

Keyifli Okumalar Dileriz

Binlerce kategoride milyonlarca PDF e-kitap, ders kitapları, dergiler ve romanlara platformumuz üzerinden ücretsiz ulaşabilirsiniz.

RESMİ WEB SİTEMİZ

<https://rantey.org>

Yedek ve Duyuru Kanallarımız

Sitemize erişim engeli gelmesi veya adres değişikliği durumunda aşağıdaki kanallardan güncel giriş adresine erişebilirsiniz:

- Telegram: <https://t.me/birkitapbir>
- WhatsApp Kanalımız : <https://whatsapp.com/channel/0029VbDHv8uE50Us4lvMoc0Y>

Dr. TEO GRÜNBERG

SEMBOLİK MANTIK

I

ÖNERMELER MANTIĞI

BAHA MATBAASI
İSTANBUL — 1968

Ö N S Ö Z

Formel (deduktif) mantık M.Ö. IV.cü yüzyılda *Aristoteles* tarafından kurulduğundan beri XIX.cu yüzyılın ortalarına kadar süren uzun bir duraklama dönemi geçirmiştir. Gerçi bu uzun süre içinde mantığa hiç bir katkıda bulunulmadığı söylenemez. Biryol Eskiçağ'da *Megaralıların* ve *Istoacıların*, bir de Ortaçağ'da *İskolastiklerin* mantık alanında bazı önemli yenilikler getirdiklerini belirtmek gerek. Ama söz konusu yeniliklerin önemi, ancak XIX.cu ve XX.ci yüzyılda modern mantıkçılar tarafından anlaşılmıştır. *Kant* bile *Aristoteles* mantığının mutlak bir yetkinlikte olduğunu, ondan sonra gelen mantıkçıların ancak ufak tefek önemsiz şekil değişiklikleri yaptıklarını veya yapabileceklerini ileri sürmüştü.

Günümüzde ise mantık büyük bir hızla gelişmekte olan bir bilim haline girmiştir. Bir çok başka bilimde olduğu gibi, mantığın gelişmesi de *matematiksel* yöntemi benimsemesi sonucunda olmuştur. Bu yolda ilk adım ünlü Alman filozofu ve bilim adamı *G.W.Leibniz* (1646-1716) tarafından atılmıştı. *Leibniz*'in tasarladığı "*characteristica universalis*" (salt sembollerden kurulu evrensel dil) ile "*mathesis universalis*" (bu dile dayanan evrensel matematik) modern matematiksel veya "*sembolik*" mantığın öncüsü sayılabilir.

Ancak *Leibniz*'in bu yoldaki somut çalışmaları pek sınırlı kalmış, düşüncelerinin pek az bir kısmını gerçekleştirebilmiştir. Bu bakımdan onu modern mantığın kurucusu değil, sadece *öncüsü* sayabiliriz. Modern mantığın asıl kurucuları İngiliz matematikçisi *George Boole* (1815-1864) ile Alman matematikçi ve mantıkçısı *Gottlob Frege* (1848-1925) olmuştur.

Modern mantık '*mantığın cebiri*', '*lojistik*', '*matematiksel mantık*' ve '*sembolik mantık*' gibi çeşitli adlarla anılmıştır. Günümüzde en çok kullanılan sonuncusu olduğundan, kitabımız için '*Sembolik Mantık*' başlığını seçmeyi uygun gördük. Ancak, "sembolik" mantığın genel mantık biliminin sadece özel bir dalı olmadığını önemle belirtmek gerek. Sembolik mantık (formel) mantığın tümü demektir; klâsik mantık ise sembolik mantığın küçük, hem de oldukça küçük bir bölümü haline gelmiştir. Bu bakımdan, "sembolik mantık" yerine düpedüz "mantık" demek daha uy-

gun olabilir. Nitekim, yabancı ülkelerde son yıllarda yayınlanan sembolik mantık kitaplarının çoğunun sadece “mantık” başlığını taşıdığını görüyoruz.

Modern mantık, uygulama alanları son derece geniş ve çeşitli olan bir disiplindir. Sembolik dil, anlamı belirli ve tek-anlamlı terimler, açık-seçik kavram tanımları, açık (yani gizli ön-dayanaklardan arınmış) kanıtlamalar ve çok kısaltılmış deyimler sağlar. Bu yüzden modern mantık, bütün *bilimlerin* (hattâ “üst-mantık” - metalogic - olarak, mantık biliminin bile) *temellendirilmesi* için başvurulabilecek tek araç haline gelmiştir. Salt *matematik* için böyle bir temellendirmenin şimdiden başarılmış olduğunu söyleyebiliriz. Örneğin, Whitehead ve Russell’in “*Principia Mathematica*” (1910-1913) adlı ortak eserinde matematiğin tümünü salt mantığa indirgeme çabası büyük ölçüde başarılmıştır. Deduktif olmıyan bilim ve disiplinlerin (tabiat bilimleri, sosyal bilimler, hukuk, etik ve linguistik’in) temellendirilmesi için de modern mantıktan gittikçe geniş ölçüde faydalanılmaktadır. Bu alanlarda şimdiye kadar kesin sonuçlar elde edilememekle birlikte, sembolik mantık yönteminin bütün bu bilim ve disiplinlerde gittikçe yayıldığını görüyoruz. Tanınmış çağdaş Amerikan mantıkçısı *F.B.Fitch*’in dediği gibi, “nasıl bugün köklü bir matematik bilgisi olmadan fizik öğrenmek uygunsuzsa, aynı şekilde köklü bir sembolik mantık bilgisi edinmeden ahlâk ve siyaset öğrenimi yapmanın düşünülemediği gün gelebilir.” (Bk. Fitch, “Symbolic Logic”, Giriş).

Modern mantık *teknik* alanına da büyük başarı ile uygulanmaktadır. Özellikle kibernetik, otomasyon ve elektronik beyinler (computers) için sembolik mantık onsuz olunamaz bir yöntem durumundadır. Nitekim elektronik beyinlerin temeli olan elektrik devreleri ve iletme-ağlarının dayandığı teori, sembolik mantığın bir kolundan (önergeler-mantığından) başka bir şey değildir (Bk. § 16).

Kendi ilgi ve çalışmalarımız açısından ise modern mantığın en önemli ve ilginç uygulama alanı “*felsefe*”dir. Mantığı felsefenin *biricik* metodu sayıyoruz. Bu bakımdan, felsefenin kaderinin sıkı sıkıya mantığın kadherine bağlı olduğu kanısındayız.

Bilimlerden uzak kalan ve iki bin yıldan çok süren bir duraklama dönemi geçiren “klâsik mantık”a dayanan felsefenin yerinde sayması bu bakımdan zorunlu idi. Buna karşılık, sembolik mantığa dayanan modern “analitik felsefe”nin bir araç olarak kullandığı bu bilimle birlikte ilerlediğini görüyoruz. Analitik felsefenin (“bilim felsefesi” olarak) başlıca görevi bütün insan bilimlerini ve disiplinlerini temellendirmek olduğundan, bir temellendirme ise kökçe mantığa dayandığından, böyle bir paralellige

şaşmamak gerek. Sembolik mantık metodunun yalnız tek tek bilim ve disiplinlerin temellendirilmesinde değil, genel *bilgi-teorisi* ve *ontoloji* alanlarında da son derece başarılı olduğunu belirtmek isteriz. Bugün sembolik mantığa vakıf olmadan, son yılların felsefe literatürünün (özellikle İngilizce yayınlarının) büyük bir kısmını izlemek imkânsız bir hale gelmiştir.

Bu kitap İstanbul Üniversitesi Edebiyat Fakültesi Felsefe Bölümünde beş yıldır vermekte olduğumuz sembolik mantık derslerinden edindiğimiz görgünün ürünü olup bu konuda tasarladığımız bir seri eserin birinci cildir. Bu 1.ci ciltte sembolik mantığın bir çeşit temel bölümü sayılan “*önermeler mantığı*” ele alınmıştır. Kitabın sonunda önermeler-mantığının en önemli bir uygulama alanı olan elektrik devreleri ve iletme-ağları teorisinin ana çizgilerini belirtmeye çalıştık. Niceleme-mantığı ile mantığın öbür bölümlerini ise 2.ci ciltte ele almayı düşünüyoruz.

Bu kitap Felsefe Bölümünün kısmen hazırlık yılı öğrencilerinin, kısmen ilerlemiş öğrencilerin ders programına alınabilir. Belli bir matematiksel kültürü olan kimseler de kolaylıkla kitaptan yararlanabilirler. Ancak, matematiksel kültürün sembolik mantığın öğrenilmesi için zorunlu olmadığını belirtmek isteriz. Ezici çoğunluğu lise edebiyat kolundan mezun olan ve matematiğe pek de hevesli olmıyan öğrencilerimizin sembolik mantığı yadırgamadan pek başarılı bir şekilde öğrendiklerini söyleyebiliriz. Başarı derecesinin, sembolik mantık öğretiminin hazırlık yılından (1.ci sınıftan) başlatılması sonucunda büyük ölçüde arttığını gördük. Bu bakımdan, sembolik mantık öğretiminin bu şekilde devam ettirilmesini, hattâ ilerde (bu iş için yeteri kadar lise felsefe öğretmeni yetiştikten sonra) lise mantık dersleri programına alınmasını gönülden dilediğimizi belirtmek isteriz.

Kitabın hazırlanmasında bana yardımını esirgemiyen, özellikle yeni teknik terimlerin seçilmesinde benimle sıkı bir işbirliği yapan Dr. Hüseyin Batuhan'a, düzeltmelerde büyük yardımı dokunan eşim Raşel Grünberg'e, ayrıca eseri özenle daktilo eden Esen ve Sema Behen'e candan teşekkürlerimi tekrarlamayı bir borç bilirim.

İstanbul, 1967

Dr. Teo Grünberg

İ Ç İ N D E K İ L E R

Ö n s ö z	Sayfa
Giriş: D e d u k t i f Ç ı k a r ı m l a r	
§ 1. Bilgi ve Mantık ...	1
§ 2. Çıkarım - Şemaları	5
§ 3. Geçerli ve Geçersiz Çıkarımlar	8
Bölüm I: D i l s e l D e y i m l e r i n M a n t ı k s a l Y a p ı s ı	
§ 4. "Atomsal" ve "Molekülse" Önermeler	11
§ 5. Bölünmemiş Önermelerden Kurulu Çıkarımlar	14
§ 6. Doğruluk Fonksiyonları	20
Bölüm II: Ö n e r m e - E k l e m l e r i v e D o ğ r u l u k - Ç i z e l g e l e r i	
§ 7. Hayırlama, Birlikte-Evetleme ve Ayrıklık	24
§ 8. Koşul, Karşılıklı-Koşul, Bağdaşmazlık ve Birlikte Hayırlama Eklemleri	54
§ 9. Önerme-Eklemlerinin SistematiK Sınıflanması	68
Bölüm III: D o ğ r u l u k - D e ğ e r i A n a l i z i	
§ 10. Geçerlilik, Tutarlılık ve Tutarsızlık ...	74
§ 11. Eşdeğerlik - Bağlantısı ve Quine-Çizelgesi	79
§ 12. Mantık Kanunları	99
Bölüm IV: N o r m a l - Ş e m a l a r v e İ k i l i l i k	
§ 13. Normal-Şemalar	130
§ 14. İkiliK	142
§ 15. Tam Normal-Şemalar ...	154
§ 16. Mantıksal İletme-Ağları	169
N o t l a r v e A y d ı n l a t m a l a r	192
B i b l i y o g r a f y a	217

G İ R İ Ő

DEDUKTİF ÇIKARIMLAR

§ 1. B i l g i v e M a n t ı k

Mantık bilgilerimizi elde etmek için başvurduğumuz “araç”lardan biridir. Tek tek bilgilerimiz “önermeler” biçiminde dile getirilir. Bir önerme “doğru” veya “yanlış” olabilen herhangi bir dilsel deyimdir. “Doğru” ile “yanlış”a “doğruluk-değeri” denildiğinden, *önermeleri belli bir doğruluk-değeri taşıyan dilsel deyimler* şeklinde tanımlıyabiliriz. İmdi herhangi bir bilgiyi elde etmek, belli bir önermenin doğruluğunun “belgelenmesi”, yani bu önermenin evetlenmesini haklı-gösteren geçerli gerekçelerin (belgelerin) ortaya konulması demektir.¹ Böyle bir belgeleme ya başka bilgilere, yani önceden belgelenmiş önermelere dayanır, ya başka hiç bir bilgiye dayanmaz. Birinci halde belgelenenin “*dolaylı*”, ikinci halde ise “*dolaysız*” olduğunu söyleyeceğiz.

Örneğin: belli bir maddenin içinde bakır bulunup bulunmadığını araştıran bir kimyacı gözönüne alalım. Bu kimyacı söz konusu maddeyi toz haline getirerek bir spatül içinde aleve tutar. Alevin yeşilleşmesi halinde maddenin içinde bakır olduğu sonucuna (belli bir olasılık derecesi çerçevesinde) varılır. İmdi ‘alev yeşilleşti’ önermesinin doğruluğu, başka hiç bir bilgiye başvurulmasını gerektirmeden “dolaysız” olarak belgelenir. Bu önermenin ifade ettiği bilginin - alevin yeşilleşmesi olgusunun bilgisi - kazanılmasında başvurulmuş aracın mantık olmadığı meydandadır. Böyle bir bilgi salt “*deney*” (veya “gözlem”) aracıyla elde edilmiştir. Öte yandan sözü geçen maddenin içinde bakır bulunması olgusunun bilinmesi salt deneye dayanmaz. Nitekim “bu maddede bakır vardır” önermesi “dolaysız” olarak değil, ancak “*dolaylı*” olarak ‘bu alev yeşilleşti’ gibi başka bir önermenin doğruluğuna dayanarak belgelenir. İşte bu son haldeki belgelemede “*mantık*” aracına başvuruluyor.

Buna göre, *mantığın* bilgilerimizin “dolaylı-belgeleme” yolu ile elde edilmesini sağlayan bir yol veya metottan ibaret olduğunu söyleyebiliriz.

İmdi “dolaylı-belgeleme” deyimi yerine ‘*ç ı k a r ı m*’ deyimini de kullanabiliriz. Nitekim bir “*ç ı k a r ı m*” (inference), “*öncül*” denilen bir takım önermeler yardımıyla “*sonuç*” denilen belli bir önermenin belgelenmesinden başka bir şey değildir.

Öte yandan, mantıkçılar doğrudan doğruya “*ç ı k a r ı m* süreçleri” ile değil, sadece çıkarımların “*geçerliliği*” (validity) ile ilgilenir. Çıkarım süreçlerinin gerçekte olduğu gibi incelenmesi mantığın değil, empirik bir bilgin dalı olan “bilgi-psikolojisi”nin konusuna girer. Böylece mantığı her türlü çıkarımların geçerliliğini belirlemeye yarayan “geçerlilik-ayraçları”nı (criteria of validity) ortaya koyan bir bilgi-dalı diye tanımlıyabiliriz.

Görüldüğü gibi, verilen bir önermenin doğruluğunun “dolaylı” olarak (yani “*ç ı k a r ı m s a l*” yolla) *belgelenmesi* salt mantık işi değildir. Belgelemenin kendisi bir süreç, bir davranıştır. Mantığın görevi böyle bir süreç veya davranışın “haklı-gösterilmesi”nden ibarettir. Başka bir deyimle, mantık genel olarak verilen bir önermenin doğruluğunu veya yanlışlığını belgeleyebilecek öncüllerin ve ara basamakların bulunması için *yeterli* değildir. Böyle bir çaba daha çok “buluş-bağlamı”na (context of discovery) aittir. Mantığın görevi buluş-bağlamında varsayım olarak ortaya konulan bir çıkarımın haklı, yani geçerli olup olmadığının belirlenmesinden ibarettir. Böylece mantık dolaylı-belgeleme uğraşısı için yeterli olmamakla birlikte, “*gerekli*” olan bir araçtır.

İmdi çıkarımları “*deduktif*” ve “*induktif*” olmak üzere iki öbeğe ayırabiliriz. Deduktif bir çıkarımda, öncüllerin doğruluğu sonucun doğruluğunu “kesin” veya “sonuçlandırıcı” bir şekilde gerektirir. Induktif bir çıkarımda ise, öncüllerin doğruluğu sonucun doğruluğunu gerektirmez, sadece belli bir “*olasılık*” (probabilite) derecesi kazanmasına yol açar. Biz burada yalnız “*deduktif çıkarımlar*”ı inceliyeceğiz; “*induktif çıkarımlar*”ı inceleyen “*induktif mantık*”ı konumuzun dışında bırakacağız.

Ö belli bir dile ait herhangi belli bir önerme, $\bar{O}_1, \bar{O}_2, \dots, \bar{O}_n$ de aynı dile ait n tane başka önerme olsun. $\bar{O}$ önermesinin bu n tane önermenin “sonucu” olmasını

$$(1) \quad \bar{O}_1, \bar{O}_2, \dots, \bar{O}_n \vdash \bar{O}$$

veya

$$(2) \quad \frac{\bar{O}_1, \bar{O}_2, \dots, \bar{O}_n}{\bar{O}}$$

duktif öncüllerine değil de, deduktif sonuçlarına başvurmak suretiyle mümkündür. İmdi Ö önermesi ((4) çıkarımında) bir “öncül” konumunda olmakla birlikte, doğruluk-değerinin önceden bilinmediğini görüyoruz. Hattâ Ö’nün yanlış olması bile mümkündür. Ama Ö’nün yanlış olması halinde bile (4) çıkarımının mümkün olması gerekir. Başka bir deyimle, bir (deduktif) çıkarımın geçerli olması hiç de öncüllerin doğruluğunu gerektirmez. Yoksa Ö’nün yanlış olması halinde (4) çıkarımı yapılamıyacağından, Ö’nün yanlış olduğunun ortaya konulması imkânsız olacaktı. Böylece, görüldüğü gibi, empirik bilimlerin mümkün olması yanlış öncüllü deduktif çıkarımların varolmasını gerektirir.

Örneğin :

(7) Bütün cisimler belli şartlar altında ısıtılınca genleşir
önermesiyle dile getirebileceğimiz tabiat kanununu göz önüne alalım.

(7) önermesinin doğruluğunu belgelemek için :

- (8) a cismi belli şartlar altında ısıtılıp genleşti
- b cismi belli şartlar altında ısıtılıp genleşti
- c cismi belli şartlar altında ısıtılıp genleşti

.....

.....

biçimindeki önermelerin doğru olup olmadığını araştırırız. (8) önermeleri (7) önermesinin deduktif sonuçlarıdır. Bu biçimdeki önermelerin sayısı ilkece sonsuz olduğundan, hepsinin doğruluk-değerinin tesbit edilmesi imkânsızdır. Ancak bu önermelerin birçoğunun doğru çıkması (7) önermesinin ((6) uyarınca) belli bir olasılık derecesi kazanmasına yol açabilir. Öte yandan (8) önermelerinden bazılarının yanlış çıkması (7) nin de yanlış olmasını gerektirir. Böylece (7) nin yanlış olması, böyle bir yanlış öncülden (8) gibi deduktif sonuçların çıkarılmasına bağlıdır.

Üstelik salt formel bilimlerde, yani matematiksel teorilerde de yanlış öncüllü deduktif çıkarımlara başvurulmaktadır. Nitekim Ö gibi bir önermenin doğruluğunu belgelemek için çok defa Ö’nün hayırlanması olan Ö’ gibi bir önermenin sonuçlarından birisinin “yanlış” (çelişik) olduğunu gösteririz. Bu halde Ö’nün de yanlış olması, dolayısıyla Ö’nün doğru olması gerektiğinden, güdülen amaca varıldığını görüyoruz. “Reductio ad absurdum” (olmazlığa geri götürme) denilen kanıtlama yolu da yanlış öncüllü deduktif bir çıkarıma dayanır: Ö gibi bir önermenin “yanlışlığını” belgelemek için, Ö’nün bir sonucunun Ö’nün hayırlanması olduğunu gösteririz. Bu son önermenin Ö’den çıkarılması ise geçerli bir çıkarım durumunda olmalıdır. Yoksa metodun geçerliliği kalmaz.

§ 2. Ç ı k a r ı m - Ş e m a l a r ı

- (1) Ahmet Ankaraya gidecek veya (Ahmedin) annesi İstanbula gelecek
Oysa Ahmet Ankaraya gitmiyecek (gidecek değildir)

Şu halde, Ahmedin annesi İstanbula gelecek
gibi bir (deduktif) çıkarımı göz önüne alalım. (Bundan böyle ‘çıkaram’
sözcüğünü başka bir şekilde belirtilmediği hallerde yalnız ‘deduktif çıkara-
rım’ anlamında kullanacağız). Bu çıkarımda şu iki önerme geçmektedir:

- (2) Ahmet Ankaraya gidecek

ve

- (3) Ahmedin annesi İstanbula gelecek.

Bu iki önermenin yerini tutan veya başka bir deyimle bunları “temsil”
eden ‘p’ ve ‘q’ gibi iki harf seçebiliriz. O zaman: (1) çıkarımını

- (4) p veya q
oysa p değil
şu halde q

biçiminde; veya (1 - 3) uyarınca :

- (5) p veya q
p değil
. . . q

biçiminde temsil edebiliriz.

İmdi (5) teki ‘p’ ve ‘q’ yerine sırasıyla

- (6) Fırtına kopacak

ve

- (7) Ahmet uçağa binecek

önermelerini koyalım. O zaman

- (8) Fırtına kopacak veya Ahmet uçağa binecek
Fırtına kopmıyacak
. . . Ahmet uçağa binecek

gibi bir çıkarım elde ederiz. (5) deyiminde geçen ‘p’ ve ‘q’ gibi harflere
(belirsiz sayıda birçok deyim temsil ettiğinden) “*temsilci-harfler*” (veya
“*şematik-harfler*”) diyeceğiz. Her deyim-kategorisi için belli bir takım
“*temsilci-harfler*” kullanabiliriz. ‘p’ ve ‘q’ harfleri “önerme” kategorisine

ait deyimleri temsil ettiğinden, bu gibi temsilci-harflere “*önerme-temsilcileri*” diyeceğiz. (İlerde başka deyim kategorilerine ilişkin temsilci-harflerle de karşılaşacağız).

Belli bir temsilci-harfin temsil ettiği deyimlere bu harfin “*yerine-koyma örnekleri*” (substitution instances, substituends) denir. Örneğin: herhangi bir önerme sözü geçen ‘p’ harfinin (önerme-temsilcisinin) bir yerine-koyma örneği sayılabildiği halde, ‘Ahmet’ gibi bir deyim ‘p’ nin bir yerine-koyma örneği değildir. Böyle bir deyim bir önerme-temsilcisinin değil, bir “*ad-temsilcisi*”nin yerine-koyma örneği olabilir.

İçinde bir veya daha çok sayıda temsilci-harfin geçtiği herhangi bir deyme bir “*ş e m a*” denir. Örneğin (4) deymi ‘p’ ve ‘q’ gibi iki temsilci-harfi içine aldığından bir “şema”dır. Bir şemanın içinde geçen temsilci-harfleri birer yerine-koyma örneğiyle değiş-tokuş etmek suretiyle elde edilen deyimlere - her harfin şema içinde *bütün geçişlerini aynı* bir yerine-koyma örneğiyle değiş-tokuş etmek şartıyla - sözü geçen *şemanın yerine-koyma örnekleri* diyeceğiz. Örneğin: (1) çıkarımı (4) şemasının, (8) çıkarımı da (5) şemasının bir yerine-koyma örneğidir. Nitekim gerek ‘p’ gerek ‘q’ harflerinin her iki “*geçiş*”inin (occurences) aynı bir yerine-koyma örneğiyle değiş-tokuş edildiği meydandadır. Birinci çıkarımda ‘p’ nin her iki geçişi ‘Ahmet Ankaraya gidecek’ önermesiyle, ‘q’ nün her iki geçişi de ‘Ahmedin annesi İstanbula gelecek’ önermesiyle değiş-tokuş edilmiştir; ikincisinde ise ‘p’ nin her iki geçişi ‘Fırtına kopacak’ önermesiyle, ‘q’ nün her iki geçişi de ‘Ahmet uçağa binecek’ önermesiyle değiş-tokuş edilmiştir. Buna karşılık:

Fırtına kopacak veya Ahmet uçağa binecek
Fırtına kopmıyacak
... Ahmet uçağa binmeyecek

çıkartımı (5) şemasının bir yerine-koyma örneği değildir; çünkü bu halde ‘p’ nin her iki geçişi ‘Fırtına kopacak’ önermesiyle değiş-tokuş edildiği halde, ‘q’ nün birinci geçişi ‘Ahmet uçağa binecek’ önermesiyle, ikinci geçişi ise bundan farklı olan ‘Ahmet uçağa binmeyecek’ önermesiyle değiş-tokuş edilmiştir.

İmdi, yerine-koyma örneklerinden (hiç olmazsa) biri bir çıkarım durumunda olan herhangi bir şemaya bir “*ç ı k a r ı m - ş e m a s ı*” denir.¹ Buna göre, (4) veya (5) deyiminin bir çıkarım-şeması olduğunu söyleyebiliriz. (5) çıkarım-şemasında bir yandan “değişken” bir anlamı olan ‘p’ ve ‘q’ gibi temsilci-harflerin, öbür yandan ise ‘veya’ gibi hiç bir olgusal içeriği olmayan bir “değişmez’in (constant)” geçtiğini görüyoruz. İmdi, ‘veya’, ‘değil’, ‘ve’, ‘ise’, ‘ancak’, ‘ya... ya...’, ‘bazı’, ‘bütün’, ‘dır’, gibi

hiç bir olgusal içeriği olmayıyan deyimlere “*mantıksal-değişmezler*” (logical constants), olgusal bir karşılığı olan deyimlere ise “*deskriptif*” deyimler denir. ‘p’ gibi bir temsilci-harfin kendisi (belli hiç bir olguyu tasvir etmediğinden) bir “deskriptif” deyim değildir. Bununla birlikte ‘p’ nin birer “deskriptif” deyim olduğu şüphe götürmiyen (olgusal içerikli) bir takım önermeleri (‘p’ nin yerine-koyma örneklerini) temsil ettiğini belirtmek gerek.

Verilen her çıkarıma karşılık birçok çıkarım-şemasının meydana getirilmesi mümkündür. Bunun için çıkarımın içinde geçen bazı deskriptif deyimleri belli birer temsilci-harfle değiş-tokuş etmemiz yeter. Ancak belli bir deskriptif deyimi belli bir önerme-temsilcisiyle değiş-tokuş ettiğimizde, bu deyimın söz konusu çıkarımın içindeki *bütün geçişlerini hep aynı temsilci-harfle değiş-tokuş* etmek gerekecektir. Örneğin: (1) çıkarımından (‘Ahmet Ankaraya gidecek’ yerine ‘p’, ‘Ahmedin annesi İstanbula gelecek’ yerine de ‘q’ koymak suretiyle) (4) veya (5) çıkarım-şemalarını elde ettiğimiz gibi; ‘Ahmet Ankaraya gidecek veya annesi İstanbula gelecek’ önermesi yerine ‘p’, ‘Ahmet Ankaraya gitmiyecek’ önermesi yerine ‘q’, ‘Ahmedin annesi İstanbula gelecek’ önermesi yerine de ‘r’ önerme-temsilcisini koyarak :

(9) $p, \text{ oysa } q, \text{ şu halde } r$

veya

(10) $p, q \vdash r$

ya da

(11)
$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \therefore r \end{array}$$

biçimindeki bir çıkarım-şemasını elde edebiliriz. (1) çıkarımı bu çıkarım-şemalarının her birinin de bir yerine-koyma örneği durumundadır. Aynı zamanda (5) çıkarımının kendisinin de (11) çıkarım-şemasının bir yerine-koyma örneği olduğunu söyleyebiliriz. Nitekim, (11) de ‘p’ yerine ‘*p veya q*’, ‘q’ yerine ‘*p değil*’, ‘r’ yerine de ‘q’ koymakla elde edilen deyimın (5) ten başka bir şey olmadığı meydandadır.

İmdi, herhangi bir çıkarım-şemasının “*geçerli*” olmasını, bütün öncülleri doğru olduğu halde sonucu yanlış olan hiç bir çıkarımın bu çıkarım-şemasının yerine-koyma örneği olmaması şeklinde tanımlıyoruz. Buna göre, herhangi bir çıkarımın “*geçerli*” olmasını da, bu çı-

karımın geçerli bir çıkarım-şemasının yerine-koyma örneği olması şeklinde tanımlıyabiliriz.²

Bu tanımlara dayanarak, geçerli bir çıkarım-şemasının yerine-koyma örneği olan her çıkarımın geçerli bir çıkarım; her çıkarım-şemasının da geçerli bir çıkarım-şeması olduğunu öne sürebiliriz. Bu iddialardan birincisi yaptığımız tanımların dolaysız bir sonucudur. İkincisini ise şöyle kanıtlayabiliriz:

Ş₁ ve Ş₂ herhangi iki çıkarım-şeması olup Ş₂ nin Ş₁ in yerine-koyma örneği olduğunu kabul edelim. O zaman Ş₁ in geçerli olması halinde Ş₂ nin de geçerli olduğunu gösterebiliriz. Nitekim Ş₁ in geçerli olduğunu, Ç nin bütün öncülleri doğru olmakla birlikte sonucu yanlış bir çıkarım olduğunu düşünelim. Buna göre Ç nin Ş₁ çıkarım-şemasının yerine-koyma örneği olmadığını söyleyebiliriz. O zaman da Ç, Ş₂ nin de yerine-koyma örneği olamaz; çünkü Ç çıkarımı Ş₂ nin çıkarım-şemasının yerine-koyma örneği olsaydı (Ş₂ nin kendisi Ş₁ in yerine-koyma örneği olmasından dolayı) Ş₁ çıkarım-şemasının da yerine-koyma örneği olacaktı.

Öte yandan, bir çıkarım-şemasının yerine-koyma örneği olan bir çıkarımın geçerli olmasının, bu çıkarım-şemasının kendisinin geçerli olmasını gerektirmediğini gösterebiliriz. Örneğin: (geçerli bir çıkarım olan) (1) çıkarımı (11) çıkarım-şemasının yerine-koyma örneği durumundadır.

(11) in ise geçerli bir çıkarım-şeması olmadığı meydandadır. Nitekim:

- (12) Bütün insanlar ölümlüdür
 Sokrates insandır
 ... Sokrates ölümlü değildir

çıkartımı (11) in yerine-koyma örneği olduğu halde (bütün öncülleri doğru sonucu ise yanlış olduğundan) geçerli değildir. Bu ise (11) in geçerli olmadığını gösterir.

Genel olarak, verilen herhangi bir çıkarım-şemasının “geçersiz” olduğunu (yani geçerli olmadığını) öncülleri doğru, sonucu ise yanlış olan bir yerine-koyma örneğinin bulunması yoluyla gösterebiliriz. Böyle bir yerine-koyma örneğinin bulunamayacağını kanıtlamak suretiyle de sözü geçen çıkarım-şemasının geçerli olduğunu gösterebiliriz.

§ 3. Geçerli ve Geçersiz Çıkarımlar

Klâsik mantıkta bir çıkarımın “geçerliliği”, bu çıkarımın sonucunun çıkarımın öncüllerinin “zorunlu” bir sonucu olması; başka bir deyimle,

öncüllerin doğru olması halinde sonucun yanlış olmasının imkânsızlığı şeklinde tanımlanır. Modern mantıkta ise “zorunluluk” ve “imkânsızlık” tanımlanamayan “ilkel-terimler” durumunda değildir. Dolayısıyla (deduktif) çıkarımların geçerliliği bu “mantıksal-kipler” (logical-modalities) aracıyla tanımlanmaz; tam tersine, mantıksal-kipler çıkarımların geçerliliği yardımıyla tanımlanır. Nitekim, verilen bir çıkarımda sonucun öncüllerin *zorunlu* bir sonucu olması, sözü geçen çıkarımın “geçerli” olması, başka bir deyimle, geçerli bir çıkarım-şemasının bir yerine-koyma örneği olması şeklinde tanımlanır.

İmdi bir çıkarımın gerek öncüllerinin gerek sonucunun doğru olması bu çıkarımın “geçerliliği” için *ne gerekli ne de yeterli bir şarttır*. Örneğin: Ahmet herhangi bir sıradan adam olsun:

- (1) Ahmet sinema yıldızı olsaydı, ünlü olurdu
 Ahmet sinema yıldızı değildir
 . . . Ahmet ünlü değildir

çıkartımı “geçersiz” olduğu halde, gerek öncülleri gerek sonucu doğrudur.

Öte yandan:

- (2) Bütün balıklar memelidir
 Bütün memeliler kanatlıdır
 . . . Bütün balıklar kanatlıdır

çıkartımının hem öncülleri, hem sonucu yanlış olduğu halde, bu “geçerli” bir çıkartımdır.

- (1) çıkartımının “geçersiz” olduğunu, “*aynı biçimde*”¹ olan :

- (3) Einstein sinema yıldızı olsaydı, ünlü olurdu
 Einstein sinema yıldızı değildir
 . . . Einstein ünlü değildir

gibi bir çıkartımın öncüllerinin doğru olduğu halde, sonucunun yanlış olduğunu belirtmek suretiyle gösterebiliriz.

- (2) çıkartımının “geçerli” olduğunu da, bu çıkartımın

- (4) Bütün F ler G dir
 Bütün G ler H dir
 . . . Bütün F ler H dir

gibi “geçerli” bir çıkartım-şemasının bir “yerine-koyma örneği” olduğunu görmek suretiyle anlarız.

İmdi, (2) örneğinin gösterdiği gibi, geçerli olmakla birlikte sonucu yanlış çıkarımlar olduğundan, verilen bir önermenin doğruluğunun (deduktif yolla) belgelenmesi için, sadece verilen bir takım öncüllerin “geçerli” bir sonucu olduğunun gösterilmesi yetmez. (Geçerli bir çıkarımın sonucuna, *öncüllerin geçerli bir sonucu*; geçersiz bir çıkarımın sonucuna ise, *öncüllerin geçersiz bir sonucu* diyoruz). Böyle bir belgeleme için bir de “öncüller” in doğruluğunun belgelenmesi gerekir. Oysa deduktif bir çıkarımın öncüllerinin, dolaysız olarak veya induktif yolla belgelenebilen önermeler olması mümkündür. Bu bakımdan, *öncüllerin belgelenmesi* işinin genel olarak “*deduktif mantığın*” konusu dışında kaldığını, deduktif mantığın görevinin, daha önce işaret ettiğimiz gibi, sadece (deduktif) çıkarımların *geçerliliğinin* belirlenmesinden ibaret olduğunu görüyoruz.

Öte yandan, herhangi bir (deduktif) çıkarımın geçerliliğinin, bu çıkarımın geçerli bir “çıkartım-şeması”nın yerine-koyma örneği olması anlamına geldiğini; salt “mantıksal-değişmezler” ve “temsilci-harfler”den kurulu bir çıkartım-şemasında ise *olgusal* bir içeriği olan hiç bir deyim (‘‘deskriptif’’ deyim) geçmediğini göz önünde tutarak; böyle bir çıkarımın her türlü *olgusal içerikten bağımsız*, salt “*formel*” bir çıkartım durumunda olduğunu görüyoruz. İşte deduktif mantığa “*formel mantık*” denilmesinin gerekçesi bundan ibarettir. Aynı şekilde, “deduktif çıkartım” yerine “*formel çıkartım*” da diyebiliriz.

B Ö L Ü M I

DİLSEL DEYİMLERİN MANTIKSAL YAPISI

§ 4. “A t o m s a l” v e “M o l e k ü l s e l” Ö n e r m e l e r

Herhangi bir dilin önermelerini “*atomsal-önermeler*” ve “*molekülsele-önermeler*” olarak iki öbeğe ayırabiliriz. Bir “*atomsal-önerme*”,¹ içinde geçen deyimlerin hiç biri bir önerme olmıyan bir önerme; bir “*molekülsele-önerme*” ise, içinde geçen deyimlerin hiç olmazsa biri bir önerme olan bir önerme demektir. Örneğin :

(1) Ahmet Ankaraya gidecek

önermesi “atomsal”;

(2) Ahmet Ankaraya gidecek veya Ali İstanbula gelecek

önermesi “molekülsele”dir. Nitekim (1) in içinde hiç bir başka önerme geçmediği halde, (2) nin içinde ‘Ahmet Ankaraya gidecek’ ile ‘Ali İstanbula gelecek’ önermeleri geçmektedir.

Herhangi bir önermenin içinde geçen bir önermeye bu önermenin bir “*bileşen*”i diyeceğiz. Buna göre “atomsal-önermeler”i hiç bir bileşeni olmıyan önermeler, “molekülsele-önermeler”i ise hiç olmazsa bir bileşeni olan önermeler şeklinde tanımlıyabiliriz. Görüldüğü gibi, (1) in hiç bir bileşeni yoktur; (2) nin ise tam iki bileşeni var. Verilen bir molekülsele önermenin bazı bileşenlerinin de “molekülsele” olması mümkündür. Ancak böyle bir bileşenin de bileşenleri olacak, bunlardan molekülsele olanların gene bileşenleri olacak... Oysa herhangi bir önerme *sonlu* sayıda harf veya işareten kuruludur. Şu halde, herhangi bir önermenin bileşenlerine ayrılması işleminin sonlu sayıda adımdan sonra durması gerekecektir. Buna göre, her molekülsele-önermenin önünde sonunda belli sayıdaki “atomsal-önermeler”e bölünebileceğini görüyoruz. İşte herhangi bir önermenin içinde geçen atomsal önermelere bu önermenin “bölünmez-bileşenler”i veya

*“atomsal-bileşenler”*i diyeceğiz. Örneğin: (2) önermesinin *“atomsal-bileşenler”*i ‘Ahmet Ankaraya gidecek’ ile ‘Ali İstanbula gelecek’ önermelerinden ibarettir.

İmdi :

(3) Ahmet Ankaraya gitmiyecek

türünden bir önermeyi göz önüne alarak, böyle bir önermenin *“atomsal”* mı, yoksa *“molekülse”* mi olduğunu araştıralım. Görünüşte böyle bir önermenin içinde başka hiç bir önerme (hiç bir *“bileşen”*) geçmediğinden, *“atomsal”* sayılması gerekir. Ancak böyle bir önermenin mantıkça ‘Ahmet Ankaraya gidecek’ önermesinin *hayırlanması* (negation) anlamına geldiğini göz önünde tutarak, onu

(4) (Ahmet Ankaraya gidecek) değil

biçiminde yorumlamak isteriz. (4) önermesi ise, ‘Ahmet Ankaraya gidecek’ gibi bir bileşeni olduğundan, açıkça *“molekülse”*dir. Ancak (3) ile (4) ün *“anlamdaş”* olmakla birlikte, aynı *“önergeler”* (yani aynı *“bil-dirsel-cümleler”*) olmadığı meydandadır. Bu bakımdan (4) ün molekülse olması, (3) ün de molekülse olmasını ilkece gerektirmez. Böylece, sözü geçen tanımımız gereği (3) ü *“atomsal”*, (4) ü ise *“molekülse”* saymamız gerekir; dolayısıyla böyle bir ayrımın *“mantık”* açısından elverişsiz, hattâ zararlı olduğunu kabul etmek zorunda kalırız. İşte bu durumu göz önünde tutarak *‘atomsal’* ve *‘molekülse’* terimlerinin tanımını şu şekilde değiştireceğiz:

Ö gibi herhangi bir önermenin *“atomsal”* olması, bu önermenin *“mantıksal-yapısı”*nı yansıtan Ö gibi bir önermenin içinde başka hiç bir önermenin (bileşenin) geçmemesi; Ö nün *“molekülse”* olması ise, sözü geçen Ö önermesinin içinde başka bir önermenin (bileşenin) geçmesi demektir.

Örneğin: (3) önermesinin *“molekülse”* olduğunu, bu önermenin *“mantıksal-yapısını”* yansıtan (4) önermesinin bileşenleri bulunması şeklinde tesbit edebiliriz. Buna karşılık, ‘Ahmet Ankaraya gitti’ türünden bir önermenin *“atomsal”* olduğunu, bir yandan bu önermenin mantıksal-yapısının doğrudan doğruya kendisi tarafından yansıtıldığına, öte yandan ise önermenin içinde hiç bir bileşenin geçmediğine işaret etmek suretiyle gösterebiliriz.

İmdi Ö gibi belli bir önermenin *“mantıksal-yapısı”*nın Ö gibi bir önerme tarafından *“yansıtılması”*nın (Ö önermesi Ö den farklı olabildiği gibi, onunla özdeş de olabilir!) hiç bir şekilde *mutlak* bir anlamı *olmadı-*

ğın belirtmek gerek. Nitekim Ö önermesinin mantıksal-yapısı, belli bir sistem açısından, Ö' gibi bir önerme tarafından yansıtıldığı halde, başka bir sistem açısından, Ö' den çok farklı olan Ö" gibi başka bir önerme tarafından yansıtılabilir. İşte modern düşünüş açısından, belli bir "*mantık teorisi*" bir yandan daha önce belirttiğimiz şekilde "*çıkarımların geçerliliğini*" belirlemeğe yarayan bir metod olduğu gibi; öbür yandan günlük dile veya çeşitli bilim dillerine ait önermelerin "*mantıksal-yapısını yansıtan*" önermelere çevrilmesini sağlayan bir metod durumundadır. Başka bir deyimle, Ö' gibi bir önermenin verilen bir Ö önermesinin "*mantıksal-yapısını yansıtması*", başvurulmuş mantık teorisi uyarınca, Ö önermesinin "*standart*" veya "*kanunsal*" (canonical) karşılığının sözü geçen Ö' önermesi olmasından başka bir şey değildir. Böylece mantığın "*çıkarımların geçerliliğini*" tesbit etme görevi yanısıra, bir de günlük dile veya bilim dillerine ait önermeleri "*standart*" biçime dönüştürme veya "*açıklama*" (paraphrase) görevi olduğunu görüyoruz. İşte herhangi bir önermenin "*mantıksal-yapısı*", bu önermenin "*standart*" veya "*kanunsal açıklama*"sının yapısı demektir. Bu bakımdan, bir önermenin "*gerçek*" *mantıksal-yapısından* söz edilmesinin kökçe mânasız olduğunu görüyoruz. ("*Mantıksal görecilik*"!) ²

Örneğin: 'Ahmet Ankaraya gidecek' önermesiyle bu önermenin hayırlanmasını göz önüne alalım. Bu önermelerin mantıksal-yapısı *klâsik mantık* teorisi açısından, sırasıyla:

(5) Ahmet Ankaraya gidecek olan (bir kimse) *dir*

ve

(6) Ahmet Ankaraya gidecek olan (bir kimse) *değildir*

önermeleri yardımıyla dile getirilmelidir. Böyle bir görüş uyarınca gerek (5) gerek (6) "*atomsal*"dır. Nitekim (6) da geçen '*değildir*' deyimini, (5) te geçen '*dir*' deyimini gibi bir "*koşaç*" (copula) sayılmaktadır. Buna göre, klâsik mantık açısından sözü geçen (3) önermesinin "*molekül*sel" değil, "*atomsal*" sayılması gerekecektir.

Öte yandan J. S. Mill'e göre, gerek 'Ahmet Ankaraya gidecek' önermesi gerek bunun hayırlanması olan (3) önermesi olduğu gibi kendi mantıksal-yapısını yansıtmaktadır. Ancak Mill, klâsik mantıkçılar gibi, "hayırlama'yı bir "*koşaç*" saydığından, (3) önermesinin onun görüşü uyarınca da "*atomsal*" sayılması gerekir. ³

Modern mantık açısından ise "*hayırlama*" bir *koşaç* sayılmadığından, (3) önermesinin mantıksal yapısı ("*bölünmemiş önermeler mantığı*" çerçevesinde) (4) veya

(7) değil (Ahmet Ankaraya gidecek)

gibi bir önerme aracıyla dile getirilmelidir. Bu halde ise (3) ün atomsal değil, molekülse olduğu meydandadır.

Bu üç ayrı, hattâ birbiriyle bağdaşmaz olan görüşten hangisinin “doğru” olduğunun sorulması mânasız olmakla birlikte, hangisinin (bilgi üretimi için *elverişliliği* bakımından) daha “üstün” olduğunun sorulması hiç de mânasız değildir. İşte bu bakımdan üçüncü görüşün, yani *modern mantık* görüşünün ötekilerinden üstün olduğu söylenebilir. Ancak böyle bir “üstünlüğün” gösterilmesi için (3) ün (7) biçiminde yorumlanması gibi tek tek özel sonuçlarını değil de, “sistem” olarak başarılarının tümünü öteki görüşlerin başarılarıyla karşılaştırmak gerekir.

§ 5. Bölünmemiş Önermelerden Kurulu Çıkarımlar

- (1) Fırtına kopacak veya uçağa bineceğim
Fırtına kopmıyacak
... Uçağa bineceğim

gibi bir çıkarımı göz önüne alalım. Bu çıkarımda geçen *atomsal-önergeler*:

- (2) Fırtına kopacak
ile
(3) Uçağa bineceğim

önergelerinden ibarettir. İmdi böyle bir çıkarımın geçerliliğinin, içinde geçen *atomsal-önergelerin* “iç-yapısı”na (internal structure) hiç bir şekilde *bağlı* olmadığını gösterebiliriz. Nitekim, (2) önermesi yerine ‘p’ gibi bir önerme-temsilcisini, (3) önermesi yerine de ‘q’ gibi bir önerme-temsilcisini koymakla elde edilen

- (4) p veya q
p değil
... q

şemasını göz önüne alalım. Bu şema, ilerde kanıtlıyacağımız gibi, “geçerli” bir *çıkartım-şeması* olduğundan, (4) ün bir *yerine-koyma örneği* durumunda olan (1) çıkarımının da “geçerli” olduğunu söyleyebiliriz. Görüldüğü gibi, (1) in geçerliliğini kanıtlamak için, bir yandan bu çıkarımın (4) gibi bir *çıkartım-şemasının* bir yerine-koyma örneği olduğunu, öbür yandan da (4) ün geçerli bir *çıkartım-şeması* olduğunu kanıtlamak yetiyor. Oysa (4) *çıkartım-şemasında* (2) ile (3) *atomsal-önergeleri* geçmediği gibi, bu şemanın geçerliliğinin kanıtlanması için bu *atomsal-önergelerin* iç yapısının hesaba katılması hiç de gerekmiyor. (İ.K. ¹)

İşte (1) gibi, geçerli olup olmaması, içinde geçen atomsal-önergelerin iç-yapısına bağlı olmıyan çıkarımlara “*bölünmeyen önermelerden kurulu çıkarımlar*”, yalnız bu türlü çıkarımları inceleyen mantık dalına da “*bölünmemiş önermeler mantığı*” veya kısaca “*önermeler mantığı*” diyeceğiz. (Söz konusu “*bölünmemiş önermeler*”, içinde geçtiği çıkarımların geçerliliği bakımından iç-yapısının hiç bir etkisi olmıyan “atomsal-önergeler”den başka bir şey değildir).

İmdi, bütün çıkarımların bu çeşitten olmadığını, dolayısıyla “bölünmemiş önermeler mantığı”nın mantığın tümünü tüketmediğini şöyle bir örnekle gösterebiliriz:

- (5) Bütün insanlar ölümlüdür
Sokrates insandır
... Sokrates ölümlüdür

önermesinin gerek öncülleri gerek sonucu birer “atomsal-önerme” durumundadır. Oysa geçerli bir çıkarım olan (5) in geçerliliği bu “atomsal önermeler”in “iç-yapısı”na bağlıdır. Nitekim (1) çıkarımı halinde yaptığımız gibi, (5) çıkarımının içinde geçen atomsal önermelerin yerine ayrı önerme-temsalcileri (söz gelişi ‘p’, ‘q’ ve ‘r’ olsun) koymak suretiyle elde edilen :

- (6) p
q
... r

çıkartım-şemasının “geçersiz” olduğunu görüyoruz. Şu halde (5) in “bölünmemiş önermelerden kurulu bir çıkarım” *olmadığını*, dolayısıyla “önergeler mantığı” *konusunun dışında* kaldığını kabul etmemiz gerekir.

İşte bu Bölümde “bölünmeyen önermelerden kurulu çıkarımlar”ı inceleyeceğiz. Bu bakımdan *atomsal-önergelerin iç-yapısını* bir yana bırakarak bu önermeleri “*bölünmeyen bütünler*” şeklinde yorumlayacağız. Bunların iç-yapısını ise ancak mantığın öteki dallarıyla ilgili sonraki Bölümlerde inceleyeceğiz.

Şimdi “bölünmeyen önermelerden kurulu çıkarımlar”ın mantıksal-yapısını daha yakından inceleyelim. Herhangi bir çıkarımın gerek öncüllerine gerekse sonucuna bu çıkarımın “üyeler”i diyelim. O zaman “bölünmeyen önermelerden kurulu her geçerli çıkarım”ın üyelerinden hiç olmazsa birisinin “*moleküler*” olması gerektiğini söyleyebiliriz. Nitekim bütün üyeleri “atomsal” olan bir çıkarım

$$\begin{array}{c}
 (7) \quad \begin{array}{c} \ddot{O}_1 \\ \ddot{O}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \ddot{O}_n \\ \cdot \cdot \cdot \ddot{O} \end{array}
 \end{array}$$

biçiminde olduğundan; böyle bir çıkarımın üyeleri olan $\ddot{O}_1, \ddot{O}_2, \dots, \ddot{O}_n, \ddot{O}$ önermelerinden her birinin “atomsal” olması halinde, çıkarımda geçen atomsal-önermelerin yerine ‘ p_1 ’, ‘ p_2 ’, ‘ p_n ’, ‘ q ’ gibi $n + 1$ tane ayrı önerme-temsilcisinin konulması sonucunda elde edilen:

$$\begin{array}{c}
 (8) \quad \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n \\ \cdot \cdot \cdot q \end{array}
 \end{array}$$

çıkartım-şemasının “geçersiz” olduğunu görüyoruz. (İ.K.)

İmdi “bölünmeyen önermelerden kurulu” herhangi bir çıkarımı göz önüne alarak; çıkarımın içinde geçen atomsal-önermeler yerine belli önerme-temsilcileri koyalım; öyle ki:

- (a) Aynı atomsal-önermelerin çıkarımın içindeki ayrı geçişleri için aynı önerme-temsilcileri seçilsin;
- (b) Ayrı atomsal-önermelerin çıkarımın içindeki ayrı geçişleri için ayrı önerme-temsilcileri seçilsin.

Bu şekilde elde edilen çıkarım-şemasına sözü geçen çıkarımın “temsilci-şema”sı diyeceğiz. Buna göre, bölünmeyen önermelerden kurulu herhangi bir çıkarımın “temsilci-şeması”, bu çıkarımdan (a) ve (b) şartlarını yerine getirecek şekilde türetilen “çıkartım-şeması demektir. Her çıkarımın, karşılığı olan temsilci-şemanın bir yerine-koyma örneği olduğu meydandadır. Buna karşılık, her çıkarım-şeması bütün yerine-koyma örneklerinin “temsilci-şeması” değildir. Genel olarak salt mantıksal-değişmezlerle önerme-temsilcilerinden kurulu bir çıkarım-şeması, şu şartları yerine getiren yerine-koyma örneklerinin temsilci-şeması olur:

- (i) Çıkarım-şemasının içinde geçen her önerme-temsilcisinin yerine bir atomsal-önerme konulmalı;
- (ii) *Ayrı* önerme-temsilcilerinin yerine *ayrı* atomsal-önergeler konulmalı.

Örneğin: (1) çıkarımının karşılığı olan “temsilci-şema” (4) çıkarım şemasıdır. Görüldüğü gibi, (4) çıkarım-şeması (1) çıkarımından (a) ve (b) şartlarını yerine getirecek şekilde elde edilebilir. Öte yandan, (1) çıkarımının (4) çıkarımının (i) ve (ii) şartlarını yerine getiren bir yerine-koyma örneği durumunda olduğunu da görüyoruz.

İmdi, bölünmeyen önergelerden kurulu herhangi bir çıkarımın “geçerliliğinin” gerekli ve yeterli şartı, bu çıkarımın karşılığı olan “temsilci-şemanın” geçerli olmasından ibarettir. Bunu şöyle kanıtlayabiliriz:

- 1— *Şart yeterlidir*, yani temsilci-şemasının geçerli olması halinde çıkarımın kendisi de geçerli olur:

Nitekim çıkarım kendi temsilci-şemasının bir yerine-koyma örneğidir. Şu halde temsilci-şemanın geçerli bir çıkarım-şeması olması halinde, bunun bir yerine koyma örneği durumunda olan söz konusu çıkarımın da geçerli olması gerekecektir. (İ.K.)

- 2— *Şart gereklidir*, yani çıkarımın geçerli olması halinde temsilci-şeması da geçerli bir çıkarım-şeması olur:

Nitekim Ç bölünmeyen önergelerden kurulu herhangi bir çıkarım, T de Ç çıkarımının temsilci-şeması olsun. Ç nin geçerli bir çıkarım olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla Ç nin bir yerine-koyma örneği olduğu Ş gibi bir geçerli çıkarım-şemasının bulunması gerekecektir. Ç nin geçerliliği, içinde geçen atomsal-önergelerin iç-yapısından bağımsız olduğundan, Ş çıkarım-şemasının salt mantıksal-değişmezlerle önerme-temsilcilerinden kurulu olduğunu kabul edebiliriz. O zaman da T çıkarım-şemasının Ş çıkarım-şemasının bir yerine-koyma örneği olması gerekir. Nitekim Ç nin bir yerine-koyma örneği olduğu bu çeşit çıkarım-şemalarının her biri, Ç nin içinde geçen bazı önergelerin yerine önerme-temsilcilerinin konulmasıyla elde edilebilir. T çıkarım-şeması ise bu şekilde elde edilen çıkarım-şemalarından her birinin bir yerine-koyma örneği durumundadır. Buna göre, T nin sözü geçen geçerli Ş çıkarım-şemasının da bir yerine-koyma örneği olması gerektiği, dolayısıyla T nin de geçerli olduğu sonucuna varmış oluruz. (İ.K.)

İmdi, temsilci-şeması aynı olan (bölünmeyen önermelerden kurulu) çıkarımların *aynı biçimde* olduğunu söyleyebiliriz. Buna göre, (bölünmeyen önermelerden kurulu) herhangi bir çıkarımın “geçersiz” olduğu, öncülleri doğru, sonucu ise yanlış olan aynı biçimde bir çıkarımın gösterilmesi ile bir hamlede kanıtlanabilir. Örneğin:

$$(9) \quad \begin{array}{l} 2 = 2 \quad \text{veya} \quad 3 = 3 \\ 2 = 2 \\ \therefore 3 = 3 \end{array}$$

çıkartımının, gerek öncülleri gerek sonucu doğru olmakla birlikte, “geçersiz” olduğunu; bu çıkarım ile *aynı biçimde* olan:

$$(10) \quad \begin{array}{l} \text{Bütün insanlar ölümlüdür veya Sokrates ölümlü değildir} \\ \text{Bütün insanlar ölümlüdür} \\ \therefore \text{Sokrates ölümlü değildir} \end{array}$$

çıkartımının, öncüllerinin doğru, sonucunun ise yanlış olmasından dolayı, *geçersiz* bir çıkarım olduğunu belirtmek suretiyle kanıtlıyabiliriz.

(9) ile (10) çıkarımlarının “aynı biçimde” olduğunu, her ikisinin karşılığı olan “temsilci-şema”nın :

$$(11) \quad \begin{array}{l} p \text{ veya } q \\ p \\ \therefore q \end{array}$$

çıkartım-şemasından ibaret olmasından anlarız. ((11) çıkartım-şemasının ise “geçersiz” olduğu, (10) gibi açıkça geçersiz bir yerine koyma örneği bulunmasından anlaşılır.).

Bu durumu göz önünde tutarak, “bölünmemiş önermeler mantığı” çerçevesinde herhangi bir çıkarımın “mantıksal-yapısı”nın bu çıkarımın karşılığı olan temsilci-şema tarafından dile getirildiğini söyleyebiliriz. Buna göre, (4) çıkartım-şemasının (1) çıkartımının; (11) in ise (9) veya (10) çıkartımının mantıksal-yapısını dile getirdiğini görüyoruz.

Öte yandan “önermeler”in mantıksal-yapısını, bunların içinde geçen “deskriptif” deyimlerin yerine “temsilci-harfler” koyarak dile getirebiliriz. Önermeler mantığında, önermelerin mantıksal-yapısını “bölünmeyen önermelerden kurulu çıkarımlar”daki görevi açısından belirtmek için, (çıkartımlar halinde yapıldığı gibi) her atomal-önermenin yerine, sözü geçen (a) ve (b) şartlarını yerine getirecek şekilde, belli bir önerme-temsilcisinin konulması gerekir. Böylece elde edilen deyimlere “ö n e r m e - ş e m a - l a r ı” diyeceğiz. “Önerme-şemaları”nı genel bir şekilde, içinde bir takım

“temsilci-harfler” geçen ve bu harflerin yerine uygun “değişmezler”in konulması (yani uygun bir şekilde “yorumlanması”) halinde birer “önerme” biçimine dönen deyimler olarak tanımlıyabiliriz. Temsilci-harfleri belli bir takım “değişmezler” le “yorumlayacak” yerde, bunların yerine, içlerinde gene temsilci-harfler geçen deyimler koyabiliriz. Aynı temsilci-harflerin ayrı geçişleri için aynı deyimın konulması şartıyla her iki halde de elde edilen deyimlere, söz konusu *önerme-şemasının* “*yerine-koyma örnekleri*” diyeceğiz. Örneğin:

(11) p veya q

deyimi bir “önerme-şeması”dır. ‘p’ yerine ‘bütün insanlar ölümlüdür’ ‘q’ yerine de ‘Sokrates ölümlü değildir’ önermesinin konulmasıyla elde edilen

(12) Bütün insanlar ölümlüdür veya Sokrates ölümlü değildir
önermesi (11) önerme-şemasının bir yerine-koyma örneğidir. Öte yandan,

(11) de ‘q’ nün yerine ‘p’ deyiminin konulmasıyla elde edilen

(13) p veya p

önerme-şemasını da (11) önerme-şemasının bir yerine-koyma şeması saymamız gerekir.

İmdi her çıkarım bir takım “önergeler”den (öncüllerle sonuçtan) meydana geldiği gibi, her “çıkartım-şeması” bir takım “önerme-şemaları”ndan meydana gelir. Öncüllerden türetilen önerme-şemalarına “*öncül-şemaları*”, sonuçlardan türetilen önerme-şemalarına “*sonuç-şemaları*”, herhangi bir çıkartım-şemasının öncül-şemaları ile sonuç-şemasına da bu çıkartım-şemasının “*üyeleri*” diyeceğiz. Örneğin: (11) çıkartım-şemasının üyeleri ‘p veya q’ ve ‘p’ öncül-şemalarıyla ‘q’ sonuç-şemasından ibarettir.

Önergeler mantığı çerçevesinde her önerme-şeması salt mantıksal-değişmezler ile önerme-temsilcilerinden kuruludur. İmdi bölünmeyen önermelerden kurulu her *çıkartımın* karşılığı olan ve onun “mantıksal-yapısı”nı dile getiren bir “*temsilci-şema*”yı belirleyebildiğimiz gibi, (önergeler mantığında) her *önermenin* “mantıksal-yapısı”nı dile getiren bir “*temsilci-şemayı*” da belirleyebiliriz. İşte verilen bir önermenin “*temsilci-şema*”sını, bu önermenin içinde geçen bütün atomsal-önergelerden, (çıkartımlar halinde sözü geçen) (a) ve (b) şartlarını yerine getirecek şekilde önerme-temsilcileri koymak suretiyle, elde edilen önerme-şeması şeklinde tanımlıyoruz. Herhangi bir önermenin “temsilci-şeması”, bu önermenin bir yerine-koyma örneği olduğu her önerme-şemasının bir yerine-koyma örneğidir. Örneğin: (12) önermesinin “temsilci-şeması” olan (11) önerme-

şemasını göz önüne alalım. (12) önermesi 'r' gibi bir "önerme-şemasının (tek harfli şema!) bir yerine-koyma örneğidir. (11) önerme-şeması ise 'r' nin bir yerine-koyma örneğidir. Daha iyi bir örnek olarak :

(14) A veya B ise, C

biçimindeki bir önermeyi ² göz önüne alalım. (14) önermesinin "temsilci-şeması

(15) p veya q ise, r

biçimindedir. İmdi (14) önermesi (15) önerme-şemasının bir yerine-koyma örneği olduğu gibi :

(16) p ise, q

gibi bir önerme-şemasının da bir yerine-koyma örneği durumundadır. (Nitekim, (16) da 'p' yerine 'A veya B', 'q' yerine de 'C' koymakla (14) elde edilir). İşte (14) ün temsilci-şeması olan (15) önerme-şeması sözü geçen (16) önerme-şemasının bir yerine-koyma örneğidir. Nitekim, (16) da 'p' nin yerine 'p veya q', 'q' nün yerine de 'r' koymak suretiyle (15) in elde edilebileceği meydandadır.

Önermeler mantığı çerçevesinde bütün önerme-şemalarını iki öbeğe ayırabiliriz: Bir yandan atomsal-önermelerin "temsilci-şeması" durumunda olan "atomsal önerme-şemaları", öbür yandan da molekül-önermelerin "temsilci-şemaları" durumunda olan "molekül-önerme-şemaları". Her atomsal önerme-şeması bir tek önerme-temsilcisinden ibaret olduğu halde, her molekül-önerme-şemasının içinde en az bir önerme-temsilcisi ile en az bir mantıksal-değişmezin geçmesi gerekir. Örneğin: 'p' harfi tek başına bir "atomsal önerme-şeması", 'p' ve 'q' harfleriyle 'veya' mantıksal değişmezinden kurulu 'p veya q' deyimi bir "molekül-önerme-şeması"dır.

§ 6. Doğruluk Fonksiyonları

(1) Ahmet Ankaraya gitmiyecek
ile

(2) Ahmet Ankaraya gidebilir

önermelerini göz önüne alalım. §4'te belirttiğimiz gibi, (1) in "mantıksal-yapısı"

(3) (Ahmet Ankaraya gidecek) değil

biçimindeki bir önerme ile dile getirilmelidir. Öte yandan bir "kip-önermesi" (modal statement) olan (2) nin mantıksal-yapısı :

(4) Ahmedin Ankaraya gitmesi mümkün biçimindeki bir önerme yardımıyla dile getirilmelidir.

İmdi, herhangi bir önermenin mantıksal-yapısını dile getiren “*temsilci-şema*”nın bu önermenin doğrudan doğruya kendisinden değil de, mantıksal-yapısını dile getiren karşılığından türetilen önerme-şeması olduğu meydandadır. Buna göre, (1) önermesinin “*temsilci-şeması*”nın

(5) p değil

veya

(6) p olduğu yanlıştır

biçiminde olduğunu görüyoruz. ‘p’ harfi burada (1) önermesinin bir “bileşen”i saydığımız :

(7) Ahmet Ankaraya gidecek

önermesinin yerine konulmuştur.

Aynı şekilde (2) önermesinin “*temsilci-şeması*” olarak

(8) p mümkün

önerme-şemasını seçebiliriz.

İmdi, (3) önermesinin “*doğruluk-değeri*”nin (yani “*doğru*” veya “*yanlış*” olmasının) sadece “bileşen”i olan (7) önermesinin doğruluk-değerine bağlı olduğunu gösterebiliriz. Nitekim (7) nin “*doğru*” olması, yani Ahmedin gerçekten de Ankaraya gitmesi halinde (3) ün “*yanlış*” olacağı; (7) nin “*yanlış*” olması (yani gerçekte Ahmedin Ankaraya gitmemesi) halinde (4) ün “*doğru*” olacağı meydandadır. Genel olarak (5) önerme-şemasının yerine-koyma örneği durumunda olan her önermenin “*doğruluk-değeri*”nin sadece içinde geçen bileşenin (yani ‘p’ yi yorumlayan önermenin) “*doğruluk-değeri*” ne bağlı olduğunu söyleyebiliriz. Gerçekten de ‘p’ nin yerine “*doğru*” bir önerme konulursa, ‘p değil’ deyimi “*yanlış*” bir önerme; ‘p’ nin yerine “*yanlış*” bir önerme konulursa ‘p değil’ deyimi “*doğru*” bir önerme olur. Örneğin:

(9) $2 < 3$

önermesi “*doğru*” olduğundan,

(10) $(2 < 3)$ değil

önermesinin “*yanlış*” olduğunu görüyoruz.

Öte yandan (4) önermesiyle, genel olarak (8) önerme-şemasının yerine-koyma örnekleri olan önermeler için durum aynı değildir. Nitekim

(4) önermesinin “doğruluk-değeri” (‘mümkün’ sözcüğünün “mantıkça-mümkün” şeklinde yorumlanması şartıyla) hiç de bileşeni olan (7) önermesinin doğruluk-değerine bağlı değildir. (7) ister “doğru”, ister “yanlış” olsun, Ahmedin Ankaraya gidip gitmemesi “raslantısal” (contingent) bir olgudan ibaret olduğundan, (4) “doğru”dur. (Ahmedin gerçekte Ankaraya gitmemesi halinde bile gene de gitmesi “mantıkça imkânsız” değildir!) Görüldüğü gibi, (4) önermesinin doğruluk-değerinin belirlenmesi için sadece (7) önermesinin doğruluk-değerinin bilinmesi yetmemektedir. Gerçi (7) nin “doğru” olması halinde (4) ün de “doğru” olduğunu söyleyebiliriz, ama (7) nin “yanlış” olması halinde (4) ün doğru mu, yanlış mı olduğunu başka bilgilere başvurmadan söylememiz imkânsızdır. ((4) ün bu halde de “doğru” olduğunu sözü geçen (7) önermesinin “raslantısal” lığına dayanarak öne sürdük).

Buna karşılık, (8) önerme-şemasında ‘p’ yerine mantıkça imkânsız bir durumu dile getiren :

$$(11) \quad 3 < 2$$

gibi bir önermenin konulmasıyla elde edilen :

$$(12) \quad 3 < 2 \text{ mümkün}$$

önermesinin “yanlış” olduğunu görüyoruz. (3 sayısının 2 sayısından küçük olması mümkün değildir!) (12) önermesinin “yanlış” olduğunu sadece bileşeni olan (11) önermesinin yanlış olmasına davanarak değil, bir de “imkânsız” olmasına dayanarak öne sürebiliyoruz.

Doğruluk-değeri aynı olan önermelere “eşdeğer” (*equivalent*) diyelim. İmdi, (5) önerme-şemasında ‘p’ yerine eşdeğer önermeler koymak suretiyle elde edilen önermelerin (“yerine-koyma örnekleri”nin) her zaman “eşdeğer” olduğu halde; (8) önerme-şemasında ‘p’ yerine eşdeğer önermeler koyarak elde edilen önermelerin bazan eşdeğer olmadığını gösterebiliriz. Nitekim, ‘p’ nin yerine “doğru” bir önerme konulduğunda ‘p değil’ deyiminin her zaman “yanlış” bir önerme biçimine; ‘p’ nin yerine “yanlış” bir önermenin konulması halinde de “doğru” bir önerme biçimine girdiğini belirtmiştik. ‘p mümkün’ önerme-şemasına gelince: (7) önermesinin “yanlış” olduğunu kabul edelim. O zaman ‘p mümkün’ önerme-şemasında ‘p’ nin yerine (7) nin konulmasıyla elde edilen (4) önermesi “doğru” olur. İmdi, bu halde (7) önermesi ile (11) önermesi - ikisi de “yanlış” olduğundan - “eşdeğer” önermeler durumundadır. Oysa, “doğru” olan (4) önermesinde (7) bileşeninin yerine (11) önermesinin konulmasıyla elde edilen (12) önermesi “yanlış”tır. (İ.K.)

İmdi, doğruluk-değeri salt bileşenlerinin doğruluk-değerine bağlı olup

bileşenlerin yerine “eşdeğer” önermelerin konulması sonucunda değişmiş önermelere “doğruluk-fonksiyonları” (truth functions) denir. Bu türlü önermelerin “temsilci”si olan “önerme-şemaları”na da “doğruluk-fonksiyonu şemaları” (truth functional schemata) diyeceğiz. Buna göre, (3) önermesinin bir “doğruluk-fonksiyonu”, (5) önerme-şemasının da bir “doğruluk-fonksiyonu şeması” olduğunu görüyoruz. Buna karşılık, (4) bir doğruluk-fonksiyonu olmadığı gibi, (8) de bir doğruluk-fonksiyonu şeması değildir.

Doğruluk-fonksiyonlarını atomsal-bileşenlerinin sayısına bakarak “1-li” (yani 1 bileşenli), “2-li” (yani 2 bileşenli), ..., “n-li” (yani n bileşenli) ... doğruluk-fonksiyonlarına ayırabiliriz. Örneğin: (3) önermesi (yalnız bir tek atomsal bileşeni olduğundan) bir “1-li doğruluk-fonksiyonu”, (5) önerme-şeması da bir “1-li doğruluk-fonksiyonu şeması”dır.

İndi, sözü geçen (3), (4), (5) ve (8) örneklerinin gösterdiği gibi, bölünmemiş önermeler mantığının konusuna giren önermelerle önerme-şemalarının bazıları “doğruluk-fonksiyonu” durumundadır, bazıları değildir. Böylece bölünmemiş önermeler mantığını, incelenen molekül önermelerin ve önerme-şemalarının “doğruluk-fonksiyonu” durumunda olup olmasına bakarak, iki ayrı kola ayırabiliriz. Bu kollardan birincisine “doğruluk-fonksiyonları teorisi” diyeceğiz. İkinci kolun ise “kip-önermeleri” (modal statements), “dilek-şart önermeleri” (subjunctive conditionals) ve “yargısal-tavır (propositional attitudes) ¹ önermeleri” gibi pek çeşitli konularla ilgili olduğunu söyleyebiliriz.

“Doğruluk-fonksiyonları teorisi” modern mantığın en çok işlenmiş bir dalı olup matematiksel bir yetkinliğe erişmiş olduğu halde, doğruluk-fonksiyonu olmıyan önermelerin teorisinin bugün bile karanlıklara bürünmüş olduğunu ve şiddetli tartışmalara yol açtığını gözlemekteyiz. Bu konuda son onyıllarda en iyi işlenmiş olan “mantıksal-kipler teorisi” bile tam bir aydınlığa kavuşmaktan uzaktır. Hattâ böyle bir teorinin imkânsız veya mânasız olduğunu öne süren (Quine gibi) ünlü mantıkçıların da bulunduğu işaret etmeliyiz. Bu durumu göz önünde tutarak, yalnız “doğruluk-fonksiyonları teorisi”ni incelemekle yetineceğiz. ² Aslında bu teori bütün mantığın belkemiğini teşkil etmektedir. Üstelik, modern mantıkta doğruluk-fonksiyonu olmıyan önermeleri önünde sonunda doğruluk-fonksiyonlarına geri götürme eğilimi olduğunu (“kaplamsallık tezi” - extensionality thesis -) da belirtmek gerek. ³ “Mantıksal-kipler” için böyle bir geri götürmenin bugün bile mümkün olduğunu söyleyebiliriz (Bk. § 3.). Bundan böyle ‘önermeler mantığı’ deyimini (başka şekilde belirtilmediği hallerde) dar mânada yalnız “doğruluk-fonksiyonları teorisi” anlamında kullanacağız.

B ö l ü m II.

ÖNERME-EKLEMLERİ VE DOĞRULUK-ÇİZELGELERİ

§ 7. Hayırlama , Birlikte-Evetleme ve Ayrıklık

Önermeler Mantığında çıkarımların geçerliliğinin salt üyeleri olan molekülse-önermelerin mantıksal-yapısına bağlı olduğunu söyleyebiliriz. Buna göre, bu türlü çıkarımların geçerlilik-ayraçlarının belirlenmesi için, molekülse-önermelerin mantıksal değişmezlerle atomse-önermelerden ne şekilde kurulu olduğunu yakından incelememiz gerekecektir. İmdi günlük dilde iki veya daha çok sayıda basit önermeden bir takım “bağlaç”lar yardımıyla bileşik önermelerin kurulması mümkündür. Örneğin :

- (1) Ahmet Ankaraya gidecek ve Ali İstanbula gelecek
- (2) Ahmet Ankaraya gidecek veya Ali İstanbula gelecek

önermelerini göz önüne alalım. (1) önermesi :

- (3) Ahmet Ankaraya gidecek
- ile
- (4) Ali İstanbula gelecek

basit önermelerinden ‘ve’ bağlacı yardımıyla meydana gelmiş bir bileşik önermedir. (2) ise (3) ile (4) ten ‘veya’ bağlacı yardımıyla meydana gelmiştir.

Şimdi (1) gibi bir önermenin önermeler mantığı açısından mantıksal-yapısını inceleyelim. İmdi (1) önermesi (3) ve (4) *atomse-bileşenlerinden* kurulu bir “*molekülse-önerme*” durumundadır. Buna göre, (3) yerine ‘p’, (4) yerine de ‘q’ gibi bir önerme-temsilsisini koyarak, (1) önermesinin mantıksal-yapısını dile getiren “önerme-şeması”nın (yani (1) önermesinin “temsilsici”sinin) :

- (5) p ve q

olduğu anlaşılır. (5) çıkarım-şemasında bir tek “*mantıksal-değişmez*”in geçtiğini, bunun da ‘ve’ bağlacından ibaret olduğunu görüyoruz.

Aynı şekilde (2) önermesi de (3) ve (4) atomsal-bileşenlerinden kurulu bir “molekülse-önerme” durumundadır. (2) önermesinin temsilcisi olan çıkarım-şeması ise:

(6) p veya q

biçimindedir. Bu şemada da bir tek “mantıksal-değişmez”in geçtiğini görüyoruz. Ancak bu mantıksal-değişmez (5) te olduğu gibi ‘ve’ bağlacından değil, ‘veya’ bağlacından ibarettir.

Öte yandan (6-1) (yani § 6 da sözü edilen (1)) gibi bir önermeyi de -(6-3) biçiminde yorumlamak şartıyla. “bileşik” saymalıyız. Ancak, (6-1) in içinde iki değil, *yalnız bir tek “basit” önerme* geçtiğini, böyle bir bileşik önermenin “mantıksal-değişmez”i durumunda olan ‘değil’ sözcüğünün de bir “bağlaç” olmadığını belirtmek gerek.

Genel olarak, bir veya daha çok sayıda “atomsal-önerme”den kurulu herhangi bir “molekülse-önerme”de geçip söz konusu atomsal-önermeleri birbirine “eklemeğe” yarayan mantıksal-değişmezlere “önerme-eklemeleri” (connectives, connectors) diyeceğiz. Önerme-eklemelerini, birbirine ekledikleri önermelerin sayısına bakarak, “1-li”, “2-li”, ..., “n-li”, ... önerme-eklemlerine ayırabiliriz. Buna göre, ‘değil’ sözcüğünün bir “1-li önerme-eklemi”, ‘ve’ ile ‘veya’ sözcüklerinin ise birer “2-li önerme-eklemi” olduğunu görüyoruz. İmdi ‘ve’ veya ‘veya’ gibi bir “2-li önerme-eklemi” iki *ayrı* önermeyi birbirine eklemeğe yaradığı halde, ‘değil’ gibi bir 1-li önerme-ekleminin belli bir önermeyi herhangi başka bir önermeye “eklemeğe” yaramadığı meydandadır. Bu bakımdan böyle bir sözcüğe “eklem” denilmesinin yerinde olmadığı öne sürülebilir. Ancak, matematikte “1” in çokluğu göstermediği halde bir “sayı” olarak kabul edildiğini göz önünde tutarak “1-li önerme eklemeleri”ni de “n-li önerme-eklemeleri”nin özel bir hali şeklinde yorumlamağa hakkımız vardır. Dolayısıyla matematiksel kullanımlar açısından “1-li önerme-eklemi” deyiminin yerinde olduğunu söyleyebiliriz.

Önerme-eklemlerini bir de “doğruluk-fonksiyonu durumunda olan önerme-eklemleri” (truth-functional connectives) ile “doğruluk-fonksiyonu durumunda olmayan önerme-eklemleri” olmak üzere iki öbeğe ayırıyoruz. Örneğin: ‘değil’ ile ‘mümkün’ sözcüklerini göz önüne alalım. ‘Değil’ sözcüğünün bir “1-li önerme-eklemi” olarak içinde geçtiği (6-1) veya (6-3) önermesi bir “doğruluk-fonksiyonu”, (6-5) önerme-şeması da bir “doğruluk-fonksiyonu şeması” olduğundan, bu sözcüğün *birinci* öbeğe ait olduğunu görüyoruz. Öte yandan, ‘mümkün’ sözcüğünün de bir “1-li önerme-eklemi” olduğunu söyleyebiliriz. Nitekim (6-4) gibi bir önerme ‘mümkün’ sözcüğü yardımıyla (6-7) atomsal-bileşeninden meydana gelen bir

“molekölse-önerme” durumundadır. Ancak, (6-4) önermesi bir “doğruluk-fonksiyonu” olmayıp (6-8) önerme-şeması da bir “doğruluk-fonksiyonu şeması” olmadığından, ‘mümkün’ sözcüğü *ikinci* öbeğe girmelidir.

Buraya kadar dört ayrı önerme-eklemi ile karşılaşmış bulunuyoruz: ‘değil’, ‘mümkün’, ‘ve’ ve ‘veya’. Bunlardan ilk ikisi “1-li”, son ikisi ise “2-li”dir. İmdi bu dört eklem birincisinin “doğruluk-fonksiyonu” durumunda olduğunu, ikincisinin ise bu durumda olmadığını görmüştük. Şimdi de son ikisinin doğruluk-fonksiyonu durumunda olup olmadığını araştıralım.

İlk önce ‘ve’ eklemine göz önüne alalım. İmdi:

(7) A ve B

biçimindeki herhangi bir önermenin doğru olmasının “gerekli” şartı *hem A hem B bileşeninin doğru olmasıdır*. Nitekim A veya B önermelerinden (hiç olmazsa) birinin yanlışlığının (7) nin yanlışlığını gerektirdiği meydandadır. Buna göre, (7) nin bir doğruluk-fonksiyonu olması için, sözü geçen şartın bir de “yeterli” olması gerektiğini söyleyebiliriz. Oysa günlük dilde (7) biçiminde olup her iki bileşeni doğru olduğu halde, yanlış olan önermeler vardır. Nitekim ‘ve’ sözcüğü bazı hallerde ‘ve bundan sonra’ anlamında kullanılır. Oysa B önermesinin A önermesinin dile getirdiği bir olaydan önce meydana gelen bir olayı belirtmesi halinde, ‘B ve bundan sonra A’ önermesinin doğru, ‘A ve bundan sonra B’ önermesinin ise yanlış olacağı meydandadır. Buna göre, ‘ve’ nin ‘ve bundan sonra’ mânasına gelmesi halinde ‘A’ ile ‘B’ nin her ikisinin de doğru olduğu halde ‘A ve B’ önermesinin “yanlış” olabileceğini görüyoruz. Örneğin:

(8) Ahmet yemeğini yedi ve uykuya daldı

gibi bir önermeyi göz önüne alalım. Bu önermenin doğruluğu, bileşenleri olan:

(9) Ahmet yemeğini yedi

ile

(10) Ahmet uykuya daldı

önermelerinin her ikisinin doğruluğunu gerektirir. İmdi (9) ile (10) un doğru olduğunu kabul edelim. O zaman (belli bir durum ve bağlam içinde) (8) önermesinin doğru olması halinde bile:

(11) Ahmet uykuya daldı ve yemeğini yedi

önermesinin (Ahmedin bir uyurgezer olmaması şartıyla) yanlış olduğu meydandadır. Oysa (11) önermesi (7) biçiminde olup gerek A gerek B bileşeni doğrudur. Buna göre “ve” önerme-ekleminin (11) gibi bir öner-

menin bağlamı içinde “doğruluk-fonksiyonu durumunda olmadığını” söyleyebiliriz. Nitekim, böyle bir önermenin doğruluk-değerinin sadece bileşenlerinin doğruluk-değeri aracıyla belirlenemediğini gördük.¹

Öte yandan, (11) türünden bir önermenin “mantıksal-yapısı”nın doğrudan doğruya kendisi tarafından değil de, ($z_1 < z_2$ olmak üzere)

(12) Ahmet z_1 anında yemeğini yedi ve z_2 anında uykuya daldı

biçimindeki bir önerme yardımıyla dile getirildiği söylenebilir. Başka bir deyimle, (11) önermesini (12) nin “kısa” (elliptik) bir ifade şekli saymak mümkündür. (12) önermesinin doğruluk-değeri ise bileşenlerinin sırasına bağlı değildir. Nitekim, ‘Ahmet z_1 anında yemeğini yedi’ ile ‘Ahmet z_2 anında uykuya daldı’ bileşenlerinin doğru olması halinde; gerek

(12) önermesi, gerek

(13) Ahmet z_2 anında uykuya daldı ve z_1 anında yemeğini yedi

önermesi doğru olur. Böylece ‘ve’ sözcüğünün (12) (veya (13)) önermesinin bağlamı içinde “doğruluk-fonksiyonu” durumunda olduğunu görüyoruz.

Bununla birlikte ‘ve’ ekleminin çokluk doğruluk-fonksiyonu durumunda olduğunu da belirtmek gerek. Örneğin:

(14) İstanbul İzmir’den büyüktür ve Adana Bursa’dan büyüktür

önermesinin doğruluğunun “gerekli” ve “yeterli” şartı ‘İstanbul İzmir’den büyüktür’ önermesiyle ‘Adana Bursa’dan büyüktür’ önermesinin doğruluğundan ibaret olduğundan, ‘ve’ ekleminin böyle bir önermenin bağlamı içinde doğruluk-fonksiyonu durumunda olduğu görülüyor.

Öte yandan ‘ve’ sözcüğünün günlük dilde her zaman bir “önerme-eklemi” olarak kullanılmadığını da belirtmek gerek. Örneğin:

(15) Ali ve Veli arkadaşlırlar

önermesi, içinde ‘ve’ bağlacı geçmekle birlikte, molekül değil, atomsal bir önermedir. ‘Ve’ sözcüğü böyle bir bağlamda iki önermeyi değil, iki sözcüğü birbirine eklemektedir. Başka bir deyimle ‘ve’ sözcüğü (15) önermesinde bir “sözcük-eklemi” durumundadır. Buna karşılık:

(16) İstanbul ve İzmir Adana’dan büyüktür

önermesinin mantıksal yapısının

(17) İstanbul Adana’dan büyüktür ve İzmir Adana’dan büyüktür

biçimindeki bir önerme yardımıyla dile getirildiği gerekçesiyle, ‘ve’ sözcüğünün (16) bağlamında ‘İstanbul’ ile ‘İzmir’ sözcüklerini birbirine ekleyen bir “sözcük-eklemi” değil de, ‘İstanbul Adana’dan büyüktür’ önermesiyle ‘İzmir Adana’dan büyüktür’ önermesini birbirine ekleyen bir “önerme-eklemi” olduğunu öne sürebiliriz.

İmdi ‘ve’ sözcüğünün günlük dilde birçok değişik anlamlarda kullanıldığını göz önünde tutarak, bu sözcüğün “*doğruluk-fonksiyonu durumundaki bir önerme-eklemi*” şeklinde geçtiği halleri ötekilerinden ayırdetmek amacıyla, özel bir sembolün kullanılması faydalı olur. İşte biz modern mantıkçıların çoğunu izleyerek ‘.’ (nokta) sembolünü kullanacağız. Buna göre, (12), (13), (14) ve (17) önermelerini sırasıyla şöyle dile getirebiliriz:

(18) (Ahmet z_1 zamanında yemeğini yedi) . (Ahmet z_2 zamanında uykuya daldı)

(19) (Ahmet z_2 zamanında uykuya daldı) . (Ahmet z_1 zamanında yemeğini yedi)

(20) (İstanbul İzmir’den büyüktür) . (Adana Bursa’dan büyüktür)

(21) (İstanbul Adana’dan büyüktür) . (İzmir Adana’dan büyüktür)

Buna karşılık (8) önermesinin

(22) (Ahmet yemeğini yedi) . (Ahmet uykuya daldı),

(11) önermesinin ise

(23) (Ahmet uykuya daldı) . (Ahmet yemeğini yedi)

biçiminde dile getirilmesi yanlış olur. Nitekim (22) ile (23) eşdeğer olduğu halde (8) ile (11) eşdeğer değildir. (8) in doğru olması halinde (11) yanlıştır; oysa (22) ile (23) ün her ikisi de doğru olur. Öte yandan, ‘.’ sembolünü bir “önerme-eklemi” olarak tanımladığımızdan, iki sözcüğün birbirine eklenmesi için kullanılmaması gerekir. Böylece (15) önermesinin

(Ali) . (Veli) arkadaşır

biçiminde dile getirilmesi yasaya aykırı olur. Nitekim böyle bir deyimî mânasız saymamız gerekir.

Görüldüğü gibi, ‘.’ sembolünün kaplamı ‘ve’ sözcüğünün kaplamından (bir bakıma) daha dardır. Ancak, ‘.’ sembolü yalnız ‘ve’ sözcüğünün karşılığı olarak değil de, bazı bağlamlarda aynı anlama gelen ‘hem ...hem’, ‘gerek ... gerek’, ‘ama’ gibi sözcüklerin, ‘ip’, ‘ip’ gibi “sonek”lerin;

“virgül”, “noktalı virgül”, “nokta” gibi noktalama işaretlerinin karşılığı olarak da kullanılır. Genel olarak, günlük dile ait herhangi bir önermeyi sembolik dile çevirmek istediğimiz zaman, böyle bir önermenin içinde geçen doğruluk-fonksiyonu durumunda olan bir ‘ve’ sözcüğü ile değiş-tokuş edilebilen herhangi bir deyimın yerine ‘ . ’ sembolünü kullanmak gerek. Örneğin :

(24) Gök mavi, hava ılık, heryer yemyeşildi
önermesi

(25) Gök mavi idi ve hava ılıktı ve heryer yemyeşildi
biçimindeki bir önermeye çevrilebildiğinden, sembolik dilde:

(26) (Gök mavi idi) . (Hava ılıktı) . (Heryer yemyeşildi)
şeklinde dile getirilmelidir. Aynı şekilde:

(27) Ahmet Ankara’ya gidip annesini görecek
ile

(28) Ahmet Ankara’ya gidecek, ama Ali İstanbul’a gelecek
önermeleri sırasıyla:

(29) (Ahmet Ankara’ya gidecek) . (Ahmet annesini görecek)

(30) (Ahmet Ankara’ya gidecek) . (Ali İstanbul’a gelecek)
biçimine çevrilir.

İmdi, gerek (doğruluk-fonksiyonu durumundaki bir önerme-eklemi olarak kullanılan) ‘ve’ sözcüğü, gerek ‘ . ’ sembolü iki ayrı önermeyi *birlikte evetleme*ğe yarıyor. Daha açık olarak, ‘A’ ve ‘B’ gibi iki önermeyi ayrı ayrı evetliyecek yerde, (7) veya

(31) A . B

gibi bir tek önermeyi evetliyebiliriz. Buna göre, ‘ . ’ sembolüne “*birlikte-evetleme eklemi*”; (31) biçimindeki bir önermeye (veya daha doğrusu, böyle bir önermenin evetlenmesine) de bir “*birlikte-evetleme*” diyeceğiz ².

İmdi, “*birlikte-evetleme eklemi*” ile bir doğruluk-fonksiyonu durumundaki bir önerme-eklemi olarak kullanılan ‘ve’ sözcüğü arasında şöyle önemli bir ayrım vardır: ‘Ve’ sözcüğü *günlük dilde* hiç bir zaman aralarında bir ilgi olmıyan herhangi iki önermenin “birlikte evetlenmesi” için kullanılmaz. Örneğin:

(32) Kar beyazdır ve bir üçkenin üç açısının toplamı 180° ye eşittir

türünden bir önermenin, sözdizimi açısından düzgün bir deyiş şekli olmakla birlikte, yersiz ve mânasız sayılacağı meydandadır. Oysa, sembolik mantıkta böyle bir önermeyi veya sembolik karşılığı olan:

- (33) (Kar beyazdır) · (Bir üçkenin üç açısının toplamı 180° ye eşittir)

önermesini mânalı sayıyoruz. Genel olarak, ‘A’ ile ‘B’ nin her ikisi mânalı olmak şartıyla, (7) veya (31) önermesinin mânalı olduğunu kabul edeceğiz. Günlük dilde ise, (7) biçimindeki bir önermenin mânalı olması ‘A’ ile ‘B’ bileşenleri arasında (belirttikleri olayların bitişikliği, benzerliği, karışıklığı, v.b.g.) belli bir ilginin bulunmasına bağlıdır.

‘Veya’ eklemine gelince: bu sözcüğün de (‘ve’ gibi) bazı hallerde doğruluk-fonksiyonu durumunda olduğunu, ama bazı hallerde öyle olmadığını gösterebiliriz. Ancak bunu göstermeden önce, ‘veya’ sözcüğünün günlük dilde iki ayrı anlamda geçtiğini belirtmek gerek. Nitekim:

- (34) A veya B

biçimindeki herhangi bir önermeyi göz önüne alalım. Böyle bir önermenin “doğruluğu” için “gerekli” şart, bu önermenin bileşenleri durumunda olan ‘A’ ile ‘B’ önermelerinden *hiç olmazsa birinin “doğru” olmasıdır*. Bu şartı şöyle bir çizelge yardımıyla de dile getirebiliriz:

(35)	A veya B	A	B
	D	D	
	D		D

Burada ‘D’ harfini ‘doğru’ sözcüğünün sembolik bir kısaltması olarak kullanıyoruz. Çizelgemiz “‘A veya B’ doğru ise, ‘A’ doğru veya ‘B’ doğrudur”, yani “‘A veya B’ nin doğruluğunun gerekli şartı, ‘A’ nın veya ‘B’ nin doğru olmasıdır” anlamına gelen bir diyagram olarak yorumlanmalıdır. Çizelgenin yatay çizgisinin altındaki iki sıra, ‘A veya B’ önermesinin doğru olması hallerini “tüketici” bir şekilde temsil eder. Başka bir deyimle, bu önermenin doğru olması ancak bu iki halden hiç olmazsa birinin gerçekleşmesine bağlıdır. Hiç birinin gerçekleşmemesi, yani ne ‘A’ önermesinin ne de ‘B’ önermesinin “doğru” olmaması halinde, ‘A veya B’ önermesi de “doğru” değildir. Bu da, (her önermenin ya “doğru”, ya da “yanlış” olduğunu kabul ettiğimizden (iki-değerli mantık!)) “hem ‘A’ hem ‘B’ yanlış ise ‘A veya B’ yanlış olur” anlamına gelir. Bu durumu ise:

(36)	A	B	A veya B
	Y	Y	Y

biçimindeki bir çizelge yardımıyla dile getirebiliriz. Burada 'Y' harfini 'yanlış' sözcüğünün sembolik kısaltması olarak kullanıyoruz.

Örnek olarak :

(37) Ali gelecek veya Veli gidecek
önermesini göz önüne alalım. Bu önermenin bileşenleri

(38) Ali gelecek
ile

(39) Veli gidecek
önergelerinden ibaret olduğundan, (35) ve (36) çizelgeleri sırasıyla:

(40)	Ali gelecek veya Veli gidecek	Ali gelecek	Veli gidecek
	D	D	
	D		D

(41)	Ali gelecek	Veli gidecek	Ali gelecek veya Veli gidecek
	Y	Y	Y

biçimine girer: (37) doğru ise, (38) veya (39) doğrudur; (38) ve (39) yanlış ise, (37) yanlıştır.

(35) çizelgesinde 'A' nın doğru olması halinde 'B' nin doğruluk değeri, 'B' nin doğru olması halinde de 'A' nın doğruluk-değeri belirtilmemiştir. Şimdi ise bu doğruluk-değerlerinin ne olabileceğini araştıralım. İşte bu konuda iki şık mümkündür:

- (i) 'A veya B' doğru ise, 'A' ve 'B' nin her ikisinin de doğru olması mümkündür.
- (ii) 'A veya B' doğru ise, 'A' ile 'B' nin her ikisinin birden doğru olması mümkün değildir.

(i) şıkkını :

(42)	A veya B	A	B
	D	D	D, Y
	D	D, Y	D

veya her sırada her önermenin yalnız bir tek doğruluk-değeri taşımasını sağlamak amacıyla:

(43)	A veya B	A	B
	D	D	Y
	D	Y	D
	D	D	D

gibi bir çizelge ile dile getirebiliriz. Böyle bir çizelge:

“‘A veya B’ doğru ise, ‘A’ doğru veya ‘B’ doğru veya hem ‘A’ hem ‘B’ doğrudur”

şeklinde yorumlanmalıdır.

(ii) şıkkına gelince; bu şıkkı da :

(44)	A veya B	A	B
	D	D	Y
	D	Y	D

biçimindeki bir çizelge yardımıyla dile getirebiliriz. Nitekim söz konusu şıkta ‘A veya B’ nin doğru olması halinde, ‘A’ ile ‘B’ nin her ikisi birden doğru olamadığından; ‘A’ doğru ise ‘B’ yanlış, ‘B’ doğru ise ‘A’ yanlış olur. Öte yandan, hem ‘A’ hem ‘B’ doğru ise, ‘A’ veya ‘B’ doğru değil, dolayısıyla de “yanlış”tır. Buna dayanarak (36) çizelgesini (ii) şıkkında şöyle genişletebiliriz:

(45)	A	B	A veya B
	Y	Y	Y
	D	D	Y

Böylece ‘veya’ ekleminin biri (43) ve (36) çizelgeleri, ötekisi de (44) ve (45) çizelgeleriyle belirtilebilen iki ayrı anlamı olduğunu görüyoruz. Örneğin: ‘veya’ sözcüğü:

(46) Kitaplarımı X ten veya Y den satın alacağım gibi bir önermede (i) mânasında kullanılmaktadır. Nitekim, kitaplarımı hem X ten hem de Y den satınalmam (46) önermesini yanlışlamaz. Böyle bir önermeyi daha belirtik olarak:

(47) Kitaplarımı X ten veya Y den, ya da her ikisinden satınalacağım biçiminde dile getirebiliriz.

Birçok hallerde ise ‘veya’ sözcüğünün (i) mânasında mı, yoksa (ii) mânasında mı kullanıldığı belli değildir. Hattâ birçok hallerde bu iki mânadan hangisinde kullanıldığının belirlenmesi imkânsızdır. Örneğin: matematikte ‘ $x \leq y$ ’ şeklinde kısaltılan:

(48) $x < y$ veya $x = y$

deyimini göz önüne alalım. x ile y herhangi iki sayı oldukça, hem x ’in y ’den küçük olması, hem de x ’in y ile özdeş olması imkânsız olduğundan, ‘veya’ sözcüğünün (48) de açıkça (ii) mânasında geçtiği sanılabilir. Ama (*Quine*’ın belirttiği gibi³⁾ durum gerçekte hiç de böyle değildir. Tam tersine, ‘veya’ sözcüğünün (48) de (i) mânasında mı, yoksa (ii) mânasında mı kullanıldığının tesbit edilmesi imkânsızdır. Nitekim bu iki mânâ arasındaki tek ayrım *her iki bileşenin birden “doğru”* olması halinde ortaya çıkar. Oysa (48) halinde her iki bileşenin birden “doğru” olması imkânsız olduğundan, ‘veya’ sözcüğünün hangi mânada kullanıldığı “denetlenemez”. (‘Veya’ sözcüğünün (ii) mânasında kullanıldığının tesbit edilmesi için hem ‘ $x < y$ ’, hem de ‘ $x = y$ ’ nin doğru olması halinde (48) in yanlış olduğunu göstermemiz gerekir. Hem ‘ $x < y$ ’ hem de ‘ $x = y$ ’ doğru olamayacağından bunun imkânsız olduğu meydandadır).

Aynı şekilde,

(49) $s \text{ P dir}$ veya $s \text{ P değildir}$

biçimindeki bir önermede ‘veya’ sözcüğünün (i) mânasında mı, yoksa (ii) mânasında mı geçtiğinin tesbit edilmesi imkânsızdır. Nitekim ‘veya’ nın böyle bir bağlam içinde (ii) mânasında geçmesi, hem ‘ $s \text{ P dir}$ ’ hem de ‘ $s \text{ P değildir}$ ’ önermelerinin doğru olması halinde (49) un tümce yanlış olması suretiyle ortaya çıkabilir.

‘Veya’ sözcüğünün (ii) mânasında açıkça kullanıldığı haller pek seyrek. Örneğin: bir çocuğun babasından kendisini önce pastahaneye, sonra da sinemaya götürmesini istediğini, babasının ise, hayırlıyı bir eda ile :

(50) Pastahaneye (gideceğiz) veya sinemaya gideceğiz

şeklinde cevap verdiğini düşünelim. Baba bu cevabıyla çocuğunu hem pastahaneye hem de sinemaya götürmiyeceğini belirtmek istediğinden; sonunda çocuğunu (yalvarma ve ağlamalarına dayanamayarak) hem pastahaneye hem de sinemaya götürmesi halinde, kendi kendisini yanlışlamış olacaktır. Başka bir deyimle, (50) önermesi 'pastahaneye gideceğiz' ile 'sinemaya gideceğiz' bileşenlerinden her ikisinin doğru çıkması halinde yanlış olur. (48) ve (49) örneklerinin tersine, bu örnekte her iki bileşenin bir arada doğru olması mümkün olduğundan (50) önermesinde 'veya' sözcüğünün (ii) mânasında kullanıldığının tesbit edilmesi mümkün oluyor. ⁴

İmdi, yanlış anlamaya yol açmamak amacıyla, 'veya' sözcüğünün (i) mânasında kullanıldığı zaman (47) de olduğu gibi '*ya da her ikisi*' ifadesi ile; (ii) mânasında kullanıldığı zaman da '*ama her ikisi değil*' ifadesi ile tamamlanması faydalı olur. Buna göre (7) türünden bir önerme (i) halinde:

(51) A veya B ya da her ikisi
biçimindeki;

(ii) halinde ise:

(52) A veya B ama her ikisi değil
biçimindeki bir önermeye çevrilebilir.

Öte yandan, '*veya*' sözcüğünün çokluk (i) mânasında (başka bir deyimle '*ve/ya*' - 'and/or' - anlamında) kullanıldığını göz önünde tutarak, bu sözcüğü bilimsel ve teknik yazılarda yalnız (i) mânasında kullanmak yoluna gidebiliriz. 'Veya' sözcüğünün (ii) mânasında geçtiği önermeler yeline ise '*ya ... ya ...*' deyiş şeklini kullanarak,

(53) Ya A ya B
biçimindeki önermelere başvurmamız mümkündür. Örneğin: (50) önermesini

(54) Ya pastahaneye gideceğiz ya sinemaya (gideceğiz)
gibi bir önermeye çevirebiliriz.

Gerçekten de '*ya ... ya ...*' ifade şekli Türkçede hemen hemen her zaman 'veya' ekleminin (ii) mânasının karşılığı olarak kullanılır. Başka bir deyimle, (53) biçimindeki bir önermenin doğruluğu halinde, hem 'A' hem 'B' bileşeninin doğru olması imkânsızdır. Bu durumu aşağıdaki çizelgeler yardımıyla dile getirebiliriz:

(55)	Ya A ya B	A	B
	D	Y	D
	D	D	Y

(56)	A	B	Ya A ya B
	Y	Y	Y
	D	D	Y

Biz de bu ikinci yolu seçerek, bundan böyle (başka şekilde belirtilmediği hallerde) ‘veya’ sözcüğünü yalnız (i) mânasında kullanıp bu sözcüğün (ii) mânası yerine hep ‘ya ... ya ...’ ifade şeklini kullanacağız.

Şimdi de ‘veya’ ekleminin *doğruluk-fonksiyonu durumunda* geçtiği hallerle bu durumda olmadığı halleri inceleyelim. İmdi ‘veya’ sözcüğünün ((i) mânasında) ‘A veya B’ gibi bir önermede *doğruluk-fonksiyonu* durumunda olması için, ‘A’ ile ‘B’ bileşenlerinden hiç olmazsa birinin doğruluğu söz konusu ‘A veya B’ önermesinin doğruluğunun “yeterli” şartı olmalıdır. Bunu da:

(57)	A	B	A veya B
	D	D	D
	D	Y	D
	Y	D	D

biçimindeki bir çizelge yardımıyla dile getirebiliriz. (Bu çizelge: “‘A’ doğru ve ‘B’ doğru veya ‘A’ doğru ve ‘B’ yanlış, ya da ‘A’ yanlış ve ‘B’ doğru ise, ‘A veya B’ doğrudur” anlamına gelir).

Buna dayanarak, ‘A veya B’ önermesinin *doğru olmaması* halinde, ‘A’ ile ‘B’ bileşenlerinden *hiç birinin doğru olmaması gerektiği* sonucunu çıkarabiliriz. Bunu da “‘A veya B’ yanlış ise, hem ‘A’ hem ‘B’ yanlıştır” biçimindeki bir önerme veya:

(58)	A veya B	A	B
	Y	Y	Y

gibi bir çizelge şeklinde dile getirebiliriz.

İmdi (36), (43), (57) ve (58) çizelgelerini şu iki çizelgede birleştire-

biliriz: (Her sıranın sağında, bu sıranın türetilmiş olduğu önceki çizelge-
nin numarasını yazıyoruz).

(59)	A	B	A veya B	
	D	D	D	(57)
	D	Y	D	(57)
	Y	D	D	(57)
	Y	Y	Y	(36)

(60)	A veya B	A	B	
	D	D	D	(43)
	D	D	Y	(43)
	D	Y	D	(43)
	Y	Y	Y	(58)

İşte, ‘veya’ sözcüğünün (59) ve (60) çizelgeleri yardımıyla belirlenen an-
lamda doğruluk-fonksiyonu durumundaki bir önerme-eklemi olarak kulla-
nıldığı hallerde, bu sözcüğün yerine (modern mantıkçıları izleyerek) ‘v’
sembolünü kullanacağız. Söz konusu ‘v’ sembolüne “*ayrıklık-eklemi*”;

(61) $A \vee B$
biçimindeki bir önermeye de bir “*ayrıklık*” diyeceğiz.³

Aynı şekilde, ‘ya ... ya ...’ deyiş biçiminin *doğruluk-fonksiyonu* duru-
mundaki bir önerme-eklemi olması şartını ((55) ve (56) çizelgelerini göz
önünde tutarak) :

(61)	A	B	ya A ya B
	D	D	Y
	D	Y	D
	Y	D	D
	Y	Y	Y

(62)	ya A ya B	A	B
	Y	D	D
	D	D	Y
	D	Y	D
	Y	Y	Y

çizelgeleri yardımıyla dile getirebiliriz. (61) ve (62) çizelgelerinin belirlediği doğruluk-fonksiyonu durumundaki önerme-eklemini ‘ $\neq$ ’ sembolü ile dile getirip buna “*bağdaşmaz-ayrıklık eklemi*” diyeceğiz. Buna göre, ‘veya’ sözcüğünün (ii) mânasında doğruluk-fonksiyonu durumunda geçtiği ‘A veya B’ gibi önermelerle, ‘ya ... ya ...’ ifadesinin doğruluk-fonksiyonu durumunda geçtiği ‘ya A ya B’ gibi önermeleri:

(63) $A \neq B$

biçimindeki bir önerme şeklinde dile getireceğiz. (63) biçimindeki bir önermeye bir “*bağdaşmaz-ayrıklık*” diyeceğiz.⁶

Örnek olarak aşağıdaki önermeleri göz önüne alalım:

(64) Yarın Ankara’ya veya Konya’ya gideceğim

(65) Yarın ya Ankara’ya gideceğim ya Konya’ya

(66) Bu hasta hemen ameliyat edilecek veya kısa bir süre içinde ölecek

(67) Bu hasta ya hemen ameliyat edilecek ya da kısa bir süre içinde ölecek.

İmdi, (64) veya (65) önermesini Ankara’ya mı, yoksa Konya’ya mı gideceğime henüz karar vermediğim bir anda evetlediğimi⁷ kabul edelim. (64) önermesini evetlemekle (yarın) *hem Ankara’ya hem Konya’ya* gitmeyeceğimi öne sürmüş olmam. Buna karşılık, (65) önermesini evetlemekle, (yarın) *hem Ankara’ya hem Konya’ya* gitmeyeceğime bir çeşit söz vermiş oluyorum. Başka bir deyimle, (64) önermesini evetleyip her iki kente gidecek olursam, hiç de yalan söylemiş sayılmam; buna karşılık, (65) önermesini evetledikten sonra kentlerin her ikisine uğramam beni yalancı çıkarır. Öte yandan, gerek (64) gerek (65) önermesinin “*doğruluk-fonksiyonu* durumunda” olduğunu gösterebiliriz. Nitekim, (64) önermesini evetledikten sonra, ertesi gün Ankara’ya, veya Konya’ya ya da her iki-

sine gitmem iddiamı doğrular. (65) önermesini evetlemem halinde ise, Konya'ya gitmeyip Ankara'ya gitmem, veya Ankara'ya gitmeyip Konya'ya gitmem iddiamı doğrular. Buna göre, (64) ün bir "ayrıklık", (65) in ise bir "bağdaşmaz-ayrıklık" olduğunu görüyoruz. Dolayısıyla (64) ü:

(68) (Yarın Ankara'ya gideceğim) v (yarın Konya'ya gideceğim) biçimine; (65) i ise:

(69) (Yarın Ankara'ya gideceğim) ≠ (Yarın Konya'ya gideceğim) biçimine çevirebiliriz.

(66) ile (67) önermelerine gelince: bu önermelerden birinin veya ötekinin söz konusu hastaya bakan bir hekim tarafından evetlendiğini kabul edelim. Hekim bu önermelerden herhangi birisini evetlemekle, hastanın ameliyat edilmemesi halinde kısa bir süre içinde öleceğine dair inancını belirtmiş olur. Ancak, hekim (66) yı evetlemekle, ameliyat yapılsa bile hastanın (kısa bir süre içinde) ölmeyeceğini hiç de öne sürmediği halde; (67) yi evetlemekle böyle bir iddiada bulunmuş olurdu. Başka bir deyimle, hastanın ameliyat edildikten az sonra (hiç bir kazaya uğramadan) ölmesi (66) önermesini yanlışlamadığı halde, (67) önermesini yanlışlar.

İmdi, ne (66) nın ne de (67) nin bir doğruluk-fonksiyonu olmadığını gösterebiliriz. Nitekim, hastanın (hemen) ameliyat edilmeyip kısa bir süre içinde öldüğünü düşünelim. O zaman bileşenlerden biri ('hasta hemen ameliyat edilecek') "yanlış", ötekisi de ('hasta kısa bir süre içinde ölecek') "doğru" olur. Bu da gerek (66) yı gerek (67) yi -bunların doğruluk-fonksiyonu olması halinde- doğrular. Gerçekte ise böyle bir durum hekimin iddiasını doğrulamak için hiç de yeterli değildir. Böyle bir iddiayı doğrulayabilmek için, ölümün "*neden*"inin ameliyatla giderilmek istenilen hastalık faktöründen ibaret olduğunu tesbit etmek gereklidir. Buna göre, hastanın ameliyat olmadan ölmesi halinde, otopsi sonucunda ameliyatla giderilmek istenilen faktörün hiç de öldürücü olmadığı, ölümün bambaşka bir nedene bağlı olduğu ortaya çıkarsa, hekimimizin iddiası doğrulanmak şöyle dursun, açıkça *çürütülmüş* olur. *

Böylece, "*veya*" sözcüğünün (66) önermesinde; '*ya ... ya ...*' ifadesinin de (67) önermesinde *doğruluk-fonksiyonu durumunda olmadığını* görüyoruz. Dolayısıyla, (66) nın:

(70) (Bu hasta hemen ameliyat edilecek) v (bu hasta kısa bir süre içinde ölecek)

biçiminde; (67) nin de:

(71) (Bu hasta hemen ameliyat edilecek) $\neq$ (bu hasta kısa bir süre içinde ölecek)

biçiminde dile getirilmesi yanlış olur. Başka bir deyimle, bir yandan (66) ile (70), öbür yandan da (67) ile (71) birbiriyle *anlamdaş sayılmaması gereken önermeler* durumundadır. (70) önermesinin doğruluk-değeri ile bileşenlerinin doğruluk-değerleri arasındaki bağlantılar (59) ve (60) çizelgeleriyle; (71) önermesinin doğruluk-değeri ile bileşenlerinin doğruluk-değerleri arasındaki bağlantılar da (61) ve (62) çizelgeleriyle dile getirilebilir. Buna karşılık (66) önermesinin doğruluk-değeri ile bileşenlerinin doğruluk-değerleri arasındaki “formel” bağlantıları şu çizelgelerle belirtebiliriz: (‘A’ harfini ‘bu hasta hemen ameliyat edilecek’ önermesinin, ‘B’ harfini de ‘bu hasta kısa bir süre içinde ölecek’ önermesinin kısaltması olarak kullanıyoruz)

(72)	A	B	A veya B
	D	D	?
	D	Y	?
	Y	D	?
	Y	Y	Y

(73)	A veya B	A	B
	D	D	D
	D	D	Y
	D	Y	D
	Y	D	D
	Y	D	Y
	Y	Y	D
	Y	Y	Y

(72) çizelgesinin ilk üç satırında geçen soru-işaretleri, ‘A’ ile ‘B’ bileşenlerinin doğruluk-değerinin ‘A veya B’ önermesinin doğruluk-değerini belirlemeğe yetmediğini dile getirir. (73) çizelgesi ise, ‘A veya B’ önermesinin hem ‘A’ hem ‘B’ nin yanlışlığı halinde “*yanlış*” olduğunu; bütün öteki hallerde ise “*belirsiz*” olduğunu, yani salt ‘A’ ile ‘B’ nin doğruluk-

değerleri yardımıyla belirtilmediğini gösterir. Örneğin: 'A' ile 'B' nin her ikisinin "doğru" olması halinde, 'A veya B' önermesi "doğru" olabildiği gibi (1.ci sıra), "yanlış" ta olabilir (4.cü sıra).

Aynı şekilde, (67) önermesinin doğruluk-değeri ile bu önermenin bileşenlerinin doğruluk-değerleri arasındaki formel bağlantıları aşağıdaki çizelgelerle dile getirebiliriz:

(74)	A	B	ya A ya B
	D	D	Y
	D	Y	?
	Y	D	?
	Y	Y	Y

(75)	ya A ya B	A	B
	D	D	Y
	D	Y	D
	Y	D	D
	Y	D	Y
	Y	Y	D
	Y	Y	Y

İmdi, 've' sözcüğü ile 'birlikte-evetleme' işareti için de bu türlü çizelgelerin kullanılması mümkündür. Nitekim, 've' sözcüğünün 'A ve B' gibi bir önermede *doğruluk-fonksiyonu* durumundaki bir önerme-eklemi olması şartını şu çizelgelerle dile getirebiliriz:

76)	A	B	A ve B
	D	D	D
	D	Y	Y
	Y	D	Y
	Y	Y	Y

(77)	A ve B	A	B
	D	D	D
	Y	D	Y
	Y	Y	D
	Y	Y	Y

Örneğin: 'A ve B' olarak (12) önermesini, 'A' olarak 'İstanbul İzmir'den büyüktür', 'B' olarak da 'Adana Bursa'dan büyüktür' önermelerini seçebiliriz.

Öte yandan, (11) önermesi gibi 've' sözcüğünün içinde doğruluk-fonksiyonu durumunda olmıyan bir önerme-eklemi şeklinde geçtiği 'A ve B' biçimindeki bir önermenin doğruluk-değeri ile bileşenlerinin doğruluk-değerleri arasındaki formel bağlantıları şu çizelgelerle dile getirebiliriz:

(78)	A	B	A ve B
	D	D	?
	D	Y	Y
	Y	D	Y
	Y	Y	Y

(79)	A ve B	A	B
	D	D	D
	Y	D	D
	Y	D	Y
	Y	Y	D
	Y	Y	Y

İmdi herhangi bir önermenin karşılığı olan iki çizelgeden her birinin ötekisinden türetilmesi mümkündür: (59) ile (60), (61) ile (62), (72) ile (73), (74) ile (75), (76) ile (77), (78) ile (79) çizelgeleri birbirinden türetilir. Buna göre, her önerme-eklemini *bir tek çizelge* yardımıyla belirtmek mümkün olur. Örneğin: birlikte-evetleme işaretinin karşılığı olan

(76) ile (77) çizelgelerini göz önüne alalım. (76) yı (77) den, (77) yi de (76) dan türetebildiğimizden, bu iki çizelgeden yalnız biriyle yetinebiliriz. Ancak (76) nın (77) ye göre şöyle bir üstünlüğü olduğunu belirtmek gerek: (76) çizelgesinin sol yanı 'A' ile 'B' bileşenlerinin bir arada taşınması mümkün olan bütün doğruluk-değerlerini "tüketici" bir şekilde dile getirir. Nitekim 'A' ve 'B' gibi iki önerme halinde, mümkün olan bütün şıkların

- (82) 'A' doğrudur ve 'B' doğrudur;
 'A' doğrudur ve 'B' yanlıştır;
 'A' yanlıştır ve 'B' doğrudur;
 'A' yanlıştır ve 'B' yanlıştır

hallerinden ibaret olduğu meydandadır. (82) de geçen dört şıktan birinin gerçekleşmesi zorunlu olduğu gibi, bu şıklardan birinin gerçekleşmesi geri kalan üç şıkkın her birini imkânsız kılar. (76) çizelgesinin sağ yanı ise, sözü geçen dört şıktan her biri halinde 'A ve B' önermesinin taşıdığı doğruluk-değerini belirtir. Buna göre, (76) çizelgesini matematiksel anlamda bir "fonksiyon" şeklinde yorumlamak mümkündür. Nitekim 'A ve B' ifadesini 'A' ve 'B' gibi iki "değişken"li bir fonksiyon; 'D' ve 'Y' nin de gerek 'A' ve 'B' değişkenlerinin, gerek 'A ve B' deyiminin değerleri olduğunu düşünelim. 'A ve B' deyimini matematiksel kullanımlara uygun olarak 'f(A,B)' biçiminde dile getirelim. O zaman (76) çizelgesini:

- (83) $f(D,D) = D$
 $f(D,Y) = Y$
 $f(Y,D) = Y$
 $f(Y,Y) = Y$

biçiminde dile getirebiliriz. 'A' ile 'B' değişkenlerinin değerler-alanını, yalnız 'D' ve 'Y' den ibaret saydığımızdan, (83) söz konusu 'f' fonksiyonunu belirlemeğe yeterlidir.

İmdi, (76) türünden çizelgelere "*doğruluk - çizelgeleri*" (truth tables) denir. Her doğruluk-fonksiyonuna karşılık böyle bir doğruluk-çizelgesi vardır. (76) "*birlikte-evetleme*"nin doğruluk-çizelgesi olduğu gibi, (59) "*ayrıklık*"ın, (61) de "*bağdaşmaz-ayrıklık*"ın doğruluk-çizelgesi durumundadır. İlerde her doğruluk-çizelgesine karşılık bir ve yalnız bir tek ("doğruluk-fonksiyonu" durumundaki) önerme-eklemi bulunduğunu göstereceğiz.

(72), (74) ve (78) çizelgelerine gelince: bunları "eksik" doğruluk-çizelgeleri olarak yorumlayabiliriz. Böylece, doğruluk-fonksiyonu duru-

munda olmıyan her önerme-eklemine karşılık bir “eksik doğruluk-çizelgesi” bulunduğunu görüyoruz.

Şimdiye kadar hep “2-li önerme-eklemleri”nin doğruluk-çizelgelerini göz önüne aldık. Oysa her “1-li” önerme-ekleminin de belli bir doğruluk-çizelgesi vardır. Örneğin: sözü geçen ‘değil’ ile ‘mümkün’ sözcüklerini göz önüne alalım. ‘A’ herhangi belli bir önerme oldukta,

(84) A değil

önermesinin doğruluğunun *gerekli ve yeterli* şartı ‘A’ bileşeninin yanlış olmasıdır. Başka bir deyimle, (84) doğru ise, ‘A’ yanlıştır; ‘A’ doğru ise, (84) yanlıştır. Dolayısıyla (84) doğru değil, yani yanlış ise, ‘A’ doğru olur. ‘A’ doğru değil, yani yanlış ise, (84) doğru olur. Bu durumu ise şu iki çizelge yardımıyla dile getirebiliriz:

(85)

A	A değil
D	Y
Y	D

(86)

A değil	A
D	Y
Y	D

(85) ile (86) çizelgeleri birbirinden türetilbildiğine göre, bunlardan yalnız biriyle yetinebiliriz. (85) çizelgesi ise $f(A)$ biçiminde dile getirilebilen *bir değişkenli* bir fonksiyon şeklinde yorumlanabilir. Nitekim böyle bir f fonksiyonu (85) gereği:

(87) $f(D) = Y$
 $f(Y) = D$

şartlarıyla belirlenebilir.

İşte (85) çizelgesi ‘*değil*’ ekleminin “*doğruluk-çizelgesi*” durumundadır. Bu çizelgenin sol yanı ‘A’ gibi bir önermenin taşıyabildiği doğruluk - değerleri açısından mümkün olan bütün şıkları belirtir. Nitekim, (2-değerli mantık’ta) herhangi bir önermenin ya “doğru” ya “yanlış” olması gerektiğinden, bu şıkların:

(88) ‘A’ doğrudur;
‘A’ yanlıştır

hallerinden ibaret olduğu meydandadır. Herhangi bir önerme (88) hallerinden birinde ve yalnız birindedir. Başka bir deyimle, her önerme doğru-

dur veya yanlışdır, ama hiç bir zaman hem doğru hem yanlış değildir. ("Her önerme ya doğru, ya yanlışdır").

Öte yandan 'değil' sözcüğü gibi bir "1-li önerme-eklemi" olan '*mümkün*' sözcüğünün karşılığı olan çizelgeleri şöyle kurabiliriz: 'A' doğru ise :

(89) A mümkün

önermesi de doğru olur. Nitekim doğru bir önermenin imkânsız bir durumu dile getiremeyeceği meydandadır. Dolayısıyla, (89) yanlış ise 'A' da yanlışdır. (Yani 'A' imkânsız bir durumu dile getiriyorsa, yanlış bir önerme olur). Öte yandan, 'A' nın yanlış olması halinde (89) önermesinin doğru mu, yoksa yanlış mı olduğu ('A' nın içeriğinden bağımsız olarak) belli değildir. Buna göre, (89) un doğru olması halinde 'A' nın doğru olması da, yanlış olması da mümkündür. Bu durumu aşağıdaki çizelgelerle dile getirebiliriz:

(90)

A	A mümkün
D	D
Y	?

(91)

A mümkün	A
D	D
D	Y
Y	Y

(91) çizelgesini :

(92)

A mümkün	A
D	?
Y	Y

biçiminde de dile getirmek mümkündür.

(90) ile (91) ya da (92) çizelgeleri birbirinden türetilir. (90) çizelgesi 'mümkün' eklemının "eksik doğruluk-çizelgesi" durumundadır.

(‘Mümkün’ sözcüğü doğruluk-fonksiyonu durumunda olmıyan bir önerme-eklemi olduğundan, doğruluk-çizelgesinin “eksik” olması gerekir).

‘Değil’ sözcüğünün, doğruluk-çizelgesi (85) ten ibaret olan doğruluk-fonksiyonu durumundaki bir “1-li önerme-eklemi” şeklinde yorumlanması, (84) önermesinin ‘A’ önermesinin “hayırlanması” (negation) anlamında kullanılmasına bağlıdır. Oysa böyle bir “hayırlama” işleminin bazı hallerde başka şekilde dile getirildiğini, ‘değil’ sözcüğünün de bazan bir önermenin “hayırlama”sından başka bir anlamda kullanıldığını göz önünde tutmamız gerek. Örneğin:

(93) Bütün insanlar ölümlüdür
önermesinin hayırlanması hiç te:

(94) Bütün insanlar ölümlü değildir
önermesinin evetlenmesi anlamına gelmez. Oysa ‘A’ olarak (93) önermesini seçtiğimizde, (94) ün ‘A değil’ yani (84) biçiminde olduğu meydandadır. Gerçekte (93) önermesini hayırlamak için (94) ü değil de, (84) biçiminde olmıyan:

(95) Bazı insanlar ölümlü değildir
biçimindeki bir önermeyi evetlemek gerek.

İşte ‘A değil’ biçimindeki bir önermede ‘*değil*’ sözcüğünün “hayırlama” şeklinde kullanılması, yani ‘A değil’ önermesini evetlememizin ‘A’ önermesini hayırlamamız anlamına gelmesi halinde (öteki kullanılışlarından ayırdetmek amacıyla) özel bir sembol kullanılır. Böyle bir sembol olarak (modern mantıkçıların çoğunu izleyerek) ‘~’ işaretini kullanacağız. ‘~’ sembolüne “*hayırlama-eklemi*”;

(96) ~A
biçimindeki bir önermeye de “*hayırlama*” (negation) diyeceğiz. Örneğin
(95) önermesini:

(96) ~ (bütün insanlar ölümlüdür)
biçimindeki bir “hayırlama” biçiminde dile getirebiliriz. Aynı şekilde (6-1) veya (6-3) önermesini:

(97) ~ (Ahmet Ankara’ya gidecek)

biçiminde dile getirebiliriz. (96) önermesinin (94) ün, (97) önermesinin de (6-1) (veya (6-3)) ün “mantıksal-yapısı”nı yansıttığını söyleyebiliriz.

Buraya kadar dört ayrı doğruluk-fonksiyonunu (“hayırlama”, “bir-

likte-evetleme", "ayrıklık" ve "bağdaşmaz-ayrıklık") incelemiş bulunuyoruz. Bu doğruluk-fonksiyonlarının "temsilci"si olan "önerme-şemaları" sırasıyla:

$$(98) \quad \sim p$$

$$(99) \quad p \cdot q$$

$$(100) \quad p \vee q$$

$$(101) \quad p \neq q$$

biçiminde dile getirilebilir. İmdi bu türlü önerme-şemalarının ("doğruluk-fonksiyonu şemaları"nın) anlamını (doğruluk-fonksiyonu durumundaki önerme-eklemleri halinde olduğu gibi) birer "doğruluk-çizelgesi" yardımıyla belirlemek mümkündür. Sözü geçen dört önerme-şemasının karşılığı olan doğruluk-çizelgeleri şöyledir:

(102)	<table><tr><th>p</th><th>$\sim p$</th></tr><tr><td>D</td><td>Y</td></tr><tr><td>Y</td><td>D</td></tr></table>	p	$\sim p$	D	Y	Y	D
p	$\sim p$						
D	Y						
Y	D						

(103)

p	q	p · q
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

(104)

p	q	$p \vee q$
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

(105)

p	q	$p \neq q$
D	D	Y
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

(103), (104) ve (105) çizelgelerini aşağıdaki şekilde bir tek karma-çizelge halinde birleştirmek de mümkündür.

(106)

p	q	$p \cdot q$	$p \vee q$	$p \neq q$
D	D	D	D	Y
D	Y	Y	D	D
Y	D	Y	D	D
Y	Y	Y	Y	Y

İmdi, sözü geçen önerme-eklemleri yardımıyla verilen herhangi bir takım atomsal-önermeden istenildiği kadar uzun ve karmaşık moleküsel-önermeler elde edilebilir. 'A' ve 'B' nin herhangi iki (anlamlı) önerme olduğunu düşünelim. Örneğin: 'A' olarak:

(107) $2+2=5$

önermesini; 'B' olarak da :

(108) Kar beyazdır

önermesini göz önüne alalım (107) "yanlış" bir önermedir. Ama yanlış olması hiç te anlamsız olmasını gerektirmez. Tam tersine (107) "yanlış" olduğundan "anlamlı" bir önermedir. İmdi:

(109) Kar beyaz değildir

(110) $2+2=5$ ve kar beyazdır

(111) $2+2=5$ veya kar beyazdır

(112) ya $2+2=5$ ya kar beyazdır

önermelerini göz önüne alalım. Bu önermelerin her biri günlük dilin gramer ve sözdizimi kuralları gereği düzgün bir deyim olmakla birlikte, bu

gibi önermelerin evetlenmesinin acayip, hattâ mânasız sayılacağı meydandadır. Öte yandan, bu önermelerin sembolik karşılığı olan:

- (113) $\sim$ (kar beyazdır)
 (114) $(2+2=5) \cdot$ (kar beyazdır)
 (115) $(2+2=5) \vee$ (kar beyazdır)
 (116) $(2+2=5) \neq$ (kar beyazdır)

önermeleri mantıkta “mânalı” sayılır. Nitekim, mantıkta herhangi bir önermenin “mânalı” olması, bu önermenin “doğru” veya “yanlış” olması demektir. Oysa sözü geçen önermelerin herbirinin belli bir doğruluk-değeri vardır. (108) bileşeni “doğru” olduğundan, (113) önermesi “yanlış”tır. (107) bileşeni “yanlış”, (108) bileşeni de “doğru” olduğundan, (114) önermesi “yanlış”; (115) önermesiyle (116) önermesi “doğru”dur.

Aynı şekilde:

- (117) (Kar beyaz değildir) değil
 (118) Kar beyazdır ve kar beyazdır
 (119) Kar beyazdır veya kar beyazdır
 (120) Ya kar beyazdır ya kar beyazdır

çeşidinden önermeler günlük dilde hiç bir şekilde kullanılmayıp mânasız sayıldığı halde; bunların sembolik karşılık olan:

- (121) $\sim \sim$ (kar beyazdır)
 (122) $(\text{Kar beyazdır}) \cdot (\text{kar beyazdır})$
 (123) $(\text{Kar beyazdır}) \vee (\text{kar beyazdır})$
 (124) $(\text{Kar beyazdır}) \neq (\text{kar beyazdır})$

önermeleri mantıkta “mânalı” sayılmalıdır. Nitekim, (121), (122) ve (123) “doğru”, (124) ise “yanlış”tır.

İmdi, ‘A’ ve ‘B’ herhangi iki (mânalı) önerme oldukça ‘A · B’ de (mânalı) bir önerme olduğundan, (108) ile (122) yi “birlikte-evetleme” işaretiyle birbirine eklemek suretiyle elde edilen:

- (125) $(\text{Kar beyazdır}) \cdot ((\text{kar beyazdır}) \cdot (\text{kar beyazdır}))$

önermesini (gerek (108) den gerek (122) den farklı) “mânalı” bir önerme saymalıyız. (125) gibi karmaşık bir (molekülse) önermede, bileşenlerin ne şekilde eklendiğini belirtmek için (cebirde yapıldığı gibi) “parantez-

let'e başvurulur. Nitekim parantezlere (veya aynı görevi yapabilecek başka türlü ayırıcı işaretlere) başvurulmaması halinde; (125) gibi bir önerme ile:

(126) ((Kar beyazdır) · (kar beyazdır)) · (kar beyazdır)

önermesini birbirinden ayırdetmemiz imkânsız olurdu. Oysa (125) ile

(126) yı *iki ayrı önerme* sayıyoruz.

Aynı şekilde, verilen bir takım önerme-şemalarından önerme-eklemleri yardımıyla istenilen uzunlukta yeni önerme-şemaları meydana getirilebilir. Örneğin: 'p · q' ile 'p' şemalarından '(p · q) · p' şemasını elde edebiliriz. İmdi '*tam-deyim*' sözcüğünü herhangi bir "önerme" veya "önerme-şeması" anlamında kullanalım. O zaman 'A' herhangi bir (mânalı) tam-deyim olduktan '~A' nın; 'A' ile 'B' de herhangi iki (mânalı) tam-deyim olduktan, 'A · B', 'A v B', 'A ≠ B' nin de birer (mânalı) tam-deyim olduğunu söyleyebiliriz. Belli bir tam-deyimde her önerme-ekleminin (her geçişinin) belli bir "*etki-alanı*" vardır. Örneğin: '~' nin '~A' daki etki-alanı 'A' tam-deyiminden; '.' nin 'A · B' tam-deyimindeki etki-alanı da 'A' ile 'B' tam-deyimlerinden ibarettir. "2-li önerme-eklemleri" halinde etki-alanı iki kısımdan ibaret olduğundan, bunlardan birincisine (eklemin solundaki kısma) "*ön etki-alanı*", ikincisine de (eklemin sağındaki kısma) "*ard etki-alanı*" diyeceğiz. Örneğin: 'A v B' gibi bir tam-deyimde 'v' ekleminin "ön etki-alanı" 'A' tam-deyiminden, "ard etki-alanı" ise 'B' tam-deyiminden ibarettir. (Görüldüğü gibi, "1-li" önerme-eklemlerinin "ard etki-alanı" tüm etki-alanını tüketir).

Karmaşık tam-deyimler halinde, önerme-eklemlerinin etki-alanını belirtmek için "parantezler"e (veya aynı görevi yapabilecek başka türlü ayırıcı işaretlere — noktalama işaretlerine) başvurmak gerekir. Örneğin:

'A · B · C' gibi bir tam-deyimde '.' ekleminin ne birinci ne de ikinci geçişinin etki-alanı belirtilmiştir. Burada iki şık olabilir: Ya '.' nın birinci geçişinin ard etki-alanı yalnız 'B' den ibarettir, ya da, 'B · C' den. Birinci halde tam-deyimi, tek-anlamlı olması için:

(127) (A · B) · C

ikinci halde ise:

(128) A · (B · C)

biçiminde dile getirmeliyiz. Şu halde, 'A · B · C' gibi bir tam-deyim bir

tek (anamlı) tam-deyim değil, (126) ve (127) gibi iki ayrı (anamlı) tam-deyim şeklinde yorumlanabileceğini görüyoruz. Oysa mantıkta her tam-deyimin “tek-anamlı” olması, yani yalnız bir tek şekilde yorumlanabilmesi gerekir. Bundan dolayı ‘A . B . C’ gibi bir tam-deyimi ‘A’, ‘B’ ve ‘C’ bileşenlerinden her birinin anlamlı olması halinde bile “anlamsız” saymamız gerekecektir. İşte anlamlı ile anlamsız tam-deyimleri birbirinden ayırdetmek için “anamlı” olanlara “*düzgün tam-deyimler*” (well-formed formulae) denir. Böylece ‘A . B . C’ deyiminin bir “düzgün-tam-deyim” olmadığını, (127) ile (128) deyimlerinin “düzgün-tam-deyimler” olduğunu söyleyebiliriz. Aynı şekilde, ‘A ve B . C’ bir düzgün-tam-deyim olmadığı halde, gerek ‘A v (B . C)’ gerek ‘(A v B) . C’ bir düzgün-tam-deyim durumundadır.

Herhangi bir önerme-eklemiyle bu eklemın etki-alanından ibaret olan bir deyime söz konusu *önerme-ekleminin “kapanış”*ı (closure) diyeceğiz. Örneğin: ‘A v B’ deyimi ‘v’ eklemının bir kapanışdır. ‘A v (B . C)’ deyimi de ‘v’ nin bir kapanışdır. Buna karşılık, ‘A . (B ve C)’ deyimi ‘v’ nin bir kapanışı değildir. Her “kapanış” bir “düzgün-tam-deyim” olduğu gibi, (bölünmemiş önermeler mantığı çerçevesinde) atomsal olmıyan *her düzgün-tam-deyimin belli bir önerme-ekleminin kapanışı olduğunu* söyleyebiliriz. Böyle bir ekleme de sözü geçen düzgün-tam-deyimin “*ana-eklemi*” (major connective) denir. Buna göre, verilen bir önerme-ekleminin belli bir önermenin “ana-eklem”i olması, bu önermenin söz konusu eklemın bir “kapanış”ından ibaret olması demektir. *Her molekölse düzgün-tam-deyimin bir ve yalnız bir tek ana-eklemi* bulunur. Örneğin: ‘A . (B v C)’ tam-deyiminin ana-eklemi ‘.’; ‘A v (B . C)’ tam-deyiminin ana-eklemi ise ‘v’ dir.

İmdi “1-li önerme-eklemleri”nin etki-alanı (eklemin sağında yazılan) bir tek düzgün-tam-deyimden ibaret olduğu halde; bir “2-li önerme-eklemi”nin etki-alanı, biri eklemın soluna, ötekisi de sağına yazılan iki ayrı düzgün-tam-deyimden ibarettir. Verilen bir tam-deyimin ana-eklemi durumunda olan bir önerme-ekleminin etki-alanını meydana getiren bu düzgün-tam-deyimlere söz konusu tam-deyimin “*ana bileşenler*”i getiren bu düzgün-tam-deyimlere söz konusu tam-deyimin “*ana bileşenler*”i diyeceğiz. Buna göre, ana-eklemi “1-li” olan bir tam-deyimin *bir tek “ana-bileşen”i* olduğu halde, eklemi “2-li” olan bir formölün *iki ayrı “ana-bileşen”i* olmalıdır. Örneğin:

$$\sim ((A . B) v C)$$

tam-deyiminin bir tek ana-bileşeni ‘(A . B) v C)’ vardır. Nitekim bu

tam-deyimin ana-eklemi "1-li" olan '~' den ibarettir. Buna karşılık '(A . B) ve C' deyiminin iki ayrı ana-bileşeni ('A . B' ile 'C') vardır; çünkü bu tam-deyimin ana-eklemi "2"li olan 'v' ekleminden ibarettir.

İmdi, herhangi bir molekül-önermenin doğruluk-değerini (bu önermede geçen bütün önerme-eklemleri doğruluk-fonksiyonu durumunda olmak şartıyla) önermenin atomsal-bileşenlerinin doğruluk-değerleri aracıyla kolayca belirleyebiliriz. Nitekim, Ö herhangi bir molekül-önerme olsun. İlk önce Ö'nün ana-eklemini tesbit ederiz. Böylece de Ö'nün ana-bileşeni veya ana-bileşenleri de tesbit edilmiş olur. Bu bileşenlerin ya tümü atomsaldır, ya da hiç olmazsa biri gene molekülseldir. Birinci halde Ö'nün doğruluk-değeri ana-ekleminin doğruluk-çizelgesi yardımıyla ana-bileşenlerinin verilen doğruluk-değerleri türünden bir çırpıda belirlenebilir. İkinci halde ise, molekül-önermenin ana-bileşeninin ana-ekleminin ana-bileşenlerini tesbit ederiz. O zaman da Ö önermesinin yol açtığı aynı sıkırlarla karşılaşırız. Aynı işlemi tekrarlamakla, önünde sonunda (sonlu sayıda adımlarla) bütün ana-bileşenleri atomsal olan önermelerle karşılaşmamız gerekir. Bu son çeşit önermelerin doğruluk-değerini (doğruluk-çizelgeleri ve atomsal-bileşenlerinin doğruluk-değerleri gereği) belirledikten sonra, bir derece daha üstün olan, yani ana bileşenleri bu önermelerden ibaret olan bileşenlerin doğruluk-değerini belirleriz. Aynı işlemi gittikçe daha yüksek dereceden bileşenler için tekrarlıyarak önünde sonunda Ö önermesinin doğruluk-değerini belirleyebiliriz. Bu işlemi aşağıdaki şekilde bir çizelge yardımıyla yapabiliriz:

1.ci sırada doğruluk-değerini belirlemek istediğimiz Ö önermesini yazarız. 2.ci sırada (1.ci sıradaki konumlarının tam altına gelmek üzere) Ö önermesinin ana-bileşenleri yazılır. Ö önermesinin ana-ekleminin başka bütün kısımları böylece 2.ci sıraya aktarılmış olduğundan, bu ana-eklem Ö önermesinin 1.ci sıradan 2.ci sıraya aktarılmıyan tek kısmından ibaret olur. Aynı şekilde 3.cü sırada 2.ci sırada gösterilen önermelerin ana-bileşenleri (2.ci sıradaki yerlerinin tam altına gelmek üzere) yazılır. Böylece bu önermelerin ana-eklemi, 2.ci sıradan 3.cü sıraya aktarılmıyan kısımlarından ibaret olur. Aynı işlemi ana-bileşenleri atomsal-önermelerden ibaret olan bileşenlerin doğruluk-değerini belirleriz. Aynı işlemi gittikçe daha (bir üstteki sıradaki yerlerinin gene tam altına gelmek üzere) atomsal önermeleri yazar ve altlarını çizeriz. Bu şekilde elde edilen çizelgeye Ö önermesinin "*kuruluş-çizelgesi*" diyeceğiz. Buna göre, Ö gibi bir önermenin "*kuruluş-çizelgesi*"nin bu önermenin mantıksal-yapısının kuruluş şeklini dile getirdiğini söyleyebiliriz. Örneğin:

$$(129) \quad \sim (\sim (\sim (A \vee B) \cdot \sim B) \vee (\sim A \cdot B))$$

gibi bir önermenin "kuruluş-çizelgesi" şöyle olur:

$$(130) \quad \begin{array}{ll} 1. & \sim (\sim (\sim (A \vee \sim B) \cdot \sim B) \vee (\sim A \cdot B)) \\ 2. & \sim (\sim (A \vee \sim B) \cdot \sim B) \vee (\sim A \cdot B) \\ 3. & \sim (\sim (A \vee \sim B) \cdot \sim B) \quad \sim A \cdot B \\ 4. & \sim (A \vee \sim B) \cdot \sim B \quad \sim A \quad B \\ 5. & \sim (A \vee \sim B) \quad \sim B \quad A \\ 6. & A \vee \sim B \quad B \\ 7. & A \quad \sim B \\ 8. & \underline{\quad} \quad B \end{array}$$

İmdi, (130) gibi bir "kuruluş-çizelgesi" yardımıyla, (129) önermesinin doğruluk-değerinin atomsal bileşenlerinin doğruluk-değerleri türünden belirlenmesi çok kolaydır. Nitekim böyle bir belirlemeyi yapmak için, (130) çizelgesinde ilk önce en sondaki sıradan başlamak üzere her atomsal bileşenin altına (atomsal bileşenin altındaki çizginin altına) doğruluk-değeri ("doğru" ise 'D', "yanlış" ise 'Y') yazılır. Ondan sonra ana-bileşenleri bu atomsal-önergelerden ibaret olan önergelerin doğruluk-değerini bu önergelerin her birinin ana-eklemi altına yazarız. Sonra da ana-bileşenleri bu son önergelerden ibaret olan önergelerin doğruluk-değerini bunların her birinin ana-eklemi altına yazarız... Bu işlemi gereken sayıda tekrarlamakla önünde sonunda (129) önermesinin ana-eklemi altına bu önermenin doğruluk-değerini yazmış oluruz.

(129) önermesinin biri 'A', ötekisi de 'B' olmak üzere iki atomsal bileşeni vardır. 'A' nın "doğru", 'B' nin de "yanlış" olduğunu kabul edelim. O zaman (129) önermesinin doğruluk-değerini (130) "kuruluş-çizelgesi"ne dayanarak şöyle tesbit edebiliriz.

$$(131) \quad \begin{array}{ll} 1. & \sim (\sim (\sim (A \vee \sim B) \cdot \sim B) \vee (\sim A \cdot B)) \\ & Y \\ 2. & \sim (\sim (A \vee \sim B) \cdot \sim B) \vee (\sim A \cdot B) \\ & D \\ 3. & \sim (\sim (A \vee \sim B) \cdot \sim B) \quad \sim A \cdot B \\ & D \quad Y \\ 4. & \sim (A \vee \sim B) \cdot \sim B \quad \sim A \quad B \\ & Y \quad Y \quad Y \\ 5. & \sim (A \vee \sim B) \quad \sim B \quad A \\ & Y \quad D \quad D \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{ccc} A & v & \sim B \\ & D & \\ & & \frac{B}{\overline{Y}} \end{array}$$
7.
$$\begin{array}{ccc} A & & \sim B \\ & D & D \end{array}$$
8.
$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \frac{\overline{Y}}{\overline{Y}} \end{array}$$

(129) önermesinin doğruluk-değerini, “kuruluş-çizelgesi”ni açık olarak belirtmeden de tesbit etmek mümkündür. Bunun için (129) önermesinin altında *bir tek sıra* halinde ‘D’ veya ‘Y’ harflerini şu şekilde yazalım: İlk önce atomsal-bileşenlerin altına doğruluk-değerlerini yazalım. Ondan sonra en düşük dereceden başlayarak en yüksek dereceye çıkmak üzere her ana-eklemin altına kapanışı olan önermenin doğruluk-değerini yazalım. Böylece en sonda (129) önermesinin ana-eklemi altına (en yüksek dereceden ana-eklem!) kendi doğruluk-değerini yazmış oluruz. Bu şekilde elde edilen çizelge:

$$(132) \quad \sim (\sim (\sim (A \vee \sim B) \cdot \sim B) \vee (\sim A \cdot B))$$

$$Y \quad D \quad Y \quad D \quad D \quad Y \quad Y \quad D \quad Y \quad D \quad Y \quad Y$$

biçiminde olur. ‘D’ ve ‘Y’ harflerinin yazılış sırasını her birinin altına bir sayı yazmakla belirtmek mümkündür. Bu halde ise (132) çizelgesi:

$$(133) \quad \sim (\sim (\sim (A \vee \sim B) \cdot \sim B) \vee (\sim A \cdot B))$$

$$Y \quad D \quad Y \quad D \quad D \quad Y \quad Y \quad D \quad Y \quad D \quad Y \quad Y$$

$$8 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \quad 3 \quad 21 \quad 5 \quad 21 \quad 7 \quad 21 \quad 3 \quad 1$$

(129) gibi bir önermenin doğruluk-değerini bir de şöyle belirtmek mümkündür:

‘D’ harfini keyfe-bağlı olarak seçilmiş olup “doğru” olduğu bilinen belli bir önermenin kısaltması olarak kullanalım. Aynı şekilde ‘Y’ harfi keyfe-bağlı olarak seçilmiş olup “yanlış” olduğu bilinen belli bir önermenin kısaltması olsun. O zaman (129) gibi bir önermenin “doğru” olduğunu bildiğimiz herhangi bir bileşenin ‘D’ ile değiş-tokuş edilmesiyle elde edilen önerme (129) ile “eşdeğer” olur. Aynı şekilde (129) önermesinin herhangi bir bileşenin ‘Y’ ile değiş-tokuş edilmesiyle elde edilen önerme de (129) ile eşdeğer olur. Buna göre, (129)da (“doğru” olduğunu kabul ettiğimiz) ‘A’ atomsal-önermesi yerine ‘D’, (“yanlış” olduğunu kabul ettiğimiz) ‘B’ önermesi yerine de ‘Y’ koymakla elde edilen:

$$(134) \quad \sim (\sim (\sim (D \vee \sim Y) \cdot \sim Y) \vee (\sim D \cdot Y))$$

önermesi (129) ile eşdeğer olur. (134) önermesinde ise (doğruluk-çizelgelerine dayanarak) “doğru” olduğunu tesbit ettiğimiz bileşenleri ‘D’ ile, “yanlış” olduğunu tesbit ettiğimiz bileşenleri de ‘Y’ ile değiş-tokuş etmek suretiyle elde edilen önerme (134) ile, dolayısıyla de (129) ile eşdeğer olur. Bu son önermeyi de aynı şekilde enunla eşdeğer olan başka bir önermeye dönüştürebiliriz. Aynı işlemi gerektiği kadar tekrarlıyarak, (129) önermesinin sonunda ‘Y’ önermesine dönüştüğünü, dolayısıyla de “yanlış” olduğunu gösterebiliriz:

- (135)
1. $\sim (\sim (\sim (A \vee \sim B) \cdot \sim B) \vee (\sim A \cdot B))$
 2. $\sim (\sim (\sim (D \vee \sim Y) \cdot \sim Y) \vee (\sim D \cdot Y))$
 3. $\sim (\sim (\sim (D \vee D) \cdot D) \vee (Y \cdot Y))$
 4. $\sim (\sim (\sim D \cdot D) \vee Y)$
 5. $\sim (\sim (Y \cdot D) \vee Y)$
 6. $\sim (\sim Y \vee Y)$
 7. $\sim (D \vee Y)$
 8. $\sim D$
 9. Y

§ 8. Koşul, Karşılıklı-koşul, Bağdaşmazlık ve Birlikte-hayırlama Eklemleri

‘İse’ (‘-se’) ek-fiili yardımıyla meydana getirilen:

- (1) $A \text{ ise, } B$

biçimindeki bileşik-önermelere “koşul-önermeleri” (conditional statements) denir.¹ Örneğin:

- (2) Ahmet Ankara’ya gitmezse, annesi İstanbul’a gelecektir
- (3) Fırtına kopmazsa, Ahmet uçağa binecektir
- (4) Yarın Ankara’ya gitmezsem, Konya’ya gideceğim
- (5) Sokrates insan ise, ölümlüdür.

önermelerinin her biri (mantıksal-yapısı bakımından) (1) biçiminde olduğundan bir “koşul-önermesi” durumundadır. Her koşul-önermesi iki ana-bileşeni olan bir molekül-önermedir. Buna göre, ‘ise’ sözcüğünü, bir koşul-önermesinin ana-eklemi durumunda geçmesi halinde, bir “2-lî önerme-eklemi” sayabiliriz.

(1) biçimindeki bir önermenin iki ana-bileşeni ‘A’ ile ‘B’ önermelerinden ibarettir. ‘A’ önermesine koşul-önermesinin “ön-önerme”si (antecedent), ‘B’ önermesine de “ard-önerme”si (consequent) diyeceğiz. Buna göre, ön-önermenin ‘ise’ ekleminin ön etki-alanından, ard-önermenin ise

aynı eklemin ard etki-alanından ibaret olduğunu söyleyebiliriz. Günlük dilin kullanımları açısından, bir koşul-önermesinin öne sürülmesi, bu önermenin tümünün evetlenmesinden çok, sadece *ard-önermesinin şarta bağlı olarak evetlenmesi* anlamına gelir.² Başka bir deyimle, (1) gibi bir önermeyi öne sürmemiz, 'B' önermesini 'A' nın doğru olması şartıyla evetlememizden başka bir şey değildir. Buna göre, 'A' nın doğru olduğu anlaşılırsa (yani söz konusu koşul yerine gelirse) 'B' nin doğruluğunu iddia etmiş sayılırız; öyle ki 'B' nin yanlışlığı iddiamızın tümünü çürütür. Şu halde, 'A' doğru, 'B' de yanlış ise (1) koşul-önermesinin tümü *yanlış* olur. Bu durumu şöyle bir çizelge yardımıyla dile getirebiliriz:

(6)	A	B	A ise, B
	D	Y	Y

Buna karşılık, 'A' nın doğru olması halinde 'B' nin de doğru olması genel olarak (1) önermesinin doğruluğu için *"yeterli"* bir şart *değildir*. Nitekim böyle bir durumda 'A' ve 'B' bileşenlerinin içeriğine bağlı olarak, (1) önermesi bazı hallerde "doğru", başka hallerde ise "yanlış" olabilir. Bu durumu da:

(7)	A	B	A ise, B
	D	D	?

gibi bir çizelge ile dile getirebiliriz. Burada '?' işaretiyle 'A ise, B' önermesinin duruma göre doğru veya yanlış olabileceğini, ama doğru mu, yoksa yanlış mı olduğunun salt 'A' ile 'B' bileşenlerinin doğruluk-değeri ile belirlenmediğini gösteriyoruz.

Öte yandan, 'A' nın *yanlış* olduğu anlaşılırsa (1) önermesi "hüküm-süz" olur. Bu halde ('B' önermesi ister "doğru" ister "yanlış" olsun) (1) in hiç bir doğruluk-değeri olmadığını, yani ne doğru ne de yanlış olduğunu söyleyebiliriz. ("Doğruluk-değeri boşluğu" -truth-value gap-). Bu durumu da:

(8)	A	B	A ise, B
	Y	D	—
	Y	Y	—

'—' işaretini 'A ise, B' önermesinin ne doğru ne yanlış olduğunu belirtmek için kullanıyoruz.

(6), (7) ve (8) çizelgelerini bir tek çizelge olarak

(9)	A	B	A ise, B
	D	D	?
	D	Y	Y
	Y	D	—
	Y	Y	—

biçiminde birleştirebiliriz. (9) çizelgesinden :

(10)	A ise, B	A	B
	D	D	D
	Y	D	D
	Y	D	Y
	—	Y	D
	—	Y	Y

gibi bir çizelgeyi türetebiliriz.

(9) ile (10) çizelgeleri günlük dilin herhangi bir koşul-önermesinin doğruluk-değeri ile bu önermenin bileşenlerinin doğruluk-değerleri arasındaki formel bağlantıları dile getirir.

Günlük dilde bir koşul-önermesini genel olarak ne ön-önermenin ne de ard-önermenin doğruluk-değerini bilmediğimiz hallerde öne süreriz. Nitekim, *ön-önermenin yanlış* olduğunu bilirsek, (1) gibi bir önermenin evetlenmesi (bu önerme ne doğru ne de yanlış olduğundan) mânasızdır. *Ön-önermenin doğru* olduğunu bildiğimiz hallerde ise, (1) biçimindeki bir önerme-yerine:

(11) A olduğundan, B

gibi bir önermeyi evetleriz. Örneğin: Sokrates'in insan olduğunu bildiğimizden, günlük dilde hiç bir zaman (5) önermesini kullanmaz, onun yerine:

(12) Sokrates insan olduğundan, ölümlüdür

türünden bir önermeyi evetleriz.

Öte yandan, *ard-önermenin doğru* olduğunu bildiğimiz hallerde, ya doğrudan doğruya bu önermeyi evetleriz, ya da doğruluğunun gerekçesini belirtmek amacıyla (11) biçimindeki bir önermeyi evetleriz. Böyle bir durumda (11) yerine:

(13) B, çünkü A
biçimindeki bir önermeyi de evetlemek mümkündür.

Ard-önermenin yanlış olduğunu bildiğimiz hallerde ise (1) önermesini veya ona çevrilebilen herhangi başka bir önermeyi (yalan hali bir yana) evetlemeyeceğimiz meydandadır.

Bazı koşul-önermelerini de birer “*dilek-şart önermesi*”³ şeklinde yorumlamamız gerekir. Örneğin:

(14) Ahmet Ankara’ya giderse, annesi çok sevinecektir

önermesi ön-önermenin yanlış olması halinde de doğru olabilir. O zaman (14) ü :

(15) Ahmet Ankara’ya gitse, annesi çok sevinirdi

biçimindeki bir dilek-şart önermesine çevirebiliriz. Bir dilek-şart önermesini genel olarak dilek-şart kipinden ‘olsa’ fiili yardımıyla:

(16) A olsa, B

biçiminde dile getirebiliriz. (16) biçimindeki bir önermenin doğruluk-değeri ile bileşenlerinin doğruluk-değerleri arasındaki formel bağlantıları :

(17)	A	B	A olsa, B
	D	D	?
	D	Y	Y
	Y	D	?
	Y	Y	?

çizelgesiyle, bundan türetilebilen:

(18)	A olsa, B	A	B
	D	D	D
	D	Y	D
	D	Y	Y
	Y	D	D
	Y	D	Y
	Y	Y	D
	Y	Y	Y

çizelgesi yardımıyla dile getirebiliriz. Nitekim, (16) gibi bir dilek-şart önermesini genel olarak “*ön-önermenin doğruluk-değerini bilmediğimiz*” hallerde öne sürmekle birlikte, (1) biçimindeki “koşul-önermeleri”nden farklı olarak ‘A’ nın yanlış çıkması hiç te (16) nın hiç bir doğruluk-değeri taşımasına yol açmaz. Hattâ “*olana-aykırı koşul-önermeleri*” (counterfactual conditionals) denilen bazı dilek-şart önermelerini *ön-önermenin yanlış olduğunu bildiğimiz* hallerde öne süreriz. Olana-aykırı koşul-önermelerini ‘olsaydı’ sözcüğü yardımıyla:

(19) A olsaydı, B
biçiminde dile getirebiliriz. Örneğin: Ahmed'in Ankara'ya gitmeyeceğini bildiğimiz halde,

(20) Ahmet Ankara'ya gitseydi, annesi çok sevinecekti gibi bir önermeyi "doğru" olarak evetlemek mümkündür. İşte (19) biçimindeki bir olana-aykırı koşul-önermesinin doğruluk-değeri ile bileşenlerinin doğruluk-değerleri arasındaki formel bağlantıları:

(20)	A	B	A alsaydı, B
	Y	D	?
	Y	Y	?

çizelgesiyle, bundan türetilebilen:

(21)	A olsaydı, B	A	B
	D	Y	D
	D	Y	Y
	Y	Y	D
	Y	Y	Y

çizelgesi yardımıyla dile getirebiliriz.

İmdi, gerek (9) ve (10) çizelgeleri ile belirtilen 'ise' eklemi, gerek (17) ve (18) çizelgeleriyle belirlenen 'olsa' eklemi, gerekse (20) ve (21) çizelgeleriyle belirlenen 'olsaydı' ekleminin *doğruluk-fonksiyonu* durumunda *olmadığı* meydandadır. Aslında "olsa" ile 'olsaydı' eklemeleri yapıları gereği doğruluk-fonksiyonu durumunda değildir. 'İse' ekleminin ise günlük dilde çokluk doğruluk-fonksiyonu durumunda geçmemekle birlikte, bir doğruluk-fonksiyonu durumunda da kullanılabileceğini göstereceğiz. Nitekim, (9) çizelgesini göz önüne alarak bunu bir (eksiksiz) doğruluk-çizelgesi biçimine dönüştürmeğe çalışalım. Birinci sırada ('A' doğru ve 'B' doğru hali) (1) önermesi (yani 'A ise, B') duruma göre doğru veya yanlış olabiliyor. 'İse' sözcüğünün doğruluk-fonksiyonu durumunda olması halinde ise, (1) önermesinin yalnız bir tek belli doğruluk-değeri taşınması (yani ya doğru, ya yanlış olması) gerekecektir. Oysa (1) önermesi, (10) çizelgesi uyarınca ancak 'A' doğru ve 'B' doğru ise doğru olabilir. Şu halde 1.ci sırada (1) in altına 'Y' yazılması, (1) önermesinin ortak kullanımlar bakımından doğru olduğu hallerde yanlış sayılmasına yol açar. Buna göre, 1.ci sırada (1) in altına 'D' yazmanın ortak kullanımlara en az aykırı olduğunu görüyoruz. 2.ci sıraya gelince: (9) çizelgesinde olduğu gibi 'Y' yazarız. 3.cü ve 4.cü sıraya gelince: ortak kullanımların bu haller için (1) önermesine hiç bir doğruluk-değeri yüklenmediğini görüyoruz. ("Doğruluk-değeri boşluğu"!)) Böyle bir halde, (1) önerme-

sine ilkece keyfe-bağlı olarak istediğimiz doğruluk-değerini yüklemek mümkündür. Bununla birlikte, dolambaçlı bir yola başvurarak, (1) önermesini bu son iki halde “doğru” saymanın, ortak kullanımlara en uygun bir belirleme olduğunu gösterebiliriz. Nitekim

(22) $\sim A \vee B$

ayrıklığını göz önüne alalım. Böyle bir önermenin ‘A’ nın *yanlış* olması halinde doğru olduğunu kolayca görebiliriz. Oysa, (22) önermesinin doğru olması, (1) önermesinin de doğruluğunu gerektirir. Bu durumu şöyle bir karma çizelge yardımıyla dile getirebiliriz:

(23)

A	$\sim A$	$\sim A \vee B$	A ise, B
Y	D	D	D

‘ $\sim A \vee B$ ’ nin doğruluğunun ‘A ise, B’ nin doğruluğunu gerektirdiğini şöyle gösterebiliriz: ‘C veya B’ biçimindeki bir önermeyi göz önüne alalım. Bu önermenin doğru olması şartıyla, ‘C’ *yanlış ise*, ‘B’ *doğru* olur. İmdi, ‘C’ yerine ‘ $\sim A$ ’ (‘A *değil*’ önermesini) koyalım. O zaman ‘ $\sim A$ ’ yanlış ise ‘A’ doğru olur. “‘ $\sim A$ ’ *yanlıştır*” deyimi yerine “A *doğrudur*” deyimini kullanabiliriz. Şu halde ‘A’ doğru ise ‘B’ doğru olur. Bu son deyim ise ‘A ise, B’ anlamına gelir. (İ.K.)‘

İşte, ‘ise’ ekleminin doğruluk-fonksiyonu durumunda geçtiği hallerde, ‘A ise, B’ önermesinin doğruluk-değerinin ‘A’ ön-önermesinin “yanlış” olması halinde hep “doğru” olduğunu kabul edeceğiz. Buna göre, gerek 3.cü, gerek 4.cü sırada (1) önermesinin altına ‘Y’ yazmak gerekecektir. Böylece (9) çizelgesi yerine:

(24)

A	B	A ise, B
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

doğruluk-çizelgesini kurabiliriz. Bu çizelgeden de:

(25)

A ise, B	A	B
D	D	D
Y	D	Y
D	Y	D
D	Y	Y

çizelgesini türetebiliriz. (24) ve (25) çizelgeleriyle belirlenen doğruluk-fonksiyonu durumundaki önerme-eklemine “koşul-eklemi” diye-

ceğiz. Bu eklem için (modern mantıkçıların çoğunu izleyerek) ‘ $\supset$ ’ sembolünü kullanacağız.

(26)

$A \supset B$

biçimindeki önermelere “*doğruluk fonksiyonu durumundaki koşul önermeleri*” veya “*materyel*” *koşul-önermeleri* denir. ⁵

İmdi, günlük dilde kullanılan koşul-önermelerinin çoğunluğu “materyel” olmamakla birlikte, materyel koşul-önermelerinin bazı hallerde günlük dilde de kullanıldığını gösterebiliriz. Özellikle, ‘veya’ sözcüğünün *doğruluk-fonksiyonu* durumunda geçtiği ‘*A veya B*’ biçimindeki önermelerin karşılığı olan:

(27)

$\sim A$ ise, B

biçimindeki her önermeyi (23) gereği bir “materyel koşul-önermesi” şeklinde yorumlayabiliriz. Nitekim (27) önermesi ‘*A veya B*’ ile eşdeğer olduğundan, gerek ‘*A*’ nin gerek ‘*B*’ nin doğru olması halinde doğru olur. Buna karşılık ‘*A veya B*’ bir doğruluk-fonksiyonu değilse, (27) nin bir “materyel koşul-önermesi” olamayacağını gösterebiliriz.

Günlük dilde kullanılan koşul-önermelerinden bir çoğunun “materyel” olup olmadığını kesin bir şekilde tesbit edemiyoruz. Örneğin: sözü geçen (2), (3) ve (4) önermelerini gerek “materyel” gerek “materyel” olmıyan birer koşul-önermesi şeklinde yorumlamak mümkündür. Genel olarak, ‘*A ise, B*’ nin ‘*B, çünkü A*’ anlamına gelmesi halinde “materyel” olmadığını; buna karşılık ‘*A*’ ile ‘*B*’ arasında hiç bir özünü bağlanti olmaması halinde de “materyel” olduğunu söyleyebiliriz. Örneğin:

(28)

Ahmet bu ilâcı alırsa iyileşecektir.

önermesi “materyel” olmıyan bir koşul-önermesi sayılmalıdır. Nitekim, (28) önermesinin her iki bileşeninin doğru olması (yani Ahmed’in söz konusu ilâcı alıp bir süre sonra iyileşmesi), bu önermenin doğru olmasının yeterli bir koşulu değildir. Ahmed’in iyileşmesi ilâcın alınmasına değil de bambaşka bir nedene bağlı olabilir. Üstelik, ön-önermenin *yanlışığının*, yani Ahmed’in ilâcı almamasının hiç te (28) önermesinin doğruluğunu gerektirmediği meydandadır. Buna karşılık:

(29)

Bu problemi çözebilirsen, şapkamı yerim.

önermesi ⁶ “materyel” bir koşul-önermesi sayılabilir. Nitekim böyle bir önermeyi söz konusu problemin karşımdaki tarafından çözülemeyeceğine dair inancımı belirtmek için öne sürerim; öyle ki problemin gerçekten çö-

zilememesi halinde, ön-önermenin yanlışlığı (29) önermesini tüm olarak doğrular. Öte yandan, beklediğimin tersine, problem çözülürse, şapkamı yemem (örneğin çikolatadan bir şapka yaptırıp onu belli bir süre giydikten sonra yemem) gene (29) önermesini doğrular.

İmdi, (29) önermesini öne sürecek yerde,

(30) Bu problemi çözemeyeceksin, yoksa şapkamı yerim gibi bir önermeyi kullanmak mümkündür. (29) ile (30) önermelerini eş-anlamli sayabiliriz. (30) önermesinin doğruluğunun gerekli ve yeterli koşulu problemin çözülememesi veya beklediğimizin tersine, çözülmesi halinde şapkamı yememden ibarettir. İşte, 'A ise, B' biçimindeki herhangi bir "materyel" koşul-önermesini:

(31) A değil, yoksa B

biçiminde dile getirmek mümkündür. (31) önermesinin doğruluğunun gerekli ve yeterli koşulu, 'A' önermesinin yanlış olması veya 'B' önermesinin doğru olmasından ibarettir.

(32) A, yoksa B

biçimindeki bir önermeyi 'A v B' ayrıklığı şeklinde yorumlayabiliriz. Nitekim, (32) önermesinin ancak hem 'A' hem 'B' nin yanlış olması halinde yanlış olduğunu, bütün öteki hallerde ise doğru olduğunu kabul edebiliriz. Örneğin: bir annenin misafir bulundukları bir evde yaramazlık yapmasından korktuğu çocuğunun uslu durmasını sağlamak amacıyla söylediği:

(33) Uslu durursun, yoksa seni bir daha buraya getirmem

önermesini göz önüne alalım. Burada 'A' olarak 'uslu durursun' önermesi, 'B' olarak ta 'seni bir daha buraya getirmem' önermesi alınmıştır. İmdi, 'A' önermesinin doğruluğu (33) önermesinin doğruluğu için yeterli bir koşuldur. Bu durumu:

(34)

A
D

 |

A, yoksa B
D

çizelgesi yardımıyla dile getirebiliriz. Bu koşul 'B' önermesinin doğruluk-değerine bağlı olmadığından, 'B' ister doğru, ister yanlış olsun, geçerliliğini kaybetmez. Şu halde:

(35)

A	B
D	D
D	Y

 |

A, yoksa B
D
D

çizelgesini kurabiliriz. Nitekim, (33) önermesini

(36) Uslu durursan, seni bir daha buraya getiririm
biçiminde yorumlamamak gerek; öyle ki çocuğun uslu durmasına rağmen annesinin onu bir daha söz konusu eve getirmemesi (33) önermesini yanlışlamaz.

Öte yandan 'A' nin yanlış olması, yani çocuğun uslu durmaması halinde, 'B' de yanlış ise, yani annesi onu bir daha o eve getirirse, (33) yanlış olur; buna karşılık, 'B' doğru ise, yani annesi çocuğu bir daha o eve getirmezse (33) doğru olur. Bu durumu da:

(37)	A	B	A, yoksa B
	Y	Y	Y
	Y	D	D

çizelgesiyle dile getirebiliriz. (34), (35) ve (37) çizelgelerini de:

(38)	A	B	A, yoksa B
	D	D	D
	D	Y	D
	Y	D	D
	Y	Y	Y

gibi bir tek çizelge halinde birleştirebiliriz. (38) çizelgesi ise 'A v B' ayrıklığının doğruluk-çizelgesinden başka bir şey değildir. (33) önermesini

(39) Uslu durmazsan, seni bir daha buraya getirmem
gibi bir materyel koşul-önermesine de dönüştürebiliriz. Bu önerme de ' $\sim A \supset B$ ' biçimindedir.

Günlük dilde kullanılan önerme-eklemleri arasında bir de şu eklem-lerin önemi vardır:

'A ise, B' ve 'B ise, A' gibi birbirinin "evriği" olan iki koşul-önermesi yerine:

(40) A, ancak ve ancak B ise

gibi bir tek önermeyi kullanmak mümkündür. (40) önermesi:

(41) A ise, B; B ise, A

anlamına gelir. Bu bakımdan (40) biçimindeki önermelere "karşılıklı-koşul önermeleri" diyeceğiz. Karşılıklı-koşul önermeleri ikişer koşul-önermesinin bir arada evetlenmesi anlamına geldiğinden, koşul-önermeleri için bütün söylediklerimiz karşılıklı-koşul önermelerine de uygulanır. Ö-

zellikle karşılıklı-koşul önermelerini “*materyel karşılıklı-koşul önermeleri*” ile “*materyel olmayan karşılıklı-koşul önermeleri*”ne ayırmamız gerekecektir.

Her iki türlü karşılıklı-koşul önermelerinin doğruluk-çizelgesini kurmak için şöyle bir karma çizelgeye başvurabiliriz:

(42)	A	B	A ise, B	B ise, A	(A ise, B) ve (B ise, A)
	D	D	?	?	?
	D	Y	Y	—	—
	Y	D	—	Y	—
	Y	Y	—	—	—
	D	D	D	D	D
	D	Y	Y	D	Y
	Y	D	D	Y	Y
	Y	Y	D	D	D

(42) nin ilk dört sırası materyel-olmayan koşul-önermelerine, son dört sırası ise materyel koşul-önermelerine ilişkindir. (42) ye dayanarak *materyel-olmayan karşılıklı-koşul önermelerinin doğruluk-çizelgesinin* :

(43)	A	B	A, ancak ve ancak B ise
	D	D	?
	D	Y	—
	Y	D	—
	Y	Y	—

biçiminde; *materyel karşılıklı-koşul önermelerinin doğruluk-çizelgesinin* de :

(44)	A	B	A, ancak ve ancak B ise
	D	D	D
	D	Y	Y
	Y	D	Y
	Y	Y	D

biçiminde olduğunu görüyoruz. (43) çizelgesi, materyel olmayan bir karşılıklı koşul-önermesinin ancak her iki bileşenin doğru olması halinde belli bir doğruluk-değeri olduğunu, bu doğruluk-değerinin ise sadece bileşenlerinin doğruluk-değerine bağlı olmadığını belirtmektedir. Örneğin:

(45) Paris Fransa'dadır, ancak ve ancak deniz tuzlu ise

(46) Paris Afrikada'dır, ancak ve ancak deniz tatlı ise

önermeleri günlük dilin kullanımları açısından (sözdizimi düzgün olmakla birlikte) “mânasız” veya hiç olmazsa “yersiz” sayılır. Buna karşılık bunları materyel karşılıklı-koşul önermeleri olarak yorumlarsak, her ikisinin de “doğru” olduğunu söyleyebiliriz. Nitekim, birincisinin her iki bileşeni “doğru”, ikincisinin ise her iki bileşeni “yanlış”tır.

(47) Ahmet iyileşecektir, ancak ve ancak bu ilâcı içerse önermesini materyel olmıyan bir karşılıklı-koşul önermesi olarak yorumlamak gerek. Nitekim, Ahmed’in ilâcı içip iyileşmesi (bu ilâcı içmesinden bambaşka bir nedene bağlı olabildiğinden) (47) önermesinin doğruluğunu gerektirmediği gibi; her iki bileşeninin yanlış olması, yani Ahmed’in ilâcı içmeyip iyileşmemesi de bu önermenin doğruluğunu gerektirmez.

Materyel karşılıklı-koşul önermelerini (ötekilerinden ayırdetmek amacıyla)

(48) $A \equiv B$

biçiminde dile getireceğiz. ‘ $\equiv$ ’ işareti “*karşılıklı-koşul eklemi*” diyeceğiz.

Başka bir önerme-eklemi “*bağdaşmazlık*” (incompatibility) eklemidir. Günlük dilde iki önermenin birbiriyle bağdaşmadığını ifade eden özel bir sözcük yoktur. ‘A’ ile ‘B’ gibi iki önermenin birbiriyle bağdaşmaz olduğu ancak:

(49) $A \text{ ise, } B \text{ değil}$

biçimindeki bir önerme yardımıyla dile getirilir.

(49) biçimindeki bir önermenin doğruluk-çizelgesi, içinde geçen ‘ise’ eklemının doğruluk-fonksiyonu durumunda olup olmadığına, yani önermenin materyel veya materyel-olmıyan bir koşul-önermesi olmasına bağlıdır. Birinci halde:

(50)	A	B	B değil	A ise, B değil
	D	D	Y	Y
	D	Y	D	D
	Y	D	Y	D
	Y	Y	D	D

çizelgesini; ikinci halde ise:

(51)	A	B	B değil	A ise, B değil
	D	D	Y	Y
	D	Y	D	?
	Y	D	Y	—
	Y	Y	D	—

çizelgesini elde ederiz.

(50) çizelgesi ile belirlenen bağdaşmazlığa “*materyel bağdaşmazlık*”,

(51) çizelgesiyle belirlenen bağdaşmazlığa da “*materyel-olmayan bağdaşmazlık*” diyeceğiz. Görüldüğü gibi, bir materyel bağdaşmazlığın doğru olmasının gerekli ve yeterli koşulu bileşenlerden hiç olmazsa birinin yanlış olmasından ibarettir. Örneğin:

(52) Yarın Ankara’ya gidersem, Konya’ya gitmiyeceğim önermesini “materyel” bir bağdaşmazlık şeklinde yorumlarsak, yarın Ankara’ya gitmemem veya Konya’ya gitmemem bu önermeyi doğrular. Buna karşılık, (52) önermesini *materyel olmayan* bir bağdaşmazlık şeklinde yorumlamamız halinde, yarın Ankara’ya gidip Konya’ya gitmemem bu önermenin doğrulanması için “yeterli” bir koşul değildir. (52) nin doğru olması için bir de:

(53) Yarın Konya’ya gitmiyeceğim, çünkü Ankara’ya gideceğim önermesinin doğru olması gerekir. Başka bir deyimle, bileşenleri ‘A’ ile ‘B’ gibi iki önermeden ibaret olan “materyel-olmayan” bir bağdaşmazlık ‘A’ ile ‘B’ bileşenlerinin *aynı zamanda doğru olamaması* anlamına gelir. Buna göre, materyel-olmayan bir bağdaşmazlığın salt bir bağdaşmazlık değil bir “*bağdaşamazlık*” olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumdan faydalananarak, bundan böyle ‘materyel-olmayan bağdaşmazlık’ deyimini yerine ‘*bağdaşamazlık*’ terimini kullanıp ‘*b a ğ d a ş m a z l ı k*’ terimini (başka türlü belirtilmediği hallerde) yalnız “materyel-bağdaşmazlık” anlamında kullanacağız.

İmdi (materyel) bağdaşmazlıklar sembolik mantıkta özel bir önerme-eklemi yardımıyla dile getirilir. “*B a ğ d a ş m a z l ı k - e k l e m i*” diyeceğimiz bu eklem için ‘|’ sembolü kullanılır.* Buna göre herhangi bir bağdaşmazlığı:

(54) A|B

biçiminde dile getirebiliriz. Örneğin: (52) önermesini “materyel” olarak yorumlamamız halinde, bu önermeyi:

(55) Yarın Ankara'ya gideceğim | yarın Konya'ya gideceğim biçimine dönüştürebiliriz.

Bağdaşmazlık-eklemi pratikte pek kullanılmamakla birlikte teorik açıdan önemlidir. İlerde göstereceğimiz gibi, doğruluk-fonksiyonu durumunda olan *bütün* önerme-eklemlerini salt bağdaşmazlık-eklemine geri götürmek mümkündür. Böylece, doğruluk-fonksiyonları teorisini teorik olarak sadece bağdaşmazlık-eklemi yardımıyla dile getirebiliriz.

Doğruluk-fonksiyonu durumunda olan bütün önerme-eklemleri arasında bir de “*birli te - hayırlama e k l e m i*” diyeceğimiz başka bir (“2-li”) önerme-eklemi vardır. Bu eklem günlük dilde ‘ne...ne...’ ifade şekli ile dile getirilmektedir. Örneğin:

(56) Yarın ne Ankara'ya gideceğim ne de Konya'ya gibi bir önermede geçen ‘ne...ne...’ deyimini “birlikte-hayırlama eklemi” durumundadır. Nitekim, (56) önermesinin evetlenmesi, bu önermenin bileşenleri olan ‘yarın Ankara'ya gideceğim’ önermesiyle ‘yarın Konya'ya gideceğim’ önermesini *birlikte hayırlamak* anlamına gelir. Genel olarak ta :

(57) Ne A ne B

biçimindeki herhangi bir önermenin, evetlenmesinin ‘A’ ile ‘B’ önermelerinin birlikte hayırlanması anlamına geldiğini kabul edebiliriz. Buna göre, (57) biçimindeki bir önermenin doğruluğunun gerekli ve yeterli koşulunun ne ‘A’ nın ne de ‘B’ nin doğru olmamasından, yani *hem ‘A’ nın hem de ‘B’ nin yanlış olmasından* ibaret olduğunu görüyoruz. (57) bütün öteki hallerde “yanlış” olur. Buna göre, (57) nin doğruluk-çizelgesi

(58)	A	B	ne A ne B
	D	D	Y
	D	Y	Y
	Y	D	Y
	Y	Y	D

biçiminde olmalıdır. Şu halde birlikte-hayırlama ekleminin günlük dildeki bütün kullanılışlarında *doğruluk-fonksiyonu* durumunda olduğunu söyleyebiliriz. Birlikte-hayırlama eklemi olarak ‘↓’ sembolü kullanılır. Buna göre, (57) biçimindeki herhangi bir önermeyi:

(59)

A↓B

biçimine dönüştürebiliriz. (58) veya (59) biçimindeki bir önermeye ise bir "birlikte - hayırlama" diyeceğiz.

Buraya kadar "*hayırlama-eklemi*", "*birlikte-evetleme eklemi*", "*ayrıklık-eklemi*", "*bağdaşmaz-ayrıklık eylemi*", "*koşul-eklemi*", "*karşılıklı koşul eklemi*", "*bağdaşmazlık-eklemi*" ve "*birlikte-hayırlama eklemi*" olmak üzere doğruluk-fonksiyonu durumunda olan sekiz tane ayrı önerme-eklemi ile karşılaştık. Pratikte, "*hayırlama-eklemi*", "*birlikte-evetleme eklemi*" "*ayrıklık-eklemi*", "*koşul-eklemi*" ve "*karşılıklı-koşul eklemi*" olmak üzere yalnız beş tane önerme-eklemi kullanılır. Nitekim bu eklemeler mantıksal işlemlerin yapılması için çok elverişli oldukları halde, öteki eklemeler (teorik açıdan önemli olsalar bile) bu türlü işlemlerin yapılması için pek kullanışsız ve elverişsizdir. Öte yandan, ilerde göstereceğimiz gibi, sözü geçen beş eklem, aralarından sadece ikisine geri götürülmesi mümkündür. Ancak beşinin de kullanılması sadece ikisiyle yetinmekten (işlemsel bakımdan) daha elverişli olduğundan, pratikte beşi de kullanılmaktadır.

Bundan böyle sadece doğruluk-fonksiyonu durumunda olan önerme-eklemlerini inceleyeceğimizden, "*önerme-eklemi*" deyimini salt *doğruluk-fonksiyonu* durumunda olan önerme-eklemlerine; '*koşul önermesi*' ve '*karşılıklı-koşul önermesi*' deyimlerini de salt *materyel* koşul-önermeleriyle *materyel* karşılıklı-koşul önermelerine uygulayacağız.

§ 9. Önerme-eklemlerinin Sistematik Sınıflandırılması

Şimdiye kadar, çeşitli önerme-eklemlerini günlük dildeki kullanılışları açısından, biraz da gelişi güzel bir şekilde inceledik. Burada ise *mümkün olan bütün önerme-eklemlerini (doğruluk-fonksiyonu durumunda olan önerme-eklemleri anlamında) sistematik bir şekilde inceleyerek, bunların "tüketici" bir şekilde sınıflandırılabilceğini göstereceğiz.*

İmdi, 'A₁', 'A₂', ..., 'A_n' gibi n tane önermenin birbirine eklenmesiyle meydana gelen bir molekül-önermeyi genel olarak:

(1) $f(A_1, A_2, \dots, A_n)$
 biçiminde dile getirebiliriz'. Burada 'f' sembolü bir "*n-li önerme-eklemi*"dir. 'f' eklemi (1) molekül-önermesinin "ana-eklemi" olup etki-alanı bu önermenin ana-bileşenleri olan 'A₁', 'A₂', ..., 'A_n' önermelerinden ibarettir. 'f' ekleminin doğruluk-fonksiyonu durumunda olduğunu kabul edelim. O zaman (1) önermesi bir doğruluk-fonksiyonu olup doğruluk-değeri yalnız 'A₁', 'A₂', ..., 'A_n' önermelerinin doğruluk-değerleri tarafından belirlenmiştir. Dolayısıyla (1) biçimindeki her önermeye karşılık:

(2)	A ₁	A ₂	.	.	.	A _n	f(A ₁ , A ₂ , ..., A _n)
	D	D	.	.	.	D	.
	D	D	.	.	.	Y	.
	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.
	Y	Y	.	.	.	Y	.

biçimindeki belli bir doğruluk-çizelgesi vardır. (2) biçimindeki çizelgelere "*n-li doğruluk-çizelgeleri*" diyelim. İmdi, mümkün olan bütün *n-li doğruluk-çizelgelerinin sayısının* tam $2^{(2^n)}$ olduğunu kanıtlayabiliriz. Nitekim, her *n-li doğruluk-çizelgesinin* sol yanındaki sıralar 'D' ve 'Y' harflerinin *n-er n-er* tekrarlı "*dizimler*"inden (arrangements) ibarettir. Oysa bu

dizimlerin sayısı 2^n dir. (r tane nesnenin n -er n -er tekrarlı dizimlerinin sayısı r^n dir. Bunu rekürsif olarak şöyle kanıtlıyabiliriz: $n=1$ için r tane nesnenin 1-er 1-er tekrarlı dizimlerinin sayısının $r^1=r$ olduğu meydandadır. Şu halde r tane nesnenin n -er n -er tekrarlı dizimlerinin sayısının r^n olduğunu kabul ederek, r tane nesnenin $n+1$ -er $n+1$ -er tekrarlı dizimlerinin sayısının r^{n+1} olduğunu kanıtlamamız gerekir. Oysa bu dizimleri elde etmek için söz konusu r tane nesnenin n -er n -er tekrarlı dizimlerinin her birinin sonuna bu nesnelerden birini katmak gerekli ve yeterlidir. Böylece her dizimden r tane yeni dizim elde ederiz. Eldeki dizimlerin sayısı r^n olduğuna göre, meydana getirilen yeni dizimlerin sayısı $r \cdot r^n = r^{n+1}$ olur. (İ.K.)

İmdi, herhangi iki tane farklı n -li doğruluk-çizelgesini göz önüne alalım. Bu çizelgelerin sol yanları ('D' ve 'Y' harflerinden kurulu 2^n tane dizimden ibaret olduğundan) özdeştir. Şu halde bu çizelgeler ancak sağ yanları bakımından farklı olabilirler. Oysa, herhangi bir n -li doğruluk-çizelgesinin sağ yanı 'D' ve 'Y' harflerinin 2^{n-1} -er 2^{n-1} -er tekrarlı diziminden ibarettir. Bu dizimlerin sayısı ise $2^{(2^{n-1})}$ dir. Şu halde (birbirinden farklı olan) n -li doğruluk-çizelgelerin sayısı $2^{(2^n)}$ dir. (İ.K.)

Aynı şekilde, r -değerli mantıkta $r^{(2^n)}$ tane farklı n -li doğruluk-çizelgesinin mümkün olduğunu kanıtlıyabiliriz.

İmdi, (2-değerli mantıkta) herhangi bir n -li doğruluk-çizelgesini çizmek için pratikte şöyle bir yola başvurmak mümkündür: İlk önce ' A_n ' in (yani son bileşenin) altına (bir tek) 'D' yazılır. Ondan sonra ' A_{n-1} ' in (yani sondan bir önceki bileşenin) altına alt-alta iki 'D' yazılır. Sonra da ' A_{n-2} ' nin altına alt-alta olarak dört tane 'D'; ' A_{n-3} ' ün altına alt-alta olarak sekiz tane 'D'; ' A_{n-4} ' ün altına alt-alta olarak on altı tane 'D' ... yazılır. Buna göre, ' A_n ', ' A_{n-1} ', ' A_{n-2} ', ..., ' A_2 ', ' A_1 ' in altına yazılması gereken 'D' lerin sayısının sırasıyle $2^0=1$, $2^1=2$, $2^2=4$, ..., 2^{n-2} ve 2^{n-1} olduğunu görüyoruz. (' A_n ' in ' $A_{n-(n-1)}$ ', ' A_{n-1} ' in ' $A_{n-(n-2)}$ ' ..., ' A_1 ' in ' A_{1-0} ' şeklinde yazılabileceğine dikkat edersek, ' A_i ' nin altına 2^{i-1} tane 'D' yazılması gerektiğini görürüz). İşte, bu işlemin sonunda ' A_n ' altına 2^{n-1} tane 'D' yazdıktan sonra, bunların altına alt-alta olarak bir de aynı sayıda (yani 2^{n-1} tane) 'Y' yazarız. Ondan sonra ' A_{n-1} ' in altındaki 'D' lerin altına aynı sayıda (yani 2^{n-2} tane) 'Y' yi alt-alta yazarız. Bunların altına da gene aynı sayıda 'D', onların da altına aynı sayıda 'Y' yazılır. ' A_i ' gibi herhangi bir bileşenin altındaki 2^{i-1} tane 'D' nin altına münavebe ile aynı sayıda 'Y', sonra aynı sayıda 'D' yazılır. Bu işleme her sütunda birinci

sütunda bulunan sayıda harf yazılınca kadar devam edilmelidir. Bütün bu işlemlerin sonucunda, her bileşenin altında $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ tane harften kurulu birer sütun meydana gelmiş olacaktır. İşte bu n tane sütunun yan- yana gelmesinden meydana gelen 2^n tane sıra birbirinden farklı olup 'D' ve 'Y' harflerinin n -er n -er tekrarlı dizimlerinden başka bir şey değildir. Örneğin: ' $f(A_1, A_2, A_3)$ ' gibi bir doğruluk-fonksiyonunun doğruluk-çizelgesini çizmek için, önce ' A_3 ' ün altına 1 tane 'D', sonra ' A_2 ' nin altına (alt-alta olarak) 2 tane 'D', en son da ' A_1 ' in altına 4 tane 'D' yazarız. Sonra ' A_3 ' ün altındaki 'D' lerin altına aynı sayıda (yani 4 tane) 'Y' yi alt-alta yazarız. Böylece ' A_1 ' in altında 4 tane 'D' ile 4 tane 'Y' den kurulu sekiz üyeli bir sütun meydana gelir. Bundan sonra ' A_2 ' nin altındaki 2 tane 'D' nin altına 2 tane 'Y', bunların altına gene 2 tane 'D', en son da (8'i doldurmak üzere) daha 2 tane 'Y' yazarız. ' A_3 ' ün altına da, 'D' nin altına münavebe ile bir 'Y' bir 'D' yazarak sekiz harfli sütunu tamamlarız. Böylece:

(3)	A_1	A_2	A_3	$f(A_1, A_2, A_3)$
	D	D	D	.
	D	D	Y	.
	D	Y	D	.
	D	Y	Y	.
	Y	D	D	.
	Y	D	Y	.
	Y	Y	D	.
	Y	Y	Y	.

(3) çizelgesinin her sütunu 8 üyeli olduğuna göre, ' $f(A_1, A_2, A_3)$ ' altındaki sütunun da 8 üyeli olması gerekir. Bu türlü sütunların sayısının ise (her biri 'D' ve 'Y' harflerinin 8'er 8'er tekrarlı bir diziminden ibaret olduğundan) $2^8 = 2^{(2^3)}$ olduğunu görüyoruz.

Böylece, "*1-li doğruluk-çizelgeleri*"nin sayısının $2^{(2^1)} = 2^2 = 4$; "*2 — li doğruluk-çizelgeleri*" nin sayısının $2^{(2^2)} = 2^4 = 16$; "*3-lü doğruluk çizelgeleri*"nin sayısının $2^{(2^3)} = 2^8 = 256$; "*4-lü doğruluk-çizelgeleri*"nin sayısının $2^{(2^4)} = 2^{16} = 65.536$; ... olduğunu söyleyebiliriz. İmdi, ilerde göstereceğimiz gibi, verilen herhangi bir n -li doğruluk-çizelgesine karşılık, doğruluk-çizelgesi bu çizelgeden ibaret olan bir önerme-eklemini salt ' $\sim$ ', ' $\cdot$ ' ve ' $\vee$ ' eklemleri türünden tanımlamak mümkündür. Böylece *her doğruluk-çizelgesine karşılık (en az) bir önerme-eklemi bulunduğunu* kanıtlamış oluruz. Öte yandan, *doğruluk-çizelgeleri aynı olan iki önerme-eklemi* (doğruluk-fonksiyonları teorisi çerçevesi içinde) an-

lamdaş sayılmalıdır. Nitekim ‘f’ ve ‘g’ doğruluk-çizelgeleri aynı olan herhangi iki önerme-eklemi ise, bunları ‘~’, ‘.’ ve ‘v’ türünden aynı şekilde tanımlamak mümkün olur. Dolayısıyla ‘f’ ile ‘g’ birbirine çevrilebilen semboller durumundadır. Birbirine çevrilebilen sembolleri ise “anlamdaş” sayıyoruz. (Başka bir deyimle, iki sembolün anlamdaş olmasını, bunların birbirine çevrilebilmesi şeklinde tanımlıyoruz). (İ.K.). Böylece (doğruluk-fonksiyonu durumunda olan) her önerme-ekleminin belli bir doğruluk-çizelgesi yardımıyla tek-anamlı bir şekilde belirlenebildiğini görüyoruz.

“3-lü”, “4-lü”, ..., “n-li”... önerme-eklemlerini 1-li ve 2-li eklemler türünden tanımlıyabildiğimizden, sadece sonuncuları incelemekle yetinebiliriz. “1-li” ve “2-li” eklemleri ise tüketici bir şekilde aşağıdaki karmaşık çizelgeler yardımıyla inceleyebiliriz. (Bu çizelgelerde ‘A’, ‘B’ gibi önerme-kısaltmalarını kullanacak yerde ‘p’ ve ‘q’ gibi önerme-temsillerini kullanıyoruz. Böylece çizelgeler daha genel bir anlam kazanmaktadır).

“1-li eklemler” :

		(1)	(2)	(3)	(4)
(4)	p		p	~p	
	D	D	D	Y	Y
	Y	D	Y	D	Y

Bu eklemlerin sayısının $2^{(2)} = 4$ olduğunu belirtmiştik. Bu sonuç çizelimizden doğrudan doğruya da çıkmaktadır. Çizelgedeki (3) eklemi §7 de sözünü ettiğimiz “hayırlama-eklemi”nden başka bir şey değildir. Nitekim: ‘~p’ önerme-şemasının doğruluk-çizelgesi (7-102) uyarınca:

p	~p
D	Y
Y	D

biçimindedir. Böylece ‘~’ ile (3) ekleminin doğruluk-çizelgelerinin aynı olduğunu görüyoruz. (İ.K.)

(2) eklemine “evetleme-eklemi” (*affirmation*) diyeceğiz. Nitekim, ‘f’ (2) türünden bir eklem ise, ‘f(A)’ biçimindeki herhangi bir önermeyi doğrudan doğruya ‘A’ olarak tanımlıyabiliriz. Başka bir deyimle:

$$f(A) =_{DK} A$$

gibi bir tanım yapmamız mümkündür. (‘= _{DK}’ sembolünü “tanımlama-ışareti olarak kullanıyoruz. ‘Dk’ ifadesi ‘demek’ sözcüğünün kısaltmasıdır).

(1) eklemine “1-li totoloji”, (4) eklemine de “1-li çelişme” diyoruz. Bunların anlamını ilerde aydınlatacağız.

“2-li eklemeler”:

(5)

p	q	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
D	Y	D	D	D	D	Y	Y	Y	Y	D	D	D	D	Y	Y	Y	Y
Y	D	D	D	Y	Y	D	D	Y	Y	D	D	Y	Y	D	D	Y	Y
Y	Y	D	Y	D	Y	D	Y	D	Y	D	Y	D	Y	D	Y	D	Y

“2-li eklemeler”in sayısının $2^{(2)} = 16$ olduğunu göstermiştik. Bu sonucu doğrudan doğruya çizelgeden de çıkarabiliriz. Bu 16 tane eklemi şöyle bir çizelge halinde sıralayabiliriz.

(1) TOTOLOJİ	
(2) AYRIKLIK	$p \vee q$
(3) EVRİK KOŞUL	$p \subset q$
(4) p-nin EVETLENMESİ	p
(5) KOŞUL	$p \supset q$
(6) q-nün EVETLENMESİ	q
(7) KARŞILIKLI-KOŞUL	$p \equiv q$
(8) BİRLİKTE-EVETLEME	$p \cdot q$
(16) ÇELİŞME	
(15) BİRLİKTE-HAYIRLAMA	$p \downarrow q$
(14) EVRİK-KOŞULUN HAYIRLANMASI	$p \nsubseteq q$
(13) p-nin HAYIRLANMASI	$\sim p$
(12) KOŞULUN HAYIRLANMASI	$p \nabla q$
(11) q-nün HAYIRLANMASI	$\sim q$
(10) BAĞDAŞMAZ-AYRIKLIK	$p \neq q$
(9) BAĞDAŞMAZLIK	$p \mid q$

Bu çizelgede geçen önerme-şemaları iki sütun halinde öbekleştirilmiştir. Birinci sütundaki her önerme-şeması ikinci sütunda kendi hizasında bulunan önerme-şemasının hayırlanması durumundadır. (2.ci sütundaki herhangi bir önerme-şemasının doğruluk-çizelgesi, 1.ci sütundaki karşılığının çizelgesinde ‘D’ yerine ‘Y’, ‘Y’ yerine ‘D’ koymak suretiyle elde edilebilir!). Buna göre, son sekiz eklemün ilk sekiz eklem türünden (hayırlama işlemi yardımıyla) tanımlanabileceğini, dolayısıyla “1-li” bir eklem

olan “hayırlama-eklemi”nden başka, yalnız (1) — (8) “2-li eklemeler”iyle yetinebileceğimizi görüyoruz. İmdi, bu sekiz tane 2-li eklemiden (1) eklemi, yani totoloji “işlek” değildir. (4) ve (6) eklemeleri ise “yozlaşmış” (degenerated) sayılabilir. Nitekim bu eklemelerden biriyle meydana getirilen herhangi bir önermenin doğruluk-değeri yalnız bir tek bileşenin doğruluk-değerine bağlıdır. Örneğin: ‘f’, (4) türünden bir 2-li eklem olsun. O zaman ‘f(A,B)’ biçimindeki bir önerme hep ‘A’ bileşeni ile eşdeğer olur.

Böylece geriye sadece beş tane eklem kaldığını görüyoruz. Bunlardan (3) ün doğrudan doğruya (5) türünden

$$p \subset q =_{dk} q \supset p$$

şeklinde tanımlanabileceği meydandadır. O halde geriye sadece “ayrıklık”, “koşul”, “karşılıklı-koşul” ve “birlikte-evetleme” eklemeleri kalmaktadır. İşte, daha önce de belirttiğimiz gibi, pratikte sadece bu dört 2-li eklemle bir 1-li eklem olan “hayırlama” kullanılmaktadır.

B ö l ü m III

DOĞRULUK-DEĞERİ ANALİZİ

§ 10. Geçerlilik, Tutarlılık ve Tutarsızlık

Giriş'te belirttiğimiz gibi, mantık

$$\begin{array}{l} (1) \qquad A_1 \\ \qquad A_2 \\ \qquad \cdot \\ \qquad \cdot \\ \qquad A_n \\ \qquad \therefore B \end{array}$$

biçimindeki herhangi bir çıkarımın geçerli olup olmadığını tesbit etmeğe yarayan bir metot durumundadır. Oysa, (1) gibi bir *çıkartımın geçerliliği-nin gerekli ve yeterli şartı:*

$$(2) \qquad (A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) \supset B$$

(materyel) *koşul-önermesinin mantıkça-doğru olmasından* ibarettir. Bir “önerme”nin *mantıkça-doğru* olmasını, bu önermenin “geçerli” bir *önerme-şemasının bir yerini-koyma örneği olması* şeklinde; bir “önerme-şeması”nın geçerli olmasını da, bu *önerme-şemasının yerine-koyma örneği olan her önermenin doğru olması* şeklinde tanımlıyoruz. Bu tanımlara dayanarak, (1)’in geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartının (2)’nin mantıkça-doğru olmasından ibaret olduğunu şöyle kanıtlıyabiliriz:

$$\begin{array}{l} (3) \qquad A'_1 \\ \qquad A'_2 \\ \qquad \cdot \\ \qquad \cdot \\ \qquad A'_n \\ \qquad \therefore B' \end{array}$$

(1) çıkarımının “temsilci”si olan bir çıkarım-şeması olsun. O zaman (3) ün geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartının

$$(4) \quad (A'_1 \cdot A'_2 \cdot \dots \cdot A'_n) \supset B'$$

önerme-şemasının geçerliliğinden ibaret olduğu kolayca görülür. İmdi,

(1) geçerli ise, (3) te geçerli olur. (3) geçerli ise, (4) te geçerli olur.

(4) geçerli ise, (bu önerme-şemasının bir yerine-koyma örneği olan) (2) önermesi de mantıkça-doğru olur. Öte yandan, (2) mantıkça-doğru ise,

(4) geçerli olur. (4) geçerli ise, (3) geçerli olur. (3) te geçerli ise (1) geçerli olur. (İ.K.)¹

Görüldüğü gibi, mantığın amacı olan “*çıkarmalar*”ın geçerliliğinin belirlenmesi “*önergeler*”in mantıkça-doğruluğunun belirlenmesine geri götürülebilir. İşte bu bölümde, bölünmemiş önergeler mantığı çerçevesinde önergelerin mantıkça-doğru olmasının nasıl belirlenebildiğini inceleyeceğiz. Ancak bu işe girişmeden önce, verilen herhangi bir önermenin “*mantıkça-doğru*” olmasının bu önermenin mutlak bir özelliği olmadığını, başvurulan mantık dalına bağlı olduğunu belirtmek gerek. Özellikle, önermeler mantığı (doğruluk-fonksiyonları teorisi) çerçevesinde *mantıkça-doğru* olmıyan bir önermenin mantığın başka (ve daha kuşatıcı) bir dalı olan “*niceleme mantığı*” çerçevesinde mantıkça-doğru olabildiğini ilerde göstereceğiz. Buna karşılık, önergeler mantığı çerçevesinde mantıkça-doğru olan herhangi bir önerme, mantığın bütün öteki dallarının çerçevesi içinde de mantıkça-doğrudur. Bunun gerekçesi, mantığın bütün dallarının önergeler mantığı temeli üzerine kurulmuş olmasından, dolayısıyla bu dallardan her birinin de önergeler mantığını kuşatmasından ibarettir. Bu Bölüm’de ‘*geçerli*’ ve ‘*mantıkça-doğru*’ terimlerini (başka şekilde belirtilmediği hallerde) yalnız “*önergeler mantığı açısından geçerli*” ve “*önergeler mantığı açısından mantıkça-doğru*” anlamında kullanacağız.

İmdi, § 5’te belirttiğimiz gibi, herhangi bir önermenin mantıksal-yapısını bu önermenin “*temsilci-şeması*” dediğimiz bir önerme-şeması yardımıyla dile getirebiliriz. İşte, herhangi bir önermenin “*mantıkça-doğru*” olmasının gerekli ve yeterli şartının, bu önermenin temsilci-şemasının geçerli olmasından ibaret olduğunu kanıtlayabiliriz. Nitekim, verilen bir önermenin temsilci-şeması, bu önermenin yerine-koyma örneği olduğu önerme-şemalarının her birinin de bir yerine-koyma örneğidir. Buna göre, Ö belli bir önerme, T de bu önermenin temsilci-şeması olsun. İmdi, Ö mantıkça-doğru bir önerme ise, Ş gibi geçerli bir önerme-şemasının yerine-

koyma örneği olmalıdır. Oysa T şeması Ş şemasının bir yerine-koyma örneği durumundadır. Ş geçerli olduğundan T de geçerli olur. Öte yandan, T geçerli ise, Ö önermesi T nin bir yerine-koyma örneği olduğundan, mantıkça-doğru olur. (İ.K.). Buna dayanarak, *önermelerin mantıksal-doğruluğunu* belirlemek için bunların temsilci-şeması olan *önerme-şemalarının geçerliliğini* belirlemenin yettiğini göz önünde tutacak, dolayısıyla bundan böyle sadece “önerme-şemaları”nı inceleyeceğiz.

İmdi, verilen bir önerme-şemasının geçerliliğini, bu önerme-şemasının yerine-koyma örneği olan bütün önermelerin doğru olması şeklinde tanımlamıştık. Oysa, *bir doğruluk-fonksiyonu şemasının yerine-koyma örneği olan bütün önermelerin doğru olmasının gerekli ve yeterli şartı, bu şemanın doğruluk-çizelgesinin sağ yanındaki sütunun salt ‘D’ harflerinden kurulu olmasından* ibarettir. Bunu şöyle kanıtlıyabiliriz:

Şart gereklidir:

$$(5) \quad g(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

deyimi belli bir önerme-şeması olsun. O zaman (5) şemasının yerine-koyma örneği durumunda olan her önerme

$$(6) \quad f(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

biçiminde olur. İmdi, (5) in geçerli bir doğruluk-fonksiyonu şeması olduğunu kabul edelim. Bu halde, (6) önermesinin doğruluk-değeri sadece ‘A₁’, ‘A₂’, ..., ‘A_n’ bileşenlerinin doğruluk-değeri yardımıyla belirlenir. (5) geçerli olduğundan, (6) biçimindeki her önermenin doğru olması gerekir. Bu ise, ancak (5) in karşılığı olan doğruluk-çizelgesinin sağ yanındaki sütunun salt ‘D’ harflerinden kurulu olması halinde mümkündür. (İ.K.).

Şart yeterlidir :

(5) şemasının karşılığı olan doğruluk-çizelgesinin sağ yanındaki sütunun salt ‘D’ harflerinden kurulu olduğunu kabul edelim. O zaman, (5) bir doğruluk-fonksiyonu şeması olmak şartıyla, (6) biçimindeki bütün önermeler doğru olur. Dolayısıyla (5) önerme-şeması da geçerli olur. (İ. K.).

Böylece, (önermeler mantığı çerçevesinde) herhangi bir önerme-şemasının geçerli olup olmadığının, salt bu önerme-şemasının doğruluk-çizelgesi yardımıyla tesbit edilebileceğini görüyoruz. Verilen bir doğruluk-

fonksiyonu şemasının veya bir doğruluk-fonksiyonunun doğruluk-çizelgesini "hesaplamağa" yarayan herhangi bir metoda ise "*doğruluk-değeri analizi*" diyeceğiz.

İndi pratikte kullanılan her önerme-şeması ya bir "*atomsal-şema*"-dır, ya da atomsal-şemalarla ' $\sim$ ', ' $\cdot$ ', ' $\vee$ ', ' $\supset$ ' ve ' $=$ ' eklemlerinden kurulu bir şema. Buna göre, sözü geçen beş önerme-ekleminin karşılığı olan doğruluk-çizelgelerine dayanarak, verilen herhangi bir önerme-şemasının "*doğruluk-değeri analizi*"ni, şöyle yaparız: Önce bu şemanın içinde geçen önerme-temsalcilerine mümkün olan bütün doğruluk-değerlerini sırasıyla yükleriz; sonra tüm deyimin doğruluk-değerini § 7'de gösterdiğimiz metotlardan birini uygulamak suretiyle tesbit ederiz. Örneğin: (7-129) önermesinin temsilci-şeması olan

$$(7) \quad \sim (\sim (\sim (p \vee \sim q) \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q))$$

önerme-şemasının doğruluk-değeri analizi, bu deyimin sırasıyla 'p' doğru, 'q' doğru; 'p' doğru, 'q' yanlış; 'p' yanlış, 'q' doğru; 'p' yanlış, 'q' yanlış hallerinde taşıyacağı doğruluk-değerini belirlemek suretiyle şöyle yapılır :

$$(8) \quad \sim (\sim (\sim (p \vee \sim q) \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q))$$

1.	Y D Y D D Y D	Y Y D D Y D Y D
2.	Y D Y D D D Y	Y D Y D Y D Y Y
3.	Y D D Y Y Y D	Y Y D D D Y D D
4.	Y D Y Y D D Y	Y D Y D D Y Y Y

Görüldüğü gibi, (7) gibi bir önerme-şemasının doğruluk-değeri analizi için (§ 7'de gösterilen metotlardan birine dayanan) sözü geçen işlemin tam *dört* defa tekrarlanması gerekiyor. Genel olarak bir "*n*-li önerme-şeması"nın doğruluk-değeri analizi için bu işlemi 2^n defa tekrarlamak gerek. Bu ise uzun ve yorucu bir iştir. İşte *Quine*, doğruluk-değeri analizinde bu tekrarlamaların sayısını birçok hallerde azaltan yeni bir metot ortaya atmıştır. Çok faydalı gördüğümüz bu metodu, § 11'de bütün ayrıntılarıyla göstereceğiz.

İmdi, "*doğruluk-değeri analizi*"nin (hangi metotla yürütülürse yürütülsün) önermeler mantığı için son derece önemli olduğunu söyleyebiliriz. Nitekim, böyle bir analize dayanarak herhangi bir önerme-şemasının, dolayısıyla herhangi bir önermenin ve bundan dolayı da herhangi bir çıkarımın (önermeler mantığı çerçevesi içinde) geçerli olup olmadığını tesbit etmek mümkündür. Üstelik, doğruluk-değeri analizi herhangi bir önerme-şemasının "*tutarlı*" veya "*tutarsız*" olduğunu belirlemeye de yarar. Nitekim, bir önerme-şemasının "*tutarlı*" (consistent, satisfiable) ol-

masını, bu önerme-şemasının yerine-koyma örneği olan en az bir “doğru” önermenin bulunması şeklinde tanımlıyoruz. Buna göre, bir önerme-şemasının “*t u t a r s ı z*” (inconsistent, unsatisfiable, contravalid) olması, bu önerme-şemasının “*tutarlı*” olmaması, yani bu önerme-şemasının yerine-koyma örneği olan hiç bir önermenin doğru olmaması demektir. Bu tanımlara dayanarak, herhangi bir önerme-şemasının *tutarlılığının gerekli ve yeterli şartının*, bu önerme-şemasının doğruluk-çizelgesinin sağ yanındaki sütunda *en az bir tane ‘D’* harfinin bulunması; tutarsızlığının gerekli ve yeterli şartının da bu sütunda hiç bir ‘D’ harfinin bulunmamasından ibaret olduğu kolayca görülebilir. Şu halde, *verilen bir önerme-şemasının tutarlı veya tutarsız olduğunu, salt doğruluk-değeri analizi yardımıyla belirlemek mümkündür.* (I.K.).

Örneğin: (8) doğruluk-değeri analizine dayanarak, (7) önerme-şemasının “*tutarsız*” olduğunu söyleyebiliriz. Nitekim, böyle bir analizin sonucunda (7) şemasının doğruluk-çizelgesinin:

(9)	p	q	(7)
	D	D	Y
	D	Y	Y
	Y	D	Y
	Y	Y	Y

biçiminde olduğu anlaşılır. Bu çizelgenin sağ sütunundaki harflerin, (8) çizelgesinde *ana-eklemin* altına yazılan harflerden ibaret olduğunu göz önünde tutarak, (9) doğruluk-çizelgesini çizmeden de (7) şemasının tutarsız olduğu anlaşılabilir. Genel olarak, doğruluk-analizi yapılmış olan bir önerme-şemasının “*g e ç e r l i*” olmasının gerekli ve yeterli şartı, ana-eklemin altındaki *bütün harflerin ‘D’ den ibaret olması*; “*t u t a r l ı*” olmasının gerekli ve yeterli şartı, bu harflerin arasında *en az bir ‘D’* harfinin bulunması; “*t u t a r s ı z*” olmasının gerekli ve yeterli şartı da bu harfler arasında *hiç bir ‘D’ harfinin bulunmamasıdır.*

Doğruluk-değeri analizini, bölünmemiş önermeler mantığı çerçevesinde verilen herhangi bir çıkarımın geçerli olup olmadığını belirlemek için kullanabiliriz. Nitekim, daha önce belirttiğimiz gibi, herhangi bir *çıkartımın geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı, ön-önermesi bu çıkarımın öncüllerinin birlikte-evetlenmesinden, ard-önermesi de çıkarımın sonucundan ibaret olan (materyel) koşul-önermesinin geçerli olmasından başka bir şey değildir.* Örneğin:

(10)	A
	B
	∴ A.B

biçimindeki bir çıkarımın geçerli olup olmadığını araştıralım. Bu amaçla

$$(11) \quad (A \cdot B) \supset (A \cdot B)$$

önermesinin mantıkça-doğru, dolayısıyla de bu önermenin temsilci-şeması olan

$$(12) \quad (p \cdot q) \supset (p \cdot q)$$

önerme-şemasının geçerli olup olmadığını belirlemek gerekecektir. Bunun için de (12) şemasının doğruluk-değeri anlizini şöylesine yaparız:

$$(13) \quad \begin{array}{ccccccc} (p \cdot q) & \supset & (p \cdot q) \\ D & D & D & D & D & D & D \\ D & Y & Y & D & D & Y & Y \\ Y & Y & D & D & Y & Y & D \\ Y & Y & Y & D & Y & Y & Y \end{array}$$

İmdi, (12) şemasının ana-eklemi ‘ $\supset$ ’ dir. Oysa, (13) çizelgesinde ‘ $\supset$ ’ nin altındaki sütunun salt ‘D’ harflerinden kurulu olduğunu görüyoruz. Şu halde (12) şemasının, dolayısıyla de (10) çıkarımının geçerli olduğu sonucuna varıyoruz.

§11. Eşdeğerlik-Bağlantısı ve Quine-Çizelgeleri

$$(1) \quad f(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

ve

$$(2) \quad g(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

gibi her birinde ‘ p_1 ’, ‘ p_2 ’ , ‘ p_n ’ önerme-temsilcilerinin geçtiği iki önerme-şemasını göz önüne alalım. (1) şemasının doğruluk-çizelgesiyle (2) şemasının doğruluk-çizelgesinin birbiriyle özdeş olması halinde, bu iki şemanın “*e ş d e ğ e r*” olduğunu söyleyeceğiz.

Örneğin: ‘ $p \supset q$ ’ ile ‘ $\sim p \vee q$ ’ önerme-şemalarının her birinin doğruluk-çizelgesini çizelim:

p	q	<u>$p \supset q$</u>	p	q	$\sim p \vee q$
D	D	D	D	D	D
D	Y	Y	D	Y	Y
Y	D	D	Y	D	D
Y	Y	D	Y	Y	D

Görüldüğü gibi, bu iki doğruluk-çizelgesi birbiriyle özdeşdir. Şu halde ‘ $p \supset q$ ’ ile ‘ $\sim p \vee q$ ’ önerme-şemalarının “eşdeğer” olduğu anlaşılır.

Genel olarak, (1) ve (2) gibi herhangi iki önerme-şemasının “eşdeğer olup olmadığını kolaylıkla tesbit edebilmek için bu şemaların doğruluk-çizelgelerini

(3) p_1	p_2	$\dots$	p_n	$f(p_1, p_2, \dots, p_n)$	$g(p_1, p_2, \dots, p_n)$
D	D	$\dots$	D	.	.
D	D	$\dots$	Y	.	.
.	.	$\dots$	.	.	.
.	.	$\dots$	.	.	.
Y	Y	$\dots$	Y	.	.

biçimindeki bir tek karmaşık çizelge halinde birleştiririz. O zaman (1) ile (2) nin eşdeğerliğinin gerekli ve yeterli şartının, (3) çizelgesinin sağ yanındaki iki sütunun özdeşliğinden ibaret olduğunu söyleyebiliriz.

Örneğin: ‘ $p \supset q$ ’ ile ‘ $\sim p \vee q$ ’ şemalarının eşdeğer olduğu

p	q	$p \supset q$	$\sim p \vee q$
D	D	D	D
D	Y	Y	Y
Y	D	D	D
Y	Y	D	D

çizelgesinden anlaşılır.

İmdi, (3) biçimindeki karmaşık çizelgeleri, ayrı ayrı önerme-temsilcilerini içine alan önerme-şemaları haline de uygulanacak şekilde genelleştirebiliriz. Örneğin: ‘ $\sim p$ ’ ile ‘ $\sim p \cdot (q \vee \sim q)$ ’ gibi iki önerme şemasını göz önüne alalım. Görüldüğü gibi, ‘q’ önerme-temsilcisi bu şemaların ikincisinde geçtiği halde, birincisinde hiç geçmiyor. İmdi, birinci şemaya, yani ‘ $\sim p$ ’ deyimine yüklenilebilen doğruluk-değerleri salt ‘p’ ye yüklenilen doğruluk-değerlerine bağlı olup ‘q’ ye yüklenilen doğruluk-değerlerinden bağımsızdır. Bu durumu göz önünde tutarak, söz konusu ‘ $\sim p$ ’ ile ‘ $\sim p \cdot (q \vee \sim q)$ ’ şemalarının karşılığı olarak şöyle bir karmaşık çizelge kurabiliriz:

p	q	$\sim p$	$\sim p \cdot (q \vee \sim q)$
D	D	Y	Y
D	Y	Y	Y
Y	D	D	D
Y	Y	D	D

Bu çizelgede ‘ $\sim p$ ’ nin altındaki sütunun ‘ $\sim p \cdot (q \vee \sim q)$ ’ nün altın-

daki sütunla özdeş olduğunu görüyoruz. Buna göre, sözü geçen iki önerme-şemasının “eşdeğer” olduğunu söyleyeceğiz.

Genel olarak S_1 ve S_2 gibi (doğruluk-fonksiyonu durumunda olan) herhangi iki önerme-şemasının “eşdeğer” olmasını şöyle tanımlıyoruz: Bu iki şemanın en az birinde geçen önerme-temsilcilerinin ‘ p_1 ’, ‘ p_2 ’, . . . , ‘ p_n ’ den ibaret olması halinde

(4)	p_1	p_2	. . .	p_n	S_1	S_2
	D	D	. . .	D	.	.
	D	D	. . .	Y	.	.
	.	.	. . .	.	.	.
	.	.	. . .	.	.	.
	Y	Y	.	Y	.	.

biçiminde karmaşık bir çizelge kurulur. Çizelgede S_1 in altındaki sütun, salt bu şemanın içinde geçen önerme-temsilcilerine (çizelgenin solundaki sütunlara bakarak) yüklenen doğruluk-değerlerine dayanarak meydana getirilir. S_2 nin altındaki sütun da, aynı şekilde, sadece bu şemanın içinde geçen önerme-temsilcilerine yüklenen doğruluk-değerlerine dayanılarak meydana getirilir. İşte, bu iki sütunun birbiriyle özdeş olması halinde, S_1 ve S_2 şemalarına “eşdeğer” diyeceğiz.

“Eşdeğerliği”, içlerinde bazı önermelerin bileşen olarak geçtiği önerme-şemaları halinde de tanımlıyabiliriz. Ancak bu halde, sözü geçen bileşen-önermelerin her birinin doğruluk-değerini bilmek gerekir. Nitekim:

$$(5) \quad f(p_1, p_2, \dots, p_n, A_1, A_2, \dots, A_m)$$

biçiminde, içinde bileşen olarak ‘ p_1 ’, ‘ p_2 ’, . . . , ‘ p_n ’ gibi n tane önerme-temsilcisi ve ‘ A_1 ’, ‘ A_2 ’, . . . , ‘ A_m ’ gibi m tane önerme geçen bir önerme-şemasını göz önüne alalım. Böyle bir önerme-şemasının yüklendiği doğruluk-değerlerini, bir yandan ‘ p_1 ’, ‘ p_2 ’, . . . , ‘ p_n ’ önerme-temsilcilerine (doğruluk-çizelgesinin solundaki sütunları uyarınca) yüklenen doğruluk-değerlerine, öbür yandan da ‘ A_1 ’, ‘ A_2 ’, . . . , ‘ A_m ’ önermelerinin her birinin (içeriği gereğince) gerçekte taşıdığı doğruluk-değerine dayanarak belirlemek mümkündür.

İmdi, S_1 ve S_2 nin (5) biçiminde herhangi iki önerme-şeması olduğunu, ayrıca bunların içinde bileşen olarak geçen önermelerin her birinin taşıdığı doğruluk-değerini bildiğimizi kabul edelim. O zaman (4) biçimindeki karmaşık bir çizelge kurmak suretiyle S_1 ile S_2 nin eşdeğer olup olmadığını tesbit edebiliriz. Özel hal veya daha doğrusu, sıradan hali (ya da

“yczlaşmış” hal) olarak, S_1 ile S_2 formüllerinden birinin doğruluk-değeri bilinen bir önerme olduğunu kabul edelim. Örneğin: S_2 *doğru* olduğu bilinen bir önerme olsun. O zaman S_1 deyiminin içinde geçen önerme-temsilcilerinin ‘ p_1 ’, ‘ p_2 ’, ... , ‘ p_n ’ harflerinden ibaret olması halinde, (4) çizelgesi:

(6)	p_1	p_2	.	.	.	p_n	S_1	S_2
	D	D	.	.	.	D	.	D
	D	D	.	.	.	Y	.	D
	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.
	Y	Y	.	.	.	Y	.	D

biçimine girer. Nitekim, S_2 deyimini “doğru” bir önermeden ibaret olduğundan, söz konusu n tane önerme-temsilcisine yüklenen doğruluk-değerleri ne olursa olsun, S_2 nin doğruluk-değerinin hep ‘D’ olarak kalacağı meydandadır. Özel bir örnek olarak S_1 şemasının ‘ $p \vee \sim p$ ’ den ibaret olduğunu kabul edelim. O zaman (6) çizelgesi:

p	q	$p \vee \sim q$	S_2
D	D	D	D
D	Y	D	D
Y	D	D	D
Y	Y	D	D

biçimine girer. Bu çizelgeden ‘ $p \vee \sim p$ ’ önerme-şemasıyla herhangi “doğru” bir önermenin “eşdeğer” olduğu anlaşılır.

Son bir hal olarak, gerek S_1 gerek S_2 nin (doğruluk-değeri bilinen) birer önerme olduğunu düşünelim. O zaman ne S_1 in, ne de S_2 nin içinde hiç bir önerme-temsilcisinin geçmemesi gerekir. Ancak bu halde, keyfebağlı olarak ‘ p_1 ’, ‘ p_2 ’, ... , ‘ p_n ’ gibi n tane ($n = 1$ olabilir) önerme-temsilcisini seçerek gene de (4) biçiminde karmaşık bir çizelge kurmak mümkündür. Örneğin: S_1 deyiminin “doğru”, S_2 deyiminin de “yanlış” bir önerme olduğunu kabul edelim. O zaman (4) çizelgesi:

(7)	p_1	p_2	.	.	.	p_n	S_1	S_2
	D	D	.	.	.	D	D	Y
	D	D	.	.	.	Y	D	Y
	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.
	Y	Y	.	.	.	Y	D	Y

biçimini alır. S_1 ile S_2 nin eşdeğer olmasını, birinin altındaki sütunun ötekini altındaki sütunla özdeş olması şeklinde tanımladığımızdan; böyle bir eşdeğerliğin gerekli ve yeterli şartının bu iki önermenin aynı doğruluk-değerini taşımasından ibaret olduğunu söyleyebiliriz.

Böylece S_1 ve S_2 gibi herhangi iki “tam-deyim” (yani “önerme” veya “önerme-şeması”nın) “eşdeğer” olmasını en genel bir şekilde tanımlamak mümkün oluyor. Nitekim, S_1 ile S_2 tam-deyimlerinin eşdeğerliğini, bu tam-deyimlerin karşılığı olan (4) biçimindeki karmaşık çizelgenin sağındaki iki sütunun birbiriyle özdeş olması şeklinde tanımlıyoruz. Gördüğümüz gibi, § 6’da yalnız “önermeler”e uygulanacak şekilde tanımladığımız “eşdeğerlik”, burada her türlü “tam-deyimler”e uygulanabilen eşdeğerlik bağlantısının özel bir halinden başka bir şey olmuyor.”

- (a) Her tam-deyim kendiyle eşdeğerdir. Eşdeğerlik “dönüşümlü” (reflexive) dir.

$$S \leftrightarrow S$$

- (b) Herhangi bir tam-deyim başka bir tam-deyimle eşdeğer ise, ikincisi de birincisi ile eşdeğer olur. Eşdeğerlik “bakışimli” (symmetric) dir.

$$S_1 \leftrightarrow S_2 \text{ ise, } S_2 \leftrightarrow S_1 \text{ olur.}$$

- (c) Verilen bir tam-deyim ikinci bir tam-deyimle, ikinci tam-deyim de üçüncü bir tam-deyimle eşdeğer ise, birinci tam-deyim üçüncüsü ile eşdeğer olur. Eşdeğerlik “geçişli” (transitive) dir.

$$S_1 \leftrightarrow S_2 \text{ ve } S_2 \leftrightarrow S_3 \text{ ise, } S_1 \leftrightarrow S_3 \text{ olur.}$$

- (d) Bir yandan “geçerli” olan herhangi iki tam-deyim, öbür yandan da “tutarsız” olan herhangi iki tam-deyim her zaman birbiriyle eşdeğer olur.

$$S_1 \text{ geçerli ve } S_2 \text{ geçerli ise, } S_1 \leftrightarrow S_2 \text{ olur:}$$

$$S_1 \text{ tutarsız ve } S_2 \text{ tutarsız ise, } S_1 \leftrightarrow S_2 \text{ olur.}$$

- (e) *Değiş-tokuş edebilme kanunu:* S_1 gibi verilen bir tam-deyimde, bu tam-deyimden bileşeni olan S_2 gibi bir tam-deyimden bir veya daha çok sayıdaki geçişlerini S_2 ile eşdeğer olan S_3 gibi herhangi bir tam-deyimle değiş-tokuş etmek suretiyle elde edilen S_1 formülü S_1 ile eşdeğer olur.

S_2 , S_1 in bir bileşeni; $S_2 \leftrightarrow S_3$ ve; S_4 , S_1 de S_2 nin bir veya daha

çok sayıda geçişlerinin S_3 ile değiş-tokuş edilmesiyle elde edilen bir tam-deyim ise; $S_1 \leftrightarrow S_4$ olur.

- (f) S_1 , verilen bir tam-deyim; S_2 , S_1 'in bir bileşeni; S_3 , S_2 ile eşdeğer olan herhangi bir tam-deyim; S_4 te, S_1 'de S_2 'nin bir veya daha çok sayıdaki geçişlerinin S_3 ile değiş-tokuş edilmesiyle elde edilen bir tam-deyim olsun. O zaman: S_1 geçerli ise S_4 te geçerli olur; S_1 geçersiz ise, S_4 te geçersiz olur; S_1 tutarlı ise, S_4 te tutarlı olur; S_1 tutarsız ise, S_4 te tutarsız olur.
- (g) S_1 ile S_2 verilen iki tam-deyim; S_3 , S_1 veya S_2 nin bir bileşeni; S_4 , S_3 ile eşdeğer olan herhangi bir tam-deyim; S_5 , S_1 de S_3 bileşeninin (eğer böyle bir bileşeni varsa) bir veya daha çok sayıdaki geçişlerinin S_4 ile değiş-tokuş edilmesiyle elde edilen bir tam-deyim; S_6 , S_2 de S_3 bileşeninin (eğer böyle bir bileşeni varsa) bir veya daha çok sayıdaki geçişlerinin S_4 ile değiş-tokuş edilmesiyle elde edilen bir tam-deyim olsun. O zaman: S_1 ile S_2 eşdeğer ise S_5 ile S_6 eşdeğer olur; S_1 ile S_2 eşdeğer değilse, S_5 ile S_6 eşdeğer olmaz; S_1 , S_2 yi içerirse, S_5 , S_6 yi içerir; S_1 , S_2 yi içermeyse, S_5 , S_6 'yı içermeyiz. (Başka bir deyimie, eşdeğer tam-deyimlerin değiş-tokuşu *geçerliliği*, *geçersizliği*, *tutarlılığı*, *tutarsızlığı*, *eşdeğerliği*, *eşdeğer-olmama*yı, *içermeyi* ve *içermemeyi* saklar).

Buna karşılık, *temsilci-harflere uygulanan yerine-koyma işlemi* (yani önerme-şemalarında geçen temsilci-harflerin yerine herhangi birer tam-deyimden konulması) “geçerliliği”, “tutarsızlığı”, “eşdeğerliği” ve “içermeyi” sakladığı halde; “tutarlılığı”, “geçersizliği”, “eşdeğer-olmama-yı” ve “içermemeyi” genel olarak *saklamaz*. (Örneğin: *tutarlı* bir önerme-şeması olan ‘($\sim pq$) . r’ deviminde ‘q’ yerine ‘p’ koymakla elde edilen ‘($\sim pp$) . r’ *tutarsız* bir tam-deyimdir.)

İmdi, §10’da sözünü ettiğimiz “Quine metodu” aşağıda göstereceğimiz bir takım eşdeğerliklere dayanmaktadır. Söz konusu eşdeğerlikler bir bileşeni doğruluk-değeri bilinen bir önermeden, öbürü ise büsbütün keyfe-bağlı olan bir tam-deyimden ibaret olan bileşik bir tam-deyimden daha basit bir tam-deyimle eşdeğerliği şeklindedir. İmdi, §7’de yaptığımız gibi, ‘D’ harfini keyfe-bağlı olarak seçilmiş olup “doğru” olduğu bilinen bir önermenin kısaltması, ‘Y’ harfini de gene keyfe-bağlı seçilmiş olup “yanlış” olduğu bilinen bir önermenin kısaltması sayalım. Ayrıca, ‘A’ harfi herhangi bir düzgün tam-deyimden (yani bir önermenin veya önerme-şemasının) kısaltması olsun. O zaman şu eşdeğerlikleri kolayca kanıtlıyabiliriz: ‘...’ ve ‘---’ gibi iki tam-deyimden eşdeğer olduğunu

$$'...' \leftrightarrow '---'$$

şeklinde dile getiriyoruz).

(8)	I . 1	' $\sim D$ '	$\leftrightarrow$	'Y'
	I . 2	' $\sim Y$ '	$\leftrightarrow$	'D'
	II . 1	'D . A'	$\leftrightarrow$	'A'
	II . 2	'A . D'	$\leftrightarrow$	'A'
	II . 3	'Y . A'	$\leftrightarrow$	'Y'
	II . 4	'A . Y'	$\leftrightarrow$	'Y'
	III . 1	'D $\vee$ A'	$\leftrightarrow$	'D'
	III . 2	'A $\vee$ D'	$\leftrightarrow$	'D'
	III . 3	'Y $\vee$ A'	$\leftrightarrow$	'A'
	III . 4	'A $\vee$ Y'	$\leftrightarrow$	'A'
	IV . 1	'D $\supset$ A'	$\leftrightarrow$	'A'
	IV . 2	'A $\supset$ D'	$\leftrightarrow$	'D'
	IV . 3	'Y $\supset$ A'	$\leftrightarrow$	'D'
	IV . 4	'A $\supset$ Y'	$\leftrightarrow$	' $\sim A$ '
	V . 1	'D $\equiv$ A'	$\leftrightarrow$	'A'
	V . 2	'A $\equiv$ D'	$\leftrightarrow$	'A'
	V . 3	'Y $\equiv$ A'	$\leftrightarrow$	' $\sim A$ '
	V . 4	'A $\equiv$ Y'	$\leftrightarrow$	' $\sim A$ '

Bu eşdeğerlikleri aşağıda yazılı kurallar şeklinde dile getirmek te mümkündür:

- (9) I. “Doğru bir önermenin hayırlanması “yanlış” bir önermeyle; “yanlış” bir önermenin hayırlanması da doğru bir önermeyle eşdeğerdir.
- II. Bir bileşeni “doğru” olan bir *birlikte-evetleme* öbür bileşeniyle eşdeğerdir. Bir bileşeni “yanlış” olan bir *birlikte-evetleme* ise “yanlış” bir önermeyle eşdeğerdir.
- III. Bir bileşeni “doğru” olan bir *ayrıklık* “doğru” bir önermeyle eşdeğerdir. Bir bileşeni “yanlış” olan bir *ayrıklık* ise öbür bileşeniyle eşdeğerdir.
- IV. Bir bileşeni “doğru” olan bir “*koşullu*” (yani bir “koşullu tam-deyim”) ard-bileşeniyle eşdeğerdir. Bir bileşeni “yanlış” olan bir *koşullu* ise ön-bileşeninin hayırlanmasıyla eşdeğerdir.³
- V. Bir bileşeni “doğru” olan bir “*karşılıklı-koşullu*” (yani bir “karşılıklı-koşullu tam-deyim”) öbür bileşeniyle eşdeğerdir. Bir bileşeni “yanlış” olan bir *karşılıklı-koşullu* ise öbür bileşeninin hayırlanmasıyla eşdeğerdir.

İmdi, ' $f(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ ' gibi herhangi bir önerme-şemasını göz önüne alalım. İlk önce bu şemanın içinde geçen önerme-temsalcilerinden biri, örneğin ' p_1 ' seçilerek bu harfin yerine sırasıyla 'D' ve 'Y' harfleri konur. Bu suretle elde edilen tam-deyimlerin birincisi şemanızın sol altına, ikincisi de sağ altına yazılır. Birinci tam-deyim ' $f(D, p_2, p_3, \dots, p_n)$ ', ikincisi ise ' $f(Y, p_2, p_3, \dots, p_n)$ ' biçimindedir.

Ondan sonra, bu iki deyimde I - V kurallarını (bir de değiş-tokuş edilebilme ilkesini) uygulayarak, birincisini onunla eşdeğer olan ' $g(p_2, p_3, \dots, p_n)$ ' gibi daha basit bir deyime; ikincisini de gene onunla eşdeğer olan ' $h(p_2, p_3, \dots, p_n)$ ' gibi daha basit bir deyime çevirebiliriz. Bundan sonra da aynı işlem bu iki yeni deyim her biri için tekrarlanır. Bir yandan ' $g(p_2, p_3, \dots, p_n)$ ' deyiminde geçen bir önerme-temsilcisi, örneğin ' p_2 ' seçilerek bu harfin yerine sırasıyla 'D' ile 'Y' harfleri konup elde edilen deyimler ' $g(p_2, p_3, \dots, p_n)$ ' in sol ve sağ altına yazılır. Öbür yandan da ' $g(p_2, p_3, \dots, p_n)$ ' deyiminde geçen belli bir önerme-temsilcisi seçilerek onun yerine sırasıyla 'D' ve 'Y' harfleri konup elde edilen deyimler bu deyim in sol ve sağ altına yazılır... Bu işlemler (I - V kuralları yardımıyla sadeleştirilerek) elde edilen deyimler sadece 'D' veya 'Y' harfinden ibaret oluncaya kadar tekrarlanır. Böylece:

$$\begin{array}{cccc}
 (10) & & f(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) & \\
 & f(D, p_2, p_3, \dots, p_n) & & f(Y, p_2, p_3, \dots, p_n) \\
 & \vdots & & \vdots \\
 & \vdots & & \vdots \\
 & g(p_2, p_3, \dots, p_n) & & h(p_2, p_3, \dots, p_n) \\
 g(D, p_3, \dots, p_n) & g(Y, p_3, \dots, p_n) & h(D, p_3, \dots, p_n) & h(Y, p_3, \dots, p_n) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 j(p_3, \dots, p_n) & k(p_3, \dots, p_n) & l(p_3, \dots, p_n) & m(p_3, \dots, p_n) \\
 \dots\dots\dots & & & \\
 \dots\dots\dots & & &
 \end{array}$$

biçiminde bir çizelge meydana gelir. (10) çizelgesinin son sırası salt 'D' veya 'Y' harflerinden kuruludur. Bu harfler ise, çizelgenin başındaki ' $f(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ ' deyiminin doğruluk-çizelgesinin sağ yanındaki sütunu meydana getiren harflerinden başka bir şey değildir.⁴ Böylece (10) çizelgesine dayanarak, verilen herhangi bir önerme-şemasının doğruluk-çizelgesini elde etmenin mümkün olduğunu görüyoruz. Şu halde, (10) çizelgesinin kurulması işleminin "doğruluk-değeri analizi"nin bir şekli olduğunu söyleyebiliriz. İşte "*Quine metodu*", ' $f(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ' gibi bir

önerme-şemasının doğruluk-değeri analizinin (10) biçimindeki bir çizelge yardımıyla yapılmasından ibarettir. (10) çizelgesine ' $f(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ' tam-deyiminin "*Quine-çizelgesi*" diyeceğiz. Buna göre, herhangi bir tam-deyimin "*geçerli*" olmasını, bu deyimin Quine-çizelgesindeki son harflerin salt 'D' harflerinden ibaret olması; tam-deyimin "*tutarlı*" olmasını bunlar arasında en az bir 'D' harfinin bulunması; tam-deyimin "*tutarsız*" olmasını da hiç bir 'D' harfinin bulunmaması şeklinde tanımlıyabiliriz.

Örnek olarak:

$$(11) \quad ((p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim r)) \supset (q \equiv r)$$

gibi karmaşık bir önerme-şemasının Quine-çizelgesini kurmağa çalışalım. Bu türlü karmaşık tam-deyimleri daha basit bir şekilde dile getirmek amacıyla bundan böyle şu uzlaşımları yapacağız:

- (i) *Birlikte-evetleme* eklemının etki-alanının önünde hayırlama-işareti buiunan veya bulunmıyan ikişer harften ibaret olması halinde, eklemi "nokta" işareti ile dile getirecek yerde, sadece bu iki harfi yanyana yazabiliriz. (Örneğin: ' $p \cdot q$ ' gibi bir deyimi ' pq ' şeklinde, ' $\sim p \cdot q$ ' gibi bir deyimi de ' $\sim pq$ ' şeklinde yazabiliriz).
- (ii) (i) uzlaşımı uyarınca dile getirilen birlikte-evetleme eklemının "ekleyici-gücü"nün ayrıklık-eklemının ekleyici-gücünden daha büyük olduğunu, başka bir deyimle, ' $AB \vee C$ ' gibi bir formülün hep ' $(AB) \vee C$ ', ' $\sim AB \vee C$ ' gibi bir formülün de hep ' $(\sim AB) \vee C$ ' anlamına geldiğini kabul edeceğiz. Böylece ' $(AB) \vee C$ ' veya ' $(\sim AB \vee C)$ ' biçimindeki deyimlerde parantezleri kaldırmak mümkün olur.
- (iii) Birlikte-evetleme eklemiyle ayrıklık-eklemının "ekleyici gücünün biryol bütün öteki 2-li eklemelerin, özellikle koşul-eklemının ve karşılıklı-koşul eklemının "ekleyici-gücünden" daha büyük olduğunu kabul edeceğiz. Başka bir deyimle, ' $A \cdot B \supset C$ ', ' $A \vee B \supset C$ ', ' $A \cdot B \equiv C$ ' ve ' $A \vee B \equiv C$ ' deyimlerini sırasıyla hep ' $(A \cdot B) \supset C$ ', ' $(A \vee B) \supset C$ ', ' $(A \cdot B) \equiv C$ ' ve ' $(A \vee B) \equiv C$ ' şeklinde yorumlayacağız. Böylece bu gibi hallerde parantezlerin kullanılmasına lüzum kalmaz. Buna karşılık ' $A \cdot (B \supset C)$ ', ' $A \vee (B \supset C)$ ', ' $A \cdot (B \equiv C)$ ' veya ' $A \vee (B \equiv C)$ ' gibi bir deyimde parantezlerin kaldırılamayacağı meydandadır.

(i) - (iii) uzlaşımları uyarınca dile getirilen herhangi bir tam-deyimin Quine-çizelgesini kurduğumuzda, ' $\sim p$ ' gibi hayırlanmış bir harfin

yerine 'D' veya 'Y' harfini koyacak yerde, doğrudan doğruya birinci halde 'Y', ikinci halde ise 'D' yazacağız. Örneğin: ' $\sim p \sim r$ ' gibi bir deyimde 'p' nin yerine 'D' harfini koymak gerektiğinde, ilk önce ' $\sim D \sim r$ ', sonra da ' $Y \sim r$ ' yazacak yerde, doğrudan doğruya ' $Y \sim r$ ' yazarız. Aynı şekilde, ' $\sim p \sim r$ ' deyiminde 'p' yerine 'Y' koymak gerekince, doğrudan doğruya ' $D \sim r$ ' yazarız.

İmdi, sözü geçen (11) deyimini (i) - (iii) uzlaşımları uyarınca:

$$(12) \quad pq \vee \sim p \sim r \supset (q \equiv r)$$

biçimine çevirebiliriz. (12) nin Quine-çizelgesi ise şöyle olur:

$$(13) \quad pq \vee \sim p \sim r \supset (q \equiv r)$$

$$Dq \vee Y \sim r \supset (q \equiv r)$$

$$q \vee Y \supset (q \equiv r)$$

$$q \supset (q \equiv r)$$

$$D \supset (D \equiv r)$$

$$D \equiv r$$

$$r$$

$$D \quad Y$$

$$Yq \vee D \sim r \supset (q \equiv r)$$

$$Y \vee \sim r \supset (q \equiv r)$$

$$\sim r \supset (q \equiv r)$$

$$Y \supset (q \equiv D)$$

$$D$$

$$D \supset (q \equiv Y)$$

$$q \equiv Y$$

$$\sim q$$

$$Y \quad D$$

(13) çizelgesi şöyle kurulur: İlk önce (12) deyiminde 'p' önerme-temsilcisi yerine 'D' harfini koyarız. Böylece elde edilen deyim (13) ün sol altına yazarız. Ondan sonra (13)'te 'p' yerine 'Y' koyup elde edilen deyim (13)'ün sağ altına yazarız. Bundan sonra da her iki deyim (I) - (V) kurallarına dayanarak sadeleştiririz. Bu amaçla yapılan işlemler şunlardır:

İlk önce soldaki deyim, yani

$$'Dq \vee Y \sim r \supset (q \equiv r)$$

deyimini ele alalım. Bu deyim sol başındaki 'Dq' bileşenini (II) kuralı uyarınca 'q' ye, ikinci bileşeni olan 'Y $\sim r$ ' deyimini de gene (II) uyarınca 'Y' ye çeviririz. Böylece elden edilen

$$q \vee Y \supset (q \equiv r)$$

deyiminin sol başındaki 'q $\vee Y$ ' bileşeni (III) gereği 'q' ye eşdeğer olduğundan, bu deyim tümünü:

$$q \supset (q \equiv r)$$

deyimine çeviririz. Bu deyim ise, içinde artık 'D' veya 'Y' harfi geçmedi-

ğinden, daha fazla sadeleşemez. Öte yandan bu deyimde gene bir takım önerme-temsalcileri geçtiğinden, ilk işlemi tekrarlamak, başka bir deyimle, bu önerme-temsalcilerinden birini seçip yerine sırasıyla 'D' ile 'Y' harfi koymak gerekir. Böyle bir işlem için de ilgili tam-deyimin *içinde geçişlerinin sayısı en çok olan önerme-temsalcisinin seçilmesi faydalıdır*. Söz konusu tam-deyimde ise 'q' ile 'r' önerme-temsalcilerinin geçtiğini, birincisinin *iki* geçişi, ikincisinin ise yalnız *bir* geçişi olduğunu görüyoruz. Buna göre 'q' önerme-temsalcisini seçip yerine sırasıyla 'D' ile 'Y' harfini koymamız uygundur. Böylece, bir yandan

$$D \supset (D = r)$$

öbür yandan da

$$Y \supset (Y = r)$$

deyimlerini elde ederiz. Bunlardan birincisini (IV) gereği 'D = r' ye, bu son deymi de (V) gereği 'r' ye çeviririz. ('r' deymi tek-harfli bir şema olup yerine sırasıyla 'D' ile 'Y' koymak gerekir). İkincisini ise gene (IV) gereğince 'D' ye çeviririz.

Sağdaki deyme, yani

$$Yq \vee D \sim r \supset (q = r)$$

ye gelince: bu deyim sol baştaki bileşeni olan 'Yq' deyiminin (II) gereği 'Y' ile; ikinci bileşeni olan 'D ~ r' nin de gene (II) gereği '~r' ile eşdeğer olduğunu görüyoruz. Dolayısıyla deyim tümünü:

$$Y \vee \sim r \supset (q = r)$$

ye çeviririz. Bu deyim sol başındaki bileşeni olan 'Y v ~r' deymi (III) gereği '~r' ile eşdeğer olduğundan, deyim tümünü:

$$\sim r \supset (q = r)$$

ye çeviririz. Bu deyimde ise ne 'D' harfi, ne de 'Y' harfi geçiyor. Buna karşı, deyim içinde 'q' ve 'r' olmak üzere iki önerme-temsalcisinin bulunduğunu görüyoruz. 'q' nün bir tek geçişi, 'r' nin ise *iki* geçişi olduğunu göz önünde tutarak, 'q' yü değil de 'r' yi seçerek, yerine sırasıyla 'D' ve 'Y' harflerini koyarız. Böylece, bir yandan

$$Y \supset (q = D)$$

öbür yandan da

$$D \supset (q = Y)$$

deyimlerini elde ederiz. Bunlardan birincisi (IV) gereği 'D' ye çevrilir. İkincisi ise gene (IV) gereği 'q = Y' deyimine çevrilir. Bu son formülü de (V) gereği 'D' ye çeviririz.

İmdi, (13) çizelgesine dayanarak, söz konusu (12) önerme-şemasının doğruluk-çizelgesinin aşağıdaki şekilde olduğu sonucunu çıkarabiliriz:

(14)	p	q	r	$pq \vee \sim p \sim r \supset (q \equiv r)$
	D	D	D	D
	D	D	Y	Y
	D	Y	D	D
	D	Y	Y	D
	Y	D	D	D
	Y	D	Y	Y
	Y	Y	D	D
	Y	Y	Y	D

(14) çizelgesinden, (12) tam-deyiminin *geçerli olmamakla* birlikte *tutarlı* olduğu anlaşılır. Ancak (13) deyiminin bu niteliğini tesbit etmek için hiç te (14) doğruluk-çizelgesini belirttik bri şekilde çizmek gerekmiyor. (12) nin geçerli olmayıp tutarlı olduğunu, doğrudan doğruya (13) Quine-çizelgesinden anlıyabiliriz. Nitekim, (13) çizelgesinin sonundaki harfler arasında hem 'D' hem de 'Y' geçtiğini görüyoruz.

Quine-metoduna dayanarak, bir takım önerme-şemalarının ("salt-şemalar"ın) geçerli olduğu tesbit edildikten, başka bir deyimle, bir takım "*totolojiler*"in bulunmasından sonra, verilen herhangi bir tam-deyimin Quine-çizelgesini daha da sadeleştirmek mümkündür. Nitekim, böyle bir çizelgede rastlanan herhangi bir salt-şemayı önceden bildiğimiz bir "*totoloji*" olarak tanıyabildiğimiz anda, bu tam-deyimin altına doğrudan doğruya 'D' harfini yazabiliriz. Öte yandan, rastlanan salt-şemayı önceden bildiğimiz bir "*çelişme*" (contradiction) yani tutarsız bir salt-şema olarak tanıyabilirsek, bu tam-deyimin altına doğrudan doğruya 'Y' harfini yazabiliriz.

Örneğin: daha önce ' $p \cdot (p \supset q) \supset q$ ' şemasının geçerliliğinin belgelendiğini kabul ederek, ' $(p \supset q) \cdot (q \supset r) \supset (p \supset r)$ ' şemasının Quine-çizelgesini şu şekilde kurabiliriz:

$$(p \supset q) \cdot (q \supset r) \supset (p \supset r)$$

$$\begin{array}{l} (D \supset q) \cdot (q \supset r) \supset (D \supset r) \\ q \cdot (q \supset r) \supset r \\ D \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (Y \supset q) \cdot (q \supset r) \supset (Y \supset r) \\ D \cdot (q \supset r) \supset D \\ D \end{array}$$

Nitekim, bu çizelgenin üçüncü sırasının sol yanında geçen ' $q \cdot (q \supset r) \supset r$ ' şeması, geçerliliği bilindiği kabul edilen ' $p \cdot (p \supset q) \supset q$ ' şemasının ('p' yerine 'q', 'q' yerine 'r' koymak suretiyle) bir yerine-koyma örneği durumundadır. Oysa, geçerli bir salt-şemanın yerine-koyma örneği olan her salt-sema bir «totoloji» olduğundan, ' $q \cdot (q \supset r) \supset r$ ' şeması bir totolojidir. Şu halde, sözü geçen Quine-çizelgesinde bu şemanın altına doğrudan doğruya 'D' harfini yazmağa hakkımız vardır. (I.K.)

Quine-çizelgelerini, "değiş-tokuş edilebilme ilkesi"nden faydalanmak suretiyle daha da kısaltmak mümkündür. Nitekim, böyle bir çizelgede rastlanan herhangi bir tam-deyimi bu tam-deyimin bir bileşenini onunla eşdeğer olan daha basit bir tam-deyimle değiş-tokuş etmekle elde edilen bir tam-deyime çevirmek (değiş-tokuş edilebilme ilkesi gereğince) mümkündür.

Örneğin, (10-7) önerme-şemasının aşağıda gösterilen Quine-çizelgesini göz önüne alalım.

$$\begin{array}{lll}
 (15) & \sim (\sim (\sim (p \vee \sim q) \cdot \sim q) \vee \sim pq) & \\
 & \sim (\sim (\sim (D \vee \sim q) \cdot \sim q) \vee Yq) & \sim (\sim (\sim (Y \vee \sim q) \cdot \sim q) \vee Dq) \\
 & \sim (\sim (\sim (D) \cdot \sim q) \vee Y) & \sim (\sim (\sim (\sim q) \cdot \sim q) \vee q) \\
 & \sim (\sim (Y \cdot \sim q)) & \sim (\sim (\sim (Y) \cdot Y) \vee D) \quad \sim (\sim (\sim (D) \cdot D) \vee Y) \\
 & \sim (D) & \sim (\sim (\sim (D) \cdot D)) \\
 & Y & \sim (D) \\
 & & Y \\
 & & \sim (\sim (Y)) \\
 & & \sim (D) \\
 & & Y
 \end{array}$$

İmdi, (15) çizelgesinin üçüncü satırının sağ yanını meydana getiren:

$$(16) \quad \sim (\sim (\sim (\sim q) \cdot \sim q) \vee q)$$

formülünde ' $\sim (\sim q)$ ' gibi bir bileşen geçmektedir. Oysa, ilerde göstereceğimiz gibi, ' $\sim \sim q$ ' (yani ' $\sim (\sim (q))$ ' formülü) 'q' ile eşdeğerdir. Şu halde, (16) tam-deyiminde ' $\sim (\sim q)$ ' bileşenini 'q' ile değiş-tokuş etmekle elde edilen:

$$(17) \quad \sim (\sim (q \sim q) \vee q)$$

tam-deyimi değiş-tokuş edilebilme ilkesi gereğince, (16) ile eşdeğer olur. Böyle bir eşdeğerliğe dayanarak, (15) çizelgesinde geçen (16) şemasını (17) şemasına çevirebiliriz.

(17) şemasında ise bileşen olarak geçen ' $q \sim q$ ' tam-deyimi (ilerde göreceğimiz gibi) "tutarsız"dır. Tutarsız bir tam-deyim "yanlış" bir öner-

meyle eşdeğer olduğundan, (17)' de 'q~q' bileşeninin 'Y' ile değiş-tokuş edilmesiyle elde edilen:

$$(18) \quad \sim (\sim (Y) \vee q)$$

tam-deyimi (17) ile eşdeğer olur. Dolayısıyla (17) yi (18)'e çevirmek mümkündür.

İşte, bu durumu göz önünde tutarak, (10-7) tam-deyiminin Quine-çizelgesini (15) biçiminde kuracak yerde, daha basit olan:

$$\begin{array}{ll} \sim (\sim (\sim (p \vee \sim q) \cdot \sim q) \vee \sim pq) & \\ \sim (\sim (\sim (D \vee \sim q) \cdot \sim q) \vee Yq) & \sim (\sim (\sim (Y \vee \sim q) \cdot \sim q) \vee Dq) \\ \sim (\sim (\sim (D) \cdot \sim q) \vee Y) & \sim (\sim (\sim (\sim q) \cdot \sim q) \vee q) \\ \sim (\sim (Y \sim q)) & \sim (\sim (q \sim q) \vee q) \\ \sim (D) & \sim (\sim (Y) \vee q) \\ Y & \sim (D \vee q) \\ & \sim (D) \\ & Y \end{array}$$

biçiminde kurabiliriz.

İmdi, verilen herhangi iki tam-deyimin eşdeğer olup olmadığı, her iki tam-deyimin Quine-çizelgesini kurmak suretiyle tesbit edilebilir. Böylece, bir yandan Quine-çizelgelerini kurmanın, öbür yandan da "tutarlı", "tutarsız" ve "eşdeğer" şemaları ortaya çıkarmanın birbirini destekliyen işlemler olduğunu görüyoruz. Tutarlılık, tutarsızlık ve eşdeğerlik Quine-çizelgeleri yardımıyla belirlenir. Ama birçok tutarlı, tutarsız ve eşdeğer şemaları belirledikten sonra, bunların yardımıyla pek çok sayıda başka şemaların tutarlılığını, tutarsızlığını veya eşdeğerliğini tesbit edebiliriz.

Doğruluk-değeri analizinin (ister Quine-metoduyla (ister başka bir metotla yürütülsün) en büyük faydası, önermeler mantığı çerçevesinde verilen herhangi bir çıkarımın geçerli olup olmadığının tesbitine yaramasıdır. Oysa, §10'da belirttiğimiz gibi, (10-1) biçimindeki herhangi bir çıkarımın geçerli olmasının gerekli ve yeterli şartı (10-4) gibi bir koşullunun geçerliliğinden ibarettir. (10-4) biçimindeki bir koşullunun geçerli olup olmadığını "*denetlemek*" (testing) için de, herhangi başka bir tam-deyim için olduğu gibi, doğruluk-değeri analizini yapmak gerekir.

İmdi, (10-1) biçimindeki bir çıkarımın geçerliliğini denetlemenin genel yolu, bu çıkarımın karşılığı olan (10-4) koşullusunun doğruluk-değeri analizini yapmaktan ibaret olmakla birlikte; birçok hallerde çıkarımın geçerliliğini, koşullunun tümünün doğruluk-değeri analizini yapmaksızın,

kestirme bir yoldan da aşağıda gösterilen şekilde denetlemek mümkündür:

(10-1) biçimindeki bir çıkarımı göz önüne alalım. Bu çıkarımın karşılığı olan (10-4) koşullusunun ön-bileşeni $\mathcal{S}_1$, ard-bileşeni $\mathcal{S}_2$ olsun. ($\mathcal{S}_1$, söz konusu çıkarımın öncüllerinin birlikte-evetlenmesinin temsilci şeması; $\mathcal{S}_2$ ise bu çıkarımın sonucunun temsilci-şemasıdır).

İmdi, her biri bir “salt-şema” durumunda olan bu iki şemanın karşılığı olan doğruluk-çizelgelerini göz önünde tutarak, şu iki özel hali inceleyelim:

- (A) $\mathcal{S}_1$ şemasının doğruluk-çizelgesinin sağ yanındaki sütunda yalnız bir tek ‘D’ harfinin bulunması hali.
- (B) $\mathcal{S}_2$ şemasının doğruluk-çizelgesinin sağ yanındaki sütunda yalnız bir tek ‘Y’ harfinin bulunması hali.

Bir çok hallerde, verilen bir önerme-şemasının sözü geçen (A) veya (B) niteliğini taşıdığını, bu şemanın doğruluk-çizelgesini belirttik bir şekilde kurmaksızın bir bakışta tesbit etmek mümkündür. Örneğin: ‘ $p \sim q$ ’ gibi bir şemanın (A) niteliğini taşımasının ancak ‘p’ nin “doğru”, ‘q’ nün de “yanlış” olması halinde *doğrulandığını* bir çırpıda görüyoruz. Öte yandan, ‘ $\sim (p \sim q)$ ’ gibi bir şemanın (B) niteliğini taşımasının ancak ‘p’ nin “doğru”, ‘q’ nün de “yanlış” olması halinde yanlışlandığını bir bakışta tesbit edebiliriz. İşte verilen bir çıkarımın geçerliğini kestirme yoldan denetlemek, ancak bu çıkarımın karşılığı olan $\mathcal{S}_1$ şemasının (A) niteliğini veya $\mathcal{S}_2$ şemasının (B) niteliğini taşıması halinde mümkündür. Şimdi bu iki hali ayrı ayrı ele alalım:

1. ci hal: $\mathcal{S}_1$ şeması (A) niteliğini taşıyor.

İlk önce $\mathcal{S}_1$ şemasını doğrulamak için bu şemanın içinde geçen temsilci-harflere yüklenmesi gereken doğruluk-değerlerini tesbit ederiz. Böylece, her temsilci-harfe karşılık belli bir tek doğruluk-değeri belirlenmiş olur. Ondan sonra $\mathcal{S}_2$ şemasını ele alarak, gerek bu şemada gerek $\mathcal{S}_1$ şemasında geçen her temsilci-harfin yerine, bu temsilci-harf için, belirlediğimiz doğruluk-değerinin “doğru” veya “yanlış” olmasına bakarak, ‘D’ veya ‘Y’ harfini koyarız. Böylece elde edilen tam-deyim $\mathcal{S}_3$ olsun, $\mathcal{S}_3$ ya bir karma-şemadır, ya da bir önerme. İşte, söz konusu çıkarımın geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı, $\mathcal{S}_3$ *tam-deyiminin geçerliliğinden* (yani geçerli bir şema veya doğru bir önerme olmasından) ibarettir. (Nitekim, bir koşullunun “geçersiz” olması, ön-bileşeninin geçerli, ard-bileşeninin de ge-

çersiz olması halinde mümkündür. Oysa, $\mathcal{S}_1$ ön-bileşeni, (A) niteliğini taşıdığından, yalnız bir tek halde geçerlidir). Örneğin:

(19) Sokrates insandır

Skrates ölümsüz değildir

$\therefore$ Sokrates insan olduğu takdirde; Sokrates ölümsüz ise, Ahmet Ankara'ya gidecek

gibi bir çıkarımın geçerli olup olmadığını, ilk önce genel metotla, sonra da kestirme yoldan araştıralım. İmdi, '*Sokrates insandır*' önermesi yerine 'p', '*Sokrates ölümsüzdür*' önermesi yerine 'q' '*Ahmet Ankara'ya gidecek*' önermesi yerine de 'r' koyarak; bu çıkarımın temsilci-şemasını:

(20)

$$\begin{array}{l} p \\ \sim q \\ \therefore (p \supset q) \supset r \end{array}$$

biçiminde dile getirebiliriz. (20) çıkarım-şemasının geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı ise:

(21) $p \sim q \supset ((p \supset q) \supset r)$
önerme-şemasının geçerliliğinden ibarettir. (21) şemasının geçerli olup olmadığını denetlemek için Quine-çizelgesini çizelim:

(22) $p \sim q \supset ((p \supset q) \supset r)$

$D \sim q \supset ((D \supset q) \supset r)$	$Y \sim q \supset ((Y \supset q) \supset r)$	
$\sim q \supset (q \supset r)$	$Y \supset ((Y \supset q) \supset r)$	
$Y \supset (D \supset r)$	$D \supset (Y \supset r)$	D
D	$Y \supset r$	D

(22) çizelgesinden, (22) önerme-şemasının, dolayısıyla (20) çıkarım-şemasının ve (19) çıkarımının geçerli olduğu sonucunu çıkarabiliriz.

Şimdi (19) çıkarımının geçerliliğini kestirme yoldan da denetlemenin mümkün olup olmadığını araştıralım. Bu amaçla (19) çıkarımının (20) temsilci-şemasını incelemek gerekir. İmdi, (20) çıkarım-şemasının öncül-üyelerinin birlikte evetlenmesi (yani (19) çıkarımının karşılığı olan $\mathcal{S}_1$ şeması) ' $p \sim q$ ', sonuç-üyesi ise (yani (19) çıkarımının karşılığı olan $\mathcal{S}_2$ şeması) ' $(p \supset q) \supset r$ ' den ibarettir. Oysa, ' $p \sim q$ ' şeması (A) özelliğini taşıyor; nitekim bu şema ancak 'p' nin "doğru", 'q' nün de "yanlış" olması halinde doğrulanır. Şu halde, (19) çıkarımının geçerliliğini kestirme yoldan da denetleyebileceğimizi görüyoruz. Böyle bir denetlemeyi yap-

mak için de, $(p \supset q) \supset r$ şemasında 'p' yerine 'D', 'q' yerine 'Y' koymakla elde edilen:

$$(23) \quad (D \supset Y) \supset r$$

karma-şemasının geçerli olup olmadığını belirlemek gerekir. Bu amaçla

(23) tam-deyiminin Quine-çizelgesini kuralım:

$$(24) \quad \begin{array}{c} (D \supset Y) \supset r \\ Y \supset r \\ D \end{array}$$

(24) çizelgesinden, (23) tam-deyiminin, dolayısıyla (21) önerme-şemasının, (20) çıkarım-şemasının ve (19) çıkarımının geçerli olduğu sonucunu çıkarırız. Böylece, (19) gibi bir çıkarımın geçerliliğini denetlemek için, genel metoda göre (22) gibi uzunca bir çizelgenin kurulması gerektiği halde; kestirme yola başvurmakla (24) gibi çok basit bir çizelge ile yetinebileceğimizi görüyoruz.

2. ci hal: $\mathcal{S}_2$ şeması (B) niteliğini taşıyor.

İlk önce $\mathcal{S}_2$ şemasını yanlışlamak için bu şemanın içinde geçen temsilci-harflere yüklenmesi gereken doğruluk-değerlerini tesbit ederiz. Böylece her temsilci-harfe karşılık bir tek doğruluk-değeri belirlenmiş olur. Ondan sonra $\mathcal{S}_1$ şemasını ele alarak, gerek bu şemada gerekse $\mathcal{S}_2$ şemasında geçen her temsilci-harfin yerine, bu temsilci-harf için belirlediğimiz doğruluk-değerinin "doğru" veya "yanlış" olmasına bakarak 'D' veya 'Y' harfini koyarız. Böylece elde edilen tam-deyim $\mathcal{S}_4$ olsun. $\mathcal{S}_4$ ya bir karma-şemadır, ya da bir önerme. İşte, söz konusu çıkarımın geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı, $\mathcal{S}_1$ tam-deyiminin tutarsızlığından (yani tutarsız bir şema veya yanlış bir önerme olmasından) ibarettir. (Nitekim, bir koşullunun "geçersiz" olması, ancak ön-bileşeninin geçerli, ard-bileşeninin de geçersiz olması halinde mümkündür. Oysa, $\mathcal{S}_2$ ard-bileşeni, (B) niteliğini taşıdığından, yalnız bir tek halde geçersizdir). Örneğin:

$$(25) \quad \begin{array}{c} p \supset q \\ qr \supset s \\ \therefore pr \supset s \end{array}$$

gibi bir çıkarım-şemasının geçerli olup olmadığını ilk önce genel metotla, sonra da (mümkünse) kestirme yoldan denetleyelim. Birinci metoda göre,

$$(26) \quad (p \supset q) \cdot (qr \supset s) \supset (pr \supset s)$$

önerme-şemasının Quine-çizelgesini çizmeliyiz. Bu çizelge şöyledir:

$$\begin{array}{lcl}
 (27) & (p \supset q) \cdot (qr \supset s) \supset (pr \supset s) & \\
 & (D \supset q) \cdot (qr \supset s) \supset (Dr \supset s) & (Y \supset q) \cdot (qr \supset s) \supset (Yr \supset s) \\
 & q \cdot (qr \supset s) \supset (r \supset s) & D \cdot (qr \supset s) \supset (Y \supset s) \\
 D \cdot (Dr \supset s) \supset (r \supset s) & Y \cdot (Yr \supset s) \supset (r \supset s) & (qr \supset s) \supset D \\
 (r \supset s) \supset (r \supset s) & Y \supset (r \supset s) & D \\
 D & D &
 \end{array}$$

' $(r \supset s) \supset (r \supset s)$ ' şeması, ilerde bir totoloji olduğunu göreceğimiz ' $p \supset p$ ' şemasının yerine-koyma örneği olduğundan, geçerlidir. Dolayısıyla, onun altına doğrudan doğruya 'D' harfini yazabildik).

İmdi, (27) çizelgesine dayanarak, (26) önerme-şemasının, dolayısıyla (25) çıkarım-şemasının geçerli olduğunu söyleyebiliriz.

Öte yandan, (25) çıkarım-şemasının sonuç-üyesi ($\mathcal{S}_2$ şeması) olan ' $pr \supset s$ ' şeması (B) niteliğini taşıyor. Nitekim, bu şema ancak ve ancak 'p' nin "doğru", 'r' nin "doğru" ve 's' nin «yanlış» olması halinde *yanlışlanır*. Buna göre, (25) çıkarım-şemasının öncül-üyelerinin birlikte-evetlenmesi olan ' $(p \supset q) \cdot (qr \supset s)$ ' şemasında 'p' yerine 'D', 'r' yerine 'D' ve 's' yerine 'Y' koymakla elde edilen:

$$(28) \quad (D \supset q) \cdot (qD \supset Y)$$

karma-şeması sözü geçen $\mathcal{S}_4$ şemamız oluyor. Şu halde (25) çıkarım-şemasının geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı, (28) tam-deyiminin "tutar-sız" olmasından ibarettir. (28) tam-deyiminin tutarsız olup olmadığını belirlemek için Quine-çizelgesini çizelim:

$$\begin{array}{lcl}
 (29) & (D \supset q) \cdot (qD \supset Y) & \\
 & q \cdot (q \supset Y) & \\
 & q \sim q & \\
 & Y &
 \end{array}$$

(29) çizelgesine dayanarak, (26) önerme şemasının, dolayısıyla (25) çıkarım-şemasının *geçerli* olduğunu görüyoruz.

Özel hal olarak, $\mathcal{S}_1$ veya $\mathcal{S}_2$ nin 'p' veya ' $\sim p$ ' biçiminde olması halini göz önüne alalım. $\mathcal{S}_1$ şeması, 'p' veya ' $\sim p$ ' biçiminde ise, (A) özelliğini taşır. $\mathcal{S}_2$ şeması, 'p' veya ' $\sim p$ ' biçiminde ise, (B) özelliğini taşır.

1. ci hal: $\mathcal{S}_1$ şeması 'p' veya ' $\sim p$ ' biçimindedir.

$\mathcal{S}_2$ şemasını ' $g(p, q, r, \dots)$ ' şeklinde dile getirelim. O zaman geçerliliğini denetlemek istediğimiz çıkarım şeması:

$$(30) \quad p \\ \therefore g(p, q, r, \dots)$$

veya

$$(31) \quad \sim p \\ \therefore g(p, q, r, \dots)$$

biçimini alır. (30) gibi bir çıkarım-şemasının geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı, 'g(D, q, r, ...)' karma-şemasının geçerliliğinden; (31) çıkarım-şemasının geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı da 'g(Y, q, r, ...)' karma-şemasının geçerliliğinden ibarettir. Örneğin:

$$p \\ \therefore (p \supset q) \supset q$$

çıkartım-şemasının geçerliliğini, '(D $\supset$ q) $\supset$ q' karma-şemasının Quine-çizelgesi yardımıyla denetleyebiliriz. Oysa, bu çizelge şöyledir:

$$(D \supset q) \supset q \\ q \supset q \\ D$$

Şu halde, söz konusu çıkartım-şeması geçerlidir. Öte yandan,

$$\sim q \\ \therefore \sim (pq)$$

gibi bir çıkartım-şemasının geçerliliğini, ' $\sim (pq)$ ' şemasında 'p' yerine 'Y' koymakla elde edilen ' $\sim (Yq)$ ' şemasına dayanarak denetleyebiliriz. ' $\sim (Yq)$ ' şemasının Quine-çizelgesi

$$\sim (Yq) \\ \sim (Y) \\ D$$

biçiminde olduğundan, çıkartım-şemasının geçerli olduğu sonucuna varıyoruz.

2. ci hal: S_2 şeması 'p' veya ' $\sim p$ ' biçimindedir.

S_1 şemasını 'f(p, q, r, ...)' şeklinde dile getirelim. O zaman geçerliliğini denetlemek istediğimiz çıkartım şeması:

$$(32) \quad f(p, q, r, \dots) \\ \therefore p$$

veya

$$(33) \quad \begin{array}{l} f(p, q, r, \dots) \\ \therefore \sim p \end{array}$$

biçimini alır. (32) gibi bir çıkarım-şemasının geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı, 'f(Y, q, r, ...)' karma-şemasının tutarsızlığından; (33) gibi bir çıkarım-şemasının geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı da 'f(D, q, r, ...)' karma-şemasının *tutarsızlığından* ibarettir. Örneğin:

$$\begin{array}{l} pq \vee p \sim q \\ \therefore p \end{array}$$

çıkartım-şemasının geçerli olduğunu, 'Yq v Y~q' karma-şemasının

$$\begin{array}{l} Yq \vee Y \sim q \\ Y \vee Y \\ Y \end{array}$$

Quine-çizelgesine dayanarak söyleyebiliriz.

$$\begin{array}{l} \sim pq \vee \sim p \sim q \\ \therefore \sim p \end{array}$$

çıkartım-şemasının da geçerli olduğunu, '~Dq v ~D~q' karma-şemasının

$$\begin{array}{l} \sim Dq \vee \sim D \sim q \\ q \vee \sim q \\ D \end{array}$$

Quine-çizelgesinden görüyoruz. (Bu çizelgede geçen 'q v ~q' şeması ileride göstereceğimiz totolojiler arasında bulunduğundan, şemanın altına doğrudan doğruya 'D' yazabildik).

§12. Mantık Kanunları

Klâsik mantıkta “aynılık ilkesi”, “çelişmeme ilkesi” ve “üçüncü halin olmazlığı ilkesi” olmak üzere üç temel “mantık kanunu” kabul edilirdi. Modern mantıkta ise, bu üç ilkenin sayısı pek çok (hattâ sonsuz) olan çeşitli “mantık kanunları” arasında yer aldığını, bu gibi “mantık kanunları”nın da bir takım “*totolojiler*”den başka bir şey olmadığını göreceğiz.

İlk önce “aynılık ilkesi”ni (principle of identity) göz önüne alarak şu üç örneği inceleyelim:

- (1) Sokrates Sokrates'tir (Sokrates = Sokrates)
- (2) Bütün insanlar insandır
- (3) Sokrates insan ise, Sokrates insandır.

Bu üç önermeyi “aynılık ilkesi”nin üç ayrı örneği sayabiliriz. Buna göre, aynılık ilkesinin *kendisini* dile getirmek için, sözü geçen üç önermenin lojik-yapısını dile getiren “önerme-şeması”nı veya (her birinin lojik-yapısı ayrı olması halinde) “önerme-şemaları”nı ortaya koymağa çalışalım.

(1) önermesinde ‘Sokrates’ gibi bir *tekil-terim* (singular term) geçmektedir. Buna göre, ‘Sokrates’ sözcüğü yerine ‘x’ gibi (tekil-terimlere özgü) bir temsilci-harf koyarak, (1) önermesinin temsilci-şeması olarak

- (4) x, x'tir (veya ‘x = x’)

şemasını seçebiliriz.

(2) önermesinde ise ‘insan’ gibi bir *genel-terim* (general term) geçiyor. Buna göre, ‘insan’ sözcüğü yerine ‘F’ gibi (genel-terimlere özgü) bir temsilci-harf koyarak (2) önermesinin temsilci-şeması olarak:

- (5) Bütün F'ler F'dir

ifadesini seçebiliriz.

(3) önermesine gelince: bunun temsilci-şeması olarak, 'Sokrates in. sandır' önermesi yerine (önermelere özgü) 'p' gibi bir temsilci-harf koyarak:

(6) p ise, p (veya ' $p \supset p$ ')

ifadesini seçebiliriz.

Görüldüğü gibi, aynılık ilkesi olarak üç *ayrı* önerme-şeması ile karşılaşmaktayız. Bu üç şema (ilerde daha iyi anlaşılacağı gibi) gerçekten de birbirinden özce farklı olduğundan, bir değil de, *üç ayrı "aynılık ilkesi"*. *nin bulunduğu* kabul etmemiz gerekecektir. (4), (5) ve (6) önerme-şemalarıyla dile getirilebilen bu üç ayrı ilkenin ilk ikisi önermeler mantığının çerçevesine girmediğinden, bunları ancak ilerde inceleyebileceğiz.

Buna karşılık, sonuncu ilkenin önermeler mantığı çerçevesine girdiği meydandadır. Şu halde, biz burada (6) önerme-şemasıyla dile gelen aynılık ilkesini incelemekle yetinebiliriz.

Bu amaçla (6) şemasının ilk önce Quine-çizelgesini kuralım:

$$\begin{array}{ccc} & p \supset p & \\ D \supset D & & Y \supset Y \\ D & & D \end{array}$$

Bu çizelgeden (6) şemasının "geçerli" olduğu anlaşılır. (6) şeması bir "salt-şema" da olduğundan, §11, n. 2 anlamında bir "*t o t o l o j i*" sayılmalıdır. Böylece aynılık ilkesinin belli bir şeklinin bir totolojiden ibaret olduğunu kanıtlamış oluyoruz.

Şimdi de "çelişmeme ilkesi"ni (principle of non-contradiction) inceleyelim. Bu ilkeye örnek olarak,

(7) Sokrates hem insan hem insan-olmıyan değildir gibi bir önermeyi seçebiliriz. Bu önermede geçen 'Sokrates' tekil-terimi yerine 'x' temsilci-harfini, 'insan' genel-terimi yerine de 'F' temsilci-harfini koymak suretiyle:

(8) $((x, F \text{ dir}) \text{ ve } (x, F \text{ değildir}))$ değil

biçiminde bir temsilci-şemayı elde edebiliriz. Bu şemayı da

(9) $((x, F \text{ dir}) \text{ ve } ((x, F \text{ dir}) \text{ değil}))$ değil

biçimine çevirebiliriz. İmdi, (9) şemasında 'x' 'F dir' ifadesi yerine 'p' gibi bir temsilci-harf koyarak:

(10) $(p \text{ ve } p\text{-değil})$ değil

veya sembolik olarak:

$$(11) \quad \sim (p \sim p)$$

gibi bir önerme-şemasını elde ederiz. İşte, (11) şemasını çelişmeme-ilkesi-
nin en genel biçimi sayabiliriz. Oysa, (11) şemasının önermeler mantığı
çerçevesine girdiği meydandadır. Şu halde, bu ilkeyi burada incelemek
mümkündür. Bu amaçla da (11) şemasının Quine-çizelgesini çizelim:

$$\begin{array}{ccc} & \sim (p \sim p) & \\ \sim (DY) & & \sim (YD) \\ \sim (Y) & & \sim (Y) \\ D & & D \end{array}$$

Bu çizelgeden (11) şemasının geçerli, dolayısıyla de (bir salt-şema
olduğundan) bir "t o t o l o j i" olduğu anlaşılır. Böylece çelişmeme-il-
kesinin en genel şeklinin de bir totolojiden başka bir şey olmadığını gö-
rürüz.

Çelişmeme ilkesini ' $\sim (p \supset \sim p)$ ' biçiminde dile getirmemek gerek.
Nitekim, böyle bir şema (ilk bakışta sanılabildiği gibi) hiç te geçerli de-
ğildir. Bunu sözü geçen şemanın aşağıdaki Quine-çizelgesinden görebil-
liz:

$$\begin{array}{ccc} & \sim (p \supset \sim p) & \\ \sim (D \supset Y) & & \sim (Y \supset D) \\ \sim (Y) & & \sim (D) \\ D & & Y \end{array}$$

Buna göre, ' $\sim (p \supset \sim p)$ ' (yani, '(p ise, p değildir) değil') şemasının
yerine-koyma örneği olan

Sokrates insan ise, insan-olmıyan değildir

gibi bir önermeyi, çelişmeme ilkesinin bir örneği saymamak gerektiğini
söyleyebiliriz.

"Üçüncü halin olmazlığı ilkesi"ne gelince; bu ilkenin bir örneği
olarak:

$$(12) \quad \text{Sokrates insandır veya insan-olmıyandır}$$

gibi bir önermeyi seçebiliriz. Bu önermede 'Sokrates' yerine 'x', 'insan' ye-
rine de 'F' koymak suretiyle:

$$(13) \quad (x, F \text{ dir}) \text{ veya } (x, F \text{ değildir})$$

biçiminde bir temsilci-şema elde ederiz. Bu şemada ise 'x, F dir' yerine 'p' temsilci-harfini koyarak:

(14) p veya p değil

şemasını veya sembolik olarak

(15) $p \vee \sim p$

şemasını elde ederiz. İşte (15) şeması, üçüncü halin olmazlığı ilkesinin en genel şeklini dile getirmektedir. Bu ilkenin de bir *totolojiden*) ibaret olduğunu,

$$\begin{array}{ccc} & p \vee \sim p & \\ D \vee Y & & Y \vee D \\ D & & D \end{array}$$

Quine-çizelgesinden görebiliriz.

İmdi, klâsik mantığın bu üç temel ilkesinin birer "totoloji"den ibaret olduğunu göz önünde tutarak, "*mantık ilkesi*" deyimini sadece bu üç özel totolojiye değil de, en genel bir şekilde herhangi bir totolojiye veya daha doğrusu herhangi bir "*totolojik önerme-şeması*"na uygulayabiliriz. 'Mantık ilkesi' deyimini bu geniş mânada kullandıkta; her mantık ilkesinin, *salt biçimleri gereği "doğru"* (başka bir deyimle "*mantıkça-doğru*") olan birçok (ilkece sonsuz sayıda) önermenin bir şemasından başka bir şey olmadığını söyleyebiliriz. Örneğin: ' $p \vee \sim p$ ' "*mantık ilkesi*" (12) gibi ' $A \vee \sim A$ ' biçimindeki bütün önermelerin şeması durumundadır.

Genel olarak, herhangi bir önermenin "*mantıkça-doğru*" olmasını, bu önermenin belli bir "*mantık ilkesi*"nin *yerine-koyma örneği* olması şeklinde tanımlıyoruz. Mantıkça-doğru önermelerin doğruluğu dil-dışı hiç bir olguya başvurmadan tesbit edilebilir. Nitekim, verilen bir önermenin belli bir mantık ilkesinin yerine-koyma örneği olduğunu tesbit ettiğimiz anda, başka hiçbir bilgiye başvurmadan bu önermenin "doğru" olduğunu söyleyebiliriz. İmdi, *mantığı* sadece öteki bilimlerin ortak metodu olarak değil de, tek başına bağımsız bir bilim olarak yorumladıkta, onu "*mantıkça-doğru önermelerden kurulu olan bilim*" şeklinde tanımlıyabiliriz. "Logicist" denilen bir matematik felsefesi açısından salt matematiğin tümü de bir takım *mantıkça-doğru önermelerin "tanımsal-kısaltmalar"*ından (definitional abbreviations') ibaret sayıldığından, (böyle bir görüş gereği) matematiğin sadece mantık ilkelerine (totolojilere) dayandığını söyleyebiliriz. Böylece, totolojileri tesbit etmenin bir yandar (bağımsız bir bilim şeklinde yorumlanan) *mantığın*, öbür yandan da (mantıkça-

doğru önermelerin tanımsal-kısaltmaları şeklinde yorumlanan) *matematiğin* temellendirilmesi için ne kadar önemli olduğunu görüyoruz.

İmdi, totolojileri üst-eklemlerine bakarak şu beş öbeğe ayırabiliriz:

a) ' $\sim A$ ' biçimindeki totolojileri

' $\sim A$ ' nın bir totoloji olması halinde 'A' bir "*çelişme*" olduğundan, bu türlü totolojilerin "*çelişmeler*"i belirlemeğe yaradığını söyleyebiliriz. Gerçekten de en önemli bir çelişme olan ' $p \sim p$ ' şeması ' $\sim (p \sim p)$ ' totolojisi ("*çelişmeme-ilkesi*") şeklinde belirtilmektedir.

b) ' $A . B$ ' biçimindeki totolojiler:

'A . B' biçimindeki herhangi bir salt-şemanın bir totoloji olmasının gerekli ve yeterli şartı, hem 'A' nın hem 'B' nin bir totoloji olmasından ibarettir. Nitekim, ' p_1 ', ' p_2 ', ..., ' p_n ', 'A' ile 'B' şemalarının (hiç olmazsa) birinde geçen temsilci-harfler olsun. O zaman 'A . B' bir totoloji ise, bu temsilci-harflere yüklenen bütün doğruluk-değerleri için 'D' değerini alır. Bu halde gerek 'A' gerek 'B' bu temsilci-harflerin bütün doğruluk-değerleri için 'D' değerini almalı. Dolayısıyla gerek 'A' gerek 'B' bir totoloji olur. Şu halde şart "*gerekli*"dir. Bu durumu şöyle bir çizelge yardımıyla canlandırabiliriz.

$p_1 \dots p_n$	A . B	A	B
D D	D	D	D
D Y	D	D	D
.	.	.	.
.	.	.	.
Y Y	D	D	D

Öte yandan, hem 'A' hem 'B' bir totoloji ise, temsilci-harflerin bütün doğruluk-değerleri için 'D' değerini alır. Dolayısıyla 'A . B' şeması da temsilci-harflerin bütün doğruluk-değerleri için 'D' değerini alır. Şu halde şart "*yeterli*"dir. Bu durumu da aşağıdaki çizelge ile gösterebiliriz:

$p_1 \dots p_n$	A	B	A . B
D D	D	D	D
D Y	D	D	D
.	.	.	.
.	.	.	.
Y Y	D	D	D

İmdi, 'A . B' biçimindeki herhangi bir totolojinin, 'A' ve 'B' olmak üzere iki ayrı totolojinin birlikte-evetlenmesinden ibaret olduğunu göz

önünde tutarak, ' $A \cdot B$ ' yerine ' A ' ve ' B ' totolojilerini ayrı ayrı dile getireceğiz. Bu bakımdan, pratikte kullanacağımız totolojiler arasında hiç bir zaman ' $A \cdot B$ ' türünden tam-deyimlere yer vermiyeceğiz.

c) ' $A \vee B$ ' biçimindeki totolojiler:

' $A \vee B$ ' biçimindeki her tam-deyim, ' $\sim A \supset B$ ' tam-deyimiyle eşdeğerdir. Bunu şöyle bir çizelge yardımıyla kanıtlayabiliriz:

A	B	$\sim A \supset B$	$A \vee B$
D	D	D	D
D	Y	D	D
Y	D	D	D
Y	Y	Y	Y

İmdi, bu eşdeğerliğe dayanarak, ' $A \vee B$ ' biçimindeki her totolojiyi (pek daha işlek olan) ' $\sim A \supset B$ ' biçimine dönüştürerek, pratikte kullanılan totolojiler arasında ' $A \vee B$ ' biçiminde olanlara hemen hemen hiç yer ayırmıyacağız.

d) ' $A \supset B$ ' biçimindeki totolojiler:

En önemli ve işlek olan totolojiler işte bu biçimde olanlardır. Nitekim, daha önce gösterdiğimiz gibi, herhangi bir çıkarımın geçerliliğini, ' $A \supset B$ ' biçimindeki bir salt-şemanın geçerliliğine geri götürmek mümkündür. Genel olarak ' $A \supset B$ ' herhangi bir totoloji olduğunda, böyle bir totolojiye dayanarak

$$(16) \quad \begin{array}{c} A \\ \therefore B \end{array}$$

gibi bir çıkarım-şemasının geçerliliğini öne sürebiliriz. ' $A \supset B$ ' totolojisinin

$$(17) \quad A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \supset B$$

biçiminde olması halinde de, böyle bir totolojiye dayanarak:

$$(18) \quad \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \\ \therefore B \end{array}$$

çıkartım-şemasının geçerli olduğu sonucunu çıkarabiliriz.

Bir de ' $A \supset B$ ' biçimindeki bir totolojiye dayanarak, ' A ' şemasının ' B ' şemasını "*içerdiğini*", başka bir deyimle, bu iki şema arasında "*içerme*" bağlantısı olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumu ise (§11, n. 2'de belirttiğimiz gibi):

$$(19) \quad 'A' \rightarrow 'B'$$

deyimiyle dile getiriyoruz.

e) ' $A \equiv B$ ' biçimindeki totolojiler:

' $A \equiv B$ ' biçimindeki herhangi bir totoloji (' $A \equiv B$ ' şeması ' $(A \supset B)$. ' $(B \supset A)$ ' şemasıyla eşdeğer olduğundan) ' $A \supset B$ ' ile ' $B \supset A$ ' gibi iki ayrı totolojinin birlikte-evetlenmesinden ibarettir. Ancak, ' $A \equiv B$ ' gibi bir salt-şemanın bir totoloji olmasından, ' A ' ile ' B ' nin eşdeğer olduğu, yani:

$$(20) \quad 'A' \leftrightarrow 'B'$$

sonucunun çıkarılabileceğini göz önünde tutarak, ' $A \equiv B$ ' biçimindeki totolojileri bilmenin (özellikle Quine-çizelgelerinin kurulması için) çok faydalı olacağını söyleyebiliriz. Pratikte kullanılan totolojilerin birçoğunun ' $A \equiv B$ ' biçiminde olduğunu göreceğiz.

Totolojilerin genel niteliklerini böylece belirttikten sonra, şimdi de pratikte kullanılan en önemli totolojileri gösterelim. Çelişmeme ilkesiyle, üçüncü halin olmazlığı ilkesinden başka, bütün bu totolojiler ' $A \supset B$ ' veya ' $A \equiv B$ ' biçimindedir. Bu bakımdan, bu türlü mantık ilkelerini birer "*totoloji*" şeklinde dile getirecek yerde, (19) biçimindeki "*içermeler*" (implications) veya (20) biçimindeki "*eşdeğerlikler*" (equivalences) şeklinde de yorumlamak mümkündür. Üstelik ' $A \supset B$ ' biçimindeki bir mantık ilkesini, bir de (16) gibi bir "*çıkarım-şeması*" şeklinde de yorumlayabileceğimizi görmüştük. Bu bakımdan ' $A \supset B$ ' gibi bir totoloji ile, bunun karşılığı olan (16) "*çıkarım-şeması*"nı ve (19) "*içerme*"sini aynı bir "mantık ilkesi"nin üç ayrı şekli olarak yorumlayacağız. Örneğin: aşağıda gösterilen ' $p \cdot (p \supset q) \supset q$ ' totolojisi ile,

$$(21) \quad 'p \cdot (p \supset q)' \rightarrow 'q'$$

içerme'sini ve

$$p \cdot (p \supset q)$$

$$\therefore q$$

ve daha iyisi

$$\begin{array}{l}
 (22) \qquad p \\
 \qquad p \supset q \\
 \qquad \therefore q
 \end{array}$$

çıkarım-şeması'nı "*modus ponens*" (modus ponendo ponens) denilen bir tek mantık ilkesinin ayrı şekilleri sayacağız.

İmdi, (önermeler mantığının) başlıca mantık ilkeleri (totoloji şeklindeki şunlardır:

A) *Ana-eklemi '∼' den ibaret olan totolojiler:*

$$(23) \qquad \sim (p \sim p) \qquad \text{(çelişmeme ilkesi)}$$

$$(24) \qquad \sim (p_1 \cdot \sim p_1 \cdot p_2 \cdot \sim p_2 \cdot \dots \cdot p_n \cdot \sim p_n)$$

B) *Ana-eklemi 'v' den ibaret olan totolojiler:*

$$(25) \qquad p \vee \sim p \qquad \text{(üçüncü-halin olmazlığı)}$$

$$(26) \qquad p_1 \vee \sim p_1 \vee p_2 \vee \sim p_2 \vee \dots \vee p_n \vee \sim p_n$$

$$(27) \qquad pq \vee p \sim q \vee \sim pq \vee \sim p \sim q$$

$$(28) \qquad (p \supset q) \vee (q \supset p)$$

C) *Ana-eklemi '⊃' veya '≡' den ibaret olan totolojiler:*

· 'ö' herhangi bir 2-li önerme-eklemi oldukça,

$$(p \circ p) \equiv p$$

şemasının bir totoloji olması halinde, 'ö' eklemine "*denkgüçlü*" (idempotent)

$$(p \circ q) \equiv (q \circ p)$$

şemasının bir totoloji olması halinde, 'ö' eklemine "*çevirgeç*" (commutative);

$$((p \circ q) \circ r) \equiv (p \circ (q \circ r))$$

şemasının bir totoloji olması halinde de, 'ö' eklemine "*ortaklaştırıcı*" (associative) denir.

Sözü geçen üç deyim matematikten alınmıştır. Ancak bu deyimlerin aritmetik ve cebirdeki tanımları için, '≡' önerme-eklemi yerine '=' özdeşlik işaretini kullanmak gerekir. Örneğin: 'x', 'y' ve 'z', değerler-alanı "reel-sayılar"dan ibaret olan üç değişken olsun. O zaman:

$$x + y = y + x$$

ve

$$x \times y = y \times x$$

birer geçerli şema olduğundan, gerek ‘÷’ (*toplama*) gerekse ‘X’ (*çarpma*) işleminin “çevirgeç” olduğu görülür.

$$((x + y) + z) = (x + (y + z))$$

ve

$$((x \times y) \times z) = (x \times (y \times z))$$

şemalarının geçerliliğinden de ‘+’ ve ‘X’ işlemlerinin her ikisinin de “ortaklaştırıcı” olduğunu anlıyoruz. Öte yandan: ‘:’ (*bölmə*) işleminin ne “çevirgeç” ne de “ortaklaştırıcı” olmadığını:

$$2 : 3 = 3 : 2$$

ile

$$(18 : 6) : 2 = 18 : (6 : 2)$$

önergelerinin “yanlış” olmasından çıkarabiliriz.

Bu üç işlemten hiçbirinin “denkgüçlü” olmadığı da meydandadır. (Nitekim ne ‘ $x \div x = x$ ’, ne ‘ $x \times x = x$ ’ ne de ‘ $(x : x) = x$ ’ geçerli değildir).

İmdi, ‘.’, ‘v’, ‘⊃’ ve ‘≡’ 2-li önerme-eklemlerinden ‘.’, ‘v’ nin idempotent çevirgeç ve ortaklaştırıcı olduğu; ‘≡’ nin çevirgeç ve ortaklaştırıcı olmakla birlikte denkgüçlü olmadığı; ‘⊃’ nin ise bu üç özelliğinden hiçbirini taşımadığı gösterilebilir.

a) *Birlikte-evetleme eklemi:*

$$(29) \quad pp = p \quad (\text{birlikte-evetlemenin denkgüçlülüğü})$$

$$(30) \quad pq = qp \quad (\text{birlikte-evetlemenin çevirgeçliği})$$

$$(31) \quad (pq) \cdot r = p \cdot (qr) \quad (\text{birlikte-evetlemenin ortaklaştırıcılığı})$$

‘A’, ‘B’ ve ‘C’ herhangi üç tam-deyim oldukça, (31) totolojisine dayanarak, ‘(AB) · C’ ile ‘A · (BC)’ tam-deyimlerinin eşdeğer olduğunu görüyoruz. O zaman da bu iki tam-deyim teorik açıdan *farklı* olmakla birlikte, pratikte (yani doğruluk-değeri belirlenimleri bakımından) bu iki tam-deyim *aynı* saymak mümkündür. O zaman da parantezleri kaldırarak sadece ‘ABC’ yazarız. (‘ABC’ ifadesi teorik açıdan çok-anlamalı olup halis bir “düzgün-tam-deyim” değildir. Ama pratikte böyle bir deyim kullanılmasında hiç bir sakınca yoktur).

Genel olarak, ‘A₁’, ‘A₂’, ... , ‘A_n’ n tane düzgün-tam-deyim oldukça,

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$$

gibi bir tam-deyim (içinde temsilci-harfler geçmesi halinde, bu harflere yüklenen belli doğruluk-değerleri için) belli bir doğruluk-değeri olduğun-

dan, böyle bir deyme pratikte (tek-anlamlı imiş gibi) kullanmak mümkündür. Böyle bir tam-deyimde ne ana-eklem, ne de ana-bileşenler belirlenmiş değildir. 'A₁', 'A₂', ... , 'A_n' bileşenlerinden herhangi birini keyfe-bağlı olarak ana-eklem olarak seçebiliriz. Bu bakımdan bu bileşenleri hep aynı seviyede sayarak her birine bir "çarpan", deyimün tümüne de bir "çok-çarpanlı birlikte-evetleme" diyeceğiz.

İmdi, çok-çarpanlı birlikte-evetlemelerde (30) totolojisine dayanarak *çarpanların sırasını* istediğimiz gibi *değiştirmek*, (29) totolojisine dayanarak ta bu çarpanlardan özdeş olanların (geçiş sayısı 1'den büyük olan çarpanlar!) sayısını "bir"e indirmek mümkündür. Örneğin:

$$(p \vee q) \cdot (p \supset q) \cdot (q \vee p) \cdot (\sim p \vee q) \cdot (p \supset q) \cdot (\sim p \vee q) \cdot (q \vee p) \cdot (p \vee q)$$

gibi karmaşık bir çok-çarpanlı birlikte-evetlemeyi, birlikte-evetleme eklemine çevirgeçliği ve denkgüçlülüğünden faydalananak, pek daha basit olan:

$$(p \vee q) \cdot (q \vee p) \cdot (\sim p \vee q) \cdot (p \supset q)$$

çok-çarpanlı birlikte-evetlemeye dönüştürebiliriz.

Görüldüğü gibi, herhangi bir "*çok-çarpanlı birlikte-evetleme*", içinde geçen farklı çarpanlar tarafından (bunların *geçiş sayısı* ile *sıralarından* bağımsız olarak) *büsbütün* belirlenmiştir.

b) *Ayrıklık eklemi* :

$$(32) \quad p \vee p \equiv p \quad (\text{ayrıklığın denkgüçlülüğü})$$

$$(33) \quad p \vee q \equiv q \vee p \quad (\text{ayrıklığın çevirgeçliği})$$

$$(34) \quad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \quad (\text{ayrıklığın ortaklaştırıcılığı})$$

(34)'e dayanarak,

$$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$$

gibi "*çok-çarpanlı ayrıklıklar*" kullanmak mümkündür. (33) ve (34) gereği de, herhangi bir "*çok-çarpanlı ayrıklık*"ın sadece farklı çarpanları tarafından (bu çarpanların *geçiş sayısı*yla bunların sırasından bağımsız olarak) *büsbütün* belirlendiğini söyleyebiliriz. Örneğin:

$$p \vee (p \supset q) \vee p \vee p \vee (p \supset q) \vee q \vee p \vee p$$

gibi karmaşık bir çok-çarpanlı ayrıklığı,

$$p \vee q \vee (p \supset q)$$

ye dönüştürmek mümkündür.

c) *Karşılıklı-koşul eklemi* :

(35) $(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$ (karşılıklı-koşulun çevirgeçliği)

(36) $((p \equiv q) \equiv r) \equiv (p \equiv (q \equiv r))$ (karşılıklı-koşulun ortaklaştırıcılığı)

(36)'ya dayanarak,

$$A_1 \equiv A_2 \equiv \dots \equiv A_n$$

biçimindeki “çok-çarpanlı karşılıklı-koşullular” kullanmak mümkündür. ‘ $A \equiv B \equiv C$ ’ deyiminin ya ‘ $((A \equiv B) \equiv C)$ ’ ya da ‘ $(A \equiv (B \equiv C))$ ’ anlamına geldiğini hatırdan çıkarmamak gerek. Buna göre, ‘ $A \equiv B \equiv C$ ’ gibi bir tam-deyim *doğruluğunun gerekli ve yeterli şartı, ya çarpanlardan yalnız birinin “doğru” olmasından, ya da her üçünün “doğru” olmasından ibarettir.*

Karşılıklı-koşul eklemi *denkgüçlü değildir*; yani:

$$(p \equiv p) \equiv p$$

bir *totoloji değildir*. Bundan dolayı çok-çarpanlı karşılıklı-koşullular genel olarak çarpanlarının geçiş sayısından bağımsız değildir. Bununla birlikte, herhangi bir çok-çarpanlı karşılıklı-koşullu, *geçiş sayısı çift olan çarpanlarından bağımsız olup sadece geçiş sayısı tek olan çarpanlarından kurulu bir çok-çarpanlı karşılıklı-koşulluya geri götürülebilir*. Örneğin:

$$A \equiv B \equiv A \equiv A \equiv B \equiv C \equiv A \equiv B \equiv C$$

gibi bir çok-çarpanlı karşılıklı-koşulluyu göz önüne alalım. Bu tam-deyim ‘A’, ‘B’ ve ‘C’ olmak üzere üç farklı çarpanı vardır. ‘A’ çarpanının geçiş sayısı 4, ‘B’ çarpanının geçiş sayısı 3, ve ‘C’ çarpanının geçiş sayısı da 2 dir. İmdi çevirgeçlik özelliğinden faydalanarak, bu tam-deyimi:

$$A \equiv A \equiv A \equiv A \equiv B \equiv B \equiv B \equiv C \equiv C$$

gibi bir deyme dönüştürebiliriz. Bu son deyim

$$A \equiv A \equiv B \equiv B \equiv B \equiv C \equiv C$$

bileşenini ‘C’ şeklinde kısaltalım. O zaman tam-deyim ‘ $A \equiv A \equiv C$ ’ biçimine girer. Oysa,

(37) $(p \equiv p \equiv q) \equiv q$

şemasının bir totoloji olduğu gösterilebilir. Şu halde, tam-deyimimizin ‘C’ ile eşdeğer olduğunu, dolayısıyla de ‘C’ ye dönüştürülebileceğini görüyoruz. Oysa, ‘C’ nin kendisi ‘ $A \equiv A \equiv C$ ’ biçiminde olduğundan, (37) uyarınca ‘C,’ deyimine dönüştürülebilir..... Aynı işlemi tekrarlamak sure-

tiyle, başlangıçtaki tam-deyimi 'B' ye dönüştürmek, dolayısıyla de geçiş sayısı çift olan 'A' ile 'C' çarpanlarını elemek mümkün olduğunu görüyoruz.

Aynı şekilde, *her çarpanının geçiş sayısı çift olan herhangi bir çok-çarpanlı karşılıklı-kosullunun geçerli olduğunu* kanıtlayabiliriz. Nitekim, böyle bir deyim 'A=A' gibi bir totolojiye dönüştürülebilir.

d) *Karşılıklı-şart eklemiyle hayırlama-ekleminin biraradalığı:*

'A₁', 'A₂', ... , 'A_n' gibi herhangi n tane düzgün-tam-deyimi göz önüne alalım. 'B₁' harfini ya 'A₁', ya da '~ A₁' in kısaltması olarak kullanalım. Aynı şekilde 'B₂' ya 'A₂' nin, ya '~ A₂' nin, ... , 'B_n' ya 'A_n' in, ya '~ A_n' in kısaltması olsun. O zaman, 'A₁', 'A₂', ... , 'A_n' deyimlerinden salt '≡' ile '~' eklemleri yardımıyla kurulu herhangi bir tam-deyimin:

$$B_1 \equiv B_2 \equiv \dots \equiv B_n$$

biçimindeki bir çok-çarpanlı karşılıklı-şart koşulluya çevrilebileceğini göstereceğiz. Örneğin:

$$\sim (\sim (\sim A \equiv B) \equiv \sim (\sim A \equiv B \equiv \sim C) \equiv \sim (A \equiv B))$$

gibi bir tam-deyimi göz önüne alalım. Bu tam-deyimi (36),

$$(38) \quad \sim (p \equiv q) \equiv (\sim p \equiv q)$$

veya

$$(39) \quad \sim (p \equiv q) \equiv (p \equiv \sim q)$$

ve

$$(40) \quad \sim \sim p \equiv p \quad (\text{çifte-hayırlama ilkesi})$$

totolojilerine dayanarak, şu biçime dönüştürebiliriz:

$$\begin{aligned} &\sim (\sim \sim A \equiv B \equiv (\sim (\sim A \equiv B) \equiv \sim C) \equiv \sim A \equiv C) \\ &\sim (A \equiv B \equiv \sim A \equiv B \equiv \sim C \equiv \sim A \equiv C) \\ &\sim (A \equiv B) \equiv A \equiv B \equiv \sim C \equiv \sim A \equiv C \\ &\sim A \equiv B \equiv A \equiv B \equiv \sim C \equiv \sim A \equiv C \end{aligned}$$

Bu son deyim ise bir "çok-çarpanlı karşılıklı-kosullu" olduğu meydandadır. (İ.K.)

İmdi, sözü geçen 'B₁≡B₂≡ ... ≡B_n' biçimindeki herhangi bir tam-deyimi göz önüne alalım. Böyle bir deyim çarpanlarında ana-eklem olarak geçen bütün hayırlama-işaretlerinin bir tek çarpan içinde toplanması mümkündür. Örneğin: '~ A≡B≡A≡B≡~ C≡~ A≡C' tam-deyimi-

ni yeniden göz önüne alalım. Karşılıklı-koşulun çevirgeçliğine dayanarak, bu tam-deyimi

$$\sim A \equiv \sim A \equiv \sim C \equiv A \equiv B \equiv B \equiv C$$

ye dönüştürebiliriz. İmdi:

$$(\sim p \equiv \sim q) \equiv (\sim \sim p \equiv q)$$

bir totolojidir. Bu totolojiye dayanarak, tam-deyimimizi şöyle dönüştürebiliriz:

$$\begin{aligned} (\sim A \equiv \sim A) &\equiv (\sim C \equiv A \equiv B \equiv B \equiv C) \\ &= \\ (A \equiv A) &\equiv (\sim C \equiv A \equiv B \equiv B \equiv C) \\ &= \\ A \equiv A &\equiv \sim C \equiv A \equiv B \equiv B \equiv C \\ &= \\ A &\equiv \sim C \equiv A \equiv A \equiv B \equiv B \equiv C \\ &= \\ (A &\equiv \sim C) \equiv (A \equiv A \equiv B \equiv B \equiv C) \\ &= \\ (A &\equiv C) \equiv (A \equiv A \equiv B \equiv B \equiv C) \\ &= \\ A &\equiv C \equiv A \equiv A \equiv B \equiv B \equiv C \end{aligned}$$

Böylece hayırlama-ekleminin bütün geçişleri bir tek çarpan (1.ci çarpan) içinde toplanmış olur. (I.K.)

İmdi, 'A' herhangi bir tam-deyim oldukça, 'A' tam-deyiminin önüne n tane ayrı hayırlama-işareti koymakla elde edilen tam-deyime A'nın "*n-li hayırlanması*" diyelim. Örneğin: 'p' gibi bir temsilci-harfin 2-li hayırlanması ' $\sim \sim p$ ', 3-lü hayırlanması ' $\sim \sim \sim p$ ' 4-lü hayırlanması ' $\sim \sim \sim \sim p$ ' v.ö. dır. 'A' tam-deyiminin "*n-li hayırlanması*"nı

$$(\sim)^n A$$

deyimiyle dile getireceğiz. Örneğin: 'p v q' gibi bir deyim 7-li hayırlanması ' $(\sim)^7 (p v q)$ ' olur. (40) totolojisine ("*çift-hayırlama ilkesi*") dayanarak:

$$\begin{aligned} (41) \quad (\sim)^n p &\equiv p & (n \text{ çift ise}) \\ (\sim)^n p &\equiv \sim p & (n \text{ tek ise}) \end{aligned}$$

totolojilerini kanıtlıyabiliriz. ("*n-li hayırlama ilkesi*"!). (41)'de 'n' sayısı olarak herhangi bir "*tabii sayı*"yı (yani o veya herhangi bir pozitif tam sayıyı) seçebiliriz. $n = o$ halinde,

$$(\sim)^o A =_{\text{OK}} A$$

tanımını yapıyoruz. Böylece herhangi bir tam-deyimi (içinde ‘~’ işareti geçsin veya geçmesin) bir “n-li hayırlama” biçiminde yazmamız mümkün olur.

Özellikle sözü geçen

$$B_1 \equiv B_2 \equiv \dots \equiv B_n$$

tam-deyimini:

$$(i) \quad ((\sim)^{m_1} A_1) \equiv ((\sim)^{m_2} A_2) \equiv \dots \equiv ((\sim)^{m_n} A_n)$$

biçiminde dile getirebiliriz. Bu tam-deyimi, içinde geçen bütün hayırlama-işareterini birinci çarpanı içinde toplıyarak,

$$((\sim)^{m_1 + m_2 + \dots + m_n} A_1) \equiv A_2 \equiv \dots \equiv A_n$$

biçimine dönüştürebiliriz. Bu tam-deyimin birinci çarpanı ise (41) gereğince,

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

sayısının çift olması halinde ‘A’ bileşeniyle, söz konusu sayının tek olması halinde de ‘~A’ ile eşdeğerdir. Buna göre (i) formülünü birinci halde,

$$(ii) \quad A_1 \equiv A_2 \equiv \dots \equiv A_n$$

biçimine, ikinci halde ise

$$(iii) \quad \sim A_1 \equiv A_2 \equiv \dots \equiv A_n$$

biçimine dönüştürmek mümkündür. Oysa, ‘A₁’, ‘A₂’, ... , ‘A_n’ bileşenlerinden her birinin geçiş sayısı çift olduğundan, (ii) tam-deyimi geçerlidir. Öte yandan, ‘A₁’, ‘A₂’, ... , ‘A_n’ gibi bir takım bileşenlerle salt ‘≡’ ve ‘~’ eklemlerinden kurulu herhangi bir tam-deyimi ‘B₁ ≡ B₂ ≡ ... ≡ B_n’, dolayısıyla de (i) biçimine dönüştürmek mümkündür. Bütün bunları göz önünde tutarak şöyle bir sonuca varıyoruz:

‘A₁’, ‘A₂’, ... ‘A_n’ gibi bir takım bileşenlerden salt karşılıklı-koşul ile hayırlama eklemleri yardımıyla kurulu herhangi bir tam-deyimin geçerliliğinin yeterli bir şartı, biryol sözü geçen bileşenlerin her birinin geçiş sayısının çift olması, bir de hayırlama-işaretinin geçiş sayısının çift olmasından ibarettir.³

Bu kurala (onu ilk olarak ortaya atan kimsenin adıyla) “McKinsey kuralı”, kuralda sözü edilen şarta da “McKinsey özelliği” diyeceğiz. O zaman, karşılıklı-koşul eklemiyle hayırlama-ekleminin başka hiçbir önerme-eklemini içine almayan herhangi bir salt önerme-şemasının bir totoloji

olmasının gerekli ve yeterli şartının, bu şemanın McKinsey özelliğini taşımasından ibaret olduğunu kanıtlıyabiliriz.

Bu amaçla, içinde karşılıklı-koşul eklemiyle hayırlama-ekleminde başka hiçbir önerme-ekleminin geçmediği $\S$ gibi bir salt önerme-şemasını göz önüne alalım. (Örneğin: ' p ', ' $\sim p$ ', ' $\sim \sim p$ ', ' $(\sim)^n p$ ', ' $p = q$ ', ' $\sim (p = \sim q)$ ', ' $\sim (p = q = p)$ ', ... bu türlü şemalardır). $\S$ şemasının "*McKinsey özelliği*"ni taşıması, biryol bu şemanın içine aldığı temsilci-harflerden her birinin geçiş sayısının çift olması, bir de şemanın içine aldığı hayırlama-işaretlerinin sayısının çift olması, ya da özel hal olarak şemanın içinde hayırlama-ekleminin hiç geçmemesi demektir.

Şart gereklidir: $\S$ şeması bir totoloji ise, McKinsey özelliğini taşır. Nitekim, $\S$ nin bir totoloji olduğunu kabul edelim. O zaman $\S$ nin atomsal-bileşenlerinin sayısı "*bir*"den büyük olmalıdır. Yoksa, $\S$ şeması ' $(\sim)^m p$ ' biçiminde olurdu. Bu son deyim ise ya ' p ' ile, ya da ' $\sim p$ ' ile eşdeğerdir. Oysa ne ' p ' bir totolojidir, ne de ' $\sim p$ '. Şu halde, $\S$ şemasının en az iki bileşeni olması, dolayısıyla bu iki bileşeni birbirine ekleyen bir "*2-li önerme-eklemi*"nin bulunması gerekir. $\S$ şemasında hayırlama-eklemiyle karşılıklı-koşul ekleminde başka bir önerme-eklemi geçmediğinden dolayı da, bu "*2- li*" önerme-eklemi ' $=$ ' eklemi olmalıdır.

İmdi, $\S$ şemasının atomsal-bileşenleri ' A_1 ', ' A_2 ', ... , ' A_n ' den ibaret olsun. $n > 1$ dir. O zaman $\S$ şemasını:

$$((\sim)^m A_1) = A_2 = \dots = A_n$$

biçimine, bu son şemayı da, m sayısının çift veya tek olmasına bakarak, ya

$$(a) \quad A_1 = A_2 = \dots = A_n$$

ya da

$$(b) \quad \sim A_1 = A_2 = \dots = A_n$$

biçimine dönüştürebiliriz. (a) deyimi, hayırlama-eklemini içine almıyan bir şema, (b) deyimi ise bu eklemin bir defa geçtiği bir şemadır. Örneğin:

$$p = q = p = p = q = r = q = p = p$$

(a) biçiminde,

$$\sim p = q = p = p = q = r = q = p = p$$

ve (b) biçiminde bir şemadır.

İmdi (b) şemasının hiçbir zaman bir *totoloji olamayacağını* gösterebiliriz. Nitekim, 'A₁' bileşeninin 'p' temsilci-harfinden ibaret olduğunu düşünelim. O zaman (b) şeması:

$$(c) \quad \sim p \equiv B$$

biçimindedir. 'B' deyimi, 'A₂ = . . . = A_n' kısaltması olup (a) biçiminde bir şemadır. O zaman 'B' ya bir *totolojidir*, ya *değildir*. 'B' bir *totoloji ise*, temsilci-harflere yüklenen bütün doğruluk-değerleri için doğrudur. Bu halde, 'p' temsilci-harfine 'D' değerini vermek suretiyle (c) şemasının 'Y' değerini aldığını görüyoruz. Öte yandan 'B' bir *totoloji değilse*, şu iki şıkla karşılaşırız: 'p' *temsilci-harf*inin 'B' şemasındaki *geçişlerinin sayısı ya çifttir*, ya da *tek*.

Birinci şıkta, 'B' şemasını artık 'p' harfini içine almayan 'C' gibi bir şemaya dönüştürebiliriz. Böylece (c) şeması ' $\sim p \equiv C$ ' ye dönüştürülebilir. Oysa, 'C' şeması 'B' ile eşdeğer olduğundan, 'C' de bir *totoloji* değildir. Şu halde, 'C' şeması, içinde geçen (her biri 'p' den farklı olan) temsilci-harflerin belli bir takım değerleri için *yanlış* olur. O zaman da, 'p' temsilci-harfine 'Y' değerini vermek suretiyle (c) şemasının 'Y' değerini aldığını görüyoruz.

İkinci şıkta, yani 'p' harfinin 'B' şemasındaki *geçişlerinin* tek olması halinde, 'B' şemasını, 'Ç' artık 'p' harfini içine almayan bir şema olmak üzere, ' $p \equiv \text{Ç}$ ' biçimine dönüştürebiliriz. O zaman da (c) şeması

$$(d) \quad (\sim p \equiv p) \equiv \text{Ç}$$

biçimine dönüştürülebilir. 'Ç' şeması içinde 'p' temsilci-harfi bulunmayan (a) biçimindeki bir şemadır. 'Ç' şemasının içinde *geçiş sayısı* tek olan farklı temsilci-harfler 'q₁', 'q₂', . . . , 'q_k' olsun. O zaman 'Ç' şemasını ' $q_1 \equiv q_2 \equiv \dots \equiv q_k$ ' biçimine, dolayısıyla de (d) şemasını:

$$(\sim p \equiv p) \equiv (q_1 \equiv q_2 \equiv \dots \equiv q_k)$$

biçimine dönüştürebiliriz. İmdi, ' $\sim p \equiv p$ ' şeması 'p' harfinin bütün değerleri için 'Y' değerini alır (çelişme!). Buna karşılık, 'q₁', 'q₂', . . . , 'q_k' harflerinin her birine 'D' değeri vermek suretiyle 'd' şemasına 'Y' değerini verebiliriz. Böylece (d) şemasının da 'Y' değerini aldığını, dolayısıyla bir *totoloji* olmadığını görüyoruz. İşte bu şekilde, (b) biçimindeki bir şemanın hiçbir zaman bir *totoloji* olmadığını kanıtlamış olduk.

Böylece Ş şemasının bir *totoloji* olması halinde, (b) biçimine dönüştürülemediğini, dolayısıyla de (a) biçimine dönüştürülebileceğini görüyoruz. Başka bir deyimle, Ş şeması bir *totoloji* ise, içinde geçen hayırlar-

ma-işaretlerinin sayısı çift olmalı, ya da Ş içinde böyle bir işaret hiç geçmemeli.

İmdi, (a) biçimindeki bir şemanın içinde geçen temsilci-harflerden birinin -söz gelişi 'p' harfinin- geçiş sayısının "tek" olduğunu kabul edelim. O zaman, (a) şemasını, ' $p \equiv C$ ' biçimine dönüştürebiliriz. 'C', içinde 'p' harfinin geçmediği ' $q_1 \equiv q_2 \equiv \dots \equiv q_k$ ' biçiminde bir şema olsun ve ' q_1 ', ' q_2 ', ... , ' q_k ' temsilci-harflerine keyfe-bağlı olarak belli bir takım doğruluk-değeri alır. İmdi, 'C' nin aldığı değer 'D' ise, 'p' ye 'Y' değerini; 'C' nin aldığı değer 'Y' ise, 'p' ye 'D' değerini verelim. Her iki halde de ' $p \equiv C$ ' şemasının "yanlış" değerini aldığı meydandadır. Şu halde, 'p' temsilci-harfinin (a) şemasında, dolayısıyla Ş şemasındaki geçiş sayısının tek olması halinde, ne (a) şemasının, ne de Ş şemasının bir totoloji olmadığını görüyoruz. (İ.K.)

Şart yeterlidir: Ş şeması McKinsey özelliğini taşırsa, bir totoloji olur. Nitekim, Ş şemasının ya (a), ya da (b) biçimine dönüştürülebildiğini görmüştük. Ş şeması McKinsey özelliğini taşıyorsa, (b) biçimine dönüştürülemez, ancak (a) biçimine dönüştürülebilir. Oysa bu türlü bir tam-deyimin çarpanlarının her birinin geçiş sayısının çift olması halinde geçerli olduğunu daha önce kanıtlamıştık. Şu halde (a) şeması, dolayısıyla de Ş şeması bir totolojidir. (İ.K.)

Örneğin: her biri, içinde karşılıklı-şart eklemiyle hayırlama-eklemin-den başka bir önerme-eklemi geçmiyen bir şema durumunda olan (35) - (41) totolojileri hep "McKinsey özelliği"ni taşımaktadır. Pratikte kullanılan ve aynı özelliği taşıyan şemalar arasında bir de:

$$(42) \quad (\sim p \equiv \sim q) \equiv (p \equiv q)$$

$$(43) \quad (p \equiv \sim q) \equiv (\sim p \equiv q)$$

totolojilerini anabiliriz.

e) *Dönüşümlülük:*

'ö' bir "2-li önerme-eklemi" oldukça:

$$p \quad \text{ö} \quad p$$

şemasının bir totoloji olması halinde, 'ö' ekleminin "dönüşümlü" (reflexive) olduğu söylenir. Dönüşümlü deyimi daha çok bağlantı-terimleri-ne uygulanmaktadır. Örneğin: özdeşlik-bağlantısını dile getiren '=' sembolü dönüşümlüdür. Nitekim ' $x = x$ ' şemasının geçerli olduğu meydandadır. Buna karşılık matematikte kullanılan '<' sembolü dönüşümlü değildir. Nitekim ' $x < x$ ' şemasının geçerli olmadığını, bu şemanın yerine-

koyma örneği durumunda olan ' $2 < 2$ ' gibi yanlış önermelerin bulunmasından anlıyoruz). ' $\cdot$ ', ' $\vee$ ', ' $\supset$ ' ve ' $\equiv$ ' eklemlerinden ancak son ikisi dönüşümlüdür.

(44) $p \supset p$ (koşul-ekleminin dönüşümlülüğü "*aynılık-ilkesi*")

(45) $p \equiv p$ (karşılıklı-koşul ekleminin dönüşümlülüğü, "*aynılık-ilkesi*")

(44) ve (45) birer totoloji olduğu halde, ne ' pp ' şemasının, ne de ' $p \vee p$ ' şemasının öyle olmadığı kolayca gösterilebilir. Şu halde ne birlik-te-evetleme eklemi, ne de ayrıklık-eklemi dönüşümlüdür.

f) *Geçişlilik* :

'ö' bir "2-li önerme-eklemi" olduğunda,

$$(p \text{ ö } q) \cdot (q \text{ ö } r) \supset (p \text{ ö } r)$$

şemasının bir totoloji olması halinde, 'ö' ekleminin "geçişli" (transitive) olduğu söylenir. (Geçişli) deyiimi daha çok bağlantı-terimlerine uygulanmaktadır. Örneğin: gerek '=' gerek '<' geçişlidir. Nitekim, ' $(x=y) \cdot (y=z) \supset (x=z)$ ' ile ' $(x<y) \cdot (y<z) \supset (x<z)$ ' şemalarından her biri geçerlidir. Buna karşılık, 'Baba' bağlantı-teriminin geçişli olmadığı,

(Ahmet Alinin babasıdır) $\cdot$ (Ali Velinin babasıdır) $\supset$ (Ahmet Velinin babasıdır)

önermesinin yanlış olmasından anlaşılır.

İmdi, ' $\cdot$ ', ' $\vee$ ', ' $\supset$ ' ve ' $\equiv$ ' eklemlerinden ' $\cdot$ ', ' $\supset$ ' ve ' $\equiv$ ' geçişlidir.

(46) $(pq) \cdot (qr) \supset pr$ (birlikte-evetlemenin geçişliliği)

(47) $(p \supset q) \cdot (q \supset r) \supset (p \supset r)$ (koşul-ekleminin geçişliliği)

(48) $(p \equiv q) \cdot (q \equiv r) \supset (p \equiv r)$ (karşılıklı-koşul ekleminin geçişliliği)

Buna karşılık, ayrıklık-eklemi geçişli değildir. Nitekim:

$$(p \vee q) \cdot (q \vee r) \supset (p \vee r)$$

bir totoloji değildir. Bunu şöyle gösterebiliriz: 'p' yerine 'Y', 'q' yerine 'D' ve 'r' yerine 'Y' koyalım. O zaman şemamız 'Y' değerini alır.

g) *Dağıtıcılık* :

'ö' ile 'ö₁' iki "2-li önerme-eklemi" olsun. O zaman:

(i) $p \text{ ö } (q \text{ ö}_1 r) \equiv (p \text{ ö } q) \text{ ö}_1 (p \text{ ö } r)$

şeması bir totoloji ise, 'ö' eklemine 'ö₁' eklemine göre "soldan-dağıtıcı" olduğu;

$$(ii) \quad (q \text{ ö } r) \text{ ö } p = (q \text{ ö } p) \text{ ö }_1 (r \text{ ö } p)$$

şeması bir totoloji ise, 'ö' eklemine 'ö₁' eklemine göre "sağdan-dağıtıcı" olduğu söylenir. Özel hal olarak, 'ö' nün çevirgeç olması halinde, 'ö' eklemi 'ö₁' gibi herhangi bir eklemeye göre soldan-dağıtıcı ise, aynı zamanda sağdan-dağıtıcı olur. Nitekim 'ö' nün çevirgeç olması halinde, (i) ile (ii) şemalarının eşdeğer olduğunu gösterebiliriz. (Böyle bir durum için, sadece 'ö' nün çevirgeç olmasının yettiğini, 'ö₁' in de çevirgeç olmasının gerekmediğini belirtmek faydalıdır). İmdi, 'ö' eklemine 'ö₁' eklemine göre hem "soldan-dağıtıcı", hem "sağdan-dağıtıcı" olması halinde, "ö' eklemine 'ö₁' eklemine göre dağıtıcı" olduğu söylenir.

('Dağıtıcı' deyimi matematikte "toplama", "çarpma", .. gibi işlemlere uygulanır. Örneğin: '×' çarpma işareti, '+' toplama işaretine göre dağıtıcıdır. Nitekim 'x × (y + z) = x × y + x × z' geçerli bir şemadır. Buna karşılık, '+' işareti '×' işaretine göre dağıtıcı değildir. Nitekim, 'x + (y × z) = (x + y) × (x + z)' geçerli bir şema değildir. Örneğin:

$$2 + (1 \times 3) = (2 + 1) \times (2 + 3)$$

yanlış bir önermedir).

Öte yandan, ya

$$p \text{ ö } (q \text{ ö }_1 r) \supset (p \text{ ö } q) \text{ ö }_1 (p \text{ ö } r)$$

şemasının, ya da

$$(p \text{ ö } q) \text{ ö }_1 (p \text{ ö } r) \supset p \text{ ö } (q \text{ ö }_1 r)$$

şemasının bir totoloji olması halinde, 'ö' eklemine 'ö₁' eklemine göre "tek-yönlü dağıtıcı" olduğunu söyleyeceğiz.

Ayrıca, 'ö₂', gerek 'ö' gerek 'ö₁' den farklı bir eklem olduğunda,

$$\begin{aligned} p \text{ ö } (q \text{ ö }_1 r) &= (p \text{ ö } q) \text{ ö }_2 (p \text{ ö } r) \\ (q \text{ ö }_1 r) \text{ ö } p &= (q \text{ ö } p) \text{ ö }_2 (r \text{ ö } p) \\ p \text{ ö } (q \text{ ö }_1 r) &= (p \text{ ö }_2 q) \text{ ö }_1 (p \text{ ö }_2 r) \\ (q \text{ ö }_1 r) \text{ ö } p &= (q \text{ ö }_2 p) \text{ ö }_1 (r \text{ ö }_2 p) \end{aligned}$$

şemalarının birinin bir totoloji olması halinde, 'ö' eklemine 'ö₁' eklemine göre "yari-dağıtıcı" olduğunu söyleyeceğiz.

İmdi, '·', 'v', '⊃' ve '=' eklemelerinden '·', 'v' ve '=' nın çevirgeç olduğunu; '⊃' nın ise öyle olmadığını söylemiştik. Buna göre, "birlikte-

evetleme", "ayrıklık" ve "karşılıklı-koşul" eklemlerinin "dağıtıcılık" ından söz edilebildiği halde, "koşul-eklemi"ne ancak "soldan-dağıtıcılık"la "sağdan-dağıtıcılık" uygulanabilir.

(i) *Birlikte-evetleme ekleminin dağıtıcılık kanunları:*

- (49) $p \cdot (qr) \equiv (pq) \cdot (pr)$ ('.' nin '.' ne göre dağıtıcılığı)
 (50) $p \cdot (q \vee r) \equiv pq \vee pr$ ('.' nin 'v' ne göre dağıtıcılığı)
 (51) $p \cdot (q \supset r) \supset (pq \supset pr)$ ('.' nin '⊃' ne göre tek-yönlü dağıtıcılığı)
 (52) $p \cdot (q \equiv r) \supset (pq \equiv pr)$ ('.' nin '=' ne göre tek-yönlü dağıtıcılığı)

(ii) *Ayrıklık-ekleminin dağıtıcılık kanunları:*

- (53) $p \vee qr \equiv (p \vee q) \cdot (p \vee r)$ ('v' nin '.' ne göre dağıtıcılığı)
 (54) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)$ ('v' nin 'v' ye göre dağıtıcılığı)
 (55) $p \vee (q \supset r) \equiv (p \vee q \supset p \vee r)$ ('v' nin '⊃' ne göre dağıtıcılığı)
 (56) $p \vee (q \equiv r) \equiv (p \vee q \equiv p \vee r)$ ('v' nin '=' ne göre dağıtıcılığı)

(iii) *Koşul-ekleminin soldan-dağıtıcılık kanunları:*

- (57) $(p \supset qr) \equiv (p \supset q) \cdot (p \supset r)$ ('⊃' nin '.' ne göre soldan-dağıtıcılığı)
 (58) $(p \supset q \vee r) \equiv (p \supset q) \vee (p \supset r)$ ('⊃' nin 'v' ye göre soldan-dağıtıcılığı)
 (59) $(p \supset (q \supset r)) \equiv ((p \supset q) \supset (p \supset r))$ ('⊃' nin '⊃' ne göre soldan-dağıtıcılığı)
 (60) $(p \supset (q \equiv r)) \equiv ((p \supset q) \equiv (p \supset r))$ ('⊃' nin '=' ne göre soldan-dağıtıcılığı)
 (61) $(p \supset (q \equiv r)) \equiv (pq \equiv pr)$ ('⊃' nin '=' ne göre soldan yarı-dağıtıcılığı)

(iv) *Koşul-ekleminin sağdan-dağıtıcılık kanunları:*

- '(62 a) $(p \supset r) \cdot (q \supset r) \supset (pq \supset r)$ ('⊃' nin '.' ne göre tek-yönlü sağdan-dağıtıcılığı)
 (62 b) $(pq \supset r) \equiv (p \supset r) \vee (q \supset r)$ ('⊃' nin '.' ne göre sağdan yarı-dağıtıcılığı)
 (63) $(p \vee q \supset r) \supset (p \supset r) \vee (q \supset r)$ ('⊃' nin 'v' ye göre tek-yönlü sağdan-dağıtıcılığı)
 (64) $(p \vee q \supset r) \equiv (p \supset r) \cdot (q \supset r)$ ('⊃' 'v' ye göre sağdan-yarı-dağıtıcılığı)
 (65) $((p \supset q) \supset r) \supset ((p \supset r) \supset (q \supset r))$ ('⊃' nin '⊃' ne göre tek-yönlü sağdan dağıtıcılığı)

Öte yandan, ‘ $\supset$ ’ ekleminin ‘ $=$ ’ eklemine göre hiçbir şekilde sağdan-dağıtıcı olmadığını gösterebiliriz.

(v) *Karşılıklı-koşul ekleminin dağıtıcılık kanunları:*

- (66) $(p = q) \cdot (p = r) \supset (p = qr)$ (‘ $=$ ’ nin ‘ $\cdot$ ’ ne göre tek-yönlü dağıtıcılığı)
 (67) $(p = q \vee r) \supset (p = q) \vee (p = r)$ (‘ $=$ ’ nin ‘ $\vee$ ’ ye göre tek-yönlü dağıtıcılığı)
 (68) $((p = (q \supset r)) \supset ((p = q) \supset (p = r)))$ (‘ $=$ ’ nin ‘ $\supset$ ’ ne göre tek-yönlü dağıtıcılığı)

Buna karşılık, ‘ $=$ ’ nin ‘ $=$ ’ ne göre hiç bir şekilde dağıtıcı olmadığı gösterilebilir.

h) *Koşul ekleminin çeşitli özellikleri :*

- (69) $\sim p \supset (p \supset q)$ (Ön-önermenin hayırlanması: “denial of the antecedent”)
 (70) $q \supset (p \supset q)$ (ard-önermenin evetlenmesi, “affirmation of the consequent”)

(69) ile (70) birer totoloji, dolayısıyla birer mantık ilkesi durumundadır.⁴ Öte yandan,

$$\begin{aligned} &\sim p \\ &p \supset q \\ &\therefore \sim q \end{aligned}$$

çıkarım-şemasıyla,

$$\begin{aligned} &q \\ &p \supset q \\ &\therefore p \end{aligned}$$

çıkarım-şemasına göre yapılan çıkarımlara sırasıyla “ön-önermenin hayırlanması paralojizmi” (fallacy of the denial of the antecedent) ve “ard-önermenin evetlenmesi paralojizmi” (fallacy of the affirmation of the consequent) denilmektedir. Bu iki çıkarım-şemasının geçerli olmadığı,

$$\sim p \cdot (p \supset q) \supset q$$

ile

$$q \cdot (p \supset q) \supset p$$

şemalarının birer totoloji olmamasından anlaşılır. “Ön-önermenin hayırlanması paralojizm”ine:

Ahmet Ankara'ya giderse, annesi İstanbul'a gelmeyecek

Ahmet Ankara'ya gitmeyecek

∴ Ahmed'in annesi İstanbul'a gelecek

çıkarımını; "ard-önermenin evetlenmesi paralojizmi"ne de:

Ahmet Ankara'ya giderse, annesi İstanbul'a gelecek

Ahmed'in annesi İstanbul'a gelecek

∴ Ahmet Ankara'ya gidecek.

çıkarımını örnek olarak gösterebiliriz.

(71) $(p \supset (q \supset r)) \equiv (pq \supset r)$ ('q' nun giriş ve çıkışı, "importation-exportation")

(72) $(p \supset (q \supset r)) \equiv (q \supset (p \supset r))$ ('p' ile 'q' nün birbiriyle yer değiştirmesi, "commutation")

(73) $((p \supset q) \supset r) \supset (p \supset (q \supset r))$

(74) $((p \supset q) \supset r) \supset (pq \supset r)$

(75) $((p \supset q) \supset r) \supset (q \supset (p \supset r))$

(76) $(p \supset q) \supset (rp \supset rq)$ ("çarpma", "factorization")

(77) $(p \supset q) \supset (r \vee p \supset r \vee q)$ ("toplama", "summation")

"Çarpma" ve "toplama" işlemleri yalnız (76) ve (77) uyarınca koşullara değil, bir de

(78) $(p \equiv q) \supset (rp \equiv rq)$

ve

(79) $(p \equiv q) \supset (r \vee p \equiv r \vee q)$

totolojileri uyarınca karşılıklı-şart koşullulara da uygulanabilir.

(80) $(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$ (devirme; "contraposition" veya "transposition")

(81) $p \supset ((p \supset q) \supset q)$ (evetleme, "assertion")

(82) $((p \supset q) \supset p) \supset p$ (Peirce kanunu)

(83) $(p \supset q) \cdot (r \supset s) \supset (pr \supset qs)$ (Leibniz teoremi)

(84) $(p \supset r) \cdot (q \supset s) \cdot (p \vee q) \cdot \sim(rs) \supset (r \supset p) \cdot (s \supset q)$ (Hauber kanunu)

(85) $(p_1 \supset q_1) \cdot (p_2 \supset q_2) \cdot \dots \cdot (p_n \supset q_n) \cdot (p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \cdot \sim (q_1 q_2) \cdot \sim (q_1 q_3) \cdot \dots \cdot \sim (q_1 q_n) \cdot \sim (q_2 q_3) \cdot \dots \cdot \sim (q_{n-1} q_n) \supset ((q_1 \supset p_1) \cdot (q_2 \supset p_2) \cdot \dots \cdot (q_n \supset p_n))$ (Hauber kanunun genelleşmiş şekli)

Bu kanunun anlamı şudur: verilen bir takım koşul-önermelerinin ön-önermeleri tam bir ayrıklığı, meydana getirir, (yani çarpanları bu ön-önermelerden ibaret olan çok-çarpanlı ayrıklık doğru ise), ard-önermeleri de ikişer iki-

şer bağdaşmaz bir durumda ise; o zaman sözü geçen koşul-önermelerinin her birinden kendi evriğini (yani ön-önerme ile ard-önermenin değiş-tokuş edilmesiyle elde edilen koşul-önermesini) çıkarmak mümkündür. ('p' ile 'q' nün bağdaşmazlığını, yani her ikisinin birlikte doğru olmaması, $\sim p \vee \sim q$, 'p|q', 'p $\supset$ $\sim$ q' veya ' $\sim$ (pq)' biçiminde dile getirilebilir).

i) *Sadeleştirme (simplification):*

- (86) $pq \supset p$
 (87) $pq \supset q$
 (88) $p \supset p \vee q$
 (89) $q \supset p \vee q$

Görüldüğü gibi, sadeleştirme kanunları birlikte-evetlemelerin kendi bileşenlerini içerdiğini; ayrıklıkların ise kendi bileşenleri tarafından içerildiğini dile getirirler.

j) *Açılma ("development"):*

- (90) $p \equiv p \vee pq$
 (91) $p \equiv p \cdot (p \vee q)$
 (92) $p \equiv pq \vee p \sim q$
 (93) $p \equiv (p \vee q) \cdot (p \vee \sim q)$

Bu totolojiler, verilen bir tam-deyimi, istenilen herhangi başka bir tam-deyimi de içine alan daha geniş bir tam-deyime dönüştürmeye yarar.

k) *Genleşme (expansion):*

- (94) $pq \equiv (p \equiv (p \supset q))$
 (95) $p \vee q \equiv (q \equiv (p \supset q))$
 (96) $(p \supset q) \equiv (p \equiv pq)$
 (97) $(p \supset q) \equiv (q \equiv p \vee q)$

Bu totolojiler, herhangi bir birlikte-evetlemeyi, ayrıklığı veya koşulluyu bir karşılıklı-kosulluya (yani ana-eklemi karşılıklı-kosul ekleminden ibaret olan bir tam-deyime) dönüştürmeye yarar.

l) *Çeşitli tam-deyimlerin hayırlanması:*

- (98) $\sim(pq) \equiv \sim p \vee \sim q$ (De Morgan kanunu)
 (99) $\sim(p_1 p_2 \dots p_n) \equiv \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \dots \vee \sim p_n$ »
 (100) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \sim q$ »
 (101) $\sim(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \equiv \sim p_1 \sim p_2 \dots \sim p_n$ »
 (102) $\sim(p \supset q) \equiv p \sim q$ (koşullunun hayırlanması)

Karşılıklı-koşullunun hayırlanması ise (38) veya (39) totolojileriyle daha önce gösterilmişti. (98) — (102) totolojileriyle (38) ve (39) totolojilerine dayanarak, herhangi bir tam-deyim, etki-alanı bir atomsal-bileşenden ibaret olmıyan hiçbir hayırlama-işaretini içine almıyan bir tam-deyime dönüştürebiliriz. Örneğin (10—7) şemasını şöyle dönüştürmek mümkündür:

$$\begin{aligned} & \sim(\sim(\sim(p \vee \sim q) \cdot \sim q) \vee \sim pq) \\ & \sim(\sim(\sim pq \sim q) \vee \sim pq) \\ & \sim(p \vee \sim q \vee q \vee \sim pq) \\ & \sim pq \sim q \cdot \sim(\sim pq) \\ & \sim pq \sim q \cdot (p \vee \sim q) \end{aligned}$$

m) Çeşitli çıkarım ilkeleri:

(103)	$(p \supset \sim p) \equiv \sim p$	(reductio ad absurdum)
(104)	$(\sim p \supset p) \equiv p$	»
(105)	$(p \supset q) \cdot (p \supset \sim q) \equiv \sim p$	»
(106)	$q \cdot (qp \supset r) \cdot (qp \supset \sim r) \supset \sim p$	»
(107)	$q \cdot (q \sim p \supset r) \cdot (q \sim p \supset \sim r) \supset p$	»

'A' gibi verilen herhangi bir önermeyi "*reductio ad absurdum*" (olmazlığa geri götürme) yoluyla *kanıtlamak*, ' $\sim A$ 'nın bir çelişmeye yol açtığını göstermek demektir. ' $\sim A$ ' bir çelişmeye yol açarsa, ' $\sim A$ ' yanlıştır. Dolayısıyla (üçüncü hâlin olmazlığı ilkesi gereğince) 'A' doğrudur. Şu halde 'A' kanıtlanmıştır.

İmdi, böyle bir kanıtlama işleminde ortaya çıkan çelişik önermeler 'C' ve ' $\sim C$ ' olsun. Bu çelişik önermeleri 'A' dan türetmek için başvuru (önceden kanıtlanmış) önerme veya önermelerin birlikte-evetlenmesi de 'B' olsun. O zaman, 'A' nın kanıtı şöyle bir çıkarım şeklinde olur:

$$\begin{aligned} & B \\ & B \sim A \supset C \\ & B \sim A \supset \sim C \\ & \therefore A \end{aligned}$$

Böyle bir çıkarımın geçerliliği, (107) önerme-şemasının bir totoloji olmasından anlaşılır.⁵

Öte yandan, 'A' gibi bir önermenin *hayırlanmasını* (yani ' $\sim A$ ' yı) "*reductio ad absurdum*", yoluyla *kanıtlamak*, 'A' önermesinin kendisinin bir çelişmeye yol açtığını göstermek demektir. 'A' dan türetilen çelişik önermeler 'C' ve ' $\sim C$ ', bunları türetmek için başvuru (önceden kanıtlanmış) önerme veya önermelerin birlikte-evetlenmesi 'B' olsun. O zaman çıkarım

$$\begin{array}{l}
 B \\
 BA \supset C \\
 BA \supset \sim C \\
 \therefore \sim A
 \end{array}$$

biçiminde olur. Bu çıkarımın geçerliliği de (106) nın bir totoloji olmasından anlaşılır.

$$(108) \quad (p \supset q) \cdot p \supset q \quad (\text{Modus ponens, "modus ponendo ponens"})$$

Bu önerme-şemasının bir totoloji olması, İstoacıların

$$\begin{array}{l}
 p \supset q \\
 p \\
 \therefore q
 \end{array}$$

biçimindeki "*hipotetik sillojizm*"inin geçerliliğini belgeler. Bu sillojizmin klâsik örneği şudur:

Güneş doğmuşsa, etraf aydınlıktır
 Güneş doğmuştur
 O halde etraf aydınlıktır.

çıkarımıdır.

İstoacıların öteki "*hipotetik sillojizm*"i ise

$$\begin{array}{l}
 p \supset q \\
 \sim q \\
 \therefore \sim p
 \end{array}$$

biçimindedir. Bunun karşılığı olan totoloji:

$$(109) \quad (p \supset q) \cdot \sim q \supset \sim p \quad (\text{modus tollens, "modus tollendo tollens"})$$

dir.

İstoacılar, sözü geçen hipotetik sillojizmlerin yanı sıra "*disjonktif sillojizm*"ler de ortaya koymuşlardı. Bunlardan biri,

$$\begin{array}{l}
 p \vee q \\
 \sim p \\
 \therefore q
 \end{array}$$

Çıkarım-şeması veya

$$(110) \quad (p \vee q) \cdot \sim p \supset q \quad (\text{modus tollendo ponens})$$

totolojisiyle; öbürü de

$$\sim p \vee \sim q$$

$$p$$

$$\therefore \sim q$$

...

çıkarım-şeması veya

$$(111) \quad (\sim p \vee \sim q) \cdot p \supset \sim q$$

(modus ponendo tollens)

totolojisiyle dile getirilebilir.

Son olarak “*ikilem*” (dilemma) denilen çıkarım biçimlerini gözden geçirelim. Bir ikilem, öncülleri *iki* koşul-önermesiyle bir ayrıklıktan ibaret bir çıkarımdır. Öncül olarak iki koşul-önermesi alınacak yerde *n tane* koşul önermesi kullanmak suretiyle “*üçlem*”ler, “*dörtlem*”ler,..., ve genel olarak “*n-lem*”ler (polyemmas) meydana getirmek mümkündür. İkilemleri (ve genel olarak “*n-lem*”leri) sonuçlarının olumlu veya olumsuz olmasına bakarak “*yapıcı*” (constructive) ve “*yıkıcı*” (destructive) olmak üzere iki öbeğe ayırıyoruz. Ayrıca, sonucun bir tek önerme veya birçok önermenin ayrıklığından ibaret olmasına bakarak, ikilemler “*basit*” ve “*karmaşık*” diye iki öbeğe ayrılabilir. Böylece bütün ikilemleri (ve “*n-lem*”leri) “*basit yapıcı*”, “*basit yıkıcı*”, “*karmaşık yapıcı*” ve “*karmaşık yıkıcı*” olmak üzere dört öbeğe ayırıyoruz:

Basit yapıcı ikilem:

$$A \supset C$$

$$B \supset C$$

$$A \vee B$$

$$\therefore C$$

böyle bir çıkarma geçerliliği,

$$(112) \quad (p \supset r) \cdot (q \supset r) \cdot (p \vee q) \supset r$$

totolojisine dayanır⁶.

Basit yapıcı n-lem:

$$A_1 \supset B$$

$$A_2 \supset B$$

$$\dots\dots$$

$$\dots\dots$$

$$A_n \supset B$$

$$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$$

$$\therefore B$$

Bu çıkarımın geçerliliği,

$$(113) \quad (p_1 \supset q) \cdot (p_2 \supset q) \cdot \dots \cdot (p_n \supset q) \cdot (p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \supset q$$

totolojisine dayanır.

Basit yıkıcı ikilem:

$$\begin{aligned} A \supset B \\ A \supset C \\ \sim B \vee \sim C \\ \therefore \sim A \end{aligned}$$

Bu çıkarımın geçerliliği,

$$(114) \quad (p \supset q) \cdot (p \supset r) \cdot (\sim q \vee \sim r) \supset \sim p$$

totolojisine dayanır.

Basit yıkıcı n-lem:

$$\begin{aligned} A \supset B_1 \\ A \supset B_2 \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ A \supset B_n \\ \sim B_1 \vee \sim B_2 \vee \dots \vee \sim B_n \\ \therefore \sim A \end{aligned}$$

Bu çıkarımın geçerliliği,

$$(115) \quad (p \supset q_1) \cdot (p \supset q_2) \cdot \dots \cdot (p \supset q_n) \cdot (\sim q_1 \vee \sim q_2 \vee \dots \vee \sim q_n) \supset \sim p$$

totolojisine dayanır.

Karmaşık yapıcı ikilem:

$$\begin{aligned} A \supset B \\ C \supset D \\ A \vee C \\ \therefore B \vee D \end{aligned}$$

Bu çıkarımın geçerliliği,

$$(116) \quad (p \supset q) \cdot (r \supset s) \cdot (p \vee r) \supset (q \vee s)$$

totolojisine dayanır.

Karmaşık yapıcı n-lem:

$$\begin{aligned} A_1 \supset B_1 \\ A_2 \supset B_2 \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ A_n \supset B_n \\ A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n \\ \therefore B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_n \end{aligned}$$

Bu çıkarımın geçerliliği,

$$(117) \quad (p_1 \supset q_1) \cdot \dots \cdot (p_n \supset q_n) \cdot (p_1 \vee \dots \vee p_n) \supset (q_1 \vee q_2 \vee \dots \vee q_n)$$

totolojisine dayanır.

Karmaşık yıkıcı ikilem:

$$\begin{aligned} A &\supset B \\ C &\supset D \\ \sim B &\vee \sim D \\ \therefore \sim A &\vee \sim C \end{aligned}$$

Bu çıkarımın geçerliliği,

$$(118) \quad (p \supset q) \cdot (r \supset s) \cdot (\sim q \vee \sim s) \supset (\sim p \vee \sim r)$$

totolojisine dayanır.

Karmaşık yıkıcı n-lem:

$$\begin{aligned} A_1 &\supset B_1 \\ A_2 &\supset B_2 \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ A_n &\supset B_n \\ \sim B_1 &\vee \sim B_2 \vee \dots \vee \sim B_n \\ \therefore \sim A_1 &\vee \sim A_2 \vee \dots \vee \sim A_n \end{aligned}$$

Bu çıkarımın geçerliliği,

$$(p_1 \supset q_1) \cdot \dots \cdot (p_n \supset q_n) \cdot (\sim q_1 \vee \dots \vee \sim q_n) \supset (\sim p_1 \vee \dots \vee \sim p_n)$$

totolojisine dayanır.

n) Önerme-eklemlerinin indirgenmesi:

' $\sim$ ', ' $\cdot$ ', ' $\vee$ ', ' $\supset$ ' ve ' $\equiv$ ' eklemlerini, bunlardan sadece ikisi türünden tanımlamak mümkündür. Bu amaçla seçilecek iki eklemden birinin hep ' $\sim$ ' olması gerekir. Öbürü ise ' $\cdot$ ', ' $\vee$ ' veya ' $\supset$ ' olabildiği halde, ' $\equiv$ ' olamaz. (' $\cdot$ ' ekleminin sadece ' $\sim$ ' ile ' $\equiv$ ' eklemleri türünden tanımlanamıyacağı kanıtlanmıştır).⁷ Buna göre, sözü geçen beş temel eklemin ya ' $\sim$ ' ve ' $\cdot$ ' eklemleri, ya ' $\sim$ ' ve ' $\vee$ ' eklemleri, ya da ' $\sim$ ' ve ' $\supset$ ' eklemlerine indirgenebileceğini söyleyebiliriz. Önerme-eklemlerini ' $\sim$ ' ve ' $\cdot$ ' ye indirgeyen sisteme (böyle bir sistemi ilk kullanan mantıkçıların adıyla) "*Brentano sistemi*"; ' $\sim$ ' ve ' $\vee$ ' ye indirgeyen sisteme "*Whitehead-Russell, Hilbert-Ackermann sistemi*"; ' $\sim$ ' ve ' $\supset$ ' ye indirgeyen sisteme de "*Frege-Lukasiewicz sistemi*" diyeceğiz.

Brentano sistemi:

$$(119) \quad p \vee q \equiv \sim(\sim p \sim q)$$

$$(120) \quad (p \supset q) \equiv \sim(p \sim q)$$

totolojilerine dayanarak, 'v' ile '⊃' eklemleri bu sistemde şöyle tanımlanır:

$$p \vee q =_{Dk} \sim(\sim p \sim q)$$

$$p \supset q =_{Dk} \sim(p \sim q)$$

'⊃' eklemi böylece tanımlandıktan sonra, '≡' eklemi,

$$(121) \quad (p \equiv q) \equiv (p \supset q) \cdot (q \supset p)$$

totolojisine dayanarak,

$$p \equiv q =_{Dk} (p \supset q) \cdot (q \supset p)$$

biçiminde tanımlanır.⁴

Whitehead-Russell, Hilbert-Ackermann sistemi:

$$(122) \quad pq \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$$

$$(123) \quad (p \supset q) \equiv \sim p \vee q$$

totolojilerine dayanarak, '·' ve '⊃' eklemleri bu sistemde

$$pq =_{Dk} \sim(\sim p \vee \sim q)$$

ve

$$p \supset q =_{Dk} \sim p \vee q$$

biçiminde tanımlanır. '≡' ise Brentano sisteminde olduğu gibi tanımlanır.

Frege-Lukasiewicz sistemi:

$$(124) \quad pq \equiv \sim(p \supset \sim q)$$

$$(125) \quad p \vee q \equiv (\sim p \supset q)$$

totolojilerine dayanarak, '·' ve 'v' eklemleri bu sistemde

$$pq =_{Dk} \sim(p \supset \sim q)$$

ve

$$p \vee q =_{Dk} \sim p \supset q$$

biçiminde tanımlanır. '≡' eklemi ilk iki sistemde olduğu gibi tanımlanır.

Ayrıca, sözü geçen beş eklemnin tümünü de sadece '|' *bağdaşmazlık eklemi* türünden, veya sadece '↓' *birlikte-hayırlama eklemi* türünden tanımlamak mümkündür. (Bütün önerme-eklemlerini başka bir tek 2-li eklem türünden tanımlamak imkânsızdır).⁵

- (126) $\sim p \equiv p|p$
 (127) $pq \equiv (p|q) | (p|q)$
 (128) $p \vee q \equiv (p|p) | (q|q)$
 (129) $(p \supset q) \equiv p|(q|q)$
 (130) $(p \equiv q) \equiv (p|q) | ((p|p) | (q|q))$

totolojilerine dayanarak, ' $\sim$ ', ' $\cdot$ ', ' $\vee$ ', ' $\supset$ ' ve ' $\equiv$ ' eklemeleri ' $|$ ' türünden şöyle tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}\sim p &=_{Dk} p|p \\ pq &=_{Dk} (p|q) | (p|q) \\ p \vee q &=_{Dk} (p|p) | (q|q) \\ p \supset q &=_{Dk} p | (q|q) \\ p \equiv q &=_{Dk} (p|q) | ((p|p) | (q|q))\end{aligned}$$

Öte yandan,

- (131) $\sim p \equiv p \downarrow p$
 (132) $pq \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$
 (133) $p \vee q \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

totolojilerine dayanarak, ' $\sim$ ', ' $\cdot$ ' ve ' $\vee$ ' eklemelerini ' $\downarrow$ ' türünden şöyle tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned}\sim p &=_{Dk} p \downarrow p \\ pq &=_{Dk} (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \\ p \vee q &=_{Dk} (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)\end{aligned}$$

' $\supset$ ' ve ' $\equiv$ ' eklemeleri ise ' $\sim$ ' ve ' $\cdot$ ' (veya ' $\sim$ ' ve ' $\vee$ ') türünden tanımlanmak suretiyle ' $\downarrow$ ' eklemine indirgenebilirler.

' $\downarrow$ ' eklemesinin önemli iki özelliği:

- (134) $pq \equiv \sim p \downarrow \sim q$
 ile

- (135) $p \vee q \equiv \sim(p \downarrow q)$
 totolojileriyle dile gelmektedir.

Öte yandan, gerek ' $|$ ' gerek ' $\downarrow$ ' eklemesini aşağıdaki totolojilere dayanarak kolaylıkla ' $\sim$ ' ile ' $\cdot$ ' veya ' $\sim$ ' ile ' $\vee$ ', ya da ' $\sim$ ' ile ' $\supset$ ' eklemelerine geri götürebiliriz.

- (136) $p|q \equiv \sim(pq)$
 (137) $p|q \equiv \sim p \vee \sim q$
 (138) $p|q \equiv (p \supset \sim q)$

- (139) $p \downarrow q \equiv \sim p \sim q$
 (140) $p \downarrow q \equiv \sim (p \vee q)$
 (141) $p \downarrow q \equiv \sim (\sim p \supset q)$

' $\equiv$ ' (karşılıklı-şart) eklemiyle ' ∇ ' (bağdaşmaz-ayrıklık) eklemine aşağıdaki totolojilere dayanarak ' $\sim$ ', ' $\cdot$ ' ve ' $\vee$ ' eklemleri türünden tanımlamak mümkündür.

- (142) $(p \equiv q) \equiv (pq \vee \sim p \sim q)$
 (143) $(p \equiv q) \equiv (\sim p \vee q) \cdot (p \vee \sim q)$
 (144) $(p \nabla q) \equiv \sim (p \equiv q)$
 (145) $(p \nabla q) \equiv (\sim p \equiv q)$
 (146) $(p \nabla q) \equiv (p \equiv \sim q)$
 (147) $(p \nabla q) \equiv (p \sim q \vee \sim pq)$
 (148) $(p \nabla q) \equiv (p \vee q) \cdot (\sim p \vee \sim q)$

B ö l ü m IV.

NORMAL-ŞEMALAR VE İKİLİLİK

§ 13. N o r m a l - Ş e m a l a r .

Verilen herhangi bir önerme-şemasının doğruluk çizelgesini göz önüne alalım. Örnek olarak, doğruluk-çizelgesi

p	q	r	f(p,q,r)
D	D	D	D
D	D	Y	Y
D	Y	D	D
D	Y	Y	D
Y	D	D	Y
Y	D	Y	D
Y	Y	D	Y
Y	Y	Y	Y

biçimnde olan 'f(p,q,r)' gibi bir şemayı düşünelim. Görüldüğü gibi 'f(p,q,r)' şeması ancak ve ancak 'p' doğru, 'q' doğru, 'r' doğru veya 'p' doğru, 'q' yanlış, 'r' doğru; veya 'p' doğru, 'q' yanlış, 'r' yanlış; veya 'p' yanlış, 'q' doğru, 'r' yanlış ise; doğru olur. Başka bir deyimle, 'f(p,q,r)' şeması ancak ve ancak 'p', 'q', 'r'; veya 'p' '¬q', 'r'; veya 'p', '¬q', '¬r'; veya '¬p', 'q', '¬r' doğru ise; doğrudur. Bu durumu

$$'f(p,q,r)' \leftrightarrow 'pqr \vee p\sim qr \vee p\sim q\sim r \vee \sim pq\sim r'$$

eşdeğerliğiyle dile getirebiliriz. Bu eşdeğerliğin sağ kısmı olan

$$(1) \quad pqr \vee p\sim qr \vee p\sim q\sim r \vee \sim pq\sim r$$

şeması bir "çok-çarpanlı ayrıklık"tır. Bu ayrıklığın her çarpanı ise bir "çok-çarpanlı birlikte-evetleme" durumundadır. Bu birlikte-evetlemenin de her

çarpanının bir temsilci-harf veya bir temsilci-harfin hayırlanması olduğunu görüyoruz. Örneğin, (1) ayrıklığının ikinci çarpanı olan ' $p \sim qr$ ' şemasını göz önüne alalım. Bu şema bir "çok-çarpanlı birlikte-evetleme" olup birinci çarpanı ' p ' temsilci-harfinden, ikinci çarpanı ' q ' temsilci-harfinin hayırlanmasından, üçüncü çarpanı da ' r ' temsilci-harfinden ibarettir.

İmdi, ' p ', ' q ', ' r ', ... , ' p_1 ', ' q_1 ', ' r_1 ', ... gibi herhangi bir temsilci harfe bir "*atomsal-şema*" şema; herhangi bir atomsal-şemaya veya böyle bir şemanın hayırlanmasına bir "*yalın-şema*" diyelim. Örneğin, ' p ' hem bir atomsal-şema hem de bir yalın-şemadır. ' $\sim p$ ' ise bir yalın-şema olmakla birlikte bir atomsal-şema değildir. (Görüldüğü gibi her atomsal-şema aynı zamanda bir yalın-şema olduğu halde, her yalın-şema bir atomsal-şema değildir.)

Buna göre, sözü geçen ' $p \sim qr$ ' şemasının, her çarpanı bir "*yalın-şema*" olan bir "çok-çarpanlı birlikte-evetleme" olduğunu söyleyebiliriz. Öte yandan böyle bir birlikte-evetlemenin bütün çarpanlarının birbirinden *farklı* olduğunu, başka bir deyimle, söz konusu şemada geçen her temsilci-harfin geçiş sayısının hep "bir"e eşit olduğunu görüyoruz. İşte, herhangi bir "*yalın-şema*"ya veya, her çarpanı bir yalın-şema olup içine aldığı her temsilci-harfin geçiş sayısı "1"e eşit olan herhangi bir çok-çarpanlı birlikte-evetlemeye bir "*temel-şema*" (Fundamental schema') diyeceğiz. Örneğin: ' $p \sim qr$ ' şeması bir "temel-şema" olduğu halde, ' $p \sim q \sim pr$ ' gibi bir şema, ' p ' harfinin geçiş sayısının "2"ye eşit olmasından dolayı bir temel-şema *değildir*. Genel olarak, her "atomsal-şema" veya her "yalın-şema" bir temel-şema olduğu halde, her temel-şemanın bir atomsal şema veya bir yalın-şema olmadığı meydandadır. Örneğin, ' p ' atomsal-şemasıyla ' $\sim p$ ' yalın-şeması birer temel-şema" durumundadır. Öte yandan bir temel-şema olan ' $p \sim qr$ ' ifadesi ne bir atomsal-şema ne de bir yalın-şemadır.

Buna göre, (1) şemasının, her çarpanı bir "temel-şema"dan ibaret olan bir "çok-çarpanlı ayrıklık" olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca, (1) şemasının bütün çarpanlarının birbirinden farklı olduğunu, başka bir deyimle, bu çarpanların her birinin geçiş sayısının "1"e eşit olduğunu görüyoruz. İşte, herhangi bir "*temel-şema*" ya veya, her çarpanı, geçiş sayısı "1"e eşit olan bir temel-şema olan herhangi bir çok-çarpanlı ayrıklığa bir "*normal-şema*" denir. Buna göre, her "atomsal-şema"nın, her "yalın-şema"nın ve her "temel-şema"nın bir "normal-şema" olduğunu, ama her normal-şemanın bir temel-şema (veya bir yalın-şema, ya da bir atomsal-şema) olmadığını söyleyebiliriz. Örneğin, sözü geçen (1) şeması bir normal-şema olmakla birlikte bir temel-şema değildir.

İmdi, herhangi bir normal-şema şu dört özelliği taşır:

- (a) Bir normal-şemanın içinde *ne "koşul-eklemi" ne de "karşılıklı-koşul eklemi"* geçer.
- (b) Bir normal-şemanın içinde *"hayırlama-eklemi"* ya hiç geçmez, ya da (geçmesi halinde) her geçişinin etki-alanı ancak birer *atomsal-şemadan* ibaret olur.
- (c) Bir normal-şemanın içinde *"birlikte-evetleme eklemi"* ya hiç geçmez, ya da (geçmesi halinde) her geçişinin etki-alanı ancak ikişer *yahn-şemadan* ibaret olur.
- (d) Bir normal-şemanın bir çarpanında geçen her temsilci-harfin bu çarpan içindeki geçiş sayısı "1"e eşittir.

Öte yandan, (1) şemasının her çarpanının aynı temsilci-harflerden kurulu olduğunu görüyoruz. Ancak, bu biçimde olmayan normal-şemaların da (örneğin: 'p v ~pq v p~qr') bulunduğu meydandadır. Bu bakımdan, (1) gibi, sözü geçen niteliği taşıyan şemalar, özel bir çeşitten normal-şemalar durumundadır. İşte bu çeşit normal-şemalara *"tam normal-şemalar"* (full normal forms) denir. Buna göre, her "tam normal-şema"nın sözü geçen (a) — (d) özelliklerinden başka, bir de şu beşinci özelliği taşıdığını söyleyebiliriz:

- (e) Bir tam normal-şemanın içinde geçen her temsilci-harf, bu normal-şemanın her çarpanında da geçer.

(d) ve (e) özelliklerini birleştirerek, tam normal-şemaların şöyle bir özelliği taşıdığını söyleyebiliriz:

- (f) Bir tam normal-şemanın içinde geçen her temsilci-harfin, bu normal-şemanın her çarpanındaki geçiş sayısı "1"e eşittir.

İmdi, herhangi bir salt-şemayı *"tutarlı"* olması şartıyla, bir *"normal-şema"*ya, hattâ bir *"tam normal-şema"*ya dönüştürebiliriz. Bunun için verilen şemanın doğruluk-çizelgesini bilmemiz yeter. Ancak, şemanın *"tutarsız"* olması halinde durum değişir. Nitekim, tutarsız bir şemanın doğruluk-çizelgesinin sağındaki sütun hep 'Y' harflerinden kurulu olduğundan, sözü geçen 'f (p,q,r)' şemasını bir normal-şema halinde dönüştürmek için başvurduğumuz metodu kullanmak imkânsız olur. Ancak, içinde 'p₁', 'p₂',..., 'p_n' gibi n tane farklı temsilci-harfin geçtiği herhangi bir tutarsız şemayı

- (2)
$$p_1 \sim p_1 p_2 \cdot \cdot \cdot p_n$$

gibi bir *"normalımsı"* şemaya çevirmek mümkündür. (2) şeması tutarsız olduğundan, söz konusu şemamızla eşdeğerdir. Öte yandan (2) şeması (d) veya (f) özelliklerini taşımamakla birlikte, (a), (b), (c) ve (e) özelliklerini taşıması bakımından *"normalımsı"* sayılabilir.

Böylece, doğruluk-çizelgesi bilinen herhangi bir salt-şemayı, ya (tutarlı olması halinde) bir normal-şemaya (hattâ bir “tam normal-şema”ya), ya da (tutarsız olması halinde) (2) gibi bir “normalımsı” şemaya dönüştürebildiğimizi görüyoruz. “Tutarsız” bir şemanın hiç bir şekilde bir “normal-şema”ya dönüştürülemeyeceğini kanıtlamak ta mümkündür. Nitekim, “*her normal-şema tutarlıdır*”. Dolayısıyla tutarsız bir şema hiç bir normal-şema ile eşdeğer olamaz. Herhangi bir normal-şemanın “tutarlı” olduğunu da şöyle kanıtlıyabiliriz:

Herhangi bir “temel-şema”yı göz önüne alalım. Bu şemanın içinde geçen her temsilci-harfe, harfin şema içinde hayırlanmamış veya hayırlanmış olduğuna bakarak, ‘D’ veya ‘Y’ değerini verelim. Her harfin geçiş sayısı “1”e eşit olduğundan böyle bir işlemin yapılması her zaman mümkündür. İmdi, böyle bir işlemin sonucunda söz konusu temel-şemanın her çarpanının doğru olduğu, dolayısıyla temel-şemanın kendisinin de doğru olduğu meydandadır. Şu halde *her temel-şemanın tutarlı olduğu anlaşılır*. Örneğin: ‘p ~ qr’ gibi bir temel-şemanın, ‘p’ ye ‘D’, ‘q’ ye ‘Y’ ve ‘r’ ye ‘D’ değerini vermek suretiyle ‘D’ değerini aldığı, dolayısıyla “tutarlı” olduğu görülür. Oysa her normal-şemaya bir temel-şemadan, ya da her çarpanı bir temel-şema olan bir “çok-çarpanlı ayrıklık”tan ibarettir.

Birinci halde normal-şemanın tutarlı olduğu meydandadır. İkinci hale gelince: çarpanlardan birinin (temsilci-harflere verilen bazı değerler için) ‘D’ değerini alması, ayrıklığın tümünün yani normal şemanın kendisinin “D” değerini almasına yol açtığından, söz konusu normal-şemanın tutarlı olduğunu görüyoruz. Şu halde *her normal-şema tutarlıdır*. (İ.K.)⁹

İmdi, (doğruluk-fonksiyonu durumunda olan) ‘f’ gibi herhangi bir n-li önerme-eklemi, ‘f(p₁, p₂, ..., p_n)’ gibi bir salt-şemanın doğruluk-çizelgesi yardımıyla belirlenir. Oysa, ‘f(p₁, p₂, ..., p_n)’ biçimindeki bir şemayı (karşılığı olan doğruluk-çizelgesine dayanarak) ya bir “normal-şema”ya ya da (2) türünden “normalımsı” bir şemaya dönüştürmek mümkündür. Normal-şemaların içinde yalnız “hayırlama”, “birlikte-evetleme” ve “ayrıklık” eklemleri; sözü geçen “normalımsı” şemalarda da yalnız “hayırlama” ve birlikte-evetleme” eklemleri geçebildiğinden, *herhangi bir n-li önerme-ekleminin salt “hayırlama”, “birlikte-evetleme” ve “ayrıklık” eklemleri türünden tanımlanabildiği* de kanıtlanmış olur.

Öte yandan, “hayırlama”, “birlikte-evetleme”, “ayrıklık” “koşul” ve “karşılıklı-koşul” eklemlerinden kurulu ‘f(p₁, p₂, ..., p_n)’ biçiminde herhangi bir salt-şemayı, karşılığı olan doğruluk-çizelgesine başvurmaksızın da ya bir “normal-şema”ya, ya da (2) gibi “normalımsı” bir şema haline dönüştürmenin mümkün olduğunu gösterebiliriz. Örneğin:

$$(3) \quad \sim((\sim p \vee p \supset \sim q \vee r) \supset \sim(r \equiv \sim(p \vee \sim q)))$$

gibi karmaşık bir önerme-şemasını göz önüne alalım:

İlk önce, (3) şemasını, hayırlama-ekleminin her geçişinin etki-alanı bir tek temsilci-harften ibaret olan bir şemaya dönüştürebiliriz. Bu amaçla ' $\sim(p \supset q)$ ' nün ' $p \sim q$ ' ile eşdeğer olmasına dayanarak, (3) şemasını:

$$(\sim p \vee p \supset \sim q \vee r). \sim \sim(r \equiv \sim(p \vee \sim q))$$

biçimine; bu şemayı da, çift-hayırlama ilkesi gereği:

$$(\sim p \vee p \supset \sim q \vee r) \cdot (r \equiv \sim(p \vee \sim q))$$

biçimine; bu son şemayı da, De Morgan kanunuyla, çift-hayırlama ilkesi gereği:

$$(4) \quad (\sim p \vee p \supset \sim q \vee r) \cdot (r \equiv \sim pq)$$

şemasına dönüştürebiliriz.

(4) şemasında ' $\supset$ ' ile ' $\equiv$ ' eklemleri geçtiğinden, bu iki eklemi ortadan kaldırmak gerekir. Bunun için de bir yandan, ' $p \supset q$ ' ile ' $\sim p \vee q$ ' arasındaki eşdeğerliğe, öbür yandan da ' $p \equiv q$ ' ile ' $pq \vee \sim p \sim q$ ' arasındaki eşdeğerliğe dayanarak, (4) şemasını:

$$(\sim(\sim p \vee p) \vee \sim q \vee r) \cdot (r \sim pq \vee \sim r \cdot \sim(\sim pq))$$

şemasına dönüştürebiliriz. Bu şemayı ise, De Morgan ve çift-hayırlama ilkeleri gereğince:

$$(p \sim p \vee \sim q \vee r) \cdot (r \sim pq \vee \sim r \cdot (p \vee \sim q))$$

biçimine dönüştürürüz. ' $\cdot$ ' ekleminin ' $\vee$ ' ye göre dağıtıcılığından faydalanaarak, bu son şemayı ilk önce

$$(5) \quad (p \sim p \vee \sim q \vee r) \cdot (r \sim pq \vee \sim r p \vee \sim r \sim q)$$

biçimine dönüştürürüz.

İmdi (5) şeması

$$(6) \quad (A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) \cdot (B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m)$$

biçimindedir. Oysa (6) deyimini ' $\cdot$ ' ekleminin ' $\vee$ ' ye göre dağıtıcılığı uyarınca aşağıdaki şekilde dönüştürmek mümkündür:

' $B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m$ ' deyimini 'C' ile kısaltalım. O zaman (6) deyimini

$$(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) \cdot C$$

biçimini alır. Bu son deyim ise,

$$A_1C \vee A_2C \vee \dots \vee A_nC$$

ye, yani:

$$A_1 \cdot (B_1 \vee \dots \vee B_m) \vee A_2 \cdot (B_1 \vee \dots \vee B_m) \vee \dots \vee A_n \cdot (B_1 \vee \dots \vee B_m)$$

deyimine dolayısıyla de:

$$(A_1B_1 \vee \dots \vee A_1B_m) \vee (A_2B_1 \vee \dots \vee A_2B_m) \vee \dots \vee (A_nB_1 \vee \dots \vee A_nB_m)$$

yani

$$(7) \quad A_1B_1 \vee \dots \vee A_1B_m \vee A_2B_1 \vee \dots \vee A_2B_m \vee \dots \vee A_nB_1 \vee \dots \vee A_nB_m$$

deyimine dönüştürülebilir.

Görüldüğü gibi, (6) ile (7) tam-deyimlerinin eşdeğerliği, cebirdeki

$$(8) \quad (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \cdot (y_1 + y_2 + \dots + y_m) = x_1y_1 + \dots + x_1y_m + x_2y_1 + \dots + x_2y_m + \dots + x_ny_1 + x_ny_m$$

özdeşliğine benzemektedir. Şu halde ‘.’ ile ‘v’ eklemlerinin, aritmetik ve cebirdeki toplama ve çarpma işlemlerine benziyecek bir şekilde kullanabileceğimizi görüyoruz.

İşte, “(6) ↔ (7)” eşdeğerliğinden faydalananarak, sözü geçen (5) şemasını “*parantezsiz*” bir biçime dönüştürmek mümkündür. Ancak bu işlemi yapmadan, (5) şemasının birinci çarpanında ‘p~p’ deyiminin (bir “çok-çarpanlı ayrıklığın” bileşeni olarak) geçtiğini göz önünde tutarak, bu çarpanı (yani ‘p~p v ~q v r’ şemasını) “*sadeleştirme*” yoluyla ‘~q v r’ biçimine dönüştürmek faydalıdır. ‘p~p v ~q v r’ şeması, ‘B . ~B v A’ biçimindedir. Oysa, böyle bir deyim ‘A’ ile eşdeğerdir. Şu halde, ‘p~p v ~q v r’ şemasını gerçekten de ‘~q v r’ biçimine dönüştürebileceğimizi görüyoruz. Böylece (5) şeması

$$(9) \quad (\sim q \vee r) \cdot (r \sim pq \vee \sim rp \vee \sim r \sim q)$$

biçimine girer. (9) şemasını, sözü geçen “(6) ↔ (7)” eşdeğerliği uyarınca:

$$(10) \quad \sim qr \sim pq \vee \sim q \sim rp \vee \sim q \sim r \sim q \vee rr \sim pq \vee r \sim rp \vee r \sim r \sim q$$

biçimine dönüştürebiliriz. Birlikte-evetlemenin denkgüçlülüğüne, çevirgeçliliğine ve ortaklaştırmacılığına dayanarak, bir de her çarpanda geçen temsilci-harflerini alfabe sırasına göre yeniden düzenliyerek, (10) şemasını:

$$(11) \quad \sim pq \sim qr \vee p \sim q \sim r \vee \sim q \sim r \vee \sim pqr \vee pr \sim r \vee qr \sim r$$

biçimine dönüştürmek mümkündür.

İmdi, (11) formülünün birinci, beşinci ve altıncı çarpanında belli bir temsilci-harfle birlikte bunun hayırlanmasının geçtiğini görüyoruz. Birinci çarpanda geçen 'q ~ r' deyiminden dolayı bu çarpanın tümünü ortadan kaldırarak, (11) şemasını

$$p \sim q \sim r \vee \sim q \sim r \vee \sim pqr \vee pr \sim r \vee qr \sim r$$

biçimine dönüştürebiliriz. Bu son deyimi de, adım adım, aynı işlemi uygulayarak, önünde sonunda:

$$(12) \quad p \sim q \sim r \vee \sim q \sim r \vee \sim pqr$$

şemasına dönüştürürüz.

İşte (12) şeması bir "normal-şema" durumundadır. Böylece (3) gibi bir şemayı (bu şemanın doğruluk-çizelgesine başvurmaksızın) bir "normal-şema" haline dönüştürmenin mümkün olduğunu görüyoruz.⁴ Ancak, (12) şemasının "normal" olmakla birlikte "tam" olmadığını göz önünde tutarak, bu son metotla ediletilen "normal-şemalar"ın (doğruluk-çizelgelerine dayanarak elde edilen normal-şemaların tersine) genel olarak "tam" olmadıklarını söyleyebiliriz. Ancak, verilen *herhangi bir normal-şemayı kolaylıkla bir "tam normal-şema" haline dönüştürebildiğini* göstereceğimizden, bu durum söz konusu metod için bir sakınca değildir.

Örneğin, (12) normal-şemasını bir "tam normal-şema" haline dönüştürmeye çalışalım. Görüldüğü gibi, (12) şemasında geçen temsilci harfler 'p', 'q', 'r' harflerinden ibarettir. Her üç harf (bir ve yalnız bir kez) bu şemanın birinci ve üçüncü çarpanında geçtikleri halde, '~q~r' den ibaret olan ikinci çarpanda söz konusu harferden birinin ('p' harfinin) geçmediğini görüyoruz. Şu halde, (12) şemasını bir "tam normal-şema" haline getirmek için, bu şemanın ikinci çarpanının biçimini değiştirmek gerekir. İmdi, söz konusu çarpanla, 'p ~ p', şemasının birlikte-evetlemesini, yani '~q~r. (p ~ p)' şemasını göz önüne alalım. Bu şema '~q~r' ile eşdeğerdir. Şu halde, '~q~r' çarpanını '~q~r.(p ~ p)' biçimine, dolayısıyla de (bu son şema ile eşdeğer olan) '~q~rp ~ q~r~p' şemasına veya aynı anlama gelen 'p~q~r ~ p~q~r' şemasına dönüştürmek mümkündür. Böylece (12) şemasının tümünü

$$p \sim q \sim r \vee p \sim q \sim r \vee \sim p \sim q \sim r \vee \sim pqr$$

biçimine dönüştürebiliyoruz. Ancak bu son şemanın ilk iki çarpanı da aynı biçimde ('p~q~r') olduğundan, ayrıklığın denkgüçlülüğüne dayanarak söz konusu şemayı:

$$p \sim q \sim r \vee \sim p \sim q \sim r \vee \sim pqr$$

veya

$$(13) \quad p \sim q \sim r \vee \sim pqr \vee \sim p \sim q \sim r$$

biçimine dönüştürebiliriz. Oysa, (13) şeması bir "tam normal-şema" durumundadır. Böylece, "tam" olmıyan (12) normal-şemasını "tam" bir biçime dönüştürmenin mümkün olduğunu görüyoruz.

Genel olarak, "tam" olmıyan herhangi bir normal-şemayı "tam" bir hale koymak için, söz konusu normal-şemanın "eksikli" çarpanlarını (yani şemada geçen temsilci-harflerden bazılarını içine almıyan çarpanlarını) "eksiksiz" çarpanlara şöyle çeviririz: 'A' verilen bir normal-şemanın eksikli bir çarpanı olsun. 'A' çarpanında "eksik" olan (yani söz konusu normal-şemanın bazı başka çarpanlarında geçtiği halde 'A' çarpanında geçmiyen) temsilci-harfler 'q₁', 'q₂', ..., 'q_m' olsun. O zaman 'A' çarpanını ilk önce

$$(14) \quad A.(q_1 \vee \sim q_1) \cdot (q_2 \vee \sim q_2) \cdot \dots \cdot (q_m \vee \sim q_m)$$

biçimine dönüştürebiliriz. Nitekim (14) 'A' ile eşdeğerdir. (14) şeması ise

$$(15) \quad Aq_1q_2 \dots q_m \vee Aq_1\sim q_2 \dots q_m \vee \dots \vee A\sim q_1\sim q_2\dots\sim q_m$$

biçimine dönüştürülebilir. (15) şemasının her çarpanı sözü geçen normal şemanın "eksiksiz" birer çarpanı sayılabilir. Böylece, bu normal-şemanın 'A' çarpanı yerine (15) şemasını koymakla, normal-şemamızın (kendisiyle eşdeğer olan) bir "tam normal-şema" haline dönüştürülebildiğini görüyoruz (İ.K.)

Örneğin: 'p~q v q~r v ~p~r' gibi (tam olmıyan) bir normal-şemayı "tam" bir hale dönüştürmeye çalışalım. Bu şemanın içinde geçen temsilci-harfler 'p', 'q' ve 'r' harflerinden ibarettir. Şu halde, şemanın üç çarpanlarından her birinin de "eksikli" olduğunu anlıyoruz.

Bu çarpanların her birine de sözü geçen işlemi uygulamak gerekecektir. Birinci çarpanda, yani 'p~q' deyiminde eksik olan temsilci-harf 'r' olduğuna göre, 'p~q' yü ilk önce 'p~q . (r v ~r)' sonra da 'p~qr v p~q~r' biçimine dönüştürürüz. Aynı şekilde 'q~r' deyimini (yani ikinci çarpanı) önce 'q~r . (p v ~p)', sonra 'pq~r v ~pq~r' biçimine; 'pr' deyimini de (yani üçüncü çarpanı) önce '~p~r . (q v ~q)', sonra '~pq~r v ~p~q~r' biçimine dönüştürürüz. Böylece sözü geçen normal-şemayı

$$p \sim qr \vee p \sim q \sim r \vee pq \sim r \vee \sim pq \sim r \vee \sim pq \sim r \vee \sim p \sim q \sim r$$

biçimine, bunu da ('~pq~r' çarpanının geçiş sayısı 2 olmasından dolayı)

$$p \sim qr \vee p \sim q \sim r \vee pq \sim r \vee \sim pq \sim r \vee \sim p \sim q \sim r$$

biçimine, (yani bir "tam normal-şema" haline) dönüştürmüş oluyoruz.

Öte yandan bir çok hallerde, verilen bir (tam veya tam olmıyan) normal-şemayı “sadeleştirmek”, yani çarpanlarının sayısı daha küçük olan başka bir normal-şemaya dönüştürmek mümkündür. Ancak, “sadeleşmiş” normal-şemanın hiç bir zaman “tam” olmadığını belirtmek gerek. Nitekim, ilerde göstereceğimiz gibi, birbiriyle eşdeğer olan bütün şemalara karşılık (bunların her biriyle eşdeğer olan) bir ve yalnız bir tek tam normal-şema vardır. Başka bir deyimle ‘A’ ile ‘B’ iki (salt) önerme-şeması, ‘N₁’ ile ‘N₂’ tam normal-şemalar, ‘A’ $\leftrightarrow$ ‘B’, ‘A’ $\leftrightarrow$ ‘N₁’ ve ‘B’ $\leftrightarrow$ ‘N₂’ ise; ‘N₁’ = ‘N₂’ olur. İmdi, ‘A’ verilen herhangi bir normal-şema, ‘N₁’ ise ‘A’ nın sadeleşmesi sonucunda elde edilen bir tam normal-şema olsun. ‘A’ bir normal-şema olduğundan, ya tam olmalıdır, ya tam değil. Birinci halde ‘A’ $\leftrightarrow$ ‘A’ ve ‘A’ $\leftrightarrow$ ‘N₁’ olduğundan, ‘A’ = ‘N₁’ olur. Dolayısıyla ‘N₁’ şeması ‘A’ nın sadeleşmiş (yani çarpanlarının sayısı daha küçük olan) bir normal-şema olmaz. İkinci halde ise ‘A’ şemasını ‘N₂’ gibi bir tam normal-şemaya dönüştürmek mümkündür. O zaman ‘A’ $\leftrightarrow$ ‘N₁’ ve ‘A’ $\leftrightarrow$ ‘N₂’ olduğundan, ‘N₁’ = ‘N₂’ olur. Oysa ‘N₂’ şemasının çarpanlarının sayısı ‘A’ şemasının çarpanlarının sayısından eksik değildir. Şu halde, ‘N₂’ şeması, dolayısıyla de ‘N₁’ şeması ‘A’ şemasının sadeleşmiş bir şekli olamaz. (İ.K.)

Örnek olarak, sözü geçen (12) normal-şemasıyla, (13) tam normal-şemasını sadeleştirmeye çalışalım. (12) şemasının ‘p~q~r’ ile ‘~q~r’ çarpanlarına dikkatimizi çevirirsek, ‘~q~r’ ifadesinin her ikisine ortak bir bileşen olduğunu, bu iki çarpanın ayrıklığı olan ‘~q~r v p~q~r’ deyiminin de ‘A v B A’ biçiminde olduğunu görürüz. Oysa, ‘p v pq $\equiv$ p’ totolojisi gereğince, ‘A v B A’ biçimindeki bir formül ‘A’ ile eşdeğerdir. Şu halde ‘~q~r v p~q~r’ şemasının ‘~q~r’ şemasına eşdeğer olduğu ortaya çıkar. İşte bu eşdeğerliği göz önünde tutarak, (12) şemasını:

$$(16) \quad \sim q \sim r \vee \sim pqr$$

gibi sadeleşmiş bir normal-şema haline dönüştürebiliriz.

(13) tam normal-şemasına gelince: bu şemanın birinci ile üçüncü çarpanlarının ayrıklığı olan ‘p~q~r v ~p~q~r’ şeması ‘B A v ~B A’ biçimindedir. Oysa böyle bir tam-deyim, ‘pq v p~q $\equiv$ p’ totolojisi gereğince ‘A’ ile eşdeğerdir. Şu halde ‘p~q~r v ~p~q~r’ şemasının ‘~q~r’ ifadesiyle eşdeğer olduğunu; dolayısıyla de (13) tam normal-şemasının

$$\sim q \sim r \vee \sim pqr$$

biçiminde sadeleştirilebildiğini görüyoruz. Bu sadeleşmiş şema sözü geçen (16) şemasıyla özdeş olduğundan, gerek (12) normal-şemasından, gerek bu normal-şemanın karşılığı olan (13) tam normal-şemasından, sadeleşme işlemi sonun-

da aynı bir normal-şemayı ((16) şemasını) elde edilebildiğini anlıyoruz.

Normal-şemaları sadeleştirmek için başvurulabilecek başka bir yol da şöyledir:

$$(17) \quad p \vee \sim pq \equiv p \vee q$$

bir totolojidir. Nitekim, 'p v pq' şeması 'v' nin ' . ' eklemine göre dağıtıcılığı uyarınca '(p v ~ p) . (p v q)' ile eşdeğerdir. Oysa bu son şema 'p v q' ile eşdeğerdir. (İ.K.) İmdi, (17) totolojiisne dayanarak, 'A v ~AB' biçimindeki herhangi bir şemanın 'A v B' şemasına dönüştürülebildiğini görüyoruz. Böylece, 'A' ile '~AB' nin bir normal-şemanın iki çarpanı olması halinde, bu iki çarpan yerine (daha basit olan) 'A v B' ifadesini koymak mümkün olur. Ancak 'A' şemasının bir "yalın-şema"dan ibaret olması gerekir. Başka bir deyimle, 'A' deyimini 'p' veya '~p' biçiminde olmalıdır. Buna göre, 'p v ~p . B v C' biçimindeki herhangi bir normal-şemayı 'p v B v C' biçimine; '~p v p . B v C' biçimindeki herhangi bir normal şemayı da '~p v B v C' biçimine dönüştürebiliriz. Burada 'B', 'p' harfini içne almayan herhangi bir temel-şemanın kısaltması; 'C' ise herhangi bir normal-şemanın kısaltması sayılmaktadır.

Örneğin: 'B' olarak '~q~rs' deyimini, 'C' olarak ta 'p~q v ~q~r~s'

deyimini seçerek, böylece elde edilen

$$(18) \quad p \vee \sim p \sim q \sim rs \vee p \sim q \vee \sim q \sim r \sim s$$

normal-şemasını sadeleştirmeye çalışalım. İlk önce 'p v ~p~q~rs' bileşeni yerine 'p v ~q~rs' koyarak, (18) şemasını

$$(19) \quad p \vee \sim q \sim rs \vee p \sim q \vee \sim q \sim r \sim s$$

biçimine dönüştürürüz. (19) şemasının birinci ile üçüncü çarpanlarının ayrıklığı 'A v AB' biçiminde olduğundan, bu iki çarpanı ortadan kaldırarak, yerlerine sadece 'p' deyimini koyabiliriz. Böylece (19) şeması

$$(20) \quad p \vee \sim q \sim rs \vee \sim q \sim r \sim s$$

biçimine dönüşür. (19) şemasının ikinci ve üçüncü çarpanlarının ayrıklığı ise 'AB v A~B' biçiminde olduğundan, bu iki çarpanı ortadan kaldırarak, yerlerine 'A' deyimini, yani '~q~r' yi koymak mümkündür. İşte, (18) normal-şemasını bu şekilde önünde sonunda (artık sadeleşemiyen):

$$(21) \quad p \vee \sim q \sim r$$

biçimine dönüştürmek mümkündür,

'A v ~AB' ile 'A v B' formüllerinin eşdeğerliğine dayanarak, şöyle bir sadeleşme metodunu da kullanmak mümkündür:

'A' olarak, bir yalın-şema yerine herhangi bir temel-şemayı seçelim. 'A' temel-şemasının çarpanlarının ' C_1 ', ' C_2 ', ..., ' C_m ' yalın-şemalarından ibaret olduğunu kabul edelim. O zaman ' $A \vee \sim AB$ ' deyimini:

$$(22) \quad C_1 C_2 \dots C_m \vee \sim (C_1 C_2 \dots C_m) \cdot B$$

biçimini alır. (22) ise De Morgan kanunu gereği:

$$C_1 C_2 \dots C_m \vee (\sim C_1 \vee \sim C_2 \vee \dots \vee \sim C_m) \cdot B$$

biçimine; bu son deyimini de '·' eklemesinin 'v' ye göre dağıtıcılığı gereği:

$$(23) \quad C_1 C_2 \dots C_m \vee \sim C_1 B \vee \sim C_2 B \vee \dots \vee \sim C_m B$$

biçimine dönüştürmek mümkündür. İşte böylece (23) biçimindeki bir bileşeni olan herhangi bir normal-şemayı

$$(24) \quad C_1 C_2 \dots C_m \vee B$$

biçimindeki sadeleşmiş bir normal-şema haline dönüştürebildiğimizi görüyoruz. Burada ' C_1 ', ' C_2 ', ..., ' C_m ' her biri ayrı bir temsilci- harften kurulu m tane yalın-şema, 'B' ise bu yalın-şemalarda geçen temsilci-harflerden hiç birini içine almıyan herhangi bir temel-şema sayılmalıdır.

Örneğin:

$$p \sim q \vee r \vee \sim p s \sim t \vee q s \sim t \vee \sim r s \sim t$$

gibi bir normal-şemayı bir hamlede

$$p \sim q r \vee s \sim t$$

biçimine dönüştürebiliriz.

Görüldüğü gibi, normal-şemaları sadeleştirmek için dört ayrı metoda başvurmak mümkündür. Bu metotlardan her biri belli bir "*sadeleşme kuralı*" na dayanmaktadır. Bu *sadeleşme kurallarını* ise şöyle özetlemek mümkündür:

- (i) ' $A \vee AB$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim 'A' biçimine dönüştürülebilir.
- (ii) ' $AB \vee A \sim B$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim 'A' biçimine dönüştürülebilir.
- (iii) ' $p \vee \sim pA$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim ' $p \vee A$ ' biçimine; ' $\sim p \vee pA$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim de ' $\sim p \vee A$ ' biçimine dönüştürülebilir.
- (iv) ' $p_1 p_2 \dots p_m \vee \sim p_1 A \vee \sim p_2 A \vee \dots \vee \sim p_m A$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim ' $p_1 p_2 \dots p_m \vee A$ ' biçimine; ' $p_1 p_2 \dots p_m \vee \sim p_1 A \vee \sim p_2 A \vee \dots \vee \sim p_m A$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim ' $p_1 p_2 \dots \sim p_m \vee A$ ' biçimine;

.....

 ' $\sim p_1 \sim p_2 \dots \sim p_m \vee p_1 A \vee p_2 A \vee \dots \vee p_m A$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim ' $\sim p_1 \sim p_2 \dots \sim p_m \vee A$ ' biçimine dönüştürülebilir.

Bu §'ı kapatmadan önce, bir de verilen herhangi bir önerme-şemasını bir normal-şema (veya tutarsız olması halinde "normalımsı" bir şema) haline dönüştürmek için başvurulması gereken kuralları özetliyelim:

- (a) ' $\sim \sim A$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim ' A ' biçimine dönüştürülebilir. /

(Çift-hayırlama ilkesi.)

- (b) ' $\sim (A_1 A_2 \dots A_n)$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim ' $\sim A_1 \vee \sim A_2 \vee \dots \vee \sim A_n$ ' biçimine; ' $\sim (A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n)$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim de ' $\sim A_1 \sim A_2 \dots \sim A_n$ ' biçimine dönüştürülebilir. (*De Morgan* kanunu.)
- (c) ' $\sim (A \supset B)$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim ' $A \sim B$ ' biçimine dönüştürülebilir.
- (d) ' $\sim (A \equiv B)$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim ' $A \equiv \sim B$ ' (veya ' $\sim A \equiv B$ ') biçimine dönüştürülebilir.
- (e) ' $A \supset B$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim ' $\sim A \vee B$ ' biçimine dönüştürülebilir.
- (f) ' $A \equiv B$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim ' $AB \vee \sim A \sim B$ ' biçimine dönüştürülebilir.
- (g) ' $A . (B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_n)$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim ' $AB_1 \vee A_2 B_2 \vee \dots \vee A_n B_n$ ' biçimine; ' $(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) . B$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim de ' $A_1 B \vee A_2 B \vee \dots \vee A_n B$ ' biçimine dönüştürülebilir.
- (h) ' $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ ' . $(B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m)$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim ' $A_1 B_1 \vee A_1 B_2 \vee \dots \vee A_n B_m$ ' biçimine dönüştürülebilir. (' . ' eklemesinin 'v' ye göre dağıtıcılığı.)
- (i) Gerek ' AA ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim, gerek ' $A \vee A$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim ' A ' biçimine dönüştürülebilir. (Denkgüçlülük.)
- (j) ' $A \vee B \sim B$ ' veya ' $A \vee B \sim BC$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim ' A ' ya dönüştürülebilir.

§ 14. İk il il ik .

'pq' ile 'p v q' şemalarının doğruluk-çizgelerini birbiriyle karşılaştırsak, her birinin öbüründen, 'D' lerin yerine 'Y', 'Y' lerin yerine de 'D' koymak suretiyle elde edilebileceğini görürüz. Nitekim, 'pq' şemasına ait

(1)

p	q	
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

doğruluk-çizgelinde (çizelgenin gerek sağında gerek solunda) geçen her 'D' harfi yerine 'Y' harfini, her 'Y' harfi yerine 'D' harfini koyarsak,

(2)

p	q	
Y	Y	Y
Y	D	D
D	Y	D
D	D	D

gibi bir çizelge elde ederiz. Oysa, (2) çizelgesi 'p v q' şemasının doğruluk-çizgelgesinden başka bir şey değildir. (2) çizelgesini, kurulu olduğu dört sırayı yeniden düzenlemek suretiyle, 'p v q' şemasının alışmış olduğumuz

(3)

p	q	
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

biçimine çevirmek te mümkündür.

Aynı şekilde, 'p v q' ye ait (3) doğruluk-çizgelgesinde 'D' harfinin her geçişi yerine 'Y' harfini, 'Y' harfinin her geçişi yerine 'D' harfini koymak suretiyle, 'pq' nün doğruluk-çizgelgesi durumunda olan

p	q	
Y	Y	Y
Y	D	Y
D	Y	Y
D	D	D

çizelgesini elde ederiz. (4) çizelgesini (sıralarının yerini değiştirmek suretiyle-

le) 'pq' şemasının alışılmış doğruluk-çizelgesi olan (1) biçimine çevirmek mümkündür.

Genel olarak, ' $f(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ' herhangi bir (salt) şema oldukta, bu şemanın doğruluk-çizelgesinde bütün 'D' harflerinin yerine 'Y' harfini, bütün 'Y' harfleri yerine de 'D' harfini koymak suretiyle elde edilen doğruluk-çizelgesinin belirlediği ' $g(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ' gibi bir şemaya sözü geçen ' $f(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ' şemasının "*i k i l i*"si (dual) denir.

Buna göre, bir yandan '*pq*' şemasının '*p v q*' şemasının ikilisi, öbür yandan da '*p v q*' şemasının '*pq*' şemasının ikilisi olduğunu söyleyebiliriz. Başka bir deyimle 'pq' ile 'p v q' şemaları *birbirinin ikilisi* durumundadır. Genel olarak ' $g(p_1, \dots, p_n)$ ' şeması ' $f(p_1, \dots, p_n)$ ' gibi bir şemanın ikilisi ise, ' $f(p_1, \dots, p_n)$ ' şeması da ' $g(p_1, \dots, p_n)$ ' şemasının ikilisi olur. Nitekim, verilen herhangi bir doğruluk-çizelgesinde 'D' lerin yerine 'Y', 'Y' lerin yerine de 'D' koyduktan sonra aynı işlemi tekrarlırsak ilk çizelgeyi yeniden elde edeceğimiz *besbellidir*.

$\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ *birbirinin ikilisi* olduğunu, sembolik olarak:

$$\mathcal{S}_1) \longrightarrow (\mathcal{S}_2$$

biçiminde dile getireceğiz. Örneğin:

$$(5) \quad 'pq') \longrightarrow ('p \vee q'$$

' $f(p_1, \dots, p_n)$ ' $\longrightarrow$ ' $g(p_1, \dots, p_n)$ ' olması halinde, 'f' ile 'g' "*n-li önerme eklemeleri*"nin de *birbirinin ikilisi* olduğu söylenir. Bu durumu da

$$'f') \longrightarrow ('g'$$

biçiminde dile getireceğiz. Örneğin:

$$(6) \quad '. \cdot ' \longrightarrow ('v'$$

Aynı bir doğruluk-çizelgesine karşılık bir çok (birbiriyle eşdeğer olan) şemalar olduğundan, her şemanın da bir çok (birbiriyle eşdeğer olan) ikilikleri vardır. Genel olarak:

$$(7) \quad \mathcal{S}_1) \longrightarrow (\mathcal{S}_2 \text{ ve } \mathcal{S}_2 \leftrightarrow \mathcal{S}_2' \text{ ise, } \mathcal{S}_1) \longrightarrow (\mathcal{S}_2'$$

yani, verilen bir şemanın ikililerinden biriyle eşdeğer olan her şema ilk şemanın bir ikilisidir.

Örneğin, 'pq' şemasının bir ikilisi olan 'p v q' şemasıyla eşdeğer olan ' $\sim p \supset q$ ' şeması da 'pq' nin bir ikilisidir.

$$g(p_1, \dots, p_m, r_1, \dots, r_{n-m})$$

biçiminde gösterebiliriz. Bu iki şema birbiriyle eşdeğer olduğundan, bunlardan her biri de (birincide 'q₁', ..., 'q_{n-m}' harflerinin her biri yerine bir 'D' harfinin konulmasıyla elde edilen)

$$f(p_1, \dots, p_m, D, \dots, D)$$

gibi bir m-li şema ile eşdeğer olur. Oysa, $m < n$ ise, ilk iki şemanın hiç birinin de indirgenemez olmadığı ortaya çıkar. Şu halde (bu şemalar indirgenemez olduklarından) $m = n$ olmalı. (İ.K.)

(13) Birbirinin ikilisi olan şemaların dereceleri eşittir. Birbirinin ikilisi olan indirgenemez şemalar da aynı temsilci-harflerden kuruludur.

Kanıt: 'f(p₁, ..., p_n)' herhangi bir indirgenemez şema olsun. O zaman 'f(∼p₁, ..., ∼p_n)' şeması birinci şemanın bir ikilisi olur. Oysa birinci şema indirgenemez olduğundan, ikincisi de indirgenemez bir şemadır. Nitekim, ikinci şema indirgenemez bir şema olmasaydı, $m < n$ olmak üzere, bu şema ile eşdeğer olan 'g(a₁, ..., a_m)' gibi bir m-li şema bulunacaktı. (Burada 'a', ..., 'a_m' sembollerini m tane ayrı temsilci-harfin kısaltması olarak kullanıyoruz.) Yani:

$$' \sim f(\sim p_1, \dots, \sim p_n)' \leftrightarrow 'g(a_1, \dots, a_m)'$$

O zaman

$$' \sim \sim f(\sim \sim p_1, \dots, \sim \sim p_n)' \leftrightarrow 'g(\sim a_1, \dots, \sim a_m)'$$

olur. Bu eşdeğerliğin ard-üyesini 'h(b₁, ..., b_m)' ile kısaltabiliriz. (Burada 'b', ..., 'b_m' sembollerini sırasıyla '∼a₁', ..., '∼a_m' deyimlerinin kısaltması olarak kullanıyoruz.) O zaman

$$'f(p_1, \dots, p_n)' \leftrightarrow 'h(B_1, \dots, b_m)'$$

olur. $m < n$ olduğundan, böyle bir eşdeğerlik 'f(p₁, ..., p_n)' şemasının indirgenemez bir şema olmamasını gerektirir. Oysa bu şema indirgenemez bir şemadır. Şu halde '∼f(∼p₁, ..., ∼p_n)' de indirgenemez bir şema olmalıdır.

Böylece, 'f(p₁, ..., p_n)' şemasının 'p₁', ..., 'p_n' temsilci-harflerinden kurulu (n-inci dereceden) bir indirgenemez ikilisi olduğu kanıtlanmış olur. Bundan da 'f(p₁, ..., p_n)' şemasının her ikilisinin n-inci dereceden olduğu, bunlardan da indirgenemez olanların 'f(p₁, ..., p_n)' şemasının içine aldığı aynı temsilci-harflerden kurulu olduğu çıkarılır. (İ.K.)

Genel olarak bir şema kendinin ikilisi değildir, yani

$$(14) \quad 'f(p_1, \dots, p_n)' \not\leftrightarrow 'f(p_1, \dots, p_n)'$$

yani

$$'f(p_1, \dots, p_n)' \leftrightarrow 'f(\sim p_1, \dots, \sim p_n)'$$

çokluk yanlıştır. Ama gene de bazı özel 'f' ler için doğrudur. İşte, (14)'ü yerine getiren şemalara "*kendiyle-ikili*" (self-dual) şemalar denir.

(15) *Her yalın-şema "kendiyle-ikili"dir.*

Kanıt: Bir yalın şema 'p' gibi bir temsilci-harf veya ' $\sim p$ ' gibi hayırlanmış bir temsilci-harf demektir. 'p' nin ikilisi ' $\sim(\sim p)$ ' ile eşdeğer olan herhangi bir şemadır. Oysa 'p' bu son şema ile eşdeğerdir. Şu halde 'p' kendiyle-ikilidir. ' $\sim p$ ' nin ikilisi de ' $\sim(\sim \sim p)$ ' ile eşdeğer olan herhangi bir şemadır. Oysa ' $\sim p$ ' bu son şema ile eşdeğerdir. Şu halde ' $\sim p$ ' de kendiyle-ikilidir.

'p' şeması kendiyle-ikili olduğundan, 'p' ile eşdeğer olan her şema da kendiyle-ikili olur. Örneğin, 'p v pq' şeması, 'p' ile eşdeğer olduğundan, kendiyle-ikilidir. Aynı şekilde 'pq v p $\sim$ q' de, 'p' ile eşdeğer olduğundan, kendiyle-ikilidir. Ancak, 'p' indirgenemez bir kendiyle-ikili şema olduğu halde, 'p v pq' (veya 'pq v p $\sim$ q') nün indirgenemez olmuyan bir kendiyle-ikili şema olduğunu belirtmek gerek.

Birden çok harfli indirgenemez kendiyle-ikili şemalara örnek olarak aşağıdaki şemaları gösterebiliriz:

$$\begin{aligned} p &\equiv q \equiv r \\ pq \vee pr \vee qr \\ p_1 p_2 p_3 \vee p_1 p_4 \vee p_2 p_4 \vee p_3 p_4 \\ &\dots\dots\dots \\ p_1 p_2 \dots p_{n-1} \vee p_1 p_n \vee p_2 p_n \vee \dots \vee p_{n-1} p_n \end{aligned}$$

O-ncı dereceden olan hiç bir şema kendiyle-ikili olamaz. Nitekim böyle bir şema bir önerme ile eşdeğerdir. Oysa, bir önermenin (O-ncı dereceden bir şema olarak) ikilisi, bu önermenin hayırlanmasından ibarettir. Bir önermenin hayırlanması ise hiç bir zaman önermenin kendisiyle eşdeğer olmadığından, O-ncı dereceden hiç bir şema da kendiyle-ikili olamaz. Dolayısıyla:

(16) Hiç bir kendiyle-ikili şema geçerli veya tutarsız değildir. Yani, her kendiyle-ikili şema geçersiz ama tutarlıdır.

İmdi, ' $f(p_1, \dots, p_n)$ ' gibi herhangi bir n-li şemayı ele alalım. Genel olarak bu şema yardımıyla elde edilen ' $f(\sim p_1, \dots, \sim p_n)$ ' şeması, ilk şemanın ne kendisiyle ne de hayırlanmasıyla eşdeğer değildir. Hayırlanmasıyla eşdeğer olması halinde kendiyle-ikili bir şema olur.

' $f(p_1, \dots, p_n)$ ' gibi bir şemanın kendiyle-ikili olmasının gerekli ve yeterli şartı

$$(17) \quad 'f(\sim p_1, \dots, \sim p_n)' \leftrightarrow ' \sim f(p_1, \dots, p_n)'$$

eşdeğerliğinden ibarettir.

Öte yandan,

$$(18) \quad 'f(\sim p_1, \dots, \sim p_n)' \leftrightarrow 'f(p_1, \dots, p_n)'$$

eşdeğerliğinin yerine gelmesi, yani ' $f(\sim p_1, \dots, \sim p_n)$ ' şemasının ' $f(p_1, \dots, p_n)$ ' in kendisiyle eşdeğer olması halinde, ' $f(p_1, \dots, p_n)$ ' şemasının bir ikilisi, kendi hayırlanmasından ibaret olur. Yani:

$$(19) \quad 'f(p_1, \dots, p_n)' \text{---} (' \sim f(p_1, \dots, p_n)'$$

İmdi, ' $f(\sim p_1, \dots, \sim p)$ ' şemasına (ve dolayısıyla bununla eşdeğer olan her şemaya) ' $f(p_1, \dots, p_n)$ ' şemasının "*ters-ikili*"si (contradual³⁾) denir. Buna göre (19) (dolayısıyla de (18)) şartını yerine getiren her şemaya "*kendiyle ters-ikili*" (self-contradual) şema diyeceğiz. O-ncı dereceden olan her şema, dolayısıyla her geçerli veya tutarsız şema, özellikle her önerme, kendiyle ters-ikilidir. Birden çok harfli indirgenemez kendiyle ters-ikili olan bir şemaya örnek olarak ta

$$p \equiv q$$

şemasını gösterebiliriz. (' $\sim p \equiv \sim q$ ' $\leftrightarrow$ ' $p \equiv q$ ')

' $p \equiv q$ ' şemasıyla eşdeğer olan ' $pq \vee \sim p \sim q$ ' gibi bir şema da buna göre kendiyle ters-ikilidir.

"*Kendiyle-ikililik*"i (self-duality) ve "*kendiyle ters-ikililik*"i (self-contraduality) böylece inceledikten sonra, gene genel hale dönerek, verilen herhangi bir şemanın bir ikilisini meydana getirmek için başvurabileceğimiz yöntemleri sistematik bir şekilde inceleyeceğiz.

(1) Verilen (salt) şemanın doğruluk-değeri analizini yaparak doğruluk-çizelgesini kurarız. Bu doğruluk-çizelgesinde bütün 'D' harfleri yerine 'Y', bütün 'Y' harfleri yerine de 'D' koymak suretiyle yeni bir doğruluk-çizelgesi elde ederiz. Ondan sonra da bu yeni doğruluk-çizelgesinin belirlediği normal-şemayı meydana getiririz. İşte, *bu normal-şema ilk şemanın bir ikilisidir*.

Örneğin: § 9 da sözü edilen ' $p \supset q$ ' şemasının bu yöntemle göre bir ikilisini meydana getirelim. ' $p \supset q$ ' şemasının doğruluk-çizelgesi

p	q	$p \supset q$
D	D	D
D	Y	D
Y	D	Y
Y	Y	D

biçimindedir. Bu çizelgede geçen bütün 'D' ler yerine 'Y', bütün 'Y' ler yerine de 'D' koyarak,

p	q	
Y	Y	Y
Y	D	Y
D	Y	D
D	D	Y

gibi bir doğruluk-çizelgesini elde ederiz. Bu son çizelgenin belirlediği normal-şema ' $p \sim q$ ' dür. Oysa ' $pq \sim$ ' şeması ' $\sim(p \supset q)$ ', dolayısıyla de ' $p \not\supset q$ ' ile eşdeğerdir. Böylece ' $p \supset q$ ' şemasının bir ikilisi olarak ' $p \sim q$ ' veya ' $p \not\supset q$ ' şemasını elde edebiliriz.'

(II) ' $f(p_1, \dots, p_n)$ ' gib herhangi bir şemanın bir ikilisini elde etmek için, bu şemada geçen bütün temsilci-harfleri yerine hayırlamalarını koyarız. Böylece elde edilen şemanın tümünü de hayırlamak suretiyle ilk şemanın bir ikilisi olarak ' $\sim f(\sim p_1, \dots, \sim p_n)$ ' şemasını elde ederiz.

Örneğin: bu yöntemle göre, ' $p \vee q$ ' şemasının ikilisi olarak ' $\sim(\sim p \vee \sim q)$ ' şemasını, veya bunun eşdeğeri olan ' pq ' şemasını elde ederiz.

(III) Verilen herhangi bir şemanın bir ikilisini elde etmek için, ilk önce bu şemayı ' $\sim$ ', ' $\cdot$ ' ve ' $\vee$ ' den başka hiç bir önerme-eklemini içine almıyan başka bir şemaya dönüştürürüz. Bu son şemada ' $\cdot$ ' nin her geçişi yerine ' $\vee$ ', ' $\vee$ ' nin her geçişi yerine de ' $\cdot$ ' konur. İşte, böylece elde edilen şema, ilk şemanın bir ikilisidir. Örneğin: salt ' $\sim$ ', ' $\cdot$ ' ve ' $\vee$ ' eklemlerinden kurulu

$$(a) \quad \sim(p \sim q \vee r) \cdot (\sim p \vee r) \cdot q$$

gibi bir şemayı ele alalım. (a) şemasında ' $\cdot$ ' yerine ' $\vee$ ', ' $\vee$ ' yerine ' $\cdot$ ' koymak suretiyle

$$(b) \quad \sim[(p \vee \sim q) \cdot r] \vee \sim pr \vee q$$

şeması elde edilir. (b) şemasının (a) nın bir ikilisi olduğunu kanıtlıyalım. Bu amaçla (b) şemasının, (a) şemasında geçen bütün temsilci-harflerin hayırlanıp böylece elde edilen şemanın tümünün hayırlanmasıyla elde edilen

$$(c) \quad \sim[\sim(\sim p \sim \sim q \vee \sim r) \cdot (\sim \sim p \vee \sim r) \cdot \sim q]$$

şeması ile eşdeğer olduğunu göstermek gerekir. (c) şemasını daha basit bir biçime koymak amacıyla, (a) şemasında geçen hayırlanmış harfler yerine, bunların kısaltması olarak, 'a', 'b',... gibi bir takım başka harfler kullanalım. ' $\sim p$ ' yerine 'a', ' $\sim q$ ' yerine de 'b' harfini koyarsak,

(a) şeması

$$\sim (pb \vee r) \cdot (a \vee r) \cdot q$$

biçimine girer. O zaman da (c) şeması

$$\sim [(\sim p \sim b \vee \sim r) \cdot (\sim a \vee \sim r) \cdot \sim q]$$

gibi, içinde geçen bütün harfleri hayırlanmış olan bir şema biçimine girer. Bu şemayı, içinde artık hiç bir hayırlanmış harf geçmiyen bir şemaya dönüştürelim. Bu amaçla, De Morgan kanunlarını uyguluyarak, ' $\sim p \sim b$ ' yerine ' $\sim (p \vee b)$ ' ' $\sim a \vee \sim r$ ' yerine de ' $\sim (ar)$ ' koyarız. Böylece şemamız

$$\sim \{ \sim [\sim (p \vee b) \vee \sim r] \cdot \sim (ar) \cdot \sim q \}$$

biçimine girer. Bu şemanın ' $\sim (p \vee b) \vee \sim r$ ' bileşeni yerine ' $\sim [(p \vee b) \cdot r]$ ' koymak suretiyle, şemanın tümü

$$\sim \{ \sim \sim [(p \vee b) \cdot r] \cdot \sim (ar) \cdot \sim q \}$$

biçimine girer. Bu son şemayı da

$$\sim [(p \vee b) \cdot r] \vee ar \vee q$$

biçimine dönüştürürüz. Bu şema da, 'a' yerine ' $\sim p$ ', 'b' yerine ' $\sim q$ ' koymak suretiyle, (b) şemasına dönüştürülür. (İ.K.)

Genel olarak, ' $f(p_1, \dots, p_n)$ ' salt ' $\sim$ ', ' $\cdot$ ' ve ' $\vee$ ' eklemlerinden kurulu herhangi bir şema oldukta, ' $\sim f(\sim p_1, \dots, \sim p_n)$ ' şemasını, aynı metotla, ' $f(p_1, \dots, p_n)$ ' şemasında ' $\cdot$ ' yerine ' $\vee$ ', ' $\vee$ ' yerine de ' $\cdot$ ' koymak suretiyle elde edilen şemaya dönüştürmek mümkündür.

Söz konusu (III) metodu, verilen bir şemanın bir ikilisini bulmak için başvurulabilen yolların en önemlisidir.⁵

İkililik yardımıyla, verilen totoloji, çelişme, içerme ve eşdeğerliklerden yeni bir takım totoloji, çelişme, içerme ve eşdeğerliklerin elde edilmesi mümkündür. Bunun için de "ikililik ilkeleri" (principles of duality) denilen şu kurallar uygulanır:

Genel ikililik ilkesi:

Ş herhangi bir şema, $\mathcal{S}_1$ de $\mathcal{S}$ nin bir ikilisi oldukta, $\mathcal{S}$ nin geçerli olmasının gerekli ve yeterli şartı, $\mathcal{S}_1$ in tutarsız olmasından, yani $\mathcal{S}_1$ in hayırlanmasından geçerli olmasından ibarettir.

Kanıt: $\mathcal{S}$ olarak ' $f(a_1, \dots, a_n)$ ', $\mathcal{S}_1$ olarak ta ' $g(b_1, \dots, b_m)$ ' gibi iki şemayı ele alalım. (Burada ' $a_1, \dots, a_n$ ' harflerini n tane ayrı değişkenin, ' $b_1, \dots, b_m$ '

harflerini de m tane ayrı değişkenin birer kısaltması olarak kullanıyoruz.)
 $\mathfrak{S}_1$ in $\mathfrak{S}$ nin bir ikilisi olması

$$'g(b_1, \dots, b_m)' \leftrightarrow 'f(\sim a_1, \dots, \sim a_n)'$$

biçiminde dile getirilir. İmdi, ' $f(a_1, \dots, a_m)$ ' geçerli ise, ' $f(\sim a_1, \dots, \sim a_n)$ ' de geçerlidir. O zaman da ' $\sim f(\sim a_1, \dots, \sim a_n)$ ' tutarsız olur. Dolayısıyla, bu şema ile eşdeğer olan ' $g(b_1, \dots, b_m)$ ' de tutarsız olur. Öte yandan, ' $g(b_1, \dots, b_m)$ ' geçerli ise, ' $\sim g(\sim b_1, \dots, \sim b_m)$ ' şeması da, aynı şekilde tutarsız olur. Dolayısıyla

$$'f(a_1, \dots, a_n)' \leftrightarrow 'g(\sim b_1, \dots, \sim b_m)'$$

eşdeğerliği gereği ' $f(a_1, \dots, a_n)$ ' şeması da tutarsız olur. (İ.K.)

Örneğin: ' $p \vee \sim p$ ' şemasının geçerli olduğunu biliyoruz. Bu şemanın bir ikilisi ((III) metodu gereği) ' $p \sim p$ ' şemasıdır. Genel ikililik ilkesi uyarınca ' $p \sim p$ ' nin tutarsız olduğunu, yani ' $\sim(p \sim p)$ ' nin geçerli olduğunu kanıtlarız. Böylece, bu ilke yardımıyla ' $p \vee \sim p$ ' gibi bir totolojiden ' $\sim(p \sim p)$ ' gibi başka bir totoloji elde edebiliriz.

İçermeler için özel ikililik ilkesi:

- (a) $\mathfrak{S}_1$ ve $\mathfrak{S}_2$ herhangi iki şema, $\mathfrak{S}_1'$ ve $\mathfrak{S}_2'$ de bu iki şemanın birer ikilisi oldukta, $\mathfrak{S}_1 \supset \mathfrak{S}_2$ şemasının geçerli olmasının gerekli ve yeterli şartı, $\mathfrak{S}_2' \supset \mathfrak{S}_1'$ şemasının geçerli olmasından ibarettir.
- (b) $\mathfrak{S}_1$ şemasının $\mathfrak{S}_2$ şemasını içermesinin gerekli ve yeterli şartı, $\mathfrak{S}_2$ 'nin $\mathfrak{S}_1'$ yü içermesinden ibarettir.

Kanıt: $\mathfrak{S}_1$ — ($\mathfrak{S}_1'$ ve $\mathfrak{S}_2$) — ($\mathfrak{S}_2'$ olsun. $\mathfrak{S}_1 \supset \mathfrak{S}_2$ şemasının (III) metoduna göre bir ikilisini bulmaya çalışalım. $\mathfrak{S}_1$ in bu metotla elde edilen ikilisi $\mathfrak{S}_1''$, $\mathfrak{S}_2$ nin de bu metotla elde edilen ikilisi $\mathfrak{S}_2''$ olsun. $\mathfrak{S}_1 \supset \mathfrak{S}_2$ şeması $\sim \mathfrak{S}_1 \vee \mathfrak{S}_2$ şeması ile eşdeğerdir. Şu halde, $\mathfrak{S}_1 \supset \mathfrak{S}_2$ nin (III) metoduyla elde edilen ikilisinin $\sim \mathfrak{S}_1'' \cdot \mathfrak{S}_2''$ şemasından ibaret olduğunu söyleyebiliriz.

$$\mathfrak{S}_1' \leftrightarrow \mathfrak{S}_1'' \text{ ve } \mathfrak{S}_2' \leftrightarrow \mathfrak{S}_2'' \text{ olduğundan,}$$

$$\mathfrak{S}_1 \supset \mathfrak{S}_2 \text{ — } (\sim \mathfrak{S}_1' \cdot \mathfrak{S}_2')$$

sonucuna varırız.

İmdi,

$$(20) \quad \sim(\sim pq) \equiv (q \supset p)$$

bir totoloji olduğundan,

$$\sim(\sim \mathfrak{S}_1' \cdot \mathfrak{S}_2') \leftrightarrow \mathfrak{S}_2' \supset \mathfrak{S}_1'$$

olduğunu görüyoruz. Şu halde, $\mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}_2$ geçerli ise, $\mathcal{S}_2' \supset \mathcal{S}_1'$ geçerlidir; $\mathcal{S}_2' \supset \mathcal{S}_1'$ de geçerli ise, $\mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}_2$ geçerlidir. (İ.K.)

(b) yi kanıtlamak için de, $\mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}_2$ nin geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartının $\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ olduğunu göz önünde tutmak yetiyor.

Örneğin: bu ilkeye dayanarak, ' $p \supset q$ ' totolojisinden, ' $p \supset p \vee q$ ' totolojisini elde edebiliriz. Nitekim, ' pq ' nün ikilisi ' $p \vee q$ ', ' p ' nin de ikilisi gene ' p ' dir.

Eşdeğerlikler için özel ikililik ilkesi :

- (a) $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ herhangi iki şema, $\mathcal{S}_1'$ şeması $\mathcal{S}_1$ in, $\mathcal{S}_2'$ şeması da $\mathcal{S}_2$ nin birer ikilisi oldukta, $\mathcal{S}_1 \equiv \mathcal{S}_2$ şemasının geçerli olmasının gerekli ve yeterli şartı, $\mathcal{S}_1' \equiv \mathcal{S}_2'$ şemasının geçerli olmasından ibarettir.
- (b) İki şemanın birbiriyle eşdeğer olmasının gerekli ve yeterli şartı, bu iki şemanın ikililerinin de birbiriyle eşdeğer olmasından ibarettir.

Kanıt: $\mathcal{S}_1) \rightarrow (\mathcal{S}_1' \vee \mathcal{S}_2) \rightarrow (\mathcal{S}_2' \text{ olsun. İçermeler için özel ikililik ilkesi uyarınca, bir yandan } \mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}_2 \text{ nin geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı } \mathcal{S}_2' \supset \mathcal{S}_1' \text{ den ibarettir; öbür yandan da } \mathcal{S}_2 \supset \mathcal{S}_1 \text{ in geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı } \mathcal{S}_1' \supset \mathcal{S}_2' \text{ den ibarettir. Şu halde, } \mathcal{S}_1 \equiv \mathcal{S}_2 \text{ nin geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı } \mathcal{S}_1' \equiv \mathcal{S}_2' \text{ den ibarettir. (İ.K.)}$

Örneğin: bu ilkeye dayanarak, ' $p \vee q \equiv q \vee p$ ' totolojisinden ' $pq \equiv qp$ ' totolojisini elde edebiliriz. (Nitekim, ' $p \vee q$ ' nün ikilisi ' pq ', ' $q \vee p$ ' nin ikilisi de ' qp ' dir.)

İkililikle ilgili önemli bir özellik te şudur:

- (21) İki şemanın birbirinin ikilisi olmasının gerekli ve yeterli şartı, bu iki şemanın hayırlanmalarının da birbirinin ikilisi olmasından ibarettir.

Yani $\mathcal{S}_1) \rightarrow (\mathcal{S}_2, \text{ ancak ve ancak } \sim \mathcal{S}_1) \rightarrow (\sim \mathcal{S}_2 \text{ ise.}$

Kanıt: $\mathcal{S}_1$ şeması ' $f(a_1, \dots, a_n)$ ' biçiminde, $\mathcal{S}_2$ şeması da ' $g(b_1, \dots, b_m)$ ' biçiminde olsun. $\mathcal{S}_1$ in hayırlanması ' $h(a_1, \dots, a_n)$ ', $\mathcal{S}_2$ nin de hayırlanması ' $k(b_1, \dots, b_m)$ ' oldukta, $\mathcal{S}_1) \rightarrow (\mathcal{S}_2, \text{ ancak ve ancak } \sim \mathcal{S}_1) \rightarrow (\sim \mathcal{S}_2 \text{ ise, yani}$

$'g(b_1, \dots, b_m)' \leftrightarrow '\sim f(\sim a_1, \dots, \sim a_n)', \text{ ancak ve ancak}$

$'k(b_1, \dots, b_m)' \leftrightarrow '\sim h(a_1, \dots, a_n)' \text{ ise}$

olduğu meydandadır. Nitekim, bu önerme

$'g(b_1, \dots, b_m)' \leftrightarrow '\sim f(\sim a_1, \dots, \sim a_n)', \text{ ancak ve ancak}$

$$' \sim g(b_1, \dots, b_m)' \leftrightarrow ' \sim \sim f(\sim a_1, \dots, \sim a_n)' \text{ ise}$$

önermesinden başka bir şey değildir.

(21) den şu iki sonuç çıkarılabilir:

(22) Her kendiyle-ikili şemanın hayırlanması da kendiyle-ikili bir şemadır.

Nitekim $\$$ *kendiyle-ikili* oldukça, $\$$ —($\$$ olur. Dolayısıyla, (21) gereği $\sim \$$)—($\sim \$$ sonucu çıkar.

(23) Kendiyle ters-ikili olan her şemanın hayırlanması da kendiyle-ters ikili olan bir şemadır.

$\$$ *kendiyle ters-ikili* olan bir şema oldukça, $\$$ —($\sim \$$ olur. Bunu şöyle gösterebiliriz: ' $f(p_1, \dots, p_n)$ ' kendiyle ters-ikili olan bir şema ise,

$$'f(p_1, \dots, p_n)' \leftrightarrow 'f(\sim p_1, \dots, \sim p_n)'$$

dolayısıyla de

$$' \sim f(p_1, \dots, p_n)' \leftrightarrow ' \sim f(\sim p_1, \dots, \sim p_n)'$$

dir. Bu son eşdeğerlik te $\$$ —($\sim \$$ anlamına gelir^a.

$\$$ —($\sim \$$ olduğuna göre, (21)'e dayanarak, $\$$ şemasının hayırlanmasının da ($\sim \$$)—($\$$ den dolayı) kendiyle ters-ikili bir şema olduğu ortaya çıkar. ((23) özelliği, (21) den bağımsız olarak ta, salt ikililik-bağlantısının bakışım özelliğine dayanarak kanıtlanabilir.)

Örneğin: ' $p \vee q$ ' ile ' pq ' birbirinin ikilisidir. Şu halde, (21) gereği, ' $\sim(p \vee q)$ ' ile ' $\sim(pq)$ ' de birbirinin ikilisi olmalı.

' $p \equiv q \equiv r$ ' kendiyle-ikilidir. Şu halde, 22 gereği, ' $\sim(p \equiv q \equiv r)$ ' şeması da kendiyle ikili olmalıdır.

' $p \equiv q$ ' şeması kendiyle ters-ikilidir. Normal şemalar ' $\sim$ ', ' $\cdot$ ' ve ' $\vee$ ' ekleminde başka hiç bir eklemi içine almıyan şemalar olduklarından, (III) metodunu uyguluyarak, her normal şemadan, bu şemanın ikilisi olan belli bir şema elde edilebilir. Örneğin:

$$p \sim qr \vee \sim pqr \sim s \vee \sim qs$$

normal şemasından bu yolla elde edilen ikili şema

$$(p \vee \sim q \vee r) \cdot (\sim p \vee q \vee r \vee \sim s) \cdot (\sim q \vee s)$$

biçimindedir.

Normal şemalardan, (III) metodu yardımıyla elde edilen bu türlü şemalara "*birlikli normal-şemalar*" (conjunctive normal schemata) denir. Bu şemalar çok-çarpanlı birlikte-evetlemeler durumundadır. Her çarpan bir "birlikli temel-şema"dır. Bir birlikli temel-şema, her çarpanı bir yalın-şema

olan çok çarpanlı bir *ayrıklıktır*. Bu yalın-şemaların her biri *ayrı* bir harften kuruludur.

Her şema (tutarlı olması halinde) bir normal-şemaya, veya (tutarsız olması halinde) bir normalımsı şemaya dönüştürülebildiği gibi, her şema (*geçersiz* olması halinde) bir birliksel normal-şemaya veya (*geçerli* olması halinde) ' $p_1 \vee \sim p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \dots \vee p_n$ ' gibi bir "normalımsı şema"ya dönüştürülebilir. Bu amaçla başvurulacak kurallar, normal-şemalar halinde başvuru kurallarının ikilisidir.

Birliksel normal-şemaların sadeleşmesi için de, normal-şemaların sadeleşmesinde kullanılan kuralların ikilileri kullanılır:

- (i) ' $A \cdot (A \vee B)$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim 'A' biçimine dönüştürülebilir.
- (ii) ' $(A \vee B) \cdot (A \vee \sim B)$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim 'A' biçimine dönüştürülebilir.
- (iii) ' $p \cdot (\sim p \vee A)$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim ' $p \cdot A$ ' biçimine; ' $\sim p \cdot (p \vee A)$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim de ' $\sim p \cdot A$ ' biçimine dönüştürülebilir.
- (iv) ' $(p_1 \vee \dots \vee p_m) \cdot (\sim p_1 \vee A) \dots (\sim p_m \vee A)$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim, ' $(p_1 \vee \dots \vee p_m) \cdot A$ ' biçimine;
' $(\sim p_1 \vee \dots \vee \sim p_m) \cdot (p_1 \vee A) \dots (p_m \vee A)$ ' biçimindeki herhangi bir tam-deyim ' $(\sim p_1 \vee \dots \vee \sim p_m) \cdot A$ ' biçimine dönüştürülebilir."

İkililik kavramı, yalnız salt önerme-şemalarına değil, bütün tam-deyimlere de uygulanabilir. ' $f(A_1, \dots, A_n, p_1, \dots, p_m)$ ', içinde ' $A_1, \dots, A_n$ ' önermeleriyile ' $p_1, \dots, p_m$ ' geçen bir tam-deyim oldukta,

$$(24) \quad 'f(A_1, \dots, A_n, p_1, \dots, p_m)' \text{---} \langle \text{Ş} =_{Dk} \\ \text{Ş} \leftrightarrow '\sim f(\sim A_1, \dots, \sim A_n, \sim p_1, \dots, \sim p_m)'$$

Özel bir hal olarak, bir önermenin ikilisi bu önermenin hayırlanmasından ibarettir. Buna göre 'D' nin ikilisi 'Y', 'Y' nin ikilisi de 'D' dir.

§15. T a m N o r m a l - Ş e m a l a r

§ 9'da, mümkün olan bütün n-li doğruluk-çizelgelerinin sayısının $2^{(2^n)}$ olduğunu kanıtlamıştık. İmdi, ' $p_1, \dots, p_n$ ' gibi n tane farklı temsilci-harf ele alarak, bunlardan kurulu salt-şemaların (1-li, 2-li, ..., n-li şemalar) doğruluk-çizelgelerini inceleyelim. Söz konusu şemaların her birine karşılık bir ve yalnız bir tek n-li doğruluk-çizelgesi vardır. Verilen bir şemanın doğruluk-çizelge-

sini kurduktan sonra, bu çizelgeye dayanarak, bu şema ile eşdeğer olan bir *"tam normal-şema"* elde edebiliriz. Örneğin: § 13'ün başındaki doğruluk-çizelgesine dayanarak, sözü geçen $\langle f(p,q,r) \rangle$ şemasının bir tam normal-şemasını elde etmiştik.

Genel olarak, verilen bir n -li doğruluk-çizelgenin karşılığı olan tam normal-şemayı elde etmek için şu işlemler yapılır: İlk önce, çizelgenin sağ yanındaki 'D' ler tespit edilerek, bu 'D' lerin her birinin solunda aynı hizadaki harf dizisi ele alınır. Bu harf dizilerinin her biri bir n -li dizidir. Her dizinin 1.ci üyesi $\langle p_1 \rangle$ temsilci-harfinin altındaki sütuna, 2.ci üyesi $\langle p_2 \rangle$ temsilci-harfinin altındaki sütuna, ..., n .nci üyesi de $\langle p_n \rangle$ temsilci-harfinin altındaki sütuna aittir. Bu harf dizilerinin sayısı en az 0, en çok 2^n olabilir. Bu sayı, doğruluk-çizelgesinin sağ yanındaki sütunun salt 'D' den kurulu olması — yani söz konusu şemanın bir totoloji olması — halinde 2^n dir. Doğruluk-çizelgesinin sağ yanındaki sütunun salt 'Y' den kurulu olması — yani şemanın bir çelişme olması — halinde ise bu sayı 0 dir.

Bu harf dizilerini tespit ettikten sonra, her diziye karşılık, aşağıda gösterilen şekilde, bir temel-şema elde edilir:

Dizinin 1.ci üyesi 'D' ise, temel-şemanın 1.ci çarpanı olarak $\langle p_1 \rangle$ seçilir. Dizinin 1.ci üyesi 'Y' ise, temel-şemanın 1.ci çarpanı olarak $\langle \sim p_1 \rangle$ seçilir.

Aynı şekilde dizinin 2.ci, ..., n .ci üyesine karşılık, bu üyenin 'D' veya 'Y' olmasına bakarak, temel-şemanın 2.ci, ..., n .ci çarpanı olarak, sırasıyla $\langle p_2 \rangle$ veya $\langle \sim p_2 \rangle$, ..., $\langle p_n \rangle$ veya $\langle \sim p_n \rangle$ seçilir. Böylece elde edilen n -çarpanlı birliktetvetlemenin gerçekten de bir temel-şema olduğu besbellidir. (Nitekim, böyle bir birliktetvetlemenin her çarpanı *ayrı* bir temsilci-harften kuruludur: 1.ci çarpanı $\langle p_1 \rangle$ ile, 2.ci çarpanı $\langle p_2 \rangle$ ile, ..., n .ci çarpanı $\langle p_n \rangle$ ile meydana getirilmiştir.)

Bu şekilde elde edilen temel-şemaların sayısı en az 0, en çok 2^n dir. Doğruluk-çizelgesini incelediğimiz şema bir totoloji ise, bu sayı 2^n dir. Şema bir çelişme ise, bu sayı 0 dir.

Bu temel-şemaları elde ettikten sonra, bunlardan kurulu bir *"tam normal-şema"*yı şöyle elde edebiliriz: Tam normal-şemanın 1.ci çarpanı olarak, sözü geçen harf dizilerinin birincisinin karşılığı olan temel-şemayı; ..., tam normal-şemanın sonuncu çarpanı olarak ta, bu harf dizilerinin sonuncusunun karşılığı olan temel-şemayı seçeriz. Böylece elde edilen ayrıklığın gerçekten bir *"tam normal-şema"* olduğunu şöyle kanıtlayabiliriz: her çarpan $\langle p_1 \rangle, \dots, \langle p_n \rangle$ harflerinden kurulu bir n -li temel-şemadır. Dolayısıyla, ayrıklığın bir çarpanında geçen her harf ayrıklığın bütün öbür çarpanlarında da geçiyor. Öte yandan, ayrıklığın her çarpanının geçiş sayısı 1 dir. Nitekim, sözünü ettiğimiz

harf dizileri birbirinden farklıdır. (Farklı harf dizilerinin sayısı en çok 2^n dir.) Oysa, farklı harf dizilerinin karşılığı olan temel-şemalar da farklıdır. Şu halde, bu harf dizilerine karşılık elde edilen bütün temel-şemalar birbirinden farklıdır. (İ.K.)

Böylece elde edilen bir tam normal-şemanın doğruluk-çizelgesi, bu tam normal-şemayı türetmek için kullanılan doğruluk-çizelgesiyle özdeştir. Dolayısıyla, böyle bir tam normal-şema, kaynağı olan ilk şema ile eşdeğerdir. Örneğin § 13'teki (1) tam normal-şeması, kaynağı olan 'f(p,q,r)' şeması ile eşdeğerdir.

Bu metotla, sağ yanındaki sütunu salt 'Y' den ibaret olan doğruluk-çizelgesi bir yana bırakılırsa, her n-li doğruluk-çizelgesine karşılık bir tam normal-şema bulunabilir. Bu n-li tam normal-şemaları, çarpanlarının sayısına bakarak 1-çarpanlı, 2-çarpanlı,..., 2^n -çarpanlı olmak üzere öbeklere ayırabiliriz. O zaman da "0-çarpanlı", yani hiç bir çarpanı olmayan bir n-li tam normal-şemadan da söz edebiliriz. Böyle bir "sanal şema"ya "boş-şema" denir. Böylece, *her n-li doğruluk-çizelgesine karşılık (istisnasız olarak) bir n-li tam normal-şema bulunduğunu* söyleyebiliriz. n-li doğruluk-çizelgelerinin sayısı $2^{(2^n)}$ olduğundan, bu yolla elde edilen n-li tam normal-şemalarının sayısının $2^{(2^n)}$ olduğunu görüyoruz. Öte yandan, bu tam normal-şemaların her birinin doğruluk çizelgesi, kaynağı olan doğruluk-çizelgesiyle eşdeğer olduğundan, söz konusu $2^{(2^n)}$ tane n-li tam normal-şemanın birbirinden farklı olduğu anlaşılır. Bu şemalardan herhangi ikisi hiç bir zaman birbiriyle eşdeğer değildir.

Böylece, 'p₁',..., 'p_n' gib n tane temsilci-harften kurulu $2^{(2^n)}$ tane birbiriyle eşdeğer olmayan n-li tam normal-şemanın bulunduğunu görüyoruz. (Ayrıksal veya birlikel çarpanların sırasının değişmesiyle elde edilen şemaları "ayrı" saymıyoruz!) Öte yandan, bu $2^{(2^n)}$ tane n-li tam normal-şemanın, 'p₁',..., 'p_n' harflerinden kurulu bütün n-li tam normal-şemaları tükettiğini gösterebiliriz. Nitekim §, 'p₁',..., 'p_n' den kurulu herhangi bir n-li tam normal-şema olsun. § nin doğruluk-çizelgesini kuralım. Sonra da, bu çizelgenin belirlediği tam normal-şemayı meydana getirelim. İşte, bu şekilde elde edilen şema, (birlikel ve ayrıksal çarpanların sırasını göz önünde tutmamak şartıyla) § ile özdeştir. Şu halde:

(1) Verilen n tane temsilci-harften kurulu bütün n-li tam normal-şemaların sayısı $2^{(2^n)}$ dir.

İmdi, verilen herhangi bir salt önerme-şemasının bir tam normal-şemaya dönüştürülebildiğini görmüştük. Öte yandan, birbiriyle eşdeğer olan iki şema-

nın karşılığı olan tam normal-şemalar da birbiriyle eşdeğer olmalı. Oysa, aynı harflerden kurulu olan farklı iki n-li tam normal-şema birbiriyle eşdeğer olmaz. Şu halde; 'p₁', 'p₂', ..., 'p_n' gibi n tane harften kurulu her (salt) şemaya karşılık, bu şema ile eşdeğer olan bir ve yalnız bir tek n-li tam normal-şema vardır.

$m \leq n$ olduğunda, 'p₁', ..., 'p_n' harflerinin m tanesinden kurulu her m-li salt önerme-şeması da, onunla eşdeğer olan bir n-li tam normal şemaya dönüştürülebilir. Bu amaçla, verilen şema ile, bu şemanın içine almadığı harflerden kurulu bir totolojinin birlikte-evetlemesi meydana getirilir. (Bu şekilde elde edilen n-li şema, ilk şema ile eşdeğerdir.) Bu n-li şemayı da bir n-li tam normal-şemaya dönüştürürüz. Elde edilen n-li tam normal-şema ilk şema ile eşdeğerdir. Böylece şu önemli sonuca varıyoruz:

- (2) Verilen n tane farklı temsilci-harfin bazılarından veya tümünden kurulu her salt önerme-şemasına karşılık, bu şema ile eşdeğer olan bir ve yalnız bir tek n-li tam normal-şema vardır. (Daha doğrusu, bu şema ile eşdeğer olan bütün n-li tam normal-şemalar birbirinden ancak çarpanlarının sırası bakımından farklıdır.)

Özellikle, çelişmelerin (yani tutarsız şemaların) karşılığı "boş-şema" dır. Totolojilerin karşılığı ise 2ⁿ çarpanlı n-li tam normal-şemadan ibarettir. (Verilen n tane temsilci-harften kurulu n-li tam normal-şemalar arasında 2ⁿ çarpanlı olan bir ve yalnız bir tek şema vardır.) Bu şemaya "*eksiksiz n-li tam normal-şema*" diyoruz. Herhangi bir n-li tam normal-şemanın her çarpanı aynı zamanda eksiksiz n-li tam normal-şemanın da bir çarpanıdır. Bu özelliği, *her n-li tam normal-şemanın, eksiksiz n-li tam normal-şemanın bir "alt-şema"sı olduğunu* söylemekle dile getiririz. Boş-şemayı da eksiksiz n-li tam normal-şemanın bir alt-şeması sayarız. Ayrıca, n-li tam normal-şema da, kendinin alt-şeması sayılır. Böylece, eksiksiz n-li tam-normal şemanın 2^(2ⁿ) tane farklı alt-şeması olduğunu, n-li tam normal-şemaların da böylece söz konusu alt-şemalardan ibaret olduğunu söyleyebiliriz.

Eksiksiz n-li tam normal-şema, 'p₁', ..., 'p_n' harflerinden kurulu mümkün bütün temel-şemaların ayrıklığından ibarettir. Bu ise

$$(3) \quad p_1 p_2 \dots p_{n-1} p_n \vee p_1 p_2 \dots p_{n-1} \sim p_n \vee p_1 \dots \vee \sim p_1 \sim p_2 \dots \sim p_{n-1} \sim p_n$$

biçimindedir. (3) şeması, bir n-li totoloji olan:

$$(4) \quad (p_1 \vee \sim p_1) \cdot (p_2 \vee \sim p_2) \cdot \dots \cdot (p_n \vee \sim p_n)$$

şemasının (' . ' nin 'v' ye göre dağıtıcılığına dayanan) açılımı olarak elde edilebilir. Bu açılımın 2ⁿ çarpanlı bir n-li tam normal-şema olduğunu rekursif

yolla kanıtlayabiliriz. Nitekim: $n = 1$ için (4) şeması ' $p_1 \vee \sim p_1$ ' biçiminde birli-li tam normal-şemadır. n için, (4) ün açılımının

$$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$$

biçiminde bir n -li tam normal-şema olduğunu kabul edelim. O zaman

$$(p_1 \vee \sim p_1) \cdot (p_2 \vee \sim p_2) \cdot \dots \cdot (p_n \vee \sim p_n) \cdot (p_{n+1} \vee \sim p_{n+1}) \\ (A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) \cdot (p_{n+1} \vee \sim p_{n+1})$$

ile eşdeğer olduğundan, açılımını

$$A_1 \cdot p_{n+1} \vee \dots \vee A_n \cdot p_{n+1} \vee A_1 \cdot \sim p_{n+1} \vee \dots \vee A_n \cdot \sim p_{n+1}$$

biçiminde olur. Oysa bu formül, $2 \cdot 2^n$ çarpanlı bir $n+1$ li tam normal-şemadır. $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ (İ.K.)

(2) ye dayanarak, şu sonucu elde edebiliriz:

- (5) Herhangi bir şemanın bir totoloji olmasının gerekli ve yeterli bir şartı, bu şemanın bir eksiksiz tam-normal şemaya dönüştürülebilmesidir.

Tam normal-şemaların (§ 14'deki (III) metodu ile elde edilen) ikililerine, "*birlikse tam normal şemalar*" denir. (Tam normal-şemalar'a —onları birlikse tam normal-şemalardan ayırdetmek amacıyla— "*ayrıksal tam normal şemalar*" da denir.)

İkililik ilkelerine dayanarak, birlikse tam normal-şemaların aşağıdaki özellikleri olduğu kanıtlanabilir:

- (6) Verilen n tane temsilci-harften kurulu bütün n -li birlikse tam normal-şemaların sayısı $2^{(2^n)}$ dir. Bunlardan herhangi ikisi hiç bir zaman bir-biriyle eşdeğer değildir.

- (7) Verilen n tane farklı temsilci-harfin bazılarından veya tümünden kurulu her salt önerme-şemasına karşılık, bu şema ile eşdeğer olan bir ve yalnız bir tek n -li birlikse n -li tam normal-şema vardır.

- (8) $(p_1 \vee \dots \vee p_n) \cdot (p_1 \vee \dots \vee \sim p_n) \cdot \dots \cdot (\sim p_1 \vee \dots \vee \sim p_n)$

biçimindedir. Bu şema da, bir n -li çelişme olan

- (9) $p_1 \sim p_1 \vee p_2 \sim p_2 \vee \dots \vee p_n \sim p_n$

şemasının açılımı olarak elde edilebilir.

- (10) Herhangi bir şemanın bir çelişme olmasını gerekli ve yeterli şartı, bu şemanın bir eksiksiz birlikse tam normal-şemaya dönüştürülebilmesidir.

Çelişmelerin karşılığının boş-şema olduğunu görmüştük. Bu da, bir çelişmenin hiç bir (boş olmıyan) normal-şemaya dönüştürülemediğinin başka bir şekilde dile getirilmesi demektir. Totolojilerin bir birliksel normal-şemaya dönüştürülmesini de, bunların karşılığının “boş birliksel tam normal-şema” (yani “0-lı birliksel tam normal-şema) olduğunu söylemek suretiyle dile getiriyoruz.

(11) Herhangi bir şemanın bir totoloji olmasının gerekli ve yeterli şartı, bu şemanın boş birliksel tam normal-şema ile eşdeğer olmasıdır.

(12) Herhangi bir şemanın bir çelişme olmasının gerekli ve yeterli şartı, bu şemanın boş ayırıksal tam normal-şema ile eşdeğer olmasıdır.

Aşağıda 1-li ve 2-li salt önerme-şemalarının ayırıksal ve birliksel tam normal-şemalarını (tüketici) bir şekilde gösteriyoruz:

1-li Ş e m a l a r :

Ayırıksal 1-li tam normal-şema

Birliksel 1-li tam normal-şema

1-li totoloji	$p \vee \sim p$	boş-şema
p	p	p
$\sim p$	$\sim p$	$\sim p$
1-li çelişme	boş-şema	$p \sim p$

2-li Ş e m a l a r :

Ayırıksal 2-li tam normal-şema

Birliksel 2-li tam normal-şema

2-li totoloji	$pq \vee p \sim q \vee \sim pq \vee \sim p \sim q$	boş-şema
$p \vee q$	$pq \vee p \sim q \vee \sim pq$	$p \vee q$
$p \subset q$	$pq \vee p \sim q \vee \sim p \sim q$	$p \vee \sim q$
p	$pq \vee p \sim q$	$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q)$
$p \supset q$	$pq \vee \sim pq \vee \sim p \sim q$	$\sim p \vee q$
q	$pq \vee \sim pq$	$(p \vee q) \cdot (\sim p \vee q)$
$p \equiv q$	$pq \vee \sim p \sim q$	$(p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q)$
$p \cdot q$	pq	$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q)$
$p q$	$p \sim q \vee \sim pq \vee \sim p \sim q$	$\sim p \vee \sim q$
$p \neq q$	$p \sim q \vee \sim pq$	$(p \vee q) \cdot (\sim p \vee \sim q)$
$\sim q$	$p \sim q \vee \sim p \sim q$	$(p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee \sim q)$
$p \not\supset q$	$p \sim q$	$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee \sim q)$
$\sim p$	$\sim pq \vee \sim p \sim q$	$(\sim p \vee q) \cdot (\sim p \vee \sim q)$
$p \not\subset q$	$\sim pq$	$(p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q) \cdot (\sim p \vee \sim q)$
$p \downarrow q$	$\sim p \sim q$	$(p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q) \cdot (\sim p \vee \sim q)$
2-li çelişme	boş-şema	$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q) \cdot (\sim p \vee \sim q)$

Yukarıdaki 1-li ve 2-li şemaların ayrıksal normal-şemalarını doğruluk-çizelgelerine dayanarak (§ 14'deki (I) metoduyla) elde ederiz. Aynı şemaların birliksel tam normal-şemalarını elde etmek için (§ 13'te, ayrıksal tam normal-şemalar için kullandığımız kuralların ikilisi olan kurallara dayanan) dönüş-türme metodunu kullanabiliriz. Örneğin: $(p \cdot q)$ şemasını ele alalım. Bu şema tek başına ('pq' olarak) 2 çarpanlı bir birliksel normal-şema durumundadır. Fakat "tam" değildir. Onu "tam" bir biçime getirmek için, birinci çarpana ' $q \sim q$ ' yü, ikinci çarpana da ' $p \sim p$ 'yi 'v' eklemi yardımıyla ekleriz. Eklenen bileşenler birer çelişme olduğundan, bu şekilde elde edilen ' $(p \vee q \sim q) \cdot (q \vee p \sim p)$ ' şeması 'pq' ile eşdeğer olur. İmdi, ' $(p \vee q \sim q) \cdot (q \vee p \sim p)$ ' şemasını, 'v' nin ' . ' ye göre dağıtıcılığından faydalananarak,

$$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (q \vee p) \cdot (q \vee \sim p)$$

biçimine dönüştürebiliriz. Bu son şemayı da

$$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q)$$

biçimine indirgeyebiliriz. Bu ise 'pq' nün birliksel 2-li tam normal-şemasından başka bir şey değildir.

1-li ve 2-li şemaların ayrıksal ve birliksel tam normal-şemalarının çizelgesinden, şu ikililik-bağlantılarını ortaya çıkarabiliriz:

1-li Ş e m a l a r :

- | | | |
|------|--|-----------------------|
| (13) | 1-li totoloji $\rangle$ — $\langle$ 1-li çelişme | (kendiyle ters-ikili) |
| (14) | 'p' $\rangle$ — $\langle$ 'p' | (kendiyle-ikili) |
| (15) | ' $\sim p$ ' $\rangle$ — $\langle$ ' $\sim p$ ' | (kendiyle-ikili) |

2-li Ş e m a l a r :

- | | | |
|------|---|-----------------------|
| (16) | 2-li totoloji $\rangle$ — $\langle$ 2-li çelişme | (kendiyle ters-ikili) |
| (17) | ' $p \equiv q$ ' $\rangle$ — $\langle$ ' $p \neq q$ ' | (kendiyle ters-ikili) |
| (18) | 'p' $\rangle$ — $\langle$ 'p' | (kendiyle-ikili) |
| (19) | ' $\sim p$ ' $\rangle$ — $\langle$ ' $\sim p$ ' | (kendiyle-ikili) |
| (20) | 'pq' $\rangle$ — $\langle$ ' $p \vee q$ ' | |
| (21) | ' $p \supset q$ ' $\rangle$ — $\langle$ ' $p \not\supset q$ ' | |
| (22) | ' $p \subset q$ ' $\rangle$ — $\langle$ ' $p \not\subset q$ ' | |
| (23) | ' $p \mid q$ ' $\rangle$ — $\langle$ ' $p \downarrow q$ ' | |

Genel olarak, $\mathcal{S}$ herhangi bir şema oldukça, $\mathcal{S}$ nin birliksel tam normal şemasını elde etmek için, ilk önce $\mathcal{S}$ nin doğruluk çizelgesini ($\mathcal{S}$ nin doğruluk de-ğeri-analizi sonucunda) kurarız. Bundan sonra da, bu doğruluk çizelgesinde 'D' yerine 'Y', 'Y' yerine 'D' koymak suretiyle $\mathcal{S}$ nin ikilisinin doğruluk çizelgesini elde ederiz. Bu son doğruluk çizelgesi yardımıyla $\mathcal{S}_1$ gibi bir ayrıksal tam-normal şemayı elde ederiz.

$$\mathcal{S} \rightarrow \langle \mathcal{S}_1$$

Sonra, $\mathcal{S}_1$ ayrıksal tam-normal şemasının ikilisi olan $\mathcal{S}_2$ birliksel tam normal-şemasını meydana getiririz.

$$\mathcal{S}_1 \rightarrow \langle \mathcal{S}_2$$

$$\mathcal{S} \rightarrow \langle \mathcal{S}_1 \text{ ve } \mathcal{S}_1 \rightarrow \langle \mathcal{S}_2 \text{ den (§ 14'deki (8) gereği)}$$

$$\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}_2$$

elde edilir. Şu halde, $\mathcal{S}_2$ şeması, $\mathcal{S}$ şemasının aranılan birliksel tam normal-şemasından başka bir şey değildir.

Örneğin: $\mathcal{S}$ şeması olarak

$$(p \vee \sim q) \cdot r$$

gibi bir 3-lü şema seçelim. Bu şemanın ikilisi olan ayrıksal tam normal-şema da $\mathcal{S}_1$ olsun. $\mathcal{S}$ ile $\mathcal{S}_1$ şemalarının doğruluk çizelgelerini aşağıda gösteriyoruz:

p	q	r	$\mathcal{S}$	p	q	r	$\mathcal{S}_1$
1. D	D	D	D	8. Y	Y	Y	Y
2. D	D	Y	Y	7. Y	Y	D	D
3. D	Y	D	D	6. Y	D	Y	Y
4. D	Y	Y	Y	5. Y	D	D	D
5. Y	D	D	Y	4. D	Y	Y	D
6. Y	D	Y	Y	3. D	Y	D	D
7. Y	Y	D	D	2. D	D	Y	Y
8. Y	Y	Y	Y	1. D	D	D	D

$\mathcal{S}_1$ in doğruluk-çizelgesini, $\mathcal{S}$ nin doğruluk çizelgesinde 'D' yerine 'Y', yerine de 'D' koymak suretiyle elde ettik. Bu son çizelgeye göre $\mathcal{S}_1$ ayrıksal tam normal şemasının

$$pqr \vee p \sim qr \vee p \sim q \sim r \vee \sim pqr \vee \sim p \sim qr$$

biçiminde olduğu ortaya çıkar.

$\mathcal{S}_1$ böylece bulunduktan sonra, $\mathcal{S}_1$ 'de 'v' yerine ' . ', ' . ' yerine de 'v' koyarak, $\mathcal{S}_1$ in ikilisi olan $\mathcal{S}_2$ birliksel tam normal şemasını elde ederiz. Buna göre, $\mathcal{S}_2$ nin

$$(p \vee q \vee r) \cdot (p \vee \sim q \vee r) \cdot (p \vee \sim q \vee \sim r) \cdot (\sim p \vee q \vee r) \cdot (\sim p \vee \sim q \vee r)$$

biçiminde olduğu meydana çıkar. Bu son şema ise $\mathcal{S}$ şemasının aranılan birliksel tam normal-şemasıdır.

Verilen bir şemanın birliksel tam normal şemasını, bu şemanın doğruluk çizelgesine dayanarak elde edecek yerde, bir de (doğruluk-çizelgesine başvurmaksızın) bu şemanın ayrışsal tam normal şeması yardımıyla bulabiliriz. Örnek olarak sözü geçen ' $(p \vee \sim q) \cdot r$ ' şemasını yeniden ele alalım. Bu şemanın ayrışsal tam normal-şeması $\mathcal{S}$ olsun. $\mathcal{S}$ şeması

$$pqr \vee p \sim qr \vee \sim p \sim qr$$

biçimindedir. İmdi, sözü geçen şemanın ayrışsal tam normal şemasının bu biçimde olduğunun önceden bilindiğini kabul edelim. O zaman $\mathcal{S}$ ile eşdeğer olan birliksel tam normal şemayı (doğruluk çizelgelerini kurmadan) nasıl elde edebileceğimizi araştıralım.

'p', 'q' ve 'r' temsilci harflerine yüklenebilen doğruluk değerleri için tam sekiz şık vardır: 1.ci şıkta 'p', 'q' ve 'r' nin üçü de 'D' değerini alır; 2.ci şıkta 'p' ve 'q' 'D' değerini, 'r' 'Y' değerini alır ;.....; 8.ci şıkta 'p', 'q' ve 'r' nin üçü de 'Y' değerini alır. Buna göre, (a) şemasının 1.ci, 3.cü ve 7.ci şıkta (ve yalnız bu şıklarda) 'D' değerini aldığını söyleyebiliriz. Bu durumu kısaca

$\mathcal{S}$ şemasının karşılığı (1, 3, 7) dir

önermesiyle dile getireceğiz.

$\mathcal{S}$ şemasının ikilisi olan ayrışsal tam normal-şema $\mathcal{S}_1$ olsun. Amacımız $\mathcal{S}_1$ şemasının (yukarıdaki anlamda) "karşılığını" bulmaktır. $\mathcal{S}$ ve $\mathcal{S}_1$ birbirinin kilisi olan birer 3-lü şema olduğundan, $\mathcal{S}_1$ in 'D' değerini aldığı şıklar $\mathcal{S}$ nin aldığı değerler yardımıyla şöyle belirlenir:

$\mathcal{S}$ 1.ci şıkta 'Y' değerini alsa, $\mathcal{S}_1$ 8. ci şıkta 'D' değerini alır.

$\mathcal{S}$ 2.ci şıkta 'Y' değerini alsa, $\mathcal{S}_1$ 7.ci şıkta 'D' değerini alır.

.....

$\mathcal{S}$ i.nci şıkta 'Y' değerini alsa, $\mathcal{S}_1$ 8-i + 1 nci şıkta 'D' değerini alır.

.....

$\mathcal{S}$ 8.nci şıkta 'Y' değerini alsa, $\mathcal{S}_1$ 1.ci şıkta 'D' değerini alır.

Oysa, $\mathcal{S}$ şeması 1.ci, 3.cü ve 7.ci şıklarda (ve yalnız bu üç şıkta) 'D' değerini alıyor. Dolayısıyla 2.ci, 4.cü, 5.ci 6.cı ve 8.nci şıklarda 'Y' değerini alır.

İmdi, $\mathcal{S}$ şemasının 'Y' değerini aldığı bütün şıklarda (ve yalnız bu şıklarda) 'D' değerini alan bir şema, $\mathcal{S}$ nin hayırlanmasıyla eşdeğerdir. Şu halde $\sim\mathcal{S}$ şeması 2.ci, 4.cü, 5.ci, 6.cı ve 8.ci şıklarda 'D' değerini alır. Başka bir deyimle, $\mathcal{S}$ şemasının karşılığı (2, 4, 5, 6, 8) dir.

$\mathcal{S}$ şemasının karşılığını böylece tespit ettikten sonra, artık $\mathcal{S}_1$ in karşılığını kolayca belirleyebiliriz. Nitekim (yukarıda belirttiğimiz gibi) $\mathcal{S}$ nin i.nci şıkta 'Y' değerini alması halinde, $\mathcal{S}_1$ 8 — i + 1 nci şıkta 'D' değerini aldığına göre; $\sim\mathcal{S}$ i.ci şıkta 'D' değerini alırsa, $\mathcal{S}_1$ de 8 — i + 1 nci şıkta 'D' değerini alır. Buna göre $\mathcal{S}_1$ in karşılığını şöyle hesaplayabiliriz:

$$8 - 2 + 1 = 7$$

$$8 - 4 + 1 = 5$$

$$8 - 5 + 1 = 4$$

$$8 - 6 + 1 = 3$$

$$8 - 8 + 1 = 1$$

Şu halde $\mathcal{S}_1$ in karşılığı (1, 3, 4, 5, 7) dir. Dolayısıyla de $\mathcal{S}_1$ in

$$pqr \vee p \sim qr \vee p \sim q \sim r \vee \sim pqr \vee \sim p \sim qr$$

biçiminde olduğu ortaya çıkar. Ondan sonra, $\mathcal{S}_1$ in ikilisi olan $\mathcal{S}_2$ birliksel tam normal şemayı bir hamlede elde edebiliriz. Bunun için, $\mathcal{S}_1$ 'de 'v' yerine '·', '·' yerine de 'v' koymak yetiyor. Böylece $\mathcal{S}_2$ nin

$$(p \vee q \vee r) \cdot (p \vee \sim q \vee r) \cdot (p \vee \sim q \vee \sim r) \cdot (\sim p \vee q \vee r) \cdot (\sim p \vee \sim q \vee r)$$

biçiminde olduğu sonucu çıkar. $\mathcal{S} \rightarrow (\mathcal{S}_1 \vee \mathcal{S}_1) \rightarrow (\mathcal{S}_2 \text{ olduğundan, } \mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}_2$. Şu halde, $\mathcal{S}_2$ şeması, $\mathcal{S}$ şemasının aranılan birliksel tam normal şemasıdır.

Genel olarak, $\mathcal{S}$ herhangi bir ayrık n-li tam normal-şema olduğunda, $\mathcal{S}$ ile eşdeğer olan birliksel n-li tam normal şemayı şöyle bulabiliriz:

İlk önce $\mathcal{S}$ nin "karşılığı" (yani 'D' değerini aldığı şıklar) tespit edilir. Bu karşılık

$$(m_1, m_2, \dots, m_k)$$

olsun. ¹

n-li şemalar halinde, mümkün olan bütün şıkların sayısı 2^n olduğundan:

$$1 \leq m_i \leq 2^n \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$0 \leq k \leq 2^n$$

$\mathcal{S}$ nin karşılığı bulunduktan sonra, mümkün olan 2^n şıktan sözü geçen $m_1, m_2, \dots, m_k$ nci şıklar çıkarılarak, arta kalan şıklar tespit edilir. Bu şıkların sayısı $2^n - k$ dir. Bu $2^n - k$ tane şık ta $h_1, h_2, \dots, h_{2^n - k}$ nci şıklar olsun. Buna göre, $\sim \mathcal{S}$ şemasının karşılığını

$$(h_1, h_2, \dots, h_{2^n - k})$$

biçiminde dile getirebiliriz.

$\sim \mathcal{S}$ nin karşılığını böylece belirledikten sonra, $\mathcal{S}_1$ in karşılığı şu biçimde belirlenir:

$$(2^n - h_{2^n - k} + 1, \dots, 2^n - h_1 + 1)$$

$\mathcal{S}_1$ in karşılığına ^{2} dayanarak ta, ilk önce $\mathcal{S}_1$ in kendisi (bir ayrışsal tam normal şema olarak) elde edilerek; ondan sonra $\mathcal{S}_1$ 'de ' . ' yerine 'v', 'v' yerine de ' . ' koymak suretiyle $\mathcal{S}_1$ ile eşdeğer olan $\mathcal{S}_2$ birliksel, tam normal-şemasını bulmak mümkündür.

Bu son metoda dayanarak, 2-li şemaların birliksel tam normal-şemalarını, bu şemaların ayrışsal tam normal-şemalarından kolayca elde edebiliriz.

Örnek olarak 'p $\neq$ q' şemasının birliksel tam normal-şemasını bu metotla bulmağa çalışalım. Bu şemanın ayrışsal tam normal-şeması

$$p \sim q \vee \sim pq$$

dür. Buna göre, bu şemanın karşılığının (2, 3) olduğunu ortaya çıkarırız. O zaman, şemamızın hayırlanmasının karşılığı (1, 4) olur. Şemamız bir 2-li şema olduğuna göre $2^2 = 4$ tane mümkün şık vardır. Şu halde şemamızın ikilisinin karşılığı,

$$4 - 4 + 1 = 1$$

$$4 - 1 + 1 = 4$$

olduğundan, (1, 4) olur. İmdi, karşılığı (1, 4) olan ayrışsal tam normal şema

$$pq \vee \sim p \sim q$$

dür. Bu şemanın ikilisi olan birliksel tam normal şema

$$(p \vee q) \cdot (\sim p \vee \sim q)$$

dür. Bu ise aradığımız birliksel tam normal şemadan başka bir şey değildir.

Pratikte, doğruluk-çizelgesi veya ayrışsal tam normal-şeması verilmiş olan herhangi bir şemanın birliksel tam normal-şeması şöyle bir metotla elde edilir:

Ş herhangi bir n -li şema, $\mathcal{S}_i$ de $\mathcal{S}$ nin bir ikilisi olsun. ' A_i ' sembolünü ' p ' veya ' $\sim p_i$ ' nin bir kısaltması olarak kullanalım. O zaman her temel-şema ' $A_1 \dots A_n$ ' biçiminde olur. İmdi, eksiksiz ayrışsal n -li tam normal-şemanın i nci çarpanı ' $A_1 \dots A_n$ ' ise, $2^{n-i} - 1$ nci çarpanı ' $\sim A_1 \dots \sim A_n$ ' dir. Dolayısıyla, ' $A_1 \dots A_n$ ' $\sim \mathcal{S}$ şemasının ayrışsal n -li tam normal-şemasının bir çarpanı ise, ' $\sim A_1 \dots \sim A_n$ ' $\mathcal{S}_i$ şemasının ayrışsal n -li tam normal-şemasının bir çarpanıdır. Bu son şemanın bütün çarpanları da ' $A_1 \dots A_n$ ' $\sim \mathcal{S}$ nin normal-şemasının bir çarpanı olmak üzere— ' $\sim A_1 \dots \sim A_n$ ' biçimindedir.

Buna göre, $\mathcal{S}_i$ in ayrışsal n -li tam normal-şemasını elde etmek için, $\mathcal{S}$ nin ' Y ' değerini aldığı şıkları tespit ederiz. Ondan sonra da, bu şıkların karşılığı olan ' $A_1 \dots A_n$ ' biçimindeki temel-şemaları kurar, bunları da ' $\sim A_1 \dots \sim A_n$ ' biçiminde değiştiririz. Bunların da ayrıklığı $\mathcal{S}_i$ in ayrışsal n -li tam normal-şemasını meydana getirir. Bu son şemada da ' $\cdot$ ' yerine ' v ', ' v ' yerine ' $\cdot$ ' koyarak $\mathcal{S}$ nin birliksel n -li tam normal-şemasını elde ederiz. Buna göre, $\mathcal{S}$ nin birliksel n -li tam normal-şemasının çarpanlarının — ' $A_1 \dots A_n$ ' $\sim \mathcal{S}$ nin ayrışsal n -li tam normal-şemasının bir çarpanı olmak üzere— ' $A_1 v \dots v A_n$ ' biçiminde olduğu anlaşılır.

Şu halde $\mathcal{S}$ gibi herhangi bir şemanın birliksel n -li tam normal-şemasını elde etmek için, ilk önce bu şemanın ' Y ' değerini aldığı şıkları tespit ederiz. Bu da, ya şemanın doğruluk-çizelgesi, ya da ayrışsal n -li tam normal-şeması yardımıyla yapılabilir. Bundan sonra, tespit edilen her şıkkın karşılığı olan ' $A_1, \dots, A_n$ ' biçimindeki yalın-şema dizilerini elde ederiz. Ondan sonra da, ' $A_1, \dots, A_n$ ' biçimindeki her diziden ' $\sim A_1 v \dots v \sim A_n$ ' biçimindeki bir ayrıklık kurulur. Bu ayrıklıkların birlikte-evetlenmesi aranılan birliksel n -li tam normal-şemadır.

Örneğin: sözü geçen ' $(p v \sim q) \cdot r$ ' şemasının ' Y ' değerini aldığı şıklar 2.ci, 4.cü, 5.ci, 6. cı ve 8.ci şıklardan ibarettir. Bu şıkların karşılığı olan yalın-şema dizileri:

$$p, q, \sim r; \quad p, \sim q, \sim r; \quad \sim p, q, r; \quad \sim p, q, \sim r; \quad \sim p, \sim q; \quad \sim r$$

dir. Bu dizilerden, $\mathcal{S}$ nin birliksel n -li tam normal-şeması olan

$$(p v q v r) \cdot (p v \sim q v r) \cdot (p v \sim q v \sim r) \cdot (\sim p v q v r) \cdot (\sim p v \sim q v r)$$

tam-deyimi elde edilir.

$\mathcal{S}$ nin birliksel n -li tam normal-şemasını sözü geçen yalın-şema dizilerine başvurmadan da şöyle elde edebiliriz: İlk önce $\mathcal{S}$ nin ' Y ' değerini aldığı şıklar tespit edilir. Her şık — ' d_i ' sembolü ' D ' veya ' Y ' nin bir kısaltması olmak üzere— ' $d_1, \dots, d_n$ ' biçimindeki bir dizi ile belirlenmiştir. İmdi, ' $d_1, \dots, d_n$ ' şıkkının karşılığı olan çarpan ' $A_1 v \dots v A_n$ ' olsun O zaman, $d_i = D$ ise, $A_i = \sim p_i$; $d_i = Y$ ise, $A_i = p_i$ olur.

Ayrıksal veya birliksel tam normal şemalara dayanarak, şu önemli özelliği kanıtlamak mümkündür:

Daha önce gösterdiğimiz gibi, her önerme şeması sadece ' $\sim$ ', ' $\cdot$ ', ' v ', ' $\supset$ ' ve ' $\equiv$ ' eklemlerinin tümü veya bazıları yardımıyla kurulabilir. ' p_1 ' ' p_2 ', ..., ' p_n ' gibi n tane farklı temsilci harfinin tümünden veya bazılarından kurulu olan şemaları göz önüne alalım. Bu şemalardan en çok $2^{(2^n)}$ tanesi birbirinden bağımsız olabilir. (Nitekim n -li doğruluk-çizelgelerinin sayısı $2^{(2^n)}$ dir. Oysa, birbirinden bağımsız olan yani birbiriyle eşdeğer olmıyan şemaların doğruluk-çizelgeleri ayrı olmalıdır.) Şimdi şu soruyu ortaya atıyoruz: Sözü geçen $2^{(2^n)}$ birbirinden bağımsız n -li şemalardan ' $\sim$ ' eklemi içine almıyanların sayısı nedir? Bu soruyu şu biçime de sokabiliriz: Her n -li önerme-eklemi sadece ' $\sim$ ', ' $\cdot$ ', ' v ', ' $\supset$ ' ve ' $\equiv$ ' eklemleri yardımıyla tanımlanabilir. Bütün bu n -li önerme eklemlerinin sayısı da $2^{(2^n)}$ dir. İşte bu $2^{(2^n)}$ tane n -li önerme ekleminden kaç tanesi ' $\sim$ ' eklemi kullanılmadan, salt ' $\cdot$ ', ' v ', ' $\supset$ ' ve ' $\equiv$ ' eklemleri yardımıyla tanımlanabilir? Bu sayının $1/2 \cdot 2^{(2^n)}$ olduğunu, yani söz konusu önerme-eklemlerinin bütün n -li eklemlerin yarısını meydana getirdiğini göstereceğiz.

- (24) a. Her hangi bir n -li şemanın ' $\sim$ ' siz kurulabilmesinin gerekli ve yeterli bir şartı, bu şemanın *ayrıksal* n -li tam normal-şemasında ' $p_1 \dots p_n$ ' çarpanının (yani sadece hayırlanmamış harflerden kurulu çarpanın) bulunmasıdır.
- b. Her hangi bir n -li şemanın ' $\sim$ ' siz kurulabilmesinin gerekli ve yeterli şartı da, bu şemanın *birliksel* n -li tam normal-şemasında ' $\sim p_1 v \dots v \sim p_n$ ' (yani sadece hayırlanmış harflerden kurulu çarpanın) bulunmamasıdır.
- c. ' $\sim$ ' siz kurulabilen her n -li şema, ' $\sim$ ' siz kurulamıyan bir n -li şemanın hayırlanmasıyla eşdeğerdir. ' $\sim$ ' siz kurulamıyan her n -li şema da, ' $\sim$ ' siz kurulabilen bir n -li şemanın hayırlanmasıyla eşdeğerdir.
- d. Sayısı $2^{(2^n)}$ olan birbirinden bağımsız n -li salt önerme-şemalarının tam yarısı ' $\sim$ ' eklemi kullanılmadan, sadece ' $\cdot$ ', ' v ', ' $\supset$ ' ve ' $\equiv$ ' eklemleri yardımıyla kurulabilir.

Kanıt :

a) *Şart gereklidir:* Ş gibi bir n -li şema ' $\sim$ ' siz kurulabilirse, Ş nin ayrıksal n -li tam normal şemasında ' $p_1 \dots p_n$ ' çarpanı bulunur. Nitekim böyle bir çarpan yoksa, ayrıksal tam normal-şema, temsilci-harflerin her birine 'D' değeri verilmesi halinde 'Y' değerini alır. (Böyle bir durumda, her çarpanda bir 'Y'

bulunur, dolayısıyla her çarpan da 'Y' değerini alır. Böylece ayrıklığın tümü 'Y' değerini alır.) Oysa, '~' siz olarak salt '·', 'v', '⊃' ve '≡' eklemleri yardımıyla kurulu bir şema, bütün temsilci harflerine 'D' değeri yüklenmesi halinde, 'Y' değil, 'D' değerini alır. Şu halde, 'p₁...p_n' çarpanı bulunmayan bir ayrıkسال n-li tam normal-şema, '~' siz bir şema ile eşdeğer olamaz. (İ.K.)

Şart yeterlidir: Ş şemasının ayrıkسال n-li tam normal-şemasında 'p₁...p_n' çarpanı bulunursa, Ş şeması '~' siz kurulabilir. Nitekim Ş şemasının n-li tam normal şeması

$$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_j \quad (1 \leq j \leq 2^n)$$

biçiminde olsun. 'A₁' i 'p₁...p_n' çarpanının kısaltması olarak kullanıyoruz.

İmdi, bu şemayı

$$A_1 \vee (A_1 \vee A_2) \vee (A_1 \vee A_3) \vee \dots \vee (A_1 \vee A_j) \vee \dots \vee (A_1 \vee A_j)$$

biçimine dönüştürebiliriz.

Bu çok çarpanlı ayrıklığın birinci çarpanı olan 'A₁' ('p₁...p_n' biçiminde olduğundan) '~' siz bir bileşendir. Geri kalan 'A₁ v A₂', ..., 'A₁ v A_j', ..., 'A₁ v A_j' çarpanlarının her birini de '~' siz bir biçime dönüştürebiliriz.

Nitekim, 'A_i' (i = 2, 3, ..., j)

$$p_{m_1} p_{m_2} \dots p_{m_k} \sim p_{h_1} \sim p_{h_2} \dots \sim p_{h_{n-k}} \quad (0 \leq k \leq n)$$

biçimindedir. k=0 ise, 'A_i' '~p₁ ~ p₂ ... ~ p_n' olur. O zaman da 'A₁ v A_i' çarpanı

$$p_1 p_2 \dots p_n \vee \sim p_1 \sim p_2 \dots \sim p_n$$

olur. Oysa bu deyim

$$p_1 \dots p_n \vee \sim (p_1 \vee \dots \vee p_n)$$

biçimine; bu da

$$(p_1 \vee \dots \vee p_n) \supset p_1 \dots p_n$$

biçimine dönüştürülebilir. Bu ise '~' siz bir bileşendir.

Öte yandan, k > 0 ise, (hep n-k > 0 olduğundan) 'A₁ v A_i' çarpanı

$$p_1 \dots p_n \vee p_{m_1} \dots p_{m_k} \sim p_{h_1} \dots \sim p_{h_{n-k}}$$

biçiminde olur. Bu ise

$$p_1 \dots p_n \vee p_{m_1} \dots p_{m_k} \sim (p_{h_1} \vee \dots \vee p_{h_{n-k}})$$

ya dönüştürülebilir. Bu son deyim de ('p ~ q' ile '~(p ⊃ q)' nün eşdeğerliği

$$p_1 \dots p_n \vee \sim [p_{m_1} \dots p_{m_k} \supset (p_{h_1} \vee \dots \vee p_{h_{n-k}})]$$

biçimine dönüştürülebilir. Bu deyim de, artık ' $\sim$ ' siz bir bileşen olan

$$[p_{m_1} \dots p_{m_k} \supset (p_{h_1} \dots p_{h_{n-k}})] \supset p_1 \dots p_n$$

deyimine dönüştürülebilir.

Böylece, sözü geçen ayrıksal tam normal şemanın tümünün de ' $\sim$ ' siz bir biçime dönüştürülebileceğini görüyoruz. (İ.K.)

b) $\mathcal{S}$ her hangi bir n-li şema, $\mathcal{S}_1$ $\mathcal{S}$ nin ayrıksal n-li tam normal-şeması, $\mathcal{S}_2$ $\mathcal{S}_1$ in ikilisi olan ayrıksal n-li tam normal-şema, $\mathcal{S}_3$ te $\mathcal{S}_2$ nin ikilisi olan birliksel n?li tam normal-şema olsun. O zaman, $\mathcal{S}_1$ şemasında ' $p_1 \dots p_n$ ' çarpanının bulunmasının gerekli ve yeterli şartı, $\mathcal{S}_3$ şemasında ' $\sim p_1 \vee \dots \vee \sim p_n$ ' çarpanının bulunmamasıdır.

Nitekim:

$\mathcal{S}_1$ şemasında ' $p_1 \dots p_n$ ' in bulunmasının gerekli ve yeterli şartı, $\mathcal{S}_1$ in karşılığında "1" in bulunmasıdır.

$\mathcal{S}_1$ in karşılığında "1" in bulunmasının gerekli ve yeterli şartı, $\sim \mathcal{S}_1$ in karşılığında "1" in bulunmamasıdır.

$\mathcal{S}_1$ in karşılığında "1" in bulunmamasının gerekli ve yeterli şartı, $\mathcal{S}_2$ nin karşılığında $2^n - 1 + 1$ sayısının, yani " 2^n " in bulunmamasıdır.

$\mathcal{S}_2$ nin karşılığında " 2^n " in bulunmamasının gerekli ve yeterli şartı, $\mathcal{S}_3$ te ' $p_1 \vee \dots \vee p_n$ ' çarpanının bulunmamasıdır.

Şu halde, $\mathcal{S}_1$ şemasında ' $p_1 \dots p_n$ ' çarpanının bulunmasının gerekli ve yeterli şartı, $\mathcal{S}_3$ şemasında ' $\sim p_1 \vee \dots \vee \sim p_n$ ' çarpanının bulunmamasıdır.

Oysa, (24 a) gereği, $\mathcal{S}$ şemasının ' $\sim$ ' siz olmasının gerekli ve yeterli şartı, $\mathcal{S}_1$ şemasına ' $p_1 \dots p_n$ ' in bulunmasıdır. Şu halde, $\mathcal{S}$ nin ' $\sim$ ' siz olmasının gerekli ve yeterli şartı, $\mathcal{S}_3$ te ' $\sim p_1 \vee \dots \vee \sim p_n$ ' in bulunmamasıdır. (İ.K.)

c) $\mathcal{S}$ şeması, ' $\sim$ ' siz kurulabilen herhangi bir n-li şema, $\mathcal{S}_1$ de $\mathcal{S}$ 'nin ayrıksal n-li tam normal-şeması olsun. ((24 a) gereği) $\mathcal{S}_1$ şemasında ' $p_1 \dots p_n$ ' çarpanı bulunur. O zaman $\sim \mathcal{S}_1$ 'de ' $p_1 \dots p_n$ ' çarpanı geçmez. Dolayısıyla $\sim \mathcal{S}$ şeması ((24 a) gereği) ' $\sim$ ' siz kurulamıyan bir şemadır. Oysa, $\mathcal{S}$ şeması $\sim \mathcal{S}$ şemasının hayırlanmasıyla eşdeğerdir. Şu halde, ' $\sim$ ' siz kurulabilen her hangi bir şemanın, ' $\sim$ ' siz kurulamıyan bir şemanın hayırlanmasıyla eşdeğer olduğu görülür.

Öte yandan, $\mathcal{S}$ şeması ' $\sim$ ' siz kurulamıyan her hangi bir n-li şema, $\mathcal{S}_1$ de $\mathcal{S}$ nin ayrıksal tam normal-şeması olsun. $\mathcal{S}_1$ şemasında ' $p_1 \dots p_n$ ' çarpanı geçmez. Dolayısıyla $\sim \mathcal{S}_1$ şemasında ' $p_1 \dots p_n$ ' çarpanı geçer. Şu halde, $\sim \mathcal{S}$ şema-

sı ' $\sim$ ' siz kurulabilen bir şemadır. O halde, ' $\sim$ ' siz kurulamıyan her hangi bir şema, ' $\sim$ ' siz kurulabilen bir şemanın hayırılanmasıyla eşdeğerdir. (İ.K.)

d) $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_k$ ($k = 2^{(2^n)}$) ' $\sim$ ', ' $\cdot$ ', ' $\vee$ ', ' $\supset$ ' ve ' $\equiv$ ' eklemleri yardımıyla ' p_1 ', ' $\dots$ ', ' p_n ' gibi n tane temsilci-harften kurulu $2^{(2^n)}$ tane birbirinden bağımsız şema olsun. Bu şemaları ' $\sim$ ' siz kurulabilen şemaların K_1 kümesiyle, ' $\sim$ ' siz kurulamıyan şemaların K_2 kümesine tüketici bir şekilde ayırabiliriz. (24 c) gereği, K_1 ile K_2 kümeleri arasında "bire-bir" bir tekabül vardır. Yani, K_1 in her üyesine karşılık K_2 nin bir üyesi, K_2 nin her üyesine karşılık ta K_1 in bir üyesi belirlenmiştir. Nitekim, K_1 in üyesi olan her hangi bir şemaya karşılık, bu şemanın hayırılanmasıyla eşdeğer olan K_2 ye ait bir şema vardır. K_2 nin üyesi olan her şemaya karşılık ta, bu şemanın hayırılanmasıyla eşdeğer olan K_1 e ait bir şema vardır. Dolayısıyla, K_1 ile K_2 nin üyelerinin sayısı eşittir. Oysa her iki kümenin üye sayısının toplamı $2^{(2^{2^n})}$ dir. Şu halde, K_1 ile K_2 kümelerinin her birinin üye sayısı $2^{(2^n)}$ dir. (İ.K.)

(24 d) yi şu şekilde de kanıtlıyabiliriz: ' $\sim$ ' siz kurulabilen n -li şemaların ayrışsal n -li tam normal-şemaları, ' $p_1 \dots p_n$ ' çarpanını içine almayan ayrışsal n -li tam normal-şemalardan ibarettir. Bunlar da $2^n - 1$ tane çarpanın tümünden veya bazılarından kurulabilen ayrışsal n -li tam normal-şemalardan başka bir şey değildir. Oysa, bu türlü şemaların sayısı $2^{(2^n-1)} = 2^{(2^n)} \cdot 2^{-1} = 1/2 \cdot 2^{(2^n)}$ dir. (İ.K.)

Örneğin: 1-li şemalar arasında *totaliji* ve *evetleme* ' $\sim$ ' siz kurulabilen şemalar, *çelişme* ve *hayırlama* ' $\sim$ ' siz kurulamıyan şemalardır. 16 tane birbirinden bağımsız 2-li eklemlere gelince; bunların (§ 9 daki (5) çizelgesine göre) ilk sekizi ' $\sim$ ' siz kurulabilir, son sekizi de ' $\sim$ ' siz kurulamaz.

§ 16. M a n t ı k s a l İ l e t m e - A ğ l a r ı

Önermeler-mantığının (özellikle "normal-şemalar teorisi"nin) "*çevirgeçlik elektrik devreleri*" (switching circuits) ve genel olarak her türlü "*iletme ağları*" (communication networks) ile çok yakın bir ilgisi vardır.¹ Bu bakımdan, günümüzde çevirgeçli devrelere "*mantıksal devreler*" (logic circuits), iletme-ağlarına da "*mantıksal ağlar*" (logic networks) da denilmektedir.

Bir *iletme-ağı*, bir "kaynak"tan çıkan belli bir "madde"yi bir yerden başka bir yere kadar *iletmeğe* yarayan bir düzendir. İletilen maddenin giriş ve çıkış yerlerine, ağın "*kutuplar*"ı denir. Kutuplar birbirine bir takım "*iletkenler*" (yani kaynaktan çıkan maddeyi serbestçe ileten yollar) aracıyla bağlıdır. İletkenlerin ek yerlerinde —biri "*çevirgeç*" (switch, Schalter, commutateur) ile *açılıp kapatılabilen* — (oynar) "*köprüler*" (Schaltstrecken²) bulunur. İletilen madde kapalı köprülerden geçer, açık köprülerden ise geçemez.

İletilen “madde” *elektrik akımı* olduğu gibi, herhangi bir *gaz, sıvı* veya *katı madde* olabilir. “İletkenler” —iletilen maddenin türüne göre— teller, borular, otomobil yolları, demiryolları, v.ö.; “çevirgeçler” de elektrik anahtarları veya çevirgeçleri, musluklar, yol sinyalleri, demiryolu makasları, v.ö.’den ibarettir.

Önemeler mantığı ile iletme-ağları arasındaki bağlantıları şöyle aydınlatabiliriz:

(1) *Seri-bağlama.*



şek - 1

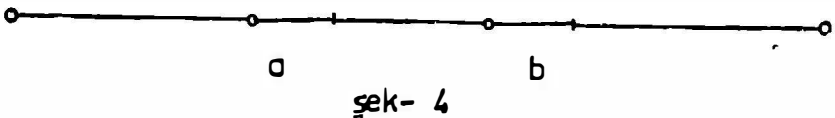
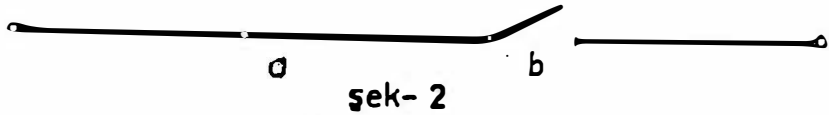
Şek. 1’de birbiriyle *seri* olarak bağlanmış iki “köprü”sü olan iki-kutuplu bir iletme-ağını gösteriyoruz. Bu iki köprünün *bağımsız* olduğunu kabul ediyoruz. Yani köprülerden birinin açık veya kapalı olması, öbürünün açık veya kapalı olmasına bağlı değildir. Bu özelliği köprüleri ‘a’ ve ‘b’ gibi ayrı harflerle göstermek suretiyle belirtiyoruz. Köprülerin birbirinden *bağımsız* olduğunu, her birinin *ayrı bir çevirgeçin yönetimi* altında bulunması şeklinde yorumlayacağız.

Her çevirgecin bir veya birden çok sayıda köprüyü yönetebildiğini kabul ediyoruz. Herhangi bir çevirgeç (belli bir anda) ya “*durma*” halindedir, ya da “*işletilmiş*” halde. Bir çevirgeç “*durma*” halinde olduğu zaman, yönetimi altında olan bütün köprüler *açık* olur; çevirgeç “*işletilmiş*” hale geçtiği zaman da bu köprülerin tümü *kapalı* duruma geçer. Şu halde, *ayrı bir çevirgecin yönetimi* altında bulunan köprülerin tümü (belli bir anda) ya açıktır ya da kapalı. Dolayısıyla bu türlü köprülerin birbirinden *bağımsız olmadığını* görüyoruz. (Köprülerden biri açık ise, öbürleri de açıktır; köprülerden biri kapalı ise, öbürleri de kapalıdır.)

Aynı bir çevirgeç tarafından yönetilen bütün köprüleri *aynı* harfle gösteriyoruz. Genel olarak, çevirgeçleri ‘(a)’, ‘(b)’, ‘(c)’,..., ‘(a₁)’, ‘(b₁)’, ‘(c₁)’,... gibi parentezler içine alınmış (indissiz veya indisli küçük harflerle göstereceğiz. Aynı küçük harfleri parantezsiz olmak şartıyla köprüler için de kullanıyoruz: (a) çevirgecinin yönettiği her köprüyü ‘a’ ile, (b) çevirgecinin yönettiği her köprüyü ‘b’ ile,... gösteriyoruz.

Şimdi şek. 1’deki iletme-ağına dönelim. Bu ağda a ve b gibi (bağımsız) iki köprü olduğundan, bu köprülerin açık veya kapalı olması bakımından dört ve

yalnız dört şık mümkündür: Ya a açık ve b açıktır, ya a kapalı ve b açıktır; ya a açık ve b kapalıdır; ya da a kapalı ve b kapalıdır. Şek. 1 1.ci şıkkı gösteriyor (her iki köprü açıktır). Geriye kalan üç şıkkı da aşağıda gösteriyoruz:



Herhangi bir iletme-ağına uygun bir kaynak bağlandıkta, kaynaktan çıkan madde bir kutuptan öbür kutba kadar iletilirse, ağın "iletici durumda" veya kısaca "*iletici*" olduğunu söyleriz.

İmdi, ağıma uygun bir kaynağın bağlandığını düşünelim. O zaman, kaynaktan çıkan madde ancak 4.cü şıkta (yani her iki köprünün kapalı olması halinde) bir kutuptan öbür kutba kadar iletilir; 1.ci, 2.ci ve 3.cü şıklarda iletilmez. Başka bir deyimle: seri-bağlama halinde, her iki köprü açık ise, ağ iletici değildir; köprülerden biri açık öbürü kapalı ise ağ gene iletici değildir; her iki köprü kapalı ise, ağ ileticidir. Bu şıklar tüketici olduğundan, *seri-bağlama halinde, ağın iletici olmasının gerekli ve yeterli şartının, her iki köprünün kapalı olmasından* ibaret olduğu görülür.

Öte yandan, herhangi bir köprünün kapalı olmasının gerekli ve yeterli şartının bu köprüyü yöneten çevirgecin işletilmiş durumda bulunmasından ibaret olduğunu gördük. (x) herhangi bir çevirgeç oldukta, '(x) işletilmiştir' önermesini 'X' ile (yani çevirgeci göstermek için kullanılan küçük harfin karşılığı olan büyük harfle) kısaltalım. Yani:

(1) $X = \text{ }_{\text{nk}}$ (x) çevirgeci işletilmiş durumdadır.

O zaman:

(2) x köprüsü (veya köprüleri) kapalıdır, ancak ve ancak X ise.

(1) ve (2) ye dayanarak şu sonuca varıyoruz: *Seri-bağlama halinde, ağın iletici olmasının gerekli ve yeterli şartı, ağın köprülerini yöneten her iki çevirgecin de işletilmiş durumunda olmasından ibarettir.*

'Ağ ileticidir' önermesini ' $\dot{I}$ ' ile kısaltalım. Yani:

(3) $\dot{I} =_{Dk}$ ağ ileticidir.

O zaman, 'A' '(a) çevirgeci işletilmiştir', 'B' de '(b) çevirgeci işletilmiştir' anlamına geldikte,

(4) ' $\dot{I}$ ' $\leftrightarrow$ 'AB'

olduğu sonucu çıkar. (' $\dot{I}$ ' doğru ise, hem 'A' hem 'B' doğrudur; hem 'A' hem 'B' doğru ise, ' $\dot{I}$ ' doğrudur.)

İmdi, mümkün dört durumu şek. 1 - 4 ile gösterilen ağ



şek- 5



şek- 6

ile gösterilen iki "bileşen-ağ"dan kurulu "bileşik" bir ağ şeklinde yorumlayabiliriz. Şek. 5 ile gösterilen birinci bileşenin iletici olduğunu ' $\dot{I}_1$ ' ile, şek. 6 ile gösterilen ikinci bileşenin iletici olduğunu ' $\dot{I}_2$ ' ile dile getirelim. O zaman

(5) ' $\dot{I}_1$ ' $\leftrightarrow$ 'A'

(6) ' $\dot{I}_2$ ' $\leftrightarrow$ 'B'

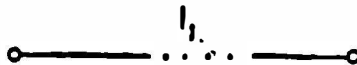
olduğu görülür.

Bu iki bileşen-ağın seri-bağlanmasıyla meydana gelen ağın (şek. 1-4) iletici olduğunu burada ' $\dot{I}_s$ ' ile dile getirelim. O zaman (4) gereği:

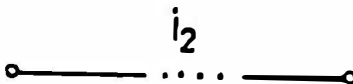
(7) ' $\dot{I}_s$ ' $\leftrightarrow$ ' $\dot{I}_1 \cdot \dot{I}_2$ '

sonucu çıkar.

Şimdi herhangi iki ağ göz önüne alalım. Birinin iletici olduğunu ' $\dot{I}_1$ ' ile, öbürünün iletici olduğunu da ' $\dot{I}_2$ ' ile dile getirelim. O zaman bu iki ağ (sembolik olarak) sırasıyla

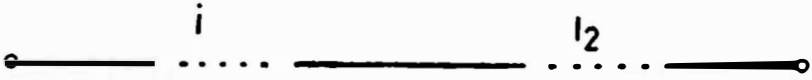


ve



ile göstereceğiz. Birincisine ' $\dot{I}_1$ -ağı', ikincisine de ' $\dot{I}_2$ -ağı' diyeceğiz. (Genel olarak belli bir ağın iletici olduğunu ' $\dot{I}$ ' gibi bir sembolle dile getirirsek, bu ağ ' $\dot{I}$ -ağı' deyimiyle adlandıracağız.)

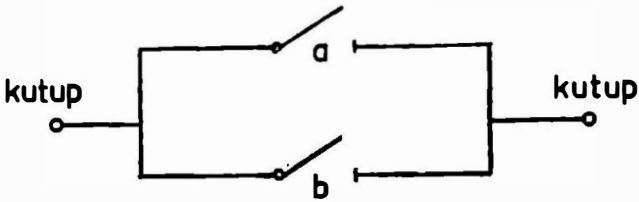
$\dot{I}_1$ -ağı ile $\dot{I}_2$ -ağını *seri* olarak bağlamak suretiyle



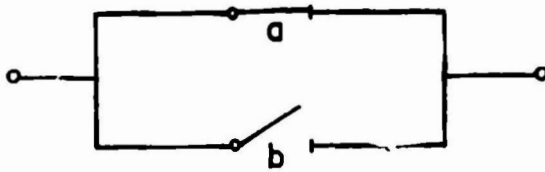
şek - 7

biçiminde bileşik bir ağ elde ederiz. Bu ağa da ' $\dot{I}_1 \cdot \dot{I}_2$ ağı' diyebiliriz.

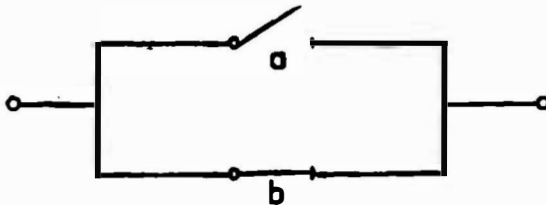
(11) *Paralel-bağlama.*



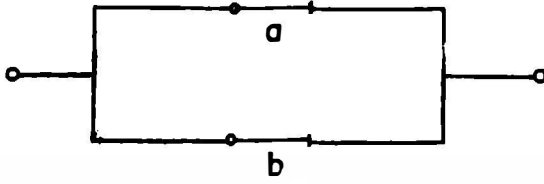
şek - 8



şek - 9



şek - 10



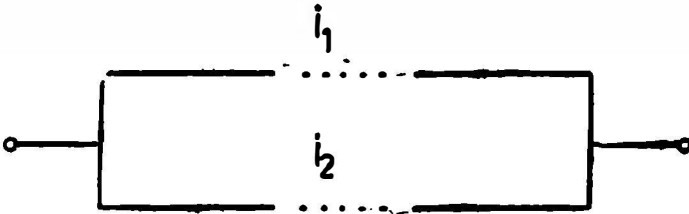
şek- 11

Paralel-bağlama halinde de a ve b gibi birbirinden bağımsız iki köprüyü göz önüne alıyoruz. a köprüsü (a) çevirgecinin, b köprüsü de (b) çevirgecinin yönetimi altındadır. Yukarıdaki şekiller (Şek. 8-11) mümkün olan dört şıkta göstermektedir. Kolayca görüldüğü gibi, ağ yalnız 1.ci şıkta (yani hem a hem b nin açık olması halinde) iletici değildir. 2.ci, 3.cü ve 4.cü şıklarda ağ hep ileticidir. Şu halde, *paralel-bağlama halinde, ağın iletici olmasının gerekli ve yeterli şartı, iki köprüden hiç olmazsa birinin kapalı olması, dolayısıyla de iki çevirgecin hiç olmazsa birinin işletilmiş olmasından ibarettir. Dolayısıyla*

$$(8) \quad 'I' \leftrightarrow 'A \vee B'$$

olduğunu görüyoruz.

Genel olarak I_1 -ağı ile I_2 -ağı gibi herhangi iki ağı *paralel* olarak bağlamak suretiyle



şek-12

biçiminde bir bileşik-ağ elde ederiz. Bu bileşik ağın iletici olmasının gerekli ve yeterli şartı, her iki bileşenin yani gerek I_1 -ağının gerek I_2 -ağının iletici olmasından ibarettir. Bileşik ağın iletici olduğunu ' I_p ' ile dile getirelim. O zaman

$$(9) \quad 'I_p' \leftrightarrow 'I_1 \vee I_2'$$

olur. Dolayısıyla şek. 12'deki ağa ' $I_1 \vee I_2$ ağı' diyebiliriz.

(III) Evrik-ağ

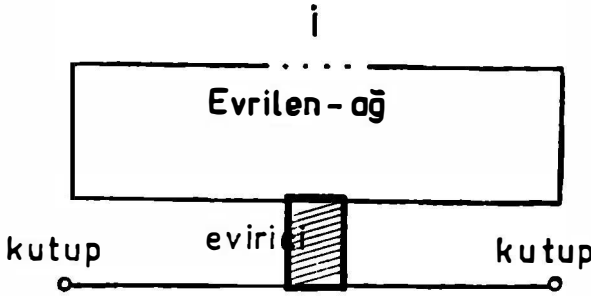
İ-ağı gibi herhangi belli bir ağ göz önüne alalım. İ-ağının *evrik*'ini aşağıdaki özellikleri taşıyan J-ağı diye tanımlıyoruz:

- (i) İ-ağı J-ağının (yani evrik-ağın) bir bileşenidir. İ-ağına "*evrilen-ağ*" da diyoruz.
- (ii) Evrilen-ağ evrik-ağın kutuplarına "*evirici*" dediğimiz bir düzenle bağlıdır.
- (iii) Evrik-ağın iki kutbu arasında yer alan "*evirici*", bu kutuplar arasındaki madde akımını ancak evrilmiş-ağın iletici olması halinde geçirerek, iletici olmaması halinde geçirmez. Bu özelliği

(10) 'J' $\leftrightarrow$ '~İ'

eşdeğerliğiyle de dile getirebiliriz.

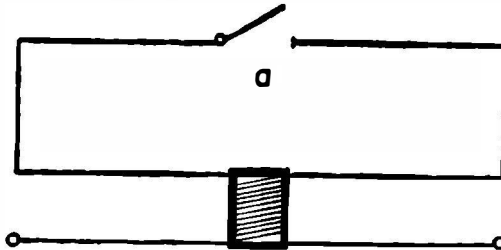
J-ağını, yani evrik-ağı şöyle gösterebiliriz:



şek - 13

Evirici, evrik-ağın yönetimi altında olup evrik-ağın kutupları arasında bulunan bir köprü sayılabilir. Bu köprü evrilen-ağın iletici olması halinde açık, evrilen-ağın iletici olmaması halinde ise kapalıdır. (Başka bir deyimle, evrilmiş-ağ "*evirici-köprü*"'yü yöneten bir çevirgeç durumundadır.³⁾

Özel hal olarak şek. 5'teki tek köprülü ağı ele alalım. Bu ağ (5) gereği 'A-ağı' deyiimiyle adlandırabiliriz. A-ağının evriği



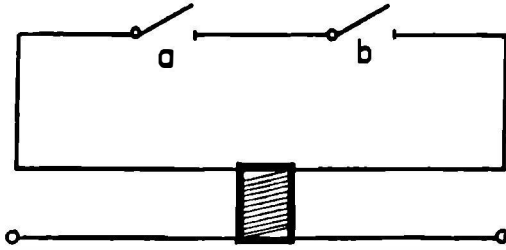
şek-14

biçimindedir. Bu ağın iletici olduğunu ' I_c ' ile dile getirelim. O zaman (10) eş-değerliği uyarınca:

$$(11) \quad 'I_c' \leftrightarrow '\sim A'$$

olduğu görülür.

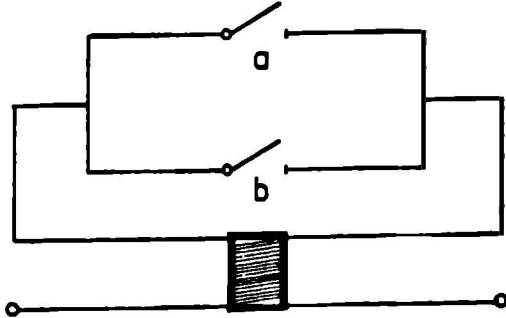
Şek. 8'deki AB-ağının evriği olan $\sim(AB)$ ağı



şek- 15

biçimindedir. (Bu ağ için ' $I' \leftrightarrow '\sim(AB)'$ ' dir.)

Şek. 9'daki A ve B ağının evriği olan $\sim(A \vee B)$ ağı da



şek-16

biçimindedir. (Bu ağ için ' $I' \leftrightarrow '\sim(A \vee B)'$ ' dir.)

İmdi herhangi bir mantıksal ileme-ağını, tek-köprülü ağlardan *seri-bağlama*, *paralel-bağlama* ve *evirme* işlemleri yardımıyla kurmak mümkündür. Nitekim, "*mantıksal iletme-ağları*"nı şöyle tanımlıyabiliriz:

(i)



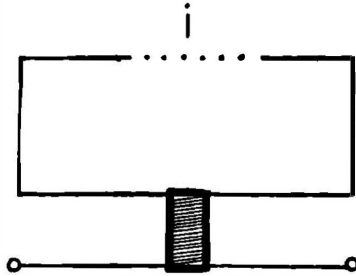
veya '*X-ağı*' şeklinde gösterilen her ağ bir "*mantıksal iletme-ağı*"dır. x köprüsü (x) gibi belli bir çevirgecin yönetimi ağındadır. (x) çevirgeci ya dur-

ma halindedir, ya da işletilmiş halde. x köprüsü de ya açıktır, ya kapalı, (x) durma halinde ise, x açıktır; (x) işletilmiş halde ise, x kapalıdır. X -ağı tüm olarak ya ileticidir, ya değil. x kapalı ise, ağ ileticidir; x açık ise, ağ iletici değildir.

(ii)

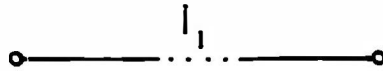


herhangi bir “mantıksal iletme-ağı” ise, bu ağın *evriği* denilen

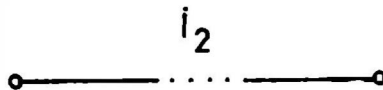


ağı da bir “mantıksal iletme-ağıdır. I -ağı iletici ise, evrik-ağ iletici değildir; I -ağı iletici değilse, evrik-ağ ileticidir. Dolayısıyla evrik-ağ *‘ $\sim I$ ağı’* deyimiyle gösteriyoruz.

(iii)



ve



herhangi iki “mantıksal iletme-ağı” ise; bu ağların *seri bağlanmasıyla* elde edilen

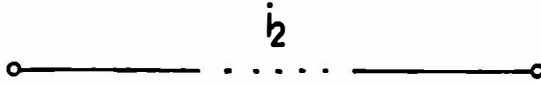


ağı bir “mantıksal iletme-ağı”dır. Bu ağın iletici olmasının gerekli ve yeterli şartı hem I_1 -ağının hem de I_2 -ağının iletici olmasından ibarettir. Dolayısıyla bu ağ *‘ $I_1 \cdot I_2$ ağı’* deyimiyle gösteriyoruz.

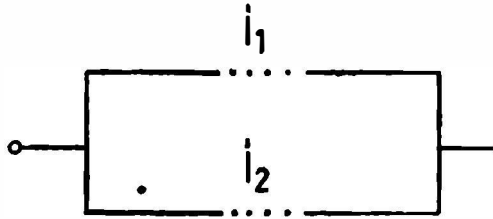
(iv)



ve



herhangi iki “mantıksal iletme-ağı” ise, bu ağların *paralel-bağlanma*stıyle elde edilen



ağı da bir “mantıksal iletme-ağı”dır. Bu ağın iletici olmasının gerekli ve yeterli şartı, I_1 -ağının veya I_2 -ağının iletici olmasıdır. Dolayısıyla bu ağ $I_1 \vee I_2$ ağı’ deyişiiyle gösterebiliriz.

(v) . Her “mantıksal iletme ağı” (i) — (iv) gereği kuruludur.

İmdi, (i) — (v) kuralları mantıksal iletme-ağlarını —kısaca “*ağlar*”—tüketici bir şekilde tanımladığı gibi bir de verilen her ağa karşılık belli bir “önerme”yi belirlemektedir. Her “*tek-köprülÜ eviricisiz ağ*”ın belirleyici-önermesi *atomsal* olup ‘X’ biçimindedir. Örneğin şek. 5’teki ağın belirleyici-önermesi ‘A’, şek. 6’daki ağın belirleyici-önermesi de ‘B’ dir. Bunların dışında kalan bütün ağların belirleyici-önermeleri “*molekÜlssel*”dir. Özellikle “*tek-köprülÜ evrik-ağlar*”ın belirleyici-önermesi ‘ $\sim X$ ’ biçimindedir. Örneğin şek. 14’teki ağın belirleyici-önermesi ‘ $\sim A$ ’ dir.

Buna göre, tek-köprülÜ eviricisiz ağlara “*atomsal-ağlar*”, her türlü (eviricisiz veya eviricili) tek-köprülÜ ağlara da “*yalın-ağlar*” diyebiliriz. Yalın-olmayan ağlara gelince, bunların belirleyici-önermeleri ‘ $\sim$ ’ ‘ $\cdot$ ’ ve ‘ $\vee$ ’ eklemleri yardımıyla ‘A’, ‘B’,... gibi atomsal-bileşenlerden kurulu molekÜlssel-önermelerdir. Örneğin şek. 1’deki ağın belirleyici-önermesi ‘AB’, şek. 8’deki ağın belirleyici-önermesi ‘A $\vee$ B’, şek. 15’deki ağın belirleyici-önermesi ‘ $\sim (AB)$ ’, şek. 16’daki ağın belirleyici-önermesi de ‘ $\sim (A \vee B)$ ’ dir.

Genel olarak, $(a_1), (a_2), \dots, (a_n)$ gibi n tane farklı çevirgeci olan herhangi bir ağ göz önüne alalım. Bu ağın belirleyici-önermesi

$$f(A_1, \dots, A_n)$$

biçiminde olan bir önermedir. O zaman da, söz konusu ağ

$$f(A_1, \dots, A_n)\text{-ağı}$$

deyimiyle gösterebiliriz. Bu ağın iletici olduğunu 'İ' ile gösterelim. Yani:

$$(12) \quad \text{İ} =_{\text{Dk}} f(A_1, \dots, A_n)\text{-ağı ileticidir}$$

O zaman:

$$(13) \quad \text{'İ'} \leftrightarrow \text{'f(A}_1, \dots, \text{A}_n\text{'}$$

olur. Başka bir deyimle, belli *bir ağın iletici olduğunu dile getiren önerme, bu ağın belirleyici-önermesiyle eşdeğerdir.*

İmdi, 'f(A₁, ..., A_n)' gibi bir belirleyici-önermede, 'A₁', ..., 'A_n' atomsal-bileşenlerinin yerine 'p₁', ..., 'p_n' gibi n tane ayrı temsilci-harf koymak suretiyle

$$f(p_1, \dots, p_n)$$

gibi bir n-li önerme-şeması elde edilir. ('f(p₁, ..., p_n)' şeması 'f(A₁, ..., A_n)' önermesinin "temsilci-şema"sıdır.)

'f(p₁, ..., p_n)' şemasına f(A₁, ..., A_n)-ağının "iletme-şeması" diyeceğiz. Yapısı aynı olan iki ağın —birinin çevirgeçleri öbürününkinden farklı olması halinde— belirleyici-önermeleri özdeş değildir. Ama yapısı aynı olan bütün ağların iletme-şeması (hep aynı temsilci-harfleri kullanmak şartıyla) aynıdır. Yapısı farklı olan ağların temsilci-şemaları da farklı olur. Dolayısıyla, verilen herhangi bir ağın "*yapı*" sınıfının bu ağın "iletme-şeması" tarafından belirlendiğini söyleyebiliriz.

Bütün "*tek-köprülü çeviricisiz ağlar*"ın iletme-şeması 'p' biçimindedir. Bütün "*tek-köprülü evrik ağlar*"ın iletme-şeması '~p' biçimindedir. Bütün "*seri-bağlamalı eviricisiz iki-köprülü ağlar*"ın iletme-şeması 'pq' biçimindedir. Bütün "*paralel-bağlamalı eviricisiz iki-köprülü ağlar*"ın iletme-şeması 'p v q' biçimindedir...

Öte yandan, her mantıksal iletme-ağı türüne (yani aynı yapıda olan ağların kümesine) karşılık bir ve yalnız bir tek (doğruluk-fonksiyonu biçiminde olan) bir önerme-şeması olduğu gibi, sadece '~', '.' ve 'v' eklemlerinden kurulu her önerme-şemasına karşılık ta (bu önerme-şemasını iletme-şeması olarak kabul eden) belli bir mantıksal iletme-ağı kümesi vardır. Nitekim '~', '.' ve 'v' eklemleri yardımıyla meydana getirilen önerme-şemalarının kuruluşu, ağların (i) — (v) kuralları gereği kuruluşuyla el ele gider. Böylece aşağıdaki sonuca varıyoruz:

(14) Mantıksal iletme-ağı türleriyle sadece ‘~’, ‘. ’ ve ‘v’ eklemleriyle kurulu önerme-şemaları arasında bir “bire-bir tekabül” vardır.

İşte, mantıksal iletme-ağlarına “mantıksal” denilmesinin asıl gerekçesi bu özelliğinden ibarettir.

İmdi, her önerme-şemasına karşılık (14) uyarınca (en az) bir iletme-ağı olduğuna göre, o-lı önerme-şemaları saydığımız *doğru* önerme ile (‘D’) *yanlış* önermenin (‘Y’) de karşılığı olan birer iletme-ağının olup olmadığını sorabiliriz. İşte ‘D’ önermesinin karşılığı olarak hiç bir köprüsü olmıyan, dolayısıyla de hep iletici olan



(Şek. 17)

gibi bir ağı; ‘Y’ önermesinin karşılığı olarak ta, hep açık olan “değişmez” bir kapısı olan (dolayısıyla de hiç bir zaman iletici olmıyan)



(Şek. 18)

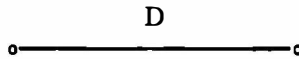
gibi bir ağı gösterebiliriz.

Şek. 17’deki ağın belirleyici-önermesi ‘D’ olduğundan bu ağa ‘D-ağı’; **şek. 18’deki ağın belirleyici-önermesi de ‘Y’ olduğundan bu son ağa da ‘Y-ağı’** diyeceğiz. D-ağının iletici olduğunu ‘İ_D’ ile, Y-ağının iletici olduğunu ‘İ_Y’ ile dile getirelim. O zaman:

$$(15) \quad 'İ_Y' \leftrightarrow 'D'$$

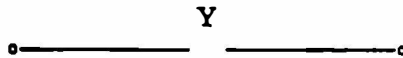
$$(16) \quad 'İ_D' \leftrightarrow 'Y'$$

Bundan böyle D-ağını



(Şek. 19)

biçiminde, Y-ağını da



(Şek. 20)

biçiminde göstereceğiz.

'D' önermesi D-ağının belirleyici-önermesi olduğu gibi, aynı zamanda da "iletme-şeması" (o-lı şema) dır. Aynı şekilde, 'Y' önermesi Y-ağının hem belirleyici-önermesi hem de iletme-şeması durumundadır.

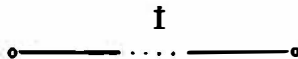
İletme-şemaları eşdeğer olan ağlara "*eşdeğer ağlar*" diyeceğiz. Eşdeğer ağların her zaman yapıları aynı olan ağlar olmadığını belirtmek gerek. Nitekim, köprü ve/veya evirici sayısı farklı olan ağlar hiç bir zaman aynı yapıda sayılmadığı halde, eşdeğer iki ağın köprü ve/veya evirici sayısı farklı olabilir.

Öte yandan, söz konusu ağları kullanmaktaki amacın, belli bir maddeyi bir yerden başka bir yere iletme olduğunu hesaba katarsak, eşdeğer ağların —aynı iletme işini yaptığından— pratik bakımdan birbirinin yerini tutabileceğini kabul etmeliyiz. Ancak, ekonomi açısından, aynı işi görebilen iki düzenden, maliyeti daha az olanının seçilmesi gerekir. Dolayısıyla, eşdeğer ağlar arasında köprü ve evirici sayısı en küçük olanları kullanılmalıdır.

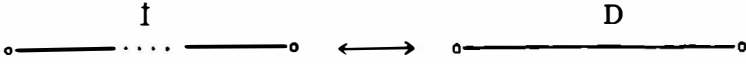
İmdi, herhangi bir ağın köprü sayısı ile evirici sayısının toplamına bu ağın "*karmaşıklık-derecesi*" diyelim. Bir ağın derecesi, bu ağın iletme-şemasında geçen temsilci- harflerin geçiş sayılarının toplamı ile aynı şemadaki hayırlama-ekleminin geçiş sayısının toplamına eşittir. Bu sayıya "şemanın karmaşıklık derecesi" de diyoruz. Nitekim ağdaki her köprüye karşılık, şemada belli bir temsilci-harfin geçişi vardır. Ağdaki her eviriciye karşılık ta, şemada hayırlama-ekleminin bir geçişi vardır. Karmaşıklık-derecesi kendi karmaşıklık-derecesinden küçük olan bir ağla eşdeğer olmıyan bir ağa "en küçük ağ" diyoruz. En-küçük ağların bulunması, iletme-ağları ekonomisinde son derece önemli bir yer tutar. Oysa, "en-küçük ağlar"ın bulunması, "*en-küçük önerme-şemaları*"nın (yani karmaşıklık-derecesi kendi karmaşıklık derecesinden küçük olan hiç bir şema ile eşdeğer olmıyan şemaların) bulunmasına geri götürülebilir. Böylece önermeler-mantığının iletme tekniğindeki büyük önemi anlaşılır.

Ağların eşdeğerliğine dayanarak, (önermeler-mantığına ait) her mantık kanununu ağlar yardımı ile yorumlamak mümkündür. Belli bir şemanın bir *totoloji* olduğunu göstermek için, iletme-şeması bu şemadan ibaret olan ağın 'D' ağı ile eşdeğer olduğu belirtilir. İki ağın eşdeğer olduğunu, bu ağların diyagramları arasında (tam-deyimlerin eşdeğerliği için kullandığımız) '↔' işareti koyarız.

Buna göre,



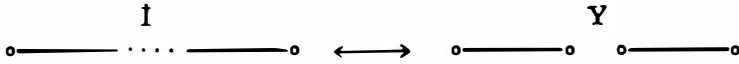
gibi bir ağın totoloji olduğunu



(Şek. 21)

biçiminde gösteririz.

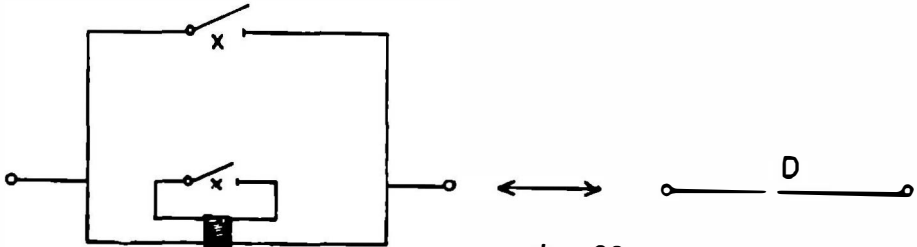
Aynı şekilde, belli bir I-ağının iletme-şemasının bir *çelişme* olduğunu



(Şek. 22)

biçiminde dile getiririz.

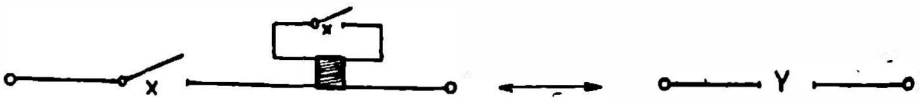
Örneğin: ' $p \vee \sim p$ ' nin bir *totoloji* olduğunu



şek - 23

biçiminde dile getiririz.

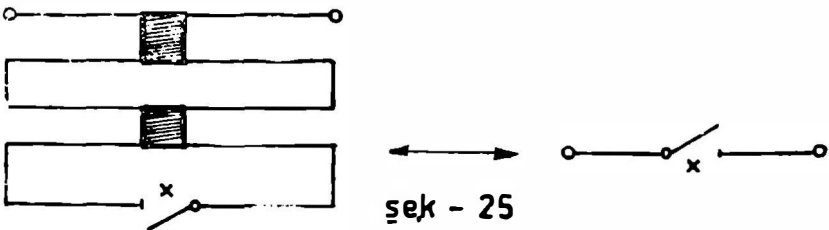
' $p \sim p$ ' şemasının bir *çelişme* olduğunu da



şek - 24

biçiminde dile getiririz.

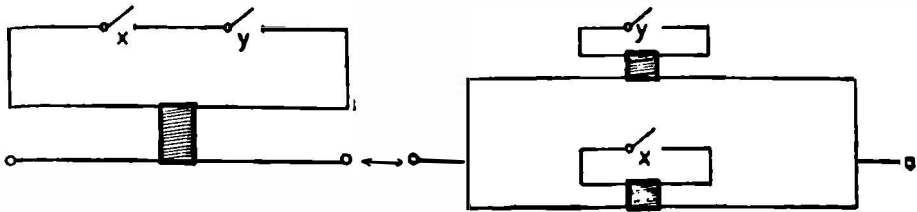
Çift-hayırlama kanununu, yani ' $\sim \sim p$ ' nin ' p ' ile *eşdeğer* olduğunu



şek - 25

biçiminde dile getiririz.

' $\sim(pq)$ ' ile ' $\sim p \vee \sim q$ ' nün eşdeğerliğini (De Morgan)



şek - 26

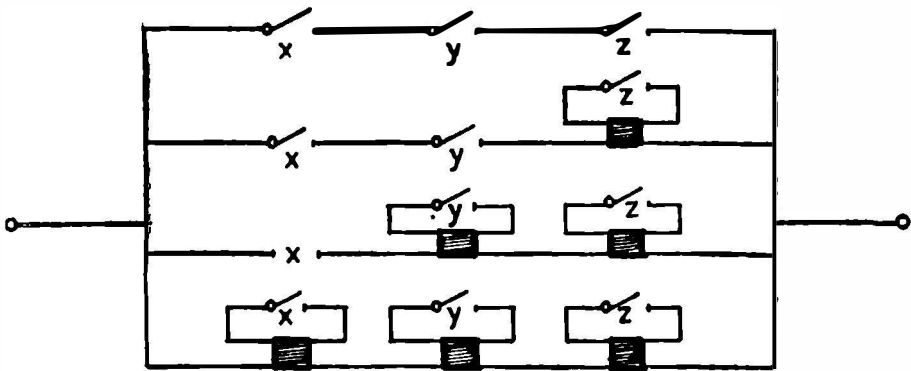
biçiminde dile getiririz.

Her önerme-şeması ayrıkسال veya birliksel tam veya tam olmıyan bir normal-şemaya dönüştürülebildiğinden, verilen her ağ karşılık bu ağ ile eşdeğer olan ve iletme-şeması böyle bir normal-şema olan ağların kurulabildiği meydandadır.

Örneğin: iletme-şeması

$$pqr \vee pq \sim r \vee p \sim q \sim r \vee \sim p \sim q \sim r$$

gibi bir 4-çarpanlı ayrıkسال 3-lü tam normal-şemadan ibaret olan ağ



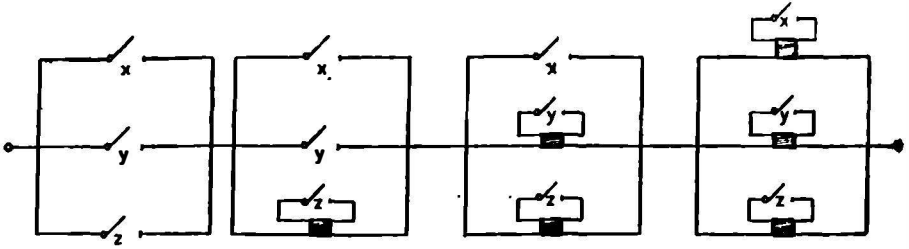
şek - 27

biçimindedir.

Yukardaki şemanın ikilisi olan 4-çarpanlı birliksel 3-lü tam normal-şemanın, yani

$$(p \vee q \vee r) \cdot (p \vee q \vee \sim r) \cdot (p \vee \sim q \vee \sim r) \cdot (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$$

şemasının karşılığı olan ağ da



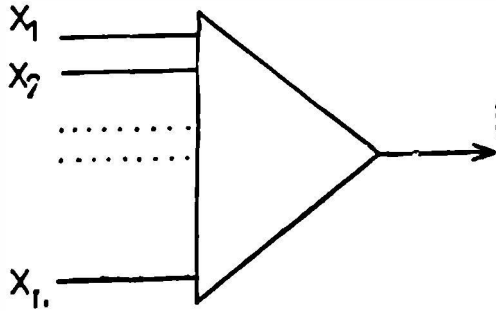
sek - 28

biçimindedir.

Herhangi bir ağı, bu ağın “*mantıksal taslak*”ı (logischer Plan) denilen standart biçimindeki bir diyagram yardımıyla belirtebiliriz. Bir ağın mantıksal taslağı aşağıdaki kurallara göre çizilir:

(i) *Seri-bağlama.*

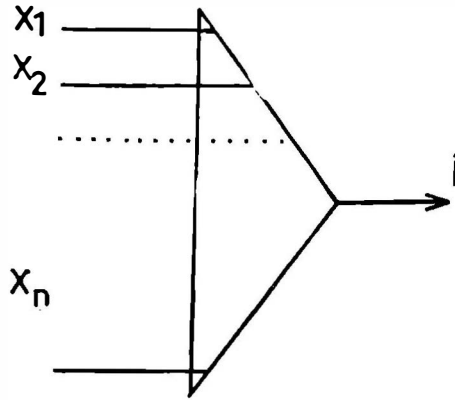
X_1 -ağı, X_2 -ağı, ..., X_n -ağı gibi herhangi n tane ağın seri-bağlanmasından elde edilen ağın mantıksal-taslağı şöyledir:



sek - 29

(ii) *Paralel-bağlama.*

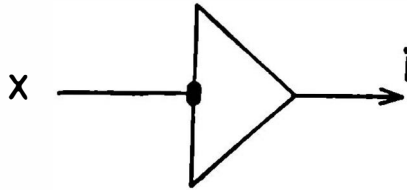
X_1 -ağı, X_2 -ağı, ..., X_n -ağı gibi herhangi n tane ağın paralel-bağlanmasından elde edilen ağın mantıksal-taslağı şöyledir:



şek - 30

(iii) *Evirme.*

X-ağı gibi herhangi bir ağın evriğinin mantıksal-taslağı şöyledir:

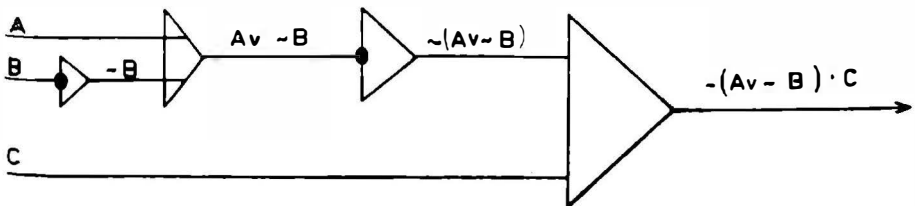


şek - 31

Örneğin: belirleyici-önermesi

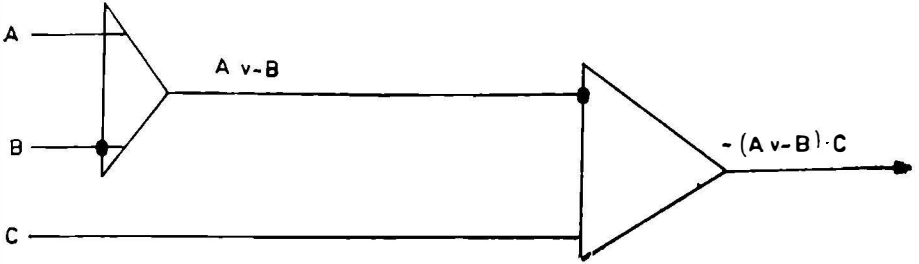
$$\sim (A \vee \sim B) \cdot C$$

biçiminde olan bir ağın mantıksal-taslağını çizelim. Bu taslak (i) — (iii) gereği



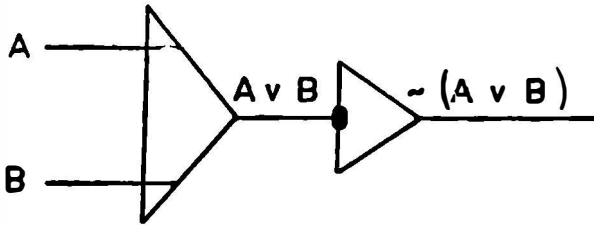
şek - 32

biçimindedir. Evirme işlemini gösteren “nokta”yı ayrı bir üçgende gösterecek yerde, önünde bulunan birden çok “giriş”li üçgende gösterilebilir. Böylece “tek-girişli üçgenler”i karmaşık taslaklardan bazı hallerde elemek mümkündür. Buna göre, Şek. 32’yi şu basit biçime dönüştürebiliriz:



şek - 33

Tek-girişli üçgenlerin her zaman elenemeyeceğini de belirtmek gerek. Örneğin, belirleyici-önermesi $\sim (A \vee B)$ olan ağın mantıksal-taslağı

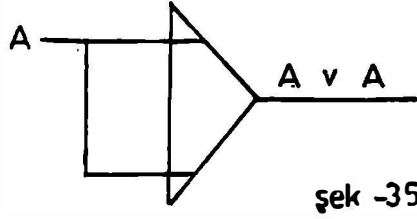


şek - 34

biçimindedir. Burdaki tek-girişli üçgenin, önünde başka bir (tek veya çok girişli) bir üçgen bulunmadığından, elenmesi imkânsızdır.

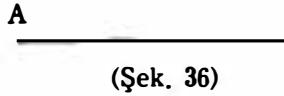
Verilen bir mantıksal-taslaktaki “*giriş-harfleri*”, yani taslağın en solunda yazılan ‘A’, ‘B’,... ‘X’, ‘Y’,... gibi harfler, taslağın ilişkin olduğu ağın çevirgeçlerini belirtir. Giriş-harflerinin sayısı çevirgeçlerin sayısına eşittir. Her giriş-harfi (belli bir mantıksal-taslakta) bir tek defa yazılır. Aynı bir çevirgecin yönetimi altındaki köprülerin sayısı birden çok ise, her ayrı köprü ilgili giriş-harfinden çıkan bir çizgi ile belirtilir.

Örneğin belirleyici-önermesi $A \vee A$ olan bir ağda ayın bir çevirgecin ((a) çevirgecinin) yönetimi altında iki ayrı köprü vardır. Böyle bir ağın mantıksal-taslağı

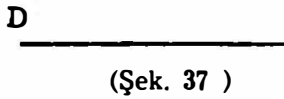


biçiminde çizilir.

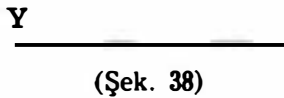
Tek-köprülü eviricisiz A-ağı gibi bir ağın mantıksal-taslağı



biçimindedir. Özellikle D-ağının mantıksal-taslağı

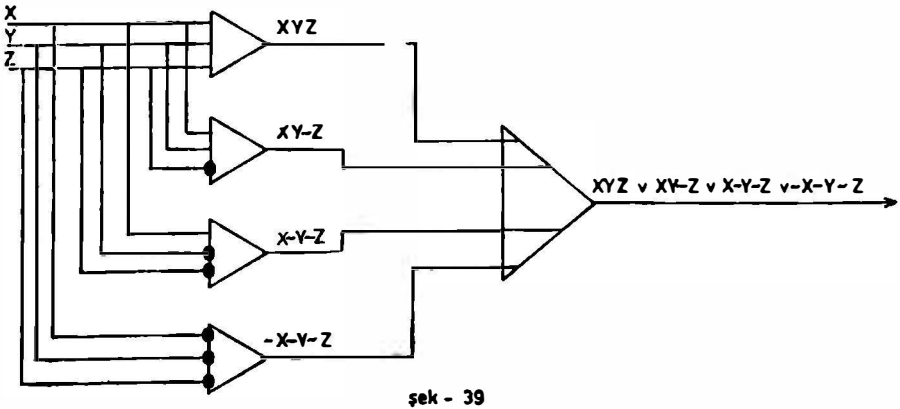


biçiminde, Y-ağının mantıksal-taslağı da

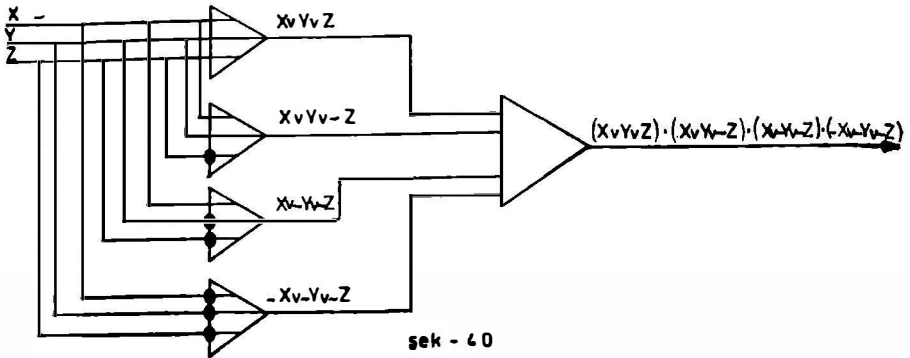


dir.

Karmaşık mantıksal-taslaklara örnek olarak Şek. 27 ve Şek. 28'deki ağların mantıksal-taslağını çizelim. Şek. 27'deki ağın mantıksal-taslağı:



biçimindedir. Şek. 28'deki ağın mantıksal-taslağı da şöyledir:



Önermeler-mantığını iletme-ağlarına uygulamakta başlıca şu iki amaç güdülür:

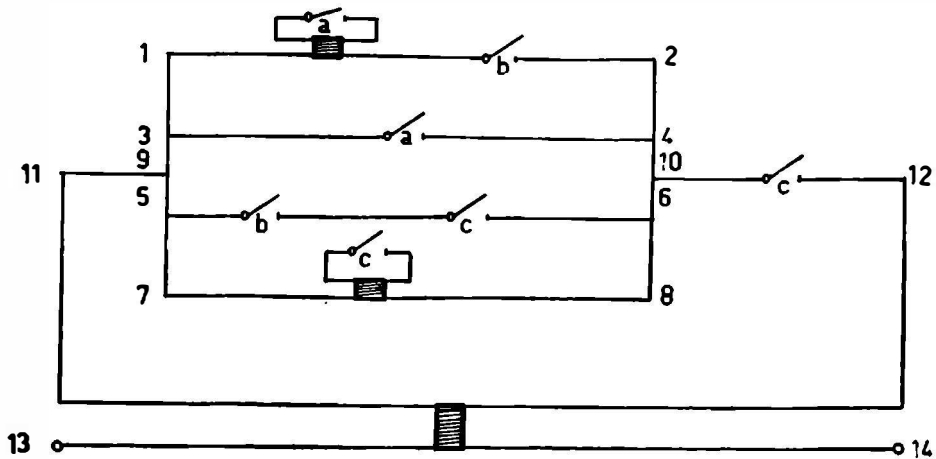
(i) Ağların analizi.

Önceden kurulmuş olan herhangi bir iletme-ağını kullanmak için, ağı işleten mühendisin bu ağın çevirgeçlerin hangi durumlarında “iletici” olduğunu, hangi durumlarda da “iletici-olmadığını” mümkün olduğu kadar basit, sistematik ve tüketici bir şekilde bilmesi gerek. Böyle bir bilgi ise ağın “*belirleyici-önermesi*” (veya aynı hesaba gelen “*mantıksal-taslak*”)ı yardımcıyla sağlanır. İşte, verilen bir iletme-ağının “*analiz*”i, bu ağın “*belirleyici-önermesi*”nin (veya “*mantıksal-taslak*”ının) elde edilmesi demektir.

(ii) Ağların sentezi.

Belli bir iletme işini sağlamak üzere yeni bir iletme-ağını kurmak isteyen mühendis, bu amaç için en elverişli olan iletme-ağının *yapısını*, dolayısıyla da, böyle bir ağın *iletme-şemasını* veya *mantıksal-taslağını* elde etmesi gerekir. Böyle bir iş için *veriler*, kurmak istenilen ağın hangi durumlarda iletici olduğu, hangi durumlarda da iletici olmadığını belirten şartlardan ibarettir. Bu şartlara dayanarak söz konusu ağın iletme-şemasının *doğruluk-çizelgesini*, veya *ayrıksal tam normal-şemasını*, ya da birliksel tam normal-şemasını bir hamlede elde edebiliriz. Başka bir deyimle, “*veriler*” bir doğruluk-çizelgesi veya bir ayrıksal ya da birliksel tam normal-şema şeklinde belirirler. Mühendisin amacı, “*verilen*” tam normal-şema ile eşdeğer olan “*en-küçük şema*”lardan birini elde etmektir. Böyle bir “*en-küçük şema*” elde edildikten sonra, bunun karşılığı olan “*mantıksal-taslak*” çizilebilir. Böylece *güdülen amaç için en elverişli olan bir iletme-ağının yapısı belirlenmiş olur*. İşte bu işleme “*sentez*” denir.

Ağların *analizine* örnek olarak, aşağıdaki diyagramla gösterilebilen bir iletme-ağını ele alalım:



şek - 41

Bu ağın analizini yapmak için, ilk önce bileşen-ağlarının kutuplarını numaralamak faydalı olur. Bu numaralama işlemi yapıldıktan sonra, her bileşen-ağın belirleyici-önermesi ayrı ayrı elde edilir. Şek. 41'deki bileşen-ağların belirleyici-önermelerini elde edilmiş sırasına göre aşağıda gösteriyoruz: (Bileşen-ağları ' $\mathbf{f}_{m-n}$ ' biçiminde gösteriyoruz.)

Bileşen-ağ.	Belirleyici-önerme
$\mathbf{f}_{1-2}$	$\sim AB$
$\mathbf{f}_{3-4}$	A
$\mathbf{f}_{5-6}$	BC
$\mathbf{f}_{7-8}$	$\sim C$
$\mathbf{f}_{9-10}$	$\sim AB \vee A \vee BC \vee \sim C$
$\mathbf{f}_{11-12}$	$(\sim AB \vee A \vee BC \vee \sim C) \cdot C$
$\mathbf{f}_{13-14}$	$\sim [(\sim AB \vee A \vee BC \vee \sim C) \cdot C]$

Böylece, Şek. 41'deki ağın "belirleyici-önerme"sinin

$$\sim [(\sim AB \vee A \vee BC \vee \sim C) \cdot C]$$

olduğu sonucuna varırız. Bu belirleyici-önermenin doğruluk-çizelgesini de bulmak suretiyle, söz konusu ağın hangi durumlarda iletici olduğunu, hangi durumlarda da iletici olmadığını tüketici bir şekilde belirtebiliriz.

Ağların *sentezine* örnek olarak ta, aşağıdaki doğruluk-çizelgesinin belirlediği şartları yerine getiren "en-küçük ağ"ın iletme-şemasını ve mantıksal-taslağını bulmağa çalışalım:

p	q	r	t
D	D	D	D
D	D	Y	D
D	Y	D	D
D	Y	Y	Y
Y	D	D	D
Y	D	Y	Y
Y	Y	D	Y
Y	Y	Y	Y

Bu doğruluk-çizelgesinin belirlediği ayrıksal tam normal-şema

$$pqr \vee pq \sim r \vee p \sim qr \vee \sim pqr$$

biçimindedir. Bu normal-şemayı sadeleştirelim:

İlk iki çarpanın ayrıklığı (yani 'pqr v pq ~ r') 'pq' ile eşdeğer olduğundan, şemamız

$$pq \vee p \sim qr \vee \sim pqr$$

biçimine dönüştürülebilir. Bu son şemayı da

$$p \cdot (q \vee \sim qr) \vee \sim pqr$$

biçimine; 'q v ~ qr' ile 'q v r' eşdeğer olduğundan da

$$p \cdot (q \vee r) \vee \sim pqr$$

biçimine dönüştürürüz. Bu ise

$$pq \vee pr \vee \sim pqr$$

ye dönüşür. Bu şema da

$$q \cdot (p \vee \sim pr) \vee pr$$

ye dönüşür. 'p v ~ pr' ile 'p v r' eşdeğer olduğundan, yukardaki şema

$$q \cdot (p \vee r) \vee pr$$

biçimine; bu da

$$(i) \quad pq \vee qr \vee pr$$

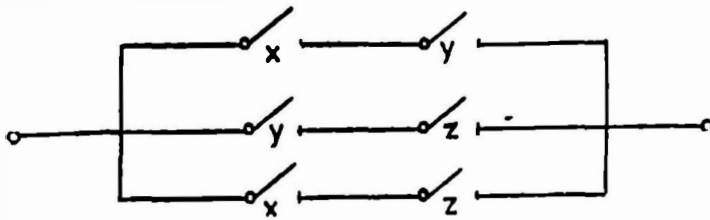
biçimine dönüştürülebilir.

İmdi, bu son şemanın karmaşıklık derecesi 6 dır. Oysa, daha önce karşılaştığımız

$$(ii) \quad q \cdot (p \vee r) \vee pr$$

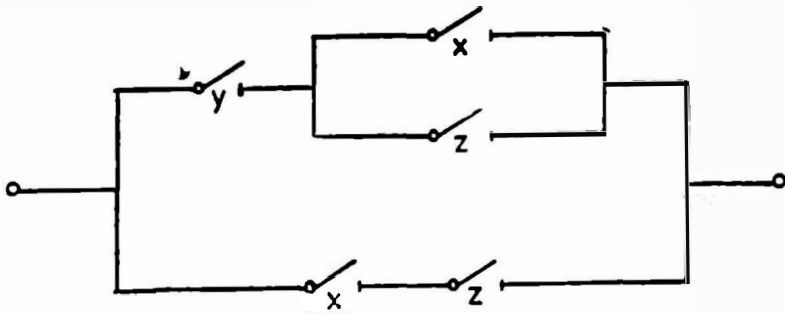
şemasının karmaşıklık derecesi 5 dir. Dolayısıyla iletme-ağını (i)'e göre değil, (ii)'ye göre kurmak daha elverişli olur.

(i)'in karşılığı olan mantıksal-taslak:



şek - 42

biçiminde; (ii)'nin karşılığı olan mantıksal-taslak ise



şek - 43

biçimindedir.

NOTLAR VE AYDINLATMALAR

§ 1

¹ Deduktif mantığın dışında ondan bağımsız olan "induktif" bir mantığın mümkün olup olmadığı bir tartışma konusudur.

² (6) gibi induktif bir çıkarımda sonucun öncüller sayesinde kazandığı olasılık-derecesinin r gibi belli bir sayı olması halinde, söz konusu induktif çıkarımı:

$$\begin{array}{c} \text{Ö}_1', \text{Ö}_2', \dots, \text{Ö}_m' \\ r \end{array} \quad | \rightarrow \quad \text{Ö}$$

³ Gerçekte hiçbir empirik varsayımın bir deneyle kesin bir şekilde yanlışlanması mümkün değildir. Nitekim Ö önermesinin herhangi bir empirik varsayımı dile getiren "tümel" bir önerme, Ö 'nün de Ö önermesinin *deduktif* dolayısıyla "zorunlu" bir sonucu olduğunu kabul edelim. Ö 'nün *bu alev şimdi yeşilleşecektir* gibi bir "empirik tekil-önerme" olması halinde, ilkece bir tek deneyle yanlışlanması mümkün olduğunu düşünebiliriz. Ancak alevin yeşilleşmediğini gözlemem olgusunun yanlışladığı *'bu alev şimdi yeşilleşecektir'* önermesi değil, asıl *'bu alevin şimdi yeşilleştiğini göreceğim'* türünden "sübjektif" bir önermedir. Bu önermeyi Ö ile gösterelim. O zaman Ö 'nün yanlışlanması Ö 'yü kesin bir şekilde yanlışlamıyacağından, Ö 'yü de yanlışlamıyacağı meydandadır.

Öte yandan, Ö 'nün kesin bir şekilde yanlışlanması bile Ö yü kesin bir şekilde yanlışlamıyabilir. Çünkü Ö doğrudan doğruya Ö nün değil, Ö ile Ö_1 gibi "başlangıç şartlarını" (initial conditions) dile getiren bir "empirik tekil-önerme"nin deduktif sonucudur, yani:

$$\text{Ö}, \text{Ö}_1 \quad | - \quad \text{Ö}'$$

oysa Ö_1 önermesinin kesin bir şekilde doğrulanması imkânsızdır. Hattâ $\text{Ö}_1'$ in sözü geçen "başlangıç şartlarını" tüketici bir şekilde dile getirmesi bile çokluk mümkün değildir. Bu şartların bazıları belirtik bir şekilde dile getirilmekle birlikte, bunlarla yetinmeyip bir de "bozucu hiçbir dış etkinin ortaya çıkmaması halinde" türünden kaypak bir şart katılıp Ö yü deneyle yanlışlanmaktan kurtarabilen açık bir kapı bırakılmaktadır. Böylece, Ö 'nün deneyle yanlışlanması halinde, Ö nün de yanlışlandığını kabul edecek yerde, beklen-

meyen (ve gözlenemiyen) “bozucu etkilerin ortaya çıktığı” öne sürülebilir.
(“*Ad hoc*” açıklama!)

§ 2

¹ Bk. Copi, “Symbolic Logic”, s. 20 v.ö.

² İlerde bu tanımın yeterli olmadığını göstereceğimizden, bu tanıma ancak geçici olarak kabul edebiliriz.

§ 3

¹ Bk. § 5.

§ 4

¹ ‘*Atomsal-önerme*’ deyimini ilerde başka bir anlamda da kullanacağız. Bu iki anlamı ‘bölünmemiş önermeler mantığının atomsal önermeleri’ ve ‘nicelleme mantığının atomsal-önermeleri’ deyimlerini kullanmak suretiyle ayırd edebiliriz.

² Bk. *Quine*, “Methods of Logic”, s. 47-8 ve “Word and Object”, s. 157-161.

³ Bk. *Mill*, “System of Logic”, Bk. I, Ch. IV, § 1 ve § 2.

§ 5

¹ ‘*I.K.*’ sembolünü (‘*İşte Kanıtladı*’ deyiminin kısaltması olarak) matematikte geçen ‘*Q.E.D.*’ (Quod Erat Demonstrandum) deyiminin karşılığı olarak herhangi bir kanıtlamanın sonunu işaret etmek için kullanıyoruz.

² (14) deyiminde geçen ‘A’, ‘B’ ve ‘C’ harflerini “önerme-temsalcileri” değil, “önerme-kısaltmaları” olarak yorumladığımızdan, bu deyim bir “önerme” saymağa hakkımız vardır. Genel olarak ‘p’, ‘q’, ‘r’, ‘s’ gibi lâtîn alfabesinin ortasındaki küçük harfleri (indisli veya indissiz) olarak “önerme-temsalcileri” olarak kullanacağız. Lâtîn alfabesinin başında gelen büyük harfleri ise (başka şekilde belirtilmediği hallerde) önerme-kısaltmaları (veya daha genel olarak “tam-deyim” kısaltmaları) olarak kullanacağız.

§ 6

“*Kip-önermeleri*”, “*dilek-şart-önermeleri*” ve “*yargısal-tavır önermeleri*” deyimlerini hangi anlamda kullandığımızı sırasıyla şu örneklerle belirtebiliriz:

- (1) Ahmet Ankara’ya gidebilir
- (2) Ahmed’in Ankara’ya gitmesi mümkündür
- (3) Ahmet Ankara’ya gitmelidir

- (4) Ahmed'in Ankara'ya gitmesi zorunludur
 (5) Ahmet Ankara'ya gitmemelidir
 (6) Ahmed'in Ankara'ya gitmesi imkânsızdır

önergelerinin her biri bir "*kip-önermesi*" (modal statement) durumundadır. (1) ile (2), (3) ile (4) ve (5) ile (6) nın aynı anlama geldiğini kabul edebiliriz. Birinciler "*imkân*" kipini, ikinciler "*zorunluluk*" kipini, üçüncüler de "*imkânsızlık*" kipini dile getirirler.

- (7) Ahmet Ankara'ya gitseydi, annesi çok sevinecekti
 önermesi bir "*dilek-şart önermesi*" (subjunctive conditional) durumundadır.

- (8) Ahmet Tegucigalpa'nın Nicaragua'da olduğunu söyledi
 (9) Ahmet Tegucigalpa'nın Nicaragua'da olduğuna inanıyor
 (10) Ahmet Tegucigalpa'nın Honduras'ın başkenti olduğunu bilmiyor

önergelerinin her biri bir "*yargısal-tavır*" (propositional attitude) önermesi durumundadır.

İmdi, '*Ahmet Ankara'ya gidecek*' önermesini 'A' ile; '*Ahmed'in annesi sevinecek*', önermesini 'B' ile; '*Tegucigalpa Nicaragua'dadır*' önermesini 'C' ile; '*Tegucigalpa Honduras'ın başkentidir*' önermesini de 'Ç' ile kısaltalım. O zaman: (1) veya (2) yi:

- (11) A mümkün;

- (3) veya (4) ü:

- (12) A zorunlu,

- (5) veya (6) yı:

- (13) A imkânsız;

- (7) yi:

- (14) A olsaydı, B olacaktı;

- (8) i:

- (15) Ahmet C olduğunu söyledi;

- (9) u:

- (16) Ahmet C olduğuna inanıyor;

- ve (10) u:

(17) Ahmet Ç olduğunu bilmiyor

biçiminde dile getirmek mümkündür.

² “Doğruluk-fonksiyonları teorisi”nin de ayrı ayrı birçok şekilleri olduğunu belirtmek gerek. Özellikle “doğru” ve “yanlış”tan başka bir doğruluk-değeri kabul etmeyen “2-değerli mantık”ın karşılığı olan “2-değerli doğruluk-fonksiyonları teorisi”nden söz edildiği gibi; “doğru” ve “yanlış”tan başka doğruluk-değerlerin de bulunduğunu (başka bir deyimle, bir önermenin ya doğru ya yanlış olması gerekmeyip “üçüncü” bir halin de olabileceğini) kabul eden “çok-değerli mantıklar”ın karşılığı olarak “3-değerli”, “4-değerli”, ... “n-değerli” doğruluk-fonksiyonları tecrileri”nin de kurulması mümkündür. Ancak biz “2-değerli mantık” çerçevesinde kalıp sadece “2-değerli doğruluk-fonksiyonları teorisi”ni göz önünde tutacağız. Dolayısıyla, ‘doğruluk-fonksiyonu’ deyimini (başka türlü belirtilmediği hallerde) yalnız “2-değerli doğruluk-fonksiyonu” anlamında kullanacağız.

³ Özellikle Quine, “ister matematiksel ister başka türden olan herhangi bir anlatımda doğruluk-fonksiyonu durumunda olmayan hiçbir önerme-eklemine lüzum olmadığına inanmak için gerekçelerin olduğunu” öne sürmüştür: (“There is reason to believe that none but truth-functional modes of statement composition are needed in any discourse, mathematical or otherwise.” Bk. Quine, “Mathematical Logic”, s. 11).

§ 7

¹ Bk. Strawson, “Introduction to Logical Theory”, s. 80-81. Strawson bu konuda ‘evlendiler ve çocukları oldu’ önermesiyle, ‘çocukları oldu ve evlendiler’ önermesi arasındaki farka işaret etmiştir. Ayrıca Bk. Quine, “Methods of Logic”, s. 42 v.ö., özellikle s. 44.

² İngilizce ‘conjunction’, Almanca ‘Konjunktion’ ve Fransızca ‘conjonction’. Aynı mânada “lojik-çarpım” (logical product) deyimini de kullanılmıştır.

Bk. Quine, “Methods of Logic”, s. 4-5.

⁴ Bk. Tarski, “Introduction to Logic”, s. 21. Ayrıca Bk. Quine, “Methods of Logic”, s. 4.

⁵ İngilizcede ‘disjunction’ veya ‘alternation’ denir. Aynı mânada ‘lojik toplam’ (logical sum) deyimini de kullanılmıştır. ‘v’ sembolü lâtince ‘vel’ sözcüğünün ilk harfi olması bakımından seçilmiştir. Nitekim lâtince ‘vel’ sözcüğü ‘veya’ anlamına gelir. ‘Ya... ya...’ anlamında ise lâtince ‘aut’ sözcüğü kullanılır.

⁶ *'Inclusive alternation'*. ('Ayrıklık' anlamında ise 'inclusive alternation' veya 'nonexclusive alternation' de kullanılmıştır).

⁷ Günlük dilde 'A veya B' biçimindeki bir önermeyi, önermenin iki bileşeninden hiç olmazsa birinin doğruluğuna inanmakla birlikte hangisinin doğru olduğunu (ya da her ikisinin mi, yoksa yalnız birinin mi doğru olduğunu) bilmediğimiz hallerde evetleriz. Başka bir deyimle, 'A' gibi bir önermenin doğru olduğuna inandığımız hallerde ('B' yanlış olduğunu bildiğimiz ya da doğru olup olmadığını bilmediğimiz bir önerme olduğunda), 'A veya B' gibi bir önermeyi hiçbir zaman öne sürmeyiz. Böyle bir halde 'A veya B' önermesini değil, daha kısa olmakla birlikte "bildirici gücü" daha yüksek olan 'A' önermesini öne süreriz. Örneğin: yarın Ankara'ya (ve yalnız Ankara'ya) gitmeğe karar verdiğim halde yarın nereye gideceğimi sonra bir kimseye açıkça *'yarın Ankara'ya gideceğim'* diyecek yerde, *'yarın Ankara'ya gideceğim veya Konya'ya gideceğim'* demem (aldığım kararı bir dereceye kadar gizlediğinden) "*yanıltıcı*" bir davranış sayılabilir. Oysa bu önerme mantık açısından "yanlış" değil, "doğru" sayılmalıdır. (Bk. Tarski, A.E., s. 22).

⁸ Bk. *Reichenbach*, "Elements of Symbolic Logic", s. 28.

§ 8

¹ Günlük dilde koşul-önergeleri yalnız 'A ise, B' (if A, then B) biçiminde değil, daha başka şekillerde de, özellikle:

(1) A, ancak B ise

(*A, only if B*) biçiminde de dile getirilmektedir. Örneğin: 'A' olarak

(2) Ahmet Ankara'ya gidecek

önermesini, 'B' olarak ta

(3) Ali Konya'ya gidecek

önermesini seçelim. O zaman:

(4) Ahmet Ankara'ya giderse, Ali Konya'ya gidecek

önermesiyle

(5) Ahmet Ankara'ya gidecek, ancak Ali Konya'ya giderse

(veya başka bir deyimle, 'Ahmet, ancak Ali'nin Konya'ya gitmesi halinde Ankara'ya gidecek') önermesi aynı anlama gelir. Nitekim, gerek (4) gerek (5), Ahmed'in Ankara'ya gitmesinin *gerekli* bir şartının Ali'nin Konya'ya gitme-

sinden ibaret olduğunu dile getirir. (Her iki önerme Ahmed'in Ankara'ya gitmesinin, Ali'nin Konya'ya gitmesinin *yeterli* bir şartı olduğunu da dile getirir). Genel olarak (1) veya 'A ise, B' biçimindeki bir koşul önermesi, 'B'nin doğruluğunun 'A'nın doğruluğu için bir "*gerekli şart*"; 'A'nın doğruluğunun da 'B'nin doğruluğu için bir "*yeterli şart*" olduğunu dile getirir.

Öte yandan, (1) veya 'A ise, B' biçimindeki bir önerme

(6) B, eğer A ise

(B, if A) önermesiyle eş-anlamlıdır. Örneğin:

(7) Ali Konya'ya gidecek, eğer Ahmet Ankara'ya giderse

önermesinin (4) veya (5) anlamına geldiğini kolayca görebiliriz.

² Bk. *Quine* "Methods of Logic", s. 12, n. 2.

Bk. § 6, n. 1.

⁴ Bk. *Strawson*, "Introduction to Logical Theory", s. 91-92.

Örneğin: 'C' olarak 'Ali gelecek', 'B' olarak ta 'Veli gelecek' önermesini alalım. O zaman şöyle bir çıkarım-zinciri meydana getirebiliriz:

- | | | |
|-----|-------------------------------|--------------|
| (1) | Ali gelecek | (öncül) |
| (2) | Ali gelecek veya Veli gelecek | ((1) gereği) |
| (3) | Ali gelmezse, Veli gelecek | ((2) gereği) |

Genel olarak, 'A' ve 'B' herhangi iki önerme oldukta,

- | | | | |
|-----|-----------------|--------------------------------|--------------|
| (4) | $\sim A$ | (A yanlıştır) | (öncül) |
| (5) | $\sim A$ veya B | (A yanlıştır veya B doğrudur) | ((4) gereği) |
| (6) | $\sim A$ ise, B | (A yanlış değilse, B doğrudur) | ((5) gereği) |
| (7) | $\sim A$ ise, B | (A doğru ise, B doğrudur) | ((6) gereği) |

gibi bir çıkarım-zinciri meydana getirilebilir. Buna dayanarak:

- (8) $\sim A$
 $\therefore A$ ise, B

biçimindeki bir çıkarımın geçerli olduğunu, dolayısıyla ön-önermesi "*yanlış*" olan bir koşul-önermesinin tüm olarak "*doğru*" olduğunu öne sürebiliriz. (Ancak, (8) gibi bir çıkarımın geçerliliğinin (5) önermesinde geçen 'veya' sözcüğünün doğruluk-fonksiyonu durumunda olmasına bağlı olduğunu, dolayısıyla iddiamızın her türlü koşul-önermesine uygulanamayacağını belirtmek gerek).

Öte yandan 'A ~ A' gibi bir "çelişme"den 'B' gibi *herhangi* bir önermeyi şöyle bir çıkarım-zinciri yardımıyla çıkarmak mümkündür.

- | | | |
|------|----------|-----------------------|
| (9) | A ~ A | (öncül) |
| (10) | A | ((9) gereği) |
| (11) | A veya B | ((10) gereği) |
| (12) | ~ A | ((9) gereği) |
| (13) | B | ((11) ve (12) gereği) |

Böylece:

- (14) A ~ A
 ∴ B

biçimindeki her çıkarımın geçerli olduğunu görüyoruz. Örneğin:

- (15) Sokrates koşuyor ve Sokrates koşmuyor
 (16) Sokrates koşuyor
 (17) Sokrates koşuyor veya sen Roma'dasın
 (18) Sokrates koşmuyor
 (19) Sen Roma'dasın

çıkartım zincirine dayanarak:

- (15) Sokrates koşuyor ve Sokrates koşmuyor
 ∴ Sen Roma'dasın

çıkartımının geçerli olduğunu söyleyebiliriz. (Bu örnek *Duns Scotus* tarafından verilmişti. Bk. *Luhawicz*, "Zur Geschichte der Aussagenlogik", s. 124).

İmdi, (14)'ün geçerliliğine dayanarak:

- (16) A ~ A ise, B

biçimindeki şart-önermelerinin, özellikle de ((15) çıkartımının geçerliliğine dayanarak):

- (17) Sokrates koşuyor ve Sokrates koşmuyorsa, sen Roma'dasın

şart-önermesinin "*doğru*" olduğunu görüyoruz.

Yanlış bir öncülünden istenilen herhangi bir önermenin çıkarılabildiğini savunan *Russell*'den bir gün 'Russell Papa'dır' önermesinden '2 = 1' sonucunu çıkarması istenmiş, Russell de böyle bir çıkartımı şu şekilde yapmıştı:

"Ben Papa isem, Papa ve ben "bir" iz. Ben papa olmadığımı göre de

Papa ve ben "iki"yiz. Şu halde $2 = 1$." (Bk. *Rosenbloom*, "The Elements of Mathematical Logic", s. 198).

Böyle bir çıkarımın geçerliliğine dayanarak:

(18) Russell Papa ise, $2 = 1$

gibi bir koşul-önermesinin doğruluğunu öne sürmek mümkündür.

⁵ 'Material conditional', 'material implication'.

⁶ Bu örnek *Tarski*'nindir. (Bk. *Tarski*, "Introduction to Logic", s. 26-27). *Strawson* ise böyle bir örneğin halis bir "materyel şart-önermesi" olmadığını öne sürmüştür. (Bk. *Strawson*, A.E., s. 89).

⁷ 'Material biconditional', 'material equivalence'.

⁸ Bu ekleme "*Sheffer*'in çizgi-fonksiyonu" (*Sheffers's stroke-function*) da denir.

⁹ 'Joint denial'

§ 9

¹ $n > 2$ halinde, n -li eklemin bileşenlerinin önüne yazılması uygundur. $n = 2$ halinde ise eklem çokluk iki bileşeninin arasında yazılmakla birlikte, bu halde bile eklemin her iki bileşeninin önüne yazılması bazı bakımlardan faydalıdır. Özellikle *Lukasiewicz*'in kurduğu "Polonya metodu" denilen bir işaretleme sisteminde bütün "2-li önerme eklemler"ini hep bileşenlerinin önüne yazmakla parantezlerin kullanılması lüzumu ortadan kalkmıştır. Bu metoda göre, '~', '·', 'v', '⊃' ve '≡' işaretleri yerine sırasıyla 'N', 'K', 'A', 'C' ve 'E' harfleri kullanılmaktadır. Örneğin: '(p⊃q) v (q⊃p)' ifadesi bu metoda göre:

ACpqCqp

biçiminde parantezsiz olarak dile getirilir.

§ 10

¹ Böylece "materyel" koşul-ekleminin mantıksal zorunluluğu açıklamaya yettiğini görüyoruz.

² 'Truth-value analysis'. (Bk. *Quine*, "Methods of Logic", s. 26-27).

§ 11

¹ Bu türlü önerme-şemalarına "*karma-şemalar*", salt mantıksal-değişmezlerle önerme-temsalcilerinden kurulu şemalara ise "*salt-şemalar*" di-

yeceğiz. (5) biçimindeki bir “karma-şema”, ‘ p_1 ’, ‘ p_2 ’,...,‘ p_n ’ önerme-temsilcileriyle ‘ A_1 ’, ‘ A_2 ’,...,‘ A_n ’ önermelerinin (doğruluk-fonksiyonu durumunda) bir takım önerme-eklemleri yardımıyla birbirine eklenmesi suretiyle meydana gelir.

“ (4) çizelgesine dayanarak $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ gibi herhangi iki tam-deyim arasında bir de bir “*i ç e r m e*” (implication) bağlantısını tanımlamak mümkündür: $\mathcal{S}_1$ tam-deyimin $\mathcal{S}_2$ tam-deyimini *içermesini*, (4) çizelgesinde $\mathcal{S}_1$ in altındaki sütunda geçen her ‘D’ harfinin hizasında $\mathcal{S}_2$ nin altındaki sütunda da bir ‘D’ harfinin bulunması şeklinde tanımlıyoruz. Buna göre, $\mathcal{S}_1$ tam-deyiminin altında hiçbir ‘D’ harfi yoksa, $\mathcal{S}_1$ in herhangi bir tam-deyimi içerdiğini; öte yandan, $\mathcal{S}_2$ nin altındaki sütun salt ‘D’ harflerinden kurulu ise, herhangi bir tam-deyimin $\mathcal{S}_2$ yi içerdiğini söyleyebiliriz. Başka bir deyimle, *tutarsız bir şema veya yanlış bir önerme herhangi bir tam-deyimi içerir; geçerli bir şema veya doğru bir önerme de herhangi bir tam-deyim tarafından içerilir.* ‘...’ gibi bir formülün ‘---’ gibi başka bir formülü içerdiğini

$$‘...’ \rightarrow ‘---’$$

biçiminde dile getireceğiz.

Bu şekilde tanımladığımız “içerme”, önermeler arasındaki “materyel” içerme bağlantısının bir genellemesidir. Başka bir deyimle, önermeler arasındaki içerme bağlantısını bu genel “içerme”nin özel bir hali sayabiliriz. Aynı şekilde, sadece “önermeler”in bir özelliği olan “doğruluğu” da “geçerliliğin” özel bir hali olarak yorumlayabiliriz. Bu amaçla herhangi bir tam-deyimin *g e ç e r l i* olmasını, bu *tam-deyimin “geçerli” bir önerme-şeması veya “doğru” bir önerme olması* şeklinde tanımlıyabiliriz. O zaman ‘A’ gibi bir tam-deyimin ‘B’ gibi bir tam-deyimi *içermesinin* gerekli ve yeterli şartının ‘ $A \supset B$ ’ *tam-deyiminin geçerliliğinden* ibaret olduğunu; ‘A’ ile ‘B’ nin *eşdeğerliğinin* gerekli ve yeterli şartının da ‘ $A \equiv B$ ’ *tam-deyiminin geçerliliğinden* ibaret olduğunu söyleyebiliriz.

Öte yandan, “karma-şemalar”ın mümkün olduğunu göz önünde tutarak, çıkarım-şemalarını da “salt” ve “karma” şemalara ayırmamız gerekecektir. Bir *çıkartım-şemasının “salt”* olmasını, her üyesinin bir salt-şema olması şeklinde, “karma” olmasını da üyelerinden (hiç olmazsa) birinin bir “karma-şema” olması şeklinde tanımlıyoruz. Buna göre, herhangi bir çıkarımın “temsilci-şeması”nın “salt” bir çıkarım-şeması olduğunu söyleyebiliriz. Buna dayanarak, bir *çıkartımın geçerliliğini, bu çıkarımın temsilci-şemasının geçerliliği* şeklinde, ya da bu çıkarımın *geçerli bir “salt çıkarım-şemasının” yerine-koyma örneği olması* şeklinde tanımlamak gerekir. Herhangi bir önermenin temsilci-şemasının bir “salt-şema” olduğunu söyleyebiliriz. Buna göre, bir önermenin “mantıkça-doğru” (veya başka bir deyimle,

“formel-analitik”, olmasını, bu önermenin temsilci-şemasının geçerliliği şeklinde, ya da bu önermenin geçerli bir salt-şemanın yerine-koyma örneği olması şeklinde tanımlıyoruz.

İşte “t o t o l o j i” (tautology) deyimini, teknik bir terim olarak, (önermeler mantığı çerçevesi içinde kalmak şartıyla) biryol “mantıkça-doğru önermeler” için, bir de (sözü geçen önermelerin yerine-koyma örneği olduğu) “geçerli salt-şemalar” için kullanacağız. Buna göre, mantıkça-doğru olmakla birlikte totolojik olmıyan önermelerle, geçerli olmakla birlikte totolojik olmıyan önerme-şemalarının mümkün olduğunu söyleyebiliriz.

İki dilsel deyim arasındaki bir bağlantıyı dile getiren ‘eşdeğer’ terimi veya bu terimin sembolik karşılığı olarak kullandığımız ‘ $\leftrightarrow$ ’ işareti, inceleme konusu olan dile değil de, bu dile ait deyimlerden söz etmeğe yarayan bir “üst-dil”e (metalanguage) aittir. Buna karşılık, incelediğimiz önerme-eklemlerinin ve genel olarak mantıksal-değişmezlerin, doğrudan doğruya dil-dışı nesnelerden söz etmeğe yarayan “nesnel-dil”e (object-language) ait olduğunu belirtmek gerek. Özellikle, ‘ $\sim$ ’, ‘ $\cdot$ ’, ‘ $\vee$ ’, ‘ $\supset$ ’ ve ‘ $\equiv$ ’ eklemleri nesnel-dile ait olduğu gibi, ‘A’ ile ‘B’ nesnel-dile ait herhangi iki formül olduğta, ‘ $\sim A$ ’, ‘ $A \cdot B$ ’, ‘ $A \vee B$ ’, ‘ $A \supset B$ ’ ve ‘ $A \equiv B$ ’ tam-deyimleri de nesnel-dile aittir.

Nesnel-dil deyimlerinden üst-dilde söz etmek için, bu deyimleri tırnak içinde gösteririz. Ancak, tırnak işaretlerinin bu özel anlamdaki kullanılışını başka türlü kullanılışlarından (özellikle dikkati üzerine çekmek için kullanılması halinden) ayırdetmek amacıyla, çift-tırnak yerine “tek-tırnak” kullanacağız.

Genel olarak, herhangi bir dilsel-deyimi ya bir takım dil-dışı nesnelerden söz etmek için “kullanırız” ya da, aynı deyimi bu şekilde kullanmadan sadece “anarız”. İkinci halde deyimi tek-tırnak içinde göstermek gerekir. Örneğin: ‘Ankara’ sözcüğünü

Ankara Türkiye’nin başkentidir

bağlamında dil-dışı bir nesne olan *Ankara* şehrinden söz etmek için “kullandığımız” halde; aynı sözcüğü

‘Ankara’ altı harflidir

bağlamında herhangi dil-dışı bir nesneden söz etmek için kullanmayıp onu sadece “anarız”. Görüldüğü gibi, ‘Ankara’ sözcüğü birinci halde nesnel-dile, ikinci halde üst-dile aittir. Dolayısıyla, bu son halde tırnak-içinde gösterilmesi gerekir. Nitekim,

Ankara altı harflidir

önermesinin, ‘Ankara’ sözcüğü hakkında değil de, *Ankara* şehri hakkında

olması bakımından (hiçbir şehir bir takım harflerden meydana gelmediğine göre) mânasız olduğu meydandadır.

Nesnel-dile ait deyimlerden (üst-dilde) söz etmek için, bu deyimleri (tek tırnak-içinde gösterdiğimiz gibi, bir de bunları bir takım özel sembollerle adlandırmak mümkündür. Biz burada, nesnel-dile ait önermeleri (üst-dilde) adlandırmak için (indissiz veya indisli olarak) 'Ö' harfini, nesnel-dile ait şema ve tam-deyim adlandırmak için de (gene indissiz veya indisli olarak) 'Ş' harfini kullanacağız. Buna göre, 'Ö' ile 'Ş' harflerini hep "üst-dil"e ait sayacağız. Üst-dil deyimlerini ise anmayıp kullandığımızdan, bu harfleri tırnak içinde göstermemek gerek. Öte yandan, 'A', 'B', 'C', ... harfleriyle 'p', 'q', 'r',... harflerini (indissiz veya indisli olarak) sadece nesnel-dile ait deyimlerin kısaltması veya temsilcisi saydığımızdan, bunların kendileri de "nesnel-dil"e ait semboller durumundadır.

³ "Hayırlama", "birlikte-evetleme", "ayrıklık" gibi terimleri bundan böyle yalnız "önermeler" için değil, her türden "tam-deyimler" için de kullanacağız. Böylece 'A' ile 'B' herhangi iki tam-deyim oldukça, '~A' tam-deyimine bir "hayırlama", 'A · B' (veya 'AB') tam-deyimine bir "Birlikte-evetleme", 'A v B' formülüne bir "ayrıklık" diyeceğiz. Öte yandan, 'A ⊃ B' tam-deyimine, (genel olarak bir "önerme" durumunda olmadığından) "koşul-önermesi" diyemeyiz. Bu durumu göz önünde tutarak, 'A ⊃ B' biçimindeki bir tam-deyime kısaca bir "k o ş u l l u" diyeceğiz. Buna göre, bir "koşul-önermesi"ni, bir önerme durumunda olan bir "koşullu" şeklinde tanımlıyabiliriz.

'A ⊃ B' bir "koşullu" olduğunda, 'A' ya bu koşullu tam-deyimin "ön-bileşen"i 'B' ye de "a r d - bileşen"i diyeceğiz.

Öte yandan, 'A ≡ B' biçimindeki bir tam-deyime genel olarak "karşı-lıklı-koşullu" diyeceğiz.

⁴ Böyle bir çizelgenin son sırasında en çok 2ⁿ tam-deyim bulunabilir.

⁵ Quine bu kestirme yola "fell swoop", genel ama uzun olan metoda da "full sweep" demiştir. (Bk. Quine, "Methods of Logic", s. 35-37).

§ 12

¹ Ö gibi bir önermenin Ö gibi başka bir önermenin "tanımsal-kısaltması" olması, Ö'nün, Ö önermesindeki bazı sembollerin "tanımlıyan" deyimleriyle değiş-tokuş edilmesi suretiyle meydana gelen deyimden ibaret olması demektir.

² Gerek 'A ⊃ B' gerek 'B ⊃ A' birer totoloji ise, 'A ≡ B' de bir totoloji olur. Bu durumu göz önünde tutarak, 'A ⊃ B' biçimindeki totolojileri, ancak 'B ⊃ A'

nın bir totoloji olmaması halinde anacağız. (Tek istisna ' $p \supset p$ ' totolojisi olacaktır).

³ Bk. *Quine*, "Mathematical Logic", s. 60, n. 2.

⁴ (69) totolojisi, *yanlış bir önermenin herhangi bir önermeyi içerdiğini* (e falso sequitur quodlibet); (70) totolojisi ise *doğru bir önermenin herhangi bir önerme tarafından içerildiğini* (verum sequitur ad quodlibet) dile getirir. "İçerme" sözcüğünün "mantıksal gerektirme" (logical entailment) anlamında kullanılması halinde bu iki iddia düpedüz yanlış olurdu. Bundan dolayı (69) ve (70) ilkeleri "*paradoksal*" sayılmıştır. Ancak önermeler arasındaki içermeye-bağlantısını § 11, n. 2 deki tanım uyarınca yorumlamamız halinde böyle bir paradoksun ortaya çıkmadığı meydandadır. İşte böyle bir içermeye "*materyel içerme*", mantıksal gerektirme anlamındaki içermeye ise "*formel içerme*" denir. 'A' ve 'B' gibi iki önerme arasında "materyel içerme" bağlantısının bulunmasının gerekli ve yeterli şartı ' $A \supset B$ ' koşul-önermesinin "*doğru*" olmasından ibaret olduğu halde; 'A' ile 'B' arasında "formel içerme" bağlantısının bulunmasının gerekli ve yeterli şartı ' $A \supset B$ ' şart-önermesinin "*mantıkça-doğru*" olmasından ibarettir.

Örneğin: ' $2 + 2 = 5$ ' önermesi, 'Ahmet Ankara'ya gidecek' önermesini "materyel" anlamda içerdiği halde, "formel" anlamda içermez. Nitekim:

$$'2 + 2 = 5) \supset (\text{Ahmet Ankara'ya gidecek})$$

koşul-önermesi "*doğru*" olmakla birlikte, "*mantıkça-doğru*" değildir.

Öte yandan

$$(2 + 2 = 5) \supset ((2 + 2 = 5) \vee (\text{Ahmet Ankara'ya gidecek}))$$

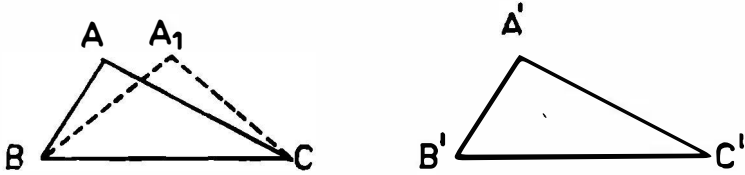
koşul-önermesi mantıkça-doğru olduğundan, ' $2 + 2 = 5$ ' önermesinin ' $(2 + 2 = 5) \vee (\text{Ahmet Ankara'ya gidecek})$ ' önermesini formel olarak içerdiğini söyleyebiliriz.

İmdi, belli bir içermeyi dile getiren bir totoloji, içermenin materyel anlamda değil de formel anlamda yorumlanması halinde yanlış olursa, "*paradoksal*" sayılmaktadır. Bu gibi *paradoksal totolojiler* arasında (69) ve (70) şemalarından başka, *herhangi iki önermeden birinin öbürünü* (materyel anlamda) *içerdiğini* dile getiren (26) şemasını anabiliriz:

⁵ "Reductio ad absurdum" metoduna bir örnek olarak, klâsik geometride karşılıklı üç kenarı eşit olan üçgenlerin eşitliğinin kanıtlanmasını gösterebiliriz. Bu kanıt $AB \simeq A'B'$, $AC \simeq A'C'$ ve $BC \simeq B'C'$ şartlarını yerine getiren ABC ve A'B'C' gibi iki üçgen yardımıyla yapılır.

İmdi, sözü geçen iki üçgenin eşit olması, birinin —söz gelişi A'B'C' nün— bir "yer değiştirme" (displacement) ve gereğinde bir "çevirme" işlemi so-

nucunda öbürüyle (ABC ile) örtüşmesi demektir. Böyle bir işlem ise $A'B'C'$ üçgeninin bütün noktalarına f gibi belli bir "dönüştürüm"ün (transformation)



uygulanması demektir. Buna göre, ABC ile $A'B'C'$ üçgenlerinin eşitliğinin kanıtlanması, $fA' = A$, $fB' = B$ ve $fC' = C$ şartlarını yerine getiren f gibi bir dönüştürümün varolduğunun gösterilmesi şeklinde olur. Karşılıklı üç kenarı eşit olan üçgenlerin eşit olduğunu da

$$(1) (AB \simeq A'B') \cdot (AC \simeq A'C') \cdot (BC \simeq B'C') \supset (\exists f) ((fA' = A) \cdot (fB' = B) \cdot (fC' = C))$$

gibi bir önerme şeklinde dile getirebiliriz. (' $(\exists f)(\dots f \dots)$ ' ifadesi "... $f \dots$ şartını yerine getiren en azından bir f vardır" anlamına gelir).

İmdi varsayımımız uyarınca $BC \simeq B'C'$ olduğundan, $fB' = B$ ve $fC' = C$ şartlarını yerine getiren (en azından) bir f dönüştürümünün bulunması gerekir. O zaman fA' noktasıyla A noktası ya BC doğrusunun aynı yanında bulunurlar, ya ayrı yanlarda. İkinci şıkta f işlemine bir "çevirme" işlemi katmakla bu iki noktanın gene de BC doğrusunun aynı yanında olmasını sağlayabileceğimize, fA' ile A nın BC noktasının hep aynı yanında olduğunu kabul edebiliriz. İmdi fA' noktası A_1 olsun. O zaman ya $A_1 = A$ ya $A_1 \neq A$. Birinci şıkta ABC ile $A'B'C'$ üçgenlerinin karşılıklı üç noktaları çakıştığından iki üçgen "eşit" (yani $ABC \simeq A'B'C'$) olur. ('=' sembolünü —mutlak— *özdeşlik* anlamında, ' $\simeq$ ' sembolünü ise "*eşitlik*" —congruence— anlamında kullanıyoruz). Şu halde iddiamız olan (1) önermesini kanıtlamak için $fA' = A$ olduğunu göstermek yetecektir.

(1) iddiasını "reductio ad absurdum" yoluyla kanıtlamak için, bu önermenin hayırlanması olan

$$(2) (AB \simeq A'B') \cdot (AC \simeq A'C') \cdot (BC \simeq B'C') \cdot (f) ((fB' = B) \cdot (fC' = C) \supset (fA' \neq A))$$

önermesini göz önüne alarak (' $(f)(\dots f \dots)$ ' deyimi " f ne olursa olsun ... $f \dots$ " anlamına gelir), doğruluğu önceden bilinen bazı önermelere dayanmak suretiyle (2) önermesinden bir çelişmeyi türetmeğe çalışmalıyız. İmdi (2) önermesinin doğru olması halinde, fA' (yani A_1) noktasıyla A noktasının BC doğru-

sunun aynı yanında bulunacak şekilde bir f dönüştürümü bulunabilir. Buna göre,

(3) $(\exists f)((fB' = B) \cdot (fC' = C) \cdot (fA' = A) \cdot (A \text{ ile } fA' \text{ noktaları } BC \text{ doğrusunun aynı yanında bulunurlar}))$

önermesini, 2) önermesiyle düzlem Euklides geometrisinin aksiyom ve postülatlarından türetmek mümkündür.

Öte yandan, (2) önermesinin doğruluğu halinde, $A'B' \cong AB$ den dolayı $A_1B \cong AB$ ve $A'C' \cong AC$ den dolayı $A_1C \cong AC$ olur. Şu halde bir yandan B noktası A_1A doğrusunun orta dikmesi üzerinde bulunur; öbür yandan da C noktası aynı A_1A doğrusunun orta dikmesi üzerinde bulunur. O zaman da B ile C noktaları A_1A doğrusuna göre simetrik olup A ile A_1 noktalarının BC doğrusunun *iki ayrı yanında* bulunması gerekir. Böylece (2) önermesiyle düzlem Euklides geometrisinin aksiyom ve postülatlarından:

(4) $(f)((fB' = B) \cdot (fC' = C) \cdot (fA' = A) \supset (A \text{ ile } fA' \text{ noktaları } BC \text{ doğrusunun iki ayrı yanında bulunurlar}))$

önermesini türetmiş oluruz. Oysa (4) önermesi (3) önermesinin hayırlanması anlamına gelir.

Böylece (2) önermesiyle düzlem Euklides geometrisinin aksiyom ve postülatlarından bir yandan (3) önermesini, öbür yandan ise (3)'ün hayırlanması olan (4) önermesini türetmek mümkündür. (1) önermesi yerine 'p' temsilci-harfi, (2) önermesi yerine 'r' temsilci-harfi, düzlem Euklides geometrisinin aksiyom ve postülatlarının birlikte-evetlenmesi yerine de 'q' temsilci-harfi konuldukta;

$$q \sim p \supset r$$

ile

$$q \sim p \supset \sim r$$

biçiminde iki öncülü kanıtladığımızı görürüz. q 'de, doğruluğu önceden bilinen bir öncül olduğundan:

$$q$$

$$q \sim p \supset r$$

$$q \sim p \supset \sim r$$

$$\therefore p$$

geçerli çıkarım-şemasına dayanarak, 'p' harfinin temsil ettiği (1) önermesini "reductio ad absurdum" yoluyla kanıtlıyabiliriz.

Söz konusu "reductio ad absurdum" işlemini şöyle de yorumlamak mümkündür: 'r', ' $q \sim p \supset r$ ' ve ' $q \sim p \supset \sim r$ ' öncüllerinden doğrudan doğruya 'p' sonucunu çıkaracak yerde, ilk önce ' $\sim p \supset p$ ' sonucunu çıkarırız. Nitekim:

$$\begin{aligned}
& q \\
& q \sim p \supset r \\
& q \sim p \supset \sim r \\
& \therefore \sim p \supset p
\end{aligned}$$

geçerli bir çıkarım-şemasıdır. Örneğin: sözü geçen (4) önermesinin (2) ile düzlem Euklides geometrisinin aksyom ve postülatlarından türetilmesine dayanarak, (1) önermesinin (kendi hayırlanması olan) (2) önermesinden türetilbileceği sonucuna varırız. Bu ise ' $\sim p \supset p$ ' biçiminde dile getirilebilir. Oysa, ' $\sim p \supset p$ ' şeması 'p' ile eşdeğer olduğundan, önünde sonunda (1) sonucuna vardığımızı görüyoruz.

⁶ Basit yapıcı ikilemin özel bir hali olarak:

$$\begin{aligned}
& p \supset q \\
& \sim p \supset q \\
& \therefore q
\end{aligned}$$

biçimindeki "boynuzlu sillogizim"'i (syllogismus cornutus) anabiliriz.

⁷ Bk. *Dopp*, "Leçons de Logique Formelle", deuxième partie, Logique Moderne I, s. 162.

⁸ Herhangi bir "n-li önerme-eklemi"ni Brentano sisteminde" dile getirmek, yani bu eklemi sadece ' $\sim$ ' ve ' $\cdot$ ' eklemleri türünden tanımlamak için genel bir metot vardır. Bu metodu bir örnekle aydınlatmak amacıyla, doğruluk-çizelgesi

p	q	r	f(p,q,r)
D	D	D	D
D	D	Y	Y
D	Y	D	D
D	Y	Y	D
Y	D	D	D
Y	D	Y	Y
Y	Y	D	Y
Y	Y	Y	D

biçiminde olan 'f' gibi bir ("3-lü") eklemi göz önüne alalım. 'f(p,q,r)' şemasının, ancak ve ancak ' $pq \sim r$ ' nin veya ' $\sim pq \sim r$ ' nin ya da ' $\sim p \sim qr$ ' şemalarının doğru olması halinde "yanlış" olduğunu görüyoruz. Bu durumu

$$' \sim f(p,q,r)' \leftrightarrow 'pq \sim r \vee \sim pq \sim r \vee \sim p \sim qr'$$

eşdeğerliğiyle dile getirebiliriz. Oysa, böyle bir eşdeğerliğe dayanarak,

$$'f(p,q,r)' \leftrightarrow '\sim(pq \sim r \vee \sim pq \sim r \vee \sim pq \sim r)'$$

eşdeğerliğini, dolayısıyla de De Morgan kanunu gereği

$$'f(p,q,r)' \leftrightarrow '\sim(pq \sim r) \cdot \sim(\sim pq \sim r) \cdot \sim(\sim p \sim qr)'$$

eşdeğerliğini elde ederiz. İşte, bu şekilde 'f(p,q,r)' şemasını, ' $\sim$ ' ve ' $\cdot$ ' eklemelerinden başka hiçbir eklemi içine almıyan bir şemaya (' $\sim(pq \sim r) \cdot \sim(\sim pq \sim r) \cdot \sim(\sim p \sim qr)$ ' şemasına) çevirebileceğimizi görüyoruz.

Aynı şekilde, doğruluk-çizelgesi bilinen herhangi bir n-li önerme-eklemi ni ' $\sim$ ' ve ' $\cdot$ ' eklemeleri türünden tanımlamak mümkündür. Buna tek bir istisna vardır. Bu da karşılığı olan şemanın bir totoloji olduğu eklemelerde ortaya çıkar. Ancak ' p_1 ', ' p_2 ', ..., ' p_n ' gibi n tane temsilci-harfi içine alan herhangi bir totolojiyi (onunla eşdeğer olan)

$$\sim(p_1 \sim p_2 \dots p_n)$$

biçimindeki bir şemayı dönüştürebileceğimizden, *istisnasız* olarak herhangi bir şemanın (ister totolojik olsun, ister omlasın), içinde ' $\sim$ ' ve ' $\cdot$ ' eklemelerinden başka hiçbir önerme-eklemi geçmiyen bir şemaya dönüştürülebileceğini görüyoruz.

Başlıca "2-li eklemeler"in Brentano sistemindeki tanımları şöyledir:

$$\begin{aligned} p \vee q &=_{Dk} \sim(\sim p \sim q) \\ p \supset q &=_{Dk} \sim(p \sim q) \\ p \equiv q &=_{Dk} \sim(p \sim q) \cdot \sim(\sim pq) \\ p \neq q &=_{Dk} \sim(pq) \cdot \sim(\sim p \sim q) \\ p \mid q &=_{Dk} \sim(pq) \\ p \downarrow q &=_{Dk} \sim(pq) \cdot \sim(p \sim q) \cdot \sim(\sim pq) \end{aligned}$$

⁹ Bk. *Quine*, 'Mathematical Logic', s. 49, n. 2.

§ 13

¹ Bk. *Quine*, "Methods of Logic", s. 56.

² "Normal-şemalar"a "*normal-biçimler*" (normal forms) veya (bunları ilerde sözünü edeceğimiz "birlikli normal-şemalar"dan ayırdetmek amacıyla) "*ayrıkli normal-biçimler*" disjunctive normal forms) de denilmektedir.

³ Bir ayrıklığın bir bileşenin tutarlılığı, ayrıklığın tüm olarak tutarlı olmasına yol açar. Genel olarak ayrıklıklarla birlikte-evetlemelerin tutarlılığı, tutarsızlığı, geçerliliği ve geçersizliği şu kurallarla belirlenebilir:

- (i) 'A' ve 'B' tutarlı ise, 'A v B' de tutarlıdır; ama 'AB' tutarsız olabilir.
- (ii) 'A' ve 'B' tutarsız ise, hem 'AB' hem 'A v B' tutarsızdır.
- (iii) 'A' ve 'B' geçerli ise, hem 'AB' hem de 'A v B' geçerlidir.
- (iv) 'A' ve 'B' geçersiz ise, 'AB' geçersizdir; ama 'A v B' geçerli olabilir.

⁴ (3) şemasını böylece bir normal-şema halinde dönüştürebildiğimize göre, "*tutarlı*" olduğunu ortaya koymuş oluruz. (Nitekim her normal-şema tutarlı olduğundan, (3) ün bir normal-şema ile eşdeğer olması tutarlılığını gerektirir.)

Öte yandan, aynı işlemleri uygulamak suretiyle herhangi bir tutarsız şemayı, her çarpanı tutarsız olan çok-çarpanlı bir "*normalımsı*" şema haline dönüştürmek mümkündür. Burada "*normalımsı*" bir şemayı, her çarpanı, birbirinden *farklı yalın-şemalardan* kurulu bir çok-çarpanlı birlikte-evetleme olan bir çok-çarpanlı ayrıklık şeklinde tanımlıyoruz. Buna göre "*normal-şemalar*"ı sözü geçen "*normalımsı*" şemaların özel bir türü olarak yorumlayabiliriz. Örneğin: ' $p \sim qr \vee p \sim q$ ' bir "*normal-şema*" durumunda olan bir normalımsı şema; ' $\sim p \sim qpr \vee p \sim q$ ' ise bir "*normal-şema*" durumunda olmayan bir normalımsı şemadır. Görüldüğü gibi, bu son şemanın birinci çarpanında (her yalın-şemanın geçiş sayısı "1"e eşit olmakla birlikte) her "*atomsal-şema*"nın, yani her *temsilci-harfin geçiş sayısı "1" değildir*. Nitekim 'p' harfinin bu çarpandaki geçiş sayısı "2"ye eşittir. Aynı çarpanda hem 'p' hem de ' $\sim p$ ' geçtiğinden, bu çarpanın "*tutarsız*" olduğunu görüyoruz. Ancak bir ayrıklığın bir çarpanının tutarsız olması genel olarak ayrıklığın tüm olarak tutarsız olmasını gerektirmez. Çarpanlarından bir tekinin bile tutarlılığı tüm ayrıklığın tutarlılığını sağlar. Oysa, sözü geçen ' $\sim p \sim qpr \vee p \sim q$ ' normalımsı şemasının birinci çarpanı tutarsız olmakla birlikte, ikincisi tutarlıdır. Şu halde şemamız (bir normal-şema olmamakla birlikte) tutarlı bir normalımsı şemadır. Ancak herhangi bir çok-çarpanlı ayrıklık, tutarlı çarpanlarının ayrıklığına dönüştürülebildiğinden, her tutarlı normalımsı şemanın (tutarsız çarpanlarını ortadan kaldırmak suretiyle) bir "*normal-şema*"ya dönüştürülebildiğini görüyoruz. Ancak her çarpanı tutarsız olan bir normalımsı şemanın bir normal şemaya dönüştürmenin imkânsız olduğu meydandadır. Böylece normalımsı şemaları, bir yandan (biri "*normal-şema*" halinde dönüştürülebilen) "*tutarlı normalımsı şemalar*", öbür yandan da (biri "*normal-şema*" halinde dönüştürülemeyen) "*tutarsız normalımsı şemalar*" olmak üzere iki öbeğe ayrılabiliriz.

İmdi, herhangi bir şemayı ya bir tutarlı normalımsı şemaya, ya bir tutarsız normal şemaya dönüştürmek mümkündür. Her tutarlı şema bir "*tutarlı normalımsı şema*" haline, her tutarsız şema ise bir "*tutarsız normalımsı şema*"

ma" haline dönüştürülebilir. Böylece, verilen herhangi bir şemanın "tutarlı" mı, "tutarsız" mı olduğunu, doğruluk-değeri analizine başvurmadan da tespit etmek mümkündür.

Örneğin, sözü geçen (10—7) yani

$$\sim\{ \sim [\sim (p \vee \sim q) \cdot \sim q] \vee \sim pq \}$$

şemasının tutarsızlığını, bu şemayı önce (§ 12'de yaptığımız gibi)

$$\sim pq \sim q \cdot (p \vee \sim q)$$

biçimine; sonra da

$$\sim pq \sim qp \vee \sim pq \sim q \sim q$$

biçimine; en son da

$$p \sim pq \sim q \vee \sim pq \sim q$$

biçimindeki bir "tutarsız normalımsı şema" haline dönüştürmek suretiyle tespit edebiliriz.

İmdi, herhangi bir şemanın tutarlı olup olmadığını denetlemeye yarayan her metot aynı zamanda geçerliliğin de denetlenmesine yarar. Nitekim:

- (a) Bir tam-deyimin geçerli olmasının gerekli ve yeterli şartı, bu *tam-deyimin hayırlanmasının tutarlı olmamasından* ibarettir.
- (b) Bir tam-deyimin *geçersiz* olmasının gerekli ve yeterli şartı, bu *tam-deyiminin hayırlanmasının tutarlı olmasından* ibarettir.

Böylece, önerme-şemalarının normalımsı şemalar haline dönüştürülmesinin, yalnız "tutarlılık" ile "tutarsızlık" için değil, bir de "geçerlilik" ile "geçersizlik" için de bir "*denetleme metodu*" (test method) olduğunu görüyoruz.

(Öte yandan, geçerlilik ile geçersizliği denetlemeye yarayan her metot, aynı zamanda tutarlılık ile tutarsızlığı da denetlemeye yarar. Nitekim:

- (c) Bir formülün *tutarlı* olmasının gerekli ve yeterli şartı, bu *tam-deyimin hayırlanmasının geçerli olmamasından* ibarettir.
- (d) Bir tam-deyimin *tutarsız* olmasının gerekli ve yeterli şartı, *bu tam-deyimin hayırlanmasının geçerli olmasından* ibarettir.

§ 14

- (a) Her Ş şeması, eşdeğerliğin dönüşümlüğü gereği, kendi eşdeğerlik-kümesinin bir üyesidir.

- (b) $\mathcal{S}$ herhangi bir şema, K kümesi $\mathcal{S}$ nin eşdeğerlik-kümesi, $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ de K kümesinin üyesi olan iki şema olsun. O zaman $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}_2$ olur. Bu iki eşdeğerliğin birincisinden, eşdeğerliğin bakışım özelliği gereği $\mathcal{S}_1 \leftrightarrow \mathcal{S}_2$ elde edilir. $\mathcal{S}_1 \leftrightarrow \mathcal{S}$ ve $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}_2$ den de, eşdeğerliğin geçişliği gereği, $\mathcal{S}_1 \leftrightarrow \mathcal{S}_2$ elde edilir.
- (c) $\mathcal{S}_1$ şeması, $\mathcal{S}$ şemasının eşdeğerlik-kümesi olan K kümesine ait olmayan bir şema olsun. $\mathcal{S}_1$ in, K ya ait olan $\mathcal{S}_2$ gibi bir şema ile eşdeğer olduğunu kabul edelim. O zaman, $\mathcal{S}_2$ (K nın bir üyesi olmasından dolayı) $\mathcal{S}$ ile eşdeğer olduğundan, $\mathcal{S}_1$ şeması da —eşdeğerliğin geçişliği gereği— $\mathcal{S}$ ile eşdeğer olur. Böylece $\mathcal{S}_1$ şeması, varsayıma aykırı olarak, K kümesine ait olur. (Olmazlığa geri götürme yolu ile kanıtlama!)

² (i) " $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ herhangi iki şema olduğunda, $\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ ise, $\mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1$ " şartı ile dile getirilen özelliğe, ' $\rightarrow$ ' — ' $\leftarrow$ ' ikililik-bağlantısının bakışım (simetri) özelliği denir. ' $\rightarrow$ ' — ' $\leftarrow$ ' nin bakışımlı (simetrik) olduğu şöyle kanıtlanabilir:

$\mathcal{S}_1$ şeması olarak ' $f(p_1, \dots, p_n)$ ' gibi bir şemayı, $\mathcal{S}_2$ şeması olarak ta ' $g(q_1, \dots, q_m)$ ' gibi bir şemayı ele alalım. O zaman (i) gereği:

(ii) " $g(q_1, \dots, q_m) \leftrightarrow \sim f(\sim p_1, \dots, \sim p_n)$ ise, ' $f(p_1, \dots, p_n) \leftrightarrow \sim g(q_1, \dots, q_m)$ ' "

(ii) ise kolaylıkla kanıtlanabilir:

$$'g(q_1, \dots, q_m) \leftrightarrow \sim f(\sim p_1, \dots, \sim p_n)'$$

öncülünden,

$$' \sim g(q_1, \dots, q_m) \leftrightarrow \sim \sim f(\sim p_1, \dots, \sim p_n)'$$

dolayısıyla de

$$' \sim g(q_1, \dots, q_m) \leftrightarrow f(\sim p_1, \dots, \sim p_n)'$$

sonucu çıkarılır. Buradan da

$$' \sim g(\sim q_1, \dots, \sim q_m) \leftrightarrow f(\sim \sim p_1, \dots, \sim \sim p_n)'$$

dolayısıyla de

$$'f(p_1, \dots, p_n) \leftrightarrow \sim g(\sim q_1, \dots, \sim q_m)'$$

elde edilir. (İ.K.)

³ Bk. P.R. Halmos, "Lectures on Boolean Algebras", s. 8.

⁴ 'p' ve 'q' harflerinden kurulu bir çelişmenin ikilisi olarak bu yoldan

$$pq \vee p \sim q \vee \sim pq \vee \sim p \sim q$$

normal şeması elde edilir. Bu şema 'p v ~p' totolojisine dönüştürülebilir.

Öte yandan, bu yöntemle bir totolojinin ikilisini doğrudan doğruya bulamayız. Nitekim, bu yöntemi bir totolojiye uygulamamız halinde sağ yanı hep 'Y' den ibaret bir doğruluk-çizelgesi buluruz. Böyle bir çizelge ise hiç bir normal şemayı belirlemez. Bununla birlikte, böyle bir çizelgenin 'p~p' (veya 'p~pq~q',...) gibi bir "normalımsı" şemayı belirlediğini kabul edebiliriz. Buna göre, bir totolojinin ikilisi olarak bir "normalımsı şema" elde edildiğini söyleyebiliriz.

Bu metotla, 'p v q' nün ikilisi olarak 'pq', 'p v q' nün ikilisi olarak ta 'pq' bulunur. Öte yandan, (II) metoduyla, 'p v q' nün ikilisi olarak '~(~p~q)', 'pq' nün ikilisi olarak ta '~(~p v ~q)' bulunur. İki ayrı metotla bulunan ikililer birbiriyle eşdeğer olduğundan:

$$'pq' \leftrightarrow '\sim(\sim p v \sim q)'$$

$$'p v q' \leftrightarrow '\sim(\sim p \sim q)'$$

dolayısıyla de

$$' \sim(pq)' \leftrightarrow '\sim p v \sim q'$$

$$' \sim(p v q)' \leftrightarrow '\sim p \sim q'$$

elde edilir. Böylece, De Morgan kanunlarının ikililik kanunları durumunda olduğu görülür.

Genel olarak, 'f(p₁,...,p_n; ., v)' sadece '~', '.' ve 'v' eklemlerinden kurulu herhangi bir n-li şema oldukça, böyle bir şemanın hayırlanmasının 'f(~p₁,...,~p_n; v, .)' ile eşdeğer olduğu gösterilebilir. Nitekim:

$$'f(\sim p_1, \dots, \sim p_n; ., v)' \rightarrow \langle ' \sim f(p_1, \dots, p_n; ., v)' \text{ ((II) gereği)} \rangle$$

$$'f(\sim p_1, \dots, \sim p_n; ., v)' \rightarrow \langle 'f(\sim p_1, \dots, \sim p_n; v, .)' \text{ ((III) gereği)} \rangle$$

olduğundan,

$$' \sim f(p_1, \dots, p_n; ., v)' \leftrightarrow 'f(\sim p_1, \dots, \sim p_n; v, .)'$$

elde edilir.

Bu eşdeğerliğe *Shannon teoremi* denir. (Bk. U. Weyh, "Elemente der Schaltungs algebra", s. 42.)

Örneğin:

$$\sim[p \sim qr \vee (p \sim q \vee r) \cdot \sim pr \cdot (\sim pq \vee p \sim r)]$$

şeması, Shannon teoremine dayanarak, bir çırpıda

$$(\sim p \vee q \vee \sim r) \cdot [(\sim \vee q) \cdot \sim r \vee p \vee \sim r \vee (p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee r)]$$

biçimine dönüştürülebilir.

“ Bk. Church, “Introduction to Mathematical Logic”, s. 108.

“ Bk. Church, A.E., s. 108.

“ Ş)—($\sim$ Ş özelliğine dayanarak, kendiyle ters-ikili olan bir şemanın ikililik-kümesiyle, bu şemanın hayırılanmasının eşdeğerlik kümesinin birbiriyle özdeş olduğu gösterilebilir. (Nitekim, Ş kendiyle ters-ikili olan bir şema olduktaki, Ş nin ikililik-kümesi, $\sim$ Ş ile eşdeğer olan şemaların kümesinden ibarettir.)

“ Ayrıksal ve birliksel (tam veya tam olmıyan) normal-şemaların *sadeleşmesi* bir de “*çarpanlara ayrılma*” mânasına gelir. Normal şemaların çarpanlara ayrılmasını üç ayrı halde yapabiliriz.

1.ci hal: Ortak çarpanlı terimler hali:

‘A . B’ ile ‘A . C’ gibi ‘A’ ortak çarpanı olan iki ayrıksal temel-şemayı

$$(1) \quad A \cdot B \vee A \cdot C \equiv A \cdot (B \vee C)$$

gereği iki çarpana ayırabiliriz. Örneğin ‘ $pq \vee p \sim r$ ’ yi ‘ $p \cdot (q \vee \sim r)$ ’ dönüştürebiliriz.

Ortak çarpanlı birliksel normal-şemalar ise (1) in ikililik karşılığı olan

$$(2) \quad (A \vee B) \cdot (A \vee C) \equiv A \vee (B \cdot C)$$

gereği çarpanlara ayrılabilir.

2.ci hal: Bakışık şemalar hali:

‘ $a_1, \dots, a_n$ ’ n tane farklı yalın-şemanın kısaltması olduktaki, biryol ‘ $a_1 \dots a_n$ ’ ile ‘ $\sim a_1 \dots \sim a_n$ ’ ayrıksal temel-şemalarına, bir de ‘ $a_1 \vee \dots \vee a_n$ ’ ile ‘ $\sim a_1 \vee \dots \vee \sim a_n$ ’ birliksel temel-şemalarına “*bakışık*” diyoruz.

Bakışık şemaları aşağıdaki totolojilere göre çarpanlara ayırabiliriz:

$$(3) \quad a_1 \dots a_n \vee \sim a_1 \dots \sim a_n \equiv (a_1 \vee \sim a_2) \cdot (a_2 \dots a_n \vee \sim a_1 \sim a_3 \dots \sim a_n)$$

$$(4) \quad (a_1 \vee \dots \vee a_n) \cdot (\sim a_1 \vee \dots \vee \sim a_n) \equiv (a_1 \cdot \sim a_2) \vee (a_2 \vee \dots \vee a_n) \cdot (\sim a_1 \vee \sim a_3 \vee \dots \vee \sim a_n)$$

Örneğin ‘ $\sim pq \sim r \vee p \sim qr$ ’ deyimi (3) gereği ‘ $(\sim p \vee r) \cdot (q \sim r \vee p \sim q)$ ’ ye dönüştürülebilir. (Bk. Ulrich Weyh, “Elemente der Schaltungsgebra”, s. 67 - 68.)

3.cü hal: Kısmen bakışık şemalar hali:

Biryol ' $a_1 \dots a_n \cdot A$ ' ile ' $\sim a_1 \dots \sim a_n \cdot B$ ' biçimindeki şemalara, bir de ' $a_1 \vee \dots \vee a_n \vee A$ ' ile ' $\sim a_1 \vee \dots \vee \sim a_n \vee B$ ' biçimindeki şemalara "*kısmen bakışık*" diyelim. ('A' ile 'B' burada herhangi iki şemanın kısaltmasıdır.) Öğrencim Ali Karatay çarpanlara ayrılma işleminin kısmen bakışık şemalar halinde de yapılabileceğini göstermiştir. Karatay'a göre çarpanlara ayrılma aşağıdaki genel kanunlara dayanır:

- (5) $a_1 \dots a_m a_{m+1} \dots a_n \cdot A \vee \sim a_1 \dots \sim a_m \sim a_{m+1} \dots \sim a_n \cdot B \equiv$
 $(a_1 \dots a_m \vee \sim a_{m+1} \dots \sim a_n) \cdot (a_{m+1} \dots a_n \cdot A \vee \sim a_1 \dots \sim a_m \cdot B)$
- (6) $a_1 \vee \dots \vee a_n \vee a_{n+1} \vee \dots \vee a_n \vee A) \cdot (\sim a_1 \vee \dots \vee \sim a_m \vee \sim a_{m+1} \vee \dots \vee \sim a_n \vee B) \equiv$
 $(a_1 \vee \dots \vee a_m) \cdot (\sim a_{m+1} \vee \dots \vee \sim a_n) \vee (a_{m+1} \vee \dots \vee a_n \vee A) \cdot (\sim a_1 \vee \dots \vee \sim a_m \vee B)$

Örneğin (5) gereği, ' $pqrs \vee \sim p \sim q \sim rtu$ ' şeması ($m = 1$ için)

$$(p \vee \sim q \sim r) \cdot (qrs \vee \sim ptu)$$

biçimine dönüştürülebilir. .

§ 15

Ş herhangi bir şema, $(m_1, \dots, m_k)$ de Ş nin karşılığı oldukça, $(m_1, \dots, m_k)$ 'i Ş nin ayrışsal n-li tam normal-şemasının çarpanlarının kümesi olarak ta yorumlayabiliriz. O zaman m_i sayısı ($i = 1, 2, \dots, k$) sayısı, söz konusu ayrışsal n-li tam normal-şemanın i.nci çarpanının temsilcisi sayılır. m_i sayısı, bu i.nci çarpanın "eksiksiz ayrışsal n-li tam normal-şema"daki sırasını gösterir.)

Ş herhangi bir n-li şema oldukça, Ş nin ayrışsal n-li tam normal-şemasının karşılığını, "Ş nin karşılığı" da sayacağız. Ş nin karşılığını kısaca

$$kr(\$)$$

ile göstereceğiz.

İmdi, bütün n-li temel-şemaların kümesini (yani eksiksiz ayrışsal n-li tam normal-şemanın bütün çarpanlarının kümesini) 'E' ile gösterelim. E kümesi buna göre 2^n üyeli bir kümedir. Burada küme-üyesi olarak ele aldığımız her nesne E ye ait olduğundan, E kümesine "evrensel-küme" denir. Buna göre, her n-li şemanın karşılığının E kümesinin bir "alt-küme"si olduğunu; bir to-tolojinin karşılığının da E kümesinin kendisi olduğunu söyleyebiliriz. Gerek to-tolojinin karşılığı olan evrensel-küme, gerek çelişmenin karşılığı olan boş-küme, evrensel-kümenin birer alt-kümesi sayılır. Buna göre, evrensel-küme-nin üye sayısının $2(2^n)$ olduğu gösterilebilir.

K, E nin herhangi bir alt-kümesi oldukta, K ya ait olmıyan (ama gene de E ye ait olan) bütün üyelerin (yani n-li temel-şemaların) kümesine, K kümesinin “*tümleç*”i (complement) denir.

K gibi bir kümenin tümleci

$$K'$$

ile gösterilir. Evrensel-kümenin tümleci boş-küme, boş-kümenin tümleci de evrensel-kümedir.

K ile L, E nin herhangi iki alt-kümesi oldukta, K ile L nin üyelerinden kurulu kümeye K ile L nin “*birleşim*”i (union) denir. K ile L nin birleşimi

$$K \cup L$$

ile gösterilir. $K \cup L$ kümesi E nin bir alt-kümesidir. Gerek K nin gerek L nin her üyesi $K \cup L$ nin bir üyesi olduğu gibi, $K \cup L$ nin her üyesi K nin veya L nin bir üyesidir.

K ile L, E nin herhangi iki alt-kümesi oldukta, hem K hem L ye ait bütün üyelerin kümesine K ile L nin “*kesişim*”i (intersection) denir. Bu da

$$K \cap L$$

ile gösterilir. Hem K hem L ye ait her üye $K \cap L$ nin bir üyesi olduğu gibi, $K \cap L$ nin her üyesi hem K nin hem L nin üyesidir.

Kümelerin tümleci, birleşimi ve kesişimi kavramlarına dayanarak, şemaların karşılıklarının şu özellikleri taşıdığını gösterebiliriz:

$$(a) \quad kr(\sim S) = (kr(S))'$$

yani: bir şemanın hayırlanmasının karşılığı, bu şemanın karşılığının tümleciyle özdeştir.

S_1 ile S_2 ‘ p_1 ’, ..., ‘ p_n ’ gibi n tane temsilci-harfın tümünden veya bazılarının kurulu iki şema oldukta:

$$(b) \quad kr(S_1 \cdot S_2) = kr(S_1) \cap kr(S_2)$$

yani: iki şemanın birlikte-evetlenmesinin karşılığı, bu şemaların karşılıklarının kesişimiyle özdeştir;

$$(c) \quad kr(S_1 \vee S_2) = kr(S_1) \cup kr(S_2)$$

yani: iki şemanın ayrıklığının karşılığı, bu şemaların birleşimiyle özdeştir.

(a), (b) ve (c) özellikleri sırasıyla $\sim S$, $S_1 \cdot S_2$ ve $S_1 \vee S_2$ nin doğruluk-çizelgesine başvurmak suretiyle kolayca kanıtlanabilir.

Özel haller olarak, $\mathcal{S}_i$ in karşılığı ya (i) $\mathcal{S}$ nin kendisiyle, ya da (ii) $\mathcal{S}$ nin hayırlanmasıyla eşdeğer olabilir. (i) halinde $\mathcal{S}$ *kendiyle-ikili*, (ii) halinde de $\mathcal{S}$ *kendiyle ters-ikilidir*.

(i) $\mathcal{S}$ *kendiyle-ikilidir*:

$$\text{kr}(\mathcal{S}) = (m_1, \dots, m_k)$$

$$\text{kr}(\sim \mathcal{S}) = (h_1, \dots, h_j) \quad j = 2^n - k$$

olsun. O zaman $\text{kr}(\mathcal{S}_i) = \text{kr}(\mathcal{S})$ olduğundan:

$$(2^n - h_j + 1, \dots, 2^n - h_1 + 1) = (m_1, \dots, m_k)$$

olur. Dolayısıyla

$$j = k$$

ve

$$2^n - h_k + 1 = m_1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$2^n - h_1 + 1 = m_k$$

olur. Bu denklemlerden de

$$h_1 = 2^n - m_k + 1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$h_k = 2^n - m_1 + 1$$

elde edilir.

$j = k$ ve $j = 2^n - k$ olduğundan, $j = k = 1/2 \cdot 2^n = 2^{n-1}$ olduğu görülür. Şu halde her kendiyle-ikili şemanın ayrık (veya birliksel) n -li tam normal-şeması 2^{n-1} çarpanlıdır.

(ii) $\mathcal{S}$ *kendiyle ters ikilidir*:

O zaman $\text{kr}(\mathcal{S}_i) = \text{kr}(\sim \mathcal{S})$ olur. Dolayısıyla:

$$(2^n - h_j + 1, \dots, 2^n - h_1 + 1) = (h_1, \dots, h_j)$$

yani:

$$2^n - h_j + 1 = h_1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$2^n - h_1 + 1 = h_j$$

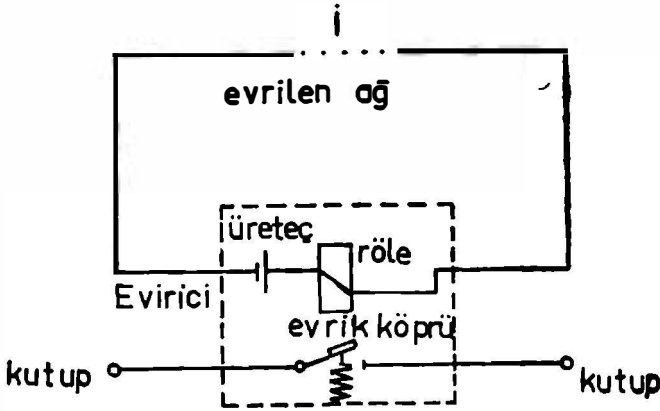
olduğu görülür.

§ 16

¹ Önergeler-mantığının çevirgeçli elektrik-devrelerin hesapları için kullanılabileceği ilk olarak *C. E. Shannon* tarafından (1937'de) gösterilmiştir. Önergeler-mantığının hesaplarını yapabilen ilk makina ise *T. A. Kalin* ve *W. Burkhart* tarafından (1946'da) yapılmıştır.

² Bk. *U. Weyh*, "Elemente der Schaltungsgebra", s. 21, 65.

³ Elektrik devreleri halinde elektromagnetik röleli bir evirici kullanılabilir. Böyle bir eviricinin işleyişini aşağıda gösteriyoruz:



Evrilen ağ iletici durumunda ise, rölenin devresi kapanarak, eviricinin içindeki üreteçten çıkan akım röleden geçerek onu mıknatıslar. Dolayısıyla da evrik-köprü mıknatısın etkisi altında *açılır*. Böylece evrik-ağın kutupları arasında akım geçemez. Öte yandan, evrilen-ağın iletici olmaması halinde, rölenin devresi açık olup mıknatıslık özelliği olmaz. Dolayısıyla evrik-kapı onu altından tutan yayın etkisi altında *kapalı* kalır. Böylece akımın evrik-ağın bir kutbundan öbür kutbuna geçmesi mümkün olur.

Herhangi bir evrik-ağda (elektrikli olsun olmasın), bu evrik-ağın bir kutbundan giren maddenin eviriciden geçerek öbür kutba kadar iletilmesi imkânsız olmalıdır. Yoksa, evrilen-ağın iletici olması halinde, evrik-ağın bir kutbundan giren maddenin eviriciden geçerek evrilen ağ geçmek suretiyle yeniden eviriciye dönerek evrik-ağın öbür kutbuna kadar iletebilecekti. Oysa, evrilen-ağın iletici olması halinde, evrik-ağın iletici olmaması gerekir. (İ.K.)

B İ B L İ Y O G R A F Y A

- BOCHENSKI, I.M. —
MENNE, A., "Grundriss der Logik", (F. Schöningh, Paderborn, 1962, 2.ci yayım.)
- CARNAP, R., "The Logical Syntax of Language", (Routledge and Kegan Paul, London, 1937.)
- "Einführung in die symbolische Logik", (Springer, Wien, 1954.)
- CHURCH, A., "Introduction to Mathematical Logic Vol. I". (Princeton University Press, 1956, 3.cü baskı: 1962.)
- COPI, I. M., "Symbolic Logic", (Macmillan, New York, 1954.)
- CURRY, H.B., "Foundations of Mathematical Logic", (McGraw-Hill, New York, 1963.)
- DOPP, J., "Leçons de Logique Formelle", (Louvain, 1950.)
- EATON, R. M., "General Logic", (C. Scribner's Sons, New York, 1931.)
- FITCH, F. B., "Symbolic Logic: An Introduction", (Ronald Press, New York, 1952.)
- HALMOS, P. R., "Lectures on Boolean Algebras", (Van Nostrand, New York, 1963.)
- HERMES, H., "Einführung in die mathematische Logik", (Teubner, Stuttgart, 1963.)
- HILBERT, D. und
ACKERMAN, W., "Grundzüge der theoretischen Logik", (Springer, Berlin, 3.cü yayım: 1949, 4.cü yayım: 1959.)
- HUGHES, G.E. and
LONDEY, D.G., "The elements of formal logic", (Methuen, London, 1965.)
- KALISH, D. and
MONTAGUE, R., "Logic: Techniques of Formal Reasoning", (Harcourt, Brace and World, New York, 1964.)
- KLEENE, S. C., "Introduction to Metamathematics", (North-Holland, Amsterdam, 1952)
- LEBLANC, H., "An Introduction to Deductive Logic", (Wiley, New York, 1955.)
- LORENZEN, P., "Formale Logik", (Berlin, 1958.)

- LUKAŞIEWICZ, J., "Zur Geschichte der Aussagenlogik", (Erkenntnis, Cilt 5 (1935 - 6), s. 169 — 171.)
- LUKASIEWICZ, J., "Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic", (Oxford, 1951.)
- MENNE, A., "Logik und Existenz", (Meisenheim, 1954.)
- MILL, J.S., "A System of Logic" (Longmans, Green, and Co., London, 1879, 10.cu yayım')
- PRIOR, A. N., "Formal Logic", (Oxford University Press, London, 2.ci yayım 1962.)
- QUINE, W. V., "Mathematical Logic", (Harvard University Press, 1940, 4.cü baskı 1958.)
- QUINE, W. V., "Methods of Logic", (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1950, yeni yayım 1959.)
- QUINE, W. V., "Word and Object", (Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology, 1960.)
- REICHENBACH, H., "Lojistik", çeviren: H. Vehbi Eralp, Edebiyat Fakültesi Yayınları, İstanbul, 1939.
- REICHENBACH, H., "Elements of Symbolic Logic", (Macmillan, New York, 1947.)
- ROSENBLOOM, P., "The Elements of Mathematical Logic", (Dover, New York, 1950.)
- ROSSER, J.B., "Logic for Mathematicians", (McGraw-Hill, New York, 1953.)
- SCHOLZ, H. und
HASENJAEGER, G., "Grundzüge der mathematischen Logik", (Springer, Berlin, 1961.)
- SUPPES, P., "Introduction to Logic" (Van Nostrand, New York, 1957)
- STRAWSON, P. F., "Introduction to Logical Theory", (Methuen), London, 1952.)
- TARSKI, A., "Introduction to Logic", (New York, 1941.)
- WEYH, U., "Elemente der Schaltungs algebra", (R. Oldenburg, München, 3.cü yayım 1964.)
- WHITEHEAD, A.N. and
RUSSELL, B., "Principia Mathematica" to 56 (Cambridge University Press, 1962; ilk yayım 1913.)

YANLIŞ - DOĞRU ÇİZELGESİ

Sayfa	Satır	Yanlış	Doğru
1	6	doruluğunun	doğruluğunun
8	14	Ş ₂ nin	Ş ₂
36	9 *	diyeceğiz ³	diyeceğiz ⁵
48	14 *	karşılık	karşılığı
50	6 *	Bütün satır silinecektir.	
51	6 *	bileşenlerin doğruluk-değerini belirleriz. Aynı ilşemi gittikçe da	önermelere varılana kadar tek-rarlarız. Ondan sonraki sırada
52	8 *	~ .	. ~
60	9	biçimindeki	biçimindeki
69	9 *	A _n (n-)	A _n - (n-2)
71	2 *	işareti	işareti"
74	3	T u t a r s ı l ı k	T u t a r s ı z l ı k
76	15	g	f
77	20	Son yedi harf sola kaydırılarak üstündekilerin hizasına getirilecektir.	
82	17	p ∨ ~q	p ∨ ~p
84	1	sayıda	sayıdaki
87	13	bölye	böyle
90	17	bri	bir
96	3	(qr ⊃ s	(qr ⊃ s)
97	16 *	~q	~p
107	5	(x x (y x z)	(x x (y x z))
110	9 *	Birinci ~A yerine ~ ~A konulacaktır.	
		=	=
111	9-14	A yerine ~ ~A, A yerine ~ ~ ~ A konulacaktır.	
115		7. ile 8. satırların arasına şu satır konulmalıdır:	
		ruluk-değerleri yükleyelim. O zaman 'Ç' şeması belli bir doğ	
116	10 *	geçişliliği	geçişliliği
124	14 *	çıkarma	çıkarmın
126	9 *	olabildii	olabildiği
131	6 *	"n o r m a l - ş e m a"	"n o r m a l - ş e m a" ²
131	14 *	aotmsal	atomsal
133	1	biilnen	bilinen

[*] İşareti aşağıdan sayılacak satırları gösterir.

Sayfa	Satır	Yanlış	Doğru
133	15	oluğu	olduğu
133	16 *	tutarlıdır	tutarlıdır
135	8	A_2B_m	$v A_2B_m$
145	2 *	Formülün sonuna) konulacaktır.	
149	9	'pq ~'	'p ~ q'
150	11	suretfiyle	suretiyle
152	8	ilkesi :	ilkesi : '
156	12	bulunabilir	bulunabilir
156	17 *	ğndan	ğndan
156	16 *	ikisi	biri
158	3 *	olmasını	olmasının
161	5 *	'D' yerine 'Y', yerine de 'D'	'D' yerine 'Y', 'Y' yerine de 'D'
163	6	Ş	~Ş
163	7	Ş şemasının	~Ş şemasının
163	7 *	İlk önce nin	İlk önce Ş nin
165	2	'p' veya '~p' nin	'p _i ' veya '~p _i ' nin
167	3 *	Formülün sonuna) konulacaktır	
168	8	n?li	n-li
169	11 *	lik	li
169	17 *	totoliji	totoloji
173		Şekil 7 de i yerine i ₁ konulacaktır.	
179	13 *	çeviricisiz	eviricisiz
180	5 *	't _y '	't _D '
180	4 *	't _D '	't _y '
182		Şekil 25 in sol kısmı tersine çevrilecektir.	
186	3 *	ayın	aynı
192	1 *	yanlışlandığın	yanlışlandığını
193	17 *	Kanıtladı	Kanıtlandı
196	12	sonra	soran
198	11 *	Luhasiewicz	Lukasiewicz
203	18 *	2 + 2 = 5)	(2 + 2 = 5)
207	15	omlasın	olmasın
209	14 *	deyiminin	deyimin
216	2	Şhannon	Shannon

[*] İşareti aşağıdan sayılacak satırları gösterir.