

Keyifli Okumalar Dileriz

Binlerce kategoride milyonlarca PDF e-kitap, ders kitapları, dergiler ve romanlara platformumuz üzerinden ücretsiz ulaşabilirsiniz.

RESMİ WEB SİTEMİZ

<https://rantey.org>

Yedek ve Duyuru Kanallarımız

Sitemize erişim engeli gelmesi veya adres değişikliği durumunda aşağıdaki kanallardan güncel giriş adresine erişebilirsiniz:

- Telegram: <https://t.me/birkitapbir>
- WhatsApp Kanalımız : <https://whatsapp.com/channel/0029VbDHv8uE50Us4lvMoc0Y>

IAN STEWART

42

3,14

!

PROFESÖR
STEWART'IN
İNANILMAZ
SAYILARI

∞

$x+y$

α

π

2015 Lewis Thomas
Bilim Yazımı Ödülü

?

ALFA

BİLİM



PROFESÖR STEWART'IN İNANILMAZ SAYILARI



Bu kitap sayılar ve onların olağanüstü maceraları üzerine. Sayılar bizi kendilerine hayran bırakır ve onlar hakkında daha fazlasını öğrenmeye devam ederiz. Her sayı biricik bir bireydir. Birkaç özel sayı diğerlerinin arasında öne çıkar ve bunlar matematiğin değişik alanlarında merkezi bir rol oynar. Bunların en bilineni ilk olarak çemberlerle karşılaşmamızda ortaya çıkan π (pi) sayısıdır.

Sayıların çoğu böylesine büyük öneme sahip olamaz, ancak çoğu zaman en alçakgönüllü sayının bile bazı sıradışı özelliklerini bulabilirsiniz. *Otostopçunun Galaksi Rehberi* kitabında 42 sayısı 'hayatın, evrenin ve her şeyin nihai sorusuna cevaptı.' Douglas Adams arkadaşları arasında yaptığı hızlı bir anketin 42'nin tamamıyla sıkıcı bir sayı olduğunu belirttiğinden bu sayıyı seçtiğini söyledi. Son bölümün gösterdiği üzere bu sayı aslında hiç de sıkıcı değildir.

"Bu kitap büyük bir coşkuyla yazılmış; klasik ve güncel araştırmaların harika bir özeti." –MAA Reviews

"Stewart sayılar dünyasının ne kadar olağanüstü olduğunu bize gösterdiği için ödülü hak ediyor." –Kirkus

"Ders kitaplarında bulamayacağınız matematiği bu kitapta keşfedebilirsiniz." –Commonsense Media

"Sonsuzdan daha büyük bir sayı olduğunu biliyor muydunuz? Eğer sudokunun, rubik küpün veya kendi özel kodunuzun gizemlerini keşfetmek istiyorsanız bu kitap tam size göre."

–<https://plus.maths.org> Peter O'Donnell



@alfakitap

alfakitap

f alfakitap

www.alfakitap.com



PROFESÖR STEWART'IN İNANILMAZ SAYILARI

IAN STEWART

Warwick Üniversitesinde matematik profesörü ve Matematik Farkındalık Merkezi müdürüdür. Dinamikte simetri, örüntü oluşumu, kaos ve matematiksel biyoloji gibi konularda 140'ın üzerinde araştırma makalesi yazmıştır; ayrıca *Güzellik Neden Gerçekliktir*, *Genç Matematikçiye Mektuplar*, *Tanın Zar Atar mı?*, *Doğanın Sayıları*, *Açıklamalı Düzülke* ve *Yayvanülke* gibi pek çok popüler kitabı vardır. 2001'de Kraliyet Cemiyetine üye seçilmiştir. İngiltere'nin Coventry kentinde yaşamaktadır.

ZEYD REMZİ ŞEN

Galatasaray Üniversitesi Siyaset Bilimi bölümü 2015 yılı mezunudur. Sağlık Bilimleri Üniversitesi Hamidiye Uluslararası Tıp Fakültesi üçüncü sınıf öğrencisidir. 2015 yılından beri serbest mütercim/tercüman olarak çalışmaktadır. Bir yıl boyunca Arap dilinde ardıl tercümanlık yapmıştır.

Profesör Stewart'ın İnanılmaz Sayıları

© 2017, ALFA Basım Yayım Dağıtım San. ve Tic. Ltd. Şti.

Professor Stewart's Incredible Numbers

© 2015, Joat Enterprises

Kitabın Türkçe yayın hakları Profile Books Ltd. ve Anatolialit Ajans aracılığıyla Alfa Basım Yayım Dağıtım Ltd. Şti.'ne aittir. Tanıtım amacıyla, kaynak göstermek şartıyla yapılacak kısa alıntılar dışında, yayıncının yazılı izni olmaksızın hiçbir elektronik veya mekanik araçla çoğaltılamaz. Eser sahiplerinin manevi ve mali hakları saklıdır.

Yayıncı ve Genel Yayın Yönetmeni M. Faruk Bayrak

Genel Müdür Vedat Bayrak

Yayın Yönetmeni Mustafa Küpüşoğlu

Dizi Editörü Kerem Cankoçak

Redaksiyon Mehmet Ata Arslan

Çeviren Zeyd Remzi Şen

Kapak Tasarımı Füsün Turcan Elmasoğlu

Sayfa Tasarımı Mürüvet Durna

ISBN 978-625-449-311-9

1. Basım: Mart 2021

Baskı ve Cilt

Melisa Matbaacılık

Çiftelhavuzlar Yolu Acar Sanayi Sitesi No: 8 Bayrampaşa-İstanbul

Tel: 0(212) 674 97 23 Faks: 0(212) 674 97 29

Sertifika no: 45099

Alfa Basım Yayım Dağıtım San. ve Tic. Ltd. Şti.

Alemdar Mahallesi Ticarethane Sokak No: 15 34110 Cağaloğlu-İstanbul

Tel: 0(212) 511 53 03 (pbx) Faks: 0(212) 519 33 00

www.alfakitap.com - info@alfakitap.com

Sertifika no: 43949

IAN STEWART

42

3,14

PROFESÖR
STEWART'IN
İNANILMAZ
SAYILARI

$x+y$

π

2015 Lewis Thomas
Bilim Yazımı Ödülü

?

Çeviren: Zeyd Remzi Şen

ALFA | BİLİM

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - <https://rantey.org>

İÇİNDEKİLER

Önsöz, 7
Sayılar, 10

Küçük Sayılar, 25

1	Bölünemez Birim	27
2	Tek ve Çift Sayılar	31
3	Üçüncü Dereceden Denklemler	52
4	Kare	62
5	Pisagor'un Hipotenüsü	79
6	Öpüşme Sayısı	90
7	Dördüncü Asal Sayı	96
8	Fibonacci Küpü	107
9	Sihirli Kare	113
10	Onluk Sistem	119

Sıfır ve Negatif Sayılar, 133

0	Hiçlik Bir Sayı mıdır?	135
-1	Hiçlikten Daha Azı	145

Karmaşık Sayılar, 153

i	Sanal Sayı	155
---	------------	-----

Kesirli Sayılar, 163

1/2	Bölünmeyi Bölme	165
22/7	π 'ye Yakınsama	172
466/855	Hanoi Kulesi	175

İrrasyonel Sayılar, 183

$\sqrt{2}$	$\sim 1,414213$ Bilinen İlk İrrasyonel	185
π	$\sim 3,141592$ Dairenin Ölçümü	192
$\phi = (1 + \sqrt{5}) / 2$	$\sim 1,618034$ Altın Sayı	206

$e \sim 2,718281$ Doğal Logaritma	214
$\log 3 / \log 2 \sim 1,584962$ Fraktallar	225
$\pi / \sqrt[3]{18} \sim 0,740480$ Küreleri İstifleme	234
$^{12}\sqrt{2} \sim 1,059463$ Müzikte Gamlar	241
$\zeta(3) \sim 1,202056$ Apéry'nin Sabiti	254
$\gamma \sim 0,577215$ Euler Sabiti	257

Özel Küçük Sayılar, 259

11 Sicim Kuramı	261
12 Pentominolar	269
17 Çokgenler ve Örüntüler	276
23 Doğum Günü Açmazı	288
26 Gizli Şifreler	294
56 Sosis Savı	306
168 Sonlu Geometri	309

Büyük Sayılar, 323

$26! = 403.291.461.126.605.635.584.000.000$	
Faktöriyeler	325
$43.252.003.274.489.856.000$ Rubik Küp	329
$6.670.903.752.021.072.936.960$ Sudoku	334
$2^{57.885.161} - 1$ (toplamda 17.425.170 basamak)	
Bilinen En Büyük Asal Sayı	337

Sonsuz Sayılar, 341

$\aleph_0$ Alef-Sıfır (İlk Sıfır): En Küçük Sonsuzluk	343
$\mathbb{C}$ Sürekliliğin Sayma Sayılı Hali	351

Hayat, Evren ve..., 357

42 Hiç de Sıkıcı Değil	359
------------------------	-----

İleri Okumalar, 365

Kitapta Yer Alan Şekillerin İzin Hakları İçin Teşekkürler, 367

ÖNSÖZ

Sayılar beni kendilerine her zaman hayran bırakmıştır. Okula gitmeden çok önce okumayı ve sayı saymayı bana annem öğretti. Okula başladığım ilk günün sonunda sanırım “hiçbir şey öğrenmedik” diye şikâyet ederek eve gelmişim. Annemin ve babamın bana ilginç her şeyi öğreneceğimi söyleyerek o zor güne beni daha önceden hazırladığından şüpheleniyorum ve ben de bu propagandaya biraz fazlaca kalpten inanmıştım. Gezegenler, dinazorlar ve alçıdan hayvan figürünün nasıl yapıldığı hakkında yakında bilgi edinecektim ve sayılar hakkında daha fazlasını öğrenecektim.

Sayılar beni hâlâ kendilerine hayran bırakıyor ve onlar hakkında daha fazlasını öğrenmeye devam ediyorum. Matematiğin sadece sayılar hakkında olmadığına –ancak sayılar bütün konuların temelini oluşturur– örneğin; modeller, örüntüler ve olasılıklar gibi birçok farklı düşünceyi konu aldığına işaret etmekte her zaman hızlıyım. Ve her sayı biricik bir bireydir. Birkaç özel sayı diğerlerinin arasında öne çıkar ve bunlar matematiğin değişik alanlarında merkezi bir rol oynar. Bunların en bilineni ilk olarak çemberlerle karşılaşmamızda ortaya çıkan π (pi) sayısıdır, ancak bu sayı çemberlerle hiç de ilgili gözükmeyen sorunlarda da birden ortaya çıkma eğilimine sahiptir.

Sayıların çoğu böylesine büyük öneme sahip olamaz, ancak çoğu zaman en alçakgönüllü sayının bile bazı sıra dışı özelliklerini bulabilirsiniz. *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy* [Otostopçunun Galaksi Rehberi] kitabında 42 sayısı ‘hayatın, evrenin ve her şeyin nihai sorusuna cevaptı.’ Douglas Adams arkadaşları arasında yaptığı hızlı bir anketin 42’nin tamamı-

la sıkıcı bir sayı olduğunu belirttiğinden bu sayıyı seçtiğini söyledi. Son bölümün gösterdiği üzere bu sayı aslında sıkıcı değildir.

Kitap, sayıların her zaman sayı doğrusundaki sırasında olmamakla beraber yine de sayılara göre düzenlendi. 1, 2, 3 vs şeklinde bölümler olmakla beraber 0 bölümü, 42 bölümü, -1 bölümü, 22/7 bölümü, π bölümü, 43.252.003.274.489.856.000 bölümü ve $\sqrt{2}$ bölümü de var. Görüldüğü üzere birçok olası bölüm sayı doğrusunda hiç de gösterilemez. Her bölüm o bölümün ana konularını içeren kısa bir özetle başlıyor. Özet eğer size olur da anlaşılmasın gelirse veya eğer herhangi bir kanıtla desteklenmeyen yavan varsayımlarda bulunuyorsa endişelenmeyin; okumaya devam ettiğinizde her şey daha açık olacak.

Bölümlerin yapısı alışıldığı biçimdedir: her bölüm ilginç bir sayıya odaklanıyor ve onun *neden* ilginç olduğunu açıklıyor. Örneğin 2 sayısı ilginçtir, çünkü tek-çift sayı ayrımı matematiğin ve bilimin tüm alanlarında ortaya çıkar; 43.252.003.274.489.856.000 sayısı ilginçtir, çünkü bu rubik küpü yeniden düzenlemenin olası yollarının sayısıdır.

Bu sayıların içinde 42 de olduğundan o da ilginç olmalıdır. Aslında, her durumda birazcık öyledir.

Bu noktada Arlo Guthrie'nin *Alice's Restaurant Massacree* [*Alis'in Restorantı Katliamı*] adlı müzikalin gülünç hikâyesindeki çözü boşaltma esnasında tekrarlayan harikulade, detaylı olaylardan bahsetmeliyim. Şarkı başladıktan on dakika sonra, Guthrie durur ve der ki: "Sana bunu anlatmak için gelmedim." Sonuç olarak aslında o çöp hakkında konuşmak için gelmediğini fark edersen, o çöp daha büyük bir hikâyenin parçasıdır. Arlo Guthrie'ye bağlarsak bu kitap sadece sayılar hakkında *değildir*.

Sayılar onlarla ilgili şaşılabilecek bir matematiğin içine dâlabileceğimiz bir giriş noktası ve bir yoldur. *Her sayı özeldir*. Onlara bireyler olarak değer vermeye başladığınızda, eski dost gibidirler. Her birinin size anlatacağı kendi hikâyesi vardır. Hikâye sıklıkla birçok başka sayıya yol açar, ancak asıl önemli olan onları birbirine bağlayan matematiktir. Sayılar tiyatro

oyunundaki karakterler gibidir ve en önemli şey bu oyunun kendisidir. Ama karakterler olmadan bir oyuna sahip olamazsınız.

Kitabı fazla düzensizlikten kaçınmak amacıyla sayıların çeşitlerine göre kısımlara ayırdım: küçük tamsayılar, kesirler, gerçel sayılar, karmaşık sayılar, sonsuzluk... Malzeme az sayıda kaçınılmaz istisna dışında konu tamamen değişse bile önceki bölümler sonrakiler için temel oluştursun diye mantıksal bir dizgede oluşturuldu. Bu gereklilik sayıların nasıl düzenleneceğini etkilemekte ve bazı tehlikeler içermektedir. Bu tehlikelerin en önemlisi karmaşık sayılarla ilgilidir. Onlar kitapta başa çok yakın yer alır, zira daha bilindik sayıların bazı özelliklerini tartışmak için onlara ihtiyacım var. Benzer şekilde ileri seviye bir konu ara sıra bir yerde aniden ortaya çıkar, çünkü orası ondan bahsetmek için mantıklı tek yerdir. Eğer böyle parçalardan birine rast gelir de anlaması size zor gelirse, onu geçin ve devam edin. Daha sonra ona geri dönebilirsiniz.

Bu kitap benim "*İnanılmaz Sayılar*" adlı iPad uygulamam için yardımcı bir kitaptır. Kitabı okumak için uygulamaya ve uygulamayı kullanmak için de kitaba ihtiyacınız yok. Aslında onlar arasında çakışma oldukça küçüktür. Biri diğerini tamamlar, çünkü her araç diğerinin yapamayacağı şeyleri yapabilir.

Sayılar gerçekten inanılmazdır; bununla kastedilen sayılar hakkında duyduğunuz hiçbir şeye inanmammanız değildir, tersine olumlu bir anlam söz konusudur: onlar kesin, çarpıcı özelliklere sahiptir. Ayrıca, bunu hiçbir toplama işlemi yapmadan tecrübe edebilirsiniz. Sayıların tarih içinde nasıl evirildiğini görebilir, örüntülerinin güzelliğini takdir edebilir, nasıl kullanıldıklarını keşfedebilir ve sürprizleriyle büyülenebilirsiniz: "56 sayısının bu kadar büyüleyici olduğunu hiç bilmiyordum!" Ama öyledir. Gerçekten öyledir. 42 sayısı da dahil olmak üzere tüm diğerleri için olduğu gibi.

SAYILAR

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ... Bundan daha basit ne olabilir ki? İnsanlığın kendisini çamurdan çıkarıp yıldızları hedeflemesini sağlayan muhtemelen her şeyden daha fazla bu sayılardır.

Sayıların kendi karakteristik özellikleri vardır ve bu, matematiğin çeşitli dallarının ortaya çıkmasına yol açar. Bununla birlikte onları teker teker incelemeden önce şu üç büyük soru göz atmaya değerdir. Sayılar nasıl doğmuştur? Sayı kavramı nasıl gelişmiştir? Ve sayı *nedir*?

Sayıların Kökeni

Kim olduğu bilinmeyen bir insan yaklaşık 35.000 yıl önce, Üst Paleolitik Çağda, Habeş maymununun kamış kemiğine (*fibula*) 29 çentik oydu. Bu kemik Swaziland'da Lemombo Dağlarında bir mağarada bulundu ve Lemombo kemiği olarak bilinir. Bu kemiğin sayıları |, ||, ||| vb gibi birer çentik şeklinde kaydeden bir çetele olduğu düşünüldü. Kameri aylara göre bir ayda 29,5 gün vardır, yani bu ilkel bir kameri ay takvimi veya kadın adet döngüsünün kaydı olabilirdi. Veya herhangi bir iş için yapılmış rastgele kesiklerdir. Ya da belki de bir eskiz kemiği.

55 çizikli diğer bir çetele kurt kemiği 1937'de Karl Abso-lon tarafından Çekoslovakya'da bulundu. Bu kemikse yaklaşık 30.000 yaşındaydı.

Belçikalı jeolog Heinzelin de Braucourt bir volkanik patlamayla yok olmuş küçük bir balıkçı kavminin kalıntıları arasında bir Habeş maymununun çentikli kamış kemiğini (*fibula*) keşfetti. Konumu, Uganda ile Demokratik Kongo Cumhuriyeti sınırında bulunan günümüzde Ishango denen yerd. Kemik yaklaşık 20.000 yaşındaydı.

Ishango kemiğinin en basit yorumu onun da bir çetele olduğudur. Bazı antropologlar daha ileriye gitmektedir ve onda çarpma, bölme ve asal sayılar gibi aritmetik yapıların elemanlarını tespit etmekte; bazıları onun altı aylık kameri takvim olduğunu düşünmekte; bazılarıysa çentiklerin kemikten yapılmış bu aleti daha iyi kavramak için yapılmış olduğuna ve matematiksel bir önemi olmadığına kanaat getirmektedir.

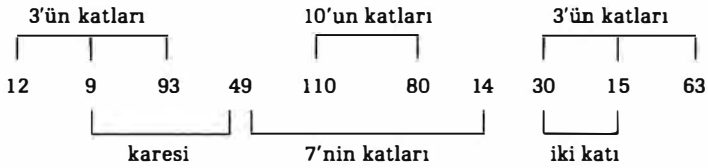


Şekil 1: Ishango kemiğinin önden ve arkadan görünüşü, Doğa Bilimleri Müzesi, Brüksel.

Bu kesinlikle merak uyandırıcıdır. Kemikte üç çentik serisi vardır. Merkez seri 3, 6, 4, 8, 10, 5, 7 sayılarını kullanır. İki kere 3, 6; iki kere 4, 8 ve iki kere 5, 10 yapar; bununla birlikte son çift diğerlerine göre terstendir ve 7 örüntüye hiç uymamaktadır. Soldaki seri 11, 13, 17, 19'dur: bunlar 10'dan 20'ye kadar olan asal sayılardır. Sağdaki seriyse 11, 21, 19, 9 tek sayılarını içermektedir. Sol ve sağ serideki sayıların toplamı ayrı ayrı 60'a eşittir.

Böylesine örüntüleri yorumlamayla oluşan sorunlardan birisi böylesine küçükçe sayılardan oluşan takımlarda bir örüntü bulmamanın zor oluşudur. Tablo 1 Bahamalardaki toplam alanları esas alınarak sıralanan adaların 11'den 20'ye kadarki on adedinin alanlarını örnek olarak göstermektedir. Onları alfabetik sıraya listeyi karıştırmak için koydum. Sizi temin ederim ki bu denediğim ilk şeydi. Bu eğer benim vurgulamak istediğimi vermemiş olsaydı, onları başka türlü yerleştirdim. Ama istediğim oldu ve dolayısıyla buna gerek kalmadı.

Biz bu sayı örüntüsünde neyi fark ediyoruz? Aynı özellikte birçok küçük dizi vardır:



Şekil 2: Bahama adalarındaki alanlarla ilgili bazı bariz örüntüler.

Başlangıç için bütün listede güzel bir simetri var. Başta ve sonda 3'ün katsayıları var. Ortada 7'nin katları olan iki sayıyı ayıran 10'un katı iki sayı var. Dahası $3^2 = 9$ ve $7^2 = 49$ olarak tam kare iki sayı var ve bu ikisi de *bir asal sayının* tam karesidir. Diğer bir bitişik çift biri diğerinin iki katı olan 15 ve 30'dur. 9-93-49 serisinde her sayı 9 rakamına sahiptir. 110-80-14 serisi hariç sayılar dönüşümlü büyür ve küçülür. Pekâlâ, bu on sayının hiçbirinin asal olmadığını fark ettiniz mi?

Adanın adı	Mil kare olarak alanlar
Berry	12
Bimini	9
Crooked Adası	93
Küçük Inagua	49
Mayaguana	110
New Providence	80
Ragged Adası	14
Rum Cay	30
Samana Cay	15
San Salvador Adası	63

Tablo 1

Bu konuda yeterince konuştum. Ishango kemiğiyle ilgili bir diğer sorunsu herhangi belirli bir yorumlamayı destekleyecek fazladan kanıt bulmanın gerçekte imkânsızlığıdır. Hal-

buki onun üzerindeki çentikler kesinlikle merak uyandırıcıdır. Onlar her zaman sayı yapbozudur. Bu nedenle şimdi daha az tartışmalı bir konuya bakalım.

Bundan on bin yıl önce Yakın Doğu'da insanlar muhtemelen vergilendirme amacıyla veya mülkiyetin kanıtı olarak sayıları kaydetmek için kil markalar kullanıyorlardı. Buna en eski iki örnek İran'ın Zagros Dağlarındaki Tepe Asiab ve Ganj-i-Dareh Tepe bölgelerindendir. Markalar bazıları simgesel işaretler taşıyan, değişik boyutlarda kil yumrular şeklindeydi. " + " sembolüyle işaretlenmiş bir top bir koyunu simgeliyordu; yedi adet bu şekilde marka yedi koyunu simgeliyordu. Çok sayıda marka oluşmasını engellemek için, on adet koyun için farklı şekilde bir marka oluşturulmuştu. Bununla birlikte diğer bir on adet keçiyi farklı şekildeki marka sembolize eder ve bu böyle devam ederdi. Arkeolog Denise Schmandt-Besserat markaların zamanın tahıl, hayvan ve yağ küpleri gibi mal kalemlerini sembolize ettiği çıkarımında bulundu.

Markalar MÖ 4000 yılı dolaylarında bir ipe kolye gibi diziliyordu. Bununla birlikte, sayıları marka ekleyerek ve çıkararak değiştirmek mümkündü, bu nedenle bir güvenlik önlemi meydana getirildi. Markalar bir kil örtüyle sarıldı ve daha sonra fırında pişirildi. Sayılar hakkındaki bir tartışma markayı muhafaza eden kil kırılıp halledilebilirdi. Kil kalıpların gereksiz kırılmalarını engellemek için Eski Mezopotamya'nın bürokratları kil kalıpların üzerine içindeki markaları listeleyen sembollerini MÖ 3500'den itibaren yazdılar.

Parlak bir öngörü sembollerin markaları gereksiz kıldığını sonradan fark etti. Sonuç, gelecekteki



Şekil 3: Kil kalıbı ve sayı markaları, Uruk dönemi, Susa'dan.

sayı gösterim sistemlerinin muhtemelen kendisini oluşturan yazılı sayı sembolleri sistemiydi.

Bu temelde bir tarih kitabı değil, bu yüzden gösterim sistemlerine daha sonra onlar belli sayılarla ilişkilendirilince gözeceğim. Örneğin antik ve modern ondalık gösterimler 10. bölümde ele alınacaktır. Bununla birlikte büyük matematikçi Carl Friedrich Gauss'un bir zamanlar dediği gibi önemli olan gösterimler değil, kavramlardır. Eğer insanlığın değişen sayılar anlayışı bağlamında düşünülürse sıradaki konular daha anlamlı hale gelecektir. Bu nedenle temel sayı sistemleri ve bazı önemli terimlerle ilgili hızlı bir yolculukla başlayacağız.

Devamlı Büyüyen Sayılar Sistemi

Biz sayıları doğal dünyanın bir özelliği, kesin ve sabit bir şey olarak düşünmeye meyilliyizdir. Onlar aslında insan icadıdır. –ancak çok yararlı icatlardır, çünkü sayılar kaç adet koya sahip olduğunuz veya evrenin yaşı gibi doğanın önemli yönlerini temsil eder. Doğa, cevapları bazen yeni matematiksel kavramlar gerektiren yeni sorular geliştirerek bizi devamlı şaşırtır. Matematiğin içsel talepleri de bazen yeni, potansiyel olarak kullanışlı yapıları üstü kapalı ima eder. Bu imalar ve sorunlar matematikçileri yeni tür sayılar üreterek sayı sistemlerini genişletmeye zaman zaman itmiştir.

Sayıların nesneleri saymak için bir yöntem olarak ilk nasıl ortaya çıktığını görmüştük. Sayıların listesi Erken Antik Yunan'da 2, 3, 4 olarak başlar ve aynı şekilde devam eder: 1 özel bir duruma sahiptir, "gerçek" bir sayı değildir. Bu gelenek daha sonra gerçekten saçma gözükmeye başladığında 1 de bir sayı olarak kabul edildi.

Sayı sistemini genişletme yolunda bir sonraki büyük adım kesirleri oluşturmaktır. Eğer bir malı birçok kişi arasında pay etmek isterseniz bunlar çok kullanışlıdır. Eğer iki kile (36,5 kg) tahıl üç kişi arasında pay edilmek istenirse her birine 2/3 kile kadar tahıl düşer.



Şekil 4. Solda: 2/3 ve 3/4 için hiyeroglifler Ortada: Wadjet gözü. Sağda: Wadjet gözünden elde edilen kesir hiyeroglifler.

Antik Mısırlılar kesirleri üç farklı yolla ifade ediyorlardı. 2/3 ve 3/4 için özel hiyeroglifleri vardı. 1 sayısının 2'nin ilk altı kuvvetine bölümünü anlatmak için Horus ya da Wadjet gözünün farklı oranlarını kullanmışlardır. 'Bir sayısının bir sayının yukarısında' olduğu 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 vb gibi birim kesirler için sembolleri sonunda akıl etmişlerdir. Diğer tüm kesirleri belirli birim kesirlerin toplamı şeklinde ifade etmişlerdir. Örneğin;

$$2/3 = 1/2 + 1/6$$

2/3'ü neden 1/3 + 1/3 şeklinde yazmadıkları açık değildir; ama durum bu.

Sıfır sayısı ona duyulan ihtiyaç muhtemelen az olduğundan dolayı çok sonraları gelecektir. Eğer hiçbir koyuna sahip değilseniz onları saymaya veya listelemeye de ihtiyaç olmaz. Sıfır ilk olarak bir sembol olarak sunuldu ve diğerleri gibi bir sayı olarak düşünülmedi. Ancak Hint ve Çinli matematikçiler negatif sayıları [-1 bölümüne bkz.] uygulamaya koyduklarında 0'ın da bir sayı olarak görülmesi zorunlu oldu. İki sayının toplamı $1 + (-1) = 0$ örneğinde olduğu gibi mutlaka bir sayı olarak tanınmalıdır .

Matematikçiler sayı sistemlerini şöyle tanımlar:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...$$

doğal sayılar ve bunlara negatif sayılar eklendiğinde *tamsayılar* elde ederiz

$$...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...$$

Kesirler, sıfır ve negatif kesirler *rasyonel sayıları* oluşturur.

Bir sayı sıfırdan büyükse *pozitif* ve eğer sıfırdan küçükse *negatif*. Yani her sayı (tam ya da rasyonel sayı olsun) bu üç kategoriden birine düşmektedir: pozitif, negatif veya sıfır.

Sayma sayıları:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...

pozitif tamsayılarıdır. Bu uzlaşım bizi doğal sayılar ve tamsayılar arasında bırakan kullanışsız bir terminolojiye götürür:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...

çoğunlukla *negatif olmayan tamsayılar* olarak görülür. Bunun için üzgünüm.

Kesirler uzun bir zaman boyunca sayı kavramının gittiği yere kadardı. Ancak, Antik Yunanlar bir kesrin karesinin hiçbir zaman 2'ye eşit olamayacağını kanıtladılar. Bu daha sonra ' $\sqrt{2}$ sayısı irrasyoneldir', yani rasyonel değildir şeklinde ifade edildi. Yunanlar bunun daha zahmetli bir yoldan söyleyişine sahiptiler, ancak $\sqrt{2}$ sayısının var olması gerektiğini biliyorlardı; Pisagor'un teoremine göre bu sayı kenarı 1 birim olan karenin köşegen uzunluğudur. Rasyonel sayılar tek başlarına her şeyi böleliyordu, dolayısıyla daha fazla sayıya böylece gerek duyuldu. Yunanlar irrasyonel sayılarla baş edebilmek için karmaşık bir geometrik yöntem buldular, ancak o tam olarak tatmin edici değildi.

Modern sayı kavramına doğru bir sonraki adımsa ondalık virgölün icadıyla ve ondalık gösterimle mümkün oldu. Bu irrasyonel sayıların yüksek bir doğruluk derecesiyle gösterilmesini sağladı. Örneğin

$$\sqrt{2} \sim 1,4142135623$$

virgülden sonra on ondalık birime kadar doğru bir gösterimdir (burada ve başka yerlerde $\sim$ sembolü 'yaklaşık olarak eşittir' demektir). Bu ondalık ifade tam olarak doğru değildir: onun karesi aslında

$$1,99999999979325598129\text{'dur.}$$

Virgülden sonra yirmi ondalık birime kadar daha doğru bir yakınsama

$$\sqrt{2} \sim 1,4142135623709504880$$

sayısıdır, ancak bu da tam karşılığı değildir. Ancak, sonsuz uzunlukta ondalık basamaklı gösterim *tamdır* şeklinde titiz bir mantıksal kanı vardır. Böyle bir ifade elbette ki tamamıyla yazılamaz, ancak mantıklı gelecek şekilde düşünceler oluşturmak mümkündür.

Kısmen en ve boy gibi doğal dünyanın ölçümüne doğrudan uydukları için, sonsuz uzunlukta ondalık sayılar (sonlarına sonsuz sayıda 0 eklenebildiği düşünülürse sonunda bir sayıyla bitip duranları dahil) *gerçel sayılar* olarak adlandırılır. Daha doğru bir sonuç elde etmek *istediğinizde* daha çok ondalık birime ihtiyaç duyacaksınız ve tam değere ulaşmak için sonsuz sayıda çoklukta onlara ihtiyacınız vardır. Gerçel sayıların tam olarak kâğıda yazılamayacak sonsuz bir sembolle anlatılması belki de alaycıdır. Ayrıca negatif gerçel sayılar da vardır.

On sekizinci yüzyıla kadar başka hiçbir matematiksel kavram yeni, orijinal bir sayı olarak görülmedi. Ancak on beşinci yüzyıldan itibaren, az sayıda matematikçi yeni bir sayı türünün olup olamayacağını merak ediyordu: eksi birin karekökü. Kendisiyle çarpılınca -1 'i veren bir sayı. Bu ilk bakışta çılgın bir fikir gibi göründü, çünkü herhangi bir gerçel sayının karesi 0 ya da pozitifdir. Bununla birlikte başkalarına kulak asmadan -1 'i karekök içine alma fikrinde ısrar edilmesinin iyi bir fikir olduğu ortaya çıktı ve Leonhard Euler bunun için *i* sembolünü ortaya attı. Bu sanal kelimesinin (İngilizcede, Fransızcada, Latince ve Almancada *imaginary*) ilk harfiydi ve onu rasyonel sayılardan ayırt etmek için böyle adlandırıldı. Maalesef bu gereksiz pek çok mistisizme neden oldu –Gottfried Leibniz *i*'yi bir keresinde var olmak veya olmamak arasında bir çift yaşamlı diye isimlendirdi– ki bu durum kilit önemdeki bir olguya gölge düşürdü. Şöyle ki rasyonel ve irrasyonel sayılar tam olarak aynı mantıksal konuma sahiptir. Onlar gerçekliği modelleyen insan yapımı kavramlardır, ancak onların kendisi somut değildir.

i'nin varlığı karmaşık sayılarla işlem yapabilmek için daha başka sayıların varlığını da gerekli kıldı; $-2 + 3i$ gibi sayılar. Bunlar *karmaşık sayılar* olarak adlandırılır, son birkaç yüzyılda matematik ve bilim alanında bu sayılar vazgeçilmez hale geldi. Bu tuhaf, ancak gerçek olgu birçok insana yeni bir haberdır, çünkü okul matematiğinde sık sık karmaşık sayılarla karşılaşmazsınız. Bunun nedeni önemsiz olduklarından değil, hakkındaki fikirlerin çok ileri olması ve uygulamalarının çok üst düzey olmasındandır.

Matematikçiler temel sayı sistemleri için süslü semboller kullanırlar. Ben onları bir daha kullanmayacağım, ancak onları bir kereliğine de olsa görmek zorundasınız:

$\mathbb{N}$ = Bütün doğal sayılar kümesi 0, 1, 2, 3...

$\mathbb{Z}$ = Bütün tamsayılar kümesi= ...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...

$\mathbb{Q}$ = Bütün rasyonel sayılar kümesi

$\mathbb{R}$ = Bütün gerçel sayılar kümesi

$\mathbb{C}$ = Bütün karmaşık sayılar kümesi

Bu sistemler Rus Matruşka Bebekleri gibi iç içe geçer:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$\mathbb{C}$ işareti sağdakinin soldakini kapsadığını belirtir. Örneğin her tamsayının bir rasyonel sayı olduğunu fark edebilirsiniz; örneğin 3 tamsayısı $3/1$ kesridir aynı zamanda. Biz genelde onu böyle yazmayız oysa iki gösterim de aynı şeyi sembolize eder. Benzer şekilde her rasyonel sayı aynı zamanda gerçel sayıdır ve her gerçel sayı aynı zamanda karmaşık sayıdır. Eski sistemler yeni sistemlerin içine sokulur, onları hükümsüz kılmaz.

Karmaşık sayılar bile matematikçilerin yüzyıllardır oluşturduğu sayı sisteminin genişlemesinin sonu değildir. Örneğin dördey sayılar $\mathbb{H}$ ve sekizzey sayılar $\mathbb{O}$ [4 sayısına ilişkin bölüme bkz.] vardır. Gelgelelim bunlar aritmetikten cebir açısından daha yararlanılabilir. Bu bölümü biraz daha çelişkili (paradoksal) sayılardan, yani sonsuzluktan bahsedip bitireceğim. Felsefi olarak sonsuzluk geleneksel sayılarla ters düşer, o doğal sayılardan karmaşık sayılara kadar hiçbir standart sayı sistemine ait değildir. Bununla beraber o herhangi bir sayı gibi olmamasına karşın, bir sayımsı gibi uçlarda ha-

vada durur. Bu durum Georg Cantor başlangıç noktamızı, yani saymayı yeniden ziyaret edip sonsuzluğun sayma anlamında sayılardan biri olduğunu ve sonsuzluğun çeşitli büyüklüklere sahip olduğunu gösterene kadar böyleydi. Onların arasında tamsayıların sayısı olan $\aleph_0$ ve ondan daha büyük olan gerçel sayıların sayısı olan C de vardır. Hangisinin büyük olduğu tartışmalıdır: bu matematiği kâğıda dökerken hangi aksiyom sistemini kullandığınıza bağlı olarak değişir.

Sayı Nedir?

Kulağa kolay bir soru gibi geliyor ve öyle de. Oysa cevabı kolay değil.

Hepimiz sayıları nasıl kullanacağımızı biliyoruz. Yedi ineğin, yedi koyunun veya yedi sandalyenin nasıl görüldüğünü biliyoruz. Hepimiz yediye kadar sayabiliriz. Pekâlâ, yedi nedir o halde?

Cevap 7 sembolü değildir. O keyfi bir seçimdir ve çoğu kültürde farklıdır. Arapçada ٧, Çince 七 veya daha resmi olarak 柒 şöyledir.

Cevap “yedi” (*seven*) kelimesi değildir. Yazımı Fransızcada *sept*, Almancada *sieben* olur.

On dokuzuncu yüzyılın ortalarında, az sayıda akliselim sahibi matematikçi binlerce yıldır herkes tarafından mutlu bir şekilde kullanılmasına rağmen sayıların aslında ne olduklarını kimsenin bilmediğin fark etti. Onlar da hiçbir zaman sorulmaması gereken soruyu dile getirdiler: sayı nedir?

Bu kulağa geldiğinden daha aldatıcı bir soru. Sayı birisine fiziksel dünyada gösteremeyeceğiniz bir şeydir. O bir soyutlamadır; gerçekten elde edilmiş, ancak esasında *gerçek olmayan* zihinsel, insan üretimi bir kavramdır.

Bu kulağa rahatsız edici gelebilir, sayılar bu açıdan bakıldığı zaman yalnız degillerdir. Benzer bir örnek “para”dır. Hepimiz nasıl ödeme yapacağımızı ya da alacağımızı biliyoruz ve bunu –sanmak istiyorum ki– parayı değiştirerek yapıyoruz. Biz parayı cebimizde veya cüzdanımızda kâğıt ya da madeni

olarak düşünmeye eğilimliyizdir. Halbuki eğer madeni ya da kâğıt para kullanmadan kredi kartı kullanırsak bu o kadar basit değildir. Somut para yerine telefon sistemiyle sinyaller kart şirketine gider ve son olarak bankamıza gider ve farklı bankalardaki bizim, dükkânın ve kart şirketinin hesaplarında paralar yer değiştirir. İngiliz 5£ kâğıt parası "Taşıyanının isteği üzerine beş poundun karşılığını ödemeye söz veriyorum," sözünü taşırdı. O, hiç de bile para değildi, para ödeme sözüydü. Bir zamanlar onu bankaya götürüp gerçek para olarak görülen altınla değiş tokuş edebilirdiniz. Şimdi bütün bankalar onu sadece başka bir 5£'la değiştirirler. Ancak altın da gerçek para değildi, onun sadece fiziksel bir gösterimiydi. Buna kanıt olarak, altının fiyatının sabit olmadığını getirebiliriz.

Öyleyse para bir sayı mıdır? Evet, ancak sadece özel bir yasal bağlam içerisindeyse bir sayıdır. Bir kâğıt parçasının üzerine 1.000.000 \$ yazmak seni zengin etmeyecektir. Parayı *para* yapan şey parayı sayılarla sembolize etmemiz, onunla mallar ve diğer sayıların alışverişini yapmamızdaki gibi insan üretimi geleneklerin vücuda gelmesidir. Onun ne olduğu değil, onunla ne yaptığınız önemlidir. Para bir soyutlamadır.

Sayılar da böyledir. Ancak bu çok da bir cevap değildir, çünkü bütün matematik bir soyutlamadır. Bu yüzden az sayıda matematikçi ne tür soyutlamaların sayı olarak tanımlanabileceğini merak etmeye devam etti. 1884 yılında Gottlob Frege isimli Alman matematikçi *The Foundations of Arithmetic* [Aritmetiğin Temelleri] adlı kitabında sayıların dayalı olduğu temel ilkeleri yazdı. On yıl sonra daha ileriye gitti ve mantığın temel yasalarından yola çıkarak bu ilkeleri ortaya koyma girişiminde bulundu. Onun *Basic Laws of Arithmetic* [Aritmetiğin Temel Yasaları] kitabı 1893 ve 1903 yıllarında iki cilt şeklinde yayımlandı.

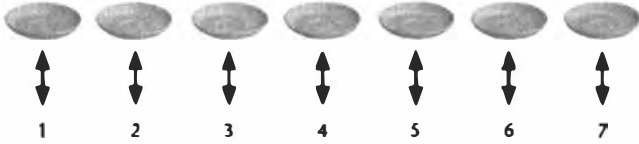
Frege sayma sürecinden işe başladı, kullandığımız sayılara değil saydığımız şeylere odaklandı. Eğer yedi adet fincanı bir masaya koyar ve "1, 2, 3, 4, 5, 6, 7" diye sayarsam sanki önemli olan sayılarınmış gibi görünür. Frege buna katılmaz: ona göre

önemli olan fincanlardır. Sayma işlemi çalışmaktadır çünkü bizim saymak istediğimiz bir fincan koleksiyonumuz vardır. Farklı bir koleksiyonla, farklı bir sayıya ulaşabiliriz. Frege bu koleksiyonları Almancada *sınıflar* olarak ifade etti. Biz bu özel sınıfın kaç fincandan oluştuğunu sayarken sayı sembolleri ile fincan sınıfları arasında bir *ilişki* kurulmaktadır.



Şekil 5: Sayılar ve fincanlar arasındaki ilişki.

Aynı şekilde verili bir çay tabağı sınıfıyla da böyle bir ilişki kurabiliriz.



Şekil 6: Çay tabağı ile sayılar arasındaki ilişki.

Öyleyse, biz çay tabağı sınıfı ile fincanlar sınıfının sayısının aynı olduğu çıkarımına varabiliriz. Kaç adet olduklarını biliyoruz: yedi adet.

Bayağılık açısından bu size açık gözükebilir, ancak Frege bunun bize daha derin bir şey söylediğini fark etti. Yani, biz çay tabağı sınıfı ile fincanlar sınıfının sayısının aynı olduğunu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 simgelerini kullanmadan ve orada kaç adet fincan ya da çay tabağının olduğunu bilmeden de kanıtlatabiliriz. Çay tabağı sınıfı ile fincanlar sınıfı arasında bir ilişki kurmak yeterlidir.



Şekil 7: Çay tabağı sınıfı ile fincanlar sınıfının arasında sayıları kullanmadan ilişki kurabiliriz.

Teknik olarak böylesine bir karşılık gelme *bire bir* karşılık gelme olarak adlandırılır: her bir fincan bir çay tabağıyla eşleşir ve her bir çay tabağı da tam olarak bir fincanla eşleşir. Eğer bir fincanı gözden kaçıırırsanız veya bir fincanı birkaç kez sayarsanız sayım bir işe yaramayacaktır. Bu teknik şartı unutmadan buna sadece bir karşılık gelme diyelim.

Bu arada ilkokul çocuklarının neden inekler kümesini tavuklar kümesiyle eşleştirmekle vakit harcadığını merak ettiyseniz, bu Frege yüzündendir. Bazı eğitimciler onun yaklaşımının çocukların sezgisini geliştireceğini ümit etmişti (ve hâlâ ümit ediyor olabilirler). Bunu; mantığı teşvik eden, psikolojiyi görmezden gelen ve “temel” kelimesinin anlamını bulandıran bir şey olarak görmeye eğilimliyim, ancak burada yeni bir Matematik Savaşları başlatmayalım.

Frege karşılık gelme yoluyla sınıflar arasında ilişki kurmanın sayılar olarak ifade ettiğimiz şeyin temelinde yattığı şeklinde bir sonuca varmıştır. Bir sınıfın kaç adet elemanı olduğunu saymayı; üyeleri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 gibi üzerinde kültüre bağlı biçimde uzlaşmış sembollerle gösterilen standart sınıfla eşleştirir. Ancak Frege sayı kavramının kültür bağımlı olması gerektiğini düşünmemiştir ve böylece rastgele seçilmiş sembollerin hepsinden vazgeçen bir yol ileri sürmüştür. Daha açık olarak evrensel, yani bütün kültürlerde aynı olan bir üst sembol icat etmiştir. Ancak bu yazıya dökülebilecek bir şey değildir, tamamen kavramsaldır.

O, bir sınıfın üyelerinin de bir sınıf olabileceğini öne sürerek işe başlamıştır. Onlar böyle olmak zorunda değildirler, ancak onların böyle olmalarını engelleyecek bir şey de yoktur. Gündelik yaşamdan bir örnek pişmiş bezelye konservele dolu bir kutudur: kutunun üyeleri konservele-

lerin üyeleri bezelyelerdir. Yani sınıfları başka sınıfların üyeleri olarak kullanmada bir sorun yoktur.

“Yedi” sayısı karşılık gelme yoluyla fincanlar sınıfımızla, çay tabaklarıyla veya 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sayılarını içeren bir sınıfla eşleştirilir. Bu sınıflar içinden herhangi birini seçmek ve onu sayı olarak adlandırmak incelikten yoksun ve tatminsiz hissettiren keyfi bir karardır. Neden bu işi tam yapmayalım ve bu sınıfların hepsini kullanmayalım? Böylece “yedi” karşılık gelme yoluyla bahsedilen herhangi bir sınıfla (ve böylece tümünün) ilişkili olan *tüm sınıfların sınıfı* olarak tanımlanabilir. Böyle yaptıktan sonra verili bir sınıfın yedi üyeye sahip olup olmadığını, bu sınıflardan bir sınıf olup olmadığına bakarak söyleyebiliriz. Kolaylık olsun diye biz bu sınıfı “yedi” diye etiketliyoruz, ancak biz bunu yapmasak dahi bu sınıf bu anlamı kendiliğinden veriyor. Böylece Frege bir sayıyı o sayı için keyfi bir isimden (ya da sembolder) ayırt ediyor.

Daha sonra bir sayının ne olduğunu tanımlayabilirdi: o verili bir sınıfa (ve böylece birbirine de) karşılık gelen *bütün sınıfların sınıfıdır*. Bu tip sınıf “üst-simge” diye adlandırdığım sınıfın tam da kendisidir. Eğer bu şekilde düşünüyorsanız, bu harika bir fikirdir. Aslına bakılırsa bir sayı için isim seçmek-tense, biz o nesnenin yerine kullanmak için kavramsal olarak bütün muhtemel isimleri bir nesnede bir araya getiriyoruz.

Pekâlâ, bu işe yaradı mı? Bunu tamsayılar bölümünde öğreneceksiniz.

Küçük Sayılar

Bütün sayılar içinden en aşına olduklarımız
1'den 10'a kadar olanlardır.

Her biri alışılmadık, nevi şahsına münhasır
özellikleriyle diğerlerinden ayrı olarak biriciktir.

Bu özellikleri takdir etmek sayıları bizim için alışıldık,
arkadaş canlısı ve başlı başına ilginç yapar.

Yakında, siz bir matematikçi olacaksınız.

BÖLÜNEMEZ BİRİM

En küçük pozitif tamsayı 1'dir. Bu aritmetik olarak bölünemez birimdir: iki küçük pozitif tamsayının toplanmasıyla elde edilemeyen tek pozitif tamsayı.

Sayı Kavramının Temeli

1 sayısı bizim saymaya başladığımız sayıdır. Herhangi verili bir sayıdan bir sonraki sayıyı bulmak için o sayıya bir ekleriz.

$$2 = 1 + 1$$

$$3 = (1 + 1) + 1$$

$$4 = ((1 + 1) + 1) + 1 \text{ Bu böyle devam eder.}$$

Parantezler bize önce hangi işlemi yapmamız gerektiğini söyler. Onlar genellikle yazılmazlar, çünkü yazılmadığı durumlarda genellikle sıralamanın bir önemi yoktur, oysa başlangıçta ihtiyatlı olmak en iyisidir.

Muntazam mantıksal gelişmeler olarak açıkça ortaya konulması gereken bu tanımlardan ve cebirin temel yasalarından yola çıkarak o meşhur ' $2 + 2 = 4$ ' teoremini kanıtlayabiliriz. Kanıtı bir satıra sığar:

$$2 + 2 = (1 + 1) + (1 + 1) = ((1 + 1) + 1) + 1 = 4$$

Bazı matematikçiler yirminci yüzyılda matematiği sağlam mantıksal temellere oturtmaya çalışırken aynı fikri kullandılar, ancak bazı teknik nedenlerle 0'dan başladılar.

1 sayısı önemli bir matematiksel fikir olan *emsalsizlik* fikrini ifade eder. Matematiksel bir nesne sadece kendisi herhangi bir hususi özelliğe sahipse emsalsizdir. Örneğin çift asal

sayı yalnızca 2 sayıdır. Emsalsizlik önemlidir, çünkü bir parça gizemli herhangi bir matematiksel nesnenin aslında bizim daha önce bildiğimiz birisi olduğunu kanıtlamamıza izin verir. Örneğin bilinmeyen herhangi bir pozitif n sayısının hem çift hem de asal sayı olduğunu kanıtlayabilirsek, bu sayı 2 olmak zorundadır. Daha karışık bir örnek olarak, beşgen yüzeylere sahip tek düzgün üç boyutlu cisim on iki yüzlüdür (5 bölüme bkz.). Bu yüzden herhangi bir matematik vakasında eğer beşgen yüzeylere sahip bir düzgün üç boyutlu cisimle karşılaşsak daha fazla bir çalışma yapmadan hemen biliriz ki o kesinlikle on iki yüzlü olmalıdır. On iki yüzlünün diğer bütün özellikleri bunun yanında bedel ödemedi gelecektir.

1'ler Çarpım Tablosu

Hiç kimse 1'ler çarpım tablosunu öğrenirken şikâyet etmemiştir. 'Bir kere bir, bir; bir kere iki, iki; bir kere üç, üç...' Eğer bir sayı birle çarpılırsa veya bölünürse o sayı değişmeden kalır:

$$n \times 1 = n \quad n \div 1 = n$$

O, bu şekilde davranan tek sayıdır.

Sonuç olarak 1 kendisinin karesine, küpüne ve diğer üst değerlerinin hepsine eşittir.

$$1^2 = 1 \times 1 = 1$$

$$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$1^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

böylece devam eder. Bu özelliğe sahip diğer bir sayıysa 0'dır.

Bu nedenle, cebirde 1 sayısı genellikle formülde bir çarpan olarak yazılmaz. Örneğin, $1x^2 + 3x + 4$ yerine sadece $x^2 + 3x + 4$ yazarız. Bu özellikte daha belirgin davranan başka bir sayı 0'dır: $0x^2 + 3x + 4$ yerine $3x + 4$ yazarız sadece $0x^2$ terimini yok sayarak.

1 asal sayı mıdır?

Eskiden öyleydi, ancak artık değil. Sayının kendisi değişmedi, ancak 'asallığın' tanımını değiştirdi.

Bazı sayılar başka iki sayının çarpımı şeklinde yazılabilir: örneğin, $6 = 2 \times 3$ ve $25 = 5 \times 5$. Bu türden sayılara *bileşik sayı* denir. Diğer sayılar bu şekilde elde edilemezler: onlar *asal sayı* olarak adlandırılırlar.

Bu tanıma göre, 1 sayısı asaldır ve 150 yıl öncesine kadar genel görüş böyledi. Daha sonra 1'i daha çok istisnai bir durum olarak görmek daha makul gözüktü. Günümüzde 1 ne asal ne de bileşik sayı, ancak bir *birim* olarak görülüyor. Neden olduğunu kısaca anlatacağım, ancak öncelikle diğer bazı fikir- lere ihtiyacımız var.

Asal sayılar dizisi şöyle başlar

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 47

ve görüldüğü üzere birkaç örüntü dışında oldukça düzensizdir. 2 hariçinde bütün asal sayılar tektir, çünkü her çift sayı 2 tarafından bölünebilir. Sadece 5, 5'le bitebilir ve hiçbirisi 0'la bitemez, çünkü böyle biten tüm sayılar 5'e bölünebilir.

1'den büyük her tamsayı asal sayıların çarpımı olarak ifade edilebilir. Bu iş *çarpanlarına ayırma* diye adlandırılır ve işlemde kullanılan sayılar o sayının *asal çarpanları* olarak adlandırılır. Ayrıca bu, asal çarpanların sıralamasını değiştirmenin dışında sadece bir şekilde yapılabilir. Örneğin

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = = 2 \times 3 \times 2 \times 5 = = 5 \times 3 \times 2 \times 2$$

böyle devam eder, ama 60 bu yöntemle elde etmek için en küçük asal sayıdan başlamak lazımdır. Örneğin $60 = 7 \times$ herhangi bir şey gibi bir çarpanlara ayırma yoktur.

Bu özellik 'çarpanlara ayırmanın emsalsizliği' diye adlandırılır. Bu apaçık bir şey gibi gözükür, ancak matematikte lisans derecesi almamış biriyseniz bunun neden böyle olduğunun ispatını birisinin size anlatmış olması beni gerçekten şaşırtacaktır. Bu, sayı benzeri diğer bazı sistemlerde doğru bile değildir. Ama bu sıradan bir hesaplama için doğrudur ve bu, matematik silah envanteri içinde çok kullanışlı bir silahtır.

2'den 31'e kadar sayıların çarpanlarına ayrılması:

2 (asal)	3 (asal)	$4 = 2^2$	5 (asal)	$6 = 2 \times 3$
7 (asal)	$8 = 2^3$	$9 = 3^2$	$10 = 2 \times 5$	11 (asal)
$12 = 2^2$	13 (asal)	$14 = 2 \times 7$	$15 = 3 \times 5$	$16 = 2^4$
17 (asal)	$18 = 2 \times 3^2$	19 (asal)	$20 = 2^2 \times 5$	$21 = 3 \times 7$
$22 = 2 \times 11$	23 (asal)	$24 = 2^3 \times 3$	$25 = 5^2$	$26 = 2 \times 13$
$27 = 3^3$	$28 = 2^2 \times 7$	29 (asal)	$30 = 2 \times 3 \times 5$	31 (asal)

1'i özel bir durum olarak kabul etmemizdeki ana neden eğer onu asal kabul edersek asal çarpanlara ayırma emsalsiz olmayacaktır. Örneğin $6 = 2 \times 3 = 1 \times 2 \times 3 = 1 \times 1 \times 2 \times 3$ ve bu böyle devam eder. 1 hakkındaki bu görüş birliğinin açık ve tuhaf sonucu 1'in hiçbir asal çarpana sahip olmamasıdır. Bununla birlikte o oldukça tuhaf bir şekilde asal sayıların bir ürünüdür: o asal sayıların 'boş kümesinin' ürünüdür. Eğer asal olmayan sayıları çarparsanız 1'i elde edersiniz. Bu muhtemelen kulağa çılgınca gelir, ama bu görüş birliğinin nedenleri vardır. Aynı şekilde 1'le *bir* asal sayıyı çarparsanız yine o asal sayıyı elde edersiniz

TEK VE ÇİFT SAYILAR

Çift sayılar 2'ye bölünebilir; tek sayılar bölünemez. Bu nedenle çift olan tek asal sayı 2'dir. O iki tam karenin toplamıdır: $2 = 1^2 + 1^2$. Bu özellikli diğer asal sayılar 4'e bölündüğünde tam olarak 1 kalanını verenlerdir. İki tam karenin toplamı olan asal sayılar asal çarpanlarına ayrılarak gösterilebilir.

Bilgisayarlarda kullanılan ikili aritmetik 10 yerine 2'nin kuvvetlerine dayalıdır. Bilinmeyen bir sayının karesini de içeren ikinci dereceden denklemler karekök kullanılarak çözülebilir.

Tek çift ayrımı permütasyonlarda bile vardır; bu bir nesne dizisini sıralamanın yoludur. Permütasyonların yarısı tek diğer yarısı çifttir. Daha açık bir uygulamasını göstereceğim: ünlü bir yapbozun çözülemeyeceğiyle ilgili basit bir kanıt.

Eşitlik (Tek/Çift Sayılar)

Bütün matematiğin içinde en önemli ayrımlardan birisi tek ve çift sayılar arasındakidir.

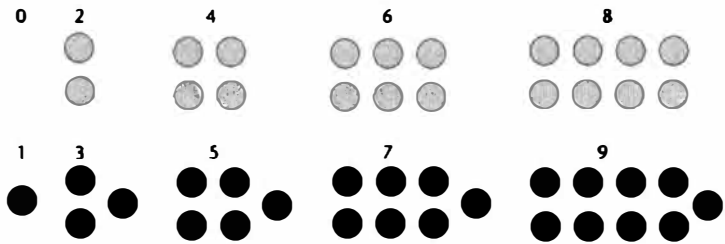
Tamsayılarla başlayalım 0, 1, 2, Bunlar arasında, çift sayılar

0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20...

ve tek sayılar

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21....

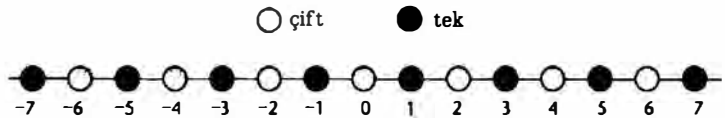
Genel olarak 2'nin katı olan tamsayılar çifttir ve 2'nin katı olmayanlarsa tektir. Görünüşe göre bazı öğretmenlerin öyle inanasına zıt olarak, 0 çifttir, çünkü o ikinin katıdır, şöyle ki 0×2 .



Şekil 8: Tek ve çift sayılar.

Tek sayılar 2'ye bölündüğünde 1 kalanını verir. (Kalan sıfırdan farklı ve 2'den küçüktür, bu da ihtimal olarak sadece 1'i bırakır.) Cebirsel olarak, n tamsayı olması koşuluyla, çift sayılar $2n$ ve tek sayılar $2n + 1$ formundadır. (Yine, $n = 0$ almak 0'ın çift olduğunu gösterir.) Tek ve çift kavramlarını negatif sayılara genişletmek için n 'yi negatif kabul ederiz Böylece -2 , -4 , -6 ve benzerleri çift ve -1 , -3 , -5 ve benzerleriye tektir.

Tek ve çift sayılar sayı doğrusunda art arda gelir.



Şekil 9: Tek ve çift sayılar sayı doğrusu boyunca art arda gelir.

Tek ve çift sayılarla ilgili zevkli bir özellikse elimizdeki sayılar ne olursa olsun onların basit aritmetik kurallarına uymasıdır.

$$\text{Çift} + \text{Çift} = \text{Çift}$$

$$\text{Tek} + \text{Tek} = \text{Çift}$$

$$\text{Tek} + \text{Çift} = \text{Tek}$$

$$\text{Çift} + \text{Tek} = \text{Tek}$$

$$\text{Çift} \times \text{Çift} = \text{Çift}$$

$$\text{Tek} \times \text{Tek} = \text{Tek}$$

$$\text{Tek} \times \text{Çift} = \text{Çift}$$

$$\text{Çift} \times \text{Tek} = \text{Çift}$$

Bu yüzden eğer birisi $13 \times 17 = 222$ olduğunu iddia ederse, siz işlem *yapmadan* onların yanlış olduğunu bilirsiniz. Tek $\times$ Tek = Tek'tir, ama 222 çifttir.

Çift ve En Küçük Asal Sayı

Asal sayılar kümesi 2'yle başlar, bu yüzden 2 en küçük asal sayıdır. O aynı zamanda çift olan yegâne asal sayıdır, çünkü tanım gereği bütün çift sayılar 2'ye bölünebilir. Eğer ilgili sayı 4 veya ondan büyükse, bu onun iki küçük sayının ürünü olduğunu gösterir, yani o bileşiktir. Basit ve apaçık olan bu özellikler 2'ye bütün sayıların içinde emsalsiz bir konum verir.

İki Tam Kare Toplamı Teoremi

1640 yılının Noel günü parlak zekâlı amatör matematikçi Pierre de Fermat keşiş Marin Mersenne'e bir mektup yazdı ve merak uyandırıcı bir soru sordu. Hangi sayılar iki tam kare sayının toplamı olarak yazılabilir?

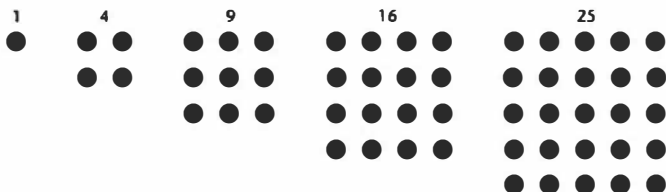
Bir sayının karesi onu kendisiyle çarptığınız zaman elde ettiğinizdir. Böyle olunca 1'in karesi $1 \times 1 = 1$ 'dir, 2'nin karesi $2 \times 2 = 4$ 'tür, 3'ün karesi $3 \times 3 = 9$ 'dur vb.

O'dan 10'a kadar olan sayıların karesi şöyledir:

0 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100

Daha az ilgi çeken O'dan ve 1'den sonra ilk tam kare 4'tür.

Kare kelimesi kullanılır, çünkü noktaları birlikte kare oluşturacak şekilde yerleştirirsek bu sayılar meydana gelir.



Şekil 10: Kareler.

Tam kareleri çiftler halinde toplarsak yine tam kareler elde ederiz: sadece bir tam kareye 0 ekleyin. Ancak, şöyle tam kare olmayan sayılar da elde ederiz

$$\begin{aligned} 1 + 1 &= 2 \\ 4 + 1 &= 5 \\ 4 + 4 &= 8 \\ 9 + 1 &= 10 \\ 9 + 4 &= 13 \\ 16 + 1 &= 17 \end{aligned}$$

Bununla birlikte örneğin 3, 6, 7, 11 gibi birçok sayı hâlâ oluşmamıştır. İşte 0'dan 100'e kadar olan sayıların iki tam karenin toplamı şeklinde gösteren bir tablo. (Koyu yazılmamış herhangi bir sayıyı elde etmek için dikey ve düşey sıradaki koyu yazılmış iki sayıyı toplayınız. Örneğin $25 + 4 = 29$. Burada 100'den büyük olan toplamlar silinmiştir.)

	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	1	2	5	10	17	26	37	50	65	82	
4	4	5	8	13	20	29	40	53	68	85	
9	9	10	13	18	25	34	45	58	73	90	
16	16	17	20	25	32	41	52	65	80	97	
25	25	26	29	34	41	50	61	74	89		
36	36	37	40	45	52	61	72	83			
49	49	50	53	58	65	74	85				
64	64	65	68	73	80	89					
81	81	82	85	90	97						
100	100										

Tablo 2

İlk bakışta bir örüntü bulmak zordur, ancak bir adet vardı ve Fermat onu fark etti. Püf noktası tablodaki sayıları asal çarpanlarına ayırarak kâğıda dökmektedir. İstisna olan 0'ı ve 1'i dışarıda bırakırsak şunu elde ederiz.

<u>2 = 2</u>	$4 = 2^2$	<u>5 = 5</u>	$8 = 2^3$
$9 = 3^2$	$10 = 2 \times 5$	<u>13 = 13</u>	$16 = 2^4$
<u>17 = 17</u>	$18 = 2 \times 3^2$	$20 = 2^2 \times 5$	$25 = 5^2$
$26 = 2 \times 13$	<u>29 = 29</u>	$34 = 2 \times 17$	$36 = 2^2 \times 3^2$
<u>37 = 37</u>	$40 = 2^3 \times 5$	<u>41 = 41</u>	$45 = 3^2 \times 5$
$49 = 7^2$	$50 = 2 \times 5^2$	<u>53 = 53</u>	$58 = 2 \times 29$
<u>61 = 61</u>	$64 = 2^6$	$65 = 5 \times 13$	$68 = 2^2 \times 17$
$72 = 2^3 \times 3^2$	<u>73 = 73</u>	$74 = 2 \times 37$	$80 = 2^4 \times 5$
$81 = 3^4$	$82 = 2 \times 41$	$85 = 5 \times 17$	<u>89 = 89</u>
$90 = 2 \times 3^2 \times 5$	<u>97 = 97</u>	$100 = 2^2 \times 5^2$	

Burada asal olan sayıların altını çizdim, çünkü onlar problemin anahtarlarıdır.

Bazı asal sayılar eksiktir, sırasıyla: 3, 7, 11, 13, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79 ve 83. Fermat'yı taklit ederek onların ortak özelliğini fark edebilir misiniz?

Onların her biri 4'ün katlarının 1 eksigidir. Örneğin, $23 = 24 - 1$ ve $24 = 6 \times 4$. Listemde 2 asal sayısı tekrar eder; bu, bazı açılardan istisnaidir. Listemdeki *tüm* tek asal sayılar 4'ün katlarından 1 fazladır. Örneğin $29 = 28 + 1$ ve $28 = 7 \times 4$ 'tür. Dahası, bu formdaki sıralamada baş taraftaki az sayıda asal sayının hepsi listemde oluşur ve listeyi genişletirseniz, hiçbir asal sayıyı gözden kaçırmamış olursunuz.

Her asal sayı ya 4'ün katından 1 eksik ya da onun bir fazlasıdır, bu da k tamsayı olmak koşuluyla $4k + 1$ veya $4k - 1$ biçimidir. Çift olan tek asal sayı 2'dir. Öyleyse herhangi bir asal sayı şu üç formdan biri olmalıdır:

2'ye eşit olmalıdır.

$$4k + 1$$

$$4k - 1$$

İki tam karenin toplamı olan ve listemde eksik olan asal sayılar tam olarak $4k - 1$ biçiminde olanlardır. Bu eksik olan asal sayılar listedeki sayıların asal çarpanı olabilir. Örneğin 9, 18, 36, 45, 72, 81 ve 90 sayılarının asal çarpanı olan 3 sayısına bakınız. Bununla birlikte bütün bu sayılar 9'un yani 3^2 'nin katlarıdır.

Eğer daha uzun listelere aynı bakış açısıyla bakarsanız, basit bir örüntü ortaya çıkar. Söz konusu mektubunda Fermat, sıfırdan büyük ve iki tam karenin toplamı şeklinde yazılabilen sayıların tam olarak hep $4k - 1$ formundaki bir asal sayının çift kuvveti olduğunu ispat ettiğini iddia etti. İşin en zor kısmı $4k + 1$ formundaki her asal sayının iki tam karenin toplamı şeklinde olduğunu ispat etmektir. Albert Girard da 1632 yılında aynı doğrultuda bir varsayım kurdu, ancak ispat edemedi.

Tablo bazı örnekler içeriyor, ama öncelikle Fermat'ın iddiasını daha azimli bir örneklerle kontrol edelim. 4001 sayısının açık bir şekilde $4k + 1$ formundadır; sadece k 'yi 1000 olarak kabul edin. Bu aynı zamanda asaldır. Fermat'ın teoremine göre bu iki tam karenin toplamı olmalıdır, ama hangisi?

Daha kolay bir yöntemin yokluğunda, tam kare bir sayı elde edene kadar 4001'den sırasıyla 1^2 , 2^2 , 3^2 'ni çıkarabiliriz. Hesaplama şöyle başlar:

$$4001 - 1^2 = 4000: \text{tam kare değil}$$

$$4001 - 2^2 = 3997: \text{tam kare değil}$$

$$4001 - 3^2 = 3992: \text{tam kare değil}$$

ve sonunda tam kare denk gelir.

$$4001 - 40^2 = 2401: 49\text{'un tam karesi}$$

Böylece

$$4001 = 40^2 + 49^2 \text{ olur ve Fermat bu örnek için haklı çıkmıştır.}$$

$49^2 + 40^2$ bir yana bu esasen tek çözümdür. 4001'den tam kareler çıkararak bir tam kare sayı bulmak nadir bir olaydır; o neredeyse katıksız bir şanstır. Fermat bunun neden şans olmadığını açıklamıştır. O ayrıca $4k + 1$ asal olduğunda onu iki tam kareye ayırmanın sadece bir yolu olduğunu da biliyordu. Gauss bir formül oluşturdu, ancak o hiç pratik değildi. Böyle olunca, formül onları bulmak için hızlı bir yol sağlamadan gerekli tam karelerin olduğunu gösteriyordu. Bu biraz teknik bir meseledir ve çok fazla hazırlık gerektirir, bu nedenle ispatı burada açıklamaya çalışmayacağım. Matematik'in sevimliliklerinden birisi; basit ve doğru ifadeler her zaman basit kanıtlara sahip değildir.

İkili Sayı Sistemi

Bizim geleneksel sayı sistemimiz 'onluk' (*decimal*) olarak adlandırılır, çünkü taban sayısı olarak 10'u kabul eder ve Latince 10 *decem* kelimesidir. Bu yüzden 0'dan 9'a kadar 10 rakam vardır bir sayı içinde rakamların basamak değerleri 10'un katları şeklinde sağdan sola doğru artar. Yani 10 on, 100 yüz, 1000 bin demektir, vb [10 bölümüne bkz.]. Rakamlarla gösterme sistemi için herhangi bir sayı taban sayısı olarak kullanılabilir. Bu alternatif sistemlerin içinde en önemlisi 2'yi taban sayısı olarak kabul eden ikili sayı sistemidir. O halde sadece iki rakam olur, 0 ile 1 ve her basamağın değeri sağdan sola her adımda iki kat artar. İkili sayı sisteminde, 10 sayısı 2 (onluk genel sayı sistemimizdeki) demektir, 100 sayısı 4, 1000 sayısı 8, 10.000 sayısı 16 demektir, vesaire.

2'nin katı olmayan sayıları bulmak için 2'nin belli katlarını toplarız. Örneğin 23 onluk sistemde $16 + 4 + 2 + 1$ toplamına eşittir ki bunda 16 bir kere, 4 bir kere, 2 ve 1 bir kere kullanılmıştır 8 ise hiç kullanılmamıştır. Bu yüzden bu sayı ikili sayı sistemine göre

10111'dir. İkilik sayı sistemindeki ilk sayılar ve onların onluk sistemde karşılıkları şöyledir:

Onluk sistem	İkilik sistem	Onluk sistem	İkilik sistem
0	0	11	1011
1	1	12	1100
2	10	13	1101
3	11	14	1110
4	100	15	1111
5	101	16	10000
6	110	17	10001
7	111	18	10010
8	1000	19	10011
9	1001	20	10100
10	1010	21	10101

Tablo 3

20 sayısı için olan sembolleri deşifre etmek için, örneğin onları 2'nin kuvvetleri şeklinde yazarız.

1	0	1	0	0
16	8	4	2	1

Tarihçesi

MÖ 500 ve 100 tarihleri arasında bir zamanda Hint bilim insanı Pingala, şiirdeki ahenkler üzerine *Chandaḥsastra* adlı bir kitap yazdı ve uzun ile kısa hecelerin çeşitli varyasyonlarının listesini oluşturdu. Bu varyasyonları, modern formda 0 kısa 1 de uzun hecelere karşılık gelecek şekilde bir tabloda sınıflandırdı. Örneğin,

00 = kısa-kısa

01 = kısa-uzun

10 = uzun-kısa

11 = uzun-uzun

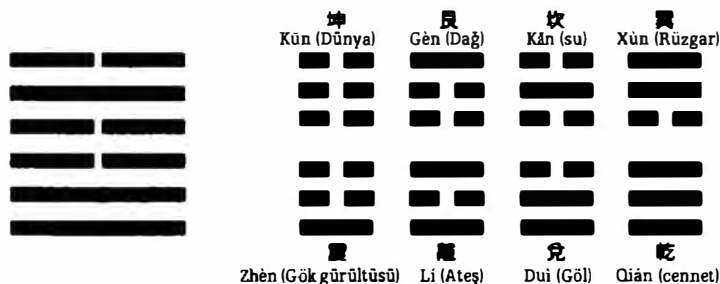
Buradakiler ikili sayı sisteminin örüntüleridir, ancak Pingala bu sembollerle matematiksel işlemler yapmamıştır.

Çince kadim bir kehanet kitabı olan *I Ching* (Yi; *Jing*) gelecek hakkında haber vermek için ya tam uzunluktaki (*yang*) ya da ikiye bölünmüş (*yin*) şeklindeki 64 takım 6 yatay satırı kullanıyordu. Bu takımlar hegzagram olarak bilinir. Her biri alt alta istiflenmiş iki triagramdan ibarettir. Aslında bu, hangi hegzagrama bakman gerektiğini belirleyen kuralları uygulayarak ve civanperçemi otunun saplarını yere atarak kehanette bulunmak için kullanılırdı. Daha sonra bunun yerine üç madeni para kullanılır oldu.

Eğer biz 1'i tam bir çizgiyi (*yang*) ve 0'ı da kesikli bir çizgiyi (*yin*) sembol etmesi için kullanırsak her bir hegzagram ikili sayı sistemindeki altı basamaklı bir sayıya tekabül eder. Örneğin aşağıdaki resimdeki hegzagram 010011'dir. Kehanetin kurallarına göre bu 60 (節 = jiè) numaralı hegzagramdır ve 'kendine hâkim olmayı', 'ölçülü olmayı', 'kendini açıkça ifade etmeyi' imler. Tipik bir yorum (açıklamamı benden bekleme, çünkü hiçbir fikrim yok) şöyle başlar:

Kendine hâkim olmak—Sembolün üst tarafı: *k'an* dipsiz, su. Aşağısı: *tui* neşeli, göl.

Değerlendirme—Kendine hâkim olmak, başarı. Bunun kendini incitici olanı barındırılmamalıdır.



Şekil 11: *Solda*: 60 numaralı hegzagram. *Sağda*: Sekiz temel triagram.

Resim—Gölün üzerinde su: kendine hâkim olmanın sembolü. Böylelikle üst-insan sayıları ve ölçüleri yaratır ve erdem ile dosdoğru yolu mütalaa eder.

Buna karşılık *I Ching*'de ikili sayı sisteminin özellikleri oluşmuş olsa bile, onun aritmetiği yoktur. İkili sayı sistemi sembollerinin daha fazla matematiksel özellikleri binlerce sayfa yayımlanmamış el yazması bırakmış olan Thomas Harriot'un (1560–1621) yazılarında ortaya çıkar. Onlardan birisi şu şekilde başlayan bir liste içerir:

- 1 1
- 2 2
- 3 2 + 1
- 4 4
- 5 4 + 1
- 6 4 + 2
- 7 4 + 2 + 1

ve 31'e kadar devam eder.

$$30 = 16 + 8 + 4 + 2$$

$$31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

Harriot'nun ikili sayı sisteminin temel ilkelerini anlamış olduğu açıktır. Bununla birlikte, bu listenin geçtiği bağlam aritmetikle değil, çeşitli nesnelerin farklı yollarla nasıl oluşturulabileceğini numaralandıran uzunca tablolar serisiyle ilgilidir.

Francis Bacon 1605'te alfabenin harflerinin ikili sayı sisteminin sayılarının dizileri olarak nasıl şifreleneceğini, onları sayılar olarak kullanmaya çok yaklaşıp açıklandı. İkili sayı sistemi aritmetik olarak gösterimi, sonunda 1697'de Leibniz'in Brunswick dükü Rudolph'a, yazdığı mektupta bir "madeni para veya madalyon" önermesiyle ortaya çıktı.



Şekil 12: Leibniz'in ikili sayı sistemi madalyonu.

Tasarım '*omnibüs ex nihilo ducendis sufficit unum*' ifade-siyle (her şeyin hiçlikten doğması için bir yeterlidir) ikili sayı sisteminde 0'dan 15'e kadar olan sayıların cetvelini yapmıştır. Leibniz matematiksel olarak eğer 0 (hiçlik) sembolüne sahip-seniz ona 1 (bir) ekleyerek öyleyse her sayıyı (her şey) elde ede-bilirsiniz. Ancak o dini bir beyanda bulunuyordu: tek bir Tanrı her şeyi hiçlikten yaratabilir.

Bu madalyon hiç üretilmedi, ancak onun tasarımı başlı ba-sına dikkate değer bir adımdı. Leibniz 1703'e kadar ikili sayı sistemini geliştiriyordu ve *Explication de l'arithmétique Bina-ire* [İkili Sayı Sisteminin Açıklaması] adlı makalesini *Mémoi-res de l'Académie Royal des Sciences* [Kraliyet Bilimler Akade-

misî Bülteninde] yayımladı. Orada şöyle yazmıştı: “Onlukların söz konusu dizi [onluk sayı sistemi] yerine, tüm sistemlerin en basitini, ikişer ikişer hareket edenini uzun yıllardır kullanıyorum.” Leibniz ikili sayma sisteminde kuralların hiç kimsenin unutamayacağı kadar basit olduğuna ancak ikili sistemde bir sayının gösteriminin onluk sisteme göre dört kat daha uzun olduğuna, yani yönteminin çok pratik olmadığına dikkat çekmiştir. Aynı zamanda biraz öngörülü bir şekilde: “ikilerle hesaplama yapmak bilim için daha önemlidir ve daha çok buluşa imkân verir” ve “sayıların bu şekilde ifadesi her türlü işlemi çok daha fazla kolaylaştırmaktadır” da demiştir.

Aslında kafasında olan şey şudur.

$0 + 0 = 0$	$0 \times 0 =$
	0
$0 + 1 = 1$	$0 \times 1 =$
	0
$1 + 0 = 1$	$1 \times 0 =$
	0
$1 + 1 = 0$	$1 \times 1 =$
Elde var 1	1

Bir kere bu basit işlemleri bilerseniz, normal aritmetikteki benzer yöntemleri kullanarak ikili sayı sisteminde her türlü iki sayıyı çarpabilir ya da toplayabilirsiniz. Ayrıca çıkarma ve bölme de yapabilirsiniz.

Dijital Hesaplama

Leibniz ikili sistemin “bilim için temel bir yöntem” olması gerektiğini söylediğinde tam üstüne basmıştı. İkili sistem matematiksel bir tuhaflıktı, ama dijital bilgisayarların icadı bunu tamamen değiştirdi. Sayısal elektronik bir elektriksel sinyalin varlığı veya yokluğu arasındaki basit ayrım üzerine kuruludur. Bu iki durumu 1 ve 0’la sembolize edersek, ikili sistemde çalışmamızın sebebi daha çok belirgin olacaktır. Kuramsal olarak onluk sistemi kullanan bilgisayarlar da yapabiliriz, örneğin 0

volt, 1 volt, 2 volt gibi değerleri sembolize etmesi için 0'dan 9'a kadar olan rakamları kullanabiliriz. Bununla birlikte yüksek karışık hesaplamalarda belirsizlikler oluşur ve diyelim ki 6,5 voltluk bir sinyali aşağı ya da yukarı yuvarlayarak 6 ya da 7 almak kesinlik bildiremez. İyice tanımlanmış iki voltaj seviyesini kullanarak iki seviye arasındaki farkı çok daha aza indirerek bu tarz belirsizlikler ortadan kaldırılabilir.

Günümüzdeki üretim yöntemleriyle 2'li yerine 3'lü tabanda (üç terimli) veya daha büyük tabanda bilgisayar yapımı mümkündür. Ancak zaten ikili sistem üzerine inşa edilmiş devasa bir teknoloji olduğu ve ikiliden onluya geçiş hesaplamalarla mümkün olduğu için, diğer tabanlı sistemler standart ikili sisteme oranla yeterince büyük avantaj sağlamaz.

Permütasyonların Denkliği

Tek ve çift sayı ayrımı özellikle verili bir küme sayının, harfin veya matematiksel nesnenin yeniden sıralanmasının yolları olan permütasyon kuramında önemlidir. Eğer küme n adet elemandan oluşuyorsa olası permütasyonların sayısı n 'nin faktöriyelidir.

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

Çünkü birinci sayıyı n farklı şekilde, ikincisini $n - 1$ farklı şekilde, üçüncüyü $n - 2$ farklı şekilde seçebiliriz [26! bölümüne bkz.].

Permütasyonlar *tek* ve *çift* olmak üzere iki çeşittir. Tekli permütasyonlar tek sayıda elemanın çiftli permütasyonlar çift sayıda elemanın yer değiştirme sayısını verir. Bunun detayına birazdan ineceğim. Burada 'tek' ve 'çift', permütasyon eşitliği olarak adlandırılır.

$n!$ sayıdaki muhtemel permütasyonların tam da yarısı tek, yarısı çifttir ($n = 1$ hariç, sadece bir sıralama ihtimalinin olduğu bir yerde çiftli permütasyon vardır tekli yoktur.). Bu yüzden $n \geq 2$ iken $n!/2$ kadar tek ve $n!/2$ kadar çift permütasyon vardır.

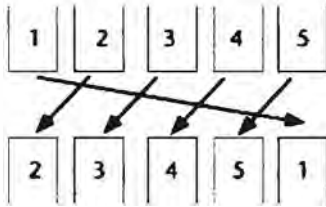
Tek ve çift permütasyonlar arasındaki farkı şema çizerek anlayabiliriz. Örneğin şu kümenin aşağıdaki gibi başlayan permütasyonunu (A olarak adlandıralım) düşünelim:

1, 2, 3, 4, 5

ve onu şu şekilde düzenleyelim

2, 3, 4, 5, 1

Şemadaki sayılar şu şekilde hareket eder:

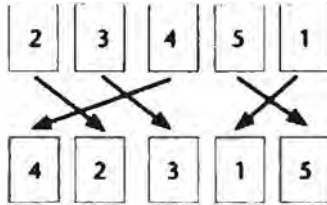


Şekil 13: A permütasyonu için şema.

Aynı şekilde şu kümeyle başlarsak

2, 3, 4, 5, 1 ve şu şekilde düzenlersek

2, 4, 3, 1, 5 o zaman semboller şu şekilde hareket eder:



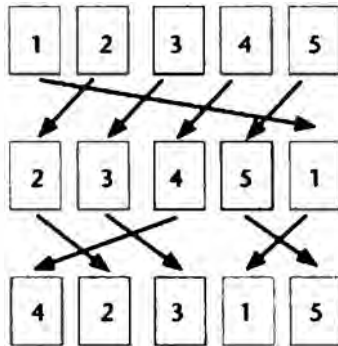
Şekil 14: B permütasyonu için şema.

Bunu da B permütasyonu olarak adlandıralım. Başladığımız kümenin elemanlarının sayı doğrusuna göre sıralanmadığına dikkat edin. Önemli olan sırası değil, nasıl değiştiğidir.

Permütasyonlar Oluşturma

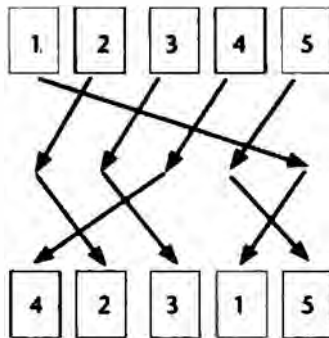
İki permütasyonu yeni bir permütasyon oluşturmak için birleştirebiliriz. Bunun için, ilk kümeyi ilk permütasyona göre

düzenleriz ve daha sonra da ikinciye göre sonucu düzenleriz. İki şemayı birleştirerek işlemi daha kolay anlayabiliriz:



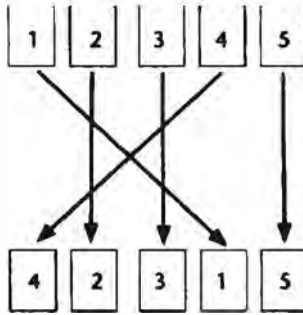
Şekil 15: B tarafından takip edilen A permütasyonu için şema.

A ve B permütasyonları yukarıda ve aşağıda ok dizileriyle gösterilmiştir. Onları birleştirmek için (benim AB permütasyonu olarak adlandıracığım permütasyonu vermesi için) sırasıyla okları izleriz ve ortadakileri kaldırırız. Şunu elde ederiz:



Şekil 16: Okları doğrudan çizmeden önce AB permütasyonu.

Sonunda okları şunu elde etmek için sileriz:



Şekil 17: Okları sildikten sonra AB permütasyonu.

Bu 1, 2, 3, 4, 5 kümesini 4, 2, 3, 1, 5 düzenine koyan permütasyondur.

Kesişen Sayılar ve Denklik

A permütasyonunda uzun olan ok diğer dört okla kesişiyor. Bu permütasyon 4 kesişmeye sahiptir deriz ve $c(A) = 4$ diye yazarsınız. B permütasyonu 3 kesişmeye sahiptir, öyleyse $c(B) = 3$ 'tür. Onların birleşimi olan AB 5 kesişmeye sahiptir, öyleyse $c(AB) = 5$ 'tir.

Okları silmeden önce AB 7 kesişme sayısına sahipti. Bu A 'nın ve B 'nin kesişim sayılarının toplamıydı:

$4 + 3 = 7$. Okları sildiğimiz zaman iki kesişme, sağ taraftaki ikisi, kayboldu. Bu iki ok birbirlerini kestiler daha sonra bir daha kesiştiler. Böylece ikinci kesişme birinci kesişmeyi 'iptal etmiş' oldu.

Bu gözlem genelde doğrudur. Eğer biz herhangi bir AB permütasyonunu elde etmek için bir A ve B permütasyonunu alırsak okları silmeden önce AB için kesişme sayısı, A 'daki ve B 'deki kesişmelerin toplamıdır. Okları sildiğimizde ya kesişimlerin toplamı aynı kalır ya da toplamdan çift bir sayıyı çıkartırız. Böylece $c(AB)$, $c(A) + c(B)$ 'ye eşit olmak zorunda olmamakla birlikte onların arasındaki fark her zaman bir çift sayıya eşittir. Bu de demektir ki $c(AB)$ 'nin *denkliği* $c(A)$ 'nın ve $c(B)$ 'nin denkliğinin toplamıdır.

$c(A)$ çiftse A permütasyonu çifttir tekse tektir deriz. Dolayısıyla A permütasyonunun denkliği 'tektir' veya 'çifttir'.

Çift permütasyon çift sayıda sembol ikilisinin değişim sayısıdır.

Tek permütasyonsa tek sayıda sembol ikilisinin değişim sayısıdır.

Bu, permütasyonları oluşturduğumuzda tıpkı tek ve çift sayıları topladığımız zamanki gibi şunu ifade eder:

çiftle çiftin bileşimi çifttir

tekle tekin bileşimi çifttir

çiftle tekin bileşimi tektir

tekle çiftin bileşimi tektir.

Bu zevkli özellikler matematiğin her yerinde kullanılır.

15'li Yapbozu

Permütasyonların denkliği teknik gözükebilir, ancak onların birçok uygulaması vardır. Onların en eğlencelilerinden birisi Noyes Chapman adında bir Amerikalı tarafından icat edilen bir yapbozdur. Yapboz ABD'yi, Kanada'yı ve Avrupa'yı kasıp kavuran bir çılgınlığa dönüştü. İşadamı Matthias Race onu Gem Yapbozu olarak piyasaya sürdü ve Charles Pevey isimli bir diş hekimi çözebilen kişiye bir ödül vaat etti. Onun diğer adları patron yapbozu (Boss Puzzle), 15 oyunu (Game of Fifteen), gizemli kare (Mystic Square) ve 15'li yapbozudur.

Yapboz sağ alt köşede boş bir blok olacak şekilde 1'den 15'e kadar numaralandırılmış kayabilen 15 kare bloktan ve başlangıçta 14 ile 15 sayısının sayı dizisindeki yeri değiştirilmiş şekilde oluşur (sol taraftaki şekil). Yapbozun amacı ardışık blokları boş olan kareye kaydırarak blokları doğru şekilde sıralamaktır (sağ taraftaki şekil).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Şekil 18: Bununla başla... ... ve böyle bitir.

Bu yapboz sıklıkla 1886'da çözene 1000 \$ ödül vaat ederek ona olan ilgiyi yeniden canlandıran Amerikalı yapbozcu Sam Loyd'a isnat edilir. Bununla birlikte Loyd parasının güvende olduğundan emindi, çünkü 1879'da William Johnson ve William Story 15'li yapbozunun hiçbir çözümünün olmadığını ispat ettiler.

Temel nokta boş bloğu on altıncı 'sanal blok' olarak sayarak herhangi bir pozisyonun temel pozisyonun başka bir permütasyonu olarak düşünülebilmesinde yatar. Temel pozisyon bir çift bloğun yer değiştirmesiyle (14 ve 15) istenilen son pozisyonun tekli permütasyonudur. Ancak boş bloğun tekrar eski yerine gelmesi zorunluluğu izin verilen bütün permütasyonların çift olmasını imler.

Bu nedenle izin verilen hareketler verili herhangi bir başlangıç durumundan tam olarak 16'in yarısı yani 10.461.394.944.000 kadar sayıda muhtemel düzenleme sayısına ulaşır. Muhtemel düzenlemelerin ufak kısmından biraz fazlasını deneme yanılma yoluyla keşfetmek imkânsızdır ki bu da insanları eğer sırf denemeye devam ederlerse tesadüfen bir çözüme ulaşabileceklerine kolayca ikna edebilir.

İkinci Dereceden Denklemler

Matematikçiler cebirsel denklemleri bilinmeyenlerden derecesi en büyük olana göre sınıflandırır.

$$5x - 10 = 0$$

denkleminin derecesi birdir, çünkü sadece x 'in birinci dereceden kuvveti mevcuttur.

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

denkleminin derecesi ikidir, çünkü x 'in ikinci dereceden kuvveti (karesi) vardır ancak daha büyüğü yoktur.

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

denkleminin derecesi 3'tür vesaire.

Az dereceli denklemlerin özel adları vardır:

1. Derece = 1. Dereceden (*linear*)
2. Derece = 2. Dereceden (*quadratic*)
3. Derece = 3. Dereceden (*cubic*)
4. Derece = 4. Dereceden (*quartic*)
5. Derece = 5. Dereceden (*quintic*)
6. Derece = 6. Dereceden (*sextic*)

Bir denklem ele alındığında asıl görev onu çözmektir. Bu da denklemi sağlayan bilinmeyen x değerini (veya değerlerini) bulmaktır. $5x - 10 = 0$ denkleminin çözümü $x = 2$ 'dir, çünkü $5 \times 2 - 10 = 0$ 'dır. $x^2 - 3x + 2 = 0$ ikinci dereceden denkleminin çözümü $x = 1$ 'dir, çünkü $1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0$ 'dır. Ancak $x = 2$ olarak ikinci bir çözümü daha vardır, çünkü $2^2 - 3 \times 2 + 2 = 0$ 'dır. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ üçüncü dereceden denkleminin üç adet çözümü vardır, $x = 1, 2$ ve 3 . Çözümlerin sayısı (gerçek) daima denklemin derecesine eşit ya da ondan küçüktür.

Doğrusal denklemleri çözmesi kolaydır, genel yöntemler binlerce yıldır bilinmektedir ve tarihi sembolik cebirin icat edilmesinden oldukça geriye gitmektedir. Ne kadar geriye gittiğini bilmiyoruz, çünkü elverişli kayıtlar mevcut değildir.

İkinci dereceden denklemleri çözmesi daha zordur. Bununla birlikte onları çözme metodu Babilliler tarafından 4000 yıl önce biliniyordu ve şimdi onu ele alacağım. Üçüncü, dördüncü ve beşinci dereceden denklemlerden 3, 4 ve 5. Bölümde bahsedeceğim.

Babillilerin Çözümü



Şekil 19: İki Babil matematiksel tableti.

1930 yılında matematik tarihçisi Otto Neugebauer Antik Babilden kalma kil tabletlerin ikinci dereceden denklemlerin nasıl çözüleceğini açıkladığını fark etti.

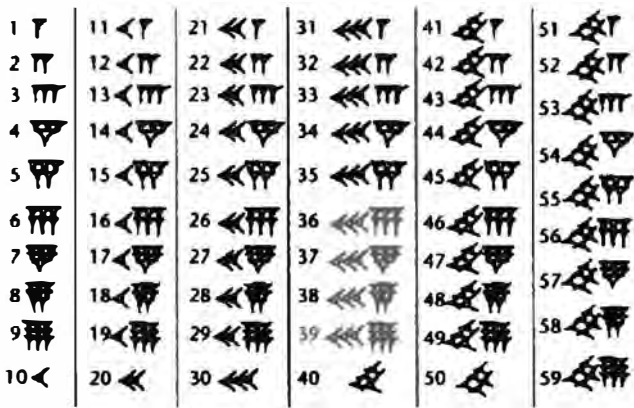
Öncelikle Babillilerin sayıları nasıl gösterdiğini bilmemiz gerek. Onlar sayı tabanı olarak 10'u değil 60'ı kullanıyorlardı. Böylece 2015 Babillilerin gösteriminde (onlar bizim rakamlarımız yerine kil üzerine yazılmış kama şeklinde işaretleri kullanıyorlardı)

$$2 \times 60^3 + 0 \times 60^2 + 1 \times 60^1 + 5 \times 60^0$$

olur ki bu da onluk sayı sisteminde $2 \times 216.000 + 0 \times 3600 + 1 \times 60 + 5 \times 1 = 432.065$ yapar. Onlar ayrıca $1/60$ 'ın, $1/3600$ 'ün vb katlarını eklemek için bizim ondalık virgölümüzün bir versiyonuna sahiptiler. Tarihçiler Babil rakamlarını şu şekilde yazarlar:

2,0,1,5 ve ondalık virgöl yerine noktalı virgöl kullanırlar. Örneğin

$$14, 30;15 = 14 \times 60 + 30 + 15/60 = 870 \frac{1}{4}$$



Şekil 20: 1'den 59' a kadar olan sayıların Babil çivi yazısı sembolleri.

Şimdi sıra ikinci dereceden denklemlere geldi. 4000 yıllık bir Babil tableti şöyle soruyor: 'Bir karenin alanı eksi bir kenarı 14,30'a eşitse karenin bir kenarını bulunuz?' Bu problem bilinmeyenin karesini (karenin alanı) ve kendisini içeriyor yani bu ikinci derece bir denklemden ibarettir. Tablet cevabın nasıl elde edileceğini anlatıyor

Babillilerin talimatları	Bizim gösterimimiz
1'in yarısını al, o da 0;30 yapar	$\frac{1}{2}$
0;30 u 0;30'la çarp o da 0;15 yapar	$\frac{1}{4}$
Buna 14,30;15'i elde etmek için 14,30'u ekle	$(14 \times 60 + 30) + \frac{1}{4} = 870\frac{1}{4}$
Bu 29;30'un karesidir	$870\frac{1}{4} = (29\frac{1}{2}) \times (29\frac{1}{2})$
Şimdi 29;30'a 0;30'u ekle	$29\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
Sonuç 30'dur, karenin bir kenarı	30

Tablo 4

En karmaşık adım karesi $870 \frac{1}{4}$ olan sayıyı (o da $29 \frac{1}{2}$) bulmak olan dördüncüsüdür. $29 \frac{1}{2}$, $870 \frac{1}{4}$ 'ün kareköküdür. Karekökler ikinci dereceden denklemleri çözmek için temel araçtır.

Bu sunum tipik Babil matematiğidir. Betimleme özel sayılarla yapılır, ancak yöntem daha geneldir. Sayıları sistemli olarak değiştirirseniz ve aynı yolu izlerseniz, diğer ikinci dereceden denklemleri de çözebilirsiniz. Eğer sayıları sembollerle değiştiren modern cebirsel gösterimi kullanırsanız ve genel ikinci dereceden bir denklemle başlarsanız

$$ax^2 + bx + c = 0$$

daha sonra Babil yöntemi cevabı üretir

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bunu tanımış olabilirsiniz: o tam olarak bizim okullarda öğrettiğimiz formüldür.

ÜÇÜNCÜ DERECE DENKLEMLER

En küçük tek asal sayı 3'tür. Bilinmeyenin üçüncü kuvvetini içeren üçüncü dereceden denklemler küpkök ve karekök kullanılarak çözülebilir. Uzay 3 boyuta sahiptir. Bir pergel ve cetvel kullanarak bir açıyı üç eş parçaya ayırmak imkânsızdır. Tam olarak 3 adet düzgün çokgen bir düzlem oluşturur. Bütün sayıların sekizde yedisi 3 tam karenin toplamıdır.

En Küçük Tek Asal Sayı

En küçük asal sayı çift olan 2'dir. Bir sonraki 3'tür ve bu da en küçük tek asal sayıdır. Diğer her bir asal sayı k tamsayı olmak koşuluyla ya $3k + 1$ ya da $3k + 2$ formundadır, çünkü $3k$, 3'e tam bölünebilmektedir. Ancak 3 hakkında söylenecek diğer birçok ilginç şey de vardır, bu yüzden onları asal sayılarla ilgili bölüme bırakıyorum [7. bölüme bkz.].

Üçüncü Dereceden Denklemler

Rönesans İtalya'sındaki matematikçilerin en büyük zaferlerinden biri üçüncü dereceden bir denklemin karekökler ve küpkökler içeren cebirsel bir formülle çözülebilir olduğunun keşfidir.

Rönesans büyük ve ani bir entelektüel değişiklik ve yenilik dönemi idi. O zamanın matematikçileri için de aynı şey geçerliydi ve onlar klasik matematiğin sınırlamalarını aşmak için kararlıydılar. İlk büyük atılım üçüncü dereceden denklemleri çözmek için olan bir yöntemdi. Bu yöntemin çeşitli versiyon-

ları kendilerinininkini sır olarak saklayan birkaç matematikçi tarafından bulundu. Son olarak Girolamo Cardano namı diğer Jerome Cardano onları dünyanın muhteşem cebir kitaplarından birinde, *Ars Magna*'da [*Muhteşem Sanat*] yayımladı. Bunu yaptığında diğerleri onu sırlarını çalmakla suçladı. Bu o kadar da mümkün olmayan bir şey değildi. 1520 yılı civarında Cardano meteliksizdi. Matematiksel yeteneklerini kullanarak kazanma şansını artırmak için ve mali bir kaynak olarak kumara yöneldi. Cardano dâhi biriydi ama haindi de. Birazdan göreceğimiz gibi o, akla yatan bir bahaneye sahipti.

Olanlar şöyleydi. Antonio Fior ve Niccolò Fontana (Tartaglia takma ismi, 'kekeme') 1535'te seyirciler önünde bir yarışmaya tutuştular. Birbirlerine çözmeleri için üçüncü dereceden denklemler sormuştular ve Tartaglia Fior'u açık ara farkla yenmişti. O zaman üçüncü dereceden denklemler üç farklı tipe ayrılıyordu, çünkü negatif sayılar bilinmiyordu. Fior sadece bir tipi çözmeyi biliyordu; Tartaglia başlangıçta ondan farklı bir tipi daha çözmeyi biliyordu, ancak yarışmadan az önce diğer bütün tipleri çözmeyi öğrenmişti. O Fior'un çözemeyeceği sadece kendisinin bildiği bir tipte bir adet soru sordu böylece rakibini darmadağın etti.

Cardano çalışmasını hazırlarken yarışmayı duydu ve Fior'un ve Tartaglia'nın üçüncü dereceden denklemlerin nasıl çözüleceğini bulduklarının farkına vardı. Bu eşi benzeri görülmemiş keşif kitabın değerini artırırды, bu yüzden Tartaglia'ya yöntemlerini açıklamasını istedi. Daha sonra belirttiğine göre Cardano'nun sırrını ifşa etmemesi sözünü vermesi üzerine Tartaglia sırrını sonunda ona söyledi. Ancak o, yöntemi *Ars Magna*'da yayımlandı, bu yüzden Tartaglia Cardano'yu intihalle suçladı.

Bununla birlikte Cardano'nun bir bahanesi vardı ve eğer bir kez söz verdiyse de onu da bozmak için iyi bir neden bulmuştu. Onun öğrencisi Lodovico Ferrari dördüncü dereceden denklemlerin nasıl çözüleceğini bulmuştu [4. bölüme bkz.] ve Cardano onu da kitabında istiyordu. Bununla beraber, Ferrari'nin yöntemi, ilgili bir üçüncü dereceden denklemin çözümü-

nü de içeriyordu bu yüzden Cardano Tartaglia'nın yöntemini yayımlayamadan Ferrarî'ninkini yayımlayamazdı. Bu, oldukça moral bozucu olsa gerek.

O daha sonra Fior'un, üçüncü dereceden denklemlerin tüm üç tipini de çözdüğüne ilişkin dedikodular dönmekte olan Scipio del Ferro'nun öğrencisi olduğunu öğrendi, zaten Fior'a sadece bir tipin sırrını açan da oydu. Del Ferro'nun yayımlanmamış yazmaları Annibale del Nave'nin elindeydi. Bu yüzden Cardano ve Ferrari 1543'te Del Nave'ye danışmak üzere Bolonya'ya gittiler ve yazmalarda üçüncü dereceden denklemlerin üç tipinin de çözümünü buldular; tam da dedikoduların söylediği gibi. Bu Cardano'nun, Tartaglia'ninkini değil del Ferro'nunkini yayımladığını iddia edebilmesini sağladı.

Tartaglia hâlâ aldatıldığını düşünüyordu ve Cardano'ya karşı acı ve uzun bir hiciv yayımladı. Ferrari ona halka açık bir yarışmada meydan okudu ve kolayca kazandı. Tartaglia bundan sonra ününü tekrar asla kazanamadı.

Modern sembolleri kullanırsak, Cardano'nun a ve b özel sayıları için $x^3 + ax + b = 0$ şeklindeki üçüncü dereceden denklemlerin çözümünü özel bir durum ve tam olarak yazabiliriz. (Eğer denklemde x^2 varsa kurnaz bir numarayla ondan kurtulunur, bu yüzden bu çerçeve her şeyin hakkından gelir.) Karekökleri ve küpkökleri içeren cevap şöyledir:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{4}}}$$

Sizi ilginç detaylardan muaf tutuyorum. Onlar şık ve zekicedir, ancak bu çeşit bir cebir o zevke sahip olanlara hitap eder ve siz onları kolayca temel kitaplarda veya internette bulabilirsiniz.

Uzayın Boyutları

Öklit geometrisi iki boyutu dikkate alır: düz bir kâğıt parçası üzerinde sınırlandırılan uzay geometrisi ve düzlem geometrisi

yürürlüktedir. Düzlem iki boyutludur: bir noktanın konumu iki koordinat (x, y) kullanılarak belirtilebilir. Bizim içinde yaşadığımız uzay üç boyutludur: bir noktanın konumu üç koordinat kullanılarak belirtilebilir (x, y, z) .

Bunu diğer bir türlü ifade etmenin yolu düzlemde (şimdi bir kitabın sayfasında dikey olarak ya da bilgisayar ekranında konumlandırın) iki bağımsız yön olmasıdır: sağ-sol ve aşağı-yukarı. Uzayda üç bağımsız yön vardır: kuzey-güney, doğu-batı ve aşağı-yukarı.

Matematikçiler (ve diğer herkes) 2000 yıldan beri üçün maksimum olduğunu varsayıyordu. Onlar dört-boyutlu bir uzayın olamayacağını düşünüyorlardı [4. bölüme bkz.], çünkü dördüncü bir bağımsız yön için bir yer yoktu. Eğer onun olduğunu düşünüyorsanız lütfen o yönde ilerlemeye devam edin. Bununla birlikte bu inanç, mevcut fiziksel uzay ile soyut matematiksel ihtimaller arasındaki uyumsuzluğa dayalıdır.

İnsanın normal algılayışı açısından, uzay aşağı yukarı Öklit'in üç boyutlu uzay geometrisindeki gibi davranır. Bununla birlikte, bizim algımız yakın çevremizle sınırlıdır ve Albert Einstein'a göre Öklit zihniyeti daha büyük ölçeklerdeki fiziksel uzayın geometrisiyle uyumlu değildir. Somut alanın ötesine, matematiksel kavramların soyut dünyasına girer girmez 'uzayları' istediğimiz kadar çok sayıda boyutla tanımlamak kolaydır. Kümemizde daha fazla koordinata izin veririz. Örneğin dört-boyutlu uzayda noktalar dört farklı koordinatın (w, x, y, z) kümesiyle belirlenebilecek şekilde özel hale getirilmiştir. Artık resim çizmek mümkün değildir –en azından, bilindik yollarla değildir– bu, matematiğin değil fiziksel uzayın ve insan algısının bir sınırlamasıdır. Aslında üç boyutlu uzayın resmini çizmenin de mümkün olmaması dikkat edilmesi gereken bir husustur, çünkü kâğıt ve bilgisayar ekranı iki boyutludur. Ancak bizim görme sistemimiz üç boyutlu nesneleri iki boyutlu çizimlerden yorumlamak için kullanılır, çünkü gelen ışık ışınları iki boyutlu olan retina tarafından algılanır. Üç boyutlu formun suretini iki boyutlu bir düzleme çizerek –ki bu aşağı yukarı her bir gözün dünyayı nasıl gördüğüdür– kendimizi

hoşnut ederiz. Siz de dört boyutlu cisimleri kâğıt üzerine 'çizmek' için benzer yöntemler icat edebilirsiniz, ancak onlar çokça açıklamaya ihtiyaç duyar ve onlara alışmak için bir miktar pratik yapmak gerekir.

Fizikçiler sonunda fark ettiler ki bir olayı hem zaman hem de mekânda konumlandırmak dört koordinat gerektirmektedir. Hastings muharebesi şu andaki A271 ve A2100 yollarının kesişim noktasına yakın bir konumda Sussex'in güney sahilinde Hastings'in kuzeybatısında meydana gelmiştir. Bu noktanın enlemi ve boylamı iki koordinat sağlar. Bununla birlikte yer-yüzü üzerinde yer alır, bu da deniz seviyesinden belli miktar metre yukarıda demektir. Bu da üçüncü uzaysal koordinattır ki böylece dünya üzerindeki yerini tam olarak belirtmiş oluruz. (Dünyanın güneş etrafındaki hareketini, güneşin galaksinin geri kalanıyla birlikte olan dolanımını, galaksinin Andromeda içerisindeki M31'e doğru olan hareketini ve bütün yerel galaksi gruplarının büyük çekiciye doğru emilim içerisinde olmalarını ihmal ediyorum.)

Bununla birlikte eğer bugün oraya giderseniz, İngilizleri Kral Harold komutasında işgalci Normandiya Dükü II. William ordusuna karşı savaştığını göremezsiniz, bunun nedeni de yanlış zaman koordinatında oluyor olmanızdır. Savaşı uzay ve zamanda konumlandırmak için dördüncü bir sayıya ihtiyacınız vardır, 14 Ekim 1066.

Bu yüzden fiziksel uzay üç boyuta sahip olmasına rağmen, uzay-zaman dört boyuta sahiptir.

Normal insan algısının ötesine geçtiğimizde uzay da görüldüğü gibi olmayabilir. Einstein, güneş sistemini veya galaksileri incelediğimizde çok büyük ölçeklerde uygulanabilir biçimde uzayın kütleçekim tarafından bükülebilir olduğunu göstermiştir. Ulaşılan geometri Öklit geometrisi gibi değildir. Fizikçiler çok küçük ölçeklerde, atom-altı parçacıklarda uygulanabilir olan belki de bizim fark edemeyeceğimiz şekilde çok sıkıca kıvrılmış uzayın altı veya yedi daha fazla boyuta sahip olduğundan şüphelenmektedirler [11 bölümüne bkz.].

Bir Açıyı Üçe Bölmenin ve Bir Küpün Hacmini İki Katına Çıkarmanın İmkânsızlığı

Öklit'in *Elements* [Öğeler] kitabı belli çeşitlilikteki geometri problemlerine çözümler getirmiştir, ancak birçok soruyu da cevapsız bırakmıştır. Herhangi bir açıyı geleneksel aletler, ölçülendirilmemiş bir cetvel ve bir pergel kullanarak açıortayla bölmek –onu iki eş parçaya ayırmak– için bir yöntem öngörmüştür [1/2 bölümüne bkz.]. (Kati suretle 'bir çift pergel'; aynı, kâğıdı makasla değil bir çift makasla kesmemizdeki ve bir çift pantolon giymemizdeki gibi. Ancak günümüzde çok nadiren bu derece titiz kimseler kalmıştır.) Bununla birlikte Öklit bir açıyı üçe bölmede –üç eş parçaya bölmek– bu aletleri kullanarak bir yöntem üretmek konusunda başarısız olmuştur. Bir küpü alarak onun hacminin sekiz katında bir küp elde etmeyi biliyordu; bütün ayrıtlarını iki katına çıkararak. Ancak bir küpün hacminin iki katında bir küp elde etme problemi olarak da bilinen, bir küpü alıp onun hacmini *iki katına çıkarmak* için bir yöntem bulamamıştı. Belki de onun en büyük ihmali bir daireden kare türetmesiydi: verili bir dairenin alanıyla aynı alana sahip bir kare elde etme yöntemi [π bölümüne bkz.]. Günümüz kavramlarıyla ifade edersek bu, tamsayı bir uzunluğa sahip bir çizgiden çevresi π uzunluğuna sahip bir geometrik şekil elde etmeye eşittir.

Bunlar 'Antikitenin üç geometri problemidir'. Eskiler yeni araçlar kullanarak bunların çözülmesini sağladılar, ancak bu yeni yöntemlerin gerçekten gerekli olup olmadığı sorusunun ucunu açık bıraktılar. Üç problem yalnızca cetvel ve pergel kullanılarak çözülebilir miydi?

Sonunda üç problemin hepsinin de sadece cetvelle ve pergelle çözülmesinin imkânsız olduğu kanıtlandı. Bir daireden kare oluşturmak özellikle zordu [π bölümüne bkz.]. Diğer ikisi 3 sayısının özel bir yetisine dayanmaktaydı. Şöyle ki: o 2'nin tam katı değildi.

Ana fikri bir küpün hacmini iki katına çıkarmada görmek daha kolaydır. Bir ayrıtı x olan bir küpün hacmi x^3 tür.

Bu yüzden biz $x^3 = 2$ olan denklemi çözmeye çalışıyoruz. Bu şöyle yapılabilir: cevap 2'nin küpköküdür.

$$\sqrt[3]{2} = 1,259921049894873164767...$$

Ancak bu sadece cetvel ve pergel kullanılarak yapılabilir mi?

Gauss klasik sayı kuramı kitabı *Disquisitiones Arithmeticae*'da [Aritmetikte Sorgulamalar] tamsayı uzunluğundaki bir cetvel ve pergel tarafından tanımlanan her türlü uzunluğun birkaç ikinci dereceden denklem kullanılarak cebirsel olarak ifade edilebilir olduğu sonucuna varmıştı. Bir parça cebir uzunluğun dolayısıyla derecesi 2'nin kuvveti olan tam katsayılı bir denklemin çözümü olması gerektiğini gösterecektir. Kabaca konuşursak her fazladan bir ikinci derece denklemin derecesini iki katına çıkaracaktır.

Şimdi sıra can alıcı kısımdadır. 2'nin küpkökü olan $x^3 = 2$ denklemi üçüncü derecedendir. Halbuki karşıda ikinin küpü yoktur, dolayısıyla bu uzunluk cetvelle ve pergelle çizilemez. Pierre Wantzel 1837'de Gauss'un ayrıntılı anlatmayı ve yazmayı önemsiz gördüğü çözümü tam bir ispatla halletmiştir. Sadece bir teknik nokta vardır: üçüncü dereceden denklem 'sadeleştirilemez' olmalıdır ki bu da burada rasyonel bir çözümünün olmaması demektir. $\sqrt[3]{2}$ irrasyonel olduğundan dolayı, bu noktayla kolayca baş edilebilir.

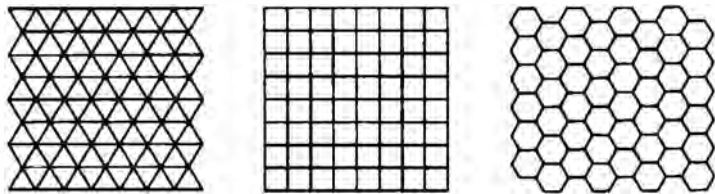
Ayrıca Wantzel aynı gerekçelerle bir açıyı üç eş parçaya ayırmanın da imkânsız olduğunu ispatlamıştır. Eğer 60°'yi üç eş parçaya bölmeyi ele alırsak, biraz trigonometriyle ve cebirle şu üçüncü dereceden denkleme ulaşırız.

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

Aynı şekilde bu da sadeleştirilemezdir, bu yüzden cetvel ve pergel çizimi mümkün değildir.

Kaç Çeşit Düzgün Çokgen Mozaik Şeklinde Bir Düzlem Oluşturur

Sadece üç düzgün çokgen mozaik şeklinde bir düzlem oluşturur: eşkenar üçgen, kare, altıgen.



Şekil 21: Mozaik şeklinde düzlem oluşturma yolları: eşkenar üçgen, kare, altıgen.

İspatı basittir. Bir düzgün çokgenin bir kenarının iç açısının ölçüsü $180 - 360/n$ 'dir ve ilk birkaç iç açı sonucu şöyledir:

Tablo 5

n	$180 - 360/n$	düzgün çokgen
3	60	eşkenar üçgen
4	90	kare
5	108	düzgün beşgen
6	120	düzgün altıgen
7	128,57	düzgün yedigen
8	135	düzgün sekizgen

Şimdi bu düzgün çokgenlerin aynlarından bir düzlem oluşturmaya bir düşünün. Her bir köşede birçok mozaik kesişecektir. Bu nedenle çokgenin bir köşesinin dış açısı 360° 'nin bir tamsayı tarafından bölünebilir hali olmalıdır. Dolayısıyla muhtemel dış açılar şunlar olacaktır

Tablo 6

n	$360/n$	düzgün çokgen
3	120	düzgün altıgen
4	90	kare
5	72	düzgün bir çokgenin dış açısı değil
6	60	eşkenar üçgen
7	51.43	düzgün bir çokgenin dış açısı değil

İlk tabloda kenar sayısı n arttıkça iç açının ölçüsü artarken ikinci tabloda n arttıkça dış açının ölçüsünün düşmekte olduğuna dikkat ediniz. 7 köşeden fazlasında ikinci tablodaki açı 60° 'den düşüktür, ancak birinci tablodaki açı daima 60° 'ye eşit veya ondan büyüktür. Bu yüzden tabloları uzatmak daha fazla mozaik üretmeyecektir.

Başka bir deyişle üç düzgün beşgenin birleşimi boşluk bırakırken, bu sayı dörde çıktığında kısmen çakışma söz konusudur; iki düzgün yedigen (veya kenar sayısı 7'den büyük bir düzgün çokgen) boşluk bırakır ama üçü de kısmen çakışır. Bu yüzden sadece eşkenar üçgen, kare ve altıgen tam olarak bir mozaik oluşturur.



Şekil 22: *Solda:* Üç düzgün beşgen boşluk bırakır; dört adedi kısmen çakışır. *Sağda:* İki yedigen boşluk bırakır; üç adedi kısmen çakışır. 7 kenardan fazlasında da aynı şey olur.

Üç Tam Karenin Toplamı

Birçok sayı iki tam kare toplamı olmadığı halde [2 bölümüne bkz.], üç tam karenin toplamı için ne dersiniz? Sayıların çoğu, ancak hepsi değil, üç tam kare toplamı şeklinde yazılabilir. Bu şekilde yazılamayanların listesi şöyle başlar:

7	15	23	28	31	39	47	55
60	63	71	79	87	92	95	103

Burada sayılarda yine bir örüntü vardır ve fark etmesi yine zordur. Bu, 1798 yılında Adrien Marie Legendre tarafından bulundu. Legendre, üç tam karenin toplamı olan sayıların tam olarak $4^k(8n + 7)$ formunda yazılamayan sayılar olduğunu saptadı. Yukarıdaki istisnalar listesi bu formdaki bütün sayıları içermektedir. Böylece eğer $n = 0$ ve $k = 0$ ise 7'yi elde ederiz,

eğer $n = 1$ ve $k = 0$ ise 28'i elde ederiz vs. Onun sonucu doğrudur, ancak onun ispatında Gauss tarafından 1801 yılında doldurulan bir boşluk vardır. $4^k(8n + 7)$ formundaki sayıların üç tam karenin toplamı şeklinde yazılamayacağını kanıtlamak çok zor değildir. Her tam kare 8'e tam bölündüğünde 0, 1 ve 4 kalanını verir. Bu yüzden üç tam karenin toplamı bu kalanların çeşitli toplamlarından 0, 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 kalanını verir ancak 7 kalanını vermez. Bu bize $8n + 7$ formundaki sayıların üçten daha fazla tam kareye ihtiyaç duyduğunu gösterir. 4^k hakkındaki sadece çok az daha zordur. En zor olan kısım sadece diğer bütün sayıların gerçekten üç tam karenin toplamı olduğunu göstermektir.

n çok büyük oldukça üç tam kare toplamı ve n 'den az olan sayıların oranı $7/8$ olmaya eğilimlidir. 4^k çarpanı büyük n 'ler için limiti değiştirmeye yetecek kadar bu oranı etkilemez ve sekiz tarafından bölünen sekiz adet kalandan sadece biri dışarıda kalır.

KARE

İlk tam kare (0'dan ve 1'den sonra) 4'tür. Komşu bölgeler farklı renkte boyanmak koşuluyla düzlem üzerindeki her harita 4 renkle boyanabilir. Her pozitif tamsayı dört adet tam karenin toplamıdır. Aynı durumun negatif tamsayılar kullanılırsa küpler için de geçerli olduğu zannediliyordu. Bilinmeyenin dördüncü kuvvetini içeren dördüncü dereceden denklemler karekökler ve küpkökler kullanılarak çözülebilir. (Dördüncü dereceden kök, karekökün kareköküdür.) Dört bağımsız birime dayalı dörtlü sayı sistemi neredeyse cebirin bütün standart kurallarına uyar. Dördüncü boyut var olabilir mi?

Tam Kare

$4 = 2 \times 2$ sayısı bir tam karedir [2 bölümüne *bkz.*]. Tam kareler matematiğin başından sonuna kadar merkezi bir öneme sahiptir. Pisagor'un teoremine göre dik açılı bir üçgende hipotenüsün karesi diğer iki dik kenarın kareleri toplamına eşittir, bu nedenle özellikle sayıların karesi geometride temel bir yer tutar.

Tam kareler gizli örüntülere sahiptir. Art arda gelen tam kareler arasındaki *farklara* bakınız.

$$1 - 0 = 1$$

$$4 - 1 = 3$$

$$9 - 4 = 5$$

$$16 - 9 = 7$$

$$25 - 16 = 9$$

Bunlar hangi sayılardır? Tek sayılardır.

1 3 5 7 9

Diğer ilginç bir örüntü doğrudan sonuçtur:

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

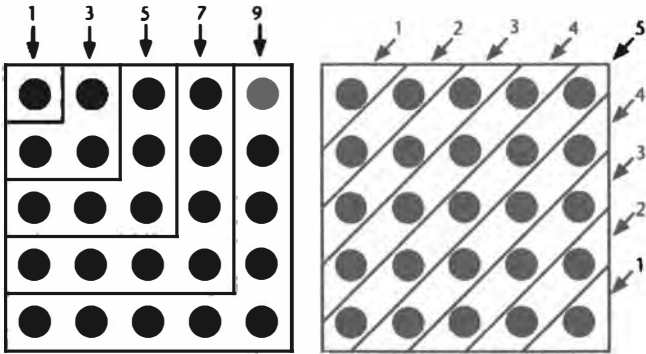
$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

Eğer tüm tek sayıları toplarsak, sonuç belli bazı sayılara kadar tam karedir.

Bu iki olgunun neden doğru olduğunu ve benekleri kullanarak birbirleriyle nasıl ilişkili olduklarını (sağ taraftaki şekil) anlamanın bir yolu vardır. Onlar elbette aynı zamanda cebir kullanılarak da ispat edilebilirler.



Şekil 23: Solda $1 + 3 + 5 + 7 + 9$. Sağda $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

İşte tam kareleri kullanarak bulunan bir diğer örüntü:

$$1 = 1$$

$$1 + 2 + 1 = 4$$

$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25$$

Bunu benekler kullanarak da görebiliriz (sağ taraftaki şekil).

Dört Renk Teoremi

Birkaç matematikçi 150 yıl önce haritalar hakkında fikir yürütmeye başladı. Ancak bu küresel bir gezegenin düzlem bir kâğıt üzerine aktarılması ve dünyanın hassas haritalarını yapmanın geleneksel sorunları hakkında değil daha çok haritalarla ilgili genel bulanık sorularla ilgiliydi. Sorun özellikle sınırdaş olan bölgeler aynı renkle boyanmamak koşuluyla haritanın nasıl boyanacağıydı.

Bazı haritalar çok renge ihtiyaç duymaz. Satranç tahtasının kareleri çok düzenli bir harita çeşididir ve sadece iki renge gerek vardır: sıradan desende siyah ve beyaz. Çakışan dairelerden elde edilen haritaları boyamak için de sadece iki renk gerekir [*Profesör Stewart'ın Matematik Gizemleri Kitabı'na bkz.*]. Ancak bölgeler daha düzensiz olunca iki renk yeterli olmaz.

Örneğin, aşağıdaki şekilde 50 adet eyaleti olan bir ABD haritası vardır. Açık bir şekilde her eyalete bir renk vererek 50 renkle bu iş halledilebilir, ancak daha iyisini yapabiliriz. Eyaletleri boyamayı deneyin ve renk sayısını en az ne kadar tutabileceğinizi bakın. Bir teknik meseleyi aydınlatmak gerek: eğer isterseniz sadece bir noktada kesişen Colorado ve Arizona gibi eyaletlere aynı rengi verebilirsiniz. Onlar ortak bir sınıra sahip değildir.



Şekil 24: 50 Amerikan eyaleti.

ABD haritası bazı basit genel ilkeleri örneklendirir. Alaska ve Hawaii gerçekten bir rol oynamaz, çünkü diğer bütün eyaletlerden izole olmuş durumdadır: onlara istediğimiz her rengi verebiliriz. Daha önemli olarak, kesinlikle en az üç renge ihtiyacımız vardır. Aslında Utah, Wyoming ve Colorado hepsi farklı renge sahip olmalıdır, çünkü onların her bir ikilisi ortak bir sınıra sahiptir.

Bu eyaletler için üç farklı renk seçebiliriz. Farklı oldukları sürece hangisi oldukları fark etmez. Bu nedenle Utah'ı siyaha, Wyoming'ı koyu griye, Colorado'yu donuk yeşile aşağıdaki şekildeki gibi boyayalım.



Şekil 25: Bu, neden en az üç renge gerek olduğunu göstermektedir.

Varsayalım ki haritanın geri kalanı için sadece bu üç rengi kullanmayı istedik. O halde Nebraska donuk yeşil ve koyu gri eyaletlerle sınırı olduğu için siyah olmak zorundadır. Bu da Güney Dakota'nın donuk yeşil olmasını gerektirir. Her yeni bir renk için sadece bir olasılıkla Montana, Idaho, Nevada, Oregon ve California'yı doldurarak bu şekilde bir miktar daha ilerleyebiliriz. Bu aşamada şunu elde ederiz:



Şekil 26: Eğer üç renk kullanmaya devam edersek sıkışıp kalırız.

Arizona'nın şu halde donuk yeşille, koyu griyle ve siyahla boyanmış eyaletlerle sınırı vardır. Bu noktaya kadar bütün renkler bitişik eyaletler tarafından kullanılmak zorunda olduğundan, üç renk bütün harita için yeterli olmayacaktır. Bu nedenle devam etmek için dördüncüye –diyelim ki, açık gri- ihtiyacımız vardır:



Şekil 27: Dördüncü bir renk imdada yetişir.

Alaska ve Hawaii hariç daha ilerideki 38 eyaletle, bir noktada belki beşinci veya altıncı bir renge ihtiyaç duyarız... kim bilir? Diğer yandan, elde olan dördüncü renk bütün oyunu değiştirir. Özellikle daha önce tayin edilmiş bazı renkler değiştirilebilir (örneğin, Wyoming'ı açık griye boyamak gibi). Artık renklerin seçilmesinde sadece zorunlu bir seçenek yoktur, bu nedenle problemin çözümü daha da karmaşılaşır. Bununla birlikte, işler yanlış giderse mantıklı tahminler yaparak ve renkleri değiştirerek devam edebiliriz. Boyamalardaki sonuçlara göre sadece üç açık gri eyalet vardır: Arizona, West Virginia ve New York. 50 adet eyalet bulunmasına rağmen, bütün haritayı sadece *dört* renkle renklendirdik.



Şekil 28: Beşinci bir renge gerek yoktur.

(Bir diğer teknik nokta şudur. Michigan onu ikiye ayıran Michigan gölü nedeniyle iki parçadır. Burada ikisi de koyu griye boyanmıştır ancak ikiye ayrılmış bölgeler bazen iki renge ihtiyaç duyar. Bu bütüncül bir matematik teorisinde göz önünde bulundurulmalıdır, ancak burada çok hayati bir önemi yoktur.)

ABD haritası özellikle karmaşık değildir, milyonlarca bölgeden oluşan haritalarla karşılaşabiliriz, hepsi de her yere

yayılmış, kıvrımlı ve girintili çıkıntılı da olabilir. Yine de olasılıkları hakkında düşünen matematikçiler harita ne kadar karmaşık olursa olsun dörtten fazla renge asla ihtiyaç duymayacağınız konusunda güçlü bir inanç geliştirmişlerdir. Bir düzleme veya yuvarlak bir yüzeye çizildiği ve bütün bölgeler birbiriyle bağlı olduğu sürece dört renk her zaman yeterli olur.

Dört Renk Probleminin Kısa Tarihi

1852'de Güney Amerikalı matematikçi ve bitki bilimci Francis Guthrie İngiltere haritası üzerinde kontlukları boyamayı denediğinde dört renk problemi ortaya çıkmıştır. Dört renk daima yeterli gözüküyordu, bu nedenle kardeşi Frederick'e bunun bilinen bir olgu olup olmadığını sordu. Frederick de tanınmış ama tuhaf matematikçi Augustus De Morgan'a sordu; onun hiçbir fikri yoktu, o da daha tanınmış bir matematikçi olan Sir William Rowan Hamilton'a yazdı. Hamilton da cevabı bilmiyordu, doğruyu söylemek gerekirse bununla çok da ilgilenmiş görünmüyordu. Dava vekili Alfred Kempe dört rengin yettiğine ilişkin bir yayın yaptı, ancak 1889'da Percy Heawood, Kempe'nin bir hata yaptığını fark etti. O Kempe'nin ispatının aslında beş rengin her zaman yeterli olacağını ispat ettiğini işaret etmiştir ve mesele bu noktada bir yüzyıl boyunca süruncemede kalmıştır. Cevap ya dörttü ya da beşti, ancak hangisinin doğru olduğunu kimse bilmiyordu. Diğer matematikçiler Kempe'ninkine benzer stratejiler denediler, ancak bu yöntemin usandırıcı hesaplamalar gerektirdiği kısa sürede açıkça ortaya çıktı. Son olarak 1976'da, Wolfgang Haken ve Kenneh Appel problemi bilgisayar kullanarak çözmüşlerdir. Dört renk her zaman yeterlidir.

Bu ufuk açıcı çalışmadan beri matematikçiler bilgisayar desteğine alıştılar. Hâlâ insanın beyin gücüne dayanan kanıtları *tercih ediyorlar*, ancak onların çoğu bunu bir gereklilik olarak artık görmüyor. Bununla birlikte 1990'larda Appel-Haken kanıtı hakkında haklı görülebilen miktarda tedirginlik vardı. Bu yüzden 1994'te Neil Robertson, Daniel Seymour, Paul

Seymour ve Robin Thomas aynı stratejiyi kurguyu basitleştirerek kullanarak bütün kanıtı yeniden ele almaya karar verdiler. Günümüz bilgisayarları o kadar hızlıdır ki, bütün ispat bir ev tipi bilgisayarda birkaç saat içinde doğrulanabilir.

Dört Kare Kuramı

[2] bölümünde iki tam karenin toplamını [3] bölümünde üç tam karenin toplamını ele aldık. Ama sıra dört tam karenin toplamına gelince, sağlayan sayıları bulmanız gerekmez. Hepsi sağlar.

Her fazladan tam kare daha fazla sayı elde etmeyi sağlar, dolayısıyla dört tam karenin toplamı en azından bir miktar boşluğu doldurmak zorundadır. Deneyler öyle gösteriyor ki 0'dan 100'e kadar *her* sayı bunu sağlar. Örneğin, 7 üç tam karenin toplamı olmamasına rağmen, dört tam karenin toplamıdır:

$$7 = 4 + 1 + 1 + 1$$

Bu erken başarı oldukça küçük sayılara bakıyor olmamızdan meydana gelmiş olabilir. Belki de bazı büyük sayılar beş, altı veya daha fazlasına ihtiyaç duyarlar. Hayır. Büyük sayılar da dört tam karenin toplamıdır. Matematikçiler bunun bütün pozitif sayılar için geçerli olduğuna ilişkin bir ispat araştırdılar ve 1770'te Joseph Louis Lagrange bir ispat buldu.

Dört Küp Toplamı Tahmini

Bir teoremin benzer biçimde ancak fazladan bir saptırmayla dört küp kullanılarak doğru olduğu iddia edilmiştir: hem pozitif hem de negatif küpler kullanılabilir. Dolayısıyla varsayım her tamsayının dört sayının küpü şeklinde yazılabilir olduğudur. Bir tamsayının negatif, pozitif ve sıfır olabileceğini hatırlayın.

Dört tam kare önermesinin küplere de genelleştirilmesinin ilk girişimi 1770'te Edward Waring'ın *Meditationes Algebrae*'sında yer aldı. Waring, ispatsız bir şekilde her tamsayının dört tam karenin, dokuz küpün, 19 dördüncü kuvvetin toplamı

olduğunu iddia etti. İlgili bütün sayıların pozitif veya sıfır olduğunu varsaydı. Bu varsayım Waring problemi olarak bilinir oldu.

Negatif bir tamsayının küpü negatiftir ve bu yeni ihtimallere izin verir. Örneğin 23, dokuz pozitif küpe ihtiyaç duyar, ancak bazılarını negatif olarak alırsak beş küple de onu elde edebiliriz:

$$23 = 2^3 + 2^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3$$

$$23 = 27 - 1^3 - 1^3 - 1^3 - 1^3 = 3^3 + (-1)^3 + (-1)^3 + (-1)^3 + (-1)^3$$

Aslında 23, sadece *dört* küple de ifade edilebilir:

$$23 = 512 + 512 - 1 - 1000 = 8^3 + 8^3 + (-1)^3 + (-10)^3$$

Negatif sayıları işe dahil ettiğimizde, büyük bir pozitif sayı büyük negatif bir sayıyı oldukça sönmüleyebilir. Dolayısıyla, ilgili küpler kural olarak ulaşmak istediğimiz sayıdan büyük olabilir. Örneğin, eğer farkına varabilirsek 30 sayısını üç küpün toplamı olarak yazabiliriz:

$$30 = 2.220.422.932^3 + (-283.059.965)^3 + (-2.218.888.517)^3$$

Pozitiflerdeki durumun aksine, sınırlı sayıda ihtimaller boyunca sistematik olarak çalışamayız.

Deneyler birçok matematikçiyi her tamsayıyı dört tamsayının küpünün toplamı olduğunu tahmin etmeye itti. Şimdiye kadar bir ispat bulunmadı, ancak kanıtlar tatmin edicidir ve bazı ilerlemeler kaydedilmiştir.

Varsayımı bütün pozitif sayılar için ispatlamak yeterlidir (pozitif ve negatif küpleri hâlâ dahil ederek), çünkü $(-n)^3 = -n^3$ tür. Küplerin toplamı olarak yazılan herhangi bir m pozitif tamsayısının gösterimi küplerin önündeki işaretler değiştirilerek $-m$ 'ye dönüştürülebilir. Bilgisayar hesaplamaları 10 milyona kadar olan her sayının dört küpün toplamı olduğunu doğruluyor. V. Demjanenko 1966'da $9k \pm 4$ formunda olmayan her sayının dört küpün toplamı olduğunu kanıtladı.

Hatta sınırlı sayıda istisnaıyla birlikte her pozitif tamsayı dört pozitif veya birbirini gideren küpün toplamı olabilir. 2000'de Jean-Marc Deshouillers, François Hennecart, Bernard

Landreau ve I. Gusti Putu Purnaba bu şekilde ifade edilemeyecek en büyük tamsayının 7.373.170.279.850 olduğunu öne sürdüler.

Dördüncü Dereceden Denklemler

Cardano ve üçüncü dereceden denklemlerin hikâyesi [3 bölümüne bkz.] bilinmeyenin üssünün dörde yükseldiği dördüncü dereceden denklemleri de içerir:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Cardano'nun öğrencisi Ferrari bu denklemi çözmüştür. Kısaltılmamış bir formül

http://en.wikideia.org/wiki/Quartic_function adresinde bulunabilir ve eğer oraya bakarsanız onu neden buraya yazmadığımı anlarsınız.

Ferrari'nin yöntemi, dördüncü dereceden denklemin çözümü olarak üçüncü dereceden denklemlerle ilişkilidir. Bunu çözen Lagrange olarak bilinir, çünkü Lagrange küplerin neden işe dahil olduğunu açıklayan ilk matematikçidir.

Dördey Sayılar

Giriş kısmında -1'in karekökünü alarak oluşan karmaşık sayılarla doruğa çıkacak biçimde sayı sisteminin yeni türde sayılar icat edilmesiyle defalarca genişletildiğini görmüştük. [i bölümüne bkz.] Karmaşık sayılar fizikte derin uygulamalara sahiptir. Ancak ciddi bir sınırlama vardır. Yöntemler düzlemin iki boyutuyla sınırlıdır. Bununla birlikte uzay üç boyutludur. Matematikçiler 19. yüzyılda karmaşık sayıları da dahil ederek üç boyutlu sayılar sistemi kurmaya çalıştılar. Bu zamanında iyi bir şey gibi gözüküyordu, ancak faydalı bir yöne evirilmedi.

Zeki İrlandalı bir matematikçi, William Rowan Hamilton beraber çalışılabilir üç boyutlu sayılar icat etmeye özellikle ilgiliydi ve 1843'te aklına aniden müthiş bir fikir geldi. O böyle bir sistem oluştururken iki kaçınılmaz engeli yerine oturttu:

Üç boyut işe yaramayacaktır.

Şöyle ki, çarpmanın standart değişim kuralı olan $ab = ba$ 'dan yani aritmetiğin temel kurallarından birinden vazgeçilmek zorundaydı.

Kafasında ampul yandığı zaman bir su kanalının kenarındaki yolda *Royal Irish Academy*'ye [*İrlanda Kraliyet Akademisi*] yürüyordu. Kafasında onu şapaşaşkın bırakan üç boyutlu sayı sistemi yapbozunu evirip çeviriyordu ve aniden üç boyutun imkan dahilinde olmadığını ancak dört boyutunsa işleyeceğini fark etti. Bununla birlikte, çarpmanın değişme kuralını göz ardı etmeye istekli olmalıydınız.

Bu gerçekten bir ampulün yandığı bir andı. Bu içgörü tarafından vurulan Hamilton durdu ve köprünün bir kesme taşına sayılar için şöyle bir formül yazdı:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

O, bu sistemi dördeyler (*quaternions*) olarak adlandırdı, çünkü bu sayılar dört parçaya sahiptir. Üç adedi i, j, k ve dördüncüsü gerçel sayı 1 sayıdır. Sıradan bir dördey sayı gelişigüzel katsayılarla (burada 3, -2, 5, 4) şöyle gözükür:

$$3 - 2i + 5j + 4k$$

Eğer Hamilton'ın köprüye kazımış olduğu formüllere barksanız böyle sayıları toplamanın ve çarpmanın doğrudan yapıldığını görürsünüz. Bütün ihtiyacınız olan bu denklemlerin birkaç sonucudur, şöyle ki:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k \quad jk = i \quad ki = i$$

$$ji = -k \quad kj = -i \quad ik = -j$$

Örneğin, ij ve ji 'nin farklı şeyler olduğuna dikkat edin. Dolayısıyla çarpmanın değişme kuralı geçersiz olur. Başlangıçta bu geçersizlik rahatsız edici gözükse de, bu ciddi zorluklara neden olmaz. Sadece çarpma işlemi yaparken sembolleri hangi sırayla yazdığınız konusunda dikkatli olmalısınız. O zamanlarda, değişme kuralının geçersiz olduğu birçok yeni matematik alanı ortaya çıkıyordu. Dolayısıyla kural bir teamül değildi ve bu durum da çok şok edici bir şey değildi.

Hamilton dörde sayıların harika olduklarını düşünüyordu, ancak başlangıçta diğer matematikçilerin çoğu dörde sayıları bir çeşit tuhaflık olarak gördü. Hamilton'ın düşüncesi bu meselede, dörde sayıların üç ya da dört boyuttaki fizik problemlerini çözmeye çok da yaramadıklarının ortaya çıkmasıyla işe yaramadı. Onlar tamamıyla bir başarısızlık da değildi, ancak onlar karmaşık sayıların iki boyutlu uzaydaki çok yönlülüğünden ve kapsamlılığından yoksundular. Üç boyutlu bir uzay üretmek için i , j ve k 'yi kullanmasında bir başarı vardı, ancak uygulamalı matematikte daha sonra standart olan vektörel cebirin ortaya çıkmasıyla onun hükmü kalmadı. Ancak dördeyler soyut matematikte hayati bir öneme sahip olarak kaldı, ayrıca onlar cisimleri uzayda döndürmek için basit bir yöntem sağlayarak bilgisayar grafiklerinde uygulamalara da sahip olmuştur. Dört tam kare önermesine ilişkin ilginç bağlantıları da vardır.

Hamilton dördeyleri sayı olarak adlandırmadı, çünkü o zamanlarda birçok sayı benzeri cebirsel sistem icat ediliyordu. Dördeyler toplamanın, çıkarmanın, çarpmanın ve bölmenin (sıfır hariç) yapılabildiği cebirsel bir sistem olarak neredeyse aritmetiğin temel bütün kurallarına uyma bakımından halihazırda bölüm cebiri dediğimiz şeye örnektir. Dördeyler kümesi $\mathbb{H}$ sembolüyle gösterilir (Hamilton'a ithafen, $\mathbb{Q}$ zaten rasyonel sayılar için kullanılıyordu).

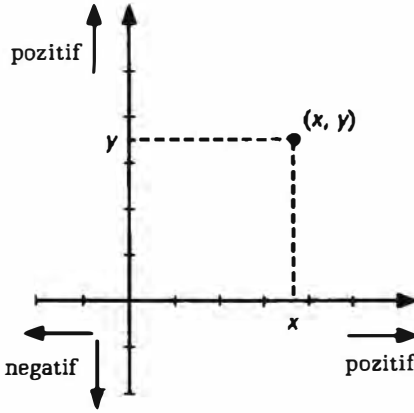
Gerçel, karmaşık ve dördey sayıların boyutu 1, 2 ve 4'tür. Bu sıradaki yeni sayı kesinlikle 8 olmalıdır. Sekiz-boyutlu bir cebir var mıdır? Cevap kallavi bir 'evettir'. Cayley sayıları olarak da bilinen sekizeyler böyle bir sistemi sunmaktadır. Sembolü $\mathbb{O}$ 'dur. Bununla birlikte aritmetiğin daha ileri bir kuralından daha vazgeçmek gerekmektedir: birleşme kuralı $a(bc) = (ab)c$. Ayrıca örüntü burada durmaktadır: 16 boyutlu diye bir cebir konusu yoktur. Son zamanlarda dördey ve sekizey sayılar kuantum mekaniğiyle ve temel parçacık fiziğiyle derin ilişkileri olduğundan tekrardan gündeme geldi. Bu alanın sırrı, fizik yasalarının simetrisi olmasıdır ve bu iki cebir sistemi önemli ve sıra dışı simetri özellikleri taşır. Örneğin, dördey sayılar-

da eğer i, j ve k 'yi j, k ve i olarak değiştirirseniz matematiksel kurallar onlar için değişmeden kalır. Daha yakından bir bakış i, j ve k 'nin uygun *dizilimlerle* değiştirildiğinde matematik kurallarını değiştirmeye gerek kalmadığını gösterir. Elde edilen simetriler üç boyutlu uzaydaki cisim dönüşleriyle yakından ilgilidir ve bilgisayar oyunları bu amaçla dördey sayıları kendi grafik yazılımlarında sıklıkla kullanırlar. Sekizzey sayılar yedi boyutlu düzlemde benzer yorumlamalara sahiptir.

Dördüncü Boyut

Eski çağlardan beri insanlar fiziksel uzayın üç boyuta sahip olduğunu biliyorlardı [3 bölümüne *bkz.*]. Uzun zaman boyunca dört boyutlu bir uzay ihtimali saçma gözüktü. Bununla birlikte, on dokuzuncu yüzyıla geldiğimizde bu karar birliğine varılmış bilgelik artan eleştirel incelemelerin saldırısı altındaydı ve pek çok insan dördüncü bir boyutun olma ihtimaliyle ilgilenmeye başladı. Sadece matematikçiler ve bilim insanları değil felsefeciler, din bilimciler, tin bilimciler, hayaletlere inananlar ve birkaç dolandırıcı da ilgileniyordu.

Dördüncü boyut tanrı, ölümlerin ruhları ve hayaletler için makul bir konum sağlıyordu. Bu evrende olmamakla beraber ona hemen komşu kapıdan kolayca bir yolla girilir. Şarlatanlar bu yeni boyuta erişebiliyor olduklarını '*kanıtlamak*' için numaralar çevirdiler. Üçten fazla boyutlu uzaylar mantık olarak makul gelebilir ve Hamilton'ın dördeyleri –fiziksel uzayla eşleşip eşleşmediğine bakılmaksızın– gibi keşifler sayesinde matematikte başlangıçta çekici geldi. On dokuzuncu yüzyılın başlarında üç boyuta sıkışıp kalmak artık eskisi kadar açık değildi. Koordinatları bir düşünün. (x, y) gibi bir çift koordinat olarak birleştirmek üzere düzlemde herhangi bir noktanın konumu sadece x ve y gibi iki gerçel sayı tarafından betimlenebilir.



Şekil 29: Düzlemde koordinatlar.

Uzayın üçüncü boyutunu göstermek için tüm yaptığımız z adında önden arkaya doğru bir koordinat daha ilave etmektir. O halde (x, y, z) şeklinde bir gerçel sayılar üçlemesine sahibiz.

Öyle gözüküyor ki geometrik şekiller çizerken buradan öteye geçmememiz gerekiyor. Ancak dörtlü sayıları yazmak kolaydır (w, x, y, z) . Veya beş ya da altı. Ya da yeterince kâğıt ve zamanla bir milyonluk bir sayı. Sonunda matematikçiler dörtlü sayıları kullanarak soyut bir 'uzay' tanımlayabileceklerini fark ettiler ve öyle yaptıklarında o dört boyuta sahipti. Beş koordinatla beş boyutlu bir uzay elde edersiniz ve bu böyle devam eder. Pisagor'un teoremiyle benzeşen iki veya üç boyutta tanımlanan böylesi uzaylarda hassas bir geometri kavramı bile vardı. İki boyutta bu teorem bize (x, y) ve (X, Y) gibi iki nokta arasındaki uzaklığı verir ve o şöyledir:

$$\sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2}$$

Onun üç boyuttaki benzeri (x, y, z) ve (X, Y, Z) gibi iki nokta arasındaki uzaklığı verir ve o şöyledir:

$$\sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}$$

Bu yüzden dördtlü iki sayı arasındaki uzaklığı şu şekilde tanımlamak mantıklı gözükabilir:

$$\sqrt{(w - W)^2 + (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}$$

Ulaşılan geometrinin tutarlı ve Öklit geometrisine oldukça benzediği ortaya çıktı.

Bu konuda temel kavramlar, mantıkla örtüşeceği garanti olan dördtlü sayılar kullanılarak cebirsel olarak tanımlandı. Daha sonra onlar geometrik bir hissiyat katan ikinci ve üçüncü boyuttaki formüllere benzetilerek yorumlandı.

Örneğin bir birim karelik bir karenin köşelerinin koordinatları 1 ve 0'ın bütün olası dizilimlerini verecek şekilde düzlemde şöyledir:

(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
-------	-------	-------	-------

Uzayda bir küpün köşeleri koordinatları üç tane 1 ve 0'ın kombinasyonu olarak şöyledir:

(0,0,0)	(1,0,0)	(0,1,0)	(1,1,0)
(0,0,1)	(1,0,1)	(0,1,1)	(1,1,1)

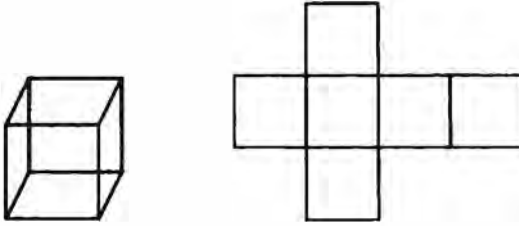
Bunlara benzeterek *hiperküpü* dört boyutlu bir uzayda dördtlü olarak 1 ve 0'lardan tanımlarız.

(0,0,0,0)	(1,0,0,0)	(0,1,0,0)	(1,1,0,0)
(0,0,1,0)	(1,0,1,0)	(0,1,1,0)	(1,1,1,0)
(0,0,0,1)	(1,0,0,1)	(0,1,0,1)	(1,1,0,1)
(0,0,1,1)	(1,0,1,1)	(0,1,1,1)	(1,1,1,1)

Bu şeklin dört boyutlu küp (*tesseract*) diğer bir bilinen adıdır [8 bölümüne bkz.]. Elde edilen cismi bu tanımdan yola çıkarak analiz edebiliriz. O küpe çok benzer, sadece biraz fazlası benzer. Örneğin, bir küp altı karenin birleşiminden oluşur; benzer şekilde bir hiperküp de 8 adet küpün birleşiminden oluşur.

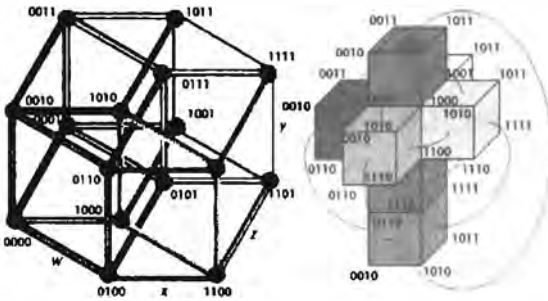
Fiziksel uzay üç boyutlu olduğundan dolayı, maalesef bu küpün bir modelini yapamıyoruz. Bu problem aynı bir küpü düz bir kâğıda tam olarak çizemememize benzer. Bunun yerine

biz aynı bir ressamın resim çizmesi, yağlı boya yapması ya da bir fotoğraf gibi onun bir yansımasını çizeriz. Alternatif olarak bir küpü bazı kenarlarından keserek altı kare ve haç şeklinde bir açılımını yapabiliriz.



Şekil 30: *Solda*: İki boyutta yansıması. *Sağda*: Onun altı kare yüzeyini göstermek için açılmış bir küp.

Hiperküpe de benzer bir şey yapabiliriz. Üç boyutlu bir uzayda katı cisim şeklinde yansımalarını veya iki boyutlu bir kâğıda çizgiler olarak çizebiliriz. Veya onun sekiz kübik 'yüzeyini' göstermek için onu 'açımlayabiliriz'. Bu küplerin dört boyutlu uzayda nasıl kapanacağını içselleştirmeyi zor bulduğumu itiraf etmeliyim, ancak hiperküpün koordinatlarının kümesi öyle olduğunu göstermektedir.



Şekil 31: Hiperküp. *Solda*: İki boyutta yansıtılmış. *Sağda*: sekiz kübik yüzünü göstermek için açılmış. 0'lar ve 1'ler koordinatları göstermektedir.

Gerçeküstücü ressam Salvador Dali benzer bir açılmamış hiperküpü başta 1954 tarihli *Corpus Hypercubus* [*İsa'nın Çarmıha Gerilmesi*] tablosu dahil birçok çalışmasında kullanmıştır.



Şekil 32: Dali'nin *İsa'nın Çarmıha Gerilmesi* [*Corpus Hypercubus*].

PİSAGOR'UN HİPOTENÜSÜ

Pisagor üçgenleri 90° 'lik dik bir açıya ve tamsayı kenarlara sahiptir. Onların en basit halinde en uzun kenar 5'tir: diğerleri 3 ve 4'tür. 5 düzgün çokyüzlü vardır. Bilinmeyen beşinci kuvvetini içeren beşinci dereceden denklemler beşinci dereceden kök ya da diğer kökler kullanılarak çözülemez. Düzlemde ve üç boyutlu uzayda örgüler 5 kıvrımlı döneel simetrilere sahip değildir, dolayısıyla böylesi simetriler kristallerde meydana gelmez. Bununla birlikte bu simetriler yarı kristal denen tuhaf yapılarda dördüncü boyuttaki örgülerde oluşmaktadır.

En Küçük Pisagor Üçlüsünün Hipotenüsü

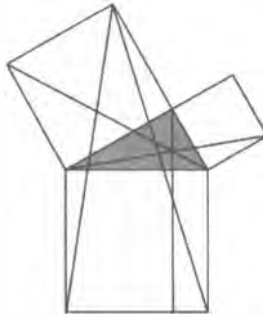
Pisagor teoremi bir dik açılı üçgenin en uzun kenarının (adı kötüye çıkmış olan hipotenüs) karesinin basit güzel bir tarzda diğer ikisiyle bağlantılı olduğunu söyler: *hipotenüsün karesi diğer iki kenarın karelerinin toplamı kadardır.*

Geleneksel olarak bu teorem Pisagor'a atfedilir, ancak onun hikâyesi şaibelidir. Babil tabletleri Pisagor bulmadan çok önce Pisagor'un teoreminin Babilliler tarafından bulunduğunu göstermektedir; teorem bu şekilde ona atfedilir çünkü o, evrenin sayısal örüntüler üzerine kurulduğuna inanan ve matematikte Pisagorculuk diye bilinen bir ekol kurmuştur. Antik yazarlar çeşitli matematiksel teoremleri Pisagorculara ve dolayısıyla Pisagor'a dayandırmışlardır ancak Pisagor'un hangi matematiksel teoremleri kendisinin ürettiğine ilişkin doğru dürüst bir fikre sahip değiliz. Pisagor'un bile kendine atfedilen teoremleri ispatlayabileceğini dahi bilmiyoruz veya sadece bunun böyle

doğru olduğuna inanıyoruz. Veya onlar –büyük olasılıkla– bizim günümüzde ispat olarak gördüğümüze yeterli gelmemekle beraber onları ikna edici kanıtlara sahiptiler.

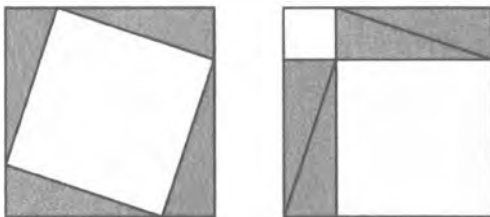
Pisagor'un İspatları

Pisagor'un ilk ispatı Öklit'in *Öğeler* kitabında ortaya çıkar. O, Victoria Dönemi ilkokul öğrencileri arasında çamaşır ipine asılmış iç çamaşırına benzediği için "*Pisagor'un pantolonu*" olarak bilinen bir şemayı içerir ve oldukça karmaşıktır. Çoğunluğu teoremi daha anlaşılır kılan diğer yüzlerce ispat da bilinmektedir.



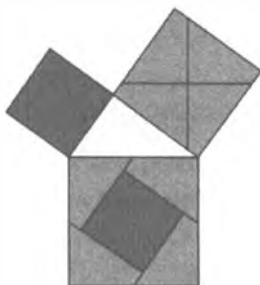
Şekil 33: Pisagor'un pantolonu.

En basitlerinden biri, bir çeşit matematikçi yapbozudur. Herhangi bir dik açılı üçgeni alın, dört adet kopyasını çıkarın ve bir karenin içinde birleştirin. Bir düzenlemede kareyi hipotenüslerin birleşimi şeklinde bir diğerinde iki tarafta iki kare görürüz. Açık bir şekilde üçgenler dışında kalan alanları iki şekilde de eşittir.



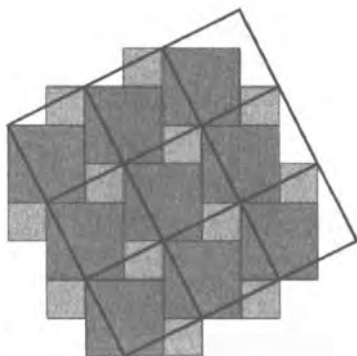
Şekil 34: *Solda*: Hipotenüslerden oluşmuş bir kare (artı dört adet üçgen) *Sağda*: İki taraftaki karelerin toplamı (artı dört adet üçgen). Şimdi üçgenleri siliniz.

Bir diğer yapbozsa Perigal'in açıklımlamasıdır:



Şekil 35: Perigal'in açıklımlaması

Ayrıca mozaik döşemesini kullanan bir ispat da vardır. Pisagorcular ya da bilinmeyen önceki kuşaklardan birisi teoremi ilk defasında böyle keşfetmiş olabilir. Eğik bir karenin diğer ikisiyle nasıl çakıştığına bakarsanız, büyük kareyi küçük karelerin kalan alanlarını tamamlayacak şekilde nasıl kesilmesi gerektiğini de görebilirsiniz. Kenarları ve hipotenüsü karelerin kenarlarına eşit olan dik açılı üçgenleri de görebilirsiniz.



Şekil 36: Mozaik döşemesiyle kanıtlama.

Benzer üçgenleri ve trigonometriyi kullanan usta işi ispatlar da vardır. Bilinen en az elli adet ispat vardır.

Pisagor'un Üçlemeleri

Pisagor'un teoremi sayı kuramında verimli bir fikri harekete geçirdi: cebirsel denklemlerin tamsayı çözümlerini bulmak. Pisagor üçlemesi a, b, c gibi üç adet tamsayı kümesidir öyle ki

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Geometrik olarak, üçleme kenarları tamsayı olan bir dik açılı üçgeni tanımlar.

Pisagor'un üçlemelerinde en küçük hipotenüs 5'tir. Diğer iki kenar 3 ve 4'tür. Burada

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

Bir sonraki en küçük hipotenüs 10'dur, çünkü

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$$

Bununla birlikte, bu aslında aynı üçgenin kenarları ikiye katlanmış halidir. Gerçekten bir sonraki en küçük farklı hipotenüse 13'tür.

$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

Öklit sonsuz sayıda Pisagor üçlemesi olduğunu biliyordu ve onların hepsinin nasıl bulunacağına ilişkin bir formül ver-

di. Daha sonra İskenderiyeli Diophantus temelde Öklit'inkiyle aynı olan basit bir tarif ifade etmiştir.

Herhangi iki tamsayıyı alın ve aşağıdakileri bulun:

Çarpımlarının iki katı

Karelerinin farkı

Karelerinin toplamı

Bu bulunan üç sayı bir Pisagor üçgeninin kenarlarıdır.

Örneğin 2 ve 1 sayılarını alın daha sonra

Çarpımlarının ikiyle çarpımı = $2 \times 2 \times 1 = 4$

Kareleri arasındaki fark = $2^2 - 1^2 = 3$

Karelerinin toplamı = $2^2 + 1^2 = 5$

Ve o ünlü 3-4-5 üçgeninin elde ettik. Eğer yerine 3 ve 2 sayılarını alırsak, daha sonra çarpımlarını ikiyle çarparsak = $2 \times 3 \times 2 = 12$

Karelerinin arasındaki fark = $3^2 - 2^2 = 5$

Karelerinin toplamı = $3^2 + 2^2 = 13$

Böylece bir sonraki ünlü üçgen olan 5-12-13 üçgenini elde ederiz. Diğer yandan 42 ve 23 sayıları alınırsa

Çarpımlarının iki katı = $2 \times 42 \times 23 = 1932$

Karelerinin farkı = $42^2 - 23^2 = 1235$

Karelerinin toplamı = $42^2 + 23^2 = 2293$ ve şimdiye kadar hiç kimse 1235-1932-2293 üçgenini duymamıştır. Ancak bu sayılar da işini yapar

$$1235^2 + 1932^2 = 1.525.225 + 3.732.624 = 5.257.849 = 2293^2$$

Diophantus'un yasasının neredeyse vardığımız son bir şaşırtmacası da vardır: üç sayı ile çalıştıktan sonra onları seçtiğimiz herhangi bir sayıyla genişletebiliriz. Dolayısıyla 3-4-5 üçgenini her bir sayıyı 2'yle genişleterek bir 6-8-10 ya da 5'le genişleterek 15-20-25 üçgenini elde edebiliriz.

Cebir kullanırsak yasa şu formu alır: u , v ve k tamsayılar olsun. Öyleyse dik açılı üçgenin $2kuv$ ve

$k(u^2 - v^2)$ kenarları ve $k(u^2 + v^2)$ hipotenüsü olur.

Temel fikri ifade etmek için alternatif yollar vardır, ancak hepsi özünde buna dönüşür. Bu bütün Pisagor üçlülerini verir.

Düzgün Çokyüzlüler

Tamı tamına beş adet düzgün çokyüzlü vardır.

Düzgün çokyüzlü (ya da düzgün katı cisim) sonlu sayıda birçok yüzeyi (ki bu düzlemseldir) içeren katı cisimdir. Yüzeyler kenarlarda kesişirler; kenarlar da köşe denen noktalarda bitişir.

Öklit'in *Öğeler*'inin zirve noktası her yüzü düzgün bir çokgen (eş kenarlar, eş açılar) olan, bütün yüzleri eş ve her köşe noktası yüzlerin aynı biçimde düzenlenmesiyle sarılmış tamı tamına beş düzgün çok yüzlü olduğunu ispatıdır. Bu beş adet düzgün çokyüzlü şunlardır:

Düzgün dördüyüzlü, 4 üçgen yüzeyli, 4 köşeli ve 6 kenarlı

Küp ya da düzgün altı yüzlü, 6 kare yüzeyli, 8 köşeli ve 12 kenarlı

Düzgün sekiz yüzlü, 8 üçgen yüzeyli, 6 köşeli ve 12 kenarlı

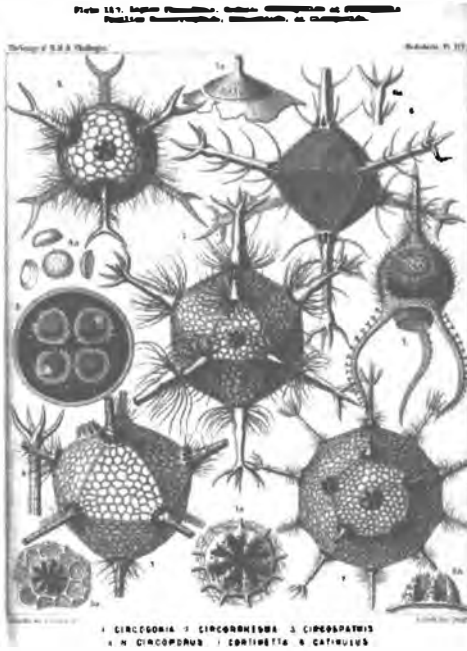
Düzgün on iki yüzlü, 12 beşgen yüzeyli, 20 köşeli ve 30 kenarlı

Düzgün yirmi yüzlü, 20 üçgen yüzeyli, 12 köşeli ve 30 kenarlı

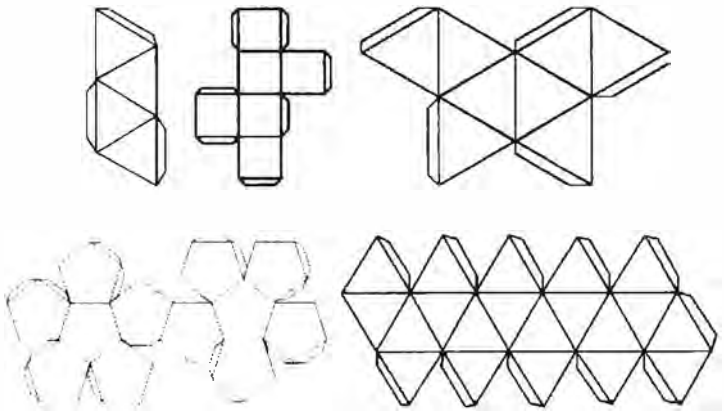


Şekil 37: Beş düzgün çok yüzlü.

Düzgün çok yüzlüler doğada ortaya çıkar. Ernst Haeckel 1904'te hepsi düzgün çokyüzlülere benzeyen küçük organizmalardan amipe benzer protozoaların bir çizimini yayımladı. O, doğaya birazcık çeki düzen vermiş olabilir, dolayısıyla bunlar canlı yaratıkların orijinal bir temsili olmayabilir. İlk üçü kristallerde de meydana gelir. *Düzensiz* on iki yüzlü bazen bulunsa da düzgün on iki yüzlü ve yirmi yüzlü meydana gelmez. Düzgün on iki yüzlüler, kristallere atomlarının periyodik olarak örgü oluşturması dışında benzeyen yarı kristallerde oluşabilir.



Şekil 38: Haeckel'in düzgün çok yüzlüler gibi olan amip benzeri protozoalar çizimi.



Şekil 39: Düzgün çokyüzlülerin açık hali.

Yüzleri bitişik şekilde iskeleti çizilmiş –katı cismin iskeleti olarak adlandırılır– kartondan kenarlarından kıvrılarak ve uygun kenar eşlerini birlikte yapıştırarak modeller yapmak eğlencelidir. Böylesi eşlerden birine resimde gösterildiği üzere yapıştırıcı için kanatçık şeklinde eklemeler yapmak yardımcı olur. Alternatif olarak yapıştırıcı bant kullanın.

Beşinci Dereceden Denklemler

Beşinci dereceden denklemleri çözecek cebirsel bir formül yoktur.

Beşinci dereceden bir denklemin genel görünüşü şöyledir:

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

Problem, çözümler (beş adede kadar olabilir) için bir formül bulmaktır. İkinci, üçüncü ve dördüncü dereceden denklemlerle olan tecrübemiz beşinci dereceden denklemleri çözmek için de muhtemelen beşinci, üçüncü ve ikinci dereceden kökleri içeren bir formül olması gerektiği hissini vermektedir. Böylesi bir formülün oldukça karmaşık olacağı gerçekten akla yakındır.

Bu beklentinin yanlış olduğu ortaya çıktı. Aslında formül hiçbir şekilde mevcut değildir; en azından a , b , c , d , e ve f çarpanlarını kökten çıkarmayla birlikte toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri yaparak oluşturulmuş bir formül aslında yoktur. Dolayısıyla 5 sayısı ile ilgili çok özel bir durum vardır. Bu özel tutumun nedeni oldukça derindir, bu nedenle onu ortaya çıkarmak uzun zaman aldı. Matematikçiler böyle bir formül bulmaya çalıştıkları an, bununla beraber ne kadar zeki olurlarsa olsunlar uğradıkları başarısızlık, sıkıntının baş gösterdiği ilk noktaydı. Herkes bir süre bunun formülünün fazlasıyla karmaşıklığından ötürü cebirsel işlemleri doğru bir şekilde kimsenin başaramayacağını varsayıyordu. Ancak, sonunda bazı matematikçiler böylesi bir formülün olup olamayacağını merak etmeye başladı. Sonunda, 1823'te Niels Hendrik Abel isimli bir matematikçi böylesi bir formülün olamayacağını ispat etti. Ondan hemen sonra da Évariste Galois

isimli bir matematikçi derecesi 5, 6, 7 veya her ne olursa olsun bir denklemin bu çeşit formüller kullanılarak çözülüp çözülme-yeceğine karar vermek için bir yol buldu.

Sonuç 5 sayısının özel olduğuydu. 5 hariç 1'den 4'e kadar (n 'nin farklı dereceleri için n . kökünü kullanarak) olan derecelerdeki denklemleri cebirsel olarak çözülebilirsiniz. Alışıldık örüntü bundan daha fazla ilerleyemez.

Beklendiği üzere 5'ten daha yüksek dereceli denklemlerde durum daha kötüdür ve onlar da özellikle aynı problemten yakınmaktadırlar: çözüm için bir formülün olmaması. Bu çözümün olmadığı ve tamı tamına sayısal sonuçlar bulmanın imkânsız olduğu manasına da gelmez. Bu cebirin geleneksel aletlerinin sınırlılığını ifade eder. Bu, aynı bir cetvel ve pergel kullanarak bir açıyı üç eş açıya bölememe probleminde olduğu gibidir. Cevap mevcuttur, ancak belirlenmiş metotlar onun ne olduğunu ortaya çıkarmak için yeterli değildir.

Kristalografik Kısıtlılık

Kristaller iki ve üç boyutta 5 katlı dönel simetriye sahip değildir.

Bir kristalin içindeki atomlar çeşitli bağımsız yönlerde belirli aralıklarla tekrar eden bir yapı, bir örgü oluşturur. Örneğin bir duvar kâğıdındaki örüntü kâğıt boyunca muhtemelen bir kâğıttan komşu olana atlayarak tekrar eder, ancak bu genellikle sağa ve sola doğru da tekrar eder. Aslında duvar kâğıdı iki boyutlu bir kristaldir.

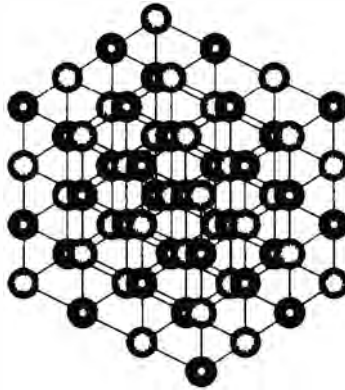
Düzlemde 17 farklı çeşitte duvar kâğıdı örüntüsü vardır [17 bölümüne bkz.]. Bunlar örüntüyü katı bir şekilde takip etme ve ilk baştaki pozisyonuna tam olarak örtüşme yolları olan simet-rileriyle birbirlerinden ayırt edilir. Bunların aralarında dönme eksenini olan bir nokta etrafında dönel simetriler de vardır.

Dönel simetrinin düzeni dönmenin ilk baştaki pozisyona tekrar dönmesi için kaç defa döndürüleceğidir. Örneğin, 90°'lik bir dönüşün düzeni 4'tür. Bir örgü kristalinin muhtemel simet-ri tipleri listesinde 5 sayısı merak uyandırıcıdır, şöyle ki; o,

orada yoktur. 2, 3, 4 ve 6'lı simetri düzenleri olan örüntüler vardır, ancak hiçbir duvar kâğıdı örüntüsü 5'li dönel simetri düzenine sahip değildir. 6'dan büyük dönel simetri düzeni yoktur, ancak dizide ilk boşluk 5'tir.

Aynı olgu, üç boyutlu uzayda kristalografik örüntülerde de vardır. Orada örgü üç bağımsız yönde tekrar etmektedir 219 çeşit veya eğer örüntü yansıma simetrisine sahip değilken oluşan ayna görüntüsü de bir simetri kabul edilirse 230 çeşit simetri vardır. Ayrıca muhtemel dönel simetri düzenleri 5 hariç 2, 3, 4 ve 6'dır. Bu olgu kristalografik kısıtlılık olarak adlandırılır.

Dördüncü boyutta 5 düzenli simetriler vardır, verili herhangi bir düzen yeterince yüksek boyutta mümkündür.

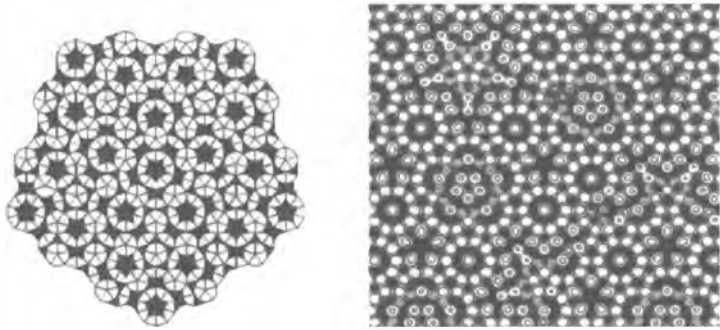


Şekil 40: Tuzun kristal örgüsü. Koyu yuvarlaklar: sodyum atomları. Açık yuvarlaklar: klorür atomları.

Yarı Kristaller

Örgüler için 5'li düzende dönel simetri iki veya üç boyutta mümkün olmamasına rağmen, yarı kristaller denen biraz daha düzensiz yapılarda bu mümkündür. Kepler tarafından yapılmış bazı eskizleri inceleyen Roger Penrose 5'li simetrisinin daha genel bir çeşidini düzlemde keşfetti. Bunlar yarı kristaller olarak adlandırılır.

Yarı kristaller doğada vardır. Daniel Schechtman 1984 yılında alüminyum manganez alaşımının yarı kristal oluşturabildiğini keşfetti ve başlangıçta kristal uzmanları arasındaki şüphecilikten sonra keşfin doğru olduğunun ispat edilmesiyle 2011 yılında kimya alanında Nobel Ödülü aldı. Luca Bindi liderliğindeki bir takım Rus Koryak dağlarındaki bakır, alüminyum ve demirden oluşan bir mineralde yarı kristaller buldular. Bu mineral günümüzde ikozahedrit olarak adlandırılmaktadır. Kütle spektrometresi kullanılarak farklı oksijen izotoplarının oranları ölçülmesiyle onun dünya kökenli olmadığı ortaya çıktı. 4,5 milyar yıl önce güneş sistemi var olduğunda ve o, araya girme zamanının çoğunu asteroit kuşağında zaman yörüngesinde araya girme sürecinde harcarken bazı karışıklıklar onun yörüngesini değiştirmiş ve sonuç olarak o dünyaya düşmüş.



Şekil 43: *Solda:* İki tam 5'li simetriden birisi. *Sağda:* Yirmi eşkenar üçgen yüzlü alüminyum-paladyum-manganez yarı kristalinin atomik modeli.

ÖPÜŞME SAYISI

Kendi bölenlerinin toplamına eşit olan en küçük sayı $1 + 2 + 3 = 6$ 'dır. Düzlemdeki öpüşme sayısı 6'dır. Bal petekleri düzgün 6 yüzlü altıgenlerden oluşmaktadır. Düzgün katı cisimlere benzeyen 6 adet düzgün dört boyutlu politop vardır.

En Küçük Mükemmel Sayı

Antik Yunanlar tamsayıları bölenlerine göre üç çeşide ayırmaktadır:

Zengin sayılar, eğer tam bölenlerinin toplamı (kendisi hariç) sayının kendisinden büyükse

Kıt sayılar, kendi bölenlerinin toplamı sayıdan küçükse

Mükemmel sayılar, kendi bölenlerinin toplamı sayıya eşitse
Başlangıçtaki bazı sayılar için Tablo 7'yi elde ederiz.

Bu bize üç çeşit sayının da var olduğunu gösterir, ancak kıt sayıların diğer iki çeşitten daha yaygın olduğunu da söyler. Marc Deléglise bu önermenin kesin bir formunu kanıtladı: bir n sayısı gelişigüzel artırıldıkça 1 ve n arasında kıt sayı bulunma oranı 0,7526 ile 0,7520 arasında olmaya eğilimliyken, zengin sayı bulunma oranıysa 0,2474 ile 0,2480 arasında olmaya eğilimlidir. Hans-Joachim Kanold 1955'te mükemmel sayı olma oranının 0 olmaya eğilimli olduğunu çoktan ispat etmişti. Dolayısıyla bütün sayıların dörtte üçü kıt iken dörtte biriye zengin sayıdır. Neredeyse hiçbiri mükemmel sayı değildir.

Sayı	Kendi bölenlerinin toplamı	Çeşidi
1	0 Böleni yok	Kıt
2	1	Kıt
3	1	Kıt
4	$1 + 2 = 3$	Kıt
5	1	Kıt
6	$1 + 2 + 3 = 6$	Mükemmel
7	1	Kıt
8	$1 + 2 + 4 = 7$	Kıt
9	$1 + 3 = 4$	Kıt
10	$1 + 2 + 5 = 8$	Kıt
11	1	Kıt
12	$1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$	Zengin
13	1	Kıt
14	$1 + 7 = 8$	Kıt
15	$1 + 3 + 5 = 9$	Kıt

Tablo 7

İlk iki mükemmel sayı $1 + 2 + 3 = 6$ ve $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$ 'dir.

Dolayısıyla en küçük mükemmel sayı 6'dır. En küçük zengin sayıysa 12'dir.

Antik çağdakiler sonraki iki mükemmel sayı olan 28 ve 496'yı bulmuşlardır. MÖ 100 dolaylarında Nichomachus dördüncü olan 8128'i bulmuştur. İsimsiz bir yazmada 1460'lar da beşincisi olan 33.550.336 ortaya çıkmıştır. Pietro Cataldi 1588'de altıncı ve yedinci mükemmel sayıyı bulmuştur: 8.589.869.056 ve 137.438.691.328.

Bu çalışmadan çok önce Öklit mükemmel sayıları oluşturmak için bir kural ileri sürdü. Günümüz formülleştirmelerine göre, eğer 2^{n-1} asalsa öyleyse $2^{n-1}(2^n - 1)$ mükemmel sayıdır. Buna uyan sayılar $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19$ 'dur. Keşiş Marin Mersenne'e ithafen 2^{n-1} formundaki asal sayılar *Mersenne asalları* olarak adlandırılır [$2^{57.885.161} - 1$ 'e bkz.].

Euler her mükemmel çift sayının bu formda olduğunu ispat etti. Bununla birlikte, en azından 2500 yıldır matematikçiler tek bir tuhaf mükemmel sayı bulmayı veya böyle bir sayının olmadığını ispat etmeyi başaramadılar. Eğer böyle bir sayı varsa, o en azından 1500 basamaklı olmalıdır ve dokuzu belli olan en az 101 asal bölene sahip olmalıdır. Onun en büyük asal çarpanı dokuz ya da daha çok basamağa sahip olmalıdır.

Öpüşme Sayısı

Düzlemde öpüşme sayısı, verili bir büyüklükteki dairenin aynı büyüklükte ve ona bir noktada temas edebilen tüm dairelerin sayısıdır. Bu 6'dır.



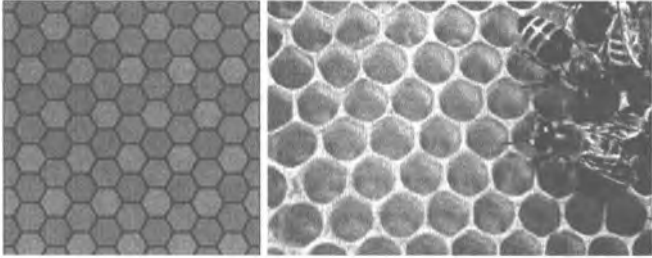
Şekil 42: Düzlemdeki öpüşme sayısı 6'dır.

Bunun ispatı sadece basit geometri gerektirir. Üç boyutta öpüşme sayısı aynı büyüklükteki bir küreye temas edebilen en çok küre sayısıdır. Bu da 12'ye eşittir [12 bölümüne *bkz.*]. Bu durumda ispat daha fazla karmaşıktır ve uzun süre 13 kürenin olup olamayacağı bilinmiyordu.

Bal Petekleri

Bal petekleri birbirine mükemmel olarak geçen ve bir düzlemi kaplayan altıgen karolardan oluşmaktadır [3 bölümüne *bkz.*]. *Bal peteği kestirimine* göre bal peteklerinin örüntüsü bir düzlemi komşu alanlara bölerken toplam çevreyi en az tutmanın yoludur. Bu varsayım antik zamanlarda örneğin MS 36'da

Romalı bilgin Marcus Terentius Varro tarafından öne sürüldü. Bu, Yunan geometrici İskenderiyeli Pappus zamanına MÖ 325'e kadar götürülebilir.



Şekil 43: *Solda*: Düzgün altıgenlerle bir döşeme. *Sağda*: Bir bal peteği.

Bal peteği kestirimi artık bir teoremdir: Thomas Hales bunu 1999'da kanıtladı.

Dört Boyutlu Politopların Sayısı

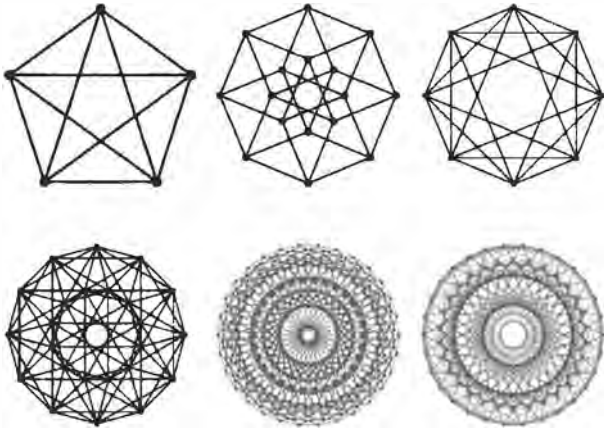
Yunanlar üç boyutta tam olarak beş adet düzgün çok yüzlü olduğunu kanıtladılar [5 bölümüne bkz.]. Pekâlâ boyutları üçten farklı olan uzaylar için durum nasıldır? Matematiksel uzayları koordinatlar kullanarak istediğimiz boyutta tanımlayabileceğimizi 4 bölümünden hatırlayınız. Özellikle dört boyutlu uzay, gerçel sayıların bütün dörtlülerini kapsar. Bu uzaylarda, Pisagor'un teoremiyle apaçık benzeşen doğal bir uzaklık kavramı vardır, dolayısıyla makul bir şekilde; uzaklıklardan, açılardan, benzeşen kürelerden, silindirlerden, konilerden vb bahsedebiliriz. Böylece dört veya daha fazla boyutta benzer düzgün çok yüzlülerin ne olduğunu sorgulamak mantıklı olacaktır. Cevap bir sürprizi barındırmaktadır.

İki boyutta sonsuz sayıda düzgün çokgen vardır: üçten sonraki bütün tamsayılar sayısınca köşeli bir çokgen vardır. Beş veya daha fazla boyutta sadece üç adet düzgün çok yüzlü vardır, adlandırıldıkları üzere onlar düzgün dört-yüzlüye, küpe, düzgün sekiz yüzlüye benzemektedir. Ancak, dört-boyutta altı adet düzgün politop vardır.

Adı	Birimleri	Yüz sayısı	Kenar sayısı	Köşe sayısı
5 birimi	5 Düzgün dörtyüzlü	10	10	5
8 birimi	8 Küp	24	32	16
16 birimi	16 Düzgün dörtyüzlü	32	24	8
24 birimi	24 Düzgün sekiz yüzlü	96	96	24
120 birimi	120 Düzgün on iki yüzlü	720	1200	600
600 birimi	600 Düzgün dörtyüzlü	1200	720	120

Tablo 8

Tablodaki ilk üç politop düzgün dört yüzlü, küp ve düzgün sekiz yüzlüyle benzerdir. 5 birimli olan 4-simpleks, 8 birimli olan 4-hiperküp ya da tesseract ve 16 birimli olanı da 4-ortopleks olarak isimlendirilir. Diğer üç politop dört boyutlu uzaya özeldir. Dört boyutlu kâğıdım olmadığı için size bu nesnelerin düzleme yansımasının nasıl olduğunu göstermekle yetineceğim.



Şekil 44: Düzleme yansıtılmış şekliyle 6 düzgün politop, sağdan sola ve yukarıdan aşağı 5, 8, 16, 24, 120 ve 600 birimli.

Ludwig Schläfli düzgün politopları sınıflandırdı. Ulaştığı bazı sonuçları 1855'te ve 1858'de yayımladı ve kalanı da ölümünden sonra 1901'de ortaya çıktı. 1880 ve 1900 yılları arasında diğer 9 matematikçi de birbirlerinden bağımsız olarak benzer sonuçlara ulaştı. İçlerinde mantıkçi ve matematikçi George Boole'un kızı olan ve ilk defa politop terimini kullanan Alicia Boole Stott da vardı. O, muhtemelen ablası Mary dört boyutlu uzaya tutkulu, renkli bir kişilik olan Charles Howard Hinton (Çift eşlilikten suçlu bulunmuştur.) ile evlendiğinden dolayı küçük yaştan itibaren dört boyutlu geometriyi kavradığını göstermişti. Bu yeteneğini politopların enine kesitlerinin neye benzediğini saf Öklit metotları üzerinde alıştırımlar yaparak kullandı: bunlar karmaşık oldukça simetrik katı cisimlerdir.

DÖRDÜNCÜ ASAL SAYI

Dördüncü asal sayı 7'dir ve burası asal sayıların ne işe yaradığını ve neden ilginç olduklarını anlatmak için uygun bir yerdir. Onlar tamsayıların birbiriyle çarpıldığı problemlerde ortaya çıkar. Onlar tüm tamsayıları inşa eden tuğla taşlarıdır. Birinci bölümde 1'den büyük herhangi bir tamsayının ya bir asal sayı veya iki ya da daha çok asal sayının çarpımı şeklinde ifade edilebileceğini görmüştük.

7 sayısının da uzun süre çözölemeyen faktöriyel problemleriyle ilişkisi vardır. Bir kabartı üzerine çizilen bir haritada komşu bölümlerin farklı renklere boyanması şartıyla gereken en az renk sayısıdır.

Çarpanları Bulmak

Zamanının sayı kuramcısı ve bütün zamanların önde gelen matematikçilerinden olan Gauss 1801'de *Disquisitiones Arithmeticae* adlı sayı teorisiyle ilgili ileri düzeyde bir kitap yazdı. Kitabında üst seviyeli konular arasında iki temel konunun hayatı olduğuna işaret etmektedir: "1'den büyük ve asal olmayan sayıları asal sayıların çarpımı şeklinde göstermek ve asal sayıları bunlardan ayırt etmek aritmetikte en önemli ve kullanışlı olan yollardan biridir."

İki problemi çözmek için de en açık yol muhtemel bütün çarpanları sırasıyla denemektir. Örneğin, 35'in asal olup olmadığını görmek için ve eğer değilse onun çarpanlarını bulmak için şöyle çalışırız:

$$35 \div 2 = 17 \text{ 1 kalanını verir}$$

$$35 \div 3 = 11 \text{ 2 kalanını verir}$$

$$35 \div 4 = 8 \text{ 3 kalanını verir}$$

$$35 \div 5 = 7 \text{ tam bölünür}$$

Dolayısıyla $35 = 5 \times 7$ ve 7'nin asal olduğunu biliyoruz, böylece çarpanlarını bulma tamamlanır. Bu işlem biraz kolaylaştırılabilir. Eğer bizim elimizde asal sayıların bir listesi varsa sadece asal bölenleri denememiz gerekir. Örneğin, 2'nin 35'i tam olarak bölmediğini bildikten sonra, onu 4'ün de tam olarak bölmeyeceğini biliriz. 2'yi 4'ü tam olarak böldüğünden dolayı biliriz ki 4 tarafından bölünebilen her şey 2 tarafından da bölünür. (Aynısı 6, 8 veya herhangi bir çift sayı için de geçerlidir.)

İncelememizi bir kere ilgili sayının karekökünü bulduktan sonra bitirebiliriz. Neden? Kendine özgü bir örnek karekökü yaklaşık olarak 65,44 olan 4283 sayısıdır. Eğer bundan büyük iki sayıyı çarparsak sonuç 4283 olan $65,44 \times 65,44$ 'ten büyük olmak zorundadır. Dolayısıyla, 4283'ü iki (veya daha fazla) çarpana ayırırsak onlardan en az biri onun kareköküne veya ondan az bir değere eşit olmak zorundadır. Aslında, karekökte virgülden sonraki ondalık kısımları ihmal edersek burada o 65'e eşit veya ondan küçük olmalıdır.

Bu sebeple, 4283'ün bütün çarpanlarını 2'den 65'e kadar olan asal sayıları deneyerek bulabiliriz. Eğer onlardan herhangi biri 4283'ü tam bölerse, bu bölme işleminden sonra çıkan sayıyı, bu sayı 4283'ten küçük olacaktır, çarpanlarına ayırmaya devam etmeliyiz. Aslında 65'e kadar hiçbir asal sayı 4283'ü tam bölemez. Dolayısıyla 4283 asaldır.

Eğer aynı fikri karekökü 64,67 olan 4183'ü çarpanlarına ayırmada denersek 64'e kadar olan bütün asal sayıları denemek zorundayızdır. Ancak 47, 4183'ü tam böler.

$$4183 \div 47 = 89$$

89'un da asal olduğu ortaya çıkar. Aslında bunu zaten biliyorduk, çünkü 4183 2, 3, 5 ve 7 tarafından bölünemez. Dolayısıyla 89; 2, 3, 5, 7 tarafından bölünemez, ancak bunlar onun

karekökü olan 9,43'e kadar olan asal sayılardır. Böylece biz, $4183 = 47 \times 89$ diye asal çarpanlarına ayırmış olduk.

Basit olmasına rağmen bu yöntem büyük sayılar için kullanılamaz. Örneğin, 11.111.111.111.111.111 sayısını çarpanlarına ayırmaya çalışırsak onun karekökü olan 105.409.255,3 sayısına kadar olan bütün asal sayıları denemeliyiz. Bu aşırı sayıda asal sayı demektir, net olmak gerekirse onlar 6.054.855 adettir. Sonunda sayımızı

$$11.111.111.111.111.111 = 2.071.723 \times 5.363.222.357$$

şeklinde çarpanlarına ayıran 2.071.723 diye bir asal çarpan buluruz, ancak bunu elle yapmak uzun vakit alır.

Elbette, bir bilgisayar bunu yapabilir, ancak böylesi hesaplamalarda kural; eğer böyle orta büyüklükteki sayıları bile elle yapması zor olursa bilgisayarın da yeterince büyük sayıları yapması daha zor olacaktır. Eğer, buradaki 17 basamak yerine 50 basamaklı bir sayı söz konusu olursa bir bilgisayar bile bunun gibi sistematik incelemede problemler yaşayabilir.

Fermat Teoremi

Neyse ki, daha iyi yöntemler vardır. Çarpanlarını araştırmadan bir sayının asal olup olmadığına karar vermek için etkili yollar vardır. Kabaca söylersek, zorluğu büyük oranda asıl sayının kendisine bağlı olsa da kaç basamağa sahip olduğu kabataslak bir yol göstericidir ve bu yöntemler yüz basamaklı sayılara kadar kullanışlıdır. Buna karşılık, matematikçiler günümüzde bu ölçüde bir bileşik sayının çarpanlarını bulmayı garantileyen katı bir kural bilmemektedir. Bir çarpanını bulmak yeterli olacaktır, çünkü çıkan sayı tekrar bölünebilir ve bu işlem tekrar edilebilir. Ancak en kötü senaryoda bile bu yöntem kullanışlı olmaktan çok uzaktır.

Asallık testleri bir sayının çarpanlarını *bulmadan* onun bileşik olduğunu ispatlar. Sadece onlardan birinin bir asallık testini yanlışladığını gösterin. Asal sayılar özel niteliklere sahiptir ve verili bir sayının bu özelliklere sahip olup olmadığını

kontrol edebiliriz. Eğer birini sağlamazsa, o asal değildir. Bu aynı bir balonda bir yırtık bulup içine hava üfleyip dik durup duramayacağını görmek gibidir. Eğer havayı tutamazsa bir yerden sızdırıyordur, ancak bu test bize sızıntının tam olarak nerede olduğunu söylemez. Dolayısıyla bir sızıntının olduğunu ispat etmek onu bulmaktan daha kolaydır. Aynıısı çarpanlar için de geçerlidir.

Böyle testlerden en basiti Fermat teoremidir. Onu açıklamak için öncelikle sayıların aynı saat kadranındakine benzer biçimde turladığı için bazen 'saat aritmetiği' de denen modüler aritmetikten bahsedeceğiz. Bir sayı seçin, bu analog saat için 12 olacaktır. Buna modül deyin. Tamsayılarla yaptığınız bütün işlemlerde artık 12'nin katlarını sıfırla değişmeli olarak kullanabilirsiniz. Örneğin, $5 \times 5 = 25$ 'tir, ama 12'nin iki katı 24'tür. Dolayısıyla 24'ü çıkarırsak modül 12'de $5 \times 5 = 1$ 'e eşittir.

Gauss *Disquisitiones Arithmeticae* adlı eserinde şu anda bilgisayar mühendisliğinde, fizikte, mühendislikte ve matematikte de bolca kullanılan modüler aritmetiği ortaya çıkarmıştır. O oldukça hoştur, çünkü alışılmış bütün aritmetik kurallarının neredeyse hepsini sağlamaktadır. Temel fark, bir sayıyı o sayı sıfır olmasa bile her zaman başka bir sayı tarafından bölememektir. Bu da kullanışlıdır, çünkü bu bölünebilirlik hakkında düzenli bir yol sağlamaktadır: hangi sayılar seçilen modül tarafından bölünebilir ve onlar bölünemez olduğunda kalan nedir?

Fermat teoremi eğer herhangi seçilmiş bir p asal sayı modülünü ve seçtiğimiz p 'nin bir katı olmayan herhangi bir a sayısını alırsak, a sayısının $(p - 1)$ kuvvetinin p modülünde 1'e eşit olduğunu söyler.

$p = 17$ ve $a = 3$ olarak alalım. Öyleyse teorem 3^{16} 'nın 17 tarafından bölündüğünde 1 kalanını vereceğini öngörür. Kontrol edilirse,

$$3^{16} = 43.046.721 = 2.532.160 \times 17 + 1 \text{ 'dir.}$$

Aklı başında hiç kimse çok büyük sayılar için kalan hesaplamak istemez. Neyse ki, bu tür hesaplamayı yapmak için

devamlı olarak sayının karesini alarak ve kalanlarını da çarparak ilerleyen zekice ve hızlı bir yol vardır.

Anahtar nokta *eğer başladığımız modülde sayı hiçbir zaman 1'e eşit olmuyorsa o zaman bu sayı bileşik sayıdır*. Dolayısıyla Fermat'ın teoremi bir sayının asal olması halinde sağlaması gerekli şart için etkili bir sınama temeli oluşturmaktadır. Ayrıca bunu bir çarpan bulmadan yapmaktadır. Gerçekten de etkili olmasının nedeni bu olabilir.

Bununla birlikte, Fermat'ın teoremi kesin kanıt değildir: bazı bileşik sayılar testi geçmektedir. Bunların en küçükleri 561'dir. Red Alford, Andrew Granville ve Carl Pomerance 2003'te Carmichael sayıları olarak bilinen bu tarz istisnaların sonsuz sayıda olduğunu ispat ettiler. En güncel, kesin kanıtlı ve etkin asallık testi Leonard Adleman, Pomerance ve Robert Rumely tarafından tasarlanmıştır. Fermat'ın teoreminden daha karmaşık olan ancak benzer ruha sahip olan bu teorem sayı teorisinin fikirlerini kullanmaktadır.

Manindra Agrawal ve onun iki öğrencisi Neeraj Kayal ve Nitin Saxena temelde Adleman–Pomerance–Rumely testinden daha hızlı olan bir test keşfettiler, çünkü bu "çok terimli zamanda" çalışmaktadır. Eğer sayı n adet basamağa sahipse, algoritma en fazla n^{12} 'ye kadar zaman oranında çalışmaktadır. Bunun $n^{7.5}$ 'e kadar indirilebileceğini biliyoruz. Bununla birlikte, onların algoritmasının avantajı basamak sayısı olan n yaklaşık 10^{1000} olana kadar ortaya çıkmaz. Evrende böylesi büyüklükte bir sayıyı içine alabilecek bir oda yoktur.

Asal Sayılar ve Şifreler

Gizli kodların bilimi olan şifre biliminde asal sayılar önemli hale gelmiştir. Kodlar askeri amaçlı kullanımda önemlidir [26 bölümüne bkz.], ancak ticari işletmeler ve özel kişiler de sırlara sahiptir. Örneğin, interneti kullanırken dolandırıcıların kredi kartı numaramıza ya da banka hesaplarımıza erişmesini istemeyiz.

Riski azaltmak için alışıldık yol şifrelemedir: bilgiyi kodların içine saklamak. Ted Rivest, Adi Shamir ve Leonard Adleman

tarafından 1978'de icat edilen RSA sistemi asal sayıları kullanmaktadır. Ama yüz basamaklı olanları, yani büyük olanları. Bir mesajı koda dönüştürme yolunun aleni yapılabilmesi gibi dikkat çekici özelliklere sahiptir. Onu anlayamamanızın nedeni diğer yolu yani mesajı deşifrelemeyi bilmemenizdir. Bu sizin sır olarak tutacağınız fazladan biraz bilgiye ihtiyaç duyar.

Örneğin her harfe iki basamaktan oluşan bir kod atayarak ve bunları sırasıyla yan yana yazarak her mesaj kolayca bir sayıya çevrilebilir. $A = 01$, $B = 02$ diye devam ederek harfleri ve 27'den sonrasını da noktalama işaretleri ve boşluk olarak kodladığımızı varsayalım. Öyleyse

```
MESSAGE    → M E S S A G E
            → 13 05 20 20 01 07 05
            → 13052020010705
```

Kod verili bir mesajı başka bir mesaja çevirmek için kullanılan bir yoldur. Ancak her mesaj bir sayı olduğundan, kod verili bir sayıyı başka bir sayıya çevirmek olarak da düşünülebilir. Bu noktada devreye matematik girer ve sayı teorisinden gelen fikirler kodlar üretmek için kullanılabilir.

RSA sistemi her biri 100 basamaklı (diyelim) p ve q diye iki asal sayı seçerek işe başlar. Bu büyüklükteki asal sayılar bilgisayarda asallık testi kullanılarak kolayca bulunabilir. Onları çarparak pq 'yu elde edin. Mesajları koda çevirmek için sıradan yol, mesajı bir sayıya çevirir ve bu pq sayısına dayalı bir hesaplama yapar. Teknik detaylar için aşağıya bakınız. Ancak koddan mesajı bulmak p 'yi bilmeyi gerektirir (q da kolayca hesaplanabilirdi).

Bununla birlikte, p 'nin ne olduğunu alenileştirmezseniz, onlar p 'nin ne olduğunu bulana kadar mesajı çözemezler. Ancak bu 200 basamaklı pq 'yu çarpanlarına ayırmayı gerektirir ve eğer p 'yi ve q 'yu basit seçmediyseniz var olan en güçlü süper bilgisayarla bile onları bulmanız imkânsız gözükmektedir. Ancak kodu oluşturanlar p 'yi ve q 'yu kaybederlerse, onlar da diğer herkesle aynı duruma düşerler. Sizin anlayacağınız tıkanıp kalmış olurlar.

Teknik Detaylar

p ve q diye iki büyük asal sayıyı alın. $n = pq$ ve $s = (p-1)(q-1)$ 'i hesaplayın. 1 ile s arasında s 'le ortak çarpanı bulunmayan e diye bir sayıyı seçin. (İki sayının ortak çarpanlarını bulmak için Öklitçi algoritma denen çok etkili bir yol vardır. Bu Antik Yunan'a kadar gider ve Öklit'in *Öğeler* kitabında vardır. *Professor Stewart's Casebook of Mathematical Mysteries*'a bakınız.) n ve e 'yi herkese bildirin. e 'yi herkese açık anahtar olarak adlandırın.

Modüler aritmetik bize 1 ile s arasında olan ve de 'li biçiminin s tarafından bölündüğünde 1 kalanını veren biricik bir d sayısının sayısı olduğunu söyler. Bu da $de = 1 \pmod{s}$ 'dir. Bu d sayısını hesaplayın. p , q , ve s 'yi gizli tutun. d 'yi özel kod olarak adlandırın.

Bir mesajı koda dönüştürmek için, onu anlatıldığı üzere m sayısı olarak yazın. Eğer gerekliyse, büyük bir mesajı parçalara ayırın ve sırayla gönderin. Daha sonra $c = m^e \pmod{n}$ 'i hesaplayın. Bu şifrelenmiş mesajdır ve alıcıya gönderilebilir. Bu şifreleme kuralı güvenli bir şekilde herkese söylenebilir. c 'yi e 'nin ikili açılımına dayalı şekilde hesaplamanın hızlı bir yolu vardır.

Özel kod olan d 'yi bilen alıcı $c^d \pmod{n}$ hesaplayarak mesajı deşifre edebilir. Sayı teorisindeki, Fermat'ın teoreminin hafif genişletilmesiyle, temel bir teorem sonucun orijinal mesajdaki m 'le aynı olduğunu ifade eder.

Mesajı deşifre etmek isteyen bir casus s 'yi bilmeden d 'yi bulmak zorundadır. Ancak, bu p 'yi ve q 'yu bulmakla eş olan $p - 1$ ve $q - 1$ 'i bulmak diye de özetlenebilir. Casus bunu yapabilmek için n 'yi çarpanlarına ayırmak zorundadır. Ancak n öylesine büyüktür ki bu yapılabilir bir şey değildir.

Bu tip kodlar *dıştan açılır kapı kodları* olarak bilinir, çünkü sadece dışarıdan açılan bir kapıdan (bir mesajı kodlamak) girmek kolaydır, ancak oradan çıkmaksa (mesajı deşifre etmek) eğer özel bir yardım (özel kod) almazsanız zordur. Matematikçiler bu kodun güvenli olduğundan emin değillerdir. Belki

büyük sayıları çarpanlarına ayırmanın kolay bir yolu vardır, ancak biz henüz onu bulmak için yeterince zeki değilizdir. (d 'yi hesaplamanın daha kolay bir yolu olabilir, ancak d 'yi bir kere bildiğiniz anda bu çarpanları bulmak için etkili bir yöntem ortaya çıkartacak biçimde p ve q üzerinde çalışabilirsiniz.)

Kuramsal olarak kod güvenli olsa bile, bir casus p 'yi ve q 'yu hırsızlık yoluyla, gizli kodu bilen birisine şantaj yaparak veya rüşvet vererek elde edebilir. Bu, bütün gizli kodlarla ilgili olan bir problemdir. Uygulamada RSA sistemi örneğin, mesajı şifrelemek için gizli kodu birine göndermek gibi sınırlı sayıda ki önemli mesajlar için kullanılır.

Brocard'ın Problemi

1'den n 'ye kadar olan sayıları alıp çarptığınızda $n!$ olarak yazılan ' n faktöriyeli' elde edersiniz. Faktöriyeller n sayıda nesnenin kaç farklı sayıda sıralanabileceğini hesaplamak için kullanılır [26! bölümüne bkz.].

Başlangıçtaki bazı faktöriyeller şunlardır:

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$3! = 6$$

$$4! = 24$$

$$5! = 120$$

$$6! = 720$$

$$7! = 5040$$

$$8! = 40.320$$

$$9! = 362.880$$

$$10! = 3.628.800$$

Eğer bu sayılara 1 eklersek şu sayıları elde ederiz

$$1! + 1 = 2$$

$$2! + 1 = 3$$

$$3! + 1 = 7$$

$$4! + 1 = 25$$

$$5! + 1 = 121$$

$$6! + 1 = 721$$

$$7! + 1 = 5041$$

$$8! + 1 = 40.321$$

$$9! + 1 = 362.881$$

$$10! + 1 = 3.628.801$$

ve onların tam kare olan üçünü sırasıyla tanırız

$$4! + 1 = 5^2$$

$$5! + 1 = 11^2$$

$$7! + 1 = 71^2$$

Bu şekilde olan başka sayı bilinmemektedir, ancak büyük bir n sayısının $n! + 1$ versiyonun tam kare olabileceği kanıtlanmadı. Bu problem Brocard problemi olarak bilinir, çünkü Henri Brocard 1876 yılında 7'nin bu şekilde olan en büyük sayı olup olmadığını sormuştur. Daha sonra Paul Erdős bunun cevabının 7 olamayacağını iddia etti. Bruce Berndt ve William Galway 2000 yılında 1 milyardan az olan sayılarda böyle bir n sayısının olmadığını ispat ettiler. Marius Overholt 1993'te sadece sonlu sayıda çözümün var olduğunu sayı teorisinde çözülmemiş büyük bir problem olan ABC kestirimini, *Büyük Matematiksel Problemler'e* bakınız, varsayarsak ispatlamıştır.

Kabartı Üzerindeki 7 Renkli Harita

Heawood haritalardaki dört renk probleminin [4 bölümüne bkz.] daha farklı uygulamaları için daha karmaşık yüzeylerde çalıştı.

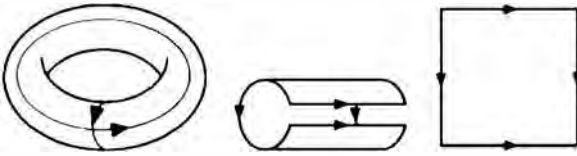
Benzer soru üç boyutta, düzlemdekiyle aynı cevaba sahiptir. Bir küre üzerinde bir harita hayal edin ve kuzey kutbu bir bölgenin içinde bir yerde kalana kadar onu döndürün. Eğer kuzey kutbunu yok ederseniz topolojik olarak açıldığında sonsuz bir düzlemi veren bir açılmış küre elde edersiniz. Kuzey kutbunu içeren bölge bütün haritayı çevreleyen sonsuz genişlikte olur.

Bununla birlikte, halka şeklinde ortasında boşluk olan simit benzeri ve böyle boşluklardan birkaç tane olan daha ilginç diğer yüzeyler de vardır.



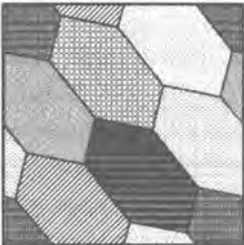
Şekil 45: Halka, 2 delikli halka, 3 delikli halka.

Halkayı görselleştirmek için işi kolaylaştıran bir yol vardır. İki kapalı eğri tarafından halkayı kesersek onu kare şeklinde açabiliriz.



Şekil 46: Kesilmiş bir halkayı kare şeklinde açmak.

Bu dönüşüm halkanın topolojisini değiştirir, ancak karşılıklı duran ilişkili kenarlar (oklarla gösterilmiş) aynıdır diyebiliriz. Şimdi zekice olan kısım geliyor. Aslında karşılıklı kenarları kareyi rulo yaparak birleştirmek zorunda değiliz. Sadece ilişkili kenarların çakıştığını aklımızda tutarak düzlem kareyle de çalışabiliriz. Eğriler çizmek gibi halkanın üzerinde yaptığımız her şey kare üzerinde tam olarak karşılık düşen bir yapıya sahiptir.



Şekil 47: Bir halka üzerindeki harita yedi renge ihtiyaç duyar.

Heawood bir halka üzerindeki herhangi bir haritayı boyamak için yedi rengin gerekli ve yeterli olduğunu ispat etti. Tarif edildiği üzere bir halkayı temsil etmesi için bir kare kullanırsak resim yedisinin gerekli olduğunu gösterir. Bu resmin gerektirdiği şekilde karşı taraftaki kenarlar ile bölgelerin nasıl eşleştiğini inceleyiniz.

Daha fazla boşluğun olduğu halkalı yüzeyler olduğunu görmüştük. Boşlukların sayısı 'genus' diye adlandırılır ve g 'yle gösterilir. Heawood $g \geq 1$ olmak şartıyla g boşluklu bir halkada kullanılması gereken renk sayısını hesaplamak için bir formül ortaya attı: o aşağıdaki değere eşit veya ondan küçük olan en küçük tamsayıdır.

$$\frac{7 + \sqrt{48g + 1}}{2}$$

g 1'den 10'a kadar alındığında, formül şu sayıları ortaya çıkarır:

7 8 9 10 11 12 12 13 13 14

Heawood bu formülü düzlemdeki 5 renk teoremini genelleştirerek bulmuştur. O, herhangi bir yüzey için formülünün belirlediği renk sayısının her zaman yeterli olduğunu kanıtlayabilirdi. Uzun yıllar boyunca büyük soru daha az sayıda rengin yeterli olup olmadığıydı. g 'nin küçük değerlerinin örnekleri Heawood'un varsayımının olabileceklerin en iyisi olduğunu doğrulamaktadır. 1968'de Gerhard Ringel ve John W. T. (Ted) Youngs formüldeki son detayları birçok diğerinin ve kendi çalışmalarının üzerine bina ederek onun doğru olduğunu kanıtlayan bir ispatla doldurdu. Onların yöntemleri bir kitabın hepsini doldurabilecek yeterlilikteki özel biçimdeki ağlara dayalıdır.

FIBONACCI KÜPÜ

Anlaşılması zor olan ilk küp aynı zamanda bir Fibonacci sayıdır. Hiç başka Fibonacci küpü var mıdır? Küpler hakkında düşünmek Fermat'ı son teoremini ortaya koymaya itti. Muhteşem kadın matematikçilerden biri olan Sophie Germain özel bir vakayla büyük bir katkı yaptı. Sonunda Andrew Miles, Fermat'ın esas iddiasından tam 350 yıl sonra tam bir ispat geliştirdi.

İlk Küp (1'den Sonra)

Bir sayının küpü sayının kendisiyle çarpımının bir daha ilk sayıyla çarpılmasıyla elde edilir. Örneğin, 2'nin küpü $2 \times 2 \times 2 = 8$ 'dir. Bir n sayısının küpü n^3 ile gösterilir. Bazı başlangıç küpleri şöyledir:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^3	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Fermat'ın Son Teoremi

Küpler 300 seneden beridir süregelen bir düşünce treni başlatmıştır.

Fermat, 1630 dolaylarında sıfıra eşit olmayan iki küpün toplamının bir küp oluşturmadığını fark etmiştir. (Eğer 0 dahil edilirse, o zaman her n için $0^3 + n^3 = n^3$ olacaktır.) O, *Arithmetica of Diophantus* [*Diophantus'un Aritmetiği*] adlı ünlü, antik bir cebir metninin 1621 basımını okumaya başladı. Kitabın ondaki kopyasının kenarına; 'Bir küpü iki küpe bölmek imkân-

sızdır veya dördüncü dereceden bir sayıyı dördüncü dereceden iki sayı şeklinde yazmak ya da genel olarak ikiden büyük bütün kuvvetleri aynı kuvvette iki sayı olarak yazmak imkânsızdır. Onun, bu kenara yazması yer darlığından dolayı mümkün olmayan harika bir ispatını keşfettim.' diye yazmıştı.

Cebirsel dilde Fermat, $x^n + y^n = z^n$ denkleminin n 3 veya 3'ten büyük herhangi bir değer aldığında çözümünün olmadığını iddia etmekteydi.

Günümüzde Fermat'ın son teoremi olarak adlandırılan bu ifade ilk defa 1670 yılında Fermat'ın oğlu Samuel'in, babasının bahsedilen kitaptaki notlarının büyük kısmını yayımladığı *Arithmetica* kitabında günyüzü gördü.

QVÆSTIO VIII

PROPOSITVM quadratum dividere
in duos quadratos. Imperatum fit vt
16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur
primus 1. Q. Oportet igitur 16 — 1. Quae-
les esse quadrato. Fingo quadratum a nu-
meris quatuor libere, cum defectu tot
vnicatum quod continet latus ipsius 16.
est 4 3 N. — 4. ipse igitur quadratus erit
4 Q. + 16. — 16 N. haec aequabitur vni-
catibus 16 — 1 Q. Communis adiciatur
vtriusque defectus, & a similibus auferan-
tur similia, sicut 3 Q. aequales 16 N. & sic
1 N. ¶ Erit igitur alter quadratorum ¶.
alter vero ¶ & vtriusque latus est ¶ seu
16. & vterque quadratus est.

[illegible]

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos
& generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eius-
dem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi.
Hanc marginis exiguitas non caperet.

Şekil 48: 'Efendi Pierre Fermat'ın Gözlemleri' başlıklı oğlunun yayımladığı *Arithmeticae of Diophantus* versiyonundaki Fermat'ın kenar notları.

Fermat bu soruyla muhtemelen iki sayının (tamsayı) karesinin toplamının bir sayının karesini verdiği Pisagor'un üçlülerini bildiği için ilgilenmişti. Bilindik bir örnek $3^2 + 4^2 = 5^2$ dir. Böylesi üçlemelerden sonsuz sayıda vardır ve onlar için genel

bir formül antik zamanlardan beridir bilinmekteydi [5 bölümüne bkz.].

Fermat gerçekten bir formüle sahip olabilir, ancak bunu henüz hiç kimse bulamadı. Onun dördüncü dereceden kuvvetin özel bir tam kare –diğer deyişle bir karenin karesi– olduğunu belirten olguyu kullanan ve problemin bu biçimini Pisagor’un üçlemelerine bağlayan dördüncü kuvvetler için geçerli bir formüle sahip olduğunu biliyoruz. Aynı fikir Fermat’ın son teoremini ispat etmek için kuvvet olan n ’nin 4 veya başka bir tek asal sayı olarak varsayılabilirliğini ortaya çıkarır. Sonraki iki yüzyılda Fermat’ın son teoreminin tam olarak üç asal sayı için kanıtlandığı bulundu: 3, 5 ve 7. Euler 1770’te küplerle; Legendre ve Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1825 dolaylarında beşinci ve Gabriel Lamé de yedinci derecelerle teoremi 1839’da ispat etti.

Sophie Germain Fermat’ın son teoreminin ‘ilk vakası’ olarak bilinen n ’nin asal olduğu ve x , y ve z ’yi bölmediği durumla ilgilenirken büyük gelişmeler kaydetti. O, asla tamamlanmamış daha hırslı bir programın parçası olarak Sophie Germain teoremini ispat etti: eğer p asalsa ve 100’den de küçükse $x^p + y^p = z^p$ ve $xyz \neq p^2$ tarafından bölünebilirdir. Aslında o bundan daha fazlasını da kanıtlamıştı, ancak ifadesi daha teknik biçimdeydi. İspat günümüzde Sophie Germain asalları olarak adlandırılan ifadeyi kullanmaktadır: p gibi asal sayıların $2p + 1$ ifadesi de asaldır. Bazı başlangıç Sophie Germain asalları şunlardır:

2 3 5 11 23 29 41 53 83 89 113 173 179 191

ve bilinen en büyüğü de Philipp Bliedung tarafından 2012’de bulunan $18.543.637.900.515 \times 2^{666667} - 1$ ’dir. Onlardan sonsuz sayıda olması gerektiği ileri sürüldü, ancak bu ucu açık bir sorudur. Sophie Germain asallarının şifreleme biliminde ve asallık testinde uygulamaları vardır.

Fermat’ın son teoremi ortaya atıldıktan yaklaşık üç buçuk yüzyıl sonra 1995’te Andrew Wiles tarafından ispat edildi. İspatta kullanılan yöntemler Fermat’ın zamanındaki herhangi bir şeyin veya onun icat ettiğinin çok ötesindedir.

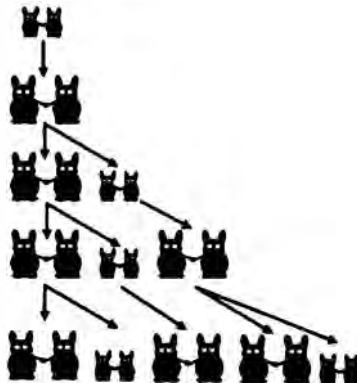
Catalan'ın Tahmini

1844'te Belçikalı matematikçi Eugène Catalan 8 ve 9 sayıları hakkında merak uyandırıcı bir soru sordu: 'Doğru olmasına inanmama rağmen, tam olarak kanıtlamada henüz başarılı olmadığım sıradaki teoremi derginizde yayımlamanız için size yalvarıyorum; belki diğerleri ispatlamada benden daha başarılı olacaktır. 8 ve 9'dan başka ardışık iki tamsayı ardışık tam kat olamaz; diğer bir deyişle bilinmeyenlerin pozitif tamsayı olduğu (1'den farklı) $x^m - y^n = 1$ denkleminin sadece bir çözümü vardır.'

Bu ifade Catalan tahmini olarak bilinir. Preda Mihailescu bunu sonunda 2002'de cebirsel sayı teorisinden ileri düzey metotlar kullanarak ispatladı.

Altıncı Fibonacci Sayısı ve Yalnızca Çözülmesi Zor Olan Fibonacci Küpleri

Pisalı Leonardo 1202'de Arap-Hint 0-9 rakamlarını Avrupalı okuyuculara tanıttığı *Liber Abbaci* [*Hesaplama Kitabı*] adında bir aritmetik metin yazdı. Kitap, tavşanlar hakkında tuhaf bir soru içermekteydi. Üreme çağına gelmemiş bir çift tavşanla işe başlayın. Bir mevsim sonra, her olgun çift bir genç yavru verirken önceki olgunlaşmamış çift üreme çağına geliyor. Tavşanlar ölümsüzdür. Mevsimler geçtikçe popülasyon nasıl büyür?



Şekil 49: Fibonacci'nin tavşan modelinde başlangıçtaki ilk birkaç nesil.

Leonardo çiftlerin sayısının ilk ikiden sonrakilerde her sayının kendinden önceki iki sayının toplamı olduğu şu örüntüyü takip ettiğini gösterdi:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144

Dolayısıyla, örneğin $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 2$, $8 = 3 + 5$, $13 = 5 + 8$ ve bu böyle devam eder. Leonardo daha sonra Fibonacci (Bonaccio'nun oğlu) mahlasını aldı ve Lucas bu dizi hakkında 1877 yılında yazdığından beridir bu dizinin elemanları Fibonacci sayıları olarak bilinir. Sıklıkla, dizi önüne fazladan bir sıfır koyularak verilir, bu da 'sıfırıncı' Fibonacci sayısı olarak bilinir. Oluşturma kuralı hâlâ geçerlidir, çünkü $0 + 1 = 1$ 'dir.

Bu model elbette gerçekçi değildir ve öyle olması da amaçlanmamıştır. Bu sadece onun kitabındaki hoş bir sayısal problemdir. Bununla birlikte, Leslie modelleri olarak bilinen modern genelleştirmeler daha gerçekçidir ve gerçek popülasyonlarda pratik uygulamaları vardır.

Fibonacci Sayılarının Özellikleri

Fibonacci sayıları matematikçilerin uzun süre ilgisini çekmiştir. Altın oran sayısı olan ϕ ile temel bir ilişkisi vardır. $1/\phi = \phi - 1$ temel özelliği kullanılarak n . Fibonacci sayısı F_n tam olarak $(\phi^n - (-\phi)^{-n})/\sqrt{5}$ 'e eşittir.

Bu $\phi^n/\sqrt{5}$ 'e en yakın tamsayıdır. Dolayısıyla Fibonacci sayıları aynı bir sabit sayının kuvvetleri gibi üstel büyümeyi göstererek aşağı yukarı ϕ^n 'e orantısaldır.

Fibonacci sayılarında birçok örüntü vardır. Örneğin, 5, 8, 13 gibi ardışık üç terim alın. Daha sonra $5 \times 13 = 65$ 'ten 1 farkla ve $8^2 = 64$ 'tür. Daha genel olarak,

$$F_{n-1} F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$$

Ardışık Fibonacci sayılarının toplamı ispat eder

$$F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Örneğin,

$$0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20 = 21 - 1$$

Sıfırsız olmayan Fibonacci sayılarının karşılıklı toplamı için bilindik bir formül yoktur

$$1/1 + 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/8 + 1/13 + \dots$$

Sayısal olarak 'karşılıklı Fibonacci sabiti' yaklaşık 3,35988566243'tir ve Richard André-Jeannin onun tam olarak bir kesirli sayı olmadığını, irrasyonel olduğunu ispat etti.

Fibonacci sayıları genellikle asaldır. Fibonacci asallarının ilkleri 2, 3, 5, 13, 89, 233, 1597, 28.657 ve 514.229'dur. Bilinen en büyük Fibonacci asalı binlerce basamağa sahiptir. Sonsuz sayıda Fibonacci asalı olup olmadığı bilinmemektedir.

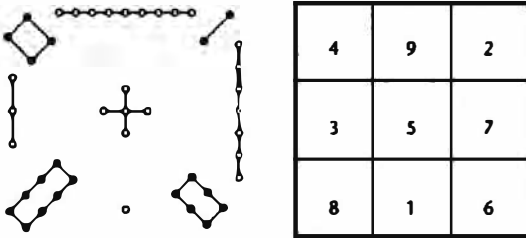
Çok zor bir soru geçenlerde çözüldü: bir Fibonacci sayısı ne zaman tam kuvvet olur? W. Ljunggren 1951'de on ikinci Fibonacci sayısı olan $144 = 12^2$ 'nin sadece tam kuvvet olan anlaşılması zor Fibonacci sayısı olduğunu ispat etti. Harvey Cohn 1964 yılında diğer bir ispat sundu. (Çok ilginç olmamakla birlikte, 0 ve 1 bütün n 'ler için n . kuvvetidir.) Altıncı Fibonacci sayısı $8 = 2^3$ 'tür ve 1969'da H. London ve R. Finkelstein anlaşılması zor olan Fibonacci sayılarından küp olanının sadece bu sayı olduğunu ispat etmişlerdir. Y. Bugeaud, M. Mignot e ve S. Sisek mükemmel kuvvet olan Fibonacci sayılarının (kuvveti 1'den büyük olan) sadece 0, 1, 8 ve 144 olduğunu 2006'da ispat etmişlerdir.

SİHIRLİ KARE

Çözülmesi zor en küçük sihirli kare 9 hücrelidir. Her köşede aynı biçimde ayarlanmış düzgün çokgenler düzlemde 9'lu bir karo oluştururlar. Doğru ölçekte bir dikdörtgen de değişik büyüklükte 9 kareye ayrılabilir.

Sihirli En Küçük Kare

Sihirli kareler, genellikle 1, 2, 3... diye bir sınırlamaya kadar giden sayıların karelerde belli dizilimle sütun, sıra ve köşegen olarak aynı toplamı vermesi esasına dayanır. Onlar matematiksel olarak önemli değildir, ancak eğlencelidir. Sihirli en küçük kare (içinde 1 rakamı yazılı bulunan basit 1×1 karesinin dışında) 1'den 9'a kadar olan rakamları kullanan 3×3 boyutundaki karedir.



Şekil 50: Solda: Lo Shu. Sağda: Modern versiyonu.



Şekil 51: Solda: Lo Shu'nun Tibet dilinde bir fotoğrafı. Sağda: İmparator Yu.

Bilinen en erken sihirli kare devasa sel nedeniyle Luo nehrinin tanrısına kurbanlar sunan imparator Yu ile ilgili bir efsanede geçmektedir. Nehirden kabuğunda tuhaf matematiksel bir tasarım olan sihirli bir kaplumbağa ortaya çıkar. O, 3×3 'lük bir kareye çizilmiş ve her kare içinde sayılar yerine noktalar bulunan sihirli bir kare olan Lo Shu'dur.

Eğer (diğer türlü düşünmek için iyi sebepler yoksa standart varsayıma göre) sihirli kare 1'den 9'a kadar olan sayıları sadece bir kere kullanıyorsa Lo Shu yansımalar ve döndürmeler dışında tutulursa mümkün olan tek düzenlemedir. Bunun sihirli sabiti yani sıra, sütun ve köşegenler üzerindeki sayıların toplamı 15'tir. Kare başka örüntüler de göstermektedir. Çift sayılar köşeleri tutmuştur ve bunların çapraz olanlarının toplamı 10'u verir.

Sihirli karenin büyüklüğü onun düzeni diye adlandırılır. Lo Shu 3 düzenlidir ve n düzenli bir sihirli kare n^2 hücreye sahiptir ve genellikle 1'den n^2 'ye kadar olan sayıları içerir.

Hint ve İran gibi diğer eski kültürler de sihirli karelerle ilgilenmiştir. Onuncu yüzyılda Hindistan Khajurahu'da bir tapınakta 4'lü düzende bir sihirli kare kayda geçmiştir. Diğer 4'lü düzende olan sihirli karelerdeki gibi sihirli sabiti 34'tür ve 1'den 16'ya kadar olan sayıları kullanır.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Şekil 52: Onuncu yüzyıldan 4'lü düzende bir sihirli kare.

4'lü düzende farklı diziliimli olan birçok sihirli kare vardır: yansımalar ve dönmeler sayılmazsa topu topu 880 adet. 5'li düzende olanların sayısı çok daha fazladır: 275.305.224. 6 düzende olan sihirli karelerin sayısı tam olarak bilinmese de sayısının $1,7745 \times 10^{19}$ olduğu düşünülmektedir.

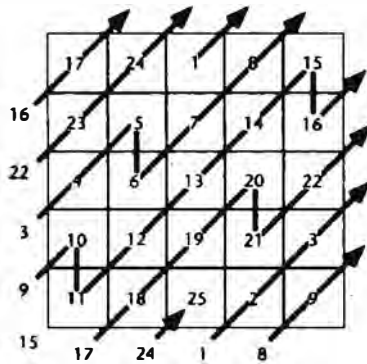
Ressam Albrecht Dürer diğer birçok matematiksel nesne içeren *Melancolia I* adlı gravüründe 4'lü düzende bir sihirli kareye yer vermiştir. En alttaki sıranın ortasına o zamanın tarihi 1514 denk gelmesi için özel olarak seçilmiştir.



Şekil 53: Solda: *Melancolia I* Sağda: Sihirli karenin detayı. En alttaki sıranın ortasında 1514 tarihine dikkat edin.

3'e eşit veya ondan büyük bütün sayılar için sihirli kareler mevcuttur ve önemsiz bir şekilde 1'li düzende de vardır ama 2'de yoktur. Böyle örnekleri oluşturmak için n 'nin tek ya da bir tek sayının iki katı veya 4'ün katı olmasına göre değişen

genel yöntemler vardır. n 'li düzende bir sihirli karenin sihirli sabiti $n(n^2 + 1)/2$ ile hesaplanır. Bunun neden böyle olduğunu anlamak için $1 + 2 + 3 + \dots + n^2$, yani bütün hücrelerdeki sayıların toplamının $n(n^2 + 1)/2$ 'ye eşit olduğuna dikkat edin. Kare her biri aynı toplama sahip n tane diziye ayrılabilir, sihirli sabit bunu n 'ye bölerek elde edilebilir.



Şekil 54: Tek sayılı düzende bir sihirli kare oluşturmanın genel yöntemi. En üstteki sıranın ortasına 1'i yerleştirin, daha sonra 2, 3, 4, ... şeklinde sıradaki sayıları köşegenleri izleyerek eğer gerekirse yukarıdan aşağı veya soldan sağa doğru 'turlayarak' yerleştirin. Var olan bir sayının karenin dışında bir yere yazılması gerektiğinde hemen aşağıdaki kareye geçin.

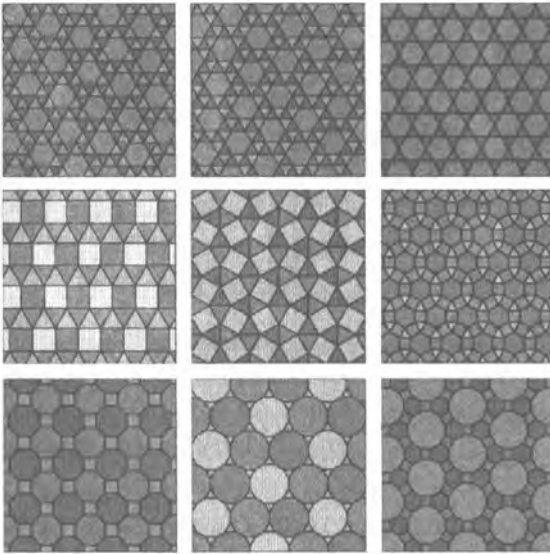
Arşimet'in Mozaikleri

Dokuz mozaik örüntüsü her köşede aynı düzenlemeye sahip düzgün çokgenlerden bir çeşitten daha fazlasını kullanır. Bunlar tek yapıda veya yarı düzenli Arşimet'in mozaikleri diye bilinir (karşı sayfaya bakınız).

Karelere Bölünen Dikdörtgen

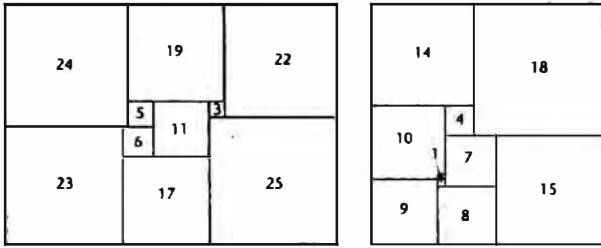
Bir kare her kenarı eşit üç parçaya ayrılarak dokuz adet daha küçük eş karelere ayrılabilir. Tamsayı kenar uzunluklarına sahip bir dikdörtgen de eş büyüklükte olmayan dokuz kareye bölünebilir, ancak düzenlemesini bulmak çok daha zordur.

Hepimiz kenarları küçük karelerin tam katı tamsayı olan bir dikdörtgen düzlemin eş büyüklükte kare mozaiklere bölünebileceğini biliriz. Ancak, her biri *farklı* büyüklükte olan karelerden bir mozaik oluşturmaya çalıştığımızda ne olur? İlk 'karelere bölünmüş dikdörtgeni' ölçüleri 3, 5, 6, 11, 17, 19, 22, 23, 24, 25 olan on adet kareyi kullanarak 1925'te Zbigniew Mo-roń yayımladı. Kısa bir süre sonra da ölçüleri 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 18 olan dokuz adet kareli bir dikdörtgen daha buldu.

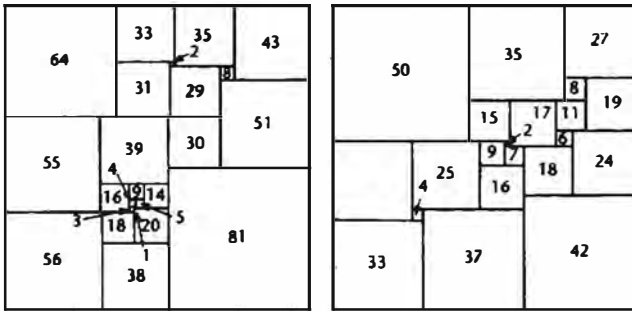


Şekil 55: Arşimet'in dokuz mozaïği.

Pekâlâ, farklı karelerden bir kare oluşturmak hakkında ne dersiniz? Uzun zaman bunun imkânsız olduğu düşünöldü, ancak 1939'da Roland Sprague kare bir mozaik oluşturacak biçimde birbirleriyle uyumlu olan 55 adet farklı kare buldu. 1940'ta o zamanlar Trinity College'ta üniversite öğrencisi olan Leonard Brooks, Cedric Smith, Arthur Stone ve William Tutte karelerin ölçülerinin ne olacağını ve birbirleriyle nasıl iç içe geçeceklerini kodlayan elektrik ağlarıyla ilgili bir makale yayımladılar. Bu yöntem daha fazla çözüme imkân verdi.



Şekil 56: *Solda*: Morón'un ilk karelere bölünmüş dikdörtgeni. *Sağda*: Geliştirdiği dokuzlu mozaïği.



Şekil 57: *Solda*: Willcocks'un 24'lü karelere bölünmüş kare mozaïği. *Sağda*: Duijvestijn'in 21 kareli mozaïği.

Theophilus Willcocks 1948'de birbiriyle iç içe geçen 24 kareden bir kare buldu. Yakın zamana kadar daha küçük bir dizinin bu işi yapamayacağı düşünülüyordu, ancak 1962'de Adrianus Duijvestijn mozaik oluşturmak için 21 karenin gerektiğini ve bunun da en az sayı olduğunu bilgisayar kullanarak gösterdi. Onların ölçüleri 2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 24, 25, 27, 29, 33, 35, 37, 42 ve 50'dir.

1975'te Solomon Golomb boşluk bırakmadan ve sadece 1, 2, 3, 4 diye tamsayıli giden ölçülerde kareler kullanarak sonsuz büyüklükte bir düzlemin mozaikle döşenip döşenemeyeceğini sordu. Son zamanlara kadar problem çözülememişti, ancak 2008'de James ve Frederick Henle cevabın 'evet' olduğunu ustalıklı bir ispatla buldular.

ONLUK SİSTEM

Sayıları yazmak için kullandığımız onluk sistem muhtemelen on adet el ve ayak parmağına sahip olduğumuzdan 10 adet rakama dayalıdır. Antik medeniyetler tarafından açıkça kullanıldığı gibi 20 ve 60 gibi bazı başka tabanlar da mümkündür. 10 hem üç köşeli hem de dört köşelidir. Euler'in düşündüğünün aksine iki adet 10×10 'luk dik açılı Latin kareleri vardır.

Onluk Sistemde Sayma

Günümüz sayısal nota sistemi 'decimal' diye adlandırılmıştır, çünkü taban olarak 10'u kullanır. *Decem*

Latince 'on' demektir. Bu sistemde on adet sembol birler, onlar, yüzler ve devamı için kullanılır.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Bunların her birinin değerinin ne olacağı sayı içindeki yerleriyle gösterilir. Örneğin, 2015 sayısında semboller şu anlama gelmektedir:

5 birler basamağı

1 onlar basamağı

0 yüzler basamağı

2 binler basamağı

Burada merkezi rolü 10'un artan kuvvetleri oynar:

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 100$$

$$10^3 = 1000$$

Bu sayısal nota sistemini kullanmaya öylesine alışmışızdır ki, onu basitçe sadece 'sayılar' olarak ve 10 sayısının matematiksel olarak özel bir şey olduğunu düşünmeye eğilimliyizdir. Bununla birlikte, sayı tabanı olarak çok benzer sayısal nota sistemleri kullanılabilir. Dolayısıyla daha sonra göreceğimiz üzere aslında 10 sayısı özel olmakla birlikte, bu açıdan özel bir sayı değildir.

Bilgisayarlar birçok taban kullanır:

2 tabanı	2'lik sistem [2 bölümüne <i>bkz.</i>], sembolleri 0 1
8 tabanı	8'lik sistem, sembolleri 0 1 2 3 4 5 6 7
16 tabanı	16'lık sistem, sembolleri 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F

12 tabanı yani 12'lik sistem onluk sistemin bir geliştirilmiş hali olarak sıkça gündeme gelmiştir, çünkü 10 sadece 2 ve 5 tarafından bölünebilirken 12; 2, 3, 4 ve 6 tarafında bölünür. Mayalar 20 tabanını ve Antik Babiller 60 tabanını kullanmışlardır. [Her ikisi için de 0 bölümüne *bkz.*]

2015 sayısını onluk sistemde şu şekilde:

$$2 \times 1000 + 0 \times 100 + 1 \times 10 + 5 \times 1 \text{ veya üstlü sayı şeklinde: } 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0 \text{ diye açabiliriz.}$$

Bu gösterim basamak değeri gösterimi olarak adlandırılır, çünkü bir sembolün anlamı bulunduğu yere göre değişir.

Aynı semboller 8 tabanında şöyle açılır:

$$2 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 1 \times 8^1 + 5 \times 8^0$$

Daha tanıdık onluk sistemde o şu şekilde gözükür

$$2 \times 512 + 0 \times 64 + 1 \times 8 + 5 \times 1 = 1037$$

Dolayısıyla aynı semboller farklı tabanlar kullanılarak yorumlanırsa farklı sayıları verecektir.

Daha az tanıdık bir tabanda bunu bir daha deneyelim: 7. Apellobetnees III'te yerli uzaylılar hepsi yedi kuyruğa sahipti ve onları kullanarak sayıyorlardı. Dolayısıyla onların sayı sistemi 0'dan 6'ya kadar olan rakamlara sahiptir. Onlar, daha sonra 7 yazacağımız yerde 10 yazıyorlardı ve bizim 48 yazacağımız yerde 66'ya kadar devam ediyorlardı. Sonrasında bizim 49 yerine onlar 100 kullanırlar ve bu böyle devam eder.

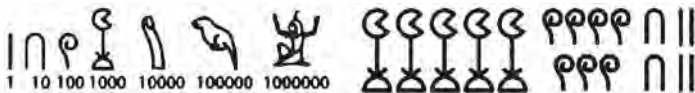
$abcd$ gibi bir sayı Apellobetnees tarzı sistemden onluk sisteme şu şekilde çevrilir:

$$a \times 7^3 + b \times 7^2 + c \times 7 + d = 343a + 49b + 7c + d$$

Biraz pratikle bu sistemi kullanarak onluk ve yedilik sistemleri birbirine *çevirmeksizin* uzaylı biçimi toplama işlemleri yapabilirsiniz. '4 + 5 = 2 elde var 1 gibi' (çünkü onluk sistemdeki 9, 7 tabanında 12'dir) kurallara ihtiyacınız vardır, ancak bunun dışında her şey çok tanıdık gözükmektedir.

Sayı Gösterim Sistemlerinin Tarihi

İlkçağ uygarlıkları bizimkinden çok farklı sayı gösterim sistemleri kullanmışlardır. Babiller çivi yazısı sembollerini almış rakamla 60 tabanını kullanmışlardır [0 bölümüne *bkz.*]. Mısırlılar 10'un kuvvetleri için özel semboller kullanmışlardır ve diğer sayıları da elde etmek için onları tekrar etmişlerdir. Antik Yunanlar 1–9, 10–90, 100–900 arası sayılar için kendi alfabelerini kullanmışlardır.



Şekil 58: *Solda*: Mısır sayı sembolleri. *Sağda*: Mısır hiyerogliflerinde 5724 sayısı.

Günümüzdeki basamaklara göre sayı gösterim sistemi ve on rakam için 0–9 arası sembollerimiz MÖ 500 dolaylarında Hindistan'da ortaya çıkmıştır, ancak daha önceden gelen öncülleri de vardı. Tarih karmaşıktır; tarihleri belirlemesi zordur ve tartışmalıdır.



Şekil 59: *Solda*: Bakhshali yazmasından semboller. *Sağda*: Brahma rakamları.

Pakistan'da 1881'de Bakhshali'ye yakın bir yerde bulunan Bakhshali yazması huş ağacı kabuğu üzerine yazılmış Hint matematiğinin bilinen en eski metnidir. Bilim insanları onun MÖ ikinci yüzyıl ile MS üçüncü yüzyıl arasında tarihlendiğini düşünmektedirler; daha önceki bir yazmanın kopyası olduğu düşünülmektedir. 0–9 arası rakamlar için özel semboller kullanılmaktadır. Brahma rakamları MS 200–300 tarihine gitmektedir, ancak onlar basamak değerli gösterimi kullanmamışlardır. Onun yerine 10'un, 100'ün ve 1000'in katlarını göstermek için fazladan semboller ve 3000 gibi sayıları elde etmek için bileştirici kuralları vardı.

Daha sonra Brahma rakamlarından 'Hint' rakamları elde edildi. Hint matematikçi Aryabhata tarafından farklı biçimlerde altıncı yüzyılda kullanıldı. Brahmagupta 0'ı sadece kendi türünde bir sayı olarak yedinci yüzyılda kullanmıştır ve sıfırla dört işlem yapmak için kurallar bulmuştur.

Avrupalı	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Arap-Hint	.	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
Doğu Arap-Hint (Farsça ve Urduca)	.	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
Devanagari dili (Hint)	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
Tamil dili		௧	௨	௩	௪	௫	௬	௭	௮	௯

Şekil 60: Arap ve Hint rakam örnekleri.

Hintlerin icadı özellikle Fars matematikçi Hârizmî [*Hint Rakamlarıyla Hesaplama Yapma Üzerine*, 825] ve Arap matematikçi El-Kindi [*Hint Rakamlarının Kullanılması Üzerine*, 830 dolayları] üzerinden orta doğuya yayıldı.

Daha sonra Avrupa'ya Hârizmî'nin kitabının Latince çevirileriyle yayıldı. Bu sayı gösterim sisteminin Avrupa'da yayılması için kasten yazılan ilk kitap Fibonacci'nin 1202 tarihli *Liber Abacci*'sidir. O, bu yöntemi *Modus Indorum* (Hintleri yöntemi) diye adlandırmıştır, ancak Hârizmî ile ilişkilen-

dirmesi öylesine güçlüydü ki Hârizmî'nin kitabının ismine rağmen 'Arap rakamları' terimi benimsendi. Bu isimlendirme Avrupalılar, Araplaştırılmış Berberilerle temasa geçince daha da güçlendi.

Sembollerin yerine oturması bir süre aldı. Ortaçağ Avrupasında, onlarca değişik biçimi kullanıldı. Günümüzde bile, farklı kültürler semboller için değişik biçimler kullanmaktadır.

Batılı	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Doğu Arap dili	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
Farsça	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
Basitleştirilmiş Çince*	〇	一	二	三	四	五	六	七	八	九
Karmaşık Çince	零	壹	貳	叁	肆	伍	陸	柒	捌	玖
Moğolca	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tibet dili	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Şekil 61: Rakamlar için bazı çağdaş semboller. (* Japonlar ve Koreliler basitleştirilmiş Çinli karakterleri kullanmaktadır.)

Ondalık Virgöl

Fibonacci'nin *Liber Abbaci* kitabı günümüzde hâlâ kullandığımız bir sayı gösterim biçimini içermekteydi: 3/4 gibi 'üç çeyreklik' bir kesirde bulunan yatay çizgi. Hintler de yatay çizgi olmaksızın; yatay çizgi Araplar tarafından ortaya atılmış gözükmemektedir, benzer sistemi kullanmışlardır. Fibonacci onu yaygın biçimde kullanmıştır, ancak aynı yatay çizgi birçok farklı kesrin bir parçası olabilirdi.

Günümüzde kesirleri pratik gösterimler için nadiren kullanırız. Bunun yerine π 'yi yazarken yaptığımızdaki gibi 3,14159 yani ondalık virgülü kullanırız. Ondalık sayıların bu şekilde kullanılması Simon Stevin'in, Sessiz William'ın oğlu Nassau'lu Maurice'in özel hocası olduğu 1585'ten beri vardır. Stevin sonunda ekonomi bakanı olur. Hassas muhasebe yöntemleri

ararken Hint–Arap rakamlarını aklına getirmiştir, ancak kesirler ona çok kullanışsız gelmiştir.

Babiller her zaman pratik olmuş ve onların 60 tabanındaki uygun rakamların $1/60$ 'ın kuvvetlerini temsil edecek olan modern dakikaları ve saniyeleri doğuracak şekilde hem zaman hem de açılar için ortaya atmışlardır. Günümüze ayarlanmış Babil gösteriminde, $6;15$ bizim 6 tam $1/4$ veya $6,25$ olarak yazacağımız $6 + 15 \times 1/60$ demektir. Stevin 60 tabanını kullanmanın dışında bu fikirden hoşlandı ve ikisinin de en iyi halini birleştiren bir sistem öngördü: ondalık sayılar.

O, yeni sistemini yayımladığında onun iş hayatında kullanımını ve pratikliğini vurguladı: 'İş hayatında karşılaşılan bütün hesaplamalarda kesirlerin yardımı olmaksızın tamsayılarla işlem yapılabilir.'

Onun gösterim sistemi şimdi olduğu gibi ondalık virgülü içermemekteydi, ancak o kısa sürede günümüzdeki ondalık sayılar sistemine evirildi. Bizim $5,7731$ yazdığımız yerde Stevin $\textcircled{5}\textcircled{0}\textcircled{7}\textcircled{1}\textcircled{7}\textcircled{2}\textcircled{3}\textcircled{3}\textcircled{1}\textcircled{4}$ yazmaktaydı. Burada $\textcircled{0}$ sembolü tamsayıyı $\textcircled{1}$ onda biri, $\textcircled{2}$ yüzde biri ifade eder. Kullanıcılar kısa sürede onu ondalık virgüle kadar kısaltan ve basitleştiren $\textcircled{1}$ ve $\textcircled{2}$ 'yi kullanmaktan vazgeçtiler.

Gerçel Sayılar

Kesirler yerine ondalık sayıları kullanırsanız bir engel ortaya çıkar: onlar bazen tam değildirler. Örneğin, $1/3$; $0,333$ 'e çok yakındır hatta $0,333.333$ 'e daha da yakındır ancak hiçbirisi tam değildir. Bunu görmek için onu üçle çarpın. 1 elde etmelisiniz, ancak aslında $0,999$ ve $0,999.999$ elde edersiniz. Neredeyse olacaktı. Matematikçiler 'tam' olması manasında $1/3$ 'ün ondalık uzantısının sonsuz uzunlukta olması gerektiğinin farkına vardılar:

$$1/3 = 0,333.333.333.333.333.333...$$

'Sonsuza kadar' devam eder. Bu da π gibi bir sayının da benzer rakamları sınırsız biçimde tekrar etmemesinin haricinde sonsuza kadar devam etmesi gerektiği fikrine götürdü:

$$\pi = 3,141.592.653.589.793.238,...$$

1/3'ün sayılar durmadığı sürece 0,333.333...'e gerçekten de eşit olduğunun farkına varmak önemlidir.

İspatı şöyledir.

$x = 0,333.333...$ olarak kabul edelim. Bunu 10 ile çarpalım. Bu x 'i $10x$ 'e dönüştürür ve 0,333.333,...'ün virgülünü bir sola kaydırır, dolayısıyla

$$10x = 3,333.333...$$

Bu yüzden

$$10x = 3 + x$$

$$9x = 3$$

$$x = 3/9 = 1/3$$

$10x = 3 + x$ ifadesi sayıların sonsuza kadar olmasına dayanır. Eğer onlar trilyonuncu tekrarda dahi bitecek olsalardı, ifade yanlış olurdu.

Aynı akıl yürütme 0,999.999....'un sonsuza kadar devam ederek tam olarak 1'e eşit olduğunu imler. Burada da $10x = 9 + x$ ile ifade edilen hileyi kullanabilirsiniz, dolayısıyla $x = 1$ verebilir ya da sadece $1/3 = 0,333.333....$ ifadesini 3 ile çarpabilirsiniz.

İnsanların çoğu 0,999.999....'un sonsuza kadar devam etse de 1'e eşit olmayacağına ikna olmuşlardır. Onlar onun 1'den daha küçük olduğuna inanırlar. Eğer bir seviyede durursanız onun 1'den çıkarılma sonucu da farklı olacaktır:

$$1 - 0,9 = 0,1$$

$$1 - 0,99 = 0,01$$

$$1 - 0,999 = 0,001$$

$$1 - 0,9999 = 0,0001$$

$$1 - 0,99999 = 0,00001$$

$$1 - 0,9999999 = 0,000001$$

şeklinde devam eder. Limite göre bu fark 0'a doğru yaklaşır. Minicik de olsa herhangi bir pozitif sayıdan daha küçük hale gelir.

Matematikçiler sonsuz ondalık basamağa sahip sayının değerini ondalık basamakları sonsuza uzadığından basamak-

ları bir noktada durdurulmuş şeklinin *limiti* olarak tanımlar. 9 rakamıyla olan sonsuz bir dizi için limit tam olarak 1'dir. 1'den daha az bir değer iş görmeyecektir, çünkü bazı yeterli büyüklükteki 9'lar daha büyük bir sonuç verecektir. 'sonsuz sayıda 0'dan sonra gelen 1'diye bir şey yoktur, eğer olsa bile ona 0,999.999.... ekleyerek 1'i elde edemezsiniz.

Bu tanımlama sonsuz ondalık sayıları hassas matematiksel kavramlar haline getirmiştir. Sonuçta çıkan sayılar, gerçek dünyada var olduklarından değil onları sinir bozucu *i* gibi 'sana' sayılardan ayırt etmek için gerçel sayılar olarak adlandırılır [i bölümüne *bkz.*]. Limiti kullanmak için ödediğimiz bedel bazı sayıların 0,999.999... ve 1,000.000... gibi farklı iki ondalık uzantıya sahip olabilmeleridir. Yakında buna alışacaksınız.



Şekil 62: Dördüncü üçgensel sayı.

Dördüncü Üçgensel Sayı

Dördüncü üçgensel sayı [3 bölümüne *bkz.*]

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10\text{'dur.}$$

Pisagorcuların antik kültü bu düzenlemeyi *tetraktis* olarak adlandırmıştır ve kutsal saymıştır. Pisagorcular evrenin sayılara dayalı olduğuna inanmaktaydılar ve ilk on sayıya özel yorumlar yapmışlardı. Bu belirlemeler hakkında oldukça çok tartışma vardır; çeşitli kaynaklardan örnekler şöyledir:

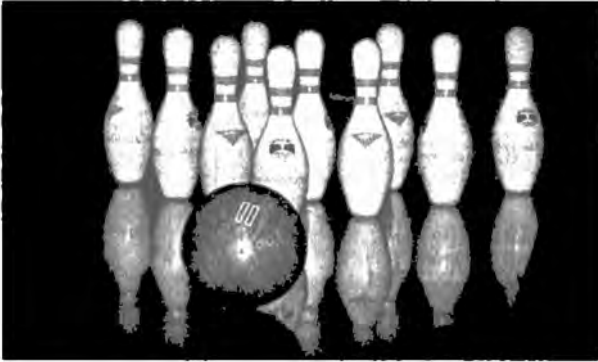
1. Birlik, mantık
2. Düşünce, dişil

3. Uyum, eril

4. Evren, adalet

Bu önemli dört sayının toplamı olarak 10 özellikle önemliydi. O, ayrıca dört 'element' olan toprak, hava, ateş ve suyu; uzayın dört bileşeni olan nokta, doğru, düzlem, katı cisim sembolize etmekteydi.

Bowlingde 10 labut da bu şekilde yerleştirilir.



Şekil 63: On adet labut

Üçüncü Dördül Sayı

Ardışık olan sayıların toplamı olan üçgensel sayılarda 1, 3, 6, 10 olduğu şekilde, dördül sayılar da ardışık üçgensel sayıların toplamıdır:

$$1 = 1$$

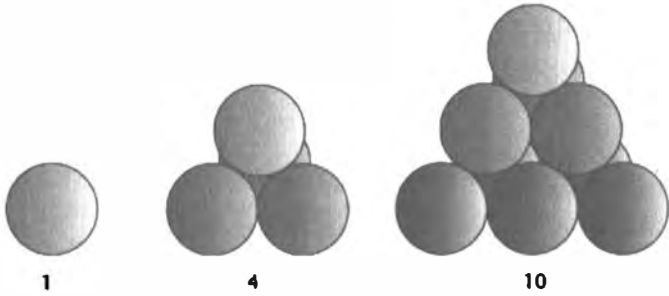
$$4 = 1 + 3$$

$$10 = 1 + 3 + 6$$

$$20 = 1 + 3 + 6 + 10$$

n . dördül sayısı $n(n+1)(n+2)/6$ 'ya eşittir.

Geometrik olarak, kürelerin bir dördül sayısı hali üçgensel sayıların azalan biçimi şeklinde istif edilebilir.



Şekil 64: Dördül sayılar

Hem üçgensel hem de dördül olan en küçük sayı ondur (1'in dışında). Hem üçgensel hem de dördül olan sayılar *sadece* şunlardır: 1, 10, 120, 1540, 7140'tır.

10'lu Düzendeki Ortogonal Latin Kareleri

Euler 1873'te bütün sıralardaki ve sütunlardaki sayıların kendi içinde toplandığında aynı toplamı vereceği [9 bölümüne bkz.] matematiksel bir oyun hakkında fikir yürütmekteydi. Ancak Euler'in verimli beyni yeni bir yöne doğru evrilmekteydi ve fikirlerini 'Sihirli Karelerin Yeni Bir Çeşidi' adında bir makalede yayımladı. Bir örneği şöyledir

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Sıradaki ve sütundaki sayıların toplamı bir köşegen dışında her yerde 6 olması ve ardışık sayıları kullanma standart şartını sağlamaması dışında bu sihirli bir karedir. Bunun yerine her sütun ve sıra değişik sıralanmış 1, 2, 3 sayılarından oluşmaktadır. Böylesi kareler *Latin kareleri* olarak adlandırılır, çünkü sembollerin rakam olma zorunluluğu yoktur; özel olarak onlar A, B, C gibi Latin (ki bu da Romen olur) harfleri olabilir.

Euler'in yapbozunun tarifi şöyledir: 'Bir süredir pratik zekâlı pek çok insanın kafasında dolandırdığı, özel olarak

kombinasyon alanında yeni analiz sahaları açacak gibi duran çok tuhaf bir sorun şu aşağıdaki çalışmalarda beni de işe dahil etti. Soru bir kare üzerine her sırada (hem dikey hem yatay) farklı alaydan ve farklı rütbeden olması şartıyla yerleştirilecek 6 farklı alaydan 6 farklı rütbeden alınan 36 askerin etrafında dönmektedir.'

Her bir sembol kümesinde, eğer rütbelere için A, B, C, D, E, F'yi kullanırsak ve alaylar için de 1, 2, 3, 4, 5, 6'yı kullanırsak yapboz bizden 6×6 'lık bir Latin karesi yapmamızı istemektedir. Ek olarak onlar birbirine dik olmalıdır; bu, kareler birleştirildiği zaman bu iki sembolün iki kere olan kombinasyonlarının olmaması demektir. Rütbelere ve alaylar için ayrı ayrı düzenlemeler yapmak kolaydır, ancak ikisinin birbiriyle uyum içinde olması yani hiçbir rütbenin ve alayın tekrar etmemesiye oldukça zordur. Örneğin, şöyle deneyebiliriz

A B C D E F		1 2 3 4 5 6
B C D E F A		2 1 4 3 6 5
C D E F A B	ve	4 3 5 6 1 2
D E F A B C		6 4 1 5 2 3
E F A B C D		5 6 2 1 3 4
F A B C D E		3 5 6 2 4 1

Ancak bunları bileştirdiğimizde aşağıdakini elde ederiz ve görürüz ki arada tekrar edenler vardır:

A1 B2 C3 D4 E5 F6
B2 C1 D4 E3 F6 A5
C4 D3 E5 F6 A1 B2
D6 E4 F1 A5 B2 C3
E5 F6 A2 B1 C3 D4
F3 A5 B6 C2 D4 E1

Örneğin, A1 iki kere B2 dört defa oluşmuştur. Dolayısıyla, bu istenilen bir şey değildir.

Eğer aynı problemi A, B, C, D gibi dört farklı rütbeli ve 1, 2, 3, 4 gibi dört farklı alaydan 16 askerle denersek bir çözüm bulmak çok zor değildir:

A	B	C	D	1	2	3	4
B	A	D	C	3	4	1	2
C	D	A	B	4	3	2	1
D	C	B	A	2	1	4	3

Bunlar ortogonaldır. Dikkat çekici bir biçimde ikisiyle de ortogonal olan bir üçüncü Latin karesi daha vardır.

p	q	r	s
s	r	q	p
q	p	s	r
r	s	p	q

Matematiksel olarak söylersek 4'lü düzende üç tane karşılıklı ortogonal olan Latin kareleri keşfettik. Euler 6'lı düzende birbiriyle uyumlu Latin kareleri bulmak için elinden geleni yaptı, ancak başarısızlığa uğradı. Bu onu, 36 askerli yapbozun çözümü olmadığı hakkında ikna etti. Bununla birlikte o, n 'nin bütün tek sayı değerleri olması veya dördün katı olması halinde $n \times n$ boyutunda ortogonal Latin kare çiftleri oluşturabilirdi ve 2'li düzende böylesi kareler olmayacağını ispatlamak kolaydır. Kalan ölçüler bir tek sayının iki katı olan 6, 10, 14, 18 şeklinde devam eden sayılardır ve Euler böylesi ölçülerde ortogonal çiftlerin olamayacağını iddia etmiştir.

6×6 boyutunda 812 milyon farklı Latin karesi vardır ve kısa yolları kullansanız bile bütün muhtemel kombinasyonların hepsini listeleyemezsiniz. Bununla beraber 1901'de Gaston Tarry 6×6 kareler için Euler'in haklı olduğunu ispat etti. O, aslında diğer bütün hepsi hakkında yanılmıştı. Ernest Tilden Parker 1959'da 10×10 boyutunda iki ortogonal Latin karesi oluşturmuştur. Parker, Raj Chandra Bose ve Sharadachandra Shankar Shrinkhande 1960'ta Euler'in iddiasının 6×6 ölçüsü hariç yanlış olduğunu ispat etmişlerdir.

46	57	68	70	81	02	13	24	35	99
71	94	37	65	12	40	29	06	88	53
93	26	54	01	38	19	85	77	60	42
15	43	80	27	09	74	66	58	92	31
32	78	16	89	63	55	47	91	04	20
67	05	79	52	44	36	90	83	21	18
84	69	41	33	25	98	72	10	56	07
59	30	22	14	97	61	08	45	73	86
28	11	03	96	50	87	34	62	49	75
00	82	95	48	76	23	51	39	17	64

Şekil 65: Parker'ın iki ortogonal 10×10 Latin karesi: birincisi ilk rakam, ikincisi ikinci rakam olarak gösterilmiştir.

Sıfır ve Negatif Sayılar

1–10 arası sayıları berteraf ettikten sonra, 0'a geçmek için bir adım ilerliyoruz. Daha sonra -1 'e doğru geri adım atacağız.

Bu bize negatif sayıların bütün dünyasını açacaktır. Ayrıca o, sayıların yeni kullanılış biçimlerini ortaya çıkaracaktır.

Artık, onlar sadece sayı saymak için değildir.

HİÇLİK BİR SAYI MIDIR?

Sıfır ilk olarak sayıları not etmek için olan sistemlerde ortaya çıkmıştır. O, sayı yazma sisteminin bir aletiydi. Kendisi müstakil bir sayı olarak daha sonraları kabul edilecekti ve matematiksel sayı sistemleri içinde temel özellik olarak yerini almasına izin verilecekti. Bununla birlikte, o sıra dışı bazen çetrefilli birçok özelliğe sahiptir. Özellikle, mantıklı bir biçimde 0 ile bölme işlemi yapamazsınız. Matematiğin temellerinde, bütün sayılar 0'dan elde edilebilir.

Sayı Gösterim Sistemlerinin Temeli

Birçok antik kültürde 1, 10 ve 100 için olan semboller birbiriyle ilişkili değildir. Örneğin, Antik Yunanlar 1-9, 10-90 ve 100-900 arasındaki sayıları göstermek için alfabelerinin harflerini kullanmışlardır. Bağlamdan sembolün bir sayıyı mı, yoksa bir harfi mi sembolize ettiğine karar vermek genellikle kolay olsa da bu olası bir kafa karışıklığı sebebidir. Ayrıca bu, hesaplamaları da zorlaştırdı.

Aynı rakamın farklı bir sayının yerini tutması için not ettiğimizi anlamamızı sağlayan yol basamak değeri gösterimidir [10 bölümüne bkz.]. Bu sistem yakın geçmişe kadar dünyadaki toplamaların çoğunluğunun yapıldığı yöntem olan kâğıt kalem aritmetiği için büyük avantajlara sahiptir. Basamak değeri gösterimiyle bilmeniz gereken temel şeyler 0-9 arası olan on sembolü toplamak ve çarpmak için esas kurallardır. Aynı semboller farklı yerlerde olduğunda ortak örüntüler vardır. Örneğin,

$$23 + 5 = 28 \quad 230 + 50 = 280 \quad 2300 + 500 = 2800$$

1	α	alpha	10	ι	iota	100	ρ	rho
2	β	beta	20	κ	kappa	200	σ	sigma
3	γ	gamma	30	λ	lambda	300	τ	tau
4	δ	delta	40	μ	mu	400	υ	upsilon
5	ϵ	epsilon	50	ν	nu	500	ϕ	phi
6	ς	vau*	60	ξ	xi	600	χ	chi
7	ζ	zeta	70	$\omicron$	omicron	700	ψ	psi
8	η	eta	80	π	pi	800	ω	omega
9	θ	theta	90	ζ	koppa*	900	$\sampi$	sampi*

*vau, koppa, ve sampi hükümsüz karakterlerdir.

Şekil 66

Antik Yunan sayı gösterim sistemini kullanırsak hiçbir ortak yapı göstermeksizin ilk iki işlem şöyle gözükür:

$$k\gamma + \epsilon = k\eta \quad \alpha \lambda + \nu = \alpha \pi$$

Bununla birlikte, basamak değer gösteriminin 2015'te gözüken fazladan bir özelliği vardır: sıfır sembolünü yazmanın gerekliliği. Bu, bize yüzler basamağında bir değer olmadığını söyler. Yunan sayı gösterimi buna ihtiyaç duymaz. σ 'da örneğin σ '200' ve ρ de '80'manasına gelmektedir. Birlerde bir şey yoktur, çünkü birler sembollerinden $\alpha - \theta$ hiçbiri orada yoktur. Sıfır sembolünü kullanmak yerine, basitçe birler sembollerinden hiçbirini yazmayız.

Bunu onluk sistemde yapmaya kalkışırsak, 2015 215'e dönüşür, ancak bunun 215, 2150, 2105 mi yoksa 2015 mi olduğunu, hatta 2.000.150 mi olduğunu söyleyemeyiz. Basamak değeri gösteriminin erken versiyonları boşluk kullanırdı 2 15, ancak boşluğu fark etmek kolay değildir ve yan yana iki boşluk sadece biraz daha geniş bir boşluk oluşturur. Dolayısıyla bu kafa karıştırıcıdır ve hata yapması kolaydır.

Sıfırın Kısa Tarihi

Babil

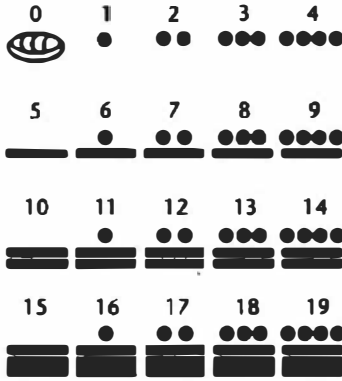
'Burada bir sayı yok' anlamına gelen bir sembolü ortaya çıkaran uygarlık Babillerdi. Babillerin sayı gösterim sisteminin [10 bölümüne bkz.] 10 değil 60 tabanında olduğunu hatırlayın. Erken Babil aritmetiği 60^2 basamağında bir yokluğu boşlukla göstermişlerdir, ancak onlar MÖ 300 dolaylarında  biçiminde özel bir sembol icat ettiler. Bununla birlikte, Babiller bu sembolü özel bir sayı olarak düşünmemişlerdir. Ayrıca bu, eğer sayının sonundaysa anlam bağlamdan çıkarılsın diye onu yazmazlardı.

Hindistan

10 tabanında basamak değeri gösterimi fikri ve ayrıca bizim 0 kullandığımız yerde *shunyayı* (boş anlamına gelir) ilk kullanımı MS 458 tarihli Caynist kozmolojik bir metin olan *Lokavibhaga*'dadır. MS 458'de ünlü Hint matematikçi ve astronom Aryabhata basamak değeri gösterimini 'yerden yere göre değer on kat değişmesi' olarak tanımlamıştır. Onluk sistemin bir rakamı olarak ihtilafsız 0'ın kullanılması MS 876'da Gwalior'daki Chaturbhuj tapınağındaki bir kayıta olmuştur ve ne olmuştu tahmin edin; o küçük bir yuvarlaktı.

Mayalar

Zirveye MS 250 ile 900 arasında çıkan Orta Amerikalı Maya uygarlığı 20 tabanında sayı gösterimini ve sıfır için ayrı bir sembol kullanmışlardır. Bu yöntem çok daha öncelere gitmektedir ve Olmekler (MÖ 1500–400) tarafından icat edildiği düşünülmektedir. Mayalar 'Uzun Sayma' dedikleri bir hesaplama ve kendi takvim sistemlerinde sayıları kayda değer miktarda kullanmışlardır. Bu, günümüzdeki batı takvimine göre MÖ 11 Ağustos 3114'te olan mitolojik yaratılma gününden beri her güne bir tarih vererek kaç günün geçtiğini sayma amacını ifade eder. Bu sistemde sıfır için bir sembol kullanmak muğlaklığı gidermek için gereklidir.



Şekil 67: *Solda*: Maya rakamları. *Sağda*: Maya yaratılış tarihini üzerinde taşıyan Quirigua'daki dikilitaş: 13 Baktun, 0 Katun, 0 Tun, 0 Uinal, 4 Ahau 8 Cumku. Bu bizim MÖ 11 Ağustos 3114 tarihimizdir.

Sıfır bir sayı mıdır?

MS dokuzuncu yüzyıldan önce sıfır sayısal hesaplamalar için elverişli bir sembol olarak görülüyordu, ancak özel bir sayı olarak kabul edilmemekteydi. Bu muhtemelen hiçbir şeyi saymadığındandır.

Eğer birisi size kaç adet ineğiniz olduğunu sorarsa ve sizin de inekleriniz varsa onlara sırasıyla parmağınızla işaret edip 'bir, iki, üç,...' diye sayarsınız. Ancak hiç ineğiniz yoksa bir ineği parmağınızla gösterip de 'sıfır' adet diye söylemezsiniz, çünkü işaret edilecek bir inek ortada yoktur. Sayarken 0'ı elde edemediğinizden, onun bir sayı olmadığı açıktır.

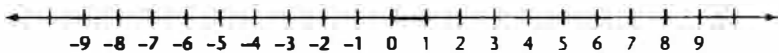
Eğer bu davranış size tuhaf gözüktürse, daha önceden de 'bir' sayısının bir sayı olarak düşünülmediğini not etmek kayda değerdir. Eğer belli sayıda inekleriniz varsa, muhtemelen birden fazla vardır. Benzer bir ayırım modern dillerde de bulunabilir: tekil ve çoğul arasındaki farklılık. Antik Yunanlar da iki nesne hakkında konuşurken kullandıkları özel kelime değişiklikleriyle benzer bir 'ikiliğe' sahiptiler. Dolayısıyla bu manada 'iki' diğer geriye kalanlar gibi bir sayı değildi. Birçok

diğer klasik dil aynısını yapmaktaydı ve İskoç İrlandacası ve Slovakça gibi bazı modern olanları hâlâ öyledir. Bunun iki nesne için kullanılan 'ikisi' ve daha fazlası için kullanılan 'tümü' gibi kalıntıları İngilizcede kalmıştır.

Sıfırın bir sembol olarak kullanılması yayıldıkça ve sayılar saymaktan başka amaçlar için kullanılınca sıfırın birçok durumda diğer sayılar gibi davrandığı açıkça ortaya çıktı. Dokuzuncu yüzyılda, Hint matematikçiler sıfırın açıklık için diğerlerini birbirinden ayırmak amacıyla kullanılan bir sembol değil herhangi bir sayı olarak kabul ediyorlardı. Sıfırı gündelik hesaplamalarda özgürce kullanıyorlardı.

Sayıların soldan sağa doğru 1, 2, 3, ... düzeninde yazıldığı sayı doğrusu üzerinde 0'ın nereye ait olduğu açıktır: 1'in hemen solundadır. Bunun nedeni çok basmakalıptır: herhangi bir sayıya 1 eklemek onu bir sağa kaydırır. 0'a 1 eklemek onu 1'e kaydırır, dolayısıyla 0 bir sağa gidildiğinde 1'e varacak bir konumda olmalıdır. Bu da 1'in bir sayı soludur.

Negatif sayıların kabul edilmesi sıfırın yerini gerçek bir üye olarak sağlamlaştırdı. Herkes 3'ün bir sayı olmasından mutluydu. Eğer -3'ü de bir sayı olarak kabul ederseniz ve her zaman herhangi iki sayıyı topladığınızda bir sayı elde ettiğinizden dolayı $3 + (-3)$ de bir sayı olmalıdır. Bu da 0'dır.



Şekil 68: Sayı doğrusu.

Alışılmadık Özellikler

'Neredeyse bütün önemli durumlarda sıfır diğer herhangi bir sayı gibi davranmaktadır' demiştim ancak bazı özel durumlarda o öyle davranmamaktadır. Sıfır özeldir. Öyle olmak da zorundadır, çünkü o negatif ve pozitif sayılar arasında sıkışmış tek sayıdır.

Herhangi bir sayıya 0'ı eklemenin onun değerini değiştirmediği açıktır. Eğer üç ineğe sahipsem ve onlara hiç inek eklemesem hâlâ üç ineğe sahibimdir. Gerçekten de şu şekilde tuhaf hesaplamalar vardır:

Bir kedinin bir kuyruğu vardır.

Hiçbir kedi sekiz kuyruğa sahip değildir. Dolayısıyla toplamaya göre:

Bir kedi dokuz kuyruğa sahiptir. Ancak bu küçük şaka 'hiç' kelimesinin iki anlamı üzerine kuruludur.

Sıfırın bu özel niteliği $0 + 0 = 0$ ve dolayısıyla $-0 = 0$ olduğunu ifade eder. Sıfır kendine has şekilde negatifliği içerir. Böyle olan tek sayıdır. Bu tam olarak sıfırın pozitif ve negatif sayılar arasında sıkışmış olmasından kaynaklanır.

Pekâlâ, çarpma işleminde ne olur? Eğer çarpmaya tekrar edilen toplama gibi muamele edersek, o zaman

$$2 \times 0 = 0 + 0 = 0$$

$$3 \times 0 = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$4 \times 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

dolayısıyla her n sayısı için $n \times 0 = 0$ 'dır. Bu mali işlemlerde anlamlıdır: eğer sıfır olan üç miktar parayı hesabıma koyarsam hiç para koymamışımdır. Tekrardan söylemek gerekirse bu özelliğe sahip tek sayı sıfırdır.

Aritmetikte her n, m için $m \times n$ ve $n \times m$ aynı şeydir. Bu düzen, biz n 'nin 'hiçbir kopyasıyla' toplama yapamasak da her n için şunu ifade eder:

$$0 \times n = 0$$

O halde bölmede işler ne olur? Sıfırı sıfır harici bir sayıyla bölmek kolaydır: sıfır elde edersiniz. Hiçliğin yarısı da üçte biri de hiçliktir. Ancak bir sayıyı sıfırla bölmeye gelince, sıfırın alışılmadık doğası kendini hissettirmektedir. Örneğin, $1 \div 0$ nedir? Biz $m \div n$ 'yi eğer bir q sayısı eşitliği sağlıyorsa $q \times n = m$ şeklinde tanımlarız. Dolayısıyla $1 \div 0$ 'ı sağlayan bir q sayısı eğer varsa $q \times 0 = 1$ 'dir. Bununla birlikte, *böyle bir sayı yoktur*. q yerine hangi sayıyı koyarsanız koyun $q \times 0$ için 1'i asla elde edemeyiz.

Bununla başa çıkmanın yolu bunu kabul etmektir. Sıfırla bölme yapmak yasaktır, çünkü hiç mantıklı değildir. Diğer yandan insanlar kesirleri bulana kadar da $1 \div 2$ 'nin de mantıklı olmadığını düşünmüşlerdir, dolayısıyla belki de kolayca vazgeçmemeliyiz. Biz 0'a bölünen yeni bir sayı meydana getirmeyi deneyebiliriz. Böylesi bir sayının problemi temel aritmetik kurallarına uymamasıdır. Örneğin, ikisinin de sonucu sıfır olduğundan $1 \times 0 = 2 \times 0$ 'dır. İki tarafı da 0 ile bölmek $1 = 2$ sonucunu verir, bu da aptalcadır. Dolayısıyla 0 ile bölmeye izin vermemek mantıklı gözükmektedir.

Hiçlikten Gelen Sayılar

Matematikte 'hiçliğe' en yakın kavram küme kuramında vardır. Bir *küme* matematiksel nesnelerin toplamıdır: sayılar, şekiller, fonksiyonlar, ağlar, ... Onun elemanları liste veya ortak özellik yöntemiyle gösterilir. 'Elemanları 2, 4, 6, 8 olan küme' veya '1'den 9'a kadar olan çift sayıların kümesi' diye aynı küme farklı şekilde tanımlanabilir ve o liste yöntemiyle {2, 4, 6, 8} şeklinde içeriği parantez içinde gösterilir.

Alman matematikçi Cantor 1880 dolaylarında kapsamlı bir küme teorisi geliştirdi. Bir fonksiyonun ani atlamalar yaptığı yerler olan süreksizliklerle ilgili analizlerdeki bazı teknik meseleleri çözmek için çalışıyordu. Cevabı süreksizlik kümesi yapıları içermekteydi. Söz konusu olan tekil süreksizlikler değil toplu bir kümeydi. Analizle olan ilişkisi nedeniyle Cantor'u asıl ilgilendiren sonsuz büyüklükteki kümelerdi. O bazı kümelerin diğerlerinden daha büyük olduğu büyük keşfini yapmıştı [$\aleph_0$ 'a bkz.].

"Sayı Nedir?" bölümünde bahsettiğim üzere diğer bir Alman matematikçi Frege, Cantor'un fikirlerini kısa zamanda kavradı, ancak o daha çok sonlu kümelerle ilgileniyordu. Sayıların doğasındaki büyük felsefi problemleri çözebileceklerini düşünüyordu. Örneğin; çay fincanlarının çay tabaklarıyla eşleştiren, kümelerin birbiriyle nasıl eşleştiği hakkında düşünüyordu. Hepsi aynı sayıyla sınırlandırılmış haftanın yedi günü,

yedi cüceler ve 1'den 7'ye kadar sayılar hepsi birbiriyle eşleşir.

Yedi sayısını temsil etmesi için hangi kümeyi seçmeliyiz? Frege'nin cevabı hepsini kapsar: onların *tümü*. Verili bir kümeyle eşleşen bütün kümelerdeki sayıyı sayı olarak tanımlamıştır. Bu şekilde hiçbir küme ayrıcalığa sahip olmaz ve seçim keyfi eğilim olmaksızın emsalsiz olur. Sayıların isimleri ve sembolleri bu devasa küme için sadece geleneksel etiketlerdir. 'Yedi' sayısı yedi cücelerin, haftanın günleri veya {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} listesinin kümesiyle eşleşen bütün kümelerin kümesidir.

Kavramsal problemin şık bir çözümü olmasına rağmen belki de bunun mantıklı bir gösterim oluşturmadığını söylemek gereksizdir.

Frege fikirlerini 1893 ve 1903 tarihlerinde meydana getirdiği *Basic Laws of Arithmetic* [*Aritmetiğin Temel Kanunları*] adlı iki ciltlik yapıtında sanki problemi çözmüşçesine sunmuştur. Artık bir sayının ne olduğunu herkes biliyordu. Ancak ikinci cilt baskıya girmeden önce, Bertrand Russell Frege'ye (mealen aktarıyorum) 'Sevgili Gotlob, kendisini içermeyen bütün kümelerin kümesini düşün' diyen bir mektup yazdı. Kendilerini traş etmeyen köylüleri traş eden köy berberi örneğindeki gibi bu küme de kendisiyle çelişmektedir. Günümüzde adlandırıldığı üzere Russell açmazı son derece büyük kümelerin var olduğunu varsaymanın tehlikelerini ortaya çıkarmıştır [$\aleph_0$ 'a *bkz.*].

Matematiksel mantıkçılar sorunu çözmeye çalıştılar. Cevabın Frege'nin muhtemel bütün kümeleri aynı kefeyle koyan 'büyük düşün' stratejisinin tam tersi olduğu ortaya çıktı. Buna karşılık kandırmaca onların sadece birisini seçmekteydi. 2 sayısını tanımlamak için iki elemanlı standart bir küme oluşturun. 3'ü tanımlamak için üç elemanlı, bu böyle gider. Burada mantık; kümeleri önce oluşturmak, sayıları açıkça kullanmak ve onlara daha sonra semboller ve isimler vermek şartıyla dairesel değildir. Ana problem hangi standart kümelerin kullanılacağına karar vermektir. Onlar eşsiz bir biçimde tanımlanmak zorundaydı ve onların yapısı sayma işlemine uygun olmalıydı. Cevap, boş küme olarak adlandırılan çok özel bir kümeden geldi.

Bizim tüm sayı sistemimizin temeli olan sıfır bir sayıdır. Dolayısıyla, bir kümenin elemanlarını sayabilmelidir. Hangi küme? Aslında, elemansız bir küme olmalıdır. Bunu düşünmek zor değildir: '20 tondan fazla çeken bütün fareler kümesi'. Matematiksel olarak elemansız bir küme vardır: boş küme. Örnekleri bulmak yine zor değildir: 4 tarafından bölünebilen bütün asal sayılar veya dört köşeli bütün üçgenler. Bunlar farklı gözükür, birisi sayılardan diğeryse üçgenlerden oluşur; ancak aslında bunlar aynı kümedirler, çünkü böyle üçgenler veya sayılar yoktur dolayısıyla aradaki farkı söyleyemezsiniz. Bütün boş kümeler aynı elemana sahiptir: şöyle ki, hiçbir şey. Dolayısıyla boş küme eşsizdir. Sembolü, 1939'da Bourbaki lakaplı grup tarafından ortaya atılan $\emptyset$ simgesiyle gösterilir. Küme kuramı aynı aritmetiğin 0'a ihtiyaç duyduğu nedenlerle $\emptyset$ 'ye ihtiyaç duyar: onu işe dahil ederseniz her şey çok daha basitleşir.

Aslında, 0 sayısını boş küme olarak tanımlayabiliriz.

Pekâlâ, 1 sayısı hakkında ne denilebilir? Tam olarak bir elemanlı bir kümeye ihtiyacımız olduğunu sezgiyle bulabiliriz. Eşsiz bir şeydir. Aslında boş küme de eşsizdi. Dolayısıyla 1'i tek elemanı boş küme olan bir küme olarak tanımlayabiliriz: simgelerle $\{ \emptyset \}$ şeklinde gösterilir. Bu boş kümedekiyle aynı değildir, çünkü boş küme hiçbir elemana sahip değilken bu bir elemana sahiptir. Bu eleman boş kümenin başına gelen olduğuna, ancak ondan bir tane olduğuna hemfikiriz. Kümeyi elemanlarını içeren bir kâğıt poşet olarak düşünün. Boş küme boş kâğıt poşettir. Tek elemanı boş küme olan küme içinde boş bir kâğıt poşet olan bir kâğıt poşettir. Bu da içinde bir poşet olduğundan farklıdır.



Şekil 69: Boş bir kümeden sayıları oluşturmak. Poşetler kümeleri; içlerindeki de elemanları simgeler. Etiketler kümenin ismini gösterir. Poşetin kendisi kümenin elemanlarından biri değildir, ancak diğer bir poşetin elemanı olabilir.

Anahtar adım 2 sayısını tanımlamaktır. Eşsiz biçimde tanımlanmış iki elemanlı bir kümeye ihtiyacımız vardır. Bu nedenle, şimdiye kadar bahsettiğimiz $\emptyset$ ve $\{\emptyset\}$ olan iki kümeyi neden kullanmayalım ki? Bu yüzden tanımlamalarımız sayesinde aynı 0'ı ve 1'i olduğu gibi 2'yi de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ olarak tanımlayabiliriz.

Şu halde genel bir örüntü ortaya çıkar. Hepsini daha önceden tanımladığımız üç elemanıyla $3 = 0, 1, 2$ kümesini tanımlayın. Sonrasında $4 = 0, 1, 2, 3, 5 = 0, 1, 2, 3, 4$ şeklinde gider. Her şey başlangıç noktasını boş kümede bulur: örneğin,

$$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

Muhtemelen cücelerin sayısının nasıl görüldüğünü görmek istemeyeceksinizdir.

Buradaki inşa materyali soyutlamalardır: boş küme ve bir kümeyi elemanlarını listeleyerek oluşturma işi. Ancak bu kümelerin birbirine bağlanma yolları bu sayı sistemi için iyi tanımlanmış ve her sayının özel bir küme olduğu sezgisel olarak elemanlarının sayısına sahip olan bir yapıya öncülük eder. Ayrıca hikâye burada bitmez. Bir kere bütün pozitif sayıları tanımladıktan sonra benzer dalavereci kuramsal küme fikri negatif sayıları, kesirleri, gerçel sayıları (sonsuz ondalık sayılar), karmaşık sayıları ve diğerlerini ayrıca kuantum kuramındaki süslü matematiksel kavramlara kadar tanımlar.

Böylece şimdi matematiğin ürkünç sırrını biliyorsun: hepsi hiçlik üzerine dayalıdır.

HİÇLİK TEN DAHA AZI

Sıfırdan daha küçük bir sayı olabilir mi? Bunu başka birisine borçlu olduğunuz 'sanal inekleri' icat etmenin haricinde sıradan ineklerle yapamazsınız. Sonrasında cebirciler ve muhasebeciler için hayatı daha kolay yapan sayı kavramının doğal genişletilmesini elde edersiniz. Birazcık sürpriz de vardır: eksiğin eksiyle çarpılması artıdır. Peki, neden böyledir?

Negatif Sayılar

Sayıları toplamayı öğrendikten sonra, bize bu işlemin tersini nasıl yapılacağı da öğretilmiştir: çıkarma. Örneğin, $4 - 3$ hangi sayıyı 3'e eklersek 4'ü elde ederizdir, yani elbette ki bu 1'dir. Çıkarma kullanışlıdır, örneğin o 4£ (veya 4\$) ile başladığımızda ve 3£ (veya 3\$) harcadığımızda kaç paramız kaldığını söyler.

Büyük bir sayıdan küçük bir sayıyı çıkarmak az sayıda probleme yol açar. Cebimizdekinden veya cüzdanımızdakiinden daha az para harcarsak hâlâ birazına sahibizdir. Pekâlâ, eğer küçük bir sayıdan büyük bir sayıyı çıkarırsak ne olur? $3 - 4$ nedir?

Eğer cebinizde 1£'lık (veya 1\$'lık kâğıt para) üç madeni paranız varsa, süpermarkette kasiyere onların dördünü çıkartıp veremezsiniz. Ancak günümüzdeki kredi kartı zamanında, sahip olmadığınız sadece cebinizdeki değil aynı zamanda bankadaki parayı harcayabilirsiniz. Bu olduğunda, *borcunuz* birikmeye başlar. Örnekteki durumda faizi hesaba katmazsak borç 1£ (veya 1\$) olacaktır. Dolayısıyla bir manada $3 - 4$, 1'e eşittir, ancak farklı *çeşitte* bir 1: bir borç, gerçek olmayan bir

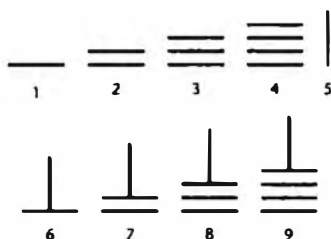
nakit. Eğer pozitif 1 bir karşıta sahip olsaydı, o işte bu olurdu.

Borcu nakitten ayırmak için, sayının önüne bir eksi işareti koyarız. Bu gösterimle,

$3 - 4 = -1$ ve yeni bir çeşit sayı üretmiş oluruz: bir *negatif* sayı.

Negatif Sayıların Tarihi

Tarihsel olarak, sayı sisteminin ilk büyük genişlemesi kesirlerdi [1/2 bölümüne bkz.]. Negatif sayılar ikinciydi. Bununla birlikte, bu tip sayıları ters düzende ele alacağım. Negatif sayıların ilk görülmesi *Jiu Zhang Suan Shu* [Matematik Sanatının Dokuz Bölümü] adında MÖ 202–MS 220 arasında Han hanedanlığından kalma Çince bir belgedeydi.



Şekil 70: Solda: *Matematik Sanatının Dokuz Bölümü*'nden bir sayfa. Sağda: Çinli sayma çubukları.

Bu kitap aritmetik yapmak için fiziksel bir yardım kullanmaktaydı: sayma çubukları. Onlar; tahtadan, kemikten veya benzer malzemeden yapılmış küçük çubuklardır. Çubuklar sayıları temsil edecek şekilde örüntülerle düzenlenmişlerdi. Bir sayıyı temsil etmesi için düzenlenmiş 'birler basamağında' dikey çubuklar 'beş' yatay çubuklar 'bir' demektir. 'Yüzler

basamağında' da aynı şekildeydi. 'Onlar' ve 'binler basamağında' çubukların yönleri yer değiştiriyordu: yatay bir çubuk 'beş' dikey olansa 'bir' demektir. Çinliler bizim 0 koyduğumuz yerde boşluk bırakıyorlardı, ancak bir boşluğu fark etmemek kolaydır. Dolayısıyla yönleri değiştirme uzlaşımı eğer; örneğin, onlar basamağında hiçbir şey yoksa kafa karışıklığını önler. O, bir satırda birden çok 0 varsa daha az etkilidir, ancak bu da nadir bir durumdur.



Şekil 71: Çubukların yönünün 405'i 45'ten ayırt etmeyi nasıl sağladığı.

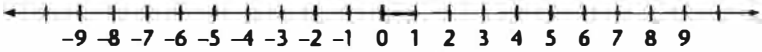
Dokuz Bölüm negatif sayıları temsil etmesi için de çok basit bir fikri kullanmıştır: onları kırmızı yerine siyaha boyamak. Dolayısıyla 4 kırmızı çubuk eksi 3 kırmızı çubuk 1 kırmızı çubuk verir, ancak 3 kırmızı çubuk eksi 4 kırmızı çubuk 1 siyah çubuk verir.

Bu doğrultuda, siyah çubukların düzenlenmesi bir borcu temsil eder ve borcun miktarıysa ilgili kırmızı çubukların düzenlenme biçimine bağlıdır.

Hint matematikçiler de negatif sayıların farkındaydılar, onlarla aritmetik yapmak için tutarlı kurallar kayda düşmüşlerdi. MS 300 dolaylarına tarihli Bakhshali yazması bizim kullandığımız - yerine + simgesini kullanarak negatif sayılarla hesaplamalar içermekteydi. (Matematiksel simgeler bizim şu anda bazen kafa karıştırıcı bulduğumuz biçimde tarih boyunca tekrar tekrar değişmiştir.) Fikir Arap matematikçiler tarafından ele alınmıştır ve sonunda Avrupa'ya yayılmıştır. 1600'lere kadar Avrupalı matematikçiler negatif bir cevabı, ilgili problemin imkânsız olduğuna ilişkin bir kanıt olarak değerlendiriyorlardı, ancak Fibonacci onların mali hesaplamalarda borçları temsil edebileceğini anladı. 1800'lerde matematikçilerin kafaları artık negatif sayılarla karışık değildi.

Negatif Sayıların Gösterimi

Geometrik olarak, sayılar 0'dan başlayarak soldan sağa doğru bir doğru üzerinde rahatlıkla gösterilebilir. Bu *sayı doğrusu*-nun ters yönde devam eden ve negatif sayıları içeren doğal bir genişlemeye sahip olduğunu daha önce görmüştük.



Şekil 72: Sayı doğrusu: pozitif sayılar sağa, negatif sayılar sola doğru gider.

Toplama ve çıkarma sayı doğrusu üzerinde basit bir gösterime sahiptir. Örneğin, herhangi bir sayıya 3 eklemek için 3 boşluk sağa kayın. Herhangi bir sayıdan 3 çıkarmak için 3 boşluk sola kaydırın. Bu betimleme hem negatif hem de pozitif için doğru çözümü verir; örneğin, -7 ile başlarsak ve ona 3 eklersek -4 'ü elde etmek için 3 boşluk sağa kayarız. Negatif sayılarla aritmetik yapma kuralları ayrıca negatif sayılarla toplama ya da çıkarma yapmanın pozitif sayılardaki gibi olduğunu göstermiştir. Dolayısıyla bir sayıya -3 eklemek için, 3 boşluk sola kayarız. Bir sayıdan -3 çıkarmak içinse 3 boşluk sağa kayarız.

Negatif sayılarla çarpma yapmak daha ilginçtir. Çarpmayla ilk karşılaştığımızda onun tekrar edilen toplama olduğunu düşünmüştük. Örneğin,

$$6 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30$$

Aynı yaklaşım 6×-5 işlemini de aynı doğrultuda yapmamız gerektiğini söyler:

$$6 \times -5 = -5 + -5 + -5 + -5 + -5 + -5 = -30$$

Şu hâlde, aritmetiğin kurallardan birisi hangi sırayla çarp-tığımızı fark etmeden iki pozitif sayının çarpımının aynı sonucu vereceğini söyler. Örneğin, 5×6 ile 6×5 birbirine eşittir. Gerçekten de öyledir, çünkü

$$5 \times 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30\text{'dur.}$$

Dolayısıyla $-5 \times 6 = -30$ olması durumu da aynı kuralın negatif sayılar için varsayılmasını mantıklı göstermektedir.

Pekâlâ, -5×-6 nedir? Bu daha az açıktır. -6 tane -5 'i yazarak toplama yapamayız. Dolayısıyla soruya gizlice yaklaşmalıyız. Şimdiye kadar ne bildiğimize bir göz atalım:

$$6 \times 5 = 30$$

$$6 \times -5 = -30$$

$$-6 \times 5 = -30$$

$$-6 \times -5 = ?$$

Aranan sayının 30 veya -30 olmak zorunda olduğu mantıklı gözükmektedir. Soru şu ki: hangisi?

İnsanlar ilk bakışta -30 olması gerektiğini düşündüler. Psikolojiye göre hesaplama 'negatiflik' havasıyla istila edilmiş gözükmektedir, dolayısıyla cevap da negatif olmalıdır. Bu, bulunduğunuz coğrafi veya kültürel bölgeye göre 'Ben bir şey yapmadım ki' veya 'n'aptım ki ben' itirazının arkasını dayadığı varsayımın aynısıdır. Bununla birlikte, hiçbir şey yapmadığınızı söylediğinizde aslında hiçbir şeyin değilini yapmış olmanız demektir ki bu da bir şey yaptınız demektir. Bu sizin varsaydığınız gramer kurallarının üzerine dayalı adil bir yorum olup olmadığına gelince, fazladan 'değil' eklenen bir vurgu olarak da görülebilir.

Aynı doğrultuda -6×-5 anlamı insani bir uzlaşım meselesidir. Yeni sayılar icat ettiğimizde, eski kavramların onlara da uygulanabilir olduğuna ilişkin bir garanti yoktur. Bu nedenle matematikçiler $-6 \times -5 = -30$ olduğuna karar verebilirlerdi. Bu mesele için, -6×-5 'in pembe bir hipopotam olduğuna da karar verebilirlerdi.

Bununla birlikte -30 'un neden zahmetli bir seçim olduğunun birçok çeşitli nedeni vardır ve onların hepsi de karşıdaki çözüme 30'a işaret etmektedir.

Bunlardan biri, eğer $-6 \times -5 = -30$ ise bunun -6×5 ile aynı olduğudur. Onu -6 ile bölersek negatif sayılar hakkında önceden karar verdiklerimizle çatışan $-5 = 5$ 'i elde ederiz.

Bir ikincisi $-5 + 5 = 0$ olduğunu bilmemizdir. Sayı doğrusunda bakınız: 5'in 5 boşluk solu nedir? Sıfırdır. Şu halde herhangi bir sayıyı 0 ile çarpmak 0'ı verdiğinden aynıısını negatif sayılar için varsaymak mantıklı gözükmemektedir. Dolayısıyla $-6 \times 0 = 0$ olması sağduyunun gereğidir. Buradan hareketle

$$0 = -6 \times 0 = -6 \times (5 + -5).$$

Olağan aritmetik kurallarına göre, bu

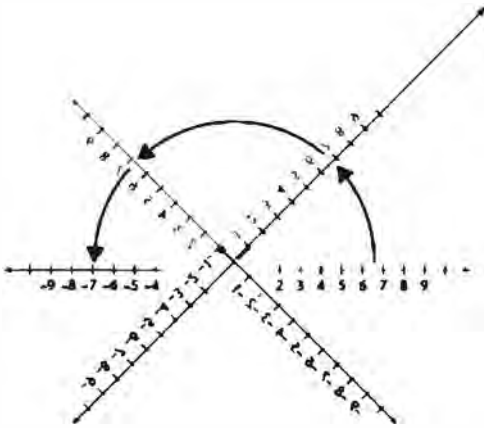
$$-6 \times 5 + -6 \times -5\text{'e eşittir.}$$

$-6 \times -5 = -30$ seçimiyle, bu çok da mantıklı olmayan $-30 + -30 = -60$ 'ı gerektirir.

Diğer yandan, $-6 \times -5 = 30$ seçmiş olsaydık, şunu elde ederdik ve bütün taşlar yerine oturmuş olurdu:

$$0 = -6 \times 0 = -6 \times (5 + -5) = -6 \times 5 + -6 \times -5 = -30 + 30 = 0$$

Üçüncü bir neden sayı doğrusunun yapısal biçimidir. Bir pozitif sayıyı -1 ile çarparsak ilgili sayının negatif haline çevirmiş oluruz; bu da sayı doğrusunun tam olarak pozitif yarısını soldan sağa doğru 180° çevirmemiz demektir. Diğer negatif yarısı nereye gitmelidir? Eğer onu yerinde bırakırsak, aynı problemle karşı karşıya geliriz; çünkü $-1 \times 1 = -1$ 'e eşit olan -1 , -1×-1 'e eşit olacaktır. Böylece $-1 = 1$ sonucuna varırız. Tek mantıklı alternatif sayı doğrusunun negatif yarısını da soldan sağa doğru 180° döndürmektir. Bu güzeldir, çünkü tekrardan -1 ile çarpmak sayı doğrusunu tekrardan döndürecek ve onu eski düzene geri getirecektir. Bu düzeni eski haline getirir ve her şey başlangıçtaki konuma geri gelir. Gerçekten de tam aç, her şeyi ilk konumuna geri getiren bir tam dönüş olarak $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$ 'dir. Dolayısıyla, -1×-1 , doğruyu döndürdüğünüzde -1 'in gittiği yere yani 1 'e eşittir. Bir kere $-1 \times -1 = 1$ olduğuna karar verdikten sonra bunu $-6 \times -5 = 30$ izler.



Şekil 73: Sayı doğrusunu 180° döndürmek her sayıyı -1 ile çarpmak demektir.

Dördüncü bir nedense nakdin negatif değerinin borç olarak yorumlanmasıdır. Bu yorumda, belli miktar bir parayı negatif sayıyla çarpmak nakdin artık borç haline gelmesi dışında onu aynı pozitif sayıyla çarpmakla aynı sayıyı verir. Şu halde bir borçtan çıkarına yapmak 'onu yok etmek' bankanın sizin ona borçlu olduğunuzu kayıtlardan silmesiyle, yani size biraz para vermesiyle aynı etkiye sahiptir. Hesabınızda olan 10£'luk bir borcu çıkarma yapmak hesabınıza 10£ koymanız gibidir: o hesabınızı 10£ artırır. Bu şartlar altında her ikisinin de net etkisi hesap dengenizi 0'a getirmesidir. Bunu -6×-5 'in de hesap dengenizde altı adet 5£'luk borcu silmekle, yani hesap dengenizi 30£ artırmakla aynı etkiye sahip olması izler.

Böylesi savların sonucu; esas olarak, -6×-5 'in sonucunu istediğimiz gibi tanımlayabilmemize rağmen olağan aritmetik kurallarını negatif sayılara uygulayabilmemizi sağlayan tek bir çözümün bu olduğudur. Ayrıca aynı tercih, negatif sayılar borç olarak yorumlanmasına uygulandığında sağduyulu gelmektedir.

Bu tercih eksiyle eksinin çarpımını artı yapar.

Karmaşık Sayılar

Matematikçiler birbirine tam bölünemeyen iki sayıyı
bölmek istediklerinde kesirleri icat ettiler.

Küçük bir sayıdan büyük bir sayıyı çıkarmak
istediklerinde negatif sayıları icat ettiler.

Ne zaman bir şey yapılamaz olduysa matematikçiler bir
şekilde onu yapan yeni bir şey icat ettiler.

Bu yüzden negatif bir sayının karekökünü bulmak baş
belası olunca tahmin edin ne oldu?

SANAL SAYI

Sayfa 5'te 'Devamlı Büyüyen Sayılar Sistemi' kısmında bizim sayıları kesin ve sabit olan şeyler olarak düşündüğümüzü söylemiştim, ancak onlar aslında insan icadıdır. Sayılar saymakla başlamıştır, ancak sayma kavramı sıklıkla genişlemiştir: sıfır, negatif sayılar, rasyonel sayılar (kesirler), gerçel sayılar (sonsuz ondalık sayılar).

Teknik farklılıklara rağmen bütün bu sistemler benzer özelliklere sahiptir. Onlarla aritmetik yapabilirsiniz ve herhangi iki sayıdan hangisinin büyük olduğuna karar verebilirsiniz. Bu da sıralama kavramını imler. Bununla birlikte on beşinci yüzyıldan günümüze kadar az sayıda matematikçi, alelade sıralama ilişkisi olan 'daha büyüğün' artık anlamlı olmadığı, daha az benzer özellikli yeni bir tür sayı olup olamayacağını merak ettiler.

Eksiyle eksinin çarpımı artı olduğundan herhangi negatif bir sayının karesi pozitifdir. Bu nedenle, negatif sayıların karekökü gerçel sayı sistemi içerisinde yoktur. Bu, özellikle cebirde birazcık elverişsizdi. Bununla birlikte cebirde denklemleri çözmek için kullanılan formüllerdeki bazı tuhaf sonuçlar, $\sqrt{-1}$ gibi ifadelerin anlamlı hale gelmesinin bir yolu olması gerektiğini öne sürmekteydi. Dolayısıyla, uzun bir kafa karışıklığından ve vicdan muhasebesinden sonra matematikçiler kayıp karekökleri ortaya çıkaran yeni bir sayı icat etmeye karar verdiler.

Anahtar adım -1 'in karekökünü bulmaktı. Euler, 1777'de Fransızca yazdığı bir makalede i simgesini $\sqrt{-1}$ 'i göstermesi için ortaya attı. O sanal sayı olarak adlandırıldı, çünkü gele-

neksel 'gerçel' sayılar gibi davranmıyordu. i'yi ortaya attıktan sonra $2 + 3i$ gibi karmaşık denemeli sayılara izin vermek zorundasınız. Böylece sadece yeni bir sayı elde etmezsiniz: yeni genişlemiş sayı sistemi elde edersiniz.

Mantıksal olarak karmaşık sayılar gerçel sayılara dayalıdır. Bununla birlikte Terry Pratchett, Jack Cohen ve benim *Science of Discworld* [*Disk Dünyası Bilimi*] serilerinde 'narrativium' diye adlandırdığımız mantık baskın çıktı. Bu, hikâyenin gücüdür işte. Sayıların arkasındaki matematik hikâyeleri gerçekten önemli olanlardır ve bu hikâyelerin bazılarını anlatmak için karmaşık sayılara, hatta daha tanıdık sayılara ihtiyacımız vardır.

Karmaşık Sayılar

Karmaşık sayıların aritmetiği ve cebiri alelâdedir. Fazladan bir çarpanla toplama ve çarpma için normal kuralları kullanırız: ne zaman i^2 not edilse yerine -1 yazmalısınız. Örneğin,

$$(2 + 3i) + (4 - i) = (2 + 4) + (3i - i) = 6 + 2i$$

$$(2 + 3i) \times (1 + i) = 2 + 2i + 3i + 3i \times i = 2 + 5i + 3 \times -1 \\ = (2 - 3) + 5i = -1 + 5i$$

Erken öncüler bu fikri keşfettiklerinde, gerçel sayılar sistemini genişleten sayıların mantıksal olarak tutarlı gözükmesini sağladılar.

Bunlar ilklerdi. Tamsayılarla saymaya başlandığından beri sayı sistemi pek çok kez genişletilmişti. Ancak bu kez 'daha büyük' kavramı feda edilmeliydi: var olan sayılar için durum aynıydı, ancak yeni olanlar için de durumun geçerli olacağını varsayarsanız başınız derde girerdi. Bir uzunluğa sahip olmayan sayılar! Tuhaf, öylesine tuhaf ki bu olay üzerine matematikçiler sayı sistemini genişlettiklerinin farkına vardılar ve bunun meşru olup olmadığını merak ettiler. Bu soruyu gerçekten daha önce sormamışlardı, çünkü kesirler ve negatif sayılar gerçek dünyada basit benzerlere sahiptir. Ancak i sadece daha önce imkânsız olduğu düşünülen biçimde davranan bir simgeydi.

Sonunda faydacılık kazandı. Anahtar soru, sayıların yeni çeşidinin 'gerçekten' var olup olmadığı değil, var olduklarını varsaymanın yararlı olup olmayacağıdır. Fiziksel miktarların hassas ölçümlerini betimlemek için bilimde gerçel sayıların kullanışlı olduğu önceden biliniyordu. Ancak negatif bir sayının karekökünün fiziki olarak anlamlı olduğu açık değildi. Onu bir cetvelin üzerinde bulamazsınız. Dünyanın matematikçilerini, fizikçilerini ve mühendislerini şaşırtacak şekilde karmaşık sayıların olağanüstü kullanışlı olduğu ortaya çıktı. Onlar matematikteki tuhaf bir boşluğu doldurdular. Örneğin, denklemlerin çözümleri karmaşık sayılar dahil edilirse çok daha kolaylaşıyordu. Gerçekten de başlangıçta karmaşık sayıları icat ederken ana motivasyon buydu. Ancak daha fazlası da vardı. Karmaşık sayılar matematiksel fizikteki problemleri çözmeyi mümkün kıldı: manyetizma, elektrik, sıcaklık, ses, kütleçekim ve sıvı akışı.

Böylesi problemlerde mesele sadece gerçel bir sayı kullanarak betimlenebilecek fiziksel büyüklüğün ne kadar büyük olduğu değil ne yönde olduğudur. Çünkü karmaşık sayılar düzlemde hayat sürer (aşağıya bakınız) ve bir yönde tanımlıdırlar: orijinden ilgili sayıya kadar bir doğru. Bu sebeple, düzlemde yönleri içeren her problem karmaşık sayıların muhtemel uygulama alanıdır ve fizik böylesi problemlerle doludur. Aslında, karmaşık sayıların daha az aslına uygun yorumlarının da kullanışlı olduğu ortaya çıktı. Onlar özellikle dalgaları betimlemek için biçilmiş kaftandır.

Hiç kimse bu sayıların ne olduğunu açıklayamamasına rağmen, böylesi amaçlarla karmaşık sayılar uzun zaman kullanılmıştır. Onlar inkâr edilemeyecek kadar kullanışlıydı ve her zaman düzgün çalışıyorlardı, böylece herkes onlara alıştı ve neredeyse herkes onların ne anlama geldiği hakkında endişelenmeyi bıraktı. Sonunda, az sayıda matematikçi onları düzlemde koordinat sistemi üzerinde yorumlayarak karmaşık sayılar fikrini mantıksal olarak tutarlı bir şekilde kanıtlayabildi.

Karmaşık Düzlem

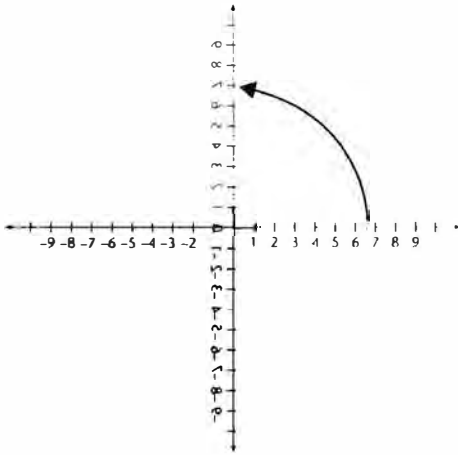
Geometrik olarak gerçel sayılar doğrudan, tek boyutlu olan sayı doğrusunda bir nokta olarak gösterilebilir. Benzer biçimde karmaşık sayılar iki boyutlu olan düzlemde noktalar olarak gösterilebilir. 'Bağımsız' i ve 1 şeklinde iki temel sayı vardır ve her karmaşık sayı bu ikisinin bir kombinasyonudur.

Düzlem devreye girer, çünkü sayıları -1 ile çarpmak sayı doğrusunu 180° döndürür [-1 bölümüne *bkz.*]. Bu nedenle -1 'in karekökü ne olursa olsun o, muhtemelen sayı doğrusunda bir değişime sebep olacaktır ve bu değişiklik ne olmak zorunda olursa olsun, büyük ihtimalle iki kere yapıldığında onu 180° döndürecektir. Pekâlâ, ne iki kere yapıldığında şeyler 180° döner?

Sayı doğrusunu 90° döndürmek.

Bu nedenle biz, -1 'in karekökünün sayı doğrusu 90° döndürüldüğü konumda yorumlanabileceğini tahmin etmeye yöneliriz. Eğer bir resim çizersek bunun sayı doğrusunu eski haline getirmediğini fark ederiz. Bunun yerine o normal sayı doğrusuna dik olan ikinci bir sayı doğrusu yaratır. İlk sayı doğrusu gerçel sayıların doğrusu olarak adlandırılır. İkinci doğruysa eksi birin karekökü gibi sanal sayıların canlandığı yerdir. İkisini koordinat düzlemi verecek şekilde düzlemde birleştirerek karmaşık sayıları elde ederiz.

'Gerçel' ve 'sanal' yüzyıllar öncesine giden terimlerdir ve onlar artık bizim inanmadığımız matematiksel bakış açılarını yansıtmaktadır. Günümüzde, bütün matematiksel kavramlar gerçekliğin kendisi değil zihinsel modellemeleri olarak varsayılır. Bu sebeple gerçel sayılar sanal olanlardan daha az veya daha fazla gerçel değildirler. Bununla birlikte, sanal sayılar gerçel sayılardaki gibi *doğrudan* bir yoruma sahip değilken, gerçel sayılar gerçek dünyadaki bir uzunluğu ölçme fikriyle büsbütün, doğrudan uyushmaktadır. Dolayısıyla adları günümüze kadar gelmiştir.



Şekil 74: Sayı doğrusunu dik açıyla döndürmek ikinci bir sayı doğrusuna yol açar.

Eğer, gerçel sayıları alıp onlara bu yeni i sayısını ilave edersek $3 + 2i$ gibi sayıları da gösterebilmek zorundayız. Bu sayı düzlemde $(3, 2)$ koordinatlarına karşılık gelir. Bu, gerçel ekseninde 3 birim sanal ekseninde 2 birim ilerlemekle oluşturulur. Genel olarak $z = x + iy$ (x, y) koordinatlarında bir noktaya karşılık gelir.

Karmaşık sayıların bu geometrik gösterimi 1806'da onu yayımlayan Fransız matematikçi Jean-Robert Argand'a ithafen Argand grafiği şeklinde adlandırılır. Bununla birlikte fikir 1799'da *Om Directionens Analytiske Betegning* [Doğrultunun Analitik Gösterimi] kitabında onu yayımlayan Danimarkalı-Norveçli yer ölçümcü Caspar Wessel'e kadar geriye gitmektedir. O tarihlerde Danimarka Norveç ile geçici olarak birleşmiş durumdaydı. Onun makalesi o zamanlar fark edilmedi, çünkü az sayıda bilim insanı Danca okuyabiliyordu.

Gauss 1799'da doktora tezinde aynı fikri yeniden icat etti ve bir karmaşık sayıyı koordinatlar kullanarak bir çift (x, y) reel sayı olarak betimlemenin onu basitleştirilebileceğini fark etti. Hamilton 1830'larda karmaşık sayıları kendi adını verdiği sıralı bir çift yani 'gerçel sayı çiftleri' olarak tanımladı. Biz günü-

müzde karmaşık sayıları böyle tanımlıyoruz. Onlar düzlemde bir nokta (x, y) şeklinde sıralı bir ikilidir ve $x + iy$ sembolü o ikili veya nokta için sadece bir diğer isimdir. Öyleyse, gizemli i ifadesi sadece sıralı $(0, 1)$ 'dir. Kilit nokta bu ikililerle çarpmayı ve toplamayı tanımlamak zorunda olduğumuzdadır:

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

$$(x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu)$$

Bu denklem nereden gelir? Onlar, cebirin standart kurallarını varsayarınız ve i^2 'nin yerine -1 yazarsanız $x + iy$ ile $u + iv$ çarparken ve toplarken ortaya çıkar.

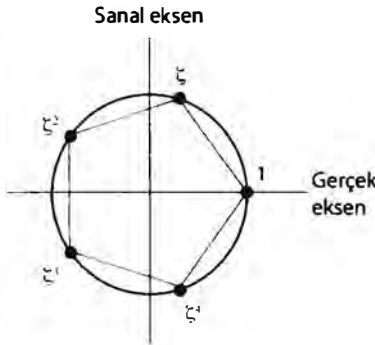
Bu hesaplamalar tanımlamaları yüreklendirdi, ancak biz, cebir kurallarını tanımlamaların olması gerektiği gibi varsaydık. Bu ikililere sadece formüller tanımlamalara dayalı cebir kurallarını uyguladığımızda mantık dairesel olmayı bırakır. Onun hepsinin işe yaraması sürpriz değildir, ancak bunun kontrol edilmesi gereklidir. Sav uzundur ancak açıktır.

Birin Kökleri

Geometri ve cebirin karmaşık sayılarda etkileşimi dikkat çekicidir. Bu, birin köklerinden başka hiçbir yerde bu kadar açık değildir: onlar z karmaşık sayısı ve n tamsayısı için $z^n = 1$ denkleminin çözümleridir. Örneğin, beşinci dereceden kök $z^5 = 1$ 'i sağlar.

Ortada olan $z = 1$ çözümü gerçel olan tek çözümdür. Bununla birlikte, karmaşık sayılarda dört tane daha çözüm vardır. Onlar $z = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$ olduğunda z, z^2, z^3, z^4 'tür. Burada, $72^\circ = 360^\circ/5$ 'tir. Tam formüller vardır:

$$\cos 72^\circ = (\sqrt{5} - 1)/4 \quad \sin 72^\circ = \sqrt{(5 + \sqrt{5})}/8$$



Şekil 75: Karmaşık düzlemde birin beş kökü.

Bu beş nokta trigonometri kullanarak ispat edilebilen bir olgu olarak düzgün bir beşgenin köşeleridir. Ana fikir i ile çarpmanın karmaşık düzlemi 90° döndürdüğüdür, dolayısıyla z ile çarpmanın da karmaşık düzlemi 72° döndürdüğü açıktır. Onu beş kere yapın, hiç döndürme yapmamış veya 1 ile çarpmış gibi 360° 'yi elde edersiniz. Dolayısıyla $z^5 = 1$ 'dir.

Daha genel olarak $z^n = 1$ ve $z = \cos(360^\circ/n) + i \sin(360^\circ/n)$ olduğundan n tane çözüme sahiptir 1, z , z^2 , z^3 , z^{n-1} 'dir.

Bu fikirler Öklitçi geometride bir pergel ve cetvel kullanarak inşa edilen düzgün çokgenlerin cebirsel yorumunu sağlamıştır [17 bölümüne bkz.].

Kesirli Sayılar

Şimdi matematikçilerin rasyonel sayılar dedikleri kesirlere bakacağız.

Tarihsel olarak kesirler mallar ve mülkler birçok kişi arasında her biri bir pay alacak şekilde bölündüğünde ortaya çıkmıştır.

Her şey iki kişinin eşit pay aldığı duruma uygulanan $1/2$ ile ortaya çıkmıştır.

Sonuç sıfır haricinde bölmenin her zaman mümkün olduğu bir sayı sistemi idi.

BÖLÜNMEYENİ BÖLMEK

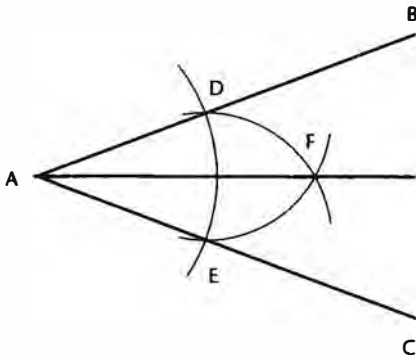
Artık kesirlere geçiyoruz. Matematikçiler şık ve modaya uygun bir terimi tercih ederler: rasyonel sayılar. Bunlar bir tamsayıyı bir diğeri tarafından bölerek oluşturulan $1/2$, $3/4$ veya $137/42$ gibi sayılardır. Kendinizi 'sayının' tamsayı manasına geldiği o günlerde hayal edin. O dünyada bölme, örneğin $12/3 = 4$ gibi bir sayı bir sayıya tam olarak bölündüğünde çok anlamlıydı. Ancak bu yolla yeni bir şey elde edemezsiniz. Bölme işlemi tam olmadığında kesirler özellikle ilginçleşmekteydi. Daha doğrusu sonuç bir tamsayı olmadığında. Çünkü o zaman yeni tür bir sayıya ihtiyaç duyarız.

En basit ve gündelik hayatta çok sık karşılaştığımız kesir $1/2$ 'dir. *Oxford İngilizce Sözlük* bunu 'bir şeyin bölünebildiği iki eşit parçasından her biri' olarak tanımlamaktadır. Yarım-lar gündelik hayatta bolca bulunur: yarısı, yarım litre süt veya bira, bir Amerikan futbolu veya futbol maçının yarısı, yarı fiyatlı biletler, yarı fiyatına, golfte bir deliği yarılama, yarım saat şeklinde kullanılır. Yarısı dolu yoksa yarısı boş mu deriz? Yarım akıllı...

En basit kesir olmasının yanında, $1/2$ muhtemelen en önemlisidir. Öklit, doğru parçalarını ve açıları iki eşit parçaya bölmeyi biliyordu: onları yarıya bölmek. Daha ileri bir özellik analitik sayı kuramında oluşmaktadır: anlaşılması zor olan Riemann'ın zeta fonksiyonunun sıfırlarının her zaman $1/2$ gerçel kısma sahip olduğu iddia edilmiştir. Bu muhtemelen bütün matematikte çözülmemiş en önemli problemdir.

Bir Açıyı İki Eş Parçaya Bölmek

$1/2$ 'nin özel doğası Öklit'in ilk geometri yazmalarında ortaya çıkmıştır. *Öğeler* birinci kitap 9. önermede o, açının ölçüsünü yarıya indiren 'verili bir açıyı ikiye bölmeyi' sağlayan bir çizim ortaya atmıştır. Bunun yolu şöyledir. Verili bir BAC açısının, A'dan AB ve AC doğrultusunda eşit uzaklıkta bir uzunlukla D ve E noktalarını çizmek için pergel kullanın. Şimdi de yarıçapı ED ve DE olan merkezi sırasıyla E ve D olacak şekilde iki yay çizin. Bu iki yay D ve E'den eşit uzaklıkta bir F noktasında kesişirler. Öyleyse AF doğrusu BAC açısını iki eş parçaya böler. Öklit aslında son adımı birazcık farklı betimlemiştir: eş kenarlı bir DEF üçgeni çizmek. Bu daha önce kanıtladıkları üzerine dayalı taktiksel bir karardır ve tam olarak aynı sonucu verir, çünkü DEF üçgeni eşkenardır.



Şekil 76: Bir açı nasıl iki eş parçaya bölünür.

Bu çizimin sağlamasının derinde yatan nedeni simetri dir. Bütün resim AF doğrusuna göre simetriktir. Yansıma 2. dereceden bir simetri dir: onu iki kere tekrar edin ve başladığınız yere geri dönün. Bu nedenle açıyı iki eş parçaya bölmemiz şaşırtıcı değildir.

Öklit, sıradan bir açıyı $1/3$ kesrine uygun biçimde nasıl üç eş parçaya böleceğimizi göstermez. 3. Bölümde yaklaşık 2000 yıl önce matematikçilerin bir açıyı bir cetvel (bölümlendiril-

memiş) ve bir pergel yardımıyla üç eş parçaya bölmenin imkânınız olduğunu ispatladıklarını görmüştük. Aslında, sıradan bir açının bu şekilde bölünebilmesini sağlayan kesir $p/2^k$ formundadır: k kez ikiye bölmek daha sonra p kopyasını oluşturmak. Temelde yapabildiğiniz tek şey tekrar tekrar ikiye bölmektir. Bu nedenle, geometride $1/2$ özeldir.

Riemann Varsayımı

İleri matematikte $1/2$ tüm konu içerisinde muhtemelen çözülmemiş en önemli sorunda ortaya çıkar: Riemann varsayımı. Bu aldatıcı bir şekilde masum görünümlü varsayım 1859'da Georg Bernhard Riemann tarafından ileri sürülmüştür. Bu, akıllı bir aletin derin bir özelliğidir: zeta fonksiyonu $\zeta(z)$. Burada z herhangi bir karmaşık sayıdır ve ζ ise Yunanca 'zeta' harfidir. Zeta fonksiyonu asal sayılarla yakından ilgilidir, dolayısıyla karmaşık sayıları kullanan güçlü teknikler asal sayıların yapısını araştırmak için bu fonksiyonu kullanabilir.

Bununla birlikte, zeta fonksiyonun bazı temel özelliklerini halletmeden bu tekniklerden yararlanamayız ve her şeyin dolambaçlı olduğu yer burasıdır. Zeta fonksiyonunun sıfırları anahtar özelliktir: $\zeta(z) = 0$ sağlayan z karmaşık sayılarıdır. Bazı sıfırlar kolayca bulunur: bütün çift negatif tamsayılar, $z = -2, -4, -6, -8, \dots$. Bununla birlikte, Riemann sonsuz miktarda çok sayıda diğer *sıfırlar* olduğunu kanıtlayabildi ve onların altısını buldu:

$$1/2 \pm 14,135i \qquad 1/2 \pm 21,022i \qquad 1/2 \pm 25,011i$$

(Sıfırlar negatif ve pozitif sanal kısımlarıyla çift şeklinde oluşur.)

Bu altı sayının ilginç bir ortak noktası olduğunu fark etmek için matematikçi hassasiyetine sahip olmanıza gerek yoktur: onlar $1/2 + iy$ formundadırlar. Bu da onların $1/2$ gerçel kısma sahip olduklarını gösterir. Riemann aynı önermenin zeta fonksiyonunun negatif tamsayılar haricindeki *bütün sıfırları* için geçerli olduğu savını öne sürdü. Bu sav Riemann varsayımı

olarak bilinir oldu. Eğer bu doğruysa, ki bütün kanıtlar öyle olduğunu göstermektedir, çok daha uzağa uzanan sonuçlara sahiptir. Aynısı genellemelerin çeşitleri için eğer herhangi biri daha önemli olacaksa da geçerlidir.

150 yıllık yorucu araştırmalardan sonra, herhangi bir kanıt bulunamadı. Riemann varsayımı bütün matematik içinde en şaşırtıcı ve rahatsız edici bilmecelelerden biri olarak kalmıştır. Bunun çözümü matematik tarihindeki sarsıcı olaylardan biri olacaktır.

Riemann varsayımına giden yol asal sayıların tekil olarak kararsızca düzensiz olmasına rağmen toplu bakıldığında açıkça istatistiksel örüntülere sahip olduklarının keşfiyle başladı. Adolphe Quetelet 1835'te bilinçli insan tercihlerine veya kaderin müdahalesine dayalı olan doğumlar, ölümler, intiharlar gibi sosyal olaylarda matematiksel düzenlilikler bulunduğunu çağdaşlarına duyurdu. Örüntü istatistiksel: onlar bireylere değil ancak geniş insan topluluklarının ortalama davranışına bağlanıyordu. Matematikçiler aynı zamanda aynı hilenin asal sayılar için de işe yaradığının farkına vardılar. Her biri ayrı bir birey olmasına rağmen, toplu biçimde gizli örüntüler vardır.

Gauss aşağı yukarı 15 yaşındayken logaritma tablosunun üzerine bir not yazmıştır: x büyüdükçe, x' eşit veya x 'ten küçük asal sayıların sayısı $x/\log_x$ 'e yaklaşır. Bu asal sayı teoremi olarak bilinir oldu ve eksik olan ispatıyla bu gerçekten de asal sayı varsayımıydı. Rus matematikçi Pafnuty Chebyshev 1848'de ve 1850'de analiz kullanarak asal sayı teoremini kanıtlamaya çalıştı. İlk bakışta açıkça bir bağlantı yoktu; bir kişi akışkanlar dinamiği veya Rubik küpü kullanarak da bunu ispat etmeye çalışabilirdi. Ancak Euler zaten iki konu arasında tuhaf bir ilişkiye işaret etmişti:

$$\begin{aligned} & 1/(1-2^{-s}) \times 1/(1-3^{-s}) \times \dots \times 1/(1-p^{-s}) \dots \\ & = 1/1^s + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + 1/5^s + 1/6^s + 1/7^s + \dots \end{aligned}$$

1'den büyük herhangi bir gerçel sayı olan p 'nin bütün asal sayıları gözden geçirdiği formül budur. $s > 1$ şartı sağ tarafta anlamlı değer dizileri elde etmek için gereklidir. Formülün

arkasındaki ana fikir analitik dilde asal sayıları faktöriyel şeklinde yazmanın biricikliğini ifade eder. Zeta fonksiyonu (ζ) değeri s 'ye bağlı olan bu denklemin sağ tarafındaki dizilerdir.

Chebyshev, Euler'in formülünü x büyüdükçe x 'ten küçük veya ona eşit olan asal sayıların sayısının $x/\log_x$ 'e oldukça yaklaştığını ispat etmek için kullandı. Aslında oran biri birden hafifçe büyük olan diğeryse çok az küçük iki sabit sayı arasındadır. Bu, sayı kuramında olduğu kadar kesin değildi, ancak tamamlanmamış bir diğer varsayıma 1845 tarihli Bertrand'ın postulatına bir ispat sağlamıştır: herhangi bir tamsayıyı alıp iki katını alırsanız o ikisi arasında bir asal sayı vardır.

Riemann, Euler'in fikrini yeni tekniklere açarak onun daha güçlü hale getirilip getirilemeyeceğini merak etti ve o, zeta fonksiyonunda iddialı bir genişlemeye yol açtı: onu gerçel bir değişken değil ancak karmaşık bir değişken için tanımlamak. Euler'in dizisi başlamak için güzel bir yerdir. Diziler gerçel kısmı 1'den büyük olması şartıyla *karmaşık s sayısı* için mükemmel anlamlıdır (Bu dizilerin birleşmesini ima eden teknik bir gerekliliktir: onların sonsuza doğru toplamı anlamlıdır.). Riemann'ın ilk muhteşem öngörüsü daha iyisini yapabileceği yönündeydi. $\zeta(s)$ tanımını 1 hariç *tüm* karmaşık sayılara genişleten analitik süreklilik şeklinde adlandırılan bir işlemi kullanabilirdi. Bu değer dışarıda bırakılmıştır, çünkü $s = 1$ 'e olduğunda zeta fonksiyonu sonsuz olur.

Bu tüm çift negatif tamsayıların sıfır olduğuna işaret eden genişletme tekniğidir. Bunu doğrudan dizilere bakarak göremezsiniz. Bu ayrıca Riemann'ın keşfettiği zeta fonksiyonunun yeni özelliklerini ima etmektedir. O, 1859'da fikirlerini 'Verili Bir Büyüklükten Az Olan Asal Sayıların Sayısı Üzerine' adlı bir makalede bir araya getirdi. Onun içinde verili gerçel bir x sayısından küçük olan asal sayıların sayısını veren apaçık, tam bir formül verdi. Kabaca konuşursak bu asal sayıların logaritmik toplamı yaklaşık olarak şudur:

$$-\sum_p x^p/p + x - 1/2 \log(1 - x^2) - \log 2\pi$$

Burada Σ sembolü bütün $\zeta(p)$ değerinin sıfır olduğu negatif çift tamsayılar hariç bütün p değerlerinin toplamını anlatır.

Eğer zeta fonksiyonun sıfırları hakkında yeterince bilgiye sahipsek Riemann'ın formülünden asal sayılar hakkında yeni bilgilerin çıkarımını yapabiliriz. Bunlar, özellikle sıfırların gerçel kısımları hakkındaki bilgilerdir, isterseniz asal sayıların istatistiksel özelliklerinin çıkarımını yapalım: diğer tamsayılar arasında nasıl dağılırlar veya verili bir büyüklüğe kadar onlardan kaç adet vardır. ... *eğer* kanıtlayabilirseniz Riemann varsayımının yarar sağladığı yer burasıdır.

Riemann bu ihtimali görebilecek bakış açısına sahipti, ancak kendi programını sağlam bir sonuca ilerletmemiştir. Bununla birlikte 1896'da Jacques Hadamard ve Charles Jean de la Vallée Poussin birbirlerinden bağımsız olarak Riemann'ın bakış açısını asal sayı teoremini çıkarsamak için kullandılar. Onlar zeta fonksiyonunun anlaşılması zor olan sıfırlarını daha zayıf bir özelliğini kanıtlayarak yaptılar: gerçel kısım 0 ile 1 arasındadır.

Jorgen Gram 1903'te sayısal olarak ilk on (" + " pozitif çiftin) sıfırın kritik çizgide yer aldığını gösterdi. E.C. Titchmarsh 1935 dolaylarında adedi 195'e yükseltti. Bu tür hesaplamaların elle yapıldığı son tarih olan 1936'da Titchmarsh ve Leslie Comrie ilk 1041 çift sıfırın kritik çizgi üzerinde yer aldığını ispatladı. Turing 1953'te bir bilgisayar kullanarak kritik çizgi üzerinde bulunan ilk 1104 adet sıfır çiftini çıkarsamak için daha etkili bir yöntem keşfetti. Yannick Saouter ve Patrick Demichel tarafından kritik çizgi üzerinde yer alan anlaşılması zor ilk 10 trilyon (10^{13}) adet sıfırın yer aldığı günümüzdeki rekor 2014 yılında kırılmıştır. Matematikçiler ve bilgisayar bilimcileri diğer aralıklardaki sıfırları kontrol etmişlerdir. Şimdiye kadar, her hesaplanmış anlaşılması zor sıfır kritik çizgi üzerinde bulunmaktadır.

Sayı teorisinin bu alanındaki bu çeşit deneysel kanıtlar maalesef bekleyebileceğinizden daha az etkili olmaktadır. Açık bir şekilde birçok kanıt tarafından desteklenen diğer birçok varsayımın işi bitmiştir. Bütün bildiklerimize göre, girişimleri

yok eden ve bizim hesaplarımızın yaklaşılamayacağından öylesine çok daha büyük olan sadece *bir* istisna vardır. Bu nedenle matematikçiler kanıtlar istemektedirler ve bu alanda engel olan şey de 150 yıldan fazladan beri kanıt bulunmamasıdır.

π'YE YAKINSAMA

Okul matematiğinin çoğu yerinde biz ' $\pi = 22/7$ almamız' söylenmiştir. Ancak eğer eşitliği bire bir yorumlarsak doğru mu yapmış oluruz? Eğer küçük bir hatayı önemsemesek bu özel kesir nereden gelmektedir?

π'yi Rasyonelleştirmek

π sayısı $22/7$ 'ye eşit olamaz, çünkü o irrasyoneldir [$\sqrt{2}$ ve π bölümüne bkz.]; yani p ve q tamsayı olması şartıyla p/q kesri tam kesir değildir. Matematikçiler tarafından uzun süre şüphelenilen bu olgu ilk olarak Johann Lambert tarafından 1768 yılında kanıtlanmıştır. O zamandan beridir birçok ispat daha bulunmuştur. Bu, özellikle π 'nin ondalık kısmının sonsuza kadar aynı sayı parçalarını birçok kez tekrar etmeksizin gittiğini yani *devirli* ondalık sayı olmadığını ima eder. Bu 12345 gibi belirli bir sayı parçasının birçok kez tekrar edemeyeceği anlamına gelmez, aslında bu sonsuz sıklıkta olur. Ancak bazı sabit rakamların tekrarıyla π 'yi elde edemezsiniz.

Okul seviyesi matematiğinde bu zorluktan onu $22/7$ 'ye yakınsayarak, yani $3 \frac{1}{7}$ veya $22/7$ diyerek kaçınılırız. Bunun tam olmadığını görmek için π 'nin irrasyonel olduğunu ispatlamanıza gerek yoktur.

$$\pi = 3,141592...$$

$$22/7 = 3,142857...$$

Ayrıca $22/7$ diğer rasyonel sayılar gibi devirli ondalık sayıdır ve onun ondalık rakamları 142857 parçasını sonsuza kadar tekrar eder.

$$22/7 = 3,142857142857142857...$$

Tarih boyunca çeşitli rasyonel sayılar π 'ye yakınsamak için kullanılmıştır.

Babilli matematikçiler MÖ 1900 dolaylarında $\pi \sim 25/8 = 3$ yakınsamasına eşit hesaplamalar yaptılar.

Rhind matematiksel papirüsü MÖ 1650–1550 dolaylarında İkinci Orta Dönemde katip Ahmes tarafından yazılmışsa da katip onu daha eski MÖ 2055–1650 arasındaki Orta Krallıktan bir papirüsten kopyaladığını belirtmektedir. Bu, modern terimlerle ifade edersek sonuçta π 'nin 256/81'e yakınsandığı bir dairenin alanının yaklaşık hesaplamasını içermekteydi. Bununla birlikte, Antik Mısırlıların π 'ye benzer özel bir sabit bulup bulmadıkları açık değildir.

Hint gökbilimci Yajnavalkya MÖ 900 dolaylarında *Shatapataha Brahmana* adlı eserinde gerçekten onu 339/108'e yakınsamıştır.

MÖ 250 sıralarında yaşamış en muhteşem matematikçilerden olan ve aynı zamanda mühendis olan Yunan Arşimet tam bir mantıksal titizlikle π 'nin 22/7'den az ve 223/61'den büyük olduğunu ispat etmiştir. Ptolemaios MÖ 150 sıralarında π 'yi 377/120'ye yakınsamıştır.

Çinli matematikçi Liu Hui MS 250 dolaylarında $\pi \sim 3927/1250$ olduğunu göstermiştir.

Bu yakınsamaları beşinci ondalık sayıya kadar hesaplayarak karşılaştırabiliriz.

Sayı	5. ondalık sayıya kadar	Bağıl hata
π	3.14159	
$\frac{22}{7}$	3.14285	%4 daha büyük
$\frac{25}{8}$	3.12500	%5 daha küçük
$\frac{256}{81}$	3.16049	%6 daha büyük
$\frac{339}{104}$	3.13888	%8 daha küçük
$\frac{221}{71}$	3.14084	%2 daha küçük
$\frac{377}{120}$	3.14166	%0,2 daha büyük
$\frac{3927}{1250}$	3.14160	%0,02 daha büyük

Tablo 9



Şekil 77: Rhind papirüsü parçası.

HANOİ KULESİ

GörünüŖe göre, 466/855'in özel olmasını beklemezsiniz. Beni tam olarak bu sayıya yönlendiren bazı araŖtırmalardan sonra bile, ben de böyle olmasını beklemiyordum. Ancak, onun Hanoi Kulesi adında ünlü yapbozla, hatta daha ünlü olan Sierpiński contası adlı bir Ŗekille yakından iliŖkili olduğu ortaya çıktı.

Diskleri Hareket Ettirmek

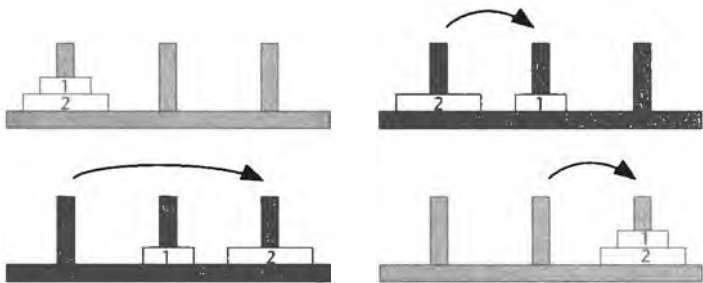
Hanoi Kulesi 1883'te Lucas tarafından pazarlanan geleneksel bir yapbozdur. O tahta üç çivi üzerinde farklı ölçülerde bir dizi yuvarlak disk içerir. Biz burada ölçüleri 1, 2, 3, ..., n pozitif tamsayılar olarak alacağız ve buna n diskli Hanoi diyeceğiz. n ticari yapbozlarda 5 ya da 6 olarak alınır.

Başlangıçta bütün diskler aŖađıdan yukarıya ölçüleri küçülecek Ŗekilde tek bir tahta çivi üzerinde dizilmiŖtir. Yapbozun amacı her bir diski farklı bir tahta çivi üzerine yerleŖtirmektir. Her hareket bir diski bir çivin tepesinden yeni bir çiviye yerleŖtirir. Bununla birlikte bir disk bu Ŗekilde ancak; üzerine koyulduğu disk ondan daha büyükse veya çiviye daha önce bir disk asılmadıysa hareket ettirilebilir.

İlk kural bütün diskler yer deđiŖtirildiđinde aŖađıdan yukarı azalan büyüklükte sıralansınlar diyedir.

Yapbozu çözmeyi ilerleyen kısımları okumadan önce denemelisiniz. İki diskle başlayıp kendinizi hazırlayarak ne kadar hırslı (veya ısrarcı) olduğunuza göre beŖ veya altı diske kadar yükseltin.

Örneğin 2 diskli Hanoi'yi sadece üç harekette çözebilirsiniz:



Şekil 78: 2 diskli Hanoi'inin çözümü. Disk 1'i ortadakine geçirin, daha sonra disk 2'yi sağdakine koyun, sonrasında disk 1'i sağa kaydırın.

Peki, 3 diskli Hanoi hakkında ne dersiniz? O şöyle başlar:



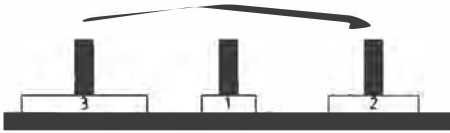
Şekil 79: 3 diskle başlangıç pozisyonu.

İlk hareket kendiliğinden zorunludur: hareket etmesine izin verilen tek disk 1. disk'tir. İki çividen birisine yerleşebilir ve hangisini seçtiğimiz gerçekten fark etmez, çünkü kavramsal olarak yapbozu etkilemeden bu iki çivinin yerini değiştirebiliriz. Dolayısıyla disk 1'i merkezi çiviye yerleştirebiliriz.



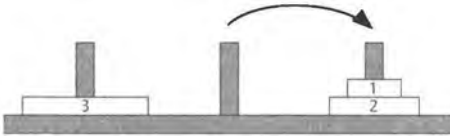
Şekil 80: İlk hareket.

Bu aşamada disk 1'i tekrar hareket ettirebiliriz, ancak bu bize bir şey kazandırmaz: o başladığı yere geri döner ya da daha önce doğrudan gidebileceği diğer boş çiviye yerleşir. Dolayısıyla farklı bir diski hareket ettirmeliyiz. Disk 3'ü hareket ettiremeyiz, çünkü disk 2'nin altındadır, bu nedenle disk 2'yi hareket ettirmeliyiz. Onu disk 1'in üzerine koyamayız. Böylece tek ihtimal onu sağdaki çiviye yerleştirmektir.



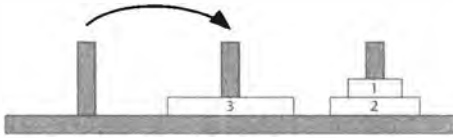
Şekil 81: İkinci hareket.

Şimdi disk 3'ü hareket ettirebiliriz ve disk 2'yi yeniden hareket ettirmek aptalca olur. Dolayısıyla disk 1'i hareket ettiririz. Onu disk 3'ün üzerine koyarsak sıkışıp kalırız ve bir sonraki aşamada bu hareketi geri almak zorunda kalırız. Dolayısıyla sadece bir seçenek vardır:



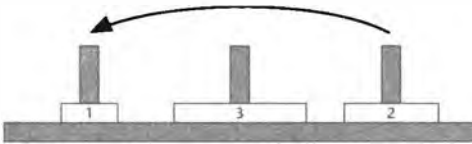
Şekil 82: Üçüncü hareket.

Şimdi ne olacak? Ya bu hareketi geri alacağız ya da çok yarım edeceğe benzemeyen disk 1'i disk 3'ün üzerine yerleştireceğiz veya disk 3'ü boş halkaya geçireceğiz:

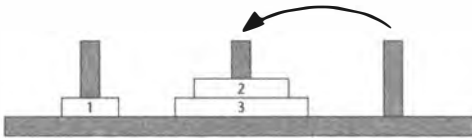


Şekil 83: Dördüncü hareket.

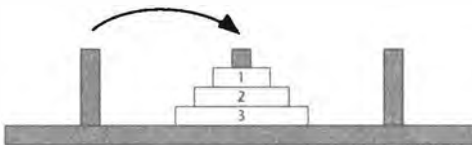
Bu aşamada yapbozu çözme yolunda uzun bir yol kat ettik, çünkü hareket ettirmesi en zor olan disk 3'ü yeni çiviye hareket ettirdik. Şu halde yapmamız gereken şey disk 1 ve 2'yi onun tepesine yerleştirmektir. Ayrıca *biz bunu nasıl yapacağımızı zaten biliyoruz*. Disk 1 ve 2'den oluşan kümeyi yeni çiviye zaten hareket ettirmiştik. Dolayısıyla, aynı şu şekilde sadece doğru çivileri seçmeye dikkat ederek hareketleri kopyalıyoruz:



Şekil 84: Beşinci hareket.



Şekil 85: Altıncı hareket.



Şekil 86: Yedinci hareket.

İşte bitti.

Bu çözüm $2^3 - 1$, yedi hareketimizi aldı. Daha kısa bir çözümün olmadığı gösterilebilir. Yöntem her sayıda disk için kurnaz bir çözüme işaret etmektedir. Onu şu şekilde özetleyebiliriz:

Önce en üstteki iki diski boş bir çiviye yerleştir

Daha sonra en büyük diski boş kalan tek çiviye yerleştir

Sonrasındaysa en büyük diski içeren çivinin üzerine diğer iki diski yerleştir.

İlk ve son hareketler 2 diskli Hanoi'nin çözümüdür. Ortadaki aşamaysa tamamen bellidir.

Aynı fikir 4 diskli Hanoi'yi de çözer:

Öncelikle 3 diski boş bir çiviye yerleştirin

Daha sonra en büyük diski tek boş kalan çiviye yerleştirin

Sonrasındaysa en büyük diski içeren çivinin üzerine diğer üç diski yerleştirin.

İlk ve son hareketler az önce bulduğumuz 3 diskli Hanoi'nin çözümünüyle aynıdır. Ortanca hamle yine tamamen bellidir.

Aynı fikir 5 diskli, 6 diskli Hanoi'lere vb genişletilebilir. Her n sayı diskli için yapbozu verili sayıdan bir disk eksik yapbozdaki süreci tekrarlayarak çözebiliriz. Dolayısıyla 5 diskli Hanoi'yi çözmek 4 diskliye, bu da sıradaki 3 diskliye, bu da sıradaki 2 diskli, bu da sıradaki 1 diskli Hanoi'yi çözmeye indirgenebilir. Ancak bu kolaydır: sadece diski alıp bir başka çiviye yerleştirmek kadardır.

Özel olarak yöntem bu şekilde devam eder. n diskli bir Hanoi'yi çözmek için:

En büyük n . diski geçici olarak yok sayın.

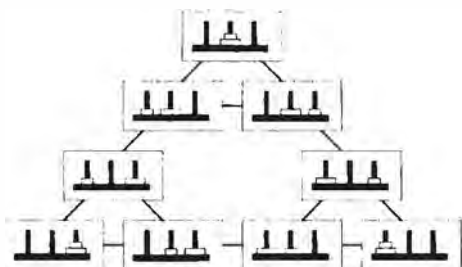
$(n-1)$. çözümü diskleri 1, 2, ..., $n-1$ diye yeni çivilere yerleştirerek kullanınız.

Daha sonra kalan en büyük diski boş kalan çiviye yerleştirin.

Son olarak, $(n-1)$. diskli Hanoi çözümünü tekrardan 1, 2, ..., $n-1$ diye giderek n . diski içeren çivinin üzerine yerleştirin. (Simetri açısından $(n-1)$. Hanoi'den yardım isterken hedef çivinin iki ihtimalin birisinden seçilebildiğine dikkat ediniz.)

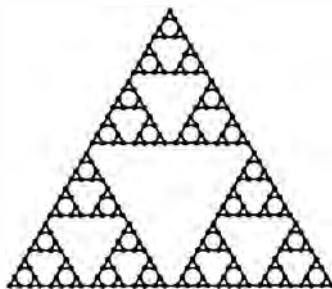
Durum Diyagramı

Kendini tekrar eden işlemler, adım adım izlerseniz çok karmaşık olabilir ve Hanoi kulesi için de olan budur. Bu karmaşıklık sadece çözüm yönteminde değil yapbozun özünde vardır. Neden olduğunu görmek için, onun *durum diyagramını* geometrik olarak çizerek tarif edeceğim. Bu, disklerin muhtemel durumlarını gösteren kurallara uygun hareketleri çizgilerle birleştiren düğümlerden oluşur. 2 diskli Hanoi kulesi şekilde gösterilen durum diyagramı formunu alır.



Şekil 87: 2 diskli Hanoi kulesinin durum diyagramı.

Bu diyagram ilgili 1 diskli Hanoi kulesinin üç yerde eklenmiş üç kopyası olarak görülebilir. Her kopyada, dipteki disk muhtemel üç çividen birinde sabit konumdadır. Eklemeler boş bir çivi dipteki diski hareket ettirmeye izin verirse oluşur. Birçok matematikçi birbirlerinden habersiz olarak kendini tekrar eden yapbozun çözümünün durum diyagramı yapısı olarak belirlediğini fark ettiler. Bunların ilki R.S. Scorer, P.M. Grundy ve Cedric A.B. Smith'in 1944'te ortaklaşa yazdıkları makalede gözükmektedir. Daha fazla disk olduğunda durum diyagramını tahmin etmek için kendini tekrar eden çözümü kullanabiliriz. 3 diskli Hanoi için her birinin dibinde fazladan büyük bir disk bulunan yukarıdaki diyagramın üç kopyasını yapın ve bir üçgende birbirine ekleyin. Böyle devam eder. Örneğin; Şekil 88, 5 diskli Hanoi için disklerin konumunu önemsemeyerek durum diyagramını göstermektedir.



Şekil 88: 5 diskli Hanoi için durum diyagramı.

H.T. Chan (1989) ve Andreas Hinz (1992) n diskli Hanoi'de durumlar arası hareketlerin ortalama en az olması için bir formül elde etmek için durum diyagramının tekrarlamalı yapısını kullandılar. En kısa yollar boyunca mümkün bütün durum çiftleri arasında toplam hareket sayısının şu şekilde hesaplandığını buldular:

$$466/885 \cdot 18^n - 1/3 \cdot 9^n - 3/5 \cdot 3^n + (12/59 + 18/1003 \sqrt{17}) \\ ((5 + \sqrt{17})/2)^n + (12/59 - 18/1003 \sqrt{17}) ((5 - \sqrt{17})/2)^n$$

Büyük n 'ler için bu yaklaşık olarak 18^n 'dir, çünkü ilk terim dışındaki terimler ondan çok daha küçüktür. Bütün bu yolların ortalama uzunluğu yaklaşık olarak durum diyagramının bir tarafı boyunca olan hareket sayısının $466/855$ katıdır. Şimdi tuhaf $466/855$ kesrinin önemini göreceğiz.

Sierpiński Contası

Yakından ilişkili bir soruda aynı kesir ortaya çıkar. Hinz ve Andreas Schief eğer Sierpiński contası olarak bilinen şekildeki contanın her kenarı bir birim olursa içindeki herhangi iki nokta arasındaki ortalama uzaklığı hesaplamak için Hanoi kulesinin durumları arasındaki hareketlerin ortalama sayısını hesaplamak için olan formülü kullandılar ve cevap dikkat çekici bir şekilde $466/855$ 'ti. Sierpiński contası bir eşkenar üçgen alıp onu yarı büyüklükte (ortada ters duran üçgen) dört üçge-

ne bölerek ve ortadaki üçgeni silerek oluşturulur. Daha sonra aynı işlem geriye kalan daha küçük üç eşkenar üçgende son-
suza dek tekrarlanır. Sonuç bizim günümüzde fraktal olarak
adlandırdığımızın erken bir örneğidir: ne kadar büyütülürse
büyütülsün çapraşık yapıya sahip bir şekildir [$\log 3/\log 2$ bö-
lümüne bkz.].

Polonyalı matematikçi Waclaw Sierpiński, benzer şekiller
süsleme olarak yüzyıllardır kullanımda olsa da bu hayranlık
uyandıran diziyi 1915'de icat etti. O, onu 'aynı anda hem Can-
torcu hem de Jordancı olarak betimledi. Sierpiński 'Cantorcu'
kelimesiyle dizisinin hepsinin bir bütün içerisinde ancak çap-
raşık güzellikte bir yapı şeklinde bulunduğunu kastediyordu.
'Jordancı' kelimesiyleyse onun bir eğri olduğunu kastediyor-
du. 'Her nokta bir dallanma noktasıdır' ifadesiyle de onun her
noktada kendisiyle karşı karşıya geldiğini kastediyordu. Son-
rasında, Benoit Mandelbrot şakacı bir şekilde bu eklemeleri
arabada silindir kapağını motorun geri kalan kısmına eklem-
leyen çok delikli sızdırmazlık contasına benzerliğinden dolayı
Sierpiński contası olarak adlandırdı.



Şekil 89: Sierpiński contasının ilk altı aşamasının oluşumu.

Irrasyonel Sayılar

Kesirler her pratik bölme işlemi için oldukça iyidir ve Antik Yunanlar bir süre kesirlerin evrendeki her şeyi betimleyebileceğine inanmışlardı.

Sonrasında onlardan biri Pisagor teoreminin sonuçlarını araştırdı ve bir karenin köşegeninin kenarlarıyla nasıl ilişkili olduğunu sorguladı.

Cevap onlara kesirlerin çözemeyeceği problemler olduğunu söylüyordu.

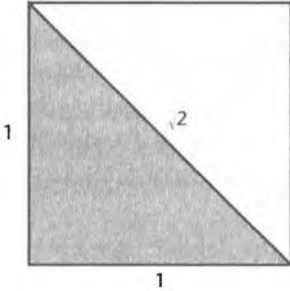
Irrasyonel sayılar doğdu. Rasyonel ve irrasyonel sayılar birlikte gerçel sayılar sistemini oluşturur.

$$\sqrt{2} \sim 1,414213$$

BİLİNER İLK İRRASYONEL

Rasyonel sayılar veya kesirler pratik amaçların çoğu için yeterince iyidir, ancak bazı sorular rasyonel çözüme sahip değildir. Örneğin, Yunan geometriciler bir kenarı 1 birim olan bir karenin köşegenin uzunluğunun rasyonel bir sayı olmadığını keşfettiler, ayrıca Pisagor'un teoremi $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ olduğunu öne sürmektedir, dolayısıyla $x = \sqrt{2}$ 'dir. Ayrıca onlar canlarını sıkacak şekilde bunun rasyonel olmadığını kanıtladılar.

Bu, Yunan geometricileri sayıları görmezden gelip geometrik uzunluklar üzerine yoğunlaşmaya sevk etti. Daha iyi bir fikir olduğu ortaya çıkan alternatif, bu çeşit meselelerle baş edebilsin diye sayı sistemini güçlendirmektir.



Şekil 90: Bir birimlik bir karenin köşegeni.

Ondalıklar, Kesirler ve İrrasyonel Sayılar

Sayıları günümüzde genellikle ondalık olarak yazarız. Hesap makineleri pratik nedenlerle ondalık virgülden sonra

sınırlı sayıda hane kullanarak ondalıkları sınırlandırır. Bölümün başlangıcında bir birimlik karenin köşegen uzunluğunun on rakamlı ondalık biçimi $\sqrt{2} = 1,4142135623$ 'tür. Bununla birlikte hesaplama *tam olarak* $(1,4142135623)^2 = 1,99999999979325598129$ olduğunu gösterir. Bu 2'ye çok yakın olmasına rağmen, ona eşit değildir.

Belki hesaplamayı çok erken bırakmışsınızdır. Belki milyon adet haneli olanı 2'nin karekökünü tam olarak verecektir. Bunun işe yaramayacağını görmenin basit bir yolu vardır. On haneli yakınsamada son sayı 3'tür. Bunun karesi alındığında 20 haneli, 3^2 yani 9 ile biten bir ondalık sayı elde ederiz. Ondalıkları çarptığımız yoldan anlaşılacağı üzere bu bir tesadüf değildir. Şu halde herhangi bir ondalık sayının son belirli rakamı sıfırın kendisi değilse sıfırdan farklı demektir. Dolayısıyla, onun karesi sıfır dışı bir rakamla bitecektir. 2'nin ondalık uzantısı sadece sıfırlı olduğundan 2,000... böylesi hiçbir sayının karesi tam olarak 2'ye eşit olamaz.

Bir hesap makinasındaki bütün ondalık sayılar aslında rasyoneldir. Örneğin, π sayısının değeri on haneye kadar 3,141592653 şeklindedir ve bu tam olarak şu kesre eşittir:

$$3.141.592.653/1.000.000.000$$

Sabit uzunlukta ondalık sayılar tam olarak daha çok kesir kümelerini belirtir: paydanın onun katı olduğu kesirler (alttaki sayı). Diğer kesirler bu anlamda daha karmaşıktır. Eğer hesap makineme $1/3$ yazarsam, o bana 0,333333333 verir. Aslında, bu pek de doğru değildir: onu 3 ile çarparsanız $1 = 0,999999999$ elde edersiniz. Öyle değildir: fark 0,0000000001'dir. Ancak 10 milyarda biri kim umursar ki?

Cevap ne yapmak istediğinize göre değişir. Eğer bir kitaplık yapıyorsanız ve bir metrelik bir tahtayı üç eş parçaya ayırmak isterseniz, o halde 0,333 metre (333 milimetre) yeterince hatasız olacaktır. Ancak eğer matematikte bir teoremi kanıtlamak istiyorsanız ve 3 kere $1/3$ 'ün olması gerektiği gibi 1 olmasını istiyorsanız o halde küçük bir hata bile vahim olabilir. Eğer $1/3$ 'ü tam bir hassasiyetle ondalık sayıya genişletmek istiyorsanız, o 3'ler sonsuza kadar devam etmek zorundadır.

$\sqrt{2}$ 'nin haneleri de sonsuza kadar devam eder, ancak orada belirgin bir örüntü yoktur. Aynısı π sayısı için de geçerlidir. Bununla birlikte geometride ortaya çıkan uzunlukları sayıları kullanarak ifade etmek isterseniz π ve $\sqrt{2}$ gibi sayıları göstermesi için sayısal gösterimler bulmalısınız. Sonuç günümüzde gerçel sayılar olarak adlandırdığımız sistemdi. Onlar sonsuz uzunlukta ondalık sayılarla gösterilebilir. İleri matematikte daha soyut yöntemler kullanılır.

'Gerçel' sıfatı doğmuştur, çünkü bu sayılar sezgisel ölçme fikrimizle uyushmaktadır. Her bir fazladan ondalık hane ölçümü daha da hassaslaştırır. Bununla birlikte gerçek dünya temel parçacıklar düzeyinde biraz kesin olmamaya başlar, dolayısıyla ellinci ondalık hane dolaylarında ondalık sayılar gerçekte olan bağlantılarını kaybeder. İşte şimdi Pandora'nın kutusunu açtık. Matematiksel nesneler ve yapılar (azami şekilde) gerçek dünyanın kendisi değil modellemesidir. Eğer ondalık sayılar sonsuza kadar devam ettirilirse gerçel sayılar sistemi düzenli ve tertiplidir. Eğer ellinci haneden sonra ondalıkları devam ettirmeyi bırakırsak veya işler kesinleşmemeye başlarsa, arapsaçı elde ederiz. Matematiksel elverişlilik ile fiziki hassaslık arasında devamlı bir değiş tokuş vardır.

Her rasyonel sayı gerçeldir. (Bir kanıt vermeyeceğim, ancak bu aslında çok zor değil.) Aslında rasyonel sayıların ondalık uzantıları tam olarak tekrar edenlerdir. Bu da belki başlangıcında bazı farklı rakamlarla birlikte aynı sonlu sayı bloğunu sonsuza kadar tekrar etmesi demektir. Örneğin, istisna olan 3,2 bloğundan sonra 619047 sonsuza kadar tekrar eder.

$$137/42 = 3,2619047619047619047 \dots$$

Bununla birlikte birçok gerçel sayı rasyonel değildir. Böylesi tekrarları önleyen her ondalık sayı bir örnektir. Dolayısıyla, devamlı uzayan 0 parçalarıyla 1,101001000100001000001... rasyonel olmadığından eminim. Böylesi sayılar için *irrasyonel* denir. Her sayı ya rasyoneldir ya da irrasyoneldir.

$\sqrt{2}$ 'nin İrrasyonel Olduğunun İspatı

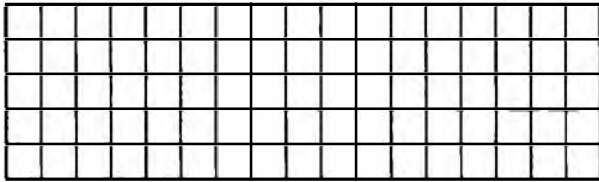
Bütün sonlu ondalık sayılar kesirdir, ancak birçok kesir sonsuz ondalık sayı değildir. Bunlardan herhangi biri $\sqrt{2}$ 'yi tam olarak gösterebilir mi? Eğer cevap 'evet' olsaydı, uzunluklar ve alanlar üzerine yapılmış Yunanların çalışmalarının hepsi çok daha kolaylaşacaktı. Bununla birlikte, Yunanlar cevabın 'hayır' olduğunu keşfettiler. Onlar, bunu ondalık sayıları kullanarak yapmadılar: geometrik olarak keşfettiler.

Şimdi yeni ve kullanışlı matematiğin geniş alanlarını açarak bunun önemli bir aydınlanma olduğunu göreceğiz, ancak bu zamanında utandırıcı bir şeydi. Bu keşif evrenin sayılar üzerine kurulu olduğuna inanan Pisagorculara kadar gitmektedir. Onlar sayılardan tamsayıları ve kesirleri anlıyorlardı. Maalesef, Metapontumlu Hippasus isimli onlardan biri olduğu söylenen kişi birim karelik bir karenin köşegeninin irrasyonel olduğunu keşfetti. İddiaya göre o, bu can sıkıcı gerçeği Pisagorcuların denizde bir teknede yaptığı parti sırasında söylemişti ve diğerleri o kadar kızınıştı ki onu denize atmış ve o boğulmuştu. Bu hikâye için tarihsel kanıt yoktur, ancak Pisagorcuların çok da memnun olmadığı açıktır, çünkü keşif onların temel inançlarıyla çatışmaktaydı.

Yunanlar kanıtlarında günümüzde Öklit algoritması denen geometrik bir işlem kullanmışlardır. O, verili c uzunluğunun tamsayı katı olan iki a ve b uzunluğunun obebleri olup olmadığını bulmak için sistematik bir yoldur. Eğer öyleyseler, bu bize c değerini söyler. Günümüzün sayısal bakış açısından bakarsak a/b değerinin rasyonel olması için gerek ve yeter şart a ve b sayılarının obebleri olan sayılar olmasıdır, dolayısıyla Öklit'in algoritması verili bir sayının rasyonel olup olmadığına karar vermek için 'gerçekten' bir testtir.

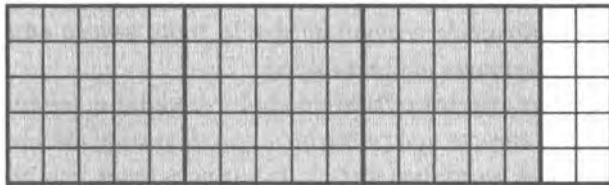
Yunanların geometrik bakış açısı aşağıdaki çizimleri yapacak yönde daha farklı şekilde iddialar ortaya atmaya yöneltmiştir. a ve b sayılarının c 'nin tamsayı katı olduğunu varsayın. Örneğin, $a = 17c$ ve $b = 5c$ olabilir. 17×5 boyutunda c birim karelerden oluşan bir şekil çizin. Boyu olan a 'nın c 'nin 17 adet

ve eni b 'nin c 'nin 5 adet kopyasından oluştuğuna dikkat edin. Dolayısıyla a ve b sayılarının obebi vardır.



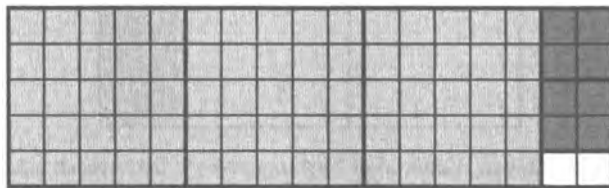
Şekil 91: 17×5 'lik kareli kâğıt.

Daha sonra yapabildiğiniz kadar onu 5×5 'lik karelere ayırın:



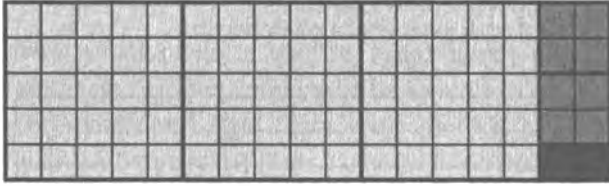
Şekil 92: 5×5 'lik üç kareye kesme.

Bu sonunda 2×5 'lik bir dikdörtgen geriye bırakır. Bu işlemi daha küçük dikdörtgende 2×2 'lik kareler elde edecek şekilde tekrar edin:



Şekil 93: Daha sonra 2×2 'lik kareler halinde kesin.

Bu işlemler, sonucunda 2×1 'lik bir dikdörtgen bırakır. Bunu da 1×1 'lik iki kareye ayırın ve böylece geriye hiçbir küçük dikdörtgen kalmaz, onlar tam olarak birbirine geçer.



Şekil 94: Son olarak iki adet 1×1 'lik kareye ayırın.

Eğer a ve b ortak c uzunluğunun katıysa bu işlemler sonunda bitmelidir, çünkü dikdörtgenler ve karenin bir kenarı gittikçe küçülmektedir. Buna karşılık; işlemler durursa ve geriye doğru gidilirse a ve b 'nin ortak çarpanının c olduğu ortaya çıkar. Kısacası iki uzunluk, eğer Öklit'in algoritmasında oluşan dikdörtgenlere uygulandığında sonlu sayıda adımdan sonra sona eriyorsa eboba sahiptir.

Eğer bazı uzunluk çiftlerinin ebobu olmadığını ispatlamak istersek bu süreçte açıkça *hiç bitmeyecek* şekilde dikdörtgenler uydurmak zorundayızdır. $\sqrt{2}$ ile baş edebilmek için hile, iki büyük kare içinden çıkarıldıktan sonra kalan dikdörtgen başlangıçtakiyle benzer olacak bir dikdörtgenle işe başlamaktır. Eğer öyleyse, Öklit'in algoritması iki kareye parçalama işini sonsuza kadar devam ettirir, asla durmaz.



Şekil 95: Gölgeledi dikdörtgeni başlangıçtakiyle benzeyecek şekilde yapın.

Yunanlar böyle bir dikdörtgeni geometrik olarak oluşturular, ancak biz bunun yerine cebir kullanabiliriz. Kenarlarının 1 ve a olduğunu varsayın. O zaman şu denklemin sağlama-sı lazım

$$a/1 = 1/a - 2$$

Dolayısıyla $a^2 - 2a = 1$, $(a - 1)^2 = 1$ olduğundan dolayı $a = 1 + \sqrt{2}$. Özetlersek, Öklit'in algoritması $1 + \sqrt{2}$ ve 1 uzunluğunun ebobunun yok olduğunu ifade eder, dolayısıyla $1 + \sqrt{2}$ irrasyoneldir.

Bundan dolayı $\sqrt{2}$ de irrasyoneldir. Bunun nedenini görmek için $\sqrt{2}$ 'nin p/q 'ya eşit rasyonel bir sayı olduğunu varsayın. O halde aynı şekilde rasyonel olan $1 + \sqrt{2} = (p/q)/q$ 'ya eşittir. Ancak öyle değildir, dolayısıyla burada bir çelişki elde ettik ve bizim varsayımımız yanlıştır.

$$\pi \sim 3,141592$$

DAİRENİN ÖLÇÜMÜ

Saymak için kullandığımız sayılar hızlıca tanıdıklaşır, ancak bazı sayılar çok tuhaftır. Gerçekten matematik öğrenirken karşılaştığımız ilk sıra dışı sayı π 'dir. Bu sayı hepsi sadece dairelerle aleni olarak ilişkili de olmayan matematiğin birçok alanında ortaya çıkar. Matematikçiler π 'nin 12 trilyondan fazla hanesini hesaplamıştır. Bunu nasıl yaptılar? π 'nin ne tür bir sayı olduğunu anlamak Antik Çağ'dan bir soruyu gündeme getirir: daire cetvelle ve pergelle dörtgen haline getirilebilir mi?

Çemberin Çevresinin Çapına Oranı

İlk olarak π ile bir çemberin çevresini ve dairenin alanını hesaplarken karşılaşırız. Yarıçap r ise çevre $2\pi r$, dairenin alanıysa πr^2 'dir. Geometrik olarak bu iki ölçüm birbiriyle doğrudan ilişkili değildir, dolayısıyla her ikisinde de π 'nin ortaya çıkması aslında kayda çok daha değerlidir. Bunun neden böyle olduğunu görmenin sezgisel bir yolu vardır. Bir daireyi pizzaymışçasına birçok dilime bölün ve onları bir dikdörtgene benzer şekil oluşturacak şekilde düzenleyin. Bu dikdörtgenin eni πr , yani çemberin çevresinin yaklaşık olarak yarısıdır. Onun yüksekliği ise yaklaşık olarak π 'dir. Dolayısıyla onun alanı yaklaşık olarak $\pi r \times r = \pi r^2$ yapar.

açıklayacaklardır [22/7 bölümüne bkz.]. Dolayısıyla π yerine neden tam bir kesir kullanmıyoruz?

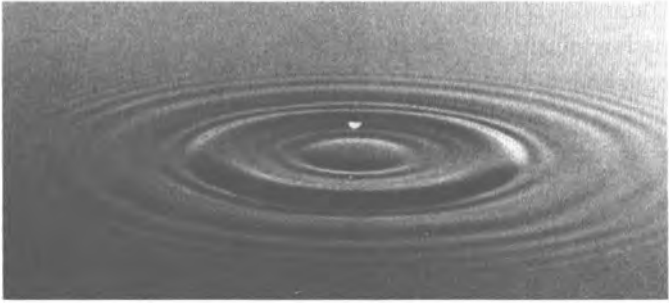
Öyle bir şey yoktur.

İrrasyonel sayının en bilindik örneği π 'dir. O, $\sqrt{2}$ gibi ne kadar karmaşık olursa olsun tam olarak herhangi bir kesir tarafından gösterilemez. Bunu ispatlamak cidden zordur, ancak matematikçiler nasıl yapılacağını bilirler ve o doğrudur. Dolayısıyla yeni bir sembole ihtiyacımız vardır, çünkü bu sayı tam olarak sıradan sayı sembolleriyle yazılamaz. π matematik boyunca en önemli sayılardan birisi olduğundan, ona atıf yapmak için anlamı açık bir yol seçmeliyiz. O da Yunan 'p'sidir, 'perimetrenin' (çevre uzunluğu) ilk harfidir.

Bu, evrenin bizimle oynadığı gerçekten daha çok acımasız bir hiledir: karmaşık formüller kullanmaksızın yazamayacağımız hayati önemde bir sayıdır. Bu belki rahatsızlık vericidir, ancak büyüleyicidir. π 'nin gizemine katkıda bulunur.

π ve Daireler

π ile ilk olarak dairelerle ilişkisinde karşılaşırız. Daireler çok temel matematiksel şekillerdir, dolayısıyla daireler hakkında bize bir şey söyleyen her şey değerlidir. Daireler çok kullanışlı uygulamalara sahiptir. 2011'de gündelik hayatın sadece bir alanında kullanılan daire sayısı 5 milyardan fazlaydı, çünkü referans olarak arabayı alırsak bunun sayısı bir milyarı geçmiştir ve bu zamanda tipik bir araba beş tekerleğe, dört adedi yola değer bir tane de yedektir, sahiptir. (Günümüzde yedek lastik yakıttan tasarruf sağlayan ve daha ucuza mal olan patlak lastik tamir kitidir.) Arabada elbette ki contalardan direksiyona kadar birçok başka daireler de vardır. Bisikletlerde, tırlarda, otobüslerde, trenlerde, havayolları araçlarında olanlardan bahsetmedik bile....



Şekil 97: Su dalgaları.



Şekil 98: Gökkuşağı, bir daire yayı.

Tekerlekler daire geometrisinin sadece bir uygulamasıdır. Onlar işe yararlar çünkü bir daire üzerindeki her nokta merkezden eşit uzaklıktadır. Eğer dairesel bir tekerleği döndürürseniz o düz bir yol boyunca yumuşakça ilerleyecektir. Ancak daireler diğer birçok yerde ortaya çıkar. Gökkuşağının renkli yayları ve bir süs havuzunda dalgalar daireseldir. Gezegenlerin yörüngesi öncelikle bir yakınsamaya göre daireseldir. Daha kesin bir yakınsamaya göre yörüngeler bir yönden sıkıştırılmış daire olan elipstir.

Bununla birlikte, mühendisler π hakkında bilgi sahibi olmadan mutlu bir şekilde de teker tasarlayabilirler. Onun gerçek önemi daha derinlerde yatar ve kuramsaldır. Matematikçiler π ile ilk olarak daireler hakkındaki temel bir soruda karşılaştılar. Bir dairenin büyüklüğü birbiriyle yakından ilişkili üç sayıyla tanımlanabilir:

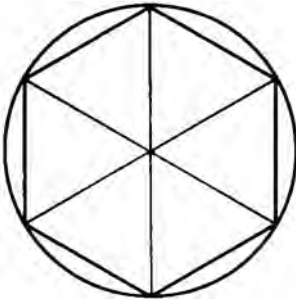
Yarıçapı—dairenin üzerindeki herhangi bir noktanın dairenin merkezine olan uzaklığı

Çapı—dairenin maksimum eni

Çevresi—çemberin düz şekilde açılmış çevresi

Yarıçap ve çap birbiriyle çok basit bir yolla ilişkilidir: çap yarıçapın iki katıdır ve yarıçap da çapın yarısıdır.

Çevre ile çap arasındaki ilişki bu kadar açık değildir. Bir çemberin içine düzgün bir altıgen çizerseniz, kendinizi çevrenin çapın üç katından biraz büyük olduğuna ikna edebilirsiniz. Şekil çiftler halinde çap oluşturan altı adet yarıçap göstermektedir. Altıgenin çevresi altı yarıçap uzunluğundadır, bu da üç çap yapar. Böylece, çemberin çevresi altıgenden birazcık daha uzundur.



Şekil 99: π 'nin 3'ten büyük olmasının nedeni.

π sayısı herhangi bir çemberin çevresinin çapına bölümü olarak tanımlandı. Çemberin büyüklüğü ne olursa olsun bu sayının hep aynı olmasını bekleriz, çünkü çevre ve çapın oranı çemberi daraltsanız da genişletseniz de aynı kalır. Arşimet 2200 yıl önce aynı sayının bütün çemberler için işe yarayacağını anlatan tamamıyla mantıksal bir ispatla çıkageldi.

Arşimet dairenin içindeki altıgenler hakkında düşünürken onların kenarlarını ikiye katlayıp 6'dan 12'ye, daha sonra 24'e, sonrasında 48'e ve son olarak 96'ya çıkararak π için oldukça doğru bir değer elde etti. 3 10/71'den büyük 3 1/7'den küçük olduğunu ispatladı. Ondalık olarak ifade edilirse bu iki ifade 3,141 ve 3,143'tür. (Arşimet gerçel sayılarla değil geometrik figürlerle çalışmıştır ve günümüzde bizim geometrik bir terim olarak ifade ettiğimiz π hakkında kafa yormuştur, dolayısıyla bu onun aslında yaptığının modern bir yorumudur. Yunanlar da ondalık sayılar yoktu.)

Arşimet'in π 'yi hesaplamak için olan yöntemi dairenin alanını yakınsamak amacıyla çokgenin yeteri kadar çok iki katı alınarak istenilen doğruluğa ulaştırılabilir. Sonrasında matematikçiler aşağıda tartışacağım şekilde daha iyi yöntemler buldular. 1000'li ondalık basamaklara kadar π 'nin haneleri şöyledir:

3. 14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494
 4592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647
 0938446095505822317253594081284811174502841027019385211055596
 4462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527
 1201909145648566923460348610454326648213393607260249141273724
 5870066063155881748815209209628292540917153643678925903600113
 305305488204665213841469519415116094.3305727036575959195309218
 6117381932611793105118548074462379962749567351885752724891227
 9381830119491298336733624406566430860213949463952247371907021
 7986094370277053921717629317675238467481846766940513200056812
 7145263560827785771342757789609173637178721468440901224953430
 1465495853710507922796892589235420199561121290219608640344181
 5981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281
 6096318595024459455346908302642522308253344685035261931188171
 0100031378387528865875332083814206171776691473035982534904287
 5546873115956286388235378759375195778185778053217122680661300
 1927876611195909216420199

Bu sayılara bakarsak en vurucu özellikleri örüntülerin tamamen yokluğudur. Rakamlar rastgele sıralanmış gibidir. Ancak öyle olamazlar, çünkü onlar π 'nin rakamlarıdır ve o da özel bir sayıdır. Örüntülerin yokluğu bize π 'nin tuhaf bir sayı oldu-

ğu hakkında güçlü bir ipucu vermektedir. Matematikçiler π 'nin genişleyen ondalık rakamlarının sonlu bir dizisinin her birinin bir yerde oluşacağından çokça şüphelendiler (gerçekten de sonsuz sıklıkta). Aslında π belli uzunluktaki bütün dizilerin eşit sıklıkla tekrar ettiği *normal* bir sayı olarak düşünülür. Bu iddiaların ne kendisi ne de aksi ispatlanabildi.

π 'nin Ortaya Çıktığı Diğer Yerler

Sıklıkla çemberlerle açık bir ilişkisi olmayan matematiğin diğer birçok alanında π sayısı ortaya çıkar. Her zaman dolaylı yoldan bir bağlantı vardır, çünkü π 'nin geldiği yer orasıdır ve onu tanımlamanın yollarından biri budur. Diğer herhangi bir tanım da aynı sayıyı vermek zorundadır, dolayısıyla ispat boyunca bir yerde çemberle olan ilinti ispatlanmalıdır. Ancak bu çok dolaylı da olabilir.

Örneğin, 1748'de Euler π , e ve eksi birin karekökü olan i sayısı arasında bir ilişki fark etti [e bölümüne bkz.]. Şöyle ki, sık formül

$$e^{\pi i} = -1$$

Euler ayrıca bazı sonsuz serileri toplarken π 'nin ortaya çıktığını fark etti. O, 1644'te Pietro Mengoli'nin sorduğu birin ardışık sayıların karesine bölümlerinin toplamı olan Basel sorusunu 1735'te çözdü. Bu sonsuz bir dizidir, çünkü sonsuz sayıda tam kare vardır. Zamanın büyük matematikçilerinin birçoğu onu çözmeyi denedi, ancak başaramadı. Euler 1735'te hoşla gidecek biçimde basit bir cevap keşfetti:

$$\pi^2/6 = 1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + \dots$$

Bu keşif onu matematikçilerin arasında anında ünlü yaptı. Çemberlerle bir ilişki fark edebilir misiniz?

Hayır, ben de edemem. Yine de o çok açık değildir, çünkü çoğu matematikçi Basel sorusunu çözememişti. O, aslında ilk bakışta soruyla hiç ilgili olmadığı görülen aynı sinüs fonksiyonu gibi seyrederek.

Euler'in yöntemi dördüncü, altıncı veya genel olarak bütün çift kuvvetler için de benzer sonuçlar vermişti. Örneğin

$$\pi^2/90 = 1/1^4 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + 1/5^4 + \dots$$

$$\pi^2/945 = 1/1^6 + 1/2^6 + 1/3^6 + 1/4^6 + 1/5^6 + \dots,$$

Ayrıca sadece tek veya çift sayıları kullanmak da mümkündür:

$$\pi^2/8 = 1/1^4 + 1/3^4 + 1/5^4 + 1/7^4 + 1/9^4 + \dots$$

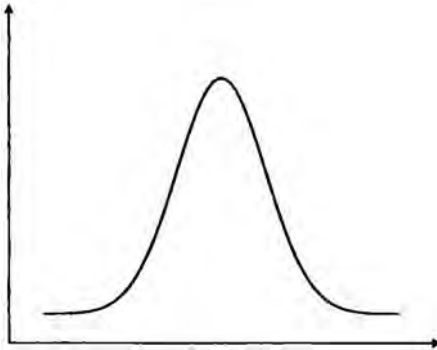
$$\pi^2/945 = 1/2^6 + 1/4^6 + 1/6^6 + 1/8^6 + 1/10^6 + \dots,$$

Bununla birlikte küp veya beşinci gibi tek kuvvetler için benzer formüller ispatlanmadı ve onların olmadığı iddia edildi [ζ(3)'e bkz.].

Bu seriler ve onlarla ilişkili olanlar dikkat çekici biçimde asal sayılarla ve sayı kuramıyla derinden ilişkilidir. Örneğin rastgele iki tamsayı seçerseniz onların ortak çarpanı (1'den büyük) olmama olasılığı $6/\pi^2 \sim 0,6089$, Euler serisinin toplamının çarpmaya göre tersi.

π 'nin diğer beklenmedik belirişi istatistikte ortaya çıkar. Ünlü 'çan eğrisinin' altında kalan alan $y = e^{-x^2}$ tam olarak $\sqrt{\pi}$ 'dir.

Matematiksel fizikte birçok formül π 'yi barındırır. Onların bazıları π içeren formüllerin listesinde yer alır. Matematikçiler içinde π 'nin özelliklerinin önde geldiği devasa çeşitlilikte denklem keşfetmişlerdir, bunların bazıları ileride tartışılacaktır.



Şekil 100: Çan eğrisi.

π Nasıl Hesaplanır?

Shigeru Konde 2013'te 94 günlük bir sürecin sonunda π 'yi 12.100.000.000.050'ye yani 12 trilyondan fazla haneye kadar hesaplamak için bilgisayar kullandı. π 'nin gündelik kullanımı böylesi hassaslıklar gerektirmez. Ayrıca onu çemberleri fiziksel olarak ölçerek bulamazsınız. Hepsi π için olan formüller veya günümüzde formül olarak ifade ettiğimiz işlemlere dayalı olan birçok çeşitli yöntem çağlar boyunca kullanılmıştır.

Böylesi hesaplamaların yapılmasının iyi nedenlerinden biri formüllerin ne kadar doğru çalıştığını görmek ve yeni bilgisayarları test etmektir. Ancak aslında ana neden rekor kırmanın cazibesidir. Aynı dağlarla dağcılar örneğindeki gibi 'O oradadır.' ve az sayıda matematikçi daha fazla hanelere kadar π 'yi hesaplamak için büyük meraka sahiptir. Bunun gibi matematiksel araştırmalarda rekor kırma etkinlikleri hep olan bir şey değildir ve özünde az öneme veya pratik değere sahiptir, ancak onlar tamamıyla büyüleyici formüllere yol açtı ve matematiğin farklı alanları arasında beklenmedik ilişkiler ortaya çıkardı.

π ile ilgili formüller genellikle yeterli defa tekrarlandığında π 'ye oldukça yakınsamalar sağlayan sonsuz süreçleri içerir. Arşimet'in çalışmasında ilk ilerlemeler on beşinci yüzyılda Hint matematikçiler π 'yi sonsuz serilerinin toplamı olarak yazıldığında sonsuza kadar devam eden eklemeli toplam olarak ifade ettiğinde kaydedildi. Eğer durum böylesi formüllerde olduğu gibi olsaydı, toplamın değeri yani onun limiti iyi tanımlanmış tek bir sayıya gittikçe yaklaşmalıydı, böylece seriler artan kesinlikte yakınsamaları hesaplamakta kullanılabilirdi. Gereken kesinlik bir kere sağlandı mı, hesaplama bırakılırdı.

Sangamagramalı Madhava 1400 civarlarında böylesi bir seriyi π 'yi 11. ondalık haneye kadar hesaplamak için kullandı. Farisi Jamshid al-Kashi 1424'te kenarları Arşimet'in yaptığından daha fazla artan kenar sayılarıyla düzgün çokgenleri kullanarak bunu geliştirdi. O, 3×2^{28} kenarlı düzgün çokgeni dikkate alarak ilk 16 haneyi elde etti. π 'yi yakınsamak için kul-

lanılan Arşimet'in yöntemi yeni çeşit bir formül yazması için François Viète'e ilham verdi, şöyle ki

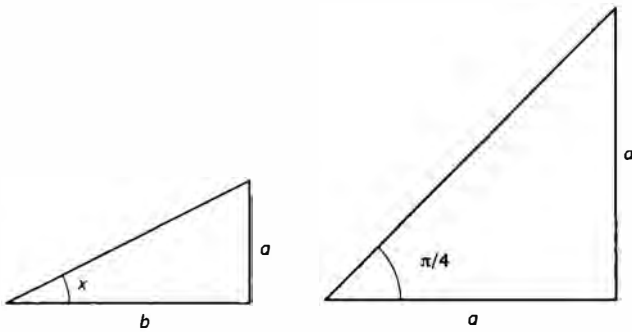
$$2/\pi = \sqrt{2}/2 \cdot (\sqrt{2} + (\sqrt{2})/2) / 2 \cdot (\sqrt{2} + (\sqrt{2} + (\sqrt{2})/2)) / 2 \dots$$

(Burada noktalar çarpma işlemini ifade eder.) Cristoph Grienberger 1630 dolaylarında çokgen yöntemini 38 rakama kadar devam ettirdi.

John Wallis 1655'te yarım dairenin alanını bulmak için daha karmaşık bir yaklaşım kullanarak farklı bir formül buldu:

$$\pi/2 = 2/1 \times 2/3 \times 4/3 \times 4/5 \times 6/5 \times 6/7 \times 8/7 \times 8/9 \dots$$

James Gregory 1641'de Madhava'nın π için olan serilerinden birini yeniden keşfetti. Fikir tanjant adında ve $\tan x$ şeklinde gösterilen trigonometrik bir fonksiyonla işe başlamaktı. Radyan ölçüsüne göre $45^\circ = \pi/4$ 'tür ve bu durumda $a = b$, dolayısıyla $\tan \pi/4 = 1$ 'dir.



Şekil 101: *Solda:* Tanjant $\tan x$, a/b 'dir. *Sağda:* $x = \pi/4$ olunca, tanjant $a/a = 1$ 'dir.

Şimdi de genellikle arctan olarak yazılan ters fonksiyonu düşünün. Bu tanjant fonksiyonun 'geri almadır'; eğer $\tan x$, y ise o halde $\arctan y$, x 'tir. Özel olarak $\arctan 1 = \pi/4$ 'tür. Madhava ve Gregory arctan için sonsuz seriler keşfetti:

$$\arctan y = y - y^3/3 + y^5/5 - y^7/7 + y^9/9 - \dots$$

Eğer $y = 1$ alırsak, $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \dots$ elde ederiz.

Abraham Sharp 1699'da π 'nin 71 hanesini bulmak için bu formülü kullandı, ancak seriler çok yavaş bir noktada toplanıyordu; dolayısıyla iyi bir yakınsama yapmak için çok sayıda terimi hesaplamak gerekiyordu. John Machin 1706'da $\tan(x+y)$ için trigonometrik bir formül kullandı

$\pi/4 = 4\arctan 1/5 - \arctan 1/239$ olduğunu gösterdi ve serideki $\arctan$ 'lar için $1/5$ ve $1/239$ kullandı. Çünkü bu sayılar 1'den oldukça küçüktü, seriler onları daha pratik yapacak şekilde daha hızlı bir noktada birleşiyordu. Machin bu formülü kullanarak π 'yi 100. haneye kadar hesapladı. 1946'ya gelindiğinde Daniel Ferguson benzer formülleri kullanarak bu genel fikri gidebileceği en ileri noktaya kadar izledi ve 620 rakama kadar ulaştı.

Aslında böyle formüllerin tam bir kuramı olarak Machin'in formülünün birçok özenle hazırlanmış hali vardır. F. Störmer 1896'da şunu biliyordu:

$$\frac{\pi}{4} = 44 \arctan \frac{1}{57} + 7 \arctan \frac{1}{239} - 12 \arctan \frac{1}{682} + 24 \arctan \frac{1}{12943}$$

ve izleyen satırlarda devasa paydaları sayesinde daha hızlıca bir noktada toplayan çok daha etkileyici modern çok formül vardı.

Hiç kimse kalem kâğıt aritmetiğinden daha iyisini yapmamıştır, ancak mekanik hesap makineleri ve bilgisayarlar hesaplamaları daha hızlı hale getirdi ve hataları ortadan kaldırdı. Dikkatler sadece çok az terim kullanarak çok iyi yakınsamalar veren formüller bulmaya yönelmişti. David ve Gregory Chudnovsky kardeşler tarafından bulunan Chudnovsky serileri terim başına 14 yeni ondalık hane üretti.

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)! (545, 140, 134k + 13, 591, 409)}{(3k)! (k!)^3 640, 320^{3k+\frac{1}{2}}}$$

Burada Σ yani toplam sembolü, 0'dan sonsuza kadar k tarafından belirlenmiş ifadeleri toplamak anlamına gelir.

π 'yi hesaplamak için diğer birçok yol vardır ve yenileri hâlâ keşfediliyor. 1997'de Fabrice Bellard π 'nin trilyonuncu rakamını iki tabanında gösterime göre 1 olarak bulduğunu ilan etti. Şaşırtıcı bir şekilde o ondan önceki rakamları hesaplamamıştı. David Bailey, Peter Borwein ve Simon Plouffe 1996'da çok tuhaf bir formül keşfettiler:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4n}} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$$

Bellard hesaplamalar için daha etkili benzer bir formül kullanmıştı:

$$\pi = \frac{1}{64} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{10n}}$$

$$\left(-\frac{32}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} + \frac{256}{10n+1} - \frac{64}{10n+3} - \frac{4}{10n+5} - \frac{4}{10n+7} + \frac{1}{10n+9} \right)$$

Yöntem bazı zekice analizlerle iki tabanında tekil rakamlar vermektedir. Formülün anahtar özelliği 4, 32, 64, 256, 2^{4n} , 2^{10n} gibi sayıların bilgisayarların iç işleyişlerinde kullanılan ikili sistemde, 2'nin kuvveti olmasıdır. π 'nin ikili sistemde tekil rakamını bulma rekoru düzenli olarak kırılmaktadır: Yahoo's Nicholas Sze 2010'da 0 olduğu ortaya çıkan 2 trilyonuncu rakamı iki tabanında hesapladı.

Aynı formüller 4, 8 ve 16 tabanında aritmetik yaparken π 'nin belirli rakamlarını bulmak için kullanılabilir. Diğer hiçbir taban için geçerliliği bilinmemektedir; özellikle belirli ondalık haneleri hesaplayamayız. Böyle formüller var mıdır? Bailey-Borwein-Plouffe formülü bulunana kadar hiç kimse bunun iki tabanında yapılabileceğini hayal etmemişti.

Daireden Kare Oluşturmak

Antik Yunanlar daireden kare oluşturmak için geometrik bir çizim öngörmüşlerdi: verili bir daireyle aynı alana sahip bir

karenin kenarını bulmak. Sonunda aynı bir açığı üç eş parçaya bölmekte ve bir küpün hacmini iki katına çıkarmada olduğu gibi [3 bölümüne bkz.] cetvelle ve pergelle böyle bir çizim olmadığı ispatlandı. İspat π 'nin ne çeşit bir sayı olduğunu bil-meye dayalıdır.

Biz π 'nin rasyonel bir sayı olmadığını görmüştük. Rasyo-nel sayılardan bir sonraki adım tamsayı üste sahip polinomal denklemleri sağlayan cebirsel sayılardır. Örneğin $x^2 - 2 = 0$ denklemini sağlayan $\sqrt{2}$ değeri cebirsel bir sayıdır. Cebirsel ol-mayan bir sayı aşkın sayı olarak adlandırılır ve 1761'de π 'nin rasyonel olmadığını kanıtlayan Lambert onun aslında aşkın olduğunu iddia etti.

Charles Hermite'nin matematikteki *diğer* tuhaf ünlü sayı olan doğal logaritma fonksiyonunun tabanı e 'nin [6 bölümüne bkz.] aslında aşkın olduğunu ispatlayan 1873'teki ilk büyük atılımına kadar 112 yıl geçti. 1882'de Ferdinand von Linde-mann, Hermite'nin yöntemini geliştirdi ve eğer sıfır dışı bir sayı cebirselse o sayının bir kuvveti aşkın olduğunu ispatladı. O, Euler'in formülünün $e^{i\pi} = -1$ avantajını da kullandı. π 'nin cebirsel olduğunu varsayın. Öyleyse πi de öyledir. Bu nedenle Lindemann'ın formülü 1'in cebirsel denklemi *sağlamadığını* ima etmektedir. Bununla birlikte onun bunu sağladığı apaçık-tır, şöyle ki $x + 1 = 0$. Bu mantıksal açmazın tek çıkış yolu π 'nin cebirsel denklemi sağlamadığıdır; öyleyse o aşkındır.

Bu teoremin önemli bir sonucu Antik Yunanların bir daire-nin alanına eşit alana sahip bir kareyi sadece cetvel ve pergel kullanarak çizme yani daireden kare oluşturma sorusunu ce-vaplamasıdır. Bu 1 birim uzunluktan yola çıkarak π uzunluğu-na sahip bir çizgi oluşturmaya aynıdır. Koordinat geometrisi bu şekilde çizilebilen her sayının cebirsel olduğunu söylemek-tedir. π cebirsel olmadığından böyle bir çizim mevcut değildir.

Bu, günümüzde bile bazı insanları cetvel pergel çizimini araştırmaktan alıkoyamamaktadır. Onlar matematikte 'imkân-sızın' ne olduğunu anlamamış gibi durmaktadırlar. Bu eski bir çapraşıklık. De Morgan 1872'de çok sayıdaki sözüm ona daire-kare dönüştürücülerin hatasını bir filin etrafında vızıl-

dayan binlerce sineğin her birinin kendisinin 'dört ayaklıdan daha büyük' olduğunu iddia etmesine benzettiği *A Budget of Paradoxes*'ni [*Paradoksların Bir Bütçesi*] yazdı. Underwood Dudley 1992'de *Mathematical Cranks*'de [*Matematiksel Fikri-sabiteler*] göreve devam etti. Diğer aletleri kullanarak çizimler yapmayı ve geometrik olarak π 'ye yapılan yakınsamaların her türlüşünü keşfedin. Ancak lütfen anlayın ki katı olarak klasik manada bir cetvel ve pergelle yapılan çizimler mevcut değildir.

$$\phi = (1 + \sqrt{5}) / 2 \sim 1,618034$$

ALTIN SAYI

Bu sayı düzgün beşgenlerle ve Öklit geometrisindeki ongenlerle olan ilişkisinden dolayı Antik Yunanlar tarafından biliniyordu. O, Fibonacci sayılarının dizisiyle de yakından ilişkilidir [8 bölümüne bkz.] ve çiçeklerin ve bitkilerin yapısındaki bazı tuhaf örüntüleri açıklar. O genel olarak 1826 ve 1835 yılları arasında kendisine verilmiş bir isim gibi duran *altın sayı* olarak bilinir. Onun estetik ve mistik açıdan özellikleri iyice yüceltilmiştir ancak bunların büyük çoğunluğu abartıdır, bazılarıysa üçkâğıt istatistiğine dayalıdır ve çoğuysa şimdiye kadar bir temele sahip olmamıştır. Bununla birlikte altın sayı, Fibonacci sayıları dahil doğal dünyayla orijinal bağlantılara özellikle; nümeroloji ve bitki geometrisinde kayda değer matematiksel niteliklere sahiptir.

Yunan Geometrisi

ϕ sayısı (Yunanca 'phi', bazen τ olarak farklı yazımı da olur, Yunanca 'tau') matematikte ilk olarak Öklit'in *Öğeler* kitabında düzgün beşgenin geometrisiyle ilgili olarak ortaya çıkmıştır. Zamanın standart uygulamaları izlenerek sayısal olarak değil geometrik olarak yorumlanmıştır.

ϕ için birazdan geleceğimiz üzere tam bir formül vardır. Altıncı ondalık haneye kadar $\phi = 1,618034$ ve yüzüncü haneye kadar şöyledir:

$$\begin{aligned} \phi = & 1,61803398874989484820458683436563811772030917 \\ & 98057628621354486227052604628189024497072072041 \\ & 893911375 \end{aligned}$$

ϕ 'nin karakteristik bir niteliği onun çarpma işlemine göre tersiyle $1/\phi$ çalıştığımızda ortaya çıkar. Yine altı ondalık hane-ye kadar

$$1/\phi = 0,618034\text{'t}{\ddot{u}}r.$$

Bu $\phi = 1 + 1/\phi$ olduğunu ifade eder. Bu ilişki ikinci dereceden bir denklem olarak $\phi^2 = \phi + 1$ veya standart formda $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ olarak yazılabilir.

İkinci dereceden cebirsel işlemler bu denklemin iki çözümü olduğunu gösterir:

$$(1 + \sqrt{5})/2 \text{ ve } (1 - \sqrt{5})/2$$

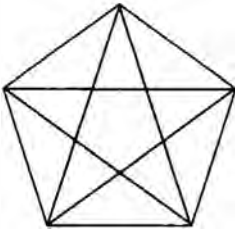
Sayısal olarak bunlar 1,618034 ve -0,618034'tür. ϕ 'nin tanımını gereği pozitif sonucu alırız. Dolayısıyla

$\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ eşittir ve $\phi = 1 + 1/\phi$ denklemini sağlayan gerçekten de budur.

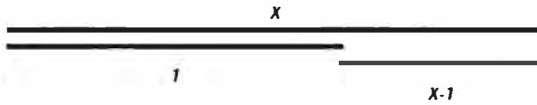
Düzgün Beşgenlerle İlişkisi

Altın sayı düzgün beşgen geometrisinde ortaya çıkar. Kenar uzunluğu 1 birim olan düzgün bir beşgenle başlayın. Beş köşeli yıldız oluşturacak şekilde beş adet köşegeni çizin. Öklit her köşegenin altın sayıya eşit olduğunu ispatladı.

Öklit, daha açık olarak 'ekstrem ve önemli oranda bölmeye' çalışmıştı. Bu, uzun olan parçanın küçük olana oranıyla bütün parçanın büyük olana oranı eşit olacak şekilde bir doğru parçasını iki parçaya bölmektir.



Şekil 102: Düzgün bir beşgen ve köşegenleri.



Şekil 103: Ekstrem ve önemli oranda bölme: koyu gri (1) uzunluğun açık griye $(x - 1)$ oranı siyah renkte olanın (x) koyu gri renkte olana (1) oranına eşittir.

Bu işlem bizi hangi sayıya götürür? Sembollerle siyah uzunluğun x koyu grinin 1 birim uzunluğa sahip olduğunu kabul edin. Sonrasında açık gri $x - 1$ uzunluğa sahiptir. Dolayısıyla ekstrem ve önemli oranda bölme durumu $x / 1 = 1 / (x - 1)$ denklemi olarak özetlenir, bu da düzenlemeyle $x^2 - x - 1 = 0$ şeklini alır.

Bu altın sayıyı tanımlayan eşitliktir ve biz sonucun yani ϕ 'nin 1'den büyük olmasını bekleriz.

Öklit düzgün beşgen çiziminde ekstrem ve önemli oranda bölmeyi fark etti. Bu, ona geleneksel aletler olan cetvelle ve pergelle düzgün beşgen çizmeyi sağlamıştır [17 bölümüne bkz.]. Beşgen Yunanlar için önemliydi, çünkü düzgün beşgen beş adet çok yüzlü düzgün katı cisimden biri olan düzgün on yüzlünün yüzlerini oluşturur. *Öğeler*'in doruk noktası beş adet çok yüzlü düzgün katı cisim olduğunun ispatıdır [5 bölümüne bkz.].

Fibonacci Sayıları

Altın sayı 1202'de Pisali Leonardo tarafından ortaya atılan Fibonacci sayılarıyla yakından ilişkilidir [8 bölümüne bkz.]. Bu sayıların dizisinin şöyle başladığını hatırlayın

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233

İlk iki adedinden sonra her sayı bir önceki iki sayının toplamıyla elde edilir: $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$, $3 + 5 = 8$ şeklinde devam eder. Ardışık Fibonacci sayılarının oranı altın sayıya giderek yaklaşır:

$$\frac{1}{1} = 1 \qquad \frac{21}{13} = 1.6153$$

$$\frac{2}{1} = 2 \qquad \frac{34}{21} = 1.6190$$

$$\frac{3}{2} = 1.5 \qquad \frac{55}{34} = 1.6176$$

$$\frac{5}{3} = 1.6666 \qquad \frac{89}{55} = 1.6181$$

$$\frac{8}{5} = 1.6 \qquad \frac{144}{89} = 1.6179$$

$$\frac{13}{8} = 1.625 \qquad \frac{233}{144} = 1.6181$$

Bu nitelik, dizi oluşturmak için olan kurallarla ve j için ikinci dereceden denklemle ispatlanabilir.

Diğer taraftan Fibonacci sayılarını altın sayıyı kullanarak ifade edebiliriz [8 bölümüne *bkz.*]:

$$F_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

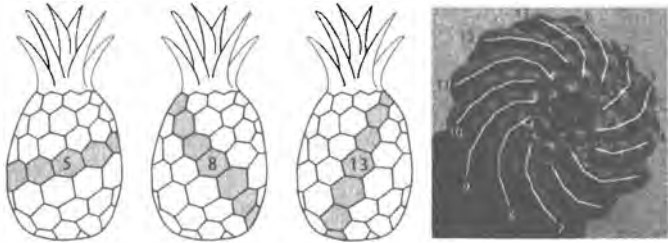
Bitkilerde Yansıması

İnsanlar 2000 yıldan fazladır bitkiler âleminde Fibonacci sayılarının çok yaygın olduğunu fark ettiler. Örneğin, birçok bitki özellikle papatya ailesinde Fibonacci sayılı taç yaprağı bulunur. Çuha çiçeği tipik olarak 13 taç yaprağa sahiptir. Yıldız çiçeği ise 21 adede sahiptir. Papatyalarsa 34 taç yaprağa, o değilse genellikle 55 veya 89 adede sahiptir. Ayçiçekleri genellikle 55, 89 veya 144 taç yaprağa sahiptir.

Diğer sayılar daha nadirdir, ancak yine de vardır. Bir ananas yüzeyinde yaklaşık olarak altıgen örüntüye sahiptir; altıgenler büyüdükçe bütünleşen tekil meyvelerdir. İki adet birbirine kenetlenen veya spiralleşen aileler iç içe geçer. Bir

aile yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine bükülür ve 8 spiral içerir; diğeri saat yönüne bükülür ve 13 adet içerir. Saat yönünde bükülü 5 spiralli daha sığ olan üçüncü bir aile görünebilir de mümkündür.

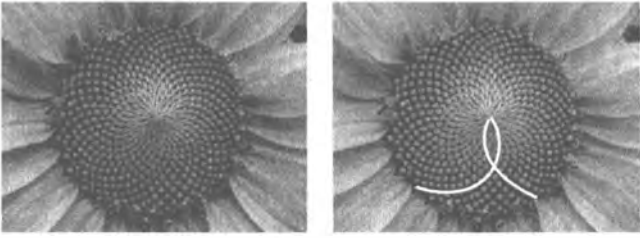
Çam kozalağının pulları benzer spiral dizilere sahiptir. Dolayısıyla olgun bir ayçiçeğinin başındaki çekirdekler de spiral olarak düzlem üzerindedir.



Şekil 104: *Solda:* Bir ananasın üzerindeki üç spiral ailesi. *Sağda:* Bir çam kozalağı üzerinde saat yönünün tersine 13 adet spiral.

Altın sayı ayçiçeği spirallerinin geometrisinin anahtarıdır ve dolayısıyla Fibonacci sayılarının ortaya çıkışını açıklar. Tam bir daireyi (360°) büyük olanın küçük olana oranı ϕ olacak şekilde altın oranlı iki yaya bölün. Dolayısıyla küçük yay tam yayın $1/(1 + \phi)$ katı olur. Yaklaşık olarak $137,5^\circ$ olan bu açı altın açı olarak adlandırılır.

Alman botanikçi Wilhelm Hofmeister 1868'de büyüyen bir bitkinin sürgünlerinin nasıl değiştiğini gözlemlemiştir ve bu da tüm sonraki çalışmalar için bir kılavuz olmuştur. Gelişmenin temel örüntüsü büyüme ucunda olandır. Sonunda çekirdek olacak olan primordia olarak bilinen küçük hücre kümelerine dayalıdır. Hofmeister ardışık primordiaların bir spiral üzerinde bulunduğunu keşfetti. Her biri öncekinden altın açı A kadar ayrıdır, dolayısıyla n . çekirdek nA açıyla yerleşir. Merkezden olan uzaklık n 'nin kareköküyle orantılıdır.



Şekil 105: Bir ayçiçeğinin tepesinde Fibonacci spiralleri. *Solda*: Çekirdeklerin düzeni. *Sağda*: iki spiral ailesinin üyeleri.

Bu gözlem bir ayçiçeğinin tepesindeki çekirdeklerin örüntüsünü açıklar. O, ardışık çekirdeklerin altın açının tamsayı katları olan açılarda yerleştirilmesiyle elde edilebilir. Merkezden olan uzaklığı ilgili sayının kareköküyle orantılı olmalıdır. Altın açığı A olarak adlandırırsak, o halde çekirdekler şu açılarla yerleşir

$$A \quad 2A \quad 3A \quad 4A \quad 5A \quad 6A \dots$$

ve uzaklıklar şu oranlarda olmalıdır

$$1 \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{4} \quad \sqrt{5} \quad \sqrt{6} \dots$$

Papatya gibi çiçeklerde taç yapraklar bir spiral ailesinin dış ucunda oluşur. Dolayısıyla spirallerin bir Fibonacci sayısı taç yaprakların Fibonacci sayılarını imler. Ancak Fibonacci sayılarının spirallerde neden elde ederiz?

Bu altın açı nedeniyledir.

Helmut Vogel 1979'da altın açının neden oluştuğunu açıklamak için ayçiçeği çekirdeklerinin geometrisini kullanmıştır. O, eğer aynı spiral devamlı olarak bir ayçiçeğinin tepesinde uygulanırsa ne olacağı hakkında çalıştı, ancak altın açı olan $137,5^\circ$ birazcık değişti. Sadece altın açı çekirdekleri üst üste binmeyecek ve boşluk kalmayacak şekilde birbirine sıkı sıkıya yerleştirir. Açıda, bir derece açının onda biri kadarlık bir değişiklik bile sadece bir spiral ailesinin örüntüsünün bozulmasına, çekirdekler arasında boşluklar oluşmasına neden olur. Bu altın açının neden özel olduğunu açıklar ve bu sadece sayısal bir tesadüf değildir.



Şekil 106: Ardışık çekirdekleri 137° , $137,5^\circ$ ve 138° açıları kullanarak yerleştirilmesi. Sadece altın aç çekirdekleri sıkıca paketler.

Bununla birlikte tam bir açıklama daha derinlerde yatmaktadır. Hücreler büyüdükçe ve hareket ettikçe onlar komşu hücreleri etkileyecek kuvvetler üretir. Stéphane Doudady ve Yves Couder 1992'de böyle sistemlerin mekaniğini hem deneysel hem de bilgisayar modellemeleriyle araştırdılar. Onlar ardışık çekirdeklerin arasındaki açılarının Fibonacci kesirlerinin altın açığa yakınsamalar olduğunu buldular.

Kuramları küpe çiçeğindeki dört adet taç yaprağı gibi Fibonacci olmayan sayıların kafa karıştırıcı görünümünü de açıklar. Bu istisnalar Lucas sayıları olarak bilinen Fibonacci dizisine çok benzeyen dizilerden gelmektedir:

1 3 4 7 11 18 29 47 76 123

Bu sayılar için formül birkaç sayfa önceki Fibonacci sayıları için olana çok benzerdir.

$$L_n = \varphi^n + (-\varphi)^{-n}$$

Dört yapraklı küpe çiçeği taç yapraklarda Lucas sayılarına bir örnektir. Bazı kaktüsler bir yönde 4 ve diğer yönde de 7 adet veya bir yönde 11 diğerinde 18 adet spiralli örüntü göstermektedir. Bektaşî kavuğu kaktüsünün bir çeşidinde 29 yaprak damarı vardır. 47 ve 76 spiralli diziler ayçiçeklerinde bulunmuştur. Maddelerin kuvvet altında nasıl gerildiğini ve büküldüğünü inceleyen esneklik kuramı uygulamalı matematiğin önemli alanlarından biridir. Bu kuram örneğin metal levhaların veya kirişlerin binalarda ve köprülerde nasıl davrandığını açıklamaktadır. 2004'te Patrick Shipman ve Alan

Newell esneklik kuramını kaktüs özelinde, büyüyen bir bitki sürgününe uyguladılar. Onlar büyüyen bir sürgünün primordia ucunun yüzeyinin bükülmesinin oluşumunu modellediler ve paralel dalgaların üst üste binen örüntüsünü elde ettiler. Bu örüntüler iki faktör tarafından yönlendirilmektedir: dalga sayısı ve yönü. En önemli örüntüler böyle üç dalganın etkileşimini içerir ve bir dalga için olan dalga sayısı diğer iki dalga sayısının toplamına eşit olmalıdır. Bir ananasın üzerindeki 5, 8 ve 13 sayılı spiraller bir örnektir. Onların kuramlarının izi doğrudan Fibonacci sayılarına, dalga örüntülerinin aritmetiğine kadar gider.

Biyokimyanın önemine değinmeye ne dersiniz? Primordia oluşumu oksin adında bir hormon tarafından kontrol edilir. Benzer dalga örüntüleri oksin dağıtımında da ortaya çıkar. Dolayısıyla Fibonacci sayılarının tam açıklaması ve altın aç biyokimya, hücreler arasındaki mekanik kuvvetler ve geometri arasındaki etkileşimi içerir. Oksin primordiada büyümeyi uyarır. Primordia bir çekirdekten diğerine güç sarf eder. Bu kuvvetler geometriyi yaratır. Geometri sonrasında biyokimyayı etkiler ve özel yerlerde fazladan oksin üretimini kritik bir biçimde tetikler. Dolayısıyla biyokimya, mekanik ve geometri arasında karmaşık birtakım geri besleme çevrim düzeni vardır.

DOĞAL LOGARİTMA

π 'den sonra genellikle kalkülüste karşılaştığımız en tuhaf sayı 'üslü sayılardaki' e 'dir. O, ilk olarak Jacob Bernoulli tarafından 1683 yılında incelenmiştir. Bileşik faizle ilgili problemlerde ortaya çıkar, logaritmaya öncülük eder ve bize sıcaklık, radyo-aktivite veya insan nüfusu gibi değişkenlerin nasıl azalacağını veya artacağını söyler. Euler onu π ve i ile ilişkilendirmiştir.

Faiz Oranları

Borç para aldığımızda veya yatırım yaptığımızda ilgili miktar üzerinden faiz ödeyebiliriz veya faiz alabiliriz. Örneğin, %10'luk yıllık faiz oranıyla 100£ yatırım yaparsak yılın sonunda 110£ elde ederiz. Ekonomik krizin şu aşamasında mevduatlar üzerinden %10 oranı gerçekçi gözükmemeyebilir, ancak bu oran krediler için gerçekçi olmayan bir şekilde düşüktür özellikle maaş günü kredilerinin yıllık faiz oranı %5853'tür. Ne olursa olsun bu örnek amacına uygun bir örnektir.

Faiz sıklıkla *bileşiktir*. Bu, faizin anaparaya eklenip faizin sonradan toplam olarak ödenmesini ifade eder. Bileşik faizin %10 olduğu yerde bu 110£ üzerine sonraki yıl 11£ faiz geliri olacaktır. Dolayısıyla %10 yıllık bileşke faiz oranıyla 121£ elimizde olur. Bileşik faiz üçüncü yılda anaparaya 12,10£ ekler toplamda 133,10£ ve dördüncü yılda toplamda 146,41£ olur.

e olarak bilinen matematiksel sabit eğer faiz oranını %100 olarak hayal edersek belli bir zaman sonra (bir yüzyıl diyelim) paramızın iki katına çıktığı durumda ortaya çıkar. Yatırım yaptığımız her bir 1£ için bu dönemin sonunda 2£ elde ederiz.

Bir yüzyıl için %100 faiz yerine %50 (yarısı kadar) oranını yüzyılın yarısı için (iki defa) uygulayalım ve bileşke olarak hesaplayalım. Yarım yüzyıl sonra pound olarak

$$1 + 0,5 = 1,5 \text{ pounda sahibizdir.}$$

İkinci yarım yüzyıl sonra

$$1,5 + 0,75 = 2,25 \text{ poundu elde ederiz.}$$

Dolayısıyla elde ettiğimiz miktar giderek büyür. Eğer yüz-yılı üç eş parçaya ayırırsak ve faiz oranını 3'e bölersek, bizim 1£ onuncu ondalık haneye kadar şu şekilde büyüyecektir:

başlangıçta: 1

$$1/3 \text{ dönem sonra: } 1,3333333333$$

$$2/3 \text{ dönem sonra: } 1,7777777777$$

$$1 \text{ dönem sonra: } 2,3703703704$$

Bu giderek büyümektedir.

Yukarıdaki sayılar arasında şöyle bir örüntü vardır.

$$1 = \left(1\frac{1}{3}\right)^0$$

$$1.3333333333 = \left(1\frac{1}{3}\right)^1$$

$$1.7777777777 = \left(1\frac{1}{3}\right)^2$$

$$2.3703703704 = \left(1\frac{1}{3}\right)^3$$

Matematikçiler dönemin giderek daha küçük parçalara bölünmesiyle faiz oranını devamlı bir şekilde uygularsak ne olacağını merak ettiler. Örüntü şu hali alır: eğer $1/n$ faiz oranıyla dönemi n adet eşit parçaya ayırırsak dönemin sonunda

$$(1 + 1/n)^n \text{ 'i elde ederiz.}$$

Devamlı olarak bileşke faiz almak n 'yi oldukça büyütmeye karşılık gelir. O halde onuncu haneye kadar bazı hesaplamaları deneyelim:

n	$(1 + \frac{1}{n})^n$
2	2.2500000000
3	2.3703703704
4	2.4414062500
5	2.4883200000
10	2.5937424601
100	2.7048138294
1000	2.7169239322
10,000	2.7181459268
100,000	2.7182682372
1,000,000	2.7182816925
10,000,000	2.7182816925

Tablo 10

Örüntüyü görmek için n 'nin çok büyük değerlerini almak zorundayız, ancak gözüktüğü üzere limit hesabında n çok büyük olunca $(1 + 1/n)^n$ yaklaşık olarak 2,71828 eşit olan sabit bir sayıya giderek yaklaşır. Bu aslında doğrudur ve matematikçiler $\lim$ sembolünün ' n tanımsız bir oranda büyüdüğünü varsaydığımızda ifadenin hangi değere yaklaştığına bakacağımız' şeklinde tanımlı olduğu halde bu değer limitli olan e adında özel bir sayı tanımladılar:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

100. ondalık haneye kadar şu şekildedir:

e=2,7182818284590452353602874713526624977572470936
99959574966967627724076630353547594571382178525
1664274

π gibi sonsuza değin giden ve asla aynı sayı bloğunu üst üste tekrar etmeyen ondalık uzantıya sahip olan diğer eğlence-
li sayılardan biridir. Bu da e 'yi irrasyonel yapar [$\sqrt{2}$ bölümüne bkz.]. π 'nin aksine e 'nin irrasyonel olmasının ispatı basittir; Euler onu 1737'de keşfetti, ancak yedi yıl boyunca yayımlamadı.

Euler e 'nin ilk 23 rakamını 1748'de hesapladı ve daha sonraki birtakım matematikçiler onun sonuçlarını geliştirdi.

Shigeru Kondo ve Alexander Yee 2010'da *e*'yi ilk trilyonuncu basamağa kadar hesapladılar. Onlar hızlı bir bilgisayar ve ileri bir yöntem kullandılar.

Doğal Logaritma

Merchistoun'un (İskoçya'da Edinburgh şehrinin bir bölümü, şimdiki Merchiston) 1614'te sekizinci toprak sahibi olan John Napier *Mirifici Logarithmorum Cannonis Descriptio* [*Logaritmanın Muhteşem Düzeninin Tasviri*] isimli bir kitap yazdı. O 'logaritma' kelimesini Yunanca *logos* 'orantı' ve *arithmos* 'sayı' kelimelerinden icat eden olarak kendini görmektedir. O fikrini ortaya şöyle atmıştır:

Matematikçi arkadaşlarımla matematiksel sanatların uygulamasında hiçbir şey uzun çarpma ve bölme işlemlerinden, oranları bulmaktan ve karekökten veya küpkökten sayıları çıkarmaktan, ayrıca doğabilecek birçok zor anlaşılır hatalardan daha uğraştırıcı değildir: dolaısıyla bu adı geçen zorlukların üstesinden gelebileceğim kesin ve eli çabuk sanat için düşünüp taşınyordum. Uzunca düşünme sonucunda sonunda işlemleri kısaltmanın şaşırtıcı bir yolunu buldum... Yöntemi herkesin kullanımı için matematikçilerin önünde sergilemek zevkli bir görevdir.

Napier özellikle astronomide birçok bilimsel problemin çapraşık sayıları çarpmayı veya onların karekökünü, küpkökünü bulmayı gerektirdiğini kişisel tecrübelerinden biliyordu. Bırakın bilgisayarları elektriğin bile olmadığı, hesaplamaların elle yapılmak zorunda olduğu bir zamandı. İki ondalık sayıyı toplamak göreceli olarak kolay bir işti ancak onları çarpmak çok daha zordu. Bu nedenle, Napier çarpmaları toplama haline getiren bir yöntem icat etti. Püf noktası sabit sayıların kuvvetleriyle çalışmaktı.

Cebirde bilinmeyen bir x sayısının kuvvetleri sayının üzerinde gösterilir. O halde iki harfi yan yana yazmanın o ikisini

çarpmak demek olduğu yerde; $xx = x^2$, $xxx = x^3$, $xxxx = x^4$ şeklinde devam eder. Örneğin $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$ ve $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10;000$.

Böylesi iki ifadeyi çarpmak kolaydır. Örneğin, $10^4 \times 10^3$ bulmak istediğimizi varsayalım. Şu şekilde yaparız

$$\begin{aligned} 10.000 \times 1000 &= (10 \times 10 \times 10 \times 10) \times (10 \times 10 \times 10) \\ &= 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \\ &= 10.000.000 \end{aligned}$$

Cevaptaki sıfırların sayısı $4 + 3$ 'e eşit olan 7 'dir. Hesaplamadaki ilk adım neden $4 + 3$ olduğunu gösterir: dört tane 10 'u üç tane 10 'un yanına koyarız. Dolayısıyla

$$10^4 \times 10^3 = 10^{4+3} = 10^7$$

Aynı şekilde in değeri ne olursa olsun a ve b tamsayı olması kaydıyla onun a . ve b . kuvvetlerini yan yana çarptığımızda $(a + b)$. kuvvetini elde ederiz:

$$x^a x^b = x^{a+b}$$

Bu gözüksüğünden daha ilginçtir, çünkü sağda daha basit olan ana adım a ve b 'yi toplamakken sol tarafta iki ifade çarpılmaktadır.

10 'un tamsayı kuvvetlerini çarpabiliyor olmak çok büyük bir ilerleme değildir. Ancak aynı fikir daha yararlı hesaplamalar yapmak için genişletilebilir.

$1,484$ ve $1,683$ 'ü çarpmak istediğini düşün. Uzun yoldan çarpmayla üç ondalık basmağa yuvarlanabilen $2,497572$ 'den $2,498$ 'i elde edersiniz. Bunun yerine, uygun bir x seçerek $x^a x^b = x^{a+b}$ formülünü kullanabiliriz. Eğer x 'i $1,001$ olarak alırsak birazcık aritmetik üçüncü ondalık basamağa kadar şunu ortaya çıkarır

$$1,001^{395} = 1,484$$

$$1,001^{521} = 1,683$$

Sonrasında formül bize $1,484 \times 1,683$ 'in

$$1,001^{395+521} = 1,001^{916}$$

Bu da üçüncü ondalık basamağa kadar $2,498$ 'dir. Hiç de fena değil

Hesaplamanın özü basit bir toplamadır: $395 + 521 = 916$. Bununla birlikte bu yöntem soruyu ilk bakışta daha da zorlaştırır. $1,001^{395}$ işlemini yapmak için $1,001$ 'i 395 kez kendisiyle çarpmalısınız, diğer iki kuvvet için de aynısı geçerlidir. Dolayısıyla bu oldukça faydasız gibi görünmektedir. Napier'in harika içgörüsü bu itirazın yanlış olduğu yönündeydi. Ancak bunun üstesinden gelmek için birisinin $1,001$ 'in kuvvetlerini $1,001^2$ 'den başlayarak $1,001^{10.000}$ gibi bir sayıya kadar gitme hesaplamasının angaryasını yapması gerekiyordu. Onlar bu kuvvetlerin bulunduğu tabloyu yayımladıklarında bütün zor iş bitirilmişti. Sadece 395. kuvvetin yanındaki $1,484$ 'ü görene kadar ve aynı şekilde 521. kuvvet için $1,683$ 'ü parmakla takip ederek bulmalısınız. Daha sonra bu iki sayıyı toplayarak 916 'yı elde edersiniz. Tablonun ilgili dizini $1,001$ 'in bu kuvvetinin $2,498$ olduğunu söyler. İşlem tamam.

Bu örnek bağlamında 395. kuvvetin $1,484$ sayısının ve 521. kuvvetin de $1,683$ 'ün logaritması olduğunu söyleriz. Aynı şekilde 916 onların sonucu olan $2,498$ 'in logaritmasıdır. Yaptıklarımız kısaltma şeklinde log yazarak herhangi bir a ve b sayısı için geçerli olan aşağıdaki denklemi verir:

$$\log ab = \log a + \log b$$

Daha çok gelişigüzel seçilmiş olan $1,001$ taban olarak adlandırılır. Farklı bir taban kullanırsak hesaplayacağımız logaritma da farklı olur, ancak her sabit tabanda her şey aynı şekilde çalışır.

Briggs'in İlerlemesi

Bu Napier'in yapması gerekendi, ancak bazı nedenlerden dolayı o biraz farklı ve oldukça uygun olmayan bir şey yaptı. Henry Brigg adında bir matematikçi Napier'in buluşu karşısında büyülenmişti. Ancak, tipik bir matematikçi olarak daha kâğıttaki mürekkep kurumadan her şeyi daha da basitleştirmenin bir yolu olup olmadığını merak etmeye başlamıştı. Aslında vardı da. Öncelikle Napier'in fikrini az önce anlattığım gibi çalış-

cak biçimde yeniden yazdı. Sonra, 1,001 gibi sayıların kuvvetlerini kullanmanın o özel e sayısının kuvvetlerini kullanmayı (ona yakınsama olarak) kısalttığını fark etti.

1,001'in 1000. kuvvet yani $(1 + 1/1000)^{1000}$ 'e eşittir ve bu e 'nin tanımı gereği ona yakın olmalıdır. Sadece $(1 + 1/n)^{1000}$ formülündeki $n = 1000$ olarak alın. Dolayısıyla $1,001^{395} = 1,484$ yazmak yerine $(1,001^{1000})^{0.395} = 1,484$ yazabiliriz. Öyleyse $1,001^{1000}$ e 'ye çok yakındır, dolayısıyla mantıklı bir yakınsamaya göre $e^{0.395} = 1,484$ 'tür.

Daha hassas sonuçlar almak için 1'e daha yakın 1,0000001 gibi bir sayının kuvvetlerini kullanırız. $1,0000001^{1,000,000}$ e 'ye daha yakındır. Bu, tabloyu milyonuncu kuvvetle veya böyle kuvvetlerle çok daha büyütür. Bu tabloyu hesaplama devasa bir girişimdir, ancak bir kere yapılmalıdır sadece. Eğer gerekli çabayı biri sarf ederse gelecek nesiller devasa miktarda aritmetikten kurtulmuş olacaktır. Ayrıca bir sayıyı 1,0000001 ile çarpmak çok da zor bir iş değildir. Sadece hata yapmamak için çok dikkatli olmalısınız. Briggs'in ilerlemesinin bu versiyonu bir sayının doğal logaritmasını tanımlamanın o sayıyı elde etmek için e 'nin kuvveti olarak yazılması işlemini kolaylaştırmıştır. Bu da herhangi bir x için $e^{\log x} = x$ demektir.

Şu halde

$\log xy = \log x + \log y$ ve bir kere hesaplanmış doğal logaritmanın bir tablosu herhangi bir çarpım sorusunu, toplama sorusuna indirger.

Bununla birlikte pratik nedenlerden dolayı $10^{\log x} = x$ olacak şekilde e 'yi 10 ile değiştirirsek fikir daha da basitleşecektir. Şimdi 10 tabanında yazılmış $\log_{10} x$ şeklinde logaritmalar elde ettik. Kilit nokta artık $\log_{10} 10 = 1$, $\log_{10} 100 = 2$ şeklinde devam etmesidir. 10 tabanında 1'den 10'a kadar sayıların logaritmasını bir kere hesapladıktan sonra diğer bütün logaritmalar kolayca bulunabilir. Örneğin,

$$\log_{10} 2 = 0,3010$$

$$\log_{10} 20 = 1,3010$$

$$\log_{10} 200 = 2,3010 \text{ şeklinde devam eder.}$$

10 tabanındaki logaritmalar gündelik aritmetikte daha basittir, çünkü ondalık sistemi kullanıyoruz. Ancak ileri matematikte 10 ile ilgili çok özel bir şey yoktur. Gösterim olarak diğer herhangi bir sayıyı taban olarak kullanabiliriz. Briggs'ın doğal logaritmasının yani e tabanının ileri matematikte daha temel olduğu ortaya çıkar.

e 'nin birçok özelliğinin yanında burada sadece birisinden bahsedeceğim. O n 'nin çok büyük olduğunda çok kullanışlı olan Stirling'in faktöriyel yakınsamasında ortaya çıkar:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$$

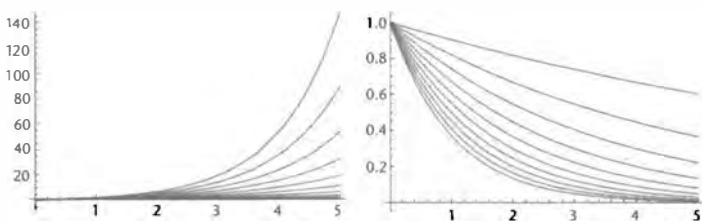
Üssel Büyüme ve Azalma

e sayısı bilimin her yerinde ortaya çıkar, çünkü herhangi bir doğal sürecin verili bir anında belli bir miktarın büyümesinin (veya küçülmesinin) oranı o zamandaki miktarla orantısaldır. x miktarının değiştiği oran olarak $x' = kx$ yazarsak böyle bir süreç k sabiti için diferansiyel denklemle tanımlanır

$$x' = kx$$

Kalkülüs hesabıyla x_0 anı $t = 0$ olduğu başlangıç zamanı olarak alınırsa t anındaki çözüm

$$x = x_0 e^{kt} \text{ 'dir.}$$



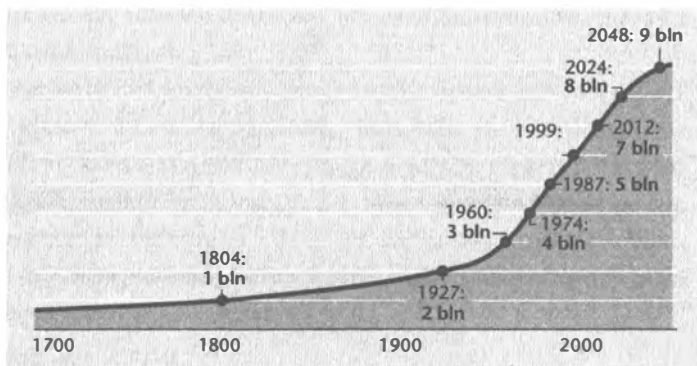
Şekil 107: Solda: $k = 0, 1, 2, \dots, 1$ 'e kadar e^{kt} için üssel büyüme. Sağda: $k = 0, 1, 2, \dots, 1$ 'e kadar e^{-kt} için üssel azalma.

Üssel Büyüme

k pozitif olduğunda t arttıkça $x_0 e^{kt}$ giderek daha hızlı büyür: bu üssel büyümedir.

Örneğin x bir hayvan popülasyonunun büyüklüğü olabilir. Eğer yaşam ortamı ve yiyecek sınırı yoksa popülasyon büyüklüğüyle orantılı biçimde büyür, dolayısıyla üssel model uygulanır. Sonunda popülasyonun büyüklüğü gerçekçi olmayan derecede büyür. Normalde büyüklüğü sınırlayacak şekilde yiyecek, yaşam ortamı veya diğer kaynaklar tükenmeye başlar ve daha karmaşık modeller kullanılmalıdır. Bu basit model kısıtlanmamış büyümenin sabit bir oranda sonuç olarak gerçekçi olmadığını gösterme üstünlüğüne sahiptir.

Dünya üzerindeki toplam insan nüfusunun kaydedilen tarih boyunca yaklaşık olarak üssel büyümüşdür, ancak 1980'den beri büyüme oranının yavaşlamış olabileceğine dair işaretler vardır. Eğer öyle değilse, başımız belada demektir. Gelecekteki popülasyon projeksiyonları bu eğilimin devam edeceğini varsaymaktadır, ancak öyle olsa bile hatırı sayılır derecede belirsizlik vardır. Birleşmiş Milletler 2100 yılı için 6 milyar (günümüzdeki 7 milyardan biraz az olan nüfus) ile 16 milyar (günümüzdeki nüfusun iki katından fazla) arası ölçekte bir sayı tahmin etmektedir.



Şekil 108: Toplam insan nüfusunun büyümesi.

Üssel Azalma

k negatif olduğunda t büyüdükçe $x_0 e^{kt}$ giderek daha hızlı azalır: bu üssel küçülmedir.

Örnekleri radyoaktif azalma ve sıcak bir vücutun soğumasıdır. Radyoaktif elementler nükleer parçacıkları radyasyon olarak yayımlayarak nükleer süreçlerle diğer elementlere dönüşürler. Radyoaktivite azalması zaman içinde üsseldir. Dolayısıyla, x_0 başlangıç seviyesi ve k de ilgili elemente bağlı pozitif bir sabitten bir t zamanındaki radyoaktivite seviyesi $x(t)$ şu denklemi izler

$$x = x_0 e^{-kt}$$

1907 yılında ortaya atılan radyoaktivitenin sürdüğü zamanın uygun bir ölçüsü olan kavram *yarı ömürdür*. Bu başlangıç x_0 seviyesinden yarıya düşmesi için geçen zamandır. Örneğin yarı ömrün 1 hafta olduğunu varsayın. Materyalin yaydığı başlangıç orijinal radyasyon oranını 1 hafta sonra yarıya iner, 2 hafta sonra dörtte birine düşer, 3 hafta sonra sekizde bire düşer bu böyle devam eder. Başlangıç seviyesinin binde birine (aslında 1/1024) düşmesi 10 haftayı bulur ve 20 haftada milyonda bire düşer.

Yarı ömrü hesaplamak için iki tarafın da logaritmasını alarak şu denklemi çözeriz:

$$x_0/2 = x_0 e^{-kt}$$

Sonuç $t = \log 2/k = 0,6931/k$ 'dir. k sabiti deneylerden elde edilmiştir.

Günümüzdeki nükleer reaktörlerde olan kazalarda en önemli radyoaktif ürünler iyot-131 ve sezyum-137'dir. İlk tiroit kanserine sebep olabilir, çünkü tiroit bezi iyot içermektedir. İyot-131'in yarı ömrü sadece 8 gündür, dolayısıyla eğer doğru ilaç (temelde iyot tabletleri) varsa o az bir hasar verir. Sezyum-137'nin yarı ömrü 30 yıldır, dolayısıyla başlangıç değerinin yüzde birine düşmesi 200 yıl alır. Eğer temizlenmezse uzun zaman boyunca bir tehlike olarak kalır.

e ile π Arasındaki İlişki (Euler'in Formülü)

1748'de Euler sıklıkla e ile π arasında bütün matematik boyunca en güzel formül olduğu söylenen kayda değer bir ilişkiyi keşfetti. O ayrıca i sanal sayısını da içermektedir. Formül

$$e^{i\pi} = -1 \text{ 'dir.}$$

Bu, karmaşık üssel ve trigonometri fonksiyonları kullanılarak şaşırtıcı ilişki kullanılarak açıklanabilir, kalkülüsten yöntemler kullanılarak en kolay şekilde şöyle kurulabilir:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Burada θ açısı tam bir daire olan 360° 'nin yarıçapı 1 olan bir daireni çevresi olan 2π 'ye eşit olduğu radyan ölçüsündedir. Radyan ileri matematikte standart bir ölçüdür, çünkü bütün formülleri basitleştirir. Euler'in formülünü elde etmek için $\theta = \pi$ olarak kabul edin. Sonrasında $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, dolayısıyla $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i.0 = -1$ 'dir.

Diferansiyel denklemler kullanarak alternatif bir ispat karmaşık düzlem geometrisine kadar gider ve o, π 'nin nasıl devreye girdiğini açıklama meziyetine sahiptir. Taslağı şudur. Euler'in denklemi işe yarar, çünkü karmaşık sayıları i ile çarpma karmaşık düzlemi dik açı derecesince döndürür.

Matematikçilerin esas olarak kalkülüs formüllerini basitleştirdiği için kuramsal araştırmalarda kullandıkları radyan ölçüsünde bir açı bir birimlik çemberde taradığı yayın uzunluğuna göre tanımlanır. Yarım çember π uzunluğuna sahip olduğu için dik açı $\pi/2$ ölçüsündedir. Diferansiyel denklemleri kullanarak herhangi bir x sayısı için karmaşık sayıyı e^{ix} ile çarpmak karmaşık düzlemi x radyan döndürür. Özellikle onu $e^{i\pi/2}$ ile çarpmak onu dik açı derecesince döndürür. Ancak bu i 'nin yaptığıdır. Dolayısıyla

$e^{i\pi/2} = i$ ve her iki tarafın karesini alırsak Euler'in formülünü elde ederiz.

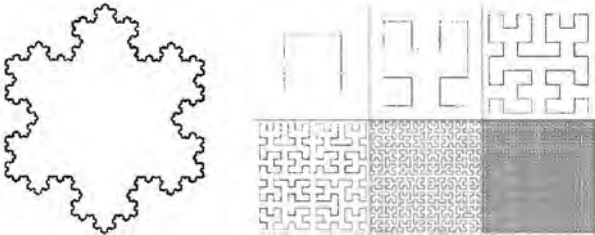
$$\log 3 / \log 2 \sim 1,584962$$

FRAKTALLAR

Bu ilginç sayı 466/885 gibi Sierpiński contasının temel bir özelliğidir. Ancak bu Sierpiński'nin ünlü hastalıklı eğrisinin ne kadar pürüzlü ve kıvrımlı olduğunu işaret eder. Böyle problemler doğadaki karmaşık şekilleri modellemenin yeni bir yolu olan fraktal geometrisinde ortaya çıkar. O, orada boyut kavramını genelleştirir. En ünlü fraktallardan biri olan Mandelbrot kümesi çok basit bir işlemle tanımlanmış sonsuz karmaşık bir şekildir.

Fraktallar

Sierpiński contası [466/885 bölümüne bkz.] daha çok 'hastalıklı eğriler' biçiminde olumsuz bir ad verilmiş olan ve yirminci yüzyılın başında ilk defa o zaman hayata geçirilen küçük hayvanat bahçesine benzer örneklerden biridir. Bunlar Helge von Koch'un kar tanesi eğrisini ve Guiseppe Peano ve David Hilbert'in boşluk doldurma eğrisini içerir.



Şekil 109: *Solda:* Kar tanesi eğrisi. *Sağda:* Hilbert'in boşluk doldurma eğrisinin oluşum aşamaları.

O zaman böyle eğriler yüksek zevk sahiplerine hitap ediyordu: iyi kötü akla yatan, ancak aslında yanlış olan matematiksel ifadelerle karşı örnekler. Kar tanesi eğrisi sürekli, ancak hiçbir yerde türevlenebilir değildir ki o her yerde kırılmalara değil ancak çentiklere sahiptir. O sonlu bir alanı kaplar, ancak sonsuz uzunluğa sahiptir. Boşluk doldurma eğrileri o kadar yoğun değildir; onlar boşluğu gerçekten doldurur. Oluşum aşamaları sonsuz sıklıkla tekrar edilince ortaya çıkan eğriler bütün bir karenin *her noktasından* geçer.

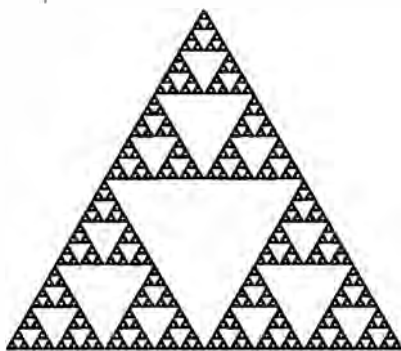
Bazı muhafazakâr matematikçiler böyle eğrilerin entelektüel açıdan kısır olduğuyla alay ettiler. Hilbert bunların matematiği hassaslaştırmaya yardım etmesindeki öneminin tanınması ve mantıksal temellerini aydınlatmak için dönemin az sayıda önde gelen isimlerinden biriydi; ayrıca o, bunların tuhaf özelliklerini ciddiye alarak coşkulu desteğini ortaya koydu.

Günümüzde biz bu eğrileri daha pozitif bir ışık altında görüyoruz; onlar matematiğin yeni bir çağına doğru erken adımlardı: Mandelbrot tarafından 1970'lerde öncülük edilen *fraktal geometrisi*. Hastalıklı eğriler saf matematiksel nedenlerle icat edilmişti, ancak Mandelbrot benzer şekillerin doğal dünyadaki düzensizlikleri aydınatabileceklerini fark etti. O, Öklit geometrisindeki üçgenlerin, karelerin, dairelerin, konilerin, çemberlerin ve diğer geleneksel Öklitçi şekillerin düzgün yapılar olmadığına işaret etti. Eğer bir çemberi büyütürseniz o özelliksiz düz bir çizgi gibi gözükür. Bununla birlikte, doğanın birçok şekli çok düzgün yüzeyler üzerinde çapraşık yapıya sahiptir. Mandelbrot 'Bulutlar yuvarlak değildir, dağlar koni değildir, kıyı şeridi çember değildir ve ne ağaç kabuğu düzdür ne de ışık düz bir doğru üzerinde hareket eder' yazmıştı. Bunu elbette herkes biliyordu, ancak Mandelbrot onun önemini anlamıştı.

O, Öklitçi geometrik şekillerin faydasız olduğunu iddia etmiyordu. Onlar bilimde mühim rol oynarlar. Örneğin, gezegenler yaklaşık olarak daireseldir ve ilk astronomlar bunun yararlı bir yakınsama olduğunu buldular. Eğer daire yumurtamsı bir şekle basıklaştırılırsa yine Öklitçi basit şekil olan daha iyi

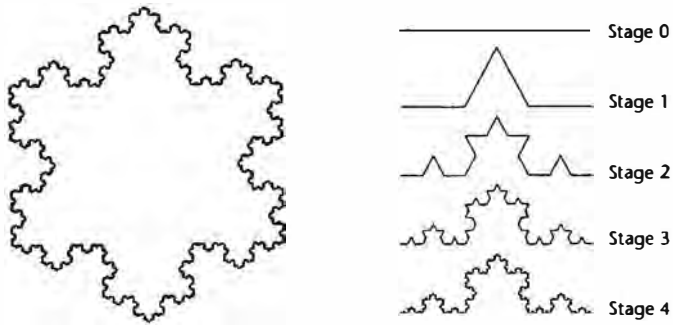
bir yakınsama ortaya çıkar. Ancak bazı amaçlar için basit şekiller çok da yardımcı değildir. Ağaçlar daha küçük dallara sahiptir, bulutlar hayal meyal damlalardır, dağlar sivri uçludur ve kıyı şeritleri kıvrımlıdır. Bu şekilleri matematiksel olarak anlamak ve onlar hakkında bilimsel problemleri çözmek yeni bir yaklaşım gerektirir.

Kıyı şeridi hakkında düşünürken Mandelbrot ölçeği ne olursa olsun onların harita üzerinde çok benzer gözüktüğünü fark etti. Büyük ölçekli bir harita fazladan girintiyle ve çıkıntıyla daha fazla ayrıntı gösterir, ancak sonuç daha küçük ölçekli bir haritadaki kıyı şeridine daha çok benzer. Kıyı şeridinin tam şekli değişir, ancak 'dokusu' çokça aynı kalır. Aslında görece olarak belli ölçüde olan körfezin hangi oranda olacağı gibi bir kıyı şeridinin en istatistiksel özellikleri hangi ölçekte harita kullanırsanız kullanın aynıdır. Mandelbrot ne kadar büyütürseniz büyütün karmaşık yapıya sahip herhangi bir şekli tanımlamak için 'fraktal' sözcüğünü ortaya attı. Eğer küçük ölçeklerdeki yapı büyük ölçeklerdekiyle aynıysa fraktala 'özbenzeş' denilir. Sadece istatistiksel özellikler bu şekilde ölçeklendirilirse onlar *istatistiksel özbenzeştirler*. Anlaması en kolay fraktallar özbenzeş olanlardır. Sierpiński contası [466/885 bölümüne bkz.] buna bir örnektir. O her birisi kendisinin yarı ölçeğinde olan üç kopyadan oluşturulmuştur.

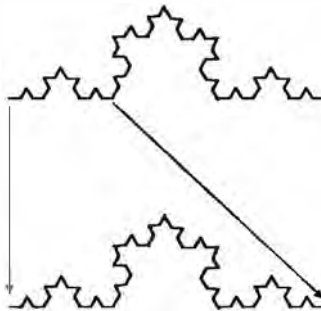


Şekil 110: Sierpiński contası.

Kar tanesi eğrisi bir diğer örnektir. O, Şekil 111'deki sağ taraftaki resimde gösterilmiş eğrinin üç kopyasından oluşturulabilir. Bu eleman (ancak kar tanesinin hepsi değil) *tamamıyla* özbenzeştir. İnşada art arda gelen basamaklar bir önceki basamaktaki her biri üçte bir büyüklükte olan dört kopyayla tam olarak oturur. Sonsuz limitte her birisi üçte bir büyüklükte olan kendisinin dört kopyasından inşa edilmiş sonsuz karmaşık bir eğri elde ederiz.



Şekil 111: Kar tanesi eğrisi ve inşadaki ardışık basamaklar.



Şekil 112: Ölçüsü üç katı alınmış eğrinin her bir çeyreği başlangıçtaki eğri gibi gözükür.

Bu şekil gerçek kıyı şeridini temsil etmek için çok düzenlidir, ancak bunun kıvrımları dik açıdır ve düzensiz eğriler de

benzer bir yolla elde edilebilir ama gelişigüzel biçimlerde; ki böylece orijinal kıyı şeritlerine benzer.

Fraktallar doğal dünyada yaygındır. Daha açık konuşmak gerekirse, fraktallar tarafından faydalı biçimde modellenenebilir şekiller bolcadır. Gerçek dünyada matematiksel nesneler yoktur, onların hepsi kavramdırlar. Romanesk brokoli denen bir çeşit karnabahar her biri karnabaharla aynı forma sahip çiçekçiklerden oluşmuştur. Fraktalların uygulama alanları minerallerin düz yapısından evrende maddenin dağılımına kadar bir yayılım gösterir. Fraktallar cep telefonları için antenler olarak, geniş miktarda bilgileri CD ve DVD üzerine sıkıştırmak ve kanser hücrelerini algılamak için kullanıldı. Yeni uygulamalar düzenli olarak ortaya çıkmaktadır.

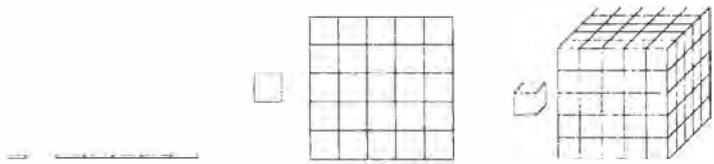


Şekil 113: Romanesk brokoli.

Fraktal Boyutları

Bir fraktalın ne kadar çentikli olduğu veya düzlemi ne kadar etkili doldurabildiği *fraktal boyutu* olarak adlandırılan bir sayıyla gösterilebilir. Bunu anlayabilmek için fraktal olmayan bazı daha basit şekiller hakkında düşünmeliyiz.

Eğer bir çizgiyi beş eşit parçaya ayırırsak çizgiyi tekrar elde etmek için onların beşine ihtiyaç duyarız. Aynısını bir kareyle de yaparsak 5^2 yani 25 parçaya ihtiyacımız olur. Küplerle çalışırsak 5^3 olan 125 adede ihtiyacımız olur.



Şekil 114: 1, 2 ve 3 boyutta 'küplerde' ölçeklendirme.

Ortaya çıkan 5'in kuvvetleri şeklin boyutlarına eşittir: birinci dereceden için 1, karesi için 2 ve küp için 3'tür. Eğer boyut sayısı d ise $1/n$ ölçüsünde k parçayı başlangıçtaki şekli elde etmek için birleştirmeliyiz sonrasında $k = n^d$ 'dir. Her iki tarafın logaritmasını alırsak [e bölümüne bkz.] d 'yi bulmak için $\log k$ formülü ortaya çıkar

$$d = \log k / \log n$$

Bu formülü Sierpiński contası üzerinde uygulayalım. Contayı küçük kopyalardan oluşturmak için her biri $1/2$ ölçüsünde olan $k = 3$ parçaya ihtiyaç duyarız. Dolayısıyla $n = 2$ 'dir ve formül yaklaşık olarak değeri 1,5849 olan $d = \log 3 / \log 2$ ifadesini verir. Buradan yola çıkarak Sierpiński contasının bu özel manada boyutu tamsayı *değildir*.

Boyut hakkında geleneksel olarak düşündüğümüzde bağımsız yönlerde olan boyutların sayısı tamsayı olmalıdır. Ancak iş fraktallara gelince biz onların kaç adet bağımsız yönde yönlendikleriyle değil ne kadar düzensiz, karmaşık olduklarıyla veya etraflarındaki alanı ne kadar iyi doldurduklarıyla ilgileniriz. Conta gözle görülür biçimde bir çizgiden daha yoğundur ancak katı bir cisimden daha az yoğundur. Dolayısıyla istediğimiz miktar 1 (bir çizginin boyutu) ile 2 (bir karenin boyutu) arasında bir yerde olmalıdır. Özellikle tamsayı olamaz. Bir kar tanesinin fraktal boyutunu aynı yolla buluruz. Önceki gibi kar tanesi eğrisinin üçte biriyle, üç eş 'köşesinden' birisiyle çalışmak daha kolaydır, çünkü bu özbenzeştir. Kar tanesi eğrisinin bir köşesini o köşeyi daha küçük kopyalardan bir araya getirmek için her biri $1/3$ ölçüsünde $k = 4$ parçaya ihtiyacımız

vardır, dolayısıyla $n = 3$ olur. Formüle göre aşağı yukarı 1,2618 olan $d = \log 4 / \log 3$ elde edilir. Bir kez daha fraktal boyutu bir tamsayı değildir ve bu akla yatkındır. Kar tanesi açık bir şekilde düz bir çizgiden daha kıvrımlıdır, ancak alanı bir katı cisimden daha az tam doldurur. Yine olmasını istediğimiz miktar 1 ile 2 arasında bir yerdedir ve 1,2618 değeri oldukça mantıklıdır. Boyutu 1,2618 olan eğri 1 boyutlu düz bir çizgi gibi bir eğriden daha kıvrımlıdır; ancak bu, conta gibi 1,5849 boyutlu bir eğriden daha az kıvrımlıdır. Gerçek kıyı şeritlerinin fraktal boyutları contadansa kar tanesi eğrisine benzer şekilde 1,25'e yakındır. Dolayısıyla bu fraktalların hangisinin alanı daha iyi dolduracağı hakkındaki önsezimizi boyutlar doğrulamaktadır.

Bu, ayrıca fraktallar üzerine dayalı kuramları nicel olarak test etmek için deneyselcilere bir yol sunmaktadır. Örneğin, duman 1,8 civarlarında fraktal boyutuna sahiptir, dolayısıyla oldukça çok sayıda olan duman tortularının fraktal modelleri bu sayıyı verip vermedikleri test edilebilir.

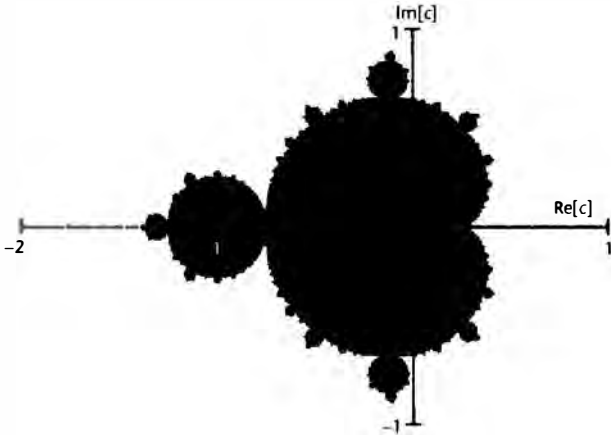
Bir fraktal özbenzeş olmadığı zaman onun fraktal boyutlarını tanımlamanın birçok yolu vardır. Matematikçiler tanımlaması oldukça zor olan *Hausdorff-Besicovith boyutunu* kullanırlar. Fizikçiler sıklıkla *kutu boyutu* denen daha basit bir tanım kullanırlar. Her zaman olmamakla beraber birçok durumda bu iki boyut kavramı aynıdır. Bu durumda *fraktal boyutu* terimini o ikisinden birini ifade etmesi için kullanırız. İlk fraktallar eğriydi; ancak onlar yüzey, katı cisim ya da daha çok boyutlu şekiller de olabilir. Şu halde fraktal boyutu fraktalların ne kadar pürüzlü olduğunu veya boşluğu ne kadar etkili doldurduğunu ölçer.

Bu iki fraktal boyunun ikisi de irrasyoneldir. Varsayalım ki p ve q tamsayılarıyla $\log 3 / \log 2 = p/q$ olsun. O halde $q \log 3 = p \log 2$ olur, dolayısıyla $\log 3^q = \log 2^p$ olur buradan da $3^q = 2^p$. Ancak bu emsalsiz asal çarpanlarına ayırma ile çelişir. Benzer bir argüman $\log 4 / \log 3$ için de geçerlidir. Bunun gibi temel olguların beklenmedik pek çok yerde ortaya çıkması dikkate değer, öyle değil mi?

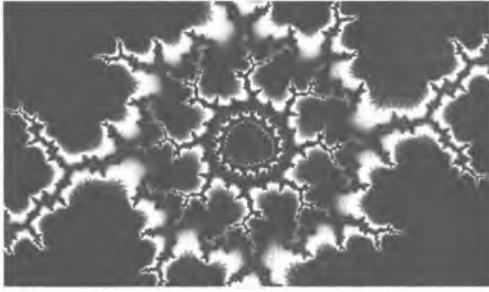
Mandelbrot Kümesi

Bütün fraktalların belki de en ünlüsü Mandelbrot kümesidir. Karmaşık bir sayının devamlı karesini alarak ona sabit bir sayıyı eklersek ne olacağını gösterir. Şöyle ki c diye sabit bir karmaşık sayı seçin, sonrasında $c^2 + c$, daha sonra $(c^2 + c) + c$ sonra $((c^2 + c) + c) + c$ diye hesaplayın (kümeyi tanımlamak için diğer yollar da vardır, ancak en basiti budur). Karmaşık sayılar gerçel sayılar için olan sayı doğrusunu genişleterek geometrik olarak düzlemde bulunur. İki ana ihtimal vardır: ya yukarıdaki dizideki karmaşık sayıların hepsi karmaşık düzlemde belli sonlu bölgelerde bulunacaktır ya da bulunmayacaktır. Bu c 'leri belli sonlu bölgede içerisinde kalmaları için siyaha ve sonsuza gidenleri de beyaza boyayın. İşte bütün siyah noktalar kümesi Mandelbrot kümesidir. O, şu şekilde gözükür:

Mandelbrot kümesinin sınırı olan ve olabildiğince birbirine yakın olmasını istediğimiz şekildeki köşedeki hem siyah hem de beyaz noktalar fraktaldır. Fraktal boyutunun 2 olduğu ortaya çıkar, dolayısıyla o, 'neredeyse boşluğu doldururdu'.



Şekil 115: Mandelbrot kümesi.



Şekil 116: Yavru bir Mandelbrot kümesi.

Daha ince detayları görmek için beyaz noktaları dizinin sonsuza eğilimi ne kadar hızlı olduğuna göre renklendirebiliriz. O halde biz süslü kıvrımlarla, spirallerle ve diğer şekillerle dolu oldukça çapraşık bir tasarım elde ederiz. Resmi büyüterek yakınlaştırmak sadece detay seviyesini artırır. Eğer doğru yere bakarsanız bire bir aynı yavru Mandelbrot kümeleri bulabilirsiniz.

Böylesi Mandelbrot kümesi önemli uygulamalara sahip değilmiş gibi gözükür, ancak o karmaşık sayılara dayalı doğrusal olmayan dinamik sistemlerin en basitlerinden biridir; dolayısıyla daha geniş alana uygulanabilecek genel kurallar arayan birçok matematikçinin dikkatini çekmiştir. O ayrıca 'felsefi' anahtar bir noktayı işaret eder: basit kurallar karmaşık sonuçlara yol açabilir; şöyle ki basit nedenler karmaşık etkilere sahip olabilir. Çok karmaşık bir sistemi anlamaya çalışırken altı çizili kuralların eşit oranda karmaşık olmasını beklemek çok çekicidir. Mandelbrot kümesi bu beklentinin yanlış olabileceğini ispat eder. Bu içgörü gözle görülür karmaşık sistemlerle uzlaşmak için yeni bir alan olan bütün bir 'karmaşıklık bilimini' onları güden daha basit kuralları bularak aydınlatır.

$$\pi/\sqrt{18} \sim 0,740480$$

KÜRELERİ İSTİFLEME

$\pi/\sqrt{18}$ sayısı matematikte, fizikte ve kimyada temel bir öneme sahiptir. Özdeş küreleri en etkili şekilde yani mümkün merteye doldurulmamış boşluk bırakmayarak istiflediğimizdeki uzay kesridir. Kepler bu sonucu 1611'de ortaya attı, ancak 1998'de Thomas Hales bilgisayar yardımıyla ispatını yapana kadar ispatlanmamış halde kalmıştı. Bir insanoğlunun doğrudan kontrol edebileceği bir ispat henüz bulunmamıştır.

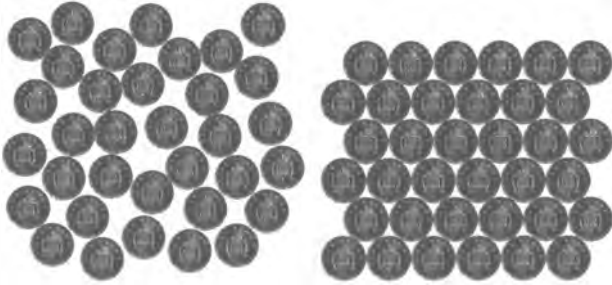
Daireleri İstifleme

Özdeş daireleri düzlemde istifleme sorusuyla işe başlayalım. Aynı ölçüde birkaç düzine madeni parayla deney yaparsanız ve onları olabilecek en fazla şekilde sıkıştırırsanız kısa sürede rastgele düzenlemeyle birçok boş alan bırakıldığını fark edersiniz. Eğer boş alanlardan kurtulmak için paraları daha sıkı olacak şekilde sıkıştırırsanız onları en etkili şekilde bitiştirecek modelin bal peteği düzeni olduğu görülür.

Bununla birlikte onları daha sıkı bitiştiren diğer bazı zekice düzenlemeler en azından akla uygun gelebilir. Öyle gözükmemektedir, ancak bu bir ispat değildir. Özdeş madeni paraları düzenlemek için sonsuzca yol vardır, dolayısıyla hiçbir deney onların hepsini deneyemez.

Bal peteği düzeni gelişigüzel düzenlemelerin aksine çok düzenli ve simetriktir. Bu, ayrıca *sabittir*: madeni paraların hiçbirini hareket ettiremezsiniz, çünkü diğerleri onları sabit bir konumda sıkıştırır. İlk bakışta sabit bir düzenleme boşluğu en etkili biçimde doldurmalıdır, çünkü bir seferde paraları

yer değiştirerek daha etkili bir düzenlemenin yolu yoktur.

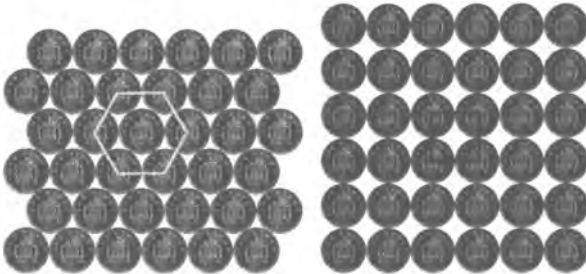


Şekil 117: *Solda:* Birçok boş alan bırakan gelişigüzel bir düzenleme. *Sağda:* Bir bal peteği düzeni boşlukların birçoğunu bertaraf eder.

Bununla birlikte, daha az etkili olan diğer sabit düzenlemeler de vardır. Muntazam bir düzenlemeyle daireleri istifleyen iki açık yolla işe başlayalım:

Bal peteği ya da altıgen örgü, böyle adlandırılmıştır çünkü dairelerin merkezleri altıgenler oluşturur.

Satranç tahtası üzerindeki kareler gibi düzenlenmiş daireler; yani kare örgü.



Şekil 118: *Solda:* Altı adet merkez düzgün bir altıgen oluşturur. *Sağda:* Kare örgüsü istiflemesi.

Kare örgüsü de sabittir, ancak o daireleri daha az etkili istifler. Eğer çok büyük ölçülerde istifleme yaparsanız altıgen örgü ilgili boşluğu daha büyük miktarda dolduracaktır.

Bunların hepsini daha da kesinleştirmek için matematikçiler daire istifleme sinin *yoğunluğunu* ilgili alan limitte sonsuz büyüklüğe giderken dairelerle kaplı alanın oranı olarak tanımladılar. Kafalarındaki kayıt dışı olarak bütün düzlemi dairelerle kaplamak ve kaplı alanın oranının ne olduğu hakkında çalışmaktı. Tamı tamına alınırsa bu oran hiçbir anlamı olmayan ∞/∞ 'dur, dolayısıyla giderek daha büyük kareler kaplarız ve limitini alırız.

Kare istifleme sinin yoğunluğunu hesaplayalım. Eğer her bir kare birim alana sahipse dairelerin yarıçapı $1/3$ böylece onların alanı $\pi (1/2)^2 = \pi/4$ 'tür. Çokça daire ve kare için kaplı alan oranı değişmez. Dolayısıyla limitte yaklaşık olarak $0,785$ olan $\pi/4$ yoğunluğunu elde ederiz.

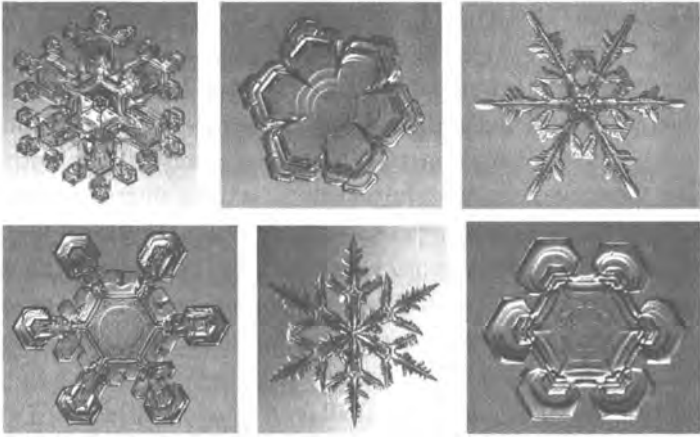
Altıgen örgü için olan daha karmaşık bir hesaplama yaklaşık olarak $0,906$ olan $\pi/12$ yoğunluğunu verir. Bu kare örgünün yoğunluğundan *daha fazladır*.

Lagrange 1773'te altıgen örgünün bir düzlemde en yoğun *örgüyü* verdiğini ispatladı. Ancak, bu daha az düzenli bir istifleme nin daha iyi iş çıkarabileceği ihtimalini açık bıraktı. Bu mümkün gözükmeyen ihtimali ortadan kaldırmak matematikçilerin 150'den fazla yılını aldı. Alex Thue 1892'de düzlemde hiçbir istifleme nin altıgendenden daha yoğun olamayacağı hakkında taslak içeren bir ders verdi, ancak yayımlanmış ayrıntılar ispatın ne olduğu üzerinde çalışmak ve birisinin onun doğru olduğuna karar vermesi için çok fazla anlaşılmazdı. O, 1910'da yeni bir ispat buldu, ancak bu ispat hâlâ bazı mantıksal boşluklar içeriyordu. İlk tam tekmil ispat Laszlo Fejes Tóth tarafından 1940'ta yayımlandı. Az zaman sonra Beniamino Segre ve Kurt Mahler alternatif ispatlar buldular. Hai-Chau Chang ve Lih-Chung Wang daha basit bir ispatı 2010'da internete koydular.

Kepler Kestirimi

Kepler kestirimi özdeş küreleri uzayda istifleme k için benzer bir problem hakkındadır. On yedinci yüzyılın başında muhte-

şem matematikçi ve gökbilimci Kepler bu kestirimi kar taneleri hakkındaki bir kitapta ortaya attı.



Şekil 119: Bu resimler Alaska Vermont Yukarı Michigan yarımadası Kuzey Ontario'da ve California'daki Sierre Nevada dağlarında yer-yüzüne düşen gerçek kar kristallerini göstermektedir. Onlar Kenneth G. Libbrecht tarafından özel olarak tasarlanmış kar tanesi fotomikroskopuyla çekilmiştir.

Kepler kar taneleriyle ilgilenmekteydi, çünkü onlar sıklıkla altılı simetriye sahipti: aynı şekli 60° eşit aralıklarla neredeyse altı kez tekrar ederek. O bunun neden olduğunu merak etti ve doğadaki benzer dizilimlere bizim şu anda bildiğimize takdire şayan derecede yakın bir açıklama getirmek için mantığını, hayal gücünü ve bilgisini kullandı.

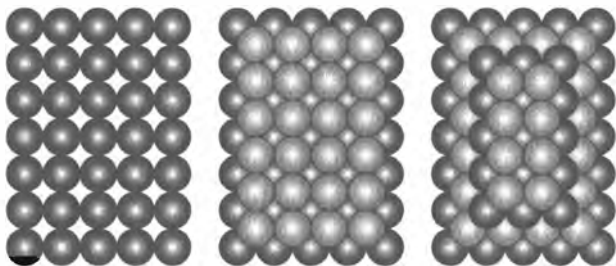
Kepler, Kutsal Roma İmparatoru II. Rudolf'un sarayında matematikçiydi ayrıca onun çalışması zengin bir diplomat ve imparatorun danışmanlarından biri olan Wackenfelsgillerin John Wacker'i tarafından desteklenmekteydi. Kepler 1611'de hamisine bir yılbaşı hediyesi verdi: özel olarak yazılmış bir kitap *De Nive Sexangula* [*Altı Köşeli Kar Tanesi Üzerine*]. O kar tanelerinin neden altı kenarlı olduğunu sorarak işe başladı. O cevabı elde etmek için bir narın içindeki nar taneleri ve arı kovanındaki bal petekleri gibi altılı simetriye sahip diğer doğal

şekilleri inceledi. Biz az önce düzlemde daireleri istiflemenin doğal olarak bizi bal peteği düzenlemesine götürdüğünü görmüştük. Kepler küreleri uzayda istifleme konusunda kar tanesi simetrisi formunu açıkladı.

O, şaşırtıcı bir şekilde modern açıklamaya yakın bir noktaya gelmişti: kar tanesi atomik yapısı bal peteğine çok benzeyen ideal bir kristaldir. Özellikle, o altılı simetriye sahiptir (aslında ondan birazcık daha simetrik). Her birisi aynı şekilde simetrik olan kar tanesi şekillerinin çeşitliliği onların olduğu fırtına bulutlarının içindeki değişen şartlardan kaynaklanmaktadır.

Bu esnada çözülmesi 387 yıl alacak ve sıradan bir yorumdan fazlası olan matematiksel bir yapboz ortaya attı. Uzayda özdeş küreleri istiflemek için en etkili yol nedir? O, şu anda yüzey merkezli küp örgü dediğimizin cevap olması gerektiğini öne sürdü.

Bu aynı manavların portakalları üst üste istifledikleri gibidir. Öncelikle kare örgü oluşturacak şekilde bir zemin yapın (Şekil 120, solda). Sonra, benzer bir katmanı her bir küre altındaki dört kürenin kesişiminin üstüne gelecek şekilde onun üstüne yapın (ortada). Bütün boşluğu doldurana kadar bu şekilde (sağda) devam edin. Bu, bütün düzlemi doldurmak için her bir katmanı yanlamasına genişletmeyi ve katmanları en üstteki ilk katmanın altına kadar yerleştirmeyi gerektirir. Bu istiflemenin yoğunluğu $\pi/\sqrt{18} - 0,740480$ olarak hesaplanabilir. Kepler'e göre bu düzenleme mümkün olan en büyük yoğunluğa sahip 'en sıkı istifleme' olmalıdır.



Şekil 120: Yüzey merkezli küp örgü. *Solda*: İlk katman. *Ortada*: İlk iki katman. *Sağda*: İlk dört katman.

Manavlar bir kutuyla veya masanın üstüyle başlarlar ve yukarıya doğru katman katman ilerlerler ve bu, yüzey merkezli küp örgüyü tanımlamanın bir yoludur. Ancak Kepler'in sorusu bütün mümkün istiflemeler hakkındadır, dolayısıyla her şeyin düz katmanlı olacağını varsayamayız. Manav yöntemi aslında farklı bir soruyu çözer. Soru, bunun cevabı değiştirip değiştiremeyeceğidir.

İlk bakışta manav istiflemesi *yanlış* cevap gibi gözükür, çünkü o kare örgü katmanlar kullanır ve altıgen örgü daha yoğundur. Manavlar en sıkı istiflemeyi amaçladıklarından değil portakalları dikdörtgen kutulara yerleştirdiklerinden dolayı kare örgüyü kullanırlar. Dolayısıyla biz ilk katmanı altıgen alırsak daha iyi yapmış olmaz mıyız? Art arda gelen katmanlar alt katmandaki boşluklara her katman aynı altıgen örgü dizilimi olacak şekilde oturacaktır.

Kepler bunun bir fark oluşturmadığını fark etti. Sağ taraftaki şeklin eğimli kenarı altıgen örgü oluşturur. Bu katmana paralel olan katmanlar da komşu katmanlardaki çıkıntılara yerleşecek şekilde altıgen olur. Dolayısıyla altıgen katmanları kullanan alternatif düzenlemeler sadece eğimli yüzey merkezli küp örgü oluşturur.

Bununla birlikte bu bize kayda değer bir şey söyler: sonsuz sayıda farklı istiflemelerin neredeyse hiçbiri yüzey merkezli küp örgünün yoğunluğuna sahip örgü değildir. Bir altıgen katmanı bir sonraki katmanla birleştirmek için iki farklı yol vardır ve biz her sıradaki katman için bu yollardan birini seçebiliriz. İki katmanlı bir düzenleme diğerinin dönel halidir, ancak üç ve sonrasındaki katmanlar için durum böyle değildir. Dolayısıyla 3 katman için 2 farklı, 4 için 4, 5 için 8 diye devam eden orijinal düzenleme vardır. Yerleşen her bir katman için olasılıklar sonsuzdur. Bununla birlikte, her bir katman aynı yoğunluğa sahiptir ve katmanlar bu iki çıkıntı seçeneğine eşit uzaklıkta istiflenir. Dolayısıyla seçeneklerin her serisi için yoğunluk $\pi/\sqrt{18}$ 'dir. Aynı yoğunlukla sonsuz sayıda istiflemenin varlığı Kepler sorusunun gizli şeytanlıklara sahip olduğuna dair bir uyarıydı.

Kepler'in kestirimi Thomas Hales ve öğrencisi Samuel Ferguson bilgisayar destekli bir ispat yaptığı 1998'e kadar ispatlanmamış kaldı. Hales ispatı prestijli *Annals of Mathematics* isimli dergiye 1999'da sundu. Dört yıl boyunca uzmanlardan oluşan bir panel tam doğruluğunu onaylamak için toplandı, ancak hesaplamalar o kadar karmaşık ve devasaydı ki ispatın tam doğruluğunu onaylamanın mümkün olmadığını düşündüler. Sonunda ispat onun zorluğunu işaret eden bir notla birlikte yayımlandı.

İşe bakın ki bu soru ispatının doğrulanabilir olduğu bir biçimde geriye doğru muhtemelen yeniden ... bilgisayar tarafından yazılabilir. Mesele, doğrulama programının Hales'in ispatından daha basit olacağıdır, dolayısıyla yazılımın mantığının doğruluğunu elle kontrol etmek mümkün olacaktır. Sonra Kepler kestiriminin çok daha karmaşık ispatının doğrulanması olan kutunun üzerinde söyleneni yaptığına dair güvene sahip olabiliriz.

Buraya dikkat.

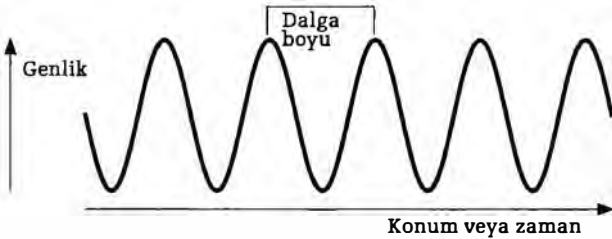
$$\sqrt[12]{2} \sim 1,059463$$

MÜZİKTE GAMLAR

Tampereman müzik sisteminde ardışık notaların frekanslarının oranı 2'nin 12. dereceden köküdür. Bu, π 'yi 22/7'ye yakınsamada olduğu gibi bir uzlaşımdır; ancak bu sefer doğal müzik aralıkları basit rasyonel sayılardır ve $\sqrt[12]{2}$ 'nin kuvvetleri bunlara irrasyonel yakınsamalar sağlar. Bu, insan kulağının sesi algılama biçiminden ortaya çıkar.

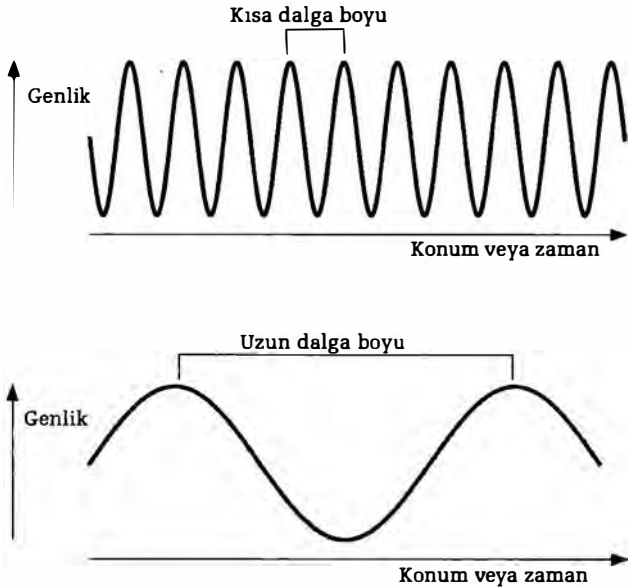
Ses Dalgaları

Fiziksel olarak bir müzik notası çalgı aletinden çıkan ve kulak tarafından algılanan bir ses dalgasıdır. Dalga katı, sıvı veya gazda onların şeklini değiştirmeden hareket eden veya aynı hareketi devamlı ve düzenli bir biçimde tekrar eden değişikliklerdir. Dalgalar gerçek dünyada bolca bulunur: ışık, ses, su dalgaları ve titreşimler ona örnekler. Dalgalar dünyada depremlere neden olur.



Şekil 121: Sinüs eğrisi

Dalga için en temel ve basit şekil sinüs eğrisidir. Eğrinin yüksekliği yani dalganın *genliği* düzensizliğin ne kadar büyük olduğunu belirleyen bir ölçüdür. Ses dalgaları içi bu notanın ne kadar yüksek sesli olduğunu gösterir: daha büyük genlik kulağı daha çok rahatsız edecek şekilde havayı daha çok titreştirir ve biz bunu seste yükseklik artışı olarak algılarız.

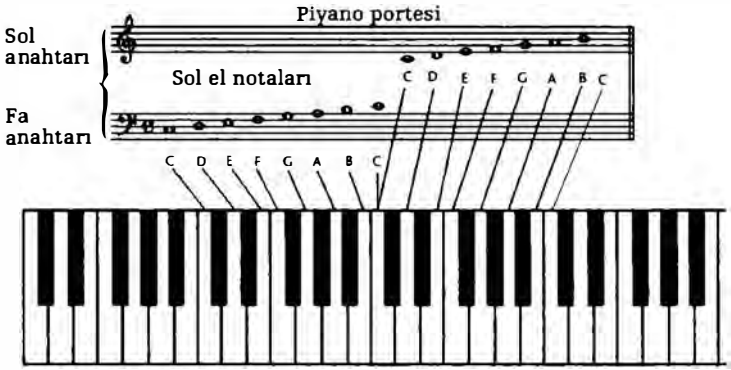


Şekil 122: Dalga boyu

Sinüs eğrisinin bir diğer önemli özelliği onun *dalga boyudur*: ardışık dalga tepeleri arasındaki uzaklık (veya geçen zaman). Dalga boyu dalganın şeklini belirler. Ses dalgalarında dalga boyu sesin perdesini belirler. Kısa dalga boyları sesi daha yükseltirken uzun dalga boyları sesi alçaltır.

Dalganın aynı özelliğini ölçmenin *frekans* denen ve dalga boyuyla ters orantılı olan bir diğer yolu daha vardır. O, verili bir zaman veya konumda kaç adet dalga tepesi olduğudur. Frekanslar hertz (Hz) adında bir birimle ölçülür: bir hertz saniye başına düşen titreşim miktarıdır. Örneğin, piyanoda do sesi

261,62556 hertz frekansına yani saniyede 261 titreşimden birazcık fazla olan titreşime sahiptir.

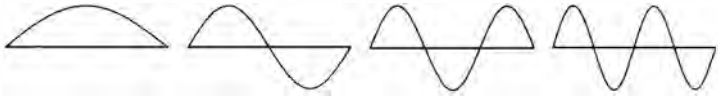


Şekil 123: Temel müzik nota gösterimi.

Bir oktav yüksek do notası 523,25113 hertz frekansına sahiptir: tam olarak iki katı büyüklüktedir. Bir oktav düşük do notası 130,81278 hertz frekansa sahiptir: tam olarak yarı büyüklüktedir. Bu ilişkiler dalgaların matematiğinin müzikle nasıl bağlantılı olduğunun temel örnekleridir. Konuyu daha ileriye götürmek için gitar veya keman gibi telli bir çalgı aletini ve şimdilik sadece bir telini düşünün.

Bizim çalgıya yandan klavyenin tam karşısından baktığımızı varsayın. Müzisyen teli çektiğinde tel çalgı aletine göre bir yönden diğerine; bize göreyse aşağı yukarı titreşir. Bu telin bir ucu sabitken telin şeklinin periyodik döngü olarak değiştiği kararlı dalgaya yol açar.

En basit titreşim tel sinüs dalgasının yarısını oluşturduğundadır. Bir sonraki en basit titreşimse tam bir sinüs dalgasıdır. Ondan sonraysa 1 sonrasındaysa 2 sinüs dalgası gelir ve bu böyle devam eder. Yarım dalgalar oluşur çünkü tam bir sinüs dalgası yatay bir adediyle ortada ve her bir uçta karşılaşır.



Şekil 124: Soldan sağa doğru: Yarım sinüs dalgası. Tam sinüs dalgası. Bir tam ve bir yarım sinüs dalgası. İki tam sinüs dalgası.

Burada dalga boyları $1/2$, 1 , $3/2$, 2 şeklinde devam eder. Yarım dalgalar mevcuttur, çünkü biz yarım dalgaları kullanırız. Eğer biz telin yarısı gibi birimlerde çalışırsak o halde dalga boyları daha basitçe 1 , 2 , 3 , 4 olur.

Aynı gerginlikte tutulan aynı tel için ilgili frekanslar 1 , $1/2$, $1/3$, $1/4$ 'tür. Örneğin, eğer yarım dalga titreşimi do notasına yakın 261 hertz frekansına sahipse frekanslar şöyle olacaktır:

$$261 \text{ Hz}$$

$$261/2 = 130,5 \text{ Hz}$$

$$261/3 = 87 \text{ Hz}$$

$$261/4 = 62,25 \text{ Hz}$$

Temel tek yarım dalga esas ve diğerleri de ardışık harmonikler olarak adlandırılır.

Yaklaşık 2500 yıl önce Pisagorcular evrendeki her şeyin matematiksel şekiller ve sayısal örüntülerle oluştuğuna inanıyorlardı. Onlar müzikal harmoni ve sayılar arasında kayda değer bir ilişki keşfettiler. Bir efsaneye göre Pisagor bir demircinin dükkânının önünden geçerken farklı büyüklüklerdeki çekiçlerin farklı perdelerde sesler ürettiğini fark etmişti ve basit sayılarla ilişkili olan örneğin her biri bir diğerinin iki katı olan o çekiçler harmonik sesler çıkarıyordu. Bununla birlikte, eğer bunu gerçek çekiçlerle denerseniz onların harmonik sesler çıkarmak için çok karmaşık biçimli olduğunu fark edeceksinizdir. Ancak şu doğrudur ki küçük nesneler büyük olanlara göre daha yüksek perdeli sesler oluştururlar.

Ptolemaios MS 150 dolaylarında kitabı *Harmonics* [Harmonikler] içinde gerili bir telin kullanıldığı daha akla yatan bir Pisagorcu deneyden bahseder. Pisagorcular aynı gerginlikte, aralarında $2/1$ veya $3/2$ gibi basit oran bulunan iki telin

beklenmedik biçimde harmonik notalar ürettiğini keşfettiler. Daha karmaşık oranlar ahenksizdir ve kulağa hoş gelmez.

Nota Aralıkları

Müzisyenler nota çiftlerini onların bazı müzikal ölçülerde kaç adımla ayrıldıklarını aralarındaki aralıklarla tanımlarlar. En temel aralık oktavdır: piyanoda yedi beyaz tuş yukarıya hareket edin. Farklı oktavdaki aynı notalar biri diğerinden bir oktav yüksek olması dışında dikkat çekecek biçimde benzer tınılar. Gıtarıda veya kemanda boş telin bir oktav üzerindeki notayı çalmanın yolu klavyede o telin ortasına basmaktır. Her zaman bir oktav yukarıyı çalmak için telin yarısı basılır. Dola-yısıyla oktav basit sayısal bir oran olan 2/1 ile ilişkilidir.

Diğer harmonik aralıklar basit sayısal oranlarla ilişkilidir. Batı müziği için en önemlisi dördüncü 4/3 ve beşinci 3/2'dir. (Do, re, mi, fa, sol, la, si, do bütün notaları eğer dikkate alırsanız isimler anlamlı hale gelir. Do kök ses olarak alınırsa dördüncü nota fa beşinci nota sol ve sekizinci de dodur. Ardışık notaları kök notaya 1 diyerek numaralandırırsak onlar gam boyunca sırasıyla 4., 5. ve 8. olurlar.)

Geometri perde denen belli konumlarda gömülü bölünmüş tel aralıkları olan gitar gibi çalgı aletleri için özellikle berraktır. Dördüncü nota için olan perde bütün bir telin dörtte biridir ve beşinci nota için de bütün telin üçte biridir ve oktav için de yarısıdır. Bunu mezurayla kontrol edebilirsiniz.

Gamlar

Bu oranlar müzikal gamlar için kuramsal temel oluşturur ve günümüzde çoğu Batı müziğinde kullanılan gama yol açar. Birçok farklı müzikal gam vardır ve biz sadece en basitini betimliyoruz. Bir kök notayla başlayın ve tellerin uzunluklarını elde etmek için beşinci notaya kadar çıkın

$$1 \quad \frac{3}{2} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 \quad \left(\frac{3}{2}\right)^4 \quad \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

Çarpılınca bu kesirler şu hale gelir

$$1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{9}{4} \quad \frac{27}{8} \quad \frac{81}{16} \quad \frac{243}{32}$$

İlk ikisi hariç bu notaların hepsi bir oktav içinde kalmak için çok tizdir, ancak kesirleri 2'ye bölerek sonuç 1 ile 2 arasında kalana kadar bir veya daha fazla oktav azaltabiliriz. Bu, şu kesirleri ortaya çıkarır

$$1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{27}{16} \quad \frac{81}{64} \quad \frac{243}{128}$$

Son olarak bunları sayısal olarak artan şekilde sıralarsak şunu elde ederiz

$$1 \quad \frac{9}{8} \quad \frac{81}{64} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{27}{16} \quad \frac{243}{128}$$

Bunlar piyanodaki do, re, mi, sol, la, si notalarına oldukça yakındır.

Fa'nın olmadığına dikkat edin. Aslında 81/64 ile 3/2 arasındaki boşluk kulağa diğerlerinden daha geniş gelir. Bu boşluğu gidermek için araya piyanoda fa'ya çok yakın olan dördüncü nota için 4/3'ü sıkıştırırız. Gamı 2 oranlı bir oktav yukarı ikinci bir do ile tamamlamak da yararlıdır. Şu halde tizlikleri kesir halinde dörtlere, beşlere ve sekizlere dayalı bir gam elde ettik.

$$1 \quad \frac{9}{8} \quad \frac{81}{64} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{27}{16} \quad \frac{243}{128} \quad 2$$

C D E F G A B C

Do(C) Re(D) Mi(E) Fa(F) Sol(G) La(A) Si(B) Do(C)

Uzunluk tizliğe kıyasla ters orantılıdır, dolayısıyla uygun uzunlukları elde etmek için kesirlerin sırasını değiştirmek zorundayız.

Şimdiye kadar piyanodaki beyaz tuşlu bütün notaları açıkladık, ancak bir de siyah tuşlu notalar vardır. Onlar ortaya çıkar, çünkü gamdaki ardışık sayılar arasında hep farklı bir oran vardır: $9/8$ (tam ses denilir) ve $256/243$ (yarım ses denir). Örneğin $81/64$ 'ün $9/8$ 'e oranı $9/8$ 'dir, ancak $4/3$ 'ün $81/64$ 'e oranı $256/243$ 'tür. 'Yarım' ve 'tam' ismi ses aralıklarının yaklaşık karşılaştırılmasını ifade eder. Onlar sayısal olarak $1,125$ ve $1,05$ 'tir. İlki daha geniştir, dolayısıyla tam aralık yarıma göre tizlikte daha fazla bir değişim yapar. İki yarım aralık yaklaşık olarak $1,11$ olan ve $1,125$ 'ten çok da uzak olmayan $1,05^2$ oranını verir. Sonuç olarak iki yarım aralık bir tam aralığa yakındır.

Bu şekilde devam ederek her tam aralığı 12 notalı bir gam elde etmek için her biri yarım aralığa yaklaşık olan iki yarım aralığa bölebiliriz. Bu hafifçe farklı sonuçlar verecek şekilde birçok farklı yolla yapılabilir. Bu yapılırsa o zaman da bir müzik eserinin anahtarını değiştirirken zor algılanan ancak duyulabilir sorunlar olabilir: aralıklar hafifçe değişir, deyim yerindeyse her notayı yarım aralık yukarı hareket ettiririz. Bazı çalgı aletlerinde örneğin klarnette bu ciddi teknik problemlere yol açabilir, çünkü notalar onun içindeki sabit konumdaki deliklerden geçerek oluşturulur. Örneğin keman gibi diğerlerinde devam edegelen düzende notalar üretilebilir, dolayısıyla müzisyen notayı uygun şekilde ayarlayabilir.

Gitar ve piyano gibi diğerlerindeyse farklı bir matematiksel sistem kullanılır. Bu, anahtar değiştirme sorununu ortadan kaldırır, ancak bazı zor algılanır ödünleri gerektirir. Ana fikir gamdaki ardışık notalar arasındaki aralıkları tam olarak eşitlemektir. Ardışık notalar arasındaki aralık onların frekanslarının oranına dayalıdır, dolayısıyla verili bir aralığı üretmek için bir notanın frekansını alır ve onu bazı sabit değerle diğerinin frekansını elde etmek için çarparsınız.

Pekâlâ, yarım aralık için bu sabit değer ne olmalıdır?

On iki yarım aralık 2 oranına sahip bir oktav eder. Bir oktav elde etmek için başlangıç frekansını ele almak ve onu yarım aralığa uygun belli sabit değerle on iki kez art arda çarpmak

zorundayızdır. Sonuç başlangıçta yola çıktığımız frekansın iki katı olmalıdır. Dolayısıyla bir yarım aralık için olan oranın on ikinci kuvveti 2'ye eşit olmalıdır. Bu da yarım aralık için olan oranın 2'nin on ikinci dereceden köküdür. Bu, $\sqrt[12]{2}$ olarak yazılır ve yaklaşık olarak 1,059463'tür.

Bu fikrin büyük avantajı çok sayıda müzikal ilişkinin *tam olarak* işlemesidir. İki yarım aralık bir tam aralık ve 12 yarım aralık da bir oktav eder. Daha da iyisiyse, gamın başladığı yerde bütün notaları sabit bir değerle oynatarak anahtarı değiştirebilirsiniz.

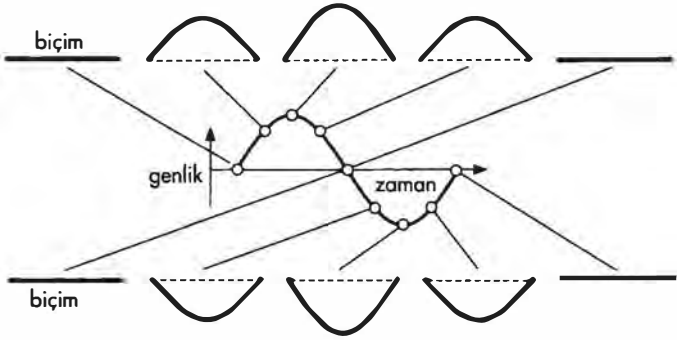
Bu sayı 2'nin on ikinci kökü tampereman gamına yol açar. Bu bir ödün vermedir; örneğin, tampereman gamında dördüncü nota için $4/3$ oranı $4/3 = 1,333$ yerine $1,059^5 = 1,335$ 'tir. Eğitimli bir müzisyen farkı ayırt edebilir, ancak ona alışmak kolaydır ve çoğumuz onu asla fark etmez.

Bu irrasyonel bir sayıdır. p ve q tamsayıyken varsayın ki $\sqrt[12]{2} = p/q$ olsun. O halde $p^{12} = 2q^{12}$ 'dir. İki tarafı da asal çarpanlarına ayırın. Sol taraf 2 içeren çift bir sayıya sahiptir (muhtemelen 0). Sağ tarafa tek sayıya sahiptir. Bu temel asal çarpanlara ayırma kuralıyla çelişir.

Davulları ve Telleri Titreştirmek

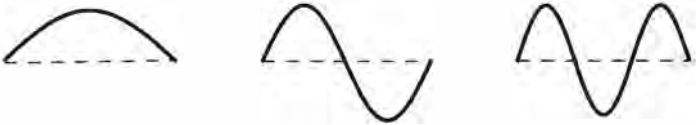
Basit oranların neden müzikal harmoniyle çok yakın ilişki içinde bulunduğunu açıklamak için titreşen tellerin fiziğine bakmalıyız.

John Bernoulli keman telinin hareketinin basit matematiksel modelini betimleyen ilk büyük buluşu ortaya çıkardı. En basit haliyle herhangi bir anda titreşen telin şeklinin bir sinüs eğrisi olduğunu bulmuştu. Titreşimin genliği de konumdaysa zamanda sinüs eğrisini takip ediyordu.



Şekil 125: Titreşen telin ardışık anlık fotoğrafları. Şekil her anda bir sinüs eğrisidir. Genlik sinüs eğrisiyle zaman içinde değişmektedir.

Bununla birlikte diğer çözümler de vardır. Onların hepsi sinüs eğrisiydi, ancak onlar tel boyunca 1, 2, 3 veya daha fazla dalganın titreşiminin farklı 'modlarını' betimlemişti. Sinüs eğrisi yine herhangi bir anda şeklin anlık görüntüsüydü ve onun genliği sinüsle eş değişen zaman bağımlı bir faktörle çarpılıyordu.



Şekil 126: Titreşen telin mod 1, 2, 3'teki anlık görüntüsü. Her durumda tel aşağı yukarı titreşir ve onun genliği de zamana göre sinüs eğrisiyle eşitir. Daha fazla dalga oldukça titreşim de fazlalaşır.

Telin ucu her zaman hareketsiz konumdadır. İlki hariç bütün modlarda uçlar arasında telin titreşmediği noktalar vardır: eğriler yatay eksenle çakıştığı zaman. Bu düğüm noktalarının Pisagorcu deneyde neden basit sayısal oranla ortaya çıktığını açıklar. Örneğin, mod 2 ve 3 aynı tel üzerinde olduğundan 2. mod eğrisinde ardışık düğüm noktaları arasındaki boşluk 3. moddaki eğriye uygun olarak onun $3/2$ katıdır. Bu, $3/2$ gibi

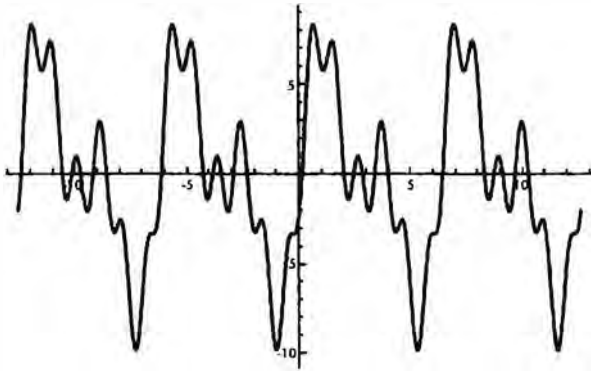
oranların neden doğal olarak titreşen tellerin dinamiğinden ortaya çıktığını açıklar.

Son aşama bunların harmonikken neden diğerlerinin olmadığını anlamaktır.

Jean Le Rond d'Alembert 1746'da titreşen bir telin matematiksel dalga denklemi denen bir denklem tarafından belirlendiğini keşfetti. O, bir tel üzerinde etki eden onun kendi gerilimi ve bir çekip bırakmak veya bir yay kullanarak teli çekilen yönde hareket ettirme gibi kuvvetlerin onun hareketlerini nasıl etkilediğini açıklar. D'Alembert, Bernoulli'nin sinüs eğrisi çözümünü bulduğunu birleştirebileceğini fark etti. Olayı basitleştirmek için belli bir anda zaman bağımlılığından kurtularak anlık bir fotoğrafı düşünün. Örneğin, şekil 5 $\sin x + 4 \sin 2x - 2 \cos 6x$ şeklini gösterir. O basit bir sinüs eğrisinden çok daha karmaşıktır. Gerçek çalgı aletleri benzer biçimde birçok sinüs ve kosinüs terimleri içeren karmaşık dalgalar üretir.

Daha basit anlatırsak, $\sin x$ 'in iki katı frekansa sahip $\sin 2x$ 'e bakalım. Acaba o kulağa nasıl gelir? O *bir oktav büyük olan notadır*. Kök sesin üzerine çalındığı zaman kulağa en harmonik gelen notadır. O halde, ikinci mod ($\sin 2x$) için telin şekli eksende kendi ortasında çakışır. O düğümde, o sabit kalır. Eğer o noktaya parmağınızı yerleştirirseniz telin iki yarısı da $\sin x$ ile değil $\sin 2x$ örüntüsüyle titreşmeye devam eder. Bu yarım telin bir oktav yüksek nota üretmesi Pisagorcun keşfi açıklar. Benzer bir açıklama onların keşfettiği diğer basit oranlarla da başa çıkar: onların hepsi o orana sahip olan sinüs eğrileriyle ve böylesi eğriler uçları hareket etmesine izin verilmeyen sabit uzunlukta bir telde düzgünce eşleşir.

Neden bu oranlar harmonik tınılar? Nedeninin bir parçası, basit oranlı olmayan sinüs eğrilerinin üst üste binince 'vuruş' denen bir etki üretmesidir. Örneğin, 8/7 gibi bir oran $\sin 7x + \sin 8x$ 'e uygun bir dalga biçimindedir.

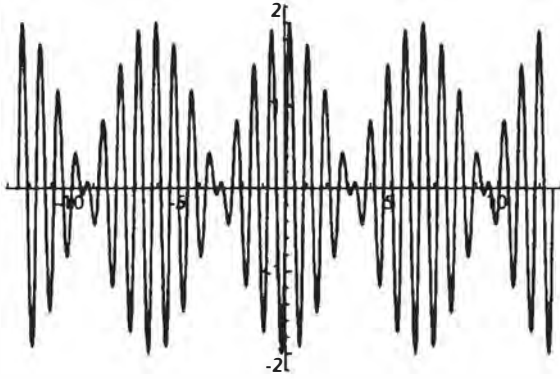


Şekil 127: Çeşitli genlikte ve frekansta sinüs ve kosinüs eğrilerinin karakteristik bir karışımı.

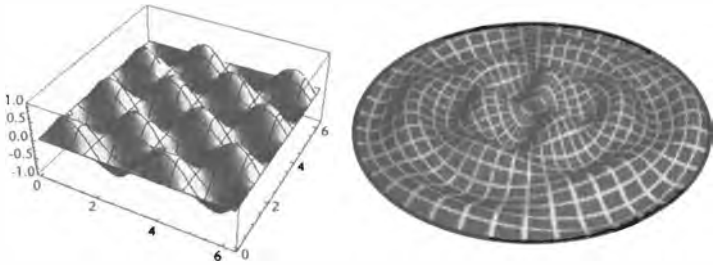
Elde edilen sese giderek yükselen ve daha sonra hafifleyen yüksek tizlikte uğuldama gibidir. O, gelen sese keman telinde olduğu gibi yaklaşık olarak aynı biçimde cevap verir. Dolayısıyla iki nota vurduğunda sonuç harmonik olmaz.

Bununla birlikte fazladan bir faktör daha vardır. Bebeklerin kulakları beyinleri gelişirken sıklıkla duydukları seslere akortludur. Aslında kulaktan beyine gelen sinirlerdense beyinden kulağa giden sinirler daha çoktur ve beyin gelen seslere kulağın cevabını ayarlamak için bunları kullanabilir. Öyleyse harmonik olarak kabul ettiklerimizin bir de kültürel boyutu vardır. Ancak en basit oranlar doğal olarak harmoniktir ve kültürlerin çoğu onları kullanır.

Tel bir boyutludur, ancak daha fazla boyutlarda da çok benzer fikirler uygulanır. Örneğin, davulun titreşimleri üzerine çalışmak için iki boyuta sahip davulun dış yüzeyi gibi şekilli titreşen bir zar düşünürüz. Müzikteki çoğu davul daireseldir, ancak kare ve hatta kedi şekilli bir davuldan çıkan seslerle de çalışabiliriz.



Şekil 128: Vuruşlar.



Şekil 129: *Solda*: Bir dikdörtgen titreşen davulun 2 ve 3 numaralı dalgalı bir modunun anlık fotoğrafı. *Sağda*: Titreşen dairesel bir davulun bir modunun anlık fotoğrafı.

Seçili herhangi bir alan şekli için Bernoulli'nin sinüs ve kosinüslerine benzeyen fonksiyonlar vardır: titreşimin en basit örüntüleri. Bu örüntüler modlar veya ne hakkında konuştuğunuzu kesin olarak açık söylemek için normal modlar olarak adlandırılır. Diğer bütün dalgalar normal modlar üst üste getirilerek ve eğer yine gerekirse sonsuz seriler kullanılarak elde edilebilir.

Şekil üç boyutlu olabilir: bir katı cisim. Titreşen üç boyutlu küreye basit bir model depremler esnasında dünyanın nasıl

hareket ettiğidir. Daha kesin şekil kutuplardan hafifçe içeri çökmüş elipstir. Deprembilimciler dünyanın fiziğini orijinaline daha sadık biçimde modellemek, dalga denklemi ve o modelin daha karmaşık biçimlerini depremler tarafından oluşturulan sinyalleri anlamak için kullanırlar.

Eğer bir araba tasarlıyorsanız ve istenmeyen titreşimleri ortadan kaldırmak istiyorsanız araba biçimli bir nesne veya mühendislerin anlamaya çalıştığı hangi parçası içinse onun dalga denklemine bakarsınız. Depreme dayanıklı binalar tasarlamak da benzer bir süreçtir.

APÉRY'NİN SABİTİ

Apéry sabiti bütün çift sayılarda işleyen ancak tek sayılarda işliyor gibi gözükmeyen matematiksel bir örüntünün kayda değer bir örneğidir. Bildiğimiz kadarıyla tabii ki de. Bu sayının irrasyonel olduğunun kanıtı beklenmedik bir şeydir.

Üçün Zetası

Zeta fonksiyonunu [1/2 bölümüne bkz.] hatırlıyor musunuz? z karmaşık bir sayıyken [i bölümüne bkz.] analitik süreklilikle ilgili bazı teknik sorunlara muhatap olan seriler tarafından tanımlanır

$$\zeta(z) = 1/1^z + 1/2^z + 1/3^z + \dots$$

On sekizinci yüzyılın matematikçileri bu sonsuz serilerle ilk defa Euler, Basel sorusunu çözöğünde $z = 2$ olduğu özel durumda karşılaştılar. Bu, bu dilde tam karelerin çarpma işlemine göre terslerinin toplamındaki $\zeta(2)$ için formül gerektirir. Biz $[\pi]$ bölümünde 1735'te Euler'in cevabı bulduğunu görmüştük

$$\zeta(2) = 1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 \dots = \pi^2/6$$

Aynı yöntem dördüncü, altıncı veya herhangi bir çift tam sayı kuvveti için de işler:

$$\zeta(4) = 1/1^4 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + 1/5^4 + \dots = \pi^4/90$$

$$\zeta(6) = 1/1^6 + 1/2^6 + 1/3^6 + 1/4^6 + 1/5^6 + \dots = \pi^6/945$$

ve örüntü

$$\zeta(8) = \pi^8/9450$$

$$\zeta(10) = \pi^{10}/93.555$$

$$\zeta(12) = \pi^{12}/945.638.512.875 \quad \zeta(14) = \pi^{14}/18.243.225 \text{ şeklinde devam eder.}$$

Bu örnekler ışığında küp kuvvetlerin toplamının π^3 'ün, beşinci kuvvetlerin karşılıklı toplamının ve devamının π^5 'in rasyonel bir katı olmasını gayet tabi bekleyebiliriz.

Bununla birlikte, sayısal hesaplamalar varsayımın yanlış olduğunu sağlam bir şekilde ortaya koyar. Gerçekten de bu diziler için π ile ilişkili veya ilişkisiz hiçbir formül bilinmemektedir. Onlar oldukça gizemlidir.

π irrasyonel olduğundan, doğrusu aşkın olduğundan [π bölümüne bkz.] yukarıdaki bütün serilerin toplamı irrasyonel toplamalara sahiptir. Dolayısıyla $n = 2, 4, 6, 8, \dots$ için $\zeta(n)$ irrasyoneldir. Bununla birlikte tek sayı kuvvetler için bunun doğru olup olmadığını bilmiyoruz. Bu, çok muhtemel gözükür, ancak n 'nin tek tamsayı değerleri için $\zeta(n)$ anlaşılması çok daha zordur çünkü Euler'in yöntemi n 'nin çift olmasına dayalıdır. Çok matematikçi bu soruyla boğuşmuştur ve sonuçta tam olarak hiçbir yere varamamışlardır.

$n = 3$ olduğunda çarpma işlemine göre ters ardışık küplerin toplamı olarak Apéry sabiti denen ve sayısal değeri 1,20205 6903159594285399738161511449990764986292... olan sayıyı elde ederiz:

$$\zeta(3) = 1/1^3 + 1/2^3 + 1/3^3 + 1/4^3 + 1/5^3 + \dots$$

Bunu π^3 ile bölersek bu hiçbir tekrarlıma işareti göstermeyen 0,038768179602916798941119890318721149806234568... haline gelir, dolayısıyla rasyonel *gibi gözükmez*. Bu küçük pay ve paydayla kesinlikle rasyonel bir sayı değildir. Robert Setti 2013'te Apéry sabitini 200 milyarncı haneye kadar hesapladı. Bu π^3 'ün rasyonel bir katı gözükmekten daha uzaktır ve diğer standart matematiksel sabitlerle ilişkisiz gözükmektedir.

Bu nedenle Raoul Apéry 1978'de $\zeta(3)$ 'ün irrasyonel olduğunun ispatını açıkladığında bu büyük bir sürprizdi ve ispatının doğru olduğu ortaya çıkınca bu daha büyük bir sürprizdi. Bu Apéry'e iftira etmek için değildir. Ancak ispat bazı kayda değer savlar içermektedir: örneğin, açık bir şekilde rasyonel olan ancak tamsayı olması hiç de muhtemel olmayan bir sayılar dizisi aslında *tamsayıydı* (Her tamsayı rasyoneldir, ancak tersi geçerli değildir.). Bilgisayar hesaplamaları tamsayılar açığa

çıkarınca bu akla yakın olmaya başladı, ancak bunun sonsuza kadar devam edeceğine ilişkin bir ispat bulmak biraz vakit aldı. O, Euler tarafından bilinmeyen hiçbir yöntemi içermese de Apéry'nin ispatı çok karmaşıktı. O zamandan beri daha basit ispatlar bulundu.

$\zeta(3)$ 'e ilişkin yöntemler özeldir ve diğer çift tamsayılara yayılabilir gözükmemektedir. Bununla birlikte, Wadim Zudilin ve Tanguy Rioval 2000'de sonsuz sayıda $\zeta(2n + 1)$ 'in irrasyonel olduğunu ispat ettiler. $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ ve $\zeta(11)$ 'den en azından birinin irrasyonel olduğunu 2001'de ispat ettiler, ancak kışkırtıcı bir şekilde teoremleri bu dört sayıdan özel olarak hangisinin irrasyonel olduğunu söylemez. Matematik bazen böyledir.

$$\gamma \sim 0,577215$$

EULER SABİTİ

Bu sayı analizin birçok alanında ve sayı kuramında ortaya çıkar. O kesinlikle gerçel bir sayıdır ve mantıken o irrasyoneldir, bu yüzden onu buraya koymuşumdur. Belli bazı değere kadarki tüm tamsayıların çarpma işlemine göre tersinin toplamının en basit yakınsamasında ortaya çıkar. Aynı anda her yerde olmasına ve basitliğine rağmen onun hakkında çok az şey biliyoruz. Özellikle hiç kimse onun irrasyonel olduğunu *ispat edemez*. Ancak biz onun rasyonel olduğunu biliyoruz, bu aşırı derecede karmaşıktır: onu temsil eden herhangi bir kesir kesinlikle 240.000'den fazla basmağa sahip devasa sayılar içerecektir.

Harmonik Sayılar

Harmonik sayılar çarpma işlemine göre ters sayıların sonlu toplamıdır:

$$H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/n$$

H_n için belirgin bir cebirsel formül bilinmemektedir ve böyle bir şey muhtemel gözükmemektedir. Bununla birlikte kalkülüs kullanarak H_n 'nin yaklaşık olarak $\log n$ [e bölümüne bkz.] yani doğal logaritmasına eşit olduğunu göstermek oldukça kolaydır. Aslında daha iyi bir yakınsama vardır. γ sabitken

$H_n \sim \log n + \gamma$ 'dır. n büyüdükçe iki taraf arasındaki fark istediğimiz kadar küçükleşir.

γ 'ın ondalık açılımı şöyle başlar

$\gamma = 0,5772156649015328606065120900824024310421\dots$ ve Alexander Yee 2013'te 19.377.958.182. ondalık basamağa kadar

bunu hesaplamıştır. Bu Euler sabiti olarak bilinir çünkü bunu ilk olarak Euler'in 1734'te yazdığı bir makalede ortaya çıkmıştır. O, bunu C ve O olarak belirtti ve onu 16. ondalık basamağa kadar hesapladı. Lorenzo Mascheroni 1790'da sayı hakkındaki sonuçlarını yayımladı, ancak o, bunu A ve a olarak gösterdi. O, 32 ondalık haneyi hesaplamaya çalışmıştır, ancak 20. ve 22. basamağı yanlış hesaplamıştır. Bu bazen Euler-Mascheroni sabiti olarak bilinir, ancak genel olarak övgüyü Euler hak etmektedir. Matematikçiler 1830 dolaylarında gösterimi günümüzdeki standart olan γ olarak değiştirdiler.

Euler sabiti özellikle sonsuz serilerle ve kalkülüsteki belirli integrallerle ilişkili olarak pek çok matematiksel formülde ortaya çıkar. Bunun üsse yazıldığı e^x , sayı kuramında çokça bulunur. Euler sabitinin aşkın olduğu iddia edilmiştir, ancak bunun irrasyonel olduğu bile bilinmemektedir. Bunun sürekli kesrinin hesaplamaları eğer bu rasyonelse p ve q tamsayılar-ken p/q 'ya eşit olduğunu ispatlar, yani q en az $10^{242,080}$ 'dir.

Harmonik sayılar için daha hassas bir formül en fazla $1/252n^6$ hatayla şudur:

$$H_n = \log n + \gamma + 1/2n - 1/12n^2 + 1/120n^4$$

Özel Küçük Sayılar

Şimdi yeniden kendiliğinden albenisi olan tamsayılara dönüyoruz. Her birisi onu ilginç yapan özel nitelikleriyle farklı bir bireydir.

Aslında, *tüm* sayılar ilginçtir. İspatı: eğer öyle olmasaydı ilginç olmayan en küçük sayı var olmalıydı.

Ancak bu onu ilginç kılar: çelişki.

SİCİM KURAMI

Biz uzayı genellikle üç boyutlu olarak düşünürüz. Görelilik konusunda uzay-zaman için dördüncü boyutu zaman sağlar. Bununla birlikte, sicim teorisi; daha belirgin olarak M-kuramı, olarak bilinen fiziğin sınırlarındaki güncel araştırma uzay-zamanın aslında *on bir* boyutlu olduğunu öne sürer. İnsan duyu organlarına bunların yedisi yardım almaksızın gözükmez. Aslında bunlar hiçbir deney tarafından kesin olarak tespit edilmedi.

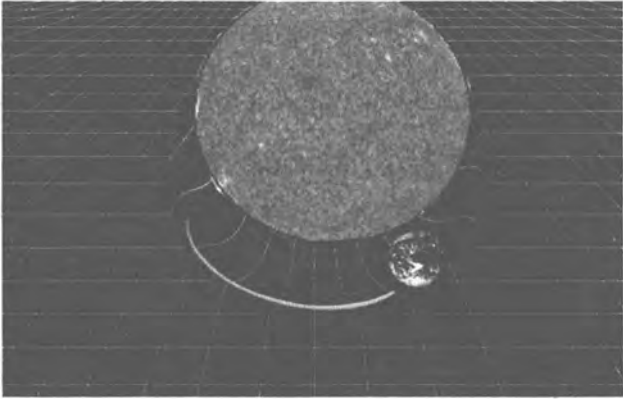
Bu acayip gözükebilir ve bu, doğru olmayabilir. Ancak fizik, duyu organlarımız aracılığıyla algıladığımız dünyanın gerçekten oldukça farklı olduğunu bize defaatle gösterdi. Örneğin, kesintisiz madde apaçık şekilde küçücük farklı parçacıklardan; atomlardan oluşur. Günümüzde bazı fizikçiler gerçek uzayın bizim içinde yaşadığımızı düşündüğümüzden çok farklı olduğunu düşünmektedir. Boyut olarak 11'in seçilmesinin nedeni gerçek dünyaya ilişkin gözlem değildir; o, hayati matematiksel yapıların uyumlu çalışmasının sayısıdır. Sicim kuramı çok tekniktir, ancak ana fikirleri oldukça basit terimlerle kabataslak çizilebilir.

Görelilik ve Kuantum Kuramını Birleştirmek

Teorik fiziğin iki muhteşem zaferi görelilik ve kuantum mekaniğidir. Einstein tarafından ortaya konan birincisi çekim kuvvetini uzay-zaman eğrisi açısından açıklar. Einstein özel görelilikten sonra geliştirdiği onun uzay, zaman ve madde kuramı olan genel göreliliğe göre bir konumdan diğer bir konu-

ma hareket eden parçacık jeodezik yol takip eder: iki konum arasındaki en kısa yol. Ancak yıldız gibi yoğun cisimlerin yanında uzay-zaman çarpıklaşır ve bu, o yolu bükür. Örneğin, gezegenler güneşin etrafında eliptik yörüngelerde hareket eder.

Newton tarafından keşfedilen orijinal çekim kuramı bu bükülmeyi kuvvetin sonucu olarak yorumlamıştı ve bu gücün dayanıklılığı için matematiksel formül ortaya atmıştı. Ancak çok hassas ölçümler Newton'ın kuramının hafifçe tam doğrulukta olmadığını gösterdi. Einstein çekim kuvvetini uzay-zaman eğrisiyle yer değiştirdi ve yeni kuram hataları düzeltti. O zamandan beri temel olarak uzak gök cisimleriyle ilgili birçok gözlem tarafından o doğrulandı.



Şekil 130: Uzay-zaman eğrisinin nasıl bir kuvvet olarak davrandığının gösterimi. Yıldız gibi yoğun bir cismin yakınından geçen bir parçacık bir çekim kuvvetiyle aynı etki olan eğri tarafından yönü saptırılır.

İkinci muhteşem zafer olan kuantum mekaniği aralarında Max Planck, Werner Heisenberg, Louis de Broglie, Erwin Schrödinger ve Paul Dirac'ın olduğu birçok şahane fizikçi tarafından ortaya atıldı. Kuantum mekaniği, atom veya daha altı boyutlar olan küçük ölçeklerde maddenin nasıl davrandığını açıklar. Bu ölçeklerde madde hem parçacık hem de dalga gibi hareket eder. Kuantum mekaniği dünyanın insan ölçeğinde

nasıl davrandığından çok, farklı tuhaf etkiler öngörür; ancak binlerce deney bu öngörülerini doğrular. Eğer kuantum mekaniği gerçekten çok farklı olursa modern elektronik işlemeyecektir.

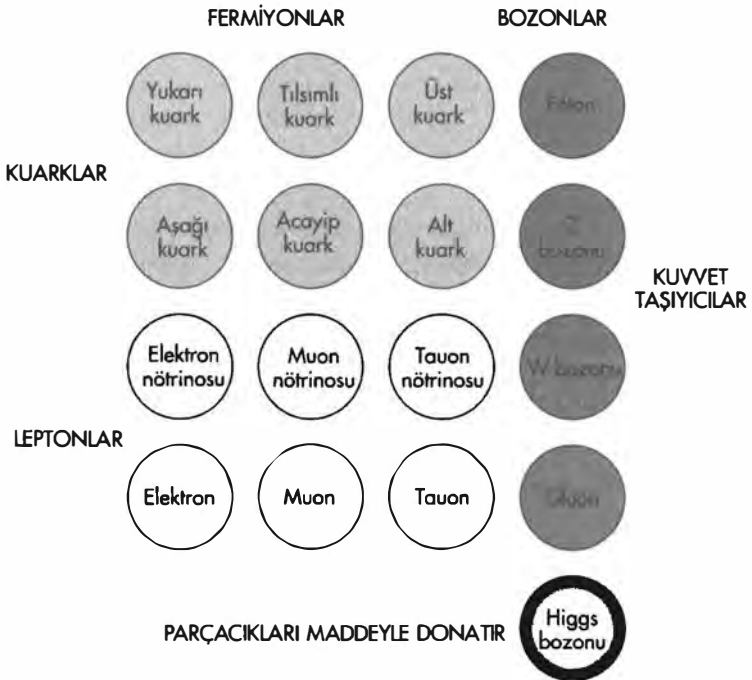
Kuramsal fizikçiler farklı bağlamlarda uygulanan ve evrenin bütüncül olarak bir kuramı olan evrenbilimde olduğu gibi özellikle eğer bağlamlar çakışırsa anlaşmazlığa düşen iki farklı kurama sahip olmayı tatmin edici bulmamaktadırlar. Einstein, bu iki kuramı mantıksal olarak uyumlu bir şekilde bir araya getiren birleştirilmiş bir alan kuramı araştırmaya başlamıştı. Bu araştırma şimdiye kadar ancak kuantum sahasında bir parça başarıya ulaşmıştır.

Bu başarılar dört temel fiziksel kuvveti birleştirir. Fizikçiler doğada dört farklı kuvvet ayırmasına giderler: kütleçekim kuvveti, elektriğe ve manyetizmaya hükmeden elektromanyetik kuvvet, radyoaktif parçacıkların bozunması olan zayıf nükleer kuvvet ve proton ile nötron gibi parçacıkları bağlayan güçlü nükleer kuvvet. Açıkçası maddenin parçacıkları arasında bu dört kuvvet 'etkileşim' içindedir. Görelilik kütleçekim kuvvetini açıklar ve kuantum mekaniği diğer üç temel kuvvete uygulanır.

Yakın zamanda fizikçiler kuantum mekaniğinin üç kuvvetini birleştiren genel, tek bir kuram buldular. Standart model olarak bilinen bu model atom-altı ölçekte maddenin yapısını açıklar. Standart modele göre bütün madde 17 temel parçacıktan oluşmaktadır.

Birçok gözlemle ilgili sorunlardan biri olan örneğin, galaksilerin içlerini dolduran madde sadece bizim görebildiğimizse onların kendi eksenini etrafında dönüş biçimi genel göreliliğin tahminleriyle birbirini tutmamasından dolayı evrenbilimciler günümüzde evrenin büyük kısmının bu 17 adet parçacık dışında da yeni parçacıklar gerektiren 'karanlık bir maddeden' oluştuğunu düşünmektedirler. Eğer haklılarsa standart model değiştirilmeye ihtiyaç duyacaktır. Alternatif olarak, biz yeni veya cisimler kuvvet uygulandığında nasıl hareket ettiğine ilişkin uyumlulaştırılmış bir çekim kuvveti kuramına ihtiyaç duyabiliriz.

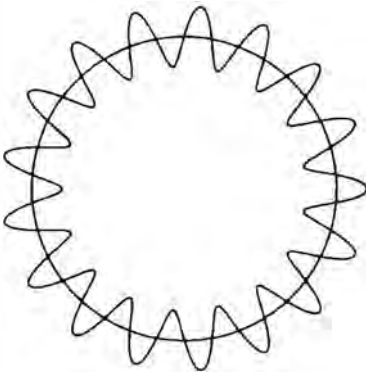
Bununla birlikte kuramsal fizikçiler göreliliği ve kuantum mekaniğini bir araya getiren ayrıca o ikisinin kendi alanlarında (sırasıyla çok büyük ve çok küçük ölçekte) işleyen ve bu *dört* kuvveti uyumlu bir şekilde betimleyen tek bir kuram inşa etmeyi henüz başaramadılar. Bu birleşik kuram için olan araştırma veya her şeyin kuramı olan *sicim kuramı* doruk noktasında bazı güzel matematiksel fikirlere yol açmıştır. Günümüzde bu kuram için kesin deneysel desteklemeler yoktur ve diğer birçok öneri de dinamik araştırmalara konudur. Sıradan bir örnek uzayın zincirli zırh gibi çok ince döngüler halinde gösterildiği döngü kuantum kütleçekimidir. Teknik olarak o dönen bir köpüktür.



Şekil 131: 17 temel parçacık.

Sicim kuramı temel parçacıkların sabit noktalar olarak düşünülmemesini öne sürerek işe başlamıştır. Aslında, doğanın gerçekte noktalar oluşturmadığına ilişkin bir his vardı, dolayısıyla noktamsı modellerin kullanımı parçacıklar açısından düz eğrilerle ve yüzeylerle işlem yapan kuantum kuramının görelilikle uyuşmamasının bir nedeni olabilir. Bunun yerine parçacıklar *sicim* denen küçük kapalı ilmekler şeklinde olmalıdır. İlmekler eğrilebilir, dolayısıyla Einstein'ın bükülme kavramı devreye doğal olarak girer.

Dahası ilmekler titreşebilir ve onların titreşimi elektrik yükü ve spin gibi çeşitli kuantum özelliklerinin varlığını düzgünce açıklar. Kuantum mekaniğinin kafa karıştıran niteliklerinden birisi böylesi özelliklerin genellikle bazı temel sabitlerin tamsayı katları olarak oluşmasıdır. Örneğin, proton +1, elektron -1 ve nötron 0 yüke sahiptir. Birleşerek protonları ve nötronları oluşturan daha temel parçacıklar olan kuraklar $2/3$ ve $-1/3$ birimlik yüke sahiptir. Dolayısıyla her şey bazı kuark çeşitlerinin üzerindeki temel birimin -3, -1, 0, 2 ve 3 katı olan yükler olur. Pekâlâ, neden tamsayı katları olur? Titreşen sicimlerin matematiği benzer biçimde davranır. Her titreşim özel dalga boyu [$1^2/2$ bölümüne bkz.] bir dalgadır. Döngü kapandığında kapalı bir döngüde dalgalar doğru şekilde iç içe geçmelidir, dolayısıyla döngü etrafınca tamsayılı dalgalar uyumlu olmalıdır. Eğer dalgalar bir kuantum durumu gösterirlerse bu her şeyin neden tamsayı katlı olduğunu açıklar.



Şekil 132: Tamsayılı dalgalar bir çemberin çevresiyle iç içe geçer.

Meselenin kesinlikle o kadar da alelade olmadığı ortaya çıkmıştı. Ancak parçacıkları döngü olarak varsayma fikrini takip etmek fizikçileri ve matematikçileri bazı kayda değer ve güçlü fikirlere götürdü.

Fazladan Boyutlar

Titreşen bir kuantum sicimi *içinde* titreşeceği bir uzaya ihtiyaç duyar. Matematiği mantıklı hale getirmek için bu sıradan bir uzay olamaz. Uzayın fazladan boyutu gibi fazladan değişkenler olmak zorundadır çünkü bu çeşit bir titreşim uzaysal değil bir kuantum özelliğidir. Sicim kuramı geliştikçe her şeyin işleyebilmesi için onların fazladan boyutlara ihtiyaç duyduğu fizikçiler için aşikâr oldu. Süpersimetri denen bir kural her bir parçacığın kendisinden daha ağır bir 'eşinin' olması gerektiğini öne sürüyordu. Sicimlerin bu çeşit bir simetriye imkân sağlamak için süpersicimlerle yer değiştirmesi gerekiyordu. Ayrıca süpersicimler sadece uzay *fazladan altı adet boyuta* sahip olursa işliyordı.

Bu ayrıca sicimin çember şeklinde eğri olmasındansa onun altı boyutta daha karmaşık bir şekil olması demekti. Bu şekiller içinde uygulanabilir olanlar Calabi-Yau denilen çok katmanlılardır.



Şekil 133: Altı boyutlu Calabi-Yau çok katmanlısının sıradan uzaya yansıtılması.

Bu fikir görüldüğü kadar tuhaf değildir, çünkü matematikte 'boyut' sadece 'bağımsız değişken' demektir. Klasik elektromanyetizma elektriği sıradan uzayın içine işleyen elektrik alan ve manyetik alan açısından tanımlar. Her alan üç yeni değişkeni gerektirir: elektrik alanın yönlendiği yönün üç parçası ve manyetizma için de bir o kadar. Bu parçaların uzayda hizalanmasına rağmen, alan bu yönler boyunca yönlerin kendisinden bağımsız olarak güçlenir. Dolayısıyla klasik elektromanyetizma fazladan altı boyut gerektirir: üç adedi elektrik, üç adedi manyetizma için. Bir bakıma, klasik elektromanyetizma kuramı on boyutu gerektirir: dört adet uzay-zaman artı altı adet elektromanyetizma için.

Sicim kuramı da benzerdir, ancak o *bu* altı yeni boyutu kullanmaz. Sicim kuramının yeni değişkenleri olan yeni boyutları elektriğe ve manyetizmaya zıt daha çok sıradan uzay boyutları gibi davranmaktadır. Einstein'ın harika ileri görüşlü buluşlarından birisi üç boyutlu uzay ile tek boyutlu uzayı dört boyutlu bir uzay oluşturmak üzere birleştirmesiydi. Bu gerçekten de gerekliydi, çünkü göreliliğe göre uzay ve zaman değişkenleri nesneler çok hızlı hareket edince birbirine karışır. Sicim kuramı da benzerdir, ancak kuram günümüzde dokuz boyutu uzay ve bir boyutu da zaman olmak üzere on boyutlu bir uzay-zaman kullanır.

Bu fikir kuramcılarını matematiği mantıksal olarak tutarlı kılmaya zorladı. Eğer zamanın alışıldığı üzere tek boyutlu ve uzay zamanın *d* boyutlu olduğunu varsayarsak hesaplamalar denklemdaki terimlerde genellikle sonsuz olan aykırılıklar oluşturur. Bu büyük bir sorun demektir, çünkü gerçek dünyada sonsuzluklar yoktur. Bununla birlikte ilgili terimler $d - 10$ 'un katları şeklinde olur. Eğer sadece $d = 10$ olursa bu sıfır olur ve bütün aykırılıklar ortadan kalkar. Dolayısıyla aykırılıklardan kurtulma uzay-zamanın 10 boyutlu olmasını gerektirir.

$d - 10$ çarpanı kuramın formülasyonunun doğasında vardır. $d = 10$ seçerek bütün problemin etrafından dolaşmış oluruz, ancak ilk bakışta bundan daha zor bir problem ortaya çıkar. Zaman için bir boyutu eksilterek uzayın üç değil dokuz boyutlu olduğunu buluruz. Ancak eğer bu doğruysa, biz elbette onu fark ederdik. *Fazladan altı boyut nerededir?*

İlgi çekici bir cevap onların var olduğudur, ancak onlar öylesine sıkı kıvrılmışlardır ki biz onları fark *etmeyiz*; gerçekten de fark *edemeyiz*. Uzun bir su hortumu hayal edin. Uzaktan bakıldığında onun kalınlığını fark etmezsiniz: o tek boyutlu bir eğri gibi gözüktür. Diğer iki boyut, onun dairesel enine kesiti gözlenemeyecek küçük bir uzaya sıkışmıştır. Sicim de böyledir, ancak çok daha sıkı kıvrılmıştır. Bir hortumun uzunluğu onun kalınlığının en az bin katıdır. Bir sicimin 'uzunluğu' (gözle görülür uzaysal hareketi) onun 'kalınlığının' (onun hareket ettiği yeni uzaylar) 10^{40} katıdır.

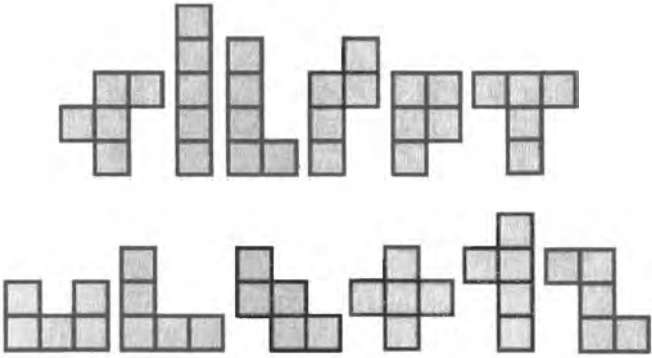
Bir diğer olası cevap yeni boyutların oldukça geniş olduklarıdır, ancak parçacıkların konumunun çoğu bu boyutlarda aynı okyanusta dalgalanan bir tekne gibi sabit bir konumda sıkışmıştır. Okyanusun kendisi üç boyutludur: uzunluk, genişlik ve derinlik. Ancak tekne suyun üzerinde kalmak zorundadır, böylece onların ikisini fark edebilir: uzunluk ve genişlik. Kütleçekim kuvveti gibi az sayıda özellik tekneden suya dalan dalgıç gibi uzay-zamanın fazladan boyutlarını keşfeder. Ancak çoğunlukla etmezler.

Kuramcılar 1990'lara gelindiğinde temelde fazladan boyutların simetrisinde farklılaşan beş farklı sicim teorisi icat etmişlerdi. Onlar I, IIA, IIB, HO ve HE diye adlandırılır. Edward Witten *M*-kuramı denen hepsinin şık bir matematiksel birleşimini keşfetti. Bu kuram uzay zamanın 11 boyutlu olmasını gerektirir: on adet uzay ve bir adet zaman boyutu. Bu beş çeşit sicim teorisinden birinden birine geçmek için olan matematiksel kurnazlıklar, tam 11 boyutlu uzay-zamanın fiziksel özellikleri olarak görülebilir. Bu 11 boyutlu uzay-zamanda 'konumlar' seçerek beş çeşit sicim kuramını türetebiliriz.

Sicim kuramının evrenin çalışma yöntemi olmadığı ortaya çıksa bile o, matematiğe burada tartışmak için ne yazık ki çok teknik olan büyük katkılar yapmıştır. Dolayısıyla fizikçiler onun gerçek dünyaya uygulanamaz olduğuna karar verse bile matematikçiler onu incelemeye ve onu değerli görmeye devam edecektir.

PENTOMİNOLAR

Pentomino birbiriyle kenar kenara komşu beş adet özdeş kare-nin birleştirilmesiyle oluşturulan şekildir. İhtimaller simetrik-leri saymazsak 12 adettir. Onlar geleneksel olarak kendilerine benzeyen alfabenin harfleriyle isimlendirilmiştir. Üç boyutlu uzayda öpüşme sayısı 12'dir.



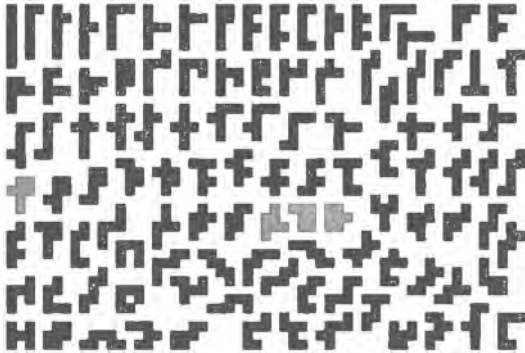
Şekil 134: 12 pentomino.

Polyominolar

Daha genel olarak n -omino n özdeş kare kullanarak oluşturulan şekildir. Toplu olarak bu şekiller polyominolar olarak adlandırılır. Hekzominolar ($n = 6$) 35 adet, heptominolar ($n = 7$) 108 adettir.



Şekil 135: 35 adet hegzomino.



Şekil 136: 108 adet heptomino.

Genel kavram ve isim 1953'te Solomon Golomb tarafından icat edilmiştir ve Martin Gardner tarafından *Scientific American*'da meşhur edilmiştir. İsmi, birleştirilmiş iki kareden oluşan ve hoş bir yorumla D harfine benzeyen iki anlamına gelen Latince'deki *di* veya Yunancadaki *do* olan 'domino' kelimesinden türetmedir. ('Domino' kelimesi aslında Latince 'tanrı' anlamına gelen dominus kelimesinden gelmektedir.)

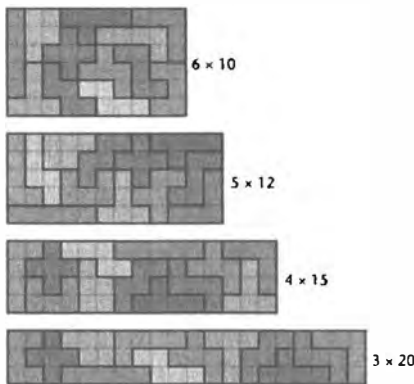
Öncüler yazında çoktur. İngiliz yapbozcu Henry Dudeney 1907'deki *Canterbury Yapbozlarına* bir pentomino yapbozu koymuştur. *Fairy Chess Review* dergisinin 1937 ila 1957 yılları

arasındaki yayınları 'otopsi soruları' diye adlandırdığı hekzominolara kadar birçok düzenlemeyi içermektedir.

Polyomino Yapbozları

Genel olarak polyominolar ve özelde pentominolar devasa miktarda oyun ve eğlence yapbozlarının temelini oluşturur. Örneğin, onlar ilginç şekiller oluşturacak şekilde birleştirilebilir.

Her bir karenin bir birim kare olduğu birimlerle on iki pentomino toplamda 60 birim kare alana sahiptir. İki tamsayının ürünü olarak 60'ı oluşturmanın her yolu bir dikdörtgen tanımlar ve böyle bir dikdörtgeni oluşturmak için pentominoları birleştirmek eğlenceli ve oldukça meydan okuyan bir yapbozdur. Onlar ayna görüntüsü şeklini elde etmek için eğer gerekirse çevrilebilir. Olası dikdörtgenlerin 6×10 , 5×12 , 4×15 ve 3×20 olduğu ortaya çıkar. 2×30 ve 1×60 ölçülülerin imkânsız olduğunu görmek kolaydır.



Şekil 137: Pentomino dikdörtgenlerinin olası ölçüleri.

Bu dikdörtgenlerin bilinen farklı yolları (bütün bir dikdörtgenin dönel ve simetrik olanlarını farklı saymaksızın ancak daha küçük dikdörtgenlerin diğerleri değişmezken dönel ve simetrik olmalarına izin vererek) şöyledir:

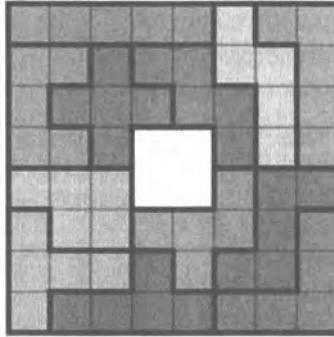
$6 \times 10 : 2339$ yol

$5 \times 12 : 1010$ yol

$4 \times 15 : 368$ yol

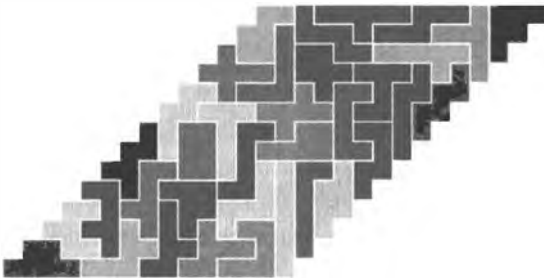
$3 \times 20 : 2$ yol

Diğer bir sıradan yapboz $8 \times 8 - 2 \times 2 = 60$ denklemiyle başlar ve 8×8 'lik bir karenin 2×2 'lik bir karelik boşluk haricinde on iki adet pentominoyla döşenip döşenemeyeceğini araştırır. Cevabıysa 'evettir.'



Şekil 138: Pentominolardan içi oyuk bir kare yapmak.

Hekzominoları dip dibe bitiştirmek için bir başka ilgi çekici yolsa paralelkenardır:



Şekil 139: Hekzominolardan bir paralelkenar yapmak.

Polyominoların Sayısı

Matematikçiler ve bilgisayar bilimcileri n sayıdan kaç adet n -*omino* var olduğunu hesaplamışlardır. Eğer dönel ve simetrik haller farklı olarak sayılmazsa sayılar şöyledir:

n	n -ominoların sayısı
1	1
2	1
3	2
4	5
5	12
6	35
7	108
8	369
9	1285
10	4655
11	17,073
12	63,600

Tablo 11

Küreler İçin Öpüşme Sayısı

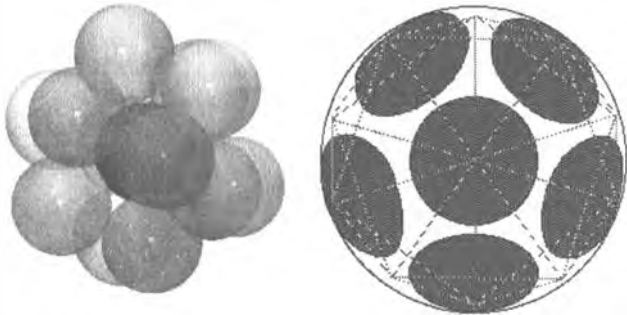
Çemberler için öpüşme sayısı; hepsi özdeş olan çemberlerden birine temas edebilecek en fazla çember sayısı 6'dır [6 bölümüne *bkz.*]. Küreler için de bir öpüşme sayısı, hepsi özdeş olan kürelerden birisine temas edebilecek en fazla küre sayısı, vardır. Bu sayı 12'dir.

Verili bir küreye değebilecek küre sayısının 12 olduğunu göstermek oldukça kolaydır. Aslında, bunu temas noktaları düzgün bir yirmi yüzlünün 12 köşesini oluştursun diye yapmak mümkündür [5 bölümüne *bkz.*]. Bu noktalar arasında kürelerin birbirine değmeyeceği şekilde yeterince boşluk vardır.

Merkezdekine temas halindeki altı adet çember düzlemde yedek bir alan bırakmaz ve düzenleme değişmezdir. Ancak üç

boyutta oldukça yedek yer vardır ve küreler hareket ettirilebilir. Hatırı sayılır bir zaman boyunca diğer 12 küre doğru yerlere kaydırılırsa 13. küreye bir yer olup olamayacağı bilinmiyordu.

İki ünlü matematikçi Newton ve David Gregory bu soru hakkında uzun soluklu bir tartışma yaşadılar. Gregory onun 13 olması konusunda ikna olmuşken Newton doğru sayının 12 olduğunu savunuyordu. Newton'ın haklı olduğunu ispat eden girişimler 1800'lerde yapılmıştır, ancak onlar boşluklara sahipti. Cevabın 12 olduğuna ilişkin tam bir ispat 1953'te ortaya çıktı.



Şekil 140: *Solda:* Verili bir küreye 12 kürenin nasıl değebildiği. *Sağda:* Verili bir küreye değen 12 kürenin düzgün yirmi yüzlü düzenlemedeki 'gölgeleri'.

Dört veya Daha Fazla Boyut

Benzer bir hikâye 3 kürenin öpüşmesi olan 24 düzenlemeyi bulmanın görece kolay olduğu dört boyutlu uzayda devam eder, ancak yeterince boş alan vardır; dolayısıyla 25.'nin olabileceği yeterli bir yer vardır. Bu boşluk sonunda Oleg Musin tarafından 2003'te çözümlendi ve beklendiği üzere cevap 24'tü.

Diğer birçok boyutta bazı özel sayıda öpüşme kürelerin mümkün olduğunu matematikçiler bilir, çünkü onlar böyle düzenlemeler bulabilirler ve bazı genel daha büyük sayıların çeşitli dolaysız nedenlerle imkânsız olduğunu da bilirler. Bu sayılar öpüşme sayısı için *alt sınır* ve *üst sınır* olarak adlan-

dırılır. Bu, onların arasında bir yerde muhtemelen onlardan birine eşit biçimde bulunmalıdır.

Dördüncü boyuttan sonra sadece iki durumda bilinen alt ve üst değer kesişir, dolayısıyla onların ortak değeri öpüşme sayısıdır. Dikkat çeken bir biçimde, bu boyut sayıları öpüşme sayısının sırasıyla 240 ve 196.650 olduğu 8 ve 24'tür. Bu boyutlarda daha büyük boyutlu karelerin veya daha genel olarak paralelkenarların örgülerine benzer oldukça simetrik olan iki adet örgü vardır. Bu özel örgüler E_8 ve Leech örgüsü (veya Gosset örgüsü) olarak bilinir, ayrıca küreler uygun örgü noktalarına yerleştirilebilir. Neredeyse mucizevi bir tesadüfle öpüşme sayıları için bu boyutlarda bu özel örgüler tarafından sağlanan ispat edilebilir üst sınırlar alt sınırlarla aynıdır.

Bu boyutlar için tam bir cevabı bilinenlerin koyu yazıldığı tabloda oyunun güncel durumu özetlenmiştir.

Boyut	Alt sınır	Üst sınır	Boyut	Alt sınır	Üst sınır
1	2	2	13	1130	2233
2	6	6	14	1582	3492
3	12	12	15	2564	5431
4	24	24	16	4320	8313
5	40	45	17	5346	12,215
6	72	78	18	7398	17,877
7	126	135	19	10,688	25,901
8	240	240	20	17,400	37,974
9	306	366	21	27,720	56,852
10	500	567	22	49,896	86,537
11	582	915	23	93,150	128,096
12	840	1,416	24	196,560	196,560

Tablo 12

ÇOKGENLER VE ÖRÜNTÜLER

Gauss gençken kendisi dahil herkesin şaşkınlığı altında 17 kenarlı bir düzgün çokgenin cetvel ve pergel yardımıyla çizilebileceğini keşfetmişti; bu Öklit'in asla şüphelenmediği bir şeydi. Hiç kimsenin de 2000'den fazla yıldır şüphelenmediği gibi.

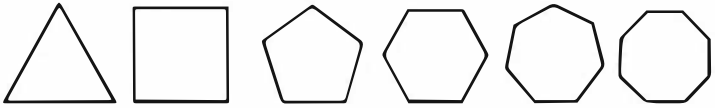
Duvar kâğıdı örüntüsünün 17 farklı simetrisi vardır. Bu gerçekten kristallerin atomik yapısı olan kristalografinin iki boyutlu halidir.

Parçacık fiziğinin standart modeline göre 17 temel parçacık vardır [11 bölümüne bkz.].

Düzgün Çokgenler

Bir çokgen (Yunancada 'çok kenarlı' demektir) kenarları düz çizgiler olan bir şekildir. Eğer her kenar aynı uzunlukta ve her iki komşu kenar aynı açıyla kesişirse o düzgündür.

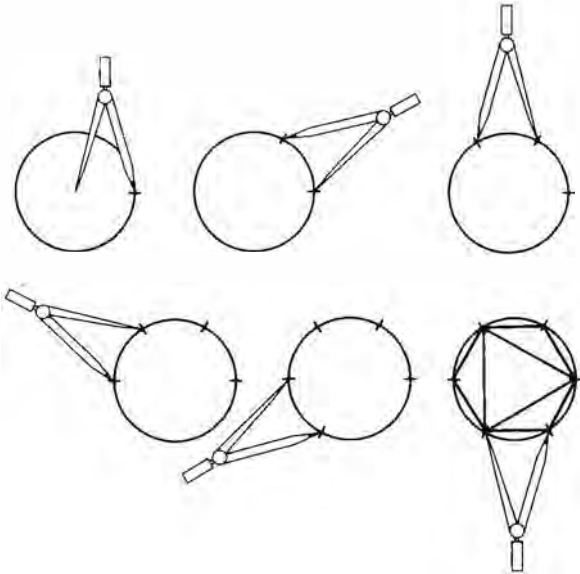
Düzgün çokgenler Öklit geometrisinde temel bir rol oynar ve o zamandan beridir matematiğin birçok alanında esas olmuştur. Öklit'in *Öğeler* kitabının ana amaçlarından biri her yüzeyi aynı düzgün çokgene ait, her köşesi aynı biçimde yerleştirilmiş çokgenlerle sarılı tam olarak beş adet düzgün çok yüzlü katı cisim olduğunu ispat etmektir [5 bölümüne bkz.]. Öklit, bu amaçla yüzeyleri 3, 4 ve 5 yüzlü olan düzgün çokgenler düşünmek zorundaydı. Kenar sayısı daha büyük olanlar düzgün çok yüzlülerin yüzeylerinde oluşmaz.



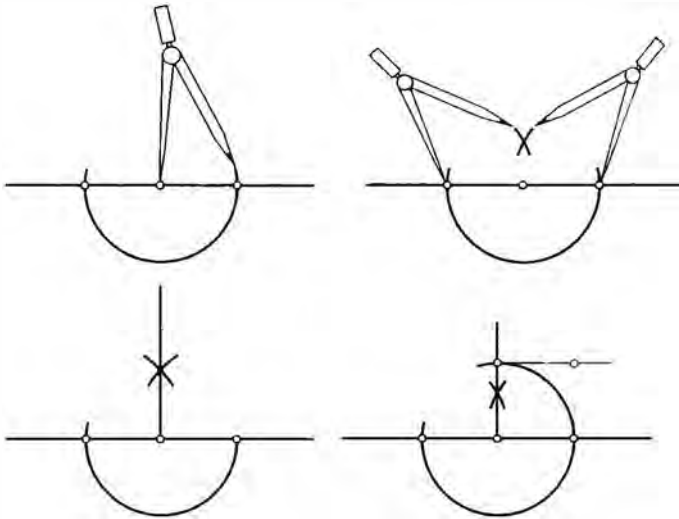
Şekil 141: 3, 4, 5, 6, 7 ve 8 kenarlı düzgün çokgenler. Adları: Eşkenar üçgen, kare, düzgün beşgen, altıgen, yedigen ve sekizgen.

Bu esnada Öklit cetvel ve pergeli gibi geleneksel aletleri kullanarak bu şekilleri çizmek zorundaydı, çünkü onun geometrik teknikleri bu varsayıma dayanmaktaydı. En basit çizimler eşkenar üçgeni ve düzgün altıgeni oluşturmaktır. Bir pergeli kendi başına köşeleri belirleyebilir. Kenarları çizmek için cetvel gerekir ve onun tek rolü budur.

Bir kare çizmek biraz daha zordur, ancak bir kere dik açığı çizmeyi öğrendikten sonra o da basmakalıptır.



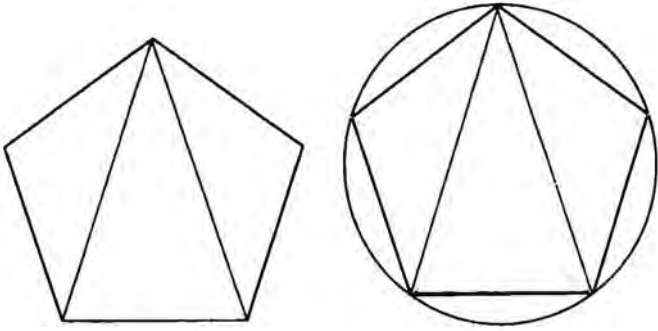
Şekil 142: Bir çember çizin ve üzerinde bir noktayı işaretleyin. Çemberin etrafında aynı uzaklığı koruyarak ardışık noktaları adım adım belirleyin. Bu düzgün altıgenin köşelerini verecektir. Her ardışık iki köşe eşkenar üçgen oluşturur.



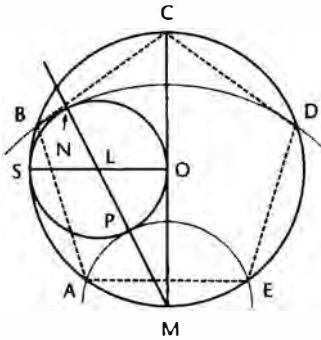
Şekil 143: Bir doğru üzerinde bir nokta alın, pergelin bir ayağını o noktaya koyun ve doğruyu ikiye bölen bir çember çizin. Pergeli daha geniş açın ve kesişen yaylar çizin. Üçüncü şekildeki doğru başlangıçtakiyle dik açıyla kesişir. Karenin diğer kenarlarını elde etmek için adımları tekrarlayın.

Düzgün beşgenle daha fazla uğraştırır. Öklit onu şu şekilde çizmiştir. Düzgün bir beşgenin üç ayrı köşesi her zaman 36° , 72° ve 72° açılı bir ikizkenar üçgen oluşturur. Dahası Öklit'in kitabında daha önce gösterdiği şekilde, işlemi tersine çevirebilir, sonra böyle üçgenlerin köşeleri etrafına bir çember çizerek ve iki 72° açığı iki eş parçaya bölerek düzgün bir beşgen elde edebilirsiniz [1/2 bölümüne bkz.].

Şimdi bütün ihtiyacı ve en zor kısım olan bu özel biçimdeki üçgeni çizmekti. Aslında o, sırayla bir öncekine bağlı diğer bir kurnazca bir çizimi gerektiriyordu. Dolayısıyla Öklit'in on üç kitaplık çalışmasında IV. kitaba kadar düzgün beşgeni elde etmemesi şaşırtıcı değildir.



Şekil 144: *Solda*: Düzgün beşgenin bu üç köşesi 36° , 72° ve 72° açılı bir üçgen oluşturur. *Sağda*: Verili böyle bir üçgende köşeleri etrafında bir çember çizin (koyu gri) ve beşgenin diğer iki köşesini elde etmek için 72° 'li açıları (açık gri) iki eş parçaya ayırın.

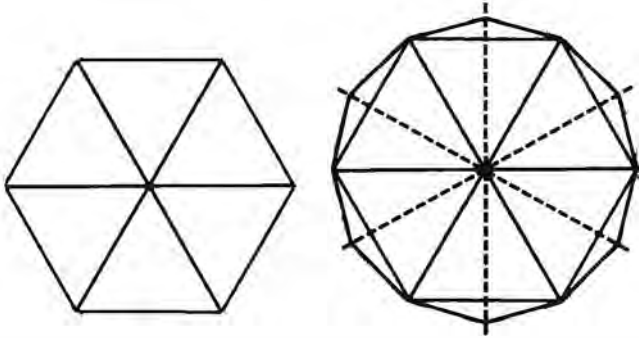


Şekil 145: Düzgün beşgenin daha basit bir çizimi.

Şekil daha basit, modern bir çizimi göstermektedir. O merkezli CM çaplı bir çemberle işe başlayın. CM'yi dik açıyla kesen OS'yi çizin ve onu L'de iki eş parçaya ayırın. L merkezli O'dan geçen ve orijinal çembere S'de teğet geçen bir çember çizin. ML'nin bu çemberi N ve P noktalarında kesmesini sağlayın. Büyük çemberle B, D, A ve E noktalarında kesişen M merkezli N'ye ve P'ye doğru çember yayları çizin. ABCDE (kesikli) düzgün bir beşgendir.

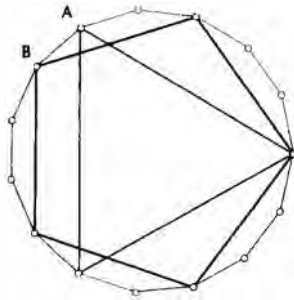
Altıdan Fazla Köşeliler

Öklit açıları merkezinden iki eş parçaya ayırarak herhangi bir düzgün çokgenin kenar sayılarının nasıl iki katına çıkarılacağını da biliyordu. Örneğin, düzgün bir altıgeni düzgün bir on-ikigene dönüştürmenin yolu şudur.



Şekil 146: *Solda:* Bir çemberin içindeki düzgün altıgenle işe başlayın. Onun köşegenlerini çizin. *Sağda:* Açıları merkezden iki eş parçaya ayırın (kesikli çizgi). Bunlar çemberi düzgün on iki genin diğer altı köşesi olacak şekilde keser.

Öklit, düzgün beşgen ve eşkenar üçgen çizimlerini birleştirerek 15 kenarlı bir düzgün çokgen elde etti. Bu işe yarar çünkü $3 \times 5 = 15$ 'tir, 3 ve 5 ortak çarpana sahip değildir.



Şekil 147: 15-gen yapmanın yolu. Eşkenar üçgende belirlenen bir A noktası ve düzgün beşgende belirlenen bir B noktası düzgün on-beşgenin ardışık iki köşesidir. Diğer köşelerin konumlarını bulmak için bir pergeli kullanın.

Öklit, bütün bu kurnazlıkları birleştirerek aşağıdaki köşe sayılı düzgün çokgenlerin nasıl çizileceğini biliyordu:

3 4 5 6 8 10 12 15 16 20 24 30 32 40 48

3, 4, 5 ve 15 sayılarını kullanarak ve onların ardı ardına iki katını alarak herhangi bir düzgün çokgeni yukarıdaki gibi elde edebilirsiniz. Ancak ilki 7 olmak üzere birçok sayı yoktur.

Yunanlar bu olmayan düzgün çokgenler için pergeli ve cetveli kullanarak yapılacak bir çizim bulamadılar. Bu, söz konusu düzgün çokgenlerin olmadığı anlamına gelmez; daha ziyade onları çizmek için cetvel ve pergeli yönteminin yetersiz olduğunu açıklar. Hiç kimse pergeli ve cetveli çizimiyle bu kayıp sayıların bulunabileceğini düşünmemiştir, hatta bu soruyu sormamış gözükmemektedir.

17-Kenarlı Düzgün Çokgen

Yaşamış en büyük matematikçilerden biri olan Gauss neredeyse bir dilbilimci olacaktı. Ancak o, 1796'da 19 yaşındayken 17 sayısının, ikisi birlikte 17-kenarlı düzgün bir çokgenin (on yedigen veya bazen düzgün on yedi kenarlı) cetveli ve pergeli yardımıyla çizilebileceğini ima eden iki özel niteliğini fark etti.

Bu şaşırtıcı olguyu geometri değil, cebir hakkında düşünürken keşfetmişti. Karmaşık sayılarda $x^{17} = 1$ denkleminin tam olarak 17 adet çözümü vardır ve onların düzlemde 17 kenarlı düzgün bir çokgen oluşturduğu ortaya çıktı: [i] bölümündeki 'birin köklerine' bakınız. Bu, o zamandan beri oldukça iyi bilinmekteydi, ancak Gauss herkesin gözden kaçırdığı bir noktaya parmak bastı. Onlar onun gibi 17 sayısının asal olduğunu ve onu 2'nin kuvvetinden 1 fazla olduğunu biliyorlardı; şöyle ki $16 = 2^4$ iken o $16 + 1$ 'dir. Bununla birlikte, Gauss bu iki özelliğin birleştirilmesiyle $x^{17} = 1$ denkleminin klasik cebirsel işlemler –toplama, çıkarma, çarpma ve bölme– yapılarak çözülebileceğini ispat etti. Ayrıca bütün bu işlemler geometrik olarak cetveli ve pergeli yardımıyla gösterilebilirdi. Kısacası, düzgün 17-kenarlı çokgen için cetvelle ve pergelle bir çizim olmalıydı. Bu büyük bir haberdir, çünkü böylesi bir şeyi 2000 yıldan fazladır kimse hayal etmemiştir. Bu hiç beklenmedik bir işti ve tamamıyla benzersizdi. Bu, Gauss'u kariyer olarak ma-

tematik lehine bir karar vermeye itti.

O, açık seçik bir çizim not etmedi, ancak beş yıl sonra *Disquisitiones Arithmeticae* adlı şaheserinde formülünü yazmıştı

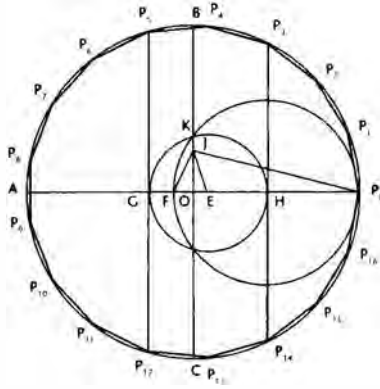
$$\frac{1}{16} [-1 + \sqrt{17} + \sqrt{(34 - 2\sqrt{17})} + \sqrt{(68 + 2\sqrt{17} - 16\sqrt{(34 + 2\sqrt{17}) - 2(1 - \sqrt{17})\sqrt{(34 - 2\sqrt{17})}})]$$

ve on yedigenin çizilebileceğini ve birim uzunlukta bir çizgiden o uzunlukta bir çizgiyi elde edebileceğinizi ispat etti. Çünkü sadece karekökler ortaya çıktığı için formülü daha karmaşık bir geometrik çizime çevirmek mümkündür. Bununla birlikte, çeşitli insanların Gauss'un ispatı üzerine düşünerek keşfettikleri daha etkili yöntemler de vardır.

Gauss, eğer 17 sayısı aynı iki niteliğe -2 'nin herhangi bir kuvvetinden bir fazla olan bir asal sayı- sahip başka bir sayıyla yer değiştirirse aynı savın uygulanabilir olduğunun farkındaydı. Bu sayılar Fermat asalları olarak adlandırılır. Cebir kullanarak eğer $2^k + 1$ asalsa o zaman k 'nin kendisi 0 veya 2 'nin kuvveti olması gerektiği ispatlanabilir, dolayısıyla $k = 0$ veya 2^n 'dir. Bu formdaki bir sayı Fermat sayısı olarak adlandırılır. İlk birkaç Fermat sayısı Tablo 13'te gösterilmiştir.

n	$k = 2^n$	$2^k + 1$	Asal mı?
	0	2	Evet
0	1	3	Evet
1	2	5	Evet
2	4	17	Evet
3	8	257	Evet
4	16	65,537	Evet
5	32	4,294,967,297	Hayır
[Eşittir $641 \times 6,700,417$]			

Tablo 13



Şekil 148: Düzgün 17-gen çizmek için Richmond'un yöntemi. İki dikey AOP_0 ve BOC çaplı çember alın. $OJ = 1/4 OB$ ve açılar $OJE = 1/4 OJP_0$ olacak şekilde ayarlayın. EJF açısı 45° olacak şekilde F noktasını bulun. FP_0 çap ve OB ile K 'de karşılaşacak şekilde bir çember çizin. E merkezli K 'ye doğru AP_0 'ı G ve H 'de kesecek şekilde çember çizin. AP_0 'a dik olarak HP_3 ve GP_5 'i çizin.

İlk altı Fermat sayısı asaldır. İlk üç adedi Yunanların bildiği çizimlere uygun olarak 2, 3 ve 5'ti. Sonraki olan 17 Gauss'un keşfiydi. Sonra iki adet şaşırtıcı sayı geliyordu 257 ve 65.537. Gauss'un içgörüsü bu sayılar kenarlı düzgün çokgenlerin de cetvel ve pergel yardımıyla çizilebilir olduğunu kanıtlar. F.J. Richelot 257-gen düzgün çokgen çizimini 1832'de yayımlamıştır. Lingen Üniversitesinden J. Hermes ömrünün on yılını 65.537 gene adadı. Onun yayımlanmamış çalışması Göttingen Üniversitesinde bulunmaktadır, ancak hatalar içerdiği düşünülmektedir. Kontrol etmenin hesaplamalara değeceği net değildir, çünkü bir çizimin var olduğunu biliyoruzdur. Bir tanesini bulmak hesaplamaların büyük olması haricinde sıradandır. Onun bilgisayar doğrulama sistemleri için iyi bir test olabileceğini sanıyorum.

Bir zaman için bütün Fermat sayılarının asal olduğu düşünülüyordu, ancak 1732'de Euler 7. Fermat sayısı olan $4.294.967.297$ 'nin $641 \times 6.700.417$ biçiminde bir bileşik sayı olduğunu fark etti. (O günlerde hesaplamaların elle yapıldığını

bir yere not edin. Günümüzde bir bilgisayar bunu bir salisede yapacaktır.) Günümüzde daha başka bir Fermat sayısının asal olduğu ispat edilememiştir. Onlar $5 \leq n \leq 11$ için bileşiktir ve bu durumlarda tam bir asal çarpanlara ayırma bilinmektedir.

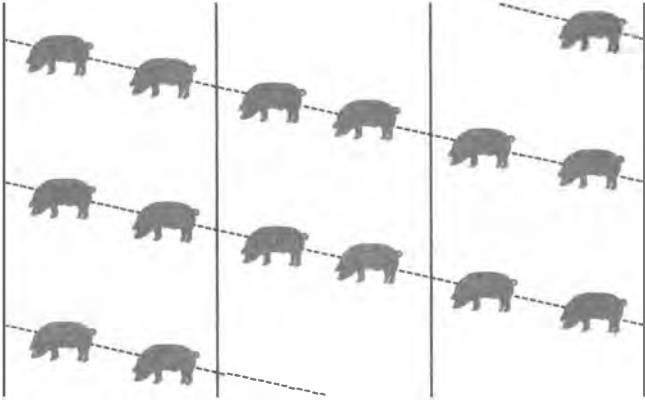
$12 \leq n \leq 32$ için Fermat sayıları bileşiktir, ancak bütün çarpanlar bilinmemektedir ve $n = 20$ ve 24 olduğunda açık seçik çarpanlar hiç de bilinmemektedir. Bir Fermat sayısının asal olup olmadığını anlamak için dolaylı bir test vardır, ancak bu iki sayı testi çökertmektedir. Durumu bilinmeyen en küçük Fermat sayısı $n = 33$ olduğunda ortaya çıkar ve o, $2.585.827.973$ basamağa sahiptir. Şimdi bunu 2 'nin kuvveti şeklinde yazarak ve 1 ekleyerek devam edin... Devasa! Bununla birlikte, bütün umutlar sadece sayının büyüklüğünden dolayı henüz kaybedilmedi: bilinen en büyük Fermat bileşik sayısı $57 \times 2^{2.747.499} + 1$ tarafından bölünebilir olan $F_{2.747.497}$ 'dir (Marshall Bishop 2013).

Sadece bilinen Fermat asallarının bunlar olması mantıklı gözükmemektedir, ancak bu asla kanıtlanmadı. Eğer bu yanlışsa, o halde çizilebilir muhakkak devasa asal sayıda kenara sahip düzgün bir çokgen var demektir.

Duvar Kâğıdı Örüntüleri

Bir *duvar kâğıdı örüntüsü* aynı resmi iki ayrı yönde devamlı tekrar eder: duvardan aşağı ve duvar boyunca (muhtemelen eğimli bir biçimde). Aşağı doğru olan tekrar ortaya çıkar, çünkü kâğıt örüntüyü oluşturacak biçimde dönen bir silindir kullanılarak devamlı bir rulo şeklinde basılır. Duvar boyunca olan tekrar, örüntünün bütün duvarı kaplayacak biçimde yanlara doğru devam etmesini mümkün kılar.

Duvar kâğıdı için mümkün olan tasarımların sayısı devasadır. Ancak birçok farklı örüntü sadece farklı resim kullanılarak aynı biçimde düzenlenir. Dolayısıyla matematikçiler temelde farklı olan örüntüleri simetrilerinden ayırt ederler. Sondaki durumun başlangıçtakiyle aynı olması için örüntüyü kaydırmak, onu döndürmek veya onun yansımasını almak (aynadaki aksi gibi) gibi farklı yollar nelerdir?



Şekil 149: Duvar kâğıdı örüntüleri iki yönde tekrar eder.

Düzlemdeki Simetriler

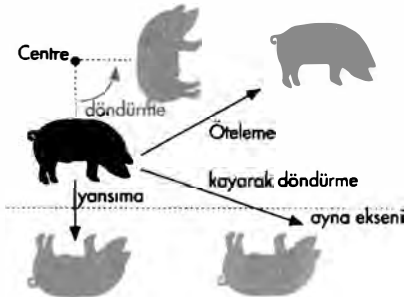
Düzlemde bir tasarımın simetri grubu tasarımın kendisini ona gönderen düzlemin bütün devinimsiz dönüşlerini içerir. Dört önemli devinimsiz hareket vardır:

Öteleme (döndürmeden kaydırma)

Döndürme (dönme merkezi olan belli sabit noktalardan döndürme)

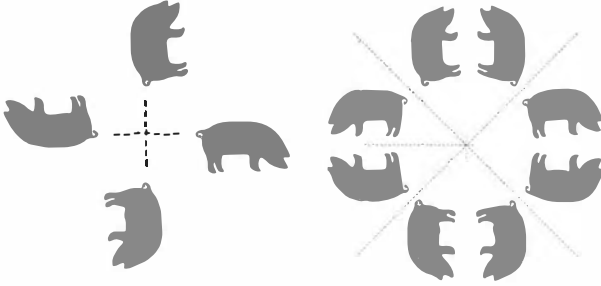
Yansıma (bazı çizgilerden yansıtma, ayna ekseninde)

Kayarak dönme (yansıma ve ayna eksenini boyunca kaydırma)



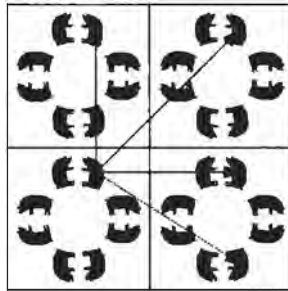
Şekil 150: Dört çeşit devinimsiz hareket.

Eğer tasarım sonlu yayılıma sahipse sadece dönme ve yansıma simetrisi mümkündür. Dönmeler yansımalarla birlikte iki düzlemli grup simetrisine yol açarken sadece dönmeler çembersel grup simetrisine yol açar.



Şekil 151: *Solda*: Çembersel grup simetrisi (burada dönmeler dik açıyla tekrar eder). *Sağda*: İki düzlemli grup simetrisi (kesikli çizgiler ayna eksenini gösterir).

Sonsuza kadar devam eden duvar kâğıdı örüntüleri öteleme ve kayarak döndürme simetrilerine sahip olabilir. Örneğin, iki düzlemli domuz grup tasarımını bir kare örgü üzerine boyayabiliriz ve onu düzlemi döşeyecek şekilde kullanabiliriz. (Şema sadece sonsuz örgü dizilimini göstermektedir.) Sıra öteleme simetrisi (örneğin, sürekli oklar) ve kayarak dönme simetrisi (örneğin, kesikli oklar) göstermektedir (örneğin, kesikli oklar).



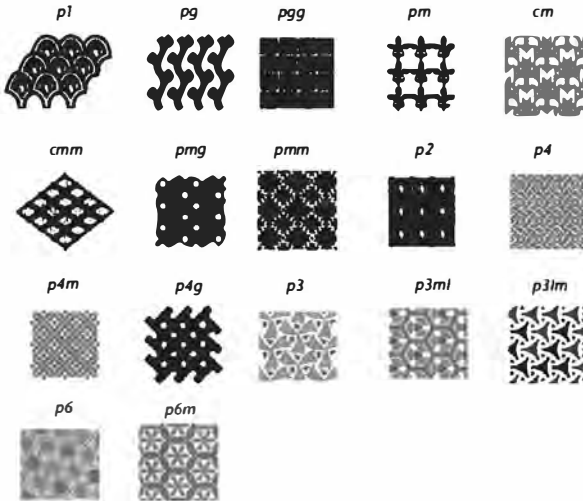
Şekil 152: Kayma (sürekli oklar) ve kayarak dönme (kesikli oklar) gösteren kare örgünün dizilimleri.

Duvar Kâğıdının 17 Çeşit Simetrisi

Çiçek örüntülü duvar kâğıdım için tek simetri örüntünün tekrar ettiği iki yöne yayılan veya sırayla tekrar eden böyle birçok kaymadır. Bu en basit duvar kâğıdı örüntüsü çeşididir ve matematiksel anlamda her duvar kâğıdı tasarımı tanım olarak bu örgü simetrisine sahiptir. Temelde duvar kâğıdı olarak kullanılan 'bu değişmez kalsın' dışında simetrisi olmayan böyle duvar kâğıtları olmadığını iddia etmiyorum. Sadece böylesi örüntüleri bu özel tartışmanın dışında bırakıyorum.

Çok sayıda duvar kâğıdı çeşidi dönme ve yansıma gibi fazladan simetrilere sahiptir. George Pólya ve P. Niggli 1924'te tam olarak 17 adet duvar kâğıdı örüntüsü olduğunu ispat ettiler.

Söz konusu sorun üç boyutta atomik örgülerin ve kristallerin olası simetrilerini listelemek için ele alınır. Burada 230 çeşit vardır. Bu cevap merak uyandırıcı biçimde birisi duvar kâğıdının iki boyutlu daha kolay olan versiyonunu çözmeden keşfedilmişti.



Şekil 153: Duvar kâğıdı örüntüsünün 17 çeşidi ve onların uluslararası kristalografik sembolize edilişi. (Bir Wolfram web kaynağı olan MathWorld'den.)

DOĞUM GÜNÜ AÇMAZI

Bir futbol maçı boyunca (Amerikan futbolu değil, ayaktopu) sahada normalde 23 kişi vardır: iki takımın 11'er oyuncusu ve bir hakem. (Sahanın kenarında yardımcı iki hakem ve bir de daha uzakta olan vardır, ancak biz onları sedye taşıyıcılar, kızgın teknik adamlar ve saha işgalcileriyle birlikte yok sayacağız.) Bu 23 kişinin iki veya daha fazlasının aynı doğum gününe sahip olma olasılığı nedir?

Olma Olasılığı Olmamasından Daha Fazla

Eğer daha önceden görmediyseniz cevap şaşırtıcıdır.

Hesaplamaları basitleştirmek için sadece 365 farklı doğum günü olduğunu varsayın (artık yılda doğanlar için 29 Şubat yoktur) ve bu tarihlerin her biri aynı olasılığa sahiptir: $1/365$. Gerçek rakamlar yılın belli tarihi veya zamanı diğerlerinden daha olası olmakla küçük ama önemli farklılıklar gösterir; bu farklılıklar ülkeden ülkeye değişir. Eğer bu faktörleri dikkate alırsanız sonuç özellikle şaşırtıcıdır, aranan olasılık çok fazla değişmez.

Biz her oyuncu için olasılıkların diğerinden bağımsız olduğunu varsayalım ve diyelim ki eğer oyuncular farklı doğum günlerine sahip olsun diye kasten seçildiyse bu doğru olmayacaktır. Veya örneğin; GnuX Prime uzay buzul dünyasında bu işler nasıldır? Burada uzaylı canavarların her nesli yer altındaki kış uykusu tüplerinden eşzamanlı olarak doğar ve farklı nesilden olanlar dünyadaki ağustos böceklerinin çiftleşmesi ve insanların eşleşmesi gibi aynı takımda oynamaz. İki GnuXo-

id sahaya gelir gelmez onların aynı doğum gününü paylaşma olasılığı anında 1 olur.

Benzer bir olasılık bulmak daha kolaydır: 23 doğum gününün *farklı* olması olasılığı. Daha sonra olasılıkları hesaplamak için olan kurallar bunu 1'den çıkararak cevabı bulmamızı söyler. Hesaplamayı tarif etmek için insanların sahaya aynı anda geldiğini varsaymak yardımcı olur.

- İlk kişi vardığında hiç kimse yoktur. Dolayısıyla onların doğum gününün sahada mevcut olandan farklı olma olasılığı 1'dir (kesin).

- İkinci kişi vardığında onların doğum günü birinciden farklı olmak zorundadır, dolayısıyla 365 içinden 364 adet seçenek vardır. Bunun olma olasılığı 364/365'tir.

- Üçüncü kişi geldiğinde onların doğum günü ilk iki kişinkinden farklı olmak zorundadır, dolayısıyla 365'in içinden 363 adet seçenek vardır. Olasılıkları hesaplamak için olan kurallar iki bağımsız olayın olasılığını hesaplamak istediğimizde onların olasılıklarını birlikte çarpmamız gerektiğini söyler. Dolayısıyla şimdiye kadarki tekrar etmeyen doğum günü olma olasılığı $364/365 \times 363/365$ 'tir.

- Dördüncü kişi vardığında onların doğum günü ilk üç kişiden farklı olmalıdır, dolayısıyla şimdiye kadarki tekrar etmeyen doğum günü olasılığı $364/365 \times 363/365 \times 362/365$ 'tir.

- O halde örüntü şimdi daha açık olmalıdır. k adet kişi geldiğinde bütün k doğum günlerinin farklı olma olasılığı

$$p(k) = 364/365 \times 363/365 \times 362/365 \times \dots \times (365 - k + 1) / 365 \text{'tir}$$

$k = 23$ olduğunda onun değerinin 1/2'den hafifçe az, 0,492703 olduğu ortaya çıkar. Dolayısıyla en azından iki kişinin aynı doğum gününe sahip olma olasılığı $1 - 0,492703$ yani 0,507297'dir.

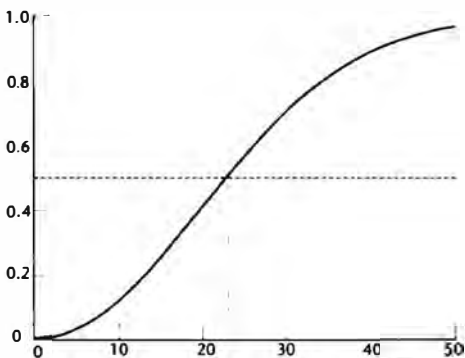
Bu 1/2'den birazcık fazladır.

Diğer bir deyişle: sahadaki 23 kişiden en az ikisinin aynı doğum gününe sahip olma olasılığı, olmama olasılığından daha büyüktür.

Aslında 23 bu sayının doğru olması için olan en küçük sayıdır. 22 kişiyle olasılık $1/2$ 'den biraz fazla olarak $P(22) = 0,52305$ 'dir. O halde, en az iki kişinin aynı doğum gününe sahip olma olasılığı $1 - 0,52305$, yani $0,47695$ 'tir.

Bu $1/2$ 'den birazcık azdır.

Şekil k 'ye bağlı $P(k)$ 'yi göstermektedir, $k = 1$ 'den 50'ye kadar. Yatay çizgi $1/2$ başa baş noktasını gösterir.



Şekil 154: $P(k)$ 'nin k 'ye nasıl bağlı olduğu.

Sürpriz, 23 sayısının ne kadar küçük olduğudur. Seçilebilecek 365 adet tarihle, tesadüfün gerçekleşmeme olasılığının gerçekleşmesinden daha olası olması için daha fazla kişiye ihtiyaç duyduğunuz hayal etmek kolaydır. Bu önsezi yanıltır, çünkü fazladan insan getirdikçe devamlı azalan dizinin olasılıkları çarpılır. Dolayısıyla sonuç beklediğimizden daha hızlı azalır.

Sizinle Aynı Doğum Gününe Sahip Olma

Sayının ne kadar küçük olduğuna şaşırmamızın belki başka bir nedeni vardır. Belki de soruyu farklı bir soruyla karıştırıyoruzdur: onlardan birinin doğum gününün sizinle aynı olma olasılığının $1/2$ 'den büyük olması için orada kaç kişi olmalıdır?

Bu soru analiz etmek için biraz daha kolaydır. Başa geri döneriz ve hiç kimsenin sizinle aynı doğum gününe sahip ol-

mamasını hesaplarız. Her yeni kişi değerlendirildikçe, onların doğum gününün sizinkinden farklı olma olasılığı her zaman aynıdır, şöyle ki

$$364/365.$$

Dolayısıyla k adet kişiyle bütün doğum günlerinin sizinkisinden farklı olması olasılığı $364/365 \times \dots \times 364/365 = (364/365)^k$ 'dir.

Burada çarpılan sayılar azalmaz. Biz onlardan daha fazla kullandıkça onların sonucu azalır, çünkü $364/365$ 1'den daha küçüktür; ancak azalma oranı daha yavaştır. Aslında biz bu sayının $1/2$ 'nin altına düşmeden önce $k = 253$ kişiye ihtiyaç duyarız:

$$(364/365)^{253} = 0,499523$$

Şu halde şaşırtıcı olan bu sayının tersine çok büyük olmasıdır.

Jüpiter'de Doğum Günleri

Biz 23'ü elde ettik, çünkü bir yılda 365 gün vardır. Burada 365 sayısı matematiksel bir öneme sahip değildir: o astronomik nedenlerden doğar. Matematiksel bakış açıyındansa, bir yıldaki gün sayısını istediğimiz gibi belirleyebileceğimiz daha genel bir soruyu analiz etmek zorundayızdır.

Jüpiter'in hidrojen-helyum atmosferinde süzülen bloonlar denen hayali uzaylıların doğum günü sorusuyla başlayacağız. Jüpiter güneşe dünyadan daha uzaktadır, dolayısıyla -Jüpiter'in güneşin yörüngesinde dönmesi için gereken zaman- 'bir Jüpiter yılı' bizimkinden daha uzundur (bizim günümüzle 4332,59 gün). O aynı zamanda kendi eksenini etrafında daha hızlı döner, dolayısıyla onun kendi eksenini etrafında bir kere dönmesi olan 'günü' bizimkinden daha kısadır (9 saat 55 dakika 30 saniye). Dolayısıyla Jüpiter'in bir 'yılı' yaklaşık olarak 10.477 Jüpiter günü eder.

Benzer hesaplamalar, her biri 40 bloondan oluşan üç takım ve bir hakemin dahil olduğu süzülen top oyununda, 121 bloonun en az ikisinin aynı doğum gününe sahip olma olasılığının

1/2'den birazcık fazla olduğunu gösterir. Aslında, 120 bloonun olasılığının 0,495455 olduğu halde bu $1 - (10.475/10.477 \times 10.475/10.477 \times \dots \times 10.356/10.477) = 0,501234$ olur.

Jüpiterli matematikçiler her yıl farklı sayıdaki günlerden dolayı tekrar tekrar böyle olasılıkları hesaplamaktan memnun kalmamış ve genel bir formül geliştirmişlerdir. Bu çok hassas değildir, ancak bu oldukça iyi bir yakınsamadır. Nitekim genel soruyu cevaplar: varlıklardan en az ikisinin aynı doğum gününe sahip olma olasılığının 1/2'yi geçmesi için onlardan kaçısı mevcut olmalıdır? Jüpiterliler tarafından bilinmemesine rağmen Neeblebruct gezegeninden görünmez bir uzaylı işgalciler donanması Jüpiter'in etrafında yarım Jüpiter yüzyılıdır dönmektedir. Yıllarca Jüpiterli kırk iki matematikçiden birçoğunu onların sırrını keşfetmek umuduyla kaçırmışlardır. Engel, Neeblebruct yıllarının tam olarak $42^4 = 3.111.696$ Neeblebruct günü içermesidir ve hiç kimse 121'in yerine ne geleceği hakkında başarılı çalışmalar yürütemedi.

Bu sorun Jüpiterlilerin sırrı kullanılarak çözülebilir. Onlar, içerisinde seçilecek n adet tarihten ve mevcut k adet varlık arasından, onlardan en az ikisinin aynı doğum günü tarihine sahip olması olasılığının ilk olarak 1/2'yi geçmesi k 'nin, 4'ün e logaritma tabanında karekökü olan $\sqrt{\log 4}$ 'nün 1,1774 değerine eşit sabitken, $\sqrt{\log 4} \times \sqrt{n}$ değerine yaklaştığında olduğunu ispatladılar.

Bu formülü üç örnek üzerinde deneyelim:

Dünya: $n = 365$ ve $k \sim 22,4944$

Mars: $n = 670$ ve $k \sim 30,4765$

Jüpiter: $n = 10$ ve $k \sim 120,516$

Bir sonraki sayıya yuvarlarsak başa baş noktası 23, 31 ve 121 elemandan oluşur. Bunlar aslında net sayılardır. Ancak formül daha büyük n 'ler için çok da hassas değildir. $n = 3.111.696$ kabul edilip bir Neeblebruct yılına uygulanırsa formül 2077'ye yuvarlanan $k = 2076,95$ sonucunu verir. Ayrıntılı bir hesaplama 1/2'den birazcık az olan $P(k) = 0,4999$ olduğunu gösterir. $P(k) = 0,5002$ için doğru sayının 2078 olduğu ortaya çıkar.

Formül, doğum günü tesadüfünün olma olasılığının olma-
ma olasılığından büyük olması için gerekli elemanların neden
bu kadar küçük olması gerektiğini açıklar. O bir yıldaki günle-
rin sayısının *karekökü* biçimindedir. Bu değer mevcut günle-
rin sayısına oranla oldukça küçüktür. Örneğin bir milyon gün
süren bir yılın karekökü sadece bindir.

Beklenen Sayı

Bu sorunun bilindik bir versiyonu da şudur:

Mümkün olan n adet doğum günüyle, en az iki elemanın
aynı doğum gününü paylaşması için gerekli bu elemanların
beklenen sayısı nedir? Şu durumda, ihtiyacımız olan ortalama
eleman sayısı nedir?

$n = 365$ olduğunda cevabın 23,9 olduğu ortaya çıkar. Bu,
23'e o kadar yakındır ki iki soru bazen birbirine karışmaktadır.
Yine iyi bir yakınsama formülü vardır:

$k \sim \sqrt{(\pi/2)} \times \sqrt{n}$ ve $\sqrt{(\pi/2)}$ sabiti 1,2533'e eşittir. Bu, $\log 4 =$
1,1774'ten biraz büyüktür.

Frank Mathis doğum günü tesadüfünün olma olasılığının
olmamasından büyük olması için gereken eleman sayısı için
daha hassas bir formül buldu:

$$1/2 + \sqrt{(1/4 + 2n \log 2)}$$

Formüller konusunda deha olan kendi kendini yetiştirmiş
Hint matematikçi Srinivasa Ramanjuan beklenen eleman sayı-
sı için daha hassas bir formül buldu:

$$\sqrt{(\pi n/2)} + 2/3 + 1/12 \sqrt{(\pi/2n)} - 4/135n$$

GİZLİ ŞİFRELER

Şifrelerden bahsedince hemen James Bond'u veya *The Spy Who Came in from the Cold* [*Soğuktan Gelen Casus*] kitabını düşünürüz. Ancak neredeyse hepimiz gündelik hayatımızda internet bankacılığı gibi tamamıyla normal ve yasal işlerimiz için onları kullanırız. Bizim bankayla olan iletişimimiz suçlu-lar mesajları okuyamasın ve bizim paramıza erişemesin diye şifrelenmiştir; bir kodun içine yerleştirilmiştir. En azından kolay bir şekilde ulaşamamaları için.

İngiliz alfabesinde 26 adet harf vardır ve pratik kodlar sıklıkla 26 sayısını kullanır. Özellikle Almanlar tarafından II. Dünya Savaşı sırasında kullanılan Enigma makinesi harflere uygun olarak 26 konumlu çarkları kullanırdı. Dolayısıyla bu sayı şifre bilime mantıklı giriş yolu sağlamaktadır. Bununla birlikte, bu bağlamda hiçbir matematiksel özelliği yoktur ve benzer ilkeler diğer sayılarla da işler.

Caesar (Sezar) Anahtarı

Şifrenin tarihi MÖ 1900 dolaylarına en az Antik Mısır'a kadar gider. Julius Caesar özel mektuplaşmaları ve askeri gizlilik için basit şifreleme kullanırdı. Onun biyografisini yazan Suetonius 'O söyleyecek gizli herhangi bir şeyi varsa, onu şifreli yazardı; bunu da hiçbir kelimenin anlaşılamayacağı şekilde alfabenin harflerinin yerlerini değiştirerek yapardı. Eğer birisi bunları çözmek ve anlamlarını elde etmek isterse o alfabenin dördüncü harfi olan D'yi birinci harf olan A ile ve diğerlerini de bu şekilde değiştirmeliydi' diye yazmıştı.

Caesar'ın zamanında alfabe J, U ve W harflerini içermekmekteydi, ancak biz günümüzün alfabesiyle çalışacağız çünkü o bize daha tanıdık gelir. Onun fikri alfabeyi normal sırasıyla yazmak ve sonra değiştirilmiş versiyonunu belki şu şekilde onun altına yazmaktır:

ABCDEFGHIJKLMN O P Q R S T U V W X Y Z F G H I J K L M -
N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E

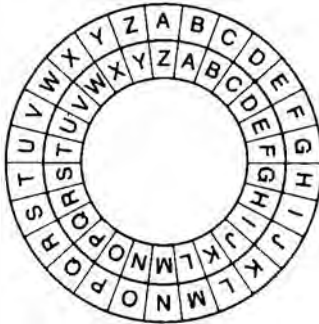
Şimdi bir mesajı her harfini normal alfabedekinden değiştirilmiş alfabedeki aynı pozisyondaki harfle değiştirerek şifreleyebilirsiniz. O halde A, F'ye; B, G'ye ve bu şekilde devam edecek şekilde dönüşür. Şu şekilde:

J U L I U S C A E S A R
O Z Q N Z X H F J X F W

Mesajı şifrelemek için sadece diğer yöndeki alfabenin arasındaki mektuplaşmayı okursunuz:

O Z Q N Z X H F J X F W
J U L I U S C A E S A R

Alfabeyi otomatik şekilde sarmalayan pratik bir cihaz yapmak için harfleri bir daire ya da silindir üzerine yerleştiririz:



Şekil 155: Sarmalamak için pratik cihazlar.

Caesar anahtarı aşağıda açıklanan nedenlerden dolayı güvenli olmak için çok basittir. Ancak o bütün anahtarların içerdiği şifreleme sisteminin bazı temel fikirlerini içerir:

Şifresiz metin–orijinal mesaj

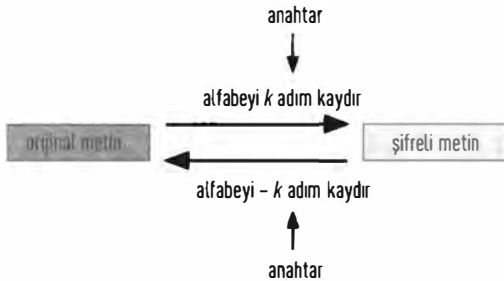
Şifreli metin– kodlanmış versiyon

Şifreleme algoritması–orijinal metni şifreli metne dönüştürmek için kullanılan yöntem

Deşifre etme algoritması– şifreli metni orijinal metne dönüştürmek için kullanılan algoritma

Anahtar–metni şifreleme ve deşifre etmek için gerekli olan gizli bilgi.

Caesar anahtarında şifrelemenin yolu alfabenin kaydırıldığı adımların sayısıdır. Şifreleme algoritması ‘anahtar kadar alfabeyi kaydır’ demektir. Deşifre etme algoritmasıysa ‘alfabeyi ters yönde kaydır’ demektir, bu da anahtarı aynı doğrultuda ancak ters olarak kaydırmaktır.



Şekil 156: Anahtar sisteminin genel özellikleri.

Bu şifreleme sisteminde şifreleme anahtarı ve deşifre etme anahtarı yakından ilişkilidir: birisi diğerinden bir eksiktir, bu da sadece ters yönde bir kaymayı işaret eder. Böylesi durumlarda şifreleme anahtarını bilmek deşifreleme anahtarını bilmek demektir. Böylesi sistemler *simetrik anahtar şifreleme* olarak adlandırılır.

Görünüşe göre Caesar daha karmaşık şifrelemeler de kullanmıştır.

Matematiksel Formülasyon

Caesar şifrelemesini modüler aritmetik kullanarak matematiksel olarak ifade edebiliriz [7 bölümüne bkz.]. Bu durumda

modül alfabedeki harflerin sayısınınca 26 olur. Aritmetik her zamanki gibi uygulanır, ancak fazladan bir ekleme vardır: 26'nın tam katı olan herhangi bir tamsayı sıfırla yer değiştirilebilir. Bu tam olarak kaymış alfabeyi başlangıç konumuna getirmek için 'sarmalamak' yapmamız gereken şeydir.

O halde A-Z'ye harfler 0-25 arası sayılarla gösterilecektir, $A = 0$, $B = 1$, $C = 2$ ve en son $Z = 25$ 'tir. A'dan (0 konumundaki) F'ye (5 konumundaki) kayan şifreleme anahtarı matematiksel kural olarak şöyledir:

$$n \rightarrow n + 5 \pmod{26}$$

V (21 konumundaki) $21 + 5 = 26 = 0 \pmod{26}$ olarak A'yı temsil ederken, U'nun (20 konumundaki) Z'yi temsil eden $20 + 5 = 25 \pmod{26}$ sayısı olduğuna dikkat ediniz. Bu, matematiksel formülün alfabenin sarmalamasını nasıl sağladığını göstermektedir.

Deşifre etme anahtarı benzer bir kuraldır:

$$n \rightarrow n - 5 \pmod{26}$$

$n + 5 - 5 = n \pmod{26}$ 'ya eşit olduğundan, deşifre etme şifrelemeyi çözer.

Genel olarak '*k* basamak sağa kaydır' anlamına gelen *k* anahtarıyla, şifreleme anahtarının kuralı

$$n \rightarrow n + k \pmod{26}$$

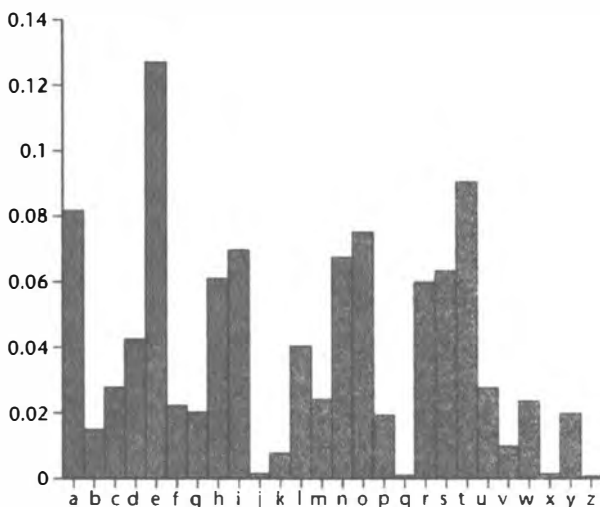
ve deşifre etme anahtarının kuralı da

$$n \rightarrow n - k \pmod{26} \text{ 'dır.}$$

Şifrelemeyi matematiksel dile dönüştürmenin avantajı onları hassas olarak tanımlayabilmemiz ve ilgili alfabeyi dert etmeden özelliklerini analiz edebilmemizdir. Şimdi her şey *sayılarla* işler. Bu, ayrıca bize *a, b, c...* küçük harfler, noktalama işaretleri ve sayılar gibi fazladan sembolleri göz önünde bulundurmamıza izin verir. Sadece bir kereliğine 26'yı daha büyük bir sayıyla değiştirip ve her sembole bir sayı atayın.

Caesar Şifrelemesinin Kırılması

Caesar şifrelemesi oldukça emniyetsizdir. Tarif edildiği üzere sadece 26 olasılık vardır, dolayısıyla onların hepsini şifrelenmiş anlamlı mesajı bulana kadar deneyebilirsiniz. Bu *yerine koyma kodu* denen alfabenin sadece kaydırılmadığı aynı zamanda karıştırıldığı bir versiyonda olmayacaktır. Bu durumda oldukça devasa olan $26!$ kod [$26!$ bölümüne *bkz.*] vardır. Ancak böyle kodları kırmak için de basit bir yol vardır. Verili herhangi dilde bazı harfler diğerlerinden daha bol bulunur.



Şekil 157: Sıradan bir İngilizce metinde ilgili harflerin bulunma sıklığı.

İngilizcede en bol bulunan harf E'dir, o genelde %13 oranında gözüktür. Sonrasında %9 ile T gelir, daha sonra %8 ile A gelir vesaire. Eğer şifrelenmiş uzun bir metni ele geçirebilerseniz ve alfabenin harflerinin yerlerinin değiştirilmesiyle oluşturulduğundan şüphelenirseniz bütün harflerin bulunma sıklıklarını hesaplayabilirsiniz. Onlar muhtemelen kuramsal resimle tam örtüşmeyecektir, çünkü metinler çeşit çeşittir. Ancak diyelim ki Q harfi şifreli metinde diğerlerinden daha fazla belirmişse

onun yerine E'yi koyabilirsiniz. Eğer bir sonraki en çok tekrar eden harf M ise onun yerine T koyarsanız ne olacağına bakın ve böyle devam edin. Harfleri biraz çalkalayabilirsiniz, böylece daha az olasılık elde edersiniz.

Örneğin, şifreli metnin kısmen şöyle olduğunu varsayalım,

X J M N Q X J M A B W

Ve siz bütün şifreli metinde en çok tekrar eden üç harfin sırasıyla Q, M ve J olduğunu biliyor olun. Kalan yerler boş kalacak şekilde Q yerine E, M yerine T ve J yerine A koyun:

-A T - E -A T- -

Mesajın aslında şöyle olduğunu tahmin etmek çok da zor değildir

M A T H E M A T I C S

Daha fazla şifreli metin elde ettikçe neyin anlamlı olduğunun farkına varacaksınız, çünkü X'in M'yi, N'nin H'yi A'nın I'yı, B'nin C'yi ve W'nun S'yi gösterdiğini tahmin edersiniz. Eğer şifreli metnin başka bir kısmında

W B A Q R B Q H A B M A L R okursanız tereddütle onu şöyle deşifre edersiniz

S C I E - C E - I C T I - - ve bunun da şöyle olması gerektiğini sezersiniz

S C I E N C E F I C T I O N

N'nin iki defa ortaya çıkması yararlı bir doğrulama sağlar ve siz artık N, F ve O'nun neyi şifrelediğini bilirsiniz. Bu süreç elle yapılırsa bile hızlıdır ve kodu kırar.

Binlerce farklı şifreleme yöntemi vardır. Algoritma veya anahtar bilinmeden mesajların nasıl çözüleceği yani kodu kırma süreci koda bağlıdır. Kırılması oldukça imkânsız bazı pratik yöntemler vardır, çünkü kodu çözücü yeterli bilgiye sahip olmadan kod devamlı değişmektedir. II. Dünya Savaşında bu 'tek kullanımlık bloknotlarla' sağlanıyordu: temelde her biri kısa bir mesaj için bir kere kullanıldıktan sonra imha edilen karmaşık anahtardan oluşan bir bloknot. Böyle yöntemlerin ana sorunu ajanın bloknotu yanında taşıması gerekmesidir

–veya günümüzde de bazı elektronik aletlerin aynı rolü oynamaktadır– ve bu başkaları tarafından ele geçirilebilir.

Enigma Makinesi

En ünlü şifreleme sistemlerinden birisi II. Dünya Savaşında kullanılan Alman Enigma makinesiydi. Kod Bletchley Park'taki öncü bir bilgisayar mühendisi ve içlerinde en ünlüsü olan Alan Turing dahil matematikçiler ve elektronik mühendisleri tarafından kırılmıştı. Onlar bu süreçte ellerinde onun şifresini kırma yolunda önemli gelişme sağlayan Polonyalı şifre bilimcilerin onlara sağladığı çalışan bir Enigma makinesi olmasından çok faydalanmışlardı.

Daha zor olan Lorenz şifresi dahil ve bu sefer ellerinde bir makine olmaksızın diğer Alman kodları da kırılmıştı. Bunun yerine Ralph Tester başkanlığındaki bir şifre analizciler takımı makinenin olası yapısını onun tarafından gönderilen mesajlardan çıkarımda bulundular. Sonra Tutte'nin aklına parlak bir fikir geldi ve kodu kırmak üzere makinenin nasıl çalıştığına ilişkin yararlı bilgiler sağlayan bir başlangıç yaptı. Bundan sonra gelişmeler daha da hızlandı. Bu kodu kırmak için gerekli bir iş olarak Thomas Flowers başkanlığındaki bir takım tarafından tasarlanan ve inşa edilen Colossus isimli elektronik bir alet gerekiyordu. Colossus aslında özel bir amaçla tasarlanmış öncü bir elektronik bilgisayardı.

Enigma makinesi orijinal metni girmek için bir *klavye* ve her biri alfabenin harflerine uygun olarak 26 konumlu çarklar serisi içeriyordu. Başlangıçtaki makineler üç çarka sahipti, daha sonra bu beş çarka; Alman Donanması için herhangi bir günde üç adedi seçilen sekiz çarka sahip bir sete yükseltildi. Çarkların amacı orijinal metnin harflerini *her yeni bir harf yazıldığında değiştirecek şekilde* karıştırmaktı. Yöntem tam haliyle karmaşıktır: şuraya bakınız;



Şekil 158: Bir Enigma makinesi.

<http://www.codesandciphers.org.uk/enigma/example1.htm>.

Kabaca konuşursak süreç şu şekilde işliyordu:

Her çark Caesar şifresinde olduğu gibi alfabeyi kendi konumuyla belirlenen bir dönüşle karıştırıyordu. Bir harf ilk çarka girdi yapıldığı zaman ikinci çark değiştirilmiş sonucu bir daha değiştirirdi; sonuç üçüncü çarka geçer ve orada da üçüncü defa değiştirilirdi. Sinyal bu noktada harf çiftlerini birbirine bağlayan ve sonuçtaki harfi bağlı olduğu harf çiftiyle değiş tokuş ettiren 13 kablolu *yansıtıcıya* ulaşır. Daha sonra çıkan sonuç verili girdiye göre şifreli harfin son halini üretecek biçimde üç çarkı tersten geçer.

Şifrelenmiş metin *ışıklı panodan* okunur: her birisinin gerisinde alfabeden bir harf olan ve orijinal metinde yazılı olan harfin şifreli metinde karşılığını gösteren 26 adet lamba.

Cihazın en ustalıklı özelliğiye orijinal metin ile şifreli metin arasındaki iletişimde ardışık her bir harf vuruşunda onu sonuç olan harfe nasıl değiştirdiğidir. Her yeni bir harf klavyede yazıldığı zaman çark bir sonraki çarka bunu iletir,

dolayısıyla onlar alfabeyi farklı biçimlerde değiştirirler. Her seferinde sağ taraftaki bir adım önde gider. Ortadaki çark, sağdaki çark Z'den A'ya geri döndüğünde bir adım ileri geçer. Soldakiyse ortadaki çarka tâbi olarak aynı hareketi yapar.



Şekil 159: Bir üç çarklı serisi.

Bu sebeple çarklar bir arabadaki kilometre ölçer gibi çalışır (elektronikleri çıkmadan önce). Burada rakam 'birler basamağı' her seferinde bir adım atacak şekilde 0'dan 9'a sonra tekrar 0'dan başlayacak biçimde devreder. 'Onlar' basamağı aynı şeyi yapar, ancak birler basamağı 9'dan 0'a döndüğünde onun tarafından değiştirilirse. Benzer biçimde 'yüzler basamağı' ancak onlar basamağından değiştiren bir rakam olan 9 tarafından 1 artırılır. Bundan dolayı üç rakam serisi 000'dan 999'a kadar her seferinde 1 artarak 999'a gider ve daha sonra 000'a geri döner.

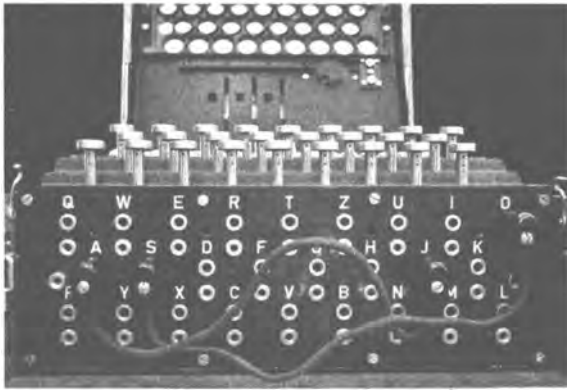
Bununla birlikte Enigma motorları 10'dan ziyade A'dan Z'ye kadar harfler olan 26 'rakama' sahiptir. Ayrıca onlar herhangi bir başlangıç konumundan $26 \times 26 \times 26 = 17.576$ farklı konuma ulaşabilecek şekilde işleme koyulabilir. Fiili kullanımdaysa, bu başlangıç konum günün başlangıcında belirlenirdi ve 24 saat içinde sıfırlanacak şekilde kullanılırdı.

Kademelendirme işlemini sol, orta ve sağ olacak açıdan anlattım, ancak makine aslında çarkların sıralanabileceği altı muhtemel konumdan birinden başlanacak şekilde kurulabilir:

bu da muhtemel başlangıç ihtimallerini 105.456 ihtimale, yani altıya katlar.

Askeri amaçlı kullanımda fazladan bir güvenlik seviyesi harf çiftlerinden hangisi kablolar aracılığıyla diğer eşiyile bağlanmışsa onları değiş tokuş eden anahtar tablosu tarafından sağlanıyordu. Böyle kablolar on adede kadar kullanıldığında 150.738.274.937.250 olasılığa yol açar. Anahtar tablosu yine her gün değiştirilirdi.

Sistem kullanıcılar için pratik bir avantaja sahiptir: o simetriktir. Aynı makine mesajları şifrelemek için de kullanılabilir. Herhangi bir günde başlangıç ayarları bütün kullanıcılarla iletilmelidir: Almanlar bunu başarmak için tek kullanımlık bloknotlar kullandılar.



Şekil 160: İki bağlantı kablosu yerleştirilmiş anahtar tablosu.

Enigma Şifresini Kırma

Bununla birlikte, süreç yanında açıkları getiriyordu. Bu durumlardan en apaçık olanı düşmanın –bu bağlamda bunlar müttefik devletlerdir– ayarlar üzerinde çalışabileceğiydi, böylece o gün içinde gönderilen her mesaj deşifre edilebilirdi. Elbette diğer başka açıklar da vardı. Özellikle ara sıra hatayla ardışık iki günde aynı ayarlar kullanıldığında olduğu gibi durumlarda kod korunmasızdı.

Bu zayıflıkları kullanarak Bletchley Parktaki takım işlevsel olarak ilk defa Enigma kodunu Ocak 1940'ta kırmıştı. Onların çalışması büyük oranda 1932'den beri Enigma kodunu kırma-ya çalışan Marian Rejewski yönetimindeki Polonyalı bir grup şifre analisti tarafından elde edilen bilgilere ve fikirlere dayanıyordu. Polonyalılar günün ayarları kullanıcılara ulaştırılırken oluşan bir kusuru fark etmişlerdi. Doğrusu bu, üzerinde durulacak ayarlama adedini 10.000 trilyondan 100.000 seviyesine indirmişti. Polonyalılar bu ayarları kataloglayarak verili bir günde hangi ayarın kullanıldığı üzerinde hızlıca çalışabiliyorlardı. Onlar kendilerine yardım eden siklometre denen bir makine icat etmişlerdi. Kataloğu hazırlamak bir yıllarını almıştı, ancak tamamlandığında günün ayarlarının çıkarımını yapmak ve kodu kırmak sadece 15 dakikalarını alıyordu.

Almanlar sistemlerini 1937'de geliştirdiler ve Polonyalılar da yeniden işe koyuldular. Onlar en güçlüsü olan *bomba kryptologiczna* (şifre bombası) diye adlandırdıklarına benzer birçok yöntem geliştirdiler. Onların her biri üç çarkın başlangıç konumuna göre sıralanabileceği altı adet muhtemel sıralamadan her biri için 17.576 adet olan olasılıkların kaba kıyvet analizini yaptılar.

Turing, Bletchley Parka geldikten kısa süre sonra bombanın İngiliz versiyonu olan *bombe*'ı geliştirdi. Onun işlevi başlangıç çark ayarlarının ve çarkların diziliminin çıkarımını yapmaktı. Haziran 1941 dolaylarında kullanımda olan beş adet bomba vardı; 1945 yılında savaşın sonundaysa sayıları 210'u bulmuştu. Alman donanması dört çarklı makinelere geçince yeni bombalar üretilmişti.

Alman sistemi güvenliği artırmak için geliştirildikçe, kod kıranlar onu etkisizleştirecek yollar bulmuştu. Müttefikler 1945 dolaylarında Almanların bütün mesajlarını deşifre edebiliyorlardı, ancak Alman başkomutanı bütün iletişimin tamamıyla güvende olduğuna inanmaya devam etti. Onların şifre bilimcileri aksine böyle aldanmalar içinde değillerdi, ancak herkesin şifreyi kırmak için sarf edilmesi gereken büyük bir enerjiyi harcayacağından şüphe ediyorlardı. Müttefikler bü-

yük bir avantaj kazandılar, ancak onlar mesajları deşifre edebildiklerine ilişkin işaret vermemek için dikkatli olmak zorundaydılar.

Asimetrik Anahtar Kodlar

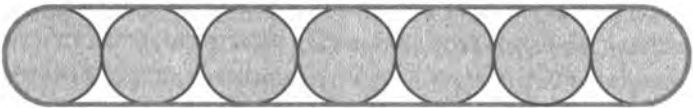
Şifre bilimdeki büyük fikirlerden birisi *asimetrik anahtarlar* olasılığıydı. Burada şifreleme ve deşifre etme anahtarı farklıdır: hatta eğer şifreleme kodunu bilerseniz dahi deşifre etme kodu üzerinde çalışmak mümkün değildir. Bir işlem diğerrinin tersi olduğunda bu muhtemel gözükebilir, ancak 'geriye doğru şifreleme metodu üzerinde çalışmayı' imkânsız kılan bu tür yöntemler vardır. Bir örneği modüler aritmetikteki asal sayıların özellikleri üzerine kurulu RSA kodudur [7 bölümüne bkz.]. Bu sistemde, şifreleme algoritması deşifre etme algoritması ve şifreleme anahtarı modüler açıklanabilir ve bu halde bile deşifre etme anahtarının çıkarımını yapmak mümkün değildir. Bununla birlikte şifreleme anahtarını alabilenler bunu yapabilir, çünkü onlar, mesajı şifrelemek için gizli anahtara sahiptir.

SOSIS SAVI

Kürelerin etrafını saran 'dış bükey örtünün' düzenlemesinin en küçük olması için 56 veya daha az, ancak 57 değil, kürenin birleşiminden oluşan sosis biçiminde olması gerektiği ispat edilmiştir.

Sıkıca Paketleme

Bu sonucu anlamak için daha basit bir şeyle başlayalım: daireleri paketlemek. Düzlemde çokça özdeş daireyi paketlediğinizi ve onları yapabileceğiniz en kısa eğriyle etraflarını 'sıkıca' çevrelediğinizi düşünün. Bu eğri teknik olarak daireler kümesinin *dış bükey örtüsü* olarak adlandırılır. Örneğin 7 daireyle uzun bir 'sosis' deneyebilirsiniz:

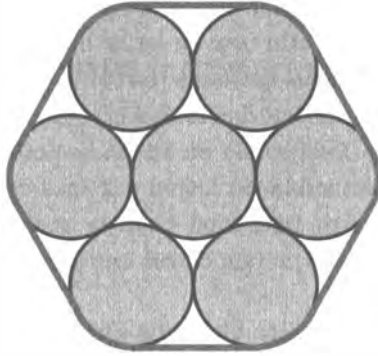


Şekil 161: Sosis şekli ve sıkıca paketleme.

Bununla birlikte, eğrinin içindeki toplam alanı mümkün olan en küçük yapmak istediğinizi varsayın. Eğer her daire 1 birim yarıçapa sahipse, o halde sosisin alanı $24 + \pi = 27,141$ 'dir.

Ancak dairelerin merkezde bir daire bulunan altıgen biçiminde daha iyi bir düzenlemesi vardır ve bu şekilde daireler daha az alan kaplar:

$$12 + \pi + 6\sqrt{3} = 25,534.$$

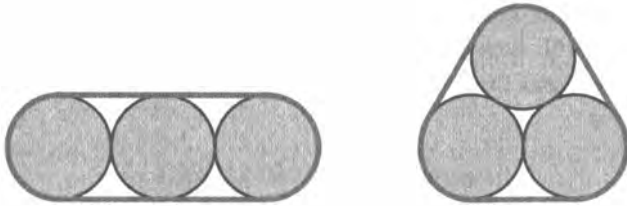


Şekil 162: Altıgen şekil ve sıkıca paketleme. Bu sosisten daha küçük bir alan verir.

Aslında üç daireyle bile sosis şekli en iyisi değildir. Eğrinin içindeki alan sosis için

$$8 + \pi = 11,14 \text{ iken daireler üçgeni için}$$

$$6 + \pi + \sqrt{3} = 10,87' \text{dir.}$$



Şekil 163: Üç daireyle sosis şekli ve sıkıca paketleme. Üçgen daha küçük alana sahiptir.

Bununla birlikte, eğer daireler yerine özdeş küreler kullanırsanız ve onları en küçük alana sahip yüzeyle sıkıca paketerseniz, yedi küre için altıgen düzenlemedense sosis formunun daha az *hacme* sahip olduğu ortaya çıkar. Aslında sosis örüntüsü 56 dahil ona kadar olan sayılardaki küreler için en küçük hacmi verir. Ancak 57 küreyle veya daha fazlasıyla minimal düzenlemeler daha yuvarlaktır.

Hâlâ daha az sezgisel olanlar dört veya daha çok boyutta olanlardır. Dört boyutlu uzayda en az hacme sahip sosis formunda bir düzenleme için en az 50.000 küreye ihtiyaç vardır. Bununla birlikte 100.000'den fazla küre için bu artık sosis formunda değildir. Dolayısıyla en küçük hacimli sıkıca paketlenen onlardan feci miktarda içeren çok ince ve uzun bir sosis formunu oluşturur. Dördüncü boyutta sosislerden en ideal biçimde düzenleme için tam olarak kaç adet gerektiğini kimse bilmemektedir.

Gerçekten büyüleyici bir değişiklik *muhtemelen* beşinci boyutta ortaya çıkar. Beşinci boyuttaki sosislerin 50 milyona kadar olan küreler olacağını hayal edebilirsiniz, ancak birden daha yuvarlağımsı, daha az hacim kaplayan bir beşinci boyut düzenlemesi karşınıza çıkar ve altıncı boyuttaysa aynı biçimde 29 squillion adet küre gerekir ve bu böyle devam eder. Ancak 1975'te László Fejes Tóth dördüncü veya daha büyük boyutlarda boyut sayısı ne kadar büyük olursa olsun *sosis savı* olarak bilinen konveks örtünün her zaman en küçük hacimli olduğunu formüle döktü.

Ulrich Betke, Martin Henk ve Jörg Wills, Tóth'un 42 veya daha büyük boyutlu uzaylarda haklı olduğunu ispat ettiler. Güncel olarak bu bildiklerimizin en iyisidir.

SONLU GEOMETRİ

Yüzyıllar boyunca Öklit geometrisi biricik geometriydi. O, diğer hiçbir geometrinin mümkün olamayacağı anlamına gelen uzayın gerçek geometrisi olarak biliniyordu. Biz bu iki açıklamanın hiçbirine artık inanmıyoruz. Eğri yüzeylerde uygulanan Öklitçi olmayan birçok geometri çeşidi vardır. Genel görelilik gerçek uzay-zamanın yıldızlar gibi yoğun cisimlerin düz değil eğri olduğunu gösterdi [11 bölümüne bkz.]. Ayrıca diğer bir geometri çeşidi olan izdüşüm geometrisi resim sanatındaki perspektiften gelmektedir. Sayılabilir çoklukta noktaya sahip geometriler bile vardır. En basiti yedi noktaya, yedi çizgiye ve 168 simetriye sahiptir. Bu, canavar grupta –bu ismi hak eden– doruk noktasına ulaşan sonlu basit grupların kayda değer hikâyesine yol açar.

Öklitçi Olmayan Geometri

İnsanlar yerkürenin etrafında yönlerini bilerek seyahat etmeye başladıklarında bir kürenin yüzeyinin doğal geometrisi olan küresel geometri öne çıkmaya başladı, çünkü küre dünyanın oldukça yaklaşık bir modelidir. Ancak tam olarak değildi; dünya kutuplardan basık olduğu için bir elipse daha yakındır. Ancak zaten yönünü bulmak da o kadar hassas değildi. Bununla birlikte, küre Öklitçi uzayda bir yüzeydir dolayısıyla küresel geometrinin yeni bir tür geometri olmadığı sadece onun yeni bir özel hali olarak düşünüldü. Her şeyden sonra, hiç kimse üçgen geometrisinin o, tam bir düzlem olmasa bile Öklitçi geometriden tutucu bir ayrılık olduğunu düşünmedi.

Bütün bunlar, matematikçiler Öklit geometrisinin bir özelliğine daha yakından bakmaya başlayınca değişti: paralel doğruların varlığı. Bunlar ne kadar uzatılırsa uzatılsın asla çakışmayan doğrusal çizgilerdir. Öklit paralellerin kurnazlıklara sahip olduğunu fark etmiş olmalıdır, çünkü o geometrisinin gelişiminde temel aksiyomları bunların varlığına dayandıracak kadar açık gözdeydi. O, bunun net olmadığını fark etmiş olmalıdır.

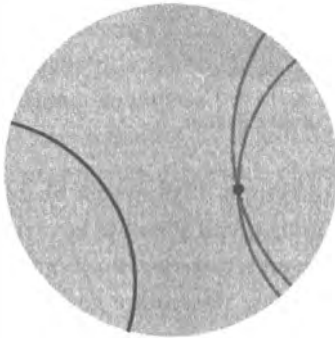
Onun aksiyomlarının çoğu sezgiyle öğrenilecek şekildeydi ve sadeydi: örneğin, 'iki dik açı birbirine eşittir'. Buna karşın, paralel aksiyomları biraz ağızda gevelenen tarzdaydı. 'Eğer bir doğru parçası iki doğru tarafından toplamları iki dik açının toplamından daha az olacak iki iç açı oluşturacak şekilde kesilirse ve bu iç açılarının olduğu tarafta bu doğrular sonsuza kadar uzatılırsa onlar muhakkak bir yerde kesişeceklerdir.' Matematikçiler bu çeşit bir karmaşıklığın gerekli olup olmadığını merak ettiler. Öklit'in geriye kalan aksiyomlarından paralellerin varlığı ispat edilebilir miydi?

Onlar Öklit'in kullanışsız formülasyonunu daha basit ve sezgisel varsayımlarla değiştirmeyi başardılar. En basitleri belki de Playfair'in aksiyomuydu: herhangi bir doğruyu alın ve o doğru üzerinde olmayan bir nokta alın, bu noktadan geçen ve o doğruya paralel sadece bir adet doğru vardır. Aksiyom, *Elements of Geometry* [Geometrinin Temelleri] kitabında bunu ortaya koyan John Playfair'e ithaf edilmiştir. Açıkçası o, eserinde en fazla bir paralel olmasını zorunlu kılmıştı, çünkü diğer aksiyomlar bir paralelin var olduğunu ispat etmek için kullanılabiliyordu. Öklit'in diğer aksiyomlarından paralel aksiyomunu çıkarsamak için birçok girişim yapıldı, ancak hepsi başarısızlığa uğradı. Sonunda nedeni daha anlaşılır oldu: o yapılamazdır. Paraleller hakkındaki hariç Öklit'in bütün aksiyomlarını doğrulayan geometrik modellemeler vardır. Eğer paralel aksiyomunun bir ispatı olsaydı, o halde böylesi bir modelde o geçerli olmalıydı: bununla birlikte, öyle değildir. Dolayısıyla bir ispat da yoktur.

Küresel geometri aslında böyle bir model sunar. 'Doğru', çemberin merkeze doğru oluşturduğu küreyle kesişen 'büyük

çember' olarak yeniden yorumlandı. Herhangi iki çember keşilebilir, dolayısıyla bu geometride hiç de paralellikler yoktur. Bununla birlikte iki noktada kesişen belirli iki büyük çember çap olarak taban tabana zıt olduğundan bu karşı örnek fark edilmedi. Öklit, tersine eğer onlar birbirine paralel değilse ve kesişiyorlarsa sadece bir noktada kesişen iki doğru olmasını zorunlu kılar.

Çağdaş bir bakış açısıyla cevap basittir: 'noktay', 'çap olarak zıt nokta çiftleri' şeklinde yeniden yorumlayın. Bu bize günümüzde elips geometrisi dediğimizi verir. Ancak bu o zamandakiler için fazla soyuttu ve bu, Playfair'in böylesi geometrileri hariç tutarken kaçamak noktası olarak kullandığı bir alan bıraktı. Matematikçiler bunun yerine verili bir noktadan geçen doğruya paralel sonsuz sayıda doğrunun söz konusu olduğu hiperbolik geometriyi geliştirdiler. Klasik bir model bir daire içerisindeki Poincaré diskidir. Bir *doğru* daireyi dik açıyla kesen herhangi bir çember yayı olarak tanımlanır. Bu fikirlerin nüfuz etmesi ve tartışılır olmaktan çıkması yaklaşık bir yüzyıl aldı.



Şekil 164: Hiperbolik düzlemde (gölgeleştirilmiş) Poincaré disk modeli. İki gri doğru da siyah olana paraleldir ve aynı noktadan geçer.

İzdüşümsel Geometri

Bu arada Öklitçi geometrinin diğer bir çeşidi doğmaktaydı. Bu, İtalyan Rönesans sanatçıları perspektif çizmeyi geliştirdiklerinde sanattan ve mimarlıktan doğmuştu. Sonsuz uzunlukta

ve kesinlikle doğrusal bir yolda duran birisi gibi iki paralel arasında Öklit düzleminde ayakta durduğunuzu varsayın. Ne görüyorsunuz?

Görmediğiniz asla kesişmeyen iki doğrudur. Siz bunun yerine ufukta kesişen iki doğru görürsünüz.

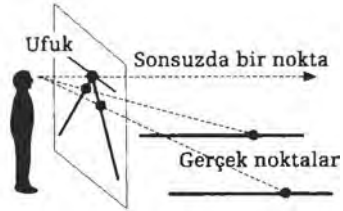
Bu nasıl olabilir? Öklit paralellerin kesişmediğini söyler; gözlerinizse kesiştiklerini söylemektedir. Ancak aslında mantıksal bir zıtlık yoktur. Ufuk düzlemin bir parçası değildir. Eğer öyle olsaydı, o düzlemin kenarında olurdu ancak bir düzlemin kenarları yoktur. Bir sanatçının gereksinimi Öklitçi bir düzlem değildir, ancak eklenmiş bir fazlalıklı bir düzlemidir: ufuk çizgisi. Bu, 'sonsuzdaki noktalardan oluşmuş' paralellerin kesiştiği 'sonsuzluktaki doğru' olarak düşünülebilir.



Şekil 165: Paraleller ufukta kesişir.

Eğer bir ressamın yaptıkları hakkında düşünürsek bu betimleme daha mantıklı olacaktır. Onlar tuvali şövaleye koyarlar ve önlerindeki resmi tuvale *yansıtarak* aktarırlar. Bunu gözle, mekanik veya optik aletlerle yaparlar. Ressamın gözünden tuvale doğru bir çizgi çizerek ve bu çizginin tuvalle birleştiği yere bir işaret koyarak matematiksel olarak bir noktayı tuvale yansıtabilirsiniz. Kamera da temelde böyle çalışır: objektif dış dünyayı film veya dijital kameralar söz konusuysa yük bağlaşımlı bir aygıt üzerine yansıtır. Gözünüz de görüntüyü retina üzerine benzer biçimde yansıtır.

Ufkun nerede olduğunu görmek için yan taraflardan paralellerin resmini yeniden çizeriz (sağdaki şekil). Öklitçi düzlemde noktalar (gri olanlar) ufkun altına yansır. Ressamın önündeki çizgiler ufkun *sonunda* biten çizgiler şeklinde yansır. Ufkun kendisi düzlemedeki hiçbir noktanın yansıması değildir. Oklu çizgilerler gösterildiği biçimde geriye yansıtılarak böyle bir noktayı bulmaya çalıştığınızı varsayın. Bu düzleme paralel olur, dolayısıyla o, onunla asla çakışmaz. O düzleme çarpmadan 'sonsuzda' kadar devam eder. Dolayısıyla düzlemde hiçbir nokta ufka karşılık gelmez.



Şekil 166: *Solda*: Dürer'in 1525'deki resimsel yansımasının tahta oyması. *Sağda*: Paralel noktaları tuvale yansıtmak.

Bu fikrin üzerine kurulu mantıken tutarlı bir geometri düzenlenebilir. Öklitçi geometri 'sonsuzdaki noktalardan' oluşturulmuş 'sonsuzda bir çizgi' eklenerek genişletilir. İzdüşümsel geometri denen bu düzende paraleller mevcut değildir. Belli herhangi iki çizgi tam olarak bir noktada kesişebilir. Ayrıca Öklitçi geometride olduğu gibi herhangi iki nokta bir doğruyla birleştirilebilir. O halde burada keyif veren bir 'düallite' vardır: eğer noktaları çizgilerle çizgileri de noktalarla değiş tokuş edersek bütün aksiyomlar geçerli hale gelir.

Fano Düzlemi

Matematikçiler bu yeni fikri takip ederek izdüşümsel geometrinin sonlu benzerleri olup olamayacağını merak ettiler. Bu, çizimlerin sonlu sayıda noktalardan ve doğrulardan oluştuğu ve içerisinde

- herhangi belli iki nokta tam olarak bir nokta üzerinde bulunduğu,
- herhangi belli iki doğru tam olarak bir noktada kesiştiği bir benzeridir.

Böyle çizimler uzaydaki veya düzlemdeki gibi olması gerekmeden şekilde aslında vardır. Onlar izdüşümsel geometri için bir çeşit koordinat sistemi düzenlenerek tanımlanabilirler. Öklitçi düzlemde normalde kullandığımız gerçel sayı çiftleri (x, y) yerine bir üçlü (x, y, z) kullanırız. Üçlüler, üç boyutlu Öklitçi uzayda koordinatları betimlemek için kullanılır, ancak fazladan bir şart dayatırız: tek önemli olan koordinatlarının oranlarıdır. Örneğin, $(1, 2, 3)$, $(2, 4, 6)$ veya $(3, 6, 9)$ ile aynı noktayı gösterir.

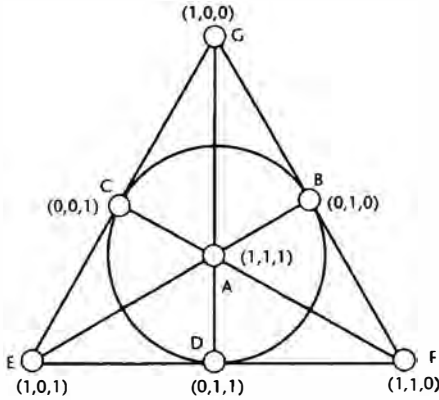
Şu halde bizi tekrardan Öklitçi uzayda iki koordinata geri getiren $(x/z, y/z)$ çifti (x, y, z) yerine konulabilir. Bununla birlikte z sıfır olabilir. Eğer böyle olursa x/y hâla bir anlam ifade edecek harika özelliğiyle x/z ve y/z 'yi 'sonsuz' olarak düşünebiliriz. Dolayısıyla $(x, y, 0)$ koordinatlı nokta 'sonsuzdadır' ve bu formdaki bütün sayılar sonsuzdaki doğrudan yani ufukta bulunur. Bütün bunların işlemesi için sadece bir üçlüyü göz ardı edilmelidir: $(0, 0, 0)$ bir noktayı göstermediği konusunda hem fikirizdir. Eğer gösterseydi (x, y, z) ve $(0x, 0y, 0z)$ aynı olduğundan o bütün noktaları gösterirdi. Ancak bu sonuncusu $(0, 0, 0)$ 'dır.

Bu türdeş koordinatları adlandırıldıkları üzere kullandıktan sonra daha büyük ölçekte benzer bir oyun oynayabiliriz. Özellikle gerekli özelliklerle koordinatların gerçel sayılarını p modunda p tamsayı asasına göre değiştirerek sonlu çizimler elde edebiliriz. Sekiz tane üçlü vardır ancak geriye yedi nokta bırakacak şekilde yine $(0, 0, 0)$ yasaklıdır:

$(0, 0, 1) (0, 1, 0) (1, 0, 0) (0, 1, 1) (1, 0, 1) (1, 1, 0) (1, 1, 1)$

Bu, fikri 1892'de yayımlayan İtalyan matematikçi Gino Fano'ya ithafen oluşan 'sonlu izdüşümsel geometri' Fano düzlemi olarak adlandırılır. O, aslında üç boyutlu uzayda 15 noktadan, 35 doğrudan ve 15 düzlemden oluşan sonlu bir izdüşüm

tanımlandı. O her biri ya 0 ya da 1 olan ve $(0, 0, 0, 0)$ 'ı dışarıda bırakan dört koordinat kullanır. Her düzlem Fano düzlemiyle aynı geometriye sahiptir.



Şekil 167: Fano düzleminin yedi noktası ve yedi doğru parçası.

Fano her biri üç noktaya sahip olan yedi doğruya ve her biri üç doğrudan biri üzerinde bulunan yedi noktaya sahiptir. Çizimde dairesel olan BCD dışında bütün doğrular düzdür, ancak bu sıralı üçlülere sıradan bir düzlemde mod 2'ye göre göstermeye çalışmaktan kaynaklanmaktadır. Yedi noktanın hepsi simetrik olarak görülür. Bir doğruyu oluşturan herhangi üç noktanın koordinatlarının toplamı her seferinde sıfırı verir: örneğin, taban doğrusundakiler $1 + 1 = 0 \pmod{2}$ 'de olduğundan buna uygundur

$$(1, 0, 1) + (0, 1, 1) + (1, 1, 0) + (1, 1, 0) = (1 + 0 + 1, 0 + 1 + 1, 1 + 1 + 0) = (0, 0, 0)$$

Fano Düzleminde Simetriler

Henüz 168 sayısına ilişkin bir emare yoktur, ancak yaklaştık. Püf noktası simetride yatmaktadır.

Matematiksel bir nesne veya sistemin simetrisi, onun yapısını koruyarak dönüştürmenin yoludur. Öklitçi geometrinin

doğal simetrileri, açıları ve uzaklıkları değiştirmeyen kalıp hareketlerdir. Örnekleri düzlemi yanlara doğru kaydıran öteleme ve onu belli sabit bir doğrudan yansıtmak olan belli sabit noktalardan döndürmedir.

İzdüşüm geometrisinin doğal simetrisi kalıp hareketler değildir çünkü izdüşümler şekilleri bozabilir, uzunlukları ve açıları daraltıp genişletebilir. Onlar izdüşümdür: bir noktanın bir doğruyla kesişip kesişmediği gibi orantısal ilişkilerini değiştirmeyen dönüşümler. Günümüzde simetriler bütün matematiksel nesnelerin hayati özelliklerinden biri olarak tanınır. Dolayısıyla Fano düzleminde simetrilerin ne olduğunu sormak gayet doğaldır.

Burada, altı adet devinimsiz hareket simetrisi olan eşkenar üçgendeki gibi devinimsiz hareket simetrilerini kastetmiyorum. Her üç noktanın bir kenar oluşturduğu yedi noktanın permütasyonunu kastediyorum. O, eşkenar üçgendeki gibi altı adet kalıp hareket simetrisine sahiptir. Her bir üç nokta bir doğru oluşturduğunda permütasyonla gelen noktalar da bir doğru oluşturduğu yedi adet noktanın permütasyonunu kastediyorum. Örneğin, EDF tabanını CDB çemberine dönüştürebiliriz. Bunu, birincisi bu üç noktanın nasıl dönüştürüleceğini gösterirken şu şekilde gösterebiliriz

$$E' = CD' = DF' = B$$

A' , B' , C' ve G' 'ne olması gerektiğine karar vermeliyiz, yoksa bir permütasyona ulaşamayız. Onlar C , D ve B' 'den farklı olmak zorundadır. Belki

$A' = E$ deneyebilir ve bunun ne anlama geldiğine bakabiliriz. ADG bir doğru olduğundan $A'D'G'$ de bir doğru olmalıdır. Ancak öncesinde $A' = E$ ve $D' = D$ olduğuna karar vermiştik. Pekâlâ, G' ne olmalıdır? Cevabı bulmak için E ve D içeren tek doğrunun EDF olduğuna dikkat ediniz. Dolayısıyla $G' = F$ olarak almalıyız. Ardışık noktaları bu şekilde tamamlamak için $B' = G$ ve $C' = A$ olduğunu buluruz. Dolayısıyla elimdeki permütasyon haritası $ABCDEFG$ 'den $A'B'C'D'E'F'G'$ yani $EGADCBF$ haline gelmiştir.

Bu dönüşümleri görselleştirmek için basmakalıp bir iş değildir, ancak onları cebirsel olarak bu şekilde bulabiliriz. Bekleyebileceğinizden daha fazladırlar. Aslında onlardan 168 adet yani kayda değer miktarda vardır.

Bunu ispatlamak için yukarıdaki sıradan olan yöntemi kullanırız. A noktasından başlayın. O nereye gidebilir? Kural olarak B, C, D, E, F, G'den herhangi birine gidebilir, dolayısıyla 7 seçenek vardır. Onun A' ya hareket ettiğini varsayın. Böyle yaptıktan sonra B noktasına bakın. Sonrasında B noktasını kalan 6 konumdan birine tekrara düşmeksizin yerleştirebiliriz. Bu da şimdiye kadar $7 \times 6 = 42$ adet olası simetri olduğunu gösterir. A ve B'nin A' ve B' noktalarına gideceğine karar verdikten sonra E'yi A ve B'den sonra üçüncü noktadan başka bir yere hareket ettirme imkânımız yoktur. O, A'B' noktalarından sonra üçüncü noktaya ancak bu ikisinden başka olasılık olmaksızın hareket etmelidir. Bununla birlikte, konumları hakkında henüz karar verilmemiş dört nokta daha vardır. Onlardan birini seçin: o, bu dört noktadan *herhangi birine* hareket edebilir. Ancak konumu hakkında bir kere karar verildikten sonra geriye kalan her şey geometri tarafından belirlenir.

Bütün kombinasyonların rastlantısallık ilişkisini koruduğu kontrol edilebilir: ilişkili doğrular her zaman ilişkili noktalarda kesişir. Dolayısıyla toplamda $7 \times 6 \times 4 = 168$ adet simetri vardır. Bunların hepsini ispat etmenin çağdaş bir yolu modül 2'de tamsayılarla olan doğrusal cebirdir. İlişkili dönüşümler 0 veya 1 elemanlarıyla oluşan 3×3 değiştirilebilir matrislerle gösterilir.

Kleinci Quartic

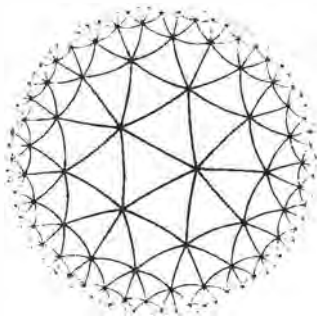
Aynı grup karmaşık analizde de önümüze çıkar. Adolf Hurwitz 1893'te g adet deliğe sahip karmaşık bir yüzeyin (teknik olarak sıkıştırılmış bir Riemann yüzeyi) en fazla $84(g - 1)$ simetriye sahip olduğunu ispatladı. Üç adet delik olduğunda bu sayı 168 olur. Felix Klein

$x^3y + y^3z + z^3x = 0$ denklemiyle ve (x, y, z) karmaşık homojen koordinatlarıyla Klein quartic denen bir yüzey inşa etti. Bu

yüzeyin simetri grubunun Fano düzlemiyle aynı olduğu ortaya çıktı; dolayısıyla o, Hurwitz'in teoremi tarafından tahmin edildiği üzere 168 adet idi. Yüzey hiperbolik bir düzlemin yedi adedi her köşede kesişen üçgenlerle döşenmesiyle ilgilidir.



Şekil 168: Klein quartic'in üç adet gerçek kesiti.



Şekil 169: Poincare disk modelinde tarif edildiği şekilde hiperbolik düzlemin ilgili şekilde döşenmesi.

Basit Gruplar ve Canavar

Herhangi bir matematiksel sistemin veya nesnenin simetrileri bir *grup* oluşturur. Bu, *gündelik dilde* sadece bir koleksiyon veya küme demektir; ancak matematikte fazladan özellikleri olan bir koleksiyonu imler. Koleksiyonun herhangi iki elemanı başka bir koleksiyonu oluşturacak şekilde kombin edilebilir. Bu biraz çarpma işlemi gibidir: grubun g , h elemanları gh ürünün oluşturmak için kombin edilir. Ancak elemanlar ve onları birleştiren işlem istediğimiz herhangi bir şey olabilir. O,

simetriler tarafından motive edildiğinde bazı hoş özelliklere sahip olduğu sürece elbette.

Simetriler dönüşümlerdir ve iki dönüşümü birleştirmenin yolu ilk önce birincisini sonra ikincisini gerçekleştirmektir. Bu özel 'çarpma' kavramı çoğu cebirsel kurallara uyar. Çarpmanın birleşme özelliği vardır: $(gh)k = g(hk)$. Bir eşitlik vardır 1 ile ilgili $g = g1 = g1$. Her g için $g^{-1} = gg^{-1} = 1$ olan ve g^{-1} denen bir tersi vardır. ($gh = hg$ diyen değişme kuralı birçok simetride sağlanmadığından burada da bir şart değildir.) Bu üç kurala uyan bir işlemle tanımlanmış bir matematiksel sistem *grup* olarak adlandırılır.

Simetriler için birleşme kuralı kendiliğinden doğrudur çünkü değişimleri bileştiriyoruzdur; eşitlik 'hiçbir şey yapma' dönüşümüdür ve bir değişimin tersi de 'yaptığını geri al' işlemidir. Dolayısıyla bir sistemin veya nesnenin simetrilerinin kompozisyonu bir grup oluşturur. Bu, özellikle Fano düzlemi için doğrudur. Onun simetri grubu içerisindeki (grubun düzeni olarak adlandırılır) dönüşümlerin sayısı 168'dir. Bunun oldukça sıra dışı bir grup olduğu ortaya çıktı.

Birçok grup daha küçük grupların kombinasyonu olarak bölünebilir, birazcık sayıları asal çarpanlarına ayırmaktaki gibi, ancak işlemler burada daha karmaşıktır. Asal çarpanların benzerleri *basit gruplar* olarak adlandırılır. Bu gruplar bu şekilde ayrılamazlar. 'Basit', 'kolay' demek değildir; o, 'sadece bir parçaya sahip olan' demektir.

Sonsuz sayıda sonlu grup –sonlu düzende olan gruplar bu da sonlu sayıda elemanı olan demektir– vardır. Eğer onlardan birini rastgele seçerseniz o aynı çarpanlarına ayrılabilen sayıların karşısındaki asal sayılar gibi nadiren basittir. Bununla birlikte, aynı asal sayılarda olduğu gibi sonsuz sayıda basit grup vardır. Aslında bazıları da asal sayılarla ilişkilidir. n herhangi bir sayıyken n modülündeki [7 bölümüne bkz.] sayılar onları bir birine *ekleyerek* kompozisyonlu bir grup oluşturur. Bu, n düzeninde döngüsel grup olarak adlandırılır. Bu n asal olduğunda tam olarak basittir. Aslında, asal düzende olan bütün basit gruplar döngüselidir.

Diğer başkaları var mıdır? Galois, beşinci dereceden denklemler üzerine olan çalışmasında 60 düzeninde basit bir grup bulmuştur. Bu asal bir sayı değildir, dolayısıyla bu döngüsel bir grup değildir. O, 5 adet nesnenin bütün çift permütasyonları içerir. Galois'a göre nesneler beşinci dereceden bir denklemin beş adet çözümüydü [5 bölümüne bkz.] ve denklemin simetri grubu bütün bu çözümlerin 120 adet permütasyonunu içerir. İçerisinde onun 60'lı düzendeki grubu da vardı ve Galois bunu biliyordu çünkü grup basitti, çözümler için de cebirsel bir formül yoktu. Denklem herhangi bir cebirsel formül tarafından çözülebilecek *yanlış çeşitte simetrilere* sahipti.

Bir sonraki en büyük döngüsel olmayan grup 168 düzenindedir ve bu Fano düzleminin simetri grubudur. Yüzden fazla cebirci 1995 ve 2004 yılları arasında bütün sonlu grupları sınıflandırmayı başardı; bu da grubun içindekileri listelemektir. Bu devasa çalışmanın sonucu dergilerde yaklaşık 10.000 sayfa olarak ve her bir sonlu grubun ilişkili olduğu sonsuz grupların sonlu bir ailesiyle, ki 18 adet farklı aile vardır, beraber yayımlandı. Özel doğrusal yansıtıcı gruplar yani bir aile basit grup olan 168 düzeniyle başlar.

Aslında pek de öyle değildir. Tam olarak seyrek grup olarak adlandırılan 26 adet istisna vardır. Birbirleriyle bazen pamuk ipliğiyle bağlı olan bu yaratıklar büyüleyici ufaklıklardır. Aşağıdaki tablo isimleriyle ve düzenleriyle tüm 26 adedini listelemektedir.

Bu grupların çoğunluğu kâşifinin ismine atfen adlandırılmıştır, ancak en büyüğü canavar olarak adlandırılmıştır; tabir çok da yerindedir çünkü onun düzen sayısı yaklaşık olarak 8×10^{53} 'dir. Açık olarak yazarsak

808.017.424.794.512.875.886.459.904.961.710.757.005.754.368.000.000.000 şeklindedir.

Grup kuramcılarını için çok yararlı olan tabloya asal çarpanlara ayırma için bakınız. Bu sayı üzerine bir bölüm yazmak benim için cazibeliydi, ancak daha geniş bir bakış açısı vermek için onu 168 içerisine koymayı uygun gördüm.

Canavar 1973'te Brend Fischer ve Robert Griess tarafından

tahmin edildi ve 1982’de Griess tarafında oluşturuldu. Bu, Griess cebiri olarak adlandırılan ilginç cebirsel bir yapının simetrilerinin grubudur. Canavar, matematiğin tamamen farklı alanlarıyla kayda değer ilişkilere sahiptir: karmaşık analizde modül formları. Bazı sayısal rastlantılar bu ilişkiyi hakkında ipucu veriyordu, John Conway ve Simon Norton’u onların 1992’de Richard Borcherds tarafında ispat edilen ‘ay yüzlü canavar’ savını oluşturmaya itti. O, burada açıklamak için çok tekniktir; kuantum fiziğindeki sicim kuramıyla ilişkilere sahiptir [11 bölümün bkz.]. Eğer detayları merak ederseniz, şu adrese bakınız:

http://en.wikipedia.org/wiki/Monstrous_moonshine

Sembolü	Adı	Düzeni
M_{11}	Mathieu grubu	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$
M_{12}	Mathieu grubu	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$
M_{22}	Mathieu grubu	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
M_{23}	Mathieu grubu	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
M_{24}	Mathieu grubu	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
J_1	Janko grubu	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$
J_2	Janko grubu	$2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$
J_3	Janko grubu	$2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19$
J_4	Janko grubu	$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$
Co_1	Conway grubu	$2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$
Co_2	Conway grubu	$2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
Co_3	Conway grubu	$2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
Fi_{22}	Fischer grubu	$2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
Fi_{23}	Fischer grubu	$2^{18} \cdot 3^{11} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$
Fi_{24}'	Fischer grubu	$2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29$
HS	Higman–Sims grubu	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$
McL	McLaughlin grubu	$2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$
He	Held grubu	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 17$
Ru	Rudvalis grubu	$2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$
Suz	Suzuki grubu	$2^{11} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
O’N	O’Nan grubu	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 31$
HN	Harada–Norton grubu	$2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$
Ly	Lyons grubu	$2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67$
Th	Thompson grubu	$2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$
B	Bebek canavar grubu	$2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^8 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47$
M	Canavar	$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$

Tablo 14: 26 adet basit, sonlu, seyrek grup.

Büyük Sayılar

Tamsayılar sonsuza kadar devam eder. En büyük sayı diye bir sayı yoktur, çünkü herhangi bir sayıya 1 ekleyerek daha büyüğünü elde edebilirsiniz.

Bunu, hangi sayı gösterim sistemini kullanırsanız kullanın tüm tamsayıların yazmak için çok uzun oldukları takip eder.

Elbette ki her zaman hile yapabilirsiniz ve ∞ sembolünü düşündüğünüz en büyük sayıyı göstermesi için tanımlayabilirsiniz.

Neyse ki, gerçekten büyük sayılara nadiren ihtiyaç duyarız.

Ancak onların hepsi başlı başına bir büyüye sahiptir. Onlardan birisi matematikte ara sıra önemlidir.

$$26! = 403.291.461.126.605.635.584.000.000$$

FAKTÖRİYELLER

Alfabadeki harfleri sıralama yollarının sayısı.

Nesneleri Sıralama

Bir küme kaç farklı yolla sıralanabilir? Eğer küme A ve B diye iki elemandan oluşuyorsa iki yol vardır:

AB BA

Eğer küme A, B ve C şeklinde üç harf içeriyorsa altı adet yol vardır:

ABC ACB BAC BCA CAB CBA

Ya küme A, B, C ve D şeklinde dört harf içeriyorsa?

Bütün olasılıkları sistematik şekilde yazabilirsiniz ve cevabın 24 olduğu ortaya çıkar. Bunun neden doğru olduğunu görmek içi zekice bir yol vardır. D'nin nerede ortaya çıktığını düşünün. O birinci, ikinci, üçüncü veya dördüncü konumdan birinde bulunmalıdır. Her durumda da D'yi sildiğinizi hayal edin. Böylece içinde A, B ve C olan bir küme elde edersiniz, bu yukarıdaki altı olasılıktan biri olmalıdır. Tüm altısı da oluşabilir: sadece kümede doğru konumlara D'yi yerleştirin. O halde altı dizilimi dörtlü kümeler halinde olasılıkların hepsini yazabiliriz, şöyle ki:

D birinci konumdayken:

DABC DACB DBAC DBCA DCAB DCBA

D ikinci konumdayken:

ADBC ADCB BDAC BDCA CDAB CDBA

D üçüncü konumdayken:

ABDC ACDB BADC BCDA CADB CBDA

D dördüncü konumdayken:

ABCD ACBD BACD BCAD CABD CBAD

Onlar ya *D* farklı konumda olduğu için ya da *D* aynı konumda ancak farklı ABC sıralaması olduğu için tüm bu sıralamalar farklıdır. Ayrıca, her bir ABCD sıralaması belli bir yerde oluşur: *D*'nin konumu hangi altılı gruba bakmamız gerektiğini bize söyler ve onu sildiğimizde oluşan da hangi ABC sıralamasını almamız gerektiğini söyler.

Her biri altısına sahip dört grup sıralamaya sahip olduğumuz için sıralamaların toplam adedi $4 \times 6 = 24$ 'tür.

ABC'nin altı sıralamasıyla da benzer yöntemle çalışabiliriz: bu sefer *C*'nin ortaya çıktığı konumu düşünün sonra onu silin:

CAB CBA ACB BCAA ABC BAC

Aslında, aynısını AB harfleriyle de yapabiliriz:

BA AB

Sıralamaların bu listeleme biçimi bilindik bir örüntüyü ortaya koyar:

Sıralama yollarının sayısı...

...2 harflide $2 = 2 \times 1$.

...3 harflide $6 = 3 \times 2 \times 1$

...4 harflide $24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 'dir.

O halde 5 harfli ABCDE'yi sıralamanın kaç farklı yolu vardır? Örüntü cevabın

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ olması gerektiğini söyler ve *E* için o silindiğinde 24 farklı ABCD düzenlemesi veren beş farklı konum düşünerek bunun doğru olduğunu gösterebiliriz. Bu istediğimiz sayının 5×24 olduğunu gösterir ki bu da $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 'dir.

Aynı akıl yürütmeyeyle n farklı harfi sıralamanın farklı yollarının sayısını ' n faktöriyel' şeklinde adlandırılan ve $n!$ şeklinde gösterilen

$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times 3 \times 2 \times 1$ 'dir. Sadece 1'den n 'ye kadar olan bütün sayıları alın ve birbiriyle çarpın.

Bazı ilk faktöriyeler şöyledir:

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$3! = 6$$

$$4! = 24$$

$$5! = 120$$

$$6! = 720$$

$$7! = 5040$$

$$8! = 40.320$$

$$9! = 362.880$$

$$10! = 3.628.800$$

Görebileceğiniz üzere sayılar hızlıca, aslında git gide daha hızlı artmaktadır.

Dolayısıyla alfabedeki tüm harfleri sıralamanın sayısı

$$26! = 26 \times 25 \times 24 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = 403.291.461.126.605.635.584.000.000$$

Oyun kartının 52'li destesinin sıralamasının farklı yollarının sayısı:

$$52! = 80.658.175.170.943.878.571.660.636.856.403.766.975.289.505.440.883.277.824.000.000.000.000'dir.$$

Gamma Fonksiyonu

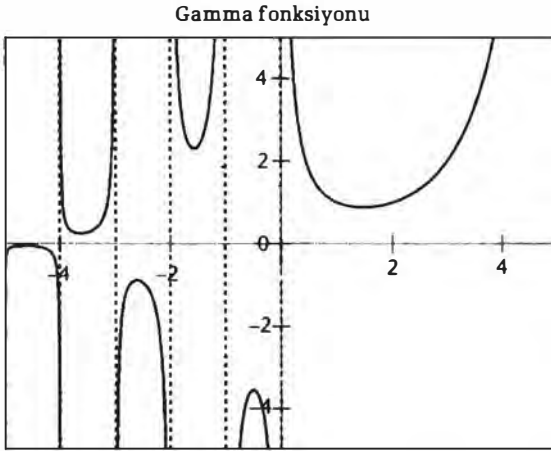
$(-1/2)! = \sqrt{\pi}$ bağıntısının bir anlamı vardır. Bunu anlamlandırmak için temel özellikleri korurken faktöriyel kavramını bütün karmaşık sayılara genişleten gamma fonksiyonunu yürürlüğe sokarız. Gamma fonksiyonu genellikle integral hesaplaması kullanılarak tanımlanır:

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

n pozitif tamsayısı için faktöriyelerle olan ilişki şöyledir

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

Analitik süreklilik denen teknik kullanarak bütün karmaşık sayılar için $\Gamma(z)$ 'yi tanımlayabiliriz.



Şekil 170: x gerçel sayıları için $\Gamma(x)$ grafiği

z 'nin negatif tamsayı değerleri için gamma fonksiyonu $\Gamma(z)$ sonsuzdur ve bütün karmaşık sayılar için de sonludur. Bu istatistikte önemli uygulamalara sahiptir. Bunun $z!$ 'e değil $(z - 1)!$ 'e dayanması haricinde bu faktöriyeli tanımlayan anahtar özelliklere sahiptir:

$$\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z)$$

Gauss z, n iken $n!$ ile rastlaşan Pi fonksiyonunu $\Pi(z) = \Gamma(z + 1)$ tanımlayarak bunu çözümlemeyi öne sürdü, ancak günümüzde gamma gösterimi günümüzde daha yaygındır.

Gamma fonksiyonu için iki katını alma formülü $\Gamma(z) \Gamma(z + 1/2) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z)$ olduğunu söyler.

Eğer $z = 1/2$ alırsak $\Gamma(1/2) \Gamma(1) = 2^0 \sqrt{\pi} \Gamma(1)$, dolayısıyla $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

$(-1/2)! = \sqrt{\pi}$ eşitliğinin anlamı budur.

43.252.003.274.489.856.000

RUBİK KÜP

Macar Profesör Ernő Rubik 1974'te hareket eden küplerden oluşan bir yapboz icat etti. Bu, günümüzde Rubik küp olarak bilinir ve onun küresel ölçekte 350 milyondan fazla kopyası satıldı. Çılgınlık o kadar yaygınlaştı ki ticari şirketler işi devralana kadar Warwick Üniversitesi Matematik Topluluğunun ondan kolilerce Macaristan'dan ithal ettiğini hâlâ hatırlıyorum. Bu devasa sayı Rubik küp için ne kadar farklı pozisyon olduğunu bize söylemektedir.

Rubik Küpün Geometrisi

Yapboz her biri büyük küpün üçte biri oranında olan 27 küpten oluşmaktadır. *Aficionados* onları küpçükler olarak adlandırır. Küpün her yüzü farklı bir renktedir. Rubik'in zekice fikri küpün her yüzeyini hareket etmesine izin veren bir mekanizma tasarlamaktı. Tekrar eden dönüşler küpçüklerin renklerini karıştırır. Amaç küpçükleri küpün her bir yüzeyi yeniden aynı rengine dönsün diye eski konumuna geri getirmektir.



Şekil 171: Rubik küp.

Merkezdeki küpçük görülemez ve onun yerine aslında Rubik'in marifetli mekanizması yerleştirilmiştir. Yüzeylerin merkezindeki küpçükler döner ancak diğer bir yüze hareket etmez, dolayısıyla onların rengi değişmez. Dolayısıyla şu andan itibaren bu altı yüzey *küpçüğünün* dönüş dışında hareket etmediğini varsayacağız. Bu dönüş de önemli bir etki oluşturmadiğı sayılan aslında hiçbir yüzeyi çevirmeden bütün bir Rubik küpü farklı bir biçime yerleştirmeden ibarettir.

Hareket edebilen küpçükler iki çeşittir: 8 adet köşelerdeki köşe ve her kenarın ortanca küplerinden oluşan 12 adet kenar küpçükleri.

Örneğin, eğer bütün renkli yapışkanları kaldırırsanız ve bu kenarlardaki ve köşelerdeki küpçüklerin renklerini mümkün bütün yollarla karıştırırsanız, renklerin mümkün düzenlemelerinin sayısı

519.024.039.293.878.272.000'dir.

Bununla birlikte bu, Rubik küpte izin verilen bir şey değildir: yapabileceğiniz tek şey küpün yüzeylerini döndürmektir. Dolayısıyla bir soru ortaya çıkar: bu düzenlemelerden hangisi döndürme serilerini kullanılarak elde edilebilir? Temelde bu, bunların küçük kesirli bir hali olabilir, ancak aşağıda açıkladığım üzere matematikçiler yukarıdaki düzenlemelerin tam on ikide biri sadece meşru hareketlerle elde edilebilir. Dolayısıyla Rubik küp üzerindeki renklerin meşru düzenlemelerinin sayısı

43.252.003.274.489.856.000'dir.

Eğer insan ırkının 7 milyonunun her biri her saniyede bir hareket yaparsa bu sayının hepsinin tükenmesi yaklaşık 200 yıl alır.

Bu Sayılar Nasıl Hesaplanır

Köşelerdeki 8 küpçük 8! Farklı biçimde düzenlenebilir. $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ olduğunu hatırlayın.

Bu sayı ortaya çıkar çünkü ilk küpçük için 8 farklı seçenek ve ikincisi kalanlardan seçilebilen 7 adet ve üçüncü için 6 adet seçenek vardır, bu böyle devam eder [26! bölümüne bkz.]. Köşeler-

deki her bir küpçük birbirinden bağımsız olarak üç farklı yönde dönebilir. Dolayısıyla dönüşler için 3^8 farklı yol vardır. Toplamda köşedeki küpçükleri düzenlemek için $3^8 \times 8!$ yol vardır.

Benzer biçimde kenardaki 12 adet küpçük de $12!$ farklı biçimde düzenlenebilir:

$$12! = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1.$$

Her biri 2 dönüşle yerleştirilebilir, dolayısıyla bunlar 2^{12} yolla düzenlenebilir. Kenarlardaki küpçükler düzenlemek için toplamda $2^{12} \times 12!$ yol vardır.

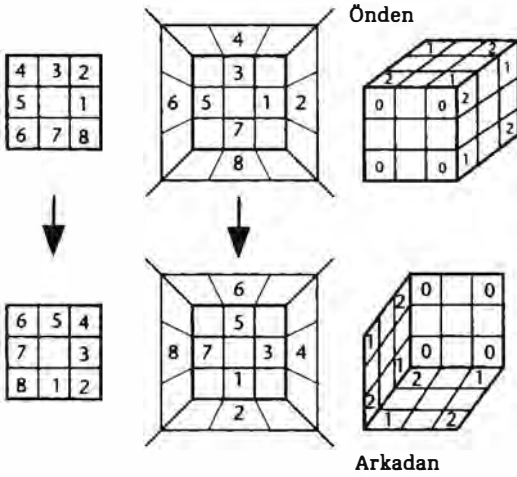
Bu düzenlemelerin yollarının olası sayıları bu iki sayı çarpılarak $3^8 \times 8! \times 2^{12} \times 12!$ olarak bulunur. Bunun da 519.024.039.293.878.272.000 olduğu ortaya çıkar.

Söylediğim gibi bu düzenlemelerin çoğu küpün dönüş serileriyle elde edilemez. Her dönüş bir seferde birçok küpçüğün konumunu değiştirir ve toplu olarak küpçüklerin bazı özellikleri değiştirilemez. Bu özellikler değişmezler olarak adlandırılır ve bu durumda onlardan üç adet vardır:

Küpçüklerin eşliği. Permütasyonlar tek ve çift olmak üzere iki çeşit olarak gelir [2 bölümüne bkz.]. Çift bir permütasyon çift sayıda nesne çiftlerinin yer değiştirme sayısıdır. Eğer çift olan iki permütasyon sırayla seçiminden çıkan permütasyon çift olur. Şu halde Rubik küpün her bir dönüşü küpçüklerin çift permütasyonudur. Dolayısıyla, dönüşlerin herhangi bir kombinasyonu da çift bir permütasyondur. Bu durum olası düzenlemelerin sayısını yarıya indirir.

Kenar yüzlerinin eşliği. Her dönüş kenar yüzlerdeki çift bir permütasyondur, dolayısıyla aynı mesele dönüş serileri için de geçerlidir. Bu durum da olası düzenlemelerin sayısını yarıya indirir.

Köşelerdeki üç katlılık. Köşelerdeki 24 yüzü her köşede saat yönünde 0, 1 ve 2 olacak şekilde 0, 1 ve 2 tamsayılarıyla numaralandırın. Bu işlemi sağdaki resimdeki gibi karşılıklı yüzler 0 olacak şekilde yapın. Bütün bu sayıların toplamı, 3 modülünde düşünüldüğünde –bu da sadece 3'e bölündüğünde oluşan kalanı hesaplamaktır– küpün herhangi bir dönüşünde değişmez. Bu durum da olası düzenlemelerin sayısını 3'te birine indirir.



Şekil 172: Rubik grubunun değişmezleri. *Solda*: Küpçüklerin saat yönünde çeyrek dönüşlerinin etkisi. *Ortada*: Kenar yüzleri numaralandırmak. *Sağda*: Köşedeki yüzleri numaralandırmak.

Bütün bu üç durumu dikkate alırsak olası düzenlemelerin sayısı $2 \times 2 \times 3$ ile bölünmelidir. Bu da dönüş serileri tarafından üretilen düzenlemelerin sayısını

$$3^8 \times 8! \times 2^{12} \times 11! / 12 = 43.252.003.274.489.856.000 \text{ yapar.}$$

Rubik küpü analiz etmek için kullanılan matematiksel yöntemler ayrıca onun sistematik olarak çözülmesine de yol açmıştır. Bununla birlikte, bu yöntemler burada betimlenmek için çok tekniktir, onların neden işe yaradığını anlamak uzun ve bazen de teknik bir süreçtir.

Tanrının Sayısı

Tek yüzeyi dik açılı biçimde herhangi bir sayıda burduğunuz bir hareket belirleyin. Başlangıç konumu ne olursa olsun yapbozu çözecek en küçük sayıda hareket Tanrının sayısı –çünkü muhtemelen cevap zavallı fanilerin yeteneklerinin yapabileceğinin çok ötesindedir– olarak adlandırılır. Bununla birlikte bunun çok kötümser bir yaklaşım olduğu ortaya çıktı. Tomas

Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson ve John Dethridge biraz zeki bir matematik ve bunun üstüne bilgisayarın kaba kuvvetini kullanarak Tanrının sayısının 20 olduğunu ispatladılar. Hesaplama çok sayıda bilgisayarda eş zamanlı olarak gerçekleştirildi ve eğer sadece tek bir bilgisayar kullanılmış olsaydı 350 yıl sürecekti.

SUDOKU

Sudoku dünyayı 2005'te kasıp kavurdu, ancak onun ayak sesleri çok daha geriye gider. O, 1'den 9'a kadar olan rakamları 3×3 'lük dokuz adet küçük kareden oluşan 9×9 'luk bir kareye yerleştirme işidir. Her satır, sütun ve küçük kare her rakamdan bir tane içermelidir ve büyük karedeki bazı rakamlar yapbozu hazırlayan tarafından verilir. Bu, sudoku sisteminin belirli sayısıdır. Buna değinmeyeceğiz.

5				7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	3

Şekil: 173: *Solda*: Bir sudoku örgüsü. *Sağda*: Onun çözümü.

Latin Karelerinden Sudokuya

Sudokunun tarihi sıklıkla Euler'in Latin kareleri üzerindeki çalışmasına kadar götürülür [10 bölümüne bkz.]. Tam bir sudoku örgüsü özel çeşit bir Latin karesidir: 3×3 küçük kareler fazladan zorluk getirir. Benzer bir bulmaca 1892'de Fransız *Le siècle* [Yüzyıl] gazetesi okurlarına bazı silinmiş rakamları olan

sihirli bir kareyi tamamlamalarını istediğinde ortaya çıktı. Az zaman sonra La France sadece 1'den 9'a kadar olan rakamları içeren bir sihirli kare kullandı. Çözümlerdeyse, 363 kutucuk dokuz rakamı içeriyordu, ancak bu zorunluluk açığa kavuşturulmadı.

Sudokunun modern biçimi muhtemelen, 1979'da Dell dergisinde 'sayı yeri' diye serileri yayımladığı düşünülen Howard Garns'e atfedilmelidir. Nikoli adlı bir Japon şirket 1986'da sudoku bulmacalarını Japonya'da piyasaya sürdü. Başlangıçta adı *suji wa dokushin ni kaguri* ('rakamların kullanımı bir adetle sınırlıdır') idi, ancak kısa sürede *su doku* haline geldi. The Times sudoku bulmacalarını Birleşik Krallık'ta 2004'te yayımlamaya başladı ve 2005'te bu küresel bir çılgınlık halini aldı.

Bu bölümü süsleyen devasa 6.670.903.752.021.072.936.960 sayısı farklı sudoku örgülerinin sayısıdır. Latin karelerinden 969'lu olanın sayısı bir milyon defa daha büyüktür:

5.524.751.496.156.892.842.531.225.600.

Sudoku örgülerinin sayısı bir forum sitesi olan rec.puzz-le'da USENET üzerinden ispatı olmaksızın 2003'te yayımlanmıştı. Bertram Felgenhauer ve Frazer Jarvis 2005'te bilgisayar yardımıyla az sayıda mantıklı ancak ispatlanmamış savlarla detayları açıkladılar. Yöntem sudokunun simetrilerini anlamak üzerine kuruludur. Tamamlanmış her bir kutucuk örgüyü değişmeden bırakan dönüşümler içeren (satır ve sütunların kayması, yazımda değişiklikler) kendi simetri grubuna sahiptir [168 bölümüne bkz.]. Ancak anahtar yapı tüm olası kutucukların kümesinin simetri grubudur: herhangi bir kutucuğu diğerine dönüştürmek (şart olmamakla birlikte belki de aynı kutucuk).

İlgili dönüşümler simetrisi içerisinde bütün çeşitlerden vardır. En belirgin olanları dokuz rakamın 9! permütasyonludur. Bir sudokunun kutucuklarındaki rakamların sistematik olarak permütasyonunu almak da apaçık bir sudoku üretectir. Ancak, üçlü kutucukları korumak şartıyla satırları kaydırabilirsiniz. Aynısını sütunlar için de yapabilirsiniz. Verili

bir kutucuğu onun ana köşegeninde yansıtabilirsiniz. Simetri grubu $2 \cdot 6^4 \cdot 6^4 = 3.359.232$ olasılığa sahiptir. Kutucukları sayarken bu simetriler hesaba katılmalıdır. İspatı karmaşıktır, dolayısıyla bilgisayarlar kullanılır. Orijinal ispattaki boşluklar o zamandan beri dolduruldu. Ayrıntılar ve daha fazla bilgi için http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_of_Sudoku adresine bakınız. Verili bir kutucuktaki simetrik versiyonlar temelde kılık değiştiren aynı kutucuktaki olduğundan, şunu da sorabiliriz: Simetrik olarak ilgili olanları eşit olarak kabul edersek kaç tane farklı kutucuk simetrisi vardır? Jarvis ve Ed Russell 2006'da bu sayıyı 5.472.730.538 olarak hesapladılar.

Bu 3.359.232 tarafından kalansız bölünebilen bir sayı değildir, çünkü bazı kutucuklar kendileriyle simetriktirler.

Rubik küpte olduğu gibi, sudokuyu analiz etmek için kullanılan matematiksel yöntemler onun çözümü için de sistematik yollar sunmaktadır. Bununla birlikte, yöntemler burada anlatmak için çok karmaşıktır ve sistematik olarak deneme yanılma yöntemiyle bulunabilir.

BİLİNER EN BÜYÜK ASAL SAYI

En büyük asal sayı nedir? Henüz MÖ 300’de veya onun dolaylarında Öklit böyle bir sayı olmadığını ispat etti. ‘Asal sayılar herhangi belli bir çokluktan fazladır.’ Bu, sonsuz sayıda asal sayı var demektir. Bilgisayarlar asallların listesini hatırı sayılır miktarda artırabilir; bunun bırakılmasının nedeni onların onun hafızasını tüketmesi veya yazıcı çıktısının saçma derecede devasa boyutlara ulaşmasıdır. Yukarıdaki sayı rekoru elinde tutmaktadır.

Mersenne Sayıları

Bilinen en büyük asal sayıyı bulma arayışı etrafında küçük bir endüstri oluşmuştur. Arayış rekor kırmada bir egzersiz olarak ve yeni bilgisayarları denemek için özellikle ilginçtir. Nisan 2014’te bilinen en büyük asal sayı o kadar büyüktü ki 17.425.170 basamağa sahipti ve o, 2^{57.885.161} – 1 idi.

$M_n = 2^n - 1$ formundaki sayılar Fransız keşiş Marin Mersenne’e ithafen Mersenne sayıları olarak adlandırılır. Eğer devasa asal sayılar rekorunu kırma amacındaysanız Mersenne sayıları biçilmiş kaftandır, çünkü onların asal olup olmadıklarına karar vermemize izin veren ve daha genel yöntemlerin işlem yapması için çok büyük olmalarında bile işe yarayan özel nitelikleri vardır.

Basit bir cebir, eğer $2^n - 1$ asalsa o halde n ’nin de asal olması gerektiğini ispatlar. Öncül matematikçiler Bununla birlikte Hudalricus Regius 1536’da 11 asal olmasına rağmen $M_{11} = 2047$ asal olmadığını fark etti. Aslında

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89\text{'dur.}$$

Pietro Cataldi M_{17} ve M_{19} 'un asal olduğunu gösterdi, ancak bu, günümüz bilgisayarları için çok kolay olsa da bütün hesaplamalar onun zamanında elle yapılıyordu. O, ayrıca $n = 23, 29, 31$ ve 37 için M_n 'nin asal olduğunu iddia etti. Bununla birlikte,

$$M_{23} = 8.388.607 = 47 \times 178.841$$

$$M_{29} = 536.870.911 = 233 \times 1103 \times 2089$$

$M_{37} = 137.438.953.471 = 223 \times 616.318.177$ 'dir dolayısıyla bu üç Mersenne sayısı çarpanlarına ayrılabilir. M_{23} ve M_{37} 'nin çarpanlarını Fermat 1640'ta keşfetmiştir ve Euler de 1738'de M_{29} 'un çarpanlarını bulmuştur. Sonrasında Euler, Cataldi'nin M_{31} 'in asal olması hakkında haklı olduğunu ispatladı.

Mersenne, 1644'te *Cogitata Physica-Mathematica* adlı kitabında $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ ve 257 değerleri için M_n 'nin asal olduğunu belirtti. Bu liste 200 yıldan fazla boyunca matematikçilerin ilgisini çekti. O, böylesine devasa sayılarla sonuç almayı nasıl becerdi? Sonunda bu açıklığa kavuştu: o sadece bilinçli bir tahminde bulunmuştu. Onun listesi birçok hatalar barındırmaktaydı. Lucas 1876'da Mersenne'in $M_{127} = 170.141.183.460.469.231.731.687.303.715.884.105.727$ için haklı olduğunu M_n 'nin asallığını kontrol için geliştirdiği dâhiyane bir testle ispatladı. Derrick Lehmer, Lucas'ın testini 1930'da hafifçe geliştirdi. $S_2 = 4, S_3 = 4, S_4 = 194, \dots$ şeklinde devam eden ve $S_{n+1} = S_n^2 - 2$ şeklinde S_n diye bir sayı dizisi tanımlayın. Lucas-Lehmer testi M_p 'nin ancak ve ancak S_p ile bölündüğünde M_p 'nin asal olacağını ifade eder. Bu, Mersenne sayılarının asal olup olmadığıyla ilgili kolaylık sağlayan bir testtir.

Mersenne'in birçok konuda yanıldığı sonunda ortaya çıktı: listesindeki iki sayının çarpanları vardır ($n = 67$ ve 257) ve o, $n = 61, 89$ ve 107 değerleri için oluşan asal sayıları listesine listesine almamıştır. Elle yapılan hesaplamaların zorluğunu göz önünde bulundurursak o, yine de iyi iş çıkarmıştır.

Ivan Mikheevich Pervushin, 1883'te Mersenne'nin gözden kaçırdığı bir durum olan M_{61} 'in asal olduğunu ispatlamıştır.

Daha sonra, R.E. Powers onun ikisi de asal olan M_{89} ve M_{107} 'yi de fark etmediğini gösterdi. M_n 'nin durumu n için 257'ye kadar 1947 dolaylarında kontrol edilmişti. Bu aralıkta Mersenne asalları $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107$ ve 127 değerleri için oluşur. Güncel Mersenne asalları listesi şöyledir:

Tablo 15

n	yılı	keşfedeni
2	—	antik çağdakiler
3	—	antik çağdakiler
5	—	antik çağdakiler
7	—	antik çağdakiler
13	1456	anonim
17	1588	Cataldi
19	1588	Cataldi
31	1772	Euler
61	1883	Pervushin
89	1911	Powers
107	1914	Powers
127	1876	Lucas
521	1952	Robinson
607	1952	Robinson
1279	1952	Robinson
2203	1952	Robinson
2281	1952	Robinson
3217	1957	Riesel
4253	1961	Hurwitz
4423	1961	Hurwitz
9689	1963	Gillies
9941	1963	Gillies
11,213	1963	Gillies
19,937	1971	Tuckerman
21,701	1978	Noll & Nickel
23,209	1979	Noll
44,497	1979	Nelson & Slowinski
86,243	1982	Slowinski
110,503	1988	Colquitt & Welsh
132,049	1983	Slowinski
216,091	1985	Slowinski
756,839	1992	Slowinski, Gage ve arkadaşları
859,433	1994	Slowinski & Gage

1,257,787	1996	Slowinski & Gage
1,398,269	1996	Armengaud, Woltman ve arkadaşları
2,976,221	1997	Spence, Woltman ve arkadaşları
3,021,377	1998	Clarkson, Woltman, Kurowski ve arkadaşları
6,972,593	1999	Hajratwala, Woltman, Kurowski ve arkadaşları
13,466,917	2001	Cameron, Woltman, Kurowski ve arkadaşları
20,996,011	2003	Shafer, Woltman, Kurowski ve arkadaşları
24,036,583	2004	Findley, Woltman, Kurowski ve arkadaşları
25,964,951	2005	Nowak, Woltman, Kurowski ve arkadaşları
30,402,457	2005	Cooper, Boone, Woltman, Kurowski ve arkadaşları
32,582,657	2006	Cooper, Boone, Woltman, Kurowski ve arkadaşları
37,156,667	2008	Elvenich, Woltman, Kurowski ve arkadaşları
42,643,801	2009	Strindmo, Woltman, Kurowski ve arkadaşları
43,112,609	2008	Smith, Woltman, Kurowski ve arkadaşları
57,885,161	2013	Cooper, Woltman, Kurowski ve arkadaşları

Gerçekten devasa büyüklükteki asal sayılar için olan arayış çeşitli nedenlerle ana olarak Mersenne asalları üzerinde odaklanmıştır. Bilgisayarlar tarafından kullanılan ikili tabanda, 2^n ; n 'li sıfırlardan ve $2^n - 1$ de n 'li birlerden hemen sonra gelir. Bu aritmetiğin bir kısmını hızlandırır. Daha önemlisi, Lucas-Lehmer testi asallığı test etmek için olan genel testlerden çok daha etkilidir, dolayısıyla çok büyük sayılar için daha kullanışlıdır. Bu test, tablodaki 47 Mersenne asalını verir. Güncellemeler ve daha fazla bilgi şurada bulunabilir: <http://primes.utm.edu/merenne/>.

Sonsuz Sayılar

Daha önce söylediğim gibi, matematikçiler sadece imkânsız diye bir şeyi yapmaktan geri durmazlar. Eğer o yeterince ilginçse, onlar onu mümkün kılacak yollar bulurlar.

En büyük tamsayı gibi bir şey yoktur. Onlar sonsuza kadar devam eder. Bunu herkes bilir.

Ancak, Georg Cantor bu özel sonsuz teriminin ne kadar büyük olduğunu sorgulamaya karar verdi; o, sonsuz büyüklükteki sayıları mantıklı hale getiren yeni bir yöntemle çıkageldi. Bunun bir sonucu bazı sonsuzlukların diğerlerinden daha büyük olduğuydu.

Çoğu çağdaşı onun deli olduğunu düşündü. Ancak, Cantor'un deliliğinde bir yöntem vardı ve onun yeni sonlu ötesi sayılarının mantıklı ve önemli olduğu ortaya çıktı.

Onlara çoktan alışmış olmak zorundaydınız. Ki bu da kolay değildi.

ALEF-SIFIR (İLK SIFIR): EN KÜÇÜK SONSUZLUK

Matematikçiler 'sonsuz' sözcüğünü ücretsiz ve yaygın biçimde kullanırlar. Gayri resmi olarak, eğer bir şeyin ne kadar büyük olduğunu sıradan tamsayılarla sayamıyorsanız veya onun uzunluğunu gerçel sayılar kullanarak ölçemiyorsanız o sonsuzdur. Üzerinde mutabık olunan sayıların yokluğunda onların yerini tutması için 'sonsuzu' kullanırız. Sonsuz genel anlamda bir sayı değildir. Deyimi yerindeyse, eğer bu cümle mantıken tutarlıysa en büyük sayı ne olmalıdır. Eğer ne ima ettiğiniz hakkında çok ama çok dikkatli değilseniz, öyle bir şey yoktur.

Cantor sonsuz kümeleri sayarken sonsuzu orijinal bir sayı yapmak için bir yol bulmuştu. Fikrini bütün tamsayıların kümesine uygulamak $\aleph_0$ (alef-sıfır veya alef hiçlik-bu İbranice alfabenin ilk harfidir*) denen bir sonsuz sayıyı tanımlar. Bu herhangi bir tamsayıdan daha büyüktür. Öyleyse bu sonsuzdur, öyle değil mi? Yani, bir nevi evet. O, elbette sonsuzdur. Daha doğrusu en küçük sonsuzluktur. Diğerleri de vardır ve onlar, ondan daha büyüktür.

Sonsuzluk

Çocuklar saymayı öğrendikleri zaman ve bin veya milyon gibi büyük sayılara aşına olduklarında olası en büyük sayıyı genellikle merak ederler. Belki de onlar onun 1.000.000.000.000.000 gibi bir sayı olduğunu düşünürler.

Ancak sonrasında sonun sıfır ekleyerek ya da ona 1 ekleyerek daha büyüğünü yani 1.000.000.000.000.001'i elde edebileceklerini fark ederler.

Belli bir sayı en büyük tamsayı olamaz çünkü 1 ekleyerek her zaman daha büyüğü elde edilebilir. Tamsayılar sonsuza kadar devam eder. Eğer saymaya başlar ve devam ederseniz olası en büyük tamsayıya ulaşır ve duramazsınız çünkü böyle bir şey mevcut değildir. Sonsuz olan çok sayı vardır. Öklit sonsuz sayıda asal sayı olduğunu ispat ettiğinde o, onu bu şekilde ifade etmemiştir. O 'asal sayıların belli bir çokluktan her zaman daha büyük olduğunu' söylemişti. Bu da en büyük asal sayı diye bir şeyin olamayacağı demektir.

İhtiyatı elden bırakmadan yapılacak şey tarihteki öncülleri takip etmek ve herhangi bir tamsayıdan büyük olan yeni türde bir sayı ortaya sürmektir. Bunu 'sonsuz' olarak adlandırın ve ona bir sembol atayın. Normalde kullanılan yana yatmış bir 8 gibi olan ∞ 'dur. Ancak sonsuz başa dert açabilir çünkü onun davranışı bazen paradoksaldır.

Gerçekten ∞ en büyük tamsayı mı olmalıdır? İşin doğrusu, tanım gereği o herhangi bir tamsayıdan daha büyüktür, ancak eğer yeni sayımızla dört işlem yapmak istersek olaylar alışılmıyışın dışına çıkar. Aşikâr soru şudur: $\infty + 1$ neye eşittir? Eğer o sonsuzdan büyükse, o halde ∞ en büyük olası sayı değildir. Ancak eğer o ∞ eşitse o halde $\infty = \infty + 1$ 'dir. Eğer iki taraftan da sonsuz çıkarırsak $0 = 1$ 'i elde ederiz. Pekâlâ, $\infty + \infty$ hakkında ne dersiniz? Eğer bu ∞ 'ten büyükse yine aynı zorlukla baş başa kalırız. Ancak eğer bu yine ∞ 'e eşitse o halde $\infty + \infty = \infty$ 'tür. İki taraftan ∞ çıkarırsanız $\infty = 0$ 'ı elde edersiniz.

Sayı sistemindeki daha önceki genişlemelerle ilgili tecrübemiz her ne zaman yeni türde bir sayı ortaya koysanız aritmetiğin veya cebirin bazı kurallarından feragat etmek zorunda kalıyor olabilirsiniz. Buradaysa, eğer işin içinde ∞ varsa çıkarma işlemini yasaklamamız gerekmektedir. Benzer gerekçelerle ∞ ile bölmenin de normalde olduğu üzere olacağını varsayamayız. Ancak, eğer çıkarmada ve bölmede kullanılamayacaksa o, oldukça güçsüz bir sayıdır.

Bu, hikâyenin sonu olabilirdi; ancak matematikçiler sonsuzla işlem yaparak çalışmayı oldukça yararlı buldular. Yararlı sonuçlar şekilleri sonsuza doğru giderek daha da küçülen parçalara bölerek keşfedilebilir. Aynı π sayısının neden hem çemberin çevresinde hem de dairenin alanında ortaya çıkması bir örnektir [π bölümüne bkz.]. Arşimet MÖ 200 dolaylarında çemberler, küreler ve silindirler üzerine yaptığı çalışmasında bu fikri güzel bir şekilde kullandı. O, yöntemin doğru cevaplar verdiği karmaşık ancak mantıksal olarak titiz olan bir ispat buldu.

On yedinci yüzyıldan itibaren bu çeşit işlemler için mantıksal bir kuram ihtiyacı özellikle önemli sayılara ve fonksiyonlara gittikçe azalan sayılar eklenerek istenilen herhangi bir hassaslık düzeyine yaklaştıran sonsuz seriler için olan ihtiyaç gittikçe kendini hissettirmeye başlamıştı. Örneğin, [π] bölümünde ardışık tam karelerin toplamı şeklinde ifade edilen π 'yi görmüştük:

$$\pi^2/6 = 1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + 1/36 + \dots$$

Bu ifade sadece serileri sonsuza kadar götürdüğümüzde doğrudur. Eğer durursak seriler π 'ye yakınsama olan ancak π irrasyonel olduğundan ona eşit olamayan rasyonel bir sayı verir. Her halükarda nerede durursak duralım bir sonraki terimi eklemek toplamı daha da büyütecektir.

Sonsuz serilerin toplamıyla olan bunun gibi zorluklar onların bazen mantıklı gözükmemesidir. Klasik bir örnek

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Eğer bu toplam şu şekilde yazılırsa

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots \text{ o şu hale gelir}$$

$0 + 0 + 0 + 0 + \dots$ ki bu da açıkça 0'dır. Ancak eğer bu farklı bir formda yazılırsa, alışlageldik cebir kuralları uygulandığı varsayılırsa o şuna dönüşür

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots$$

Bu da $1 + 0 + 0 + 0 + \dots$ 'dır ve apaçık bir şekilde 1'e eşit olmalıdır.

Buradaki sorun, serilerin birleşmede başarısız olması olarak ortaya çıkar; bu da bu toplama daha fazla terim eklendikçe onun belli bir değere doğru yaklaşmadığını imler. Bunun yerine değer 1 ile 0 arasında gider gelir:

$$1 = 1$$

$$0 = 1 - 1$$

$$1 = 1 - 1 + 1$$

$$0 = 1 - 1 + 1 - 1 \text{ ve bu böyle devam eder.}$$

Muhtemel sorunların kaynağı sadece bu değildir, ancak bu sonsuz serilerin mantıksal kuramına doğru bir yöntemi işaret eder. Tutarlı olanlar, daha fazla terim eklendikçe belli bir değere giderek daha çok yaklaşan yani bir değere doğru toplananlardır. Ardışık tam karelerin serisi bir noktaya doğru toplanır ve bu değer de tam olarak $\pi^2/6$ 'dır.

Felsefeciler olası sonsuzlukla gerçekte olan sonsuzluk arasında ayırım yaparlar. Bir şey kural olarak sonsuza kadar devam ediyorsa yani git gide daha fazla terim eklemek gibi, onun sonsuzluğu olasıdır. Her tekil toplam sonludur, ancak bu toplamaları oluşturan işlemlerin kesin bir durma noktası yoktur. Gerçek sonsuzluk bütün bir sonsuz işlem veya sistem tek bir nesne gibi davrandığında ortaya çıkar. Matematikçiler olası sonsuzluğu ve sonsuz serileri yorumlamak için mantıklı bir yol buldular. Onlar birçok çeşitli olası sonsuz işlem kullandılar, ancak onların hepsinde sembol 'bunu yeterince uzun süre yaparsanız istediğiniz doğru sonuca o kadar çok yaklaşıacaksınız' olarak yorumlandı.

Gerçek sonsuzluk bütünüyle farklı bir meseledir ve onlar ondan uzak durmak için çok çabaladılar.

Sonsuz Bir Sayı Nedir?

Bu soruyu 1, 2, 3,... gibi sıradan sonlu tamsayılar için daha önce de sordum (9. sayfada). Verili bir sınıfla ilişkili bütün sınıfların sınıfı demek olan Frege'in fikrine kadar gittim ve engel bir durum olabileceğine ilişkin bir işaretlerle durdum.

Gerçekten de vardır.

Bir kere bu çeşit düşünmeye alıştıktan sonra tanım çok şıktır ve bu, biricik bir nesneyi tanımlama yetisine sahiptir. Russell bir itiraz sesi yükselttiğinde Frege'in şaheserinin mürekkebi henüz kurumamıştı. İtiraz Frege hakkında daldığı derin düşüncelere değil Frege'in kullandığı sınıf hakkındaydı. Bizim fincan sınıfımızla ilişkili olan bütün sınıfların sınıfı *devasadır*. Herhangi üç nesneyi alın, onlardan bir sınıf oluşturun sonuç Frege'in obur olan bütün sınıfların sınıfının üyesi olmalıdır. Örneğin, üyeleri Eyfel kulesi, Cambridgeshire'da bir tarladaki belli bir papatya veyahut Oscar Wilde'ın ince zekâsı olan sınıf da göz önünde bulundurulmalıdır.

Russell Açmazı

Her şeyi kapsayan sınıflar mantıklı mıdır? Russell bunu fark etti, ancak çoğunluğun büyük kısmı fark etmedi. Onun örneği ünlü berber açmazının bir çeşidiydi. Belli bir köyde, tam olarak kendini traş edemeyen insanları traş eden bir berber vardır. Berberi kim traş eder? Köydeki her kişinin başkası tarafından traş edilmesi şartıyla böyle bir berber yoktur. Eğer berber kendini traş etmiyorsa, o halde tanım gereği berber kendini traş etmelidir. Eğer o, kendini traş ediyorsa o halde; o, aslında sadece kendini traş etmeyen köylüleri traş edeceği şartını ihlal etmektedir.

Burada berberle ilgili sorun oluşmasın diye onu erkek kabul ederiz. Bununla birlikte hanımlar; günümüzde çoğunuzun genellikle sakallarınız olmasa da traş olduğunuzu hepimiz biliyoruz. Dolayısıyla bazı insanların düşündüğü gibi berberi kadın olarak düşünmek tatmin edici bir çözüm değildir.

Russell Frege'in kullanmak istediğine daha çok benzeyen ve bir berber gibi davranan bir sınıf buldu: *kendilerini içermeyen bütün sınıfların sınıfı*. Bu sınıf kendini içerir mi içermez mi? İki olasılık da düşünülür. Eğer kendi kendisini içeriyorsa, o halde o bütün üyelerinin yaptığını yapmalıdır: o kendi kendisini içermemelidir. Ancak eğer kendisini içermiyorsa; o, sınıfa ait olma şartını sağlar, dolayısıyla kendisini içerir.

Russell açmazı Frege'nin sayı tanımının mantıklı olduğunun karıştını ispat etmese de o, kanıt olmadan herhangi bir doğru/yanlış şartın bir sınıfı tanımladığını basitçe varsayamayacağını imler. Bu da Frege'in yaklaşımının kendine olan mantıksal güvenini darmadağın etmiştir. Daha sonra Russell ve onun yardımcısı Alfred North Whitehead matematiksel biçimde mantıksal olarak tanımlanabilir sınıflar hakkında ileri bir kuram geliştirerek boşluğu doldurmayı denediler. Sonuç, **matematiği** bütüncül bir bakışla sınıfların mantık özelliklerinden geliştirilen üç ciltlik bir çalışmaydı *Principia Mathematica* [*Matematiğin İlkeleri*, Isaac Newton'ın anısına ithaf edilmiştir]. Birkaç yüz sayfasını 1 sayısını betimlemeye ayırmıştır ve biraz daha fazlasını + tanımlamak ve $1 + 1 = 2$ olduğunu ispat etmeye ayırmıştır. Bundan sonra ilerlemeler çok daha hızlandı.

Aleph-Sıfır: En Küçük Sonsuz Sayı

Russell-Whitehead yaklaşımını artık az sayıda matematikçi kullanmaktadır, çünkü daha basit yaklaşımlar daha iyi işlemektedir. Matematiğin mantıksal temellerinin bugünkü formülasyonunda anahtar isim Cantor'dur. O, tamsayıların mantıksal temellerini anlamayı deneyerek Frege gibi işe başlamıştı. Ancak, bu çalışma yeni bir yöne evrildi: ~~sayılardan~~ sonsuz seriler oluşturma. Onlar sonlu ötesi sayma sayılar olarak bilinir oldular ('sayma sayıları' sıradan saymadaki sayılardır). Onların en kayda değer özelliği onlardan birden fazla olmasıdır.

Ayrıca Cantor, sınıflardansa kümeler (Almancada) diye adlandırdığı nesne koleksiyonlarıyla da çalıştı, o onları böyle adlandırmıştı çünkü onlardaki nesneler Frege'in izin verdiklerinden (daha doğrusu her şeyden) daha da kısıtlanmıştı. Frege gibi o da ancak ve ancak aynı eleman sayısına sahip olan iki kümenin birbirleriyle eşleştirebileceği ilgi çekici fikrinden yola çıkmıştı. Frege'in aksine o, bunu sonsuz kümeleri için de yaptı. Aslında o, sonsuzun nasıl tanımlanacağı fikriyle işe baş-

lamış olabilirdi. Gerçekten de herhangi bir sonsuz küme bir diğeriyle eşleştirilebilir miydi? Eğer öyleyse, tam olarak sadece bir adet sonsuz sayı olur ve bu bütün sonlu sayılardan daha büyük olurdu, işte hikâyenin sonu.

Ortaya çıktığı üzere, bu sadece başlangıçtı.

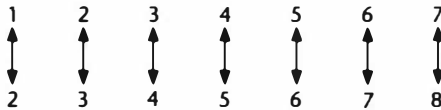
Temel sonsuz küme bütün tamsayıların kümesidir. Bunlar nesneleri saymak için kullanıldığından, Cantor, eğer elemanları tamsayılar kümesindeki sayılarla eşleştirilebilirse ancak o kümeyi sayılabilir olarak tanımladı. Bu bütün kümeyi düşünürken Cantor'un olası değil gerçek sonsuzluktan bahsettiğine dikkat edin.

Her sayının kendisiyle eşleştiği bütün tamsayıların kümesi apaçık biçimde sayılabilirdir:



Şekil 174

Daha başkaları var mıdır? Evet ve onlar tuhaftır. Şuna bir bakın



Şekil 175

Tamsayılar kümesinden 1 sayısını kaldırın ve küme içindeki elemanların sayısı 1 azalmaz: tam olarak aynı kalır.

Anlaşıldığı üzere eğer sonlu bir sayıda durursak sağ taraftaki sonda ayrı bir sayı elde kalır, ancak eğer tüm tamsayıları kullanırsak sağ tarafta bir son vücut bulmaz. n sayıda olan bütünden her sayı $n + 1$ sayıdakilerle eşleşir ve bu, bütün tamsayılar kümesiyle aynı kümenin 1 eleman eksik haliyle bir eş-

leşmedir. Parça, bütünle aynı büyüklüktedir.

Cantor kendi sonsuz sayılarını sayma sayıları veya bütün sonsuz sayılar olarak adlandırdı. Tamsayıların sayma için olanlarını sıra dışı bir sembol seçti: Yahudi alfabesinin ilk harfi olan X , çünkü fikir bütünüyle sıra dışıydı. Bir sonraki bölümde anlatacağım nedenlerden dolayı X_0 elde etmek için ona bir 0 yapıştırdı.

Eğer her sonsuz küme sayma sayılarıyla eşleştirilebilirse, X_0 'sonsuz' için fiyakalı bir sembol olacaktır. Ayrıca, bu öncelikle olacak gibi gözükmemektedir. Örneğin, tamsayı olmayan birçok rasyonel sayı vardır, dolayısıyla rasyonellerin sayma sayısı halinin X_0 'den büyük olacak olması mantıklı gözükmemektedir. Bununla birlikte, Cantor rasyonel sayıları sayma sayılarıyla eşleştirebileceğinizi ispatlamıştır. Dolayısıyla onların sayma sayısı hali de X_0 'dir.

Bunun nasıl olduğunu kabaca görmek için sadece 0 ile 1 arasındaki rasyonel sayıları ele alalım. İşin püf noktası onları miktarlarına göre *değil* ancak işe yarar biçimde sıralamada yatmaktadır. Bunun yerine, onları kesir çizgisinin altında kalan paydalarındaki sayıya göre sıralarız. Her bir payda için onları paylarına yani kesir çizgisinin üzerindekiye göre sıralarız. O halde onları şöyle listeleyebiliriz:

1/2 1/3 2/3 1/4 3/4 1/5 2/5 3/5 4/5 1/6 5/6
....burada örneğin 2/4 listede yoktur çünkü o 1/2'ye eşittir. İşte şimdi bu rasyonel sayıları bu özel sıralamalarıyla sayma sayılarıyla eşleştirebiliriz. Her 0 ile 1 arasındaki rasyonel sayı listenin bir yerinde meydana çıkar, dolayısıyla onların hiçbirini dışarıda bırakmayız.

Cantor'un kuramı şimdiye kadar sadece bir adet sonsuz sayma sayısına yol açtı, X_0 . Ancak, bir sonraki bölümün göstereceği üzere bu, o kadar da basit değildir.

SÜREKLİLİĞİN SAYMA SAYILI HALİ

Cantor'un en parlak içgörüsü bazı sonsuzların diğerlerinden daha büyük olduğuydu. O, gerçel sayılar sistemi için fiyakalı bir isim olan 'süreklilik' hakkında kayda değer bir şey keşfetmişti. Onun sayma sayısı hali olan ve onun c olarak gösterdiği sayı X_0 'dan büyüktür. Bazı gerçel sayıların tamsayı olmadığını kastetmiyorum. Bazı rasyonel sayılar (aslında çoğunluğu) tamsayı değildir, ancak rasyonel ve tamsayılar aynı sayma sayı haline yani X_0 'a sahiptir. Sonsuz sayma sayıları için Galileo'nun fark ettiği üzere bütünün parçadan büyük olmasına gerek yoktur. Bu, bütün gerçel sayıları onları ne kadar karıştırırsanız karıştırsın teker teker tüm tamsayılarla eşleştiremeyeceğiniz anlamına gelir.

c , X_0 'dan büyük olduğu için Cantor onların arasında başka bir sayma sayısı hali olup olmadığını merak etti. Onun süreklilik varsayımı böyle bir şeyin olmadığı yönündeydi. O, bu uyuşmazlığı ne kabul ne de ret etti. Kurt Gödel 1940'ta ve Paul Cohen 1963'te cevabın 'hem evet hem de hayır' olduğunu ispat etti. Bu, matematikteki mantıksal temelleri nasıl kurduğunuza göre değişir.

Saylamayan Sonsuzluk

Gerçel bir sayının ondalık kısmının 1,44'teki gibi sonlu veya π 'deki gibi sonsuz olarak ondalık biçimde yazılabildiğini hatırlayın. Cantor, gerçel sayıların sonsuzluğunun sayma sayılarınıninki olan X_0 'dan kesinlikle daha büyük olduğunu (bu manada olmasa da) farkına vardı.

Fikir insanı hayal kırıklığına uğratacak kadar basitti. O çelişki üzerinden olan ispatı kullanmaktadır. Gerçel sayılarla sayma sayılarının eşleştiği mantıksal bir çelişki elde etme ümidinde olduğunuzu varsayın. O halde sonsuz ondalık sayıların şu formda bir kümesi vardır

$$1 \Leftrightarrow a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$$

$$2 \Leftrightarrow b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \dots$$

$$3 \Leftrightarrow c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \dots$$

$$4 \Leftrightarrow d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, \dots$$

$5 \Leftrightarrow e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \dots$ öyle ki her olası sonsuz ondalık sayı sağ tarafta bir yerlerde ortaya çıkar. Koyu renkle yazılmışları bir an görmezden gelin; ona birazdan geleceğim.

Cantor'un dâhiyane fikri, ortaya çıkamayacak şekilde sonsuz bir ondalık sayı oluşturmaktı. Bu,

x_1 'in a_1 'den,

x_2 'nin b_1 'den

x_3 'ün c_1 'den

x_4 'ün d_1 'den

x_5 'in e_1 'den farklı olduğu şu formda olur:

$0, x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \dots$ ve bu böyle devam eder. Bunlar koyu şekilde gösterdiğim rakamlardır.

Buradaki ana fikir, eğer sonsuz bir ondalık sayı alırsanız ve onun sadece bir rakamını değiştirirseniz ne kadar ileri gidermeniz gidin onun değerini değiştirebilirsiniz. Belki çok fazla değil, ancak bu önemli değildir. Önemli olan onun değişmiş olmasıdır. Listedeki her bir sayıyı açıkça tamamlamak için bu oyunu oynayarak yeni 'kayıp' sayımızı bulabiliriz.

x_1 'e ilişkin olan şart, bu sayının listedeki ilk sayı olmadığı anlamına gelir çünkü ondalık virgülden sonraki ilk basmaktaki yanlış bir rakama sahiptir. x_2 'ye ilişkin olan şart bu yeni sayının listede ikinci sırada olmadığı anlamına gelir çünkü ondalık virgülden sonraki ikinci basamaktaki rakamı yanlıştır. Bu böyle devam eder. Çünkü hem ondalık sayılar hem de liste sonsuza kadar devam eder, çıkan sonuç yeni sayının listenin hiçbir yerinde olduğudur.

Ancak bizim varsayımımız onun listede olduğu yönündeydi. Bu bir çelişkidir, dolayısıyla bizim varsayımımız yanlıştır ve böyle bir liste yoktur.

Teknik bir meseleye dikkat etmelidir: 0'ı veya 9'u yapım aşamasındaki sayıda bir rakam olarak kullanmayın çünkü ondalık gösterim biraz muğlaktır. Örneğin; 0,10000... tam olarak 0,09999.. ile aynı sayıdır (onlar 1/10'u sonsuz ondalık sayı olarak yazmanın iki farklı yoludur). Bu muğlaklık sadece sayının ondalık kısmı 0'larla veya 9'larla devrettiğinde oluşur.

Bu fikir Cantor'un doğrusal savı olarak adlandırılır, çünkü a_1, b_2, c_3, d_4, e_5 ve devamındaki rakamlar listenin sağ tarafında doğrusal olarak uzanır (koyu yazılmış rakamların nerede oluştuğuna bakın). İspat hassas bir şekilde işler çünkü hem rakamlar hem de liste sayma sayılarıyla eşleştirilebilir.

Bu ispatın mantığını anlamak önemlidir. İtiraf edilmelidir ki inşa ettiğimiz sayıyı listenin en üstüne iliştirerek ve geriye kalanları bir aşağı kaydırarak başa çıkabiliriz. Ancak çelişkiyle ispatın mantığı bunun gerekli olmayacağını varsaymamızdı. Bizim var ettiğimiz sayı daha fazla değişikliğe *gerek olmadan* listede zaten olmalıydı. Ancak, o yoktur. Dolayısıyla da böyle bir liste yoktur.

Her bir tamsayı gerçel sayı olduğundan bu, Cantor'un bütün gerçel sayıların sonsuzluğu yaratımı bütün tamsayıların sonsuzluğundan daha büyüktür. O, Russell açmazını düzenleyerek en büyük sonsuz sayının var olmadığını ispat etmiş ve çok daha ileriye gitmiştir. Bu, onu sonsuz (veya sonsuz ötesi) sayma sayıları olarak bilinen ve olabilecek en büyük sonsuzluğun sonsuz serileriyle yüzleşmeye götürmüştür.

En Büyük Sonsuz Yoktur

Cantor, onun sonsuz sayılarının dizisinin her ardışık sonsuz sayının 'bir sonraki' olduğu ve aralarında hiçbir şeyin olmadığını şu şekilde başlaması gerektiğini düşünmüştü:

$$\kappa_0 \ \kappa_1 \ \kappa_2 \ \kappa_3 \ \kappa_4 \dots$$

$\aleph_0$ tamsayıları içerir. Dolayısıyla rasyonel sayıları da içerir. Ancak gerçel sayılar rasyonel olmak zorunda değildir. Cantor'un doğrusal savı c 'ni $\aleph_0$ 'dan daha büyük olduğunu ispatlar, dolayısıyla gerçel sayılar muhtemelen $\aleph_1$ 'e karşılık gelmelidir. Ancak, öyle midir peki?

İspat bize bunu söylemiyor. O, c 'ni $\aleph_0$ 'dan daha büyük olduğunu söyler; ancak o, onların arasında başka bir şeyin olma olasılığını dışlamaz. Cantor'un bütün bildiği c 'nin, hadi söyleyelim, $\aleph_3$ olabileceğidir. Veya daha da kötüsüdür.

O bunun bir kısmını ispatlayabildi. Sonsuz sayma sayıları gerçekten de bu biçimde düzenlenebilir. Ayrıca, sağ alttaki 0, 1, 2, 3, 4,... sonlu sayılarda durmaz. $\aleph_{x_0}$ diye sonsuz ötesi bir sayı da olmalıdır. Örneğin; o n herhangi bir tamsayı iken $\aleph_n$ 'in aldığı bütün değerlerden büyük olan en küçük sonsuz ötesi sayıdır. Eğer ilerleyiş burada durursa, bu onun en büyük sonsuz ötesi diye bir sayı olmadığı kuramını ihlal eder, dolayısıyla onlar durmazlar. Asla ve kat'a durmazlar.

Onun ispat edemediği gerçel sayıların $\aleph_1$ 'e karşılık geldiği. Belki de $\aleph_2$ diye bir şey vardır ve bunların arasında da $\aleph_1$ olan başka bir küme vardır, dolayısıyla o küme $\aleph_1$ 'dir. Onun yapabileceği şekilde bunu deneyin, o böyle bir küme bulamamıştı, ancak onun var olmadığını da ispatlayamamıştı. Onun alef listesindeki gerçel sayılar neredeydi? Onun hiçbir fikri yoktu. O, gerçel sayıların gerçekten de $\aleph_1$ 'e eşit olduğundan şüpheleniyordu, ancak bu da tam bir çelişkiydi. Dolayısıyla, o farklı bir sembol kullanarak sonuca vardı: 'sürekliliği' sembolize etsin diye Gotik c harfi, bu isim daha sonra bütün gerçel sayıların kümesi için kullanıldı.

n elemanlı sonlu bir küme 2^n adet alt kümeye sahiptir. Dolayısıyla Cantor sayma sayısı A ile bazı kümeleri alıp 2^A 'yı o kümenin bütün alt kümelerinin sayma sayısı olarak tanımlayarak herhangi bir A sayma sayısı için 2^A şeklinde tanımladı. Sonrasında herhangi bir A sayma sayısı için 2^A 'nın A 'dan daha büyük olduğunu ispatlayabilirdi. Bu da tesadüfen en büyük sonsuz sayma sayısı diye bir şey olmadığını imlemektir. O ayrıca $c = 2^{\aleph_0}$ olduğunu da ispatlayabilirdi. $\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$ de mümkün

gözükmektedir. Bu da, bütün alt kümelerin kümesini almak bir sonraki en büyük sonsuz sayma sayısına yol açar. Ancak o, bunu ispatlayamamıştır.

O, $n = 0$ olduğunda aynı zamanda diğer bir deyişle $c = \aleph_1$ demek ve en basit eşitliği bile ispatlayamamıştır. Cantor 1878'de bu denklemin doğru olduğunu iddia etti ve bu, süreklilik varsayımı olarak bilinir oldu. Gödel 1940'ta cesaret verici bir gelişme olarak 'evet' cevabının küme kuramının bilindik varsayımlarıyla uyumlu olduğunu ispatladı. Ancak sonrasında 1963'te Cohen 'hayır' cevabının de mantiken tutarlı olduğunu ispatladı.

Bu da olmaz ki.

Bu, matematikte mantıksal bir çelişki değildir. Onun manası çok daha tuhaftır ve bazı yönlerden daha da rahatsız edicidir: cevap, hangi tür küme kuramı kullandığınıza göre değişir. Matematikte mantıksal temellendirme yapmanın birden fazla yolu vardır ve onların hepsi temel maddeler üzerinde fikir birliği içindeyken daha ileri konularda fikir ayrılığına düşebilmektedirler. Walt Kelly'nin çizgi film karakteri Pogo'nun âdeti olarak söylediği üzere: 'Biz düşmanla karşılaştık ve o, bizdik.'. Aksiyomatik mantık üzerinde olan ısrarımız 'Sinek küçüktür, ama mide bulandırır.' sözüne ne kadar da uyuyor.

Günümüzde sonsuz sayma sayılarının diğer birçok özelliklerinin hangi küme kuramını kullandığımıza bağlı olduğunu biliyoruz. Ayrıca, bu sorular kümelerin sayma sayılarıyla açıkça ilgili olmayan diğer özellikleriyle de yakından ilgilidir. Bu alan mantıkla ilgilenen matematikçiler için cennettir, ancak son tahlilde matematiğin geriye kalanı küme kuramının hangi versiyonunu kullanırsanız kullanın doğru çalışıyor gibi gözük-mektedir.

Hayat, Evren ve...

42 Gerçekten En Sıkıcı Sayı Mıdır, Yoksa?

HIÇ DE SIKICI DEĞİL

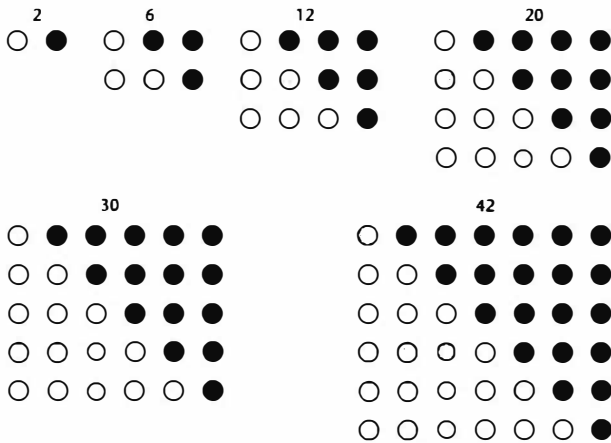
İşte, dananın kuyruğunun koptuğu yere geldik.

Önsözde bahsettiğim üzere 'hayatın, evrenin ve her şeyin muhteşem sorusunun' cevabı olan bu sayı Douglas Adams'ın *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy* kitabında belirgin biçimde ön plana çıkmaktadır. Bu keşif hemencecik yen bir soru ortaya çıkardı: hayatın, evrenin ve her şeyin muhteşem sorusunun aslında ne olduğu. Adams bu sayıyı seçtiğini söyledi çünkü arkadaşları arasında yaptığı bir anket bu sayının tamamıyla sıkıcı olduğu yönündeydi.

Bu iftiraya karşı 42 sayısını burada savunmak istiyorum. İtiraf etmeliyim ki 42 matematik önemlilik açısından π ile veya 17 ile bile aynı kulvarda değildir. Bununla birlikte tamamıyla ilginç değil değildir. O, pronik bir sayıdır, bir Katalan sayısıdır ve en küçük sihirli küpün sihirli sabitidir. Ayrıca biraz başkaca şeyler de vardır.

Pronik Sayı

Bir pronik (oblong, dikkörtgen, heteromerik) sayı iki ardışık sayının çarpımının ürünüdür. Dolayısıyla o, $n(n + 1)$ formundadır. $n = 6$ aldığımızda $6 \times 7 = 42$ 'yi elde ederiz. n . üçgensel sayı $1/2 n(n + 1)$ formunda olduğundan pronik bir sayı üçgen bir sayının iki katıdır. Dolayısıyla o, ilk çift sayıların toplamıdır. Pronik bir sayıyı benekle gösterilmiş hali bir dikkörtgen içinde bir kenarı diğerinden büyük olacak şekilde düzenlenebilir.



Şekil 176: İlk altı pronik sayı. Siyaha boyanmışlar her bir pronik sayısının neden üçgensel sayının iki katı olduğunu gösterir.

Gençken Gauss'a sorulduğu söylenen ve genel tipte kurgulandığı söylenen bir soru vardır

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$$

O, eğer toplam sayılar azalan şekilde yazıldığında eşleşen çiftlerin toplamının 101 olduğunu hemen fark etti.

$$100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 1$$

Bu şekilde olan çiftlerden 100 adet olduğu için genel toplamı $100 \times 101 = 10.100$ yapar. Bu pronik bir sayıdır. Öğretmeninin sorduğu sorunun cevabı bunun yarısıdır: 5050. Bununla birlikte, Gauss'un öğretmeninin sınıfta hangi sayılarla soruyu kurguladığını bilmiyoruz, ancak onlar muhtemelen bundan daha cinstir. Eğer öyleyse, Gauss'un içgörüsünü çok daha zekicedir.

Altıncı Katalan Sayısı

Matematiksel işleri gerçekleştirmenin kaç farklı yolunun olduğunu sayan kombinasyon sorularının çok farklı çeşitlerinde Katalan sayıları ortaya çıkar. Onların izi bir düzgün çokgenin

köşegenleri yardımıyla kaç farklı üçgene ayrılabilirliğini sayan Euler'e kadar gider. Daha sonra Eugène Catalan cebirle bir ilişki keşfetmiştir: bir bütünü veya ürünü oluşturan parçalar kaç farklı şekilde yerleştirilebilir. Buna birazdan geleceğim, ancak öncelikle bu sayıları size anlatmalıyım.

$n = 0, 1, 2, \dots$ değerleri için başlangıçtaki bazı Katalan sayıları C_n

1 1 2 5 14 42 132 429 1430 4862'dir.

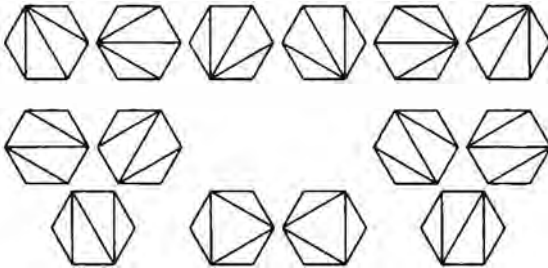
Faktöriyelleri kullanan bir formül vardır:

$$C_n = (2n)! / (n+1)! n!$$

Büyük n için iyi bir yakınsama çemberler ve dairelerle hiçbir ilişkisi yok gibi gözüktüğü halde π 'nin ortaya çıktığı sorulardan biridir:

$$C_n = 4^n / n^{3/2} \sqrt{\pi}$$

C_n ($n+2$) kenarlı bir düzgün çokgeni üçgenlere bölmenin farklı yollarının sayısıdır.



Şekil 177: Altıgenin 14 farklı biçimde üçgenlere ayrılması.

Bu ayrıca $n+1$ yapraklı iki köklü ağaç şemasının sayısıdır. Bunlar bir noktadan veya kökten başlayan ve ondan uzaklaştıkça ikiye bölünerek elde edilirler. Her bir dal ya bir noktayla veya yaprakla sonlanır. Her nokta tekrar iki dala ayrılmak zorundadır.

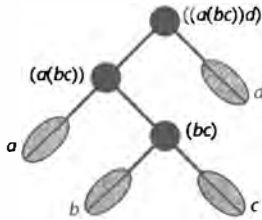


Şekil 178: Dört yapraklı iki tabanında köklü beş ağaç.

Eğer bu fikir gizemli gibi gözüktüyse onun cebirle doğru-
dan ilişkisi vardır: o, $C_3 = 5$ $abcd$ örneğinde olduğu üzere ele-
manları farklı şekilde paranteze almanın sayısıdır:

$$((ab)c)d \quad (a(bc))d \quad (ab)(cd) \quad a((bc)d) \quad a(b(cd))$$

Genelde $n + 1$ elemanla paranteze alma işlemi C_n 'dir. İliş-
kiyi görmek için, elemanları ağaçtaki dalların yanına yazın ve
parantezleri hangi çift bir noktada kesişiyorsa oraya yerleştiri-
rin. Daha ayrıntılı olarak (şekle bakınız) dört yaprağı soldan
sağa a, b, c, d şeklinde etiketleriz. En alttan başlayarak b 'nin
 c ile birleştiği noktanın yanına (bc) yazın. (bc) ile işaretlen-
miş noktanın üzerinde a onlara katılır, dolayısıyla yeni nokta
 $(a(bc))$. Sonunda tepedeki noktada buna d katılır, böylece $((a(bc))d)$
 d haline gelir.



Şekil 179: İki tabanında köklü ağacı cebirsel yazma.

Diğer birçok kombinsayon sorusu Catalan sayılarını oluş-
turmuştur, yukarıdakiler tarif etmesi en kolay olanların küçük
bir örneğidir.

Sihirli Küpler

$3 \times 3 \times 3$ sihirli küpünün sihirli sabiti 42'dir. Böyle bir küp 1, 2, 3, ... ,27 sayılarını içerir ve kenara paralel veya merkezden köşegen olarak geçen dizilerin toplamı hep sihirli sabiti yani 42'yi verir. Bütün 27 adet girdinin toplamı $1 + 2 + \dots + 27 = 378$ 'dir. Bunlar dokuz adet kesişmeyen ve toplamaları sihirli sabiti veren üçlülere ayrılır dolayısıyla bu, $378/9 = 42$ olmalıdır. Böylesi düzenlemeler mevcuttur; şekil onlardan birini göstermektedir.

1	17	24
15	19	8
26	6	10

23	3	16
7	14	21
12	25	5

18	22	2
20	9	13
4	11	27

Şekil 180: $3 \times 3 \times 3$ sihirli küpün ardışık katmanları.

Diğer Özel Nitelikleri

42, 10 sayısını parçalara ayırmanın yani bu sayıyı kendinden küçük tamsayıların toplamı şeklinde yazmanın yolunun sayısıdır, örneğin;

$$1 + 2 + 2 + 53 + 3 + 4$$

42 ikinci sfenik yani üç farklı asal sayının çarpımı şeklinde yazılabilen sayılar, sayıdır. Bu örnekte $42 = 2 \times 3 \times 7$ 'dir. Başlangıçtaki bazı sfenik sayılar şunlardır:

$$30 \quad 42 \quad 66 \quad 70 \quad 78 \quad 102 \quad 105 \quad 110 \quad 114 \quad 130$$

42, üçüncü pentadekagonal yani üçgensel sayıların benzeri olan sayılar anca düzgün 15 kenarlı çokgen temelli olan sayıdır.

42, süper çoklu mükemmel sayıdır: bölenlerinin (42 dahil) toplamının bölenlerinin toplamı sayının kendisinin altı katı olması halidir.

Bir zamanlar 42, π sayısı için en bilindik irrasyonelliği ölçüsüdür; bu, π 'nin 'ne kadar irrasyonel olduğunu' hesaplama-

nın hassas bir yoludur. Özel olarak Kurt Mahler 1953'te herhangi bir $p/4$ rasyonel sayısı için

$$|\pi - p/q| \geq 1/q^{42} \text{ olduğunu ispatladı.}$$

Ancak V. Kh. Salikov 2008'de 42'yi 7,60630853 ile değiştirdi, dolayısıyla 42 bu bağlamda sıkıcı olma durumuna geri döndü.

42 üçüncü baş mükemmelimsi sayıdır. Bu sayılar p_j 'ler N 'yi bölen farklı asal sayılarken şu şartı sağlar:

$$1/p_1 + 1/p_2 + \dots + 1/p_k + 1/N = 1$$

Başlangıçtaki bazı baş mükemmelimsi sayılar şunlardır:

2 6 42 1806 47.058 2.241.502.422 52.495.396.602

42, dört farklı $a, b, c, d < n$ tamsayısından oluşan kümenin $ab - cd, ac - bd$ ve $ad - bc$ sayılarının her biri n tarafından bölünebilir olduğu n sayısıdır. Bu özelliğe sahip olduğu bilinen tek sayıdır, ancak diğerlerinin var olup olmadığı bilinmemektedir.

42, sosis savının doğru olduğu ispat edilen en küçük boyut sayısıdır [56 bölümüne bkz.].

Bununla birlikte bu savın 5'e eşit veya ondan büyük bütün boyutlarda geçerli olduğu iddia edildi, dolayısıyla 42'nin buradaki özelliği güncel bilgi durumumuza bağlıdır.

Gördünüz mü? Hiç de sıkıcı değil!

İLERİ OKUMALAR

- Carl B. Boyer.** *A History of Mathematics*, Wiley, New York 1968.
- John H. Conway ve Richard K. Guy.** *The Book of Numbers*, Springer, New York 1996.
- John H. Conway ve Derek A. Smith.** *On Quaternions and Octonions*, A.K. Peters, Natick MA 2003.
- John H. Conway, Heidi Burgiel, ve Chaim Goodman-Strauss.** *The Symmetries of Things*, A.K. Peters, Wellesley MA 2008.
- Tobias Dantzig.** *Number: The Language of Science*, Pi Yayınları, New York 2005.
- Augustus De Morgan.** *A Budget of Paradoxes* (2 vols., reprint), Books for Libraries Press, New York 1969.
- Underwood Dudley.** *Mathematical Cranks*, Mathematical Association of America, New York 1992.
- Marcus Du Sautoy.** *The Music of the Primes*, HarperPerennial, New York 2004.
- Richard J. Gillings.** *Mathematics in the Time of the Pharaohs* (reprint), Dover, New York 1982.
- Anton Glaser.** *History of Binary and Other Nondecimal Numeration*, Tomash, Los Angeles 1981.
- Jan Gullberg.** *Mathematics from the Birth of Numbers*, Norton, New York 1997.
- Richard K. Guy.** *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer, New York 1994.
- G.H. Hardy ve E.M. Wright.** *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Üniversitesi Yayınları (4. basım Oxford 1960).
- Andreas M. Hinz, Sandi Klavzar, Uros Milutinovic, ve Ciril Petr.** *The Tower of Hanoi—Myths and Maths*, Birkhäuser, Basel 2013.

- Gareth A. Jones ve J. Mary Jones.** *Elementary Number Theory*, Springer, Berlin 1998. **George Gheverghese Joseph.** *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*, Penguin, Londra 1992.
- Viktor Klee ve Stan Wagon.** *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Mathematical Association of America, New York 1991.
- Mario Livio.** *The Golden Ratio*, Broadway, New York 2002. **Mario Livio.** *The Equation That Couldn't Be Solved*, Simon & Schuster, New York 2005.
- John McLeish.** *Number*, Bloomsbury, Londra 1991.
- O. Neugebauer.** *A History of Ancient Mathematical Astronomy* (3 vols.), Springer, Berlin 1975. **Paulo Ribenboim.** *The Book of Prime Number Records*, Springer, New York 1984.
- Erno Rubik, Tamas Varga, Gerszon Keri, Gyorgy Marx, ve Tamas Vekerdy.** *Rubik's Cubic Compendium*, Oxford Üniversitesi Yayınları, Oxford 1987.
- Karl Sabbagh.** *Dr Riemann's Zeros*, Atlantic Books, Londra 2022.
- W. Sierpin'ski.** *Elementary Theory of Numbers*, North-Holland, Amsterdam 1998.
- Simon Singh.** *Fermat's Last Theorem*, Fourth Estate, Londra 1997.
- Ian Stewart.** *Professor Stewart's Cabinet of Mathematical Curiosities*, Profile, Londra 2008.
- Ian Stewart.** *Professor Stewart's Hoard of Mathematical Treasures*, Profile, Londra 2009.
- Ian Stewart.** *Professor Stewart's Casebook of Mathematical Mysteries*, Profile, Londra 2014.
- Frank J. Swetz.** *Legacy of the Luoshu*, A.K. Peters, Wellesley MA 2008.
- Jean-Pierre Tignol.** *Galois's Theory of Algebraic Equations*, Longman, Londra 1988.
- Matthew Watkins ve Matt Tweed.** *The Mystery of the Prime Numbers*, Inamorata Press, Dursley 2010.
- Jeremy Webb (editor).** *Nothing*, Profile, Londra 2013.
- Robin Wilson.** *Four Colors Suffice* (2. basım.), Princeton Üniversitesi Yayınları, Princeton 2014.

Kitapta Yer Alan Şekillerin İzin Hakları İçin Teşekkürler

Şekil 1. Wikimedia creative commons, Albert11s; Şekil 3. Wikimedia creative commons, Marie-Lan Nguyen; Şekil 31. Livio Zucca; Şekil 32. Metropolitan Sanat Müzesi, New York; Chester Dale'nin başışı; Şekil 63. Wikimedia creative commons, Fir0002/Flagstaffotos; Şekil 77. Lessing Arşivi; Şekil 108. Allianz SE; Şekil 119. Kenneth Libbrecht; Şekil 130. thoughtyoumayask.com; Şekil 133. Jeff Bryant ve Andrew Hanson; Şekil 153. Wolfram MathWorld; Şekil 159. Wikimedia creative commons; Şekil 160. Wikimedia creative commons, Matt Crypto; Şekil 168. Joe Christy.

Çizimlerin telif hakkı sahipleriyle iletişim kurmak için her türlü çaba gösterilmiş olsa da yazar ve yayıncı takip edemedikleri herhangi bir çizim hakkında sağlanacak bilgiler için minnettar olacaktır ve sonraki baskılarda bunlarla ilgili değişiklik yapmaktan da memnuniyet duyacaktır.