıda birini kız, onda birini de sevgilisi buldu; ipten altı inci kaldı. Kolyenin kaç inciden oluştuğunu söyle bakalım.

Hint matematiğinin Avrupa'ya doğrudan etkisi az oldu. Ama Arapların aritmetik ve cebiri dokuzuncu ve onuncu yüzyılların aydın halifelerinin divanlarında özgürce ağırlanan Brahman ilminin temsilcilerinden aldıklarına şüphe yoktur. O dönemdeki İslam uygarlığı iki kültürün karışımından oluşuyordu: Şarki ve Helenistik. Çok sayıda Sanskritçe ve Yunanca edebiyat, fen ve felsefe klasiği Arapça'ya tercüme edilerek Arap âlimlerince büyük bir hevesle inceleniyordu. Bu tercümelerin çoğu saklanmış olup halen zengin bir tarihi bilgi kaynağıdır. En kapsamlı antik Helen kütüphanesi olan İskenderiye'nin iki kez yağmalanıp yok edildiğini unutmamalıyız: önce dördüncü yüzyılda Hristiyan vandallarca, ardından yedinci yüzyılda Müslüman fanatiklerce. Bu yıkımın sonucunda çok sayıda antik el-yazması kaybolmuştur; Arapça tercümeleri olmasaydı gelecek nesiller bunları hiç bilmeyecekti.

Arapların tarihi kaderinin Helen kültürüne bu geçiş dönemlerinde bekçilik etmek olduğu söylenir sık sık. Bu görevi son derece iyi yerine getirmişlerdir. Ama aynı zamanda bu hazineyi kendi dâhice katkılarıyla zenginleştirmişlerdir. Dönemin sayısız birinci sınıf matematikçisi arasından, biraz kültürlü olan herkesin iyi bildiği bir tanesinin adını verebilirim: Ömer Hayyam. *Rubailer*'in yazarı, halifenin sarayının resmi astronomuydu. *Rubailer* Fars dilinde yazılmış olsa da, Ömer üçüncü ve dördüncü dereceden denklemleri çözmek için Yunan geometrisi ve Hint cebiri bilgisinden yararlandığı Arapça bir cebir yazmıştı. Öyle ki, kendisi grafiksel yöntemlerin fikir babası sayılabilir. Dahası, *binom* formüllerini Newton'dan önce keşfettiğine dair bulgular mevcuttur.

Buna karşın, Araplar sembolik yazılımda bir nebze yol almamıştır. Matematik tarihinin en garip olaylarından biri, Hint cebirini benimseyen Arapların onların ilginç kısaltmalı sembolizmlerini korumamış olmalarıdır. Tam tersine, Araplar Yunanlıların retorik cebirine dönmüş, hatta bir süre cebirle ilgili eserlerinden sayısal semboller bile çıkararak rakamları eksiksiz yazmayı tercih etmişlerdir. Aca-ba Araplar Helenlerin entelektüel mirasçıları oldukları yolundaki iddialarını Brahmanlara olan borçlarını reddedecek kadar ileri mi götürmüşlerdi?

İslam kültürü doruğa çıkarken Avrupa hâlâ derin uykudaydı. Büyük matematikçi Jacobi, Descartes üzerine söylevinde bu karanlık çağın ve bunun ardından yüzyıllarca süren geçiş döneminin muhteşem bir tasvirini verir:

Tarihte, yaklaşık MS 1000 yılında, sanat ve bilimin insanlığın hafızasından bile silindiği karanlık bir dönem yaşandı. Paganizmin son alacakaranlığı geride kalmış, buna rağmen yeni gün başlamamıştı. Kalan kültür dünya üzerinde sadece Sarazenlerce korunuyordu, öğrenme arzusuyla dolu bir Papa, kılık değiştirerek onların üniversitelerinde eğitim gördü ve Batı'nın bir mucizesi haline geldi. Nihayet, şehitlerinin kemiklerine dua etmekten sıkılan Hristiyanlık, Kurtarıcı'nın mezarına akın ettiğinde mezarın boş olduğunu ve İsa'nın dirildiğini ikinci kez gördü. Böylece insanlık da tekrar dirildi. Günlük yaşamın aktivitelerine ve işlerine döndü; sanatta ve zanaatta hararetle bir canlanma yaşandı. Şehirler gelişti ve yeni bir vatandaşlık anlayışı oluşturuldu. Cimabue yok olan resim sanatını, Dante de şiir sanatını yeniden keşfetti. Yine, Abelard ve Aquinalı Thomas gibi yüce cesur ruhlar Katolikliğe Aristocu mantığın kavramlarını katarak skolastik felsefeyi kurdu. Fakat bilimleri kanatları altına alan Kilise, kendi kanunları otoriteye nasıl koşulsuz şartsız iman ediyorsa, bilimin de aynı şekilde iman etmesini talep etti. Ve böylece skolastik düşünce, insan ruhunu özgürleştirmek şöyle dursun, onu yüzyıllar boyunca zincire vurdu; öyle ki sonunda özgür bilimsel araştırma olasılığının kendisinden bile şüphe duyulur oldu. Nihayetinde ise, burada da şafak söktü ve güven kazanmış insanlık, kendisine bahşedilmiş nimetlerden yararlanmaya ve bağımsız düşünceye dayalı bir doğa bilimi oluşturmaya karar verdi. Bu günün şafağı tarihte Rönesans veya Öğrenmenin Canlanması olarak bilinir.

Kuşkusuz Haçlı Orduları'nın programında kültür edinimlerinin yeri yoktu. Buna karşın, Haçlı Seferleri tam da bunu başardı. Üç yüz yıl boyunca Hristiyan güçler "kültürlerini" kılıçla Müslümanlara dayatmaya çalıştı. Fakat sonuçta, Arapların üstün kültürü yavaş ama kesin bir biçimde Avrupa'ya nüfuz etti. Avrupa ilminin canlanması büyük ölçüde İspanya ve Doğu Akdeniz Arapları sayesinde oldu.

İlimin canlanması İtalya'da başladı. Matematik alanında kayda değer ilk çalışma, sıradışı bir yeteneğe sahip olan Fibonacci tarafından gerçekleştirilmiştir. Fibonacci'nin irfanı ve sezgisi, içinde bulunduğu on üçüncü yüzyıla göre son derece ileriydi. Tüccar sıfatıyla Yakındoğu'ya çokça seyahat etmiş ve dönemin Arap ilmini özümsemişti; fakat aynı zamanda Yunan matematik literatürüne de aşinaydı.

Aritmetik cebir ve geometriye yaptığı katkılar, sonraki üç yüz yıl boyunca İtalyan matematiğinin zengin kaynağını oluşturdu. Bundan bir sonraki bölümde bahsedeceğim.

Cebir tarihinin dönüm noktası, Latince Franciscus Vieta adı altında yazan Fransız Viète'nin on altıncı yüzyıl sonlarında kaleme aldığı bir makaleydi. Vieta'nın günümüzde bize çok basit görünen büyük başarısı, eserden alıntılanan aşağıdaki paragrafta özetlenmiştir:

Burada yardımımıza, bilinen sayıları bilinmeyen veya arananlardan ayırt etmemizi sağlayan bir yöntem koyuyor: doğada daimi olan, kolay anlaşılır bir sembolizm. Buna göre, örneğin bilinmeyen sayılara A veya diğer bir sesli harf atayabilir, bilinen sayılarıysa B, C, G veya diğer sessiz harflerle ifade edebiliriz.

Bu sesli-sessiz harf gösterimi kısa ömürlüydü. Vieta'nın ölümünü takip eden yarım asırlık dönem içerisinde çıkan Descartes'ın *Géometrie* adlı eserinde, alfabenin ilk harfleri bilinen nicelikler için, son harfleriye bilinmeyenler için kullanılıyordu. Kartezyen gösterim, Vieta gösteriminin yerine geçmekle kalmamış, günümüze kadar geçerliliğini korumuştur.

Vieta'nın önerilerinden çok azı bire bir uygulanmış olsa da, özleri kesinlikle benimsenmişti. Harflerin belirsiz fakat sabit sayılar için sistemli biçimde kullanılması –kendi deyimiyle *Logistica Speciosa* veya "türlerle hesaplama"– matematiğin gelişiminde baskın bir rol oynamıştır ve Vieta'nın büyük başarısıdır.

Sokaktaki adam, Vieta'nın başarısını gerçek anlamda takdir edemeyebilir. Harf formülü basit bir formalite, en iyi ihtimalle kullanışlı bir steno değil mi sadece? Şüphesiz,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

yazmak kolaylıktır, fakat akla aynı özdeşliğin sözel biçiminden fazlasını getiriyor mu? "İki sayının toplamının karesi, sayıların çarpımlarının iki katıyla karelerinin toplamına eşittir."

Harfli gösterim de başarılı tüm yeniliklerin akıbetine uğramıştır. Bunların evrensel kullanımı, daha başarısız yöntemlerin moda olduğu zamanları tasavvur etmeyi güçleştirir. Günümüzde harflerin ge-

nel nicelikleri temsil ettiği formüller neredeyse ortak dil kadar tanıdık olsa ve sembolleri kullanma becerimiz çoğu kişi tarafından adeta bütün zeki insanların doğal yeteneği olarak kabul edilse de, bunlar sadece zihnimizin sabit bir alışkanlığı haline geldiği için doğaldır. Vieta'nın döneminde bu formül çağların geleneğinden radikal bir sapıştı. Gerçekten de, büyük Diophantos ve uyanık Arap haleflerinin dikkatinden tümüyle kaçan ve usta Fibonacci'nin keşfetmeyi kıl payı kaçırdığı bir araca nasıl doğal diyebiliriz!

Cebir tarihi ile aritmetik tarihi arasında çarpıcı bir benzerlik vardır. Aritmetik tarihinde, sıfır sembolü olmadığı için insanlığın binlerce yıl yetersiz bir numaralandırma ile çırpındığını gördük. Buradaysa genel bir gösterim eksikliği cebiri sayısal denklemlerin çözümü için gelişigüzel bir kurallar toplamına indirgemıştır. Tıpkı sıfırın keşfinin günümüz aritmetiğini yaratması gibi, harfli gösterim de cebir tarihinde yeni bir çağ açmıştır.

Bu sembolizmin gücü nereden geliyor?

Her şeyden önce, harfler cebiri sözcüklerin köleliğinden kurtardı. Burada sadece, harfli gösterim olmaksızın herhangi bir genel ifadenin, insan dilinin tüm belirsizlik ve yanlış yorumlarına açık bir laf kalabalığı olacağını söylemiyorum. Bu da çok önemli; fakat daha da önemlisi harfler yüzyıllarca sözcüklere bağlanmış tabulardan kurtulmuş durumda. Diophantos'un *arithmos*'u, Fibonacci'nin *res*'i yerleşik kavramlardı: Tüm bir sayı, tamsayı anlamına geliyorlardı. Ama Vieta'nın *A*'sı veya günümüzde kullandığımız *x*, temsil ettiği varsayılan somut nesneden bağımsız bir varlığa sahiptir. Sembol, sembolize edilen nesneyi aşan bir anlama sahiptir: İşte bu yüzden *salt bir formalite değildir*.

İkinci olarak, harfler işlemlere açıktır ve yazılı ifadeleri dönüştürerek bir dizi eşdeğer biçim ile açıklamayı sağlar. *Cebiri uygun bir steno düzeyinin üzerine çıkaran*, bu dönüşüm gücüdür.

Harfli gösterimin icadından önce sadece bireysel ifadeler kullanılabiliyordu; her bir ifade, örneğin $2x + 3$; $3x - 5$; $x^2 + 4x + 7$; $3x^2 - 4x + 5$ kendi özgün kimliğine sahipti ve kendi içinde ele alınması gerekiyordu. Harfli gösterim bireyselden kolektife, "bazı"dan "herhangi" ve "tüm"e geçişi sağladı. Doğrusal biçim $ax + b$, ikinci dereceden biçim $ax^2 + bx + c$ gibi ifadelerin her biri şimdi tek bir tür ola-

rak görülüyor. Tüm uygulamalı matematiğin esasları olan genel fonksiyonlar kuramını mümkün kılan budur.

Ama *logistica speciosa*'nın en önemli ve bu çalışmada bizi en çok ilgilendiren katkısı, genel sayı kavramının oluşmasında oynadığı roldür.

Sayısal denklemlere, örneğin

$$(I) \quad x + 4 = 6$$

$$2x = 8$$

$$x^2 = 9$$

$$(II) \quad x + 6 = 4$$

$$2x = 5$$

$$x^2 = 7$$

denklemlerine baktığınızda, (ortaçağdaki çoğu cebirci gibi) denklemlerin ilk grubunun mümkün olduğu, ikinci grubun ise mümkün olmadığı ifadesi ile yetinebilirsiniz.

Ama aynı türdeki harfli denkleme bakıldığında,

$$x + b = a$$

$$bx = a$$

$$x^n = a$$

verilerin belirsizliği, bizi probleme *imlenmiş* veya *sembolik* bir çözüm sunmaya mecbur bırakır:

$$x = a - b$$

$$x = a / b$$

$$x = \sqrt[n]{a}$$

Bundan sonra, $a - b$ ifadesinin sadece a 'nın b 'den büyük olması halinde anlamlı olacağı, a eğer b 'nin bir katı değilse a/b 'nin anlamsız olacağı ve a bir sayının n . dereceden tam üssü değilse $\sqrt[n]{a}$ 'nın bir sayı olmayacağı boş yere öne sürülecektir. *Anlamsız*'ın yazılmış olması bile buna bir anlam kazandırmıştır; adı olan bir şeyin varlığını inkâr etmek kolay değildir.

Dahası, $a > b$ olması, a 'nın b 'nin bir katı olması, a 'nın bir sayının n . dereceden tam üssü olması koşuluyla, $a - b$; a/b ; $\sqrt[n]{a}$ gibi semboller üzerindeki işlemlerde geçerli olacak kurallar tasarlanır. Ama er geç, bu sembollerde görünüşte mantıklı veya mantıksız bir durumla karşı karşıya olduğumuzu belirtecek bir şey bulunmadığı olgusunun ta kendisi, bize bu sembolik varlıklarla *gerçek rakamlarmışçasına* işlem yapmakta bir çelişki olmadığını düşündürecektir. Buradan da

bu sembolik varlıkların *bütünüyle sayı* olarak tanınmasına geçmek için küçük bir adım yeterlidir.

Cebirin erken döneminin (veya daha ziyade genel sayı kavramına yol açan aşamasının) öyküsü ana hatlarıyla böyledir. Şimdi iki sebepten tarihi güzergâhtan ayrılmamız gerekiyor. Birincisi, Vieta'dan sonra matematik öyle hızlı gelişti ki, sistemli biçimde açıklanması bizi bu kitabın kapsamının dışına çıkarır. Dahası, ilerleme sadece teknikle sınırlı olduğu sürece sayı biliminin temeli bu gelişmeden çok az etkilenmiştir.

Modern aritmetiği Vieta öncesi dönemden ayıran, "imkânsız" a yönelik tutumdaki değişimdir. On yedinci yüzyıla kadar cebirciler bu terime mutlak bir anlam yükledi. Tüm aritmetik işlemlerinin tek alanı olarak doğal sayılara bağlı kalıp olabilirliği –veya kısıtlı olabilirliği– bu işlemlerin içsel bir özelliği kabul ettiler.

Buna göre, *doğrudan* aritmetik işlemleri olan toplama ($a + b$), çarpma (ab), üs alma (a^b) *her şekilde mümkünken*; bunların tersi olan çıkarma ($a - b$), bölme (a/b), kök alma ($\sqrt[n]{a}$) sadece kısıtlı koşullarda mümkündü. Vieta öncesi cebirciler bu olguları belirtmekle tatmin olmuştu, ama problemi daha yakından analiz edemiyorlardı.

Bugün imkân ve imkânsızlığın her birinin sadece görelî bir anlama sahip olduğunu, hiçbirinin işlemin ayrılmaz bir özelliği olmadığını, sadece *insanların geleneklerinin işlenen alanına koyduğu bir kısıtlama* olduğunu biliyoruz. Engelleri kaldırıp alanı genişletirseniz imkânsız mümkün olacaktır.

Doğrudan aritmetik işlemleri birbirlerini takip eden *yinelemelerden*, önsel olarak sınırsız kabul edilen ardışık doğal sayılara adım adım nüfuzdan başka bir şey olmadıklarından, her şekilde mümkündür. Bu varsayımı atıp işlenen alanını sonlu bir toplamla (diyelim ilk 1000 sayı ile) kısıtladığınızda, $925 + 125$ veya 67×15 gibi işlemler imkânsız ve bunlara bağlı ifadeler de anlamsız hale gelecektir.

Veya alanın sadece tek sayılarla kısıtlı olduğunu varsayalım. Herhangi iki tek sayının çarpımı tek sayı olduğu için, çarpma işlemi yine de her şekilde mümkündür. Buna karşın, böyle kısıtlı bir alanda toplama büsbütün imkânsız bir işlemdir, zira herhangi iki tek sayının toplamı asla tek sayı değildir.

Öte yandan alan *asal* sayılarla kısıtlı olursa, iki asal sayının çarpımı asla asal sayı olmadığından çarpma işlemi imkânsız olacaktır; buna karşın toplama işlemi sadece terimlerden birinin 2, diğerinin bir çift ikiz asal sayının küçüğü olduğu $2 + 11 = 13$ gibi nadir durumlarda mümkün olacaktır.

Başka örnekler de verilebilir, fakat bu birkaç tanesi bile mümkün, imkânsız ve anlamsız kelimelerinin *görelî* yapısını açığa çıkarmak için yeterlidir. Ve bu görelilik tanındığında, kısıtlı alanın uygun bir uzantısı yoluyla ters aritmetik işlemlerinin doğrudan işlemler gibi her şekilde mümkün kılınıp kılınamayacağını sorgulamak doğaldır.

Bunu çıkarma işleminde de uygulayabilmek için *doğal sayılar dizisine sıfırı ve negatiftamsayıları eklemek* yeterli olacaktır. Bu şekilde oluşturulan alan genel *tamsayı alanı* olarak anılır.

Benzer biçimde, bu tamsayı alanına pozitif ve negatif *kesirlerin* katılması bölme işlemini her şekilde mümkün kılar.

Bu şekilde yaratılan sayılar (tamsayılar, pozitif ve negatif kesirler ve sıfır sayısı) *rasyonel sayılar bölgesini* oluşturur. Tamsayı aritmetiğinin doğal sayılar bölgesinin yerini alır. Bundan önce sadece tamsayılarda uygulanan dört temel işlem, artık *benzetim* yoluyla bu genel sayıları da kapsar.

Tüm bunlar çelişkiye düşmeden başarılabilir. Ve dahası, az sonra ele alacağımız tek bir koşulla, *herhangi iki rasyonel sayının toplamı, farkı, çarpımı ve bölümü de rasyonel sayıdır*. Bu önemli olgu çoğunlukla, rasyonel bölgenin temel aritmetik işlemleri bakımından *kapsalı* olduğu ifadesi ile açıklanır.

Tek fakat çok önemli çekince, sıfıra bölünmedir. Bu, $x \cdot 0 = a$ denkleminin çözümüne eşdeğerdir. Sıfır rakamını tanımlarken $a \cdot 0 = 0$ birimini kabul etmeye mecbur kaldığımız için, eğer a sıfır değilse denklem *imkânsızdır*. Buna göre, $x \cdot 0 = a$ denklemine karşılık gelen *hiçbir* rasyonel sayı yoktur.

Bunun aksine, $x \cdot 0 = 0$ denklemi x 'in herhangi bir rasyonel değeri ile gerçekleştirilebilir. Dolayısıyla, buradaki x *belirsiz* bir nice-liklidir. Bu tür denklemlere yol açan problem daha fazla bilgi sağlamadıkça, $0/0$ 'ın *herhangi* bir rasyonel sayının sembolü olduğunu ve $a/0$ 'ın *hiçbir* rasyonel sayının sembolü olmadığını kabul etmeliyiz.

Bu hususlar oldukça karmaşık görünse de, sembollerle yazıldığında şu kısa ifadeye indirgenecektir: a , b ve c herhangi üç rasyonel sayı ve a sıfırdan farklı olmak üzere,

$$ax + b = c$$

denklemini gerçekleştiren bir x rasyonel sayısı daima vardır ve *tektir*.

Bu denklem *doğrusal* olarak adlandırılır ve çeşitli denklemler arasında en basit türdür. Doğrusalın ardından ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci ve genellikle her dereceden *cehirs*el denklemler gelmekte olup, n derecesi

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + px + q = 0$$

denkleminde bilinmeyen x 'in en büyük üssü anlamına gelir.

Ama sonsuz çeşitlilikteki denklemler bunlarla bitmez; *üssel*, *trigonometrik*, *logaritmik*, *daire*sel, *eliptik* vb. denklemler, çoğunlukla hepsini kapsayan *aşkın* terimi altında sınıflandırılan daha geniş bir çeşitliliği oluşturur.

Rasyonel sayılar bölgesi bu sonsuz çeşitlilikle baş edebilir mi? Sonraki bölümde cevabın kesinlikle hayır olduğunu göreceğiz. Sayı bölgesi genişledikçe karmaşıklık seviyesi artacaktır. Ama bu genişleme keyfi değildir; genelleştirme yöntemi mekanizmasının ta kendisinde yol gösteren ve birleştirici bir fikir gizlidir.

Bu fikir bazen *kalıcılık ilkesi* olarak adlandırılır. İlk kez Alman matematikçi Hermann Hankel tarafından 1867'de açıkça formüle edilmiştir, ama fikrin özü on dokuzuncu yüzyılın en özgün ve verimli beyinlerinden biri olan Sir William Rowan Hamilton'ın yazılarında zaten bulunuyordu.

Bu ilkeyi bir tanım olarak ifade edeceğim:

Sonsuz sayıdaki sembolden meydana gelen derleme *sayı alanı*, buradaki her bir öğeye de *sayı* denir, *şayet*:

Bir: Derlemin öğeleri arasında *doğal sayılar* dizisini bulabilirsek.

İki: Herhangi iki öğenin eşit olup olmadığını, eşit değillerse hangisinin büyük olduğunu anlamamızı sağlayacak derece kıstasları oluşturabilirsek (bu iki öğe doğal sayı olduğunda bu kıstaslar doğal kıstaslara indirgenecektir).

Üç: Derlemin herhangi iki ögesinde, doğal işlemlerin aynı isimle-ri taşıyan değişme, birleşme ve dağılma özelliklerine sahip bir *toplama* ve *çarpma* yöntemi oluşturabilirsek (bu iki öge doğal sayı oldu-ğunda bu işlemler doğal işlemlere indirgenecektir).

Epey genel olan bu hususlar, kalıcılık ilkesinin özel vakalarda nasıl işlediğine dair soruyu cevapsız bırakır. Hamilton *cebirsel eşleştirme* adını verdiği bir yöntemle bize yolu göstermiştir. Bunu rasyonel sayılar üzerinde açıklayacağız.

Eğer a, b 'nin bir katı ise, a/b sembolü a 'nın b 'ye bölümünü gösterir. Buna göre $9/3 = 3$, gösterilen bölme işleminde bölümün 3 olduğu anlamına gelir. Şimdi, elimizdeki bu iki işlemde, sonuçların eşit, da-ha büyük veya daha küçük olduğunu, işlemleri gerçekten yapmadan saptamanın bir yolu var mı? Evet, aşağıda görüldüğü gibi:

$$\text{Derecelendirme kriteri} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} , \quad ad = bc \text{ ise} \\ \frac{a}{b} > \frac{c}{d} , \quad ad > bc \text{ ise} \\ \frac{a}{b} < \frac{c}{d} , \quad ad < bc \text{ ise} \end{array} \right.$$

Ve daha da ilerleyebiliriz; gösterilen işlemleri yapmadan, göste-rilen bu sayılarla işlem yapma kurallarını üretebiliriz:

$$\text{Toplama: } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\text{Çarpma: } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Şimdi a 'nın b 'nin bir katı olduğunu *varsaymayalım*. a/b 'yi yeni bir matematiksel varlık alanının sembolü kabul edelim. Bu sembolik yapılar düzgün sırayla yazılmış iki tamsayıya, a ve b 'ye dayanır. *Çiftlerin* bu derlemesine yukarıda belirtilen derecelendirme kıstası-nı uygulayacağız: Yani, örneğin şunu öne süreceğiz:

$$\frac{20}{15} = \frac{16}{12} \quad \text{çünkü } 20 \times 12 = 15 \times 16$$

$$\frac{4}{3} > \frac{5}{4} \quad \text{çünkü } 4 \times 4 > 3 \times 5$$

Bu çiftlerin işlemlerini, yukarıda gösterdiğimiz üzere, a sayısı b 'nin katı ve c sayısı d 'nin katı iken doğru olan kurallara göre *tanımlayacağız*; yani örneğin şunu söyleyeceğiz:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{(2 \times 5) + (3 \times 4)}{5 \times 3} = \frac{22}{15}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$$

Artık kalıcılık ilkesinin tüm koşullarını yerine getirdik:

1. Herhangi bir doğal sayıyı çift olarak yazabildiğimizden, yeni alan, doğal sayıları alt-alan olarak içerir:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \dots$$

2. Yeni alan, a/b ve c/d doğal sayı olduğunda doğal kriterlere indirgenecek derecelendirme kıstaslarına sahiptir.

3. Yeni alan, a/b ve c/d doğal sayı olduğunda indirgendikleri toplama ve çarpmanın tüm özelliklerine sahip iki işlem içerir.

Böylece bu yeni varlıklar ilkenin tüm koşullarını karşılar. Doğal sayılara eklenme haklarını, *sayı* adının asaleti ile donatılma haklarını kanıtlamışlardır. Buraya kabul edilmişlerdir ve eski ile yeninin her ikisini de kapsayan sayı alanına *rasyonel sayı bölgesi* adı verilmiştir.

İlk bakışta kalıcılık ilkesinin, işlem seçiminde önerdiği genel sayıyı pratik değeri olamayacak kadar genelleştiren bir tolerans payı bıraktığı düşünülebilir. Bununla beraber, doğal dizinin bu alanın bir parçası olması ve temel işlemlerin (doğal işlemler gibi) değişme, birleşme, dağılma özelliklerine sahip olmasına ilişkin koşullar, göre-

ceğimiz gibi sadece çok özel alanların yerine getirebileceği kısıtlamalar getirir.

Aritmetiğin kalıcılık ilkesinde formüle edilen konumu, genişlemeye kararlı fakat kendisini güçlendiren temel yasaları da korumak isteyen bir devletin izlediği politikaya benzetilebilir. Bu iki farklı amaç –bir taraftan genişlemek, diğer taraftan homojenliğin korunması– birliğe yeni devletlerin kabulüne ilişkin kuralları da doğal olarak etkileyecektir.

Böylece kalıcılık ilkesinin ilk noktası, *birliğin gidişatını çekirdek devletin belirleyeceğinin* ilanına karşılık gelir. Ardından, asıl devlet her vatandaşın bir rütbeye veya dereceye sahip olduğu bir oligarşi olduğundan, bu koşulu yeni devletlere de dayatır. Bu koşul kalıcılık ilkesinin ikinci noktasına karşılık gelir.

Son olarak bu ilke, birliğe kabul edilen her bir devletin vatandaşlarını kaynaştırma yasalarının, bu devletlerin vatandaşları ile çekirdek devletin vatandaşları arasında engelsiz ilişkilere izin verecek türde olmasını şart koşar.

Elbette okurun benzetmeyi düzanlamıyla almasını istemiyorum. Bu benzetme, daha aşına bir alandan zihinsel çağrışım yapması ve böylece kalıcılık ilkesinin görünürdeki yapaylığını gidermesi umuduyla öne sürülmüştür.

Rasyonel bölgenin yaratılmasına yol açan bu hususlar, *matematiğin aritmetikleştirilmesi* adındaki tarihi bir sürecin ilk adımlarıdır. Geçtiğimiz yüzyılın altmışlı yıllarında Weierstrass ile başlayan bu hareket, *sayı*, *mütekabiliyet* ve *küme* gibi saf matematiksel kavramları matematiğin geometri ve mekanik bilimi ile uzun birlikteliğinden kazandığı sezgisel fikirlerden ayırmayı amaçlar.

Biçimcilerin görüşüne göre bu sezgisel fikirler matematiksel düşünce içinde öylesine kemikleşmiştir ki, sözcük seçiminde son derece dikkatli olunmasına karşın, kullanılan sözcüklerin arkasındaki saklı anlam mantığımızı etkileyebilir. Zira insani sözcüklerdeki sorun *içeriğe sahip olmalarıdır*; oysa matematiğin amacı saf düşünce biçimleri yaratmaktır.

Ama insan dilinin kullanımından nasıl kaçınabiliriz? Cevap, *sembol* kelimesinde yatar. Ancak sezgisel kökenli olan ve saf mantığı gölgeleme eğilimi gösteren *uzay*, *zaman*, *süreklilik* gibi belirsiz fi-

kirlerin henüz ele geçirmediği sembolik bir dil kullanarak matematiği mantığın sağlam temeli üzerine inşa etmeyi umabiliriz.

İtalyan Peano tarafından kurulan ve en modern temsilcileri Bertrand Russell ile A. N. Whitehead olan ekolün hedefi budur. Başlıca eserleri *Principia Mathematica*'da (Matematiksel İlkeler) Russell ile Whitehead açık, temel varsayımlarla başlayıp katı mantık ilkeleleriyle devam ederek modern matematiğin tüm temelini yeniden inşa etmeye çalışmıştı. Kesin sembollerin kullanımının insan dilinin ayrılmaz bir parçası olan belirsizliklere meydan vermeyeceğini düşünmüşlerdi.

Principia zorlu bir çalışmanın ve ulvi niyetlerin abidesi olarak kalacak. Yazarları saf mantık üzerinde yükselen, insan sezgileri ile bozulmamış bir yapı dikmekte başarılı oldu mu? Üç cildini de okumuş bir matematikçi ile hiç karşılaşmadığım için bu soruya cevap vermeye ehil değilim. Matematik çevrelerinde *Principia*'yı baştan sona okumuş sadece iki kişinin olduğu rivayet edilir. Bu tahminin yazarların kendilerini de içerip içermediğini öğrenemedim.

Peano-Russell ekolünün aşırı biçimciliğine sempati duymadığımı, sembolik mantık yöntemlerini bir türlü sevemediğimi, karmaşık sembolizmlerine hâkim olmaya yönelik sürekli çabalarımın kaçınılmaz olarak umutsuz bir kafa karışıklığı ve çaresizlikle sonuçlandığını itiraf ediyorum. Bu beceriksizliğim şüphesiz düşüncelerimi de etkiledi, ki bu da önyargılarımı burada dile getirmem için güçlü bir neden.

Yine de bu önyargıların matematiksel sembolizmin rolünü küçük görmeme neden olmadığına eminim. Kanımca, bu sembolizmin muazzam önemi, sezgiyi insanın düşünce âleminde sürmeye yönelik nafîle çabalarda değil, yeni düşünce biçimleri oluşturmada *sezgiye yardım edecek* sınırsız gücünde yatıyor.

Bunu anlamak için modern matematiğin karmaşık teknik sembolizmine hâkim olmak gerekli değildir. Dilin daha basit fakat daha incelikli sembolizmi üzerinde düşünmek yeterlidir. Zira dilimiz kesin beyanlarda bulunabildiği kadarıyla, bir sembol sisteminden, mükemmel bir retorik cebirden başka bir şey değildir. Adlar ve ibareler sadece nesne sınıflarının sembolleridir, fiiller ilişkileri temsil eder ve cümleler bu sınıfları bağlayan önermelerdir. Yine de, sözcük bir

sınıfın soyut sembolü olsa da, *bir imgeyi*, sınıfın örnek bir unsurunun somut bir resmini çağrıştırma kapasitesine de sahiptir. Daha sonra mantık ile sezgi arasında doğacak çatışmanın tohumlarını dilimizin bu çift işlevinde aramalıyız.

Genelde sözcükler için doğru olan, özelde *doğal* sayıları temsil eden sözcükler için de doğrudur. Zihnimizde somut derlemlerin görüntülerini çağrıştırma gücüne sahip olduklarından, bize *mutlak* bir doğaya sahip olacak derecede katı gerçekliğe kök salmış gibi görünürler. Yine de, aritmetikte kullanıldıkları anlamda, işlem kuralları sistemine tabi bir dizi soyut sembolden başka bir şey değildirler.

Bu sembolik yapısını kabullendiğimizde, doğal sayı mutlak niteliğini yitirir. Çekirdeğini oluşturduğu daha geniş bölgeyle olan temel benzerliği belirginleşir. Aynı zamanda sayı kavramının kademe kademe genişlemesi –ilk bakışta yapay ve gelişigüzel bir el çabukluğu gibi görünen bu aşamalar– kaçınılmaz bir doğal evrim sürecindeki adımlara dönüşür.

Ağza Alınamayanlar

Tanrı tamsayıları yarattı, gerisi insanlığın işi.

LEOPOLD KRONECKER

Pisagorcuların evrenini sayı yönetiyordu.

Sözcüğün modern anlamıyla sayı değil: Doğal sayı, tamsayı hüküm sürüyordu. Ama Pisagorcuların evreni bizim dolaysız evrenimiz—duyu algımızı aşan, kendini günlük hayatımızın en önemli kısmı haline gelmiş sayısız buluşta gizemli fakat cömert bir şekilde gösteren evrenimiz—değildi. Yunanlıların evreni duyuların erişimine daha dolaysızca açık olan şeylerle sınırlıydı.

Pisagorcular sesin armonisinde sayı felsefelerinin teyidini görmüştü. Görme ve dokunmanın ahengi, geometrinin mükemmel şekillerinde nihai ifadesini buluyordu: Çember ve küre, düzgün çokgenler ve mükemmel üç boyutlu cisimler, Ulu Mimar'ın dünyayı inşa ederken kullandığı öğelerdi. Burada da sayının hüküm sürdüğüne duyulan güven tamdı.

"Nokta konumda birliktir" düsturu Pisagor geometrisinin temeli oluşturuyordu. Bu süslü laf kalabalığının ardında, kolye nasıl boncuklardan oluşursa çizginin de bir dizi atomdan oluştuğu yönündeki naif düşünceyi görebiliriz. Buna göre, atomlar son derece küçük olsa da, özde homojen ve cismen eşit olduklarından kesin ölçü birimi olarak kabul edilebilirler. Dolayısıyla herhangi iki kesitin uzunluklarının oranı sadece her birindeki atom sayısının oranıdır.

Aynısı elbette herhangi bir üçgenin, özellikle dik üçgenin kenarları için de geçerlidir. Pisagorcular Mısır'dan kenarları 3:4:5 oranındaki "altın" üçgeni aldı. Çok geçmeden 5:12:13 ve 8:15:17 gibi di-

ğer Pisagor üçgenleri keşfedildi. Tüm üçgenlerin *rasyonel* olduğu inancını güçlendirecek kanıtlar mevcuttu. Üçgenlerin bazılarının –aslında birçoğunun– bu mükemmel oranları vermediği gerçeği pek de şaşırtıcı değildi; ne de olsa oranlar çok büyük rakamlara ulaşabilir ve Yunanlıların hesaplama tekniği pek ilkelidi.

Bir süre boyunca durum böyleydi.

Bu tür üçgenlerin tasavvuru halen Pisagor'un adını taşıyan ve klasik geometrinin temel teoremlerinden biri olan büyük bir keşfe yol açmıştır. Teorem şudur: *Herhangi bir dik üçgende dik kenarların karelerinin toplamı hipotenüsün karesine eşittir.* Efsaneye göre bu teorem Pisagor'un bizzat kendisi tarafından keşfedilmiştir ve Pisagor teoremin zarafetinden öylesine etkilenmiştir ki tanrılara bir öküz kurban etmiştir. Bu efsanenin Pisagorcuların katı birer vejetaryen olduklarına dair yerleşik bilgi ile nasıl bağdaştırılabileceğini okura bırakıyorum.

Pisagor'un teoremine tümdengelimle ulaştığından şüphe edilebilir. Büyük olasılıkla bu ampirik bir sonuçtu. Önermenin kesin bir kanıtına sahip olması da aynı derecede düşük ihtimalliydi. Ama onun ve öğrencilerinin buna büyük önem verdiklerine şüphe yoktur; zira *burada geometri ile aritmetik arasındaki temel birliği, görüşlerinin yeni bir onayını görmüşlerdi: "Evreni sayı yönetir."*

Fakat bu zafer kısa ömürlüydü. Hatta teoremin ilk sonuçlarından biri başka bir keşif oldu: *Karenin köşegeni, kenarına oranlı değildir.* Bunu ilk kimin ve nasıl keşfettiği muhtemelen sonsuza kadar sır olarak kalacaktır. Öklit'in aşağıda verilen güzel kanıtı kesinlikle daha ham bir yöntemin gelişmişidir. Fakat kim keşfetmiş olursa olsun, Pisagorcuların saflarında büyük şaşkınlık yarattığı su götürmez. Bu öğelere verilen adın kendisi de bunu doğrular. Bu oransız öğelere *alogon*, "ağza alınamayanlar" adı verilmiş ve mezhep üyeleri bunların varlıklarını yabancılara açmamaya yemin etmiştir. Mimar'ın eserinde açıklanamayan bir kusur ifşa edilmiştir, gazabının insanlara yönelmemesi için son derece gizli tutulması gereken bir kusur.

Proclos diyor ki:

Denir ki bu irrasyonel sayıları saklandıkları yerden ilk kez açığa çıkarılanların hepsi deniz kazasında yok olmuştur. Zira ağza alınamayanlar ve biçimsizler gizli tutulmalıdır. Hayatın bu suretini ifşa edip ona dokunanlar

derhal helak edilmiştir ve sonsuza dek ebedi dalgaların oyununa maruz kacaklardır.

Üstünden bir yüzyıl bile geçmeden Pisagorcuların sırrı düşünen tüm insanların malı olmuştu. Ağza alınamayan söylenmiş, düşünülemeyen sözcüklere bürünmüş, gösterilemeyen mezhep dışındakilerin nazarına sunulmuştu. İnsanlık yasak bilgi meyvesinin tadını almış ve Pisagor sayılarının cennetinden kovulmaya mahkûm olmuştu.

İrrasyonel sayıların gelişi, doğa felsefesi sistemi olarak Pisagorculuğun çöküşünü de beraberinde getirmişti. Pisagorcuların vaaz ettiği aritmetik nesnelerle geometrik nesneler arasındaki o mükemmel uyumun uydurma olduğu ortaya çıkmıştı: Sayı daha evrenin en dolaysız görünümünü, *geometriyi* açıklayamazken evrene nasıl hâkim olabilirdi?

Doğayı sayı ile tüketmeye yönelik ilk teşebbüs böylece sona erdi.

Çoğu klasik ispat gibi, karenin köşegeninin kenarıyla oransızlığına dair Öklit'in kanıtı da *reductio ad absurdum* (saçma olana indirgeme) türündedir. Salt sayı kuramına dayandığı için sadece görünürde geometriktir. Karenin her bir kenarının bir olarak alındığı ve köşegenin x ile gösterildiği modern ifadede, Pisagor teoremi problemi ikinci dereceden denklem çözümüne indirgenir:

$$(1) \quad x^2 = 1^2 + 1^2 \text{ veya } x^2 = 2$$

Bu denklemi rasyonel sayı p/q ile gerçekleştirmek mümkünse, köşegenle kenar oranlıdır. Durumun bu olduğunu ve p/q kesrinin *en sade halde* olduğunu varsayalım. O halde iki tamsayıdan biri yani p veya q tek sayı olmalıdır. P sayısının tek sayı olamayacağını göstereceğim. Gerçekten de denklem (1)'de x 'in yerine p/q getirildiğinde;

$$(2) \quad \frac{p^2}{q^2} = 2 \text{ veya } p^2 = 2q^2$$

olup p^2 ve dolayısıyla p 'nin çift sayı olduğu görülür.

Şimdi, p çift sayı olduğuna göre, r 'nin diğer bir bilinmeyen tamsayı olduğu $p = 2r$ denklemini kurabiliriz. Bunu denklem (2)'ye yerleştirdiğimizde

$$(3) \quad 4r^2 = 2q^2 \text{ veya } q^2 = 2r^2$$

elde edilir ki bu da (2) ile aynı türdedir. Ama bu, q tamsayısının da çift sayı olduğu anlamına gelir ve p/q 'nın en sade halde olduğu varsayımımızla çelişir, dolayısıyla $x^2 = 2$ denklemini rasyonel sayı ile gerçekleştirmenin olanaksızlığını gösterir.

Argüman son derece geneldir. Biraz değiştirildiğinde aşağıdaki denkleme

$$\begin{aligned} x^2 &= 3, x^2 = 5, x^2 = 6, \\ x^3 &= 2, x^3 = 3, x^3 = 4 \end{aligned}$$

ve daha genel olarak aşağıdaki denkleme uygulanabilir:

$$x^n = a$$

a bir rasyonel sayının n. dereceden tam üssü değilse, $x^n = a$ denklemini rasyonel çözüm içermez.

İskenderiyeli Hero ve İzmirli Theon gibi daha az tanınan Yunanlı geometricilerin yazılarında irrasyonel sayılar $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ vs. için yaklaşık değerler vardır. Bu değerlerin elde edildiği yöntemden bahsedilmemiştir. Bu durumların çoğunda yaklaşık değerler gayet isabetli olduğundan, matematik tarihçileri bilinmeyen yöntemleri tahmin etme konusunda hayal güçlerini serbest bırakmışlardır. Bu tür kuramlar çok fazla sayıdadır. Yunan matematikçilerinin sonsuz serileri veya sürekli kesirleri bildiğini düşünenler vardır. Ben de kendi kuramımı oluşturmaya cüret ediyorum – her ne kadar aynı ölçüde spekülatif olsa da, en azından Yunanlıların modern yöntemlerde tecrübeli olduklarını varsaymama meziyetine sahip bir tahmin.

Benim kuramım şöyle: Öklit'in $\sqrt{2}$ 'nin irrasyonelliğinin kanıtı –ortalama bir Yunanlı matematikçi için– inandırıcı olamayacak kadar egzotikti. Pisagorcular arasında $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ vs. için rasyonel bir değer bulma umudunu yitirmemiş inatçılar olabilirdi. Bu tür rasyonel değerlere yönelik arayış muhtemelen gayet doğal bir doğrultuda ilerlemişti. Örneğin 2 sayısı, paydası tam kare olan bir kesir biçiminde sonsuz şekilde yazılabilir:

$$\frac{2}{1} = \frac{8}{4} = \frac{18}{9} = \frac{32}{16} = \frac{50}{25} = \frac{72}{36} = \frac{128}{64} = \frac{200}{100} = \dots$$

$\sqrt{2}$ bir rasyonel sayı olsaydı, yeterince "uzaklaşmak" suretiyle yine payı tam kare olan bir kesir de bulunabilirdi. Matematikçiler elbette bunda başarısız oldu, ama yan ürün olarak mükemmel bir yaklaşıtı-
rım elde edildi. Gerçekten de

$$\frac{288}{144} = 2,$$

iken

$$\frac{289}{144} = \left(\frac{17}{12}\right)^2.$$

Bu işlem $\sqrt{2}$ için Theon'un tahmini olan $1^5/12$ 'yi verir ve bu kesrin gerçek değerle arasındaki fark %1'in $1/7$ 'sinden azdır.

Ne kadar doğru olduğunu bilemem ama benim kuramım böyle.

Geometride bazıları son derece basit olan, ama en azından kendimizi sayıların rasyonel alanı ile sınırladığımız sürece hiçbir *sayısal* çözüm kabul etmeyen çok çeşitli problemler vardır. Kenarı bir birim uzunluğunda olan karenin köşegenini ele alalım. Cetvel ve pergelle temel yapıları öğrenmiş bir çocuk köşegeni *geometrik* olarak saptayabilir. Aynısı ikinci, üçüncü veya daha yüksek dereceli denklemlerin, hatta aşkın denklemlerin söz konusu olduğu diğer problemler için de geçerlidir. Yine de bu problemler *rasyonel aritmetik*le sınırlı her tür teşebbüsten kaçır.

Diğer taraftan, irrasyonel sayılar istenen doğruluk derecesine kadar rasyonel yaklaşıtımlar yoluyla ifade edilebilir. Yukarıdaki bölümde sunduğumuz prosedür tamamen geneldir. Benzer yapıdaki prosedürler şunlardır: okulda öğrendiğimiz karekök çıkarma *algoritması*, seri olarak açılım, sürekli kesirler ve rasyonel bir çözüm kabul etmeyen bir sorunla yüzleştirdiğimizde başvurabileceğimiz başka birçok farklı araç. Söz konusu yöntemler irrasyonel sayının, rasyonel sayılara ait (birincisi irrasyonelden daima "daha az", ikincisiyse daima "daha fazla") iki dizi arasında "yakalanmasını" sağlar. Daha-
sı, bu rasyonel yaklaşıtımların aralığını istediğimiz kadar küçültebiliriz.

Eh, daha başka ne istenir ki? Fizikçi, mühendis, pratik insan genellikle tamamen memnundur. Fizikçinin hesaplama yöntemlerinden

istediği şey, giderek hassaslaşan ölçüm aletlerinden tam fayda sağlmasına imkân verecek bir ayar derecesidir. $\sqrt{2}$, π veya e gibi belli sayıların rasyonel sayılarla *matematiksel* olarak ifade edilemez olması –matematik söz konusu sayılar için istediği doğrulukta rasyonel yaklaşımlar sağladığı sürece– fizikçinin uykusunu kaçırmaz.

Matematikçinin bu problem karşısındaki duruşu şu nedenle farklıdır: Rasyonel sayılar bölgesini bir *bütün*, bir *küme* olarak görür. Bu kümenin negatif sonsuzluktan sıfır yönünde pozitif sonsuzluğa uzandığını görür. Bu küme *sıralıdır*: Matematikçiye herhangi iki rasyonel sayı verdiğinizde hangisinin büyük olduğunu söyleyebilir. Birbirlerine ne kadar yakın olurlarsa olsunlar herhangi iki rasyonel sayı arasına bir üçüncüyü yerleştirebilir. Bunu kendi jargonunda, rasyonel bölgenin *her yerde yoğun* olduğunu söyleyerek ifade eder. Kısacası, rasyonel sayılar kümesini *görünüşte boşluksuz, tıkHz, sürekli bir kütle* kabul eder.

Ona göre, bununla doğru üzerindeki noktalar kümesi arasında çarpıcı bir benzerlik mevcuttur. Burada da küme her iki yönde sonsuza uzanır. Burada da herhangi iki öğeden hangisinin sağ tarafta olduğu söylenebilir. Burada da yoğunluk özelliği bulunur; birbirlerine ne kadar yakın olurlarsa olsunlar herhangi iki noktanın arasına bir üçüncüsü yerleştirebilir ve noktaların ne kadar yakın olduğu da önemli değildir. Bu analogi öylesine eksiksiz görünür ki, *rasyonel sayıların bölgesiyle doğru üzerindeki noktalar arasında bir mütakabiliyet* oluşturma bir yolu olmalıdır.

Bu mütakabiliyet *analitik geometrinin* temelini oluşturur, ki analitik geometri okumamış okurlarım bile ara sıra kullandıkları grafikler sayesinde bunun anlamına ilişkin oldukça iyi bir fikre sahiptir. Bu nedenle onlara sadece, şemanın herhangi bir doğru üzerinde bir pozitif ve bir negatif *anlam* tanımlamayı içerdiğini hatırlatmakla yetineceğim. "Anlam" yüklenmiş bu tür bir doğruya *eksen* adı verilir. Eksen üzerinde iki nokta seçeriz: sıfır sayısını temsil eden O (orijin) ve 1 sayısını temsil eden U (birim noktası). OU ile eşit uzunlukta olan bir dizi aralık ölçerek sağ tarafta pozitif tamsayılar ve aynı şekilde sol tarafta negatif tamsayılar elde ederiz. Birim kesiti herhangi bir sayıda tambölene bölerek herhangi bir pozitif veya negatif kesri de ifade edebiliriz.

Böylece herhangi bir rasyonel sayı eksen üzerinde bir nokta ile temsil edilebilir; hemen ardından da aksinin de doğru olup olmadığı, yani eksen üzerinde herhangi bir noktanın rasyonel bir sayıya tekabül edip etmeyeceği sorusu ortaya çıkar. Cevap vurgulu bir *hayır* olacaktır: Zira bir kenarı OU'ya eşit bir kare oluşturur ve bu karenin köşegenine eşit bir OD kesitini D noktasına taşırsak *hiçbir rasyonel sayıya* tekabül etmeyecektir.

Demek ki boşlukların yokluğu yalnızca bir hayalmiş! *Tüm* rasyonel sayıların eksen üzerinde *gösterilmesi* durumunda tıkHz bir küme elde ederiz etmesine, ama bu noktalar hiçbir şekilde doğruyu doldurmaz: Böyle gösterilemeyecek sonsuz sayıda boşluk kalacaktır. *İrrasyonel boşlukların rasyonel noktaları büyük bir farkla geçtiğini* hangi bağlamda iddia edebileceğimizi ileride göreceğiz.

Saf matematik açısından temel durum şudur: Her bir rasyonel sayı eksen üzerindeki bir noktaya tekabül eder, ama mütakabiliyet çift taraflı değildir. Eksen üzerinde, hiçbir rasyonel sayının atanamadığı noktalar vardır: Bu noktalar sadece sayısal olarak değil çeşitlilikte de sonsuzdur ve (örneğin $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, ... $\sqrt[n]{a}$ gibi) her bir çeşidi sonsuz sayıda *irrasyonel* nokta içerir.

Böylece yeniden sayı kavramını genişletme ödeviyle karşı karşıyayız. Sayı bölgesini rasyonel sayı kavramının ötesine taşımalıyız, zira beriki en basit ikinci dereceden denklemin çözümüne bile yetmeyecektir.

Daha önce çok değerli hizmetlerde bulunmuş olan kalıcılık ilkesine tekrar başvurmak doğaldır. $\sqrt[n]{a}$ sembolünü oluştururuz. $x^n = a$ denklemi rasyonel bir çözüme sahipse, yani a bir rasyonel sayının n . dereceden tam üssü ise bu sembol bir rasyonel sayıyı temsil eder. Bu özel durumu başlangıç noktamız olarak kullanarak, bu semboller üzerinde işlem yapmak için kurallar saptarız. Bu birimler daha sonra yeni bir sayı alanının, *temel irrasyoneller* alanının, $\sqrt[n]{a}$ tarafından sembolize edilen köklü sayıların tanımlayıcı bağıntıları olarak alınır. Ortak üsse indirgeme aracı sayesinde sıralama kıstasları kolaylıkla oluşturulur. Örneğin $\sqrt{2}$ ile $\sqrt[3]{3}$ 'ü karşılaştırmak istersek

$$\sqrt{2} = \sqrt[6]{8}; \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9}; \sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{8}$$

yazarız ve bu da bizi $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ eşitsizliğine götürür.

Çarpma ve bölme de aynı şekilde kolaylıkla tanımlanır. Rasyonel sayılarla ilişkili herhangi iki *köklü ifadenin* çarpımı da aynı türde bir ögedir. Örneğin,

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{(8 \times 9)} = \sqrt[6]{72}.$$

Ne var ki buna ilaveten aşılamaz bir güçlkle de karşılaşılır. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ gibi bir ifade, a 'nın rasyonel sayı olduğu $\sqrt[n]{a}$ biçiminde ifade edilemez. *İki temel irrasyonel sayının toplamı genellikle temel bir irrasyonel değildir.* Basit irrasyoneller alanı çarpma ve bölme açısından "kapalıdır" ama toplama ve çıkarmaya "sonuna kadar açıktır".

Tutarlı bir sistem kurmak için alanımızı bir an önce temelden $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ tipi *bileşik irrasyonellere* genişletmemiz gerekecektir. Ama bu tür bir genişletme öncesinde, bizi nelerin beklediğine bir göz atalım.

n 'in herhangi bir tamsayı ve katsayıların da herhangi birer rasyonel sayı olduğu en genel denklemi yani,

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + px + q = 0$$

denklemini "çözmek" üzere yola çıktığımızı unutmamalıyız. Bu gayet genel denklemler içinde şu âna kadar çok özel *binom* denklemini ele aldık,

$$ax^n + b = 0.$$

$n = 1$ durumu bizi rasyonel bölgeye götürdü. Genel durum olaya temel irrasyonelleri dahil etti. Peki ya genel denklemler? Denklem basit türden $x^n = A$ denklemine indirgenebilirse, biçimsel çözümü bizi temel irrasyonellere götürecektir. Esas soru şudur: Herhangi bir cebirsel denklem binom denklemlerine indirgenebilir mi? Veya diğer bir deyişle, *genel cebirsel denklemin çözümü biçimsel olarak köklü sayılarla ifade edilebilir mi?*

Bu problemin öyküsü tümevarımsal çıkarımın değerine mükemmel bir örnek teşkil eder.

Diophantos'un *Arithmetike* adlı eserinde özel ikinci dereceden denklem türleri bulunur. Hintliler bu kuramı daha da geliştirmiş, bu-

nunla bağlantılı olarak köklü ifade işlemlerinin kurallarını neredeyse bugün bildiğimiz biçimiyle ortaya koymuştur. Görev Arap matematikçilerce tamamlanmıştır: *İkinci dereceden* $ax^2 + bx + c = 0$ genel denkleminin biçimsel çözümünün $A + \sqrt{B}$ biçiminde olduğu bulunmuş, yani *rasyonel sayılar ve ikinci dereceden köklü ifadeler yoluyla ifade edilebilmiştir*.

Arapların daha sonra üçüncü dereceden $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ genel denklemini çözme çabalarının başarıya ulaştığı tam olarak söylenemez. Ömer Hayyam yaratıcı bir geometrik çözüm sunmuş olsa da, biçimsel bir cebirsel çözüm sağlamaya yönelik nafile çabaları onu üçüncü dereceden denklemin köklü ifadelerle çözölemeyeceğini ileri sürmeye yöneltmiştir. Problem Rönesans devrinin İtalyan matematikçilerini son derece büyülemiş ve bu matematikçiler tarafından başka bir yerde açıklayacağım koşullar altında on altıncı yüzyılda tamamen çözülmüştür. İtalyanlar, *üçüncü dereceden denklemin genel çözümünün üçüncü dereceden ve ikinci dereceden köklü ifadelerle ifade edilebileceğini* bulmuşlardır.

Neredeyse aynı zamanda, İtalyan Ferrari dördüncü dereceden denklemi yardımcı ikinci ve üçüncü dereceden denklemlerin çözümüne indirgemiş, böylece *dördüncü dereceden denkleme, üssü dördü aşmayan köklü ifadeler yoluyla biçimsel çözüm bulunabileceğini* kanıtlamıştır.

Doğal çıkarım, bunun genelde doğru olduğuydu: *Önceki örneklerle göre, n. dereceden denklem köklü ifadeler (muhtemelen n'den yüksek olmayan bir üsse sahip köklü ifadeler) yoluyla biçimsel çözüme kavuşturulabilmelidir*. Gerçekten de bu, on sekizinci yüzyılın çoğu matematikçisinin yaygın fikri olup, en kayda değer istisnalarından biri Lagrange'dır.

Problem on dokuzuncu yüzyılın ilk yarısına kadar çözülmedi. Matematikte sık rastlandığı üzere, problemin aşırı güç oluşu yeni yöntemler gerektirmiş ve yeni yöntemlerin, problemin gerektirdiğinden çok daha verimli ve geniş kapsamlı olduğu ortaya çıkmıştır. Ruffini, Abel ve Galois'nın temel katkıları sadece problemi çözmekle kalmamış, matematiği yeni ve temel bir kavramla da zenginleştirmiştir: *grup*.

Abel ve Galois gibi hem kişilik hem de dış görünüş açısından birbirinden bu kadar farklı iki adamın aynı problemle ilgilenip onu benzer yöntemlerle ele almaları oldukça tuhaftır. İkisi de *beşinci dereceden* denklem problemine, köklü ifadelerle çözümün mümkün olduğu düşüncesiyle yaklaşmıştı; Abel on sekizinde, Galois on altısında. Aslına bakılırsa bir süreliğine ikisi de bu tür bir çözüm keşfettiğini sanmıştı, ama çok geçmeden hatalarını fark ederek probleme yeni yöntemlerle saldırdılar.

1825 yılında Abel *beşinci dereceden genel denklemin sadece köklü ifadeler yoluyla çözülemeyeceğini* kesin olarak kanıtladı. Aynı kuralın beşinciden yüksek tüm denklemlerde de doğru olduğu kanısındaydı. Bu kanı Galois tarafından kesin olarak ispatlandı. "Bir denklemin köklü ifadelerle çözülebilmesi için nasıl bir özel yapısı olmalıdır?" sorusu Galois'nın vasiyet-anılarında tam olarak cevaplanmıştır. Galois'yı çoğunlukla "Galois grup kuramı" olarak adlandırılan yeni bir denklem kuramına götüren, bu özel problem olmuştur. Ne var ki söz konusu problem bu çalışmanın kapsamı dışındadır.

Devam etmek gerekirse, kalıcılık prensibinin irrasyoneller problemine uygulanması iki sebepten başarısız olmuştur. İlk olarak, temel irrasyoneller yani $\sqrt[n]{a}$ biçimindekiler kapalı bir alan oluşturmaz. İkinci olarak, *bileşik* irrasyonel biçimleri *dörtten yüksek* derecedeki genel denklemlerin çözümü için yetersizdir.

Kapsamlı bir teori oluşturmak için tüm *cebirsel* alanı –tüm *cebirsel* sayıları yani olası tüm cebir denklemlerinin çözümünü içerecek bir alanı– ele almak gerekir. Bu tür bir alan rasyonel alanı kesinlikle içine alacaktır. Dahası, cebirsel alanın sadece ilk dört temel işlem açısından değil, karekök alma açısından da kapalı olduğu, yani herhangi iki cebirsel sayının toplamı, farkı, çarpımı, bölümü, üsleri ve köklü ifadelerinin de cebirsel sayılar olduğu gösterilebilir. Ayrıca n 'nin tamsayı olduğu fakat $a, b, c \dots p, q$ 'nun rasyonel sayılarla kısıtlı olmayıp en genel türde cebirsel sayılar olabileceği

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots + px + q = 0$$

türünde en genel denklemi ele alırsak, bu tür bir denklemin çözümü (şayet varsa) *cebirsel bir sayı olacaktır*.

Yine de, cebirsel sayı kuramı kapsamlı olmakla beraber bazı büyük kusurlara sahiptir. İlk olarak, gerektirdiği simbolizm denklemin tüm katsayılarını içerdiği için muğlak ve kullanışsızdır. Dahası, bu tür semboller üzerindeki işlemler en basit işlemleri bile elverişsiz kılacak derecede karmaşıktır. Son olarak, doğrusalın üzerindeki cebirsel denklemin genellikle *birden fazla çözümü olması* gibi çok ciddi bir güçlük mevcuttur.

İkinci dereceden denklemin iki ve n . dereceden denklemin n kadar farklı çözümü olabilir. Bu tür bir prosedürün doğasında bulunan belirsizlik, özellikle *tek değerliliğin* başlıca kaygı olduğu problemlerde aşılamayan bir engeldir.

Sayı kavramını bu yönde genelleştirme hareketinin hız kazanmasından çok önce, Abel ve Galois'nın keşiflerini bile gölgede bırakan bir olay meydana geldi. 1844 yılında, École Normale'de profesör olarak hizmet veren ve önemli *Journal des Mathématiques*'in kurucusu olan Fransız matematikçi Jacques Liouville Paris Akademisi'nin önünde bir yazı okudu (yazı sonradan kendi dergisinde "Cebirsel olmayan, hatta cebirsel irrasyonellere bile indirgenemeyen son derece kapsamlı sayılar sınıfı üzerine" başlığıyla yayımlanacaktı). Çığır açan bu raporunda Liouville, yapıları nedeniyle herhangi bir cebirsel denklemin kökü olamayacak sayıları sergileyerek Legendre'in daha 1794'te dile getirdiği bir şüpheyi doğrulamış oldu.

Cebirsel sayıların çeşitliliği ne kadar zengin görünse de —elli yıl sonra Georg Cantor tarafından gösterileceği gibi— daha geniş, daha kapsamlı bir alan içindeki bir sahadan başka bir şey değildirler. Cantor, Liouville teoremine yeni bir kanıt sunarken, cebirsel olmayan ve *aşkın* olarak nitelenen bu sayılara ilişkin kuramı sağlam bir zemine oturttu. Fakat bundan daha sonra bahsedeceğiz.

Daha da garip olan, bu aşkın sayıların sadece matematiksel hayal gücünün anlaşılmaz bir ürününden, matematikçinin soyut kavramlara karşı iştahını kabartacak bir yemekten ibaret olmamasıydı. Kalkülüsün icadı, sonraki yüzyıllarda hemen her tür analiz probleminde baskın bir rol oynamaya başlayacak bir sayı sınıfını da beraberinde getirdi: *logaritmalar* ve *trigonometrik oranlar*. Bugün bu sayılar dünyanın hemen her mühendislik bürosunda her gün kullanımdadır ve uygulamalı matematiğin en güçlü aracını teşkil ederler. Liouville'in

duyurusunu izleyen elli yıl içinde, bu sayıların çoğunun aşkın sayı olduğu kesinlikle saptanmıştır. Bunu daha iyi anlamak için π sayısının tarihçesine bir göz atalım.

"Dökme tunçtan on arşın çapında, beş arşın derinliğinde, çevresi otuz arşın yuvarlak bir havuz yaptırdı." (2 Tarihler IV, 2)

Süleyman'ın tapınağındaki rahip havuzunun bu betimlemesi eski Yahudilerin, çemberin çevresinin çapına oranını ifade eden π sayısını 3 olarak aldıklarını gösterir. Bu değer aslından %5 azdır. Mısırlılar daha yakın bir tahminde bulunmuştu: Rhind papirüsünde (MÖ 1700) π 'nin değerinin $3\frac{1}{8}$ 'e, $256/81$ 'e veya $(16/9)^2$ 'ye eşit olduğunu görüyoruz, ki buradaki fazlalık %1'den daha azdır.

Bu niceliğin ilk zamanlardan beri Yunanlı matematikçiler arasında spekülasyon konusu olması doğaldır. Ama Yunan diyarında bu problem yeni bir karakter kazandı. Yunan mitolojisinin efsanevi ihtişamına bürünerek eski çağların meşhur problemleri arasında yerini aldı.

Bu problemler üç taneydi: *küpün iki eş küpe bölünmesi, bir açının üçe bölümü ve çemberin kareleştirilmesi*. Sonuncusu büyük ölçüde π sayısının saptanmasına eşdeğerdir, zira birim yarıçaplı bir çemberin alanı π kare birime eşittir ve π sayısı rasyonel olarak ifade edilebilirse sorun belli alana sahip bir karenin yapımına indirgenecektir. Hatta Mısırlıların değeri doğruysa, çemberin alanı, çapının $8/9$ 'u üzerine kurulmuş kare alanı ile aynı olacaktır.

Yunan geometrisinin büyük bölümü bu üç problem etrafında gelişti. Bunları çözme çabası içindeki Yunanlı geometriciler konik kesitlerle çok sayıda yüksek eğri keşfetti. Muhtemelen aradıkları gibi bir çözümün bulunmadığından şüphelenmediler ve problemin güç ve inatçı yapısı sadece çabalarını teşvik ederek Arşimet'ten Pergeli Apollonios'a kadar en büyük beyinleri geometri alanına çekti.

Bahsedilen ilk iki problem, a 'nın tam kesir olduğu nispeten basit üçüncü dereceden $x^3 - 2 = 0$ ve $4x^3 - 3x - a = 0$ denklemlerinin çözümü ile cebirsel olarak eşdeğerdir. Bu problemleri imkânsız olarak yaftaladığımızda "imkânsız" kelimesini, imkânsızlığın alan üzerine dayatılan kısıtlamaya denk düştüğü aritmetikte kullanıldığı aynı anlamda mı kullanıyoruz?

Evet! Klasik problemlerin imkânsızlığı, çok eskilere uzandığından doğal kabul edilen (öyle ki bu yüzden pek ender bahsedilen) bir kısıtlama ile dayatılmıştı. Bir Yunanlı geometrik bir yapıdan bahsettiğinde, *cetvel* ve *pergelle* meydana getirilen bir yapıyı kastetmekteydi. Bunlar tanrıların aletleriydi; diğer yolların hiçbirisi filozofun uğraşmasına değer bulunmuyordu. Zira unutmamalıyız ki, Yunan felsefesi esasen aristokratik idi. Zanaatkârların yöntemleri ustalıklı ve zarif görünse de kaba ve banal bulunuyor ve bilgilerini kazanç amacıyla kullanan herkese genel bir küçümseme ile bakılıyordu. (Öklit'in akademisine kaydolan genç bir soyludan bahsedilir. Genç soylu birkaç gün sonra konunun soyut tabiatı karşısında öyle şaşırır ki, ustasına yorumlarının pratikteki faydasını sorar. Bunun üzerine ustası bir köleyi çağırarak emreder: "Bu gence bir abaküs verin, bilgisinden kazanç sağlasın.")

Sadece *cetvelle* çözülebilen, günümüzde *doğrusal* olarak adlandırılan bu problemler cebirsel dilde ifade edildiğinde *doğrusal* denklemler ortaya çıkar. Ama *cetvele* ilaveten *pergel* kullanımını da gerektirenler cebirsel olarak *ikinci dereceden* denklemin çözümüne eşdeğerdir. Ne var ki bu olgular on yedinci yüzyıla kadar bilinmiyordu. Bu arada, bu iki problem hem en parlak zihinlerin hem de o kadar parlak olmayanların sürekli saldırısı altındaydı. Bugün bile profesyonel "üç bölücüler" mevcuttur, ki bunların en büyük dezavantajı problemin üç yüz yıl önce halledildiğini öğrenmemiş olmalarıdır.

Bir geometri probleminin *cetvelli-pergelli* çözümünün *doğrusal* veya *ikinci dereceden* olması, problemin daha yüksek bir denkleme gitmesi durumunda bu tür bir çözümü olamayacağı anlamına gelmez. Açıklamak gerekirse, $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ denklemini düşünün. Sol tarafı $(x^2 - 1)(x^2 - 2)$ çarpanlarına ayrılır; dolayısıyla bu *dördüncü dereceden* denklem gerçekte *ikinci dereceden* iki denkleme ayrılır. Bu tür bir işlem uygulanabilir olduğunda, yani bir denklemden daha düşük dereceden *rasyonel katsayılar* çekebildiğimizde, denklemin *indirgenabilir* olduğu söylenebilir.

Kübik denklemlerde küpün iki eş küpe bölünmesi ve genel açının üç bölümünün yol açtığı sorun bunların *indirgenemez* olmasıdır ve bu olgu, bu denklemlerin arkasındaki problemlerin *cetvel ve pergelle çözülemeyeceğine* işaret eder.

Burada *imkânsız* teriminin görelî yapısının bir başka teyidi görü-

lür. İmkânsızlık neredeyse her zaman bir kısıtlamanın, çoğunlukla da doğanın kendisince dayatılmış gibi görünecek kadar geleneklerce onaylanmış bir kısıtlamanın sonucudur. Kısıtlamayı kaldırdığımızda imkânsızlık ortadan kalkacaktır. Burada da durum böyledir. Günümüzde özel bağlantılar –yani mafsallı öğeleri olan birtakım aletler– yoluyla, sadece bu iki problemin değil *rasyonel katsayılı cebirsel bir denkleme* giden tüm problemlerin çözülmesinin mümkün olduğu biliniyor.

Çemberin kareleştirilmesi problemi cebirsel formülasyonla ifade edilemeyişiyle diğer iki problemten farklıdır.

Bu problemi çözme teşebbüsleri matematiğin tarihçesini Pisagor'un zamanından beri doldurur. Güçlüğüün tanımdan kaynaklandığını ilk fark eden Arşimet olmuştur. Üçgen veya dikdörtgenin alanından bahsettiğimizde terimlerimizi kesin olarak tanımlayabiliriz; aynıısı tüm çokgenler için de geçerlidir. Ama eğri içindeki alanla ne kastediyoruz? Söz konusu alanın içine veya dışına çokgenler çizerek *üst* ve *alt* sınırlarından bahsedebiliriz; ama alanın kendisi *sonsuz işlem* ve *limit* getirmeksizin tanımlanamaz.

Daha sonra göreceğimiz gibi Arşimet *tüketme* adı verilen yönteminin gücünü bu problemin üzerinde denedi. Burada, Arşimet'in kimi çemberin içine, kimi dışına çizilmiş bir dizi çokgen yoluyla π 'nin $3^{1/7}$ ile $3^{10/71}$ arasında bulunduğunu gösterdiğini söylemek yeterli olacaktır.

Arşimet'ten sonraki bin sekiz yüz yıl içinde bu problem çok az ilerleme kaydetti. Çemberi kareleştirmeye çalışanlar elbette her zaman bol miktarda mevcuttu ve bazıları epey tuhaf olan çok sayıda sözde çözüm yayımlandı. Ayrıca birçok yaklaşırtım da mevcuttu, muhtemelen Hindu kökenli olan $\sqrt{10}$ bunların arasında en ilginçi olarak kabul edilebilir. Mısırlılarınkine oldukça yakın olan bu değeri ortaçağ boyunca epey sık kullanılmıştır. Arşimet'ten ileri gitmek için de epey çaba sarf edilmiştir, ki bunların arasında Vieta'nın yöntemi önem bakımından diğerlerinden aşağı kalmaz 393.216 kenarlı bir çokgen kullanarak π sayısının ondalık hanelerinin ilk onunu doğru hesaplamıştır.

Sonsuz süreçlerin keşfinin hesapların inceliğinde büyük bir gelişme ile sonuçlanması, Vieta'nın değerini gölgede bırakmıştır. Bu-

gün π sayısının virgülden sonra 700'den fazla ondalık basamağı doğru olarak biliniyor. Bu hesaplamaların pratikteki değerine gelince, sözü Amerikalı astronom Simon Newcomb'a bırakıyoruz:

On ondalık basamak dünyanın çevresini bir inçten az bir hata payıyla hesaplamaya yeter; otuz ondalık basamak ise görünen tüm evrenin çevresini en güçlü mikroskopla bile görülmeyen bir hata payıyla hesaplamamızı sağlar.

Kuramsal açıdan, söz konusu çabaların modern matematik yöntemlerindeki gelişmeyi gösterdiği söylenebilir ve bu uğraş bu şekilde gerekçelendirilebilir. Ayrıca ondalık sayıların dizilişinde π sayısının yapısını aydınlatacak bir tür düzenlilik keşfedebildiğimize dair zayıf bir ümit de olabilir.

On sekizinci yüzyılın sonunda problem tamamen yeni bir aşamaya girdi. Lambert π 'nin *rasyonel bir sayı olmadığını* gösterdi, Legendre da bu sayının ikinci dereceden bir denklemin rasyonel katsayıya sahip bir kökü olamayacağını ortaya koydu. Bu durum *çemberi kareleştirme problemini kesinlikle ortadan kaldırıyordu*, elbette çemberi kareleştirme meraklılarının hevesini bir nebze bile köreltmek-sizin. Zira böyle insanların cehaletleri genelde kendilerini aldatma kapasitelerine eşittir.

Bu arada π 'nin cebirsel bir sayı olma olasılığı hâlâ mevcuttu. Bu durumda pergel ve cetvelle imkânsız olan çemberi kareleştirme problemi –en azından biçimsel olarak– zincirleme bir çözüme açık olacaktı. Bu da, pratikte bir değeri olmasa da, iki bin yıllık beyhude bir çabaya uygun bir doruk noktası sağlayacaktı.

Bu olasılık, 1873'te Fransız matematikçi Charles Hermite'in *e sayısının aşkın sayı olduğunu* kanıtlamasıyla büyük ölçüde zayıfladı. *e* ve π sayıları arasındaki yakın bağlantı iyi biliniyordu ve bu durum, π 'nin de bir aşkın sayı olduğunu kanıtlama çabalarını ikiye katladı. Bunu dokuz yıl sonra Alman Lindemann gerçekten başaracaktı. Böylece modern analiz, Thales'ten beri matematikçilere yük olan bir probleminden kurtulmuş oluyordu.

Doğayı sayı ile tüketmek yönündeki ikinci teşebbüs de böylece sona erdi.

Aşkın sayıların keşfi bu sayıların kapsam ve çeşitlilik açısından cebirin irrasyonellerinden daha zengin olduğu ve modern matematiğin en temel büyüklüklerinden bazılarını kapsadığı olgusunun saptanması – tüm bunlar güçlü cebir düzeneğinin de tam iki bin yıl önce rasyonel aritmetiğin basit araçlarının çöktüğü yerde çöktüğünü gösterir. Her iki başarısızlık da aynı kaynağa bağlıydı: Cebir de rasyonel aritmetik gibi sadece *sonlu süreçlerle* ilgileniyordu.

Eskiden olduğu gibi şimdi de sonsuzluk, sayıyı daha sağlam bir temel üzerine oturtma umudunu unufak eden kayadır. Ama sonsuz süreçleri meşrulaştırmak, bu garip irrasyonel yaratıkları rasyonel sayılarla aynı kefeye koymak, on dokuzuncu yüzyıldaki titiz bilimciler için de klasik Yunan'dakiler için olduğu kadar nahoş bir yaklaşımdı.

Bunların arasında modern *sezgiciliğin* babası Leopold Kronecker'in sesi epey yüksek çıkıyordu. Kronecker sorunun izini irrasyonellerin matematiğe girişine kadar sürdü ve bunların matematikten çıkarılmasını önerdi. Tamsayıların mutlak tabiatına övgüler düzerek doğal bölgenin ve doğal bölgeye indirgenebilen rasyonel bölgenin, matematiğin üstüne kurulabileceği tek sağlam temel olduğunu vurguladı.

"Tanrı tamsayıyı yarattı, gerisi insanlığın işi." Gelecek nesiller Kronecker'i en çok bu meşhur sözyle tanıyacak. Bu cümle bana yeni bir kilise yapımını idare eden komitenin başındaki yaşlı ve sofu bir bayanın öyküsünü hatırlattı. Planları teslim eden mimar, yaşlı kadının bu işi oldukça ciddiye aldığını görmüş. Kadın, mimarın planlarının gerektirdiği vitraylara şiddetle karşı çıkıyormuş. Sonunda mimar umutsuzluk içinde, vitraya neden karşı çıktığını sormuş. Kadın da üstüne basa basa, "Camımı Tanrı'nın yaptığı şekilde istiyorum!" demiş.

Akıp Giden Dünya

Doğaya ve maddeye karşı ilk naif izlenimimiz, süreklilik üzerinedir. İster bir parça metal, ister bir miktar sıvı olsun, her şeyin sonsuza dek bölünebileceğini düşünürüz ve küçücük bir parça bile bütünle aynı özelliklere sahip gibi gelir.

DAVID HILBERT

Matematikte bütün yollar Yunanistan'a çıkar.

Şimdi "sonsuz küçük" fikrinin gelişimini kısaca açıklayacağım. Kavramın geliştiği yer Batı Avrupa ve zaman on yedi ile on sekizinci yüzyıllardır; yine de fikrin kökenini izlemeye çalıştığımda başka bir yer ve başka bir zaman görüyorum: Sahne klasik Yunan'a ve Platon'un yaşadığı o unutulmaz döneme kayıyor.

Sonsuz sorunu, tıpkı yakından bağlantılı olduğu irrasyoneller sorunu gibi Yunan topraklarında gelişti. Neden olduğu pek çok krizin ilki de burada yaşandı. Kriz Platon zamanında baş gösterdiyse de, müsebbibi Platon değildi. Bu tartışmayı Yunanistan'daki diğer geleneksel filozoflar da başlatmamıştı. Tartışma, dönemin önde gelen filozoflarının aşağılayıcı bir şekilde "Sofistler" olarak adlandırdığı bir düşünür grubunca başlatılmıştı.

Tutucu filozoflar bu gizemli kişilere "Elealılar" diyor, böylece muhtemelen bu öğretinin, baş temsilcileri Parmenides ve Zenon'un memleketleri gibi medeniyetten uzak ve önemsiz olduğunu ima ediyorlardı. Zira Elea Güney İtalya'da, Laërius'un deyişiyle "erdemli vatandaşlar yetiştirme bilgisinden başka önemli bir özelliği olmayan" fakir bir Yunan kolonisiydi. Bizim için ise, geriye bakıldığında, Sofistler Elea'nın tek meşhur özelliği gibi görünüyor.

"Elealı Zenon'un Argümanları o veya bu biçimde, kendi dönemin-den bizimkine kadar öne sürülmüş neredeyse tüm uzay, zaman ve sonsuzluk kuramlarına zemin hazırladı," diyordu Russell. Yine de bugün, bu argümanların bir münazara sırasında mı sunulduğunu, yoksa kitap biçiminde mi ortaya çıktığını bilmiyoruz. Belki de her ikisi birden söz konusudur. Zira bu muğlak konu üzerine birkaç kaynaktan biri olan Platon'un "Parmenides" diyalogunda, Zenon'un, ustası Parmenides'le birlikte Atina'yı ziyaret edişini okuruz. Burada, görünüşe göre Zenon'un argümanlarını sunmuş olduğu önceki bir ziyarete atıfta bulunulur. Fakat bu konuda soru sorulduğunda Zenon şu cevabı verir:

Ustama yönelik coşkulu tutkum beni genç yaşta kitap yazmaya yöneltti ama biri yazıları çaldı; bu yüzden kitabımın umuma açılıp açılmamasında seçeneğim yoktu; yazılmasındaki güdü yaşlı bir adamın hırsı değil, bir gencin kavgacılığıydı.

Öyle de olsa, bu argümanları sadece Aristoteles sayesinde biliyoruz. Stagiralı, ölmüş bir rakibinin argümanlarını çarpıtmanın ayartısına direnebilir miydi?

Argümanlar'ın modern dile tercümesi oldukça güçtür. Çeviri kıtlığı olduğundan değil, tam aksine: Burada *embarras du choix*'dan* mustarip durumdayız. Çok sayıda çeviri ve yüzlerce tefsir var; yorumlara gelince, kutsal kitaplardaki hiçbir muğlak paragraf bundan daha fazla onurlandırılmamıştır. Her tercüme kendi yazarının gözde kuramını yansıtmakta olup neredeyse yazar kadar kuram mevcuttur. Aristoteles'in *Fizik* adlı eserinde kaydettiği, Zenon'un dört Argümanı şunlardır:

Birinci Argüman: İkilik

Birincisi, hareket edenin orta noktaya her zaman son noktadan daha önce varması gerektiği iddiasıyla, devinimin yokluğu üzerinedir.

İkinci Argüman: Akhilleus ve Kaplumbağa

İkincisi meşhur Akhilleus argümanıdır. Şöyledir: Hızlı olan yavaş olanı asla geçemez, zira takipçi her zaman öncelikle takip edilenin ayrıldığı noktaya gelmek zorundadır, buna göre yavaş olan daima az çok önde olacaktır.

* Fr. Utandırıcı bir seçenek bolluğu. —ç.n.

Üçüncü Argüman: Ok

Tekdüze bir davranış sergileyen her şey, sürekli olarak ya hareket ediyor ya da hareketsiz duruyorsa ve hareketli olan daima şu an içinde ise, hareket eden ok hareketsizdir.

Dördüncü Argüman: Stadyum

Dördüncüsü, her biri eşit irilikte ve sayıda insandan oluşan iki sıra ile ilgilidir. Bu iki sıra insan yarış parkurunda zıt yönlerde eşit hızla ilerlerken birbirlerini geçer. Bir sıra, hedef ile parkurun orta noktası arasındaki boşluğu, diğeri ise orta nokta ile başlangıç noktası arasındaki boşluğu kaplar. Bu, ona göre, belli bir sürenin yarısının, bu zamanın iki katına eşit olduğu sonucunu içerir.

Metafiziğe meyilli olanlar, Argümanlar'da devinimin gerçekliğinin çürütülmesini görür. Tarihçi Tannery gibi diğerleri ise, Zenon'un böyle bir amacı olmadığını, aksine devinimin tartışılmaz gerçekliğini kullanarak kendi uzay, zaman ve süreklilik nosyonlarımızda yatan aşikâr çelişkilere işaret ettiğini öne sürer. Henri Bergson'un görüşü de buna oldukça yakındır: "Elea ekolünün işaret ettiği çelişkiler, devinimin kendisinden ziyade zihnimizin, devinimi yapay olarak tekrar düzenleyişiyle ilgilidir."

Bu son görüşe göre Argümanlar'ın değeri kesinlikle, matematiğin insanlığın sahip olduğu genel bilgi birikimindeki yerini etkili bir şekilde açığa çıkarmasında yatar. Argümanlar duyularımızla (veya modern uzantıları olan bilimsel araçlarla) algıladığımız uzay, zaman ve devinimin, aynı adı taşıyan matematiksel kavramlarla aynı kapsama sahip olmadığını gösterir. Zenon'un ortaya koyduğu güçlükler saf matematikle uğraşan düşünürü telaşlandıracak türde değildir; herhangi mantıksal bir çelişkiyi değil, sadece dilin katıksız belirsizliğini açığa vururlar; matematikçi yarattığı o sembolik dünyanın kendi duyularının dünyasıyla aynı olmadığını kabul ederek bu belirsizlikleri ortadan kaldırabilir.

Dolayısıyla, doğruya atfedilen özellikler geometricinin kendi icadıdır. Geometrici kalınlık ve genişliği kasten gözardı eder, kasten bu tür iki doğrunun ortak noktasının yani kesişme noktalarının hiçbir boyuta sahip olmadığını farz eder. Aritmetik kurallarını bu geometrik yapılara uygulama arzusuyla (daha sonra göreceğimiz gibi) bir

kesitin sonsuz bölünebilirliğinin, Yunanlılardaki *ikiliğin*, özel bir durumdan başka bir şey olmadığı sonsuz süreçlerin geçerliliğini kabul eder. Klasik geometri bu varsayımların mantıksal bir sonucudur, ama varsayımların kendileri keyfi, en iyi ihtimalle kullanışlı birer kurgudur. Matematikçi klasik postülaların birini veya tümünü reddederek bunları yeni bir varsayımlar kümesiyle değiştirebilir; örneğin, iki şeritte ortak olan *şerit* ve *alan* unsurlarını alır ve bu unsurlara doğru ve nokta adını vererek klasik doktrinden tümüyle farklı, ama bir o kadar tutarlı ve belki de aynı derecede verimli bir geometri oluşturabilir.

Ama pratik kişi, örneğin fizikçi veya mühendis için bu sistemlerin tümü eşit derecede kabul edilebilir değildir. Pratik kişi en azından bir gerçeklik görünümü talep eder. Daima somutla meşgul olduğundan, matematik terimlerini sembol veya düşünce olarak değil, gerçekliğin görüntüsü olarak kabul eder. Matematikçinin iç tutarlılığından ötürü kabul ettiği sistem, pratik kişiye gerçekliği eksik şekilde sunuşu nedeniyle "çelişkilerle" dolu gibi gelebilir.

Garip görünse de, Argümanlar'la asıl ilgilenmesi gereken pratik kişidir, zira bunlar matematiğin fiziksel gerçekliğe uygulanmasının gerçekliğine saldırır. Ama neyse ki, pratik kişi argümanlarla nadiren ilgilenir.

Argümanlar'ın tarihsel önemi gözardı edilemez. Her şeyden önce, Yunanlıları zaman kavramına karşı yeni bir yaklaşım benimsemeye zorlamışlardır.

Zenon ilk argümanında esas olarak şunu söyler: Koşucu hedefine ulaşmadan önce parkurun ortasına erişmelidir ve bunu gerçekleştirmesi *sonlu* bir süre alır. Yine kalan mesafenin de ortasına erişmelidir ve bu da *sonlu* bir süre alacaktır. Şimdi: *Bir kez söylenen her zaman tekrarlanabilir*. Koşucunun yarış parkurunu aşma sürecinde sonsuz sayıda aşama vardır ve bu aşamaların her biri sonlu bir süre gerektirir. Ama sonsuz sayıda sonlu aralıkların toplamı sonsuzdur. Buna göre koşucu hedefine asla ulaşamayacaktır.

Aristoteles bu argümanı aşağıdaki şekilde reddeder:

Zaman ve uzay aynı ve eşit parçalara bölünür. Buna göre, Zenon'un sonlu bir zamanda sonsuz bir derlemi tüketmenin veya sonsuz bir derlemin öğelerine tek tek dokunmanın imkânsız olduğu yolundaki argümanı hatalıdır. Zira "sonsuz" terimi hem mesafeye, hem zamana, hem de sürekli olan

her şeye iki anlamda uygulanabilir: bölünebilirlik veya sayı bakımından. Şimdi: Sonlu bir zaman içinde sayısal anlamda sonsuz şeylere dokunmak mümkün değildir, ama bölünebilirlik anlamında sonsuz şeylere dokunmak mümkündür; zira bu bağlamda zamanın kendisi de sonsuzdur.

Buna göre ilk iki argümanın net sonucu (zira ikincisi sadece birincinin zekice bir yorumudur), aynı anda *zamanın ikiliğini* de kabul etmeden *uzayın ikiliğini* kabul etmenin imkânsız olduğudur. Ama kavranması güç olan şey tam da budur! Zira bir doğrunun bölünebilirliği kolayca anlaşılabilir: Bir sopayı keserek veya bir doğruyu işaretleyerek bunu kolayca gerçekleştirebiliriz. Ama "zamanı işaretlemek" mecazi bir ifadedir. Zaman, üzerinde deney yapamayacağımız tek şeydir: Ya tamamen geçmişte ya da tamamen gelecektir. Zamanı aralıklara bölmek Yunanlılar için sadece bir akıl oyunuydu ve bizim için de sadece bir akıl oyunudur.

Zamana sonsuz bölünebilirlik özelliği atfetmek, zamanı geometrik bir doğru olarak ifade etmekle, *süreyi uzamla* tanımlamakla eşdeğerdir. Mekaniğin *geometrileştirilmesine* doğru ilk adımdır. Yani Zenon'un ilk argümanları, modern göreliliğin dört boyutlu dünyasının temelini teşkil eden ilkeye yöneliktir.

Argümanlar'ın asıl vurucu gücü, sanki Zenon muhaliflerinin savunmasını öngörmüş ve karşılamaya hazırlanmışçasına son ikisine bırakılmıştır. Görelilik sorununun özünü içeren dördüncü argüman burada bizi ilgilendirmez. Duyularımızla algıladığımız devinimle aynı isme sahip olan matematiksel kurgu arasındaki uçurumu etkili şekilde açığa vuran asıl üçüncü argümandır.

Zenon'un itirazları çürüten cevabı şöyledir:

Diyorsunuz ki, uzayın sonsuz sayıda bitişik noktadan oluşması gibi zaman da sonsuz bir bitişik anlar toplamıdır. Güzel! O halde havada uçan bir oku düşünün. Herhangi bir anda ucu, rotası üzerindeki belli bir noktayı işgal eder. Şu halde, *bu konumu işgal ederken* orada *hareketsiz olmalıdır*. Ama bir nokta aynı anda nasıl hem devinimsiz hem devinim halinde olabilir?

Matematikçi bu argümanı keyfi bir hükümle savuşturur: "Devinim mi?" der. "Devinim sadece konum ile zaman arasında bir mütakabiliyettir." Değişkenler arasındaki bu mütakabiliyete *fonksiyon* adını verir. Devinim yasası sadece bir fonksiyondur, esasında tüm

sürekli fonksiyonların prototipidir. Özünde, gaz dolu ve içerde serbestçe kayabilen bir pistonla donatılmış bir silindirden farksızdır. Pistonun olası her konumu, silindir içindeki belli bir basınçla karşılanacaktır. Herhangi bir konumu karşılayan basıncı elde etmek için, pistonu bu konumda durdurarak basınç göstergesini okuyabiliriz.

Ama bu hareketli bir cisim için de geçerli midir? Hareket eden nesneyi, gözlemlediğimiz devinimin bizzat kendisini kesmeksizin herhangi bir anda durdurabilir miyiz? Elbette hayır! O halde hareketli cismin *belli bir zamanda belli bir konumu işgal ettiğini* söylerken ne kastederiz? Şunu kastederiz: Uçmakta olan oku, uçuşu bozmaksızın durduracak fiziksel bir işlem düşünemesek de, bunu *akıl oyunu* ile yapmamamız için hiçbir neden yoktur. Ama bu akıl oyununun arkasındaki tek gerçeklik, bu noktada ve bu anda *başka bir* okun devinimsiz olarak hayal edilebileceğidir.

Matematiksel devinim sadece birbirini takip eden sonsuz duruş halleridir, yani matematik, dinamiği statığın bir koluna indirger. Bu dönüşümü gerçekleştiren ilke ilk olarak on sekizinci yüzyılda D'Alembert tarafından formüle edilmiştir. Devinimin, hareketli nesnenin dengede durduğu, birbirini takip eden bitişik duruş halleri ile tanımlanması ilk bakışta abes görünür. Yine de *devinimsiz* hallerden oluşan devinim, *uzamsız* noktalardan oluşan uzunluktan veya süresiz anlardan oluşan zamandan ne daha çok ne de daha az abestir.

Evet, bu soyutlama duyularımızla algıladığımız gerçek devinimin çekirdeği bile olamaz! Uçan bir top gördüğümüzde devinimi birbirini izleyen sonsuz küçük sıçramalar olarak değil, bir bütün olarak algılarız. Ama matematiksel doğru da telin isabetli –hatta idare eder– bir temsili değildir. İnsan çok uzun zamandır bu kurgularla eğitildiğinden, yerini tutanı gerçeğine tercih eder olmuştur.

Yunan biliminin daha sonraki seyri, Zenon'un Argümanları'nın başlattığı krizin Helenlerin matematiksel düşüncesi üzerindeki etkisinin ne kadar büyük olduğunu açıkça gösterir.

Bir taraftan, bu kriz bir ilerleme çağı açmıştır. Matematiksel fikirlerle dinsel sloganların ve muğlak metafiziksel spekülasyonların garip bir karışımı olan Pisagorcuların naif laf kalabalığından sonra doğal bir tepkidir bu. Öklit'in bugüne kadar matematik disiplinleri için örnek oluşturan *Öğeler*'inin sert kesinliği, Pisagorcuların çalış-

malarıyla nasıl da büyük bir zıtlık içindedir!

Diğer taraftan, Yunanlı geometricilerin zihnine bir tür *horror infiniti** yerleştiren Argümanlar, bu insanların yaratıcı hayal güçleri üzerinde kısmi felç etkisi yaratmıştır. Sonsuzluk tabuydu, ne pahasına olursa olsun uzak tutulmalı veya bunun başarılammaması halinde, *ad absurdum*** ve benzeri argümanlarla gizlenmeliydi. Bu koşullar altında, pozitif bir sonsuzluk kuramının imkânsız olmasının yanı sıra, Platon öncesi çağlarda oldukça ileri bir aşamaya ulaşmış sonsuz süreçlerin gelişimi de neredeyse tamamen durmuştur.

Klasik Yunan'da birçok şanslı koşulun bir arada bulunduğunu görüyoruz: Birçok birinci sınıf dâhi (Eudoksos, Aristarkhos, Öklit, Arşimet, Apollonios, Diophantos, Pappos); yaratıcı çaba ile spekülâtif düşünceyi teşvik ederken bir yandan da eleştirel bir ruh geliştiren, araştırmacıyı hırslı hayal gücünün tuzaklarından koruyan bir gelenekler bütünü; ve nihayet, pratik faydayı hesaba katmadan kendilerini salt fikirlere adayabilen düşünürlerin yetişmesini sağlayan bir aylak sınıfın gelişimine uygun bir toplumsal yapı. Gerçekten de, günümüzde bile daha iyisi bulunmayan bir koşullar bütünüdür bu. Yine de Yunan matematiği bir Diophantos'a karşın cebire, bir Apollonios'a karşın analitik geometriye, bir Arşimet'e karşın sonsuz küçükler analizine ulaşamamıştır. Daha önce gösterimsel bir sembolizm yokluğunun Yunan matematiğinin gelişmesini nasıl engellediğine işaret etmiştim; *horror infiniti* de aynı derecede büyük bir caydırıcıydı.

Tüketme yönteminde, Arşimet sonsuz küçükler analizi için gerekli tüm unsurlara sahipti. Zira modern analiz sonsuz süreçler kuramından başka bir şey değildir ve sonsuz süreçler de *limit* fikrini temel alır. Bu fikrin kesin formülasyonunu sonraki bölüme bırakıyorum. Burada, Arşimet'in tasavvur ettiği limit fikrinin Newton ve Leibniz'in kalkülüsünün gelişmesi için yeterli olduğunu ve Weierstrass ile Cantor'un dönemlerine kadar neredeyse değişmeden kaldığını söylemek yeterli olacaktır. Gerçekten de *limit hesabı*, aralarındaki farkın kasıtlı olarak küçültülebilmesi halinde iki değişken büyüklüğün

* Lat. Sonsuzluk korkusu. —ç.n.

** Lat. *reductio ad absurdum* (saçma olana indirgeme) teriminin kısaltılmışı. —ç.n.

eşitlik durumuna ulaşacağı fikrine dayanır ve bu fikrin kendisi de tüketme yönteminin temelini oluşturur.

Ayrıca bu ilke limitin belirlenmesi için gerçek bir yöntem sağlar. Bu, değişken niceliği tıpkı mengenenin iki çenesi arasındaymışçasına iki farklı niceliğin arasında "kısıtırmayı" içerir. Böylece, daha önce bahsettiğim dairenin çevresi vakasında Arşimet, daireyi artan sayıda kenardan oluşan iki düzenli çokgen kümesi arasında sıkıştırır; bu kümelerden biri daireyi içine alacak şekilde, diğeryse dairenin içine çizilir. Yukarıda belirttiğim gibi, Arşimet bu yöntemle π sayısının $3^{1/7}$ ile $3^{10/7}$ arasında olduğunu göstermiştir. Bu yöntemle aynı zamanda parabolik kemer altındaki alanın, aynı taban ve yükseklikteki bir üçgenin üçte ikisine denk olduğunu keşfetmiştir, ki bu problem modern integral kalkülüsümüzün öncüsüdür.

Evet, hakkını vermek gerekirse Arşimet'in sonsuz küçükler analizinin kurucusu olduğu söylenebilir. Tüketme yönteminin on sekizinci yüzyılın integral kalkülüsündeneksiği, uygun bir sembolizm ve sonsuz kavramına yönelik pozitif (ya da naif mi desem) bir tutumdur. Yine de hiçbir Yunanlı Arşimet'in izinden gitmemiş ve büyük ustanın keşfettiği zengin alanı araştırmak başka bir çağa kalmıştır.

Bin yıllık uyuşukluğun ardından, Avrupa'da hâkim olan düşünce Hristiyanlığın öncülerinin büyük bir beceriyle serptiği uyku tozlarının etkisinden kurtulduğunda, ilk dirilen problemlerden biri sonsuzluk problemi olacaktır.

Ne var ki bu dirilişin tipik özelliği, Yunanlıların eleştirel gücünden tamamen yoksun oluşuydu – hem de Rönesans matematiği neredeyse tümüyle Yunan kaynaklarına dayandığı halde. Kepler ve Cavalieri'nin ortaya attığı kaba ama pratik yöntemler, Newton ve Leibniz, sonsuzluk sembolünün mucidi Wallis, Bernoulli ailesinin dört ferdi, Euler ve d'Alembert tarafından sadece sözde geliştirilerek devam ettirildi.

Sonsuz küçükleri argümanın gereklerine göre sabit veya değişken olarak ele alıyorlardı; sonsuz sıralamaları kafalarına göre değiştiriyor, limitlerle oynuyor, ıraksak serilere tüm yakınsaklık kurallarına uygunmuşçasına muamele ediyorlardı. Terimlerini belirsiz biçimde tanımlıyor, yöntemlerini genel hatlarıyla kullanıyor ve argümanlarının mantığını sezgilerinin sesine uyduruyorlardı. Kısaca, ti-

tizliğe ve matematik nezaketine dair bütün kuralları çiğniyorlardı.

Sonsuz küçüklerin veya o dönemdeki adı ile *indivisibilia*'nın* ortaya atılmasını takip eden cümbüş, doğal bir tepkiydi. Sezgi çok uzun süre Yunanlıların katı titizliğinin tutsağı olarak kalmıştı. Artık serbestti ve romantik kaçışını denetim altında tutacak bir Öklit yoktu.

Öte yandan başka bir sebep de bulunabilir. O dönemin parlak zekâlarının tümünün de skolastik öğreti ile yetiştikleri unutulmamalıdır. Bir zamanlar bir Cizvit, "Bir çocuğu sekiz yaşına kadar bize vererseniz, geleceği kendi kendine yoluna girer," demişti. Kepler papaz olma hayalleri suya düştüğünde isteksizce astronomiye yöneldi; Pascal keşiş olmak için matematikten vazgeçti; Descartes'ın Kilise'nin otoritesine olan inancı, Galileo'ya duyduğu sempatiyi dizginliyordu; Newton bilimsel başarılarının dışında teoloji üzerine makaleler yazdı; Leibniz dünyayı Hristiyanlık için güvenli hale getirecek sayısal yöntemlerin hayalini kuruyordu. Mantığı Ayin, Kefaret, Teslis ve Töz Aşımı gibi spekülasyonlarla beslenen zihinler için, sonsuz süreçlerin geçerliliği önemsiz bir konudan başka bir şey değildi.

Bu, Piskopos Berkeley'ye geç kalmış bir cevap olarak kabul edilebilir. Newton'un sonsuz küçükler hesabı üzerine çığır açan eserinin basımından yirmi beş yıl sonra, piskopos "Analist; Kâfir Bir Matematikçiye Hitaben Bir Söylev" başlıklı bir makale yazmıştı. Piskopos, dinsel konularda inanca fazla bel bağlandığı iddiasına, matematik önermelerinin de bundan daha sağlam bir temele dayanmadığına dikkat çekmek suretiyle karşı çıkmıştır. Sonsuz küçükler öğretisini eşsiz bir beceri ve zekâ ile araştırıcı analize tabi tutarak birtakım zayıf argümanları, muğlak ifadeleri ve belirgin çelişkileri ortaya koyar. Bunların arasında "fluksiyon" (*fluxion*) ve "fark" (*difference*) terimleri mevcut olup; piskopos bunlara muhteşem İrlandalı mizahının ışınlarını yöneltir: "İkinci veya üçüncü akışı, ikinci veya üçüncü farkı sindirebilen, bana göre, İlahiyatla ilgili hiçbir şeyden şikâyet etmemelidir."

Newton'un "fluksiyon" kavramı ve Leibniz'in "fark" kavramı bugün *türev* ve *diferansiyel* olarak adlandırılır. Bunlar, analitik geo-

* Lat. Bölünemez olanlar. —ç.n.

metri ile beraber uygulamalı bilimlerin gelişiminde güçlü bir etmen haline gelmiş bir matematik disiplininin, *Diferansiyel* ve *İntegral Hesabının* başlıca kavramlarıdır. Analitik geometrinin icadı Descartes'a atfedilir; kalkülüsü ilk tasavvur edenin Newton mu Leibniz mi olduğu konusundaki ihtilaf on sekizinci yüzyıl boyunca devam etmiştir ve günümüzde de halen durulmuş değildir. Buna rağmen, Fermat'ın 22 Ekim 1636'da, Descartes'ın *Geometria*'sının çıkışından bir yıl ve Newton'un *Principia*'sının yayımlanmasından altmış sekiz yıl önce Roberval'a yazdığı bir mektupta her iki disiplinin ilkelerinin açıkça belirtildiğini görüyoruz. Fermat'ın araştırmalarını yayımlamama gibi tuhaf bir alışkanlığı olmasaydı, analitik geometri ile kalkülüsün yaratımı Rönesans'ın bu Arşimet'ine atfedilebilecek ve matematik dünyası bir yüzyıl süren şiddetli ihtilafın utancını yaşamayacaktı.

Newton prensibinin özü devinim örneğiyle açıklanabilir (bu arada devinim, diferansiyel hesabının uygulandığı ilk konu olma özelliğine de sahiptir). Düz bir çizgi boyunca devinim halindeki bir parçacığı düşünün. Eşit sürede eşit uzam aşılsa, parçacık *yeknesak* hareket ediyor demektir ve belli bir zaman biriminde, örneğin bir saniyede aşılacak mesafe bu yeknesak devinimin *hızıdır*. Eğer eşit zaman aralıklarında aşılacak mesafeler eşit değilse, yani devinim *yeknesak değilse*, sözcüğün az önce kullandığımız anlamıyla hız diye bir şey yoktur. Yine de belli bir sürede aşılacak mesafeyi zaman aralığına bölerek bu oranı parçacığın bu aralıktaki *ortalama* hızı olarak adlandırabiliriz. Bu oran Newton'un *temel* oranıdır. Bu sayı ise açıkça görülebileceği gibi ilgili aralığın uzunluğuna bağlıdır. Buna karşın, aralık küçüldükçe hızın belli bir sabit değere yaklaştığına dikkat edin. ... Burada birbirini izleyen terimler arasındaki farkın bitişik iki terim ayırt edilemez olana kadar giderek küçüldüğü bir *dizi* örneği görüyoruz. Şimdi zaman aralığını *sonsuz* kadar küçültmeye devam ettiğimizi düşünelim (ki sezgisel *uzay ve zamanın sürekliliği* kavramımız bu düşünceyi haklı çıkarır). Ardından, dizinin en son terimi (Newton'un *ultima ratio*'su, yani *en sonuncu oranı*), Newton'a göre, *aralığın başındaki noktadaki hızı* temsil eder.

Bugün şöyle diyoruz: Hareketli noktanın herhangi bir zamandaki hızı, *tanım gereği*, ortalama hızın ait olduğu aralık sonsuz ölçüde

küçüldüğü sırada ortalama hızın limit değeridir. Newton'un zamanında matematikçiler o kadar dikkatli değildi.

Newton, nihai oranlara da fluksiyon adını veriyordu. Fluksiyon uzunluk, alan, hacim, basınç gibi değişken bir nicelikteki değişim oranıydı. Bu değişken niceliklere Newton "fluentler" adını veriyordu. Ne yazık ki bu açıklayıcı terimler (açıklayıcı, çünkü Latince *fluere* "akmak", *fluent* "akan", *fluxion* da "akma hızı" anlamına gelir) korunmamış, yerlerine *türev* ve *fonksiyon* gibi ilgisiz terimler getirilmiştir.

Newton'un kuramı sürekli nicelikler üzerine olmakla beraber zaman ve uzayın sonsuz bölünebilirliğini de koyutluyordu; bir akmadan bahsederken bu akmayı birbirini izleyen ufak sıçramalar gibi ele alıyordu. Bu nedenle, fluksiyon kuramı iki bin yıl önce Zenon tarafından ileri sürülen tüm itirazlara açıktı. Böylece insanlığın duyularının ham gerçekliğiyle uyumlu bir matematik isteyen "gerçekçiler" ile gerçekliğin insan zihninin dikte ettikleriyle uyumlu olmasında ısrar eden "idealistler" arasında çağlar boyunca süren kan davası yeniden başlayabilirdi. Böyle bir tartışma için tek eksik bir Zenon idi ve Zenon garip bir biçime bürünmüş olarak –bir Anglikan papazının şahsında– ortaya çıktı. Burada sözü, sonradan Cloyne Piskoposu olacak George Berkeley'ye bırakıyorum:

Şimdi, nasıl ki Duyumuz son derece ufak nesneleri algılamak konusunda zorlanıp afallarsa, gücünü Duyudan alan Hayal Gücü de zamanın en küçük parçacıklarına veya zamandaki en küçük artışlara ilişkin net fikirler oluşturma konusunda zorlanıp afallar; anları –veya akan niceliklerin küçük parçalarını– *in statu nascenti* yani ilk hallerinde veya var olmaya yeni başlarken, sonlu parçacıklar olmadan önce kavramaya çalışırken ise bu zorlanma daha da artar. Ve yine bu tür yeni doğmuş kusurlu varlıkların soyut hızlarını tasavvur etmek daha da zor görünür. Ama hızların hızları (ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci hızlar vs.) yanılmıyorsa insanın tüm anlama yetisini aşar. Zihin bu kaçak fikirleri ne kadar analiz edip irdelerse o derece şaşkına döner ve afallar; başlangıçta kısa ömürlü ve uçucu olan nesneler çok geçmeden gözden kaybolur. Elbette, her anlamda, ikinci veya üçüncü bir fluksiyon karanlık bir Gizem gibi görünür. Başlangıç aşamasındaki hızın başlangıç aşamasındaki hızı, yeni ortaya çıkan artışın yeni ortaya çıkan artışı, yani büyüklüğü olmayan bir nesne... Adına ne dersiniz deyin, bunun net bir şekilde tasavvur edilmesi, yanılmıyorsa, imkânsız bulunacaktır. ...

Fluksiyon yönteminin yüce yaratıcısı bu güçlüğü hissetmiş, bu yüzden de hoş soyutlamalara ve geometrik metafiziğe boyun eğmiştir – zira bunlar olmaksızın mevcut ilkelerle hiçbir şey yapılamayacağını görmüştür. ... Gerçekten de, fluksiyonları bir bina iskelesi gibi, sonlu çizgilerin bunlarla orantılı olduğu anlaşılır anlaşılmaz bir kenara koyulacak veya bertaraf edilecek nesneler olarak kullandığı kabul edilmelidir. Ama o zaman bu sonlu üsler fluksiyonların yardımıyla bulunmuş olacaktır. ... Peki nedir bu fluksiyonlar? Çabucak yitip giden artış miktarlarının hızları. Peki çabucak yitip giden bu artış miktarları nedir? Ne sonlu sayılardır, ne de sonsuz küçüklükteki sayılar – ama hiçbir şey olmadıkları da söylenemez. Onlara geçmiş niceliklerin hayaletleri diyemez miyiz? ...

Yukarıda belirtilen açıklamaların gücünü ve tasarımını daha iyi kavrayabilmeniz ve kendi zihninizde daha derinlemesine irdeleyebilmeniz amacıyla aşağıdaki Soruları ekliyorum. ...

Soru 64. Dinsel konularda bu kadar hassas olan matematikçiler kendi bilimlerinde de katı bir titizlik içinde midir? Otoriteye boyun eğmez, güvene dayalı varsayımlarda bulunmaz ve tasavvur edilemez şeylere inanmazlar mı? Kendi gizemleri, daha da önemlisi kendi tutarsızlıkları ve çelişkileri yok mudur?

Berkeley'nin nükteli söylevlerinin sonucu ne oldu peki? Eh, matematik terminolojisindeki uygunsuzluk ve tutarsızlığa saldırmakla gerçek bir hizmet sundu. Sonraki otuz-kırk yılda belirgin bir değişiklik görüldü: "Asal" ve "esas", "başlangıç aşamasındaki" ve "yeni ortaya çıkan", "fluent" ve "fluksiyon" gibi terimler terk edildi. *Indivisiabilia* terimi *sonsuz küçükler* terimine dönüştü (sonsuz küçük, limit olarak sıfıra yaklaşan değişken bir sayıdır sadece). Koşullar yavaşça fakat kesin bir biçimde genel limit fikrinin egemenliği altına girdi.

Piskopos Berkeley "Analist" makalesini yazdıktan elli yıl sonra tekrar ortaya çıksaydı, azarladığı çocuğu tanıyamazdı, çocuk işte öylesine mütevazılaşmıştı. Ama tatmin olur muydu? Berkeley mi – asla! Zeki piskoposun keskin gözleri değişen beneklerin ardındaki aynı leoparı algıladı. İtirazı dildeki dolambaçlılıktan ziyade (gerçi eleştirisinden bu da nasibini alıyordu) Zenon'un dikkat çektiği şeydi: Parçalara ayırma çabası analiz edilen asıl özelliğin mahvına neden olacağından, yeni yöntem kesintisiz bir şey, bölünmez bir şey, ayrı parçaları olmayan bir şey olarak sürekliliğe ilişkin sezgisel düşüncemizi tatmin edemiyordu.

Hayal gücümüzü daha da zorlayarak Berkeley'nin bizim çağımızda yeniden ortaya çıktığını düşünelim. Psikopos aynı itirazları dile getirir, aynı suçlamaları yöneltirdi. Ama bu defa hoş bir şaşkınlıkla, düşman kampında onu savunmakla kalmayıp öncü olarak se-lamlayacak güçlü bir grup bulurdu.

Ama bundan daha sonra bahsedeceğiz.

Bu esnada analiz, eleştirmenlerin uyarılarına kulak asmaksızın geliştiğçe geliyor, durmadan ilerliyor ve yeni alanları fethediyordu. Geometri ve mekanik bilimi, optik ve akustik bilimi, ısı yayılımı ve termodinamik bilimi, elektrik ve manyetizma ve hatta Kaos yasaları bile analizin dolaysız egemenliği altına giriyordu.

Laplace şöyle der:

Evrenin mevcut halini, geçmişinin sonucu ve geleceğinin nedeni olarak tasavvur edebiliriz. Herhangi bir anda doğayı harekete geçiren bütün güçleri ve doğayı oluşturan varlıkların karşılıklı konumlarını bilen bir Akıl, şayet bu verileri analize aktaracak kadar engin olsaydı, evrendeki en büyük cismin ve en hafif atomun hareketini tek bir formülde özetleyebilirdi; böylesi bir Akıl için hiçbir şey belirsiz olmazdı, zira geçmiş kadar gelecek de daima gözlerinin önünde serili olurdu.

Ve fakat bu muhteşem yapı son birkaç yüzyılın matematikçileri tarafından, üzerinde durduğu temeller fazla düşülmeksizin yaratılmıştı. O halde, tüm bu genel akıl yürütmelere, muğlak kavramlara ve temelsiz genellemeye karşın, bu kadar az sayıda ciddi hatanın yapılmış olması dikkat çekici değil midir? D'Alembert cesaretlendirici "İlerleyiniz, inanç ardınızdan gelir" sözleriyle şüphecilerin cesaretini körüklüyordu. Onlar da adeta D'Alembert'in öğüdüne kulak vereyerek hızla ilerlemeye koyuldular; kör yürüyüşlerinde kendilerine sonsuz süreçlerin geçerliliğine olan örtülü inançları rehberlik ediyordu.

Ardından kritik dönem geldi: Abel ile Jacobi, Gauss, Cauchy ile Weierstrass ve nihayet Dedekind ile Cantor, tüm yapıyı araştırmacı bir analize tabi tutarak belirsiz ve muğlak öğeleri ortadan kaldırdılar. Peki bu yeniden yapılanmanın net sonucu neydi? *Öncülerin mantığının reddedilmesi ama inançlarının meşrulaştırılması.*

Sonsuz süreçlerin teknik yaşamdaki pratik gereklilik için önemini ne kadar vurgulasak yeridir. Pratikte aritmetiğin geometriye, meka-

nik bilimine, fiziğe ve hatta istatistiğe uygulanması, doğrudan veya dolaylı olarak bu süreçleri gerektirir: bu bilimlerin irrasyonelleri ve aşkınları cömert biçimde kullanması nedeniyle dolaylı; bu bilimlerde kullanılan en önemli kavramların bu süreçler olmaksızın özlü bir şekilde tanımlanamaması nedeniyle ise doğrudan. Sonsuz süreci kaldırırsanız, kuramsal ve uygulamalı matematik Pisagorculardan önceki haline geriler.

Eğrinin yay uzunluğuna ilişkin nosyon buna bir örnek teşkil edebilir. Fiziki kavram eğik bir tele dayanır. Teli *germeden düzelttiğimizi* hayal ederiz ve doğru parçası yay uzunluğu ölçüsü görevini görür. Peki "germeden" ile ne demek istiyoruz? Uzunluğunda bir değişiklik olmadan demek istiyoruz. Ama bu terim yayın uzunluğuna ilişkin zaten bildiğimiz bir şeyi ima ediyor. Söz konusu formülasyon açıkça *petitio principii*'dir* ve matematiksel bir tanım olarak kullanılamaz. Bunun alternatifi, yay içerisine giderek artan sayıda kenarları olan çokgenler çizmektir. Bu çokgenlerin kenarları bir limite yaklaşır ve yayın uzunluğu da bu limit olarak tanımlanır.

Uzunluk nosyonu için doğru olan, alanlar, hacimler, kütleler, anlar, basınçlar, güçler, baskı ve esnemeler, hızlar, ivmeler vs. için de doğrudur. Tüm bu nosyonlar düz, yassı ve yeknesak olmayan hiçbir şeyin yer almadığı "doğrusal" ve "rasyonel" bir dünyada doğmuştur. O halde, ya bu temel rasyonel nosyonlardan vazgeçeceğiz (ki bu kavramlar zihnimize derinlemesine nüfuz ettiği için bu vazgeçiş gerçek bir devrim demek olurdu), ya da bu rasyonel nosyonları düz, yassı veya yeknesak olmayan bir dünyaya uyarlayacağız.

Ama düz, yassı ve yeknesak nasıl tam aksine –yamuk, eğri ve düzensize– uyarlanabilir? Kuşkusuz sonlu sayıda adımla değil! Bu mucize sadece, mucizeler yaratan *sonsuz* ile gerçekleştirilebilir. Temel rasyonel nosyonlara sadık kalmaya karar verdiğimiz göre, duyularımızın "eğri" gerçekliğini, sadece hayal gücümüzde yaşayan sonsuz bir *düz* dünya dizisindeki en son aşama olarak görmekten başka alternatifimiz yok.

Asıl mucize ise bunun işe yaramasıdır!

* Lat. Başlangıç noktasının varsayılması. İspatlanacak noktanın zaten varsayılması. Bir tür mantıksal safsata. –ç.n.

Oluş Sanatı

Artık kurgu yok bizim için: Hesap yapıyoruz.
Ama hesap yapabilmek için önce kurgulamak
zorundaydık.

NIETZSCHE

Şimdi irrasyonellere geri dönerek bu problemle önceki bölümde ele aldığım süreklilik problemi arasındaki yakın ilişkiyi göstermeye çalışacağım. Ama önce, konuya süreklilik problemini ele almadan önce bıraktığım yerden devam etmek istiyorum.

Rasyonel aritmetiği geometrideki bir probleme uygulama teşebbüsü, matematik tarihinin ilk krizine yol açmıştır. Nispeten basit iki problem –karenin köşegeni ile dairenin çevresinin hesaplanması– rasyonel alan içinde hiçbir yer bulunamayan yeni matematiksel varlıkların mevcudiyetini ortaya çıkarmıştır. Böylece, zorla da olsa rasyonel aritmetiğin yetersizliğinin anlaşılması sağlanmıştır.

Diğer bir analiz, cebir prosedürlerinin de genel olarak aynı derecede yetersiz olduğunu göstermiştir. Yani sayı alanının genişletilmesinin kaçınılmaz olduğu görülmüştür. Ama bu nasıl başarılabilir? Bir sonsuzluk –hayır, sonsuz çeşitlilikteki sonsuz irrasyonelin bir derlemi– sayıların rasyonel kümesinin sınıksız dokusuna nasıl yerleştirilebilir? Eski sayı kavramını yeniden biçimlendirmemiz gerek; bu kadarı kesin. Ve eski kavram geometri alanında çöktüğü için, yenisinin modelini de geometride aramalıyız. Sürekli sonsuz doğru böyle bir model için ideal gibi görünüyor. Ama burada yeni bir güçlkle karşılaşırız: Sayı bölgemiz doğru ile tanımlanacaksa, her sayıya bir nokta karşılık gelmelidir. Ama nokta nedir? Doğrunun bir

ögesi olan noktaya ilişkin, bir tanıma olmasa bile net bir fikre sahip olmalıyız.

Noktanın genel anlamda boyutsuz bir geometrik varlık olduğu görüşü elbette bir kurgudur; ama bu kurguyu analiz ettiğimizde arkasında üç ayrı fikir olduğunu görüyoruz. Birincisi, noktayı devinimiyle doğruyu tanımlayan bir tür *üreten* unsur olarak algılıyoruz. Bu fikir, doğruya sezgisel olarak atfettiğimiz ilk özellik olan *süreklilik* fikrimize en uygun görünendir. Ancak bu dinamik kavrayışı doğru ile sayı bölgesi arasındaki benzerliğe temel olarak almak istediğimizde, ikisinin bağdaşmaz olduğunu görüyoruz.

Gerçekten de, duyularımız devinimi tek, bölünmez, kesintisiz bir şey olarak algılar. Devinin öğelere ayrıştırılması, bizzat korumayı amaçladığımız sürekliliğin yok oluşuyla sonuçlanır. Sayının hatırına, doğruyu birbirini izleyen sonsuz küçük dinlence durakları olarak kabul etmek gereklidir ve bu da dinlenmenin tam tersi olarak tasavvur ettiğimiz devinim fikrine tamamen aykırıdır. Zenon'un argümanlarının gücü buradan gelir.

Matematikçinin bu uyuşmazlığı sonsuz küçükler analizinin keşfiyle aşmaya çalıştığını gördük; geometri ve mekanik bilimiyle başlayan bu analizin sağın bilimlerin her alanında baskın bir konum elde ederek sonunda hakiki bir matematiksel *değişim kuramı* haline geldiğini gördük. Pragmatik anlamda, analizin bu kapsamlı zaferi, yöntemlerinin geçerliliğinin yeterli kanıtıdır. Ama her ne kadar muhallebinin ispatı yenmesinde yatsa da, yeme işlemi muhallebinin ne olduğunu açıklığa kavuşturamaz. Analizin bu başarısı sadece o eski sorunun altını çizmez: Bir süreyi meydana getiren nedir?

İkincisi, nokta iki doğrunun kesişme noktası, yani bir doğrunun bir başkası üzerinde *bıraktığı bir iz* olarak görülebilir. Bu şekilde görüldüğünde sadece bir *bölme*, doğruyu birbirini dışlayan ve tamamlayan iki bölgeye ayırma tarzıdır. Richard Dedekind'in 1872'de yayımlanan "Süreklilik ve İrrasyonel Sayılar" başlıklı çığır açıcı makalesinde çıkış noktası olarak aldığı fikir budur. Bir sonraki bölümde bundan bahsedeceğim.

Üçüncüsü, noktayı *sonsuz süreçte* doğrunun bir kesitine uygulanan *limit konum* olarak kabul edebiliriz. Bu süreç birçok biçime bürünebilir; tipik bir örneğin Yunan ikiliği olduğunu söylemek şu an

için yeterli olacaktır. Sonsuz sürecin aritmetik muadili *sonsuz dizi*dir ve Georg Cantor'un ilk olarak 1884'te yayımlanan meşhur irrasyoneller kuramında araç olarak kullandığı da sonsuz rasyonel dizi-
dir. Bu bölümün konusu bu basit ve geniş kapsamlı fikirdir.

Terimlerinin tümü rasyonel sayı olan dizilere *rasyonel dizi* denir; içindeki her terimin bir ardılı olan dizilere de *sonsuz dizi* adı verilir. Sonsuz bir dizi oluşturan bir grup işlemi sonsuz süreç olarak adlandıracağım.

Tüm sonsuz süreçlerin prototipi *tekrardır*. Gerçekten de sonsuz kavramımızın ta kendisi, *bir kez söylenmiş veya yapılmış olanın her zaman tekrarlanabileceği* fikrinden gelir. Tekrar rasyonel a sayısına uygulandığında, aşağıdaki *tekrarlı dizi*yi elde ederiz:

$$a, a, a, a, \dots$$

Bu dizi a sayısını temsil eder.

Serisel süreç adını vereceğim diğer bir temel işlem, ardışık toplama-
maya dayanır. Aşağıdaki dizi göz önüne alındığında

$$a, b, c, d, e, f, g, \dots$$

serisel süreç yeni bir sıralama oluşturur:

$$a, a + b, a + b + c, a + b + c + d, \dots,$$

Buna $a, b, c, \dots$ dizisinin oluşturduğu bir *seri* adını verebiliriz. Böylece $1, 1, 1, \dots$ şeklindeki tekrarlı diziden $1, 2, 3, 4 \dots$ *doğal dizisini* elde edebiliriz.

Serisel süreç elbette herhangi bir diziye uygulanabilir; dolayısıyla her diziye bir seri karşılık gelir. Yine de, bunların en önemlisi *yiten dizilerle* oluşturulan serilerdir. Yiten dizilerin tipik özelliği, ardışık terimlerin yavaş yavaş azalmasıdır; öyle ki atanan herhangi bir sayıdan değerce daha düşük terimler daima bulunabilir. Bu tür diziler şöyledir:

$$1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32 \dots$$

$$1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6 \dots$$

Herhangi iki dizi verildiğinde, birini diğerinden terim terim çıkararak üçüncü bir dizi oluşturulabilir. Bu şekilde elde edilen *fark dizisi* (aşağıdaki iki dizide olduğu gibi) yiten türdedir.

$$2/1, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5, 7/6 \dots, \text{ve}$$

$$1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7 \dots$$

Burada ilgili terimlerin farkları aşağıdaki diziyi oluşturur:

$$\frac{3}{1 \times 2}, \frac{5}{2 \times 3}, \frac{7}{3 \times 4}, \frac{9}{4 \times 5}, \frac{11}{5 \times 6}, \frac{13}{6 \times 7}, \frac{15}{7 \times 8}, \dots$$

Her terimin paydası iki ardışık sayının çarpımı ve pay da aynı sayıların toplamıdır. Bu dizinin bininci terimi 0,002'den, bir milyonuncu terimi ise 0,000002'den düşüktür ve bu böyle gider. Dizi kesinlikle yiten türdendir.

Farkları giderek yiten iki diziyi *asemptot* diye anacağız. Şimdi, iki asemptot dizinin biri, aşağıdaki durumdaki gibi tekrarlı bir dizi olabilir:

$$1, 1, 1, 1, \dots$$

$$1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \dots$$

Tekrarlı dizi 1 rasyonel sayısını temsil eder. Birinciye asemptot olan ikinci dizi de 1 sayısını temsil eder veya limit olarak 1'e yaklaşır.

İki dizi üçüncü bir diziye asemptot ise birbirlerine de asemptot olmaları ve dahası, biri limit olarak herhangi bir rasyonel sayıya yaklaşıyorsa bunun diğeri için de geçerli olması mantıklıdır. Şimdi, durum bu olduğuna göre, çok sayıda dizi –biçimsel farklılıklarına karşın– aynı sayıyı temsil edebilir. Buna göre 2 sayısını rasyonel dizilerle sonsuz çeşitte temsil edilebilir olup, bu dizilerden bazıları şunlardır:

$$1,9; 1,99; 1,999; 1,9999 \dots$$

$$2,1; 2,01; 2,001; 2,0001 \dots$$

$$1^{1/3}, 1^{2/3}, 1^{3/4}, 1^{4/5} \dots$$

$$1^{1/2}, 1^{3/4}, 1^{7/8}, 1^{15/16} \dots$$

Aynısı herhangi bir rasyonel sayı için de geçerlidir. Özellikle, *yiten herhangi bir dizi 0 rasyonel sayısının bir temsili olarak kabul edilebilir.*

En basit dizi türü (ki aynı zamanda büyük bir tarihi ve kuramsal öneme sahiptir) *geometrik dizidir*. Burada, ilk terim için herhangi bir sayı ve oran için diğer herhangi bir sayı seçtikten sonra, oranla çarparak terimden terime ilerleriz. Herhangi bir tekrarlı dizi, çarpım oranı 1 olan özel bir geometrik dizi olarak kabul edilebilir. Bu istisnai vakayı bir kenara bırakırsak, geometrik dizileri *artan ve azalan* olarak sınıflandırabiliriz. Örneğin:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots 2^n, \dots \text{ ve}$$

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots, \frac{1}{3^n} \dots$$

Artan geometrik dizide, terimler mutlak değerde *sonsuz biçimde* artar; yani yeterince "ilerlersek", ne kadar büyük olursa olsun atanmış herhangi bir sayıyı aşacak terimler bulabiliriz. Bu tür dizilere *ıraksak* denir.

Azalan dizi daima yiten türdendir ve bu nedenle burada bizi özellikle ilgilendirir. Ama onu asıl değerli kılan, böyle bir yiten geometrik dizi ile oluşturulmuş serinin daima rasyonel bir limite yakınsaması ve aynı şekilde *herhangi bir rasyonel sayının kimi rasyonel geometrik serilerin limiti olarak kabul edilebilmesidir*. Dahası, elimizde "bir serinin toplamı"nın fiilen doğrudan veriler çerçevesinde değerlendirilebileceği nadir durumlardan biri vardır.

Geometrik dizinin oluşturduğu seri *geometrik ilerleme* olarak adlandırılır. Yiten bir geometrik dizi *yakınsak bir ilerleme* oluşturur. Dizi a terimi ile başlar ve oran r ile gösterilirse, limit aşağıdaki basit formülle elde edilir:

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

Bu limit ilerlemenin *toplamı* olarak adlandırılır.

Zenon'un ilk argümanındaki ikilik dizisi aşağıdaki geometrik ilerlemedir:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

Bu da aşağıdaki seriyi oluşturur:

$$1/2, 3/4, 7/8, 15/16, \dots$$

Bu sonuncusu, toplama formülünden de görüldüğü üzere 1'e doğru yaklaşır.

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots$$

toplamı, Zenon'un bu toplamın sonsuz sayıda terimi kapsadığı argümanına karşın 1 sonlu sayısını temsil eder. Yakınsaklık ve limit kavramlarının kabulüne o veya bu sebepten itiraz edilebilir, ama kabul edildikten sonra, Zenon'un sonsuz sayı serisinin toplamının mecburen sonsuz olması gerektiği argümanı hükmünü kaybedecektir.

Zenon'un ikinci argümanı da geometrik bir ilerleme içerir. Bunu somut olarak ele almak için, Akhilleus'un dakikada 100 metre hızla, kaplumbağanın da 1 metre hızla ilerlediğini varsayalım. Verilen avans 990 metre ise Akhilleus kaplumbağayı ne zaman geçecektir? Zenon asla diyor. "Sağduyu" ise, Akhilleus'un kaplumbağaya dakikada 99 metre yaklaştığını ve başlangıçtaki 990 metrelik mesafenin ilk 10 dakika sonunda yok olacağını söyler. Ama konuya Zenon'un tarzıyla yaklaşalım. Akhilleus kaplumbağanın başlangıç konumuna ulaştığında, kaplumbağa avansın 1/100'ü kadar veya 9,9 metre ilerlemiş olacaktır; Akhilleus bu ikinci konuma ulaştığında, kaplumbağa 9,9'un 1/100'ü kadar yani 0,099 metre ilerlemiş olacaktır. Ama "bir kez söylenen her zaman tekrarlanabilir". Avans aşağıdaki geometrik ilerlemeye göre azalmakta olup

$$990; 9,9; 0,099; 0,00099; \dots;$$

toplama formülü ile elde edilen toplamı 1000'dir. Akhilleus kaplumbağayı geçmeden önce 1000 metre yol alacak ve bunu 10 dakikada yapacaktır. Tekrarlamak gerekirse, sonsuz sayıda terimin toplamı *sonlu olabilir*.

Periyodik ondalık kesirler kılık değiştirmiş geometrik serilerden başka bir şey değildir.

Örneğin, *saf* periyodik tipteki şu sonsuz ondalık kesri ele alalım:

$$0,36363636\dots$$

Bunu kısaltarak şöyle yazacağım: 0,(36)

Bunun gerçek anlamı

$$36/100 + 36/10.000 + 36/1.000.000, \dots \text{'dır.}$$

Bu ise, $1/100$ oranlı bir geometrik seridir ve toplama formülü, serinin $36/99$ veya $4/11$ rasyonel limitine yaklaştığını gösterir. Aynısı, $0,34$ (53) gibi *karışık* bir periyodik kesir için de doğrudur: Bunu 100 ile çarptığımızda saf periyodik kesir $3453/99$ elde edilir ve *karışık* periyodik kesir bunun $1/100$ 'ü olduğundan, $0,34(53) = 3419/9900$ 'ü elde ederiz.

Sonlu bir kesir bile *periyodu sıfır olan* bir periyodik kesir olarak kabul edilebilir. Örneğin:

$$2,5 = 2,50000 \dots = 2,5(0)$$

Okulda herhangi bir bayağı kesrin nasıl ondalık sayıya çevrileceğini öğrendik. Bu prosedüre uzun bölme adı verilir ve deneyimlerimiz bize bunun ya $0,125$ 'e eşit olan $1/8$ gibi sonlu bir kesire ya da $0,(142857)$ ile temsil edilen $1/7$ gibi sonsuz bir periyodiğe yol açacağını söyler. Bu özellik sağlam bir şekilde kanıtlanabilir ve şu önerme halinde formüle edilebilir: *Her rasyonel sayı sonsuz bir periyodik ondalık kesir olarak benzersiz bir biçimde ifade edilebilir; aynı şekilde, her periyodik ondalık kesir rasyonel bir sayıyı temsil eder.*

Diğer taraftan, elbette *sonsuz* olup *periyodik* olmayan ondalık dizilerden istediğimiz kadar çok oluşturabiliriz. Basamakların dağılımı karmakarışık olabilir veya düzenli ama *periyodik olmayan* bir yasaya uyabilir. Örneğin aşağıdaki ondalık seriler bu biçimdedir:

$$1,10111213 \dots 192021 \dots 100101 \dots$$

Bu ondalık diziye asemptot olan tekrarlı $a, a, a, \dots$ rasyonel dizisini bulabilseydik, bu dizi a rasyonel sayısını temsil ederdi. Ama bunun mümkün olmadığını biliyoruz; zira mümkün olsaydı dizi periyodik olurdu ama durum böyle değildir. O halde bu seri neyi temsil ediyor? Bilmiyoruz. Yakınsaklıkla limiti tanımlayış biçimimiz bu diziye sayı olarak sınıflandırma olasılıklarını tamamen bertaraf ediyor. Yine de, *büyüyen* ama asla belli bir büyüklüğü aşmayan veya *küçülen* ama asla belli bir büyüklüğün altına düşmeyen bir şeye dair sezgisel yakınsaklık ve limit nosyonlarımız bulunuyor. Bu sezgisel bakış açısından,

periyodik olmayan sonsuz ondalık bir seri *gerçekten yakınsıyor demektir* ve bu durum diğer birçok dizi için de geçerlidir. Örneğin bunlardan biri olan

$$(1\frac{1}{2})^2, (1\frac{1}{3})^3, (1\frac{1}{4})^4, (1\frac{1}{5})^5 \dots,$$

dizisi *e* aşkın sayısını temsil eder.

Bu naif yakınsaklık ve limit fikri, analizin ilk zamanlarında belitsel olarak kabul edilmiştir ve yol açtığı tuzaklara karşın, kalkülüsün ilk başarılarını bu fikre borçlu olduğu kabul edilmelidir. Buna göre doğal olarak akla ilk gelen sorular şunlardır: Bu muğlak sezgisel yakınsaklık ve limit fikrini, formüle edilmiş kesin bir tanımla ifade etmek mümkün müdür? Böyle bir tanımla, periyodik olmayan ondalık seriler ve diğer dizilerdeki bu yeni matematiksel varlıkları ele alırken, rasyonel limiti olan özel türdeki gibi bir kesinliğe ulaşmamıza izin verecek yeni bir araç oluşturmak mümkün müdür?

Bu sorulara cevap vermek için, rasyonel limitlere yakınsayan özel dizilerin özelliklerinin arasında, böyle yakınsamayan çok daha kapsamlı türe doğrudan genellememizi sağlayacak bir özellik olup olmadığını incelemeliyiz. Georg Cantor, benim yakınsak dizinin *kendi kendine asemptot doğası* dediğim şeyde bu tür bir özellik keşfetti.

Bunu göstermek için ikilik serisine tekrar bir bakalım. Bu sıralamayı, birinci terimi küçültüp ikinci terimi birincinin, üçüncüyü ikincinin yerine vb. getirerek "ilerletelim". Bu ilerleme süreci aşağıdaki ardışık dizileri oluşturur:

$$1/2, 3/4, 7/8, 15/16, 31/32, 63/64, 127/128, \dots$$

$$3/4, 7/8, 15/16, 31/32, 63/64, 127/128, 255/256, \dots$$

$$7/8, 15/16, 31/32, 63/64, 127/128, 255/256, 511/512, \dots$$

Bunlar tabii ki sonsuz şekilde devam edebilir. Üstünkörü bir incelemede bile bu sıralamaların tümünün birbirlerine asemptot olduğu, yani herhangi iki tanesi ile oluşturulan fark dizisinin yiten türde olduğu görülebilir.

Bu *kendi kendine asemptot* olma özelliğinin rasyonel bir limite yaklaşan tüm diziler için geçerli olduğu gösterilebilir; ama kesinlik-

le bunlarla sınırlı değildir: Aslında, periyodik olmayan sonsuz ondalık serilerin hepsi aynı özelliğe sahiptir. Örneğin

0,1; 0,10; 0,101; 0,1011; 0,10111; 0,101112;

olarak yazılabilen

0,101112131415 ...

ondalık serisine bakalım.

Bu rasyonel kestirimlerden istendiği kadarının çıkartılmasının dizinin görünüşünü bile değiştirmeyeceği açıktır. Buna göre diziyi şu şekilde yazabiliriz:

0,101112; 0,1011121; 0,10111213; 0,101112131;...

ki bu da kesinlikle birinciye asemptottur.

Böylece Cantor, *kendi kendine asemptot* ve *yakınsak* terimlerini tanımlayarak şimdiye kadar sadece bazı rasyonel tekrarlı dizilere asemptot olan dizilerde geçerli olan yakınsaklık fikrini genişletti. Dahası, kendi kendine asemptot dizinin eskiden beri *reel sayı* olarak adlandırılan şeyle özdeşleştirdiği yeni bir tür matematiksel varlığı oluşturduğunu kabul ederek *limit* fikrini de genişletti.

Bu tür varlıklara *sayı* adının verilebilmesi için kalıcılık ilkesinin tüm koşullarının yerine getirildiği kanıtlanmalıdır.

İlk koşulun karşılanmış olması, yakınsak diziler arasında limiti rasyonel sayı olanlar olduğu gerçeğine uygundur. İkinci koşul derece kıstasını ima eder. O halde iki reel sayıyı, *a* ve *b*'yi tanımlayan iki dizi olan (A) ve (B)'yi ele alalım ve fark dizisini (A – B) oluşturalım. Bu sonuncusu yiten dizi olabilir, bu durumda (A) ve (B) asemptottur ve *a* ve *b* sayılarının eşit olduğunu söyleyebiliriz. Buna örnek olarak şu iki diziyi gösterebiliriz:

$(1^{1/2})^2$ $(1^{1/3})^3$ $(1^{1/4})^4$ $(1^{1/5})^5$...,

ve

$2 + \frac{1}{2!}, 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!},$
 $2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!},$
 $2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}, \dots$

Bunların asemptot olduğu ve dolayısıyla e aşkını olan aynı reel sayıyı (e aşkın sayısını) temsil ettikleri kanıtlanabilir.

Fark dizisi yiten türden değilse, belli bir terimle başlayarak tüm terimler pozitif olabilir ve bu durumda da (A) dizisinin (B) dizisine *üstün* olduğunu veya a reel sayısının b reel sayısından *büyük* olduğunu söyleyebiliriz. Ve yine, belli bir terimle başlayarak fark dizisinin takip eden tüm terimleri negatifse, buna göre (B) (A)'dan *üstündür*, böylece a 'nın b 'den *küçük* olduğunu söyleyebiliriz. (A) ve (B)'nin rasyonel limitleri olması durumunda bu kıstasların standarda indirildiği gösterilebilir.

Son olarak, iki reel sayının toplam ve çarpımını bu dizilerin ilgili terimlerini toplayarak veya çarparak elde edilen dizilerle tanımlanan reel sayılar olarak tanımlarız. Elbette bu, ortaya çıkan bu dizilerin de yakınsak olduğu anlamına gelir ve durumun gerçekten böyle olduğu kesin olarak kanıtlanabilir. Dahası, bu şekilde tanımlanan toplama ve çarpmanın birleşme, değişme ve dağılma özellikleri olduğu gösterilebilir.

Kalıcılık ilkesi açısından bakıldığında, bu yeni büyüklükler tam tekmil sayılar olarak kabul edilebilir. Bunların eklenmesiyle birlikte, rasyonel alan *reel sayılar bölgesi* olarak adlandıracağımız çok geniş bir ülkedeki küçük bir ile dönüşür.

Bu yeni bölge cebirin irrasyonellerini, analizin aşkınlarını kapsar mı? Evet. Bunu kanıtlamak üzere gelin $x^2 = 2$ denkleminde dönelim. Bu denklem iki bin yıldan uzun zaman önce, karenin köşegenini hesaplama problemi kılığında ortaya çıkarak bir kriz başlatmış ve bu kriz zamanımızda reel sayı bölgesinin inşasıyla sonuçlanmıştır.

Okulda karekökün elde edilmesi için bir algoritma öğrenmiştik. Bu prosedür $\sqrt{2}$ için aşağıdaki yakınsak diziye oluşturan rasyonel yaklaşımlar verir:

$$1; 1,4, 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421;$$

Bu dizinin rasyonel bir limiti yoktur, ama buradaki her bir terimin karesini alarak elde edilen dizi, yani

1; 1,96; 1,9881; 1,999396; ...,

2 rasyonel sayısına yaklaşır.

Buna göre $x^2 = 2$ denkleminin pozitif çözümünün söz konusu dizi olduğunu söyleyip tanımladığı sayıyı $\sqrt{2}$ ile gösterdiğimizde, kareler dizisinin sadece yakınsadığını değil, aynı zamanda bir *rasyonel limite* (bizim durumumuzda 2 sayısı) sahip o nadir yakınsak dizi türünden olduğunu söylemek isteriz. Diğer bir deyişle, dizi $\sqrt{2}$ 'yi temsil eder çünkü 2 sayısının, tam kare olmasa da tam kare dizisinin yaklaştığı limit olduğunu kabul ederiz.

Diğer cebirsel veya aşkın denklemler için de benzer bir prosedür geçerlidir. Aranacak çözüme yaklaşan diziyi herhangi bir anda oluşturacak olan bir algoritmanın fiilen bulunması matematiksel açıdan çok zor olabilir. Yine de, bir kez bulunduğunda, dizi her zaman doğası gereği yakınsak olan ve dolayısıyla gerçek bir sayıyı temsil eden sonsuz bir ondalık kesir şeklinde yeniden yorumlanabilir.

Böylece, sonsuz süreçlerin geçerliliğinin kabulü bizi rasyonel aritmetiğin dar sınırlarından kurtarır. *Genel bir aritmetik, reel sayıların aritmetiğini* meydana getirir ve bu da bize rasyonel aritmetiğin çözmekte âciz kaldığı problemleri ele alma yöntemleri sunar.

İlk bakışta, rasyonel dizilerin limitlerine çok genel bir anlama sahip olan *reel* adını verdiğimiz için öngöründen mahrummuş gibi görünebiliriz. Zira, şimdi bu tür irrasyonellerin sonsuz dizilerinin akla gelmesi gayet doğaldır. İlk türe birinci *dereceden* irrasyoneller deseydik, bu yeni limitler ikinci dereceden irrasyoneller olarak adlandırılacaktı; buradan da üçüncü dereceden irrasyonelleri vs. elde edebirdik. Bunun salt bir hokkabazlık olmadığı, $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ gibi basit bir ifade ile kanıtlanır. Bu ifadenin doğrudan yorumu şu *irrasyonel* diziyi oluşturur:

$$\sqrt{2,4}; \sqrt{2,41}; \sqrt{2,414}, \dots$$

Ama en azından bu durumda itiraz temelsizdir. Zira $\sqrt{1 + \sqrt{2}} = x$ olduğunu gösterirsek, basit bir cebirsel işlem x 'in $x^4 = 2x^2 + 1$ denkleminin çözümü olduğunu gösterecektir. Buna ise kök bulma algoritmasına benzer bir prosedür uygulanabilir ve bu da ilk önce ele aldığı-

mız irrasyonel diziye asemptot bir rasyonel dizi olarak görülecek rasyonel yaklaşımlar oluşturmamıza imkân sağlar.

Başta garip görünse de, son derece genel bir olgudur bu. *Herhangi bir irrasyonel diziye, ona asemptot olan bir* (hatta çoğunlukla birden fazla) *rasyonel dizi atayabiliriz*. Böylece *dereceli* irrasyoneller kavramının geliştirilmesi –her ne kadar salt biçimsel bakış açısından ilginç olsa bile– genel aritmetik açısından oldukça gereksizdir.

İrrasyonel dizi yoluyla ifade edilen her şeyin rasyonel sayılar dizisiyle temsil edilebileceği önermesi temel bir öneme sahiptir; rasyonel sayılara kuram içinde özel bir rol atfeder. Herhangi bir reel sayı sonsuz yakınsak rasyonel dizilerle ifade edilebildiğinden, yakınsaklık ve limit kavramlarıyla desteklenen rasyonel bölge, aritmetiği ve aritmetik yoluyla modern matematiğin temel taşı olan fonksiyonlar kuramını oluşturmak için yeterli olacaktır.

Ama bu önemli olgu, uygulamalı matematikte de benzer bir öneme sahiptir. Herhangi bir rasyonel dizi sonsuz bir ondalık seri olarak temsil edilebileceğinden, tüm hesaplamalar sistematikleştirilebilir. Kendini belli bir sayıda ondalık basamakla kısıtlayan bilgisayar, herhangi bir irrasyonel veya aşkın probleme dair rasyonel bir yaklaşım elde edebilir. Ve dahası, bu prosedürün kesinlik derecesi sadece kolayca hesaplanmakla kalmayıp önceden bile atanabilir.

Dış siyasetinin ardındaki ana ilkenin ne olduğu sorulduğunda XIV. Louis'nin alaycı bir tarzda şöyle cevap verdiği söylenir: "İlhak! Daha sonra işi kılıfına uyduracak akıllı bir avukat bulmak her zaman mümkündür."

Sonsuz ve irrasyonel problemlerinin geçmişini düşündüğümde daima bu anekdotu hatırlıyorum. Dünya, Weierstrass ile Cantor'un irrasyonel bir sayının yerine irrasyonel yaklaşımlarından birini koyma veya, aynı biçimde, sonsuz bir dizinin limitinin yerine dizide daha ileride olan bir terimi koyma prosedürünü onaylamasını beklemedi. *Rasyonel yaklaşımlar* çerçevesinde arsalarını ölçerek yapılarını dikti; tünellerini kazarak köprülerini inşa etti; silahlarını ve makinelerini tasarladı; ilgili ilkenin geçerliliğine ilişkin hiç soru sormadı.

Daha önce, Theon ve Hero'nun tamsayıların karekökleri için verdikleri yaklaşık değerlerden bahsetmiştim. Bu problemin kökeninin daha eski olduğuna ve muhtemelen ilk Pisagorculara kadar gittiğine dair deliller vardır. Ama ilkenin ilk sistemli uygulamalarını gerçekleştiren Arşimet oldu.

Matematiğin geçtiği çeşitli aşamaları çok güzel yansıtan o klasik probleme, çemberin kareleştirilmesi meselesine geri dönelim. Önceden de belirttiğim gibi, Arşimet'in yöntemi çevreyi, biri çember dışına diğeriye çember içine çizilmiş olan iki dizi düzenli çokgen arasında sıkıştırılmış kabul etmekten ibaretti. Altıgenlerle başlayarak 96 kenarlı çokgenlere ulaşana kadar sayıyı ikiye katlamaya devam etti. İçteki çokgenlerin ardışık çevreleri bir dizi, dıştaki çokgenlerinkiyse başka bir dizi oluşturur. Süreç sonsuza kadar devam ederse, iki dizi aynı limite yaklaşır: çevrenin uzunluğu. Bu sonuncusunun çapı 1 ise, ortak limit π olacaktır.

Bu dizilerde ilginç olan, ikisinin de irrasyonel olmasıdır. Gerçekten de, birincinin ilk terimleri 6 ve $6(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, ikincinin ilk terimleriyle $4\sqrt{3}$ ve $24(2 - \sqrt{3})$ olup, takip eden terimler artan karmaşıklıkta köklü ifadeler içerir. Arşimet bu irrasyonel dizileri büyük bir güvenle rasyonellerle değiştirdi ve bu şekilde π 'in iki rasyonel sayı ($3^{1/7}$ ile $3^{10/71}$) arasında olduğu sonucuna vardı.

Aynı iki klasik problem, yani köklü ifadeler ve π 'nin değeri, bir başka önemli sonsuz sürecin gelişimi için itici bir güç sağladı: *sürekli kesir*. Bazı matematik tarihçileri bunların Yunanlılarca zaten bilindiğini iddia etse de, bize ulaşmış bilinen ilk sürekli kesir kaydı Bombelli'nin 1572 tarihli bir kitabında yer alır. Öte yandan Bombelli burada, "Diğer yazarların eserlerinde kesir oluşturmak için birçok yöntem gösteriliyor; bu yazarlar nedensiz yere birbirlerine saldırıp birbirlerini suçluyor, zira kanımca hepsi de aynı sonuca gidiyor," der. Buna göre, algoritma on altıncı yüzyıl başlarında biliniyor olmalı.

Bombelli'nin bahsettiği "aynı sonuç", köklü ifadeler için rasyonel yaklaşımların bulunmasıdır. Bu yöntemi $\sqrt{2}$ ile açıklayacağım. Bu sayı 1 ile 2'nin arasında olduğundan, $\sqrt{2} = 1 + 1/y$ denklemini kuralım. Buradan $y = 1 + \sqrt{2} = 2 + 1/y$ 'yi çekiyoruz. Bu şekilde devam ettiğimizde aşağıdaki kesri elde ederiz:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Bu özel bir sürekli kesir türüdür; tüm paylar 1 olduğu için *basit* olarak, paydalar tekrarlandığı için *periyodik* olarak adlandırılır.

Kendimizi sürekli kesrin tek ögesi, iki ögesi, üç ögesi vs. ile kıstırsak, *yakınsak* olarak adlandırılan bir dizi rasyonel yaklaşıtırm elde ederiz. $\sqrt{2}$ için yakınsaklar şunlardır:

$$1, 1^{1/2}, 1^{2/5}, 1^{5/12}, 1^{12/29}, 1^{29/70}, 1^{70/169}, \dots$$

İki özellik sürekli kesirleri bilhassa değerli kılar. İlk olarak, *basit bir sürekli kesir daima yakınsar*; ikinci olarak ise *salınımlı bir yapıya sahiptir*. Öyle ki, birinciye, üçüncüyü, beşinciye vs. ve ardından ikinciye, dördüncüyü, altıncıyı vs. alarak yakınsakları iki gruba ayırabiliriz. $\sqrt{2}$ örneğinde iki asemptot dizi elde ederiz:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1^{2/5} & 1^{12/29} & 1^{70/169} \dots \\ 1^{1/2} & 1^{5/12} & 1^{29/70} & 1^{169/408} \dots \end{array}$$

Birincisi sürekli artar ve üst sınırı $\sqrt{2}$ 'dir, diğeri sürekli azalır ve alt sınırı $\sqrt{2}$ 'dir. Bu salınım özelliği sürekli kesirleri isabetli yaklaşıtırmalar için paha biçilmez kılar, zira herhangi bir yakınsakta durma hatası kolaylıkla tahmin edilebilir.

On sekizinci yüzyılda, Euler *ikinci dereceden irrasyonel ifadelerin tek bir basit periyodik sürekli kesirle ifade edilebileceğini* gösterdi ve kısa süre sonra Lagrange tersinin, yani bu tür herhangi bir *periyodik kesrin bir ikinci derece denklem çözümünü temsil ettiğini* kanıtladı. Buna göre, periyodik sürekli kesirlerin ikinci derece denkleme ilişkin rolü, periyodik ondalık kesirlerin doğrusal denkleme ilişkin rolüyle aynıdır.

$\sqrt{2}$ için belirlediğimiz prosedür herhangi bir denkleme uygulanabilir, dolayısıyla çoğu genel denklemin reel çözümü sürekli kesir olarak ifade edilebilir. Fakat yalnız ikinci derece denklemden kesir peri-

yodik olacaktır. İlk bakışta sürekli kesirler cebirsel işlemlere özellikle uygun gibi görünür. Durum böyle olsaydı, cebirsel irrasyonelleri aşkınlardan ayırt edebileceğimiz bazı kıstaslarımız olurdu. Aslında kesrin cebirsel kökeninin öğelerinin niceliği üzerine belirli sınırlamalar getirmesi bakımından bu doğrudur; hatta Liouville'in *cebirsel olmayan sayıları keşfetmesini* sağlayan da bu sınırlamaydı. Ama bunun dışında, cebir prosedürleri sürekli kesirlere veya (bildiğimiz kadarıyla) diğer herhangi bir dizi türüne ilişkin hiçbir ayrıcalıklı konuma sahip değildir. Aşkınlık kuramında karşılaşılan büyük güçlüklerden sorumlu olan, sonsuz süreçlerin cebire karşı bu olağanüstü "kayıtsızlığı"dır.

Böylece, okurun bu bölümün sonundaki tablodan da görebileceği gibi, aşkın sayılar π ve e sürekli kesirlerle gayet şık bir tarzda ifade edilebilir. π 'nin sürekli bir kesre genişlemesi Lambert tarafından 1761'de keşfedilmiştir ve tarihsel açıdan büyük önemi vardır. Bu kesrin periyodik olmaması, π sayısının *rasyonel katsayıya* sahip bir ikinci derece denklemin kökü olmadığını kesin biçimde gösterir. Bu, çemberin kareleştirilmesinin tek başına cetvel ve pergelle başarılamayacağını düşündürür. *Kanıtlar yerine düşündürür* dedim, çünkü π sayısının, katsayıları sadece ikinci derece irrasyonellikleri içeren bir ikinci derece denklemin kökü olma ihtimali hâlâ vardır. Bu durumda sürekli kesir periyodik olmayacak ama pergelci-cetveli bir çözüm mümkün olacaktır.

Basit sürekli kesirlerle sonsuz ondalık seriler arasında olağanüstü bir benzerlik vardır. İlk olarak, her iki dizi türü de daima yakınsaktır: Yani sürekli kesir paydalarına veya ondalık kesir basamaklarına ait rasgele herhangi bir sıralama yasası, daima reel bir sayıyı temsil edecektir. İkinci olarak, sıralama yasası periyodikse ondalık diziler rasyonel bir sayıyı temsil eder, oysa periyodik sürekli kesir ikinci dereceden bir irrasyonelliği, yani a ve b 'nin rasyonel olduğu $a + \sqrt{b}$ biçimindeki bir sayıyı ifade eder. Nihayet, bayağı kesirlerin özel bir süreklilik vakası sayılması koşuluyla, herhangi bir reel sayı ondalık seri biçiminde veya sürekli kesir olarak ifade edilebilir.

Bu özellikler bu iki sonsuz süreç türünün reel sayıların temsili için özellikle uygun olduğunu gösterir. Ancak sonsuz süreçlerin tarihi, daha geniş kapsamlı olup genelliği ve belirsizliği nedeniyle bir

dizi akıl karıştırıcı ve paradoksal sonuca yol açan bir prosedür etrafında dönüp dolaşmıştır.

Şüphesiz bu prosedürün kökeni, Zenon'un argümanlarından anlaşıldığı kadarıyla antikçağlarda da iyi bilinen geometrik seriydi. Kendimizi pozitif geometrik seri ile kısıtladığımızda, oran 1'den küçükse serinin yakınsak, büyükse ıraksak olduğunu görürüz. Bu sonuç hemen *almaşık* (*alternating*) geometrik seriye, yani oranın negatif olduğu duruma genelleştirilebilir. Oran basit kesirse almaşık geometrik seri yakınsayacak, aksi durumda ıraksayacaktır. Oran -1 'e eşit olduğunda ise ilginç bir durum ortaya çıkar. Bu durumda seri aşağıdaki biçimi alır:

$$a - a + a - a + a - a + a - a + \dots$$

Bugün, toplamın asla a 'yı aşmamasına rağmen bu serinin ıraksadığını söyleyebiliriz. Gerçekten de, bu seri aşağıdaki sıralama ile yeniden ifade edilebilir:

$$a, 0, a, 0, a, 0, a, 0 \dots,$$

ve bunun belli bir limiti yoktur. Ancak, Leibniz farklı bir düşüncedydi. a ve 0 limitlerinin *eşit ölçüde muhtemel olduğunu* savlıyor ve toplamın limit olarak $1/2 a$ ortalama değerine yaklaştığını öne sürüyordu.

Leibniz'in serileri ele aldığı yazı on yedinci yüzyılın sonlarında yayımlandı ve bu konudaki ilk yayınların arasına girdi. Serilerin bu erken tarihinin tipik özelliği, günümüzde temel olarak görülen ıraksaklık veya yakınsaklık sorununun o günlerde az çok görmezden gelinmesiydi. Yani, örneğin, bir seri oluşturan dizi yiten bir dizi ise, serinin zorunlu olarak yakınsak olduğuna inanılıyordu. Gördüğümüz üzere, bu durum geometrik seri için geçerlidir; şüphesiz söz konusu yaygın hata da bundan kaynaklanıyordu. Probleme ilişkin net bir kavrayış, Jacques Bernoulli'nin sonsuz seriler üzerine kaleme aldığı eseri 1713 yılında yayımlanana kadar mümkün olmayacaktı. Konu aşağıdaki *harmonik* seriydi:

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 \dots$$

Üreten dizi yiten türden olduğundan, bu serinin genel olarak yakınsadığına inanılıyordu. Bernoulli ise kitabında, kardeşi Johann'a da-

yanarak, bu serinin yavaş ama kesin biçimde ıraksadığının kanıtını sunmuştur.

Bernoulli'nin eseri dikkatleri yakınsaklık kıstasları oluşturma ihtiyacına yöneltti. *Genel terimin*, yani üreten dizinin yiten türden olması kesinlikle *gerekli* bir koşuldur ama genellikle yetersizdir. *Yeterli* koşullar d'Alembert ve Macluarin, Cauchy, Abel ve diğer birçoklarının oluşturulmuştur. Genel amacıma uzak olan bu konuya eğilmeyeceğim. Ancak, bir serinin yakınsayıp yakınsamadığını anlamanın günümüzde bile bazı durumlarda güç olduğunu söylemeliyim.

Yine de, ilk zamanlarda büyük ilgi çeken ve genel terimin yiten türden olmasının bir yakınsaklık kıstası olduğu özel bir seri türü mevcuttur. Bunlar *almaşık seriler* olup tipik bir örnekleri şöyledir:

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - \dots$$

Bu seri 2 sayısının, yaklaşık değeri 0,693 olan *doğal logaritmasına*¹ yakınsar. Öte yandan *mutlak değerler* serisi,

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 \dots$$

harmonik serisidir ve önceden belirttiğimiz gibi, ıraksar.

Bu seri türünden bahsetmemin nedeni, birçok akıl karıştırıcı olaydan sorumlu olmasıdır. On yedinci ve on sekizinci yüzyıllarda serilere yönelik genel tutum, bunları özel dizi türleri yerine sonsuz sayıda terimin *toplamı* olarak görmektir. Dolayısıyla bu "toplama"ya sonlu işlemin özelliklerini, yani birleşme ve değişme özelliklerini atfetmek oldukça doğaldır. Böylece, toplam terimlerin dizilişinden bağımsız olduğundan, terimlerin istenildiği gibi dizilebileceği varsayılıyordu.

1848 yılında Lejeune Dirichlet tüm pozitif terimlerin yakınsak serisinde bunun gerçekten de geçerli olduğunu kanıtladı. Ama eğer seride negatif terimler varsa, iki durum ortaya çıkabilir: Seri *mutlak yakınsaksa*, yani mutlak değerler serisi yakınsıyorsa, birleşme ve değişme özellikleri gerçekten vardır, ama seri sadece *koşullu yakın-*

1. A sayısının *doğal logaritması* $e^x = A$; $x = \log A$ ifadelerindeki x terimidir. Burada e daha önce birkaç kez belirtilmiş olan *aşkındır* ve yaklaşık değeri 2,71828'dir.

saksa, yani pozitif terim serisi ıraksıyorsa, bu özellikler çöker ve bu durumda, terimleri uygun bir şekilde yeniden dizerek toplamın herhangi bir sayıya eşit olduğu sonucunu çıkarmak mümkündür.

O halde, Dirichlet'nin zamanından önce serilerle, özellikle de *koşullu yakınsak* olarak adlandırdığımız serilerle işlem yapma yoluyla birçok garip sonuç elde edilmesinde şaşılacak bir şey yoktur. Buna tarihi bir örnek, harmonik seridir. x ile tek sayıların, y ile de çift sayıların "toplamını" gösterelim. O zaman $y = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/6 \dots = 1/2 (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots)$ yazabiliriz. Buradan düşünmeden aşağıdaki işlemi çekebiliriz

$$y = 1/2 (x + y) \text{ veya } 1/2 x = 1/2 y \text{ veya } x - y = 0.$$

Böylece alması harmonik serinin 0'a yakınsadığı gibi temelsiz bir sonuca ulaşırız ki, aslında seri limit olarak 2'nin doğal logaritması-na yakınsar.

Bugün söz konusu argümanlar yeterince abes görünse de, sadece on sekizinci yüzyılda değil, on dokuzuncu yüzyılın başlarında da oldukça yaygındı. Nitekim 1828 gibi geç bir tarihte bile, Abel eski hocası Holmboe'ya yazdığı mektupta aşağıdaki şikâyetini dile getirir:

İraksak seriler şeytan icadıdır, herhangi bir ispatı onlara dayandırmaksa tam bir yüzkarasıdır. Bunların aracılığıyla insan istediği sonucu çıkarabilir; bu seriler bu yüzden böyle safsatalar ve paradokslar üretmiştir. ... Tüm bunlara fevkalade dikkat ediyorum, zira geometrik seriler hariç olmak üzere, matematiğin genelinde toplamı kesin biçimde saptanmış tek bir sonsuz seri yoktur. Diğer bir deyişle, matematikte en önemli addedilen şeyler aynı zamanda en zayıf temele sahip olanlardır. Buna karşın, çoğunun doğru olması fevkalade şaşırtıcıdır. Buna bir sebep bulmaya çalışıyorum; son derece ilgi çekici bir sorun bu.

Abel'in mektubunda taze bir ruh var. Zaman, matematikte yeni bir çağın, eleştirel bir çağın şafağıydı. Bilimin Dirilişinin başından beri hüküm süren naif tutum sona eriyordu. Matematik biliminin her alanında muazzam fetihler yapılmış, artık bu sonuçları sistemlerle pekiştirmenin zamanı gelmişti ve hepsinden öte, bu sistemlerin oturtulacağı temelleri dikkatle incelemek gerekiyordu.

Cauchy ve Abel'den sonraki sonsuz süreçlerin öyküsünü anlatmak, modern analizle fonksiyon kuramının öyküsünü anlatmaktır ve bu da bizim kapsamımızın dışındadır. Ama sonsuz süreçlerin erken

tarihinin bu kabataslak sunumu, Cantor'un irrasyoneller kuramının uzun bir tarihi devrimin –Pisagor kriziyle başlamış, tüm fikirlerin gelişimi engellendiğinde bir süre kesintiye uğramış ve Bilimin Dirilişiyle yeniden başlamış olan bir devrimin– tamamlanmasından başka bir şey olmadığını göstermek için yeterli olacaktır.

Son bölümde sunduğum analiz vakasında olduğu gibi, körlemesine bir arayışla geçen bu uzun dönemdeki yönlendirici güdü, *limit-sizin mutlak doğasına* dair bir tür örtülü inançtı. Bu inanç nihai ifadesini finalde buldu: yeni *sürey* kuramları. Bir sonraki bölümde bunları ele alacağım.

π SAYISI

$$\frac{\pi}{2} = \text{çarpımın limiti: } \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdot \frac{10 \cdot 10}{9 \cdot 11} \dots$$

$$\frac{\pi}{4} = \text{serinin limiti: } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \frac{1}{21} \dots$$

$$\frac{\pi}{2} = \text{serinin limiti: } 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right) + \frac{1}{7} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) + \frac{1}{9} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \right) + \dots$$

$$\frac{\pi}{4} = \text{kesrin limiti: } 1 + \frac{1^2}{2} + \frac{3^2}{2} + \frac{5^2}{2} + \frac{7^2}{2} + \frac{9^2}{2} + \frac{11^2}{2} + \dots$$

 e SAYISI

$$e = \text{sıralamanın limiti: } \left(1 \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 \frac{1}{3}\right)^3, \left(1 \frac{1}{4}\right)^4, \left(1 \frac{1}{5}\right)^5, \dots$$

$$e = \text{serinin limiti: } 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \dots$$

$$e = \text{kesrin limiti:}$$

$$e = 2 + \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}}_{\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1}} + \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1}}_{\frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1}} + \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1}}_{\frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{1}} + \dots$$

Boşlukları Doldurmak

Varla yoğu ölçerim doğrularla ve cetvelle
Bulurum aşağıyı, yukarıyı mantığın sesiyle
Ama onca şey varken kurcalanması gereken
Şarap hariç hiçbirine dalıp gitmedim ben.

Derler ki benim hesaplarım sayesinde
Yıl daha kullanışlı olmuş – hiç de bile
Benim tek yaptığım takvimden söküp atmaktı
Ölüp gitmiş dünle doğmamış yarını.

ÖMER HAYYAM

Sonsuz sürecin geçerliliğinin kabulü bizi rasyonel bölgenin dar hudutlarından çıkarır ve bize rasyonel aritmetiğin karşısında âciz kaldığı problemleri çözme yöntemleri sunar. O nedenle şimdi, doğru üzerindeki noktalarla sayı bölgesi arasında mükemmel bir mütekalibiyet oluşturma sorununu çözmek için daha iyi bir konumda olup olmadığımızı sorgulamak gayet doğaldır.

Rasyonel aritmetiğin bu sorunu çözmekten âciz olduğunu biliyoruz. Ama genel aritmetiğin, reel sayıların aritmetiğinin bu bağlamda daha iyi olup olmadığı halen tartışmaya açık bir sorudur: Doğrunun rasyonel terimlerle ifade edilemeyen noktaları için herhangi bir aritmetik formülasyon mümkün mü? İlk krize neden olan ve aritmetiğin temellerinde revizyonu zorunlu kılan eski sorun şimdi yeni ve daha genel bir biçimde yeniden belirliyor:

HER reel sayı, doğru üzerinde bir nokta ile temsil edilebilir mi? Doğru üzerindeki HER noktaya bir reel sayı atanabilir mi?

Cevap olumlu ise, bir tarafta reel sayılar bölgesi ile diğer tarafta noktalar kümesi arasında tam ve çift taraflı bir mütakabiliyet mevcuttur. Böyle bir mütakabiliyet varsa, geometrinin sezgisel dilini aritmetik analizin formülasyonunda güvenle kullanabilir ve bu sorunları sayı ve büyüklüğe indirgeyebiliriz. Sorunun ne derece temel olduğu ve cevaba ne çok şeyin bağlı olduğu ortada!

Modern çağlarda bu soruya verilen cevabı anlamak için iki kümenin yapısını ayrı ayrı açıklamalıyız: reel sayılar bölgesi ve doğru üzerindeki noktalar.

Reel sayılar bölgesi hakkında şunları biliyoruz:

Bir: İyi sıralanmıştır: a ve b gibi herhangi iki reel sayıdan hangisinin daha büyük olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca, a b 'den büyük ve b c 'den büyükse, a da c 'den büyüktür. Kısacası, zihnimizin bir hareketiyle bu tür sayılara ait herhangi bir sonsuz derlemi büyüklük sırasına göre dizebiliriz. Ayrıca tüm reel sayıların bu şekilde dizildiğini tasavvur edebiliriz. Reel sayılar kümesinin iyi sıralanmış olduğunu söylerken kastettiğimiz budur.

İki: Bu bölgenin bir ilk veya son ögesi yoktur: Pozitif reel sayı ne kadar büyük olursa olsun, daha büyüğü vardır ve negatif bir sayı ne kadar küçük olursa olsun, daha küçüğü vardır. Bu durumu, reel sayılar bölgesinin negatif sonsuzluktan pozitif sonsuzluğa uzandığını söyleyerek ifade ederiz.

Üç: Tüm rasyonel sayılar, reel sayılara dahildir. Rasyonel bölge daha büyük olan reel sayılar bölgesi içinde bir altbölgedir.

Dört: Reel sayılar kümesi her yerde yoğundur. Herhangi iki reel sayı arasına –aralık ne kadar küçük olursa olsun– sonsuz sayıda başka reel sayı yerleştirilebilir.

Bu, reel sayılar bölgesinin her şeyi kapsadığı anlamına gelmez mi? Rasyonel sayılar deneyimimiz olmasaydı bu önermeyi tereddütsüz kabul edebirdik; unutmayalım ki şu âna kadar reel sayılar bölgesi için söylediklerimizin tümü aynı şekilde rasyoneller için de geçerli olabilir. Ne var ki rasyonel bölgenin, yoğun yapısına karşın "boşluklarla dolu" olduğunu gördük. İrrasyonellerle aşkınların bu boşlukları tamamen doldurduğuna dair ne güvencemiz var? Bir süre

sonra, yeni matematiksel varlıkların yaratılmasıyla bu defa reel sayılar bölgesi içinde yeni boşluklar açığa çıkaracak yeni süreçler keşfedilemez mi?

Bu soruya cevap vermek için Cantor rasyonel bölge ile reel sayılar bölgesi arasındaki temel farkı araştırmıştır.

Rasyonel sayılar kümesi, düzenli ve yoğun olsa da *kusurludur*. Sonsuz süreçlere göre *kapalı* olmadığı için kusurludur. İrrasyonel-lerin varlığı ile kanıtlandığı üzere, sonsuz süreçlere göre kapalı değildir, zira yakınsak olsa da limit olarak rasyonel sayılara sahip olmayan sonsuz rasyonel diziler mevcuttur. Kısaca rasyonel sayılar kümesi kusurludur, zira kendi *limit değerlerinin* tümünü kapsamaz.

Ama reel sayılar kümesi sadece düzenli ve yoğun değildir: *Mükemmeldir*. Tüm sonsuz süreçlere göre *kapalı* olduğu için mükemmeldir. Sonsuz reel sayı dizisi, yakınsaksa bir reel sayıyı temsil eder; bu tür bir sonsuz dizi, kendisi rasyonel olmasa da aynı limite yaklaşan bir rasyonel dizi ile değiştirilebilir ve bu limit, doğası gereği bir reel sayıdır. Reel sayılar kümesi kendi *limit değerlerinin* tümünü kapsar ve bu nedenle *mükemmeldir*.

Rasyonel bölge analizinin gösterdiği gibi, her yoğun küme mükemmel değildir; ama Cantor'un ispatladığı gibi *her mükemmel küme yoğundur*. Cantor, düzenli ve mükemmel bir kümeyi *sürey* (*continuum*) olarak tanımlamıştır. Reel sayılar bölgesi bir süreyi oluşturur: *aritmetik sürey*. Diğer taraftan, rasyonel sayılar bölgesi kusurlu olduğundan bir süreyi oluşturmaz.

Buna göre, reel sayılar bölgesini tam olarak betimlemek için onun bir sürey, Cantor'un kastettiği anlamda bir sürey olduğunu söyleyebiliriz. Daha önce de gördüğümüz gibi, *sürey*, *sürekli*, *süreklilik* kelimeleri sağı bilimlerde en baştan beri kullanılır. Çok eski çağlardan beri *sürekli* terimi kesintisiz bir şey, en küçük parçalarının bütün ile aynı yapıya sahip olduğu bir şey, *tümü birbirine bağlantılı* bir şey anlamında (ama kesin bir anlama sahip olmaksızın) uzay, zaman ve devinime uygulanmıştır. Anlamını bir şekilde sezdiğimiz o belirsiz, genel olarak tasavvur edilen nosyonlardandır; yine de bunu kesin bir tanımla formüle etme çabası kaçınılmaz olarak sabırsız bir "Ne demek istediğimi anlıyorsun işte!" ile sonuçlanır.

Bu özelliklere uygun tüm fikirlerin prototipi, zihnimizde mükemmel melen bu süreklilikle donatılmış olan doğrudur. O halde doğru ile reel sayılar bölgesi arasında tam ve çift taraflı bir mütekabiliyet elde edeceksek, doğruya atfettiğimiz bu sezgisel süreklilik fikri ile Cantor'un tanımladığı kesin, bilimsel olarak formülleştirilmiş reel sayılar sürekliliği arasında açık bir çelişki olmamasına dikkat etmeliyiz.

Sezgisel süreklilik fikrimizin kesin formülünü bulmaya teşebbüs etmeden *sürekli* ile ne demek istediğimi kabaca tanımlamaya çalışırsam, ortaya şöyle bir şey çıkar:

Zaman her şeyin özüdür. Doğa Ana sıçrama *yapmaz*, zira Zaman Baba sıçramayı *bilmez*. Zamanın kesintiye uğratılması düşünülemez bile, o yüzden doğada kendiliğinden olan hiçbir şey yoktur. Zaman akıp gider ve aklı gelen her şeyi de beraberinde taşır.

Böylece herhangi bir fenomenin sürekliliğini tanımlamak istediğimizde, kendimizi bilinçsizce de olsa, kaçınılmaz şekilde zamanın sürekliliğine başvurur buluruz. Doğru bize tüm sürekli şeylerin prototipi gibi görünür çünkü onu sürekli bir akışın oluşturduğunu düşünürüz, bize donmuş Zaman Irmağı'nın somut bir temsili gibi gelir.²

Bu durum başka fenomenlerde de geçerlidir. Zihin kendiliğinden olanın önünde pusu; o yüzden bilimsel kuramlarımız evrime böyle umutsuzca tutunur. Evrendoğumda olsun, yaşama dair kuramlarda veya sosyolojik hipotezlerde olsun, her yerde bu felaket korkusunu buluyoruz. Felaket ve devrimin, kendiliğinden oluşumun ve rastlantısal keşfin evren veya yaşam tarihinde başat faktörler olabileceğini kabul etmeyi ne pahasına olursa olsun reddediyoruz.

Evrimin geçmişimize dair pürüzsüz bir resim sunması gibi, nedensellik doktrini de tüm fenomenleri sürekli tek bir zincire bağlayarak geleceğimizi tüm kendiliğinden çalkantılara karşı güvenceye alır ve bizi kaosun dehşetine karşı korur. Bu muğlak süreklilik ve nedensellik fikirleri öylesine yakın ilişkidir ki, birini desteklemek için devamlı diğere başvurulur. Tevekkeli değil: Evrenin sürekliliğine olan inancımız ve evrendeki olaylar arasındaki nedensel bağ-

lantıya olan güvenimiz, *zaman* dediğimiz bu ilkel sezginin iki yönüdür. Böylece, bir tarafta *Natura non facit saltus** kanaati varken, diğer tarafta *post hoc, ergo propter hoc*** yanılışması ortaya çıkar.

Burada fiziksel kavramlarımızın türediği geometrik sezgi ile aritmetiğin mantığı arasındaki ihtilafın doğuşunu görüyorum. Evrenin armonisi tek bir müzikal biçim tanır: *legato*. Buna karşın sayılar senfonisi sadece bunun zıddını bilir: *staccato****. Bu zıtlığı bağdaştırmaya yönelik tüm çabalar, hızlandırılmış bir *staccato*'nun duyularımıza *legato* olarak hitap edeceği umuduna dayanır. Ama aklımız bu tür çabaları daima aldatmaca olarak sınıflandıracak ve bu kuramları kendine yapılmış bir hakaret, kavramları zıddına dönüştürerek güya açıklayan bir metafizik sayarak reddedecektir.

Ama bu itirazlar boşuna. Zaman kavramımızın sürekliliği ile sayı yapısının özündeki süreksizliği arasındaki uçurumu aşmak için, insanlık bir kez daha zihin gücüne başvurmak zorunda kaldı. Zihin, "bir eylem bir kez mümkün olduğunda, aynı eylemin sonsuz kez tekrarını tasavvur edebileceğini bilir". Sonsuzun tarihi görevi işte buydu; bu yüzden çağlar boyu süre ve sonsuz problemleri tek bir ikilemin iki ucunu oluşturdu. Bu uzun uyum süreci Cantor'un kuramıyla sonuçlandı. Bu kuramda herhangi bir sayı sonsuz sıçrama dizisinin *hedefi* olarak algılanır ve süreyin sadece tüm olası *dinlence duraklarını* değil, tüm olası hedefleri de içerdiği kabul edilir. Bu *mükemmel* bir *staccato* kuramıdır; yine de zamanın tiranlığından kaçamaz. Sadece, süre'nin akan selini hızlandırılmış temponun sonsuz titreşimler silsilesi olarak kabul ederek bu tiranlığa uyum sağlar.

Zihin bu tiranlığa isyan eder, zihin geometri veya mekanik biliminin yabancı etkilerinden arınmış bir sayı kuramı talep eder. Böylece tarih bir harekete daha tanıklık etmiştir: yaratıcısı, Richard Dedekind'in adını taşıyan yeni bir irrasyoneller kuramına.

* Lat. Doğa sıçrama yapmaz. -ç.n.

** Lat. "Bundan sonra, öyleyse bunun yüzünden" anlamında bir mantık kuralı. -ç.n.

*** *legato-staccato*: İt. Müzik terimleri. *Legato* notaların birbirine bağlı çalınacağını, *staccato* ise notaların birbirinden kopuk tek tek çalınacağını ifade eder. -ç.n.

Dedekind kavramının özü, Cantor'un aynı konudaki makalelerinden on yıl önce, 1872 yılında yayımlanmış çığır açıcı "Süreklilik ve İrrasyonel Sayılar" başlıklı makalesinden alınan aşağıdaki pasajda ifade edilmiştir:

Doğru, nokta-bireyler açısından, rasyonel sayılar bölgesine kıyasla sonsuz kez zengindir. ...

O halde doğruyu yöneten fenomenleri aritmetiksel olarak izlemeye çalışırsak, rasyonel sayılar bölgesini yetersiz buluruz. Sayı bölgesi doğru ile aynı bütünlüğe –veya başka bir deyişle aynı sürekliliğe– sahip olacaksa bu aracı yeni sayıların oluşumuyla geliştirmek gerekli gelir. ...

Rasyonel sayılar bölgesinin doğru ile karşılaştırılması, bölgedeki boşlukların, eksikliğin veya süreksizliğin farkına varılmasına yol açmıştır; doğruya ise bütünlük, boşlukların yokluğu veya süreklilik atfedilmiştir. O halde bu süreklilik neyden meydana gelir? Her şey bu sorunun cevabına bağlı olmalı ve sadece bu şekilde tüm sürekli bölgelerin araştırılması için bilimsel bir zemin elde edebiliriz. En küçük parçadaki kesintisiz bağlantıya dair muğlak açıklamalarla belli ki hiçbir şey elde edilmez; sorun, sürekliliğin geçerli tündengelimine zemin oluşturabilecek kesin bir özelliğine işaret etmektir. Bu konu üzerinde uzun süre düşünüp durduktan sonra nihayet aradığımı buldum. Bu keşif farklı kişilerce farklı biçimlerde algılanabilir; çoğunluk bunun özünü oldukça basit bulabilir. Keşfim şundan ibaret: Önceki bölümde dikkatleri, doğrudaki her noktanın doğruyu iki kısma ayırdığı ve böylece bir kısımdaki her noktanın diğer kısımdaki her noktanın solunda olduğu gerçeğine çekmiştim. Sürekliliğin özünü işte bunun tersinde, yani aşağıdaki ilke de görüyorum:

Şayet doğrunun tüm noktaları iki sınıfa ayrılıyor ve böylece ilk sınıftaki her nokta ikinci sınıfın tüm noktalarının soluna düşüyorsa, tüm noktaları iki sınıfa ayıran, doğruyu iki kısma bölen bir ve yalnızca bir nokta vardır.

Önceden de belirttiğim gibi, herkesin hemen bu önermenin doğruluğunu kabul edeceğini düşünmekle yanlışladığımı sanıyorum; dahası, okurlarının çoğu sürekliliğin sırrının bu basit açıklama ile açığa vurulacağını öğrenmekten hayal kırıklığına uğrayacaktır. Buna karşılık, herkesin yukarıdaki ilkeyi apaçık ve kendi doğru kavramlarıyla uyumlu bulacağından memnun olduğumu söyleyebilirim; zira buna ilişkin herhangi bir ispat sunabilecek durumda değilim, başka hiç kimse de bu yetkede değil. Doğrunun bu özelliğine ilişkin varsayım, doğruya süreklilik atfettiğimiz, doğrunun sürekliliğini tanımladığımız bir belitten başka bir şey değil. Uzayın gerçek bir varlığa sahip olduğu kabul edildiğinde, sürekli *olması* gerekli değildir; süreksiz olsa da birçok özelliği aynı kalacaktır. Ve uzayın süreksiz olduğun-

dan kesinlikle emin olsaydık, istediğimiz takdirde boşluklarını (kendi zihnimizde) doldurmak suretiyle onu sürekli hale getirmekten bizi alıkoyacak hiçbir şey olmazdı; bu doldurma işlemi yeni bireysel noktalar oluşturmayı içerir ve bunun da yukarıdaki ilkeye uygun olarak gerçekleşmesi gerekirdi.

Dedekind'in ilkesini iş başında analiz edelim. Cantor gibi, Dedekind de rasyonel sayılar bölgesini çıkış noktası olarak alır. Buna rağmen, rasyonellerin yakınsak dizisi ile tanımlamak yerine, reel sayıyı rasyonel sayıların sınıflandırılması için zihin gücüyle yaratılmış olarak kabul eder. Bu özel sınıflandırma planına verdiği *schnitt* adı, *Dedekind kesiği*, *yarık*, *kesim* ve *bölüntü* olarak çeşitli şekillerde tercüme edilen bir terimdir. Ben sonuncusunu tercih ediyorum.

Bu bölüntü, Dedekind'in doğrunun sürekliliğini tanımlamakta kullandığı kavramın tam karşıtıdır. Doğru üzerindeki herhangi bir noktanın doğruyu bitişik, çakışmayan iki bölgeye ayırması gibi, her reel sayı da tüm rasyonel sayıları hiç ortak ögesi olmayan ama beraberce rasyonel sayılar bölgesinin tümünü kapsayan iki sınıfa ayırmak için bir araçtır.

Diğer taraftan, rasyonel sayılar bölgesinde böylesine bir kesim oluşturabilecek her denklem, her sınıflandırma planı, her süreç *kendiliğinden* bir sayı ile belirtilir; tanımı gereği bir reel sayıdır bu, yani bölgenin bir ögesidir.

Rasyonel sayıların her biri ayrı ayrı bu tür bir sınıflandırma düzeni olarak görülebileceğinden, bu geniş bölgenin bir parçasıdır. Gerçekten de, herhangi bir rasyonel sayı, diyelim 2'ye göre tüm rasyonel sayılar iki sınıfa ayrılabilir: 2'den küçük veya 2'ye eşit olanlar *alt sınıfa*; 2'den büyük olanlar *üst sınıfa* gider. İki sınıfın ortak ögesi yoktur ve beraberce rasyonel sayılar bölgesinin tamamını kapsarlar. 2 rasyonel sayısı bir *bölüntü* olarak kabul edilebilir ve dolayısıyla bir reel sayıdır.

Ama bu kapsamlı ilkenin potansiyeli, elbette böyle önemsiz bölüntülerle tüketilemez. Örneğin, hiçbir şey bizi tüm rasyonel sayıları, karesi belli bir rasyonel sayıdan, diyelim 2'den küçük veya 2'ye eşit ve karesi 2'den büyük olanlara bölmekten alıkoyamaz. Bu iki sınıf, önceki durumda olduğu gibi karşılıklı birbirini dışlar ve önceki gibi, bir araya getirilen iki sınıf tüm rasyonelleri kapsar. Bu bölüntü de eski dostumuz $\sqrt{2}$ ile tanımladığımız bir reel sayıyı ifade eder.

Diğer taraftan, hem rasyonel hem de irrasyonel sayılar bölüntülerle temsil edilebilirken, rasyonellerin temel olarak alınması sonuçsuz kalmaz, zira rasyonel ve irrasyonel bölüntüler arasında önemli bir fark vardır: Rasyonel bölüntünün kendisi alt sınıfın bir parçasıdır, tıpkı bir *politikacının* partisini bölerek sol kanadına geçmesi gibi. Ama irrasyonel bölüntü iki tarafa da ait değildir: Sanki ne sağ ne de sol kanada ait olan bir *mesele* partiyi bölmüş gibidir. Bölüntüye neden olan irrasyonel, ne alt ne de üst sınıfa aittir. Diğer bir deyişle, rasyonel durumda alt sınıf bir "en büyük ögeye" sahipken üst sınıf bir "en küçük ögeye" sahip değildir; irrasyonel durumdaysa alt sınıf bir "en büyük ögeye" sahip değilken üst sınıf da bir "en küçük ögeye" sahip değildir.

Dedekind'in kuramına göre bu, iki sayı türünü ayıran tek özelliktir: Sınıflardan *birine ait olmak* rasyonel sayının tipik özelliği, *hiçbirine ait olmamak* ise irrasyonelin tipik özelliğidir.

Dedekind'in bahsettiği sayıların hakiki sayılar olduğunu kanıtlamak için kalıcılık ilkesinin tüm koşullarını yerine getirdikleri kanıtlanmalıdır. Önceki bölümde anlattıklarım, ilk koşulun yerine getirildiğini kanıtlar. Bunun diğerleri için de geçerli olduğu, son derece basit ve sağlam bir şekilde kanıtlanabilir. Derece kıstası; işlemlerin tanımı; bu işlemlerin birleşme, değişme ve dağılma özelliklerinin kanıtı – tümü de Cantor'un kuramındaki ilgili önermelerin bire bir karışığıdır. Okuru ayrıntılarla boğmayacağım.

Cantor'un kuramındaki temel teorem –reel sayılar bölgesinin sonsuz süreçlere göre kapalı olduğu teoremi– Dedekind'in kuramında da karşılığını bulur: Reel sayılar bölgesinin tanımlanmasıyla, ilkenin sonraki bir uygulamasının kümeyi daha da genişletip genişletmeyeceğini sorgulamak doğaldır. Diğer bir deyişle, tüm *reel sayıları* iki sınıfa ayıracak bir bölüntü uygulayalım. Böyle bir bölüntü *reel sayılar* arasında bulunmayan yeni bir nicelik türü yaratabilir miydi? Cevap *hayır* olacaktır; bu tür bir bölüntü rasyonel bölgedeki bir bölüntü ile oluşturulabilir. Rasyonel bölgedeki tüm bölüntülerin kümesi *kapalıdır*.

Aritmetik süreyn iki kuramının tam eşdeğerliği yazarların kendilerince de kabul edilmiştir ve rekabetleri (eğer bir rekabet var idiyse)

günümüzde sadece tarihsel bir olaydır. Rasyonel bölgedeki herhangi bir bölüntü sonsuz bir dizinin limit değerine karşılık gelir ve aynı şekilde, herhangi bir sonsuz dizinin limit değeri rasyonel bölgenin bölünmesinde araç olarak kullanılabilir. Bir tarafta akla gelebilecek tüm bölüntülerle diğer tarafta rasyonel dizilerin tüm limit değerleri bire bir aynıdır; bunlar aynı kümenin –aritmetik süreyn– iki ayrı tanımıdır sadece.

Metafiziksel açıdan bu oldukça garip görünür. Önceden de belirttiğim gibi, Cantor kuramı uzun bir tarihi sürecin sonlandırılması, Dedekind bölüntüsü ise cesur ve orijinal bir düşüncedir. Cantor kuramı sonsuz süreci sayı bölgesini oluşturmaktakullanırken; reel sayı tanımının hiçbir yerinde Dedekind açıkça *sonsuz* sözcüğünü veya *eğilim, ölçülebilenin ötesinde büyüme, yakınsama, limit, atanabilir miktardan azı* gibi kelimeleri (ya da bunların yerine geçen terimleri) kullanmaz. Yine, Cantor kuramı açıkça *dinamiktir*: Limit değeri, bir merkezce çekilen bir noktanın devinimine son derece benzer bir biçimde oluşturulur. Dedekind kuramı ise esas olarak *statiktir*: Öğeleri belli bir plana göre sınıflandırmak için faydalanılan zihin gücünden başka bir ilke kullanılmaz. Dolayısıyla ilk bakışta, nihayet sayı kavramını, geometri ve mekanik bilimi ile uzun bir ilişkinin dayattığı zaman sezgisi boyunduruğundan tamamen kurtarmayı başarmışız gibi görünür.

Fakat çıkış noktaları bu kadar zıt ve konuyu ele alış biçimleri bu kadar farklı olan iki kuramın bu eşdeğerliği, Dedekind ilkesinde işlerin görüldüğü kadar iyi olmadığını gösterir. Nitekim Dedekind prosedürünün daha derin bir analizi, burada sonsuzun açıkça kullanılması da ima edildiğini ortaya koyar. *Sonlu* bir rasyonel sayı kümesi üzerinde uygulanan bölme ilkesi saçma sonuçlara yol açacak ve bu da kuramın âcizliğini açığa vuracaktır. Ayrıca, ilkenin pratikte bir irrasyonel sayının saptanması amacıyla uygulanması Cantor'un sonsuz dizisine benzer bir mekanizma kullanılmasını gerekli kılar.

Aynı şey kuramın zaman sezgisi ile ilişkisinde de geçerlidir. Dedekind'in beliti şöyledir: "Doğru, ilk sınıftaki her nokta ikinci sınıftaki her noktanın sol tarafında kalacak şekilde iki sınıfa ayrılırsa, tüm noktaları iki sınıfa bölme, doğruyu iki kısma ayırma işini gerçekleştiren tek bir nokta vardır." Bu belit zamana atfettiğimiz temel niteli-

ğın ustaca yeniden yorumlanmasından başka bir şey değildir. Sezgi-miz, zihninin bir hareketiyle, *zamanın tümünü geçmiş ve gelecek ola-rak iki sınıfa ayırmamızı sağlar*; bunlar birbirini dışlasa da beraber-ce zamanın tümünü, *ehediyeti* kapsarlar. *Şimdi*, tüm geçmişi tüm ge-lecekten ayıran bölüntüdür; geçmişin herhangi bir ânı bir zamanlar *şimdi* idi, geleceğin herhangi bir ânı yakında *şimdi* olacaktır ve böy-lece her bir an bu tür bir bölüntü görevi görebilir. Şüphesiz, geçmi-şe ilişkin sadece benzeşmeyen anları bilsek de zihninin bir hareketiy-le boşlukları doldurabiliriz; herhangi iki an arasında (bunlar zihn-i-mizde ne kadar yakın olursa olsun) başka anlar olduğunu algılar ve gelecek için de aynı tıkHzlığı koyutlarız. Zamanın akışı ile kastetti-ğimiz şey budur.

Dahası, paradoksal görünse de Dedekind'in tanımına göre *şimdi gerçekten irrasyoneldir*. Zira bölüntü görevini görse de ne geçmişin ne de geleceğin bir parçasıdır. Gerçekten de saf zamana dayalı bir aritmetikte (böyle bir aritmetik eğer mümkünse) olağan kabul edi-len öğeler irrasyonel olur ve mantığımızın tüm çabaları rasyonel sa-yıların varlığını kanıtlamaya yönelirdi.

Son olarak, Dedekind "uzayın süreksiz olduğundan kesinlikle emin olsaydık, istediğimiz takdirde kendi zihnimizde boşluklarını doldurarak onu sürekli hale getirmekten bizi alıkoyacak hiçbir şey olmazdı" derken, *post factum** olarak nitelenebilecek bir ifadede bu-lunuyor. Bu doldurma süreci çağlar önce tamamlanmıştır ve zaman-da herhangi bir boşluk algılayamadığımız için uzayda da asla bir boşluk keşfetmeyeceğiz.

Sürekliliği ne Cantor ne de Dedekind zaman sezgisinden kurtarabil-miştir; buna rağmen süreklilik nosyonlarımızla bilimsel sayı kavra-mı arasında çağlardır süren çatışma, sayı kavramı lehine kesin za-ferle sonuçlanmıştır. Bu zafer, Fermat ile Descartes'ın zamanların-dan beri vazgeçilmez bir analiz aracı olan bir prosedürü savunma, meşrulaştırma gerekliliği sayesinde gerçekleşmiştir. Bu disiplinin –*analitik geometrinin*– tarihi sonraki bölümün bir kısmını oluşturu-yor. Buradaki amacım açısından şu kadarını söylemek yeterli ola-caktır: Geometri problemlerini aritmetiksel analize tabi tutma çaba-

* Lat. Olaydan sonra. –ç.n.

larından doğan bu disiplin, neticede sayının soyut özelliklerinin zihne iletildiği bir araç haline gelmiştir. Analizi zengin, görsel bir dille donatmış ve bugüne kadar düşünülmemiş genelleştirme kanallarına yönlendirmiştir.

Analitik geometrinin temelindeki örtük varsayım, doğru üzerindeki noktaları (dolayısıyla düzlem ve uzaydaki noktaları) sayılar yoluyla ifade etmenin mümkün olduğuydu. Bu varsayım elbette doğrudaki noktalar ile reel sayılar arasında mükemmel bir mütakabiliyet kurulabileceği iddiasına eşdeğerdir. Analitik geometrinin büyük başarısı –hem analizin hem geometrinin amaçlarına takdir edilecek şekilde hizmet etmiş olması– bu varsayıma pragmatik açıdan muazam bir güç kazandırmıştır. Bu ilkeyi matematiğin genel mantıksal yapısına dahil etmek zorunluydu. Ama nasıl?

Söz konusu koşullar altında matematik keyfi hükümlerle ilerler. Sezgi ile neden arasındaki uçurumu uygun bir postüla ile aşar. Bu postüla sezgisel nosyonu çıkararak yerine mantıksal olarak tutarlı bir kavram getirir. Sezginin genel muğlaklığı bu tür bir değişikliği sadece makul değil, aynı zamanda son derece kabul edilir kılar.

Burada da böyle oldu. Bir tarafta mantıksal olarak tutarlı bir kavram vardı: Reel sayı ile onun kümesinden oluşan aritmetik sürey; diğer taraftaysa nokta ve nokta kümesinin muğlak nosyonları ile doğrusal süre bulunuyordu. Tek gereken ikisinin aynı şey olduğunu ilan etmektir – bir başka deyişle şu savda bulunmak:

Doğru üzerindeki herhangi bir noktaya bir reel sayı atamak mümkündür ve aynı şekilde, herhangi bir reel sayı doğru üzerindeki bir nokta ile temsil edilebilir.

Meşhur Dedekind-Cantor beliti budur.

Bu önerme, iki yüz yıldan uzun bir süre analitik geometriye dayanak teşkil eden örtük varsayımı onaylayarak bu disiplinin temel beliti oldu. Bu belit, diğer birçokları gibi, gerçekte kılık değiştirmiş bir tanımdır: Yeni bir matematiksel varlığı, *aritmetiksel doğruyu* tanımlar. Bundan böyle doğru (dolayısıyla da düzlem ve uzay) sezgisel bir nosyon olma özelliğini yitirecek ve *salt sayı taşıyıcı* konumuna indirgenecektir.

Böylece bu belit geometrinin aritmetikleştirilmesine eşdeğerdir. Analizin, doğumunu ve gelişimini borçlu olduğu geometrik sezgi-

den kurtuluşu anlamına gelir. Hatta daha da fazlası demektir: Bundan böyle analizin geometri ve mekanik bilimleri üzerinde denetimi ele alma ve bunlar aracılığıyla bilme yetimizin duyularımızın ham gerçekliğine daha da yakın olan diğer aşamalarını denetleme iddiasında olduğunun cesur bir beyanıdır.

Bu gerçekliğin suretinde bir aritmetik yaratmak için çağlar boyu süren mücadele, söz konusu gerçekliğin muğlaklığı nedeniyle başarısız olmuştu. Bu nedenle aritmetik kendi suretinde yeni bir gerçeklik yarattı. Rasyonel sayının başarısız olduğu yerde sonsuz süreç başarı kazandı.

*Numeri mundum regnant.**

* Lat. Dünyayı sayılar yönetir. —ç.n.

Sayı Bölgesi

Bir genç geldi Arşimet'e, bilgiye aç.
Öğret bana ustam, dedi, o ilahi sanatı
O ki göklerin ilmine çok soylu bir hizmet sundu,
Ve Uranüs'ün arkasında yeni bir gezegen keşfetti.
Doğru, dedi bilge, bu sanat dediğin kadar ilahidir,
Ama Kâinat'ı keşfetmeden önce de ilahiydi,
Göklerin ilmine soylu hizmetini sunmadan,
Ve Uranüs'ün arkasında yeni bir gezegen
keşfetmeden önce.
Kâinat'ta gördüğün şey salt Tanrı'nın yansımasıdır,
Olimpos'ta hüküm süren Tanrı, Sonsuz Sayı'dır.

K. G. J. JACOBI

Bilgimiz deneme yanılmayla, el yordamıyla ve tökezleyerek ilerledi. Sert bir varoluş mücadelesinin hem köstekleyip hem de teşvik ettiği, çevre koşullarının oyuncağı ve çağının geleneklerinin kölesi olan insanlığa, bu ilerlemede mantık yerine sezgi ve ırkının birikmiş deneyimleri rehberlik etti. Bu, insana ait her şey için geçerlidir ve matematiğin de bir istisna olmadığını kanıtlamak için yoğun bir çaba gösterdim.

Yine de, yıllar boyu ders vermemin sonucu olan sistematik açıklama alışkanlığım belki de farkında olmadan sınırı aşmama neden olmuştur, kim bilir? Sayının burada ana hatlarıyla sunduğum evrimi gerçekten de belli bir mantıksal sürekliliğe sahip gibi görünüyor. Ama ana hatlar çoğunlukla inceliksizdir, gerçekten önemli çok az şey öğretir. Bir eğrinin düzensizlikleri, biçimine kıyasla bize o eğrinin gerçek doğasına ilişkin daha fazla bilgi verir; aynı şekilde, herhangi bir insan uğraşının gelişimindeki düzensizlikler, altta yatan et-

menleri, benzer uğraşlarla ortak olan özelliklerinden daha net biçimde ortaya çıkarır.

Bir matematik ders kitabının sistematik açıklaması, tarihsel sıralamaya değil mantıksal sürekliliğe dayanır; ama standart lise matematik dersinde, hatta üniversitedeki matematik derslerinde bile bundan bahsedilmez ve dolayısıyla öğrenci, sayının tarihsel evriminin ders kitabındaki bölümlerin sırasına göre gerçekleştiği izlenimine kapılır. Bu izlenim, matematikte insani bir öge olmadığı yönündeki o yaygın görüşten büyük ölçüde sorumludur. Sanki burada iskelesiz dikilmiş bir yapı vardır: Buzdan görkemi içinde öylece, katman katman yükselivermiştir! Mimarisi kusursuzdur çünkü saf mantık üzerine kurulmuştur, duvarlarına nüfuz edilemez çünkü yanlışsız, hata-sız hatta tereddütsüz yükseltilmişlerdir, çünkü burada insan sezgisine yer yoktur! Kısacası matematiğin yapısı sokaktaki insana, insanlığın günahkâr zihniyle değil, Tanrı'nın hatasız ruhuyla dikilmiş gibi görünür.

Matematik tarihi bu tür bir anlayışın yanlışlığını açığa çıkarır. Matematiğin ilerleyişinin son derece düzensiz olduğunu ve sezginin bunda baskın bir rol oynadığını gösterir. Ara bölge keşfedilmeden önce, hatta çoğunlukla kâşifler daha arada bir bölge olduğunu bile fark etmeden önce ileri karakollar ele geçirilmiştir. Yeni biçimler yaratmak sezginin görevi, *doğumunda hiçbir rol oynamadığı* bu biçimleri kabul veya reddetmek ise mantığın onaylanmış hakkı olmuştur. Ama yargıcın kararları genellikle gecikmiş, bu arada çocuklar yaşamlarını sürdürmek zorunda kalmış, o yüzden de mantığın varlıklarını onaylamasını beklerken gelişerek çoğalmışlardır.

Karmaşık sayı kavramının evrimi –matematik tarihinin bu en garip bölümü– böyle bir gelişimin tüm izlerini taşır. Sayı bilimi yeni fetihlere girişmeden önce Weierstrass, Cantor ve Dedekind'in reel sayıyı mantıksal bir temel üzerine oturtmasını bekledi mi? Hayır; reel sayının meşruiyetine kesin gözüyle bakarak dünyasının başka bir mistik köşesini keşfetmeye girişti ve bu seferden, büyüklüğü ve vaatleri emsalsiz olan yeni bir bölgenin efendisi olarak çıktı.

Yeni kavramın izini kaynağına kadar sürmek istiyoruz. Bu yüzden reel sayının kaynağı olan cebir problemini incelemeye devam ediyorum. Bu incelememiz, sonsuza yaptığımız uzun gezintiyle kesin-

tiye uğramıştı. Şimdi yeni silahımızın yani sonsuz sürecin zenginleştirip güçlendirdiği bir sayı kavramıyla konuya geri dönüyoruz. Artık elimizde rasyonel küme yerine aritmetik sürey var; sonlu cebirin rasyonel süreçlerinin yanı sıra analizin güçlü mekanizması da bizi destekliyor. Herhalde artık genel cebir denklemiyle güvenle uğraşabilecek konumdayızdır!

Ne var ki öğrendiği temel cebiri hatırlayan okur durumun böyle olmadığını bilir: Cebirin tüm denklemlerinin çözümü için reel sayı da yetersizdir. Bunu kanıtlamak için daha yüksek dereceden girift denklemler oluşturmak gerekmez. Bu tür en basit denklemlerden birini, ikinci dereceden denklemleri ele almak yeterlidir: $x^2 + 1 = 0$.

Bu denklem ne Dedekind bölütünü tanımlar, ne de karesi limit olarak -1 'e yakınsayan bir Cantor sıralaması kurabiliriz. On ikinci yüzyılda Brahman Bhaskara bunu basit ve etkili bir şekilde ifade etmiştir:

Negatif bir sayı kadar pozitif bir sayının da karesi pozitifdir ve pozitif bir sayının karekökü iki tanedir, pozitif ve negatif; negatif bir sayının karekökü yoktur, zira negatif sayı kare değildir.

Bu denklemin çözümü olarak $x = \sqrt{-1}$ yazma dürtüsü, bu tür bir önermenin somut bir anlamı olmadığı bilgisiyle dizginlenmiştir. Hintli matematikçiler bu ayartıya direnmiştir, keza Araplar da. *İmajiner* sayıları keşfetmiş olmanın gururu Rönesans döneminin İtalyanlarına aittir. 1545 yılında, Cardan anlamsız bir sembolle göstermeye cesaret eden ilk kişiydi. 10 sayısını çarpımı 40 olan iki parçaya bölmenin imkânsızlığından bahsederken, formel çözümün imkânsız ifadelere yol açacağını gösterdi: $5 + \sqrt{-15}$ ve $5 - \sqrt{-15}$.

Ama negatif sayılarda olduğu gibi, burada da imkânsızın sadece yazılması bile ona sembolik bir varlık kazandırmıştı. *Anlamsız, sofistike, imkânsız, uydurma, mistik, imajiner* olduğu belirtilerek yazıldığı doğrudur. Yine de, bir lakap veya hakaret olsa bile bir isim çok şey ifade eder.

Ne gariptir ki, bu mistik varlıkları *hakiki* sayılar olarak ele alma güdüsünün kaynağı ikinci derece denklem değil de kübik denklem oldu. Bu durum aşağıdaki şekilde gerçekleşti:

$x^3 + ax + b = 0$ kübik denklemi en az bir reel çözüme sahiptir ve

üç çözümü de olabilir. Tek bir çözümün reel olduğu durum için Scipio del Ferro, Tartaglia ve Cardan, Cardan formülü adı verilen formülde özetlenen bir prosedür geliştirdi. Bu formül her üç kök de reel olduğunda çöker, zira bu durumda formüle katılan köklü ifadeler *imajiner* sayıları temsil eder.

Şimdi Bombelli'nin 1572'de yayımlanan cebirinde ele aldığı tarihi denkleme, $x^3 = 15x + 4$ 'e bakalım. Bu denklem üç reel çözüme sahiptir; yani 4 , $(-2 + \sqrt{3})$ ve $(-2 - \sqrt{3})$. Ama Cardan formülünün uygulanması, aşağıdaki imajiner sonuca yol açar:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Bombelli iki köklü ifadenin $p + \sqrt{-q}$ ve $p - \sqrt{-q}$ tipindeki (günümüzde *eşlenik karmaşık* dediğimiz) ifadeleri temsil ediyor olabileceğini düşündü. Durum buysa ve söz konusu varlıkların toplamı olağan kurallara göre gerçekleştirilebiliyorsa, o halde bu tür iki "sophistic" sayının toplamı bir reel sayı, hatta belki de Bombelli'nin 4 olduğunu bildiği, denklemin reel çözümlerinden birini verebilirdi: Ama burada sözü Bombelli'nin kendisine bırakıyorum:

Birçok kişinin gözünde çılgın bir düşünceydi bu, ki ben de uzun süre onlarla hemfikir idim. Her şey gerçekten ziyade safsataya dayanıyor gibiydi. Yine de uzun süre uğraştım ve durumun gerçekten böyle olduğunu ispatladım.

Bombelli gerçekten de üçüncü dereceden iki köklü ifadenin, toplamları 4 olan $2 + \sqrt{-1}$ ve $2 - \sqrt{-1}$ şeklinde çözümlendiğini kanıtlamıştır.

Bu varlıklar imkânsızdı, evet! Ama gerçek problemleri çözmede bir araç oldukları için hepten yararsız da değillerdi. Bu nedenle, başarısının desteğiyle Bombelli bu karmaşık varlıklar üzerindeki işlemler için kurallar geliştirmeye başladı.

Günümüzde Bombelli'nin gösterimini $\sqrt{-1}$ için i sembolünü kullanılarak basitleştirmiş bulunuyoruz. Tüm karmaşık varlıklar $a + ib$ tipindedir. Bu gösterimle, Bombelli'nin denkleminin çözümü $x = \sqrt[3]{2} + 11i + \sqrt[3]{2} - 11i = (2 + i) + (2 - i) = 4$ olur.

Bombelli'nin bulduğu bu varlıklara *karmaşık sayılar* adını veriyoruz. *Sayı* adını meşrulaştırmak için bunların kalıcılık ilkesinin tüm

koşullarını yerine getirdiğini kanıtlayabiliriz. Bombelli bu ilkeden bihaberdi; sadece diğer bir adı da sezgi olan matematiksel vicdanı ile hareket ediyordu. Yine de becerikli İtalyan, gösterim haricinde tüm kuralları neredeyse bugün öğretildikleri biçimde oluşturmuştu.

İlk koşul karşılanır çünkü $a + ib$ karmaşık sayısı, reel sayıları alt-bölge olarak kapsar ($b = 0$). Derece kriteri, $a = c$ ve $b = d$ ise $a + ib$ ve $c + id$ 'in eşit olduğunu, aksi takdirde eşit olmadıklarını öngörmeyi içerir. "Daha fazla" veya "daha az" kriterlerine gelince, bunlar o kadar açık olmamakla birlikte, karşılaşılan güçlükler özel olarak bahsedilmeye değecek kadar ciddi değildir.

İki karmaşık sayının toplamı, reel ve imajiner kısımları ayrı ayrı toplanarak elde edilen bir karmaşık sayı olup, çıkarma işleminde de bu kural geçerlidir. İki veya daha fazla karmaşık sayının çarpımı, bu sayıların cebirin basit kurallarına göre ayrı ayrı çarpılması ve i 'nin üslerinin her yerde aşağıdaki şemaya göre değiştirilmesi ile elde edilir.

$i = \sqrt{-1}$	$i^5 = i$	$i^9 = i$	vb., vb.
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{10} = -1$	
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{11} = -i$	
$i^4 = 1$	$i^8 = 1$	$i^{12} = 1$	

Buna göre, Bombelli işlemlerinin değişme, birleşme ve dağılma özellikleri vardır. İlkenin tüm koşulları yerine getirilmiştir. Böylece, nasıl ki reel sayılar bölgesi rasyonellerin yerini almışsa, *karmaşık sayılar bölgesi* de reel sayılar bölgesinin yerini almıştır.

Sonuç olarak karmaşık sayılar üzerinde uygulanan herhangi bir rasyonel işlem kümesi bizi karmaşık sayılara götürür. Diğer bir deyişle, karmaşığın alanı rasyonel işlemlere göre *kapalıdır*.

Peki analizin sonsuz süreçlerine göre de kapalı mıdır? Veya diğer bir deyişle, sonsuz dizi nosyonunu, yakınsaklık ve limit nosyonunu karmaşık sayıları da kapsayacak şekilde genişletebilir miyiz? Bu soruya on dokuzuncu yüzyılda Gauss, Abel, Cauchy ve Weierstrass olumlu bir cevap vermiştir ve bu temel olgu modern fonksiyon kuramının temelini oluşturmuştur.

Daha on sekizinci yüzyılda karmaşık sayı saf cebirsel özelliğini yitirmeye başlamıştı. De Moivre'ın keşfettiği meşhur formül karmaşık sayının trigonometride oynadığı rolü gösterirken, Euler e aşkın sayısını ortaya sürerek de Moivre'ın formülünü genişletmiştir. Bu benim alanımın dışında olsa da, bütünlük adına, Euler'in metafiziğe eğilimli kimi çağdaşlarının mistik bir önem atfettiği bu çarpıcı formülünden bahsetmeliyim:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Gerçekten de bu formül modern matematiğin en önemli sembollerini içerir ve aritmetiğin 0 ve 1, cebirin i sembolü, geometrinin π sembolü ve analizin e aşkıyla temsil edildiği bir tür *mistik birlik* olarak görülmüştür.

Karmaşık sayıların birleştirilmesiyle oluşturulan aracın temel cebir problemini çözmeye, yani en genel denklemin kökünü saptamaya yeterli olup olmadığını sorgulamak doğaldır.

Bombelli ikinci dereceden ve kübik denklemin karmaşık sayılar yoluyla tamamen çözülebileceğini; diğer bir deyişle ikinci ve üçüncü dereceden en genel denklemin reel veya karmaşık sayı olabilecek en az bir kök içermesi gerektiğini biliyordu. Zira bu denklemler ikinci ve üçüncü dereceden ifadeler cinsinden formel çözümlere gidiyordu. Elbette ikinci terim karmaşık sayı içerebilir, ama bu tür köklü ifadeler $a + ib$ biçiminde yazılabilir.

Ferrari yöntemi dördüncü dereceden denklemler için benzer bir süreç oluşturduğundan, bunların çözümleri de karmaşık sayı olarak ifade edilebilir, çözümün reel sayılması özel bir durumdur.

Bu olgular on yedinci yüzyılda biliniyordu. Aynı zamanda reel katsayılara sahip bir cebir denkleminin imajiner köklerinin de çiftlerden ibaret olması gerektiği, yani bu tür bir denklemin bir çözümü $a + ib$ ise bir çözümün de $a - ib$ eşleniği olduğu biliniyordu. Buna göre tek sayı dereceli bir denklemin en az bir *reel kökü* olması gerektiği sonucuna varılmıştır.

1631 yılında İngiliz Thomas Harriot'ın aklına herhangi bir denklemi 0'a eşit bir polinom biçimine getirme fikri geldi. Derin etkileri olacak bir fikirdi bu, zira Harriot'ı sonunda (günümüzde çarpan te-

oremi adı verilen) şu teoreme götürmüştü: a bir cebir denkleminin kökü ise, o zaman $x - a$ buna karşılık gelen polinomda bir çarpandır. Bu temel olgu herhangi bir denklemin çözümünü, o denklemi çarpanlarına ayırma problemine indirgiyor ve herhangi bir denklemin (reel veya karmaşık) bir kökü olduğunun kanıtlanabilmesi durumunda, denklemin derecesinin gösterdiği sayıda kökü olduğunun kendiliğinden saptanabileceğini kesin biçimde gösteriyordu – elbette *her kökün, ilgili çarpanın polinomda yer aldığı sayıda sayılması* koşuluyla.

Girard on yedinci yüzyılın başlarında, ilk dört dereceden denklemler için doğru olanın genel olarak da doğru olduğuna inanıyordu ve on sekizinci yüzyılın ortalarında d'Alembert bunu, *herhangi bir cebir denklemi, reel veya karmaşık en az bir çözüm içermelidir* önermesi ile formüle etmişti. Ancak kendisinin sağlam şekilde ispatlamadığı bu sav, birçok takipçisinin çabalarına karşın bir elli yıl daha postüla olarak kaldı.

Bu sav diğer ifadeyi anımsatıyor: Herhangi bir denklem köklü ifadeler yoluyla çözülebilir. Bunun da, daha Lagrange döneminde bile çoğu matematikçi tarafından kesin olarak kabul edildiğini gördük. Yine de bu karşılaştırma adil değildir: Burada genelleştirme, eksik tümevarım denen türdendir ve önermenin hatası sadece bu yöntemin tehlikesini açığa çıkarmakla kalmıştır. D'Alembert'in postülasına yol açan sezgi tamamen farklı bir şeydir.

Bu sezgi bu *temel cebir teoreminin* D'Alembert'in zamanından beri öne sürülen tüm ispatlarında; yani D'Alembert'in, Euler'in ve Lagrange'ın yetersiz ispatlarında; Argand'ın 1806 ve 1816'da öne sürdüğü kanıtlarda; büyük Gauss'un önermeyi kurarken ortaya attığı dört kanıtta ve bunların sonraki tüm versiyonlarında yansıtılmıştır.

Bu ispatlar ilke olarak farklı olsa da, tümünün ortak bir özelliği vardır. Bir yerde, bir şekilde, bazen açıkça, bazen dolaylı olarak, cebire yabancı, analiz âlemine ait bir fikir olan süreklilik fikri konuya dahil edilmiştir.

Bunu basit bir örnek ile açıklayayım.

$Z = z^2 + 1$ ve $z = x + iy$ denklemlerini kurduğumuzda, yerleştirme yoluyla $Z = (x^2 - y^2 + 1) + i(2xy)$ eşitliğini elde ederiz. Şimdi, x ve y sürekli biçimde değiştiği ve $-\infty$ ile $+\infty$ arasındaki olası tüm değerle-

ri aldığıında, parantez içindeki ifadeler de aynı aralıktaki olası tüm değerleri alacaktır. Bunu genel vaka için ve kesin olarak *ispatlamak* son derece zordur; D'Alembert'in başarısız çabaları ile Gauss'un dehası bu hedefe kilitlenmişti. Ama bunun böyle olduğunu *tasavvur etmek* ayrı bir konudur; *süreklilik sezgisi* burada devreye girer. Polinomlar, x ve y değişkenlerinin bazı değerlerinde pozitif, diğerlerinde negatiftir. Değişimin sürekli olması durumunda, x ve y 'nin ilk polinomu sıfır kılacak ara değerleri vardır, hatta bunlar sonsuz sayıda dır. Ayrıca, ikinci polinomun ortadan kalkmasına neden olacak diğer bir değer aralığı da vardır. Bu iki aralıkta *bazı ortak çiftler* olacaktır. Eğer a ve b bu tür bir çift ise, o halde $a + ib$, $Z = 0$ denkleminin bir köküdür. Matematiksel sezgi bunu ileri sürmüş, D'Alembert bunu ispatlamaya uğraşmıştır. D'Alembert'in başarısızlığa uğradığı yerde Gauss başarılı oldu, ancak yine de cebirin temel teoremine ilişkin bu ilk ispatının analitik düşüncelere dayanması canını sıkıyordu. Bu nedenle on altı yıl sonra başka bir ispat geliştirdi. Çift sayı dereceli herhangi bir denklemin salt cebir yoluyla tek sayı dereceli bir denkleme indirgenebileceğini kanıtladı. Buna göre, temel teorem, tek dereceli bir denklemin en az bir reel köke sahip olması gerektiğinin kanıtlanabilmesi durumunda oluşturulabilirdi. Ama ne yazık ki bu son önerme de, saf cebire yabancı düşünceler katılmaksızın kanıtlanamaz.

Cebirin temel teoreminin kanıtının, cebire yabancı süreçleri ima etmesi, teoremin daha genel kapsamlı olabileceğini düşündürüyor – ki durum gerçekten de böyledir. Karmaşık sayılar kümesi içinde bir çözüme sahip olma özelliği, cebir denklemlerinin tekeline değildir. Aşkın biçimli, örneğin $c^2 + z = 0$ gibi denklemlerin birçoğu da karmaşık çözümlere imkân verir.

Polinomlar, Weierstrass'ın *tam* adını verdiği bir fonksiyon sınıfının son derece küçük bir bölümünü oluşturur. Polinomlar gibi bu fonksiyonlar da, uygun değişken değerleri için önceden atanmış herhangi bir karmaşık değeri, özellikle de sıfır değerini alabilir. Bu sınıfa sinüs, kosinüs ve üssel fonksiyon gibi en önemli aşkın ifadeler girer. Fonksiyonlar kuramı açısından, *tam* fonksiyonlar polinomların doğrudan bir uzantısıdır.

Cauchy, Weierstrass ve Riemann tarafından oluşturulmuş, mate-

matîğin on dokuzuncu yüzyıldaki gelişiminde egemen etmen haline gelen karmaşık değişkenli fonksiyonlar kuramının temeli budur.

Ama öyküme geri döneyim.

1770 yılında, Euler'in çok miktarda karmaşık sayı uygulaması sunduğu *Cebir*'i çıkıttı. Euler şöyle diyordu:

$\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$ gibi ifadeler, negatif sayıların köklerini temsil ettikleri için sonuçta imkânsız veya imajiner sayılardır. Bu sayılara ilişkin olarak, ne hiçe eşit, ne hiçten büyük, ne de hiçten küçük olduklarını söyleyebiliriz, ki bu da onları mecburen imajiner veya imkânsız yapar.

Gauss ise 1831 yılında şöyle yazıyordu:

Şu âna kadar kapsamı antikçağın geometrisini geride bırakmış olan genel aritmetiğimiz tamamen modern çağların bir yaratastır. İlk olarak mutlak tamsayı nosyonundan çıkarak alanını yavaş yavaş genişletmiştir. Tamsayılara kesirler, rasyonel sayılara irrasyonel sayılar, pozitif ve reele imajiner eklenmiştir. Bu ilerleme ise her seferinde önce çekingen ve tedirgin adımlarla başlamıştır. İlk cebirciler denklemlerin negatif köklerine sahte kök adını vermiştir, ki eldeki problem, aranan niceliğin yapısı gereği zıddının olamayacağını söylüyorsa durum gerçekten de budur. Ama kesrin bir anlam taşımadığı birçok yer olmasına karşın genel aritmetikte kimsenin kesirleri kabul etmekte tereddüt etmemesi gibi, biz de sırf birçok şeyin zıddı yok diye pozitif sayılara verilen hakları negatif sayılardan esirgememeliyiz. Birçok başka vakada yeterince yorum bulabildikleri için negatif sayıların reelliği yeterince doğrulanmıştır. Bu durum uzun süredir kabul edilmiştir, ama (geçmişte –ve ara sıra halen– uygunsuz bir şekilde, reel değil de imkânsız nicelikler olarak nitelendirilen) imajiner sayılar şu anda bile benimsemekten ziyade müsamaha görür durumdadırlar; daha çok sembollerle oynanan boş bir oyun gibi görülürler, ki bu oyunun reel sayılı bağıntıların hazinesine yaptığı katkıyı küçümsemeyecek kişiler bile, bu sayıların makul bir dayanağa sahip olabileceği fikrini tereddütsüz reddeder.

Yazar yıllar boyunca matematiğin bu son derece önemli kısmını farklı bir bakış açısından, imajiner sayılara olduğu kadar negatif sayılara da objektif bir varoluş atfedilebilen bir bakış açısından incelemiş, ama şu âna kadar görüşlerini yayımlama imkânı bulamamıştır.

İki ifadenin arasındaki altmış yılda, böylesine kökten bir cephe değişimine yol açacak ne olmuştu? Gauss buna kendi sözleriyle şöyle cevap veriyor: "Bu imajiner sayılara objektif bir varoluş atfedile-

bilir." Diğer bir deyişle, negatif sayıları bir anlayış değişikliği ile özdeşleştiren yoruma benzer somut bir yorum.

Bu yorumu iyice anlamak için on yedinci yüzyıla bir göz atmalı ve önceki bölümlerde tekrar tekrar sözünü ettiğim bir disiplini geriye dönük olarak incelemeliyiz: analitik geometri.

Bilimin yaşamlarımızda yaptığı temel değişikliklerden bahsedildiğinde aklımıza fizik ve kimya gelir. Bu muazzam değişimin somut kanıtını sanayi ve ulaşımında devrim yaratan mekanik buluşlarda görürüz. Elektriğin uygulamaları ev işlerinin angaryasını azaltmış ve insanlar arasındaki iletişimi hayalleri aşan boyutlara taşımıştır. Kimyanın edimimleri, daha önce kullanışsız olan materyalleri beslenme, rahatlık ve eğlence kaynaklarına dönüştürmemizi sağlamıştır. Tüm bunlar insanlığa bu bilimlerin edimlerine saygı ve hayranlık duymayı öğretmiştir.

Matematiğin sunduğu yararlar daha yayılmış olduğundan o kadar belirgin değildir. Matematiğin bu buluşları mümkün kılan kuramlarda ve bu buluşların tasarımında görevini yerine getirdiğini biliyoruz. Ama bu konu uzmanların ilgi alanına giriyor. İnsan günlük yaşamında suyun hangi elementlerden oluştuğunu veya kısa ve uzun dalga arasındaki farkı bilmenin faydasını görebilir, ancak geometri veya kalkülüs öğreniminin mutluluğuna pek bir katkısı olmayacaktır.

Buna rağmen, matematiğin muazzam başarılarının arasında, insanların günlük yaşamına nüfuz ettikleri için bu doğrudan anlamda bile faydalı buluşlar olarak görülebilecek olanlar da vardır. Hesaplamayı ortalama bir zekâ için erişilir kılan basamaklı numaralandırma bunlardan biridir; cebirin sembolizmi, özellikle Vieta'nın daha önce çok az kişinin anlayabildiği genel bağıntıların kısaltılmış biçimlerini çoğunluğun tasarrufuna sunan *logistica speciosa*'sı da doğrudan bir kolaylık sağlar. Bu kategoriye Descartes'ın dünyaya sunduğu o muazzam buluş; bir fenomeni idare eden bir *yasanın*, birbirine bağlı olaylar arasında var olan *bağıntının* veya zaman içinde bir durumun geçirdiği *değişikliklerin* grafik halindeki resmini bir bakışta veren *analitik şema* da girer.

Kitlelerin en fazla erişebildiği matematiksel icatların aynı zamanda saf matematiğin gelişimine en çok katkıda bulunan icatlar olması dikkate değerdir. Konum ilkesi bize *sıfırı* vermiştir; bu da negatif sayı kavramının gelişmesini sağlamış, denklemleri standartlaştırma

imkânını sunmuş ve çarpan teoremini mümkün kılmıştır. Harfli gösterim matematiği özelin incelenmesinden genelin incelenmesine dönüştürmüş ve imkânsız sembolleştirerek genel sayı kavramının zeminini hazırlamıştır.

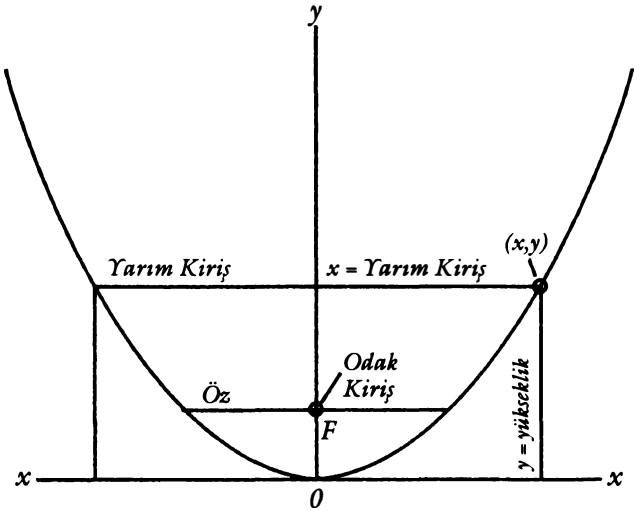
Son olarak, Descartes'ın buluşu sadece önemli bir disiplin olan analitik geometriyi yaratmakla kalmamış, aynı zamanda Newton, Leibniz, Euler ve Bernaullilere yeni bir silah –yokluğu Arşimet ve daha sonra Fermat'nın derin ve kapsamlı düşüncelerini dillendirmelerini engelleyen bir silah– sunmuştur.

"Proles sine matre creata."

"Bir anneden doğmamış çocuklar." Geometrici Chasles, Descartes'ın başarısını bu sözcüklerle niteliyordu. Öncüllerine eşit ölçüde haksızlık yapılarak, bu cümle konum ilkesi ve harfli gösterim için de söylenebilirdi! Birincinin izini sayı tahtasının boş sütununa kadar sürdük ve ikincinin de matematikçiler ve matematikle ilgilenenler tarafından ezelden beri uygulanan retorik bir sembolizmin gelişiminden başka bir şey olmadığını gördük.

Benzer biçimde Kartezyen sistemi içeren o büyük buluşun kökleri, Platon'un zamanında doğmuş meşhur antikçağ problemlerine dayanıyordu. Bir açının üçe bölümü, küpün iki eş küpe bölünmesi ve çemberin kareleştirilmesi problemlerini çözmeye çalışırken, pergel ve cetvelin kendilerini yarı yolda bırakması nedeniyle Yunanlı geometriciler yeni eğriler aradı. Böylece *konik* yani genel bir düzlemin dairesel bir koni boyunca kesebileceği eğrileri, *elips*, *hiperbol* ve *parabol* gibi eğrileri buldular. Zarif özellikleri Yunanlı geometricileri öylesine büyülemişti ki çok geçmeden bu eğrilerin kendisi inceleme nesnesi oldu. Büyük Apollonios onların üzerine yazdığı tezinde, bu eğrilerin sahip olduğu en önemli özellikleri tanımlayıp gösteriyordu.

Burada Descartes'ın daha sonra bir ilkeye dönüştürdüğü yöntemin çekirdeğini görüyoruz. Buna göre Apollonios parabolü eksenine ve ana teğetine göre tanımlayarak, yarım kirişin *özkiriş* ile kesitin yüksekliğinin orta orantılısı olduğunu göstermiştir. Günümüzde bu ilişkiyi Kartezyen denklemi $x^2 = Ly$ ile ifade ediyor, yüksekliğe *ordinat* (y) ve yarım kirişe *apsis* (x) diyoruz; *özkiriş* ise y 'nin katsayısı, yani L 'dir.



**GİZLİ ANALİTİK GEOMETRİ:
PERGE'Lİ APOLLONİOS'UN PARABOL İŞLEMİ**

Yunanlıların, keşfettikleri bu eğrilere ve diğer birçoklarına *loci** adını vermeleri manidardır; yani, bu eğrileri sabit bir referans sistemine göre ölçülebilir bir konumda olan tüm noktaların *yerleri* olarak tanımlamışlardır. Buna göre elips, iki sabit noktaya olan uzaklıklarının toplamı sabit olan bir noktanın *locus*'uydu. Bu tanım aslında eğrinin *retorik bir denklemi* olup, herhangi bir noktanın eğriye ait olup olmadığını tespit etmemizi sağlayan kıstasları sunuyordu.

Gerçekten de bu ilişkiler, kübik denklem için iki konik eğri yoluyla grafik bir çözüm bulan Ömer Hayyam tarafından bu bağlamda kullanıldı. Bu yöntemler Rönesans devrindeki İtalyan matematikçiler ve Vieta tarafından daha da geliştirildi. Esasen, Vieta'nın *logistica speciosa*'sını geliştirmesini sağlayan bu tarz problemlerdi.

Son olarak da, Fermat'ın 1629'da yazdığı ama kırk yıl sonra (yani Descartes'ın *Géométrie*'sinin çıkışından otuz yıl sonra) yayımlanan bir makalesinden alınma şu son derece önemli pasaja bakalım:

* *Lat. locus*'un (yer) çoğulu. Yerler. Türkçe matematikte "gezenekler" olarak anılırlar. -ç.n.

Bilinmeyen iki nicelik nihai bir denkleme girdiğinde, bir gezenek –bilinmeyen niceliklerden birinin bir doğru veya eğri tanımlayan ucu– söz konusudur. Doğru basit ve eşsiz, eğri türleri sonsuz sayıdadır: daire, hiperbol, parabol, elips vs.

Denklem kavramına yardımcı olmak üzere, bilinmeyen iki niceliğin, dik aç olduğunu varsayacağımız bir aç oluşturmaları yararlıdır.

Hayır, Kartezyen geometri annesiz bir çocuk olmaktan çok uzaktı. Patavatsız görünmeyi göze alarak şunu söylemeliyim ki, Descartes'in sisteminin sadece annesi (Yunan geometrisi) değil, bir ikiz kardeşi de vardı. Gerçekten de, Descartes'in *Géométrie*'si ile Fermat'ın *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge* (Düzlemlere ve Katı Gezeneklere Giriş) adlı eserlerinin üstünkörü incelenmesi bile, karşımızda matematik tarihinde bolca rastlanan ikiz fenomenlerden birinin olduğunu gösterecektir. Aynı yüzyılda ve hatta aynı kuşakta, Desargues-Pascal'in izdüşüm geometrisi keşfini ve Pascal-Fermat'ın matematiksel olasılıklar kuramı ilkeleri keşfini görüyoruz. Ama bu fenomenler kesinlikle on yedinci yüzyıla sınırlı değildi. On sekizinci yüzyılda Newton-Leibniz vakası yaşandı; on dokuzuncu yüzyıl karmaşık sayıların bir yorumuna ilişkin Wessel, Argand ve Gauss'un neredeyse eşzamanlı keşiflerine; Lobaçevski, Bolyai ve Gauss'un neredeyse eşzamanlı Öklit dışı geometri kavramına ve yüzyılın sonlarında Cantor-Dedekind'in süre formülasyonuna tanıklık etti.

Diğer bilimlerde de benzer örnekler mevcuttur. Aynı kavrayış neredeyse aynı anda iki veya daha fazla insanın zihninde belirir. Birçok durumda, insanlar birbirlerinden binlerce mil uzakta, tamamen farklı milliyetlerdendir ve birbirlerinin varlığından bile bihaberdir. Örneğin Descartes ve Fermat gibi iki insanın mizaçları, çevreleri ve dış görünüşleri arasındaki farklar çarpıcıdır. Bu garip fenomeni nasıl açıklayabiliriz? Sanki insanlığın biriken deneyimi zaman zaman bir çıkışın zorunlu olduğu bir aşamaya geliyormuş ve zengin taşkın meyvelerini tek bir insanın mı, iki insanın mı yoksa bir sürü insanın mı toplayacağı sadece şans meselesiymiş gibi görünüyor.

Ne Fermat ne de Descartes keşiflerinin gerçek önemini anlayabilmişti. İkisi de geometride birleştirici bir ilke oluşturmakla ilgileniyordu. Bunu Fermat kuramsal matematikçinin, Descartes ise filozofun bakış açısından istiyordu. Nihai ifadesini Öklit ve Apollonios'un

eserlerinde bulan Yunan geometrisi bu tür bir birliğe sahip değildi: Her teorem, her yapı genel ilkelerin uygulanmasından çok sanatsal bir yaratıcılığı andırıyordu. O veya bu yapının arkasında hangi düşünceler yatıyordu? Neden bazı problemler sadece cetvelle inşa edilebilirken diğerleri pergeli de gerektiriyor, başkalarıysa kadim cetvel ve pergeli ustaları olan Yunanlıların hünerine bile boyun eğmiyordu? Bu ve benzeri sorular, aralarında Fermat ve Descartes'ın da olduğu o dönemin matematikçilerinin zihinlerini karıncalandırıyordu.

İpucunu cebirde aradılar ve bu nedenle geometriyi *cebirleştirme*ye yöneldiklerinde sonuç analitik geometri oldu. Bir geometri probleminin tekdüze cebir işlemlerine indirgendiği prosedürün temellerini attılar. Böylece, efsanevi bir debdebe ile başlayan ve çağlar boyunca ileri gelen birçok matematikçiye cezbetmiş o meşhur antik-çağ problemleri Descartes tarafından bertaraf edildi. Descartes'ın sistemine göre, birinci dereceden bir denkleme yol açan herhangi bir problem sadece cetvelle geometrik olarak çözülebilirdi; cetvel-pergeli ile inşa ikinci dereceden denklem çözümüne eşdeğerdi; ama bir problem ikiden yüksek bir dereceden *indirgenemez* bir denkleme yol açıyorsa geometrik çözüm sadece cetvel ve pergelle mümkün değildi.

Descartes (ve aynısı elbette Fermat için de geçerlidir), yeni bir matematiğin temellerini attığının farkında değildi; onun dile getirilen amacı eski çağların geometrisini sistematikleştirmekti. Gerçekten de, on yedinci yüzyılın matematik tarihindeki rolü bu olmuştu: Bu dönem, antik matematik kültürünün *tasfiye çağı* idi. Galileo, Fermat, Pascal, Descartes ve diğerlerinin eserlerinde, genel bir gerileme döneminde zirveye ulaşamamış tarihi bir sürecin tamamına erdiğini görüyoruz. Romalıların kayıtsızlığı ve dinsel gericiliğin hâkim olduğu uzun ortaçağ, bu sürecin devamını bin beş yüz yıl boyunca engellemiştir.

Aynı zamanda, antik matematiğin enkazını temizleyen bu insanların dehaları yeniler için zemin hazırlamıştır. Modern matematiksel düşüncenin temel özellikleri *formel yasaların kalıcılığı* ve *mütekabiliyet ilkesidir*. Birincisi genelleştirilmiş sayı kavramına yol açarken, ikincisi görünüşte birbirinden uzak ve farklı kavramlar arasında bağlantı kurulmasını sağlamıştır. Modern matematiğin bu iki temel ilke-

sini örtülü olarak bile anlayamamasına karşın, Descartes'ın analitik geometrisi bu ilkelerin gelişimi için gerek duyulan her şeye sahipti.

Burada, örtülü olarak irrasyonellere rasyonel sayılarla eşit muamele eden bir cebir mevcuttu. Bu cebir klasik geometri problemlerine uygulanıyordu: Doğrudan ve sistemli süreçler aracılığıyla, (hesaplarında son derece titiz olmakla birlikte irrasyonel sayılara ve sonsuzluğa yönelik korkularınca kısıtlanan) Yunanlıların dâhiyane ama sistemli olmayan yöntemlerle elde ettikleri sonuçların aynısını veriyordu. Bizzat bu olgu, Descartes'ın tümdengelimlerine muazzam bir pragmatik güç kazandırıyordu, zira hiçbir şey başarının getirdiği başarıyla yarışamaz.

İkinci olarak, analitik geometri sadece yapısal açıdan farklı olmakla kalmayıp, en başından beri doğrudan çatışma halinde oldukları bilinen iki matematik dalı –*aritmetik* ve *geometri*– arasında kurulan bağlantının tarihteki ilk örneği idi. Bu son aşama Fermat, Descartes veya çağdaşlarınca bilinmese de, sonraki iki yüzyıl boyunca matematiksel düşüncenin gelişimi üzerindeki en büyük etkiyi oluşturacaktı.

Önceki bölümde, Descartes'ın örtülü olarak reel sayılarla sabit eksendeki noktalar arasında tam bir mütakabiliyet bulunduğunu varsaydığını söylemiştim. Aslında bundan fazlasını varsaymıştı: Sözcüklere dökmesi gerekmeyecek kadar doğal görüldüğü için açıkça dile getirmemekle beraber, *bir düzlemin noktaları ile tüm reel sayı çiftlerinin kümesi arasında mükemmel bir mütakabiliyet kurulabileceğini* belitsel olarak kabul etmişti. Böylece iki boyuta genişletilmiş Dedekind-Cantor beliti, Dedekind veya Cantor doğmadan iki yüzyıl önce oluşturulmuş bir disipline örtülü biçimde dahil edilmiştir. Bu disiplin, sonraki iki yüzyıl içindeki kalkülüs, fonksiyon kuramı, mekanik bilimi ve fizik gibi tüm başarıların deneme alanı oldu. Bu analitik geometri disiplininin hiçbir yerinde çelişkiye rastlanmadı. Ayrıca yeni problemler ortaya atma ve sonuçları öngörme gücü öylesine fazlaydı ki, uygulandığı her yerde vazgeçilmez bir araştırma aracı oluyordu.

İki dik eksen alın, her birine bir anlam atayın; böylece eksenler düzlemindeki herhangi bir nokta iki sayı ile gösterilebilir. Bunların her biri pozitif, sıfır veya negatif, rasyonel veya irrasyonel olabilir. Nok-

tanın eksenlerin belirlediği dört çeyrek düzlemden hangisinde kaldığına bağlı olarak önünde artı veya eksi olan bu sayılar, ilgili noktanın referans eksenlere mesafelerinin *ölçüleridir*.

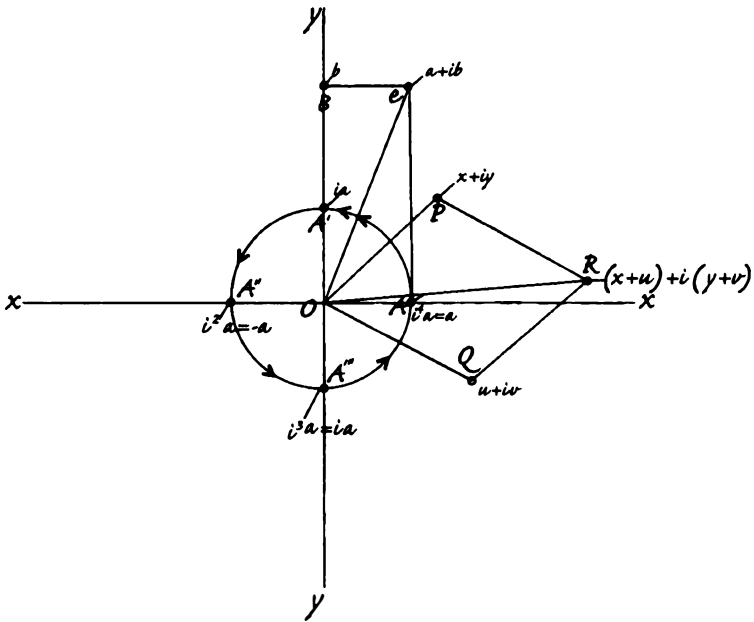
İlke öyle basit ve doğaldır ki, keşfinin üç bin yıl sürmüş olması inanılmazdır. Bu fenomen, numaralandırmada konum ilkesi kadar çarpıcıdır. Konum ilkesi sayı dilimizin yapısında örtülü olarak vardır, ama beş bin yıl boyunca keşfedilememiştir. Eksenlere ilişkin ilke vücudumuzun simetrik yapısının doğrudan sonucudur ve ezelden beri vücutların karşılıklı konumunu tanımlamakta kullanılmıştır. Görünüşe göre hakiki bir *koordinat* geometrisi için tek gereken, *sağ* ve *sol*, *geri* ve *ileri*, *yukarı* ve *aşağı* kavramlarına nicel bir anlam eklemektir.

Bu ilkenin en baştan beri kullanıldığını görüyoruz: Örneğin eski masallarda, hazine avcısına hazinenin yerini tarif etmek için doğruya doğru şu kadar adım, ardından kuzeye bu kadar adım atması talimatlarını veren haritalar vardır; ayrıca Mısırlı yerölçmeciler güney-kuzey ve doğu-batı hattını izleyip nesneleri bu eksenlere göre tarif ederek bu sistemi açıkça uygulamıştır.

Bu pratik prosedürden analitik geometriye geçiş elbette sıfır sayısının ve negatif sayı kavramının yaratılmasına dayanıyordu. Ama bunlar Avrupa'da Fibonacci'nin zamanından beri biliniyordu. O halde *koordinat ilkesi* matematikçilerin aklına neden daha önce gelmedi? Cevap, Yunan düşüncesinin Avrupa düşüncesi üzerindeki muazzam etkisinde bulunabilir. Sayının Yunanlılarca dayatılan kısıtlamalardan kurtuluşu, bugün görüldüğü kadar basit bir iş değildi.

Kartezyen geometri düzlemdeki her noktaya iki reel sayı ve her reel sayı çiftine düzlem üzerinde bir nokta atar. Reel çiftlerin kümesini düzlemdeki noktalarla tanımlar. Buradan, noktanın *sayı-birey*, yani tek bir sayı olarak kabul edilmesine tek adım kalmıştır. Buna rağmen, bu adım da neredeyse iki yüzyıl gecikmiştir.

1797 yılında Wessel adında Norveçli meçhul bir araştırmacı, Danimarka Bilimler Akademisi'ne karmaşık sayıların geometrik yorumu üzerine bir rapor sundu. Bu rapor fark edilmeden geçti ve ancak yüz yıl sonra bilim dünyasında tanındı. Yine 1797'de yirmi yaşındaki Gauss cebirin temel teoremi üzerine doktora tezini savunuyordu ve bu tezde karmaşık bölgenin geometrik temsilini örtülü bir şekilde



GAUSS-ARGAND DİYAGRAMI

kullanmıştı. Parisli meçhul bir kitapçı olan İsviçre doğumlu Robert Argand, 1806'da karmaşıkların geometrik yorumu üzerine bir makale yayımladı. Bu da, on yıl sonra önde gelen bir matematik dergisinde tekrar yayımlanana kadar göze çarpmadı. Son olarak Gauss, 1831 yılında yukarıda belirtilen makalesinde *düz Kartezyen geometrinin karmaşık sayılar bölgesiyle matematiksel eşdeğerliliğini* kesin biçimde formüle ediyordu.

Esasen Wessel ve Argand'a ait olan bu formülasyona göre, reel sayı Kartezyen şemasının x -ekseni üzerinde bir noktayı temsil eder. a bu tür bir reel sayı (bkz. üstte) ve A onun x -eksenindeki temsili noktası ise, i ile çarpımı OA vektörünü saatin ters yönünde dik açı oluşturacak biçimde döndürmeye eşdeğerdir; buna göre ia sayısı y -ekseninde A' noktası ile gösterilir. Bunu da i ile çarptığımızda elde ettiğimiz $i^2a = -a$, x -ekseninde A'' noktasını temsil eder vs. Her biri bir dik açıdan geçen dört ardışık devir, noktayı ilk konumuna geri

getirecektir. O halde bu, sayfa 163'te belirtilen bağıntıların geometrik yorumudur.

Dahası $a + ib$ toplamı OA ve OB vektörlerinin *bileşimi* olarak yorumlanırken, burada A reel sayı a 'nın temsili noktası ve B de *salt imajiner* sayı ib 'nin temsili noktasıdır. Dolayısıyla $a + ib$, kenar olarak alınan OA ve OB üzerine kurulmuş dikdörtgen köşegeninin C ucunu temsil eder. *Karmaşık sayı $a + ib$ buna göre Kartezyen şemasının apsisi için a ve ordinat için b kullanan noktasıyla ifade edilir.*

Sırasıyla P ve Q noktalarıyla ifade edilen iki karmaşık sayının toplanması, OP ve OQ vektörlerinin *paralelkenar kuralına* göre bileşimi ile tanımlanır. Bir reel sayı ile, diyelim 3 ile çarpılması, OP vektörünün 3:1 oranında *uzatılması* anlamına gelir. i ile çarpılması saat yönünün tersine bir dik açı dönüşü anlamına gelir vs.

İşlemlerin ayrıntıları şekildeki örnekte gösterilmiştir.

Bu somut yorumun keşfi Bombelli'nin hayalet varlıklarını ete kemiğe büründürmüştür. *İmajineri karmaşıktan çıkarmış ve yerine bir imge koymuştur.*

Bu gelişme, herhangi bir cebir denkleminin ve geniş bir sınıf teşkil eden aşkın denklemlerin çözümünün karmaşık sayılar bölgesine ait olabileceğine ilişkin eşzamanlı kanıt matematikte gerçek bir devrim yapmıştır.

Analiz alanında Cauchy, Weierstrass, Riemann ve diğerleri, sonsuz süreçlerin kapsamını karmaşıklar bölgesini de içine alacak şekilde genişletmiştir. Böylece bir karmaşık değişken fonksiyonu kuramı oluşturulmuş, bunun ise analiz, geometri ve matematiksel fizik üzerinde geniş kapsamlı sonuçları olmuştur.

Geometri alanında Poncelet, Von Staudt ve diğerleri karmaşık sayıyı genel bir izdüşüm geometrisi kurmak için çıkış noktası olarak almıştır; Lobaçevski, Bolyai, Lie, Riemann, Cayley, Klein ve daha birçokları zengin Öklit dışı geometriler alanının kapısını açmıştır. Karmaşık sayının sonsuz küçükler geometrisine uygulanması, nihayetinde, modern görelilik kuramının temeli olan mutlak diferansiyel geometri haline gelmiştir.

Sayı kuramında, Kummer *ideal* sayılar dediği karmaşık bölenler yöntemini icat etmiş, böylece Fermat'ın problemini ve ilgili soruları daha önce akla hayale gelmeyen bir aşamaya taşımıştır.

Bu muazzam başarı, genelleştirmeleri cesaretlendirmiştir. Bunlar iki yönde ilerliyordu. İlk olarak $i^2 = -1$ yasasından başka yasalara uyan karmaşık birimlerin kullanılıp kullanılamayacağı sorusu ele alınmıştır. Bu yönde çok fazla çalışma yapılmış olsa da, bunlar bu kitabın ilgi alanının dışındadır. İkincisi, doğal olarak üç boyutlu noktaların aynı zamanda sayı-bireyler olarak kabul edilip edilemeyeceği sorgulanmıştır. Bu sorgulamadan, günümüzde *Vektör Analizi* adı verilen ve modern mekanik biliminde temel bir rol oynayan yeni bir disiplin ortaya çıkmıştır. Bu sorgulamanın diğer bir sonucu, Hamilton tarafından kurulan dördeyler kuramı ve bununla bağlantılı Grassmann'ın *geniş nicelikler* kuramıydı.

Bu genelleştirmeler, karmaşık sayılar bölgesini aşan genişlemelerin *ancak kalıcılık ilkesi pahasına mümkün olduğu* yönündeki önemli olguyu açığa çıkarmıştır. Karmaşık sayılar bölgesi bu ilkenin son sınırıdır. Bunun ötesinde ya işlemlerin değişme özelliği ya da sıfırın aritmetikte oynadığı rol gözden çıkarılmalıdır.

Bu durum genel olarak işlemlerin özelliklerinin araştırılmasını zorunlu kılmıştır. Kısıtlamaların bazıları kaldırılarak kalıcılık prensibi genişletilmiştir. Sonuç bütün bir elemanlar dizisinin sayı-birey kabul edildiği kapsamlı bir matris kuramının inşası olmuştur. Bu "klasörler" toplanıp çarpılır ve karmaşık sayılar cebirinin devamı kabul edilebilecek matrislerden oluşan bütün bir kalkülüs oluşturulur. Bu soyut varlıklar yakın zamanda atomun kuantum kuramında ve diğer bilimsel alanlarda olağanüstü bir biçimde yorumlanmıştır. Karmaşık niceliklerin öyküsünün ana hatları kabaca böyledir. Bunlar yüzyıllar boyunca mantıkla hayal gücü arasında bir tür mistik bağ işlevi görmüştür. Leibniz'in deyişiyle,

İlahi Ruh, eksi işaretli birimin imajiner kökü dediğimiz bu analiz harikasında, ideal dünyanın bu alametinde, varlıkla varlık olmayan arasındaki bu ikiyaşayışlı mahlukta kendisini gösterecek yüce bir çıkış yolu bulmuştur.

Bazıları karmaşığı, bir şekilde reel sonuçlara götüren boş bir sembol oyunu olarak görüyordu. Yararlı olmaları varlıklarını haklı çıkarıyordu, tıpkı aracın amacı mubah kılması gibi. Başka yöntemlerle aşılamayacak problemlerle baş etme imkânı sağlıyor ve sonu-

cu öngörüyorlardı. Yani bu hayaletlere sık sık ama hep tedirginlik içinde başvuruluyordu.

Derken Bombelli'nin bu hayalet varlıklarının aslında hayalet olmadığıнын, aksine herhangi bir reel sayı kadar somut bir varlığa sahip olduklarının kanıtlandığı gün geldi. Dahası, bu karmaşık varlıklar bir tür çifte yaşam sürüyordu: Bir taraftan aritmetiğin tüm yasalarına uyuyorlardı ve bu nedenle gerçek anlamda sayılardı; diğer taraftan düzlemin noktalarında tam anlamıyla vücut buluyorlardı. Dolayısıyla düzlemin biçimlenimleri arasındaki çapraşık geometrik bağıntıları sayı diline çevirecek bir araç olmaya ideal derecede uygundular.

Bu fark edildiğinde, Fermat ve Descartes'ın istemeden başlattıkları *geometrinin aritmetikleştirilmesi* süreci tamamlanmış oldu. Böylece, kökeni *bir kurgunun sembolüne* dayanan karmaşık sayı sonuçta matematiksel fikirlerin formülasyonu için vazgeçilmez bir aygıt, girift problemlerin çözümü için güçlü bir araç, birbirine uzak matematik disiplinleri arasındaki akrabalığın izini sürmemizi sağlayan bir vasıta haline geldi.

Alınacak ders: KURGU, YORUM ARAYIŞINDAKİ BİR BİÇİMDİR.

Sonsuzun Anatomisi

Matematiğin özü özgürlüğüdür.

GEORG CANTOR

Sonsuz bir derlemin *çoğulluğunu* ölçmek başta garip bir fikir gibi görünebilir. Yine de matematiksel fikirlere en az aşına olanlar bile iki tür sonsuzluk olduğuna –doğal sayılar dizisine bağlı sonsuzluk terimi ile doğru üzerindeki noktalarla ilişkili olarak kullanılan sonsuzluk teriminin esasen farklı olduğuna– dair belli belirsiz bir hisse sahiptir.

Sonsuz bir derlemin "içeriğine" sahip olduğumuza dair bu belli belirsiz fikir, bir ağ ile karşılaştırılabilir. Tek birim boyunda gözleri olan bir ağ atarak tamsayıları yakalayıp diğer tüm sayıların ağdan geçip gitmesine izin verdiğimizizi düşünün. Ardından $1/10$ oranında ikinci bir ağ; ardından $1/100$ oranında üçüncü bir ağ aldık ve bu şekilde devam ederek daha fazla rasyonel sayı topladığımızı hayal edin. Bu inceltme sürecine bir sınır koyamayız, zira ne kadar ince bir ağ atarsak atalım, *atılabilecek* daha ince bir ağ olacaktır. Hayal gücünüzü serbest bıraktığınızda bu son –en son– ağ *tüm* rasyonel sayıları toplayabilecek derecede tıkız yani sıkı, incecik gözlere sahip olarak kafanızda canlandırabilirsiniz.

Bu benzetmeyi aşırı uçlara taşıyıp bu sınırlandırıcı ağ *gerçekte* olduğu gibi sabit, donmuş bir şey olarak görmeye başladığımızda, Zenon'un ustaca ortaya çıkardığı güçlüklerle rastlarız. Fakat bizim burada ilgilendiğimiz güçlük başka.

Bu en son rasyonel ağ, somutlaştırılabilse *tüm sayıları* toplayamayacaktır. Cebirin irrasyonellerini ele almak için daha da "tıkız" bir

ağ gerekecektir ve bu "cebirsal" ağ bile aşkın sayıları toplayamayacaktır. Yani sezgisel düşüncemize göre, rasyonel sayılar bölgesi doğal sayılar bölgesinden daha tıktır; cebir sayıları daha da yoğun bir biçimde düzenlenmiştir ve son olarak reel sayılar kümesi –aritmetik sürey– *azami yoğunlukta bir araç*, boşluksuz bir araç, sıfır gözlü bir ağıdır.

Dolayısıyla Georg Cantor'un sonsuz derlemleri sınıflandırma ve her birine çoğulluğunu temsil edecek bir reel sayı atama teşebbüsünde bulunduğunu ilk duyduğumuzda, doğal olarak bu değişken tıktığın bir ölçüsünü bulmayı başarmış olacağını düşünürüz.

Ve beklentilerimiz bu yönde olduğu için, Cantor'un edinimi bize, bazıları abese varacak kadar şaşırtıcı olan birçok sürprizler sunar.

Derlemin tıktığını ağ yoluyla ölçme çabası, ilke olarak aritmetiğe değil de fiziğe dayandığı için başarısızlığa mahkûmdur. Aritmetiğe dayanmaz zira tüm aritmetiğin temelindeki mütekabiliyet ilkesi üzerine inşa edilmemiştir. *Fiili sonsuzun*, yani çeşitli türlerde sonsuz derlemler çoğulluğunun sınıflandırılması (şayet mümkünse) sonlu derlem çoğulluklarının sınıflandırılmasına benzer bir şekilde gerçekleştirilmelidir.

İlk bölümde, *mutlak çoğulluk* kavramının insan zihninin doğal bir yetisi olmadığını görmüştük. Doğal sayının veya daha ziyade kardinal sayıların doğuşu, derlemler arasında mütekabiliyet oluşturmamıza imkân sağlayan eşleştirme yetimize dayandırılabilir. *Eşit-daha büyük-daha küçük* nosyonu sayı kavramından önce gelir. *Değerlendirmeyi* öğrenmeden *karşılaştırmayı* öğreniriz. Aritmetik sayılarla başlamaz; *kıstaslarla* başlar. Bu eşit-daha büyük-daha küçük kıstaslarını uygulamayı öğrenen insanın bir sonraki adımı, her çoğulluk *türü* için modeller tasarlamak olmuştur. Bu modeller zihninde, standart metrenin Paris'te Ölçüler Bürosu'nda saklandığı gibi saklanır. Bir, iki, üç, dört, beş... Bunların yerine şunları da söyleyebilirdik: ben, kanatlar, yonca, bacaklar, el – ki bildiğimiz kadarıyla mevcut biçimimizden önce bunlar vardı.

Mütekabiliyet ilkesi tamsayıyı oluşturur ve tamsayı üzerinden tüm aritmetiğe hükmeder. Aynı şekilde, sonsuz derlemlerin çoğulluğunu ölçmeden önce bunları karşılaştırmayı öğrenmeliyiz. Nasıl? Sonlu derlemlerde gerçekleştirildiği gibi. Sonlu aritmetiğine önem-

li hizmetlerde bulunan eşleştirme süreci *sonsuz aritmetiğine* genişletilmelidir. Zira iki sonsuz derlemin öğeleri de teker teker eşleştirilebilir.

İki sonsuz derlem arasında bir mütekabiliyet oluşturma olasılığı Galileo'nun, sonsuz kümeler konusu üzerine ilk tarihi belge olan diyaloglarından birinde ortaya çıkar. Bu diyalogu 1636'da çıkan *Yeni Bilimlere Dair Diyaloglar* adlı bir kitaptan aynen aldım. Diyaloglarda üç kişi var. Bunlardan Sagredo pratik zihni, Simplicio skolastik yöntemlerle eğitilen birini temsil ediyor; Salviati ise şüphesiz Galileo'nun ta kendisi.

Salviati: Bu, sonlu zihinlerimizle sonsuzu tartışmaya kalktığımızda, sonluya ve sınırlıya atfettiğimiz özellikleri sonsuza da atfettiğimizde ortaya çıkan güçlüklerden biri; oysa ben sonsuz nicelikleri birbirinden büyük veya küçük ya da birbirine eşit olarak ifade edemeyeceğimiz için bunun yanlış olduğunu düşünüyorum. Aklımda bunu ispatlayacak bir argüman var; daha açık ve net olması açısından bu argümanı, söz konusu güçlüğü ortaya çıkaran Simplicio'ya yöneltilmiş sorular biçiminde ifade edeceğim.

Hangi sayıların tam kare olduğunu ve hangilerinin olmadığını bildiğinizi varsayıyorum.

Simplicio: Tam kare sayının, diğer bir sayının kendisiyle çarpımından oluştuğunu gayet iyi biliyorum; buna göre 4, 9 vs., 2, 3 vs.'nin kendileriyle çarpılmasıyla oluşmuş tam kare sayılardır.

Salviati: Çok güzel. Ve çarpımlara kare dendiği gibi çarpanlara da yan veya kök dendiğini; öte yandan iki eşit çarpandan oluşmayan sayıların tam kare olmadığını da biliyorsunuz. Buna göre, hem tam kareleri hem de tam kare olmayanları içeren tüm sayıların, bahsedilen tam karelerden daha fazla olduğunu iddia edersem doğruyu söylemiş olurum, değil mi?

Simplicio: Kesinlikle.

Salviati: Kaç tane tam kare olduğunu sorarsam, ilgili kök sayısı kadar kare olduğu söylenebilir, ki bu doğrudur, zira her kare kendi köküne ve her kök kendi karesine sahiptir, buna karşın hiçbir karenin birden fazla kökü ve hiçbir kökün birden fazla karesi yoktur.

Simplicio: Aynen öyle.

Salviati: Ama kaç tane kök olduğunu sorgularsam, kaç tane sayı varsa o kadar kök olduğu inkâr edilemez, zira her bir sayı bir karenin köküdür. Bu kabul edildiğine göre, ne kadar sayı varsa o kadar kare olduğunu söyleyebiliriz, zira bunlar kökleri kadar çok sayıdadır ve tüm sayılar birer köktür. Oysa başta, karelerden daha fazla sayı olduğunu söylemiştik, zira bunların büyük kısmı kare değildir. Sadece bu da değil, daha büyük sayılara geçtik-

çe karelerin orantılı sayısı azalır. Böylece 100 sayısına kadar elimizde on adet vardır, yani kareler tüm sayıların onda birini oluşturur; 10.000'e kadar sadece yüzde birinin ve bir milyona kadar sadece binde birinin kare olduğunu görürüz; ancak diğer taraftan, sonsuz bir sayıda –insan böyle bir şeyi düşünebilirse tabii– toplam ne kadar sayı varsa o kadar kare olduğunu kabullenmek zorunda kalırız.

Sagredo: O halde bu konuda ne sonuca varılmalıdır?

Salviati: Gördüğüm kadarıyla, sadece karelerin sayısının sonsuz olduğu ve köklerinin sayısının sonsuz olduğu sonucuna varabiliriz; karelerin sayısı tüm sayılarınkinden az ya da tüm sayıların sayısı karelerinkinden fazla değildir ve son olarak "eşit", "büyük" ve "küçük" özellikleri sonsuza uygulanamaz, sadece sonlu sayılara uygulanabilir.

Buna göre, Simplicio farklı uzunlukta birkaç doğru gösterip uzun doğruların nasıl olup da kısa olandan daha fazla nokta içermediğini sorduğunda, bir doğrunun diğerinden az veya çok ya da onunla eşit sayıda nokta içermediği, her doğrunun sonsuz bir sayı içerdiği cevabını veririm.

Galileo'nun paradoksu belli ki çağdaşları üzerinde pek bir etki bırakmamıştı. İki yüz yıl boyunca probleme hiçbir katkıda bulunulmadı. Ardından, 1820'de Bolzano adında bir adamın *Paradoxien des Unendlichen* (Sonsuzun Paradoksları) adında Almanca bir kitapçığı ortaya çıktı. Bu da çok az dikkat çekti; öyle ki, elli yıl sonra küme kuramı günün konusu olduğunda, çok az matematikçi bu adamın kim olduğunu biliyordu.

Günümüzde Bolzano'nun katkıları tamamen tarihsel açıdan ilgi çeker. *Fiili sonsuz* sorununu ileri süren ilk kişi olsa da, bu fikri yeterince ilerletememişti. Yine de kısaca bahsedeceğim çok önemli bir kavram olan küme *gücü* kavramını var eden kişiye hak ettiği saygı gösterilmelidir.

Modern *küme kuramı* Georg Cantor ile başlar. Bu yeni matematik dalının temelini atan makalesi 1883 yılında, "Doğrusal Kümeler Üzerine" adıyla çıkmıştır. Bu makale, fiili sonsuz kavramını kesin bir matematiksel varlık gibi ele alan ilk makaledir. Aşağıda bu makaleden alınmış pasaj, Cantor'un probleme yaklaşımını açıkça ortaya koymaktadır:

Sonsuzu sonu olmadan artan veya (bununla yakından bağlantılı olup on yedinci yüzyılda ortaya atılan) yakınsak bir dizi biçiminde ele almak gelekselleşmiştir. Bense buna karşılık sonsuzu tamamlanmış bir şey, sadece

matematik formülasyonlara imkân vermekle kalmayıp sayı ile tanımlanması da mümkün olan, belirli bir biçime sahip bir şey olarak düşünüyorum. Bu sonsuz fikri benim için değerli olan geleneklere ters ve bu görüşü kabullenmeye zorlanmış olmam tamamen irademin dışında. Ama yıllar süren bilimsel spekülasyon ve denemeler bir mantıksal zorunluluk olarak bu sonuçlara işaret ediyor ve bu nedenle karşılayamayacağım hiçbir geçerli itiraz gelemeyeceğine eminim.

Geçmişin gelenekleriyle açıkça yolları ayırmak için ihtiyaç duyulan büyük cesaretin değerinin anlaşılması için, Cantor'un neslinin *fiili sonsuz* kavramına karşı genel tutumunu anlamalıyız. Bu amaçla büyük Gauss'un Schumacher'e bir mektubundan alıntı yapıyorum (1831 yılında yazılmış olmasına karşın bu mektup, matematik dünyasının sonraki yarım yüzyıldaki atmosferini belirlemiştir):

İspatınıza gelince, matematikte buna asla izin verilmediği için, sonsuzu tamamlanmış bir şey olarak kullanmanıza şiddetle itiraz etmek zorundayım. Sonsuz sadece bir mecazdır; bazı sayılara tüm sınırların ötesinde genişleme izni verilirken bazı oranların istediğimiz kadar yaklaşabileceği limitlerin var olduğu ifadesinin kısaltılmış biçimidir. ...

... Sınırlı İnsan sonsuzu sabit bir şeyle karıştırmadığı sürece, zihnin sonsuzu sınırlı bir şey olarak gören edinilmiş alışkanlığınca yönlendirilmediği sürece hiçbir çelişki doğmayacaktır.

Gauss'un bu konuya ilişkin fikirleri genel olarak kabul görüyordu ve Cantor'un açık isyanının gelenekselci kampta nasıl bir fırtına kopardığını tahmin edebiliriz. Fiili sonsuz kavramı Cantor'un döneminde o veya bu biçimde kullanılmadığından değil, ama bu tür konularda alışıldık yaklaşım Güneyli centilmenlerin zinaya yaklaşımına benzerdi: Bir leydinin huzurunda o sözcüğü söylemektense ameli işleyebilirlerdi.

Konu üzerinde uzun uzadıya düşünmenin Cantor'u saldırıyla yüzleşecek kadar katılaştırmış olması bir şanstı, zira yıllar boyunca mücadeleyi tek başına sürdürecekti. Hem de ne mücadele! Matematik tarihinde bu kadar büyük bir hiddet kaydedilmemiştir. Küme kuramına ilişkin öykünün başlangıcı, matematik gibi böylesine soyut bir alanda bile insan duygularının tamamen ortadan kaldırılamayacağını gösterir.

Galileo'nun bıraktığı yerden Cantor devam eder. Evet, iki sonsuz derlem arasında mütekabiliyet kurmak mümkündür, biri diğerinin bir parçası olsa bile! Daha kesin bir ifadeyle şöyle diyelim: *Sonlu* veya *sonsuz* iki derlem öge öge eşleştirilebiliyorsa, bu iki derlem eşdeğerdir veya *aynı güce* sahiptir. İki derlem *farklı güce* sahipse, eşleştirme süreci birini bitirecek ama diğerinde eşleştirilmemiş öğeler kalacaktır. Diğer bir deyişle, birincisi ikincisinin *bir parçasıyla* eşleştirilebilir ama ikincisi birincinin herhangi bir parçasıyla eşleştiremez. Bu koşullarda, ikinci kümenin birinciden *daha büyük* bir güce sahip olduğunu söyleyebiliriz.

(A) ve (B), her biri aynı sayıda öğeye sahip iki *sonlu* derlem ise açıkça aynı güce sahiptirler; aynı şekilde, (A) ve (B) eşit güce sahip *sonlu* derlemler ise aynı *kardinal* sayıya sahiptirler. (A) ve (B) eşit olmayan güçteyse, daha büyük kardinal sayı daha büyük güce karşılık gelir. *Buna göre, sonlu derlemlerde güç kavramı kardinal sayı kavramı ile tanımlanabilir.* Şimdi, *sonlu aritmetiğinde* güç terimi kardinal sayı ile tanımlanabildiğine göre, sonsuz derlemlerin gücünü daha yüksek dereceden, *sonluötesi* sayılar gibi sayılarla tanımlamanın ve bu yeni kavram yoluyla bir *sonluötesi aritmetik*, bir sonsuz aritmetiği oluşturmanın mümkün olup olmadığını sorgulamak doğaldır.

Sonlu aritmetiğin başlangıcının işaret ettiği çizgiler boyunca ilerlersek, her modelin tipik bir çoğulluğu temsil ettiği model kümelerini aramalıyız. Bu tür modeller çok yakınımızdadır: Doğal dizi, rasyonel bölge, cebir sayıları alanı, aritmetik sürey – sürekli kullanıldığından aşına olduğumuz tüm bu sonsuz derlemler karşılaştırma standardı olarak son derece uygundur. O halde bu standart derlemlere semboller atayalım ve bu sembollerin, karşılıkları olan 1, 2, 3 gibi sonlu kardinal sayıların, sonlu aritmetiğinde oynadığı rolün aynı-sını sonluötesi aritmetikte oynamalarını sağlayalım.

Cantor bu sembolleri *sonluötesi kardinal sayılar* olarak adlandırdır. Bunları artan güç "dizisi" halinde düzenler; toplama, çarpma ve üs alma işlemlerini bu soyut varlıklar üzerinden tanımlar; kendi aralarında ve sonlu kardinal sayılarla nasıl birleştiklerini gösterir. Kısaca, Cantor'un dehasından doğan bu hayali varlıklar sonlu nice-liklerin öylesine çok özelliğini almıştır ki, bunlara "sayı" ismini vermek gayet uygun görünmüştür. Ama sahip olmadıkları çok önemli

tek bir özellik vardır, bu da *sınırlılıktır*. Bu son ifade malumu ilam gibi görünse de, laf olsun diye söylenmiş bir şey değildir. Aşağıda sunacağım tüm paradoksal önermeler, sayıların tüm dış görünüşüne sahip olan bu matematiksel varlıkların, bayağı sayıların en temel özelliklerinden bazılarına sahip olmadığı gerçeğinden doğar. Bu tanımın en çarpıcı sonuçlarından biri şudur: Derlemin bir parçası, bütünden daha küçük olmak zorunda değildir; ona eşit de olabilir.

Parça bütünün gücüne sahip olabilir. Bu, kulağa matematikten ziyade teoloji gibi geliyor. Gerçekten de, birçok teoloğun ve teolojiyle ilgilenen kimselerin bu fikirle oynadığını görüyoruz. Dinin felsefe, matematik ve cinsellik talimatlarıyla hoş bir biçimde birbirine karıştığı Sanskritçe elyazmalarında, bu tür fikirler son derece olağandır. Nitekim $1/0$ sayısının yapısı üzerine spekülasyonda bulunan Bhaskara, bu sayının "eski dünyalar yok edildiğinde veya yenileri yaratıldığında, sayısız yaratık türü doğduğunda veya birçoğu yok olduğunda hiçbir değişikliğe uğramayan Sonsuz, Değişmez Tanrı gibi" olduğunu söyler.

"Parça bütünün gücüne sahiptir." Galileo'nun paradoksunun özü budur. Ama Galileo "Eşit, büyük ve küçük özellikleri sonsuza değil, sadece sonlu sayılara uygulanabilir" beyanıyla konudan kaçınırken, Cantor konuyu küme kuramı için çıkış noktası olarak görür.

Dedekind daha da ileri gider: Ona göre tüm sonsuz derlemlerin tipik özelliği, bütünlü eşleştirilebilecek parçalara sahip olmalarıdır. Örneğin uygun biçimde dizilip etiketlenmiş herhangi bir sonsuz diziyi düşünün. Şimdi baş taraftan sonlu sayıda terimi atarak, kesilmiş olan diziyi yeniden etiketleyin. İkinci dizideki her terim için ilk dizide aynı sıra numarasına sahip bir terim vardır ve bunun tersi de geçerlidir. Buna göre, mütekabiliyet tamdır ve iki dizi aynı güce sahiptir; yine de ikincinin, birincinin bir parçası olduğu inkâr edilemez. Bu tür bir fenomen sadece sonsuz derlemlerde mümkündür, zira bütünün hiçbir zaman parçaya eşit olmaması sadece *sonlu* derlemlerin tipik özelliğidir.

Ama Cantor'un kuramına geri dönelim. *a* sembolü doğal sayılar kümesinin gücünü ifade eder. *a* gücüne sahip herhangi bir küme *sayılabilir* olarak adlandırılacaktır. Galileo'nun argümanında kulla-

nılan mükemmel karelerin dizisi bu tür bir sayılabilir kümedir. Ama diğer her dizi de öyledir, zira herhangi bir terime bir sıra atayabiliyor olmamız, dizi ile doğal sayılar arasında mükemmel bir müteka-biliyet olduğunu gösterir. Çift sayılar, tek sayılar, herhangi bir aritmetik ilerleme, herhangi bir geometrik ilerleme, herhangi bir dizi – hepsi sayılabilirdir.

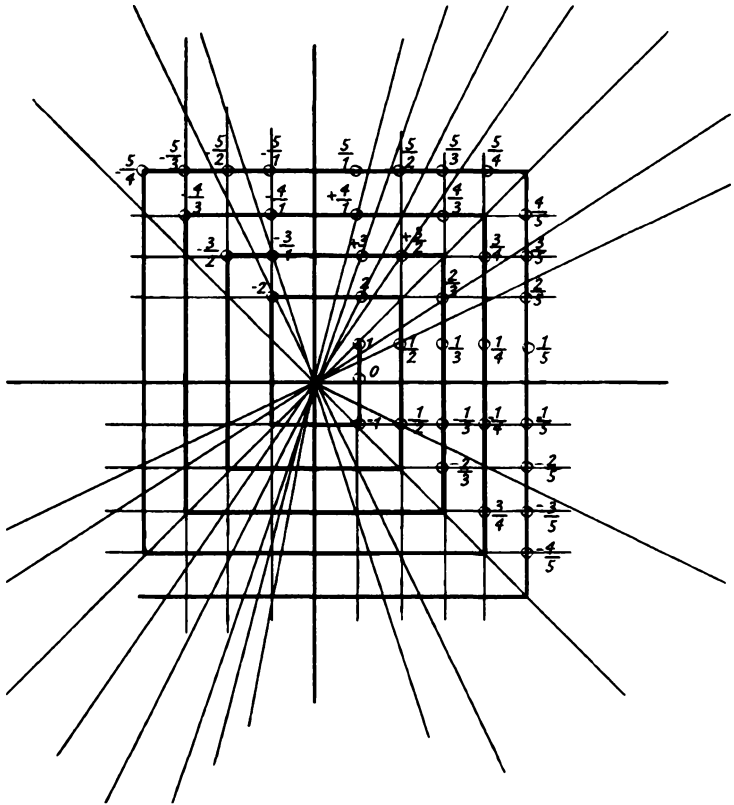
Dahası, bu tür bir dizinin doğal sayılar bölgesinden çıkarıldığı düşünülüğünde, kalan küme halen sonsuz ve halen sayılabilirdir; bu yüzden sayılabilir bir kümenin gücünü *seyrekleştirme* süreci ile azaltma ümidi yoktur. Örneğin tüm çift sayıları, ardından 3'ün kalan tüm katlarını ve daha sonra 5'in kalan tüm katlarını çıkarabiliriz. Kalanların gücünü etkilemeksizin bu süreci sonsuza kadar sürdürebiliriz.

Cantor'un sözleriyle, *a* sayısından daha *küçük sonluötesi sayı* yoktur, bu da herhangi bir sayılabilir sonsuz derlemin çoğulluğunu ölçer.

Ama doğal dizinin seyrekleştirilmesiyle daha küçük bir sonluötesi elde etme ümidi yoksa, gücü bir doldurma süreci ile artıramaz mıyız? Gerçekten de, her yerde yoğun olan rasyonel bölgenin gücü, ayrık özelliğe sahip doğal dizinkinden yüksek olmalıymış gibi görünür. Sezgimiz burada da bizi şaşırtıyor, çünkü Cantor bize rasyonel kümenin de sayılabilir olduğunu kanıtlamıştır. Bunu ispatlamak için sadece her rasyonel sayıya belli bir sıra numarası vererek rasyonel sayıların da bir dizi biçiminde düzenlenebileceğini göstermek gerekir. Cantor'un yaptığı aslında budur. Bunu geometrik açıdan düşünerek yöntem hakkında genel bir fikir edinebiliriz.

Yandaki şekilde birbirlerine dik açıda iki paralel doğru grubu vardır. Yatay gruptaki herhangi bir doğruyu *y* tamsayısıyla tanımlarız, *y* sayısı $-\infty$ ile $+\infty$ arasındaki tüm tamsayı değerlerini içine almakta olup, dikey doğruları tanımlayan *x* sayısı için de aynısı geçerlidir. Şimdi bu şekilde meydana getirdiğimiz sonsuz örgünün herhangi bir bağlantı yerini, burada kesişen dikey ve yatay çizgileri tanımlayan iki sayı ile etiketliyoruz. Böylece (y, x) sembolü örgüde belli bir bağlantı noktasını tanımlar ve diğer taraftan, herhangi bir nokta da böyle gösterilebilir.

Bu bağlantı noktalarının toplamının sayılabilir bir küme olduğunu göstereceğiz. Bu çarpıcı olguyu kanıtlamak için, şekildeki gibi spiral benzeri çokgensel çizgiyi çizmek ve bağlantı noktalarını şemada görüldükleri sırada izlemek yeterlidir. Diğer taraftan, (y, x)



RASYONEL BÖLGENİN BELGELENMESİ

sembolünü y/x kesri ile tanımlayabiliriz. Ama bunu yaparsak *tüm* bağlantı noktalarımızı farklı rasyonel sayılarla etiketleyemeyeceğimiz açıktır. Öyle ki, başlangıçtan geçen aynı doğru üzerindeki tüm bağlantı noktaları –kolayca ikna olacağımız üzere– tek ve aynı rasyonel sayıyı temsil eder. Bu belirsizliği ortadan kaldırmak için, *her kesri yalnızca ilk ortaya çıkışında saymayı kabul ediyoruz*. Dizi şu noktalardan oluşur:

$$1, 0, -1; -2, 2, +1/2, -1/2; -3/2, -3, +3, +3/2, +2/3, +1/3, \dots$$

(Bkz. yukarıdaki şekil.)

Burada tüm rasyoneller temsil edilmekte olup, her rasyonel diziye bir kez girer. *Buna göre, rasyonel sayılar bölgesi sayılabilir.*

Okur, bunun hiçbir rasyonel sayının ardılı olmadığını söyleyen tıkHzlık nosyonumuza tamamen ters olduğunu öne sürebilir. Herhangi iki rasyonel sayının arasına diğerlerinden sonsuz sayıda ekleyebiliriz; ama bu durumda fiilen bir ardıllık oluşturmuş oluruz! Bunun cevabı şöyledir: Burada gerçek bir ardıllık oluştursak da, büyüklüğe göre dizilen doğal 1, 2, 3, ... ardıllığı ile aynı türde değildir bu. Rasyonel sayıları numaralandırmayı başardık çünkü yeni düzenlemede büyüklük sırasını korumak zorunda değiliz. *Süreklilik pahasına ardıllık* elde ettik.

İki tür eşdeğerlik arasında ayırım yapmanın gerekli olduğunu görüyoruz. *Mütekabiliyet* açısından, iki derlem öğeler bazında eşleştirilebilirse eşdeğerdir. Bu koşul *sıra* açısından da zorunludur. Ama tam eşdeğerlik için, *benzerlik* için, bunlara ek olarak eşleşme süreci diziliş sırasını bozmamalıdır: Yani (A) derlemesinde a ögesi a' ögesinden önce geliyorsa, (B) derlemesinde ilgili b ögesi b' ögesinden önce gelmelidir. Büyüklüklerine göre dizilen rasyonel sayılar kümesi ve rasyonel sayıları saymakta kullandığımız spiral olarak dizilmiş küme mütekabiliyet açısından eşdeğer olsa da düzen açısından eşdeğer değildir. Diğer bir deyişle, aynı a kardinal sayısına sahiptirler ama farklı *ordinal türdendirler*.

Dolayısıyla Cantor, sonlu aritmetikteki ordinal sayıların muadilini oluşturan bir *ordinal türler* kuramı önermiştir. Teoremin temel niteliği şudur: Eşit kardinal sayılara sahip herhangi iki derlem aynı ordinal sayılara da sahiptir ve birinden diğerine kolayca geçebilme-miz bunun sayesinde. Ama Cantor'un sonsuz aritmetiğinde, iki küme aynı kardinal sayı ile ölçülüp yine de *ordinal olarak farklı*, veya Cantor'un deyişiyle *henzemez* olabilir.

Buna göre, salt tıkHzlık saymaya engel değildir ve doldurma süreci kümenin gücünü, seyrekleştirme sürecinden daha fazla etkilemez. O halde Cantor'un bir sonraki çıkarımı bizi daha az şaşırtacaktır: *Cebir sayıları kümesi de sayılabilir.* Cantor'un bu teoremi ispatlaması insan zekâsının zaferidir.

Cantor bir denklemin *yüksekliği* adını verdiği şeyi tanımlayarak

başlar. Bu değer, denklem katsayılarının *mutlak değerleri* ile denklemin derecesinin 1 eksiğinin toplamıdır. Örneğin, $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = 0$ denkleminin yüksekliği $h = 16$ 'dır, zira $2 + 3 + 4 + 5 + (3 - 1) = 16$ eder.

Daha sonra Cantor yükseklik için herhangi bir h pozitif tamsayısını kabul eden *sonlu* sayıda denklem olduğunu ispatlar. Bu, *tüm* cebir denklemlerini artan yükseklik gruplarına göre sıralamamızı sağlar; 1 yüksekliğinin tek bir denklemi; 2 yüksekliğinin üç; 3 yüksekliğinin yirmi iki denklemi vs. olduğu kanıtlanabilir.

Şimdi, belli yükseklikteki her bir grupta, denklemleri istediğimiz şekilde sıralayabiliriz. Örneğin aynı derecedeki tüm denklemleri bir altgrupta birleştirebilir ve her altgrubu ilk katsayıların büyüklüğüne göre, ilk katsayıları aynı ise ikinciye göre vs. düzenleyebiliriz.

Bu tür bir düzen tüm cebir denklemlerini bir hiyerarşi içinde dizerek numaralandırmamızı, yani her denkleme bir derece atfetmemizi sağlar. Şimdi, bu denklemlerin her birine bir veya daha fazla reel kök karşılık gelebilir, ama sayı daima sonludur ve denklemin derecesini –dolayısıyla yüksekliğini– aşamaz; bu kökler de yine büyüklüklerine göre dizilebilir. Düzeni bir bütün olarak aldığımızda elbette tekrarlarla karşılaşacağız, ama rasyonel sayılarda olduğu gibi, cebir sayılarının da sadece süreç içinde ilk karşımıza çıktığı sefer sayılmasının kabulüyle tekrarlardan kaçınılabilir.

Bu şekilde herhangi bir cebir sayısına hiyerarşi içinde bir derece atfetmiş, diğer bir deyişle *cebir sayıları kümesini saymış* oluruz.

Okur artık, belki de *tüm kümeler sayılabilir*dir, diye düşünmeye başlamış olmalı. Durum böyle olsaydı, tek bir sonluötesi olur ve rasyonel ile cebirsel kümeler için geçerli olan, sürey için de genel anlamda geçerli olurdu. Cantor'un yüksekliği gibi bir yapıyla, herhangi bir sonsuz derlem bir hiyerarşi içinde dizilebilir ve böylece numaralandırılabilirdi. Nitekim çalışmasının ilk aşamalarında Cantor'un düşüncesi de buydu: *Reel sayıları numaralandırmak*, iddialı projesinin amaçlarından biriydi ve sonluötesi sayılar kuramı, doğumunu bu "süreyi sayma" çabasına borçludur.

Durumun böyle olmadığını, tüm reel sayıları sayılabilir bir dizi içinde düzenlemenin mümkün olmadığını Cantor daha 1874 yılında biliyordu. Ne var ki bunun ispatı 1883'e kadar ortaya çıkmamış-

tı. Bu ispatın detaylarına burada giremem, ama genel ilkesi tüm reel sayıların bir hiyerarşi halinde düzenlendiğini varsaymaktan ve günümüzde *köşegen prosedürü* adını verdiğimiz bir yöntemle, numaralandırılmış sayıların arasında bulunmayan başka reel sayıların varlığını göstermenin mümkün olduğunu kanıtlamaktan ibaretti.

Bu ispatla tesadüfen ortaya çıkan bir bilgi tarihsel açıdan önemlidir. Okur, Liouville'in aşkınları keşfedişini hatırlayacaktır. Liouville'in bu varlık teoremi Cantor tarafından, süreyin sayılamayacağı teoreminin bir tür yan ürünü olarak yeniden oluşturulmuştur. İki bölgenin, cebir ve aşkının göreceli zenginliği, Liouville için muğlak bir anlama sahip olan bu sorun, Cantor tarafından titizlikle formüleştirilmiştir. Cantor cebir alanında doğal sayılar kümesinin gücü a olsa da, aşkınların *süreyin gücü c 'ye sahip olduklarını* göstermiştir. Böylece, cebirsel sayılardan *karşılaştırılamaz sayıda daha fazla* aşkın olduğu iddiası gerçek bir öneme bürünür.

Burada yani reel sayılar bölgesinde de parça bütünün gücüne sahip olabilir; Galileo'nun kendine mahsus ifadesiyle, "uzun doğru kısa doğrudan daha fazla nokta içermez". Gerçekte, doğrunun bir kesiti ne kadar kısa olursa olsun sonsuza uzanan doğru ile aynı güce sahiptir; bir alan ne kadar küçük olursa olsun üç boyutlu sonsuz uzayın gücüne sahiptir. Kısaca: *Taksim etmek veya parçalara ayırmak kümenin gücünü, seyrekleştirme veya doldurma işlemlerinden daha fazla etkilemez.*

Bu noktada sezgimiz tekrar bir öneri fıslırdar. Daha fazla boyuta sahip olan çokkatmanlılara ne demeli: düzlemdeki noktalar kümesiyle tanımladığımız karmaşık sayılar bölgesi; uzaydaki noktalar; vektör ve dördeyler; tansör ve matrislerle ve matematikçilerin sayı işlemlerinin yasalarına tabi bireylermişçesine kullandıkları ama doğru üzerindeki noktalar gibi sürekli biçimde temsil edilemeyen diğer girift kompleksler... Elbette bu çokkatmanlılar *doğrusal* süreyden daha büyük bir güce sahip olmalıdır! Üç boyutlu uzayda, her yöne sonsuza kadar uzanan bu evrende, bir santim uzunluğundaki doğrunun bir kesitinden daha fazla nokta vardır herhalde!

Bu da Cantor'un ilk fikirlerinden biri olabilir. Ama burada da sezgimizin bizi yanlış yönlendirdiğini kesin olarak kanıtlamıştır. İki ve ya üç boyutlu sonsuz çokkatmanlılar, üçten bile çok sayıda –hatta

herhangi bir sayıda—değişkene bağlı matematiksel varlıklar yine de *doğrusal süreyden* daha büyük bir güce sahip değildir. Hayır, konumu herhangi bir anda sonsuz sayıdaki bağımsız değişkenlere bağlı olan bir değişken varlık, *sayılabilir sonsuz boyut dünyasında* "yaşayan" bir varlık tasavvur edebilseydik bile, söz konusu varlıkların toplamının gücü de bir santim uzunluğundaki bir kesitten büyük olmayan doğrusal süreyinkinden büyük olmayacaktı.

Bu ifade boyut hakkındaki fikirlerimizle abes düzeyde çelişiyor-muş gibi görünür. Cantor ilk duyurduğunda çoğu kişinin düşüncesi gerçekten de böyleydi ve en hafif deyişle, buna temkinle yaklaşan birinci sınıf zihinler vardı. Ama Cantor'un bu temel önermeyi ispatı öylesine basittir ki, zeki bir çocuk bile görebilir.

Bu ifadeyi düzlem noktalarına uygulandığı şekilde açıklayacağım; okur argümanın son derece genel olduğunu görecektir. 1 uzunluğundaki kesitin noktaları sonsuz doğru ile, kenarı 1 olan karedeki noktalar ise sonsuz düzlemle aynı güce sahip olduğundan, bu kare ile bu kesit arasında bire bir mütakabiliyet kurulabileceğini göstermek yeterli olacaktır.

Şimdi, sayfa 192'de gördüğümüz OAFB karesindeki herhangi bir nokta olan P , x ve y koordinatlarıyla ifade edilebilir. Bunlar 1'i aşmayan reel sayılardır ve ondalık kesirlerle gösterilebilirler. Bu kesirler daima bitimsiz olarak kabul edilebilir, zira bitimli olsalar bile son anlamlı rakamın arkasına sıfırlar eklenerek bitimsiz hale getirilebilirler. O halde bu ondalık kesirleri aşağıdaki biçimde yazalım:

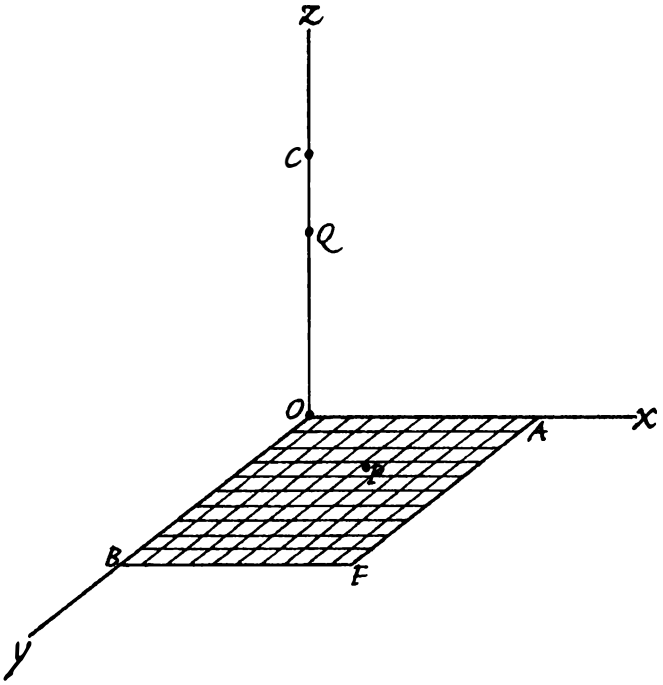
$$x = . a_1 | a_2 | a_3 | a_4 | a_5 | a_6 | \dots$$

$$y = . b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | \dots$$

Şimdi x ve y rakamlarını sırayla alarak üçüncü bir ondalık kesir oluşturalım:

$$z = . a_1 | b_1 | a_2 | b_2 | a_3 | b_3 | a_4 | b_4 | \dots$$

Bu kesit, yine reel bir sayıyı temsil eder ve OC kesiti üzerinde Q noktası olarak gösterilebilir. P ile Q arasında bu şekilde kurulan mütakabiliyet çift taraflı ve eşsizdir; zira x ile y verildiğinde z 'yi daima ve yalnızca tek bir biçimde oluşturabiliriz; aynı şekilde, z 'yi bilmek x ve y sayılarını ve dolayısıyla P noktasını tekrar oluşturmamızı sağlar.



BİR DOĞRU ÜZERİNE KARE EŞLENMESİ

Arada ve ötede ne vardır?

Cantor'un kuramında a 'dan büyük, c 'den küçük bir sonluötesi sayı bulunması olasılığını engelleyecek hiçbir şey yoktur. Yine de, bilinen tüm nokta-kümeler ya rasyonel veya cebirsel sayı bölgeleri gibi sayılabilir, ya da aşkınlar gibi aritmetik süreyin gücüne sahiptir. Doğal diziden daha "güçlü" ama doğru üzerindeki noktalar kümesinden daha az "güçlü" olacak yapay bir nokta-küme oluşturmaya yönelik hiçbir teşebbüs şu âna kadar başarılı olamamıştır.

Diğer taraftan, c 'den daha büyük bir güce sahip kümeler biliniyor. Bunların arasında örneğin *fonksiyonel* çokkatmanlı vardır, yani iki süre arasında kurulabilecek *tüm mütakabiliyetlerin toplamı*. Bu

toplam doğal sayılarla eşleştirilemez. Tekabül eden kardinal sayı f ile gösterilir. Yine, kuramda c ile f arasındaki asıl sayıların varlığını engelleyecek hiçbir şey yoktur, buna karşın f 'den küçük ama c 'den büyük güce sahip hiçbir küme keşfedilmemiştir.

f 'nin ötesindeyse daha da büyük kardinal sayılar vardır. Süreyden fonksiyonel "uzay" çıkarmamıza izin veren köşegen prosedürü, fonksiyonel uzaydan mütekabiliyetler kümesi ile eşleştirilemeyecek bir *süperfonksiyonel* çıkarmakta kullanılabilir. Bu şekilde daha da güçlü kümeler oluşturulabilir ve süreci *sonlandırmak mümkün değildir*.

Son sınırına kadar zorlanan Cantor kuramı, *son bir sonluötesi sayı* olmadığını ileri sürer. Bu sav garip bir biçimde diğerine benzer: *Son bir sonlu sayı yoktur*. Yine de ikincisi bir varsayım, temel *sonlu* aritmetik varsayımı olarak kabul edilirken, *sonsuz* aritmetiğindeki benzer ifade tüm kuramın mantıklı sonucu gibi görünür.

Son sonluötesi yoktur! Önerme yeterince masum görünse de, kendi içinde tüm kuramı neredeyse yerle bir eden bir patlayıcı taşıyordu – hem de ilk muhaliflerinin güçlü dirençlerini kırmış olan Cantor'un, ilkelerinin zafer kazandığını düşünmek için gayet iyi sebeplerinin olduğu bir dönemde. Zira neredeyse aynı zamanda keşfedilen bir dizi "fenomen" –görünüşte farklı olsa da– yanlış giden bir şeylere işaret ediyordu. İtalyan Burali-Forti, İngiliz Bertrand Russell, Alman König ve Fransız Richard kendi adlarını taşıyan çatışkılı ve paradoksları ortaya çıkarmıştı. Yine Cantor yöntemleri ve çıkarımlarının geçerliliği, matematikte fiili sonsuzun kullanımının meşruiyeti sorgulanıyordu.

Keşfedilen çelişkilerin doğalarına ilişkin ayrıntılara girmek beni konudan uzaklaştırır. Bu paradokslar heterojen olsa da hepsi bir soruya dayanıyormuş gibi görünüyor: *Tümü* kelimesi –şayet kullanımı şartsa– matematikte nasıl kullanılmalı? Bu sözcük zihnin tasavvur edilebilir *herhangi bir* eylemiyle bağlantılı olarak serbestçe kullanılabilirse, o zaman *tüm kümelerin kümesinden* bahsedebiliriz. Şimdi, eğer bu Cantorcu anlamda bir küme ise, bunda da bir kardinal sayı olmalıdır. Bu sonluötesi sayı "tasavvur edilebilen en büyük" sayıdır, zira tüm kümelerin kümesinden daha güçlü bir küme tasavvur edebilir miyiz? O halde, bu kardinal sayı *son sonluötesidir*, sayı adı-

nı verdiğimiz soyutlamanın evrimindeki gerçekten en son aşamadır! Ama son sonluötesi diye bir şey yoktur!

Bu paradoksal sorular ilk kez ortaya atıldığından beri köprüünün altından çok sular aktı; birçok çözüm önerildi, sorunun her iki yönü üzerine binlerce makale yazıldı, Cantorcular ve muhaliflerince çeşitli iğnelemeler yapıldı. Yine de soru hâlâ cevapsız duruyor. Cantor matematiği bir bütün halinde buldu; birbiriyle çekişen iki kampa bölünmüş bıraktı.

Bu muhalif matematik " taraflarının " " parti programlarını " eliminin altındaki basit yollarla sunmak, ayrıntılara girmeyeceğime söz verdiğim için imkânsız. Yine de modern matematiğin bu en hayati konusunu tamamen atlarsam kendi hedefimin gerisinde kalmış olurum. Bu nedenle muhalif kampların baş temsilcilerince dile getirilen ikilemi basitçe ve kısaca açıklayacağım.

"Biçimcilerin" tarafında Hilbert, Russell, Zermelo bulunmaktadır. Bunlar Cantor'u savunmakla birlikte, onun *asgari* programını koruma çabaları açısından "Menşevik"tirler.* "Tümü", "küme", "mütakabiliyet" ve "sayı" kelimelerinin serbestçe kullanımının kabul edilemez olduğu düşüncesindedirler. Ama çözüm küme kuramının tamamen reddedilmesinde değil, kuramın saf mantık çizgileri boyunca yeniden şekillendirilmesinde yatar. Kuramın temeli görevini görecektir bir grup belit tasarlamalı ve sezgilerimizin bizi tekrar yanlış yola sevk etmemesi için, söz konusu grubun mantıksal açıdan tutarlı ve tamamen *biçimsel* olan şematik bir çerçevesini, içeriksiz bir iskeletini oluşturmamızdır. Böylesine kapsamlı, tutarlı bir sistem oluşturduktan sonra, sonsuzun aritmetiğini bu temele dayandıracağız, huzurumuzu bir daha hiçbir paradoks veya çatışkının bozamayacağından emin. Hilbert'in deyişiyle: "Cantor'un bizim için yarattığı cennetten bizi kimse kovamayacak."

Kronecker ile başlayan ve Poincaré ile desteklenen, günümüzde Hollandalı Brouwer, Alman Weyl ve bir ölçüde Fransız Borel gibi bü-

* Menşevikler Rus Sosyal Demokrat İşçi Partisi'nin 1903 yılında yapılan İkinci Kongresinde Lenin ile Julius Martov arasında yaşanan fikir ayrılıkları sonucu partinin bölünmesiyle ortaya çıkan iki gruptan biridir. -Ç.n.

yük zihinlerce temsil edilen *sezgiciler*, küme tanımını başka bir öyküyle yapar. Hastalık Cantor'dan eskiye dayanır, köklüdür ve tüm matematik toplumunu etkilemiştir. Weyl'in deyişiyle:

Yeni bir tevazu öğrenmeliyiz. Göklerin tozunu attırdık, ama sadece sis üzerine sis, gerçekten üzerinde dikilmek isteyen hiç kimseye destek olmayacak bir pus inşa edebildik. Geçerli olan öylesine önemsiz görünüyor ki, analizin mümkün olup olmadığından bile şüpheye düşebilirsiniz.

Sezgicilere göre sorunlar küme kuramının sınırlarının ötesine uzanır. Bir kavramın matematik diyarına kabul edilmesi için "iyi tanımlanmış" olmasının yetmeyeceğini, *inşa edilebilir* olması gerektiğini savunurlar. Kavram sadece ismen var olmamalı, aynı zamanda kavramın temsil ettiği nesneyi belirlemek için gerçek bir yapı sunulmalıdır. İnşaya gelince, tek kabul edilebilenler sonlu süreçlerdir, veya sonlu sayıda kuralla sonluya indirgenebilen sonsuz süreçler (ki bu bile bir uzlaşımıdır). Sonsuz sayıda nesneyi hem tek tek tasavvur edip hem de bütüne bireysel bir nesne muamelesi yapmak, bu kabul edilebilir kavramlar kategorisine girmez ve aritmetikten baştan men edilmelidir. Ve bu sadece küme kuramının çürüğe çıkarılması anlamına gelmez; analiz, sonsuzun rasgele kullanımının kirlettiği tüm yabancı maddelerden arınana kadar irrasyonel sayı kavramı bile adamakıllı bir değişiklik geçirmelidir. "Zira," der Weyl, "matematik, içinde hareket ettiği mantıksal biçimlere kadar tamamen doğal sayı kavramına bağlıdır."

Analizin dayandığı temelin geçerliliğine ilişkin bu çatışma tüm hızıyla sürerken, yapının kendisi olağanüstü bir hızla yükselmeye devam ediyor. Her yıl, on dokuzuncu yüzyılda otuz-kırk yıl alacak ilerlemeler meydana geliyor. Her on yılda bir matematiksel analizin nüfuzuna gönüllü olarak boyun eğen yeni tümevarımsal bilgi alanları açılıyor. Analizin ilk fetihlerinden biri olan fiziğe gelince, görelilik kuramının pankozmosu farklı biçimlerden oluşan bir evrendir ve mikrokozmostaki süreksiz fenomenler, görünüşe göre diferansiyel denklemlere ilişkin bir kuramın uygulamasından başka bir şey olmayan dalga mekaniği yasalarına uyar gibi görünür.

Öte yandan imparatorluğun güvenli olmayan temeller üzerinde durduğunu ilan etmede sesi en yüksek çıkan insanların sergilediği il-

günç tavırları görüyoruz; bu kuruntulu duayenlerin zaman zaman kendi öğütlerini bir kenara atarak imparatorluğu genişletmeye, epey yayılmış olan savaş hattını giderek daha uzağa itelemeye yönelik hararetli çabaya katıldıklarını görüyoruz.

Mantık hükümdarlığı işte bunların elinde!

İnsanın mucizevi biçimde bir çift sülünle iki günün her ikisinin de iki sayısının örnekleri olduğunu tasavvur ettiği günden, insanın kendi soyutlama gücünü sayı cinsinden ifade etmeye teşebbüs ettiği günümüze kadar uzun, zahmetli bir yol katedildi ve birçok dönemeç ve virajla karşılaşıldı.

Bir çıkmaza mı geldik? Geri mi dönmemiz gerek? Yoksa geçmişte tanık olduğumuz gibi, mevcut kriz sadece sayının yeniden zaferle, daha da baş döndürücü soyutlama tepelerine tırmanmaya hazır bir şekilde çıkacağı o keskin virajlardan biri mi?

İki Gerçeklik

Bilinmeyenin kıyılarında garip bir ayak izi bulduk. Menşeyini izah etmek için birbiri ardına deren kuramlar geliştirdik. Nihayet ayak izini bırakan yaratığı tahayyül etmeyi başardık. Bak hele! Meğer iz bize aitmiş.

A. S. EDDINGTON

Anlatımın sonuna geldim. Amacım sayı biliminin mevcut durumunu geçmişinin ışığında araştırmaktı; bu nedenle böyle bir araştırmanın son bölümünde geleceğe bir göz atmak uygun olurdu. Ama gelecek kâhinlere aittir ve ben de onların bu haklarına saygı göstereceğim.

Geriye *hep var olan* kalıyor: gerçeklik meselesi. İnsan evrendeki yerini ilk kez bilinçli olarak tahmin etmeye yeltendiğinden beri bu sorun filozofun velayetinde olagelmıştır; bugün de filozofun başlıca meşgalesidir.

Dolayısıyla gerçekliği bu son bölüme tema olarak seçmekle, eğitimime yabancı, bakış açım yabancı bir alana el uzatmış olduğumun tamamen farkındayım. İtiraf etmeliyim ki bu eski ikileme ekle-yecek hiçbir şeyim yok; ne de Sokrates'in zamanından beri muhalif ekollerden filozofların bu sorun üzerine söylediklerini tekrarlamayı düşünüyorum.

Sadece sayı biliminin insanın genel bilgi birikimine ilişkin konumuyla ilgileniyorum. Sayı kavramının duyularımızın gerçekliği ile ilişkisini bu açıdan, bunun *yeni gerçekliği*, modern bilimin *ötegerçekliğini* yaratmada matematiğin oynadığı tarihi rolü aydınlatması umuduyla ele alacağım.

Gerçeklik sorunu karşısında filozofla matematikçinin tutumları arasında şu temel farklılık mevcuttur: Filozofa göre sorun son derece önemlidir; matematikçinin gerçekliğe duyduğu sevgiyse tamamen platoniktir.

Matematikçi yalnızca zihin eylemleriyle ilgilendiğini seve seve kabul eder. Sermayesini oluşturan dâhiyane yapıntıların kökenlerinin, kaba gerçeklikle özdeşleştirdiği duyu izlenimlerinden geldiğinin farkındadır elbette ve zaman zaman bu yapıntıların, içine doğdukları gerçekliğe oldukça iyi uyduğunu görmek onu şaşırtmaz. Ama matematikçi bu düzenliliği başarısının bir kıstası olarak kabul etmeyi reddeder: Yaratıcı hayal gücünden doğan varlıkların değeri, fiziksel gerçekliğe uygulanma kapasitelerine göre ölçülmeyecektir. Hayır! Matematiksel başarı matematiğe özgü standartlarla ölçülecektir. Duyularımızın ham gerçekliğinden bağımsız olan bu standartlar şunlardır: mantıksal çelişkilerden azade olma, oluşturulmuş biçimi idare eden yasaların genelliği, bu yeni biçimle öncülleri arasında var olan hısımlık.

Matematikçi, yaptığı giysileri giyecek yaratıklardan tamamen bihaber olan bir giysi tasarımcısına benzetilebilir. Kuşkusuz bu zanaatın çıkış nedeni böyle yaratıklar için giysiler gerekmesiydi, ama bu çok uzun zaman önceydi; bugün ara sıra giysinin adeta kendisi için yapılmışçasına uyduğu bir şekil ortaya çıkar. İşte o zaman büyük bir şaşkınlık ve sevinç yaşanır!

Bu tür birkaç keyifli sürpriz yaşanmıştır. Bir kâhinin sunağını iki katına genişletme problemini çözme çabası sırasında keşfedilmiş konik kesitler, sonunda gezegenlerin güneş etrafındaki dönüşleri sırasında izledikleri yörünge olmuştur. Cardan ve Bombelli tarafından icat edilen imajiner sayılar, garip bir biçimde, alternatif akımların özelliklerini tanımlar. Riemann'ın bir fantazisi olarak ortaya çıkan mutlak diferansiyel kalkülüs, görelilik kuramının matematiksel aracı olmuştur. Ve Cayley ile Sylvester'in zamanlarında tam bir soyutlama olan matrisler, öyle görünüyor ki atomun kuantum kuramının sergilediği egzotik duruma oldukça iyi uyartılmıştır.

Bu sürprizler keyifli olsa da, matematikçinin yaratıcı eserinin ardında yatan itici güç bunların keşfedilmesi değildir. Ona göre, matematik kişiliğini en iyi biçimde sergileyebileceği alandır. Matematik matematik içindir! "İnsanlar bu formül karşısında şok geçirdiler," di-

yor Poincaré, "ama yaşam sadece ıstırapsa, bu formül de 'Yaşam yaşam içindir' kadar iyidir."

Din, bilimlerin anasıdır. Çocuklar büyüdülerinde annelerinden ayrılmıştır; felsefe ise hanımefendiyi ihtiyarlığında rahat yaşatmak için evde kalmıştır. Uzun birliktelik kızı, anneden daha fazla etkilemiştir. Bugüne bugün, felsefenin başlıca sorunları teoloji kokar. Bana öyle geliyor ki, felsefenin en ihtiyaç duyduğu şey bir görelilik ilkesidir.

Görelilik ilkesi sadece bir kısıtlamalar yasasıdır: Bir disiplinin yöneleceği sınırları tanımlar ve belli bir olgular grubunun *gözlenenin* dışavurumu mu yoksa *gözlemcinin* sanrısı mı olduğunu anlamanın bir yolu olmadığını açıkça kabul eder.

Görelilik ilkesi bir teslimiyet eylemidir ve felsefî bir görelilik ilkesi şu eski ikilemin çözülmezliğinin açık kabulünü içerir: Evren kendi başına bir varlığa sahip mi, yoksa bu varlık yalnızca insanın zihninde mi? Biliminsanlarına göre, o veya bu hipotezin kabulü kesinlikle bir "olmak ya da olmamak" sorunu değildir; zira mantık açısından her iki hipotez de kabul edilebilirdir ve deneyim açısından hiçbirini kanıtlanamaz. O halde tercih daima yararlılık ve uygunluk meselesi olacaktır. Biliminsanı bu dünya *sanki* kendi düşünceleri veya eylemlerinden bağımsız yasalarca yönetilen bir mutlak bütünlüğüne hareket eder; ama ne zaman çarpıcı basitlikte, geniş bir evrensellikte veya kâinattaki mükemmel uyuma işaret eden bir yasa keşfetse, "Acaba zihnim bu keşifte ne rol oynadı? Sonsuzluk havuzunda gördüğüm güzel imge bu sonsuzluğun doğasını mı ortaya çıkarıyor, yoksa kendi zihnimin yansımasından başka bir şey değil mi?" diye düşünecek bilgelikte olacaktır.

Genel sayı kavramına atfetmemiz gereken gerçeklik derecesini saptama çabamıza, filozofun gerçekliğe ilişkin spekülasyonlarının neredeyse hiç faydası olmayacaktır. Başka yollar bulunmalıdır, orası kesin. Ama öncelikle terimlerdeki bazı belirsizlikleri ortadan kaldırmak istiyorum.

Matematikçinin kullandığı terimler nihayetinde birer sözcüktür ve insanın ilk zamanlardan beri matematiksel ve matematiksel olmayan düşüncelerini ifade etmekte kullandığı sınırlı kelime dağarcığına aittir. Bu terimlerin bazıları, örneğin geometri ve kalkülüs,

başlangıçtaki çifte anlamlarını yitirmiştir ve herkesçe matematik uygulamalarında kazandıkları özel anlamda anlaşılırlar. Buna karşın mantıklı ve mantıksız, rasyonel ve irrasyonel, sonlu ve sonsuz, reel ve imajiner gibi diğerleri, çoklu anlamlarını günümüze kadar korumuştur. Metafizik alanına nadiren giren matematikçiye göre, bu sözcükler oldukça özgül ve son derece kesin bir anlam içerir; bu terimleri sermaye gibi kullanan filozofa göre ise yine oldukça özgül ama tamamen farklı bir anlama sahiptirler. Ne filozof ne de matematikçi olan insana göre ise bu sözcükler genel ve nispeten muğlak bir anlam taşır.

Yine de ortada bir sorun yoktur, ta ki filozof matematiğin temel kavramları üzerine analizini halka sunma teşebbüsünde bulunana kadar. İşte o zaman sonsuzluk veya gerçeklik gibi kelimelerin farklı çağrışımları sokaktaki adamın kafasını tamamen karıştırır.

Bu özellikle *reel* ve *imajiner* kavramlarında geçerlidir. Bu talih-siz, yine de tarihsel olarak kaçınılmaz terimleri bir filozofa borçluyuz: Descartes. $a + \sqrt{-b}$ biçimine uygulanan *imajiner* terimi, bu sayılara hiçbir somut dayanak verilemediğinden o zamanlar meşru idi. Bu sayıların bir yorumu bulunur bulunmaz, *imajiner* teriminin yetersizliği anlaşılmıştır. Bu durum Gauss tarafından şöyle dile getirilmiştir:

Konunun böylesine hatalı bir bakış açısından ele alınmış ve böylesine gizemli bir karanlığa bürünmüş olması büyük ölçüde kullanılan yetersiz terminolojiye bağlıdır. $+1, -1, \sqrt{-1}$ pozitif, negatif ve imajiner (hatta bazen imkânsız) birimler olarak adlandırılacağına, diyelim, dolaysız, dolaylı ve yanal birimler olarak adlandırılısaydı, bu karanlığa pabuç bırakılmazdı.

Ama itirazlar çoğunlukla boşunaydı: İmajiner kelimesi derin kök salmıştı. Matematik terimlerinin istikrarı olağanüstüdür. Bu istikrar matematikçinin muhafazakârlığından veya herhangi bir belirsizlik olmadığı sürece sözcük seçimine yönelik kayıtsızlığından kaynaklanıyor olabilir. Öyle ya da böyle, sonuçta karmaşık terimi gönülsüzce imajiner teriminin yerine geçirilmiştir, ama her iki terim de hâlâ kullanımdadır ve *reel* kelimesinin daha yeterli bir sözcük ile değiştirilmesi teklif dahi edilmemiştir.

İmajiner teriminin bu anlamda kullanımı bazı uzmanlarca mistisizmin modern matematiğin içine işlediğinin kanıtı olarak yorumlanır. Matematikçilerin bu terimleri seçerken bu sayıların kurmaca ya-

pısını kendiliğinden kabul ettiklerini ileri sürerler. Bu şekilde tartışmak, sırf *kalkülüs* kelimesi çakıltaşı anlamına geliyor diye bir mine-raloğun sonsuz küçükler analizinin taşı yapısı hakkında konuşması kadar mantıklı olacaktır.

Karmaşık sayıda bir gerçekdışılık varsa, bu $\sqrt{-1}$ sembolünün adı veya kullanımında değildir: Karmaşık sayı tek bir birey olarak görülen bir çift reel sayıdır sadece ve kendisini oluşturan reel sayılardan daha fazla ya da daha az kurmaca olamaz. Dolayısıyla sayı kavramının gerçekliğinin eleştirisi reel sayıya yöneltilmelidir. Burada filozof, matematikte aradığı o mistisizme dair yeterince kanıt bulabilir.

Doğal sayı nosyonumuzu borçlu olduğumuz soyutlama ne kadar büyük olursa olsun, kavram sonlu derlemlerin katı "gerçekliğinde" doğmuştur. Bu sayıları bir bütün olarak görmeye başladığımız an *tümü* sözcüğünü tüm anlamlarıyla beraber konuya katmak zorunda kaldığımız doğrudur. Yine de rasyonel aritmetikte kullanılan sonsuzluk kavramı, *her* bir sayının bir ardılı olduğu iddiası ile sınırlanmıştır. Sayma sürecinin sınırsız yapısına sadece, tamsayı işlemlerindeki kuralları mutlak genelliklerine kavuşturmak için başvurulmuştur: Sonsuz sadece *potansiyel* bir şey olarak kullanılmıştır, asla *fili* bir şey olarak değil.

Rasyonel sayı sadece bir çift tamsayıdır ve bu nedenle tamsayı kadar gerçekliğe sahiptir. O zaman Kronecker'in istediği gibi sonsuz süreçleri ve dolayısıyla irrasyonelleri matematiğe hiç katmasaydık, karmaşık sayı sadece bir çift rasyonel sayı olacaktı ve rasyonele atfettiğimiz gerçekliğin veya gerçekdışılığın aynısı karmaşığın bünyesinde de var olacaktı. Ama herhangi bir cebir denkleminin çözülebilir olduğu bir alan arayışında sonsuz süreci meşrulaştırmaya mecbur kaldık ve bunun sonucu da reel sayı adını verdiğimiz şey oldu. Kendimizi artık sonsuzluğu mecazi anlamda veya bir sayı ne kadar büyük olursa olsun ondan daha büyük bir sayı olduğu ifadesinin kısa yolu olarak kullanmakla kısıtlamıyoruz: *Oluş ediminde* sonsuz, tüm sayıları üreten ilkedir; her sayı artık sonsuz sürecin en son adımı olarak kabul edilir; sonsuzluk kavramı genelleştirilmiş sayı kavramımızın kumaşına dokunmuştur.

Doğal sayılar bölgesi, *bir ekleme işleminin* sonsuza kadar *tekrarlanabileceği* varsayımına dayanır ve *bu sürecin en son aşamasının*

asla sayı olarak kabul edilmeyeceği açıkça belirtilmiştir. Reel sayılara genelleştirilme sadece sonsuz tekrarın geçerliliğini herhangi bir rasyonel işlemi kapsayacak şekilde genişletmekle kalmamış, bu süreçlerin kısıtlamasını fiilen kaldırarak limitlerini *hakiki* sayılar olarak kabul etmiştir.

Ve sözcüklerin ironisine bakın ki, *reel* denilen sayılar doğal sayılara atfettiğimiz bu *reelliğin* bir kısmının feda edilmesi pahasına elde edilmiştir.

Aritmetiğimize bu mutlak genelliği katan, onu geometrik ve mekanik sezgimizin aracı yapan, fizik ve kimya fenomenlerini geometri ve mekanik bilimi yoluyla sayı ile ifade etmemizi sağlayan bu sonsuz süreçler ne kadar gerçektir? Eğer gerçeklik duyularımızın doğrudan deneyimi ile kısıtlanacaksa, düşünen hiçbir insan, ister matematikçi, isterse filozof veya sokaktaki adam olsun, kavrama gerçeklik atfetmeyecektir.

Buna karşın, sonsuzun geçerliliğinin, ampirik bilimlerin ilerlemesinin kaçınılmaz sonucu olduğuna ilişkin yaygın bir görüş mevcuttur. David Hilbert buna Weierstrass'ın anısına yaptığı meşhur konuşmasında gayet etkileyici bir cevap vermişken, bu görüşü kendi sözcüklerimle çürütmeye kalkmak ne haddime:

Sonsuz! Başka hiçbir mesele insan ruhunu böyle derinlemesine etkilememiştir; başka hiçbir fikir insan zekâsını böylesine verimli bir biçimde canlandırmamıştır; yine de başka hiçbir kavram sonsuzdan daha fazla açıklığa kavuşturulma ihtiyacı içinde değildir. ...

Sonsuzun özü nedir sorusuna dönersek, öncelikle sonsuzun gerçeklik açısından ne anlama geldiğini kendimize açıklamalıyız. Öyleyse fiziğin bize bu konuda ne öğrettiğine bakalım.

Doğa ve maddeye dair ilk naif izlenim sürekliliğe aittir. İster bir metal parçası, ister sıvı hacmi olsun, her şeyin sonsuz parçaya bölünebileceği ve parçalarından herhangi birinin –ne kadarküçük olursa olsun– bütününe özelliklerine sahip olacağı inancından kaçamayız. Ama maddenin fiziğine dair araştırmaların yeterince ileri götürüldüğü her yerde, her zaman bir bölünebilirlik sınırı ile karşılaştık ve bu durum deneysel incelik eksikliğinden kaynaklanmıyordu, fenomenin yapısının ta kendisinden kaynaklanıyordu. Sonsuzdan bu kurtuluş gerçekten de modern bilimin bir eğilimi olarak kabul edilebilir ve eski "Doğasıçırma yapmaz" deyişinin yerine tam tersi koyulabilir: Doğa sıçrama yapar...

Maddenin atom adında küçük partiküllerden oluştuğu ve makrokozmetik fenomenlerin bu atomlar arasındaki kombinasyon ve etkileşimlerin dışavuru-

rumlarından başka bir şey olmadığı biliniyor. Ama fizik burada durmamıştır: Geçen yüzyılın sonunda daha da garip bir davranış sergileyen bir atomik elektrik keşfetmiştir. O zamana kadar elektriğin sıvı olduğu ve hiç kırpışmayan bir göz gibi hareket ettiği düşünülüyorken, bu keşifle birlikte elektriğin de pozitif ve negatif *elektronlardan* oluştuğu açıklığa kavuşmuştur.

Fizikte madde ve elektrik dışında korunum yasasının geçerli olduğu başka bir gerçeklik daha vardır: enerji. Ama enerjinin bile, basit ve sınırsız bölünebilirliği kabul etmediği anlaşılmıştır. Planck *enerji kuantumlarını* keşfetmiştir.

Ve son karar şudur ki, gerçekliğin hiçbir yerinde sınırsız bölünebilirliğin mümkün olduğu, sonsuz küçüğün gerçekleşebileceği homojen bir sürey yoktur. Süreyin sonsuz parçaya bölünmesi sadece düşüncede var olan bir işlemdir, sadece bir fikir, doğa gözlemlerimizin yanı sıra fizik ve kimya deneyleriyle de çürütülen bir fikirdir.

Doğada sonsuz problemiyle karşılaştığımız ikinci durum, evreni bir bütün olarak ele almamızdır. O halde bu evrenin yayılımını inceleyerek sonsuz büyük olup olmadığını anlayalım. Evrenin sonsuz olduğu görüşü uzun süre baskın fikir olmuştur. Kant'a kadar ve hatta daha sonrasında, çok az kişi evrenin sonsuzluğuna ilişkin şüphelerini dile getirmiştir.

Burada da modern bilim, özellikle astronomi, sorunu tekrar ortaya atmış ve buna yetersiz metafiziksel spekülasyonlarla değil, deneyime ve doğa yasalarının uygulanışına dayanarak karar vermeye çalışmıştır. Evrenin sonsuzluğuna karşı ağır itirazlar yükselmiştir. Sonsuz uzayı bir zorunluluk kılan Öklit geometrisidir. ... Einstein, Öklit geometrisinden uzaklaşılması gerektiğini göstermiştir. Bu kozmolojik meseleyi kendi kütleçekimi kuramı açısından ele alarak sonlu bir evrenin mümkün olduğunu kanıtlamıştır ve astronomların keşfettiği tüm sonuçlar bu eliptik evren hipotezi ile uyumludur.

O halde fiziki dünyaya ilişkin bilgimizi ne kadar ilerletirsek, veya diğer bir deyişle algısal dünyayı bilimsel aletlerle ne kadar genişletirsek, sonsuzluk kavramımızın bu fiziki dünya ile hem fiilen hem de ilkesel olarak uyumsuz olduğunu o kadar iyi görürüz.

Öyleyse, sonsuzluk fikri mantıksal bir zorunluluk olmadığına ve deneyim tarafından onaylanmak bir tarafa, düpedüz yanlış ilan edildiğine göre, sonsuzun matematiğe uygulanması *gerçeklik adına reddedilmeli* gibi görünüyor. Bu tür bir reddediş matematiği dördüncü bölümde ele aldığım sınırlı aritmetik ve sınırlı geometriye geriletecektir. "Geçerli olan öylesine önemsiz görünüyor ki, analizin mümkün olup olmadığından bile şüpheye düşebilirsiniz." Son üç yüzyılda matematikçilerce dikilen mağrur yapı yerle bir olacaktır; güçleri-

ni sonsuzun kullanımından alan ilke ve yöntemler çöpe atılacaktır; limit, fonksiyon ve sayı kavramlarını problemlerinin formülasyon ve analizine güvenle uygulayan fizik bilimleri yeni bir sayfa açacaktır: Temellerini yeniden inşa ederek, reddedilmiş araçların yerine yeni araçlar tasarlayacaklardır.

Bunların hepsi gerçeklik adına!

Bu zorlayıcı bir program şüphesiz. Ama bu revizyon gerçekleşikten sonra, bu arındırıcı sürecin tamamlanmasıyla matematikten geriye kalan azıcık şey de gerçeklikle mükemmel uyum içinde olacaktır.

Olacak mıdır? Asıl soru bu – ve bu soru bir başkası ile aynı anlama geliyor: "Gerçeklik nedir?" Bu ikinci soruyu sorarken kılı kırk yaran tanımlarla veya ilgisiz konular hakkında gevezelik etmekle ilgilenmiyoruz; sadece, şu andan itibaren neyin geçerli neyin geçersiz olduğu konusunda kıstas teşkil etmesi gereken bu gerçekliğe atfedeceğimiz kapsamla ilgileniyoruz.

Doğal olarak gerçeklik konusunun uzmanlarına dönüyoruz. Her biri bize kendi gerçeklik tarzını sunuyor, ama *asıl* gerçeklik diye bir şey yok gibi görünüyor. Fransızların güzel bir ifadeyle "utandıran bir seçenek bolluğu" olarak tanımladığı bir konumdayız.

Bu tarzların özellikle ikisi ilgi çekicidir: Öznel gerçeklik ve nesnel gerçeklik. Öznel gerçeklik bir bireyin tüm duyu izlenimlerinin toplamı olarak tanımlanabilir. Nesnel gerçekliğe gelince, tanım her felsefe ekolünde değişir, zira bilincimizin dışında bir dünyanın var olup olmadığı ikilemi tam burada zirveye ulaşır. Poincaré'nin şu tanımını tüm gereksiz metafizik öğelerden sıyrılmış ve felsefi jargonlardan arınmıştır: "Nesnel gerçeklik dediğimiz şey, son analizde, çoğu düşünen varlık için ortak olan ve herkes için ortak olabilecek şeydir." Muğlaklığına, "herkes için ortak olabilecek" ifadesinin bariz zayıflığına karşın, görünüşe göre hepimizde var olan bu sezgisel gerçeklik fikrine en yakın tanım budur.

Gerçekliğin geçerli bir kapsamını belirlemedeki güçlük tam da hiçbir bireyin kişisel duyu izlenimlerinin toplamı olan bu öznel gerçekliği, şimdi veya geçmişte diğer bireylerle temaslarından edindiği nesnel gerçeklikten başarıyla ayıramayacağı olgusunda yatar. İlkel halkların psikolojisi üzerinde yapılan çalışmalar bu soruyu büyük

ölçüde aydınlatılabilir, ama burada da çevre izini bırakmıştır. Bu öznel gerçekliği kavramaya en yakın olduğumuz hal bir bebeğin psikolojisi ve bebeklik izlenimlerimizi başarıyla yeniden oluşturamayacağımız için de, yetişkinlerin bebekler üzerinde yaptığı, daima önyargılı nosyonlarla lekelenmiş çalışmalara bel bağlamak durumundayız.

Ama bir bireyin öznel gerçekliğinin, Helmholtz veya Mach eko-lündeki fizyolog ve psikologların görme, duyma, dokunma vs. algılarına bağlı olarak elde ettiği verilerle tanımlanabileceğini varsayalım. Bu gerçekliğin kapsamı geçerlilik kıstası olarak alınırsa, kaçınılmaz karar, matematiğin sonsuzdan arındırılması sonrasında artık olarak kalan zayıf aritmetiğin bile daha fazla kesilip biçilmesi gerektiği olacaktır; *zira sayma süreci bu gerçekliğin bir parçası değildir.*

Sayma süreci farklı bir gerçeklik, Poincaré'nin kullandığı anlamda yorumlanan nesnel bir gerçeklik varsayar. Sayma, insanların aynı konudaki çeşitli algıları sınıflandırabilme ve sınıfa bir isim verebilme yeteneğini varsayar; iki derlemi öge öge eşleştirebilme ve bu derlemleri belli bir çoğulluğun modeli olan bir sayı-sözcük ile ilişkilendirme yeteneğini varsayar; bu modelleri bir dizi halinde dizme ve bu sayı-sözcüklerin sonsuza uzanmasını sağlayacak bir sözdizimi geliştirme yeteneğini varsayar. Kısaca, sayma süreci bir *dilin*, herhangi bir bireyin öznel gerçekliğini veya doğrudan algılarını aşan bir kurumun varlığını kabul eder.

O halde, eğer bu öznel gerçeklik matematikte bir geçerlilik kıstası kabul edilecekse, sadece sonsuz süreci ve tüm ima ettiklerini reddetmekle kalmamalı, sayma prosedürünü de bir tarafa atmalıyız. Bazı kuş ve böceklerde görülen ilkel duyu sayının tek geçerli alanı olacaktır; böylece dilimiz ve aritmetikle beraber, insanlığın bu iki kurumu üzerinde yükselen medeniyetin o girift yapısının tümünü de bir kenara atmamız gerekecektir.

Bilincimizin dışında var olan mutlak ve değişmez dünyayı sadece teolojik spekülasyonlardan biliyoruz: Onu kabul veya reddetmek bir doğa felsefesi açısından aynı derecede faydasızdır. Ama duyularımızın ham gerçekliğini *baş gerçeklik*, tek gerçeklik olarak kabul etmek de aynı şekilde faydasız ve verimsizdir. Sistemli bir anlatım için, yeni doğmuş bir bebeği, ilkel insanı veya hayvanı böyle bir baş

gerçekliğin tecessümü olarak ele almak uygundur elbette. Hatta daha da ileri giderek Helmholtz, Mach ve Poincaré'nin yaptığı gibi, biri –diyelim görme– hariç tüm duyularından sıyrılmış zeki bir varlık hayal edebilir ve böyle bir varlığın inşa edeceği evren türü üzerinde tahminler yürütebiliriz. Duyularımızı bileşenlerine ayırma ve sonra kavramı bu *baş duyuların* bir sentezi olarak kabul etme gücümüzü serbest bırakan bu tür spekülasyonlar son derece ilginçtir. Ama bu tür bir sentezi gerçeklik, *asıl* gerçeklik kabul etmek, benim düşünceme göre ölümcül bir kusur içerir: Bireysel bir zekânın varlığını kabul eder; oysa bu duyuları koordine etme sürecinin bizzat kendisi düşünceyi içerir ki, bu da dil olmaksızın imkânsızdır; dil ise organize bir izlenim alışverişi anlamına gelir ki, bu da insanların kolektif bir varoluşa, bir tür toplumsal örgütlenmeye sahip olduğunu varsayar.

Geçerlilik kıstası olarak alınabilecek tek gerçeklik, bilincimizin dışında var olan ve dolayısıyla saf metafizik olan bu mutlak, değişmez gerçeklik veya fizyologla psikoloğun titiz deneylerle soyutlamayı başardığı baş gerçeklik değildir; daha ziyade, çoğu kişi için ortak olan ve herkes için ortak olabilecek o nesnel gerçekliktir. Ve bu gerçeklik donmuş görüntülerin bir derlemi değil, canlı, büyüyen bir organizmadır.

Ama matematiksel kavramların gerçekliğine dair bir kıstas bulmak üzere bu nesnel dünyaya döndüğümüzde yeni bir güçlkle karşılaşırız. Çoğu kişi için ortak olan bu şeyler, bireyin diğer düşünen varlıklarca paylaşılan doğrudan izlenimleriyle sınırlı olabilir; ama aynı zamanda insanlığın bilimsel cihazlarla elde ettiği tüm verileri de içerebilir, zira bu olgular da çoğu kişi için ortaktır ve muhtemelen herkes için ortak olabilir. Sınırları genişleyen bu dünya herhangi bir niteliksel ifadenin gerçekliğini değerlendirmek açısından geçerli bir kıstas olabilir, ama bunu sayı için kıstas olarak kullanmaya kalktığımız anda, bilimsel cihazlarımız yine sayı üzerinde yükselen sabit matematik ilkelerine göre tasarlandığı, inşa edildiği ve kullanıldığı için bu nesnel dünyanın da sayıyı varsaydığı olgusuyla karşılaşırız.

Gerçekten de, ister cetvel ister ağırlık terazisi, basınçölçer veya termometre, pusula veya voltmetre kullanalım, daima bize *süreyi* gi-

bi gelen bir şeyi ölçeriz ve bunu dereceli şekilde bölünmüş bir *sayı ölçeği* ile yaparız. Ardından, bu süre içindeki olası durumlarla elimizin altındaki sayı kümesi arasında mükemmel bir mütakabiliyet olduğunu varsayarız; örtülü olarak, bu süre içinde Dedekind-Cantor belitinin doğrudan oynadığı rolü oynayan bir belitin varlığını kabul ederiz. Dolayısıyla, bize ne kadar basit ve doğal gelirse gelsin, herhangi bir ölçüm cihazı tüm reel sayı aritmetiği aygıtını ima eder: Her bilimsel cihazın arkasında ana cihaz aritmetik vardır, o olmadan o özel cihaz kullanılamaz, hatta hayal bile edilemez.

İşte güçlük buradadır: Reel sayının gerçekliğine bilimsel cihazlarla edinilmiş tüm verileri içeren nesnel dünya ile karar verecek olsaydık, *bu cihazlar zaten reel sayının gerçekliğini kabul ettiği için* kısırdöngüye girmiş olurduk.

Diğerlerince paylaşılan doğrudan izlenimlerimizin daha kısıtlı nesnel dünyasına kendimizi kapatsak da kısırdöngüden kurtulamayız. Tüm ölçüm cihazlarını yasaklayalım, kamuoyunu tek gerçeklik kıstası ilan edelim. O zaman geçerli bir hükme nasıl varabiliriz? Senin kırmızı gördüğünü ben yeşil gördüğüm için beni renk körü ilan ettiğinde, *çoğunluk kararına* başvurmayacaksan savının gerçekliğini nasıl kanıtlayacaksın? *Yine* burada her ikimiz de *kararı sayıya bırakmayı* kabul etmiş oluyoruz.

Rakamlaryalansöylemez, çünkü söyleyemez. Yalan söyleyemezler, çünkü önsel olarak hatasız oldukları ilan edilmiştir. Sayıyı değer yargıları için tek hakem olarak seçtikten, kararlarına uymayı kabul ettikten sonra, başka bir mahkemeye başvurma hakkımızdan *fiilen* feragat etmiş olduk.

Sonuç nedir?

Toplumsal çevresi olmayan, dilden yoksun, izlenimlerini akranlarıyla paylaşma şansından yoksun bir birey, sayı bilimini inşa edemezdi. Algısal dünyasında aritmetiğin bir gerçekliği, anlamı olmazdı.

Diğer taraftan, düşünen bir varlığın nesnel dünyası akranlarının çoğunluğu tarafından paylaşılan izlenimlerden meydana gelir. Ona göre, "Sayıya hangi gerçekliği atfetmeliyiz?" sorusu anlamsızdır, zira uzay veya zaman olmadan gerçeklik olmayacağı gibi sayı olmadan da gerçeklik yoktur.

Böylece sayı kavramının gerçekliği için ne öznel ne de nesnel dünyada bir kıstas bulabiliriz; zira birincisinde böyle bir kavram yoktur, ikincisindeyse bu kavramdan muaf hiçbir şey yoktur.

O halde bir kıstasa nasıl ulaşacağız? Kanıtla değil, zira kanıt zarları hileli. Mantıkla da değil, zira mantık matematikten bağımsız bir varlığa sahip değildir; matematik adını verdiğimiz bu çok-evreli zorunluluğun bir evresidir sadece. O halde matematiksel kavramlar hakkında nasıl bir hükme varılacak? *Hükme tabi olmayacaklar!* Matematik en yüksek hâkimdir; onun kararlarının temyizi yoktur.

Oyunun kurallarını değiştiremeyiz, oyunun adil olup olmadığını kestiremeyiz. Sadece oyunu oynayan oyuncuyu inceleyebiliriz; ama oyundan ayrı bir seyirci gibi de değil, çünkü kendi zihinlerimizin oyununu izliyoruz.

Kendi hissettiklerimi hatırlıyorum da... Karmaşık sayıların gizemi-ne daha yeni vâkıf olmuştum. Nasıl şaşırdığımı hatırlıyorum: Karşımda açıkça imkânsız olan ama somut sonuçlar veren işlemlere tabi tutulabilen sayılar vardı. Bir tatminsizlik, bir huzursuzluk, bu hayali yaratıkların, bu boş sembollerin içini doldurma arzusuymdu duyduğum. Daha sonra bana bu varlıkları geometrik olarak, somut bir şekilde nasıl yorumlayacağım öğretildi. O anda adeta bir bulmacayı çözmüşçesine, beni korkutan bir hayaletin aslında hayalet değil de içinde bulunduğum ortamın tanıdık bir parçası olduğu ortaya çıkmışçasına bir rahatlama hissettim.

O zamandan beri duygularımın daha birçok insan tarafından paylaşıldığını anlama fırsatlarım oldu. Bu ferahlık hissi neden? Bu semboller için somut bir model bulduk; bunları aşına bir şeye, gerçek veya en azından gerçek gibi görünen bir şeye bağlayabileceğimizi öğrendik. Ama neden düzlemdeki bir noktayı veya daha ziyade söz konusu noktanın iki mutlak referans ekseninden uzaklığını ölçen kesitleri, neden bunları $a + ib$ sayısından daha gerçek kabul edelim? Bir düzlemin, doğrunun, noktanın ardında hangi gerçeklik yatıyor? Daha bir-iki yıl önce bunlar da benim için birer hayaletti. Her yönde sonsuza dek uzanan düzlem: Buna en yakın kestirimim bir A4 kâğıdı veya pütür ve çiziklerle dolu dalgalı bir karatahtaydı. Kalınlıktan yoksun doğru; bu tür iki doğrunun kesişim noktası, hiçbir modele uymayan boyutsuz bir şey, salt yanılsama; ve nihayet söz konusu nok-

tanın, ölçümün tüm belirsizliklerini, tüm hatalarını kapsayan koordinatları... Bana ferahlık veren somut gerçeklik bunlar mıydı?

Bir hayaleti, hayalete göre daha *tanıdık bir kurgu* olma avantajına sahip bir kurguya bağladık. Ama o da her zaman tanıdık değildi; onun da şaşkınlık ve huzursuzluğa neden olduğu zamanlar olmuştur, ta ki biz onu, yüzyılların alışkanlığı ile somutlaştırılmış daha da ilkel bir yanılısamayla ilişkilendirene kadar.

Günümüzün gerçekliği daha dün yalnızca bir yanılısamaydı. Bu yanılısama, deneyimlerimizi düzenleyip sistemleştirmeye ve yönlendirmeye yardımcı olarak insanlığın yaşamında faydalı olduğu için hayatta kalmıştır. Ben Nietzsche'nin şu sözlerini böyle yorumluyorum:

Yalnızca yanlış olmasını hükmün reddine gerekçe olarak görmüyoruz. Mesele şudur: Söz konusu düşünce insanlığın yaşamını ne ölçüde koruyup geliştirmiştir? En yanlış düşünceler –ki bunlara sentetik hükümlerimiz de önsel olarak dahildir– aynı zamanda en vazgeçilmez olanlardır. Mantıksal kurguları olmaksızın, mutlak ve değişmeyen kurmaca bir dünyadaki gerçekliği ölçmeden, sayı ile evrenin sahtesini sürekli yaratmadan, insan yaşamını sürdüremezdi. Bütün yanlış hükümlerin topyekûn reddi, yaşamın reddi, inkârı anlamına gelirdi.

Bir matematik kavramının geçerliliğini saptayacak olan, doğrudan kanıtlar veya mantık yasaları değildir. Mesele şudur: Kavram insanın düşünsel yaşamını ne kadar koruyup geliştiriyor? Kuruntulu duayenlerin ürkütücü bildirgeleri bu yüzden beni ürkütmüyor. Herhangi bir yanılısamanın geçerlilik kıstasları *post factum* ve bazen *post mortem** bir karardır. İnsanlığın yaşamını koruyup geliştirenler serpilip büyüyor ve böylece gerçek olmaya hak kazanıyorlar; zararlı veya yararsız olanlar er geç metafizik ve teoloji kitaplarında yerlerini buluyor ve orada kalıyorlar. Yani onlar da boş yere ölmüyor.

Deneysel kanıtlar ile mantıksal zorunluluk, gerçeklik dediğimiz nesnel dünyayı tüketmiyor. Gözlemle deneyi yönlendiren ve evrelerinden biri mantık olan matematiksel bir zorunluluk mevcuttur. Diğer evreyse bir türlü tanımlanamayan ve sezgi adı verilen o soyut, muğ-

* *Lat. post factum*: Olaydan veya fiilden sonra. *Post mortem*: Ölümünden sonra. İş sonuçlandıktan/sonuçları görüldükten sonra anlamında. –ç.n.

lak şeydir. Şimdi sayı biliminin temel meselesine dönelim: sonsuz. Sonsuzluk kavramı deneysel veya mantıksal bir zorunluluk değildir; *matematiksel bir zorunluluktur. İmkân dahilinde olan bir eylemin sonsuz kez tekrarını* tasavvur edebileceğini bilen zihin gücünün bu teyidi *salt kurgu olabilir, ama işimize gelen ve bu nedenle gerekli bir kurgudur*. Bizi her vakada bu vakaya ilişkin ileri sürdüğümüz şeyin imkân dahilinde olup olmadığını inceleme yükünden kurtarır. İfademize, onsuz bilimin söz konusu olamayacağı o genellik görüntüsünü verir ve her şeyden öte, dünyanın *zamanla beraber aktığına* dair o kaçınılmaz fikirle, *ayrık olanın sayımından* doğan sayı kavramı arasındaki uçurumu aşan bir köprü oluşturur.

Ama sonsuz, Mutlak Arayışı'nın insanı götürdüğü sayısız tali yoldan sadece biridir. Daha birçokları mevcuttur: basitlik, yeknesaklık, homojenlik, düzenlilik, nedensellik bu matematiksel sezginin diğer dışavurumlarıdır. Zira zihni mutlağın serabının peşinden gitmeye teşvik eden ve dolayısıyla insanlığın düşünsel mirasını zenginleştiren matematiksel sezgidir; ama serabın peşinden daha uzaklara gidilmesi bu mirası tehlikeye atacağı zaman zihnin uçuşunu durduran ve kurnazca, "Avlanan ne kadar da avcıyı andırıyor!" diye fısıldayan da yine bu matematiksel sezgidir.

Peki bu yaratıcı sezginin kaynağı nedir? İnsan deneyimini düzenleyip yönlendiren ve onu Kaos'un dehşetinden koruyan bu zorunluluk nedir? Buz gibi, yerinden oynamaz ve çorak mantık kayalarını yükselemlen bu dürtü nereden geliyor?

Dalgalar sonsuz fısıltılarını fısıldıyor,
Rüzgar esiyor, bulutlar ilerliyor,
Yıldızlar ilgisiz ve soğuk, göz kırpmıyor,
Ve bir aptal cevap bekliyor.

Ya bilge kişi? Bilge kişi, yaşamda yarının gerçeklikleri olmaya aday bugünün kurgularını tasarlama işine kaldığı yerden devam eder ve arkalarında düşüncenin kökeninin kaybolup gittiği uzak doruklara son bir bakış atarken Usta'nın sözlerini tekrarlar:

KAYNAĞI BELİRSİZ OLSA DA,
NEHİR AKMAYA DEVAM EDİYOR.

Ekler

EK A

Sayıların Kaydediliş Üzerine

Zira cahillerin akla dayanmayan görüşünün aksine, numaralandırma sistemi tercihi sırf bir uzlaşım meselesidir.

PASCAL

Hayvanın ve İnsanın Sayı Duyusu Üzerine

Bir derlemdeki nesnelerin sayısının değiştiğini, nesneleri fiilen saymadan nasıl fark edebiliriz? *Sayı Duyusu* dediğimiz bu sezgi nasıl bir şeydir? Bu eserin daha eski baskılarının okurlarından pek çoğu bu soruyu cevaplamaya çalışmıştır. Kuramlarını desteklemek için ileri sürdükleri argümanların geçerliliğine karar verebilecek bilgiye sahip görmüyorum kendimi, ama yaratıcı hayal güçlerine kısıtlamalar da getirmek istemiyorum, dolayısıyla sunulan cevaplar arasından daha ikna edici olanlardan bazılarını burada yer vereceğim.

Bir derlemin *heterojenliği* tahmine yardımcı olabilir. Diyelim ki bir odaya girdiğinizde normalden daha az insan olduğunu fark ettiniz, çünkü tanıdık bir yüz eksik: Tahmininizin başarısını o grubun üyelerinin birbirinin tıpatıp aynısı olmamalarına, her birinin ayırt edici özelliklere sahip bir birey olmasına borçlusunuz demektir. Belki de 1. Bölüm'deki karga da kuleye giren herkesin dışarı çıkmadığını benzer bir şekilde fark ediyordu.

Belli bir engeli aşma çabasından kaynaklanan *yorgunluk* da değerlendirmede kolaylık sağlayabilir. Örneğin çıktığınız katları saymadan bir merdivenden çıkarsanız, uzuvlarınız size beş kat mı yoksa altı kat mı çıktığınızı söyleyebilir. Soliter eşekarısının sayma becerisi de bu yoldan açıklanabilir.

Çoğu kez *kalıp algılaşmanın* da ciddi yardımı dokunur. Bir bakışta bir masanın alışıldığı gibi dört kişilik değil de daha fazla kişi için hazırlanmış olduğunu anlarsanız, size bu bilgiyi ileten değişmiş olan kalıptır. Ya da bir masadaki bir sıra bezelyeyi ele alalım: Birbirlerine yeterince yakın ve "tek sıra halinde" dizilmiş olsalar bezelyelerin beş tane mi altı tane mi olduğunu söyleyemeyebilirsiniz; dağılım düzensiz olsa tahmininizin doğru olma ihtimali artardı, ki bezelyeler bir çokgenin köşeleri olarak dizilmiş olsa kararınızdan daha da emin olurdunuz. Yuvası soyulmuş bir kuşun içgüdüleri böyle bir ilkeye bağlı olabilir.

Kserkses Ordusunu Nasıl Saydı

Doriscus bölgesi Trakya'da, denize nazır geniş bir ovadır ve içinden Hebrus (Meriç) adı verilen büyük bir ırmak akar; burada Doriscus adlı kraliyet kalesi inşa edilmişti ve Dareios İskit seferinden sonra buraya Pers muhafızlar atamıştı. Dolayısıyla burası Kserkses'e ordusunu dizmek ve saymak için uygun bir yer gibi gelmişti ve o da bunu yaptı. Doriscus'a varmış olan tüm donanma onun emri üzerine yakındaki bir kumsala geldi ... ve mola verdi. ... O sırada Kserkses ordusunu saydı. ...

Her kısmına dair sayıları kesin olarak veremiyorum, çünkü bize bu bilgiyi veren olmadı; ama tüm kara ordusunun sayımı ordunun bir milyon yedi yüz bin adamdan oluştuğunu gösterdi. Sayma şöyle yapılmıştı: Bir mirad (on bin) adam bir yerde toplandı ve mümkün olduğunca sıkı bir şekilde durduklarında etraflarına bir çizgi çekildi; bu yapıldıktan sonra o grup gönderilip o çizgi üzerine insanın göbeğine dek gelen bir taş duvar örüldü; bu bitince o duvarla çevrili alana başkaları getirildi ve böylece hepsi sayıldı. (Herodotos: *Tarih*, Kitap VII.)

Büyük Sayıların Yazımı

"Dolayısıyla sabit yıldızlarca çevrelenen ve çapı Aristarkhos tarafından tahminen hesaplanmış olan ile aynı büyüklükte bir küredeki kum tanelerinin sayısının, bin mirad kere sekizinci sınıf birimden az olduğu açıktır." Arşimet "Kumsayıcı" adlı kitapçığını böyle sonlandırıyor.

Sekizinci sınıf birim ile ne demek istiyordu? Yunancada *mirad* on bin sayısını ifade ediyordu; Arşimet bu $M = 10^4$ sayısını *birinci sı-*

nıf birim olarak belirlemiştı. Bundan sonra *oktad*, yani mirad mirad gelirdi, ki Arşimet bunu *ikinci sınıf birim* olarak tanımlamıştı. Oktadı Ω ile ifade edelim: O zaman $\Omega = M^2 = 10^8$. Buradan $M^3 = 10^{12}$ 'nin *üçüncü sınıf birim* olduğu sonucunu çıkarırız; ancak, durum böyle değildi. Arşimet'in düzeninin *tabanı oktad* $\Omega = 10^8$ idi. Dolayısıyla, *n. sınıf birim* denildiğinde bu Ω^{n-1} olarak anlaşılmalıdır. Arşimet tarafından hesaplanan "evrendeki tanelerin sayısı" ise,

$$10^3 \times 10^4 \times (10^8)^7 = 10^{63} \text{ idi.}$$

Modern ifadeyle bu hesap şöyle okunabilir: Tanelerin sayısı ... 10^{63} *büyükölğündedir*.

Arşimet'in hesabını "bilinen" en büyük asalla karşılaştırmak aydınlatıcı olacaktır. *On yedinci Mersenne sayısı* olarak bilinen bu sayı kısa süre önce Los Angeles'taki Sayısal Analiz Enstitüsü'nce hesaplanmıştır:

$$(1) \quad M = 2^{2281} - 1$$

Bu tamsayı 10^{687} *büyükölğündedir* ve,

$$687 = 85 \times 8 + 7 \text{ olduğundan,}$$

Arşimet bunu *bin mirad kere seksen altıncı sınıf birim* olarak tarif ederdi.

Konum İlkesi Üzerine

Pek çoğumuz saymayı oldukça erken bir yaşta öğrenmişizdir, ama pek azımızın bu konu üzerine düşünmek için fırsatı olmuştur. Gelin anılarımızı tazeleyelim.

Her şey *parmaklar* ile *dudaklar* arasında bir tür koordinasyon olarak başlar. Çocuk, parmakları veya oyun bloklarınca oluşturulan belli kalıpları belli sözcüklerle bağdaştırmayı öğrenir. Bu sözcüklere sayı denildiğini öğrenir ve onları *sıralı bir seri* olarak ezberler. Parmakları ve blokları tükettiğinde, sayma ufkunu somut kalıplar olmadan genişletmesini sağlayan tuhaf bir *retorik* prosedürü de öğrenmiştir. Artık sayma, sayılarla tutulan bir yarışa veya çocuğun ilk başta oynamaya gayet hevesli olduğu bir sözcük oyununa dönüş-

müştür. Ta ki bir gün, *söylenenin veya yapılanın her zaman tekrarlanabileceğini* fark edene kadar; ondan sonra bu sayı serisinde bir noktada birden durur ve geri kalanını "işte böyle böyle gidiyor" diyerek başından savar. İşte o gün sayma eğitimi tamamlanmıştır. Aynı zamanda, yıllar sonra *sonsuzluk kavramı* kılığında karşısına çıkarak aklını karıştıracak bir fikrin de tohumları atılmış olur.

Sayma sürecinin sonsuza dek sürdürülebileceğine dair bu güçlü güveni aşıl原因an bu retorik prosedür nedir? Çok erken bir yaşta öğrenmemize rağmen bu prosedür son derece karmaşık bir matematiksel fikre dayanır. Bu fikir şunu ileri sürer: *Herhangi bir pozitif tamsayı, 10'un katlarına göre dizilmiş ve katsayıları da 10'dan küçük tamsayılar olan bir polinom olarak bir ve yalnız bir biçimde ifade edilebilir.*

2. Bölüm'de de ifade ettiğimiz gibi, onlu tabanın tercihi bu tamsayının doğasından kaynaklanan avantajlara değil, sadece çoğu normal insanın ellerinde on parmak olması gibi *fizyolojik* bir rastlantıya dayanır. Sayı dilimizin fizyolojik yönü zaten yeterince ilginçtir; ama daha da çarpıcı olan onun *polinom yapısıdır*. Gerçekten de insan ne zaman yaşamın zorluklarınca parmak tekniğinin kaldırabileceğinden daha büyük tamsayılarla uğraşmak zorunda kalsa, kaçınılmaz olarak polinom şeklindeki ifadelere başvurmuştur.

Konumsal numaralandırma bu retorik prosedürün yazıya uyarlanmasından başka bir şey değildir; geçerli katsayıları 0 simgesini de ekleyerek sıralı polinomun terimleri arasında oluşabilecek "boşlukları" doldururuz ve böylece muhtemel belirsizlikleri önlemiş oluruz. Örneğin, (abcd) bir kriptogram ve şu polinomun kısaltılmış biçimidir:

$$aR^3 + bR^2 + cR + d = (abcd)_R$$

Burada R tabandır ve a, b, c, d katsayıları da $0, 1, 2, \dots, R - 1$ 'e kadar gidebilir. Sistemin tabanı olan R ise 1 dışında herhangi bir pozitif tamsayı olabilir. Dahası, ondalık gösterimle ifade edilmiş sayılara uygulamayı öğrendiğimiz aritmetik işlemleri genel polinomların niteliklerinden türediği için, bu kurallar kolaylıkla herhangi başka bir sisteme de uyarlanabilir.

Ondalık İşaretinin Tarihçesi

Konumsal numaralandırma yöntemi yüzyıllar boyunca kullanıldıktan sonra bir gün, avantajlarından birinin kesirlerde sağladığı büyük kolaylık olduğu fark edildi. Ne var ki, Stevin ve Napier'in hantallı ve altı yazılımlarından da anlaşıldığı üzere, bu farkına varma o zaman bile tam değildi.

Bu yöntemin tam anlamıyla etkinliğe kavuşabilmesi için gereken tek şey bizim modern *ondalık virgülümüze* benzer, sayının tam sayı kısmını kesir kısmından ayıran bir işaretti. Ancak anlaşılmayan bir nedenden dolayı öncüler (Kepler ve Briggs hariç) ya bunu görmediler ya da kamuoyunun bunu kabul edeceğine inanmıyorlardı. Stevin'in keşfinden bir yüzyıl sonra, o dönemde kullanımda olan çok sayıda rakip gösterimden söz eden bir tarihçi şöyle diyordu: *Quod homines tot sententiae* (Ne kadar insan varsa o kadar görüş var). Ondalık gösterim nihayet istikrara kavuşup da fazla simgeler bırakılana dek bir yüzyıl daha geçecekti.

Yazar	Yılı	Formül
Simon Stevin'den önce		$24 \frac{375}{1000}$
Simon Stevin	1585	$24 \ 3^{(1)} 7^{(2)} 5^{(3)}$
Franciscus Vieta	1600	$24 375$
John Kepler	1616	$24(375 \begin{smallmatrix} I & II & III \end{smallmatrix})$
John Napier	1617	$24 : 3 \ 7 \ 5$
Henry Briggs	1624	24^{375}
William Oughtred	1631	$24 375$
Balam	1653	$24 : 375$
Ozanam	1691	$24 \cdot \begin{smallmatrix} (1) & (2) & (3) \\ 3 & 7 & 5 \end{smallmatrix}$
Modern		$24 \cdot 375$

Taban Tercihi Üzerine

Buffon'un evrensel numaralandırma tabanının ondan on ikiye çıkarılması önerisi kendi yüzyılımızda ilginç bir diriliş yaşadı. Hem burada hem yurtdışında Oniki Kulüpleri peydahlandı; on ikinin yararlarını dinsel heyecana benzer ateşli bir şekilde anlatan dergiler ve el ilanları ortaya çıktı; on ve on bir için kullanılacak simgelere ilişkin o "can sıkıcı" meseleyi halleden reformcular tablolaştırmaya yöneldiler. *Çevrim tabloları*, *çarpım tabloları*, hatta *on ikilik logaritma tabloları* vardı. Ne var ki sonunda bu kampanya, insan türünün kolektif alışkanlıklarından birinde reform yapmayı amaçlayan pek çok hareket gibi silinip gitti.

Buffon'un önerdiğinden daha eski ve egzotik bir diğer reformun kaderiyse çok farklı oldu: Leibniz'in *İkili Aritmetiği*. Heyhat! Bir zamanlar tektanrıcılık şerefine dikilmiş bir abide olarak görülürken bir robotun iç organlarında son buldu. Zira modern yüksek hızlı hesap makinelerinin çoğu *ikili* ilkeye dayanır. Robot insan geleneklerine bağlı değildir, alışkanlıkları yoktur ve "hafızası" kodlamayla denetlenir. İkili kayıtlar fazla yer kaplar ama makinenin olağanüstü hızı bunu dengeler. Robot ondalık verileri otomatikman ikiliğe çevirip sonra da geri çevirebildiğinden insan operatörün alışkanlıkları da ciddi bir sorun yaratmaz. Hatta makinenin ardındaki insanın, kendi iç organlarının ne kadar farkındaysa robotunun ikili iç organlarının da o kadar farkında olacağı zaman pek de uzakta olmayabilir.

Ölçekte Değişiklik Üzerine

İnsanın sayı duyusunun sınırlı kapsamı, belli bir sayıya "sayma ölçüsü" olduğu bir model-derleme dayanarak ad vermeyi neredeyse imkânsız kılıyor. Bunun alternatifi sayıyı onu kaydetmekte kullanılan simgelerle bağdaştırmaktır. Arap rakamlarından önce bunun için alfabenin harfleri kullanılıyordu. Bu da ebced hesabının o zamanki büyük başarısını açıklayabilir. Konumsal numaralandırmanın ortaya çıkışı ve evrensel kabulü ile beraber, bir sayının ondalık kriptogramı otomatik olarak ona bir ad da vermiştir. Bugün ise bu sözcük addan öte bir şey haline gelmiştir: *Bizler sayıyı ondalık kriptogramıy-*

la tanımlamayı öğrendik. Bu alışkanlık o denli güçlü ki, çoğumuz sayının başka türlü ifadesini bir tür kılık değiştirme olarak görüyoruz, hem de ondalık ölçek hakkında mutlak veya kutsal hiçbir şey olmadığını fark etmemize rağmen.

Herhangi bir ölçekten ondalık gösterime geçiş, kriptogramın tanımlayıcı polinomunca belirtilir. Örneğin $(4321)_5$ kriptogramını alalım. Tanım gereği,

$$(4321)_5 = 4 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 5 + 1 = 586.$$

Hesap okurun *sentetik bölme* adıyla öğrenmiş olduğu ama aslında *sentetik ikamenin* daha uygun bir isim olacağı bir yöntemle daha kolay hale getirilebilir. Algoritma aşağıdaki tabloda detaylı olarak işlenmiştir:

	4	3	2	1
		$(5 \times 4) + 3$ = 23	$(5 \times 23) + 2$ = 117	$(5 \times 117) + 1$ = 586
Bölümler	4	23	117	586
Kalanlar	4	3	2	1

Aynı tablo geleneksel terimlerle ifade edilmiş bir sayının başka bir ölçeğe nasıl uyarlanacağını gösteriyor. Algoritmayı *tersine çevirerek* yeni ölçeğin tabanıyla (bu örnekte 5) bir dizi bölme işlemi elde ederiz: *Bu bölmelerin kalanları, aradığımız kriptogramın basamaklarını oluşturur.*

Bir uygulama örneği olarak, *Mersenne dizisi* adı verilen ve genel ifadesi $M_p = 2^p - 1$ olan dizinin terimlerini hesaplayalım. *İkili* gösterimde bu tamsayılar birim kümeleri olarak ifade edilir:

$$(2) \quad M_1 = (1), M_2 = (11)_2, M_3 = (111)_2, M_4 = (1111)_2, \dots$$

Yukarıda tarif edilen algoritma bu tamsayıları hesaplamak için kolay bir yol sağlıyor:

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M_p	1	<u>3</u>	<u>7</u>	15	<u>31</u>	63	<u>127</u>	255	511	1023

Altı çizili terimler dizinin *asallarıdır* ve *Mersenne sayıları* olarak adlandırılırlar. Bu tamsayılara başka bir yazıda döneceğim (bkz. B 10).

Bir Pascal Problemi

Bu bölümün başındaki alıntı Pascal'in "Rakamlarından Anlaşıldığı Kadarıyla Sayıların Bölünebilirliği" adlı bir makalesinden alınmıştır. Pascal'in bir q tamsayısıyla bölünebilirlik testi, $1/q$ 'nun bir ondalık *kesre* dönüşümüyle yakından ilgilidir. Pascal'in çalışması, kuramı netleştiren ve kapsamını genişleten Britanyalı çağdaşı John Wallis ile sonraki yüzyıl içinde Johann Bernoulli, Euler ve Lambert tarafından bu gözle ele alınmıştır.

q 'nun 2 veya 5 dışında herhangi bir asal sayı olduğu $1/q$ sayısının ondalık kesre çevirmekte kullanılan yöntemi inceleyelim. Bu dönüşümün algoritması zaten bildiğimiz *uzun bölmedir*; bu süreçte elde edilen ondalık kesir, birbiriyle aynı olan sonsuz sayıda "bloktan" meydana geldiği için *periyodik* olarak bilinen türdendir. Bloka *çevrim* denir ve bloktaki rakamların sayısı da o çevrimin *periyodudur*. Örneğin $q=7$ durumunda,

Bölüm	0.	1	4	2	8	5	7	1	4	2	8	5	7
Bölen	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Kalan	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6	4	5	1

Burada çevrim $K = 142857$ 'dir ve periyot da $p = 6$ 'dır.

Açılımın basamaklarını oluşturan bölenlerin Pascal'in argümanı ile bir ilgisi yoktur. Pascal'i sadece kalanlar ilgilendirir, ki bunlara da daha iyi bir isim bulamadığım için *q böleninin ondalık artıkları* diyeceğim. Artıkların sıralaması *periyodiktir* ve *artık çevriminin periyodu açılımın periyodunu* belirler. Algoritmanın doğası gereği her artık çevrimi 1 ile başlar ve *aynı çevrimde iki artık eşit olamaz*. Öte yandan, artıklar 1'den $q-1$ 'e kadar herhangi bir biçim alabilir. Öyle ki, periyot ya $q=7$ 'de olduğu gibi $q-1$ 'dir ya da $q=13$ 'te olduğu gibi $q-1$ 'in bir bölenidir. Aşağıdaki tabloda çeşitli tamsayıların artıkları verilmiştir; Pascal'in yaptığı gibi, liste –kriptogramdaki rakamların sırasına uyması için– *sağdan sola* gider.

Burada genel duruma dair tipik bir örnek olan Pascal'in $q=7$ durumundaki argümanını sunacağım. İlk olarak uzun bölmenin detaylarını ortaya koyalım:

$$\begin{array}{rclclcl} 1 = 0 \cdot 7 & + 1 & 10^3 = 142 \cdot 7 & + 6 & 10^6 = 142857 \cdot 7 + 1 \\ 10 = 1 \cdot 7 & + 3 & 10^4 = 1428 \cdot 7 & + 4 & \\ 10^2 = 14 \cdot 7 & + 2 & 10^5 = 14285 \cdot 7 & + 5 & \end{array}$$

Daha sonra şu üç basamaklı sayıyı ele alalım:

$$N = (CBA) = A \cdot 1 + B \cdot 10 + C \cdot 10^2$$

10'un katlarının yerlerine değerlerini yerleştirelim:

$$(3) \quad N = 7 \cdot H + (A + 3B + 2C),$$

Burada H pozitif bir tamsayıdır. Buradan çıkan sonuç: Ancak ve ancak $A + 3B + 2C$ 'nin 7'ye bölünebilir olması durumunda N de 7 ile bölünebilir.

Genel vakaya dönersek, $R_1, R_2, R_3, \dots, R_j, \dots$ q 'nun artıkları olsun ve $N = (D_j D_{j-1} \dots D_3 D_2 D_1)$ de q 'ya bölünebilirliği sınanacak sayı olsun: Buna göre N 'nin q ile bölünüp bölünememesi, q 'nun ağırlıklı toplamı bölüp bölmemesine bağlıdır.

Ondalık Artıklar ve Çevrimler

Bölen q	Periyot p	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10	1
2		0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5		0	0	0	0	0	0	0	0	1
7	6	2	3	1	5	4	6	2	3	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10		0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	2	1	10	1	10	1	10	1	10	1
13	6	9	10	1	4	3	12	9	10	1
17	16	16	5	9	6	4	14	15	10	1

$$(4) \quad P = R_1 D_1 + R_2 D_2 + R_3 D_3 + \dots + R_j D_j$$

$$\quad \quad \quad 0 \quad \quad 0$$

$$\quad \quad \quad 0$$

Pascal'in teoremini *bölünebilirlik* bağlamında ifade ettik. Ne var ki, sonuç daha geniş bir yoruma da açıktır. Gerçekten de buradaki mantık şunu gösteriyor: *Bir N sayısının q'ya bölünmesi işleminin kalanı, test fonksiyonu P'nin q'ya bölümünün kalanına eşittir*, ya da ilk olarak Gauss'un getirdiği terminolojiyi kullanırsak, *N ve P tamsayıları mod q açısından kalandaştır (congruent)*. Sembollerle ifade edersek,

$$(5) \quad N \equiv P \pmod{q}$$

Dolayısıyla $q = 9$ olması durumunda şu sonuca varırız: $R_1 = R_2 = R_3 = \dots = 1$ ve bunun sonucunda da, $P = D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_j = \sum D$,

$$(6) \quad N \equiv \sum D \pmod{9}$$

Buna *dokuz kuralı* adı verilir. Buna göre *tamsayıyı dokuza böldüğümüzde kalanla, rakamlarının toplamını dokuza böldüğümüzde kalan aynıdır*. Özellikle de, *bir sayı yalnızca ve yalnızca rakamlarının toplamı 9'a bölünebiliyorsa 9'a bölünebilir*.

Rakamlar ve Bölenler Üzerine

Pascal'in N'nin q ile bölünebilirlik testi, N ve q'nun tüm değerleri için geçerlidir; ancak pratikte kısa süre sonra "azalan getiriler" noktasına erişilir. Öte yandan, genel teoremden çıkan kuralların bazıları pratik hesaplama açısından pek de önemsiz değildir. Bu kuralları açıklamadan önce şunu belirtmeliyim ki, bir q tamsayısına bölünebilirliği test etmeden önce her zaman için Pascal *test fonksiyonu* P'nin yerine *denk* bir biçim konulabilir, veya daha basitçe ifade etmek gerekirse, testin geçerliliğini etkilemeden P'ye *q'nun herhangi bir katı eklenebilir veya çıkarılabilir*. Örneğin, 3 basamaklı CBA sayısının 7 ile bölünebilmesi için Pascal'in kıstası 7'nin $P = 2C + 3B + A$ 'yı bölmesidir. Buna 7B ekleyerek ve $10B + A = T$ diyerek, şu daha kullanışlı test fonksiyonuna ulaşırız: $T + 2C$. Dolayısıyla örneğin 581 sayısı 7'ye bölünebilir çünkü $81 + 2 \cdot 5 = 91$ 7'ye bölünür.

I. 3 basamaklı bir sayıyı test etmek: $N = (CBA)$, $T = (BA)$

Mod: q	q'nun 100'e en yakın katı	Test Fonksiyonu
7	98	$2C + T$
11	99	$C + T$
13	104	$T - 4C$
17	102	$T - 2C$
19	95	$5C + T$
23	92	$8C + T$
29	87	$13C + T$
31	93	$7C + T$

Örnek: $N = 912$, $T = 12$. N , 17'ye bölünemez, çünkü $12 - 2 \cdot 9 = -6$; N , 19'a bölünebilir, çünkü $12 + 5 \cdot 9 = 57 = 19 \cdot 3$.

II. 11 için kıstas. Pascal fonksiyonu $P = A + 10B + C + 10D + E + 10F + \dots$ 'dir. Bundan $11B + 11D + 11F + \dots$ toplamını çıkararak kıstası daha kullanışlı olan $P' = A - B + C - D + E - F + \dots$ biçimine indirgiyoruz.

Örnek: $N = 399.168$ sayısı 11'e bölünebilir, çünkü $3 - 9 + 9 - 1 + 6 - 8 = 0$.

III. 7 ile 13 için kıstaslar. Pascal'in teoreminden bunlar da elde edilebilir. Ancak, bize daha doğrudan bir yaklaşım sunan bir rastlantı vardır. $1.001 = 10^3 + 1$ hem 7'ye hem de 13'e bölünür ve ayrıca bunun sonucunda hem 7 hem de 13, $10^6 - 1 = 999.999$, $10^9 + 1 = 1.000.000.001$ vs.'yi böler. Kesin konuşmak gerekirse, N herhangi bir dokuz basamaklı tamsayı olmak üzere şunu yazabiliriz:

$$(7) \quad N = X + 1.000Y + 1.000.000Z = X - Y + Z + 1.001H$$

Dolayısıyla $X - Y + Z$ 'nin 7'ye (veya 13'e) bölünebilir olması durumunda N , 7'ye (veya 13'e) bölünebilir. Bu basit kural büyük sayıları üçlü bloklar halinde kaydetme yönündeki modern trende özellikle uygundur.

Örnek: $N = 864.192$. Burada $864 - 192 = 672 = 7 \cdot 96$. Dolayısıyla N , 7'ye bölünür, ama 13'e bölünmez.

Artık Kontrolü

Dokuz Kuralı'nı kimin keşfettiği veya ne kadar zamandır kullanımda olduğu bilinmiyor. Tek bilinen Pascal'in daha önce değindiğim bölümler ve basamaklar üzerine yazısında ondan yaygın bilinen bir şey olarak söz ettiği ve o kitapçığının da artık üç yüz yıldan eski olduğudur. Daha az gelişmiş bir çağın muhasebecileri bu kuralı toplamaların ve çarpımaların sağlamasını yapmak için kullanmışlardır. Çağdaş muhasebecilerin böyle ince işlerle uğraştıklarını pek sanmıyorum. İyi mi kötü mü bilemiyorum ama hesap makinelerinin gelişimi, hesaplayıcının becerisini de güzel elyazısı kadar geçersiz kılmıştır.

İlginçtir ki, Dokuz Kuralı'nın türetildiği ilke gayet önemsiz uygulamalar için tasarlanmış ama sonra bunları aşmıştır. Gerçekten de, bu teknik herhangi bir mod için ve herhangi bir numaralandırma sisteminde geçerlidir, ayrıca öğrenimi de önceki makalede sözünü ettiğim Gauss'un Kalandaş Kuramı'na mükemmel bir giriş sağlayabilir. Ancak, karışıklık yaratmamak için daha doğrudan bir yaklaşıma başvuracağım.

A tamsayısının q tamsayısına bölümünden kalan a ise, o zaman $a, A \bmod q$ 'nın artığıdır (*residue*) denir ve şöyle yazılır:

$$(8) \quad \text{res } A = a(\bmod q)$$

Artık 0 ile $q - 1$ arasında olabilir ve $\text{res } A = 0 (\bmod q)$ da A 'nın q 'ya bölündüğü anlamına gelir. $A, B, C, \dots$ herhangi sonlu bir tamsayılar kümesi, $a, b, c, \dots$ de aynı q moduna göre artıkları olsun. O zaman (m, n, p üsleri tamsayı olmak üzere) şunu ispatlamak zor olmayacaktır:

$$(9) \quad \begin{cases} \text{res } (A + B + C + \dots) = \text{res } (a + b + c + \dots) \\ \text{res } (A - B) = \text{res } (a - b) \\ \text{res } (A \cdot B \cdot C \cdot \dots) = \text{res } (a \cdot b \cdot c \cdot \dots) \\ \text{res } (A^m) = \text{res } (a^m) \\ \text{res } (A^m \cdot B^n \cdot C^p \cdot \dots) = \text{res } (a^m \cdot b^n \cdot c^p \cdot \dots) \end{cases}$$

Bu özellikleri birleştirerek, önermenin kapsamını *herhangi bir sayıda tamsayısal argüman, katsayı ve parametre için geçerli olan en ge-*

nel tamsayı fonksiyonuna genişletebiliriz. Bu genel teoreme artık ilkesi adını vereceğim. Şöyle ifade edilebilir: $F(x, y, z, \dots)$ herhangi bir tamsayı fonksiyonu olsun ve $x = A, y = B, z = C$ vb. yerleştirmelerinin bir N tamsayısına götürdüğünü varsayalım; dahası, $a, b, c, \dots, n$ bir q moduna göre $A, B, C, \dots, N$ 'nin artıkları olsun; o zaman

$$(10) \quad F(A, B, C, \dots) = N \text{ ise } F(a, b, c, \dots) = n$$

Artık ilkesini sayısal hesaplamaların sağlamasını yapmak için nasıl kullanabileceğimizi şimdi tarihsel önemlerine göre seçilmiş bir dizi örneklerle göstereceğim.

Tarihsel Örnekler

I. Fermat tarafından ifade edildiği ve Euler tarafından ispatlandığı gibi, $x^3 + y^3 = R^3$ denkleminin *tamsayılı çözümü yoktur*. Öte yandan,

$$(11) \quad x^3 + y^3 + z^3 = R^3$$

denklemini *sonsuz sayıda çözüme sahiptir*. Bunlardan bazıları, mesela (3, 4, 5; 6) ve (1, 6, 8; 9) halihazırda Fibonacci tarafından biliniyordu. 1920'de H.W. Richmond tarafından yüzden fazla küme içeren bir çözüm listesi yayımlanmıştı. Bu kümelerden biri (25, 38, 87; 90)'dır.

$$25^3 + 38^3 + 87^3 = 90^3$$

olduğunu kontrol etmek için, son iki terimin 9'a bölünebilir olduğuna dikkat edelim: Buna göre $25^3 + 38^3$ 9'a bölünmelidir, ki gerçekten de $25 + 38 = 63$. Öte yandan, 25^3 ile 90^3 ise ortak bölen 125'i içerir; dolayısıyla $38^3 + 87^3$ 125'e bölünmelidir. Baktığımızda, $38 + 87 = 125$.

II. Aynı listeye göre,

$$(12) \quad 243 + 633 + 893 = 98^3$$

98 ve 63, 7'ye bölündüğüne göre, $243 + 893$ de bölünmelidir.

$$\text{res } 24^3 \pmod{7} = \text{res } 3^3 = 6 \text{ ve } \text{res } 89^3 = 5^3 = 6.$$

Buradan,

$$\text{res}(24^3 + 89^3) \pmod{7} \text{ 5'tir, 0 değildir.}$$

Dolayısıyla bu küme yanlıştır, ancak yine de dokuz testi olumlu sonuç verir.

III. Önceki soruyla yakından ilgili bir soru da *Ramanujan problemi* olarak bilinir: *iki küpün toplamına birden fazla yoldan ayrıştırılabilecek* tamsayıları belirleme. Bu türdeki en küçük tamsayı $1.729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$ 'dür. Şunu kontrol edelim:

$$(13) \quad N = 1.009.736 = 96^3 + 50^3 = 93^8 + 59^3$$

Dokuz testine göre $8 = 8 = 8$. Öte yandan N , 7'ye bölünebilir, zira $7 \cdot 736 - 9 + 1 = 728$ 'i böler. Sağlaması, mod 7 ise bizi $126 = 7 \cdot 18$ ve $35 = 7 \cdot 5$ 'e götürür.

IV. Şunu kontrol edelim:

$$N = 12! + 1 = 479.001.601$$

$12!$, 12'ye eşit veya ondan küçük herhangi bir tamsayıya bölünebileceğinden, 479.001.601'in bu tür herhangi bir tamsayıyla bölümünden kalan 1 olmalıdır, ki okur da bunu kolayca doğrulayabilir. $12! + 1$ 'in *asal 13* ile bölünebildiğini ifade eden *Wilson Teoremi* de ek bir sağlama sunuyor. Gerçekten de

$$\begin{aligned} \text{res}(479.001.601) &= \text{res}(479 - 1 + 601) = \text{res}(1.079) \\ &= \text{res}(78) = 0 \pmod{13} \end{aligned}$$

V. Euler'in 1.000.009'un bir asal olmadığını, ama 293 ve 3.143 asal sayılarının çarpımı olduğunu nasıl bulduğu ise başka yerde anlatılmıştır (bkz. "Asallar için Formüller", Ek B, s. 240).

$$1.000.009 = 293 \times 3.413$$

denklemini kontrol etmek için ilk önce dokuz testine başvuruyoruz. Basamak toplamları 10, 14 ve 11; artıklar 1, 5 ve 2; ayrıca $\text{res}(5 \cdot 2) = 1$ 'dir. Daha sonraysa, yedi testi: $\text{res}(1.000.009) = \text{res}(9+1) = 3$; $\text{res}(293) = \text{res}(93 + 4) = 6$; $\text{res}(3.413) = \text{res}(410) = \text{res}(10 + 8) = 4$; ve $\text{res}(4 \cdot 6) = 3$.

VI. 3 basamaklı bir sayının hiçbir asal çarpanı 31'i aşamaz, çünkü $31^2 < 1.000 < 37^2$. Dolayısıyla, 9'daki test fonksiyonları tablosu

kolaylıkla *herhangi 3 basamaklı bir sayının asallığını* test etmekte kullanılabilir. Örneğin, sayfa 58'de *beşinci Fermat sayısı* $2^{2^5} + 1$ 'in *641'e bölünebilir* olduğundan söz etmiştim. 641 asal mıdır? Burada $C = 6$, $T = 41$ ve $29^2 > 641$ olduğundan, test edilecek asallar 7, 11, 13, 17, 19 ve 23'tür. Karşılık gelen artıklardan hiçbirinin sıfır olmadığı görüyoruz ve 641'in bir asal sayı olduğu sonucuna varıyoruz.

EK B

Tamsayılar Üzerine

Güzel ve çok genel bir önerme bulduk: Tüm tamsayılar iki, üç ya da en fazla dört karenin ya karesidir ya da toplamıdır. Bu teorem sayının anlaşılması en güç gizemlerinden bazılarına dayanır ve ispatını bu sayfanın kenarında sunmamız mümkün değildir.

FERMAT

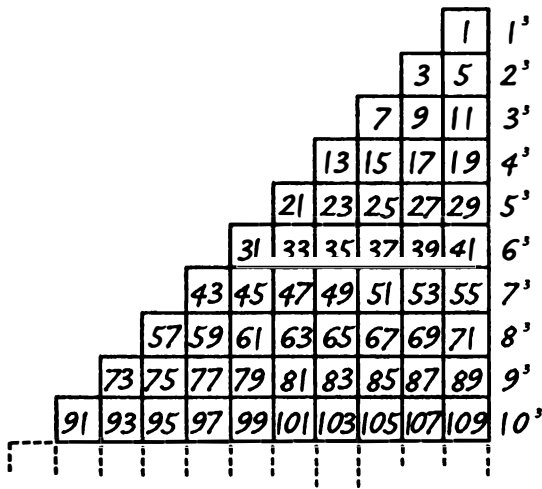
İki Aritmetik Üçgen

Tamsayıların niteliklerini ortaya koymak adına kalıpların kullanımı Pisagorcularla birlikte tarihe karışmadı. Pascal'ın *aritmetik üçgeni* buna bir örnektir. Fibonacci'nin şu özdeşliğe dair ispatı ise daha az bilinir ama en az diğeri kadar zariftir:

$$(14) \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

Birbirini takip eden tek tamsayıları Şekil 1'deki gibi bir *üçgen dizi*-*lim* haline sokan Fibonacci, *k'ıncı sıranın k teriminin, ortalama değeri k² olan bir aritmetik ilerleme* meydana getirdiğini; dolayısıyla *k'ıncı sıranın terimlerinin toplamının k x k² veya k³ olduğunu* ve birbirini izleyen n sıradaki tüm terimlerin toplamının da $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ olduğunu gözlemledi. Öte yandan, geleneksel olarak Pisagor'un kendisine atfedilen bir önermeye göre *ilk p tane tek tamsayının toplamı p²'ye eşittir*; dolayısıyla:

$$S = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$



ŞEKİL 1: FIBONACCI'NIN ARİTMETİK ÜÇGENİ

Pascal'in üçgeni birbirini takip eden basamaklardaki *binom katsayıları* arasındaki ilişkiyi ortaya koymak için tasarlanmıştır. $x^\alpha y^\beta$ teriminin katsayısını (α, β) ile gösterelim. $(x + y)^p$ açılımı, bu terimi $\alpha + \beta = p$ olması durumunda içerir; aynı zamanda $x^{\alpha-1}y^{\beta+1}$ terimini de içerir. Öte yandan, *binom açılımı* $(x + y)^{p+1}$ de $x^\alpha y^{\beta+1}$ terimini içerir. Bu "bitişik" terimlerin katsayıları arasında şu bağıntı vardır:

$$(15) \quad (\alpha, \beta) + (\alpha - 1, \beta + 1) = (\alpha, \beta + 1)$$

Bu *Pascal'in Yineleme Yasası*'dır.

Eğer sık sık iddia edildiği gibi Pascal'i *matematiksel tümevarım ilkesini* oluşturmaya yönelten bu "mistik şeklin" incelenmesiye, o zaman Aritmetik Üçgen, Matematik Tarihi Müzesi'nde sergilenmelidir. Ancak, teknik açıdan bu alanda daha sonra sağlanan gelişmeler üzerinde pek etkili olmamıştır. Bu kısmen bu yöntemin kısıtlamalarından, ya çokterimli açılımlara ya da negatif ve kesirli üslere yönelik kolay genellemelere müsait olmamasından kaynaklanıyordu. Ayrıca, Pascal yineleme yasasının kendi biçimi de *binom* ve *faktöriyel* tamsayılar arasındaki son derece önemli bağı gizliyordu. Ama

										1	2^0
									1	1	2^1
								1	2	1	2^2
							1	3	3	1	2^3
						1	4	6	4	1	2^4
					1	5	10	10	5	1	2^5
				1	6	15	20	15	6	1	2^6
			1	7	21	35	35	21	7	1	2^7
		1	8	28	56	70	56	28	8	1	2^8
	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	2^9
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	2^{10}

ŞEKİL 2: PASCAL'İN ARİTMETİK ÜÇGENİ

bu başarısızlığın ana nedeni Descartes-Pascal-Fermat büyük üçlünün takip eden dönemin tarihinde yatar. Sonsuz küçükler analizinin ortaya çıkışı, bu insanların göz kamaştırıcı başarılarını gölgeledi ve bu tutulmadan da en büyük payı Sayı Kuramı aldı.

Çokterimliler Teoremi

p 'nin pozitif bir tamsayı olduğu ve n sayıdaki $x, y, z, \dots w$ argümanlarının cebirin genel yasalarına tabi varlıklar olduğu

$$(x + y + z + \dots + w)^p$$

ifadesi, p . dereceden bir çokterimli olarak adlandırılır. Tam olarak açıldığında, çokterimli, p . dereceden bir polinomu doğurur. Bu polinom n argüman bağlamında simetriktir, yani $x, y, z, \dots$ arasındaki herhangi bir karşılıklı değişim nedeniyle değişmez; dahası x^p, y^p, z^p vb. terimlerin katsayıları 1'e eşittir. Euler ile ondan önce Leibniz bunu şu özdeşlikle ifade etmişlerdir:

$$(16) \quad (x + y + z + \dots w)^p - (x^p + y^p + z^p + \dots + w^p) = S(x, y, z, \dots w)$$

S polinomu hem simetrik hem de *homojendir*, yani onu oluşturan tekterimlilerin ($M x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots w^\nu$) üsleri değer olarak 0 ile $p - 1$ arasında olabilir, ama şu koşula tabidirler:

$$(17) \quad \alpha + \beta + \gamma + \dots + \nu = p$$

Bu tekterimlilerin katsayıları (M) pozitif tamsayılarıdır ve bunlara *p. dereceden çokterimli katsayıları* adı verilir.

Bu *çokterimli tamsayılar* faktöriyeler bağlamında "sözde kesirler" olarak çok zarif biçimde ifade edilebilirler. Gerçekten de, $x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots w^\nu$ 'nin katsayısını ($\alpha, \beta, \gamma, \dots \nu$) sembolüyle gösterirsek, o zaman *matematiksel tümevarım* veya *birleşimsel argümanlar* yoluyla,

$$(18) \quad (\alpha, \beta, \dots \nu) = \frac{(\alpha + \beta + \dots + \nu)!}{\alpha! \beta! \dots \nu!} = \frac{p!}{\alpha! \beta! \dots \nu!}$$

olduğu gösterilebilir, tabii 0! yerine 1 koyarak.

Buna *sözde kesir* adını veriyorum. Bu eşitlik ilk olarak Jacques Bernoulli'nin ölümünden sonra 1713'te yayımlanan eseri *Ars Conjectandi*'de (Tahmin Sanatı) ortaya çıkmıştır. Bu eser bugün *birleşimsel analiz* ile *olasılık kuramı* üzerine bir çalışma olarak sınıflanırdı. İtiraf etmek gerekir ki, bu formülü ilk meydana getirenin kendisi mi, kardeşi Johann mı yoksa Leibniz veya iletişimde oldukları sayısız matematikçiden biri mi olduğu sorusu tartışmalıdır.

Çokterimliler teoreminin pratikte nasıl işlediği 5. *dereceden üç bilinmeyenli bir denklem* üzerinde gösterilmiştir. Sonucu:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x + y + z)^5 = x^5 + y^5 + z^5 + 5(x^4y + xy^4 + y^4z + \\ yz^4 + z^4x + xz^4) + 10(x^3y^2 + x^2y^3 + y^3z^2 + \\ y^2z^3 + z^2x^3 + z^3x^2) + 20(x^3yz + y^3zx + z^3xy) + \\ 30(xy^2z^2 + yz^2x^2 + zx^2y^2) \end{array} \right.$$

Detaylar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir; hesaplamaların sağlama-sı özdeşlikte $x = y = z = 1$ yerleştirilerek yapılmıştır.

Terim Türü	Terimlerin Sayısı	Katsayı	Sağlama
x^5	3	1	$1 \times 3 = 3$
x^4y	6	$5!/(4!) = 5$	$5 \times 6 = 30$
x^3y^2	6	$5!/(3!2!) = 10$	$10 \times 6 = 60$
x^2yz	3	$5!/(3!) = 20$	$20 \times 3 = 60$
x^2y^2z	3	$5!/(2!2!) = 30$	$30 \times 3 = 90$
	21		$3^5 = 243$

Fermat'nın Küçük Teoremi Üzerine

En basit ve en doğrudan ifadeyle teorem şöyledir: *R herhangi bir pozitif tamsayı ve p de herhangi bir asal sayı ise, o zaman $R^p - R$, p'ye bölünebilir.* Örneğin $R = 2$ için:

$$(20) \quad 2^2 - 2 = 2; \quad 2^3 - 2 = 3 \cdot 2; \quad 2^5 - 2 = 5 \cdot 6; \quad 2^7 - 2 = 7 \cdot 18$$

Küçük Teorem'in bu özel vakası eski Çinlilerce bilinirdi.

Bu teorem çoğu kez biraz farklı biçimde ifade edilir: *Eğer asal sayı p R'yi bölemiyorsa, o zaman $R^{p-1} - 1$ 'i böler.* Dolayısıyla, örneğin, p 2 ya da 5 dışında bir asalsa, o zaman $10^{p-1} - 1 = 999 \dots 99$ 'u böler. Bu da doğru sayıda basamak için 999 ... 9 kriptogramı 2 ve 5 hariç herhangi bir asala ya da 2 ve 5'e bölünemeyen bir Q tamsayısına bölünebilir demektir. Bu koşullar Q'ya bölünebilirlik kıstasları ile $1/Q$ ondalık ifadesinin periyodu açısından önemlidir.

Şu "karşı örneklerden" görülebileceği gibi, *küçük teoremin tersi genelde doğru değildir:*

I. $341 = 11 \cdot 31$ olduğundan *asal değildir*; ancak $341, N = 2^{340} - 1$ 'i böler, çünkü N'nin bölenlerinden biri $2^{10} - 1 = 31 \cdot 33 = 3 \cdot 341$ 'dir.

II. $121 = 11^2$ *asal değildir*, ancak $N = 3^{120} - 1$, 121'e bölünebilir, çünkü $3^5 - 1 = 242 = 2 \cdot 121$.

Küçük Teorem'in tarihçesi çok ilginçtir. Fermat herhangi bir ispat sunmadan arkadaşı Frenicle'a yazdığı 1640 tarihli (ve ölümün-

den sonra oğlunca 1660'ta yayımlanan) bir mektupta bundan bahse-
der. Anlaşıldığı kadarıyla bu teorem dönemin matematikçilerini pek
etkilememişti. Dolayısıyla kırk yıl sonra teoremi tekrar keşfeden Le-
ibniz rahatça şu sözleri sarf edebilmişti: "İşte benden önce hiçbir
Analistin bilmediği bir şey, Asal Sayılar için gerçekten genel bir for-
mül." İfade, teoremin tersinin geçerliliğine dair bir inancı ima edi-
yor, ki bu gerçekten de tuhaftır, çünkü Leibniz'in yukarıda verdiği-
miz basit karşı örneklerden haberdar olmadığına inanmak zor.

İroniktir ki, Leibniz'in Fermat'ın küçük teoremine katkısı da ori-
jinalinin kaderini paylaştı. Öyle veya böyle, 1730-40 yılları arasın-
da Euler bu konu üzerine birçok yazı kaleme aldı, ancak ispatların-
dan birinde teoremi –tıpkı kendinden önce Leibniz'in de yaptığı gi-
bi– *çokterimliler formülünün* doğrudan bir sonucu olarak elde etmiş
olmasına rağmen, hiçbir zaman Leibniz'den bahsetmedi.

Bir çokterimlinin derecesinin (p) bir *asal sayı* olduğunu varsayalım; buna göre, $\alpha, \beta, \gamma \dots$ üsleri p 'den küçük olduğundan, sözde kesrin paydası p 'yi götürebilecek bir çarpan içermez ve $(\alpha, \beta, \gamma \dots)$ tamsayısı p 'ye bölünebilir. Böylece şu önemli lemma (yardımcı teorem) ortaya çıkar: Derecesi p asal sayısı olan tüm çokterimli katsayıları p 'nin katlarıdır. Buna göre, önceki maddedeki çokterimli özdeşlik şu biçimi alır:

$$(21) \quad (x + y + z + \dots + w)^p - (x^p + y^p + z^p + \dots + w^p) = pH(x, y, z, \dots w)$$

Burada $H(x, y, z, \dots w)$ pozitif tamsayıli katsayılarla sahip bir polinomdur.

Bu lemmanın sayı kuramı açısından sonuçları çok kapsamlıdır ve Küçük Teorem de bunların en basit ve önemlilerinden biridir. (21) özdeşliğe $x = y = z = \dots = w = 1$, $H(1, 1, 1, \dots 1) = N$ 'yi yerleştirince, şu hali alır:

$$(22) \quad n^p - n = Np \text{ veya } n(n^{p-1} - 1) = Np$$

Dolayısıyla, eğer asal sayı p 'n'i bölemiyorsa, $n^{p-1} - 1$ 'i böler.

Leibniz'in Fermat'ın teoreminin ispatı esas olarak budur. Euler'in ispatlarından biri bundan sadece ifade ediliş şekliyle ayrılır;

bir diğeryise mükemmel bir matematiksel tümevarım örneğidir. İspatın dayandığı nokta p 'yi *sabit ve R'yi değişken* olarak görmektir. $R = 1$ için $1^p - 1 = 0$ 'dır ve bununla *tümevarım adımı* oluşturulmuş olur. Şimdi teoremin R'nin bir değeri için geçerli, yani A'nın pozitif bir tamsayı olduğu durumda $R^p - R = Ap$ olduğunu varsayalım ve $(R + 1)^p - (R + 1)$ ifadesini ele alalım. Yukarıda değindiğimiz lemmadan hareketle, p'nin asal olması şartıyla, $(R + 1)^p - R^p - 1 = Bp$. Bunun sonucunda:

$$(R + 1)^p - (R + 1) = R^p - R + Bp = (A + B)p$$

Kanıtlamaya çalışan şey de buydu zaten.

Wilson Teoremi Üzerine

Bu önermenin öyküsü, ifade etme şeklinin matematiksel akıl yürütmedeki rolünü gösterir. 1770'te Edward Waring *Meditationes Algebraicae* (Cebir Üzerine Düşünceler) adlı bir kitap yayımladı. Bu çalışmadan bir pasaj şöyledir: "Eğer p bir asal sayıysa, o zaman

$$(23) \quad \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot (p-1) + 1}{p}$$

bir tamsayıdır. ... Asal sayıların bu zarif niteliği matematik konusunda çok bilgili olan mümtaz John Wilson'ın keşfidir." Wilson'a yönelik bu coşkulu saygı duruşu pek ciddiye alınmamalıdır, çünkü bunun Waring'in "politik" bir borcunun karşılığı olduğuna dair kanıtlar vardır. Waring şöyle devam ediyor: "Asal sayıların ifade edilebileceği bir gösterim olmadığından, bu tür teoremleri ispatlamak çok zor olacaktır." Bu pasajı yorumlayan Gauss, "*notationes versus notiones*" şeklindeki ünlü nüktelerini sarf ederek, bu tür sorularda önemli olanın *terminoloji* değil *kavrayış* olduğunu vurgulamıştır.

Waring'in kötümser tahminine rağmen, ilanından sonraki birkaç yıl içinde teorem birbirinden bağımsız olarak Euler ve Lagrange tarafından ispatlanmıştı. Bu üstatlarca kullanılan yöntemler onları harekete geçiren problemin çapının çok çok üzerindeydi, bu nedenle de dolaylı ve karmaşıktılar. Oysa, aşağıda verilen Gauss ispatı o ka-

dar basit ve dolaysızdır ki, bir nebze matematik eğitimi almış bir okur bile bunu anlayabilir ve takdir edebilir.

Wilson Teoremi W 'nin bir tamsayı olduğu,

$$(24) \quad (p-1)! = Wp - 1$$

bağıntısına denktir ve sadece p 'nin 3'ten büyük değerlerini ele alacağımız için, W 'yi 1'den büyük olarak alabiliriz. Buna göre $W = G + 1$ dersek, bu (24)'ü

$$(24') \quad (p-1)! = Gp + (p-1)'e \text{ dönüştürür.}$$

Artık teorem şu şekilde yeniden ifade edilebilir: *Eğer p asalsa, $(p-1)!$ 'in p 'ye bölümünden kalan $(p-1)$ 'dir. Öte yandan, $(p-1)! = (p-1)(p-2)!$ olduğundan, problem $(p-2)!$ 'nin p 'ye bölümünden kalanın 1 olduğunu ispatlamaya indirgenmiş olur.*

Bu son ifadeyi ispatlamak için Gauss, daha iyi bir ad bulamadığımdan *eşleştirme* dediğim bir araca başvuruyor. Bu yöntemi, $p = 11$ vakası için bir tablo halinde sunuyorum. Esasında, bu 10'a 10'luk bir çarpım tablosu, yalnız tablonun öğeleri çarpımlar yerine *mod 11'e göre artıkları*.

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Bu dizilim şu niteliklere sahiptir: Birincisi, *herhangi iki eşit öğeye karşılık gelen ve farkları p 'ye bölünebilir olan iki tamsayı vardır*. İkincisi, *aynı sıra veya kolondaki iki öğe eşit olamaz*. Üçüncüsü, *her sıranın $p-1$ öğesi olduğundan, $p-1$ 'in artıklarından her biri her sırada ve sadece bir kere görünür*. Dördüncüsü, *artık 1 her sırada mevcuttur*, ki bu da şu anlama gelir: 2, 3, 4, ... $p-2$ sıralamasındaki her k tamsayısını, $k \cdot K$ 'nin artığının 1'e eşit olduğu bir K tamsayısıyla ilişkilendirebiliriz.

$p = 11$ durumu için çarpımları şu şekilde gruplayabiliriz:

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \dots \cdot 8 \cdot 9 = (2 \cdot 6)(3 \cdot 4)(5 \cdot 9)(7 \cdot 8)$$

Her çiftin çarpımı 11'e bölündüğünde kalanı 1 olur. Buna göre, aynı tüm bu çiftlerin çarpımları için de geçerlidir. Dolayısıyla, $\text{res}(9!) = 1$ ve $\text{res}(10!) = 10$, yani $10! + 1 = 11N$, ki bu da $p = 11$ için Wilson Teoremi'dir.

Bu argümanı genel duruma uyarlırsak şu sonuca varırız: *p bir asal sayıysa, o zaman $p - 3$ 'ün çarpanları –yani 2, 3, 4, ..., $(p - 2) - 1/2(p - 3)$ sayıda bağlı çift halinde düzenlenebilir; her çiftin mod p 'den artışı 1'dir; dolayısıyla, tüm bağlı çiftlerin çarpımlarının artışı da 1'dir; buradan p asal olduğunda, $(p - 1)!$ 'in mod p artığının $p - 1$ olduğu ve bunun Wilson Teoremi'nin Gauss versiyonu olduğu sonucuna varıyoruz.*

Sayfa 60'taki tablo Wilson Teoremi'nin farklı bir ifadesi üzerine inşa edilmiştir. $w_p, [(p - 1)! + 1]$ 'in p 'ye bölümünün kalanı olsun: w_p 'ye *p tamsayısının Wilson endeksi* adını vereceğim. Wilson Teoremi bir asal sayının endeksinin 0 olduğunu ifade ediyor; tersten giderek, *p 'nin endeksi 0 ise p de asaldır.* p bileşik sayı olduğunda ne olur? Cevabı: *4 hariç herhangi bir bileşik tamsayının Wilson endeksi +1'e eşittir.*

Son ifade şu teoremin başka türlü dile getirilmesinden başka bir şey değildir: *Eğer p 4'ten büyük bir bileşik sayıysa, o zaman $(p - 1)!$, p 'ye bölünür.* Kanıt: İlk önce p 'nin bileşik olduğunu, ama bir asalın karesi olmadığını varsayalım; o zaman her biri $p - 1$ 'den küçük iki farklı tamsayının çarpımıdır ve dolayısıyla $(p - 1)!$ 'in bölenleridir. Daha sonra, q 'nun asal bir tek sayı olduğu $p = q^2$ durumunu varsayalım: Buna göre q , $(p - 1)$ 'den küçüktür, $2q$ da aynı şekilde. Dolayısıyla hem q hem de $2q$, $(p - 1)!$ 'e girer; buradan da bu sonuncunun $2q^2$ 'ye ve dolayısıyla p 'ye bölünebildiği çıkar.

4'ten küçük tamsayıları hariç tutarsak, yukarıdaki tartışmayı şu sözlerle özetleyebiliriz: *Bir asal sayının endeksi 0'dır, bileşik bir sayının endeksi 1'dir.* Buna göre, doğal sayılar sıralamasını 1'in bileşik bir sayıyı ve 0'ın da bir asalı simgelediği, iki tabanında sonsuz bir kesir olarak yazabiliriz.

$$(25) \begin{cases} 0,010111 & 0101110101 & 1101111101 & 0111110111 & 0101110111 \\ 1101111101 & 0111110111 & 0101111101 & 1101111101 & 1111110111 \end{cases}$$

Bu kesrin ilk basamağı $p = 5$ 'i, sonuncusuysa $p = 100$ 'ü temsil eder.

Lagrange'a Ait Bir Problem Üzerine

Aşağıda hakkında daha çok konuşacağım *Sıfır Çarpan Yasası*, *çarpanlarından biri sıfır olmadığı sürece bir çarpımın sıfıra eşit olamayacağını* ileri sürer. Sembollerle, $uv = 0$ bağıntısı ya $u = 0$, ya $v = 0$, ya da $u = v = 0$ olduğunu ima eder. Bu yasanın sayı kuramındaki karşılığı şudur: *Bir asal p sayısı tamsayıların bir çarpımını bölümliyorsa, o zaman çarpanlardan en azından birini bölüyordur.* Gauss tarafından getirilen terminoloji ve semboller kullanılarak iki nitelik arasındaki benzerlik daha da çarpıcı hale getirilebilir.

Eğer a ve b tamsayıları p ile bölündüklerinde aynı kalanı veriyorsa, Gauss a ile b 'yi *mod p 'de denk* olarak nitelendirir ve bunu $a \equiv b \pmod{p}$ şeklinde yazar. $c \equiv 0 \pmod{p}$ ifadesi ise c 'nin p 'ye *bölünebildiği* anlamına gelir. Bu gösterimle Sıfır Çarpan Yasası'na benzetimi şu biçimde tekrar ifade edebiliriz: Eğer p asalsa ve $uv \equiv 0 \pmod{p}$ ise o zaman ya $u \equiv 0 \pmod{p}$, ya $v \equiv 0 \pmod{p}$, ya da $u \equiv v \equiv 0 \pmod{p}$.

n . dereceden $G(x)$ polinomunu ele alalım. $G(x)$, belli bir p asal sayısına bölünebilir mi, bölünebilirse x 'in hangi tamsayı değerleri için bölünebilir? Lagrange'ın problemi budur, Gauss ise bunu şöyle ifade etmiştir: *$G(x) \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin çözümlerini belirle.* Bu aşamada denklem ile denklikler arasındaki benzetim çıkmaza giriyor: Eğer a , $\text{mod } p$ 'de herhangi bir denkleğın çözümlüyse, o zaman n ne olursa olsun, $a + np$ de bir çözümdür. Lagrange bu zorluğın $a + np$ dizisinin *en küçük pozitif terimini* tüm dizinin temsilcisi kılarak aştı. Gauss bunlara *asgari çözüm kökleri* adını verir. Örneğın, $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ denkleğının sonsuz sayıda çözümlü vardır: 2, 7, 12, 17, ...; 3, 8, 13, 18, ... ama sadece *iki ayrı kökü* vardır: 2 ve 3.

Bu terminoloji kullanıldığında, Lagrange'ın iki teoremi şu hale geliyor: Bir, n . dereceden bir denkleğın birbirinden farklı *en fazla n kökü olabilir*; iki, *eğer n . dereceden bir polinom, x 'in denk olmayan n tane değeri için p 'ye bölünebiliyorsa, o zaman x 'in herhangi bir değeri için p 'ye bölünebilir.*

Bu son önerme Lagrange'ı Fermat'nın Küçük Teoremi ile Wilson Teoremi arasındaki şaşırtıcı bir bağlantının keşfine götürdü. p 'nin asal olduğu şu polinomu ele alalım:

$$(26) \quad G(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \dots [x-(p-1)] - (x^{p-1} - 1)$$

Şunu buluruz:

$$G(1) = 0, G(2) = 2^{p-1} - 1, G(3) = 3^{p-1} - 1, \dots \\ G(p-1) = (p-1)^{p-1} - 1$$

Fermat'nın Küçük Teoremi'ne göre tüm bu değerler p *asal sayısına bölünebilir*; dolayısıyla $G(x) \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin, *denk olmayan* $p-1$ tane çözümü vardır. Öte yandan, $G(x)$ polinomunun derecesi yalnızca $p-2$ 'dir. Buradan, $G(x)$ 'in, x 'in tüm değerleri için, özellikle de $x=0$ için p 'ye bölünebildiği ortaya çıkar. Dolayısıyla:

$$(27) \quad G(0) \equiv [(p-1)! + 1] \equiv 0 \pmod{p}$$

ki bu da Wilson Teoremi'dir.

Sayfa 56'da gösterilen Eratosthenes'in kalburu veya (25)'te yer alan iki tabanındaki kesir, asalların ilk yüz tamsayı arasındaki düzensiz dağılımını ortaya seriyor. Doğal sayılar dizisinde ilerledikçe düzensizlik devam ediyor, hatta daha da akıl karıştıracı bir hal alıyor. Bu tuhaf dağılımda düzen veya mantık arayanlar, birtakım sayıları, olguları ve yanlış çıkan sanıları değerlendirmeye almalılar.

101 ile 113 arasında 5 asal varken, 114 ile 126 arasında hiç yoktur. 1 ile 100 arasında 23 asal, 101 ile 200 arasındaysa 21 asal bulunur; ama 8.401 ile 8.500 arasında sadece 8 asal vardır ve bunların hepsi 8.418 – 8.460 aralığına sıkışmıştır. Okurun yanlış bir fikir edinmemesi için 89.501 ile 89.600 arasında 13 asal olduğunu da ekleyeyim.

İlk 10.000.000 tamsayı için güvenilir çarpan tabloları mevcuttur: Bunların arasında 664.580 asal sayı vardır. Bunun ötesinde değerlendirme kuramlarına ve formüllere bel bağlamak durumundayız. Bu türde ilk formül 1808'de Legendre tarafından verilmiştir. Euler'in çarpan tablosu üzerindeki ampirik çalışmaları sonucunda, şu yaklaşım formülüne varmıştır:

$$(28) \quad x / \pi(x) \cong \ln(x) - B$$

Burada $\pi(x)$, x 'ten az veya ona eşit asalların sayısını belirtir; $\ln(x)$ x 'in doğal logaritmasıdır; B ise yavaşça değişen ve ortalaması yaklaşık 1,08 olan bir niceliktir. Gauss tarafından alternatif bir yaklaşıtırm formülü önerilmiştir:

$$(29) \quad \pi(x) \cong \int_2^x dx / \ln(x)$$

Daha sonra *logaritmik integral* adını alan bu integral $\text{Li}(x)$ şeklinde gösterilir.

Gauss x sonsuza giderken $\pi(x)/\text{Li}(x)$ oranının 1'e yaklaştığını iddia etmiştir ve bu iddia Belçikalı matematikçi De la Vallée-Poussin tarafından 1896'da kanıtlanmıştır. Legendre formülü Çebişev tarafından ampirik bir yasadan matematiksel bir varsayıma dönüştürülmüştür. 1848'de bu Rus matematikçi, $\pi(x)$ 'in $(x/\ln x)$ 'e oranı gerçekten de bir limite yaklaşıyorsa, bu limitin 1 olması gerektiğini ispatlamıştır. Limitin varlığı Fransız matematikçi Hadamard tarafından 1896'da kanıtlanmıştır. Çebişev-Hadamard önermesi artık *Asal Sayı Teoremi* olarak bilinir.

Hadamard Asal Sayı Teoremi'ni *Analitik Sayı Kuramı* yöntemleriyle, yani sonsuz süreçler aracılığıyla ispatladı. Pek çok uzman önermenin doğrudan aritmetik ispatının asla bulunamayacağını düşünüyordu, ama 1950'de böyle bir ispata Selberg ile Erdős'ün ortak çabalarıyla ulaşıldı.

Asal Sayı Teoremi'nden birtakım sonuçlara atlamamak gerektiği şu örnekten görülecektir: Birbirini takip eden bir milyon tamsayıdan oluşan şu sıralama,

$$(30) \quad 1.000.001! + 2, 1.000.001! + 3, \dots 1.000.001! + 1.000.001$$

bileşik sayılardan meydana gelen "gediksiz bir blok" oluşturur, zira $(k+1)$ 'den büyük ve $(N+1)$ 'den küçük oldukça $N! + k$, k 'ya bölünebilir. Buradan hareketle, bu aralıktaki asalların sayısının sıfır olduğu görülür, oysa yaklaşıtırm formülü insanı yeterince büyük olan her aralıkta asalların var olduğuna inanmaya götürür.

Asallar için Formüller

Bu arayış Fermat'ya kadar uzanır. Amacı x argümanının *tüm* tamsayı değerleri için asal sayı verecek bir $G(x)$ fonksiyonu bulmaktır; aranan fonksiyon sadece toplama ve çarpma içerecektir ki, sürecin herhangi bir adımında –başta, arada, sonda– *yalnızca tamsayılar* söz konusu olacaktır. Bunlara *aritmetik fonksiyonlar* veya *tamsayı fonksiyonları* demek uygun olur; ama bu terimler zaten kullanılmış olduğundan ben onlara *genel* denilmesini öneriyorum. Genel fonksiyonların prototipi, *katsayıları tamsayı olan bir polinomdur*. Başka bir örnek olarak:

$$(31) \quad a^x + b, a^{G(x)} + H(x), G(x)^{H(x)} + K(x)$$

Burada a, b tamsayıdır; G, H, K ise *pozitif* tamsayı katsayılı polinomlardır.

Getirilen kısıtlamalara rağmen, genel fonksiyonlar çok çeşitlidir ve bu fonksiyonlardan en az birinin x 'in tüm tamsayı değerleri için asalları gösterip göstermeyeceğini merak etmek doğaldır. Şu âna kadar böyle bir fonksiyon bulunamamıştır; ama bu tür bir formülün var olmadığı ispatlanmış da değildir. Öte yandan, belli tür genel fonksiyonların yalnızca asalları ifade edemediği ispatlanmıştır. Bu çeşit önermelerin ilklerinden biri Euler'in şu ifadesidir: *Herhangi bir genel polinom, argümanın en azından bir değeri için bileşik değerler almak zorundadır*.

Euler'in teoremi şu cebirsel lemmaya dayanır: $P(x)$ herhangi bir polinomsa, buna göre

$$Q(x) = P[x + P(x)]$$

polinomu için $P(x)$ bir çarpandır. Dolayısıyla, $P(x) = x^2 + 1$ dersek, buradan,

$$(32) \quad Q(x) = [x + (x^2 + 1)]^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 + 2x(x^2 + 1) + x^2 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)$$

Genel lemmanın kanıtı da bu örneğin yolundan gider ve son derece formeldir; o nedenle bunu okura bırakıyorum.

$P(x)$ 'in genel bir polinom olduğunu varsayalım; a herhangi bir tamsayı olsun ve $b = P(a)$ olsun; o zaman lemmaya göre, $P(a + b)$ tamsayısı b 'ye bölünebilir ve bu yüzden bileşiktir, $b \neq 1$ koşuluyla. Dikkat edecek olursak, eğer $P(x)$ polinomunun derecesi n ise, o zaman cebirin temel teoremine göre $P(x)$ 'i 1 yapan en fazla n değer mevcuttur, bunun sonucunda Euler teoremi *herhangi bir genel polinom sonsuz sayıda bileşik değer alabilir* anlamına gelecek şekilde genişletilebilir.

Yukarıdaki soruyla yakından bağlantılı olan bir soru daha var: *Yalnızca* asalları ifade etmeden *sonsuz sayıda* asal değer alabilecek genel fonksiyonlar var mıdır? Öklit'in teoremi bu sorunun cevabının olumlu olduğunu ima ediyor; zira şu şekilde ifade edilebileceği gayet açıktır: $G(x) = 2x + 1$ *lineer fonksiyonu sonsuz sayıda asal değer alabilir*. Euler ve Legendre aynı şeyin $3x + 1$, $3x + 2$, $4x + 1$, $4x + 3$ gibi aritmetik ilerlemeler için de geçerli olduğunu varsaydı; Gauss da *ilk terim ile ilerlemenin farkının birbirine göre asal olması durumunda herhangi bir aritmetik ilerlemenin sonsuz sayıda asal içerdiğini* ileri sürdü. Başka bir ifadeyle,

$$(33) \quad G(x) = px + q$$

lineer fonksiyonu p ve q tamsayılarının birbirine göre asal olmaları durumunda sonsuz sayıda asal değer alacaktır. Bu önerme 1826'da Lejeune Dirichlet tarafından çok ince analitik argümanlardan yararlanılarak ispatlanmıştır.

Öte yandan, Dirichlet'nin yöntemlerini *lineer olmayan* fonksiyonları kapsayacak şekilde genelleştirmeye yönelik tüm çabalar şu âna dek başarısız olmuştur. Öyle ki, bu alanda Dirichlet'nin zamanından beri katedilen çok büyük mesafelere rağmen, sonsuz sayıda asal değer alabileceği matematiksel kesinlikle bilinen tek bir lineer olmayan genel fonksiyon bile bilinmiyor.

Problemin mevcut durumunu ortaya koyan bazı klasik örneklerle göz atalım:

1. *İkinci dereceden* $G(x) = x^2 + 1$. $G(x)$ 'in asal olması için gerekli koşullardan biri x 'in 4 ya da 6 rakamıyla bitmesidir. Bu bize 17, 37, 197, 257, ... değerlerini verir. Bu dizinin ilk 66 terimi 12 asal sayı içerir. Bu türden çok sayıda daha büyük asallar olduğu biliniyor,

ama kümenin *sonlu mu yoksa sonsuz mu* olduğu hâlâ cevaplanmamış bir sorudur.

II. *Mersenne fonksiyonu* $G(x) = 2^x - 1$. Daha önce de değindiğimiz gibi, $G(x)$ 'in asal değerlerine Mersenne sayıları denir ve günümüzde bu türde bilinen yalnızca 17 tamsayı vardır. Sonsuz sayıda Mersenne asalları olduğu varsayımı ispatlanmamıştır.

III. *Fermat fonksiyonu* $G(x) = 2x + 1$. Herhangi bir tamsayı, M 'nin tek sayı olması durumunda $x - 2^p M$ biçiminde ifade edilebileceğinden, $G(x)$ 'in asallığı için *gerekli* bir koşul $M = 1$ 'dir. Bu, sayfa 58'de sözü edilen Fermat sayılarını verir. Burada Gauss'un temel bir teoremi nedeniyle bu tamsayıların geometrik yapıların inşasında önemli bir rol oynadığı eklenebilir. Bu teoreme göre, *n kenarlı bir düzgün çokgenin bir cetvel ve pergel ile çizilebilmesi için mutlaka ve mutlaka n'nin bir Fermat asalı ya da Fermat asallarının karesiz bir çarpımı olması gerekir*. Burada yine Fermat asallarının sonlu mu yoksa sonsuz mu olduğu sorusu sayı kuramının çözülmemiş problemlerinden biridir.

Pisagor Üçlüleri

Bu tamsayılar modern zamanlarda sayı kuramı alanında pek çok keşfe ve hâlâ çözüm bekleyen birçok akıl karıştırıcı probleme yol açmıştır. Bu modern gelişmenin arkasındaki itici gücü, yazılarının kenarlarındaki notlarda bu tamsayılara dair pek çok teoremi ispatsız olarak veren Fermat sağlamıştır; aşağı yukarı bir asır sonra da bu teoremler Euler, Lagrange, Gauss ve Liouville tarafından doğrulanmış ve geliştirilmiştir.

Açıklamaya yardımcı olması için şu denklemin herhangi bir *tamsayı* çözümüne *üçlü* adını vereceğim.

$$(34) \quad x^2 + y^2 = R^2$$

x ve y üçlünün *kenarları*, R ise *hipotenüsüdür*. Eğer öğelerin ortak böleni yoksa *ilkel* bir üçlü, aksi takdirde *ilkel olmayan* bir üçlü söz konusudur. (x, y, R) bir üçlüyse, o zaman bariz şekilde (nx, ny, nR) de bir üçlüdür; dolayısıyla, bir ilkel üçlüye sonsuz tane ilkel olmayan üçlü karşılık gelebilir ve bu da ilkel üçlüleri ön plana çıkarır. Bu

ilkelerin doğrudan tanımlarından gelen kimi nitelikleri antikçağlarda da bilinirdi. Bunların en önemlileri: (a) *ilkel üçlüler kümesi sonsuzdur*, (b) *ilkel üçlünün herhangi iki ögesi birbirlerine göre asaldır*, (c) *ilkel üçlünün kenarları birbirine zıttır (yani biri tek sayıysa diğeri çifttir, ikisi birden tek ya da çift olamaz)*, hipotenüs ise her zaman tek sayıdır.

Fermat'ın yaklaşımının çıkış noktası, açıkça ifade edilmese de Diophanthos, Fibonacci ve Vieta tarafından kullanılan bir önermeydi ve bir Pisagor üçlüsünde hipotenüsün iki karenin toplamı olarak ifade edilebileceğini söylüyordu. Simgelerle ifade edersek, eğer R "kabul edilebilir" bir hipotenüsse,

$$(35) \quad p^2 + q^2 = R$$

eşitliğini sağlayan p ve q tamsayıları vardır. Bu koşulun yeterli olduğunu şu özdeşlikten çıkarıyoruz:

$$(36) \quad (p^2 + q^2)^2 = (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2$$

Dolayısıyla denklem (34) şu üçlü tarafından karşılanır:

$$(37) \quad x = p^2 - q^2, y = 2pq, R = p^2 + q^2,$$

ki burada p ve q herhangi iki tamsayıdır. Bu yeterli koşulun aynı zamanda zorunlu olduğunun ispatı, burada verebileceğimden daha fazla yer gerektiren son derece incelikli bir argümana dayanır.

(37)'deki denklemler hem ilkel hem de ilkel olmayan üçlüler için geçerlidir; ancak, p ve q parametrelerini birbirine göre asal ve teklik çiftlik açısından zıt olacak şekilde kısıtlamak suretiyle tüm ilkel olmayan üçlülerin otomatikman elenebileceğini görmek kolaydır. Bu, her ögesi bir tek sayının karesiyle bir çift sayının karesinin toplamından oluşan aşağıdaki tablodan açıkça görülebilir. Üstü çizilen öğeler, onları üreten parametrelerin aralarında asal olup olmamasına göre ilkel olmayan üçlüler teşkil ederler; öte yandan, altı çizili öğeler asal hipotenüsleri gösterir, ki göreceğimiz gibi bunlar da Fermat'ın Pisagor problemine yaklaşımında temel bir role sahiptir.

Burada belli bir tek sayının iki karenin toplamı olarak gösterilebileceğini kabul etmek biraz sorun yaratır. Kuşkusuz, bir tek ve bir

	4	16	36	64	100	144	196	...
1	<u>5</u>	<u>17</u>	<u>37</u>	65	<u>101</u>	145	<u>197</u>	...
9	<u>13</u>	25	45	<u>73</u>	<u>109</u>	153	205	
25	<u>29</u>	<u>41</u>	<u>61</u>	<u>89</u>	125	169	221	
49	<u>53</u>	65	85	<u>113</u>	<u>149</u>	<u>193</u>	245	
81	85	<u>97</u>	147	145	<u>181</u>	225	<u>277</u>	
121	125	<u>137</u>	<u>157</u>	185	221	265	<u>317</u>	
169	<u>173</u>	185	205	<u>233</u>	<u>269</u>	<u>313</u>	365	
	...							

çift karenin toplamı her zaman $4n + 1$ biçimindedir, bu da şu dizinin herhangi bir terimini otomatikman "diskalifiye" eder:

$$4n - 1: \quad 3, 7, 11, 15, 19, 23, \dots$$

Ne yazık ki, sırf şu diziye ait olmak yeterli değildir:

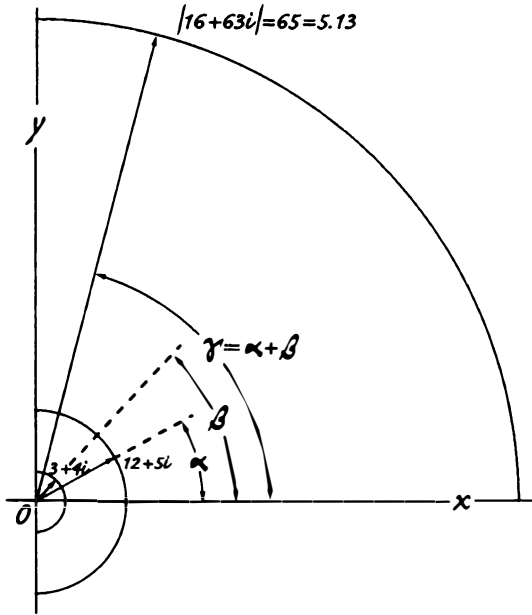
$$4n + 1: \quad 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 41, \dots$$

Örneğin, 9 iki karenin toplamı olarak çözümlenemez, keza 21 veya 33 de. Nitekim Fermat'nın parlak selefi Vieta'nın çabalarını engelleyen de yeterli bir koşul bulma konusundaki bu zorluktu.

Fermat bu zorluğu *asal* ve *bileşik* hipotenüsleri birbirlerinden ayırarak aştı. Aşağıda buna karşılık gelen üçlülere *asli* ve *bileşke* adını vereceğim. Asli üçlülere örnek olarak (3, 4, 5), (5, 12, 13) ve (15, 8, 17); bileşke üçlülere örnek olarak ise (7, 24, 25), (63, 16, 65) ve (33, 56, 65) verilebilir. Fermat ispatında kendi ünlü sayfa kenarı teoremlerinden birine başvuruyor: *$4n + 1$ biçimindeki herhangi bir asal, iki karenin toplamı olarak ifade edilebilir ve dahası, bu mümkün olan tek ifadedir.* Her zamanki gibi bu kenar notunun da yanında bir ispat yoktur, ancak, Roberval'e bir mektubunda Fermat *sonsuz iniş* yöntemine dayanan sağlam bir ispata sahip olduğunu ifade ediyor. 125 yıl sonra, Euler iniş ilkesini temel alarak lemmanın ilk yayımlanmış ispatını sundu.

Teoremin doğrudan ilk sonucu *$4n + 1$ biçimindeki tüm asalların bir hipotenüs olabilmesidir.* Ya bu türden bileşik tamsayılar? Bu soru Fermat'nın kenar notunda şöyle cevaplanıyor:

$p, q, r, \dots$ tek asal sayı ve $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ pozitif tamsayılar iken $R = p^\alpha q^\beta r^\gamma, \dots$ olsun. O zaman dört farklı vakanın ayırımına varmalıyız:



ŞEKİL 3: BİLEŞKE ÜÇLÜLER VE KARMAŞIK TAMSAYILAR

I. Tüm asal bölenler $4n + 1$ tipidir. Buna göre Pisagor denklemi en azından bir ilkel çözüm verir.

II. Tüm asal bölenler $4n - 1$ tipidir. Denklem (34) çözüm vermez.

III. Asal bölenlerden herhangi biri $4n + 1$ tipidir, öte yandan $4n - 1$ tipi herhangi bir asal bölen çarpıma çift sayılı bir üssüyle girer. Denklem, ilkel veya başka türlü bir çözüm vermez.

IV. $4n - 1$ tipi asal bölenlerden herhangi biri, çarpıma tek sayılı üssüyle girer. Denklem, ilkel veya başka türlü bir çözüm vermez.

Fermat'ın yaklaşımı, Pisagor denkleminin, antikçağda tahmin edildiği gibi sadece sonsuz sayıda ilkel çözümünün değil, aynı zamanda sonsuz sayıda *asli çözümünün* de olduğunu gösteriyor. Bunlar ilkel olsun olmasın tüm diğer çözümleri elde etmek için birer yapıtaşı olarak kullanılabilir. Bileştirme süreci ise tamamen biçim-

sel olup (bkz. Şekil 3) *karmaşık sayıların çarpımıyla* bire bir örtüşür. Gerçekten de, "karmaşık tamsayı" $x + iy$ 'yi bir üçlünün kenarları ve mutlak değeri $R = |x + iy|$ 'yi ise hipotenüsü olarak yorumlayabiliriz. Bu tür iki karmaşık tamsayının çarpımı

$$(38) \quad (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y) \text{ 'dir}$$

ve bu yeni tamsayının öğeleri de denklem (34)'ün yeni bir çözümünü şu özdeşlik şeklinde sağlar:

$$(39) \quad (xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)$$

Problemin mevcut durumu nedir? Diyelim ki hipotenüs için belli bir R tamsayısı veren üçlüleri belirlemeniz istendi. Son iki basamağı R 'nin $4n + 1$ tipi olduğunu gösteriyor, dolayısıyla sizin de bir sonraki adımınız R 'nin asal bölenlerini bulmak, ki R yeterince büyük olduğunda gayet zor bir iştir bu. R 'nin bir asal sayı olduğunu kanıtlamayı başardınız diyelim. Buna göre R 'nin hipotenüs olduğu yegâne bir üçlü vardır ve işiniz *Diophanthos denklemini* ($p^2 + q^2 = R$) çözmeye indirgenir. Bu problemse Lagrange tarafından $\sqrt{R}$ ile bağlantılı *sürekli kesrin* incelenmesine indirgenmiştir. O zamandan beridir problemle baş etmek için başka yöntemler de icat edilmiştir; ancak, genel olarak bir tamsayıyı *oluşturan kareleri* belirleme problemi de en azından bir tamsayıyı asal sayı bölenlerine ayrıştırmak kadar zordur. Bu koşullar altında, bu eski problemin tam anlamıyla çözülmüş olduğunu söylemek doğru olmaz.

Euler Üzerine Bir Bölüm

1774'te yayımlanan bir makalede Euler, aralarında 1.000.009'un da olduğu birkaç büyük asal sayı sıralıyordu. Daha sonraki bir makaledeyse hatasını kabul edip söz konusu tamsayının asal bölenlerini veriyordu:

$$(40) \quad 1.000.009 = 293 \times 3.413$$

İlk makale döneminde 1.000.009'un $1.000.009 = 1.000^2 + 3^2$ olarak *karelerle benzersiz bir şekilde ifade edilebildiği* izlenimine kapıldığını, ama daha sonra $235^2 + 972^2$ şeklinde söz konusu sayının bile-

şik niteliğini gösteren *ikinci bir ayrıştırma* keşfettiğini söylüyordu.

Euler daha sonra 1.000.009'un bölenlerini, daha önceki bir makalesinde sunduğu bir teoremin ispatı doğrultusunda biçimlendirilmiş bir yöntemle hesaplamaya koyuldu. Fermat'ın kenar notuna kadar uzanan önermeye göre: *Eğer bir R tamsayısı iki kareye birden fazla şekilde bölünebiliyorsa, o zaman R bileşiktir.* Euler'in yöntemi basit bir lemmaya dayanır, hatta o kadar basittir ki çoğu okur bunu kerameti kendinden menkul olarak kabul etmeye meyillidir. A/B ile a/b iki kesirse ve ikincisi *en sade halindeyse*, o zaman $A/B = a/b$ eşitliği, $A = na$ ve $B = nb$ sağlayan bir n tamsayısının varlığını ima eder.

Şimdi problemi tekrar ifade edelim. Eğer

$$(41) \quad R = p^2 + q^2 = p'^2 + q'^2 \text{ ise,}$$

R'nin bileşik olduğunu gösterin ve bölenlerini belirleyin. İlk önce (41)'i bir oran olarak yazıyoruz

$$p^2 - p'^2 = q'^2 - q^2 \text{ veya } \frac{p + p'}{q' - q} = \frac{q' + q}{p - p'} = \frac{a}{b}$$

Burada a ile b'nin birbirlerine göre asal oldukları varsayılıyor. Daha sonra yukarıdaki lemmaya başvurarak şu dört bağıntıyı elde ediyoruz:

$$\begin{array}{ll} p + p' = ma & q' + q = na \\ q' - q = mb & p - p' = nb \end{array}$$

Bunların karesini alıp topladığımızda:

$$(42) \quad (m^2 + n^2)(a^2 + b^2) = 2(p^2 + q^2 + p'^2 + q'^2) = 4R$$

Buradan, a ve b'nin teklik çiftlik açısından birbirine zıt olması durumunda $a^2 + b^2$ 'nin R'nin aradığımız bölenlerinden biri olduğu; öte yandan, hem a hem b tek sayıysa, $1/2 (a^2 + b^2)$ 'nin R'nin bir böleni olduğu sonucuna varıyoruz.

Bu yöntem $R = 1.000.009 = 1000^2 + 3^2 = 235^2 + 972^2$ 'ye uygulandığı zaman, şu orana ulaşırız:

$$\frac{1972}{238} = \frac{232}{28} = \frac{58}{7}$$

Dolayısıyla $a = 58$, $b = 7$, $a^2 + b^2 = 3413$, ki bu da aranan iki bölenden biridir.

Euler'in bu ikinci ayrıştırmayı nasıl bulduğu bilinmiyor. Bu usta hesapçının muhteşem sayı duyusu ve olağanüstü hafızası zaten yeterince hayranlık uyandırıcı, ama gizemi daha da derin kılan, bu olay gerçekleştiğinde Euler'in yetmişlerinde ve on yıldan fazla süredir kör –ondan önce de uzun süre kısmen kör– olmasıdır.

Mükemmel Sayılar Üzerine

Burada Euler'in Öklit'in teoremi üzerine ispatının serbest bir versiyonunu sunacağım. Bahsettiğim teorem şu: Tek sayı çarpan asal olmak üzere, *tüm çift mükemmel sayılar $2^{p-1}(2^p - 1)$ biçimindedir; aynı şekilde, M bir Mersenne sayıysa, yani $2^p - 1$ biçiminde bir asal-sa, o zaman $2^{p-1}M$ bir mükemmel sayıdır.*

Herhangi bir çift tamsayı, p 'nin 1 'den büyük olduğu ve M 'nin tek sayı olduğu durumda $P = 2^{p-1}M$ biçiminde ifade edilebilir. S ile P 'nin tüm tek sayı bölenlerinin toplamını, Σ ile de P dahil tüm bölenlerin toplamını ifade edelim ve $\Sigma = S - M$ diyelim. Dikkat eder-seniz M asal olduğunda $\Sigma = 1$, M bileşik olduğundaysa $\Sigma > 1$.

İki toplam Σ ve S şu genel bağıntıyla birbirlerine bağlıdır:

$$(43) \quad \Sigma = S + 2S + 2^2S + \dots + 2^{p-1}S = S(2^p - 1).$$

Daha sonra P 'nin bir mükemmel sayı olduğunu varsayarsak, bu yukarıdakilere ek olarak bir de elimizde $\Sigma = 2P = 2^pM$ var demektir. Σ 'nin bu iki değerini tanımlarsak, şu denklemleri elde ederiz:

$$(44) \quad S = 2^p \Sigma \quad M = (2^p - 1) \Sigma$$

İlki S 'nin çift sayı olduğunu gösterir, biz de buradan Σ 'nin tek sayı olduğu sonucuna varıyoruz. İkinci bağıntı bize bir alternatif sunuyor. Ya Σ 1 'e eşittir ve M de bir asal sayıdır veya M bileşiktir ve Σ da M 'nin bir bölenidir. Bu ikinci hipotez P 'nin 1 , M ve Σ şeklinde en az üç tek sayı böleni olduğu anlamına gelir, ki *tüm tek sayı bölenlerin toplamının* S olduğu bir durumda bu üçünün toplamı $1 + S$ olduğu için bu imkânsızdır. Buradan hareketle, $\Sigma = 1$ ve M de asaldır; o zaman denklem (44) de $M = 2^p - 1$ olduğunu gösterir.

Bu düşünce zincirinin bir halkası da Sylvester'in, *mükemmel tek sayının –eğer böyle bir şey varsa– en az üç asal böleni olması gerektiğine* dair ispatıdır. İlk olarak sadece bir asal bölen olma ihtimalini ortadan kaldıralım. Eğer x bir asal sayıysa ve P de x^m biçiminde bir mükemmel tamsayıysa, o zaman

$$(45) \quad x^m = 1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1} = \frac{x^m - 1}{x - 1}$$

Bu bizi imkânsızlığı ispatlanmış olan $x^m(2 - x) = 1$ bağıntısına götürür.

Ayrıca, x ve y 'nin *birbirinden farklı tek asal sayılar* olduğu durumda $P = x^m y^n$ biçiminde bir mükemmel tamsayı da olamaz. X ile Y sırasıyla x^m ile y^n 'nin bölenlerinin toplamı ve Σ da P 'nin tüm bölenlerinin toplamı olsun. Buna göre, P 'nin mükemmel olduğu varsayıldığa göre, $\Sigma = 2P$. Öte yandan, $\Sigma = XY$. Σ 'nın bu iki değerini eşitleyerek şunu elde ediyoruz:

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^m)(1 + y + y^2 + \dots + y^n) = 2x^m y^n$$

ya da

$$(x^{m+1} - 1)(y^{n+1} - 1) = 2(x - 1)(y - 1)x^m y^n$$

Bu bağıntının imkânsız olduğunu kanıtlamak adına, Sylvester şu biçimde ifade ediyor:

$$(46) \quad \left(1 - \frac{1}{x^{m+1}}\right) \left(1 - \frac{1}{y^{n+1}}\right) = 2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{y}\right)$$

Burada sağ taraf asgari değerine $x = 3, y = 5$ için ulaşır böylece asla $16/15$ 'in altına düşmezken, sol taraf ise asla 1 'i aşmaz.

Kökler ve Köklü İfadeler Üzerine

Üçüncü veya ikinci dereceden herhangi bir problem ya bir açının üçe bölünmesine ya da küpün iki eş küpe bölünmesine indirgenebilir.

VIETA

Fenikelilerin Armağanı

Hem Yunanlıların hem de Yahudilerin yazı sistemlerini Fenikelilere borçlu oldukları yönündeki genel geçer kuram, sembollerin adlarındaki benzerlikçe de destekleniyor: Örneğin Yunanca *alfa*, *beta*, *gamma*'yı İbranice *alef*, *bet*, *gimel* ile karşılaştıralım. Ayrıca Yunanlıların ve Yahudilerin, Fenike yöntemini kendi ihtiyaçlarına uyarlarken sistemin *ikili* niteliğine bağlı kalmış olmaları da önemlidir: Gerçekten de, alfabenin her bir harfi yalnızca bir sesin kaydı değil, aynı zamanda bir sayının da simgesiydi. Bunun bir sonucu 3. Bölüm'de değinilen Ebced idi. Ne var ki Yunan yazısının ikili doğasının matematiğin rotasını birden fazla şekilde etkileyecek başka sonuçları da oldu.

Fonetik yazı ister adı bilinmeyen bir Fenikeli dâhinin icadı olsun, isterse Fenikeliler yazılarını daha eski bir medeniyetten almış olsunlar, kesin olan bir şey vardır: Bu ilke daha önceki tüm kayıt tutma yöntemlerine göre o kadar büyük bir gelişmeydi ki Yunanlılarca benimsenmesinden sonra kayda değer bir değişim göstermedi. Yazının çok az sembol gerektirmesi büyük bir avantajdır, zira bu sayede vasat bir zihin kapasitesine sahip biri bile harfleri belli bir sıradan rahatça ezberleyebilir. Alfabenin ordinal ya da *sırasal* yönü onu sayma sürecinin doğal bir karşılığı kılar. Ama bağıntı pek de eksik-

siz değildir, zira Yunan alfabesi yirmi iki harf içerirken konumsal numaralandırma ve sözlü sayı dilinin ondalık yapısı on sembol gerektirir. Yunanlılar alfabelerinin tüm harflerini sayıtlar olarak kullandılar ve Fransızların deyişiyle bu utandırıcı bolluk, kuşkusuz aritmetikte gerçek ilerlemeyi mümkün kılan konum ilkesinin keşfinin önündeki ciddi bir engeldi.

Yunan alfabesinin bu ikili niteliğinin matematiğin diğer kolları üzerinde de köstekleyici bir etkisi vardı. Bugün artık, bilinen, bilinmeyen, değişken veya sabit, özellikle günümüzde *katsayılar* ve *parametreler* adını verdiğimiz türde *soyut* nicelikleri ifade edecek imkânlar icat edilmeden cebirde kayda değer bir ilerlemenin mümkün olmadığını biliyoruz. Bunun başarılması için harfin sayısal değerinden kurtarılması gerekiyordu. Arap rakamlarının gelişi bu yönde önemli bir adımdı. Yine de, geleneğin gücü o kadar büyüktür ki, Fibonacci ile Vieta arasındaki yaklaşık dört yüz yılda pek az gelişme sağlanmıştı. Şüphesiz on altıncı yüzyılın İtalyan matematikçileri üçüncü ve dördüncü dereceden denklemleri çözmek için yöntemler geliştirmişlerdi; ne var ki, çözümleri genel bağlamda değil, tipik sayısal örneklerle gösterilmek yoluyla ifade edilmişti. Neticede 1592'de Vieta'nın *harfli gösterim* üzerine çalışması yayımlanana dek harf, Fenikelilerin boynuna geçirdiği zincirlerden kurtulamayacaktı.

Harriot İlkesi

Bu yazı sıfırın, cebirin Denklem Kuramı diye bilinen kolunda oynadığı rol üzerinedir. Daha kesin olmak gerekirse, burada ilgilendiğimiz, bir denklemin tüm terimlerini eşit işaretinin bir tarafına aktararak onu $P(x)$ 'in bir *polinomu* ifade ettiği $P(x) = 0$ biçiminde yazma prosedürüdür.

Bu prosedüre *Harriot İlkesi* adını veriyorum. Coğrafyacı, Walter Raleigh'in bir zamanlar hocası ve Virginia topraklarının ilk haritacısı olan Thomas Harriot'ın kendi döneminde matematikçi olarak bir ünü yoktu. Aslına bakılırsa söz konusu ilke 1631'e kadar ortaya çıkmadı, ki Harriot o tarihten neredeyse on yıl önce ölmüştü. O zaman bile bu yenilik başka birine atfedilmişti, zira Harriot'ın *Praxis* adlı eserinin yayımlanmasından kısa süre sonra, Descartes'in Har-

riot'ın fikirlerinden cömertçe yararlandığı analitik geometri kitabı çıkmıştı, ama Descartes her zamanki gibi kaynağından hiç söz etmemişti. Descartes'ın şöhreti o kadar büyüktü ki, neredeyse bir asır boyunca bu çığır açan ilke onun bir başarısı kabul edilmişti.

Çığır açan deyimini bilerek kullanıyorum, çünkü aşırı basitliği-ne rağmen, bu ilke tarihsel önem açısından Vieta'nın harfli gösterimi buluşu ile aynı yere sahiptir. İlk olarak, *bir denklemin çözümünü bir polinomun çarpanlarının bulunmasına indirgeyen* Harriot yaklaşımı denklem tekniklerinde çok büyük bir gelişme sağladı. İkinci olarak, bir denklemin köklerini katsayılarına bağlayan ilişkilerin incelenmesine yol açtı ve bu nedenle *simetrik fonksiyonlar, cebirin temel teoremi, karmaşık bir değişkenin fonksiyonları* gibi sonraki pek çok kuramsal gelişmenin habercisi oldu.

Bu cömert bereketin kaynağını anlamak için, ilkenin geçerli olduğu gerçek ve karmaşık niceliklerin cebirin formel yasalarına olduğu kadar, *Sıfır Çarpan Yasası*'na da tabi olduklarını anımsamalıyız. Sözlerle ifade edilirse, bu yasa *çarpanlarından biri sıfır olmadıkça bir çarpımın sıfıra eşit olamayacağını* ifade eder, yani sembollerle, $uv = 0$ bağıntısı, şunlardan birini ima eder: $u = 0$, $v = 0$ ya da $u = v = 0$.

Ama eğer Harriot ilkesine o büyük gücü veren bu yasaysa, neden ne Harriot ne de ondan sonraki iki yüzyıl boyunca ilkesini uygulayan matematikçiler ordusu Sıfır Çarpan Yasası'ndan –dolaylı bile olsa– söz etmediler? Bunun cevabı şudur: Bu konuda bir beyanda bulunmadan önce Sıfır Çarpan Yasası'na bir alternatif düşünebilmek gerekir; daha karmaşık sayıya bile açık kuşkuyla bakılan Harriot'ın zamanında böyle bir şey kesinlikle söz konusu değildi. Ve iddia ediyorum ki, on yedinci ve on sekizinci yüzyılda yaşamış çoğu matematikçi, önce cebir kuralları yazıp daha sonra o kurallara uya-cak matematiksel varlıklar arama fikrine bir delinin zırvalamaları gözüyle bakardı.

Denklem ve Özdeşlik

Önceki yazıda ele alınan Harriot yaklaşımı *cebir denklemleri ile polinom fonksiyonları* arasındaki dikkat çekici bağlantıyı ortaya çıkarır ve bu iki kavramın birbirinin yerine geçebilir olduğunu düşündü-

rür. Ancak, şimdi göreceğimiz gibi bu benzetim biraz eksiktir ve fazla ileriye götürüldüğünde saçmalık sınırında sonuçlar verebilir.

Verilen denklem belirsizliğe yer bırakmadan tanımlanırsa, yani tekabül eden polinomun bütün katsayıları problemdeki veriler bağlamında ifade edilmişse sorun çıkmaz. Ne var ki durum nadiren böyledir: İster kuramsal ister uygulamalı olsun, matematikteki pek çok problem *değişken parametrelere* dayanır ve bu problemlerden birinden türetilen denklemin katsayıları sabitler değil, bu parametrelerin fonksiyonlarıdır. Bunun sonucu ise elde tek bir denklem yerine *bir denklemler kümesi* olmasıdır.

Örneğin, tek değişkenli *ikinci dereceden genel fonksiyonun* formülü şudur:

$$(47) \quad Q(x) = ax^2 + bx + c$$

Belirsiz a, b, c katsayılarının pozitif, negatif ve sıfır tüm rasyonel değerleri kapsayabildiğini varsayalım. O zaman (Q) kümesi hakiki ikinci derece fonksiyonların yanı sıra şu tür fonksiyonlar da içerir:

$$(48) \quad \begin{cases} Q(x) = 0 \cdot x^2 + bx + c & (b \neq 0) \\ Q(x) = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + c & (c \neq 0) \\ Q(x) = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \end{cases}$$

Bunu grafik açıdan yorumlarken, $y = Q(x)$ fonksiyonunun *parabollerin* yanı sıra x eksenine paralel çizgileri ve x ekseninin kendisi de dahil olmak üzere *doğruları* da ifade ettiğini söyleriz.

Ancak, aynı özel vakaları denklemler olarak ele almaya kalktığımızda, böyle kapsayıcı yorumlar yapamayacağımızı görürüz. Gerçekten de, kuramsal cebir açısından baktığımızda, $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + c = 0$ ($c \neq 0$) bağıntısı denklem değil, bir *bağdaşmazlıktır* ve $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + c = 0$ bağıntısıysa bir denklem değil, *totolojidir*. Üstelik, bu zorluklar *sıfır sayısının tanımının* doğasında var oldukları için, Harriot prosedürü gibi biçimsel aygıtlarla kaçınılamazlar. Aslında, bu sonucusunun Sıfır Çarpan Yasası olmadan bir işe yaramayacağını ve bu yasanın da sıfırın sayı bölgesine kabul koşullarının bir sonucu olduğunu gördük.

Bunun için, bir polinom bağıntısı mutlaka hakiki bir denklem olmak zorunda değildir. Bir *bağdaşmazlık* veya bir *özdeşlik* de olabi-

lir. Tuhaftır ki, bu muğlaklığın bizzat kendisi özdeşlikleri kanıtlamakta kullanılabilecek etkili bir araca dönüştürülebilir. Bu yöntem şu önermeden yola çıkar: *n. dereceden bir polinom bağıntısı x'in n' den fazla farklı değerince sağlanıyorsa, o bağıntı bir özdeşliktir, yani x'in herhangi bir değerince sağlanır.*

Örneğin, şu ikinci derece polinomu ele alalım:

$$P(x) = (b - c)(x - a)^2 + (c - a)(x - b)^2 + (a - b)(x - c)^2$$

Doğrudan yerleştirmeyeyle şunu elde ederiz:

$$P(a) = P(b) = P(c) = (a - b)(b - c)(c - a)$$

Bu durumda bağıntı x'in ikiden fazla değerince sağlanır ve dolayısıyla bir özdeşliktir, yani:

$$(49) \quad (b - c)(x - a)^2 + (c - a)(x - b)^2 + (a - b)(x - c)^2 = (a - b)(b - c)(c - a)$$

İkinci bir örnek için şu bağıntıya bakalım:

$$(50) \quad \frac{(x - a)(x - b)(x - c)}{(d - a)(d - b)(d - c)} + \frac{(x - b)(x - c)(x - d)}{(a - b)(a - c)(a - d)} + \frac{(x - c)(x - d)(x - a)}{(b - c)(b - d)(b - a)} + \frac{(x - d)(x - a)(x - b)}{(c - d)(c - a)(c - b)} = 1$$

Sol tarafa P(x) diyelim ve bu üçüncü dereceden polinomun x'in dört değeri için 1 olduğunu gözlemleyelim. Gerçekten de şunu buluruz:

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 1$$

ve bu bağıntının bir özdeşlik olduğu sonucuna varırız.

Üçüncü ve Dördüncü Derece Polinomlar

Lagrange'ın dörtten yüksek derecedeki denklemlerin köklerinin genelde köklü ifadelerle gösterilemeyeceği yönündeki düşüncesi Abel ve Galois tarafından doğrulanmıştı. Bunun kanıtlanması bu kitabın

kapsamı dışındadır; ancak, Euler ve Lagrange tarafından üçüncü ve dördüncü dereceden denklemler için kullanılan yöntemlerin (ki bu yöntemler Harriot ilkesinin denklem teknikleri açısından önemini de ortaya çıkarır) incelenmesiyle problemin yapısı hakkında pek çok şey öğrenilebilir.

Eğer şu özdeşlikte

$$(51) \quad H(x) = x^3 + a^3 + b^3 - 3abx = (x + a + b)(x^2 + a^2 + b^2 - ax - bx - ab)$$

a ve b 'yi veri, x 'i de bilinmeyen olarak kabul edersek, özdeşliği *kusurlu* üçüncü derece denklem $H(x) = 0$ 'ın bir kökünün $x = -a - b$ olduğu anlamına gelecek şekilde yorumlayabiliriz. Genel kusurlu üçüncü derece denklem şu biçimdedir:

$$(52) \quad x^3 + ux + v = 0$$

a ile b 'yi u ile v bağlamında bir ikinci dereceden denklemin kökleri olarak almak suretiyle (51) ile (52)'yi özdeşleştirmek daima mümkündür. Gerçekten de şunu buluruz:

$$(53) \quad a^3 + b^3 = v, -3ab = u, a^3b^3 = -u^3/27$$

ki bu da a^3 ve b^3 'ün şu denklemin kökleri olduğu anlamına gelir:

$$(54) \quad y^2 - vy - u^3/27 = 0$$

Bu çözen ikinci dereceden denklemin köklerini A ve B ile belirtirsek, o zaman $x = -\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$ üçüncü dereceden denklemin bir köküdür. Gösterilen hesaplamaların detaylarını doldurarak, *üçüncü dereceden denklemler için Cardan formülüne* varırız.

Lagrange'ın şu kusurlu dördüncü derece denklem için sunduğu çözüm de benzer bir çizgide ilerler.

$$(55) \quad x^4 + ux^2 + vx + w = 0$$

Aşağıdaki özdeşlik

$$(56) \quad (a + b + c + x)(a - b - c + x)(-a + b - c + x)(-a - b + c + x) = (a^4 + b^4 + c^4 + x^4) - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + x^2a^2 + x^2b^2 + x^2c^2) + 8abcx = H(x)$$

gösteriyor ki

$$x = -a - b - c, -a + b + c, a - b + c, a + b - c$$

kusurlu dördüncü dereceden $H(x) = 0$ 'ın kökleridir.

a, b, c 'yi (55) ile (56) özdeş olacak şekilde belirlemek mümkün müdür? Elimizde şu var:

$$a^2 + b^2 + c^2 = -u/2, abc = v/8,$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 = \frac{u^2 - 4w}{16}$$

Buradan da a^2, b^2, c^2 'nin şu denklemin kökleri olduğu sonucuna varırız:

$$(57) \quad y^3 + \frac{u}{2} y^2 + \frac{(u^2 - 4w)}{16} y - \frac{v}{8} = 0$$

A, B, C ile bu *çözen üçüncü dereceden denklemin* köklerini belirtirsek, buna göre,

$$x = -\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}, -\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C},$$

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C}, \sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C}$$

dördüncü dereceden denklemin aranan kökleridir. *Kökaltları* A, B, C 'nin genelde küp kökler içerdiğine dikkat edelim.

Bu zarif yaklaşım şu soruyu akla getiriyor: Üçüncü ve dördüncü dereceden polinomlarda bu kadar başarılı olan bir yöntem neden *beşinci* ve daha yüksek derecelere uygulanamamış? Euler ve Lagrange'ın kullandıklarına benzer n . dereceden ve n parametrede simetrik bir özdeşlik kurmak mümkündür; bu parametrelerden birini bilinmeyen kabul ederek, bu özdeşliği bir denklem olarak yorumlayabiliriz; bu denklemi de n . dereceden genel denklemle özdeşleştirerek, parametrelerle katsayılar arasında bağıntılar kurabilir ve nihayetinde de Euler ile Lagrange'ın *çözenlerine* benzer bir denkleme ulaşabiliriz.

Aslında bu yönde çeşitli girişimlerde bulunulmuştur ve bunların en dikkate değerleri Malfatti'ninkidir. Genel *beşinci* dereceden denklem için *Malfatti çözeni altıncı* derecedendir. Malfatti buradan yola

çıkarak n . dereceden bir denklemin çözeninin derecesi m 'nin şu formülle elde edildiğini buldu:

$$m = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$$

Ve bunun sonucunda n 'nin 4'ten büyük herhangi bir değeri için, *çözenin orijinal denklemden daha yüksek dereceden olduğunu* ileri sürdü.

Geometri ve Grafikler

Yunan tarihçileri konik kesitlerin keşfini, Platon'un çağdaşı ve Ök-lit'in *Öğeler*'ine ilham verdiği iddia edilen dâhi Eudoxos'un öğrencisi olan Menaechmos adlı birine atfeder. Menaechmos'un bu "katı gezeneklere", *küpü katlama* problemiyle uğraşırken –yani $x^3 = 2$ için bir yapı oluşturma peşindeyken– rastladığı ve bir *parabol* ile bir daire problemini çözdüğü anlatılır. Çözümünün detayları bilinmiyor, ama Şekil 4'te $x^3 - N = 0$ şeklindeki üçüncü dereceden genel binom denklemi için geçerli olan muhtemel bir versiyonu verilmiştir. Parabolün denklemi $y = x^2$ 'dir. "Çözen" daire, P noktası ($x = N$, $y = 1$) olmak üzere OP çapına sahip daire olarak çizilir. Buna göre dairenin denklemi

$$(58) \quad x^2 + y^2 - Nx - y = 0 \text{ 'dır.}$$

y 'yi iki denklem arasında yok ederek şunu elde ederiz: $x^4 - Nx = x(x^3 - N) = 0$. Parabol ile daire O ve Q'da kesişirler ve ikincisinin apsisi $x = -\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$ 'dir.

Yukarıdaki varsayıma kayda değer bir inanılrlık katan, yaklaşık on beş yüzyıl sonra Ömer Hayyam'ın genel üçüncü ve dördüncü derecedeninin aynı ilkeye, *yani sabit bir parabol ile hareketli bir dairenin kesişimlerine* dayalı bir grafik çözümünü ileri sürmesidir. y 'yi

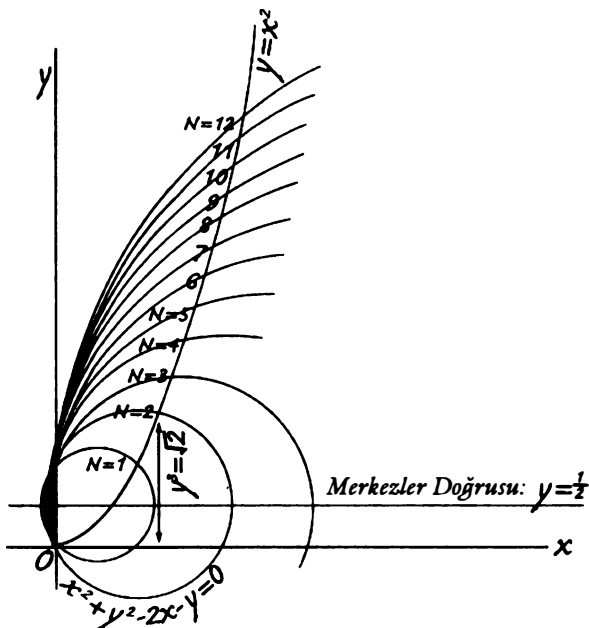
$$x^2 + y^2 + ux + vy + w = 0 \text{ ile } y = x^2$$

arasında eleyerek, dördüncü dereceden şu denklemi elde ederiz:

$$x^4 + (v + 1)x^2 + ux + w = 0$$

Söz konusu *dördüncü dereceden* denklem şu olsun:

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0$$



ŞEKİL 4: KÜPKÖKLERİN GRAFİK ÇIKARIMI

Daha sonra katsayıları tanımlarsak

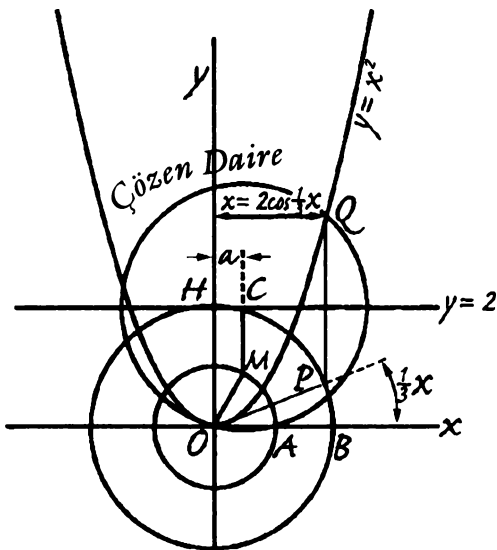
$$u = B, v = A - 1, w = C \text{ olduğunu buluruz.}$$

Bu, "çözen" daireyi tamamen verilen dördüncü dereceden denklemin katsayıları bağlamında belirlemiş olur. Eğer denklem üçüncü derecedense, $C = 0$ deriz, bu da bizi $w = 0$ 'a götürür. Bu durumda çözen daire, koordinatların orijininden geçer.

Şekil 5'te Ömer Hayyam yöntemi genel bir açının üçe bölünmesine uygulanmıştır. Verili açı $\phi = xOM$ birim çemberin üzerindeki M noktasıyla temsil edilir, dolayısıyla $a = \cos \phi = HC$. Üçlü açı formülü olan

$$(59) \quad \cos \phi = 4 \cos^3 \phi/3 - 3 \cos \phi/3$$

şu üçüncü dereceden denkleme gider:



ŞEKİL 5: BİR AÇIYI ÜÇE BÖLMEK İÇİN PARABOL KULLANIMI

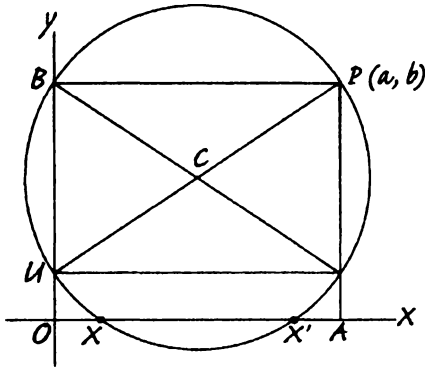
$$(60) \quad x^3 - 3x - 2a = 0$$

ki burada da $x = 2 \cos \phi/3$. Çözen dairenin merkezi C, $(x = a, y = 2)$ ' dedir. Q, ilk dördünde daire ile parabolün ortak noktası olsun ve P de Q'nun O merkezli ve yarıçapı 2 olan daireye izdüşümü olsun: Buna göre aradığımız açı xOP 'dir.

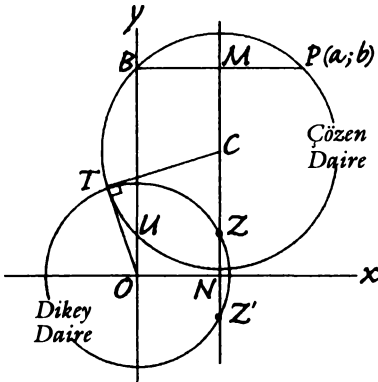
a ve b'nin reel sayılar olduğu

$$x^2 - ax + b = 0$$

ikinci dereceden denkleminin grafik çözümü Şekil 6'da verilmiştir. Burada çapı UP olan, P'nin $(x = a, y = b)$ koordinatlı nokta ve U'nun y eksenindeki birim noktası olduğu çözen daire çizilmiştir. Çözen dairenin x eksenini kestiği X ve X' noktaları ikinci dereceden denklemin grafik çözümlerini ifade eder. Eğer x eksenini kesmez veya ona değmezse, kökler imajinerdir; yine de, bu durumda bile kökler Şekil 7'deki gibi basit bir yöntemle gösterilebilir:



ŞEKİL 6: GERÇEK KÖKLERİ OLAN İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMİN GRAFİK ÇÖZÜMÜ



ŞEKİL 7: İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMİN KARMAŞIK KÖKLERİNİN ÇİZİMİ

Çözen daireye tanjant OT'yi çizelim. Merkezi O, yarıçapı OT olan daire CM doğrusu ile Z ve Z' noktalarında kesişsin ve bunlar ikinci dereceden denklemin *karmaşık değişken* $x + iy$ *düzlemindeki* köklerini ifade etsin.

Öklit Algoritması

Bir sayının *sürekli bir kesir* olarak açılımı, *Öğeler*'in VII. kitabında yer alan bir prosedürün bir çeşididir, bu nedenle de *Öklit Algoritması* adını alır. Öklit bu yöntemi *iki tamsayının en büyük ortak bölenini* bulmak için kullanmıştır, ama bu algoritmanın birçok başka uygulaması da vardır. Burada ve bunu izleyen yazılarda bu türden üç problemi ele alacağım: *sürekli kesirler, belirsiz denklemler ve irrasyonel sayılar*. $[\Gamma]$, *pozitif Γ sayısının içerdigi en büyük tamsayı olsun*. Buna göre,

$$[22/7] = 3, [\sqrt{2}] = 1, [\pi] = 3, [e] = 2, [1] = 1, [0] = 0$$

Daha sonra, Γ 'nin *rasyonel olduğunu* varsayalım. Eğer sayı bir tamsayıysa, o zaman $\Gamma = [\Gamma]$; Γ bir tamsayı değilse, o zaman $\Gamma = [\Gamma] + (1/\Gamma_1)$. Γ_1 'in tamsayı olmasını sağlayan l 'den büyük bir Γ_1 rasyonel sayısı vardır; eğer yoksa, algoritmayı bir sonraki adıma taşırız: $\Gamma_1 = [\Gamma_1] + (1/\Gamma_2)$ ve süreci bir Γ_n tamsayısı elde edilene dek devam ettiririz. Bunun sonucunda şu *sürekli kesre* varırız:

$$(61) \quad \Gamma = [\Gamma] + \frac{1}{[\Gamma_1] + \frac{1}{[\Gamma_2] + \frac{1}{\dots + \frac{1}{\Gamma_n}}}}$$

bunu da kolaylık sağlaması için şöyle kısaltıyoruz:

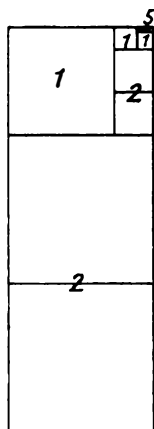
$$(61') \quad \Gamma = ([\Gamma]; [\Gamma_1], [\Gamma_2], \dots, \Gamma_n)$$

Bir örnek olarak *e sayısının %0,04'lük bir yaklaştırımı olan $\Gamma = 106/39$ 'u* alalım. Detaylar tabloda verilmiştir:

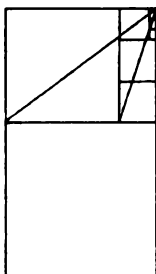
Bölünen	Bölen	Bölüm	Kalan
106	39	2	28
39	28	1	11
28	11	2	6
11	6	1	5
6	5	1	1
5	1	5	0

Dolayısıyla
 $106/39 = (2; 1, 2, 1, 1, 5)$

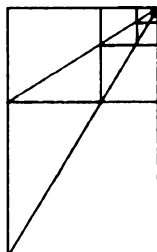
$[\Gamma]$, $[\Gamma_1]$, $[\Gamma_2]$, ..., Γ_n tamsayılarının dizilimine Γ sayısının *tayfı* (*spectrum*) adını veriyorum. Tayfın terimleri Γ 'nın nizami sürekli kesrinin paydalarıdır. Algoritmanın ve yarattığı tayfların çarpıcı bir geometrik yorumu Şekil 8'de verilmiştir. Tabanı 1 ve yüksekliği Γ olan bir dikdörtgen inşa ederek başlıyoruz; bu dikdörtgenden mümkün olduğu kadar fazla kare *silerek* aynı işlemin uygulandığı bir *artık* dikdörtgen bırakıyoruz; süreci *hiçbir artık dikdörtgen kalmayınca*ya dek sürdürüyoruz. *Birbirini takip eden dikdörtgenlerden herhangi birindeki karelerin sayısı, Γ tayfında ona karşılık gelen terimi verir.*



$106/39 =$
(2; 1, 2, 1, 1, 5)'in
Tayfı



$\sqrt{3} =$
(1; 1, 2, 1, 2, ...)'in
Tayfı



"İlahi" Oran
 $(\sqrt{5} + 1)/2 =$
(1; 1, 1, 1, ...) 'in
Tayfı

ŞEKİL 8. SAYI TAYFLARI

Algoritmanın herhangi bir rasyonel sayıya uygulanabilir olması ve sonuçta elde edilen tayfın *sonlu* ve *yegâne* olması sürecin doğasından kaynaklanır. Buna karşılık, pozitif tamsayılardan meydana gelen sonlu bir dizilim söz konusu olduğunda, o dizilimi o tayf için geçerli kılan bir ve yalnızca bir Γ rasyonel sayısı vardır. Γ 'yı tayfından hesaplamamanın doğrudan ve zahmetli bir yolu "aşağıdan yukarıya" doğru ilerlemektir. Ne var ki, keşfi genelde Newton'un öğretmeni John Wallis'e atfedilen başka bir algoritmanın kullanımıyla işi

kolaylaştırmak mümkündür. Prosedürün pratikte nasıl işlediğini göstermek için, yukarıda değinilen ve ilk iki yakınsağı bariz şekilde 2 ve 3 olan örneğin $-\Gamma = (2; 1, 2, 1, 1, 5)$ sonuçlarını tabloyla göstereceğim.

Tayfın Terimi: g	2	1	2	1	1	5
Yakınsağın Payı: N	2	3	$2 \cdot 3 + 2 = 8$	$1 \cdot 3 + 3 = 11$	19	106
Yakınsağın Paydası: D	1	1	$2 \cdot 1 + 1 = 8$	$1 \cdot 3 + 1 = 4$	7	39
Huygens Belirtecisi: H		-1	+1	-1	+1	-1

Genel olarak, *birbirini izleyen üç yakınsağın* payları N_{k-2}, N_{k-1}, N_k ; paydaları D_{k-2}, D_{k-1}, D_k olsun ve g_k da sürekli kesrin k 'inci yakınsağına karşılık gelen terimi olsun. Wallis algoritması yineleme yasasında ifadesini şöyle bulur:

$$(62) \quad N_k = g_k N_{k-1} + N_{k-2} \quad D_k = g_k D_{k-1} + D_{k-2}$$

Bu formüllerden Huygens daha sonra Euler ve Lagrange'ın ellerinde *sonsuz sürekli kesirler* kuramının temel taşı halini alan bir teorem geliştirdi. Aşağıdaki determinanı H_k ile gösterelim:

$$(63) \quad H_k = \begin{vmatrix} N_{k-1} & N_k \\ D_{k-1} & D_k \end{vmatrix} = (-1)^k$$

Buna göre Huygens'in teoremi, H_k 'nin sırasıyla $+1$ ve -1 değerlerini aldığı ifade eder.

Belirsiz Denklemler Üzerine

Pek çok matematik sorusu, iki veya daha fazla bilinmeyenli bir cebir denkleminin tamsayı çözümlerini gündeme getirir. Pisagor üçlüleri üzerine araştırmalar ve $n > 2$ olduğunda $x^n + y^n = z^n$ 'nin tamsayı çözümü olmadığı yönündeki Fermat varsayımı, *Diophantos Analizi* adı verilen bu problem sınıfına girer.

Mevcut yazının teması Diophantos analizinin en basit problemi-
dir: p, q ve r tamsayılarının *çifterli olarak birbirlerine göre asal* ol-
duğu

$$(64) \quad qx - py = r$$

denkleminin tüm tamsayı çözümlerini bulmak.

İlk olarak, eğer $x = a$, $y = b$ (64)'ün çözümlerinden biriye, o zaman n 'nin pozitif veya negatif tüm tamsayı değerleri için

$$x = a + np, \quad y = b + nq$$

da öyledir. İkinci olarak, X ve Y

$$(65) \quad qX - pY = 1$$

denkleminin çözümleriye, o zaman $a = rX$ ve $b = rY$, (64) denklemini doğrular. Son olarak,

$$qx + py = r$$

denklemini de $x = x$, $y = -z$ yerleştirmeleriyle (64) ile aynı biçime sokulabilir.

Daha sonra, p/q 'yu sürekli bir kesir olarak açalım ve tayfın *en sondan bir önceki yakınsağını* N/C ile ifade edelim. O zaman, Huygens teoremine göre, $qN - pD$ ya $+1$ 'e ya da -1 'e eşittir. İlk vakada denklem (65)'in bir çözümü $X = N$, $Y = D$ 'dir; ikinci vakadaysa $X = -N$, $Y = -D$ böyle bir çözümdür. Buradan hareketle (64)'ün genel çözümü, p/q tayfının içerdiği terimlerin sayısının *tek sayı* mı yoksa *çift sayı* mı olduğuna göre şöyledir:

$$(66) \quad \begin{array}{ll} \text{ya} & x = np + rN, \quad y = nq + rD \\ \text{ya da} & x = np - rN, \quad y = nq - rD. \end{array}$$

Örnek: $39x - 106y = 5$ denklemini alalım. $106/39$ 'un sondan bir önceki yakınsağı $19/7$ 'dir ve

$$\begin{vmatrix} 19 & 106 \\ 7 & 39 \end{vmatrix} = -1$$

Dolayısıyla genel çözüm $x = 106n - 95$, $y = 39n - 35$ 'tir. $n = 1$ için bu özel çözüm $(11, 4)$ 'ü verir; buna göre şöyle de yazabiliriz:

$$x = 106m + 11, y = 39m + 4.$$

Burada m , $-\infty$ 'dan $+\infty$ 'a herhangi bir tamsayı değeri alabilir.

Daire Bölme Problemi

n kenarlı düzgün bir çokgen inşa etmek, bir dairenin çevresini n eşit parçaya bölmeye ve $\omega = 2\pi/n$ açısının oluşturulmasına denktir. Bu problem türüne *daire bölme (siklotami)* denir. Bu kavram, daha dar bir anlamda, *bu inşa işleminin yalnızca bir cetvel ve pergel kullanılarak gerçekleştirilebileceği n tamsayısının niteliğini* belirlemek için de kullanılır. Dairesel bir kirişin ikiye bölünmesi bir cetvel-pergel işlemi olduğundan, bizi ilgilendiren sadece n 'nin *tek sayı* değerleridir.

Yunanlılar bu türden yalnızca üç tamsayı, 3, 5 ve 15'i biliyorlardı. Düzgün bir *yedigenin* inşası, yani bir dairenin 7 eşit parçaya bölünmesi, antikçağın ünlü problemlerinden biriydi. On sekizinci yüzyılda $n = 7$ ve $n = 13$ vakalarının *indirgenemez üçüncü derece* denklemlere yol açtığı ortaya koyulana dek çözülememişti.

1801'de problem Gauss tarafından tekrar formüle edilip tamamen çözüldüğünde durum buydu. Gauss'un teoremi, eğer çember bir cetvel ve pergel yardımıyla n eşit parçaya bölünebiliyorsa, o zaman n 'nin ya *bir Fermat asalı* ya da *bu tür asalların kare içermeyen bir çarpımı* olduğunu ifade ediyordu. Bir Fermat asalının $2^{2^p} + 1$ biçiminde olduğunu anımsayalım. Gauss teoremine göre 300'den küçük 8 adet "daire bölen" tek tamsayı vardır:

$$(67) \quad 3, 5, 17, 17, 85, 255 \text{ ve } 257$$

Gauss'un teoreminin ilk kısmı $z^n - 1 = 0$ denkleminin incelenmesini ima eder ve bu kitabın kapsamının dışındadır. İkinci kısım şu ifadeye denktir: Bir daireyi p parçaya ve aynı zamanda q parçaya bölmek mümkünse, o zaman *onu pq parçaya bölmek de mümkündür*, p ve q 'nin *birbirine göre asal olmaları şartıyla*. Şunları belirleyelim:

$$(68) \quad 2\pi/p = \alpha, \quad 2\pi/q = \beta, \quad 2\pi/pq = \gamma$$

α ve β yaylarını eldeki yöntemlerle oluşturabildiğimizi varsayıyoruz; aynı şekilde x ve y 'nin herhangi iki tamsayı olduğu $x\alpha$ ve $y\beta$ yaylarını ve bunun sonucunda da $x\alpha - y\beta$ yayını da, işlemler yalnızca pergelle yapılabildiği sürece oluşturabiliriz. Bulunmak istenen,

$$\gamma = x\alpha - y\beta$$

bağıntısını sağlayan x ve y tamsayılarıdır. (68)'e göre bu son bağıntı şu *belirsiz denkleme* eşittir:

$$xq - yp = 1$$

Yukarıda gördüğümüz gibi, bunun p ve q birbirlerine göre asal oldukları sürece her zaman çözümü vardır.

Bir örnek olarak, $p = 51$ ve $q = 40$ olsun. Öklit algoritmasıyla $51/40 = (1; 3, 1, 1, 1, 3)$ buluruz, bunun da sondan bir önceki yakınsağı $14/11$ 'dir. Buradan hareketle,

$$11(2\pi / 40) - 14(2\pi / 51) = 2\pi / (40 \cdot 51)$$

Sonsuz Tayf

Öklit algoritmasının ne tanımında ne de uygulamasında onu rasyonel sayılarla kısıtlayacak bir şey vardır, ancak irrasyonel niceliklere uygulandığında süreç her zaman *sonu gelmez* olur. Wallis'in algoritması da sonlu tayfla kısıtlı değildir. Gerçekten de, Huygens'in teoremine göre, *algoritma herhangi bir sonsuz tayfi için yakınsar* veya daha kesin bir ifadeyle, *herhangi bir düzenli sonsuz sürekli kesrin yakınsakları limit olarak benzersiz bir irrasyonel sayıya yaklaşır*. Öklit algoritmasının irrasyonellere uygulanması her zaman orijinal tayfı tekrar mı yaratır sorusu burada ele alamayacağım bazı ince noktalara parmak basıyor. Ne var ki, cevap evettir.

Böylece, beraber kullanıldıklarında bu iki algoritma *irrasyonel niceliklere rasyonel yaklaşıtımlar* elde etmek için etkili bir araçtır. Bu problemin pratik yönü sayının terim terim düzenleyici bir sürekli kesir olarak açılmasını gerektirir ve bu da çok zahmetli bir iştir. Ama sonsuz tayfta bir matematiksel kalıp veya bir ardılık yasası keşfetmek çok başka bir şeydir. Gerçekten de, ikinci dereceden ifadeler hariç, ister cebirsel ister aşkın olsun, irrasyonel nicelikler tayfı genelde biçimsiz ve anlamsız, kısacası π 'nin ondalık açılımı kadar *rastlantısal* görünür.

Bunun aksine, $A + \sqrt{B}$ türünden irrasyonellerin tayfıysa kesinlikle rastlantısal değildir, ki bu özellikle ikinci dereceden köklü ifadeler için geçerlidir. *Periyotlar, çevrimlerin* kalıpları, yakınsakların sayı-kuramsal nitelikleri, bu yakınsaklar ile birtakım klasik Diop-

hantos problemleri arasındaki yakın bağ, Euler'den Sylvester'a on sekizinci ve on dokuzuncu yüzyıllarda yaşamış pek çok matematikçiye derinden cezbetmiştir ve bugün de halen cezbetmektedir. Yer darlığı beni bu gelişmeyi daha kapsamlı biçimde sunmaktan alıkoynuyor; aşağıdaki örnekler okuru bu konuda daha fazla araştırma yapmaya sevk etmek ümidiyle seçilmiştir.

Köklü İfadeler ve Çevrimler

Öklit algoritmasının $\sqrt{23}$ gibi tipik bir köklü ifade üzerindeki işleyişini inceleyerek başlayacağız. $N = 23 = 4^2 + 7$ olsun. Buna göre $\sqrt{23}$ tayfının ilk terimi 4'tür; *ilk artık* $\sqrt{23} - 4$ 'tür; bunun tersi $(\sqrt{23} + 4) / 7$ ise ikinci *tam bölümdür* ve bu bölümde bulunan en büyük tamsayı da tayfin ikinci terimidir. Böyle devam ederek, nihayetinde ilkinе eşit bir artığa varırız ve bu adımdan sonra tayfin terimleri tekrarlamaya başlar. Örneğin

$$\sqrt{23} = (4; 1, 3, 1, 8 \quad 1, 3, 1, 8 \quad 1, 3, 1, 8, \dots)$$

ki bu da kolaylık olması için $(4; \underline{1, 3, 1, 8})$ şeklinde kısaltılabilir. 1, 3, 1, 8 tayfin çevrimidir ve bu çevrimdeki terimlerin sayısı da *peri-yottur*. Algoritmanın detayları Tablo I'de verilmiştir. Tablo II ise $\sqrt{2}$ 'den $\sqrt{24}$ 'e köklü sayıların çevrimlerini liste halinde gösterir.

TABLO I. TİPİK AÇILIM

Tam Bölen	$\sqrt{23}$	$\frac{(\sqrt{23} + 4)}{7}$	$\frac{(\sqrt{23} + 3)}{2}$	$\frac{(\sqrt{23} + 3)}{7}$	$\sqrt{23} + 4$	$\frac{(\sqrt{23} + 4)}{7}$
Tayfin Terimi	4	1	3	1	8	1
Artık	$\sqrt{23} - 4$	$\frac{(\sqrt{23} - 3)}{7}$	$\frac{(\sqrt{23} - 3)}{2}$	$\frac{(\sqrt{23} - 4)}{7}$	$\sqrt{23} - 4$	$\frac{(\sqrt{23} - 3)}{7}$

Genel vakaya geçerseniz, N kare olmayan herhangi bir tamsayıyı ifade etsin. Buna göre $N = b^2 + h$ yazabiliriz; burada h, 1 ile 2b arasında olabilir. Ayrıca $[2b/h] = c$ diyelim. Bu gösterimle açılımın genel nitelikleri şunlardır:

1) $\sqrt{(b^2 + h)}$ tayfı b ve c ile başlar;

2) c çevrimin ilk terimi ve aynı zamanda sondan bir önceki terimidir; çevrimin son terimi $2b$ 'dir;

3) Çevrimin $2b$ 'den önceki terimleri *simetrik bir blok* meydana getirir. Eğer periyot p $\sqrt{14}$ veya $\sqrt{23}$ 'te olduğu gibi çift ise *simetri tektir* ve bir merkez terim vardır. Eğer periyot $\sqrt{13}$ 'te olduğu gibi tek ise, o zaman *simetri çifttir* ve iki merkez terim vardır.

Dolayısıyla bir tamsayının karekökünü ifade etmesi için periyodik tayf şu biçimde olmalıdır:

$$\Gamma = (b; \overline{c, d, \dots d, c, 2b})$$

Ancak, birazdan göreceğimiz gibi her ne kadar bu simetri *zorunlu* olsa da yeterli değildir.

TABLO II. KÖKLÜ SAYILARIN ÇEVİRİMLERİ

$\sqrt{2}$	1		2	$\sqrt{14}$	3	1 2 1	6
$\sqrt{3}$	1	1	2	$\sqrt{15}$	3	1	6
$\sqrt{5}$	2		4	$\sqrt{17}$	4		8
$\sqrt{6}$	2	2	4	$\sqrt{18}$	4	4	8
$\sqrt{7}$	2	1 1 1	4	$\sqrt{19}$	4	2 1 3 1 2	8
$\sqrt{8}$	2	2	4	$\sqrt{20}$	4	2	8
$\sqrt{10}$	3		6	$\sqrt{21}$	4	1 1 2 1 1	8
$\sqrt{11}$	3	3	6	$\sqrt{22}$	4	1 2 4 2 1	8
$\sqrt{12}$	3	2	6	$\sqrt{23}$	4	1 3 1	8
$\sqrt{13}$	3	1 1 1 1	6	$\sqrt{24}$	4	1	8

Periyodu 2 olan çevrimsel sürekli kesirler özellikle ilgi çekicidir. Böyle bir kesir, bir tamsayının karekökünü ifade edebilmek için şu biçimde olmalıdır:

$$x = (b; \overline{c, 2b}), \text{ yani } x - b = \frac{1}{c + \frac{1}{x + b}}$$

Bu son bağıntı bizi şu ikinci dereceden denkleme götürür:

$$x^2 = b^2 + 2b/c$$

Buradan hareketle, $(b; \overline{c, 2b})$ 'nin bir tamsayının karekökünü temsil etmesi için $2b, c'$ 'ye bölünmelidir. $c = 1$ veya 2 ya da b veya $2b$ olduğunda bunun olması kesindir; bu da bizi şuna götürür:

$$\sqrt{(b^2 + 2b)} = (b; \overline{1, 2b}) \quad \sqrt{(b^2 + b)} = (b; \overline{2, 2b})$$

$$\sqrt{(b^2 + 2)} = (b; \overline{b, 2b}) \quad \sqrt{(b^2 + 1)} = (b; \overline{2b})$$

Bu son vakada periyot 1'e düşer. Eğer b bir *asal sayıysa*, periyodu 1 ya da 2 olan tayflar sadece bunlardır. b bir bileşik tamsayı, örneğin 30 olduğundaysa durum böyle değildir. Burada $2b = 60$; c ise 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 olabilir. Buradan hareketle $\sqrt{901}$ ile $\sqrt{961}$ arasında periyodu 3'ten küçük 12 köklü sayı olduğunu söyleyebiliriz.

İlkeler ve Argümanlar Üzerine

Matematikçiler nesnelerle değil nesneler arasındaki ilişkilerle uğraşır; bu nedenle ilişkiler aynı kaldığı sürece bazı nesnelerin yerine başka nesneler koymakta serbesttirler. Onlar için içerik anlamsızdır: Yalnızca biçimle ilgilenirler.

POINCARÉ

Dirichlet'nin Dağılım İlkesi Üzerine

Beş çekmeceli bir dolapta beşten fazla gömlek varsa, çekmecelerden birinde birden fazla gömlek var demektir. Bir ailenin yediden fazla üyesi varsa, ailenin en az iki üyesi haftanın aynı günü doğmuştur. Bir ormanda herhangi bir ağacın üzerindeki yaprak sayısından daha fazla ağaç varsa, ağaçların en az ikisi aynı sayıda yaprağa sahiptir. Bunlar *Dirichlet Kutu İlkesi* adı verilmiş bir argümanın örnekleridir. Genel terimlerle ifade edecek olursak, ilke şöyle der: *q bölmede p nesne varsa ve p, q 'dan büyükse, o zaman en az bir bölme birden fazla nesne içerir.*

Okurun beni "barizi vurgulamaktan" suçlayacağından korktuğum için burada bu önermenin kanıtını vermiyorum. En azından, argümanı ilk defa duyan ve matematikçi olmayan bir arkadaşımın tepkisi buydu: "En kıt zekâlının bile açıkça görebileceği bir şey. Bir kokteylde kanepelerden daha fazla misafir varsa, bazı kanepelerin paylaşılması veya bazı misafirlerin kanepesiz idare etmesi gerekir. Neden malumun ilamına ilke deniyor ve bir matematikçinin adı veriliyor – hem de on dokuzuncu yüzyılda yaşamış bir matematikçinin?"

Nasıl olur da matematiksel akıl yürütmenin başlangıcından beridir onun doğal bir parçası olmuş bu kadar temel ve basit bir düşünceye modern bir keşif gözüyle bakılır?"

Bu görüşler mantıklıdır. Ancak matematikçiler ve sıradan insanlarca ilkeler olarak formüle edilmeden önce çok uzun yıllar örtülü bir şekilde kullanılan başka aygıtlar için de aynı derecede geçerlidir. Böyle *saklı* düşüncelere örnek olarak Pascal'ın *Eksiksiz Tümevarımı*, Fermat'ın *Sonsuz İniş* yöntemi ve *Dedekind Kesimi* sayılabilir. Ama neden burada bırakalım? *Tümdengelimsel Çıkarım*, Thales onu matematiksel akıl yürütmenin vazgeçilmezi yapmadan çağlar önce teolojik tartışmalara konu olmuştur. *Konum ilkesi* ise insanlar parmaklarının sayısını aşan sayıları sözcüklerle ifade etme ihtiyacını hissettikleri zamandan beri insan konuşmasının organik bir parçası olagelmıştır.

Ne var ki, bir zihinsel aygıtı gündelik rutinin bir parçası olarak kullanmakla, o fikri açıkça ifade etmek ve bilinçli olarak yeni bir düşünce alanının keşfinde kullanmak arasında büyük fark vardır. Molière'in oyunundaki, hayatı boyunca *nesir* konuşmuş olduğunu büyük bir dehşet içinde fark eden sonradan görmeyi anımsayalım. Hepimiz *nesir* kullanırız, hatta çoğumuz da kötü kullanırız. Yine de *nesir*, düşüncelerimizi ifade etmek ve onu gelecek nesillere aktarmak için hâlâ en güçlü mecradır.

Dağılım ilkesi bu çalışmada birkaç kere örtülü olarak kullanılmıştır: Rasyonel bir kesrin ondalık açılımının periyodunun belirlenmesi; Wilson Teoremi'nin Gauss tarafından ispatı; karekök içeren bir ifadenin düzenli sürekli kesir olarak açılımı bunlardan bazılarıdır. Burada ilkini ele alacağım, zira bir ispat aracı olarak ilkenin nasıl işlediğine tipik bir örnek teşkil ediyor.

$1/q$ 'yu ifade eden ve q 'nın 2 veya 5'e bölünmeyen herhangi bir tamsayıyı gösterdiği sonsuz ondalık kesri ele alalım. Açılım *çevrim-seldir* ve bir çevrimdeki basamakların sayısına karşılık gelen periyodu (p), q 'nın bir fonksiyonudur (fonksiyonun tam biçimi bugüne dek belirlenebilmiş değildir). Ancak, p 'nin $q - 1$ 'i aşamayacağını biliyoruz. Gerçekten de, p artık çevriminin uzunluğuna denktir (bkz. A8), bunun da ögeleri 1 ile $q - 1$ arasında olabilir. Periyot p , $q - 1$ 'i aşsaydı, Dirichlet ilkesine göre aynı artık aynı çevrimde birden fazla

kere yer alırdı, bu da bir çevrimin iki artığının eşit olamayacağı gerçeği ile çelişirdi.

Geometride "Mümkün" ve "İmkânsız" Kavramları

Küpün iki eş küpe bölünmesi, açının üçe bölünmesi, çemberin kareleştirilmesi ve eskilerden bize miras kalmış başka problemlerdeki zorluk problemlerin kendisinden kaynaklanmıyordu. Zorluklar sadece geometrik yapılar oluşturulmasını cetvel ve pergel kullanımıyla sınırlayan *klasik kısıtlamaların* aşırı niteliğini yansıtıyordu.

Geometrik yapı inşasına uygulandığı şekliyle "mümkün" veya "imkânsız" kavramlarının *mutlak* bir anlamı yoktur: Her vakada inşa da kullanılacak aletlerle ilgili koşullar koymalıyız. Gerçekten de, tüm kısıtlamalar kaldırılacak olsa, geometrik formülasyona izin veren her aygıt geleneksel araçlarla aynı derecede kabul görse, ister mekanik ister grafiksel bir prosedür ile elde edilmiş olsun tüm geometrik gezenekler doğru ve daireyle eşit kabul edilse, "mümkün" ve "imkânsız" sözcükleri tüm anlamını kaybederdi, çünkü *mümkün* problemler alanı *tüm* problemler alanıyla aynı kapsama sahip olurdu.

Klasik yaklaşımda, inşa da kullanılan araç mütevazı bir şekilde arka planda kalırdı; modern yaklaşımsa bunu önemli sayar ve ön planda tutar. Her araç etki alanını oluşturduğunu söyleyebileceğimiz bir grup problemin "simgesi" olarak görülür. Böylece, elimizde sadece cetvelle çözülebilecek problemlerden oluşmuş *doğrusal* bölge; pergelin alanı olan *dairesel* bölge ve hem doğrusal hem daireselden meydana gelen *klasik* ya da geleneksel bölge vardır. Geleneksel bölgenin ötesinde, klasik araçların yeterli olmadığı problemlerin uçsuz bucaksız alanı uzanır.

Köşegenel Süreç Üzerine

Reel sayılar kümesinin sayılabilir olmadığını kanıtlamak istiyoruz. Bu amaçla $0 < x < 1$ aralığındaki reel sayılardan her birinin bir ondalık kesir olarak ifade edilmiş olduğunu varsayıyoruz. 0,5 ile 0,4999... aynı rasyonel sayıyı ifade ettiğinden bu prosedüre sıkı sığa bağlı kalmak belirsizliğe yol açar. Bu sorundan kaçınmak için

her sonlu ondalık kesrin yerine, yukarıdaki örnekte olduğu gibi sonsuz dengini koyuyoruz.

Daha sonra reel sayılar kümesini numaralandırabileceğimizi varsayıyoruz. Bunu yaptığımızda şu tür bir dizi oluşturmak mümkün olur:

$$x_1 = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

$$x_2 = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

$$x_3 = 0, c_1 c_2 c_3 \dots$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

Bu dizilim nasıl meydana getirilmiş olursa olsun, her zaman için buraya girmeyecek bir x' reel sayısı olduğunu göstereceğiz. x' *köşegenel süreç* adı verilen bir algoritmayla tanımlanmıştır.

$$x' = 0, a_1' b_2' c_3' \dots$$

Burada a_1' 0'dan ve a_1 rakamından farklıdır; benzer şekilde, b_2' de ne 0'a ne de b_2 rakamına eşittir, vb.

Böylece x sonsuz sayıda anlamlı rakamı olan bir ondalık kesirle tanımlanmış oldu, ancak bu reel sayı yukarıdaki dizideki sayılardan farklıdır, çünkü sonsuz sayıda anlamlı basamağı olan iki ondalık kesir yalnızca ve yalnızca basamak basamağa aynıysalar eşittir; ama x' , ilk basamakta x_1 'den, ikinci basamakta x_2 'den ve genelde yani n . basamakta x_n 'den farklıdır. Böylece yukarıdaki dizide yer almayan bir x reel sayısının varlığını kanıtlamış olduk, ki bu da reel sayılar kümesinin sayılabilir olduğu varsayımıyla çelişir.

Sınırlı Geometri Üzerine

Doğası gereği ampirik geometri *sınırlı* bir geometridir ve böyle bir geometri için genel yasalar belirlemek çok zor bir iştir. Örneğin, masanızı kısıtlı bir geometrik oyun alanı gibi düşünün. Çok çeşitli türde doğrular arasında ayırım yapmanız gerekir: Masanızın köşelerinden çıkanlar vardır; iki köşegeni kesenler vardır; kenarlara dik açıyla gelenler vardır vb. Rasgele dört nokta alın ve ilk iki noktayı birleştiren doğrunun diğer ikisini birleştirenle kesişip kesişmediğini

sorun. İlk olarak doğruların çeşitli doğru türlerinden hangisine ait olduğunu tespit etmeniz gerekir. Şayet iki doğrunun kesişimine dair bir kıstas belirlemek amacıyla tüm muhtemel vakaları incelemeye kalksaydınız, öyle bir yasa ifade etmek zorunda kalırdınız ki, onun yanında İngilizcenin kurlsız fiillerinin geçmiş hallerine dair kurallar çocuk oyuncağı kalırdı.

Sınırlı bir geometride, belli bir yarıçapı ve merkezi olan dairenin çizilmesi, bir üçgenin çevresine bir daire çizilmesi veya bir noktadan bir doğruya dik açı çizilmesi problemlerinin genelde çözümü olmazdı. İki doğru genelde bir açı, üçü ise bir üçgen meydana getirmezdi. Belli bir üçgene benzer bir üçgen çizme fikri, ölçek belli bir sayıyı aştığında anlamsız olurdu. Bir noktadan bir doğruya en kısa mesafe her zaman dik olmazdı vb.

Ama bu karmaşık geometriye hâkim olmayı başarsanız bile, sorunlarınız daha yeni başlıyor olurdu. Geometrik alanınızın sınırları masanızın dikdörtgeninden başka bir biçime, mesela bir üçgene, daireye veya ovale değiştirilse, baştan başlamak zorunda kalırdınız. Sınırlı geometrinin tipik bir özelliği, yasalarının esas olarak içinde icra edildiği sınırın niteliğine bağlı olmasıdır. Burada yeniden dille benzerliğe başvurabiliriz: Sınırlı bir geometrinin kuralları tek bir dilin bireysel grameri gibi olurdu; her sınır farklı bir kurallar kümesini zorunlu kılardı. Her ne kadar bu kuralların kimileri tüm sınırlarda ortak olsa bile, geriye kalan istisnalar iki sınır için İngilizce ve Fransızca kurlsız fiiller kadar farklı olurdu. Ve sınırlı düzlemin ampirik geometrisi için bunlar geçerliyse, üç boyutlu biçimlerle ilgili kim bilir ne tür sorunlar çıkardı...

Dolayısıyla, sonlu bir sınıra tabi olsaydık, kuşkusuz tümdengelim yöntemi pek işe yaramazdı: Geometri betimsel bir bilim olarak kalırdı ve zooloji, botanik veya mineralbilimden daha büyük bir genellik kazanmazdı.

Geçişlilik İlkesi Üzerine

Eğer bir bağıntı A ile B için ve B ile C için geçerliiyken aynı zamanda A ve C için de geçerliyse, o bağıntıya *geçişli* deriz. Örnek vermek gerekirse: Kan bağı *geçişli* bir bağıntıyken anne-babalık *geçişsizdir*.

Matematikte geçişliliğe örnekler şunlardır: *denklik*, *yakınsaklık*, *paralellik*. Geçişsizliğe ise şu örnekler verilebilir: *örtüşüm* bağıntısı ve "*içinde-dışındalık*". Mesela, A şekli B'nin içine çizilebilir ve B de C'nin içine çizilebilir, ama A, C'nin içine çizilemeyebilir.

Geçişlilik ilkesi, *iki şey bir açıdan bir üçüncüye eşitse birbirine de eşittir*, olarak ifade edilebilir. Bu ilke pek çok soru açısından uygulamada çok büyük bir öneme sahiptir. Örneğin geometride bir doğru parçasını bir diğeriyle çakıştırabiliyorsak, bunları *eş* doğru parçaları diye tanımlarız. Bu kıstası harfiyen alsaydık, düzlemin parçalarından birini içeren kısmını kesip çıkarmamız ve onu düzlemin başka bir bölgesine koymamız gerekirdi. Tabii ki pratikte böyle bir şey yapmıyoruz. Pratikte pergel, cetvel veya açı bölen kullanıp, her durumda *üçüncü bir doğru parçasına eş olan iki doğru parçası birbirlerine de eştir* kuralını kullanıyoruz. Kuramsal matematikte geçişlilik ilkesi, bir denklemi bir biçimden diğerine dönüştürdüğümüz her zaman kullanılır. Kısacası, *matematiksel eşitliğin en temel niteliği geçişliliğidir*. Peki ya *fiziksel eşitlik*?

Meseleyi mümkün olduğunca elle tutulur kılmak adına, okurdan değişik uzunlukta olmaları dışında birbirleriyle tamamen aynı olan bir miktar çelik çubuğu gözünde canlandırmasını isteyeceğim. Daha kesin konuşmak için, bu çubukların laboratuvarda özenle ölçüldüğünü ve boylarının 30 ile 50 milimetre arasında değiştiğini varsayalım. Bu çubuklar arasından A, B ve C diye işaretlenmiş üç tanesi de sırasıyla 30, 31 ve 32 milimetre boyunda olsun. Ancak, siz bundan haberdar değilsiniz; haberdar olmak da istemiyorsunuz, zira bu bilgi muhakemenizi zedeleyebilir; ne de olsa amacınız, araçlar ve aletler olmadan kendi duyularınızla ne tür bir ölçme tekniği geliştirebileceğinizi görmek.

A ve B çubuklarını yan yana yere yatırmakla işe başlıyorsunuz: Gözünüzün ve parmaklarınızın bu çubukların uzunlukları arasında herhangi bir fark hissetmediğini görüyorsunuz; bu nedenle onları *özdeş* ilan ediyorsunuz. Aynı karşılaştırma testini B ve C ile de yapıp, bu çubukların da uzunluk açısından özdeş olduklarına karar veriyorsunuz. Daha sonra A ile C'yi yan yana koyunca hem gözleriniz hem de parmaklarınız kesin şekilde C'nin A'dan daha uzun olduğunu fark ediyor. *İki şey birbirlerine eşit olmaksızın üçüncü bir şeye eşit olabilir* gibi şaşırtıcı bir sonuca varıyorsunuz.

Ama bu sonuç matematiğin bir üçüncü niceliğe eşit iki niceliğin birbirlerine eşit olduklarını ifade eden en önemli belitlerinden biriyle doğrudan çelişiyor. Aritmetik işlemlerinin çoğunun ardında bu belit yatar. O olmadan ne bağıntıları dönüştürebilir ne de denklem çözebiliriz. Bu beliti dışlayan bir matematiğin oluşturulamayacağını söyleyecek kadar ileri gitmeyeceğim. Önemli olan fizikçi böyle *modernistik* bir disiplini değil, temel taşlarından biri bu belit olan *klasik matematiği* kullanır.

Ona bu hakkı ne veriyor? Bilimsel ölçüm cihazlarının dolaysız algının yerini alması bu çelişkiyi ortadan kaldırmış olabilir mi? Hayır. Tüm ölçüm cihazlarının nihai hedefi bir *ölçeğin okunmasıdır*; bunun sonucu olarak, aracın tasarımcısı ne kadar zeki olursa olsun, nihayetinde bir gözlemcinin duyularına, özellikle de görme duyusuna dayanmak zorundadır. Öte yandan, bir ölçeği okuma işlemini daha yakından incelediğimizde, *esas* olarak yukarıdaki çubuklar vakasından farklı olmadığını görürüz. Kuşkusuz yukarıdaki örnekte bir milimetre olan *kritik aralık* artık bir mikrona inmiş olabilir; büyüme ve ölçüm cihazını daha duyarlı kılma gibi yöntemlerle bu aralığı bir mikronun altında küçük bir orana indirmek de mümkün olabilir. Ancak, bu ince ayar süreci ne kadar ileri götürülürse götürülsün, sorunumuzu ortadan kaldıramayacağı, hatta asgariye indiremeyeceği yeterince açıktır; zira işin sonunda şu sözleri söyletecek veriler hâlâ olacaktır: "Ölçüm A'yı ölçüm B ile aynı buluyorum; ölçüm C'yi de B ile aynı buluyorum; yine de C'nin A'dan büyük olduğunu açıkça algılayabiliyorum."

Ölçülebilir ve Oranlı

Antikçağda yaşayanların (3, 4, 5), (5, 12, 13) ve (7, 24, 25) üçlülerince çizilen rasyonel üçgenlerin varlığından haberdar olduklarına dair yeterince kanıt vardır ve kuşkusuz erken dönem Yunan matematikçilerini Pisagor teoremine götüren de başka üçlülere yönelik bir arayıştı.

Bu teorem sayı felsefelerinin zafer niteliğinde bir doğrulanışıydı. Ne var ki zaferleri kısa sürdü, zira önermenin genelliği *irrasyonel niceliklerin* varlığını ortaya çıkarmıştı. Bu rahatsız edici keşfin bir so-

nucu, geometrik konulara bakışta bir değişimdi. İlk Pisagorculara göre *her üçgen rasyonel bir üçgendir*, çünkü ölçülebilen her şeyin birbirleriyle oranlı olduğuna inanıyorlardı. Bu son hüküm onlara herhangi bir belit kadar tartışma kabul etmez görünüyordu ve sayının *evreni yönettiğini* ilan ettiklerinde, *tamsayı* demek istiyorlardı, zira doğrudan tamsayılara tabi olmayan niceliklerin var olabileceği fikrinin kendisi hem dünya görüşlerine hem de deneyimlerine tersti.

Matematiksel düşüncenin bazı modern yorumcuları ilk Pisagorcuların fikirlerini geçmiş bir çağa ait naif nosyonlar olarak geçiştirirler. Oysa gündelik işinde matematiksel araçlar kullanan, ama matematiği tek başına bir amaç olarak değil de sonuca ulaşmak için bir araç olarak gören sayısız kişinin gözünde bu nosyonlar ne çağdışıdır ne de naiftir. Çünkü böyle biri için pratikte önemi olan sayılar ya *sayımdan* ya da *ölçümden* gelir, dolayısıyla ya *tamsayı* ya da *rasyonel kesirlerdir*. Şüphesiz, rasyonel olmayan varlıklara gönderme yapan sembol ve terimleri kullanmayı kolayca öğrenmiş olabilir, ama bu ifade biçimi onun için yalnızca kullanışlı bir sözcük oyunudur. Sonuçta rasyonel sayı pratikte kullanılabilecek tek nicelik olarak kalır.

Eğer bu kişi, naif olduğu yönündeki eleştiriden gücenip bu gizemli terminolojinin arkasında yatana ulaşmaya kalkarsa, kısa süre sonra bu rasyonel olmayan varlıkları haklı göstermek için başvuru- lan süreçlerin tamamen ulaşılmaz ve dolayısıyla asılsız olduğunu keşfedecektir. Yine de ısrar edip bu varlıkları kendi rasyonel kavramlarıyla yorumlamaya çalışırsa, *irrasyonel meselelerde sonsuzdan zaman zaman saklanabileceğini ama ondan hiçbir zaman kaçınamayacağını* görür. Zira bu gizemli varlığın doğası öyledir ki, herhangi bir rasyonel sayı ona ne kadar "benzerse benzesin", her zaman ona daha çok "benzeyen" başka rasyonel sayılar vardır.

Bu kişi, daha özenli ardıllarındansa ilk Pisagorcuların arasında kendisini daha rahat hissedirdi. Her şeyin ölçülebilir ve birbiriyle oranlı olduğu yönündeki düsturlarını şevkle benimserdi. Gerçekten de, basitliğiyle bu denli güzel bir ilkenin neden böyle sebepsizce gözardı edildiğini anlamakta zorlanırdı. *Ve sonunda matematikçi ilkenin, deneyimlerle çeliştiği için değil de geometrinin belitleriyle uyumsuz olduğu ortaya çıktığı için terk edildiğini kabul etmek zorunda kaldı.*

Çünkü geometrinin belitleri doğruysa, o zaman Pisagor teoremi istisnasız şekilde geçerlidir. Ve eğer teorem geçerliyse, kenar uzunluğu 1 olan karenin köşegenini kenar alan bir karenin alanı 2'ye eşittir. Öte yandan, eğer Pisagorcuların hükmü geçerli olsaydı, 2 aritmetiğin belitleriyle doğrudan çelişir şekilde bir rasyonel sayının karesi olurdu.

Zaman ve Sürey

Bilinciniz *şimdiyi* doğrular; zihniniz *geçmişe* gittikçe netliğini kaybeden ve sonunda belleğin puslu şafağında yok olan diğer *şimdileri* anımsar. Muğlak ve örtüşen bu zamansal serileri siz bir bireye bağlarsınız, adına da *ben* dersiniz. Birkaç yıl içinde bu bireyin vücudundaki bütün hücreler değişmiştir; düşünceleri, kararları, duyguları ve özlemleri de benzer bir başkalaşım geçirmiştir. O zaman *ben* adını verdiğiniz bu kalıcılık nedir? Kuşkusuz sadece bireyi diğer insanlardan ayıran bir ad değildir! O zaman bellek ipine boncuk gibi dizilmiş bu zamansal seriler midir?

Çocuklukta bir yerde başlayan ve şimdi ile aniden sona eren parça parça anılardan meydana gelen ayırık bir dizi: İşte bilincin doğrudan aldığı veriler bağlamında *zaman* budur. Ancak, bu hammadde fiziksel sezgi adı verilen o esrarengiz damıtma sürecinden geçtiğinde, bambaşka bir şey olarak ortaya çıkar. *Sezgisel zaman dışdeğerlenmiş zamandır*. Bilincin şafağının ötesine, *geçmişin* sonsuz derinliklerine ve *şimdinin* ötesindeki (tıpkı geçmiş gibi *şimdilerden* oluşmuş olarak kavranan) sonsuz *geleceğe* dışdeğerlenerek uzanır. Zihnimizin bir hareketiyle zamanı geçmiş ve gelecek adında, birbirini dışlayan ve birlikte zamanın *tümünü*, yani *ebediyeti* meydana getiren bu iki sınıfa ayırırız. Zihnimize göre *şimdi* geçmiş gelecekte ayıran bir bölmeden başka bir şey değildir; geçmişin herhangi bir ânı da zamanında bir *şimdi* olduğundan ve geleceğin herhangi bir ânı da zamanı geldiğinde bir *şimdi* olacak olduğundan, geçmişteki veya gelecekteki herhangi bir ânı da böyle bir bölme olarak hayal ederiz.

Hepsi bu mu? Hayır, sezgisel zaman *aradeğerlenmiş* zamandır: Geçmişteki herhangi iki an arasına, hafızamızda bu iki an birbirlerine ne kadar yakın olursa olsun, yine zihnimizin bir hamlesiyle sonsuz sayıda başka an sokarız. Geçmişin *sürekliliği* ile kastettiğimiz

budur ve aynı sürekliliği geleceğe de uygularız. *Zihnimize göre zaman bir ırmaktır*; kuşkusuz bizim deneyimimiz bu ırmaktan yalnızca birbirinden kopuk öğeleri bilir, ama sezgimiz deneyimin bıraktığı boşlukları doldurur; zamanı bir *süre*'ye, doğadaki tüm sürelerin bir prototipine dönüştürür.

Örneğin, geometrik doğruya atfettiğimiz o mükemmel süreklilik, böyle bir doğruyu elin *kesintiye uğramamış* bir hareketiyle tarif edebileceğimize olan inancımız değilse nedir? Sürenin ırmakvari niteliğini tüm fiziksel fenomenlere aktarırız. İster ışık veya ses, ister ısı veya elektrik olsun, herhangi bir fenomeni analiz ederken ilk adımımız onu mesafe, kütle veya enerji bağlamında ifade ederek *zamanın bir fonksiyonuna* indirgemektir.

Ayrık ile sürekli arasındaki çatışma sırf okul düzeyindeki diyalettiklerin bir ürünü değildir: Bizatihi düşüncenin kökenine kadar uzanır, çünkü zamanı bir ırmak olarak gören kavrayış ile tüm deneyimin süreksiz niteliği arasında her zaman mevcut olan o uyumsuzluğun bir yansımasından başka bir şey değildir. Ne de olsa, son analizde, sayı kavramımız *saymaya*, yani ayrık, süreksiz, kesintili olanı numaralandırmaya dayanırken, zaman sezgimiz tüm fenomenlere akıcı gözüyle bakar. Fiziksel bir fenomeni ırmak benzeri niteliğini bozmadan sayıya indirgemek – işte matematiksel fizikçinin karşısındaki zorlu görev budur, ki geniş bir anlamda, geometri de fiziğin bir kolu olarak görülmelidir.

Matematik ve Gerçeklik

Klasik bilim insana her şeyin ortasında ayrıcalıklı bir konum atfetmişti: İnsanın, onu evrensel mekanizmaya bağlayan zincirlerden kurtulma ve bu evrensel mekanizmayı gerçek haliyle inceleme yeteneği vardı. Kuşkusuz, bilinç de bu sonsuz neden ve sonuç zincirinde bir halka olarak görülüyordu, ancak bilincin evriminin giderek daha fazla *özgürlük* yönünde olduğuna inanılıyordu. Beden zincirlenmişti, ama zihin bu zincirler üzerine düşünmekte, onları sınıflandırmakta, ölçmekte ve tartmakta özgürdü. Doğa kitabı gözlerinin önünde açılmış duruyordu; tek yapması gereken kitabın yazıldığı şifreyi çözmekti ve bu işin üstesinden gelecek yetenekteydi.

Bu şifre rasyoneldi: İnsanın istediği gibi inceleyebileceği bu değişmez düzen rasyonel yasalara göre işliyordu; evren öyle kalıplara göre tasarlanmıştı ki, bu iş kendisine düşse insan aklı da aynı kalıpları oluştururdu; evrenin yapısı rasyonel bir disipline indirgenebilirdi; yasaları formel mantığın kıyaslamaları aracılığıyla sonlu bir önermeler kümesinden elde edilebilirdi. Bu önermelerin geçerliliği akıl yürütmeden değil deneyimden gelirdi, zira sadece deneyim bir kuramın doğruluğuna karar verebilirdi. Nasıl ki Antaros, Herakles ile mücadelesi sırasında, bedeni annesi Toprak'a her değdiğinde azalan gücünü tekrar kazanıyorduyse, akıl yürütme de deneyimin katı gerçekliğiyle temas halinde olmaktan sürekli kazançlı çıkıyordu.

Matematiksel yöntem evreni yansıtıyordu. Tükenmez çeşitlilikte rasyonel biçimler üretme gücüne sahipti. Bunların arasında bir gün tüm evreni kucaklayabilecek o kozmik biçim de vardı. Birbirini izleyen yaklaşıtımlar sayesinde bilim sonunda bu kozmik biçime ulaşacaktı, zira her adımda ona gittikçe yaklaşıyordu. Bizatihi matematiğin yapısı bu *asemplot* yaklaşımı garantiliyordu, çünkü birbirini izleyen her bir genelleştirme evrenin daha büyük bir kısmını kapsıyor ve bunu yaparken de daha önce kazanılmış bölgeden hiç taviz vermiyordu.

Matematiğin ve deneylerin yeni fizik üzerindeki egemenliği her zamankinden fazla, ama her şeye işleyen bir şüphecilik geçerliliklerini etkilemiş durumda. İnsanın bu iki yöntemin mutlak geçerliliğine olan sağlam inancının insani bir kökene sahip olduğu ortaya çıktı; her ikisinin de varsayımlara dayandığı görüldü.

İnsanın sınırsız bir belleğe ve sonsuz bir yaşama sahipmişçesine güvenle yoluna devam edebileceğine ilişkin kesinliklerden yoksun bırakıldığı anda, matematik kumdan bir kale gibi yıkılırdı. Sonsuz süreçlerin geçerliliği, varsayımdan ibaret olan bu kesinliklere dayanır ve bu süreçler de matematiksel analize egemendir. Ama hepsi bu değil: Bu hipotezin çürütülmesi halinde aritmetiğin kendisi genelliğini kaybederdi, zira tamsayı kavramımız bunun ayrılmaz bir parçasıdır. Geometri ve mekanik için de aynı şey geçerlidir. Bu felaket de fen bilimleri adı verilen bütün o yapıyı alaşağı ederdi.

Deneyimin geçerliliği geleceğin geçmişe benzeyeceğine dair inancımıza dayanır. Bize benzer görünen bir dizi olayda belli bir eği-

lim kendini gösterdiği için, bu eğilimin kalıcılığa işaret ettiğine ve bu kalıcılığın geçmişte ne derece aynı biçimde ve düzenli olarak gözlemlenmişse, gelecekte gözlemlenmesinin de o kadar garanti olduğuna inanırız. Ancak tüm ampirik bilginin dayanağı olan *çıkarımların* bu geçerliliği, insanların kesinlik ve kalıcılığa olan özlemlerinden daha sağlam bir temele dayanmıyor olabilir.

Ya düzensiz deneyimlerimizle sistematik deneyler arasındaki aşılabilir uçuruma ne demeli? Duyularımızın geliştirilmiş uzantıları olarak görmek üzere eğitilmiş olduğumuz algılama ve ölçüm araçlarımız, tam da belirlemeye çalıştığımız şeylere dair önyargılar yüklenmiş halleriyle hileli zarlar gibi değil mi? Bilimsel bilgilerimiz, duyularımıza kapalı olan muğlak ve ele avuca gelmez o dünyayı sayılar aracılığıyla taklit etmeye yönelik devasa –ve bilinçdışı– bir çaba değil mi? Titreşimlerin frekansına indirgenmiş renk, ses ve sıcaklık, kimyasal formüllerde sayısal dipnotlara indirgenmiş tat ve koku – bilincimizi dolduran gerçeklik bunlar mı?

Demek ki modern bilim şu açıdan klasik öncülünden farklıdır: İnsan bilgisinin insani kökenini ve doğasını kabul etmiştir. İster determinizm veya rasyonellik, ister ampirizm veya matematiksel yöntem olsun, *her şeyin ölçüsünün insan olduğunu ve başka bir ölçü bulunmadığını* kabul etmiştir.

Son.

Sonsöz

Joseph Mazur

Sayı'nın dördüncü ve son basımı yarım yüzyıl önce yayımlandığından beri matematik şaşırtıcı bir hızla ilerledi. En önemli çözülememiş problemler ya çözüldü ya da çevresindeki yeni alanlara yeni kökler saldı. Atalarımızın sayılarla işlem yapma kurallarını ilk keşfettikleri zamandan beri matematik sorunları baş gösteriyor. Bunların kimileri çözüldü, kimileri çözülemedi; ama tıpkı antik Fenike çavdar tarlalarındaki taşlar gibi eskileri daha ortadan kalkmadan yenileri beliriyor. Öte yandan, modern sayı kuramı ve analiz alanındaki gelişmelere rağmen *Sayı'nın* içeriği hâlâ ilk basımın yayımlandığı 1930'daki kadar taze. *Sayı'yı* bugün okuyan matematik meraklısı, kitabın kolay anlaşılır dilinden, güncel konulara yakınlığından ve düşünsel kısıktırcılığından etkileniyor.

Matematikteki ilerlemeler gittikçe hızlanıyor. İlk bakıldığında, son elli yılda yalnızca birkaç ünlü problem çözülebilmiş gibi görünüyor. Ama modern matematik gittikçe daha da derinlik kazanıyor. Yüzeyde duran problemlerin çözümleri, çoğu zaman büyük, sağlam, birleştirici bir kaynaktan çıkan birbirine dolanmış ince kökler aracılığıyla sınırları aşarak başka alanlardaki çözümlere bağlanıyor.

Küpün iki eş küpe bölünmesi, açının üçe bölünmesi ve çemberin kareleştirilmesi gibi antikçağ problemleri, modern cebirin parlak fikirlerinin ispatlarını sunmasını bekleyerek iki bin yıl boyunca gizemini korudu. 1837'de Pierre Wantzel küpün iki eş küpe bölünmesinin ve keyfi olarak seçilmiş bir açının üçe bölünmesinin imkânsız olduğunu ispatlayarak antikçağın iki büyük gizemini çözdü. Atina'daki korkunç salgının Apollon'a adanmış küp şeklindeki sunağın boyunun iki katına çıkarıldığında geçeceğini iddia eden Delos Kâhini ile başlayan uzun öykünün sonu muydu bu? Kuşkusuz hayır! Wantzel'in çözümleri hangi basit cebirsel kıstasların rasyonel polinom

denklemlere çözüm olarak geometrik yapılara izin vereceğine dair yeni sorulara yol açtı. Bu sorular da geometrinin nasıl denklem kuramına dönüştürülebileceği yolundaki çok daha kapsamlı soruya yol açtı.

Kitabını baş edilebilir bir boyutta tutmak için Dantzig sayı kavramının evrimi üzerine odaklanıyor ve sayı kuramının en temel sorularından bazılarının cevaplarının kimi zaman en iyi ileri geometriyle açıklanabildiğini bilmesine rağmen matematiğin geometri branşından uzak duruyor. Kitabında, basımı sırasında hâlâ ispatlanamamış pek çok ifade arasından Goldbach Varsayımı, İkiz Asallar Varsayımı ve Fermat'ın Son Teoremi'ne değiniyor. Fermat'ın Son Teoremi 1994'te (eski öğrencisi Richard Taylor'ın yardımıyla) Andrew Wiles tarafından, matematiğin çok farklı branşlarından gelme ve dışarıdan bakıldığında birbirinden farklı matematiksel objeler arasındaki bağlantıları onayan, sayı kuramındaki en güzel ve parlak fikirlerden bazıları kullanılarak çözülmüştür. (Burada buna hakkını verecek bir öykü sunmam söz konusu bile değil, zira biçimsel ispat son derece teknik, ama Ek Okumalar kısmında sıralanmış popüler kitapların kimilerinde kapsamlı olarak detaylandırılmıştır). Diğer iki varsayım ise henüz çözüme kavuşturulamamıştır.

Örneğin, İkiz Asallar Varsayımı, asal sayılar topluluğunun tüm doğal sayılar içinde nasıl dağıldığına dair basit, fenomenolojik sorular sorulmasıyla gündeme gelen geniş problem demeti içinden sadece biridir. Sayı kuramına dair en güzel soruların pek çoğu, gayet basit bir şekilde ifade edilebilmek gibi olağanüstü bir özelliğe sahiptir. Anlamak için çok az teknik dil bilmek yeterlidir –hatta hiç bilmeseniz de olur– ve en masum ziyaretçi bile eğer dikkatli olmazsa kendisini saatler boyu matematikle uğraşır bulabilir. $n^2 + 1$ biçiminde kaç asal sayı vardır? $2p + 1$ 'i asal sayı yapan kaç p asal sayısı vardır? Mükemmel tek sayılar var mıdır? (Mükemmel sayılar –örneğin 6– kendi bölenlerinin toplamına eşittir.) Günümüzde 300 basamağın altında mükemmel tek sayı olmadığını biliyoruz. Ama acaba hiç var mı? Eğer varsa o sayının hem karelerin toplamı olması hem de en azından 47 asal çarpanı bulunması gerektiğini biliyoruz. Ama acaba hiç var mı?

Bir zamanlar genç ve saf matematikçiler (benim gibi) basitçe ifade edilebilen tüm bu güzel soruların çözülmesi durumunda ne olacağını düşünüp kaygılanırdı. Kaygılanmamayı öğrendik. Her zaman

için heveslileri baştan çıkaracak yeterince soru olması bir yana, her cevap da kendi soru silsilesini yaratacaktır. Kuşkusuz modern sayı kuramının büyük kısmın doğuran Fermat'ın Son Teoremi için bu böyleydi; modern cebirin büyük kısmını meydana getiren antik Yunan problemleri için de bu geçerliydi. Kendimizi daima sayı kavrayışımızın o daha erken evrelerinde buluveriyoruz.

Elli yıl mevcut problemlere çözüm beklemek için uzun bir zaman gibi görünebilir, ama kimilerinin bin yıllarca beklediğini düşünürsek, Öklit'in *Öğeler*'i ilk ortaya çıkıp da modern matematiği başlattığından beri geçen zamanın sadece yüzde 2'sinde çok şey olmuş gibi görünüyor. İlk önce bilgisayarların matematiği nasıl etkilediğine bakacağız. Daha sonra Goldbach Varsayımı ve İkiz Asallar Varsayımı konularındaki ilerlemelere bakacağız.

Bilgisayarlar

1954'te, *Sayı*'nın dördüncü basımının yayımlandığı yılda, MANIAC I (*Mathematical Analyzer, Numerical Integrator and Computer*; Matematiksel Analizci, Sayısal Bütünleyici ve Hesaplayıcı) 18.000 vakum tüpüyle zamanın en gelişmiş bilgisayarıydı. (O 18.000 vakum tüpünden tek bir tanesi yandığı için makinenin kaç kere bozulduğunu ancak hayal edebiliriz.) 1951'de bilgisayarlar kullanılmadan en büyük asal olarak 44 basamaklı

$$(2148 + 1)/17 = 20988936657440586486151264256610222593863921$$

sayısı bulunmuştu, ama yalnızca üç yıl sonra MANIAC I'in yardımıyla en büyük asal sayı olarak 687 basamaklı $2^{2.281} - 1$ sayısı bulundu. Bugün $2^{24.036.583} - 1$ 'in bir asal sayı olduğunu biliyoruz. Bu sayı tam 7.235.733 basamaklıdır.

1954'te grafik arayüzlü analog yazıcılar halen tasarım aşamasındaydı, gerçi kayıt iğnesini yukarı, aşağı, sağa veya sola hareket ettiren prototipler IBM tarafından geliştiriliyordu. Dantzig Riemann-Zeta fonksiyonundan söz etmiyor, ama $\zeta(s) = 0$ denkleminin çözümlerinden oluşan bu ilginç fonksiyonun asal sayıların dağılımıyla şaşırtıcı bir bağlantısı vardır. Bir sürü sayı kuramı teoremi, $\zeta(s)$ 'nin tüm sıfırlarının $1/2 + ai$ biçiminde karmaşık sayılar olduğunu iddia eden Riemann Hipotezi'nin ispatını otomatikman takip edecektir. Örne-

ğın 1962'de Wang Yuan, Riemann Hipotezi'nin doğru olması durumunda, p ve $p + 2$ 'nin en fazla üç asal sayının çarpımı olduğu sonsuz sayıda p asal sayısı olduğunu göstermiştir. Riemann zeta fonksiyonunun ilk üç sıfırını elle şaşırtıcı bir doğrulukla hesaplamayı başarmıştır. 1954'te Alan Turing Zeta fonksiyonunun 1.054 sıfırını elektronik bir bilgisayar olmadan bulduğunda 1.054 çok büyük görünüyordu; ama şimdi, modern bilgisayarların yardımıyla 10^{22} 'den fazla sayıda sıfır biliyoruz ve tümü de reel kısımları $1/2$ 'ye eşit olan çizginin üzerindedir. Bugün dünyanın en hızlı bilgisayarı bile Riemann-Zeta fonksiyonunun tüm sıfırlarının karmaşık düzlemde $1/2 + ai$ dikey doğrusu üzerinde yer alıp almadığını söyleyemez; basit 500 dolarlık bir masaüstü bilgisayar anında o doğru üzerinde yer alan pek çok sıfır bulabilir, ama doğru üzerine düşmeyen hiçbir tane bulamaz.

Bilgisayarlar sonlu sayılarla işlem yaparlar ve her ne kadar hayranlık uyandıracak hızlarda çalışabilseler de o hızlar da sonludur. Yine de keşfe yardımcı olabilir, matematikçiye sonu gelmeyen eziyetli hesaplardan kurtarabilir ve pek çok durumda da insan aklınca farkına varılması imkânsız olan ihtimalleri gündeme getirebilirler.

Goldbach Varsayımı

Artık 2'den büyük bütün çift sayıların iki asalın toplamı olarak yazılabileceğini söyleyen Goldbach Varsayımı hakkında bir şeyler biliyoruz. Dantzig yeterince büyük tüm tek sayıların üç asal sayının toplamı olarak yazılabileceğini biliyordu ama buna değinmemişti. Rus matematikçi İvan Vinogradov bunu 1937'de ispatlamıştı. Dantzig aynı zamanda tüm pozitif tamsayıların en fazla 300.000 asalın toplamı olarak yazılabileceğini iddia eden o çılgın ama ilginç teoremi de biliyordu. İlk bakışta bu teorem Goldbach Varsayımı ile pek alakalı değilmiş gibi görünebilir, ama aslında 300.000 sonsuzdan bayağı azdır! Bir başka Rus –Lev Shnirelmann– bunu 1931'de ispatlamıştır. Kısa süre sonra Vinogradov; Hardy, Littlewood ve Ramanujan'ın yöntemlerini yeterince büyük herhangi bir sayının dört asal sayının toplamı olarak yazılabileceğini ispatlamak için kullandı. Daha kesin bir dille bu şu anlama gelir: Öyle bir N sayısı vardır ki, ondan büyük tüm tamsayılar dört asal sayının toplamı olarak yazılabilir. Bu, toplamdaki asalların sayısını azaltırken, varsayımın

geçerli olacağı sayının büyüklüğünü artırıyordu.

Vinogradov her iki teoremi de, sonsuz sayıda tamsayının dört asalın toplamı olarak yazılamayacağı varsayımındaki bir çelişkiyi göstererek ispatladı. İspatı N 'nin ne kadar büyük olması gerektiğini belirtememişti, ama 1956'da K. G. Borodzkin N 'nin yalnızca dört milyon basamaklı $10^{4.008.660}$ sayısından büyük olmasının yeteceğini gösterdi. Artık "neredeyse bütün" çift sayıların iki asalın toplamı olarak yazılabileceği biliniyor. Buradaki "neredeyse bütün" sözü Goldbach Varsayımı'nın geçerli olduğu N 'den küçük sayıların yüzdesinin N büyüdükçe 100'e doğru yaklaşması anlamındadır. *Sayı*'nın son basımından hemen sonra, klasik Goldbach Varsayımı'na odaklanan bir sürü teorem ortaya çıktı. İlk olarak, bütün yeterince büyük çift tamsayıların bir asal toplamı ve en fazla dokuz asalın çarpımı olduğu ispatlandı. Yıllar içinde bu çarpan sayısı ilk önce beşe, sonra dörde, sonra üçe ve en sonunda ikiye indi. Artık bütün yeterince büyük çift tamsayıların bir asal toplamı ve iki asalın çarpımı olduğunu biliyoruz. Ayrıca bir Goldbach çeşitlemesinin doğru olduğunu da biliyoruz: Sınırlı sayıda istisna hariç, bütün çift sayılar bir çift ikiz asalın toplamıdır.

İkiz Asallar

Hâlâ sonsuz sayıda ikiz asal olup olmadığı bilinmiyor, ama olması kesin gibi görünüyor. Belki de bunun cevabı matematiğin mevcut olanaklarının ötesindedir. Ama x 'ten küçük ikiz asalların sayısının limitsizce artan ve x 'e bağlı olan bir diğer hesaplanabilir sayıya yaklaştığını ifade eden başka, daha güçlü bir ikiz asal varsayımı vardır. Açıkça görülebildiği gibi, bu güçlü ikiz asal varsayımı bildiğimiz ikiz asal varsayımını ima eder. İkiz asal çiftlerinden ilk birkaçı şunlardır: (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), (41,43), (59,61), (71,73), (101,103). Bugün, bilinen en büyük ikiz asalların 24.000'den fazla basamağı vardır. 1995'te T. R. Nicely'nin 824.633.702.441 ve 824.633.702.443 ikiz asallarını, Intel Pentium mikroişlemcisindeki bir kusuru ortaya çıkarmak için kullanmış olması da ilgi çekici bir noktadır.

Goldbach konusunda olduğu gibi, *Sayı*'nın son basımı yayımlandıktan sonra ikiz asal varsayımına odaklanan bir sürü teorem or-

taya çıktı. 1919'dan beri hem k 'nin hem de $k + 2$ 'nin en fazla dokuz asalın çarpımı olduğu sonsuz sayıda k sayısı bulunduğunu biliyoruz. *Sayı*'nın son basımından hemen sonra k ve $k + 2$ 'nin en fazla üç asalın çarpımı olduğu bulundu.

Testler inşa ederek makinelere sıkı antrenmanlar yaptıran bilgisayar programcıları bu çok sayıdaki varsayımda şanslarını deneyecek iyimser bir yaklaşımla daha fazla ikiz asal veya zeta fonksiyonuna ait daha çok sıfır ararlar. Neden zahmet ediyorlar ki? Kaç tane ikiz asal veya sıfır bulurlarsa bulsunlar, varsayımları asla bu yoldan ispatlayamazlar. Aslında onlar bir şey ispatlamaya çalışmıyorlar, onun yerine kuramcılarının varolduğuna inandığı şeyi göstermeye çalışıyorlar. Her bir yeni buluş varsayıma güveni artırıyor. Karamsarlar ise zeta fonksiyonuna ait sihirli doğrunun üzerinde olmayan bir sıfır bularak bir karşı örnek elde etmeyi umuyorlar. Bu mümkündür. Ama eğer ilk 1.022 sıfır Riemann'ın tahminlerine uymuşsa bir sonrakinin uymama ihtimali nedir? Sonra da şu soruyu sormalıyız: Riemann yalnızca ilk üç sıfırı kontrol etmişti, o zaman hepsinin, reel kısmı $1/2$ ' ye eşit olan doğru üzerinde olduklarını nasıl bilebilirdi? Cevap: Bütünün karakteri, amacı ve hedefi hakkında bir şeyler biliyordu, yalnızca ne zaman bir sıfır daha almak için duracağını değil.

Bu sınırlı seçki son elli yılda geliştirilen matematiğin sayısız incisinden birtakım örneklerdir. Burada değinilenler *Sayı*'da değinilen konularla kısıtlıdır ve dolayısıyla daha çok sayı kuramı alanına ilişkindir. Ancak, *Sayı*'nın okurları, her ne kadar *Sayı*'da bahsedilen başlıca problemlerin pek azı çözülmüş olsa bile, son elli yılda bunlara benzer problemleri çözme konusundaki çabaların bize matematikle uğraşırken yaptığımız işlere dair çok daha yüksek bir kavrayış kazandırdığını da bilmelidirler. Artık bunların tümünün tek bir büyük ve sağlam kaynaktan, matematik dediğimiz şeyden geldiğini görüyoruz. Bu bakış açısı Dantzig ve yirminci yüzyılın ilk yarısında çalışan diğer matematikçilerin erişimine açık değildi.

Ayrıca tıpkı Dantzig'in 1954'te bildiği gibi biz de biliyoruz ki, matematiğin büyük teoremleri bir branşta kendilerini ifşa ederken, onları diğerlerinden ayıran narin perdelere tahrik edici gölgeleri vurur. Belki de önümüzdeki elli yılın rüzgârında kimi perdeler usulca aralanır.

Notlar

21 *kuş iki ile üçü birbirinden ayırabiliyor*

Hayvanlar bile sayıları ayırt etmelerini sağlayan bir tür kaba "bilgi"ye sahiptir. 1930'larda deneysel etnolog Otto Koehler ve Freiburg Üniversitesi'nden başkaları, sayabilmek için kişinin aynı anda nesne gruplarını karşılaştırabilmesi ve nesnelerin sayısını anımsayabilmesi gerektiğini öne sürdüler. Hayvanların sayılarla ne yapabileceğini test etmek amacıyla tasarlanmış şaşırtıcı deneylerinden birinde Koehler bir kuzgunu, sayıları iki ile altı arasında değişen bir grup benekli ayırt etmek üzere eğitmişti. Bu sayılar öğretildikten sonra beş kutu sırasıyla 1, 2, 1, 0 ve 1 benekle işaretlenmişti. Kuzgun ilk olarak ilk üç kutuyu açmış, dört parça yiyeceği tüketip gitmişti. Derken bir hata yapmış olduğunu "düşünen" kuzgun benekleri tekrar saymak için dönmüştü. Başını ilk kutuda bir kere, ikinci kutuda iki kere ve üçüncü kutuda yine bir kere eğmişti. Daha sonra dördüncü kutuyu es geçerek beşe yönelmiş ve onu açarak beşinci lokmayı yemişti.

Koehler kuşun insanların parmaklarıyla saydıkları zaman yaptıklarına benzer "içsel işaretler" meydana getirdiğini öne sürdü. Kuzgunun sayıları tanımasını ve kaydetmesini sağlayan bir tür işaretleme mekanizması olması gerektiğine inanıyordu. Kuşların yuvalarındaki yumurtaları sayabildiklerini ve yalnızca besleyebilecekleri kadar yumurta bıraktıklarını biliyoruz. Bir yumurta fazla olursa kuş o yumurtayı yer, besleyebileceğine inandığındaysa bir tane daha bırakır.

23 *böyle bir sayı duyusuna memeliler arasında rastlanmadığı*

Yabanda yaşayan aslanlar sürülerin boylarını karşılaştırabilirler; yalnızca işgalci sürüden kalabalık oldukları durumda sal-

dırırlar. Sürülerin büyüklüklerini farklı kükremelerin sayısıyla ayırt ederler. Dolayısıyla bir boyut karşılaştırma duyuları vardır. Koehler, insanlar dahil tüm hayvanların sayı duyusunu takip etmeye yarayan bir tür "işaretleme" mekanizması olduğuna inanıyordu.

23 gözardı edilebilecek denli kısıtlı

Nature dergisindeki 1992 tarihli bir makalede (Karen Wynn, "Addition and Subtraction by Human Infants", *Nature*, 1992, 358:749-50) beş aylık bebeklerin bir tür kaba sayı duyusuna sahip olduklarını gösteren deneylerden bahsediliyor. Bir grup beş aylık bebeğe sahneye konulan bir kukla gösterilmiş (Miki Fare kuklası). Kuklayı saklamak için bir perde indirilmiş. Daha sonra bebeklere perdenin arkasına ikinci bir kukla yerleştirildiği gösterilmiş. Perde kaldırılmış. İki kukla da mevcutsa bebekler hiç şaşırmıyormuş. (Psikologlar bebeğin şaşırp şaşırmadığını, bir nesneye baktığı zamanı ölçerek anlarlar. Eğer bebek bir nesneye kısa bir süre için bakar ve başını çevirirse bebeğin o nesneyi daha önce gördüğü ve ondan sıkıldığı sonucunu çıkarabiliriz. Uzun bir bakış bebeğin gördüğü şeyi görme deneyimine sahip olmadığını ve bu yeni deneyimi uygun bir ilişkilendirme kategorisine yerleştirdiğini düşündürür.) Karen Wynn'inkilere benzeyen deneyler yabanda makak maymunlarına yapılmış ve aynı sonuçlar elde edilmiştir. (Bkz. Hauser, M.; MacNeilage, P. ve Ware, M., "Numerical representations in primates", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, ABD, 93, 1996, s. 1514-7.)

Bir başka bebek grubunaysa iki kukla gösterilmiş, sonra bir perde inip kuklaları saklamış. Birazdan perde kaldırılmış. Görünürde iki kukla olduğunda bebekler şaşırmamış; ama bir kukla olduğunda bebekler şaşırmış. Bu da beş aylık bebeklerin ikiden biri çıkartabildiklerini düşündürüyor.

Karen Wynn'in deneyindeki bebekler, tıpkı yuvadan bir yumurta eksildiğini fark eden bir kuş gibi sadece eksik kuklalar olup olmadığını görmek için zihinsel imgeler oluşturuyor olamazlar mı? Etienne Koechlin'in deneyleri bebeklerin nesnelerin zi-

hinsel modellerini oluşturup oluşturmadıklarını test etmek için tasarlanmıştı (Stanislas Dehaene, *The Number Sense*, Oxford University Press, s. 55-6). Koechlin'in deneyi de Wynn'inkine benziyordu, ama burada kuklaların konumları tahmin edilemesin ve zihinsel bir imge olarak sabitlenemesin diye sahne yavaşça dönüyordu. Koechlin perde kaldırılıp yanlış sayıda kukla gösterildiğinde bebeklerin yine de şaşırdıklarını görmüştü, ki bu da bebeklerin perdenin ardındaki biçimlenimin net zihinsel imgelerini kullanmadıklarını gösteriyordu.

Bir başka deneyle de şaşırtıcı bir şekilde bebeklerin "hesaplarının" nesne kimliğinden bağımsız olduğu belirlenmişti (Simon, T. J., Hespos, S. J., ve Rochat, P., "Do infants understand simple arithmetic? A replication of Wynn" [1992], *Cognitive Development*, 10, 1995, s. 253-69). Yanlış sayıda kukla çıktığında bebekler yine şaşıyorlardı, ama kuklaların yerinde topların durduğunu gördüklerinde şaşırmıyorlardı. Bu da bebeklerin soyut sayı tanıma becerisi olduğunu gösterir.

- 28 *bu parmakları ardışık olarak kaldıracak veya indirecektir*
Yeni Gine'nin uzak dağlık bölgelerinde yaşayan yerli kabilelerden Yupnolar her parmağı belli bir sırada sayan ve daha sonra bedeninin bir yanından diğerine geçerek ayak parmakları, burun delikleri, meme uçları ve cinsel organlar gibi beden parçalarını kullanan karmaşık bir sistemle 33'e kadar sayabiliyorlar (Wassmann, J., ve Dasen, P. R., "Yupno number system and counting", *Journal of Cross-Cultural Psychology*, 1994, 25[1], s. 78-94).

- 29 *yönteme dair tam kapsamlı talimatlar*
Eski parmakla sayma yöntemlerine ait yegâne eksiksiz kayıt, Aziz Bede tarafından yazılmış *De computo vel loquela digitorum* (Parmaklarla Sayma ve Konuşma Üzerine) adlı elyazmasıdır. Bede, ortaçağ âlimleri arasında pek çok şeyin yanı sıra Yahudi Hamursuz Bayramı ile aynı güne düşmemek üzere tasarlanmış Paskalya Pazarı'nın hesaplarıyla tanınan bir Benedikten keşişidir. Diğer tüm dinsel bayramlar Paskalya'ya göre belirlendiğinden Bede'nin hesaplamaları önemli kabul edilir-

di. Bede sırf parmakları açıp kapayarak 1'den 1 milyona kadar sayıların nasıl gösterilebileceğini çizimlerle belirtmiştir. (Daha fazla detay için, bkz. Karl Menninger, *Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers*, New York: Dover, 1992, s. 201-20.)

55 *bu listeye beş tane daha eklenmiştir*

Bugün 39 mükemmel sayı biliniyor. Bunların en büyüğü $2^{13,466,916}(2^{13,466,917}-1)$ 'dir. Bu sayı 4 milyondan fazla basamağa sahiptir. Ama elbette bu sayı otuz dokuzuncu mükemmel sayı olmayabilir.

57 *ikiz asallar*

2000 yılında, bilinen en büyük ikiz asallar keşfedilmiştir. Bunlar $665551035 \times 2^{80025} \pm 1$ 'dir. 24.098 basamağı vardır. Kasım 1995'te ikiz asallar Intel Pentium mikroişlemcisindeki bir hatayı ortaya çıkarmak için kullanılmıştır. 19 basamağa kadar doğru olması gereken işlemciler 10.'dan sonra hatalı çıkmıştır. (Kaynak: Eric W. Weisstein. "Twin Primes", MathWorld—A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/TwinPrimes.html>.)

59 *5'in katı olmak zorundadır*

$n(n^2 + 1)(n^2 - 1)$ 'in her zaman 5'in katı olduğunu görmek için son terimi çarpanlara ayırın. Daha sonra bunun çarpımı şöyle yazılabilir: $P(n) = (n - 1)(n)(n + 1)(n^2 + 1)$. Şuna dikkat edelim: Eğer ilk üç çarpandan biri 5'e bölünebilirse $P(n)$ de 5'e bölünebilir. İlk üçten biri 5'e bölünemezse, n 5'e bölündükten sonra 2 veya 3 kalmalıdır. Eğer n 'den kalan 2 ise o zaman n^2 'den kalan 4'tür. Eğer n 'den kalan 3 ise o zaman n^2 'den kalan 9'dur. Bu son iki vakanın her ikisinde de kalana 1 eklemek 5 kalmasını sağlar, buna göre n^2+1 5'e bölünebilir.

60 *matematikçilerin dehasını meşgul etmeye devam etmektedir*

Goldbach postülası ya da daha yaygın bilinen adıyla Goldbach Varsayımı dünyanın en büyük çözülememiş problemlerinden biri olmaya devam ediyor. Sayı kuramındaki en eski çözülememiş problemlerden biridir. Prusyalı matematikçi Christian Goldbach'tan Leonhard Euler'e yazılmış 1742 tarihli bir mektupta

ortaya atılmıştır. 6×10^{16} 'dan küçük tüm sayılar için Aveiro Üniversitesi'nden Portekizli matematikçi Tomás Oliveira e Silva tarafından doğrulanmıştır.

62 *genel önerme ispatlanamamıştır*

Andrew Wiles genel önermeyi 1994'te ispatlamıştır.

71 *tüm sağıın bilimler için bir örnek*

Geometri Öklit'in zamanından beri tümdengelimsel akıl yürütmeye bir model oluşturmıştır, ama bu model geometriyle kısıtlı değildir. Sayı kuramındaki tümdengelimsel akıl yürütmenin de, on dokuzuncu yüzyılda aritmetiğin aksiyomları belirlenmeden çok önce tümdengelimsel ispatlar konusunda hatırı sayılır bir ünü vardı.

72 *Buradaki ilke nedir?*

Dantzig zaman zaman tümdengelimsel yöntemlerin yeterli olmadığını ve matematikçilerin teoremlerini ispatlamak için başvurdukları etkili başka bir araç daha olduğunu söylemek istiyor. Bu nokta, bu bölümün ilerleyen sayfalarında Dantzig aritmetiğin birleşme özelliğini göstermek için matematiksel tümevarım ilkesini uyguladığında netleştiriliyor.

74 *iki kumarbazın sonuçlanmamış oyunu*

Problem, *puan problemi* olarak bilinir. Bu problemde bir zar oyununun bitmeden bırakılması durumunda oyunculara kaç puan verileceği sorulur. Problem ilk olarak Girolamo Cardano tarafından kumarla bağlantılı olarak ihtimal hesapları konusuna önemli katkılarla dolu, yayımlanmamış *Liber de Ludo Aleae* (Zar Oyunları Kitabı) adlı bir Latince elyazmasında dile getirilmiştir. Milanolu fizikçi, matematikçi ve kumarbaz Cardano daha çok 1545 yılında yayımlanmış ve o zamana dek cebirsel denklemler kuramı hakkında bilinen her şeyi ele alan kitabı *Ars Magna* (Büyük Sanat) nedeniyle tanınır.

80 *Rhind papirüsü*

Bu MÖ 1700 civarında yazılmış ve İskoç antikçağ tarihçisi Henry Rhind tarafından 1858'de keşfedilmiş bir papirüs tomarının bir kısmıydı.

- 80 *Ahmes*
Kâtip MÖ on beşinci ila on yedinci yüzyıllarda yaşamış A'h-mosé idi.
A'h-mosé'un eseri MÖ on sekizinci yüzyıla ait bir eserden kop-yaladığına inanılır.
- 82 *Yunancadaki arithmos sözcüğünün ilk hecesinin kısaltmasıdır*
Dantzig *son* hece demek istemiş olmalı.
- 87 *cebiri sözcüklerin köleliğinden kurtardı*
Dantzig'in söz ettiği bu noktaya dair fevkalade, derin ve bilim-sel bir ifade için bkz. Jacob Klein, *Greek Mathematical Tho-ught and the Origin of Algebra*, Cambridge, Mass.: MIT Press, 1968, s. 150-85.
- 90 *$x \cdot 0 = a$ denklemine karşılık gelen hiçbir rasyonel sayı yoktur*
Bu ve bir sonraki paragraf neden sıfırla bölme yapamayacağı-mıza dair olağanüstü nedenler veriyor. Ancak, sıfırın herhangi bir sayının sıfırla çarpımının sonucu olan tek sayı olduğunu söylemek gerekir. Dolayısıyla, eğer a sıfır hariç herhangi bir sayıysa, $x \cdot 0$ 'a eşit olamaz.
- 93 *çift olarak yazabildiğimizden*
Burada verilen liste daha küçük sayının her zaman 1 olduğu iz-lenimini vermeyi amaçlamıyor. Daha küçük sayıyı 2 olarak al-madan önce listenin sonsuza kadar uzadığı anlamına da gelmi-yor. Dantzig sadece a payıyla b paydasından oluşan bir sayı çiftini kastediyor. Bu sayıları listelemenin dâhiyane bir yolu vardır. Buna göre, bu sonsuz listelerin listesini yaparken, n . lis-te paydası n olan tüm kesirleri gösterir. Bu listelerin listesi tüm rasyonel sayıların tek bir listesini oluşturacak şekilde düzenle-nebilir.
- 99 *Öklit'in kanıtı*
Kanıtın kendisi Öklit, 10. Kitap, 9. Önerme'de yer alır. Teore-min kendisi 2'den 17'ye kadar asal sayıların kareköklerinin bir-le oransız olduğunu, Öklit *Öğeler*'i yazmadan neredeyse yüz yıl önce ispatlayan Theaitetos'a atfedilir. $\sqrt{2}$ vakasında dolaylı ispat şunu gösterir: Eğer $\sqrt{2}$ kenar uzunluğu 1 olan bir karenin

kenarıyla oranlı olsaydı, bu durumda hem tek hem de çift olan bir sayı olması gerekirdi.

99 *köşegenle kenar oranlıdır*

İki doğru veya iki mesafenin ölçüsü, uzunluklarının oranı bir rasyonel sayıysa *oranlıdır*. Eğer oranları rasyonel bir sayı değilse o zaman *oransız* olarak adlandırılırlar.

100 *sürekli kesirler*

Örneğin $\sqrt{2}$ *sürekli kesir* denilen biçimde yazılabilir:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

101 *Ne kadar doğru olduğunu bilemem ama benim kuramım böyle*
Bu sayıların nasıl elde edildiğini hiçbir zaman bilemeyebiliriz, ama Dantzig'in kuramı çok basit bir yöntem sunuyor, dolayısıyla kullanılanın o olması gayet muhtemeldir.

104 *Diophantos'un Arithmetike adlı eseri*

Diophantos bunu MÖ dördüncü yüzyılda yazmıştı. *Arithmetike* cebirsel denklemlerin çözümleri ve sayılar kuramı üzeri-neydi.

105 *rasyonel sayılar ve ikinci dereceden köklü ifadeler*

B'nin negatif olduğu vakalar ele alınmamıştır.

106 *sadece köklü ifadeler yoluyla*

"Köklü ifadeler yoluyla" keyfi bir koşul gibi görünebilir, ama aslında köklü ifadelerle çözülebilir olduğunu söylemek denklemin sonlu bir zamanda gerçekleştirilebilecek, sonlu, adım adım bir prosedürle (bir algoritmayla) çözülebilir olduğunu söylemekle aynı şeydir.

108 *çapının 8/9'u üzerine kurulmuş*

R yarıçap ve D çap olmak üzere dairenin alanı şudur:

$$sR^2 = s \frac{D^2}{4}$$

Eğer π yerine $(16/9)^2$ kullanılırsa, o zaman dairenin alanı (bir kare olarak ifade edilmiş haliyle) şöyledir:

$$s \frac{D^2}{4} = \left(\frac{16}{9}\right)^2 \frac{D^2}{4} = \left(\frac{8}{9}\right)^2 D^2$$

109 *bu problemler*

İlk denklem bir küpün hacmini cetvel ve pergel ile ikiye katlama problemini çözmeye çalışmaktan kaynaklanıyor. İkinci denklem herhangi bir açıyı cetvel ve pergel ile üçe bölmeye çalışmaktan geliyor. Bu problem şu değer bulunmasını gerektiriyor: $x = \cos(a/3)$. Trigonometrik özdeşlik $\cos a = 4 \cos^3(a/3) - 3 \cos(a/3)$, buna göre $4x^3 - 3x - a = 0$ eşitliğini veriyor.

114 *Elealı Zenon*

Diylektiğin mucidi olarak gösterilen Elealı Zenon, Stoacı felsefe ekolünün kurucusu ve daha ünlü olan Kıbrıslı Zenon ile karıştırılmamalıdır. Elealı Zenon'un yaşamı hakkında pek az şey biliyoruz. Atina'yı ziyareti ve felsefesinin ufak bir kısmı Platon'un diyaloglarından *Parmenides*'te Antiphon tarafından nakledilir. Diogenes Laertios'un Zenon'un ölümünden 700 yıl sonra yazılmış *Ünlü Filozofların Yaşamları ve Öğretileri* adlı eserinden biraz daha biyografik bilgi ediniyoruz. Zenon'un kitabı çoğulculuk ve devinim üzerine 40 paradoks içeriyordu, bunlardan dört tanesi Aristoteles'in *Fizik* adlı eserinde korunmuştur.

114 *Stagiralı*

Stagiralı, Aristoteles'e verilen bir addır. Bu ad kendisine Makedonya'daki antik Stagira kentinden olduğu için verilmiştir.

114 *Akhilleus ve Kaplumbağa*

Aristoteles bir yarışa katılan Akhilleus'tan bahsediyor, ama kaplumbağa modern yazarlarca öyküye renk katmak için uydurul-

muş gibi görünüyor. Zenon'un argümanlarının ana kaynağı Aristoteles'in *Fizik*'i, Diogenes Laertios'un *Ünlü Filozofların Yaşamları ve Öğretileri* ve Platon'un *Parmenides*'idir. Bu kaynaklardan hiçbiri bir kaplumbağadan söz etmiyor.

116 *Argümanlar'ın tarihsel önemi*

Bu tarihsel önem küçümsenmemelidir. Bertrand Russell şöyle demişti: "İlk olarak oransızların keşfiyle ortaya çıkan problem, zamanla dünyayı anlama çabası içindeki insan zekâsının karşılaştığı en zor ve aynı zamanda etkileri en kapsamlı problemlerden biri olmuştur" (Bertrand Russell, *Scientific Method in Philosophy*, Londra: Open Court, 1914, s. 164).

116 *Ama sonsuz sayıda sonlu aralıkların toplamı sonsuzdur*

Dantzig'in demek istediği bu değildi. Bunu Zenon'un ağzından söyletiyor. $1/2$ 'nin birbirini izleyen üslerinin sonsuz toplamının sonlu bir sayıya, yani 1'e eşit olduğunu biliyoruz. Bu ifade ancak sonlu aralıkların hepsinin sonlu bir sayıdan büyük olması durumunda doğrudur.

117 *Zamanı aralıklara bölmek*

Beşinci yüzyıl Yunanlıları zamanın anlarını bir doğru üzerindeki noktalar, bir ipe geçirilmiş boncuklar gibi hayal ederlerdi.

129 *dizi*

Dizi belirli bir sayısal sıra izleyen nesnelerden oluşan bir liste anlamında bir matematik terimidir. Dizinin nesneleri genellikle sayılardır.

129 *yiten*

Burada *yiten* yalnızca sayısal değeri azalan veya sıfıra yaklaşılmaya meyilli olan demek.

130 *asemptot*

İki asemptot dizi birbirine yaklaşılmaya meyilli değerler içerir.

131 *En basit dizi türü*

Terimlerinin net olarak hesaplanabilecek bir sayıya yaklaşılmaması anlamında *en basit*.

131 *ilerlemenin toplamı*

Bu, seriyi $n + 1$ 'inci terimde durdurup ona S_n adını vererek kolayca gösterilebilir.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n$$

Daha sonra $S_n - rS_n$ hesaplanır, bunun sonucu da $a - ar^{n+1}$ 'dir.

$S_n - rS_n = a - ar^{n+1}$ denklemi S_n için çözülür, buradan çıkan da

$$S_n = \frac{a - ar^{n+1}}{1 - r}.$$

Burada n büyüdükçe S_n 'nin orijinal geometrik seriye yaklaştığını görürüz.

132 *sonsuz sayıda terimin toplamı sonlu olabilir*

Bunlar işe yarıyor gibi görünen matematiksel modeller aracılığıyla yapılan açıklamalar. Ama paradokslar hâlâ mevcut. Eğer modellerin ikilik ve Akhilleus argümanlarını adil şekilde temsil ettiğine inanırsak, o zaman Zenon'un argümanları bilmece boyutuna indirgenir. Ama her zaman için devimin sürekliliğinin o tuhaf yarılama duraksamalarıyla veya Akhilleus ile kaplumbağa arasındaki yarıştaki o garip frenlemelerle nasıl temsil edilebileceği sorusu mevcuttur.

134 *yeni matematiksel varlıklar*

Bu bizim reel sayı diye bildiğimiz şeyi ifade etmenin tuhaf bir şekilde dolambaçlı bir yolu gibi görünebilir, ama okur "kendine asemptot yakınsak diziler" adı verilen bu dizilerin reel sayılar kümesinden beklenen her türlü aritmetik ve süreklilik niteliklerine sahip olduklarını ve dolayısıyla reel sayı olmanın ne demek olduğunun sağlam bir tanımı için kullanışlı olduklarını görecektir. Böyle bir tanımın rasyonel sayıların halihazırda tanımlı oldukları anlayışı üzerine inşa edildiğine dikkat edelim. Burada rasyonel sayının, asemptot ve yakınsak kavramlarının, dizi kavramının tanımları kullanılmıştır.

136 *aşağıdaki yakınsak diziyi oluşturan rasyonel yaklaşıtımlar verir*

$$1; 1,4, 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; \dots$$

Okur bu diziye devam ettiren sistemi sorgulayabilir. Örneğin dizideki yedinci, sekizinci vs. terim nedir ve dizi nasıl oluşturulmuştur? Bunun cevabı, $\sqrt{2}$ 'ye yaklaşan bir sayı dizisi olacağını tahmin ettiğimiz bir şeyi oluşturmak için birkaç algoritmanın var olduğudur. Okur daha sonra bu bölümde bir tanesine rastlayacaktır.

139 Yunanlılarca zaten bilindiğini

Sürekli kesirlerle aynı sonuca giden sonsuz süreç Yunanlılarca biliniyordu. Bkz. David Fowler'ın *The Mathematics of Plato's Academy* (İkinci Basım, Oxford University Pres, 1999) ve Wilber Knorr'un *The Evolution of the Euclidean Elements: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry* (Kluwer Academic Publishers Group, 1980) adlı kitaptan.

139-40 aşağıdaki kesri elde ederiz

Dantzig bunu her terimin önceki terimin paydasının paydasında olduğu bir kesir olarak yazmak istemiş. Şöyle olmalı:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}}}$$

141 özel bir süreklilik vakası

"sürekli kesirlerin özel bir vakası" olmalı.

143 yavaş ama kesin biçimde ıraksadığı

Dikkat edecek olursak,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} < \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right)$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} < \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) \quad \text{vs.}$$

O zaman şu harmonik serinin

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \dots$$

şundan büyük olduğunu görürüz:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots,$$

ki bu da şuna eşittir:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Bu son seri sınırsızca büyür ve dolayısıyla ıraksar.

143 *terimlerin istenildiği gibi dizilebileceği*

Sayfa 143'te sözü edilen basit vaka birleşme ve değişme özelliklerinin hem pozitif hem de negatif terimleri olan seriler için geçerli olmadığını gösteriyor. Sıfır olmayan herhangi bir a sayısını alalım ve $a - a + a - a + \dots$ sıralamasını kuralım. Terimleri $(a - a) + (a - a) + \dots$ olarak grupsalsak sonuç sıfırdır. Ama eğer terimleri $a + (-a + a) + (-a + a) + \dots$ olarak grupsalsak sonuç a 'dır.

144 *limit olarak 2'nin doğal logaritması*

Dantzig burada bir hata yapmış gibi görünüyor.

$$y = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/6 \dots = 1 + 1/2 (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots)$$

Buradan düşünmeden,

$y = 1 + 1/2 (x + y)$ veya $y - x = 2$ 'yi çekebiliriz. O zaman "yanıltıcı şekilde" harmonik serinin 0'a değil 2'ye yaklaştığı sonucuna varırız. Ama Dantzig'in demek istediği yine de geçerli, zira o zaman da yanıltıcı bir sonuca ulaşmış olurduk.

149 *bir süre oluşturamaz*

Örneğin, şu sıralamanın

$$(3/2)^2, (4/3)^2, (5/4)^2, (6/5)^2 \dots$$

limit değerinin aşkın sayı e olduğunu gördük ki, bu sayı rasyonel değildir.

155 *Cantor'un sonsuz dizisine benzer*

Görünürde farklı kuramların aynı sonucu vermesine matematikte sık rastlanır. Eğer biri bir nosyondan (örneğin sonsuzluk) kaçınıyor, diğeryse ona dayanıyorsa, bu durumda her ikisinin de o nosyona gerçekten ihtiyacı vardır, ancak biri bunu gizleyip kullanılmıyormuş gibi davranmakta bir sakınca görmez.

161 *imkânsız ifadelere yol açacağını gösterdi*

Bunu görebilmek için, biraz cebirle birlikte ikinci dereceden denklem formülünü hatırlayalım.

İki kısmı x ve y olarak adlandıralım. Buna göre $x + y = 10$ ve $xy = 40$.

Dolayısıyla $x = 10 - y$. Bu x için ifadeyi $xy = 40$ denklemine yerleştirdiğimizde $(10 - y)y = 40$, ki bu da basitleşerek $y^2 - 10y + 40 = 0$ olur. İkinci derece denklem formülüyle $y = 5 \pm \sqrt{15}$.

162 *aşağıdaki imajiner sonuca yol açar*

Cardono $x^3 + ax + b = 0$ biçimindeki denklemleri çözmek için bir formül bulmuştu.

Onun formülüne göre:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}.$$

Bu formülü $x^3 + 15x + 4 = 0$ denklemine uyguladığımızda sonuç:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

162 *Bu gösterimle, Bombelli'nin denkleminin çözümü*

Bunu görmek için ilk önce şunu görelim: $\sqrt{-121} = 11i$. Daha sonra $i^2 = -1$ bilgisini kullanarak şunu gösterelim:

$$(-2 \pm i)^3 = 2 \pm 11i.$$

Bunu göstermek için $(2 \pm i)$ 'yi kendisiyle üç kere çarpalım ve $i^2 = -1$ kuralıyla basitleştirelim.

Bu sonuncu kuralı kullanarak şunu gösterebiliriz:

$$\sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} = (2 + i) + (2 - i) = 4.$$

164 *Euler'in ... bu çarpıcı formülü*

Kuşkusuz, bir sayının tamsayı olmayan bir üssünün (ya da daha kötüsü, karmaşık bir üssünün) alınmasının ne demek olduğu sorgulanmalı. n pozitif bir tamsayı olduğunda x^n 'nin ne anlama geldiği açıktır. Üslü sayılara dair doğal kuralların ellenmemesi durumunda bu anlamın kapsamı genişler ve genelleşir. Örneğin, $x^{n+m} = x^n x^m$. Bu kural bir sayıyı keyfi bir reel sayıya yükseltme tanımının kapsamını genişletmek için bir çerçeve sunar. Sonra da hem Moivre'ın tanımını (karmaşık sayı şeklindeki üslerin sinüs ve kosinüslere çevrilmesi) hem de karmaşık sayıları bir düzlem üzerinde görmeyi sağlayan (karmaşık düzlem adlı) ilginç bir yöntemi kullanarak, bir reel sayıyı karmaşık bir üsse yükseltme tanımının kapsamını genişletmek için bir yol sunar.

169 *derin ve kapsamlı düşünceleri*

Kalkülüsün temelleri.

169 *orta orantılısı*

İki niceliğin orta orantılısı çarpımlarının kareköküdür. Bu vakada iki nicelik L ve y 'dir. Dolayısıyla Latince terimleri (artık kullanılmıyorlar) tercüme edersek şöyle deriz: Yarım kiriş x , özkiriş L ile yükseklik y 'nin çarpımının kareköküne eşittir.

176 *OA ve OB vektörleri*

Vektörlere aşına olmayan okurlar vektörü geometrik olarak O' dan başlayan ve A 'da sona eren bir doğru olarak akılda canlandırılabilen bir çift sayı gibi düşünebilirler. Bu vakada, O noktası $(0,0)$ koordinatlarıyla orijinde duran noktadır. Eğer A , $a + ib$ 'yi simgeliyorsa, o zaman adresi sıradan Kartezyen geometrik gösterimde (a,b) 'dir. A noktasını bir vektör olarak yorumlamanın getirdiği çeşitli avantajlar vardır. Bunlardan biri iki vektörün birbirine eklenebilir olmasıdır. OA vektörünü OB vektörüne eklemek için öğelerini toplamak yeterlidir. OA (a,b) noktasında biterse, OB de (c,d) 'de biterse, buna göre $OA + OB$

toplamı $(a + c, b + d)$ 'de biter. Bu, vektörlerin toplamına ait paralelkenar kuralıdır. Bu adın verilmesinin nedeni, yeni vektörün OA ve OB kenarlarına sahip paralelkenarın köşegeni olmasıdır.

182 *Modern küme kuramı*

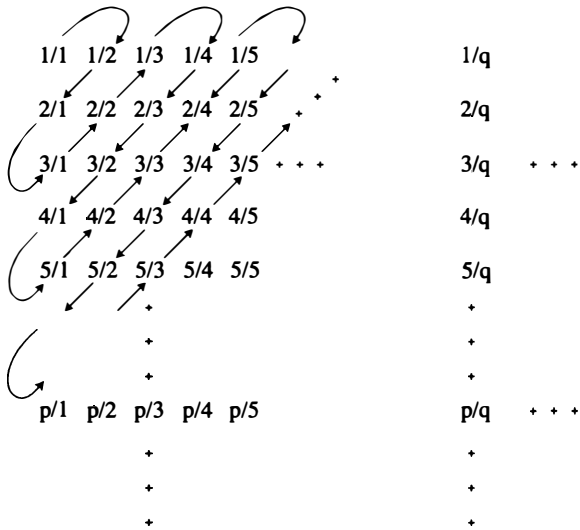
kümeleri derlem olarak yorumlayın.

184 *sonlu aritmetiğinde oynadığı rol*

Bu, sonsuz olmanın bir tanımı olarak kabul edilebilir. Eğer bir kümenin üyeleri o kümenin uygun bir altkümesinin üyeleriyle bire bir eşleştirilebiliyorsa, o kümeye sonsuz denir. Burada *uygun* demek, geniş kümenin altkümeden olmayan en az bir üyesi var demektir. Örneğin, çift pozitif tamsayılar kümesi tüm pozitif tamsayılar kümesinin uygun bir altkümesidir, çünkü 3 sayısı tüm çift tamsayılar kümesinde yoktur ve daha geniş bir kümenin bir üyesidir. Pozitif sayılar kümesi sonsuzdur çünkü her tamsayı iki katı olan tamsayıyla eşleştirilebilir, dolayısıyla her tamsayının çift olan bir eşi vardır.

187 *Bkz. yukarıdaki şekil*

Buna bakmanın bir yolu daha var. Dizilimi farklı biçimde oluşturalım. Sonsuz doğru üzerinde tüm pozitif tamsayıları gösterelim. Bir sonraki doğru üzerinde aynı sonsuz tamsayılar doğrusunu gösterip, bu sefer her birini 2'ye bölerek kesir haline getirelim. Üçüncü doğrudan aynı sonsuz tamsayılar doğrusunu tüm paydaların yerine 3 koyarak gösterelim vb. Aşağıda verilmiş olan dizilimi elde ederiz. Her p/q kesri dikey ve yatay konumunca (q kadar sağa, p kadar aşağıya) belirlenmiş olarak iki boyutlu bir dizilime yerleştirilebilir. Rasyonel sayıları saymak için eğri okları kullanalım ve zaten sayılmış olanları atlayalım.



189 1 yüksekliğinin tek bir denklemi

Ufak yükseklikler için katsayı olarak pek bir seçenek yoktur. 1 yüksekliği için polinom 1. dereceden fazla olamaz. Dolayısıyla, 1. dereceden polinomların ihtimallerine göz atarsak, yalnızca tek bir seçenek vardır: $x = 0$. 2 yüksekliği için, ihtimaller $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$ ve $x^2 = 0$ 'dır. 3 yüksekliği için 1. derece denklemlerle başlayın ve daha yüksek derecelere doğru ilerleyin. Düzenin sadece tek bir 3. dereceden denklemde durduğuna dikkat edin: $x^3 = 0$. Beş ihtimal vardır: $x + 2 = 0$, $x - 2 = 0$, $2x + 1 = 0$, $2x - 1 = 0$, $3x = 0$.

190 köşegen prosedürü

Tüm reel sayılar derlemini numaralandırmaya kalktığınızda bir sorun olduğu görülür. 0 ile 1 arasındaki reel sayılar, uzayıp giden (muhtemelen sonsuz) bir dizi ondalık kesirle gösterilebilen sayılardır. Örneğin 0,4673904739828983493... böyle bir sayıdır ve sondaki üç nokta basamakların sonsuza kadar gittiğini gösterir. 0'dan 1'e reel sayıları yazmayı bir deneyin. Muhtemel bir liste şöyle görünebilir:

- 1 0,46739 ...
- 2 0,38654 ...
- 3 0,03936 ...
- 4 0,84534 ...
- 5 0,67657 ...

⋮

Bu reel sayıları nasıl düzenlerseniz düzenleyin her zaman için listenizde bulunmayan sonsuz sayı olacaktır. İşte bunlardan sadece biri: sonsuz dizilimin sonsuz köşegeni boyunca baktığınızda çıkan sayı (aşağıdaki çapraz olarak işaretlenmiş diliminin içindekiler). Elde edilen sayı 0,48937...'dır.

1	0,	4	6	7	3	9 ...
2	0,	3	8	6	5	4 ...
3	0,	0	3	9	3	6 ...
4	0,	8	4	5	3	4 ...
5	0,	6	7	6	5	7 ...
⋮						
⋮						
⋮						
n						

(listedeki n 'inci sayının
 n 'inci basamağı)

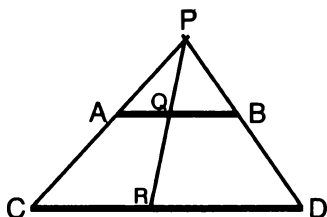
d

Şimdi bu köşegenden elde edilmiş sayıyı şöyle değiştirerek yeni bir sayı oluşturalım: Bir basamak eğer 9 değilse ona 1 ekleyelim. 9'ları 0 olarak değiştirelim. Bu örnekte, ilk basamak 5, ikincisi 9, üçüncüsü 0 vs. haline geliyor ve yeni oluşturulan sayı 0,59048... oluyor. Bu sayı listede değil. Eğer olsaydı, listede bir yerde, mesela n 'inci konumda olması gerekirdi, biz de listedeki n 'inci sayının n 'inci basamağı olan bir d rakamı elde ederdik, ki bu sayı aynı anda hem d hem de $d + 1$ olurdu. Tek çıkış yolu, oluşturduğumuz sayının (0,59048...) listede olmadığını kabul etmektir. Bu da reel sayılar kümesinin tamsayılar kümesinden *daha büyük* olduğunu ve dolayısıyla rasyonel sayılar kümesinden de *büyük* olduğunu gösterir. Köşegen boyunca dizili rakamlar sonsuza dek uzanır, bu nedenle listede olmayan sonsuz tane sayı oluşturulabilir. (Köşegen sayının ba-

samaklarına 2 veya 3 ya da 1 ile 9 arasında herhangi bir sayı ekleyebilirdik ve aynı sonucu elde ederdik.) Yani reel sayılar kümesinin niceliği rasyonel sayılar kümesinin niceliğinden büyüktür.

190 *uzun doğru kısa doğrudan daha fazla nokta içermez*

Bunu görmek için AB ve CD gibi iki doğru çizelim; daha kısa olan AB 'yi uzun olanın yukarısına yerleştirelim. Baş ve son noktaları birleştirerek AC ve BD şeklinde iki doğru meydana getirelim ve bunları P noktasında kesişinceye kadar yukarı uzatalım. AB üzerinde herhangi bir Q noktası alalım, P 'den Q 'ya bir doğru çizelim ve PQ 'yu R noktasında CD ile kesişecek şekilde uzatalım. Bu yolla AB üzerindeki noktalarla CD üzerindeki noktalar arasında bire bir mütakabiliyet sağlamış oluruz (bkz. aşağıdaki şekil).



191 *ondalık kesirler*

Buradaki "ondalık kesirler" tabiri sadece 0 ile 1 arasındaki reel sayıların ondalık açılımı anlamına gelir. Örneğin $1/\pi = 0,31831 \dots$ reel sayısı.

192 *şu âna kadar başarılı olamamıştır*

Böyle bir kümenin var olup olmadığı sorusu Sürey (*Continuum*) Hipotezi'ne gönderme yapıyor. Dantzig Sürey Hipotezi'ni adıyla anmıyor, ancak uzun uzadıya sürey hakkında konuşuyor. 1964'ten önce kardinal sayısı tamsayılar kümesinden küçük ve reel sayılardan büyük bir küme olup olmadığı sorusunun bir cevabı yoktu. Sürey Hipotezi böyle bir küme olmadığını iddia ediyordu. Stanfordlu genç bir matematikçi olan Paul Cohn Sürey Hipotezi'nin ne doğru ne de yanlış olduğunu gös-

tererek soruyu cevapladı. Başka bir deyişle, doğruluğuna karar vermek imkânsız çünkü küme kuramı için seçilmiş belitlere dayanır.

192 *tüm mütekabiliyetlerin toplamı*

Bu mütekabiliyetler nesnelerden oluşan bir küme olarak kabul edilebilir.

195 *tamamen doğal sayı kavramına bağlıdır*

Bu iki kamplaşma arasındaki büyük farklardan birine burada dikkat çekmek isterim. Biçimciler varlığı bir çelişkiye yol açmadığı sürece matematiksel bir nesnenin var olduğuna inanırlar, ama sezgici yalnızca sonlu sayıda adımla tarif edilebilen veya inşa edilebilen matematiksel nesneleri kabul eder.

Ek Okumalar

Mevcut baskısı bulunmayan çok az sayıda öneri dışında aşağıdaki kaynaklar netlikleri, erişilebilirlikleri ve bulunabilirlikleri nedeniyle seçilmiştir. Çoğu, kitapçılarda bulunabilir. Diğerleriyse iyi kütüphanelerde bulunabilir. Konu üzerine bu kadar çok iyi kitap olunca elde, seçmek gerçekten zorlaşıyor, ama yine de burada sınırlı bir liste sunduk.

Genel kapsamlı bir kaynak kitap olarak:

Courant, Richard ve Robbins, Herbert, *What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford: Oxford University Press, 1996.

Tıpkı *Sayı* gibi bu kitap da ilk olarak II. Dünya Savaşı'ndan önce yazılmıştır; matematiğin yaptıkları konusunda klasik bir giriş kitabıdır. *Sayı*'da karşılaşılan teknik soruların çoğu için tek adımda cevaba ulaştıran bir kaynaktır. Meraklı okurları matematiğin pek çok farklı branşından ele aldığı o harika ve ilgi çekici konuları daha derinlemesine keşfetmeye teşvik eder.

1. Bölüm: Parmak İzleri

Butterworth, Brian, *What Counts: How Every Brain Is Hardwired for Math*, New York: Free Press, 1999.

Bizim ve başka hayvanların sayılar ve matematik hakkında nasıl düşündüğümüze dair olağanüstü bir anlatı.

Dehaene, Stanislas, *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*, New York: Oxford University Press, 1997.

İnsanların (ve hayvanların) matematiği nasıl düşündüklerine dair kolay okunur, ilginç bir çalışma. Kitabın 2. Bölümü yeni doğanların sayı duyusu, 4. Bölümü ise insanların sayıları nasıl kavramlaştırdıkları üzerine yoğunlaşıyor.

Menninger, Karl, *Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers*, İng. çev. Paul Broneer, New York: Dover, 1992.

Son derece kapsamlı ve sayıların kültürel tarihine dair detaylarla dolu bir kitap. İstedığınız bölümü okuyup sayı yazımı, simgeleri ve kültürel sayma nosyonları hakkında muhteşem bilgilerin içinde kendinizi kaybedebilirsiniz. Kitap antik sayma, hesaplama ve ölçü aygıtlarının fotoğrafları ve çizimleri dolu.

Neugebauer, Otto, *The Exact Sciences in Antiquity*, New York: Dover, 1969.

1949'da Cornell Üniversitesi'nde verilen bu derslerin metni, o zamandan beri Mısır ve Babil matematiğinin standart tarihçesi olmuştur. Bu kitap çok rahat okunur ve bilim tarihçilerinin de yararlandığı bir kaynaktır.

2. Bölüm: Boş Sütun

Cajori, Florian, *A History of Mathematics*, New York: Chelsea, 1999.

Matematiğin antikçağlardan yirminci yüzyılın başlarına kadar kısa bir tarihi. Sayı ile birlikte okumak için mükemmel bir kaynak olan bu kitap ona benzer güzel bir yazım tarzına sahiptir.

Kaplan, Robert, *The Nothing That Is: A Natural History of Zero*, New York: Oxford University Press, 1999.

Sıfır kavramının evrimini inceleyen esprili ve eğlenceli bir anlatı. Kaplan şu sözlerle kitaba başlıyor: "Sıfıra bakarsanız hiçbir şey görmezsiniz; onun içinden bakarsanız dünyayı görürsünüz." Dünyayı başka gözlerle görmek için bu kitabı okuyun.

Seife, Charles, *Zero: The Biography of a Dangerous Idea*, New York: Viking, 2000; Türkçesi: *Sıfır: Tehlikeli Bir Düşüncenin Yaşamöyküsü*, çev. Nur Küçük ve Yasemin Çevik, İstanbul: Evrim, 2000.

Sıfır üzerine yine esprili bir kitap. Daha soğukkanlı tarzı dışında Kaplan'ın kitabından farkı, sıfır ve sonsuzluğun fiziksel sonuçları üzerine daha fazla zaman harcaması.

3. Bölüm: Sayı Bilgisi

Aczel, Amir, *Fermat's Last Theorem: Unlocking the Secret of an Ancient Mathematical Problem*, New York: Delta, 1997.

Bu harika macera öyküsü okura dünyadaki en ünlü problemlerden birinin arka planını son derece başarılı bir şekilde aktarıyor. Aczel'in ustalığı, bu arka planı öyküyü basitleştirmeden lise düzeyinde matematikle açıklamasında yatıyor.

Allman, George, *Greek Geometry from Thales to Euclid*, New York: Arno Press, 1976.

On dokuzuncu yüzyıla ait bu çalışma, Proklos'un MÖ üçüncü yüzyılda Eudemos tarafından yazılmış kayıp bir geometri tarihini özetlediği kitabını tamamlayıcı özelliğe sahip. Pisagorcu matematiği çevreleyen MÖ beşinci yüzyıl matematiği üzerine kapsamlı ve iyi yazılmış yorumlar barındırıyor.

Berlinghoff, William ve Gouvêa, Fernando, *Math Through the Ages: A Gentle History for Teachers and Others*, Farmington, MA: Oxtan House, 2002.

Çok iyi düzenlenmiş ve kullanımı kolay bir kitap. İki kısma ayrılıyor: genel bir bakış ve daha detaylı "eskizler". Bu kitabın güzelliği sunumunda: Genel bakış, sürekli resimlere bağlanan detaylarla akışı kesmiyor. Vurgulanmış sözcüklerin daha fazla detaya giden bağlantıları göstermesi açısından insana interneti hatırlatıyor.

Ogilvy, Stanley ve John Anderson, *Excursions in Number Theory*, New York: Dover, 1966.

Yaratıcı ve ilginç fikir ve problemlerle dolu, sayı kuramına dair harika bir giriş kitabı. Yazarlar bize bir yandan doyurucu ve düşündürücü bir içerik sunarken, bir yandan da teknik anlatıyı erişilebilir kılarak hassas bir denge kuruyor.

Ore, Oystein, *Number Theory and Its History*, New York: Dover, 1968.

Teknik dili az kullanarak yazılmış bu kitap ilk başlangıcından modern makineler dönemine kadar sayı kuramının ana hatlarını veriyor. Net ve kısa bir yazım tarzına sahip olan bu kitap konunun çekici pek çok noktasına da değiniyor.

Singh, Simon, *Fermat's Enigma: The Epic Quest to Solve the World's Greatest Mathematical Problem*, New York: Anchor, 1998; Türkçesi: *Fermat'ın Son Teoremi*, çev. Sabir Yücesoy, İstanbul: Pan, 2001.

Fermat'ın Son Teoremi'nin yakın tarihli ispatının en popüler anlatımı. Her ne kadar ispatın detaylı olarak anlaşılması için olağanüstü derecede ileri matematik bilgisi gerekse de, bu kitap bu ilginç problemin heyecanlı öyküsünü sadece lise düzeyinde matematik kullanarak sunarken, okura da macerayı etkileyici bir şekilde yaşıyor.

Whitehead, Alfred North, *An Introduction to Mathematics*, New York: Henry Holt, 1939.

Matematik öğrenmek için gerekli olan önemli temel düşüncelerin bir derlemesi. Pek güncel değil ama yine de çok okunaklı bir kitap.

4. Bölüm: Son Sayı

Goodstein, R. L., *Essays in the Philosophy of Mathematics*, Leicester, Birleşik Krallık: Leicester University Press, 1965.

Net, açıklayıcı tarzıyla tanınan üretken yazar Reuben Goldstein'in çeşitli saygın dergilerdeki okunmaya değer makalelerinin bir derlemesi. İspat ve belitsel yöntem nosyonlarını çabukça anlamak isteyenler için bu kitaptaki makaleler birebir.

5. Bölüm: Semboller

Cajori, Florian, *A History of Mathematical Notations*, New York: Dover, 1993.

İlk olarak 1929'da yayımlanmış olan bu kitap, antik ve kullanım dışı gösterimin nasıl daha modern şekillere dönüştüğüne dair kapsamlı bir eser.

Hobgen, Lancelot, *Mathematics for the Million*, New York: Norton, 1946.

Matematiksel konular üzerine seçmecici bir derleme. "Cebir Nasıl Başladı?" başlıklı 7. Bölüm, Dantzig'in *Sayı'sı* üzerine bir kitap raporu gibi. Çinlilerin birinci yüzyılda kullandıkları kibrit çöpü tarzı sayı sembolleriyle başlanarak, bunun pratik problemler aracılığıyla on altıncı yüzyıl cebirinin cebirsel kısaltmalarına dönüşümü anlatılıyor.

6. Bölüm: Ağza Alınamayanlar

Beckmann, Petr, *A History of Pi*, New York: St. Martins Griffin, 1996.

Sovyetler Birliği'ni hedef alan siyasi imaları ve pek de doğru olmayan ifadeleri gözardı ettiğiniz sürece ilginç, komik ve okumaya değer bir kitap.

Niven, Ivan Morton, *Numbers: Rational and Irrational*, Washington, DC: Mathematical Association of America, 1961.

İrrasyonel sayılara, doğal sayılarla başlayan mükemmel bir giriş. İlk bölümler basit, daha sonraki bölümlerse daha ileri ve iddialı okurlar için.

Russell, Bertrand, *The Principles of Mathematics*, Londra: George Allen & Unwin, 1956.

Kitap yirminci yüzyılın başında yazılmış olmasına rağmen hâlâ matematik felsefesi üzerine mevcut en açık ve iyi eserlerden biri. Russell'in kitabının 33. Bölümü Dantzig'in 6. Bölümüyle yakından bağlantılı. Bu 500 sayfalık kitap *Sayı'da* ele alınan pek çok konu üzerine kapsamlı anlatımlar içeriyor.

7. Bölüm: Akıp Giden Dünya

Russell, Bertrand, *Our Knowledge of the External World*, Chicago: Open Court, 1914; Türkçesi: *Dış Dünya Üzerine Bilgimiz*, çev. Vehbi Hacıkadıroğlu, İstanbul: Kabcacı, 1980.

Eğer bu kitabı bulabilirseniz, 3., 4. ve 5. Bölümleri okumaya değer. Russell o benzersiz akıcı üslubuyla Zenon'un argümanlarına dair en net kavrayışlardan birini sunuyor.

8. Bölüm: Oluş Sanatı

Russell, Bertrand, *The Principles of Mathematics*, Londra: George Allen & Unwin, 1956.

6. Bölüm için önerilenle aynı kitap. 32. Bölüm Dantzig'in 8. Bölümüne karşılık geliyor. Bu bölümde matematiğin yoğun olduğu birkaç kısım var, ama Russell'in net yazım tarzı okurun zorlu kavramların üstesinden gelmesini sağlıyor.

9. Bölüm: Boşlukları Doldurmak

Dedekind, Richard, *Essays on the Theory of Numbers*, New York: Dover, 1963.

Bu ince kitaptan Dedekind'in irrasyonel sayılar kuramını ilk ağızdan öğreniyoruz. İrrasyonelin kesin ve sağlam tanımı burada yatıyor. Bu kitap aynı zamanda Dedekind'in sonluötesi sayılar ve devamlılık üzerine görüşlerini de anlatıyor. On dokuzuncu yüzyılın sonlarında, kulağa tuhaf gelecek denli kesin bir dille yazılmış olduğundan anlamak için biraz çaba gerekiyor, ama yine de buna değer.

10. Bölüm: Sayı Bölgesi

Mazur, Barry, *Imagining Numbers (Particularly the Square Root of Minus Fifteen)*, New York: Farrar Straus Giroux, 2003.

Şiir ve matematikte hayal gücü üzerine kolay okunur ve aydınlatıcı bir anlatı. "Karekökler ve Hayal Gücü" başlıklı 2. Bölüm ile "Sayılara Bakış" başlıklı 3. Bölüm, Sayı'nın bu bölümüyle özellikle ilgili.

Reichmann, W. J., *The Spell of Mathematics*, Londra: Penguin, 1972.

Başlıktan da (Matematiğin Büyüsü) anlaşılabilceği gibi bu kitap insanı büyülüyor. Değişik konuları birbirine bağlayan Reichmann ve aralarındaki

şaşırtıcı bağları gösteriyor. İlk yedi bölümü okuduktan sonra "Bütün Bunlar Ne Demek?" başlıklı 15. Bölüm'e atlayın.

Sawyer, W. W., *Mathematician's Delight*, Londra: Penguin, 1976.

Matematikteki konulara dair bir seçkiye sürükleyici bir giriş istiyorsanız bu kitabı deneyin. Sawyer okurun kuram ile aradaki boşluğu aşmasını sağlayacak çok sayıda örnek veriyor. Bu kitap *Sayı*'da değinilen konulardan pek çoğunu içeriyor.

Stewart, Ian, *Concepts of Modern Mathematics*, New York: Dover, 1995.

Bu kitabın ne olduğunu başlığı çok güzel açıklıyor (Modern Matematikteki Kavramlar). Eğer bu yazarın başka kitaplarını okuduysanız, bunun açık, kesin, güncel ve anlaşılır bir okuma olacağını bilirsiniz.

11. Bölüm: Sonsuzun Anatomisi

Aczel, Amir, *The Mystery of the Aleph: Mathematics, the Kabbalah, and the Search for Infinity*, New York: Washington Square Press, 2000.

Sonsuzun gelişimini Cantor'un yaşamı boyunca izleyen sürükleyici bir kitap.

Bolzano, Bernard, *Paradoxes of the Infinite*, İng. çev. Dr. Fr. Prihonsky. Londra: Routledge and Kegan Paul, 1950.

Bu kaynağı Donald Steele'in neredeyse kitabın yarısını kaplayan tarihsel girişi için ekledim. Dili eski, ama tarihsel detaylar sonsuzun faal olarak incelendiği dönemin etkileyici bir tablosunu çiziyor. Bolzano'nun kitabı, eski diliyle boğuşmak isteyenlere matematik temeli olmayanların kolayca anlayabileceği yüzlerce son derece ilginç sonsuzluk paradoksu sunuyor.

Gamow, George, *One Two Three... Infinity: Facts and Speculations of Science*, New York: Viking, 1961; Türkçesi: *1-2-3 Sonsuz... Bilimin Gerçekleri ve Çözülmesi*, çev. Celal Kapkın, İstanbul: Evrim, 1995.

Okumaya bir başladınız mı durmanın çok zor olduğunu göreceksiniz. Her ne kadar bu kitap geçen yüzyılın ortasında yazılmış olsa da hâlâ harikulade bir tazeliğe sahip. Kitap matematiğin ve bilimin çeşitli branşları arasında şaşırtıcı bağlantılar kuruyor. Burada sizi sonsuzlukla tanıştıracak pek çok şey var.

Kaplan, Robert ve Kaplan, Ellen, *The Art of the Infinite: The Pleasures of Mathematics*, New York: Oxford University Press, 2003.

Tıpkı Kaplan'ın diğer kitabı *The Nothing That Is* gibi bu esprili kitap da kendini okutuyor. Kaplan'ın şiirsel tarzı matematik üzerine bir şeyler okuyan acemi matematikçilere benzersiz bir keyif veriyor. Sonsuz üzerine mükemmel bir eser, hem basit hem de yoğun.

Maor, Eli, *To Infinity and Beyond*, Princeton, NJ: Princeton University P., 1991.

Sonsuzluk üzerine çok güzel yazılmış bir giriş kitabı. Maor okura sonsuz serilerin ıraksaması, limitler, sonsuzluğa dair paradokslar, M.C. Escher'in çizimlerinin gündeme getirdiği sonsuz döşeme soruları ve antik ve modern kozmolojiye uygulanan sonsuzluk nosyonları gibi ince meseleler arasından özenle yol gösteriyor.

Lavine, Shaugham, *Understanding the Infinite*, Cambridge: Harvard University Press, 1998.

Bu kitapta Lavine sonsuzluğun felsefesini ve tarihçesini kuşatan orijinal fikirleri sunuyor. Kısım kısım genel okurun da anlayabileceği bu kitabın büyük bölümü ileri matematik bilgisine sahip kişileri hedefliyor.

Rucker, Rudy, *Infinity and the Mind*, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1995.

Sonsuzluğun pek çok yönü üzerine yazılmış bu güzel kitap, Cantor'un argümanlarını açıklayarak sonsuzluğun tüm biçimlerini farklı bakış açılarından inceliyor. Bu kitapta Gödel'in eksiklik teoremlerinin çok net bir açıklamasını da bulmak mümkün.

Russell, Bertrand, *Introduction to Mathematical Philosophy*, Londra: George Allen and Unwin, 1919.

Baskısı tükenmiş olan bu kitap çoğu iyi kütüphanede bulunabilir. Doğal sayıların temellerine dair olağanüstü net bir eser. Yalnızca üç kısa bölümün ardından Russell o benzersiz tarzıyla sonsuzluk ve tümevarım konularına geçiyor.

12. Bölüm: İki Gerçeklik

Dantzig'in matematiğin ne olduğu konusundaki görüşlerinin alternatifleri üzerine pek az kitap var. Aşağıdakiler yakın gibi, ama başka görüşler de makbule geçirdi.

Changeux, Jean-Pierre ve Connes, Alain, *Conversations on Mind, Matter, and Mathematics*, İng. çev. M. B. DeBevoise. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1995.

Bu harika kitap bir biyolog ile bir matematikçi arasında, matematiğin evrenselliği ile onu anlayan nörobiyoloji üzerine bir sohbet. Okurun matematiğin ne olduğu ve bizim onu nasıl kavradığımız sorusuna derinlemesine nüfuz etmesini sağlama açısından bu kitabın bir benzeri yoktur.

Greenberg, Marvin Jay, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*, New York: Freeman, 1993.

Aslen geometri üzerine olan bu kitabın 8. Bölümünde matematiğin ne olduğuna dair mükemmel bir açıklama ve araştırma bulmak mümkündür. Burada matematiğin gerçeklikle bağlantısı nasıldır sorusuna dair başka ilgili kaynaklar bulabilirsiniz. Eğer Öklit dışı geometriler hakkında bilgi sahibi olmak istiyorsanız, bu kitaptan yararlanabilirsiniz. Açık bir dille yazılmıştır ve okura Öklit dışı dünyaların sezgisel bir hissini vermek üzere tasarlanmış mantıklı egzersizlerle doludur.

Lang, Serge, *The Beauty of Doing Mathematics: Three Public Dialogues*, New York: Springer-Verlag, 1985.

Ünlü matematikçi Serge Lang ile matematikçi olmayan bir izleyici grubu arasındaki sıradışı sohbetlerin bir derlemesi. Sohbeti başlatmak için Lang seyirciler arasındaki bir kadına, "Matematik size ne ifade ediyor?" diye soruyor?

Polanyi, Michael, *Personal Knowledge: Towards a Post-Critical Philosophy*, Chicago: University of Chicago Press, 1974.

Polanyi geçerli bilginin yalnızca kişiselikten tamamen uzak yöntemlerle ifade edilip test edilebilen bilgi olduğu görüşünü çürütüyor.

Wigner, Eugene, "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", *Communications in Pure and Applied Mathematics* 13, No. 1 (Şubat 1960).

Sayı'nın bu basımının önsözünde bahsedilen bu ünlü yazı, matematiğin gerçeklikle öznel ve nesnel bağlantılarına dair ilginç bir bakış sunuyor.

Dizin

- Abaküs, 42, 46
Algoritma, 45-6
Analitik geometri, 102, 156-7, 169,
172-3 (*ayrıca bkz.* Kartezyen
geometri, Descartes)
Arap matematiği ve cebiri, 84-5
Argand, Robert, 165, 171, 175
Aristoteles, 53, 70, 114, 116, 296-7n
Aritmetik,
geometriyle karşılaştırılması, 173
kadim sayı sistemleri, 39-41
parmak hesabı, 28-9
sayı kuramıyla karşılaştırılması, 48
Aritmetik ilerlemeler ve asal sayılar,
241
Aritmetik süre, 149
Aritmetik üçgenler, 228-30
Aritmetiksel doğru, 157
Arşimet, 69, 110, 119-22, 139, 169,
214-5
Artık ilkesi, 224-7
Asal sayılar, 55-6
dağılımı, 57, 238
Fermat'ın Küçük Teoremi, 232-4
ikiz asallar, 57, 284, 287-8, 292n
sıfır çarpan yasası, 237
üç basamaklı sayılarda belirleyici
rolü, 226-7
Aşkın denklemler, 91
Aşkınlar, 107, 141
cebir sayılarıyla karşılaştırılması,
190
 e , 111
 π , 111
ve cebir, 111-2
Berkeley, Georgy, 121, 123-5
Bertrand Postülası, 57
Bilim
dinle ilişkisi, 199
ve sonsuzluk, 202-3
Binom katsayıları, Pascal üçgeni,
229-30
Bombelli, R., 139, 162-4, 176, 178,
198, 301n
Bölgeler,
karmaşık sayı bölgesi, 163
rasyonel bölgeler, 149
reel bölgeler, 148
Bölünebilirlik,
dokuz kuralı, 222-7
ondalık artıklar ve çevrimler, 221
ondalık kesirlerin açılımı, 220-1
rakamlar ve bölenler, 222-3
Cantor, Georg, 12, 69, 107, 119, 125,
129, 134-5, 138, 145, 149-57,
160, 173, 179-80, 182-95
Cardan formülü, 162, 255
Cauchy, Augustine, 125, 143, 144,
163, 166, 176
Cebir
cebirin temel teoremi, 165
denklem çeşitleri, 90-1
harfli gösterim, 86-9
Harriott İlkesi, 251-2
kalıcılık ilkesi, 91-4
retorik cebir, 80
sembolik cebir, 80-2
sözcüğün kökeni, 79-80
tarihi, 79-86
ve aşkınlar, 111-2

- Cebir denklemleri, 91
 cebirsel sayılar kuramı, 107
 eski Mısır'da, 80
 eski Yunan'da, 82-4
 köklerle çözümleri, 103-6
- Çetele tahtası, 38-9
 Çin mitolojisi, sayılara ibadet, 51
 Çokterimliler Teoremi, 230-2
- D'Alembert, Jean Le Rond, 118, 120, 125, 143, 165-6
- Dağılım ilkesi, 270-2
- Çemberi kareleştirmek, 69, 110-1, 139
- Dedekind, Richard, 12, 125, 128, 151-7, 185
- Dedekind-Cantor beliti, 157, 173, 207
- Denklemler
 cebir denklemleri, 104-7
 denklem kuramı, bkz. cebir
 grafikle çözüm, 257-60
 kübik denklemler, 105, 254-7
 türleri, 91
- Derlem, 26, 213
- Descartes, 11, 86, 121-2, 168-73, 200, 251-2 (*ayrıca bkz. analitik geometri, Kartezyen Geometri*)
- Diferansiyel hesapları, 121-4
- Dik üçgenler
 kenarların oranı, 60
 Pisagor teoremi, 97-8
- Dil
 numaralandırmanın temeli, 29-31
 parmak hesabı, 28-9
 sayı sezgisi, 24-5
- Dirichlet Kutu İlkesi, 270-1
- Dirichlet, Lejeune, 61, 143-4, 241, 270
- Diziler, 297n
 asemptot diziler, 130, 297n
 doğal diziler, 129
 fark dizileri, 130
 geometrik diziler, 131
 irrasyonel diziler, 137-8
 kendi kendine asemptot diziler, 134-5, 298n
- rasyonel diziler, 129
 sonsuz diziler, 129, 130
 yakınsak, 130, 135-7, 298n
 yiten diziler, 129-31
- Doğal dizi, 27, 129
- Doğal logaritma, 143
- Doğal sayılar
 ve gerçeklik, 201-2
 Pisagorcular için önemi, 97
 sembolizm, 95-6
- Einstein, Albert, 203
- Elealı Zenon, 113-4, 179, 296n
 (*ayrıca bkz. Zenon'un argümanları*)
- El-Harizmi, Muhammed bin Musa, 45, 79
- En büyük asal sayı, 55-7
- Euler, Leonhard, 58, 59, 61, 62, 73, 120, 140, 164, 167, 226, 230, 233, 240, 246-8, 267, 302n
- Faktöriyel sayılar, 56-7
- Fark dizileri, 130
- Felsefe
 dinle ilişkisi, 199
 görelilik ilkesi, 199
 terminoloji, 199-201
- Fermat fonksiyonu ve asal sayılar, 242
- Fermat kuramı, 59-62, 232-3, 238, 284-5
- Fermat sayıları, 58
- Fermat, Pierre de, 58-62, 73, 122, 169, 170-3, 178, 228, 232-3, 242-3, 244-5, 247, 284-5
- Ferrari, 105
- Ferrari yöntemi (karmaşık sayılar), 164
- Fibonacci, Leonardo, 85, 87, 174, 225, 228, 229, 243, 251
- Fluksiyonlar, 123-4
- Fonksiyonlar, 117-8, 163-4, 166-7
- Gauss, 45, 125, 163, 165-7, 171, 175-5, 183, 200, 222, 234-5,

- 237, 239, 241, 242, 265
 Gauss-Argand diyagramı, 175
 Gelilei, Galileo, 121, 172, 181-2, 184-5, 190
 Geometri,
 analitik geometri, 102, 156-7, 169, 172-3
 aritmetikleştirilmesi, 178
 doğru üzerindeki noktalar, 102-3
 irrasyonel sayıların yaklaşık değerleri, 101-2
 karenin köşegeninin ölçülemeysi, 98-9
 kartezyen geometri, 174-6, 302n
 "mümkün" ve "imkânsız", 272
 Öklit geometrisi ve sonsuzluk, 203
 Pisagor teoremi, 98-9
 ve sayı kuramı, 284
 sınırlı geometri, 77, 203, 273 -4
 varsayımlar, 115-6
 Geometri
 Öklit geometrisi ve sonsuzluk, 203
 rasyonel sayıların yaklaşık değerleri, 101
 ve sayı kuramı, 284
 Geometrik diziler, 131
 Geometrik ilerleme, 131-3, 298n
 Geometrik seriler, 142
 Gerçeklik, 197-8
 felsefe ve matematiğin terminolojisi, 199- 201
 gerçekliğin yansıması olarak matematik, 279-81
 görelilik ilkesi, 199
 matematikçilere göre, 198
 ve matematiksel kavramlar, 115-6
 ve matematiksel zorunluluk, 210
 ve nesnel gerçeklik, 204, 205-6
 özel gerçeklik, 204-5
 ve sayı kavramı, 201-4
 sonsuzun matematikten çıkarılması, 203-4
 ve yanılama, 208-9
 Goldbach Varsayımı, 59-60, 284, 286-7, 292n
 Görelilik ilkesi, 199
 Harmonik seriler, 142, 300
 Hız, 122-4
 İraksak diziler, 131
 İraksak seriler, 144
 İdeal sayılar, 62, 176-7
 İkili sistem, 31-2, 218
 İkiz asallar, 57, 292n
 İkiz asallar varsayımı, 284, 287-8
 İmajiner sayılar, 162, 200-1
 (ayrıca bkz. karmaşık sayılar)
 İrrasyonel denklemler, 204
 İrrasyonel diziler, 158-9
 Kalıcılık ilkesi, 91-2, 93-4, 177-8
 Kalıtsal önerme, 73, 77
 Kant, Immanuel, 13, 69, 203
 Kardinal sayılar, 27-8, 38, 188
 Karmaşık sayılar, 163-6, 177-8, 301-2n
 ve gerçeklik, 200-1
 ve Kartezyen geometri, 175, 302n
 ve sonsuz dizi, 163-4
 Kartezyen geometri, 174-6, 302n
 (ayrıca bkz. Analitik geometri, Descartes)
 Kendi kendine asemptot diziler, 134-5, 298n
 Kepler, Johannes, 120, 121, 217
 Kesirler
 periyodik kesirler, 140
 sürekli kesirler, 141, 261-3, 295, 299n
 Konumsal numaralandırma, 215-7, 270
 geçiş, 45-6
 ve hesap tahtası, 43-4
 ondalık virgölünün tarihi, 217
 önemi, 42-3
 sıfır, 44-7
 Kübik denklemler, 105, 162-3, 170, 254-60, 301
 Lagrange, Joseph, 33, 58, 59, 105, 140, 165, 234, 237-8, 246, 254-6

Lambert, Johann, 111, 141, 220
 Laplace, Pierre, 32, 35, 125
 Legendre, Adrien, M., 107, 111, 238,
 239, 241
 Leibnitz, Gottfried von, 10, 32, 59,
 119-22, 142, 169, 177, 218, 230,
 233
 Liouville, Jacques, 107, 141, 190, 242

Matematiğin evrimi, 159-61, 171-2
 Mersenne sayıları, 215, 219-20, 242
 Mükemmel sayılar, 54-5, 248-9, 292n
 Mükabiliyet, 25-7, 172
 sonsuz derlemlerde, 179-84

Negatif sayılar, 167-8
 Newton, Isaac, 84, 119-23, 169, 171,
 262

Olasılık kuramı, 74
 Ondalık dizi, 133
 Ondalık kesirler, 132-3, 220-1
 periyot, 271-2
 Ondalık sistem, 30, 32-3, 216
 Ordinal sayılar, 27, 188
 Öklit, 11, 55-7, 59-60, 98-100, 109,
 121, 203, 241, 260, 285
 Ömer Hayyam, 84, 105, 147, 170, 258
 Özdeşlikler ve denklemler, 252-4

π

aşkın sayı olarak, 111
 dairenin alanı, 295n
 hesaplanması, 110-1, 120
 tarihi, 108
 Parabol, 169-70, 257-60
 Parmak hesabı, 28-9, 291n
 Pascal, Blaise, 58, 73, 121, 171, 172,
 213, 220-4, 228-30, 271
 Pascal'in Yineleme Yasası, 229
 Periyodik kesirler, 140
 Pisagor sayıları, 60-1
 Pisagor teoremi, 98-9, 276-7
 Pisagor üçgenleri, 97-8
 Pisagorcular
 doğal sayıların önemi, 97-8

karenin köşegeninin ölçülemeyişi,
 98-9
 sayılara ibadet, 51-2, 53-4
 Platon, 53, 113, 114, 119, 169, 257,
 296-7n
 Poincaré, Henri, 13, 50, 75-6, 194,
 199, 204-6, 270

Rasyonel diziler, 128-9, 138
 Rasyonel sayılar, 90, 153, 303n
 cebirsel ve reel sayılarla
 karşılaştırılması, 180
 doğru üzerindeki noktalarla müt-
 kabiliyet, 102-3
 kalıcılık ilkesi, 92-3
 ve gerçeklik, 201
 ve süre, 300n
 Rasyonel yaklaşıtımlar, 138-9
 köklü ifadelerde, 139-40
 yakınsak dizilerde, 137, 298n
 Reel sayılar, 135-6, 158, 298-99n
 ve gerçeklik, 201-2
 ve köşegenel süreç, 272-3
 kümeler, 149
 ve noktalar, 148
 rasyonel, cebirsel ve doğal sayılarla
 karşılaştırılması, 179-80
 sayılamaz oluşu, 189-90, 304-5n
 Retorik cebir, 80, 170
 Riemann, Georg, 62, 166, 176, 198,
 288
 Riemann hipotezi, 285-6
 Riemann-Zeta fonksiyonu, 285-6
 Rönesans, cebirin tarihi, 85, 86
 Russell, Bertrand, 25, 71, 73, 95, 114,
 193, 194, 297n

Sayı duyusu, hayvanlarda, 21-4,
 289-90n

Sayı kavramı, 25
 bire bir mükabiliyet, 26
 ve gerçeklik, 201-4
 matematiğin temeli, 64

Sayı kuramı
 aritmetikle karşılaştırılması, 48-8
 asal sayılar, 55-62

- ve geometri, 284
- ideal sayılar, 62
- somutluğu, 62-3
- üçgen ve kare sayılar, 52-3
- Sayı sistemleri
 - mütekabiliyet, 28
 - numaralandırmanın temeli, 30-4
 - ordinal sayılar, 27
 - parmak hesabı, 28-9, 291n
- Sayılabılır kümeler, 303n
- cebir sayıları, 189
- rasyonel sayılar, 185-9
- reel sayılar (sayılabılır olmayan küme), 189-90, 304-6n
- Sayılarla ibadet
 - Çin mitolojisinde, 51
 - dost sayılar, 53
 - mükemmel sayılar, 54-5
 - Pisagorcularda, 51-2, 53-4
- Saymada insanbiçimcilik, 30
- Semboller
 - anlamsız olanı sembollerle göstermek, 161, 301n
 - Arap matematiğinde, 84-5
 - harfli gösterim, 86-9
 - Hint matematiğinde, 83
 - kuramsal matematikte, 94-5
 - tarihi, 80-2
 - Yunan cebirinde, 80, 82-3
- Seriler
 - almaşık harmonik seriler, 300n
 - almaşık seriler, 143
 - geometrik seriler, 142
 - ıraksak seriler, 144
 - ondalık diziler, 133
 - yakınsaklık, 142-4, 298-9n
- Sezgicilik, 70, 112, 195, 307n
- Sıfır
 - bölen olarak, 90-1, 294n
 - Harriott ilkesi, 251-2
 - keşfi, 44-6
 - önemi, 47
 - Riemann-Zeta fonksiyon, 285-8
- Sınırlı aritmetik, 77, 203
- Sınırlı geometri, 77, 203, 273 -4
- Sofistler, 83, 113
- Sonlu derlemeler, 67, 184-5
- Sonsuz diziler, 129-30, 163
- Sonsuz küçükler, 113, 117-21, 124-5, 176, 201, 230
- Sonsuz seriler, 142
- Sonsuz süreçler, 124-7, 128-9
- Sonsuzluk, 67, 216
 - kavramın kaynağı, 64-5
 - matematiksel zorunluluk olarak, 78, 209-10
 - matematikten çıkarılışı, 203-4
 - sonsuz kadar saymak, 68-9
 - ve bilim, 246-7
 - ve gerçeklik, 201-4
- Süreklilik, 149-52, 165-6
- Sürey, 149, 157
 - Dedekind, 155-6
 - ve gerçeklik, 203
 - ve rasyonel sayılar, 300n
 - zaman, 155-6, 278-9
- Tamsayılar
 - çarpma, 65-6
 - kanıt, 69-70
 - özellikleri, 64-5
 - sonlu derlemeler, 67-8
 - toplama, 65
- Tamsayıların özellikleri, 64-6, 70
- Tek sayılar, 51, 249
- Temel irrasyoneller,
 - cebir denklemlerinin çözümü, 104-6
 - ve kalıcılık ilkesi, 103, 106
 - rasyonel yaklaşımlar, 139-40
- Toplama
 - birleşme özelliği, 65, 74
 - değişme özelliği, 65
 - temel irrasyonellerde, 104
- Tümdengelsel akıl yürütme, 71-2, 271, 293n
- Tümevarımsal akıl yürütme, 71-2, 104
- Üçgenler
 - aritmetik üçgenler, 228-30
 - dik üçgenler, 60
 - Pisagor teoremi, 98-9, 277-8

Vektör analizi, 177

Vektörler, 302-3n

Vieta, Franciscus, 86-7, 89, 110, 168,
170, 217, 243-4, 250-2

Wallis, John, 120, 220, 262, 263, 266

Weierstrass, 94, 119, 125, 138, 160,
163, 166, 176, 202

Wilson teoremi, 59, 226, 235-8

Yakınsak diziler, 135-7299n

Yakınsama, 130, 140, 142-4, 298n

Yanılsama ve gerçeklik, 208-10

Yazılı numaralandırma, 35-41

Yinelemeye dayalı akıl yürütme, 72-3,
229, 271

Yiten diziler, 131

Zaman

eski Yunan'da, 296-7n

sürekliliği, 150-1

sürey olarak, 155-6, 278-9

ve Zenon'un argümanları, 115-8

Zenon'un argümanları, 114-9, 128,
131-2, 297n

metis bilim

EVELYN FOX KELLER

Genin Yüzyılı

JOHN GRIBBIN

Schrödinger'in Kedisinin Peşinde

ADAM ZEMAN

Bilinç

Kullanım Kılavuzu

EVELYN FOX KELLER

Toplumsal Cinsiyet ve Bilim

Üzerine Düşünceler

DOUWE DRAAISMA

Bellek Metaforları

JOHN GRIBBIN

Schrödinger'in Yavru Kedileri

FRANS DE WAAL

İçimizdeki Maymun

DOUWE DRAAISMA

Yaşlandıkça Hayat Neden

Çabuk Geçer

GEORGE LEVINE

Darwin Sizi Seviyor

J. P. CHANGEUX, P. RICOEUR

Neden Nasıl Düşünürüz?

W. H. CALVIN - G. A. OJEMANN

Neil'in Beyniyle Konuşmalar

JOANNA MONCRIEFF

İlaçla Tedavi Efsanesi

CHARLES SEIFE

Alfa ve Omega

HUMBERTO R. MATURANA

FRANCISCO G. VARELA

Bilgi Ağacı

DAVID S. WILSON

Herkes İçin Evrim

DAVE GOLDBERG

JEFF BLOMQUIST

Evren Kullanma

Kılavuzu

TOBIAS DANTZIG

Sayı, Bilimin Dili

METİS BİLİM

Dave Goldberg, Jeff Blomquist
**EVREN KULLANMA
KILAVUZU**

Kara Deliklerin, Zaman Paradokslarının
ve Kuantum Belirsizliğinin
Tehlikelerini Atlatmanın Yolları

Çeviren: Cemal Yardımcı

Işık hızıyla hareket ederken aynaya baksam ne görürüm? Sadece bakarak gerçekliği değiştirebilir miyim? *Uzay Yolu*'ndaki gibi bir ışınlama makinesi yapabilir miyim? Büyük Hadron Çarpıştırıcısı dünyayı neden yok etmedi? Evren genişliorsa neyin içinde genişliyor? Bir kara deliğe düşsem ne olur? Pratik bir zaman makinesi yapabilir miyim?

Bunlar *Evren Kullanma Kılavuzu*'ndaki sorulardan sadece birkaçı. Kitap bu ve benzeri soruları cevaplamanın yanı sıra, fizikteki en önemli meseleleri son derece anlaşılır ve esprili bir dille ele alıyor. Görelilik kuramı, kuantum mekaniği, olasılık ve rasgelelik, parçacıkların standart modeli, uzayın ve zamanın doğası, evrenin yapısı ve evrimi – tüm bunlar birbirinden komik karikatür ve dipnotlar eşliğinde anlatılıyor. Yazarların amacı, fiziğe genellikle yapııştırılan "sıkıcı" yaftasını tersine çevirip bu konuların aslında ne kadar ilginç ve eğlenceli olduğunu göstermek. Nitekim bu amaca başarıyla ulaşmış gibi görünüyorlar.

Unutmayın ki evren karmaşık bir mekanizmaya sahip muazzam bir düzenektir. Sağduyulu bir evren vatandaşı, onu kurcalamadan önce işleyişini, kurallarını, sınırlarını anlamak için kullanma kılavuzunu okumayı ihmal etmemelidir. Aksi takdirde başına geleceklerden –korkunç şeyler... Bahsetmek bile istemiyoruz– yayınevimiz sorumlu değildir.



METİS BİLİM

David Sloan Wilson

HERKES İÇİN EVRİM

Darwin'in Teorisi Hayata Bakış Açımızı
Nasıl Değiştirir?

Çeviren: Gürol Koca

Darwin'in doğal seçim teorisini ortaya atmasının üzerinden bir buçuk asır geçti. Bu süre içinde toplanan kanıtlar o kadar güçlü ki, evrimi artık sadece bir teori değil, bir olgu olarak görüyoruz. Fakat, diyor Amerikalı evrimci David Sloan Wilson, diğer disiplinlerle harmanlanmadığı ve günlük hayata uyarlanmadığı sürece evrim teorisinin hakkını vermiş sayılmayız. Zira evrim olup bitmiş bir şey değil, daima gözümüzün önünde, tüm hayatımıza sinmiş durumda. Canlıların tarihi upuzun bir evrim sürecinden ibaret olduğuna göre, hayatı ve kendimizi anlayabilmek için olaylara evrim temelli bir düşünce çerçevesinden bakmalıyız.

Bu düşünce tarzını benimsediğimizde, hamilelik bulantısından obeziteye, dans etmekten gülmeye, din ve ahlaktan siyasete her şey muazzam bir yapbozun, evrim yapbozunun parçaları haline geliyor. Dahası, insanın bu yapbozun sadece küçük bir parçası olduğunu, insana özgü sandığımız pek çok özelliğin aslında evrimin sürekliliği içerisinde çoğu canlıda - hatta tekhücrelilerde bile- görülebildiğini fark ediyoruz; bu da insanın doğadaki yerine ilişkin yanılgılarımızdan sıyrılmamızı sağlıyor.

Wilson'ın yaklaşımındaki diğer bir kritik nokta da, işbirliği ve dayanışmanın evrim sürecindeki önemini vurgulaması. Wilson'a göre evrim süreci, uyum gücü en fazla olan bireyden ziyade en iyi işbirliği yapan, en sağlam dayanışmayı kuran grubun lehinde işliyor. Demek ki barışçıl bir dünya o kadar uzak bir hayal değil.

Herkes İçin Evrim, isminin de ifade ettiği gibi herkesin ilgisini çekecek, herkesin rahatlıkla, keyifle okuyabileceği ve yararlanabileceği ufuk açıcı bir kitap.



METİS BİLİM

H. R. Maturana, F. G. Varela

BİLGİ AĞACI

İnsan Anlayışının Biyolojik Temelleri

Çeviren: Mahir Ünsal Eriş

Şilili iki bilimadamı, Maturana ve Varela'nın 1984 yılında yazdığı *Bilgi Ağacı*, insanın bilişsel yetileri hakkındaki çığır açıcı kitaplardan biri oldu. Günümüzde sinirbilim, evrimci psikoloji, karmaşıklık ve bilinç alanındaki bilimsel gelişmelerin çoğu bu kitapta anlatılan "bilişsel inşacılık" kuramı tarafından öngörülmüş, dile getirilmişti. Geçen yıllar içinde Amerika'da üniversite, Şili'de lise seviyesinde ders programlarına dahil edilen *Bilgi Ağacı*'nın temel tezi şu: "Yapmak bilmektir, bilmek yapmaktır."

Yüzyıllardır filozofları dış dünyanın zihinde temsil edilmesine dayanan bir ikiciliğin ya da tekbenciliğin kafesine girmeye mecbur bırakmış olan bilme problemidir bu. Maturana ile Varela, insan zihnini ve bilme fenomenini esasen bir doğa olayı olarak anlamlandırabileceğimizi savunuyorlar. Geliştirdikleri etkileşime dayalı "kendi kendini var etme" (*autopoiesis*) kavramıyla, bilmenin "dışarıdaki" dünyanın temsili değil, bizzat yaşama süreci içerisinde bir dünya ortaya koymak demek olduğunu gösteriyorlar. Büyük Patlama'dan tekhücreli canlıların oluşumuna, oradan da dil ve dolayısıyla bilinç sahibi varlıklar olarak insana kadar uzanan ufuk açıcı bir yolculuğa çıkarıyorlar bizi.

Bu yeni bilgi anlayışının bireysel, toplumsal ve ahlaki içerimlerine de değinen yazarlar, yolculuğun sonunda şöyle diyor: "Yaptığımız her şey ortak yaşam koreografisi içinde yapısal bir danstır. İşte bu yüzden bu kitapta anlattıklarımız sadece bilimsel araştırma kaynağı değil, aynı zamanda insanlığımızı anlamak için bir kaynaktır."

