

Keyifli Okumalar Dileriz

Binlerce kategoride milyonlarca PDF e-kitap, ders kitapları, dergiler ve romanlara platformumuz üzerinden ücretsiz ulaşabilirsiniz.

RESMİ WEB SİTEMİZ

<https://rantey.org>

Yedek ve Duyuru Kanallarımız

Sitemize erişim engeli gelmesi veya adres değişikliği durumunda aşağıdaki kanallardan güncel giriş adresine erişebilirsiniz:

- Telegram: <https://t.me/birkitapbir>
- WhatsApp Kanalımız : <https://whatsapp.com/channel/0029VbDHv8uE50Us4lvMoc0Y>



PISAGOR

EVİMİZİN

HER ŞEYİ

STEFAN BUIJSMAN



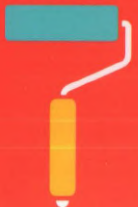
PİSAGOR EVİMİZİN HER ŞEYİ

İçinden Matematik
Geçen Dünya

STEFAN BUIJSMAN

Çeviri: Mahmut Tekçe

domingo



PİSAGOR EVİMİZİN HER ŞEYİ

İçinden Matematik Geçen Dünya

STEFAN BUIJSMAN

Çeviri: Mahmut Tekçe

domingo



PİSAGOR EVİMİZİN HER ŞEYİ
İçinden Matematik Geçen Dünya
STEFAN BUIJSMAN

Nederlands
letterenfonds
dutch foundation
for literature

Bu kitabın çevirisi Dutch Foundation for Literature tarafından desteklenmiştir.

Özgün ismi: Plussen en minnen

© 2018 Stefan Buijsman

Bu kitap ilk kez De Bezige, Bij, Amsterdam tarafından yayımlanmıştır.

Türkçe yayın hakları:

© 2022 Bkz Yayıncılık Ticaret ve Sanayi Ltd. Şti.

Sertifika No: 46105

Domingo, Bkz Yayıncılık markasıdır.

Çeviri: Mahmut Tekçe

Editör: Algan Sezgintüredi

Son okuma: Ümrân Özbalcı

Kapak uyarlama: Betül Güzhan

Sayfa uyarlama: Bahadır Erşık

ISBN: 978 605 198 218 2

Baskı: Mart 2022

Optimum Basım

Tevfikbey Mah. Dr. Ali Demir Cad. No: 51/1

34295 Küçükçekmece İstanbul

Tel: 0212 463 71 25 • Sertifika No: 41707

Tüm hakları saklıdır. Bu kitabın tümünün veya içeriğinin herhangi bir bölümünün yayıncının yazılı izni olmadan, fotokopi yöntemi dahil, elektronik ya da mekanik herhangi bir yolla çoğaltılması yasaktır.

Bkz Yayıncılık Ticaret ve Sanayi Ltd. Şti.

Harbiye Mah. Cumhuriyet Cad. Pak Apt. No: 30

Kat: 1 Daire: 3 Şişli İstanbul

Tel: (212) 245 08 39

e-posta: domingo@domingo.com.tr

www.domingo.com.tr

İÇİNDEKİLER

Giriş 1

- 1 **Dört Bir Yanımız Matematik** 7
Netflix'ten öneriler 12
Matematik her yerde 16
- 2 **Ayrı Dünyalar** 19
Büyük bir hikâye olarak matematik 23
Güzelliğın değeri 25
- 3 **Sayılar Olmadan Bir Hayat** 33
Pirahã'dan uzakta bir adada 35
Ölçüm gerekmez! 39
Küçük miktarlarla çalışma 41
Tam bilmiyorum! Beyin ve büyük sayılar 45
Geometrik şekilleri tanımak – civcivler bile yapabilir 50
Matematik yeni bir şey ekliyor mu? 55

- 4 **Evvel Zaman İçinde Matematik** 56
Sınırları Zorlamak 58
Mezopotamya'da okul 62
Mısır'da ekmek, bira ve sayılar 67
Teorik Yunanlar 73
Çin'in inekleri 77
- 5 **Değişmeyen Değişim** 83
Leibniz'e karşı Newton 87
Daha küçük adımlar 90
Adımları saymak 94
Hiçbir şey havadan daha fazla
değişmez 98
Binalarda, politika planlamada
ve fizikte türev ve integral 100
Herkes için integral? 105
- 6 **Belirsizliği Kavramak** 108
Matematik oyunları 109
Yazı tura atmak 113
İki Thomas 116
Hepsi bir oyun mu? Uygulamada
matematik 121
Daha fazla veri! 124
John Snow'un bildiği 126
Nicolas Cage ve yüzme
havuzları 129
Yalan haber mi? Dünyayı
istatistiklerle çarpıtmak 132
Herkesi ayrı ayrı sormaya
gerek yok 136

7	Akıl Bulmacaları	142
	Tek yönlü trafik	145
	İnternet üzerinde yolculuklar	152
	Filmleri bir çizgeyle izleme	157
	Kanseri daha etkili tedavi etmek için matematiği kullanmak	158
	Facebook, arkadaşlıklar ve yapay zekâ	160
	Arka plandaki çizgeler	165
8	Matematik Ne İşe Yarar?	168
	Matematikteki hatalar	170
	Hepsi tesadüf mü?	171
	Matematik yardımcı olur	175
	Günlük hayatımızda da	177
	<i>Görseller</i>	182
	<i>Kaynakça</i>	183
	<i>Dizin</i>	193

GİRİŞ

Zamanda geriye gidelim. Matematik öğretmenime bomboş bir ifadeyle bakıyorum. Dijital tahtada bir sürü formül ve bir dizi düz çizgi arasına çizilmiş dalgalı bir çizgi var. Lise sonda matematik dersi alan herkes gibi, bu formüllerin ve çizimlerin ne demek olduğunu öğrenmem lazım. Neden? Çünkü astronomi okumak istiyorum. Henüz bilmediğim şey ise, bu alanda başarılı olamayacak kadar sabırsız olduğum. Ama ya bilseydim? Peki ya ileride yapacağım meslekte hesaplama yapmaya çok az ihtiyaç duyacağımı bilseydim? O zaman Google'a şu soruyu sorardım: Matematik ne işe yarar?

Hollanda'daysanız Google'ın karşımıza çıkardığı ilk sonuç, Pisagor teoremi ve pizzaların nasıl kesileceği ile ilgili Hollanda'nın günlük gazetelerinden birinde yayımlanmış bir makaledir. Son derece isabetli ancak matematiğin faydalarının sadece çok küçük bir bölümünü gösteren bir yazı. Matematik olmasaydı soruma Google'da yanıt arayamazdım bile. Ya da karşıma sorduğum soruyla hiç ilgisi olmayan bir makale çıkardı. Google gibi bir arama motoru yalnızca matematik kullanarak çalışabilir. Kastettiğim, bilgisayarların birlerle ve sıfırlarla çalışması değil sadece: Google, soruma uygun yanıtlar bulmak için matematiği

zekice kullanır. Google'ın kurucuları Sergey Brin ve Larry Page'in 1998'de bu yöntemi tasarımlarından önce, arama alanına, örneğin, "Bill Clinton" yazan herkesin karşısında çıkan ilk sonuç, günün fıkrasıyla birlikte Bill Clinton'ın bir fotoğrafı olurdu. Yahoo'da "Yahoo"yu aradığınızda, arama motorunun kendisi ilk on sonuçta bile görünmezdi! Neyse ki bu artık olmuyor ve bunun için matematiğe teşekkür etmeliyiz.

Yine de bugün birçok insan hâlâ lisede hissettiğim duygulara sahip. Onlara göre matematik, zar zor anlaşılan ve okul bittikten sonra hiç ihtiyaç duymayacakları bir tahta dolusu formülden ibaret. Matematiğin bu kadar çok insan için anlaşılmaz ve yararsız görüldüğüne şaşmamalı. Oysa doğrusu tam tersi: Matematik, modern toplumumuzda çok önemli bir rol oynuyor ve formüllerin ötesine bakan herkes için anlaşılması, genellikle düşündüğümüzden daha kolay. Google'ın bizim için bilgi seçme şekli, matematiğin günlük yaşamımızı hem olumlu hem de olumsuz olarak nasıl etkilediğini gösteriyor. Google, Facebook ve Twitter gibi dijital hizmetler, mevcut görüş ve inançları pekiştirebilir. Önlenmesi çok zor olan yalan haberlerle günümüzde sürekli karşılaşırız. Bunun nedenlerinden biri, bu hizmetlerin çalışma şekli. Yalan haberlerle nasıl savaşılabileceğimizi ancak internet hizmetlerinin görüşlerimizi nasıl güçlendirdiğini ve bunu yapma şeklini değiştirmenin neden kolay olmadığını anlarsak öğrenebiliriz.

Bu kitapta matematiğin ne kadar yararlı olduğunu göstermek istiyorum. Şimdi matematiği daha iyi anladığım için bu kitap bir bakıma genç halime yönelik. Ama aynı zamanda, eskiden yaptığım gibi matematiksel hesaplamaları zor ve gereksiz bulan ve onlarla uğraşmadığı için mutlu olduğunu düşünen herkesi hedefliyor. Bir matematik felsefecisi olarak çalıştığım ve matematiğin

nasıl işlediği ve onu nasıl öğrendiğimiz hakkında çok düşündüğümünden, işimizde kullansak da kullanmasak da matematiğin hepimiz için son derece gerekli olduğunu biliyorum. Matematik, formüllerden çok daha fazlasıdır ki bu yüzden bu kitapta çok az formül var. Formüller, belirli bir problemi çözmek istiyorsanız faydalıdır ancak çoğu zaman dikkati matematiğin arkasında yatan fikirlerden uzaklaştırırlar.

Bu kitapta, birçok insanın düşündüğünden daha fazla hayatın içinde ve anlaşılır olduğunu göstermek için matematiğin çeşitli alanlarına ve arkasındaki fikirlere bakıyorum. Bu alanlarda, özellikle formülleri bir kenara koyarsak herkesin kolayca anlayabileceği şaşırtıcı derecede çok sayıda uygulama var. Çizge (graf) teorisini ele alalım: Google gibi arama motorları arama sonuçlarını sıralamak için çizge teorisini kullanır ama bu teori kanser hastalarının belirli bir tedaviye nasıl tepki vereceğini tahmin etmek ve büyük şehirlerdeki trafik akışlarını incelemek için de kullanılır.

Modern matematiğin bu kitapta incelediğim diğer alanları, istatistik ve kalkülüs için de aynısı geçerlidir. Her ikisinin de arkasındaki fikirler genellikle beklenmedik bir şekilde basittir ve okulda öğrenirken zannetmiş olabileceğinizden çok daha faydalıdır. İstatistiğe neredeyse her gün haberlerde, suç, ekonomi, politika ve benzeri konularla ilgili rakamlar şeklinde rastlıyoruz. Genellikle bu rakamların gerçekte ne anlama geldiği ve nereden geldikleri açık değildir. İnsanlar bir asır önce bile yanıltıcı istatistiklerin tehlikeleri hakkında, haklı olarak, uyarıyorlardı. Ve bu uyarılar bugün daha da önemli hale geldi.

Tıpkı çizge teorisi gibi, kalkülüs de faydalıdır çünkü biz farkına bile varmadan her türlü uygulamayı mümkün kılar. Kalkülüs, Sanayi Devrimi'nden bu yana, buhar

motorlarının verimliliğini artırmak, arabaların kendi kendilerini sürmesini sağlamak, gökdelenleri inşa etmek ve çok daha fazlasını yapmak için kullanılmıştır. Eğer matematiğin bir alanı tarihi değiştirdiyse o alan, kalkülüstür.

Fakat birçok modern uygulamasını daha ayrıntılı tartışmadan önce matematiğin ilk günlerine geri dönmeliyiz. Bu, tarihteki karmaşık toplamaları veya kadim bilginleri aramak değil, insanlığın tarihine bakmak demektir. Her birimiz, hayatımızı hiç matematik dersi almasak da sürdürmeye yarayacak pek çok matematiksel beceriyle doğuyoruz. Bununla birlikte, tarih bize, doğuştan gelen bu becerilerin büyük gruplar halinde yaşadığımızda yetersiz kaldığını gösteriyor. Belli bir noktada, toplumlar matematik olmadan işlemek için fazla büyük hale gelirler ve dikkatimizi aritmetik ile geometriye vermek durumunda kalırız. Bazı kültürler hâlâ herhangi bir matematik formu olmadan hayatta kalmayı başaramışlardır ancak bunlar, mesela hiç kasaba ve şehir inşa etmeyen küçük toplumlardır. Matematiğin soyutlaması, bir topluluğu düzenlemek, güvenlik, evler ve diğer binaları inşa etmek, yiyecek tedarikini düzenlemek gibi şeyler için gereklidir. Matematik gündelik hayatla ilgili problemleri daha basit ve çevremizdeki dünyayı daha yönetilebilir hale getirir.

Matematiğin ne işe yaradığı sorusu sadece pratikte matematikle ilgili değil, öncelikle felsefi. Bu nedenle bu kitabın başında ve sonunda felsefeye yer veriyorum. Matematik felsefecileri, yüzyıllardır kendilerine, işlemlere ve formüllere fazla girmeden matematiğin ne olduğunu ve nasıl çalıştığını sormaktalar. Bu soruların bazıları hâlâ yanıtlanmadı ancak matematik felsefesi doğru yanıtların nasıl görüneceğini bilmemize yetecek kadar ilerledi.

Yine de çoğu felsefi soruda olduğu gibi, matematik hakkında ne düşündüğünüze ve hangi yanıtların size en

uygun olduğuna kendiniz karar vermelisiniz. Günümüzde matematiğin kullanılış şeklinden memnun olup olmadığınıza da öyle. Örneğin Facebook'un faydası zararından fazla mıdır? Bu sorunun yanıtını size bırakıyorum. Ben de bu arada, Facebook gibi uygulamalarda matematiğin rolünü, barındırdığı artık herkesçe aşikâr tehlikelerin nedenlerini ve bu tehlikelerin neden sadece arkasındaki matematiksel fikir değiştirilerek çözülemeyeceğini açıklamaya çalışacağım.

1 BÖLÜM

Dört Bir Yanımız Matematik

Bir yere gitmek için Google Haritalar'ı her kullandığınızda, bir matematik parçasına güvenirsiniz. Uygulamayı açar, hedefinizi girersiniz ve uygulama birkaç saniye içinde otomatik olarak olası rotaları bulur. Google bunu ancak matematiği akıllıca kullanarak yapabilir.

Google'ın, rotanızı oluşturmak için harita okuma konusunda iyi olan kişileri işe alacak kadar çılgın olduğunu düşünün. Her rota aradığınızda, bu insanlar işe koyulurdu. Böyle bir durum, sadece çok uzun zaman almakla kalmaz, aynı zamanda çok verimsiz olurdu. Google'ın harita okuyucuları, evlerinden arkadaşlarının evlerine gitmenin ne kadar sürdüğünü hatırlamayan benim gibi insanlar için aynı rotayı defalarca çıkarmak zorunda kalacaklardı. Tercihen, belki bir gün biri ihtiyaç duyar diye, her türlü rotayı önceden çıkaracaklardı.

Peki, bu daha iyi olur muydu? Örneğin, bir öğrenci yurdunda yaşamanız ve üniversiteye giden en iyi yolu aramanız dışında, başka birisinin sizin aradığınız rotanın tam olarak aynısına ihtiyacı olma ihtimali fazla değil. Komşularım da uygulamada aradığım arkadaşlarımı veya yayıncımı kesinlikle ziyaret etmeyecekler. Google hangi yolculukları yapacağımı öngöremediği sürece yeni rotalar

bulmak için düzenli olarak birine ihtiyaç duyacaktır. Ve kabul edelim, bu insanların harita ile araları ne kadar iyi olursa olsun bu iş çok zaman alır.

İşte bu yüzden harita okumayı matematiğe bırakıyoruz. Bir bilgisayar, yolculuğunuz için size en iyi yolu bulur ama bunu insanların yaptığı gibi yapmaz. Bilgisayarın kullandığı matematik, uydu fotoğrafındaki sokakları tanımaz ve uzaklıkları haritanın ölçeğinden hesaplayamaz. Navigasyon sistemleri dünyayı, çizgilerle birleştirilmiş küçük dairelerden ibaret görür. Bu ilk başta tuhaf gelse de bir metro sisteminin haritasını gören herkese tanıdık gelecektir; tıpkı aşağıdaki Londra Metrosu haritası gibi.



Londra Metrosu

Google Haritalar için ideal olan, yalnızca metro ile seyahat etmenizdir zira harita zaten metronun matematiğine uyacak şekilde tasarlanmıştır. Bilgisayar, tıpkı sanal bir tren gibi, daireler arasında çizgiler boyunca seyahat ediyormuş

gibi yapabilir. Bilgisayar için buradaki tek sorun, tüm ağı göremiyor olmasıdır. Holborn'dan Seven Sisters'a bir yolculuk planlamak istiyorsanız yolunuzu oldukça hızlı bulabilirsiniz. Holborn ve Seven Sisters'tan geçen hatlar Finsbury Park'ta kesişir. Bu yüzden en iyi ve en hızlı yol, Finsbury Park'a varıp oradan tek duraklık aktarmayla Seven Sisters'a ulaşmaktır.

Öte yandan, bilgisayar en kısa yolu bulmak için daha karmaşık bir süreçten geçmelidir. Bilgisayar, Holborn ve Seven Sisters'ın birbirlerinin neresinde olduklarını bilmediğinden, sanal treni doğru varış noktasına ulaşana kadar gelişigüzel dolaşmak zorundadır. Dahası, bilgisayarın trenin bir küçük daireden diğerine gitmesinin ne kadar sürdüğünü bilmesi gerekir. Hepimizin bildiği gibi, metro haritasındaki çizgiler üzerinde gösterilen mesafeler bir istasyondan diğerine olan gerçek mesafeleri temsil etmez. Bu sorunun çözümü, trenin o bölüm boyunca seyahatinin ne kadar süreceğini belirtmek için ağdaki istasyonlar arasındaki her bir çizginin yanına bir sayı koymaktır. Bilgisayar daha sonra en iyi rotayı bulmak için bu sayıları kullanabilir. En basit navigasyon sistemlerinden biri, mümkün olan en kısa rotadan başlayarak, ardından bir sonraki en kısa rotaya geçerek, Holborn çıkışlı olası tüm farklı rotalara bakacaktır.

Bu örnekte, bilgisayar Holborn'dan başlayarak en yakın istasyonu arar. Hem Chancery Lane hem de Russell Square, Holborn'a sadece bir dakika uzaklıktadır, bu yüzden bunlardan biri ilk seçenek olabilir. Bilgisayar daha sonra Russell Square'den King's Cross'a mı yoksa Chancery Lane'den St Paul's'e mi devam eder? İkisi de değil, King's Cross'a veya St Paul's'e yolculuktan daha kısa olduğu için ikinci bir girişimle Covent Garden yönüne seyahat eder. Oradan da Holborn'dan üç dakika uzaklıktaki

Oxford Street'e bakar. Bilgisayar, Holborn'dan Seven Sisters yönündeki ikinci istasyona ancak tüm bu seçeneklere baktıktan sonra geçer.

Bu şekilde, bilgisayarın Seven Sisters istasyonuna ulaşması epey zaman alır; yedi istasyondan geçen yirmi iki dakikalık bir yolculuk olmuştur. Bizden farklı olarak, rotayı bulana kadar, hedefin zıttındaki rotalara da gitmiştir. Ama sonunda hedefine varıp da Seven Sisters'a ulaştıktan sonra bilgisayar, hesapladığı rotanın en kısa olduğundan emin olur. Tüm bunlar verimli olmaktan uzak, insanın yön bulma duygusu ve resmin bütününe görme yeteneğiyle çok daha basit gibi görünür. Yine de bilgisayar bizden daha hızlıdır çünkü saniyede çok daha fazla adım hesaplayabilir.

Google Haritalar tam da bu şekilde çalışır. Küçük daireler istasyon değil, kavşak veya otoyol bağlantısı gibi yol kesişimleridir. Matematik için bir hattın otoyol mu yoksa sokak mı olduğu önemlidir. Tıpkı metro haritası gibi, hepsi Google Haritalar'ın her çizginin yanına yerleştirdiği sayılara dayanarak, yolculuk zamanları hakkında size verilen bilgilerin içinde gelir. Bir otoyolun ve bir sokağın belli bir kısmı aynı uzunlukta olabilir ancak sokakta çok daha yavaş sürmeniz gerekir ve bu nedenle sistemde sokağın yanındaki sayı otoyolunkinden çok daha yüksektir. Sayılar ayrıca trafik sıkışıklığını hesaba katarak yolculuk sürelerini hesaplamaya da yardımcı olur. Google'ın on dakikalık bir gecikmeyi hesaba katmak için tek yapması gereken, sıkışık yolun yanındaki sayıyı, örneğin on dakikadan yirmiye çıkartmaktır. Daha sonra rotanızı yeniden hesapladığınızda bu gecikme otomatik olarak yeni yolculuk süresine dahil edilecektir. Trafikten kaçmak için ara sokaklara yönlendirilebilirsiniz çünkü ilk başta daha uzun olan bir rota artık daha hızlı hale gelmiştir.



Google'un gördüğü şekliyle bir yol ağı

Bu yöntem kısa mesafelerde çok iyi çalışır ama daha uzun mesafelerde seyahat etmek istiyorsanız matematik yönetilemez hale gelir. New York'tan Chicago'ya gitmek istiyorsanız Google ilk olarak New York'tan başlayan ve on iki saatten (yolculuğu yapmak için gereken süre) az süren tüm olası rotaları inceler. Bilgisayarlar çok hızlı hesaplama yapabilirler ancak modern bir bilgisayar bile bu kadar çok hesaplamayı kısa sürede yapamaz. Dolayısıyla Google Haritalar, hesaplama sayısını azaltmak için bir dizi matematiksel hile kullanır. Yöntemlerini gizli tuttuklarından bu hilelerin ne olduklarını tam olarak bilmiyoruz ama 7. Bölüm'de bunları daha ayrıntılı ele alacağız.

Gördüğümüz gibi, navigasyon sistemleri tarafından tavsiye edilen rotalar matematikle oluşmaktadır. Fakat bu matematiğin bizden akıllı olduğu söylenemez. Bilgisayarın çaresizce nihai hedefi araması genellikle verimli bir süreç değildir. Matematik problemi daha basit hale getirmez çünkü sonuçta bilgisayarın bizden daha fazla iş yapması gerekir; ama hayatı bizim için daha kolay hale getirir. En iyi rotayı daha hızlı bulabilir çünkü saniyede şaşırtıcı sayıda çok hesaplama yapabilir.

Netflix'ten Öneriler

Hangi rotayı izlemeniz gerektiğini Google'dan öğrendikten sonra, Netflix'te yeni film ve dizileri tarıyorsunuz. Her birinin yanında, yeşil renkte, o film ya da dizinin normalde izlediklerinizle ne kadar uyumlu olduğunu söyleyen bir yüzdelik oran vardır. Bu oran bazen tamamen yanlıştır ve harika olacağını düşündüğünüz bir film büyük bir hayal kırıklığı haline gelir. Ama bir değişiklik yapıp yüzdeleri görmezden gelmezseniz zevklerinizi epey tutarlı yansıatacaktırlar. Öneriler tamamen otomatik oluşturulur ve siz farklı tipte programlar izledikçe değişir. Başka bir deyişle bir yerlerde filmler ya da diziler hakkında en ufak bir fikri olmadan sizin zevkinize neyin uyup neyin uymayacağını bilen bir bilgisayar programı vardır.

Netflix bunu elbette kullanıcıları hakkında sahip olduğu bilgilere dayanarak yapar. Netflix'te muazzam sayıda insan film ve dizi izler ve şirket bu insanların izleme alışkanlıklarının kaydını tutar. Çok basit bir ifadeyle bu, Netflix'in, ister rota planlama algoritmaları hakkında belgeseller olsun ister korku filmleri, hepimizin ne tür film ve dizi izlediğini bildiği anlamına gelir. Netflix ayrıca tüm film ve dizilerini kategorilere ayırır. Ardından önerilerini yapmak için iki veri kümesi kullanır. Çok fazla korku filmi izliyorsanız daha önce hiç görmediğiniz bir korku filmi izlemek isteyeceksinizdir. Gayet basit görünüyor.

İşin esas zorluğu, Netflix'in diğer yaptıklarındadır. Belli bir kategoriye –örneğin korku– girmeyen tüm film ve dizilere yüzdelik bir puan verir. Bu puan, filmin normalde izlediklerinize ne oranda uyduğunu gösterir. Başka bir deyişle Netflix, bir macera filminin bir grup korku filmine ne kadar benzediğine de karar verir. Filmde bir sürü korkunç şey oluyorsa normal izleme davranışınıza daha az korkunç

olandan daha iyi uyacaktır. Bunlar, arkadaşlarınıza izleyecek bir şey önermelerini istediğinizde size söyleyecekleri türden ayrıntılardır. Netflix, önerileri sayesinde size bu bilgileri de verebilir ancak bu öneriler hiçbir zaman gerçek bir film tutkununun vereceği kadar tutarlı değildir.

Durumu daha karmaşık hale getiren, bu şekilde sadece belli tür korku filmlerini izleyebileniz. Çok kanlı filmlerden hoşlanmıyorsanız bu tür filmler profilinize ortalamadan biraz daha korkunç bir macera filminden çok daha az uyacaktır. Sadece genel kategoriye bakmak her zaman en iyi önerileri vermez çünkü asıl önemli olan, filmin içeriğidir. Bilgisayarların film ve dizilerin içerikleri hakkında bir fikri olmadığından, belki de Netflix'in içerikten anlayan çok sayıda personeli işe alması gerekecektir. Ancak milyonlarca izleyicinin olduğu bir durumda bu mümkün olmadığından, Netflix önerilerde bulunmak için bilgisayarlarına ve onların algoritmalarına güvenmek zordur. Bu mümkündür ama bir hile gerektirir.

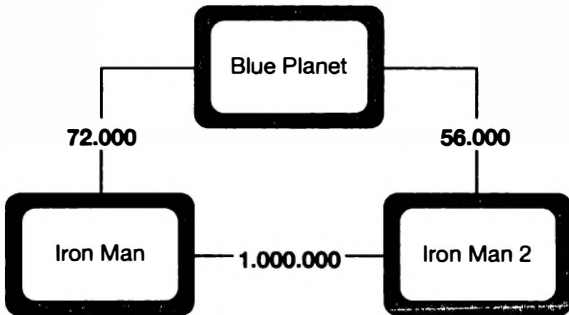
Fikir aslında çok basit: Bir öneri, eğer izlemekten hoşlandığınız şeye benziyorsa iyidir. Tüm dünyada insanlar Netflix'te beğendikleri programları izliyorlar çünkü daha önce gördükleri dizilere ve filmlere benziyorlar. Netflix'in bilgisayarlarına göre, filmlerden birini izleyen çok sayıda kişi diğerini izlemeye devam ederse iki film benzerdir. Eğer binlerce kişi *Iron Man*'i izledikten sonra *Iron Man 2*'yi izlerse, bu iki film benzer olmalıdır ve *Iron Man 2*, *Iron Man*'i izlemiş insanlar için iyi bir öneridir. Netflix'i ne kadar çok kullanıcı kullanırsa tahminler de o kadar doğru olacaktır. Bilgisayar programı, çok sayıda başka insanın izlediği ve kabaca izlediğiniz şeye benzeyen filmler ve diziler önerir.

Bu çözüm, yanında bir sorunu getirir. Netflix, her biri çok sayıda film ve dizi izleyen milyonlarca kullanıcıya

sahiptir. Netflix'in tavsiyelerde bulunmak için kullandığı hile, basit bir matematiksel hesaplama değildir: Aynı görüntüleme geçmişine sahip kaç kişinin, önermek istediği programı da izlediğine bakar. Buradaki sorun, hesaplama değildir. Bunu, kısmen ayrıntılar kamuya açık olmadığı için basitleştirilmiş bir şekilde açıklıyorum. Netflix, tam değil ama aşağı yukarı aynı programları izlemiş kişileri de hesaba katmalıdır. Peki ya sadece korku filmlerini değil, aynı zamanda belgeselleri de seven insanları? Bu durumda, aynı programları izleyen çok daha az insan vardır ve bu da tavsiyeyi daha az güvenilir kılar. Basit fikir, pratikte çok daha karmaşık hale gelir.

Bu nedenle, önerilen tüm film ve dizileri, daha önce incelediğimiz metro ağındakine benzer bir haritada göstermek işe yarar. Her film veya dizi, Netflix dünyasındaki bir istasyon gibi bir çemberdir. Netflix web sitesinde iki farklı film veya diziye tıklayarak bir istasyondan diğerine seyahat edebilirsiniz.

Bu haritada da hesaplamanın yapılabilmesi için sayılar eklenmelidir. Rakamlar seyahat sürelerini değil, bir çizgiyle bağlanan her iki programı da kaç kişinin izlediğini gösterir. Üç filmi ve bu filmleri farklı kombinasyonlarda kaç kişinin izlediğini belirten hayali sayıların olduğu çok basit bir örneği aşağıda görebilirsiniz:



Netflix: Üç film için hayali izleme sayıları

Burada soru şu: Her film, izleme davranışınıza ne kadar uyduğunun bir göstergesi olarak yüzde kaçlık bir değer almalıdır? Diyelim ki Netflix'te sadece *Iron Man*'i izlediniz. Bilgisayarın *Iron Man 2* ve *Blue Planet*'i ne kadar istediğinizi tahmin etmesi gerekiyor. Şekle göre, *Iron Man 2* çok yüksek bir yüzdeye sahip olmalı. Sonuçta, film zevkinizi paylaşan birçok insanın da izlediği bir filmden keyif alma olasılığınız çok daha yüksek. Öte yandan onu izleyen az sayıda insan *Iron Man*'i de izlediği için *Blue Planet*'in düşük bir puan alması gerekir. Dahası, bilgisayarın zevkinize uygun olacağını düşündüğü *Iron Man 2*'yi izleyen çok az sayıda kişi de *Blue Planet*'i izlemiş: *Blue Planet*'e düşük bir yüzde vermek için başka bir neden.

Nihayetinde bilgisayar diğer film ve diziler için yapacağı tahminlerini iyileştirmek için kendi tahminlerini (örneğin, *Iron Man 2*'den ne kadar keyif alacağınıza dair tahminini) kullanır. Sadece üç filmle bunu yapmak çok zor olmayacaktır. Ama bir de bunu binlerce film ve dizi ile yapmayı deneyin. Teoride bu mümkündür; yeterli zaman ve alanla seyahat etmek istediğiniz her rotayı kendiniz de belirleyebilirsiniz. Ancak matematik ve özellikle 7. Bölüm'de daha ayrıntılı olarak ele alacağımız çizgeler sayesinde, bu sadece teoride değil, yeterince güçlü bir bilgisayarınız varsa pratikte de mümkündür. Bu bulmacanın matematiksel versiyonu, Netflix'in, bir film tutkunları ordusuna ihtiyaç duymadan, belirli bir filmde veya diziden hoşlanıp hoşlanmayacağınızı tamamen otomatik olarak tahmin etmesini mümkün kılar.

Matematik her yerde

Matematik her gün, her yerde karşımıza çıkıyor. Elbette kelimenin tam anlamıyla değil; mesleğimin matematik

hakkında düşünmek olmasına rağmen ortalama bir günde ben bile herhangi bir matematiksel hesaplama yapmak zorunda kalmıyorum. Yine de matematik, perde arkasında hayatımızda önemli bir rol oynar. Matematik olmasa size yolunuzu gösterecek Google Haritalar olmazdı. Netflix, tesadüfen, beğenebileceğiniz birkaç film ve dizi önerebilir ama bunlar özel beğenilerinizi çok daha az hedef alırdı. Google'ın arama motoru neredeyse hiç çalışmazdı. Kısacası, her gün kullandığımız hizmetler ancak arka planda matematik kullandıkları için mümkün hale gelir.

Netflix, arama motorları ve rota planlayıcıları, matematiğin aynı dalına dayanan hizmetlere örnektir: çizge teorisi. Ancak çizge teorisi, matematiğin günlük hayatımızda önemli olan tek alanı değil. Telefonunuza bildirim olarak gelen haberlerin çoğu istatistik içerir. Örneğin seçim anketleri, bir ülkenin oylama tercihlerini bir dizi sayıyla gösterdiğini iddia eder. Ama bu anketler ne kadar faydalıdır? 2016 Amerikan başkanlık seçimlerinde gördüğümüz gibi, fena halde yanılabilirler. Anketlere göre Hillary Clinton kazanacaktı, hatta bazı uzmanlar sonucun neredeyse yüzde 100 kesinlikle böyle olacağını iddia ediyorlardı. Niyet öyle olmasa bile rakamlar kolayca yanıltıcı olabilir. İstatistikler her türlü şeyi gizler. Neyin ters gidebileceğini anlamayan herkes için önemli gibi görünen bir istatistik aslında çok da işe yaramaz. Anketlerin size bir şey anlatması çok iyidir ama bu kadar sıklıkla tamamen yanlış çıkarlarsa onlara nasıl güvenebilirsiniz?

Espresso siparişi vermek için telefonunuzdan başınızı kaldırıyorsunuz. Espresso, suyu tam tamına doğru sıcaklıkta ısıtan büyük bir paslanmaz çelik kahve makinesinde yapılıyor. Eğer makine lüks bir modelse işlem öylece olmaz. Makine, suyun ne kadar hızlı ısındığını izler ve bu bilgilere dayanarak, suyun biraz daha ısıtılması veya soğumasına

gerek olup olmadığına karar verir. Su mükemmel sıcaklığa ulaşıncaya ve kahveyi yapabilene kadar bu işleme devam eder. Siz bunların hiçbirini görmüyorsunuz ama tam burunun dibinde matematik öğretmeninizin bahsettiği formüller size bir fincan kahve yapmak için kullanılıyor.

Espressonuzu içerken siyasi haberleri okuyorsunuz. Hükümet politika planlarının bazılarını değiştirmiş. Bunun iyi bir fikir olup olmadığından emin değilsiniz, bu nedenle yeni planlarla ilgili tahminlerine göz atıyorsunuz. Her zamanki gibi, ekonomik araştırma enstitüleri bunları ayrıntılı olarak analiz etmiş. Bir şeyin iyi bir fikir olup olmadığı o kadar çok faktöre bağlı olabilir ki hepsini takip edemeyebilirsiniz. Ancak tek bir hesaplama, tüm bu faktörleri sizin için önemli olan bir bilgi parçasında birleştirir: işin sonunda cebinizde daha fazla para olup olmayacağı. Bu da çok sayıda matematiksel hesaplamaya bağlıdır.

Bu şekilde baktığımızda, matematiğin yaşamımız üzerinde büyük bir etkisi olduğunu görüyoruz. Kendimiz yapmasak da birçok hesaplamaya muhtacız. Seçim yapmak için kullandığımız bilgiler, başkaları tarafından yapılan matematiksel çalışmaların sonucudur. Nihayetinde göreceğiniz bilgiler bile Google, Facebook veya veri filtreleyen bir başka web sitesi tarafından kullanılan bir bilgisayarda yapılan bir hesaplamaya bağlıdır. Etrafımızdaki teknoloji matematiği her geçen gün daha fazla kullanmaktadır. Sadece köşedeki kafedeki lüks kahve makinesi değil, sizi tatil mekânınıza götüren uçaktaki otomatik pilottan, her gün işinizi yapmak için kullandığınız bilgisayara, her şey matematiğe bağlıdır. Matematiğin çevremizde kullanımı yaygınlaştıkça, matematiği ve hayatımızı nasıl etkilediğini daha iyi anlamak gitgide daha önemli hale gelmektedir.

Bu kitap büyük ölçüde, matematik hakkında biraz bilgi sahibi olmanın ne kadar yararlı olduğu üzerinedir.

Matematik nedir ve nasıl işler? Bu, Platon ve Sokrates'e kadar uzanan felsefi bir sorudur. Platon ve Sokrates, kendilerine matematiğin ne hakkında olduğunu ve matematik hakkında neler öğrenebileceğimizi sordu. Dahası, biraz daha düşünürseniz matematiğin hem bu kadar geniş çapta uygulanabilir hem de bu kadar soyut olması ilginçtir. Nasıl olur da matematik bu kadar yararlı olabilir? Bu soruyu yanıtlamak için felsefeye dönmeliyiz.

2. BÖLÜM

Ayrı Dünyalar

Bir grup mahkûm bir duvara zincirlidir. Başları sabitlenmiştir, böylece sadece ileri, penceresi olmayan başka bir duvara bakabilirler. Tüm yaşamları boyunca aynı duvara zincirlenmişlerdir ve görüp görebildikleri tek gerçeklik, karşı duvardaki gölgelerdir. Yeterince yakınlaşabilseler bu gölgelere dokunabilirlerdi. Hiçbiri hapishanelerinin ötesinde bir hayat bilmez. Dünyaları tamamen gölgelerden oluşur.

Platon'un Mağara Alegorisi böyle başlar. Platon bizi mahkûmlarla karşılaştırır; çevremizde gördüklerimiz, doğrudan göremediğimiz şeylerin gölgeleridir. Örneğin, oturduğunuz masa gerçekten vardır. Oysa Platon bunu duvardaki gölgelerden biri olarak görür, masanın kendisiyle ilgilenmez. Onu ilgilendiren, tüm masaları birbirine bağlayan soyutlama, önünüzdeki şeyi başka bir şey değil de masa yapan şeydir. Bu soyutlamayı bir bakışta göremezsiniz. Ne olduğunu, gölgeyi duvara neyin düşürdüğünü bulmanız gerekir. Bunu da çevrenizdeki tüm farklı masa türlerine bakarak yaparsınız.

Platon'a göre, matematik de böyle işler. Platon'un "Matematik ne hakkındadır?" sorusuna yanıtı budur. Ona göre sayılar, gölgesi olan şeylerden biridir. Sadece onları göremeyiz. Bir sayı, elle tutabileceğiniz ya da yolda

yürürken çarpabileceğiniz bir şey değildir. Elbette örneğin “2” gibi bir sayı yazabilirim, ancak tıpkı “güneş” kelimesinin bir yıldız olmaması gibi “2” sayısı da bahsetmeye çalıştığım sayı ile aynı değildir. Platon’un örneğindeki gibi, etrafımızdaki dünya gölgelerden başka bir şey değildir, sayılar da her zaman arkamızda bir yerdedir.

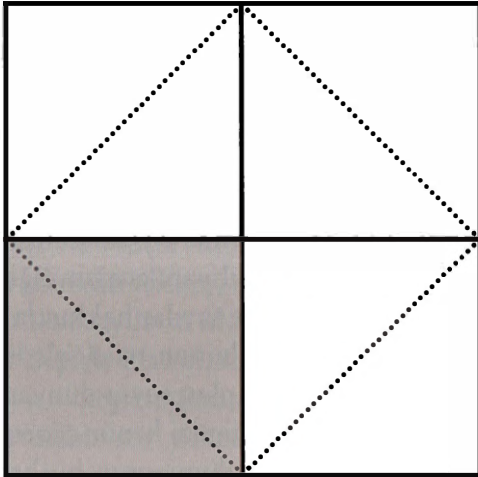
Matematiği bu şekilde görebiliriz. Sayılar hakkında konuşup örneğin $1 + 1 = 2$ dersek gerçekten var olan şeylerden bahsederiz. Ancak bu şeyler, gözünüzün önündeki masanın var olduğu şekilde var olmaz. Platon bunları “daha gerçek” olarak görmüştür, çünkü soyut bilginin belirli şeyler hakkındaki bilgiden daha değerli olduğunu düşünmüştür. Bu yüzden de insanların normalde çevrelerinde gördükleri nesneleri gölgelere indirgemıştır ve sayıların ve diğer “gerçek” şeylerin alternatif bir evrende dolanıp durduğuna inanmıştır. Bu düşünce bence biraz abartılı olsa da sayıların gerçekte var olduğu fikri o kadar etkili olmuştur ki bu fikre katılan insanları hâlâ “Platonistler” olarak adlandırıyoruz.

Öyleyse matematik bu mudur? Matematiği bu şekilde düşünmek mantıklı gelebilir. Matematik öğretmeniz size matematik dünyasının nasıl olduğunu söyler. Bu gerçek bir dünyadır, sadece göremezsiniz. Matematikçiler dünyayı, tıpkı fizikçilerin görebildiğimiz dünyayı incelediği gibi incelerler. Bu durumda matematik, sıradan yaşamlarımızdan çok uzak görünür. Bu kadar çok insanın matematikle ilgili bir problemi olmasına şaşmamalı; bu diğer dünya hakkında bir şey öğrenmeden önce onu nasıl bulacağınızı anlamalısınız.

Hiçbir şekilde göremeyeceğiniz, hissedemeyeceğiniz, koklayamayacağınız veya hissedemeyeceğiniz bir dünya hakkında nasıl bir şeyler öğrenirsiniz? Platon’a ve Platonistlere göre matematik, günlük yaşamımızdaki her şeyden

ayrıdır. Ancak her zaman değil: Platon, arkadaşının evindeki bir köle örneğini matematikle nasıl iletişime geçebileceğimizi göstermek için kullanır. Hiç eğitimi olmayan köleden, herhangi bir ölçüm kullanmadan, kuma çizilmiş olanın iki katı büyüklüğünde bir kare çizmesi istenir. Bu oldukça zor bir problemdir. Kareyi dört kenarını da iki kat daha uzun yaparak büyütürseniz orijinalin dört katı büyüklüğünde bir kare elde edersiniz. Problemi bir cetvel olmadan çözmek için akıllı bir çözüme ihtiyacınız vardır.

Platon'un örneğinde, etrafındaki insanlar köleye her türlü soruyu sorarlar. Sorular zekice seçilmiştir ve böylece köle, işin sırrının orijinal kare boyunca diyagonal bir çizgi çizerek başlamak olduğunu anlar. Aşağıdaki şekilde, orijinal kare açık gri renkte gösterilmiştir. Aynı boyutta üç kare daha çizerek orijinalinden dört kat daha büyük bir kare oluşturursunuz. Ardından, büyük kareyi yarıya indirmek için şekilde gösterilen noktalı çizgileri kullanırsınız. Bu, orijinalin tam olarak iki katı büyüklüğünde bir kare oluşturur.



Orijinalinin iki katı büyüklüğünde bir kare yapımı

Bu örnekte, Platon köleye sadece soru sorarak yardımcı olur. Köle karenin boyutunu iki katına çıkarmayı peyderpey “kendi kendine öğrenir”. Bize matematiğin nasıl işlediğini göstermek isteyen Platon, kölenin bu cevabı zaten bildiğini söyler; filozof sadece hatırlamasına yardım etmiştir. Çünkü Platon’a göre daha önceki bir yaşamda matematik hakkında bilinebilecek her türlü bilgiye sahip olmuşuzdur. Bu bilgi hâlâ bilinçaltımızın derinliklerinde mevcuttur. Platon’a göre matematik hakkında bir şeyler öğrenmek için yapmamız gereken tek şey, zaten bildiklerimizi hatırlamaktır.

Biraz abartılı mı geliyor? Umarım öyledir çünkü Platon’un çözümü tamamen saçmalıktır. Örneğindeki sorularda hile yapmaktadır. İlk önce çözümü çizer ve daha sonra diyagonal çizginin işe yaradığını göstermek için bir dizi evet / hayır sorusu sorar. Köle “kendi kendine öğrenir” ama bunu yapabilmesinin nedeni, ona çözümün sorularla, adım adım açıklanmış olmasıdır. Ayrıca, kölenin tüm bunları eski bir yaşamdan hatırladığını iddia etmeye ne demeli? Bu, en hafif tabirle çok özel bir yaşam olmalı.

Peki, Platon’un çözümü saçmalıkla matematik dünyasını nasıl öğrenebiliriz? İşin doğrusu, bilmiyoruz. Günümüz Platonistleri –matematiğin gerçek sayılarla ilgili olduğuna inanan insanlar– bu soruya farklı bir şekilde yanıt veriyorlar. Herhangi birinin doğru olup olmadığı farklı bir konudur. Elbette matematiği öğrenebildiğimizi düşünüyorlar: sonuçta, az önce başladığımızdan iki kat daha büyük bir karenin nasıl yapılacağını öğrendik. Öğrencilerin en umutsuzları bile sayılar hakkında en azından bir şeyler bilir. Platonistler bunun nasıl işlediğini, matematiğin bu kadar erişilemez olan soyut dünyası hakkında nasıl bir şeyler öğrenebileceğimizi henüz çözemediler.

Ancak neden matematik dünyasının bu kadar erişilemez ve soyut olduğunu düşünelim? Platon böyle olduğunu

düşünüyordu çünkü zamanındaki birçok matematikçi öyle söylemişti ve bu görüşün günümüzdeki takipçileri de hâlâ aynı görüşte. Ama onlara inanmalı mıyız? Onlara inanmamanın daha iyi olacağını söyleyen bir grup modern filozof var. Mağaradaki mahkûmları unutalım ve Sherlock Holmes'u düşünelim.

Büyük bir hikâye olarak matematik

Sherlock Holmes Londra'da, 221b Baker Street'te oturuyordu. Evi ziyaret edebilirsiniz. Ancak elbette orada oturmuyordu: Sherlock Holmes hayali bir dedektif. Hakkında birçok hikâye yazıldı, filmler ve televizyon dizileri çekildi. Bu yüzden hemen şöyle düşünmüyoruz: "Ne saçmalık, Sherlock Holmes Baker Street'te nasıl oturmuş olabilir?" Hikâyelerde orada oturmaktadır ama gerçek Londra'da, o adreste o adda biri hiç oturmamıştır. Matematigi de aynı şekilde düşünebiliriz.

Matematik sayılar, şekiller ve diğer her türlü şey hakkında bir hikâye anlatır. Bu hikâye, Platon'un tarif ettiği gibi bir dünyayla ilgilidir. Hiçbir şey değişmez ve her şey mükemmelen mantıklı bir şekilde birbirine uyar. Ancak nominalistler, bunun Sherlock Holmes hikâyeleri kadar kurgu olduğunu söylerler. Matematğin bahsettiği dünya mevcut değildir. Matematikçiler sayılar ve üçgenler gibi şeyler hakkında konuşurlar, ancak bunlar aslında orada değildir. Gerçek olan tek şey, etrafınızda gördüklerinizdir; ortalıkta süzülen sayıların olduğu ayrı bir dünya yoktur.

Başka bir deyişle Platon, matematikle ilgili zaten mevcut olan şeyleri keşfettiğimizi iddia eder. Ama belki de keşfedilecek hiçbir şey yoktur ve matematikle ilgili her şeyi kendimiz hayal etmişizdir. Bu, en saçma sonuçları doğurur: Eğer matematğin bahsettiği şeyler yoksa tüm bu

sayılar, üçgenler vb. için de hiçbir şey doğru değildir. 3 asal bir sayıdır ve $1 + 1 = 2$ eder diyoruz ama bu doğru değildir: $1 + 1 = 2$ doğru değildir çünkü sayılar mevcut değildir. Tıpkı Sherlock Holmes Londra’da yaşamıştır demenin yanlış olması gibi çünkü Sherlock Holmes hiç var olmadı.

Madem öyle neden matematik öğretmeninize matematikteki her şeyin saçma olduğunu söyleyemiyorsunuz? Çünkü matematikle ilgili bir şey, nominalistler için bile büyük bir kesinlikle doğrudur. Örneğin, Sherlock Holmes hakkındaki cümlelerim belli bir anlamda doğrudur; Holmes’un yaratıcısı Sir Arthur Conan Doyle’un hikâyesiyle tutarlıdır. Holmes’un Alaska’da yaşadığını iddia edersem yanlış olduğunu Doyle’un kitaplarından pasajlarla kanıtlayabilirsiniz. Sherlock Holmes hakkındaki ifadelerin kitaplardakilerle tutarlı olup olmadığını her zaman sınayabilirsiniz. Aynı şey matematikte de geçerlidir: $1 + 1 = 3$ iddiası, matematiğin hikâyesi açısından yanlıştır.

Yine de matematiğin nasıl işlediğini tam olarak bilmediğimizi tekrarlıyorum. Başka bir deyişle matematiğin erişmemiz zor olan soyut bir dünya hakkında keşifler mi yaptığını, yoksa bütün bunları sadece bizim mi yaptığımızı bilmiyoruz. Çünkü ne Platonistler ne de nominalistler matematik hakkındaki şeyleri nasıl öğrendiğimizi açıklamayı başarabildiler.

Platon için sayıların soyut dünyasına nasıl erişebileceğimizi söylemek zordu. O dünya yoksa bu durum çok da sorun değil. Örneğin, Sherlock Holmes hakkındaki bilgileri nasıl öğrendiğimiz son derece bariz: kitapları okuyarak. Ne okuduğumuzu hatırlayabilirsek dedektif hakkında bir şeyler öğrenmiş oluruz. Ancak matematikte bu biraz daha zor. Matematikteki hikâyeler özeldir çünkü genellikle bu hikâyelerin etrafımızdaki dünyayı tarif ettiklerine inanırız, oysa hiç kimse Sherlock Holmes hakkındaki

kitapların birebir gerçeği anlattığını düşünmez. Bu, matematiğin nasıl işlediğini açıklamayı zorlaştırır. Tam anlamıyla gerçek olmayan şeyleri söyleyen insanların yine de değerli ve titiz bir bilim kurmayı başardıklarından nasıl emin olabilirsiniz? Nominalistlerin bu soruya hâlâ iyi bir yanıtı yok.

Felsefe de bir yere kadar. Filozofların bu kadar karmaşık hale getirdiği tüm ayrıntıları takip edemiyorsanız endişelenmeyin. Size esasen göstermek istediğim şey, matematiğe iki şekilde bakabilmemiz. Platonistler ve nominalistler matematiği ne kadar farklı düşünürlerse düşününler ikisi de matematiğin nasıl işlediğini açıklamaya ya da matematik “yaparken” ne olduğunu söylemeye çalışır. Platonistler, soyut şeylerle dolu bir dünya hakkında her türlü bilgiyi keşfettiğimizi iddia ederler. Nominalistler ise böyle bir dünyanın var olmadığını ve her şeyi bizim uydurduğumuzu söylerler. İki görüş arasındaki farkı gördüğünüz ve ikisinden hangisinin doğru olduğunu hâlâ bilmediğimize inanmaya istekli olduğunuz sürece, yeterli bilgiye sahipsiniz.

Güzelliğin değeri

Filozoflar arasındaki tüm bu tartışmalar en azından bir şeyi açıklığa kavuşturmuşsa o da matematiğin son derece soyut bir şeyle ilgili olduğudur. Dolayısıyla lisedeyken matematiğin ne işe yaradığının pek anlaşılmamasına şaşkınlık lazım. Matematiğin etrafımızdaki dünyayla hiçbir ilgisi yokmuş gibi görünür. Matematiği kendi içinde, fiziksel dünyayla hiç temas etmeyen bir dünya olarak görürseniz bu doğaldır. Matematiği bir hikâyeye olarak düşünürseniz de öyle; hem o hikâyenin gerçek dünyamızla ne ilgisi var? Sonuçta, Londra tarihi hakkında bir

şeyler öğrenmek için Sherlock Holmes'un hikâyelerini okumuyoruz, o halde bunu neden matematik hakkındaki hikâyelerle yapalım? Fiziksel dünya ile hiçbir ilgisi olmayan matematik, buna rağmen bu dünyayı anlamak için nasıl kullanılabilir?

Matematik etrafımızdaki dünyayı anlamamıza sahiden çok yardımcı olabilir. 1. Bölüm'de matematiğin problemleri basitleştirmede önemli bir rol oynadığı birkaç örneğe baktık. İşe yaramasının nedeni soyut olmasıdır ve işe yaradığı tek yer günlük yaşam değildir. Bilim insanları da yüzyıllardır yeni keşifler yapmak için matematik kullanırlar, bu da şaşırtıcıdır çünkü bize matematiğin önceki bölümdeki örneklerden düşünmüş olabileceğimizden daha da yararlı olduğunu gösterirler.

Isaac Newton'ın (1643-1727) hikâyesiyle başlayalım. Genç Newton, kır manzarasını izlemek için bir elma ağacının altında oturuyordu. Aniden kafasına bir elma düştü ve Newton, "İşte bu! Yerçekimi!" diye düşündü. En azından hikâye böyle diyor. Elma yüzünden olsun ya da olmasın Newton'un yerçekimi hakkındaki fikirleri çığır açmıştı. Tarihte ilk kez birisi, yıldızların ve gezegenlerin hareketlerini açıkladığımız şekilde, maddelerin Dünya'ya neden düştüğünü açıklayabileceğimizi fark etmişti. Gerisi tarih. Hepimiz Newton'un fikrinin parlak olduğunu ve tamamen ilgisiz iki şey hakkında çılgın bir teori olmadığını biliyoruz.

Ne var ki Newton'ın çağdaşları tam da öyle düşündüler. Newton yerçekimini belli bir mesafeden etkili olan ve nesneleri neredeyse büyümlü bir şekilde birbirine çeken bir güç olarak tanımladı. O dönemde insanlar tüm bunların, nesneler birbirleriyle temas ettiği için olduğuna inanıyorlardı. Bu çok da garip bir fikir değildi: Nesneler bir şekilde etkileşime girmezlerse birbirlerini nasıl etkileyebilirlerdi?

Dünya, hiçbir şekilde temas etmeden, Güneş'in orada olduğunu ve kendisini ona doğru çektiğini nasıl "bilebilir"? Günümüzde Einstein sayesinde bu soruya oldukça iyi bir yanıtımız var ama Newton yerçekimi (kütleçekimi) teorisini önerdiğinde ortada iyi bir yanıt yoktu, sadece etkileyici bir matematik parçası vardı. Soru, bunun doğru olup olmadığıydı.

Newton'ın büyük ölçüde haklı olduğunu, teorisinin tahminleri sayesinde biliyoruz. Artık her şeyi daha isabetli ölçebildiğimize göre, söz konusu tahminlerin gerçeklikle çok iyi eşleştiğini görebiliriz. Newton'ın zamanında, teorisinin en iyi olduğu açık değildi. Bilim insanlarının gözlemleri Newton'ın tahminlerinden yüzde 4'e kadar sapabiliyordu ancak Newton yine de hem Dünya'ya hem de diğer tüm gök cisimlerine uygulanan bir teorinin daha iyi olduğunu düşünüyordu. Böyle bir teori "daha temizdi". sadece fizik açısından daha basit olmakla kalmıyordu, matematiği de daha az karmaşıktı.

Sürpriz, daha sonra olanlarda. Fizikçiler Newton'ın teorisini test etmeye devam ettiler. Ve şimdi elimizde olan ve elbette Newton'ın kullanabileceği her şeyden çok daha gelişmiş ve doğru sonuçlar veren aletlerle, teorisinin asla yüzde 0,0001'den fazla yanılmadığını biliyoruz. Farkında olmasa da Newton'un basit bir matematik parçasına dayanan tek bir teoriyi tercih etmesi büyük bir başarıydı. İngiltere kırsalındaki o elma ağacının altında teorisini öne sürdüğünde Newton'un kesin ölçümler yapma şansı olmamasına rağmen matematiksel tahminleri zaman içinde son derece isabetli çıktı.

Şüpheli okuyucular tüm bunların bir tesadüf olduğunu iddia edebilir, Newton, isimlerini unuttuğumuz diğerlerinin aksine, sadece şanslıydı diyebilirler. Belki tesadüftü ama bunun gibi o kadar çok hikâye var ki göz

ardı etmemiz mümkün değil. Kopernik, bugün hâlâ kullandığımız, Güneş'in merkezde ve Dünya'nın yörüngede olduğu Güneş sistemi modelini buldu. Onun modeli de Dünya'nın merkezde, Güneş'in de onun etrafında döndüğünü söyleyen ve gitgide karmaşıklaşan modellere kıyasla daha basit, daha zarif bir matematik kullanıyordu.

Kopernik'in tahminleri aslında bu daha karmaşık teorilerden daha az güvenilirildi. Çünkü Kopernik Dünya'nın yörüngesinin daire şeklinde olduğunu düşünüyordu, oysaki gerçekte elipsti. Ama sonunda diğerlerinden daha basit olan –ve matematikçilerin tercih ettiği– teorisinin, daha iyi olduğu ortaya çıktı.

Daha dikkat çekici olan, Paul Dirac'ın 20. yüzyılın başlarındaki keşfiydi. Dirac kuantum mekaniği üzerinde çalışıyordu. Newton gibi, Dirac'ın amacı da fiziğin farklı yönlerini aynı şekilde açıklamaktı. Ve o da o zaman bilinenler için doğru sonuçlar üreten bir matematiksel model kullandı.

Ancak Dirac'ın bir sorunu vardı. Modeli işe yaramasına rağmen garip, ilave tahminler de yaptı. Dirac'ın ilgilendiği tek şey, atomun çekirdeğinin etrafında dönen küçük parçacık olan elektrondur. O dönemde fizikçiler elektronlar hakkında epey şey biliyorlardı ve Dirac'ın formülü elektronların davranışlarını gayet isabetle tanımlıyordu. Ne var ki formüle göre, elektronun tam zıttı olan başka bir parçacık daha olmalıydı. O zamana kadar hiç kimse böyle bir parçacık görmemişti ve parçacığın var olduğuna inanmak için hiçbir neden yoktu.

Artık günümüzde Dirac'ın matematiksel modelinin tamamen yeni bir tahmin ürettiğini biliyoruz. Fakat o zaman, 20. yüzyılın başında, Dirac ve diğer fizikçilerin neler olduğunu anlamaları biraz zaman aldı. Başlangıçta Dirac,

gizemli karşıt parçacığın bir proton olduğunu öne sürdü. Protonlar zaten keşfedilmişti ve pozitif elektrik yüküne sahiplerken, elektronların negatif bir yüke sahip oldukları biliniyordu. Ancak bu da mümkün değildi: Protonlar elektronlardan çok daha ağırdı, bu yüzden elektronların tam zıttı olamazlardı. Dirac, yeni bir parçacığın varlığından başka bir çözüm görmedi: bir pozitron veya anti-elektron.

Bu, bu kitapta şimdiye kadar incelediğimiz örneklerde henüz karşılaşmadığımız bir durum. Burada matematik bir problemi basitleştirmekle ya da beklenenden daha iyi tahminlerde bulunmakla kalmadı, ayrıca daha önce hiç görmediğimiz bir şeyin varlığını da öngördü. Bilim insanları bu yeni parçacığı aramaya başladılar çünkü Dirac'ın matematiği yanlış olmayacak kadar iyi görünüyordu.

Ve hazineyi buldular. Dirac'ın tahmininden kısa süre sonra Carl David Anderson pozitronların varlığını kanıtladı. Anderson keşfinden sadece dört yıl sonra, 1936'da Nobel Ödülü'ne layık görüldü. Pozitronlar sadece elektronların tersi değildir; keşfedilen ilk anti-madde parçacıklarıdır. Ve keşfedilmeleri matematikle mümkün oldu.

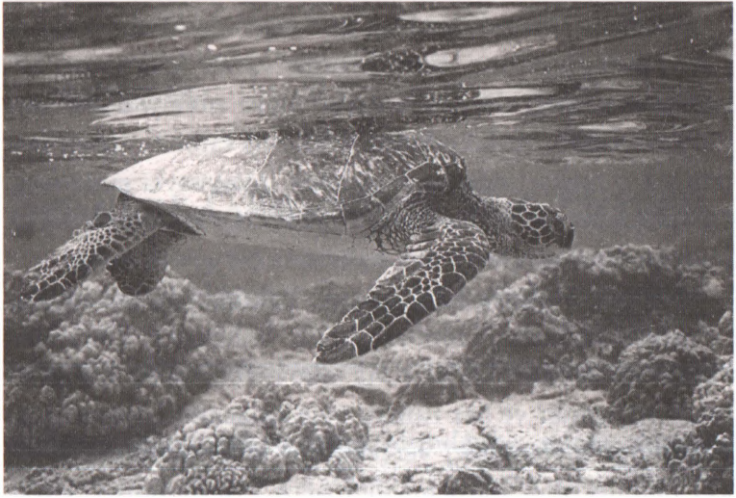
Fizikte, matematiksel bir garipliğin sonunda doğru olduğunun ortaya çıktığı başka keşifler de var. 1823'te Augustin Fresnel, ışığın davranışlarıyla ilgileniyordu. O da etrafımızdaki dünyada bulunan bir şeyi açıklamak için basit ve kompakt bir matematiksel formül geliştiren bir fizikçiydi. Işığa, örneğin bir ayna ile yansıtıldığında ne olacağını merak ediyordu.

Ayna kolay bir örnektir çünkü ışık doğru ve öngörülebilir bir şekilde yansır. Bir aynanın tam önünde durursanız ışık doğrudan size geri döner ve kendinizi görürsünüz. Ancak aynaya bir açıyla bakarsanız kendinizi değil, diğer tarafta tam olarak aynı mesafede olan bir şeyi görürsünüz.

Fresnel daha iddialıydı. Örneğin, sudan gelen ışığın havayla temas ettiğinde ne olacağını bilmek istiyordu. Veya havadan gelen ışığın şeffaf cama çarptığında. Zor görünüyor ancak Fresnel'in ortaya koyduğu formül aynalardan çok daha karmaşık değildi. Sadece bir sembol eklemesi gerekiyordu. Bu da başka bir basit ve kompakt matematik parçasıydı ama Dirac'ın modelinde olduğu gibi, garip sonuçlar üretebiliyordu.

Fresnel'in formülü ışığın bazen imkânsız bir açıyla bükülebileceğini öngörüyordu. Matematiksel modelinde, bildiğimiz şekilde sayılamayacak “ekstra” sayılar olan karmaşık sayıları kullandı. O zamanlar bu sayılar, hesaplamaları kolaylaştırmak için gerekli görüldü ancak çok ciddiye alınmadılar. Fresnel, hesaplamalarında bu sayılardan biri çıktığında panikledi: Kompakt modeli tamamen imkânsız bir şeyi öngörüyordu!

Fresnel modelini bir kenara atmak istemediği için bu garip sonucun doğru olduğunu varsaymaya karar verdi. Haklıydı: Modelin garip sonuçlar verdiği durumlarda ışığa, hesaplamalarla tamamen tutarlı olan çok istisnai bir şey oldu ve bu da hesaplamaların çok da garip olmadıkları anlamına geliyordu. Işık, sudan havaya gittiğinde bile tıpkı suyun yüzeyi bir aynaymış gibi mükemmel bir şekilde yansır. Fresnel'in matematiksel modeliyle keşfettiği, fizikçilerin o ana kadar gerçekten düşünmedikleri ama hepimizin aşına olduğu bir şeydi. Resimdeki kaplumbağanın görüntüsünün suyun yüzeyine nasıl yansıdığına bakın. Fresnel'in modelinin ürettiği garip sonuç, kimsenin istemediği karmaşık sayı, bu yansımayı anlatıyor. Kompakt matematiksel formül bir kez daha doğru çıktı; garip sonuç bize daha önce göremediğimiz bir şeyi gösteriyordu.



Kaplumbağanın suyun yüzeyindeki yansıması

Bu örnekler, matematiğin birçok açıdan nasıl yararlı olabileceğini göstermektedir. Matematik sorunları daha kolay hale getirir ve fizikçilerin yeni şeyler keşfetmelerini sağlar. Bu da fizikçiler kompakt matematiksel modelleri tercih ettikleri ve zaman zaman ortaya çıkan garip sonuçları paketin bir parçası olarak kabul ettikleri için olur. Matematiğin doğru olduğuna dair hiçbir kanıt olmasa bile formüllerine sadık kalırlar ve bunu da defalarca kanıtlandığı üzere, çoğu zaman geçerli nedenlerle yaparlar.

Kuşkusuz, bu durum her zaman bu kadar iyi sonuç vermez. Kompakt olsun ya da olmasın yanlış çıkan sürüyle teori vardır. Ancak şaşırtıcı olan şey, ne kadar sık işe yaradığıdır; bilim insanlarının çok kompakt olduğu için sevdiği bir matematik modeli aynı zamanda dünyayı daha iyi anlamamıza da yardımcı olur. Matematik hakkında kafa yoran herkes için bu, ne olursa olsun çözülmesi gereken bir bilmedir. Matematik kesinlikle işe yaramaz değildir ama matematiği bu kadar başarılı bir şekilde uygulayabilmemiz nasıl mümkün olabilir?

Platon'un soyut dünyasına geri dönelim. O dünya, günlük yaşamlarımızdan uzak, bizimle ya da fizikçilerin anlatmaya çalıştığı dünyayla hiçbir ilgisi olmayan bir sayı dünyası. Etrafımızdaki dünya hakkında tahmin yapan matematik o fiziksel dünyadan gelmez, dolayısıyla matematiğin tahminleri de hiçbir yerden gelmez. Öyleyse matematik dünyası nasıl gerçek dünya hakkında bir şey bilebilir?

Sherlock Holmes hikâyelerine bakmak da bu soruları yanıtlamamıza yardımcı olmaz. Hikâyeler, dünyadan Platon'un sayıları kadar uzak olmayabilir ama onlar da insan yapımıdır ve her zaman öyle kalacaktır. Newton'un kullandığı matematik, yerçekimini anlamamıza çok etkili olabileceğini bilmemizden önce tasarlanmıştı. Dirac formüllerini pozitronların varlığını bilmeden yaptı. Aynı şekilde, Sherlock Holmes zamanında Londra hakkındaki şeylerin doğru olduğunu öğrenmek tuhaf olurdu, zira Conan Doyle onları sadece olay örgüsüne iyi uydukları için uydurup hikâyelerine yerleştirmişti.

Matematiğin gerçekten işe yarıyor olması bu yüzden çok heyecan verici. Matematiğin ne kadar yararlı olduğunu gösteren sayısız örnek verebilirim. İlerleyen bölümlerde matematiğin günlük yaşamlarımızı nasıl doğrudan etkilediğine odaklanarak bunu yapacağım. Son bölümdeyse felsefeci olduğum günden bu yana beni büyüleyen bir soruya döneceğim: Matematiğin işe yaraması nasıl mümkün olabilir?

Ancak bu, bu kitapta ele aldığım en önemli soru değil. İlk olarak, matematiğin yararlı ve kendiniz hakkında biraz bilgi sahibi olmanın önemli olduğunu ortaya koymalıyız. Sonuçta, kullanmanız gerekmiyorsa matematiğin yararlı olduğunu bilmek neden sizin için önemli olsun? Matematikle hiçbir ilgisi olmadan mutlu bir hayat süremez misiniz?

3. BÖLÜM

Sayılar Olmadan Bir Hayat

Bulutsuz mavi gökyüzünün altında bir adam, Amazon yağmur ormanlarının kalbinde bir nehir olan Maici'de yelken açıyor. Nehrin kıyılarında, dış dünyayla neredeyse hiç temas olmayan küçük bir kabile yaşıyor. Adam her yıl, mümkün olduğunca çok Brezilya fıstığı, kauçuk ve diğer doğal ürünlerle geri dönme umuduyla kabileyi ziyaret ediyor. Teknesi ticaret için getirdiği her zamanki mallarla dolu: viski, tütün ve daha fazla viski.

Pirahã kabilesi ile ticaret yapmak oldukça zor. 200 yıldır ticaret yapıyorlar ama hâlâ sadece birkaç kelime Portekizce konuşuyorlar. Neyse ki o kadarı adamın istediklerini alması için yeterli: diğer tüccarları kıskançlıktan çatlatacak kadar iyi bir fiyata değerli fındık ve kauçuk. Bununla birlikte, bu fiyat çok değişken: Pirahã bir kova fındık için bazen bir sigara isterken, bazen sadece bir avuç fındık için bir paket tütün talep ediyor. Bunun dışında her şey çok basit: Pirahã, tüccar itiraz etmeye başlayana kadar teknedeki mallardan seçiyor.

Kabilenin tüm bu işe tamamen farklı bir bakış açısı var. Brezilyalı tüccarlar, getirdikleri tütün veya viski karşılığında ne alacaklarına dair bir fikir sahibi olmasalar da Pirahãlar bunu bir sorun olarak görmez çünkü sayı

kavramları yoktur. Sabit bir fiyata bağlı kalmazlar çünkü bunu nasıl yapacaklarını bilmezler. Bunun için bir neden de görmezler çünkü farklı tüccarlar için kafalarında net bir fikir vardır. Hepsi kimin dürüst olduğunu, kimin onlara her zaman mallarının ederinden daha azını vermeye çalışacağını bilir.

Tüm bunlar uzun yıllar Pirahā'da yaşamış Amerikalı araştırmacı Daniel Everett tarafından keşfedildi. Everett, Pirahā dilini konuşan kabile dışından çok az sayıdaki kişiden biri. Everett, Pirahā dilinde rakamlar için bir kelime olmadığını keşfetti. Bazen kabaca miktarlardan bahsederler, ancak "bir" için bile bir kelimeleri yoktur (ayrıca "kırmızı" için bir kelimeleri veya geçmiş zamanı ifade etmelerinin bir yolu da yoktur). Bu, Pirahā'yı matematiği hiç kullanmayan az sayıdaki kültürden biri yapar. Dillerinde (tıpkı diğerleri gibi) çizgiler, açılar veya diğer geometrik kavramlar için hiçbir kelime yoktur. Matematik sadece 5.000 yıldır var olduğundan, bu olağanüstü toplum bize geçmişimize bakabilmemiz için eşsiz bir fırsat sunuyor.

Bu durum, bizimle Pirahālar arasındaki kültürel farklılıkları muazzam hale getiriyor. Ürünlerin ederinin ne kadar olduğuyla, saatin kaç olduğuyla veya ay sonunu getirecek yeterli paraya sahip olup olmadıklarını takip etmekle ilgilenmiyorlar. Paraları yok, takasla ticaret yapıyorlar. Bütün bunlar çok küçük gruplar halinde yaşadıkları için mümkün oluyor. Herkes birbirini tanıyor ve sadece yaşayanlar önemli. Aile ağaçlarını takip etmiyorlar ve kabileden biri öldüğünde, o kişiyi tanıyan tüm insanlar da öldükten sonra unutuluyor. Pirahāların hayatı tamamen buraya ve şimdiye odaklı.

Böyle bir kültürde matematiğe çok da gerek yoktur. Pirahāların ısrarı üzerine Everett, onlara bir süre matematik öğretmeye çalıştı ama başaramadı. Sekiz ay boyunca

her gün onlara sayılar ve geometrik şekiller hakkında dersler verdi ve sonra onlardan düz bir çizgi çizmelerini veya 1’den 5’e kadar sayıları doğru sıraya koymalarını istedi. Buna rağmen, bu kadar zamanın ardından, onlara matematik hakkında hiçbir şey öğretemedi.

Acaba sadece öğrenemedikleri için mi? Muhtemelen öğrenebilirlerdi ama Pirahālar dışarıdan gelen bilgilerle ilgilenmiyor gibi görünüyordu. Soruların doğru veya yanlış yanıtları olabileceğine inanmıyorlardı. Everett derste matematiksel soruların yanlış yanıtları olabileceğini söylediğinde, kâğıda rasgele birkaç şey çizdiler veya rasgele birkaç sayı söylediler. Bazen matematiği tamamen göz ardı ettiler ve o gün olanlardan bahsettiler. Art arda iki kez düz çizgi çizmelerinin istenmesi bile onlara fazla geliyordu.

Tüm bunlar, benim matematik derslerime benziyor ama Pirahālar orada kendi özgür iradeleri ile bulunuyorlardı. Gerçi orada olmalarının nedeni matematik değildi pek; Everett her zaman patlamış mısır yapıyordu ve bu, herkesin bir araya gelmesi için iyi bir fırsattı. Aslına baktığınızda öğrencilik yıllarımdan o kadar da farklı değil.

Pirahā’dan uzakta bir adada

Dünyada matematik kullanmayan yalnızca birkaç kültür kaldı. Pirahā uç bir örnek çünkü sayılar için kelimeleri bile yok. Ama Papua Yeni Gine’de öyle kelimeleri olmakla birlikte, bunları çok az kullanan birkaç topluluk var. Onlar da matematik kullanmadan hayatta kalıyorlar.

Loboda kabilesi, Papua Yeni Gine’nin daha büyük adalarının doğusunda küçük bir ada olan Normanby’de yaşıyor. Lobodalar, vücutlarının bölümlerini kullanarak sayarlar: Örneğin, “6” için kullandıkları kelime, “bir el ile diğer elden bir parmak” şeklinde tercüme edilebilir. Ama

bu pek kullanışlı değil çünkü bizim sayıları kullanacağımız durumlarda, onlar bunun için bir neden görmüyorlar.

Örneğin parayı ele alalım. Bir şeyleri satın almak için para kullanıyoruz. Her şeyin bir fiyatı var ve bu fiyat, sayılarla ifade ediliyor. Lobodaların parası, euro veya pound karşılığında değiştirebilecekleri madeni ve kâğıt paraları. Ancak düzenledikleri çok sayıda partide başkasına hediye olarak para veremezler. Bir hediye aldıklarında, o hediyenin aynısını daha sonra geri vermek zorundadırlar. Eğer bir partide komşuları onlara bir sepet patates verirse sonraki bir partide ona tam olarak aynı boyutta bir sepet patates vermeleri gerekir. Para ya da aynı değere sahip başka bir şey karşılık olamaz; tam onlara verildiği kadar patates olmalı.

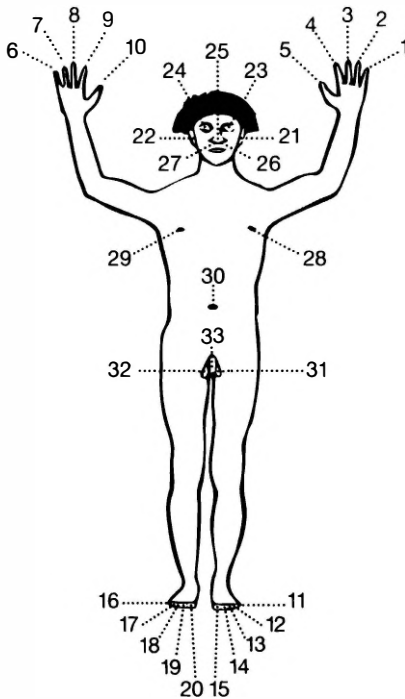
Biz, “tam onlara verildiği kadar” dendiğinde bire bir aynı sayıda patatesi anlıyoruz. Oysaki Lobodalar asla bir sepet içindeki patatesleri saymaz, sadece kaba bir tahmin yaparlar. Sepetin tamamen mi yoksa yarısına kadar mı dolu olduğuna bakarlar. Sepet tamamen dolu değilse biraz daha fazlasını veya azını geri verdiklerinde hiç sorun olmaz.

Loboda kabilesi başka durumlarda da sayı kullanmaz. Biz yaş, uzunluk veya zaman hakkında konuşurken sayılara başvururuz: Biri kaç yaşında, bir şey kaç santimetre veya inç uzunluğunda ya da bir şey kaç dakika önce oldu? Lobodalar elbette bu konular hakkında da konuşur; ancak örneğin bir şeyin ne kadar uzunlukta olduğunu, onu tanıdık bir şeyle karşılaştırarak tanımlar. Bir zincir bir kol uzunluğunda olabilir. Bu, ölçü birimi olarak kullandığımız “ayak” a benziyor, ancak Loboda için kol bir ölçü birimi değil. Bir şeyin iki ayak veya iki kol uzunluğunda olduğunu söylemek onlar için bir şey ifade etmiyor. Bir şey bir koldan daha uzunsa onu başka bir şeyle karşılaştırırlar.

Lobodalar birinin yaşını anlatmak için bir bebek kadar, bir çocuk kadar gibi tanımlamalar kullanır. Ve zamanı da

aynı şekilde söylerler: Bir şey, örneğin, köyden yandaki adaya bir yolculuk kadar uzun sürebilir. Sayılar olmadan da mükemmel bir şekilde hayatta kalırlar.

Papua Yeni Gine’de başka bir kabile olan Yupno da benzer bir durumdadır. Köyleri Madang bölgesindeki dağlarda, yaklaşık 2.000 metre yüksekliktedir. Tıpkı Loboda gibi, Yupnolar da vücutlarının parçalarını kullanarak sayarlar. Her zaman aynı şekilde olmasa da genel olarak, aşağıdaki çizimde gösterildiği gibi yaparlar. Bir sayıyı ifade etmek için vücudun ilgili kısmına ait kelimeyi söyler ya da oraya işaret ederler. Erkekseniz bu oldukça kolaydır ama çizimde de görüldüğü gibi, kadınlar bazı noktalarda bu sayma sistemi ile sorun yaşarlar.



Yupno sayma sistemi

Yupnolar bazen saymak için çubukları kullanır ve saydıkça bir tane yana koyarlar. Aşırı tecrit olmuş şekilde yaşamadıkları için kabilenin genç üyelerinin çoğu Batılı eğitim almıştır ve İngilizceye benzer bir dil olan Tok Pisin'i kullanarak sayarlar.

Dolayısıyla Yupnoların üç sayma şekli vardır ancak bunları düzenli olarak kullanmazlar. Her şeye sabit bir değer biçmişlerdir ama bu belli bir parasal değerle ifade edilmez. Bunun yerine, tüm mallarını, tam bir on-toea'lık para değerindeki yığınlar şeklinde sunarlar. Tütün yığınları yiyecek yığınlarından daha küçüktür ve sadece bir muz satın alamazsınız; on-toea'lık paranızın değeri kadar almanız gerekir. Bu, para üstüyle uğraşmak zorunda kalmamalarını sağlar ve saymalarına neredeyse hiç ihtiyaç yoktur.

Bununla birlikte, önemli bir istisna vardır: çeyiz. Yupnolar arasında çeyizler esas olarak domuz ve paradan oluşur ve bunları iki şekilde sayarlar. Erkeklerden bazıları vücutlarının ilgili kısımlarını kullanarak yüksek sesle sayarlar, bazıları da kenara çubuk koyar. Bu, karışıklığı önlemek içindir çünkü herkes aynı şekilde saymaz. Örneğin, doğrudan ellerden kulaklara gittiğinde sağ kulak, çizimde gösterildiği gibi 22 değil, 12 anlamına gelir. Bu olduğunda, çubuklar sağlama yapmak için iyi bir yoldur.

Yupnolar çeyizlerini tam olarak sayabilmek için bu kadar büyük acılar çektiğinden araştırmacılar çeyizleri matematik öğretmek için kullanabileceklerini düşündüler. Kabilenin yaşlı üyelerinden birine şunu sordular: "Çeyiz için on dokuz domuz gerekiyor ve elinizde sekiz tane var. Kaç tane domuza ihtiyacınız var?" Yanıt şaşırtıcıydı: "Arkadaşım, yeni bir eş alacak kadar zengin değilim. Sekiz domuzu nerede bulacağım? Ayrıca, ben yaşlı bir adamım ve daha fazla gücüm yok."

Ölçüm gerekmez!

Sonuçta, bu kabileler sayı kullanmadan gayet iyi bir şekilde hayatta kalabiliyorlar. Peki, bir şeyleri ölçmek için sayılara ihtiyaçları yok mu? Bir şeyleri inşa etmek veya yollarını bulmak için sayılara, uzunluklara ve mesafelere dair biraz da olsa fikir sahibi olmaları gerekmez mi? Belli ki hayır. Pirahã, Loboda, Yupno ve diğer birçok kültür tüm bunları matematik kullanmadan yapabiliyor.

Papua Yeni Gine'deki kabilelerin çoğu kano inşa ediyor. Ülke adalardan oluştuğu için fazla seçenekleri yok. Bir adadan diğerine seyahat etmenin tek yolu bu. Daha doğrusu, eskiden öyleydi. Yupnolar yüksek dağlarda yaşadıkları için kanolara ihtiyaç duymazlar ama kıyı kabilelerinin denizdeyken aniden batmayacak sağlam teknelere ihtiyacı vardır. Onları inşa etmek için ağaç gövdelerinin kalınlığı için standart ölçümleri ve gereksinimleri içeren planları yoktur. Yeni kanolarını daha önce inşa ettikleri ile karşılaştırarak deneyimlerini kullanırlar.

Bu deneyimlerini basit bir ölçüm biçimiyle desteklerler: bir mezura veya bir çubuk değil, bir kol veya Kiriwina Adaları'nda olduğu gibi, başparmak ve avuç içiyle. Bu sayede Kiriwina halkının ölçümleri biraz daha doğru hale gelir ki bu da adalar küçük olduğu ve halk denizde çok zaman geçirdiği için önemlidir. Temel şeklini asla değiştirmeseler de kanolarının boyutunu çok dikkatli bir şekilde ölçerler.

Bir kanonun boyutu ve şeklinden daha önemli olan, yapımında kullanılan ahşabın kalınlığıdır. Çok inceyse kolayca zarar görebilir, çok kalınsa kano daha az ağırlık taşıyacaktır. Papua Yeni Gine'deki kabileler ahşabın kalınlığını ölçmek için kesin yöntemler kullanmazlar. Kimi bacaklarını kullanır, kimiye sertçe vurarak odunun

yeterince kalın olup olmadığını ve bu nedenle kanonun güvenli olup olmadığını duyabildiklerini keşfetmiştir. Bir kanonun ne kadar ağırlık alabileceğini genellikle kano suya girene kadar bilmezler.

Ayrıca ırmağı ya da dar bir vadiyi geçmek için yapılan bir köprü gibi, her şey karada inşa edilmelidir. Haliyle bir köprüyü önceden test edemezsiniz ya da sadece bakarak üzerinde yürümenin yeterince güvenli olup olmadığını anlayamazsınız. Bu insanların inşa ettikleri bir köprünün yeterince güçlü olup olmadığını nasıl anladıklarını hâlâ bilmiyoruz. Bunu o kadar uzun süredir yapıyorlar ki hiç kimse atalarının bunu nasıl öğrendiğini hatırlamıyor.

Ana adanın ortasında yaşayan Kewabi kabilesi, hiçbir kesin ölçüm yapmadan köprüler inşa eder. Bir taraftan diğer tarafa olan mesafeyi tahmin ederler ve daha sonra yeterince uzun görünen ağaç gövdelerini ararlar. Aynı durum, gövdelerin ağırlığını taşıyan direkler için de geçerlidir. Tıpkı sütunlar ve kablolarla tutulan San Francisco'daki Golden Gate Köprüsü gibi, direklerin köprünün üstüne çıkması gerekir. Ardından yeterince uzun ve kalın halatlara ihtiyaç duyarlar. Kewabi'ler, sadece iyi tahmin güçleri ve deneyimleri sayesinde köprülerini inşa etmekte çok az sorun yaşarlar.

Papua Yeni Gine'deki birçok kabile, evlerini de tahmin ve deneyimlerin bir bileşimini kullanarak inşa ederler ama bunu yapma şekilleri çeşitlilik gösterir: Örneğin, bazıları kare evler inşa ederken, diğerleri evlerini sadece yuvarlak yaparlar.

Papua Yeni Gine'nin doğusunda Finschhafen'de yaşayan Kâte kabilesi, dikdörtgen evler inşa eder. İşe, biri evin uzunluğu diğeri de genişliği için iki halat yaparak başlarlar. Yapı malzemelerini toplarken bu halatları yeterli maldeme olup olmadığını görmek için kullanırlar. Bu sayede

işten epey tasarruf ederler; ihtiyaç duyduklarından daha fazla ağaç kesmek istemezler.

Tüm kabileler böyle iyi inşaatçılar değildir. Madang bölgesindeki bir kabile, evlerini halat veya ölçüme yardımcı olacak başka herhangi bir alet kullanmadan inşa eder. Standart bir prosedürleri vardır: Temel için bir dikdörtgenin içine birbiriyle kabaca aynı mesafede dokuz veya on iki direk yerleştirirler, daha sonra da sadece tahmin güçlerini kullanarak evi bu direklerin üzerine inşa ederler.

Kaveve köyündeki insanlar da evlerini direklere inşa ederler ama bu evler yuvarlaktır. Evin girişi, dairesel zeminin kenarında bulunan yuvarlak bir deliktir ve ortada ateş yakmak için yer kalır. Bu iki dairenin ne büyüklükte olması gerektiğini anlamak için halatları kullanırlar. İçeriye soğuk girmesini önlemek için giriş deliği mümkün olduğunca küçük olmalıdır. Bu yüzden köydeki en şişman insanı ölçerler ve eğer bu kişi delikten ucu ucuna sığarsa delik yeterince büyüktür. Dolayısıyla Kaveve halkı ölçüm kullanmaktadır ama bu son derece sınırlıdır. Kimse ne kadar ahşaba ihtiyaç duyulduğunu veya evin yüzey alanının ne büyüklükte olacağını hesaplamaz. Yapı malzemeleri toplama ve bina inşa etme işini sezgisel olarak yaparlar. Halatlar onlara her şeyin ne büyüklükte olması gerektiğini söyler ama hepsi budur. Matematik kullanmadan evler, köprüler veya kanolar inşa edebilirsiniz.

Küçük miktarlarla çalışma

Gördüğümüz gibi, matematiği neredeyse hiç kullanmayan farklı kültürler vardır. Matematiği bilseler hatta bir sayı sistemine sahip olsalar bile kullanmaları gerekmez. Uzunlukları ve miktarları oldukça doğru tahmin edebilirler. Bu epey zaman kazandırır, üstelik işe de yarar. Fakat bu

nasıl mümkün olabilir? Matematiği kullanmadan ticaret yapmamızı, yeterli yiyecek sağlamamızı, köprüler inşa etmemizi sağlayan şey nedir? Son yıllarda bilim bu sorunun cevabını buldu. Beynimizin belirli kısımlarını miktarlarla çalışmak için kullanıyoruz. Bu yüzden, işin matematiğini daha önce öğrenmemiş bile olsak uzunlukları tahmin edebiliyor veya bir kareyi tanıyabiliyoruz.

Beynin bunu mümkün kılan kısımları düzgün bir şekilde üçe ayrılabilir. Bir kısım dörtten küçük miktarlarla ilgilenir. Yani, bir elma ve iki elma arasındaki farkı hemen görebiliriz. Bir başka bölüm, daha büyük miktarlar için kullanılır, üçüncü kısım ise geometrik şekilleri tanır. Bu sayede daha önce hiç harita görmemiş insanlar, A'dan B'ye giden yolu bulmak için haritayı kullanabilirler.

Bebekken bile küçük sayılarla kolayca başa çıkabiliriz. Bir ile iki arasında ayrım yapabilme yeteneğiyle doğarız. Tabii ki sayılar arasında değil, bir şey ve iki şey arasında. Örneğin bebekler, üzerinde tek nokta olan bir kâğıda bir süre baktıktan sonra aniden üzerinde iki nokta olan bir kâğıt gördüklerinde şaşırırlar. Bu şaşırımları, gördüklerinin başka bir şey olduğunu anladıklarını gösterir. Bilim insanları, bunu bir bebeğin kâğıda ne kadar süre baktığını ölçerek belirleyebilir. Bebek bir süre sonra aynı görüntüye bakmaktan sıkılır ama farklı bir görüntüye daha uzun süre bakacaktır.

Bu, araştırmacıların bebeklerin çevrelerindeki dünyadan ne beklediğini ayrıntılı olarak incelemelerini sağlar. Ve şaşırtıcı keşiflere yol açar. Örneğin, bebekler toplama ve çıkarma yapabilmektedirler. Bir bebeğe iki oyuncak gösterir ve sonra birini uzağa koyarsanız, bebek sadece bir tane oyuncak kalmasını bekler. Daha sonra iki oyuncakla başlar ve bir tanesini aldıktan sonra geriye hâlâ iki oyuncak kalırsa bebek çok şaşırır. Belli ki bebekler sayılar

hakkında herhangi bir şey öğrenmeden önce bile, $2 - 1$ 'in 2 değil, 1 olduğunu anlıyorlar!

Tabii bu tam olarak doğru değil. Artık bebekleri şaşırtan şeyin, daha önde hiç görmedikleri bir oyuncağın bir anda ortaya çıkması olduğunu biliyoruz. Aynı şey $1 + 1$ 'in 1 'e eşit olduğunu görürlerse de olur. Bu duruma şaşırmaları çünkü bir oyuncak aniden kaybolmuştur. Bunun nedeni, beynimizin bir kısmının etrafımızdaki nesnelerin renk, büyüklük gibi özelliklerini takip etmekte uzmanlaşmış olmasıdır. Bir nesneye odaklandığımızda bu tür bilgileri kaydederiz. Bebekler de bunu yaparlar, bu yüzden bir şey aniden kaybolursa veya daha önce orada olmadığından emin oldukları bir yerde ortaya çıkarsa hemen fark ederler.

Beynimiz çok az sayıda şeyi bu kadar ayrıntılı takip edebilir. Bebekler için bu sayı en fazla üçtür: Bundan fazlası olduğunda kafaları karışır. Bebeklerin iki şey arasında seçim yapmaları gerektiği bir deney vardır. Sollarında içinde bir bisküvi bulunan bir kutu vardır. Bisküvinin kutuya konulduğunu görürler, dolayısıyla orada olduğunu bilirler. Sağlarında ise içinde dört bisküvi olan bir kutu vardır, bu bisküvilerin de kutuya konulduğunu görürler. Peki, bebekler hangi kutuyu seçecekler? Hangisine doğru emekleyecekler?

Gariptir, her zaman sağdaki kutuyu seçmezler. Bir bisküvi ile üç arasındaki farkı görebilen bebeklerin bir ile dört arasında da ayırım yapabileceğini düşünürsünüz. Fark büyüdükçe, görev daha basit olmalıdır. Ama hayır: Sağdaki kutuda dört bisküvi varsa hangi kutunun içinde en çok bisküvi olduğuna dair hiçbir fikirleri yoktur ve tamamen rasgele bir seçim yaparlar. Beynin küçük miktarları ayırt etmeye yarayan kısmı aşırı yüklenmeye başlar ve sonunda pes eder. Hayatlarının ilk yirmi iki ayı boyunca çocuklar bir ile dört arasındaki farkı anlayamazlar.

Yirmi ikinci ayda gerçekleşen bu değişimin nedeni, beynin aniden dört şeyi aynı anda yapabilmeye başlaması değildir. Yetişkinler bunu yapabilir ama onlar bile dört nesneyi aynı anda takip etmekte zorlanacaklardır. Tam olarak ne olduğunu hâlâ bilmiyoruz ancak bunun dil ile ilgisi olduğunu söyleyebiliriz. Çocuklar, tekil ve çoğul arasında ayırım yapan bir dil konuşuyorlarsa bir ile dört arasındaki farkı görmeyi daha hızlı öğrenirler. Örneğin, Japonya'daki çocukların bu farkı öğrenmesi daha uzun sürer çünkü Japoncada bu ayırım yoktur. Daha sonra bu farkı kaparlar çünkü Hollandaca veya Almanca gibi dilleri konuşan çocukların 10'dan büyük sayıları öğrenmeleri daha uzun sürer. 24, Cermen dillerinde “dört ve yirmi” olarak söylenirken, Japoncada –İngilizcedeki gibi– “yirmi ve dört”tür ki bu da çocukların sayılar büyüdükçe nasıl ilerlediğini anlamalarını kolaylaştırır. Fransızcada durum daha da zordur: Doksan kelimesi “dört çarpı yirmi artı on” olarak söylenir.

Bu nedenle dil, sayıları öğrenmek için önemlidir ama sonuçta en önemlisi, bir şey ile birden fazla şey arasındaki farkı görme yeteneğidir. Muhtemelen çocukların “bir” kelimesinin ne anlama geldiğini öğrenmesinin temelinde de bu vardır. Bunu yapmadan önce çocuklar sayıların nasıl işlediğini bilmezler. Onları sırasıyla sayabilirler –1, 2, 3, vb.– ama size bir oyuncak vermelerini istediğinizde, sayıları ne sıklıkta saydığınızdan bağımsız olarak size rasgele sayıda oyuncak vereceklerdir.

Doğuştan bildiğimiz şeyler üzerine diğer bilgileri işte böyle inşa ederiz. “Bir”in ne anlama geldiğini öğrenerek, “iki”nin “bir ve bir başka bir” anlamına geldiğini de öğrenebiliriz. Bu sonuçta sadece beynimizin küçük miktarlarla çalışan kısımları sayesinde mümkündür ve özellikle tam sayıları öğrenirken inanılmaz derecede uygun olur. Bu

bölümde daha önce ele aldığımız kültürler arasında beynin daha büyük miktarlarla ilgilenen kısmı daha önemlidir.

Tam bilmiyorum! Beyin ve büyük sayılar

Üçten fazla şeyle uğraşmamız gerektiğinde, beynin farklı, gene doğumdan itibaren faal bir kısmı devreye girer. Bebekler dört nokta ile sekiz nokta arasındaki farkı hemen bilebilir. Ancak –ve beynin bu kısmı ile daha küçük sayılarla ilgilenen kısmı arasındaki fark budur– bunu daha büyük sayıların hepsi için yapamazlar. Örneğin bebekler dört ile altı nokta arasındaki farkı göremezler. Bununla birlikte, on altı noktanın sekiz noktadan fazla olduğunu bilirler. Çünkü üç ya da dörtten fazla nokta olduğunda, tam olarak kaç tane olduğunu anlayamazlar. Bazı şeyleri birbirinden ayırt edebilir, bazılarını edemezler. Yeni doğmuş bebekler, bir kâğıt üzerinde diğerinde olduğundan en az iki kat daha fazla nokta olup olmadığını görebilir. Dolayısıyla altının dörtten fazla olduğunu anlayamazlar ama sekizin dörtten fazla olduğunu bilirler. Bu, iki sayı arasındaki göreceli farka bağlıdır. Şöyle düşünün: 100 ile 105 arasındaki farkı bir bakışta görmek, beş ile on arasındaki farkı görmeye kıyasla çok daha zordur.

Yaşlandıkça gitgide daha fazla fark görebiliriz. Bebekler birkaç aylık olduklarında dört nokta ile altı nokta arasındaki, sadece bir buçuk katlık bir farkı ayırt edebilirler. Genellikle yetişkinler on üç noktanın on iki noktadan fazla olduğunu bile görebilirler. Her zaman olmasa da genellikle hangisinin daha büyük olduğunu anlayabilirler. Öte yandan, yirmi ile yirmi bir arasındaki farkı saymadan anlamak neredeyse imkânsızdır.

Kısacası işin sonunda, saymak daha çok işe yarar. Saymadan görebildiğimiz aksine, sayarak kesin miktarı

anlayabiliriz. Bu yüzden Loboda kabilesi, birine kaç tane patates verdiğini tam olarak bilmez. Kabaca kaç tane olduğunu görebilir ve birisinin onlara çok daha az (veya daha fazla) geri verip vermediğini hemen anlayabilirler. Ama bir eksik ya da fazlayı fark etmezler.

Bu nedenle her ne kadar bebekler bazen sayılar hakkında hiçbir şey bilmeden bile büyük miktarlarla başa çıkabiliyor görünseler de büyük sayılarla küçük sayılardan farklı bir şekilde ilgileniriz. Bebeklere oyuncaklarla yapılan ve $2 - 1 = 2$ 'ye verdikleri tepkiyi test eden deney, $5 + 5 = 5$ için de kullanılabilir. Bebekler $5 + 5 = 10$ 'u tamamen normal bulurken durumun yanlış olduğunun farkındadırlar ve şaşırarak tepki verirler. Peki bu, onlara daha büyük rakamlarla saymayı zaten öğrettiğimiz anlamına mı geliyor?

Deneyi yürüten araştırmacıların 2004 yılında vardıkları sonuç buydu ama artık daha fazlasını biliyoruz. Bebekler $5 + 5 = 5$ 'e şaşırarak yanıt verirken, $5 + 5 = 9$ 'u, tıpkı $5 + 5 = 10$ gibi, ilginç bulmuyorlar, çünkü 9 ve 10 arasındaki farkı anlayamıyorlar. Dolayısıyla daha fazlasını görmeyi bekledikleri ancak sadece beş oyuncak gördükleri zaman şaşıyorlar. Ama tam olarak on tane oyuncak görmeyi beklemiyorlar ki matematiksel hesaplamayla hareket etselerdi beklerlerdi. Bekledikleri çok daha az kesinliğe sahip bir şey: Beşten fazla ama çok da fazla değil. Toplama ve çıkarma maalesef hepimizin öğrenmesi gereken bir şey.

Tüm bunlar nasıl işliyor? Beyin bu farklılıkları görmemizi sağlamak için ne yapar? Bu soruların yanıtı hâlâ bilinmiyor. Sizlere bu konuda ne düşündüğümü anlatmadan önce, beynimizin uzunluk, zaman ve benzeri şeylerle ilgilenen kısmını açıklamak istiyorum.

Uzunluk da sadece bakarak tam olarak göremediğimiz bir şeydir. Bir şeyin diğerinden kabaca iki kat daha uzun olup olmadığını hemen görebiliriz elbette. Dikdörtgen bir

tablonun uzun ve kısa kenarları arasındaki farkı görebilirim ama tam santimetre cinsinden göremem. Kabaca bir tahminde bulunabilirim ama büyük ihtimalle tahminim tutmayacaktır. Aynı şey zaman için de geçerlidir: Bir şeyin ne kadar sürdüğü hakkında bir fikrim var. On saniye ile beş dakika arasındaki ve bir ile iki saat arasındaki farkı biliyorum. Ama bir saat ile bir saat bir dakika arasındaki farkı anlayamam.

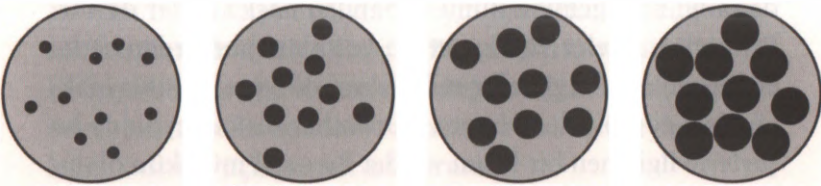
Tanıdık geliyor mu? Muhtemelen evet çünkü uzunluğu ve zamanı algılama şeklimiz miktarlarla çalışma tarzımıza çok benziyor. Bebekler doğumdan itibaren uzunluklar arasındaki farkı da görebilirler. İki ses arasındaki sürenin, bu süre yeterince farklı olduğu sürece, daha uzun veya daha kısa olduğunu bile söyleyebilirler. Yaşlandıkça bu farkları giderek daha fazla görebiliyoruz ve uzunluklarla süreleri tanıma konusunda daha iyi hale geliyoruz. Ancak ne uzunlukta olduklarını ya da ne kadar süreceklerini ölçüm yapmadan tam olarak bilemiyoruz. Kewabi'lerin inşa ettiği her köprüde, ağaç gövdelerinin doğru uzunluğu deneme yanılmayla bulunur. Köprü kurulacak mesafe ne kadar uzun olursa yanlış yapma ihtimalleri de o kadar artar çünkü ağaç gövdesini nehrin karşısına ulaştırmaya çalışana kadar karşı kıyının ne uzaklıkta olduğunu bilirler.

Hepimiz ölçmeyen veya sayı saymayan bu kabilelerin tahmin gücüne sahibiz. Onunla doğduk ve zamanla bu güç daha iyi hale geliyor. Bunu yapabilen başka türler de var: Primatlar, fareler ve akvaryum balıkları bunlardan sadece birkaçı; bu hayvanlar miktarlardaki ve uzunluklardaki farkları görebilirler. Hemen hemen her türün beyinde bu şeylerle ilgilenen bir kısım vardır. Bu nasıl mümkün olabilir? Herhangi bir matematik bilgisi olmadan miktarlarla çalışmamızı sağlayan şey nedir? Bunu diğer hayvanlar da nasıl yapabilir?

Buna yanıtlım, uzunluk ve zamanlarla çalışabileceğimiz için beyinlerimizin bize bu bilgileri miktarlar hakkında bir şeyler söylemek için kullandığı. Uzunlukları ve diğer görsel olayları kolayca anlayabilmemiz, beynimizin bu yeteneği daha soyut şeyler hakkında bilgi edinmek için kullanmasını sağlıyor. Beynimiz uzunluk, yüzey alanı gibi şekillerde gördüklerimize dayanarak soyutlama yapmaya başlıyor ve sonunda miktarlarla ilgili bir fikir geliştiriyor.

Neden böyle düşünüyorum? Bunun nedeni, kısmen, beynimizde her türlü numarayı yapabiliyor olmamız. Uzunluklar hakkında yanıltıcı bilgiler sayı tahminlerimizi de etkileyeceğinden beynin uzunluklar ve benzerleri için kullanılan kısmının, miktarların algılanmasının temeli olduğunu görebiliriz. Beynimiz uzunluk, yoğunluk, zamanlama gibi şeylerden soyutlayarak miktarları öğrendiğinde beklememiz gereken de tamı tamına budur.

Bunun en ikna edici örneği aşağıdaki resimdir. Resme çabucak bir göz atın ve saymadan veya uzunca düşünmeden, hangi dairenin en çok nokta içerdiğini söylemeye çalışın. Büyük ihtimalle, tıpkı benim yaptığım gibi, sağdaki daireyi seçeceksiniz. O daire daha kalabalık görünüyor ve dolayısıyla muhtemelen daha fazla nokta içeriyor. Ancak bu izlenim yanıltıcıdır: Noktaları saydığınızda her dairenin eşit sayıda nokta içerdiğini göreceksiniz.



Dört daire de aynı sayıda nokta içerir, ancak noktalar ne kadar büyük olursa, göze o kadar çok görünürler

Bunlar beynimizin yapabileceği türden hatalar ve nerede yanlış yapılabileceğini açıkça gösterdikleri için bize beynin nasıl çalıştığına dair bir şey söylüyorlar. Beynin en iyi şekilde çalışmadığı başka durumlar da vardır. Örneğin, bir sayının diğerinden daha büyük veya daha küçük olup olmadığına karar vermemiz gerektiğinde, sayının “doğru” tarafta olması işe yarayacaktır. Beynimiz daha küçük sayıların solda, daha büyük sayıların sağda olmasını bekler ve sayılar bu şekilde sunuluyorsa doğru cevabı vermemiz daha olasıdır. 9’un 5’ten büyük olup olmadığı sorulduğunda, 9’un 5’in sağında olması durumunda daha hızlı yanıt veririz. 9’un solda olduğu durumla sağda olduğu durum arasındaki düşünme süreleri farkı, fark edebileceğimiz kadar uzun değildir ama bir zaman ölçer bu farkı gösterebilecektir. 9 daha küçük sayı ise benzeri bir soruya –9, 15’ten büyük müdür?– 9 solda ise doğru yanıt vermek elbette daha kolaydır.

Bu durum herkes için geçerli değildir: Örneğin İbranice konuşan insanlar için durum tam tersidir. İbranice sağdan sola okunduğu için en küçük sayıyı tahmin etmek, o sayı sağdaysa daha kolaydır. İki dili akıcı bir şekilde konuşan insanlar için bu durum daha da kafa karıştırıcı olabilir. Hem İbranice (sağdan sola) hem de Rusça (soldan sağa) konuşan biri için en son hangi dilde okuduğu önemlidir. Kişinin son okuduğu dil İbraniceyse daha büyük sayıların solda olması kolaylık sağlar; Rusçaysa beyin daha büyük sayıları sağda görmeyi tercih eder.

Başka bir deyişle beyinlerimiz sayıları gördüğümüz şeylere bağlar. Bir sayının konumu, beynin onu nasıl algılayacağını belirler ve bunu sadece 9 veya 15 gibi sayılara değil, bir grup noktaya da yapar. Dahası, bunu yapan tek canlı biz değiliz. Cıvcivler de nokta şeklindeki daha büyük sayıları sağda görmeyi tercih ederler. Bu da cıvcivlerin

de sayıları tahmin etme yeteneklerinin uzunlukları kavramalarından geldiğini öne sürmek için yeterli sebeptir.

Geometrik şekilleri tanımak – civcivler bile yapabilir

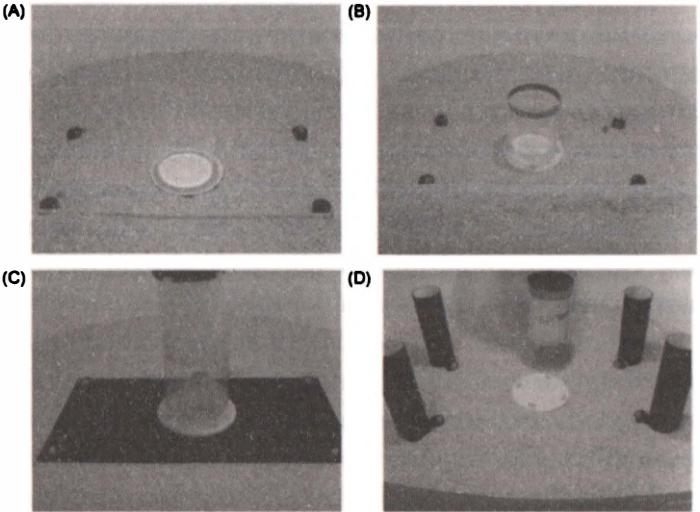
Dolayısıyla insanların ticaret ve köprü veya kano inşası gibi sayıları içeren her türlü faaliyeti matematik kullanmadan nasıl gerçekleştirebilecekleri hakkında epey şey biliyoruz. Ancak matematiğin başka bir dalı da insan toplulukları için büyük önem taşır: geometri. Ev inşa etmek için geometrik şekiller hakkında biraz bilgi sahibi olmalıyız: Evi daha uzun yaparsak yüzey alanı bundan nasıl etkilenir veya bir dairenin yarıçapını değiştirirsek ne olur? Neyse ki tüm bunları yapmamızı sağlayan, doğuştan gelen geometri becerilerimiz de var.

Beynimizin şekillerle ilgilenen belirli bir kısmı bile var, özellikle de yolumuzu bulmamızı sağlamak için. Yine, bu yeteneğe sahip olan sadece insanlar değil: Civcivler dahil pek çok hayvan da basit şekilleri tanıyabilir ve örneğin saklanmış yiyecekleri bulmak için kullanabilir. Kuşkusuz hayvanların yollarını bulmasının tek yolu bu değildir: Göçmen kuşlar Güneş ve yıldızlar sayesinde yollarını bulur, böcekler yuvalarına geri dönmek için kokuları kullanır. Şekillerin farkında olmak her zaman gerekli değildir ama örneğin, bir yuva dairenin ortasında veya bir dikdörtgenin köşesindeyse yararlı olabilir.

Araştırmacılar, hayvanların ve çocukların geometrik şekilleri ne kadar iyi tanıyabileceklerini test etmek için bu tür durumları kolayca taklit edebilirler. Belirli bir geometrik şekle sahip bir alanda bir miktar yiyecek saklarlar ve deneyin bu yiyeceği nerede aradığını izlerler. Yan sayfadaki fotoğraf dikdörtgen bir alandaki bir deneyi göstermektedir. Araştırmacı, civciv dikdörtgenin ortasındayken

köşelerden birine civcivin göreceği şekilde bir yiyecek gömer. Yiyeceğin yerini bulmasını zorlaştırmak için civcivi, aramaya başlamadan önce, kendi etrafında hızlıca döndürür. Civciv, yiyeceğin dikdörtgenin ortasından bakıldığında uzun tarafın köşenin solunda olduğu köşelerden birinde olduğunu biliyor gibi görünüyordur. Döndürüldükten sonra sadece iki yere bakar: sol alt ve sağ üst. Bunlardan biri yiyeceğin doğru yeri, diğeri de o noktanın ayna görüntüsüdür. Bu mükemmel bir sonuçtur çünkü ikisi arasında seçim yapmak mümkün değildir. Her iki köşenin de solunda dikdörtgenin daha uzun tarafı vardır ve yönünü kaybetmiş civciv için iki köşe de aynıdır. Bununla birlikte, bu durum civcivin daha uzun tarafın solda olduğuna dair bilgiyi tanıdığını ve aklında tuttuğunu göstermektedir.

Civciv bazen dikdörtgeni tanıyamaz. Alttaki iki resimde, civciv bir dikdörtgenin içinde durduğunun farkında değildir ve dört köşede de yiyecek arar. Civcivler şekilleri tanımada oldukça iyi olsalar da bazen akılları karışabilir.



Bir civcivin yiyecek bulması gereken dört farklı dikdörtgen

Diğer hayvanlar da aşağı yukarı aynı sınırlamalarla geometrik şekilleri tanıyabilir. Fareler, güvercinler, balıklar ve maymunlar farklı şekilleri ayırt edebilirler. Kendi türümüzde ise küçük çocuklar kendiliğinden şekilleri algılayabilirler. Dikdörtgen bir odada tatlı arayan küçük bir çocuk sadece iki yerde arama yapacaktır: doğru yer ve o yerin ayna görüntüsü. Ek bilgi verildiğinde bile böyle yapmaya devam edecektir. Örneğin, tatlının saklandığı duvarın farklı bir renk olması bile fark etmeyecektir. Çocuklar bu tür bilgileri kullanmayı anca daha ileri yaşlarda öğrenirler.

O zaman soru şu: Bu deneyler çocukların ve hayvanların şekilleri tanıyabildiğini kanıtlıyor mu? Dikdörtgenin ne olduğunu biliyorlar mı? Yoksa sadece uzun duvarın solda olduğu köşede bir şey olduğunu mu biliyorlar? Sonraki araştırmalar, çocukların ve hayvanların sadece köşeleri ve uzunlukları değil, şekilleri de dikkate aldıklarını göstermiştir.

Mesela ofisimdeyken beynim aktif olarak odanın görüntüsünü kaydeder. Sadece masamın solda uzun duvar olan bir köşede olduğunu değil, aynı zamanda arkamda, sol tarafta başka bir masa ve sağ tarafta bir kapı olduğunu hatırlarım. Bu odaya çok aşinayım tabii; sonuçta, neredeyse her gün burada çalışıyorum. Ama ne zaman yeni bir odaya girsek beynimiz tüm odanın zihinsel bir resmini çizer. Gözümüz kapalı olarak bile genel düzeni ve daha belirgin nesnelerin yerini tanımlayabiliriz.

Hatırlamadığınız şey, odada tam olarak nerede olduğunuzdur. Gözlerinizin bağlandığını ve birinin sizi kendi etrafınızda hızla döndürdüğünü, böylece hangi yöne baktığınızı bilmediğinizi düşünün. Artık odadaki nesnelerin nerede olduğunu gösteremezsiniz elbette. Bir ışık açık olsa ve göz bağı ışığın geçmesine izin verecek kadar ince olsa

bile nesnelerin nerede olduğunu bilemezsiniz. Ama yine de odanın düzenini tarif edebilirsiniz. İçinde bulunduğu alanın zihinsel resmine sahipsiniz ancak beyninizin size nerede olduğunuzu söylemesi tamamen imkânsız.

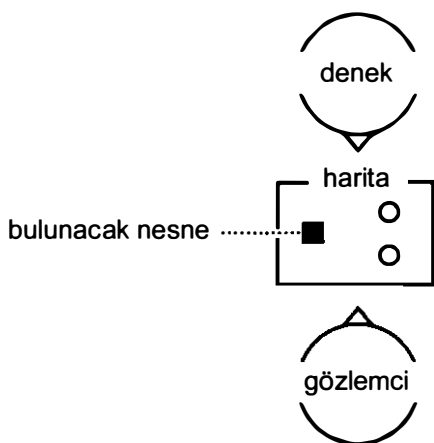
Bu zihinsel resmi yapmak için şekilleri tanımakla ilgili bazı yeteneklere sahip olmanız gerekir: köşelerin sayısı, duvarların birbiriyle nerede kesiştiği, vesaire. Bu örnekte yetişkinlerden bahsediliyor ama aynı durumun çocuklar ve hayvanlar için de geçerli olduğuna dair çok sayıda delil vardır. Hatta beyinde, kareler, daireler ve benzeri farklı şekiller için ayrı nöronlar bile bulunduğu anlaşılmıştır.

Matematik olmadan yaşayan kültürlerdeki insanların geometrik şekillerle başa çıkabilmeleri bu nöronlar sayesinde. Tıpkı Pirahãlar gibi, Amazon yağmur ormanlarının çeşitli bölgelerinde yaşayan Mundurukular da matematiği kullanmaz ve tamamen doğal yeteneklerine güvenirler. Mundurukú kabilesi şekillerle ilgili bazı deneylere katılmıştı. Kabilenin üyelerine, üzerinde biri diğerlerinden farklı altı geometrik şekil –örneğin, beş düz ve bir eğri çizgi– olan bir kâğıt parçası verilmişti. Merak edilen, matematiksel eğitimi olmayan kişilerin farklı olanı fark edip edemeyeceğiydi. Tıpkı daha önce çocukların bir bisküvi ile dört bisküvi arasındaki farkı anlayıp anlayamayacağını incelememiz gibi. Teste katılanlar bazen, örneğin düz ve eğri bir çizgi arasındaki farkı kolayca fark etti. Diğer zamanlarda, mesela çizginin ortasında veya başka bir yerinde nokta olduğu durumlarda, farklı olanı bulmaları daha zor oldu.

Doğru yanıtı her zaman bulamamalarına rağmen, bu kişilerin şekilleri ve mesafeleri anlamak için ekstra derslere ihtiyaçları yoktur. Şekilleri ve mesafeleri, bir haritayı, en azından sadece küçük bir alanı gösteren basit bir haritayı talimat olmadan okuyacak kadar iyi anlarlar. Bir

deneyde, bir Mundurukú kadınından basit bir haritayı inceledikten sonra o alanda bulunan bir silindire yürümesi istendi. Aşağıdaki çizimde gösterilen harita, biri diğerinden farklı renkte olan üç geometrik şekil içeren bir dikdörtgendir. Kadın haritaya baktıktan sonra, tarladaki renkli silindire doğru yürüdü. Bu durum, kadının haritanın o alanı temsil ettiğini anladığını gösterir. Kadın testi farklı renklerin yardımı olmadan da başarıyla tamamladı.

Harita okuma yeteneğinin bazı sınırlamaları vardır: Bazı şekilleri tanımak diğerlerine göre daha zordur ve şekil farklı bir renkte değilse doğru yeri bulmak zorlaşır. Dahası, kullandığımız yol haritaları biraz daha soyuttur ve bu deneylerde kullanılan haritalara göre temsil ettikleri alana daha az benzerler. Yine de –ve burada bizi ilgilendiren budur– deneyler, matematik eğitimi olmadan da geometrik şekilleri anlayabildiğimizi göstermektedir.



Mundurukú harita okuma deneyi

Matematik yeni bir şey ekliyor mu?

Çok sayıda kültür, şekiller ve geometri olmadan mükemmel bir şekilde yaşayabilir. Çünkü doğumdan itibaren miktarlar, mesafeler ve şekillerle nasıl başa çıkacağımızı biliriz. Beynimiz, bir sepet içinde kaç tane patates olduğunu, bir nehrin öte kıyısının ne uzaklıkta olduğunu ya da bir ev inşa etmek için ne kadar ağaca ihtiyacımız olduğunu bilmek için matematiğe ihtiyacımız olmayacak şekilde tasarlanmıştır.

Yine de bu içsel becerileri matematiksel becerilerle karıştırmamalıyız. Matematik, öğrenmemiz gereken bir şeydir. Bebekler sayıların ya da geometrinin ne olduğunu bilmezler. Şekilleri tanırlar, ancak onlar hakkında düşünmezler veya onları analiz etmezler. Şekiller hakkında düşünmek ve şekilleri analiz etmek, matematikçilerin yaptığı şeydir. Bir şekli sadece tanımak, matematik yapmakla aynı değildir.

Madem öyle neden matematikle uğraşalım? Hayatta kalmak için matematiğe ihtiyacımız olmadığı gayet açık. Matematik hakkında hiçbir şey öğrenmeden gayet mutlu yaşayabiliriz. Yine de Mezopotamya'dan Mısır'a, Yunanistan'dan Çin'e kadar dünyanın dört bir yanındaki insanlar matematik dünyasına girmeyi gerekli bulmuşlardır. Matematik, bu insanların hayatına çok önemli, onsuz yapamayacakları bir şey eklemiştir. Bir sonraki bölümde bunun tam olarak ne olduğuna daha yakından bakacağız.

4. BÖLÜM

Evvel Zaman İçinde Matematik

Bugünkü Irak'ın güneydoğusunda yıkıntıları kalmış bir şehir olan Umma yakınlarında bir denetmen yıllık raporunu hazırlıyor. Yıl MÖ 2034 ve Kral Shu-Sin tüm bölgeyi yönetiyor. Denetmenin ciddi bir sorunu var. Devlet her yıl, denetmenin sorumlu olduğu kölelerin kaç gün çalışması gerektiğini belirliyor ve hesap her yıl açık veriyor. O yıla kadar 6.760 işgünü açık vermiş ve bu yıl, kısmen kendi hesabındaki yanlış hesaplama nedeniyle açık 7.421'e yükselmiş.

O zamanlarda işgünleri devlete ait mallar olarak görülüyordu. Kral Shu-Sin'in nazarında yeterli tahıl üretilmemesinin sorumlusu denetmendi. Denetmen öldüğünde evi, mülkleri ve ailesi, devlete olan borcunu ödemek için satılacaktı.

Hem denetmenler hem de ekiplerindeki köleler için zor bir hayattı. Kadınlara her altı günde bir, sağlam erkeklereyse on günde bir izin veriliyordu. Kimse emekli olamıyordu; yaşlı insanlar muhtemelen ölünceye kadar çalışmaya devam ediyorlardı. Peki, Kral Shu-Sin bu sistemi nasıl sürdürüyordu? Muhasebe (kayıt tutma) yoluyla. Denetmenin yıllık raporu, tıpkı bugünkü şirketlerin raporları gibi, son derece kapsamlıydı. Shu-Sin ülkesini,

doğruluğu makbuz ve senetlerle desteklenen, alacak ve borç hesapları olan çift girişli bir muhasebe sistemi aracılığıyla denetliyordu. Shu-Sin'in kayıt tutma sistemi o kadar kapsamlıydı ki döneminden 3.500 yıl sonrasına, MS 1500 yıllarına kadar Avrupa'da benzer başka bir sistem ortaya çıkmadı. Ve bir devletin onun yaptığına benzer, merkezi olarak planlanmış bir ekonomi kurmaya karar vermesi daha da uzun sürdü.



MÖ 2000'de muhasebe

Sistem bütünüyle korkunçtu. Gerekli işgünü sayısı o kadar yüksekti ki neredeyse tüm denetmenler borçtaydı. Sistemin tek avantajı, bizlerin bulması için arkasında çok sayıda kil tablet bırakmasıydı. Tüm bu makbuzlar, faturalar ve yıllık raporlar muhafaza edildiği için Umma'daki bu denetmen hakkında epey şey biliyoruz. Kazılar sonucu denetmenin MÖ 2034 yılına ilişkin yıllık raporu ortaya çıktı ve ufak tefek birkaç gri leke hariç, rapor mükemmel bir şekilde okunabilir halde.

Rapor aynı zamanda bize hangi sayıların muhasebede ne kadar işe yaradığını da gösteriyor. Kesin miktarlarda çalışabiliyorsanız işgünlerini planlamak ve takip etmek çok daha kolaydır. Matematik büyük insan gruplarını yönetmeyi kolaylaştırır ve bu yüzden matematik, insanlar şehirlerde kalabalık halde birlikte yaşamaya başlayana kadar gelişmemiştir.

Sınırları Zorlamak

Kral Shu-Sin'den çok önce Mezopotamya'da avcı toplayıcılar yaşıyordu. Avcı toplayıcılar MÖ 8000 civarında bölgedeki ilk yerleşim yerlerini inşa ettiler ve tahıl, sebze ve meyve yetiştirmeye başladılar. Bu büyük bir başarıydı; iki büyük nehir ve akıllı bir sulama sistemi, gittikçe daha büyük insan gruplarını beslemelerini sağladı. Şehirler ortaya çıktı ve tüccarların çok para kazanma umuduyla seyahat etmeleri, şehirlerin birbirleriyle temaslarını giderek artırdı. Bir tür merkezi otoriteye sahip olmak, giderek daha önemli hale geldi. Kabilelerde yaşayan insanlar birbirlerini tanıdıkları için yasa ve düzenin korunması kolaydı ama şehirlerin çok büyümesiyle durum değişti.

Hükümetler şehir devletlerine dönüştüler ve vergi uygulamaya başladılar. Bu ilk başta pek de iyi gitmedi çünkü sayılar henüz ortaya çıkmamıştı. Loboda kabilesi ve yetenekleri gibiydi. Devlet her zaman aynı miktarı almıyor, sadece neye ihtiyaç duyduğunu tahmin ediyordu. Dolaşısıyla vergilerinizi ödedikten sonra geriye ne kadar kalacağını bilmenizin veya her yıl aynı oranda vergi ödeyip ödemediğinizi kontrol etmenin bir yolu yoktu. Durumu daha da karmaşık hale getiren, insanlara ne kadar vergi ödemek zorunda olduklarını belirtecek bir kelime olmamasıydı. “Sepet” gibi basit bir tanım zaten bir sayıyı ifade

eder: bir. Henüz sayılar ortada olmadığından miktarlar hakkında konuşmak zordu. Ancak şehir devletleri bu soruna bir çözüm buldu.

Her şey gıda depolarıyla başladı. Mezopotamya'daki Susa ve Uruk şehirleri büyüdükçe depolar da büyüdü. Tüccarlar, depolarında ne kadar yiyecek olduğunu takip etmek için her biri aynı boyutta, üzerinde işaretler bulunan küçük kil sikkeler kullanmaya başladılar. Her sikke, bir sepet tahıl veya bir koyun gibi belli bir miktar gıdayı temsil ediyordu. Böylece depodaki tüm sepetleri veya koyunları görmenize gerek kalmıyordu; miktarlarını sikke sayısından anlayabiliyordunuz.

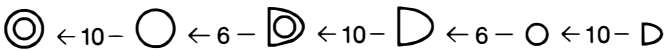
Bu sikkeler gittikçe daha fazla şeylerde kullanılır oldu. Daha önce Susa'daki vergi memurları şehir halkına kaç tane tahıl sepetine ihtiyaç duyulduğunu söylemek istediklerinde sorun yaşıyorlardı çünkü sayılar için henüz bir kelime yoktu. Bu yüzden kilden yapılmış ve içinde sikkeler olan mühürlü zarflar kullandılar. Her sikke bir sepeti temsil ediyordu ve bu sayede saymaya gerek kalmadığı için her şey yoluna girdi. Susa halkı zaten MÖ 4000 civarında tapınağa yapılan ödemeleri yönetmek ve vergi uygulamak için sikke kullanıyordu ancak sayılardan bihaber oldukları için elbette sonrasında ne kadar topladıklarını bilemiyorlardı.

Uruk'taki yetkililer bir adım daha ileri gitti. Susa'da olduğu gibi, insanlara ne kadar mal gönderildiğini veya geri ne kadar mal yollamak zorunda olduklarını bildirmek için kil zarflarda sikke kullanmaya başladılar. Bu zarflar, taşıma sırasında hiçbir şeyin çalınmamasını sağlamanın da iyi bir yoluydu. Ancak kil parçalarıyla dolu bir kil zarfı biraz hantal bulmaya başladılar. Ne zaman ve nasıl olduğunu tam olarak bilmiyoruz ama bir noktada zarfın dışına sikkelerin çizimlerini yapma fikri ortaya çıktı. Kil

tablet üzerindeki işaretleri silmek kolay değildi, bu yüzden zarfın dış tarafındaki bir çizim içerideki kil parçaları kadar güvenliydi. Bu işaretler yavaş yavaş rakamlara dönüştü. Zamanla insanlar bu işaretlerin ne ifade ettiğini unuttular ve onları daha çok bir sepet tahıl, bir koyun gibi şeylerin sembolü olarak görmeye başladılar. Bunlar ilk yazılı kelimelerdi ve diğer kelimelerden çok daha erken ortaya çıktılar; kil tabletler üzerinde tam cümleler 700 yıl daha görünmeyecekti.

İlk sayılar Mezopotamya’da işte bu şekilde evrimleşti. Sikkeler kil zarfların dışında tasvir ediliyordu; daha sonra da bunların yerini düz kil tabletler aldı. Semboller yavaş yavaş daha yaygın kullanılmaya başladı ve aynı sembolü tekrar tekrar çizmek zahmetli olduğundan, semboller yeniden tasarlandı. Böylece sayılar ortaya çıktı: Hem gemileri hem de tahılları saymak için aynı sembolü kullanıyorsanız bir sayı kullanmış olursunuz. Tüm bunlar Susa ve Uruk gibi şehirlerin vergi toplamak için uygun bir yola ihtiyaç duyacak kadar büyümeleri sayesinde oldu.

İlk sayılar konilere ve dairelere benziyordu. Çünkü kil tabletlere yazmak için kullanılan kalemlerin iki yüzü vardı: Arka kısımları yuvarlak, ön kısımları daha sivriydi. Kalemin arkasını kilin içine bastırarak daire, önünü bastırarak da koni elde ediliyordu. Bu sayı sembolleri sağdan başlıyordu ve yan tarafındaki yuvarlanmış bir koniye benzeyen küçük şekil 1’i gösteriyordu. Küçük koniler dokuz tanesi yan yana dizilinceye kadar tekrarlanıyordu. 10 farklı bir semboldü, küçük bir çember.



Mezopotamya’da ilk sayılar

Mezopotamyalılar bizim yaptığımız gibi onluk serilerle saymaya devam etmiyorlardı. Altı kereden, yani 59'dan sonra, küçük dairenin yerini 60'ı temsil eden daha büyük bir yuvarlanmış koni alıyordu. Bu şekilde, on ve altı sembollerinin çeşitli serileriyle 36.000'e ulaşıncaya kadar devam ediyordu. 36.000'den büyük sayılar için iş zorlaşıyordu ama bu önemli değildi: O günlerde bir dükkânda kimin 36.000 sepet tahılı vardı ki?

┆	1	┆┆	2	┆┆┆	3	▽	4
▽▽	5	▽▽▽	6	▽▽▽	7	▽▽▽	8
▽▽▽	9	◁	10	◁◁	20	◁◁◁	30
◁◁◁	40	◁◁◁	50	┆	60	┆◁	70
┆◁◁	80	┆◁◁◁	90	┆┐	100	┆┐	200
┆┐	300	┆┐┐	400	┆┐┐	500	┆┐┐	600
┆┐┐┐	700	┆┐┐┐	800	┆┐┐┐	900	◁┐	1000

Çiviyazısıyla seksagesimal (altmışlık) sayı sistemi

Zaman içinde Mezopotamyalılar daha karmaşık bir yazı geliştirdiklerinde, daha büyük miktarları kaydedebilmek için sayıları da farklı şekilde yazdılar. Bu sayılar yukarıdaki çizimde gösterilmiştir. Bu yazıya bugün, sembollerinin karakteristik biçimlerinden dolayı çiviyazısı (*cuneiform*) denir. Bu yöntemi kullanarak kesirleri bile yazabiliyorlardı: Hepsisi ekonomiyi devam ettirmek içindi.

Uruk ve Susa gibi şehir devletleri sayıları sadece vergi toplamak için değil, aynı zamanda yiyecek tedarikini yönetmek için de kullandılar. Tahıl ve diğer gıda ürünlerinin ne kadarının depolarda, ne kadarının tarlalarda olduğunun ve tüm nüfusu beslemek için yeterli olup

olmadıklarının kaydını tuttular. Herkese ekmek üretmek için ne kadar tahıla ihtiyaç duyduklarını tahmin ettiler ve yeterli görmedikleri durumda daha fazla ektiler. Bunun da planlanması gerekiyordu: Yiyeceğin çok fazla olması, neredeyse az olması kadar kötü bir durumdu çünkü depolarda fazla uzun süre kalması durumunda bozulurdu.

Muhasebeciler Mezopotamya'nın en iyi kâtipleriydi ve tapınak rahipleriyle birlikte tüm bu planlamalardan sorumluydular. Kâtipler sadece yazmayı değil, aynı zamanda saymayı ve ölçmeyi de öğrendiler: Defterleri tutmanın yanı sıra, bir arazinin alanını da ölçebiliyorlardı. Ayrıca tüccarlar için sözleşmeler hazırlıyorlardı ve bazıları bir inşaat projesi için kaç işçiye ihtiyaç duyulacağını hesaplıyordu. Matematik gün geçtikçe daha fazla faaliyeti planlamak için kullanılıyordu ve binalar geometrik şekiller kullanılarak tasarlanıyordu. Kâtipler önce mimar sonra da Kral Shu-Sin'in denetmenleri oldular.

Mezopotamya'da okul

Kuşkusuz tüm bu farklı görevler için kâtiplerin eğitilmesi gerekiyordu ve arkeolojik kazılar sonucu ortaya çıkan MÖ 1740'tan kalma bir okul sayesinde bu eğitimin nasıl olduğu ve o dönemde neye önem verildiği hakkında oldukça iyi bir fikrimiz var. Eğitimin amacı sadece basit hesaplamaları kafadan yapmak veya arazileri parsellere bölmek değildi. Derslerde matematiğin gündelik sorunlara uygulanmasına da büyük önem veriliyordu. Kâtipler bunun için eğitiliyorlardı ve okulda bulunan bir metinde de bahsedildiği gibi, matematiği pratikte nasıl uygulayacağını bilmeyen kişilerle alay ediliyordu.

Metinde, genç bir kâtibin daha yaşlı ve deneyimli bir meslektaşıyla konuşması konu ediliyor. Yaşlı adam,

öğretim standardının kötüye gittiğinden şikâyet ediyor. Zamane gençleri artık hiçbir şey yapamıyor, bir araziyi iki kişi arasında bölmeyi bile beceremiyorlar, diye söyleniyor. Genç kâtip buna katılmıyor ve bir araziyi kesinlikle ikiye bölebileceği konusunda ısrar ediyor. Bunu ne kadar iyi yapabileceğini göstermek için yaşlı adama onu rasgele bir noktaya götürmesini söylüyor. Yaşlı adam gülerken, toprağı ip kullanarak bölmeyi değil, nasıl böleceğini hesaplamayı kastettiğini açıklamaya çalışıyor. Bir sözleşme hazırlamak için ihtiyacınız olan şey budur ve belli ki akılsız delikanlı bunu yapamamaktadır.

Matematiğin ortaya çıkış amacı gündelik hayatın kolaylaştırılmasıydı ancak uzun bir süre toplumlarla gerçeklik arasındaki bağlantı açık bir şekilde öğretilmedi. Mezopotamya'nın merkezindeki başka bir şehir olan Nippur'da okuldaki öğretimin büyük bir kısmı, sürekli olarak satır satır toplam tekrar etmekten ibaretti. Öğretmenin yaptıklarını yeteri kadar çok kopyalarsanız sonunda nasıl yapıldığını siz de öğrenirsiniz. Bu, başka herhangi bir konuda olduğu kadar matematik için de geçerlidir.

Nippur'daki öğrenciler elbette ilk önce okumayı ve yazmayı, sözcük listelerini ezberleyene kadar tekrar tekrar yazarak öğreniyorlardı. Mekânlar, et çeşitleri, ağırlıklar, uzunluklar vb. için kelimeleri öğrendikten sonra matematik yapmaya başlıyorlardı. Bu da çarpım tabloları ile aritmetik ve geometri hakkındaki diğer şeyleri ezberlemek anlamına geliyordu. Pastanın üzerindeki çilek niyetineyse birkaç standart sözleşmeyi –tahmin ettiniz– defalarca kez yazarak ezberliyorlardı. Fakat her şey tekrara dayanmıyordu. Bazen öğrencilere çözmeleri için gündelik hayatla ilgili matematiksel kelime problemleri verilirdi.

Bir duvar. Genişliği [2 kübit], uzunluğu $2\frac{1}{2}$ nindan, yüksekliği $1\frac{1}{2}$ nindan. [Duvarda kaç tuğla var?]

Bir duvar. Uzunluğu $2\frac{1}{2}$ nindan, yüksekliği $1\frac{1}{2}$ nindan, tuğlaları 45 sar_b. Duvarın kalınlığı ne kadar?

Bir evin yüzey alanı 5 sar_a. Duvarlarını $2\frac{1}{2}$ nindan yüksekliğe inşa etmek için kaç tuğlaya ihtiyacım var?

Bunun gibi şeyleri bilmeyi istemek mantıklı, ancak öğrencilere aşağıdakiler gibi çok sayıda saçma kelime problemi de verilirdi:

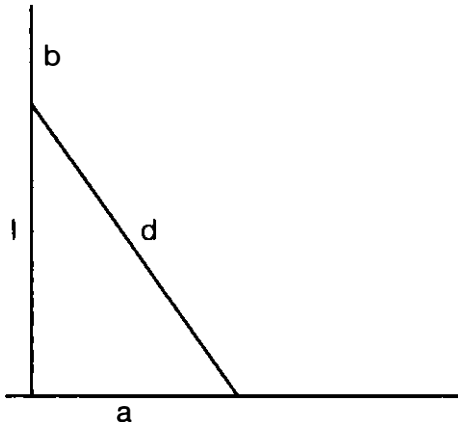
Bir duvar. Yüksekliği 11 nindan ve tuğlaları 45 sar_b. Duvar genişliğinden 2,20 (bizim 140'ımız: $2 \times 60 + 20$) nindan daha uzun. Duvarın uzunluğu ve genişliği nedir? [Tuğladan bir duvar]. Duvarın yüksekliği 1 nindan, tuğlaları 9 sar_b. Duvarın uzunluğu ve kalınlığı toplamı 2,10 (bizim 130'umuz). Duvarın uzunluğu ve kalınlığı nedir? [Tuğladan bir duvar]. 9 sar_b tuğla döşedim. Duvar 1,50 (110) [kalınlığından daha uzun]. Yüksekliği 1 nindan. Duvarın uzunluğu ve kalınlığı ne kadar?

Birinci ve üçüncü problemleri düşünün: Bir duvarınız var ve uzunluğunun genişliğinden veya kalınlığından ne kadar daha fazla olduğunu tam olarak biliyorsunuz. Peki, bunu nereden biliyorsunuz? Belli ki ölçerek değil, aksi halde yanıtı zaten biliyor olurdunuz. Ama bu bilgiyi başka nasıl edinebilirdiniz ki? Fazlasıyla zorlama geliyor. İkinci problem daha da tuhaf: Duvarın uzunluk ve kalınlığının toplamını, uzunluğunu ve kalınlığını bilmeden nasıl bilebilirsiniz? Gündelik hayatta asla karşınıza çıkmayacak başka bir problem.

Bununla birlikte, bu saçma matematiksel kelime problemlerinin arkasındaki fikir, matematiğin gündelik durum-

larda ne kadar iyi kullanılabileceğini göstermek değildi. Muhtemelen kâtip adaylarının matematikte ne kadar iyi olduğunu test etmeyi amaçlıyorlardı. Tek dezavantajı, bu daha karmaşık matematiğin artık kullanışlı olmamasıydı. Okul, öğrencilerinin matematiksel tekniklerini geliştirerek, matematiği kullanmanın ilk baştaki nedeni olan gündelik hayatta işe yaramasından uzaklaştı. Bu tür hesaplamaların bir şehir devletini düzenlemekle hiçbir ilgisi yoktur.

Yine de bu tür bir matematiği öğrenmek çok saçma değil. Sonuçta, ortaya ne zaman yararlı bir şey çıkabileceğini asla bilemezsiniz. Aşağıdaki, duvara yaslanmış bir çubuğu gösteren çizime bakın. Çubuğun beş metre uzunluğunda (c) olduğunu ve duvara dört metre yükseklikte (b) dokunduğunu varsayın; çubuk duvardan ne kadar uzağa (a) temas eder?



Pisagor teoremi ama ta Mezopotamya'da

Üçgenler hakkında hâlâ bir şeyler hatırlıyorsanız cevabı zaten biliyorsunuzdur. Çubuk ve duvar dik açılı bir üçgen oluşturur ki bu da kenarların uzunluklarının Pisagor teoremi kullanılarak hesaplanabileceği anlamına gelir:

$a^2 + b^2 = c^2$. B'nin dört metre ve c'nin beş metre olduğunu bildiğimiz için a mesafesini (duvarın tabanından çubuğa) bulabiliriz: $a^2 + 4^2 = 5^2 \rightarrow a^2 = 5^2$ (yani 25) $- 4^2$ (yani 16) $\rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = 3$.

Şaşırtıcı olan, Mezopotamyalıların bunu Pisagor doğmadan 1.500 yıl önce bilmeleri. Teoremi muhtemelen duvardaki çubuk için kullanmazdınız; üç uzunluğu ölçmek çok daha kolay olurdu. Ancak bu teorem, doğru açığa sahip olduğunuzdan emin olmak için çok yararlı bir yoldur. Üçgenin üç kenarı da $a^2 + b^2 = c^2$ ile uyumluysa bir dik açınız vardır.

Mezopotamya'da matematik çok gelişmişti. MÖ 1800'lerde, Yunanlardan çok daha önce, bir dizi zor problemi çözebiliyorlardı. Örneğin, $x^2 + 4x = \frac{41}{60} + \frac{41}{3600}$ problemini çözebilirlerdi (çözümü $x = \frac{1}{6}$). Matematğin insanları bağımsız düşünmeye teşvik ettiğinden endişe duyan Kral Shu-Sin dönemi hariç: Shu-Sin saltanatı sırasında karmaşık matematiğin okullarda öğretilmesini yasakladı, bu da çocuklara sadık birer kul olmayı aşmak için bolca zaman bıraktı.

Bir önceki bölümde sorduğum soruya geri dönelim: İlk başta insanlar neden matematik kullanmaya başladı? Mezopotamya'da şehir devletlerinin düzenlenmesi için lazımdı. Matematik, vergi toplamayı, yiyecek kaynaklarını planlamayı ve bina inşa etmeyi kolaylaştırdı. O kadar çok insanla bu şeyleri matematik olmadan yapmak zorlaşmıştı. Ancak her matematik işe yarar değildi. Gündelik hayatta hiç karşılığı olmayan matematiksel kelime problemlerini çözmek, başkalarına ne kadar zeki olduğunuzu gösteren bir statü sembolüydü. Bu problemleri Kral Shu-Sin bile çözüyordu: Tebaasının hiçbir şey bilmesine izin verilmezdi ama Kral elbette her şeyi biliyordu.

Mısır'da ekmek, bira ve sayılar

Eski Mısır'da iki adam hangi mesleği seçmeleri gerektiğini düşünmektedir. Biri çiftçi olmak istediğini söylerken diğeri şöyle der: “Hayır! Kâtip olmak lazım, hayatını kazanmanın iyi bir yolu bu. Çiftçi bütün gün çok çalışmak, toprağı sürmek, hasadı toplamak, sulama sistemini sürdürmek gibi bir sürü şey yapmak zorundadır. Kâtibin yapması gereken tek şey, sıcak bir yerde oturup bir şeyler yazmak.” “Tamam,” der ilk adam. “Çiftçi olmak kötü bir fikir. İnşaatçı olmaya ne dersin?”

Hikâyenin kalanını tahmin edebilirsiniz. Bu hiciv metninde her meslek birbiriyle karşılaştırılır ve her seferinde en az işi yapan kâtip çıkar. Hikâyenin ana fikri açıktır: “Kâtip, herkesin ödemek zorunda olduğu vergileri hesaplar. Onu unutmayacaksınız.” Bugün, çalışma düzeylerindeki bu fark daha az belirgindir ancak vergi hizmetlerimiz hâlâ bolca matematik kullanmaktadır.

Eski Mısır, Mezopotamya'ya çok benziyordu. Orada da matematikçiler –kâtipler– vergi toplamada önemli bir rol oynadılar. Ama büyük bir farkla: Eski Mısır hakkında çok daha az şey biliyoruz. Mezopotamya'da herkes kil tabletler üzerine yazıyordu ve bu tabletleri neredeyse hasarsız halde bulduk. Ama Mısır'da çok daha çabuk yok olan papirüs üzerine yazdılar. Ayrıca, Mısırlıların yaşadığı Kahire ve İskenderiye gibi şehirler hâlâ yerleşim yerleri, bu da oralarda kazı yapıp altta kalan tarihi kalıntıları bulmayı zorlaştırıyor. Bu yüzden matematikle ilgili Eski Mısır'dan kalan sadece altı metin var ve bunların hepsi Orta Krallık döneminden (MÖ 2055-1650). Büyük Giza Piramidi'nin inşa edildiği Eski Krallık (MÖ 2686-2160) ve Yeni Krallık (MÖ 1550-1069) dönemleri hakkında çok daha az şey biliyoruz.

Ama Mısırlılar iyi korunan taş üzerine hiyeroglif yazmamışlar mıydı? Doğru ama bu yazılar sadece krallar ve tanrılar hakkında hikâyeler anlatıyorlar. Tüm idari kayıtları tutmak için hiyeratik yazı olarak bilinen tamamen farklı bir yazı türü kullandılar ve bu yazıda *sayılar* da vardı.

Bu sayılar ilk olarak MÖ 3200 civarında, Mezopotamya'da kil tabletlerin ilk kullanıldığı zamanlarda ortaya çıkar. Mısır'da da ilk belgeler insanların, yerlerin ve malların listeleri ve miktarlarını içeren idari belgelerdi. Bazıları, muhtemelen vergi hesaplanmasında kullanmak üzere Nil Nehri'nin su seviyesini kaydetmişti. Dolayısıyla orada da sayılar ilk kez vergi toplamak ve yılda iki kez yiyecek stokunu hesaplamak için kullanıldı.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	20	30
40	50	60	70	80	90
100	200	300	400	500	600
700	800	900	1000	2000	3000
4000	5000	6000	7000	8000	9000

Eski Mısır'da hiyeratik yazıyla sayılar

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi, 9'dan ve 99'dan sonra yeni sembollerin gelmesi ve benzerleriyle Mısır sayı

sistemi bizimkine az da olsa benziyordu. Tek fark sıfır (0) için bir sembole sahip olmamalarıydı: Sıfır epey sonra, Hindistan'da ortaya çıktı.

Mısırlıların, kesirler için de sembolleri vardı, sayının üzerindeki nokta kesri ifade ediyordu. Örneğin üzerinde nokta bulunan 2 sayısı $\frac{1}{2}$ 'dir. Günümüzde, okumayı kolaylaştırmak için sayının üzerinde kısa bir çizgi kullanıyoruz, örneğin $\bar{2}$.

Mısırlılara göre kesirler bir tamsayının tersiydi ($\frac{1}{2}$, 2'nin tersidir). Ancak $\frac{5}{7}$ gibi bir kesir 7 veya başka bir tamsayının tersi değildir. Bu tür kesirler, sadece idari kayıtlarda olsa da yine de kullanılıyordu. Bunun gibi karmaşık kesirlerle çalışabilmek için akıllıca bir çözüme ihtiyaçları vardı ve böylece bunları payda 1 olan kesirlerin toplamı olacak şekilde yazma fikrini buldular: Örneğin $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, ya da $\bar{24}$ olarak yazılabilir. Bu, $\frac{5}{7}$ için bile mümkündür; $\frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$ veya $\bar{2} \bar{7} \bar{14}$ şeklinde yazılabilir. Farklı bir kesir için kendiniz deneyin, ne kadar zor olduğunu göreceksiniz. Bu yüzden Mısırlılar en önemli kesirleri ezberlediler.

Bu kesirleri kayıtlarında, özellikle ekonomilerinin temel ürünleri ekmek ve bira stokları için epey kullandılar. Gerçek para henüz ortada yoktu. Mısır, ordusuna Yunanları almaya başladığı MÖ 390 yılına kadar madeni para kullanmadı: Yunan askerleri, ücretlerinin ekmek ve bira cinsinden ödenmesini doğrudan reddedip maaşlarının gümüş Yunan parasıyla ödenmesini talep etmişlerdi. Böylece Mısırlılar parayı kullanmaya başladılar ve paranın aslında bayağı kullanışlı olduğunu keşfettiler.

Yunanlar gelmeden önce Mısırlılar ekonomilerini binlerce yıl para kullanmadan ayakta tutmuşlardı. Piramitleri para olmadan inşa ettiler ama piramitlerin büyük köle gruplarına yaptırıldığı efsanesi gerçek dışıdır: Piramitlerin inşasında çalışanlar, düzenli ücret alan işçilerdi. Şaşırtıcı

olan, bu işçilere ödemelerin sadece ekmek ve bira olarak yapılmasıydı ve ödemeler bazen kesirlerle ifade edilen miktarlarda yapılıyordu. Bulunan bordrolarda, rahiplere bile ödemelerin bu şekilde yapıldığı görülür. Örneğin bir rahibe günde $\overline{2} \overline{3} \overline{10}$ ($2 \frac{23}{30}$; $\frac{1}{2}$... kuralının tek istisnası 3'tür, iki çizgi kullanılarak $\frac{2}{3}$ şeklinde yazılır) fıçı bira ödenmiştir. Böyle ödeme alanlar hepsini kendileri içmez, kalanı diğer ürünlerle takas ederlerdi.

Bu uygulama her şeyde geçerliydi. Yatağa ihtiyacınız varsa istediğiniz yatağın bedelini ödemek için başka eşyalar verirdiniz. Hatta önceki sahibine mal vererek bir ev bile alabilirdiniz. Ancak Mısır'daki takas sistemi Pirahā kabilesindeki gibi rasgele değildi çünkü Mısırlılar sayı sayabiliyordu. Mal fiyatları sabitti ve bir ev ya da öküz gibi daha büyük satın alımlar için bir kâtibe başvurulardı. Kâtip, sonradan tarafların yakınmamaları için değiş tokuşu açıklayan bir sözleşme düzenlerdi. Bu yüzden kâtiplerin ekmek ve bira ile çok işi vardı: Maaş bordroları ve sözleşmeler onlarla doluydu.

Ordunun da yemeğe ihtiyacı vardı, bu yüzden yeterli malzeme bulunduğundan emin olmak için bir kâtip çalışıyordu. Orta Krallık'taki metinlerden biri, bir meslektaşına hata yapacağı durumları anlatarak eğlenen bir kâtip hakkındadır. Kâtip, örneğin, uzun sürecek bir seferde 5.000 kişilik bir orduyu beslemek için ne kadar yiyeceğe ihtiyaç olacağını tahmin eder ve yanlarına 300 somun ekmek ve 1.800 keçi almaları gerektiği sonucuna varır.

Seferin ilk gününde ordu kamp yapacakları yere gelir ve kâtip, askerler için ayrılmış tüm kumanya ile orada beklemektedir. Kâtip, askerlere satın aldığı her şeyi gururla gösterir ve uzun bir gün boyunca ilerlemek için çokça enerji depolamak isteyen askerler hemen yemeye başlarlar. Bir saat sonra tüm yiyecekler tükenmiştir. Ardından kâtibe

bağırmaya başlarlar: “Yemekler bitti! Bu nasıl iş, seni aptal?” Kâtibin buna verecek yanıtı yoktur ve istifa etmek zorunda kalır.

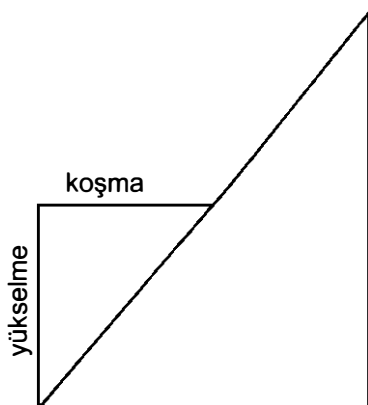
Kâtipler yöneticiler gibiydi. Benzersiz sayma becerisine sahip oldukları için ücretler, vergiler ve tayından sorumluydular. Ayrıca, Nil’in taşmasından önceki ve sonraki toprak alanlarının büyüklüğünü hesaplar, böylece çiftçiler kaybettikleri arazi için tazminat alabilirlerdi. Hatta deri tedarikiyle olabildiğince yakın gidebilmesi için bir çift ayakkabı yapmanın ne kadar sürdüğünü bile hesaplardı.

Matematiğin gündelik hayattaki tüm bu kullanımlarından daha etkileyicisi, Mısırlıların matematiği, piramitleri inşa etmek için kullanmalarıdır. Bir piramit inşa ederken, tepede bir noktayla bitirebilmek için hangi açıya ihtiyacınız olduğunu bilmeniz gerekir. İnşa etmeye en alttan başlamak zorunda olduğunuz için bu açıyı tahmin edemezsiniz. Ama hesaplayabilirsiniz ki Mısırlılar da tam olarak öyle yapmıştır.

Açıyı hesaplayabilmek için belirli ayrıntıları bilmeniz gerekiyor: piramidin uzunluğu, genişliği ve bittiğinde yüksekliğinin ne kadar olacağı. Dört yüzün tümü aynı açıda oluşturulmamışsa piramit bittiğinde tepede sivri bir nokta elde edemezsiniz. Bu, açıyı çok önemli hale getirir çünkü piramidin yüksekliğini ve görünümünü belirler. Ancak Mısırlıların açılara yaklaşımı bizimki gibi değildi. Dereceleri kullanmıyorlardı, farklı bir yöntemleri vardı.

Yukarı çıktıkça piramidin kenarının ne kadar kaydığına bakarak bir açıyı kolayca ölçebilirsiniz. Bu yükselme (dikey kayma) ve koşma (yatay kayma) olarak bilinir. Diğer sayfadaki şekilde bunun nasıl olduğu gösterilmektedir. Açı 90 dereceyse piramidin kenarları düz olarak yukarı çıkacak ve koşma mesafesi sıfır olacaktır. Açı ne kadar

küçük olursa koşma o kadar büyük olur. 45 derecelik bir açıda, yükselme ve koşma eşit olacaktır. Başka bir deyişle piramidin yanları hem yatay hem de dikey olarak eşit hareket edecektir.



Piramidin açısının ölçülmesi

Kısacası, Mısırlılar matematiği pek çok şey için kullandılar. Üzerine yazdıkları malzemelerin kısa ömürlü olması yüzünden haklarında çok fazla bilgi sahibi olmasak da Mısırlıların Mezopotamyalılarla aynı matematiksel yöntemleri kullandıklarını anlamamıza yetecek kadar papirüs bugüne kaldı. Matematikçiler önemliydi ve çoğunlukla kayıt tutucu olarak çalıştılar. Mısır, Nil'in taşmasını dikkate alan akıllı bir vergi sistemine sahipti ve malların toplu alım satımı için standart sözleşmeler vardı. Daha sonra, MÖ 300'lerde Mısırlılar Mezopotamya'dan uyarladıkları daha karmaşık bir matematiği benimsediler ancak o zamana kadar kullandıkları matematiği kendileri bulmuşlardı. Mısırlılar, "basitçe" karmaşık matematik kullanan halklara bir başka örnektir.

Teorik Yunanlar

Antik çağda matematik hakkında kimse Yunanlar kadar çok şey bilmiyordu. Bu yüzden başta Pisagor, Öklid ve Arşimet olmak üzere çok sayıda ünlü Yunan matematikçi var. Şaşırtıcısı, Yunanların matematiği nasıl kullandıkları hakkında o kadar fazla bilgiye sahip değiliz. Eski Yunanistan'dan hikâyeler ve metinler bugüne kalmıştır ama bunların hepsi teoriktir. Örneğin Öklid, “çizgi, genişliği olmayan bir uzunluktur” gibi tanımları ve ispatları içeren teorik geometri kitabı ile ünlüdür. Kitap, Platon'un çizgisini takip eder ve soyuttur; matematiğin gündelik hayatta nasıl kullanıldığını anlatmaz. Aynı şey diğer tüm teorik çalışmalar için de geçerlidir: Yunanların matematiği nasıl uyguladıkları, neden kullanmaya başladıkları ve tüm bu soyut teorileri yazılı hale getirmek için ne gibi nedenleri olduğu hakkında çok az fikir sunarlar.

Bu, Yunanların teorilerini uygulamaya dökmedikleri anlamına gelmez. Etkileyici bir örnek Samos Adası'ndaki Eupalinos Tüneli'dir. Bir kilometreden uzun ve iki metreden geniş olan tünel 1.200 yıl boyunca adanın merkezine saniyede beş litre tatlı su taşımıştır. Yunanların MÖ 550'de bu tüneli kazmaları bir başarıydı ama daha da etkileyici olan, tüneli kazmaya her iki uçtan aynı anda başlamış olmalarıydı. Bir şekilde tünelin iki yarısını ortada buluşturmayı başarmışlardı. Her iki taraftan da birkaç metre hata olsaydı bile iki kazma ekibi yeraltında birbirlerinin yanından geçerlerdi.

Nasıl yaptıklarını tam olarak bilmiyoruz çünkü anlaşıldığı kadarıyla Yunanlar –bunun gibi matematiksel uygulamaları çok ilginç bulan Romalıların aksine– bunun açıklanmaya değer olmadığını düşünüyorlardı. Yunanlar

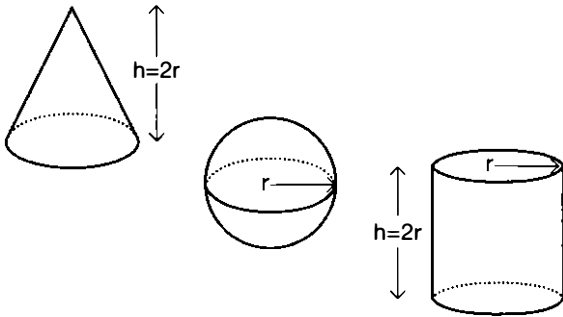
muhtemelen tekrarlanan ölçümler yapmak ve kazma yönünü ayarlamak için düz çizgiler ve dik açılı üçgenler kullandılar. Ortada, tünelin iki ucu birbirine çok yaklaştığında, birbirlerinin çekiçlerini duyabiliyorlardı ve son metreleri kazmak için sesi izliyorlardı. Sürekli ölçüm yapmayı ve yaratıcılığı birleştirerek, bir kilometre uzunluğundaki bir tüneli kazmayı başardılar. Ve o kadar iyi bir iş çıkardılar ki bu tüneli hâlâ ziyaret edebiliyoruz. Gerekirse muhtemelen bir sukmeri olarak bile kullanılabilir.

Yunanların teorik bilgilerini pratikte nasıl uyguladıklarını öğrenmek kolay değildir. Teori oluşturmadaki üstün başarılarına rağmen, bu teorilerin çoğu tahmine dayalıdır. Pisagor, adını alan teoremi tasarlamamış olabilir –Mezopotamyalılar bunu daha önce biliyorlardı– ama modern matematikçilerin teorileri için delil sundukları yolun aynı-sından giderek onu kanıtlayan ilk kişiydi. Söylediklerinin tamamen sağlam olduğunu gösteren düzgün ve mantıklı matematiksel akıl yürütme: Yunanların ünlü yanları budur. Öklid’in ispat kitabı, Pisagor’un da teoremi vardı. Arşimet, de çok sayıda teoremi kanıtladı ancak daha çok kendi başardıklarıyla biliniyordu. Bu yüzden Arşimet’in adı daha çok öne çıkmıştır.

Arşimet, banyo yaparken ünlü sıvı dinamiği prensibini keşfettiği iddia edilen fizikçiydi. Efsaneye göre o kadar heyecanlıydı ki koşup krala anlatmadan önce giyinmeyi bile unutmuştu. Ayrıca o kadar iyi bir savaş makineleri tasarımcısıydı ki Romalılar yıllarca Arşimet’in yaşadığı Siraküza şehrine saldırmaya cesaret edemediler. Arşimet tehdidi onları caydırmak için yeterliydi. Şehir sonunda ele geçirildiğinde, Roma askerleri onu esir almak için evine gittiler. Arşimet o sırada bir matematik problemini düşünmekle meşguldü ve askerlere “Dairelerimi rahatsız etmeyin!” dedi. Askerler, üstlerini kızdırmak pahasına onu

öldürdüler. Bütün bunların doğru olup olmadığını asla bilemeyiz. Yunan matematikçiler hakkında çok sayıda garip hikâye var. Örneğin Pisagor'un her sayının kesir olarak yazılamayacağına dair kendi ispatını gizli tutmak için bir öğrenciyi denize atıp boğulmasına neden olduğu iddia edilir.

Tüm bu hikâyeler bir yana, Arşimet'in parlak bir matematikçi olduğunu ve özellikle hacimler ve yüzeyler hakkında epey kafa yordüğünü biliyoruz. Mezarında, meşhur matematiksel keşfinin anısına bir küre ve bir silindirin resimleri vardır: Kürenin, silindirin ve koninin hacimlerinin birbirleriyle nasıl ilişkili olduğunu ilk gösteren oydu. Yunanlar için geometrik nesnelerin hacimlerini bulmak zorlu bir sorundu çünkü bunları hesaplayacak formülleri yoktu. Özellikle zor bir bulmaca, bir daire ile aynı yüzey alanına sahip bir kare bulmaktı. İmkânsız bir şeyin yapılması için "daireden kare yapmak" ifadesi hâlâ kullanılır.



Koninin, kürenin ve silindirin hacimleri

Arşimet, bir silindirin, aynı yarıçapa sahip bir küre veya koniden ne kadar daha büyük olduğunu gösterdi. Yukarıdaki çizimde üç şeklin de yarıçapı r ile gösterilmiştir. Koninin ve silindirin yüksekliği (h), yarıçapının iki katıdır ($2r$), dolayısıyla kürenin çapı ile aynıdır. Silindirin doğru

parçalarını keserseniz koni elde edersiniz ve benzer şekilde küre de silindire düzgün bir şekilde sığar. Hacimlerinin ilişkili olduğunu –doğru olarak– varsaymak için yeterince sebep var: Kürenin hacmi silindirinkinin üçte ikisi kadardır. Yani kürenin hacmini bulmak için silindirin hacminin üçte birini çıkarırsınız. Koni daha da küçüktür –silindirin üçte biri– bu nedenle koni yapabilmek için silindirin üçte ikisini çıkarmanız gerekir. Bu mantıkla kürenin koninin iki katı büyüklüğünde olduğu anlaşılmaktadır.

Peki tüm bunları bu üç çizimden nasıl bilebiliriz? Kürenin hacminin konininkinin iki katı olduğunu bir bakışta göremezsiniz. Bu yüzden Arşimet, bunu ispatlamış olmaktan o kadar gurur duyuyordu ki bu şekilleri mezar taşına çizdirdi. Günümüzde bir kürenin koninin iki katı büyüklükte olduğunu göstermek çok kolay; buna gelecek bölümde bakacağız.

Bunu pi (π) sayısı da dahil olmak üzere daha yeni matematiksel gelişmeler sayesinde biliyoruz. Pi, dairelerin alanı ve kürelerin hacmi dahil birçok şeyi hesaplamak için kullanılabilen çok özel bir sayıdır. Arşimet gibi yuvarlak nesnelerin hacmiyle ilgileniyorsanız bu sayı çok işinize yarar. Ancak Yunanlar pi sayısını bilmiyorlardı. Böyle bir sayının var olması gerektiğine karar vermişlerdi ancak kaç olduğunu tam olarak bilmiyorlardı. Burada en heyecan verici keşfi yapan yine Arşimet oldu. Doksan altı açılı bir şekil de dahil olmak üzere hâlâ tam olarak anlamadığımız bir hesaplama kullanarak, pi sayısının $3\frac{10}{71}$ ve $3\frac{1}{7}$ arasında, yani 3,1408 ve 3,1428 arasında bir yerde olması gerektiği sonucuna vardı: Bu hiç de kötü bir sonuç değildi çünkü daha sonra pi sayısı 3,1415... olarak hesaplandı.

Yunanlar bundan daha fazla ileri gidemediler. Teorileri çok zekiceydi ama birçok sınırlamaları vardı: Sadece tam sayıları ve sayılar arasındaki oranları kullandılar. Oranlar

aslında kesirlerdir: $\frac{2}{3}$, 2'nin 3'e oranıdır ama Yunanlar $\frac{2}{3}$ yerine daha karmaşık bir şekilde yazmışlardır. Ayrıca formülleri de yoktu. Arşimet'in hacimlerle ilgili olanları dahil tüm ispatları şekil ve çizimlere dayanıyordu. Neyse ki artık bu gibi problemleri çok daha basit bir şekilde çözebiliyoruz ve bunu çözme yolu olan matematiksel teoremleri bize gösterdikleri için Yunanlara teşekkür etmeliyiz. Pisagor, Öklid, Arşimet ve diğerleri matematiği kökten değiştirdiler.

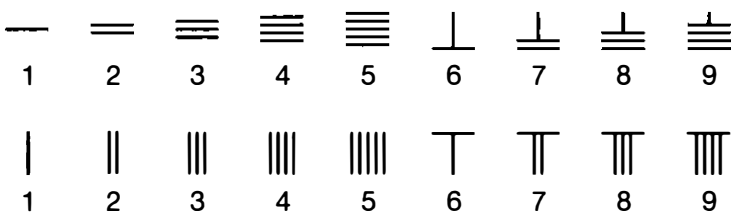
Çin'in inekleri

Şimdiye kadar gördüğümüz kadarıyla eski kültürler birbirine epey benziyor. Mezopotamya ve Mısır, sayıları diğerlerine göre daha erken kullanmaya başladı; o kadar erken ki muhtemelen yazıya dökülmesi gereken ilk şeyler sayılar oldu. Hem bu iki bölgede hem de Yunanistan'da matematikçiler yüksek bir statüye sahipti ve büyük ölçüde gündelik sorunlar üzerinde çalışıyor ancak genel yöntemler kullanıyorlardı.

Çin'de ise durum çok farklıydı ve fark kendini baştan gösterdi. Çin'de insanların yazmaya başlamalarının nedeni muhtemelen idari nedenler değildi zira uzun mal ve miktar listelerine rastlanmamıştır. Falcılık ise çok önemliydi ve ilk yazılı metinler falcıların kullandığı kemiklerin üzerindeki işaretlerden oluşuyordu. Çinliler matematiği belli bir noktada kullanmaya başlamış olsalar da matematik düşük statüde görüldüğünden Antik Çin'deki matematik hakkında fazla bilgimiz yok. Bildiğimiz şey, nispeten geç bir tarihte, MÖ 1000 civarında, takvimler ve idari amaçlar için hesaplamalar yaptıklarıdır.

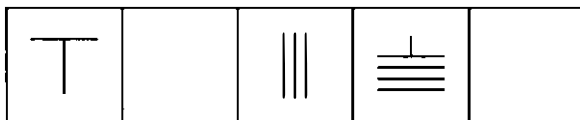
Bunu yapmak için iki sayı sistemi kullandılar. Normal konuşma dilinde yaygın olduğu üzere, sayılar için

kelimeleri vardı. Bu kelimeler biçim olarak çok basitti ve hâlâ öyledirler. 354 kelimesi, sayıların İngilizce veya Fransızcadaki yazılışlarına benzer şekilde, yazıldığı gibi “üç yüz, beş on, dört” olarak okunur ve 4’ün 50’den önce okunduğu Almanca veya Hollandacadan daha az karmaşıktır. Sayıları yazmanın ikinci yolu daha devrimciydi. Bunun için ilk başta bambu çubukları kullandılar ama daha sonra bu çubukların yerini çizgilerden oluşan semboller aldı. 1’den 9’a kadar olan sayılar için çubuklar özel bir şekilde yerleştiriliyor, daha yüksek sayılar içinse tıpkı sayılar yazılırken rakamların art arda yazılması gibi, bu sayılar tekrarlanıyordu.



Antik Çin’de 1’den 9’a kadar sayılar, yatay ve dikey olarak

Çubuklara dayalı sayı sistemi için iki tür sembol bile vardı. Resimde üst satırdaki semboller yatay, alt satırdakiler ise dikey yazılmıştır. Çinliler sıfırı ifade etmek için bu iki sembol türünü kullandılar. Mezopotamya ve Mısır’da, içinde sıfır olan ve olmayan sayıları (örneğin, 506 ve 56 arasındaki farkı) ayırt edemiyorlardı. 0 yazmanın hiçbir yolu yoktu ve dolayısıyla bir sayının içinde on olmadığını gösteremiyorlardı. Çinliler iki tür sembollerle tarihte bunu yapabilen ilk insanlardı. Resimde 60.390 sayısını nasıl yazdıklarını görebiliyoruz:



Antik Çin'de 60.390 sayısının yazımı

Sayıları yazarken her iki sembol kümesini birlikte kullanıyorlardı. Resimde, 3'ün dikey, 9'un ise yatay olarak yazıldığını görebilirsiniz. Bu, aralarında 0 olmadığı anlamına gelir. 6 ve 3 ise dikeydir ve bu, aralarında 0 olduğunu gösterir. Henüz bir sembolü olmadığı için 0'ı yazmıyorlardı. Yan yana duran iki dikey (veya yatay) sembol, aralarında 0 olduğu anlamına geliyordu. Ne yazık ki 0 için bir sembol olmadan sayılar arasında kaç tane 0 olduğunu gösteremiyorlardı (resimde, kutular bunu netleştiriyor). Yine de Çin sayma sistemi büyük bir atılımdı çünkü ilk kez herhangi bir sayı en fazla yirmi sembol kullanılarak yazılabiliyordu.

Akıllı sayma sistemlerinin yanı sıra, Çinlilerin hesaplama yapmak için de çeşitli yöntemleri vardı. Bizim hâlâ yaptığımız şekilde hızlı çarpma yapabiliyorlardı. 81×81 'i hesaplamak için önce sayıları çubuklarla yerleştiriyor, ardından adım adım üzerine ekleme yapıyorlardı: Önce 80×80 , sonra 80×1 , vb. Ayrıca daha zor problemleri çözmenin yollarını da bulmuşlardı ve bu çözümler *Matematiksel Sanat Üzerine Dokuz Bölüm* (Jiuzhang Suanshu) adlı bir matematik kitabında ve kitapla ilgili eklenen yorumlarda toplanmıştı. Kitaptaki bölümlerin başlıkları, Çinlilerin MS 0 yılı civarında neler yapabildiğine dair iyi bir fikir veriyor:

1. Dikdörtgen alanlar (çeşitli şekillerin alanları ve kesirler)
2. Darı ve pirinç: farklı fiyatlarla mal alışverişi
3. Orantılı dağıtım: malların ve paranın sabit oranlarda dağıtımı
4. Küçük enler: dikdörtgenlerin kenarları, dairenin çevresi, kare ve küp köklerin bulunması
5. Eserlerle ilgili istişareler: farklı şekillerin hacimleri
6. Adil vergilendirme: orantılı vergilendirme konusunda daha zor kelime problemleri, örneğin insan sayısı ile bağlantısı
7. Fazla ve açık: doğrusal denklemler, örneğin daha fazla saat çalıştığınızda geliriniz nasıl artar
8. Dikdörtgen dizi: doğrusal denklemlerin kombinasyonları, tarımsal verim ve hayvan satışları ile bağlantıları
9. Taban ve yükseklik: Pisagor teoremi olarak bildiğimiz uygulamalar

Çinliler için matematik soyutlamayla ilgili değildi. Bu kitabın tamamında tek bir tanım veya ispat yoktur. Temel kaygıları, çok sayıda somut örnek vererek gündelik sorunları çözmektir. Mümkün olan en genel uygulanabilir yöntemleri bulmak istiyorlardı ve bu yöntemler işe yaradığı sürece temel matematiksel ilkelerini kurcalamak, araştırmak önemli değildi.

Dolayısıyla matematiğin her şeyden önce yararlı olması amaçlanmıştı. Matematik öğrenenler vergilendirme, mimari, savaş gibi birçok konu üzerinde çalıştı. Matematikçilere en üst seviye efendilerin hemen altındaki yöneticiler olarak sosyal statü veren Mezopotamya ve Mısır'ın aksine, Çin'de durum çok farklıydı. Orada matematikçiler sorunları çözmek için zanaatkârlarla çalışıyorlardı. Daha çok toplumun

“inekleri” olarak görülüyorlardı. Çin matematiği zirvedeyken bile matematikçiler edebiyat eğitimi almış insanlar tarafından küçümsendiklerinden şikâyet ediyorlardı. Çinli bir imparator asla matematik bilgisiyle övünmezdi.

Yine de matematikçiler Çin’de çok önemli bir rol oynadılar. Dönemin en meşhur kitabı, MS 1247’de yazılmış olan *Shushu Jiuzhang* veya *Dokuz Bölümde Matematiksel İnceleme*, iki bölümünü Moğolistan ile savaş nedeniyle çok ihtiyaç duyulan istihkâm çalışmalarına ve düşman kampına olan mesafeyi hesaplamaya ayırmıştı. Kitap, kredi sistemleri veya dalgakıranların nasıl inşa edileceğine dair kurallar gibi çok sayıda pratik bilginin yanı sıra, çok karmaşık yollarla çözülen “gereksiz” problemleri de içeriyordu. Problemlerden birinin çözümü o kadar karmaşıktı ki bu 13. yüzyıl Çin kitabı, Avrupa’da 1890’a kadar keşfedilmemiş şeyler içeriyordu!

Kısacası, Çin’de de matematik, özellikle organizasyon ve yönetimde pratik bir rol oynadı. Ancak bu rolü, diğer antik kültürlerden farklı olarak, soyut ispatlar yerine genel problem çözme yöntemleri, tanımlar ve temel ilkeler yerine somut örneklerle yerine getirdi. Yöntemleri farklı ama matematiği kullanma nedenleri aynıydı. Öyleyse önceki bölümün sonunda sorduğum soruya dönmenin vakti geldi: Neden matematiği kullanmaya başladık?

Yanıt aslında çok basit: Matematik, şehirleri ve diğer büyük toplumları düzenlememizi sağlıyor. Vergiler, sayı veya matematik kullanılmadan da toplanabilir ancak pratikte bu neredeyse imkânsızdır. İnsanların büyük gruplar halinde yaşadığı ve ticaret yaptığı her yerde matematik, bir noktada gelişecektir. Şehirleri planlamak, binaları tasarlamak, gıda rezervlerinin kayıtlarını tutmak, silah üretmek: Tüm bunları yapmak için matematiğe ihtiyacımız var. Bunları yalnızca doğuştan gelen becerilerimize güve-

nerek yapabiliriz ama daha iyi, daha verimli ve daha doğru yapmak için matematiğe ihtiyacımız var.

Bu yanıtla farklı yollardan bakabiliriz. Farklı kültürlerin sayıları yazmak için kendi sistemleri vardı. Bu sistemler bazen Mısır'ın $\frac{1}{2}$ yazma yöntemi gibi çok basittir, bazen de Mısırlıların $\frac{5}{7}$ 'si gibi aşırı karmaşıktır. Yine de Yunanların soyutlamalarından Çinlilerin örneklerle dayanmasına kadar tüm bu farklı yaklaşımlar aynı sonucu verdi. Örneğin Mısırlılar ekmeği uygun bir şekilde bölüp ücret olarak ve statü farklılıklarını yansıtacak bir şekilde dağıtabiliyorlardı. Bir tapınağın başındaki rahibe en alt seviyedeki işçiden tam otuz kat fazla ödeme yapılıyordu. Bu tür bir sistemi sayılarla organize etmek, sayılar olmadan yapmaktan çok daha kolaydır.

Bu fikre 1. Bölüm'de zaten bakmıştık. Orada da matematiğin problemleri basitleştirdiğini ve pratik çözümler sunduğunu gördük. Matematiği kullanmaya tam da bu yüzden başladık. Şehirlerin ve ülkelerin idari sorunları, yalnızca doğuştan gelen yeteneklerimizi kullanarak çözülemeyecek kadar zordu. Bu yüzden bu sorunları çözmeye yardımcı olması için matematiği geliştirdik. Matematik kullanmayan kültürlerin küçük olmasının mantıklı bir nedeni var: İnsanları köylerde yaşıyor ve birbirlerini tanıyor. Şehir devletleri ve krallıklar, matematik olmadan yönetilemeyecek kadar karmaşıktır.

Yine de geliştirdikleri daha karmaşık matematiğin, tüm bu ekstra işlemlerin aslında çok da yararlı olmadığını görüyoruz. Sadece birinin matematikte ne kadar iyi ya da kötü olduğunu göstermeye yarıyordu. Öyleyse daha karmaşık matematik herhangi bir işe yaramış mıdır? Basit sayılardan ve ölçümlerden daha ileri gitmeye gerek var mı? Ve günlük hayatımızda bunlardan herhangi birine ihtiyaç duyuyor muyuz? Bunlar, ilerleyen bölümlerde ele alacağımız sorular.

5. BÖLÜM

Değişmeyen Değişim

İsveç'te, bir otoyolda arabamı sürüyorum. Henüz bilmeyenler için söyleyeyim, İsveç otoyolları inanılmaz derecede sıkıcı: iki yanına ağaçlar dizili, yüzlerce kilometre dümdüz yol. Neyse ki İsveçli sürücüler yasalara çok uyuyorlar ve hepsi arabalarını aynı hızda sürüyorlar; bu yüzden seyir kontrolünü çalıştırabilir, arkama yaslanıp rahatlayabilirim. Bu sırada arabadaki bilgisayar arabanın ne hızla gittiğini, sürmek istediğim hızdan ne kadar sapıldığını ve hızlanması mı yoksa yavaşlaması mı gerektiğini hesaplıyor. Hatta bazı lüks arabalar, şeridinizin ortasında gidip gitmediğinizi de kontrol edebiliyor. Bu arabaların bilgisayarları, araba ile şeridin her iki tarafındaki çizgiler arasındaki mesafeye ve arabayı sürdüğünüz yöne bakıyor. Herhangi bir tarafa doğru fazla hareket ederseniz bilgisayar yönünüzü ayarlıyor.

Tüm bunlar çok akıllıca geliyor ama peki, ne kadar zor? Bunların hepsini herhangi bir hesaplama yapmadan kendimiz de yapabiliriz. Belirli bir hızda sürmem gerekirse sadece hız göstergesine bakıyorum ve gaz pedalını doğru hıza gelene kadar ayarlıyorum. Ayrıca sürücülerin trafiğin akışına uyması gerekiyor, saatte 120 kilometre hızda sabit

kalmamalılar. Şeridin ortasında kalmaya gelince, bunu herkes yapabilir, değil mi?

Evet, yapabilir. Bir bilgisayar bile. Ancak bir bilgisayar, direksiyonun nasıl tepki verdiğini hissedemez veya bizim yapabildiğimiz gibi trafiğin nasıl olduğunu göremez. Bilgisayarlar her şeyi matematiksel olarak çözmek zorundadır ve bu da epey büyük bir başarıdır. Bir arabanın hızı veya yan şeritten ne kadar uzakta olduğu gibi değişen süreçler için hesaplamalar yapmamızı sağlayacak yöntemler tasarlamak hiç de kolay değildi. Yine de bunu yapacak matematiği bulduk. Hız sabitleyiciyi açtığınızda arabanızın kullandığı şey budur ve sürücüsüz arabalar bunu daha da fazla kullanır. Matematik olmasaydı bu uygulamalara sahip olamazdık.

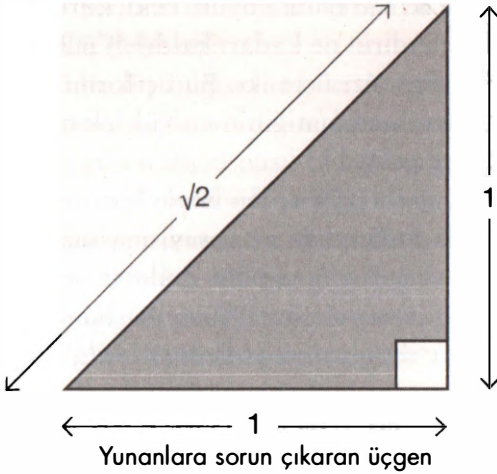
Bugün otomobillerimizde seyir kontrolüne sahip olmamızı sağlayan matematiksel buluşların sorumlusu Isaac Newton'dur. En azından İngilizlere göre böyle. Aynı dönemde Almanya'da yaşayan bilim insanı Gottfried Wilhelm Leibniz de tamamıyla aynı fikri ortaya atmıştı. Bu fikrin tam olarak ne olduğunu ve o dönemde bile herkesin onu ne kadar önemli bulduğunu açıklamak için Antik Yunanlara, Arşimet'e ve silindirler, küreler ve koniler hakkında keşfettiği şeylere geri dönmeliyiz.

Arşimet hacimlerle ilgili bir şeyi kanıtlamak istemişti. Bir kürenin hacminin nasıl hesaplandığını hatırlarsınız. Ortaokuldan hepimizin aklına kazınan standart bir formül var: Kürenin hacmi $\frac{4}{3} \pi r^3$ 'tür. Bu, iki formüle daha ihtiyacımız olduğu anlamına gelir. Silindirin hacmi, dairenin alanı çarpı silindirin yüksekliğidir, yani $\pi r^2 \times 2r$ veya $2 \pi r^3$. Son olarak, koninin hacmi $\frac{1}{3} \pi r^3$ 'tür. Bu formüllere nasıl ulaştığımızın hiç önemi yok; πr^3 'ü anlamınıza bile gerek yok. Demek istediğim, formüllere sahip olduğunuzda, Arşimet'in problemini hemen çözebiliyor olmanız. Küre, koniden ne kadar büyük? $\frac{4}{3}$ 'ü $\frac{2}{3}$ 'e böldüğünüzde

bilirsiniz: Küre iki kat daha büyük. Peki, küre haline getirdikten sonra silindirin ne kadarı kaldı? $\frac{4}{3}$ 'ü 2'ye böldüğünüzde cevabı alırsınız: üçte iki. Bu üç formülü öğrendikten sonra Yunan matematiğinin en yüksek noktası çocuk oyuncacı haline gelir.

Öyleyse Yunanlar için neden böyle bir sorun vardı? Birincisi, şu anda kullandığımız π sayısına sahip değillerdi. Daha da önemlisi, bu formülleri bulmak için sonsuzluk kavramına ihtiyacınız var ama Yunanlar bunu reddediyordu. Tamsayıları ve kesirleri kullanıyorlardı; bunlar sonlu miktarlardı ve sonsuzlukla hiçbir ilgileri yoktu. Bu önemli çünkü her sayıyı kesir veya tamsayı olarak yazamazsınız: Örneğin π sayısı kesir olarak ifade edilemez. Günümüzde kesirleri ondalık virgülden sonraki sayılarla gösterebiliriz ancak π için şöyle bir sorun var: Bu sayılar sonsuza kadar gidiyor. 3,1415'le başlayıp devam ediyorlar.

Yunanlar, tüm sayıları tamsayı veya kesir olarak yazmanın mümkün olmadığını çok iyi biliyorlardı. Önceki bölümde gördüğümüz gibi, Pisagor'un $\sqrt{2}$ için bunun mümkün olmadığını göstermesi yüzünden bir öğrenciyi tekmeden denize attığı söylenir. Ancak Yunanlar bu bilmeceye bugün sahip olduğumuzdan tamamen farklı bir yanıt buldular: Her şeyin aynı şekilde ölçülemeyeceğine karar verdiler. Bir şey $\sqrt{2}$ santimetre uzunluğundaysa onu santimetre cinsinden ölçmemeli, aynı uzunluğun bir tamsayı veya kesir olarak ifade edilebileceği farklı bir ölçü birimi seçmelisiniz. Örneğin, bir sonraki sayfada yer alan çizimdeki üçgende, uzun kenarın $\sqrt{2}$ santimetre olduğu durumda (Pisagor teoremine göre bu uzunluk $1^2 + 1^2$ 'nin kareköküdür), Yunanlar üç kenarı da aynı şekilde ölçmeyeceğinizi söylediler. Farklı kenarlar için farklı birimler kullanır (örneğin, $\sqrt{2}$ uzunluğunda bir ölçüm çubuğu) ve sorunu bu şekilde çözersiniz.



Yunanların bir kürenin hacminin $\frac{4}{3} \pi r^3$ olduğunu bulamamalarına şaşmamalı. Bu formül, hesaplama yapmak için kullanamayacağınız bir sayı olan π 'ye dayanmaktadır. Bunu gerçek anlamda yapan ilk kişi Flaman matematikçi Simon Stevin'di (1548-1620). Stevin'in çalışması, Hindistan ve Ortadoğu'dan gelen ve Avrupalılar tarafından benimsenen fikirlere dayanıyordu. Bu fikirlerin en önemli katkısı, kesirleri ondalık virgülden sonra sayı olarak yazmak oldu: Örneğin $\frac{1}{3}$, 0,2 oldu. Stevin, 16. yüzyılın sonlarında meydana gelen değişiklikleri tek bir genel tanımda özetledi: "Sayı, her şeyin miktarının ortaya çıktığı şeydir." Her şeyin tek bir ölçüm yöntemiyle hesaplanabileceği görüşüne tamamen katılıyordu ve π ve $\sqrt{2}$ gibi sayıları oldukları gibi kabul etmemiz gerektiğini söylüyordu.

Bu büyük bir adımdı çünkü sonsuzluğu kabul ediyordu: Örneğin π sayısını asla tam olarak yazamazsınız. $\frac{1}{3}$ gibi sayıları kesir olarak yazmak mümkündür ama ondalık olarak sonsuz sayıda üç ile 0,3333... olarak yazmanız

gerekir. $\frac{1}{3}$ ve π arasındaki tek fark, $\frac{1}{3}$ 'te ondalık virgülden sonraki sayıların tekrarlanması ve bu nedenle tahmin edilebilir olmasıdır. Bir sonraki sayının her zaman 3 olacağından eminsiniz, oysa π 'de bu sayının ne olacağını bilmiyorsunuz.

Yine de π 'den bahsettiğimizde kimse bunu tuhaf bulmaz. Bunun gibi sayılara o kadar alıştık ki tuhaf özelliklerini sadece onlar hakkında biraz derin düşündüğümüzde fark ediyoruz. 0,999... sayısını ele alalım. Garip görünse de bu sayının aslında 1'e eşit olduğunu göstermek kolaydır. Bildiğimiz gibi, 0,333... sonsuz sayıda 3 olduğu sürece $\frac{1}{3}$ ile aynıdır (umarım hepsini yazmadığım için beni affedersiniz). İkisini de 3 ile çarparsanız 1 elde edersiniz. $0,333... \times 3, 0,999...$ 'a eşittir, dolayısıyla 0,999... 1'e eşit olmalıdır.

Sonsuzluk bir süre sonra başınızı döndürür ama o olmadan arabanızdaki hız sabitleyici çalışmaz. Ondalık virgülden sonra sonsuz sayıda basamağı olan π gibi sayılar olmadan, arabanızın ivmesi gibi sürekli değişen şeylerden bahsetmeniz mümkün olmaz. Hesaplamaları yapmak için yeteri kadar sayı yoktur. Bir araba saatte 100 km'den 101 km'ye tek adımda çıkmaz, arada 100 $\frac{1}{2}$ ve 100,8415... 'ten (ondalık virgülden sonra sonsuz sayıda basamak) geçer. Sayılar olmadan tüm bu hızlar kilometre/saat olarak ölçülemezler. Tıpkı $\sqrt{2}$ sayısı olmadan bir üçgenin tüm kenarlarını santimetre olarak ölçemeyeceğiniz gibi.

Leibniz'e karşı Newton

Arşimet hacimler hakkında kafa yorarken elinde bizim şu anda sahip olduğumuz kadar sayı yoktu. Her şeyi ölçmek için aynı birimleri kullanamadığı için matematik çok işine

yaramıyordu. Matematikçiler, hacimleri ve sürekli değişen şeyleri ancak tamsayılardan ve kesirlerden daha fazlası olduğunu kabul ettiklerinde hesaplayabildiler.

Bunu ilk yapanlar Newton ve Leibniz'di. 1660 ile 1690 yılları arasında, birbirlerinden tamamen bağımsız olarak yeni bir matematik alanı tasarladılar. Her ikisi de diğerinin tam olarak aynı fikre sahip olduğuna inanmadı. İcat ettikleri kalkülüs, zamanla matematiğin –hem iyi hem kötü şöhretli– bir parçası haline geldi. Bu yeni yöntem, bir şeyin ne hızla ve zaman içinde ne kadar değiştiğini ölçmelerini sağladı. Kalkülüsün bu iki bileşeni sırasıyla türev ve integral olarak bilinir.

Çığır açan teorilere sahip iki matematikçi ama teorileri birbirinin aynısı. Hangisi daha önce buldu? Tarih kitaplarında kimin adı yazmalı? Bu, özellikle Newton'un İngiliz, Leibniz'in Alman olduğu düşünülürse büyük bir tartışma konusuydu. İki ülke o dönemde pek iyi ilişkiler içinde olmadığından, çarpıcı keşifleri ulusal bir gurur meselesine dönüştü.

Her şey, 1684 yılında Leibniz'in değişimi hesaplamak için keşfettiği yöntemi yayımlamasıyla başladı. Bu yöntem matematikçileri çok heyecanlandırdı ve Leibniz, yeni teorisini daha ayrıntılı çalışmak için etrafına küçük bir grup insan topladı. 1693 yılına gelindiğinde, daha geniş bir halk kitlesi için kalkülüsü açıklayan ilk kitabı yayımlanmıştı bile. Newton ise neredeyse hiçbir şey yayımlamamıştı. Yakınları onun yeni bir matematiksel yöntem keşfettiğini biliyordu ama kimse bu yöntemin tam olarak nasıl işlediğini bilmiyordu. Yöntemini, kullanan tek kişi kendisi olmak için olabildiğince gizli tuttu.

Haliyle Leibniz aniden aynı matematiksel yöntemin keşfini, adından hiçbir şekilde bahsetmeden açıkladığında Newton'ın sinirlenmesi şaşırtıcı değildir. Newton,

Leibniz'e birkaç yıl önce, 1676'da yeni yöntemini açıklayan bir mektup göndermişti; ama mektup şifreliydi. Bu o zamanlar alışılmış bir uygulamaydı ancak mektupların şifresini çözmek her zaman kolay değildi. Galileo, şifreli bir mektupta Kepler'e Jüpiter'in yörüngesinde iki uydu gördüğünü söylemişti ama Kepler Galileo'nun Mars'ın iki uydusu olduğunu söylediğini zannetmişti.

Newton mektubunu kasten çözülemez olarak göndermişti. Mektubu Leibniz'e yönteminin nasıl çalıştığını açıklamak için göndermemişti: Amacı daha sonra Alman bilim insanının "kendi" teorisini çaldığını söyleyebilmektir. Newton'un iddiası buydu; daha doğrusu öğrencilerine böyle söyledi. Leibniz'in matematiksel teorisini yayımladığını görünce, kendi takipçilerine Alman'ı küçük düşürmelerini emretti.

Ardından bilim tarihindeki en tatsız tartışmalardan biri ortaya çıktı. Bu tür kavgalara alışkın çağdaşları bile afalladı. Newton ve Leibniz'in takipçileri uzun yıllar boyunca diğer tarafla alay eden broşürler dağıttılar. Leibniz kendini savunan bir kitap yazdı ve dönemin en ünlü bilim kurumu olan Kraliyet Cemiyeti'nden yardım istedi. Cemiyet, iki bilim insanından hangisinin teoriyi ilk önce ortaya çıkardığını belirlemek için bağımsız bir araştırma başlattı.

Maalesef soruşturma hiç de bağımsız değildi. Newton o sırada Kraliyet Cemiyeti'nin başkanıydı ve soruşturmayı yürütmek için kurulan resmi komitenin bağımsız çalışacağını söylese de komite gerçekte hiçbir şey yapmadı. Newton raporu gizlice kendisi yazdı ve elbette yeni yöntemi kendisinin icat ettiği ve Leibniz'in yenilgiyi kabul etmeyi reddeden aşağılık bir hırsız olduğu sonucuna vardı. Newton'ın kendini savunmak için ne kadar ileri gittiğinin ortaya çıkması ancak 133 yıl sonra oldu.

Rapor elbette hiçbir şeyi çözmedi. Leibniz, Kraliyet Cemiyeti'nin raporuna "isimsiz" bir yanıt vererek itibarını

savunmakta ısrar etti. Karşılıklı hakaretler Newton'un 1716'daki ölümünden çok sonrasına kadar devam etti. Peki, kim haklıydı? Günümüzde Newton'ın gerçekten de teoriyi ilk bulan olduğunu, türev ve integrali 1665 yılında keşfettiğini biliyoruz. O zamanlar Leibniz, matematik hakkında henüz hiçbir şey bilmeyen yirmi yaşında bir gençti. Yine de Leibniz Newton'un fikirlerini çalmamıştı. Şanssızlığı, birkaç yıl sonra aynı teoriyi ortaya atmasıydı.

Daha küçük adımlar

Yeni matematik teorisinin son derece önemli olacağı hemen anlaşıldı; bu nedenle öyle bir kavga çıkmıştı. Peki, Newton ve Leibniz tam olarak ne tasarlamışlardı? Buldukları, bir şeyin ne hızla ve ne kadar değiştiğini hesaplayan bir yoluydu. O zamandan önce, yalnızca aynı kalan bir şeyi saymak veya ölçmek mümkündü. Newton ve Leibniz, sonsuzluğu ve "yeni" sayıları kullanarak matematikte devrim yarattılar.

Değişimin hızının hesaplanması pek çok durumda işe yarar. Arabanızdaki hız sabitleyici sürekli olarak arabanın ne kadar hızlanması veya yavaşlaması gerektiğini, kendi kendine giden bir otomobil direksiyonu nasıl ayarlayacağını, lüks kahve makineniz suyun espresso için tam olarak doğru sıcaklıkta olması için ısıtıcısının kaç derecede olması gerektiğini hesaplamak zorundadır. Değişim hızı hesabı, bir tümörün ne kadar hızlı büyüdüğünü görmek için hastanelerde bile kullanılır.

Tüm bunları yapmak için aynı tekniği kullanıyoruz. Her şey değişimi ölçmekle ilgili. Ne tür bir değişim olduğu önemli değil, hepsinin matematiği aynı. Bunu basit bir örnekle açıklayabiliriz. Bir polis memuru olduğunuzu ve araçlarını fazla hızlı süren insanları yakalamak zorunda

olduğunuzu düşünün. Bunun için hangi hızda araç sürdüklerini veya ne kadar hızlı konum değiştirdiklerini hesaplamanız gerekir. Başlangıç olarak bunu, matematiği ve modern teknikleri en az seviyede kullanarak yaparsınız.

En basit yol, bir meslektaşınızın yolun belirli bir mesafe, mesela bir kilometre, ötesinde beklemesini sağlamaktır. İkinci de arabanın ne zaman geçtiğini not edersiniz ve daha sonra zamanları karşılaştırırsınız. Amaç, aracın sizi geçerken –yani kilometrenin başında– ne hızla gittiğini bulmaktır, tüm mesafe boyunca ortalama hızını değil. Ancak başlangıçtaki hızını öğrenmek için tüm kilometreyi geçmesinin ne kadar sürdüğünü bilmeniz gerekir. Tüm kilometrenin tamamlanması yarım dakika sürüyorsa sizi geçerken 120 km/s hızla gitmiş olması gerektiğini varsayabilirsiniz.

Belki de öyle değil? Belki sürücü başlangıçta 140 km/s hızla gidiyordu ve hız sınırı 120 olduğu için sizi gördüğünde fren yaptı. Sonra kilometrenin geri kalanını daha yavaş sürdü ve sadece 100 km/s’de tamamladı. Siz ve meslektaşınız, başlangıçta çok daha hızlı sürse bile ortalama 120 km/s hız bulmuş olursunuz.

Sürücülerin bunu yapmasını engellemek için mesafeyi kısaltabilirsiniz. 120 km/s’de yarım kilometre yol almak on beş saniye sürer, haliyle aracını fazla hızlı süren birinin hızını ayarlamak için çok kısa bir süresi kalır. Mesafe ne kadar kısa olursa başlangıçta ölçülen hız o kadar doğru olur. Pratikte arabalar bir milisaniye içinde hızlarını önemli ölçüde değiştiremedikleri için belirli bir noktada hiçbir fark yaratmaz. Ne kadar hızlı gittiğinizi gösteren tabelalar bu yüzden işe yararlar. Bu tür bir hesaplamayı yaklaşık bir metrelik çok kısa bir mesafede yaparlar.

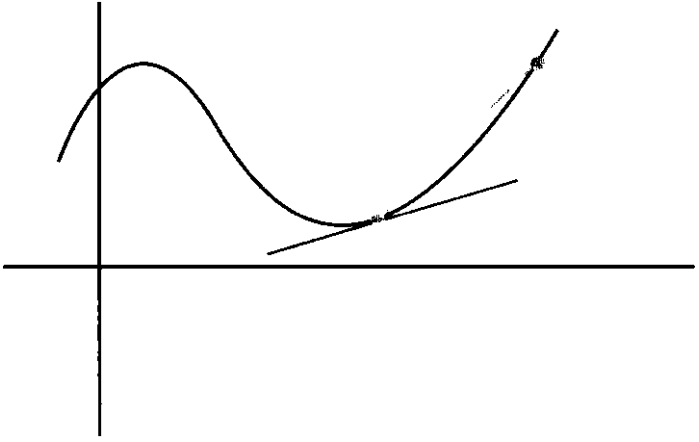
Bunun yeterli olmadığını hayal edin. Bir arabanın, gördüğünüz anda tam olarak ne kadar hızlı gittiğini bilmek istiyorsunuz. O zaman birkaç metredeki ortalama hızı

ölçerken yaptığınız küçük hata bile çok büyük olacaktır. Ölçümünüzü daha doğru hale getirmek için mesafeyi daha da küçültmelisiniz. Ve işte burada sonsuzluk devreye girer: Ölçtüğünüz mesafeyi sonsuz küçüklükte yapabilirsiniz hesaplamanız sonsuz doğrulukta olacak ve hızı tam olarak bileceksiniz.

Newton ve Leibniz bu fikri ilk ortaya atanlardı. Bir noktanın grafik üzerindeki bir çizgi boyunca ne kadar hızlı yukarı ve aşağı hareket ettiği üzerinde düşünmüşlerdi. Çizgi ne kadar dikse nokta o kadar hızlı yukarı veya aşağı gidiyordu.

Yandaki grafikteki eğriye bakın. İki düz çizgiyi bir anlığına görmezden gelin. Sağa doğru hareket ettikçe alttaki noktanın ne hızla yükseldiğini bilmek istiyorsunuz. Bunun için önce eğrinin altındaki noktanın yüksekliğini ölçer, sonra biraz daha sağa geldiğinde yüksekliği tekrar ölçersiniz. Daha sonra bu iki noktayı bir çizgi ile birleştirir ve iki yükseklik arasındaki farkı karşılaştırırsınız. Bu, noktanın eğrinin altından daha sağdaki konumuna ne kadar hızlı hareket ettiğini gösterir. Sorun, bu ölçümün doğru olmamasıdır. Nokta, çizginin başlangıcında çok fazla yukarı doğru hareket etmemiştir, örneğimizdeki arabaymışçasına ilerledikçe hızını artırmıştır.

Newton ve Leibniz, iki nokta arasındaki farkı azaltmak için ikinci noktayı gittikçe daha sola kaydırarak bu sorunu çözdü. Bu örnekte, daha kısa mesafe çizgiyi daha az dik hale getirdi ve hatayı azalttı. Yapmak istedikleri, iki nokta arasındaki mesafeyi sonsuz küçüklüğe getirmektir. Böylece çizgi grafikteki alttaki çizgi gibi görünecektir ve bu çizgi de tam olarak eğrinin o noktadaki eğimini gösterir. Ancak bunu yapmak için hesaplamanızı sonsuz küçüklükte bir şeyle yapmalısınız.



Eğrinin en düşük noktasında ne kadar hızla yukarı çıktığının nasıl hesaplanacağını gösteren grafik

Bu, Newton ve Leibniz için de zorlayıcı bir sorundu. Dahası, bu durumu açıkça anlaşılabilir bir şekilde ifade etmenin bir yolunun bulunması yüzlerce yıl aldı. Sonuçta sonsuz küçük, sıfır ile aynı değil midir? Sıfır saniyelik bir sürede hızı nasıl ölçebilirsiniz? O durumda araba hiç hareket etmiyor olmayacak mı? Aynısı çizgiler için de geçerlidir. İlk iki nokta arasına elbette bir çizgi çekebilirsiniz ama ya iki nokta arasındaki mesafe sonsuz küçüklükteyse? O zaman aralarına çizgi çekemezsiniz, değil mi?

Böyle şeyleri kafada canlandırmak zor. Bu yüzden matematikçilerin ne yaptıklarını anlamaları bu kadar uzun sürdü. Yine de hesaplamalarını yapıyorlardı çünkü hesaplar düzgün işliyordu ama nasıl, kimse bilmiyordu. Nedeni, tıpkı $0,9999\dots$ ve 1 arasındaki fark gibi, sonsuz küçük ile sıfır arasındaki farkın tahayyül edilmesinin kolay olmamasıydı.

Sonunda, birkaç matematikçi “sonsuzluğu” tamamen ortadan kaldırma fikrini ortaya attı. Bu çok zordu ve

aslında bahsedilen şey olabildiğince küçük bir şeydi. Her zaman daha küçük bir mesafe kullanabiliyorsanız doğru yoldasınız demektir. Sonuçta, bir hata yaptığınızı fark etmeniz bile yine de daha doğru bir ölçüm yapabilirsiniz. Bütün bunlar size hâlâ çok teorik geliyorsa endişelenmeyin, ayrıntılar o kadar önemli değil. Anlamanız gereken tek şey, ölçüm birimlerinizi ne kadar küçük hale getirirseniz bir arabanın hızını o kadar doğru ölçebileceğinizdir.

Antik Yunanlar bunu neden yapamadı? İki nedenden dolayı. Birincisi, yeterli sayıları yoktu. π gibi bir sayıyı elde edebilmiş olsalar bile kullanmayı reddettiler. Bu durumda hesaplamalar işe yaramaz çünkü mümkün olan her hızı ölçebilmeniz gerekir. İkinci olarak, sonsuzluk fikrinin çılgınca olduğunu düşündüler. Sonsuz küçüklükte bir mesafeyi nasıl ölçebilirsiniz ki? Kimse yapamaz. Sonsuzlukla sorunları vardı ve belki bizim de hâlâ var. Sonuçta, bu şekilde hesapladığımız türevin nasıl işlediğini anlamak şimdilerde bile zor.

Adımları saymak

Ne yazık ki integrali anlamak da kolay değil. Türev hızla, bir şeyin ne kadar çabuk değiştiğiyle ilgilidir. İntegral ise miktarla, bir şeyin ne kadar değiştiğiyle ilgilidir. Bu, mümkün olduğunca değişiklikleri kümülatif olarak saymak anlamına gelir. Bir süre büyüdükten sonra tümörün ne boyuta ulaştığını bilmek istiyorsanız integrale ihtiyacınız var. Bir şeyin, herhangi bir şeyin ne kadar değiştiğini öğrenmek istediğimizde integrali kullanırız. Kullandığınız toplam elektrik miktarı, Donald Trump'ın yeniden seçilme ihtimali, bir destek kirisinin ne kadar bükülebileceği veya bir kaza sonrası arabanızdaki hasar. Araba üreticilerinin bir çarpışmada hayatta kalmamızı

sağlama şekli dahil, farkında olmasak da her yerde integralle karşılaşırız.

Peki, bu nasıl oluyor? Yine küçük adımlarla ama bu sefer çok sayıda küçük adımı izlemek ve sonra hepsini toplamak istiyoruz. Bir araba fabrikasında matematikçi olarak çalıştığınızı ve arabaları olabildiğince güvenli hale getirmek zorunda olduğunuzu hayal edin. Bunu her türlü şeyi deneyerek, örneğin arabaları parçalayıp neler olduğunu görerek yapabilirsiniz. Fakat matematiği kullanarak bunu çok daha ucuza yapabilirsiniz.

Bir araba bir yere çarptığında en büyük tehlikede olan, yolcuların kafalarıdır. Kafa ne kadar ileri geri hareket ederse çarpışma o kadar tehlikeli demektir. Yani hız çok önemlidir ve bunu ölçmek için türev kullanabilirsiniz. Çarpışmanın her anında kafanın ne kadar hızlı hareket ettiğine bakabilirsiniz. Kafa ilk önce öne doğru gider, bir hava yastığına çarpar ve böylece ileri momentumu kırılır. Sonra geriye, baş desteğine doğru seker ve sonra tekrar öne gider.

Yani, araba fabrikasındaki bir matematikçi olarak ilk önce kafanın farklı anlarda ne hızla hareket ettiğini hesaplamalısınız. Ama yine de çarpışmanın ne kadar tehlikeli olduğunu bilmiyorsanız, sadece kafanın hızını biliyorsunuz. İşte bu yüzden integrale de ihtiyacınız var. Yüksek hızda hareket eden bir kafa elbette tehlikelidir ama kafanın uzun süre ileri geri hareket etmesi daha da tehlikelidir. Bir düşünün; etrafınızda bir kez dönmek o kadar da kötü değildir ama bunu art arda yirmi kez hızlıca yaptığınızda başınız döner.

Bu, çarpışma sırasında kafanın toplamda ne kadar hızlı hareket ettiğini incelemek için iyi bir neden. Eğer tembel-seniz tek bir hız, örneğin en yüksek hızı, seçer ve bunu çarpışmanın süresiyle çarparsınız. Ancak bu basit hesap,

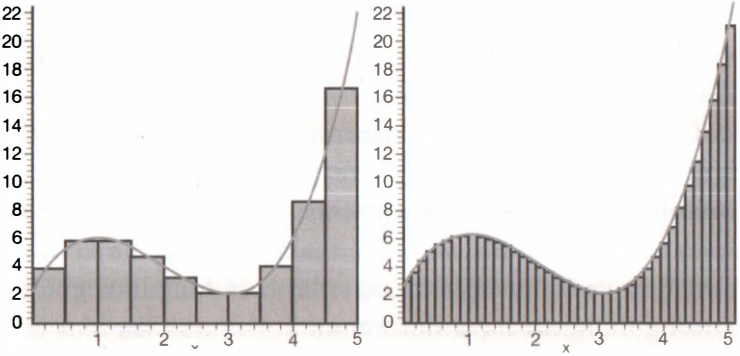
kafanın gerçekte olduğundan çok daha fazla hareket ettiğini gösterecek ve arabaların gerçekte olduğundan daha az güvenli görünmesine yol açacaktır.

Bu, daha önce ele aldığımız hız kontrolleri örneğinde kiyle tamamen aynı sorundur ve çözüm de aynıdır: Çok daha küçük adımlardan oluşan bir diziyle çalışırsanız hesaplamanız daha doğru olacaktır. Aslında yapmak istediğiniz şey, sonsuz küçüklükteki tüm bu adımları toplamaktır ve bu size kafanın ileri geri ne kadar hareket ettiğini ve dolayısıyla kazanın ne kadar tehlikeli olduğunu tam olarak söyleyecektir. Araba üreticileri, arabalarının ne kadar güvenli olduğunu tahmin etmek için hâlâ bu hesaplamayı kullanıyorlar. Elbette arabaları da test ediyorlar ama matematiksel bir hesaplama tüm bunları daha basit ve daha öngörülebilir hale getiriyor. Ne kadar güvenli olduklarını öğrenmek için o kadar çok arabayı enkaza çevirmeleri gerekmiyor ve güvenlik derecelendirmelerini daha hızlı elde ediyorlar. Böylece araştırmacılar, örneğin yolcuların hangi güvenlik seviyesinde beyin sarsıntısı yaşayabileceğini belirleyebilir. İntegral bu yolla güvenliğinizi korur.

Türevin alanlar ve hacimlerle de ilgisi yok muydu? Belki liseden hatırlarsınız: Türev, Arşimet'in küreler, koniler ve silindirler hakkındaki teoreminin formülleriyle ilişkilidir. Bu da aynı mantığa dayanır ancak değişim o kadar net değildir; değişimi tasavvur etmeniz gerekir. Yan sayfadaki grafikler, bir araya getirdiğiniz bir dizi adımı kullanarak bir alanın nasıl hesaplanacağını gösteriyor. Adımlar ne kadar küçükse eğrinin altındaki boşluğa o kadar iyi yerleşirler.

Ancak bu grafiklerde değişimi görmek zordur. Onları düz bir şekilde yerde serili olarak hayal etmek daha kolay olabilir. Eğrinin alt kısmındaki zeminin alanını öğrenmek istiyorsunuz. Alan dikdörtgen şeklinde olsaydı

hesaplamak çok kolay olurdu çünkü o zaman tek yapmanız gereken, uzunluğu genişlikle çarpmaktır. Ama eğrinin altındaki alanı küçük dikdörtgenlere bölerseniz bu kolay çözümü kullanabilirsiniz. Her dikdörtgenin alanını hesaplar ve sonra hepsini toplarsınız. Dikdörtgenler ne kadar küçükse hesaplama o kadar doğru olacaktır.



Eğrinin altındaki alanın kabaca hesaplanması;
dikdörtgen küçüldükçe hesap daha doğru olacaktır

Aynı mantıkla hacmi de hesaplayabilirsiniz. Bu biraz daha zordur çünkü hem dikey hem de yatay çalışmanız gerekir ama prensip aynıdır. Bazen tek yapmanız gereken, bu bölümün başında bahsettiğim standart formülleri kullanmaktır. Ancak elinizde daha somut bir problem olabilir: Bir alanı hesaplayarak bir kazanın ne kadar tehlikeli olduğunu da hesaplayabilirsiniz. Eğrinin altındaki dikdörtgenler başın hareketini ifade eder. Eğri, kafanın ne kadar hızlı hareket ettiğini gösterir ve ne kadar yüksekteyse kafa o kadar hızlı hareket etmektedir. Dikdörtgenlerin toplamı, kafanın toplamda ne kadar ileri geri hareket ettiğini gösterir. Mantık aynıdır; sadece farklı bir şekilde tanımlanmıştır.

Hiçbir şey havadan daha fazla değişmez

Nihayet, yarın için hava tahmini iyi. Ancak tahminin doğru olduğunu ne zaman varsayabilirsiniz? Hava durumu raporları o kadar sık yanlış çıkar ki bu tahminlere şüpheyle yaklaşmamız gerekir. En azından, büyük bilgisayarlar sayesinde meteorologlar hava durumunu tahmin etmek için kalkülüsü kullanana kadar böyleydi. O zamandan bu yana tahminler, örneğin 1970'lerdekilere kıyasla şaşırtıcı derecede doğru.

O zamana kadar hava durumu üç basit adım kullanılarak tahmin ediliyordu. Önce pencereden dışarı bakıp bulutları ve sıcaklığı incelerdiniz, sonra kayıtlarınızda hava durumunun benzer olduğu eski bir günün kayıtlarını arardınız ve üçüncü olarak, kayıtlarda bulduğunuz günün ertesi günündeki hava durumunu kullanarak mevcut gününüzün ertesinde havanın nasıl olacağını tahmin ederdiniz. Başka bir deyişle havanın önceki durumla tamamen aynı olacağını, önünüzdeki birkaç günün eskiden yaşandığının aynısı olacağını varsayardınız. Yalnızca bulutlara ve sıcaklığa bakarsanız bu tahminin neredeyse hiç doğru çıkmayacağı kesindir. Geçmişteki tahminler çoğunlukla yanlıştı çünkü hava azıcık daha karmaşıktır.

Elbette, hava durumunu “hesaplamak” da mümkün. Havanın hava akımları nedeniyle değişebilirliği, kalkülüs için mükemmel bir uygulamadır. Örneğin Birinci Dünya Savaşı'nda İngiliz matematikçi Lewis Richardson, hava durumunu tahmin etmek için matematik kullanmayı denedi. İşe sonraki altı saatteki hava durumunu tahmin etmeye çalışarak başladı. Dışarıya bakacak, hızlı bir hesap yapacak ve altı saat sonra havanın nasıl olacağını bulacaktı. Ancak Richardson “hızlı hesaplama” konusunda yanılmıştı: Hesabı altı hafta sürdü!

Dolayısıyla hava durumunu hesaplayarak tahmin etmek çok zordu. Hem çok uzun sürüyordu hem de çoğu zaman yanlış çıkıyordu. Bunun nedeni, havayla birlikte pek çok şeyin de değişmesidir. Hava sürekli hareket eder ve sıcaklık, nem gibi şeyler sürekli olarak değişir. Yüksek ve alçak basınç alanlarının nerede olduğunu ve nasıl hareket ettiklerini bilmeniz, üstelik bunu atmosferin çok geniş bir bölümü için yapmanız gerekir. Küçük değişiklikler bile büyük farklar yaratabilir.

Tüm bu değişiklikler yüzünden hava durumunu hâlâ tam olarak tahmin edemiyoruz. Devasa bir süper bilgisayar bile o kadar hızlı hesap yapamaz. Bu yüzden her şeyi tam olarak bilmeye çalışmaktan vazgeçtik ve elimizdekine razı olduk: Bir süper bilgisayar, yaklaşık on kilometreka-relik bir alanda havanın aynı olduğunu varsayar çünkü daha küçük alanlar daha fazla hesaplama yükü yaratır. Dolayısıyla bu yöntemi kullanmaya başladığımızdan bu yana hava tahminleri çok daha tutarlı hale gelmiş olsa da hâlâ yüzde yüz güvenilir değildir.

Peki, hava tahmini yapanlar yarın havanın güzel olacağını söylerlerse inanmalı mıyız? Elbette. Meteorologlar hava durumunu kesin olarak tahmin edemeseler bile iyi tahminler yapabiliyorlar. Bilgisayarlar, havanın ne kadar hızlı hareket ettiğini görmek için türevi ve havanın belirli bir süre boyunca ne kadar değiştiğini görmek için integrali kullanarak havanın tüm bu kare alanlar arasında nasıl değiştiğini hesaplar. Dolayısıyla matematik sayesinde hava tahminlerimiz önemli ölçüde iyileşmiştir. O kadar ki ertesi gün için tahminler neredeyse her zaman doğru çıkar. Önümüzdeki hafta için tahminler bile yüzde 80 doğrudur. Yani integral ve türev epey işimize yarar.

Binalarda, politika planlamada ve fizikte türev ve integral

Sürekli değişen tek şey hava durumu değildir. Siz fark etmeseniz de binalar da rüzgâr ve içinde dolaşan insanların ağırlığı gibi şeylerden sürekli olarak etkilenir. Yerçekimi binaları yere doğru çeker ama binalar yine de ayakta dururlar çünkü sağlam yapılar inşa etme konusunda oldukça iyi hale geldik. Ve matematiği kullanmaya başlamamızın buna da biraz faydası dokundu.



San Francisco'daki Golden Gate Köprüsü

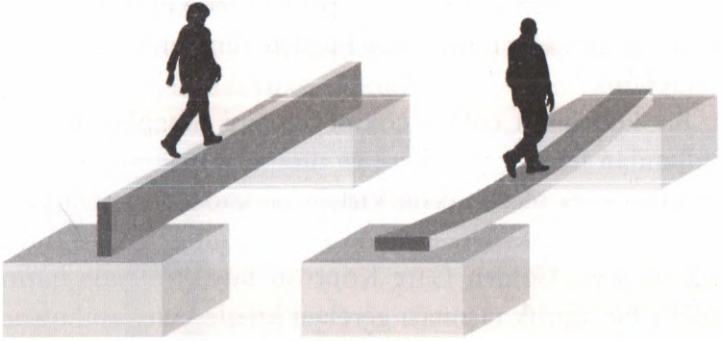
Binalar uzun süre boyunca tecrübeye dayanılarak tasarlandı. İnsanlar farklı denemelere girmeden bildiklerini inşa ettiler. Yeni şeyler denemeye kalktıklarında ise çok dikkatli oldular, önce işe yarayıp yaramadıklarını görmek için beklediler. İnşaat, 1900 yılı civarına kadar bir sanattı, daha sonra bir bilim olmaya başladı. Örneğin,

San Francisco'daki Golden Gate Köprüsü'nü ele alalım. 1930'larda inşa edildiğinde, yaklaşık üç kilometre ile dünyanın açık ara en uzun köprüsüydü ve köprüyü toplam 129.000 kilometre uzunluğundaki kablolar taşıyordu. Golden Gate Köprüsü'yle ilgili her şey, daha önce yapılmış olan her şeyden daha büyüktü. Böyle bir şeyi nasıl inşa edersiniz? Bu büyüklükte bir köprünün çökmeyeceğini nasıl bilirsiniz? Rüzgâr köprüyü sarsmayacak mı? Ya da ortası çok ağır olmayacak mı? İşte tüm bunlar önceden hesaplanır.

Bir köprünün çöküp çökmeyeceğini hesaplamak için kullanılan fizik, integrallere ve türevlere bağlıdır. İntegral ve türev esas olarak çelik kirişin ne kadar bükülebileceğini hesaplamak için kullanılır. Fotoğrafta da görebileceğiniz gibi, Golden Gate Köprüsü büyük ölçüde hatırı sayılır bir ağırlık taşıması gereken kirişlerden yapılmıştır. Bu ağırlık kirişlerin bükülmesine neden olur ve ne kadar büküleceklerini hesaplamak mümkündür. Kirişlerin şekillerinin nasıl değiştiğini belirlemek için türev, toplamda ne kadar büküldüklerini bulmak için de integral kullanılır. Hesaplama, kirişin nasıl konumlandığı da dahil olmak üzere çok sayıda faktör dikkate alınır. Bu, sonraki sayfadaki çizimde açıklanmaktadır: Düz duran bir kiriş, yan duran kirişten çok daha fazla bükülür.

Matematik, tahminde bulunma işini ortadan kaldırır. İnşaatçıların çelik kirişlerle ilgili deneyimleri vardı ancak hiç kimsenin Golden Gate kadar büyük veya tamamen çelikten devasa bir köprü inşa etme deneyimi yoktu. İşe başlayabilir ve büyük ölçekte inşa ettiğinizde her şeyin aynı kalacağını umabilirsiniz ama bu size çok pahalıya mal olabilir. İşin sonunda bir şeylerin ters gittiğini bir düşünün. Vergi mükellefleri, çökmeye devam eden köprülerle yapılan bir dizi başarısız deneyin maliyetini üstlenmek

istememez. Neyse ki tüm hesaplamaları önceden yapmak bizi bu deneylerden kurtarır. Matematik, giderek daha büyük ve karmaşık binalar inşa etmeyi mümkün kılmıştır. Bir binanın ayakta kalıp kalmayacağını önceden bilebildiğimiz için artık Pekin'deki CCTV Kulesi gibi daha önce kimsenin görmediği binaları yaratabiliyoruz.



Bir kirişin nasıl konumlandırıldığına bağlı olarak
şekil değiştirmesi

Değişim başka birçok alanda da bulunabilir. Paranın bir yerden diğerine aktığı ekonomiyi düşünün. İşlerin, açık pozisyonların ve onları doldurmak isteyen insanların sayısı sürekli olarak değişiyor. Bazen hükümetler değişikliklere neden olacak planlar yaparlar ve bu planların potansiyel etkisinin önceden hesaplanması gerekir. Farklı vergi oranlarının veya daha geniş anlamda Brexit'in veya ABD ile Çin arasındaki ticaret savaşının etkisi ne olacak? Hükümetler, ekonomik araştırma enstitülerinden planlarını analiz etmelerini ve bu planların etkilerinin ne olabileceğini hesaplamalarını isterler. Araştırma enstitüleri hesaplamalarını yapmak için büyük matematiksel modeller kullanırlar. Planlar uygulanırsa ekonomiye tam olarak ne

olacağını söyleyen bir dizi formüle sahiptirler. Ve bu formüllerde neler var? Bildiniz: integral ve türev.



Pekin'deki CCTV Kulesi

Vergi değişiklikleri, hükümetin bireylerden ve şirketlerden ne kadar para tahsil ettiğini ve dolayısıyla harcayabileceği para miktarını etkiler. Ve bu da ekonomiyi etkileyecek. Hükümetler, birtakım sorunları iyileştirme umuduyla değişiklikler yaparlar ve araştırma enstitüleri bu değişikliklerin etkilerinin ne olacağını tahmin etmelerine yardımcı olur. Bunları matematiksel olarak hesaplarsanız tahminleriniz biraz daha kesin hale gelecektir. Dahası, bir şeyi gözden kaçırma şansınız daha azdır. Siz bir şeyi unutabilirsiniz ama formül unutmaz.

Araştırma enstitülerinin hesaplamaları hakkında, belki seçimler öncesi hariç, pek bir şey duymayız. Ancak integraller ve türevler her yeredir, hatta evinizin içine kadar girmiştir. Arabanızda, kahve makinenizde veya merkezi ısıtmanızın termostatında... Ve tatile

çıkışınızda uçağınızdaki otomatik pilotta. Tüm bu makineler, lise öğrencilerinin bu kadar çok şikâyet ettiği matematiğe bağlıdır.

Tüm bu makinelerin ortak noktası, değişimi düzenlemek zorunda olmalarıdır. Termostatınız, evinizi doğru sıcaklıkta tutmak için hesaplamalar yapar. Eviniz sabah 16 derece ise ve 18 derece olmasını istiyorsanız termostat ısıtmanın ne kadar yüksek ve ne kadar süreyle olması gerektiğini hesaplar. Mevcut ve seçilen sıcaklık arasındaki farkın ne hızla ortadan kalkacağını, başka bir deyişle evin ne kadar hızlı ısınacağını takip etmek için türev kullanır. Evin gereğinden fazla ısınmasını önlemek içinse termostat türev ve integral kullanarak hesaplamalar yapar.

Arabanızdaki hız sabitleyici ve bindiğiniz uçaktaki otomatik pilot da benzer hesaplamalar yapmalıdır. Arabanızda ayağınızı gaz pedalında tutmalısınız, aksi takdirde yavaşlayacaktır. Seyir kontrolü, hızı sabit bir seviyede tutmak için arabanın ne kadar hızlanması gerektiğini hesaplamak üzere türev ve integral kullanır. Otomatik pilot da aynı şeyi yapar ve bu aynı zamanda SpaceX roketlerinin etkileyici inişlerinin arkasındaki fikirdir. Her yerde hesaplanması gereken değişimler vardır ve bunu integral ve türev olmadan yapmak neredeyse imkânsızdır.

İntegral ve türev fizikte de çok önemlidir. Dünyada her şey sürekli olarak değişir, bu yüzden dünyayı incelemek için değişimi anlamanın bir yoluna ihtiyacınız vardır. Kalkülüsün yaptığı tam da budur. Newton bunu yerçekimi teorisinde kullandı. O zamanlar her şey daha yeniydi, bu yüzden kalkülüsü hesaplama yapmak için fazla kullanmamıştı ancak önceki bölümde gördüğümüz gibi, formülasyonları şaşırtıcı derecede basit ve doğrudur. Hatta o kadar basit ve doğrudur ki 20. yüzyılın ünlü fizikçilerinden

Richard Feynman'a göre Newton teorisini bundan daha iyi yazamazdı.

Herkes için integral?

İntegral ve türev son derece kullanışlıdır. Ancak anlaşıl-maları, önceki bölümde tartışılan aritmetik ve geometriye göre biraz daha zordur. Peki, integral ve türeve günlük yaşamınızda hiç ihtiyacınız olacak mı? Bu, neredeyse tüm lise öğrencilerinin kendilerine sorduğu bir şeydir. Yanıtı, ne yaptığınıza bağlıdır çünkü bu bölümde de gösterdiğim gibi, integral ve türev her yerde karşımıza çıkar. Bina ta-sarlıyorsanız büyük ihtimalle kullanacaksınız. Eğer bir doğa bilimcisiyseniz muhtemelen bir noktada integraller ve türevlerle çalışacaksınız. Araba tasarlıyorsanız veya çarpışma testleri gerçekleştirirseniz de öyle. Yine de integral ve türevle asla karşılaşmayacağınız pek çok meslek var.

Yani, kendinizi günlük yaşamınızda integraller veya türevlerle çalışmak zorunda bulma olasılığınız çok düşük-tür. Hepimiz, matematik kullanmak zorunda kalmadan hayatımızdaki değişikliklerle başa çıkabiliriz. Bu açıdan, matematiği kullanmanız gereken bir meslek seçmezseniz integral ve türev hakkında bilgi sahibi olmanıza gerek kalmaz. Üstelik matematiğin gerekli olduğu bir işte çalışsanız bile muhtemelen hesaplamaları kendiniz yapmak zorunda kalmayacaksınız. Her geçen gün hesaplama işini bilgisayara bırakmak daha kolay hale geliyor.

Öyleyse başka nedenlerle matematik hakkında bilgi sa-hibi olmak önemli mi? Hükümetin, size ödemeniz gereken vergileri bildirdiğini ve bu hesaplamaları anlamak istedi-ğinizi bir düşünün. Vergi ihbarnamenizde bir hata var-sa bilmek istersiniz. Ancak vergi ihbarnamenizi kontrol

etmek için matematik hakkında bilgi sahibi olmanıza gerek yoktur. Hükümet, sizi etkileyen kararlar almak için matematik kullanır ve sizin bu matematik bilgisine ancak alınan bu kararları ayrıntılı olarak –hükümet planlarının matematiksel analizleri gibi– anlamak istiyorsanız ihtiyacınız vardır. Ancak genellikle vergilerinizin hesaplanmasında kullanılan rakamların aksine, bu hesaplamaların sonuçları sizi doğrudan etkilemeyecektir.

Yine de bu, size lisede öğretilenlerden yüksek sesle şikâyet etmeniz gerektiği anlamına gelmez. İntegralin ve türevin arkasındaki fikri anlamak zor olabilir ama görüldüğü kadar çılgınca değildir. Matematiksel semboller sizi işin ana fikrinden, yani değişimi mümkün olan en küçük parçalara bölerek çalışmaktan kolayca uzaklaştırabilir. Etrafınızdaki şeylerin nasıl çalıştığını bilmek istiyorsanız en azından bu fikri anlamak çok önemlidir.

İntegral ve türev dünyayı değiştirdi. Bilgisayarları, akıllı telefonları, uçakları ve diğer birçok modern makineyi mümkün kıldılar ve dünyayı daha iyi anlamamız için vazgeçilmezler. İntegral ve türev sayesinde modern teknolojileri kullanabiliyoruz; onlar olmasaydı yaptıklarımızı sadece geçmiş deneyimlerimiz üzerine oluşturuyor olurduk. Onlarsız büyük ve farklı tipte binalar inşa etmek çok daha zor hale gelirdi ve modern teknoloji mümkün olmazdı. Kısacası, integral ve türev olmasaydı çok farklı bir dünyada yaşıyor olurduk.

Bu yüzden kesinlikle işe yaramaz değiller. İntegral ve türeve sandığımızdan daha fazla yerde rastlıyoruz. Sadece onları fark etmiyoruz ve hesaplamalarını yapmıyoruz çünkü artık bu hesaplamaların bizim için yapıldığı bir noktaya ulaştık. Öyleyse herkesin integrallerle çalışması gerekiyor mu? Hayır. Ama nasıl hepimiz tarih öğreniyorsak integral ve türevin arkasındaki fikri de anlamamız

gerektiğine inanıyorum. İntegral ve türev maalesef genellikle insanları korkutacak şekilde sunulsa da etrafımızdaki dünyayı anlamamız için önemli bir zemin sağlar. Korkmanıza gerek yok: Kalkülüsün arkasındaki fikir ve bu fikrin değeri, son derece kolay anlaşılır.

6. BÖLÜM

Belirsizliği Kavramak

2016 sonbaharı. Dünyanın gözleri Amerikan başkanlık seçimlerinde ve her zamanki gibi sonuçlar için sabırsızlanıyor. Kimin kazanma şansının daha yüksek olduğunu önceden bilmek istiyoruz: Hillary Clinton mı Donald Trump mı?

O zamandan beri seçim tahminlerinin adı kötüye çıktı. Anketlerin ardındaki uzmanlar Clinton'ın kazanma şansının yüzde 70 ile yüzde 99 arasında olduğunu iddia ettiler. *Yüzde 99!* Sonra ne olduğunu hepimiz biliyoruz: Trump herkesi şaşırtarak seçimi kazandı. Anketler hedefin çok uzağındaydı ya da en azından öyle görünüyordu. Her halükârda Clinton'ın zaferinden emin olan uzmanlar yanlışlardı. Peki, bu kadar çok insan nasıl bu kadar yanlış olmuş olabilir? Bu önemli bir soru çünkü bunun gibi hatalar sıklıkla meydana geliyor. Mesela Britanya'da Brexit referandumu için yapılan anketlerde AB'de kalma lehinde bir çoğunluk öngörülüyordu. ABD seçim tahminlerindeki kadar olmasa da AB'de kalmak isteyenlerin önde olduğu kesin gibiydi. Ancak orada da anketler ve tahminler yanlış: Küçük bir farkla da olsa referandumda AB'den çıkmak isteyenler galip çıktı.

Peki, anketlerin bize ne faydası var? Bu kadar kolay yanlışlanabiliyorlarsa istatistiklere güvenebilir miyiz? Evet,

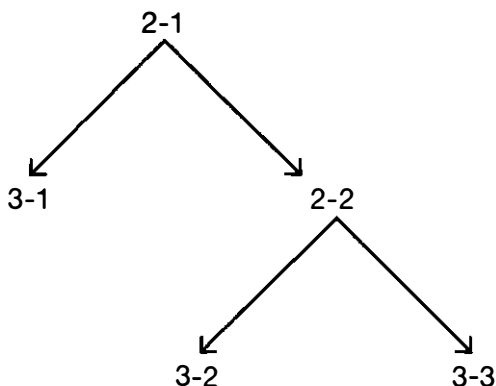
güvenebiliriz ama körü körüne değil. Çoğu zaman yanıldıkları için nasıl çalıştıklarını bilmek önemli. Sonuçta, anketler de bir yerden gelen hesaplamalardır. Üstelik anketleri yapmaya başlayalı çok uzun süre olmadı; insanların önemli kararlar için oy kullandığı antik Atina'da anket yoktu. O zamanlar sonuçları tahmin edecek matematiğe sahip değillerdi; bu teknikleri geliştiriyor olsalar da Newton ve Leibniz'in zamanında da öyle. Anketler, 17. yüzyılın ortalarına kadar başlamadı.

Matematik oyunları

1654 yılında amatör matematikçiler Blaise Pascal ve Pierre de Fermat zorlu bir tartışmaya dahil oldular. Chevalier de Méré adlı bir Fransız asilzade, Pascal'dan bir problemi çözmesini istemişti. De Méré kumar oynamayı seviyordu ama bazen oyunların kesin bir kazanan olmadan kesintiye uğramaları gerekiyordu. Örneğin, kral aniden ziyarete gelirse de Méré oyununa devam edemezdi. Bu yüzden, bir oyun kesintiye uğrarsa ortadaki paranın nasıl paylaştırılması gerektiğini bilmek istiyordu. Pascal'a sordu ama o da bilmiyordu ve Pascal, Fermat'yla mektuplaşmaya başladı. Bir oyunu ya da bahsi kazanma şansını nasıl hesaplayacaklarını bulmaya çalışıyorlardı. Günümüzde istatistik olarak bildiğimiz disiplin böyle doğdu.

Üç tur kazanmanız gereken ancak ikiye bir önde olduğunuzda durmak zorunda kaldığınız bir oyun oynadığınızı hayal edin. Rakibiniz size ne kadar ödemeli? Kazanmanız gereken üç turdan ikisini zaten kazandığınız için ödül parasının üçte ikisi mantıklı görünüyor. Ama aslında daha fazlasını almalısınız çünkü tüm parayı kazanma olasılığınızı dikkate almak gerekiyor. Pascal ve Fermat bu olasılığın aslında dörtte üç olduğunu buldular, bu yüzden

paranın dörtte üçünün ödenmesi gerekiyor. Bu sonucu nasıl elde ettikleri aşağıdaki resimde gösterilmiştir.



Kesintiye uğrayan oyunun olası sonuçları

Bir sonraki turu kazanırsanız skor 3-1 olur ve kazanırsınız. Ancak rakibiniz kazanırsa skor 2-2 olur ve birinizin 3-2 kazanması için başka bir tur oynamak zorunda kalırsınız. Bu, olası üç sonuçtan ikisinde kazandığınız anlamına gelir. Ancak bu, hesaplama için bir sorun teşkil ediyor: Zira her sonuç için aynı sayıda tur oynamıyorsunuz. 3-1 puanla başka bir tur daha oynarsanız sonuç 3-2 veya 4-1 olacaktır, yani olası dört senaryodan üçünde kazanabileceğinizi görürsünüz. İşte bu yüzden Pascal ve Fermat dörtte üç sonucunu buldu.

Bu ne kadar yararlı? Çözülmesi gereken çok önemli bir sorun gibi görünmüyor. Bu durum ara sıra ortaya çıkabilirdi ama oyunlarına daha sonra kolayca devam edebilirlerdi. Bu, matematikte en yaygın olarak uygulanan disiplinlerden biri için şaşırtıcı derecede yararsız bir başlangıç noktası. Oldukça dikkat çekici bir şekilde matematikçiler bu tip hesaplamaları gittikçe karmaşılaşan oyunlar ve diğer durumlar için hemen yapmaya başladı.

Belki de o kadar da yararsız değildi: Fermat ve Pascal'ın zamanında insanlar ticaret hakkında giderek daha fazla spekülasyon yapıyorlardı. Örneğin yatırımcılar, bir geminin mallarla dolu bir ambarla güvenli bir şekilde geri döneceği konusunda kumar oynuyorlardı. Bazen başka bir şey için paraya ihtiyaçları olduğu zaman fikirlerini değiştirirlerdi. Matematikçilerin Fermat ve Pascal'ın istediğiniz parayı “oyunun” bitiminden önce geri alma yönteminin daha basit bir versiyonunu tasarlamış olmaları mümkündür.

Nedeni ne olursa olsun böyle oyunlar üzerinde çalışmanın hemen pratik bir sonucu olmadı. Bir tur kazanma olasılığınızı önceden bilmeniz gerekiyordu. Örnekte, her iki oyuncunun da her turda aynı kazanma şansına sahip olduğu varsayıldı. Ancak çoğu oyunda durum böyle değildir. Rakibinizden daha iyi olabilirsiniz ve bu size daha fazla kazanma şansı verir. Aslında hesaplamaya çalıştığınız şey, her şeyi tam olarak önceden bilerseniz ne olacağıdır.

ABD seçimlerini ele alalım. Fermat ve Pascal'ın hesaplamasını yalnızca, ülkedeki her kayıtlı seçmenin Trump veya Clinton'dan hangisine oy vereceği ihtimalini biliyorsanız kullanabilirsiniz. Ancak bu mümkün değildir; Amerika'daki herkesin düşüncelerini okuyamazsınız. Üstelik bunu yapabilseydiniz cevabı zaten biliyor olacağınız için tahmin yapmanıza gerek kalmazdı. Bir anlamda seçimleri zaten yapmış olurdunuz.

Bir şeyin gerçekleşme olasılığını hesaplamak, yalnızca sonucu zaten bilmiyorsanız yararlıdır. Böylece işe, bir seçim anketinde seçmenlerin verdiği yanıtlar gibi bildiğiniz şeylerle başlarsınız. Ankete yalnızca küçük bir grup insan katılabilir ve yanıtları doğru bir şekilde doldurup doldurmayacaklarını bilemezsiniz ancak sahip olduğunuz şeyle yetinmek zorundasınızdır. Veya bir taşın rengi gibi daha basit bir şeyle başlayabilirsiniz. Pascal ve Fermat'dan elli

yıldan fazla bir süre sonra, 1713 tarihli *Ars Conjectandi* adlı kitabında Jacob Bernoulli bunu yapmıştır. Birinin olasılıkların daha pratik kullanım için incelenmesi gerektiğini fark etmesi o kadar uzun sürmüştür.

Bernoulli, tüm olası sonuçları önceden bilmeden bir şeyin olma olasılığını hesaplamaya çalışan ilk kişiydi. 5.000 adet siyah ve beyaz taş içeren büyük bir çanağınız olduğunu hayal edin. Taşlardan kaçının siyah, kaçının beyaz olduğunu bilmek istiyorsunuz: Çanaktan beş tane taş çıkarır ve taşların ikisinin siyah ve üçünün beyaz olduğunu görürsünüz. Bu, çanakta 2.000 siyah ve 3.000 beyaz taş olduğu anlamına gelebilir ama belki çanakta sadece üç beyaz taş vardır ve siz bu taşları seçmiş de olabilirsiniz. Bu çok daha az olasıdır ancak mümkündür.

Böylece çanaktan daha fazla taş almaya devam edersiniz. Ve her seferinde taşlardan ikisinin siyah ve üçünün beyaz olduğunu görürsünüz. Mantıksal olarak, tıpkı daha önce gerçekleştiğini çok sık gördüğünüz için Güneş'in her gün yükseleceğinden emin olduğunuz gibi, saksıda 3.000 beyaz taş olduğundan gitgide daha fazla emin olursunuz. Fakat beyazın siyaha oranının 3'e 2 olduğunu mantıklı bir şekilde söyleyebilmeniz için kaç tane taş çıkarmanız gerekir? Bernoulli'nin hesaplamak istediği buydu. Ona göre, 1000'de 999 kez doğru bilerseniz "ahlaki kesinlik" ile tahmin yapmış olursunuz. Ama sonra bir problem keşfetti: 50 defanın 49'unda doğru bilebilmek için 25.500 taş çıkarmanız gerektiğini hesapladı!

Bernoulli'nin kitabı burada biter. 25.500 kez deney yapmak ve ahlaki kesinliğe uzaktan bile yaklaşmamak onun için çok fazlaydı. Kitabını yayımlamadı bile; kuzeni Johann, ölümünden sekiz yıl sonra kitabı yayımlamaya karar verdi. Kitabın çıkması bu kadar uzun sürdü çünkü Bernoulli'nin dul eşi, Johann'a veya Benoulli'nin bilimsel

dergilerde alenen tartıştığı kardeşi Jacob'a güvenmiyordu.

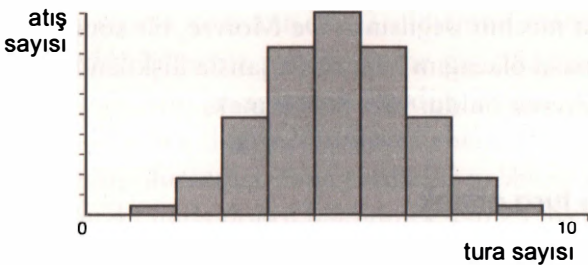
Bernoulli iyi bir başlangıç yapmış ama çok fazla sorunla karşılaşmıştı. İlk olarak, doğru oranın ne olduğunu tahmin etmelisiniz. Diğer bir deyişle öğrenmek istediğinizin çanakta 3.000 beyaz taş bulunma olasılığı olduğuna karar vermelisiniz. 2.999 beyaz taş olma olasılığını öğrenmek istiyorsanız hesaplama farklı olacaktır. İkincisi, gerekli deney sayısı ve kesinlik kriterleri çok yüksekti. Günümüzde bilim insanları, yirmi defanın on dokuzunda doğru bilmenizi yeterli görüyorlar.

Şansın matematiği oyunlarla başladı ve yavaş yavaş daha kullanışlı hale geldi. Bernoulli zaten daha faydalı bir şey hesaplamaya çalışıyordu. Ve bir çözüme yaklaştı: Bir tahminde bulunmak için tüm Amerikalı seçmenlerin ne düşündüğünü bilmenize gerek yok. Ancak, örneğin, Clinton'ın oyların yüzde 52'sini alacağını önceden varsaymanız gerekir ki bu, durumu daha pratik hale getirmez. Sonuçta ülkenin tamamının nasıl oy kullanacağını bilmiyoruz. Bu kumara girmek istemiyorsunuz ve neyse ki matematikçi Abraham de Moivre'ın fikirleri sayesinde buna mecbur değilsiniz. De Moivre, bir sonraki adımımızın nasıl olacağını hepimizin şansla ilişkilendirdiği bir şeyi deneyerek buldu: yazı tura atmak.

Yazı tura atmak

De Moivre Fransa'da büyüdü ama Protestan olduğu için bir yıl hapis yatmasının ardından 1680'lerin sonlarında İngiltere'ye kaçtı. İngiltere'de soylu çocuklara özel ders veren bir matematik öğretmeni olarak çalıştı. Boş zamanlarında araştırma yaptı ve bu konuda şaşırtıcı derecede iyiydi. Hatta o kadar iyiydi ki Newton matematikle ilgili soruları olan insanları ona yönlendirdi.

De Moivre kendini siyah ve beyaz taşlar sorununa da adadı ve bu sorunu iki olası sonuca sahip bir durum olan yazı tura atmak şeklinde hayal etmenin daha kolay olacağını düşündü. De Moivre, yeterince sık yazı tura atılırsa ikili dağılım ya da “binom dağılımı” olarak bilinen durumun elde edileceğini buldu. Aşağıdaki grafik, bir bozuk paranın on kez atılmasının binom dağılımını göstermektedir. En sağdaki küçük çubuk, on atışın her seferinde tura geldiği durumu gösterirken, en soldaki çubuk kaç kez hiç tura atmadığınızı gösterir. Ortadaki uzun çubuk ise ne sıklıkla on atışın beşinde tura attığınızı gösterir. Bu çubuk, en olası sonuç olduğu için en yüksek olanıdır. Diğer bir deyişle on kere tura atmaktan (ya da hiç atmamaktan) daha “normaldir”. Bunun gibi grafikler her yerde ortaya çıkıyor. Boy buna iyi bir örnek. İngiltere’de 2017’de erkeklerin ortalama boyu 177 santimetre civarındaydı. Bu, 177 cm’den daha kısa veya daha uzun erkeklerin daha az olduğu anlamına gelir. 150 cm uzunluğundaysanız grafiğin solunda, 200 cm iseniz sağında yer alırsınız.

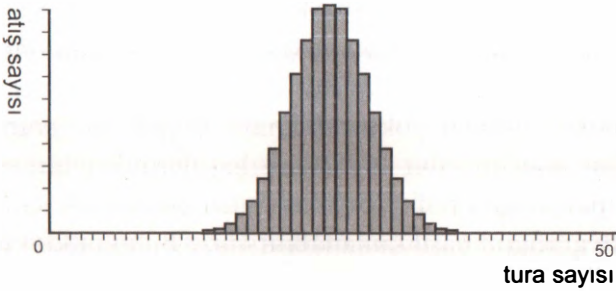


On kez bozuk para atarken tura atma olasılığı

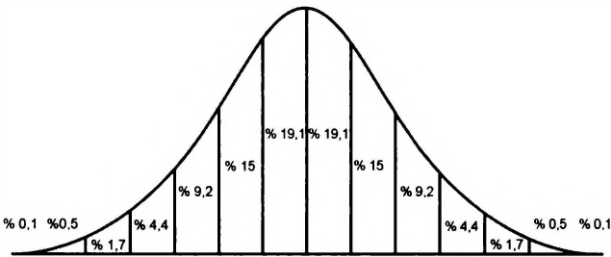
Bir bozuk parayı on kez atmanın sonuçlarını gösteren grafik oldukça kaba bir resim veriyor. Bozuk parayı ne kadar çok atarsanız eğri o kadar pürüzsüz olur. Bir bozuk

parayı elli kez atmanın sonuçlarını gösteren ikinci grafiğe baktığınızda eğrinin daha kademeli olduğunu görürsünüz.

Daha da devam ederseniz en sonunda tamamen pürüzsüz bir eğri elde edersiniz ve bu eğrinin olasılıkları nasıl ifade ettiğini hemen görebilirsiniz. Eğrinin altındaki alanı hesaplamak için Newton ve Leibniz tarafından tasarlanan integrali kullanabilirsiniz. Hesaplama, eğrinin tepesinin “normal” olduğunu gösteriyor çünkü sonuçların neredeyse yüzde 40’ı en yüksekteki iki çubukta meydana geliyor.



Bir bozuk parayı elli kez atarken tura atma olasılığı



Yüzdelerin eğrinin altındaki her bloğa düşen sonucun olasılığını gösterdiği normal dağılım

Eğrinin altındaki alan, bir olasılığı temsil ediyor: Erkeklerin neredeyse yüzde 40’ı 177 cm boyunda olduğundan,

herhangi bir erkeğin 177 cm olma olasılığı yüzde 40'tır. Yazı tura atmanın mantığı da aynıdır: Parayı 100 kez atarsanız yarısında tura gelme olasılığı, 100 defa tura gelme olasılığına göre çok daha fazladır. Tüm atışların tura gelme olasılığı sıfır değildir ama çok küçüktür, grafikte bu kadar kısa olmasının nedeni budur.

İki Thomas

De Moivre, olasılığı hesaplamak için grafikleri ve integralleri kullandı. Peki, grafiği gerçekten ne için kullanabilirsiniz? Boy ve IQ puanları söz konusu olduğunda grafikler işe yarar ama kamuoyu yoklamaları gibi daha önemli konularda o kadar da faydalı değildirler zira “normal” ve “anormal” oylar yoktur. Bilimde de pek işe yaramaz. Örneğin, son on yılın en önemli keşiflerinden biri olan Higgs parçacığını bulup bulmadığınızı belirlemek için bir dağılım grafiğini nasıl kullanabilirsiniz? Bu mümkün mü?

Evet, Moivre'ın çağdaşı başka bir matematikçinin, Thomas Simpson'ın çalışması sayesinde mümkün. Simpson, de Moivre'ın çalışmalarını detaylandırdı ve daha geniş kitlelere anlatan bir kitap yayımladı. De Moivre bundan memnun kalmadı: Kendi kitabının ikinci baskısının önsözünde Simpson'dan, “halka olan saygımdan dolayı burada ismini anmayacağım, aynı konudaki kitabının ikinci baskısını yapacak ve önermelerimi orasından burasından kırparak işi kolaya getirecek olan zat” olarak bahsetti. Simpson buna aynı hiddetle karşılık verdi ama neyse ki Moivre'ın arkadaşları tartışma kontrolden çıkmadan önce müdahale ettiler.

Simpson yeni bir fikir buldu: Olasılık hesaplamasını tersine çevirdi ve bir şeyi ne sıklıkla doğru bulduğunuza değil, ne sıklıkla yanlış bulduğunuza odaklandı. Başka bir

deyişle bilimsel bir deneyin sonucunun yanlış olma olasılığına baktı. Bilimsel yönteminiz çoğu zaman mükemmel çalışır ve yalnızca küçük ölçüm hataları yaparsınız; böylece grafiğin ortasında, eğrinin tepesinde yer alırsınız. Ancak bazen işler ters gider ve ciddi bir ölçüm hatası yaparsınız. Bu çok sık olmaz çünkü gerçekleşmesi için bir sürü şanssızlık yaşanması gerekir. Ciddi hatalar yapma olasılığı düşük olduğundan, grafiğin en solunda veya en sağında, eğrinin alt kısmında kalırsınız.

Her şey olması gerektiği gibi giderse matematik sayesinde beklentilerimizin –örneğin Higgs parçacığının var olmasının– doğru olma olasılığını hesaplayabiliriz. Sonuçta, hangi ölçümlerin yanlış olduğunu ve dolayısıyla bir Higgs parçacığı bulup bulmadığımızı bilmiyoruz. Ayrıca, parçacığı bulduğumuzu gösteren ölçümlerin doğru olup olmadığını da bilmiyoruz; belki de yanlış olanlar onlardır. Dolayısıyla sonuçlarımızın yanlış olduğunu varsayıyoruz ve bu varsayım altında yapılan ölçümlerin nasıl olacağını görmek için grafiği kullanıyoruz. Başka bir deyişle Higgs parçacığının olmadığı durumda ölçülen sonuçları görme olasılığımızı hesaplıyoruz. Sonuçlarımıza ulaşmak için ölçümde çok sayıda hata yapmamız gerekiyorsa ve bu sonuçlar eğrinin en altında yer alırsa haberler iyi: Bu, Higgs parçacığının olmamasının ihtimal dışı olduğu, dolayısıyla var olma olasılığının yüksek olduğu anlamına gelir. Bununla birlikte, sonucumuzu açıklamak için ölçümlerde neredeyse hiç hata yapmamamız gerekiyorsa ve sonuçlar eğrinin en üstünde yer alırsa bu, Higgs parçacığının muhtemelen var olmadığı ve bilim insanlarını hayal kırıklığına uğratmamız gerektiği anlamına gelir. Neyse ki bu durum Cenevre'deki Avrupa Parçacık Fiziği Laboratuvarı CERN'deki araştırmacıların başına gelmedi. Elde ettikleri sonuçlara göre Higgs parçacığının var olmaması sadece

çok tesadüfi durumlarda mümkündü; tamamen hatadan kaynaklanan böyle bir sonucun olma olasılığı çok küçük-tü: 3,5 milyonda 1!

Elbette Simpson tüm bunları kendisi bulmadı. Bernoulli'nin çalışmasındaki iki soruna geri dönelim: Çok fazla deneye ihtiyacı vardı ve sadece tahmininizin doğru olma olasılığını hesaplayabiliyordunuz. Simpson ilk problemi çözdü çünkü –daha doğru hesaplamalar yoluyla– Bernoulli'nin yüksek derecede kesinliğini elde etmek için çok daha az sayıda deneye ihtiyaç olduğunu gösterdi. 18. yüzyılın sonlarında, başka bir Thomas, Thomas Bayes, Simpson'ın fikrini detaylandırarak ikinci sorunu da çözdü. Bayes sayesinde, Higgs parçacığı olmasaydı yukarıda bahsedilen sonuçları elde etmenin ne kadar garip olacağını artık hesaplayabiliyoruz.

Bazı olasılık derecelerinin hesaplanması diğerlerinden daha kolaydır. Bir e-posta aldığınızı ve hizmet sağlayıcınızın bunun *spam* (istenmeyen posta) olma olasılığını hesaplaması gerektiğini hayal edin. Bunun yollarından biri, “Nijeryalı” ve “prens” gibi belirli kelimelerin ne sıklıkla geçtiğine bakmaktır. Bu çok zor gibi görünmüyor ancak bu kelimeleri içeren e-postalar her zaman *spam* olmayabilir. Bu nedenle bu kelimeleri içeren bir e-postanın gerçekten *spam* olma olasılığını bilmeniz gerekir ve herhangi bir bağlam olmadan bunu anlamak oldukça zordur. Neyse ki Bayes, tam olarak bu sorunu çözmemizi sağlayan bir formül geliştirdi:

$$\frac{\text{Spam olma olasılığı} \times \text{Spam e-posta iletilerindeki sözcüklerin olasılığı}}{\text{Belirli sözcükleri içeren spam e-posta olasılığı}} = \text{Sözcüklerin olasılığı}$$

Formülü kullanmak için e-posta sağlayıcınızın diğer üç olasılığı bilmesi gerekir. Neyse ki bunları hesaplamak,

belirli kelimeleri içeren mesajların *spam* olma olasılığından çok daha kolaydır: Hizmet sağlayıcınız bunları doğrudan *spam* kutunuza koyduklarınızdan bulabilir. Bilmesi gereken ilk şey, ne sıklıkla *spam* e-postalar aldığınız, başka bir deyişle bir e-posta mesajının *spam* olma olasılığıdır. Hizmet sağlayıcı bunu yapmak için *spam* kutunuzdaki e-posta sayısını aldığınız toplam e-posta sayısına böler. İkincisi, “Nijeryalı prens” kelimelerini içeren bir e-posta olma olasılığıdır. Hizmet sağlayıcınız, tüm bu e-postaları toplayarak ve bunları toplam e-posta sayısına bölerek bu olasılığı da hesaplar. Son olarak, “Nijeryalı prens” kelimelerini içeren *spam* e-postalar olma olasılığına bakar. Bunun hesaplanması da gayet basittir: Hizmet sağlayıcınız, *spam* kutunuzda bulunan ve “Nijeryalı prens” kelimelerini içeren e-postaların sayısını aldığınız toplam *spam* e-posta sayısına böler. Dolayısıyla “Nijeryalı prens” kelimelerini içeren bir e-postanın *spam* olup olmadığını tahmin etmek için yapmanız gereken her hesaplama gayet kolaydır. Bu kelimeler çoğunlukla *spam* mesajlarda geçtiği ve Nijerya’daki prenslerle gerçekten e-posta alışverişi yapmadığınız sürece, tüm bu e-postaların *spam* kutusuna ait olduğunu varsayabilirsiniz.

Bayes’in formülünü epeyce kullanıyoruz çünkü Bernoulli’nin sorununa iyi bir çözüm sunuyor. Bayes, olasılığı kumar oynamak zorunda kalmadan hesaplayabiliyordu. Elbette ki formül mükemmel değildir çünkü denklemin sağ tarafında kullandığınız olasılıkların doğru olup olmadığını bilmiyorsunuz. Bunları kontrol etmek genellikle daha kolaydır ama yine de her zaman belli ölçüde bir belirsizlik vardır. Bayes’in formülü, pratikte işe yaraması açısından önceki olasılık hesaplamalarından farklıdır.

Formül, örneğin, doktora gittiğimizde işimize yarar: Kanseri olup olmadığınızı görmek için bir teste girerseniz

testin hastalığa sahip olduğunuzu göstermesinin ne anlama geldiğini bilmek istersiniz. Test ne kadar güvenilir? Test pozitifse gerçekten kanser olma olasılığınız nedir? Bu olasılık, Bayes'in formülü kullanılarak diğer üç olasılık temelinde hesaplanabilir. Birincisi, kanser hastalarının sayısı: Örneğin bu sayı 1.000 kişi içinden 20, veya yüzde 2 olsun. İkinci olarak, kanser hastasıysanız testin pozitif olma, yani testin hastalığı olan kişilerde kanseri tespit etme olasılığını bilmek istersiniz: Bu da vakaların yüzde 90'ı veya 20 vakanın 18'i olsun. Üçüncü olarak, testin pozitif çıkma ve kanser olmama ihtimalini bilmek istersiniz. Bu da kansersiz 980 kişinin 78'i, yani yüzde 8'i olsun. Bu size, testin "evet" deme olasılığının (kanseri ve kansersiz insanlar için) $1.000 \text{ kişide } 18 + 78 = 96 \text{ kişi olduğunu}$ söyler. Bayes'in formülünde bu üç olasılık şuna benzer:

$$\frac{\text{Kanser olasılığı} \times \text{testin kanseri saptama olasılığı}}{\text{Test pozitifse kanser olasılığı}} = \text{Testin pozitif olma olasılığı}$$

Bu sayıları Bayes'in formülüne koyarsanız şu sonucu elde edersiniz: $0,02 \text{ (yani yüzde 2)} \times 0,9 \text{ (yüzde 90)} / 0,096 \text{ (yüzde 9,6 veya 1000'de 96)} = 0,1875 \text{ veya yüzde 18,75}$. Bu, testin pozitif çıktığı kanıtlandıktan sonra gerçekten kanser olma olasılığınızın sadece yüzde 18,75 olduğunu gösterir. Bu, gerçekten hastalık yaşayan insanların yüzde 90'ında doğru sonucu veren bir testten beklediğinizden çok daha düşük. Bunun nedeni, testin kansersiz birçok insana da "evet" demesidir: Daha önce gördüğümüz gibi, pozitif test sonucu olan 96 kişiden yalnızca 18'inde kanser var. Öyleyse iyi ki bu matematiksel formüle sahibiz çünkü böyle bir testin bize gerçekte ne kadar doğru söylediğini bulmamızı sağlıyor.

Hepsi bir oyun mu? Uygulamada matematik

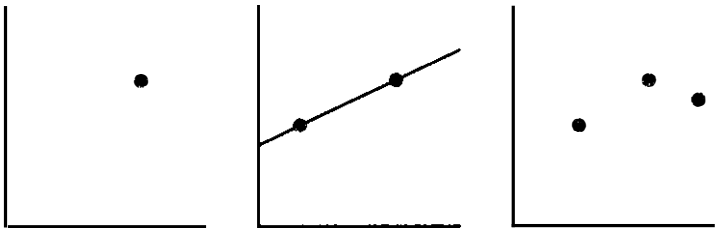
Şimdiye kadar incelediğimiz olasılık teorisinin uygulamalı versiyonu olan istatistik, pratik bir problemle başladı. Problemin çözümünü 1750 yılında gökbilimci Tobias Mayer buldu. Ve bu çözüm soyut bir teori değil, gerçek dünyadan çıkmış bir matematik parçasıydı.

Mayer'in zamanında, Avrupalı büyük güçlerin ciddi bir sorunu vardı. Hepsinin denizaşırı sömürgeleri vardı ve gemileri okyanuslarda sürekli olarak hareket halindeydi ama kimse gemilerinin tam olarak nerede olduğunu nasıl hesaplayacağını bilmiyordu ve gemi kayıplarının maliyeti büyüktü. İngilizler, denizde enlem ve boylamı hesaplamının bir yolunu bulacak olana cömert ödüller vaat ettiler. 1730'dan beri bir sekstant sayesinde enlemi belirleyebiliyorlardı ama boylam bir türlü çözölemeyen bir sorun olarak kalmıştı. Bu nedenle devlet, bir çözüm bulmak için bu araştırmayı maddi olarak destekledi. 1714 ile 1814 arasında, denizdeyken boylamın nasıl hesaplanacağına dair fikirleri olanlara 100.000 sterlin (bugünün parasıyla milyonlar) verdi. Mayer, ölümünden üç yıl sonra, 1765'te, bugün neredeyse yarım milyona eşdeğer bir para, 3.000 sterlin kazandı. Ay'ın konumunu tahmin etmenin bir yolunu bulmuştu ve bu sayede Londra'da saatin kaç olduğunu hesaplayabiliyordunuz. Daha sonra bulunduğunuz boylamı saat dilimlerine göre hesaplayabiliyordunuz. Başlangıç noktası, Londra'daki Greenwich'teydi. Ne kadar doğuya giderseniz o kadar erken oluyordu. New York'ta saat, Londra'ya göre beş saat geride, Amsterdam'da ise bir saat ilerideydi. Ay'ın konumunu ve o anda bulunduğunuz zamanı kullanarak Londra'da saatin kaç olduğunu öğrenirseniz Güneş'in en yüksek noktasında (yerel öğlen)

nerede olduğuna bağlı olarak, Londra'nın ne kadar doğusunda veya batısında olduğunuzu hesaplayabiliyordunuz.

Ay'ın konumu genellikle üç ölçüm kullanılarak hesaplanıyordu ama Mayer yirmi yedi ölçüm kullandı. Bu, günümüz standartlarına göre çok az olmasına rağmen, o zaman için son derece yüksek bir sayıydı. Biz büyük miktarda veriye artık alıştık ama Mayer'den önce insanlar tüm bu ekstra bilgilerle ne yapacaklarını bilmiyorlardı. Ay'ın konumunu belirlemek için üç şeyi bilmeleri gerekiyordu ve bu üç ölçüm yapmak anlamına geliyordu; ne fazla ne eksik.

Yaşamış en yetenekli matematikçilerden biri olan Leonhard Euler (1707-83) de böyle düşünüyordu. Bu sorunun neden bu kadar zor olduğunu anlamak için bir grafik üzerine, nerede başladığını veya eğimini bilmeden düz bir çizgi çizmeye çalıştığınızı hayal edin. Bu değerleri bilmeden çizgiyi çizemezsiniz. Grafikte tek bir noktanız varsa çizginin nerede başladığını bilirsiniz ancak ne kadar dik olması gerektiğini bilemezsiniz. Bunu soldaki grafikte görebilirsiniz. Ortadaki grafikte olduğu gibi iki noktanız varsa işiniz daha kolaydır: Aralarına bir çizgi çekebilirsiniz. Peki, ya ikiden fazla noktanız varsa? Sağdaki grafikte üç nokta var. Şimdi çizgiyi nasıl çekeceksiniz? Ortadaki grafikte olduğu gibi iki nokta arasına çizerseniz üçüncü noktayı hiç kullanmazsınız. Bu durumda çizgiyi noktalar



Bir, iki ve üç nokta ile çizgi çizmek

arasında bir yere mi çizmelisiniz? Öyleyse nereye? Eğimi ne olmalı? Ve en alttaki noktanın hemen üzerinde bir yerden mi başlamalı? Gördüğünüz gibi, ikiden fazla nokta arasına en iyi çizgiyi çekmek o kadar da kolay değil. İşte bu nedenle Euler, yalnızca üç ölçüm kullanarak Ay'ın konumunun nasıl belirleneceği sorununa bir çözüm bulamadı.

Mayer bu sorunu çok basit bir şekilde çözdü: Üç bilinmeyen vardı, bu yüzden yirmi yedi ölçümünü dokuzlu üç gruba böldü. Daha sonra dokuz ölçümün ortalamasını aldı ve bu grupların ortalamasını sanki gerçek ölçümlermiş gibi kullandı. Bu yüzden üç hesaplamayı yapmak için yirmi yedi ölçümünü de kullandı. Ve bu işe yaradı: Ay'ın konumunu çağdaşlarından çok daha doğru belirleyebildi.

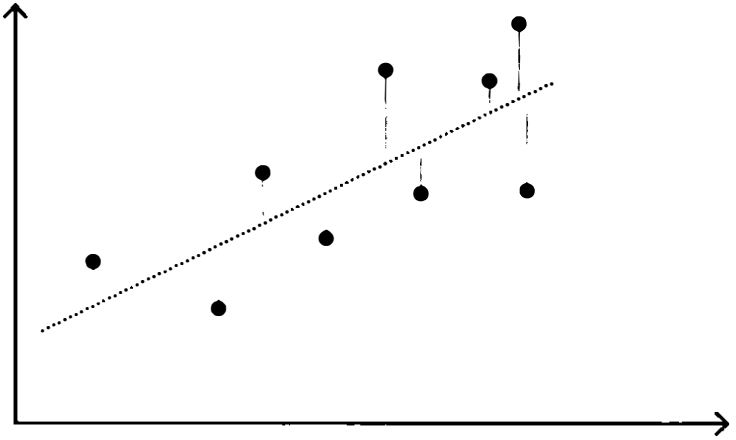
Euler, Mayer'in çözümünün saçma olduğunu düşünüyordu. Euler'a göre daha fazla ölçüm, hata yapma riskini artırırdı. Eğer sürekli olarak iki derece daha yüksek hesaplarsanız hatanın büyüklüğü ölçüm yaptıkça artardı. Bu nedenle Euler, mümkün olduğunca az veri kullanmanın en iyisi olduğunu düşünüyordu. Artık yanıldığını biliyoruz ama neden? Olasılık grafiğindeki eğriye geri dönelim. Her yerde, solda veya sağda hatalar olabilir. Euler, grafiğe ne kadar çok ölçüm eklerseniz eğriyi o kadar aşağı kaydıracağınızı düşünüyordu. Ne var ki hatalar eğrinin her iki tarafında da meydana geldiği için birbirlerini iptal edeceklerdir. Olumlu ve olumsuz hataları toplarsanız ortada, eğrinin tam üzerinde olursunuz. Ve ölçümdeki hatalar rasgele olduğundan, ne kadar çok ölçüm yaparsanız o kadar iyi olacaktır.

Daha fazla veri!

1800 yılı civarında Mayer'in pratik çalışması ile olasılık üzerine teorik çalışmalar bir araya geldi. Bu dönemde Carl Friedrich Gauss, Pierre Simon Laplace ve Adrien-Marie Legendre gibi bilim insanlarının bu alanda çalışmaları vardı ve bir kez daha fikirleri ilk kez kimin ortaya attığı konusunda tartışmalar çıktı. Hatta Gauss, arkadaşlarından, diğerlerinden herhangi biri bir kâğıda tek bir harf bile yazmadan önce kendisinin o konu hakkında konuştuğunu duyduklarına tanıklık etmelerini sağladı. Kimin ilk olduğu gerçekten önemli değil ama hepsinin çok önemli bir keşifle ortaya çıktıklarını düşündükleri belli. Bu o kadar da şaşırtıcı değil: Laplace'ın öldüğü yıl olan 1827'den önce bile tüm bu çalışmaları ayrıntılarıyla anlatan düzinelere kitap yayımlanmıştı. Matematiksel yöntemleri hemen bilimde ve zamanla başka alanlarda da kullanıldı. Pascal ve Fermat'tan bir buçuk yüzyıl sonra, istatistik disiplini ileriye doğru büyük bir sıçrama yaptı.

Bunun nedeni, Mayer'in yöntemindeki bir ilerlemeydi ki bu aslında sorunu aşmak için küçük bir hileden başka bir şey değildi. Mayer orijinal hesaplamayı değiştirmemiş, sadece üç grubun ortalamasını almıştı. Gauss ve Laplace, sorunu biraz daha etkili bir şekilde çözdüler. İki den fazla noktanız olduğunda nasıl çizgi çizileceğini gösteren bir hesaplama tasarladılar. Grafikte, düz bir çizgiyle birleştirilemeyen bir dizi ölçüm görebilirsiniz.

Gauss ve Laplace noktalar arasındaki en iyi çizginin, ölçümdeki hataları (yani çizgiye tam olarak uymayan sonuçları) minimuma indiren çizgi olduğunu gösterdiler. Hatalar, noktalar ve noktalı çizgi arasındaki dikey çizgilerle gösterilmiştir. Hatalar hem pozitif (çizginin üstünde) hem de negatif (çizginin altında) olduklarından, hepsini



Gauss ve Laplace'ın en küçük kareler yöntemini kullanarak birden çok nokta arasındaki en iyi çizgiyi bulma

bir araya getirmek hatayı sıfır yapabilir. Bu nedenle toplam hatayı hesaplamak için değerlerin karesini alırsınız ki eksiler ortadan kalksın (örneğin -2 'nin karesi 4 'tür). Hepsi bu kadar. Simpson'ın yaptığı gibi, hatalara odaklanarak birden çok ölçümü Mayer'in yaptığından daha iyi kullanabilirsiniz. Bu, tahminlerinizi daha tutarlı hale getirir: Mayer gibi dokuz kat daha fazla ölçüm kullanırsanız tahminleriniz üç kat daha iyi olacaktır. Mayer'in başarısı, doğru sonucu tahmin etmek açısından ileriye doğru büyük bir adım olmayabilir ama yarım milyon sterlin kazanmak için yeterliydi.

Dahası, Gauss ve Laplace'ın yöntemi, ölçümlerimizdeki hataları bildiğimiz için bir tahminin ne kadar iyi olduğunu bilmemizi sağladı. Çok sayıda küçük hata içeren bir ölçüm, az sayıda büyük hata içerenden daha doğrudur. Bu gerçekten bir yenilikti. Örneğin, antik Mezopotamyalıların yaptığı tahminlerle karşılaştırın. Toprağın üreteceği tahıl miktarını, metrekare başına sabit bir miktar olarak

tahmin ediyorlardı. Ancak gerçekte, tüm topraklar eşit derecede verimli ve yağışlar her yerde aynı olmadığı ve her çiftçi ekinlerine aynı derecede özen göstermediği için bu tahminler yanlıştı. Elbette bunu onlar da biliyorlardı ama ellerinden pek bir şey gelmiyordu çünkü en iyi tahmini yapabilmek hatta tahminlerinin ne kadar iyi olduğunu anlayabilmek için bile yeterli matematik bilgisine sahip değillerdi. Gauss ve Laplace en iyi tahminin nasıl hesaplanacağını keşfedene kadar bunu yapamıyorduk.

John Snow'un bildiği

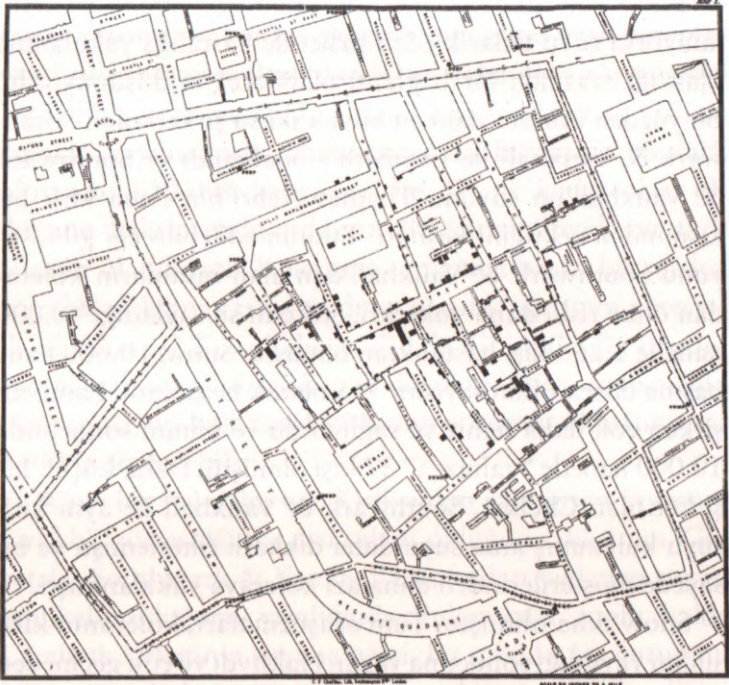
İstatistiğin her alanda, örneğin hastalıkların nedenlerini incelemek için kullanılmaya başlaması için bir 100 yıl daha geçmesi gerekti. 1850 yılı civarında kolera ciddi bir sorundu çünkü kimse hastalığın nasıl yayıldığını bilmiyordu ve sürekli salgınlar yaşanıyordu. Hastalıkla ilgili bir sürü teori vardı: Birçok insan kirli hava veya kötü kokulardan kaynaklandığını düşünüyordu. Daha da tuhafı, sinirlenmenin hastalığa yakalanma olasılığını artırdığı görüşü bile vardı. 1832 ve 1844'te New York halkına, koleraya yakalanmamaları için neşeli ve sakin kalmaları tavsiye edildi. Neyse ki hastalıkla ilgili doğru fikirleri olanlar da vardı: Kolera, insanlar sinirli olsun ya da olmasın, suyla yayılıyordu. Ancak, hastalığın nedenleri üzerine çok az sistematik araştırma yapılmıştı, tartışma tamamen teorikti.

Derken, 1850 yılı civarında, İngiliz tabip John Snow hastalığı araştırmaya başladı. O dönemde arka arkaya birkaç kolera salgını olmuştu. Snow, 1848'deki ilk çalışmasının ardından, hastalığın nereden geldiğini tespit edebildi: John Harold adlı bir denizci hastalığa ilk yakalanan kişiydi. Ama bu, Harold'ın odasında onun ardından kalan

kişinin de neden hastalandığını açıklamıyordu. Bunun için daha fazla araştırma gerekiyordu.

Neyse ki –en azından Snow için öyle– birkaç yıl sonra ikinci bir kolera salgını oldu. Snow bu sefer daha hazırlıklıydı. Londra’da birisinin hastalıktan öldüğü tüm yerlerin ayrıntılı bir haritasını çıkardı ve ölen her hastayı siyah bir kareyle işaretledi.

Snow, ölenlerin hepsinin Londra’nın aynı bölgesinde, Broad Street civarında bulunduğunu fark etti. Broad Street’teki su tulumbasının kolera ile enfekte olduğunu doğru tahmin etti çünkü buradaki suyu kullanan herkes hastalanmıştı. Hastalıktan sadece kendi su tulumbarları olan yerel bira fabrikası ve yoksullar yurdu kurtulmuştu.



Londra’daki Broad Street çevresindeki kolera salgını.
Siyah kareler kurbanları gösteriyor.

Hastalığın sudan yayıldığıının en iyi anekdotsal kanıtı,* şehrin tamamen farklı bir yerinde yaşayan ve koleraya yakalanan yaşlı bir kadının hikâyesiydi. Kadın daha önce Broad Street'te yaşamıştı ve her gün oraya gelip oradaki tulumbadan su alırdı çünkü o suyu, yaşadığı yerdeki tulumbadan çıkan sudan daha çok seviyordu.

Ancak, gerçek bilimsel araştırmanın daha titizlikle yapılması gerekir ve birkaç yıl sonra, 1885'te, çok daha kötü bir salgın patlak verdiğinde ve binlerce can kaybı yaşandığında, Snow tam da bunu yaptı. Farkında olmasa da tarihteki ilk çift kör deneylerden birini gerçekleştirdi. Bu, hastaların iki gruba ayrıldığı (temiz veya kirli su grubu) ve ne araştırmacıların ne de hastaların kimin, hangi grupta olduğunu bildiği bir çalışmaydı. Snow, hastalık eğer sudan kaynaklanıyorsa suyu tedarik eden şirket ile hastalığa yakalanma olasılığı arasında bir bağlantı olabileceğini düşünüyordu. Bu yüzden Londra'daki en büyük iki su şirketi olan Southwark & Vauxhall ile Lambeth'e odaklandı ve Southwark & Vauxhall'un suyunu Thames Nehri'nin daha kirli bir kısmından çektiğini keşfetti. Tahmin edilebileceği gibi, suyunu Southwark & Vauxhall'dan alan insanların kolera-dan ölme riski daha yüksekti. Şirketin su sağladığı 40.000 hanede 1.263 kişi hastalıktan ölmüştü. Snow, 10.000 hane başına düşen ölüm sayısını 315 olarak hesapladı. Lambeth şirketi çok daha temiz su sağlıyordu ve bunun sonucunda 10.000 hanede "yalnızca" 37 kişi ölmüştü. Daha küçük bir şirket olan Chelsea, Southwark & Vauxhall ile aynı kirli suyu kullanmış ama suyu daha dikkatli filtrelemişti ve bu sayede müşterilerinden daha azı koleraya yakalanmıştı.

Snow ikna olmuştu. Tüm araştırmaları, kolera'nın kirli sudan yayıldığı sonucuna vardı. Haklıydı ve çok geçmeden

* Kişisel gözleme dayanan, gelişigüzel, sistemsiz elde edilmiş delil veya kanıt. (e.n.)

kolera bakterisi keşfedildi. Tek sorun, Snow'un haklı olmasının ne kadar olası olduğunu, diğer bir deyişle kolera ile ilişkili ölümlerin sayısı ile su şirketi arasında çok yakın bir bağlantı olduğunu gösterememesiydi. Çağdaşlarının bazıları, Snow'un deneylerinin hastalığın kirli sudan kaynaklandığını kanıtladığına inanmadı. 1892 yılında bile koleranın topraktan yayıldığına inanan doktorlar vardı. Snow, biraz matematikle haklı olma olasılığını gösterebilirdi. Elinde bu matematiğin olmaması, kelimenin tam anlamıyla hayatlara mal oldu.

Nicolas Cage ve yüzme havuzları

Peki, ne eksikti? John Snow, su tedarikçileri ile ölenlerin sayısı arasında yakın bir bağlantı olduğunu nasıl hesaplayabilirdi? Bunun yollarından birini daha önce görmüştük: Tıpkı Higgs parçacığında olduğu gibi, eğer kolera kirli su yoluyla yayılmıyorsa ölüm sayısında böylesine bir fark olmasının (10.000 hanede 315'e 37) ne kadar olası olduğunu belirleyebiliyordunuz. Bu kadar büyük bir fark tesadüf olabilir mi? Koleranın tamamen başka bir şeyden kaynaklandığını varsaysaydınız olasılık eğrisinin neresinde olurdunuz? Kesinlikle en altında bir yerde. Bu tesadüfün gerçekleşme olasılığı çok düşükse, ölüm sayısındaki farktan suyun kalitesindeki farkın sorumlu olduğunu rahatlıkla söyleyebiliriz.

İkinci bir yol daha var. Kirli sudan içen insan sayısının farklılık gösterdiği bir dizi salgın olduğunu düşünün. Gazeteler Southwark & Vauxhall tarafından sağlanan suyun tehlikeli olduğunu yazdığında kullanıcılar toplu halde Lambeth şirketinin suyuna geçti. Bu şekilde, bu durumun koleraya yakalanan insan sayısını etkileyip etkilemediğini görebilirsiniz. Daha fazla insan temiz su içtiyse ve daha az

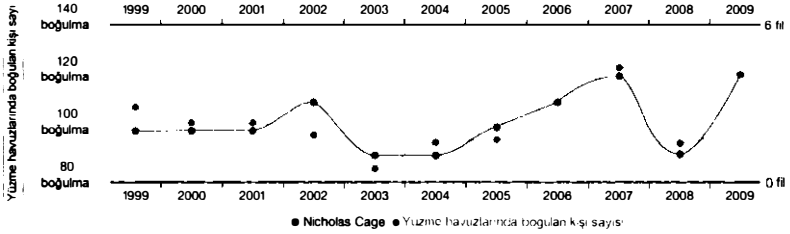
ölüm yaşandıysa bu sayıları bir hesaplama yapmak için kullanabilirsiniz.

Böyle bir bağlantıya –bu örnekte kirli su içenlerin sayısı ile koleraya yakalananların sayısı arasındaki bağlantı– korelasyon denir. Bilim insanlarının sıkça söylediği gibi, korelasyon nedensellik ile aynı şey değildir. Kirli su ile kolera vakaları arasındaki korelasyon, birinin diğerine neden olduğu anlamına gelmez. Biraz hayal gücü ile birçok şey arasında korelasyon bulabilirsiniz. Örneğin, Nicolas Cage’in başrolde oynadığı filmler ile yüzme havuzunda boğulan insan sayısı gibi.

Grafiğe baktığınızda bir yüzme havuzunda boğularak ölenlerin sayısı ile Nicolas Cage’in başrolünde oynadığı filmler arasında yıllar boyunca ürkütücü derecede yakın bir korelasyon olduğunu görebilirsiniz. Bu, oyuncunun insanların yüzme havuzlarına düşmesine neden olduğu anlamına mı geliyor? Tabii ki değil. Ancak arada bir korelasyon var ve bu korelasyonun ne kadar yakın olduğunu hesaplayabilmek istiyoruz.

1900’den beri bunu yapabiliyoruz. Nicolas Cage ve yüzme havuzu boğulmaları gibi değişkenler arasındaki ilişkinin ne kadar yakın olduğunu bulmak için -1 ile $+1$ arasında bir sayı olan bir korelasyon katsayısı kullanıyoruz. Katsayının -1 olması, Nicolas Cage’in başrolde oynadığı yeni bir filmin çıktığı her seferde, yüzme havuzlarında daha az insanın boğulduğu anlamına gelir. İki eğri, birbirinin tam bir ayna görüntüsüdür. Katsayının $+1$ olması ise bunun tersi anlamına gelir: Nicolas Cage ne kadar çok filmde görünürse o kadar çok insan boğulur. Nicolas Cage filmlerinin sayısı artmadıkça havuzlarda boğulan kişi sayısı artmaz. Başka bir deyişle iki eğri tam olarak üst üste gelir. Katsayının 0 olması ise bu iki şeyin birbiriyle hiç ilgisi olmadığı anlamına gelir.

Korelasyon katsayısı bile tüm anlamsız korelasyonları ortadan kaldırmayı mümkün kılmaz. Grafikteki katsayı hâlâ 0,666'dır, bu da oldukça güçlü bir pozitif korelasyondur. Her iki değişkenin trendi de çok fazla değişmediğinden, bu o kadar da şaşırtıcı bir sonuç değil. Nicolas Cage aynı anda yirmi filmde rol alamaz ve neyse ki bir yüzme havuzunda boğulmak neredeyse her zaman kaza sonucudur ve insanlar bir yılda normalden on kat daha fazla kötü şansa sahip olmazlar. Yeterince uzun süre ararsanız çok fazla değişmeyen bir şeyi mutlaka bulursunuz.



Yüzme havuzlarında boğulan kişi sayısı ile Nicolas Cage filmlerinin sayısının karşılaştırması

İşte bu nedenle korelasyonlardan bahsederken temkinli olmalıyız. Bu örnekte, Nicolas Cage'in yüzme havuzlarında boğulan insanlardan gerçekten sorumlu olmadığı barırdır. Ancak durum her zaman böyle değildir. *The Wall Street Journal*'daki bir makaleye göre, oyun alanlarının güvenli olması ile çocuk obezitesi arasında bir ilişki vardır. Bu, şimdi çocuklarımızı daha tehlikeli oyun alanlarına götürmemiz gerektiği anlamına mı geliyor? Güvende olmak, kilo almanıza neden olur mu? Büyük olasılıkla hayır ancak birisi oyun alanlarının daha güvenli hale geldiğini ve çocuklarda obezitenin arttığını fark etti ve ikisi arasında güçlü bir pozitif korelasyon buldu; bu da gazetelerin ilgisini çekti. İstatistikler kolaylıkla yanıltıcı olabilir.

Yalan haber mi? Dünyayı istatistiklerle çarpıtmak

Çarpıtılmış bir görüşü savunmak için istatistiği kullanmak oldukça kolaydır. İstatistik ortalıkta var olduğundan beri bu böyle: Darrell Huff'un *İstatistikler ile Nasıl Yalan Söylenir?* adlı kitabı 1954'te yayımlandı. Kitap, sadece garip korelasyonları değil, rakamların yanıltıcı olabileceği diğer birçok örneği de açıklıyor.

Daha yakın zamanlarda, 2017 yılında, dönemin ABD Adalet Bakanı Jeff Sessions yaptığı bir konuşmada, Amerika'nın yaşamak için giderek daha tehlikeli bir yer haline geldiğini söyledi. Cinayetlerin sayısı bir önceki yıla göre yüzde 10 artmıştı ki bu, 1968'den beri görülmemiş bir artışı. Sessions, bunun sorumlusunun yabancılar olduğunu, ülkeye giren herkesten şüphelenmenin zamanının geldiğini ve ülkede yaşayan göçmenlere de güvenilmeyeceğini öne sürdü.

İkna edici geliyor, değil mi? Ancak istatistiklere rağmen, Amerika günümüzde her zamankinden çok daha güvenli. Cinayetlerdeki artış çok yüksek çünkü toplam cinayet sayısı çok düşük. Yüzde 10, 10'dan 1 artış veya 10.000'den 1.000 artış anlamına gelebilir. ABD'deki cinayetlerin sayısı o kadar düşük bir seviyeye inmişti ki Sessions bunu yüzde olarak ifade ettiğinde küçük bir artış hemen çok büyük bir oran olarak görünüyordu.

Sessions'ın yüzde 10'u başka bir şeyi de gizliyordu. Cinayetlerdeki artışın neredeyse dörtte biri, Chicago'da çok daha fazla insanın öldürülmüş olmasından kaynaklanıyordu (ülke çapında 17.250 cinayetten 765'i Chicago'da işlenmişti, Amerika'nın en büyük şehri olan New York'taki cinayet sayısı ise yalnızca 334'tü). Amerika'nın geri kalanı büyük ölçüde hiç olmadığı kadar güvenli hale gelmişti. Rakamlar doğrudu –Sessions yalan söylemiyordu– ama

çıkarımlar yanlıştı. Akıllıca seçilmiş bir istatistik, gerçekliğin tamamen çarpıtılmış bir görünümünü sunuyordu.

Bunu her türlü yolla yapmak mümkündür. Eskiden olduğunuzdan daha iyi durumda olup olmadığınızla ilgileniyorsanız harcayacak daha fazla paranız olup olmadığını bilmek isteyebilirsiniz. Amerika bunun için istatistiklere sahip. Aslında iki farklı istatistiğe. ABD Nüfus Bürosu tarafından toplanan resmi rakamlara göre Amerika'da ortalama gelir 1979'dan beri neredeyse hiç artmadı; hatta uzun süre düştü. Yani geçmişte işler daha iyi olmayabilirdi ama kesinlikle bugünden daha kötü de değildi.

Diğer istatistik, hükümetten değil, bir düşünce kuruluşundan geliyor. Bu kuruluşa göre günümüzde insanların harcanabilir gelirleri, 1979'a göre bir buçuk kat daha fazla, yani herkes biraz daha iyi durumda. Amerikalıların hiç bu kadar çok parası olmamıştı. Aslında, gelirler neredeyse her zaman artmakta. Hükümet ve düşünce kuruluşu tamamen farklı resimler çiziyor. Peki, kim haklı?

Muhtemelen düşünce kuruluşu. Nüfus Bürosu çok basit bir şeyi unutmuştu: Hane başına ortalama gelir rakamlarını kullandılar ve bu değerleri de ortalama hanede bulunan kişi sayısına böldüler. Ancak, 2014 yılındaki ortalama geliri, 1979'dakiyle aynı hane başına kişi sayısına böldüler. Ne var ki zamanla haneler küçüldü: Artık daha fazla insan yalnız yaşıyor veya çocuksuz ve çocuklu hanelerin harcayacak daha az parası var. Dolayısıyla, 2014 yılı gelirinin daha az sayıda insana bölünmesi gerekirdi. Gelir, göreceli olarak artan sayıda insana bölünürse işlerin daha iyiye gitmiyor gibi görünmesi de doğal.

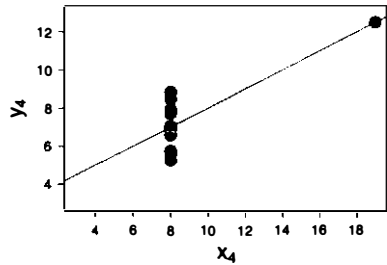
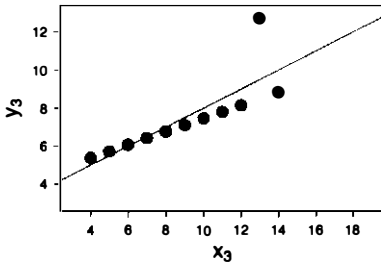
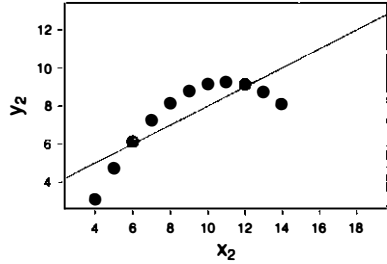
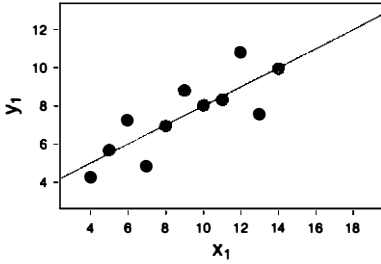
Bazen istatistiklerin anlaşılması çok zordur. Erkekler ve kadınlar arasındaki ücret farkını ele alalım. Zengin ülkelerde ortalama olarak kadınlar, erkeklerin kazandığının yüzde 85'ini kazanıyor. Bu, açık ve tamamen kabul

edilemez görünüyor. Elbette bu bir sorun ama belki de gerçek durum tek bir istatistiğin gösterdiği kadar kötü değildir. Bu ülkelerdeki kadınlar, aynı işte çalışan erkeklere kıyasla o kadar düşük ücret almıyor: Aslında erkeklerin aynı şirkette aynı işi yaparak kazandıklarının yüzde 98'ini kazanıyorlar. Bir farkın olması hâlâ saçma ancak fark, ilk rakamın gösterdiği kadar büyük değil.

Bu farklılık, aynı işe farklı ücret verilmesinden kaynaklanmamaktadır. Değer, tüm erkeklerin ve tüm kadınların ortalama ücretine dayanmaktadır. Yüksek ücretli işlerde daha az kadın olduğu için kadınlar ortalama olarak daha az ücret alıyor. Büyük şirketlerde üst düzey yönetim düzeyinde daha az kadın var ve maaşı genellikle erkeklerin çoğunlukta olduğu polislik gibi mesleklerden daha az olan belirli meslekleri (hemşirelik gibi) daha çok kadınlar yapıyor. Yani ortada ciddi bir sorun olduğu açık ama bu sorun, sadece ortalama maaş rakamlarına bakıldığında düşünülenenden farklı. Kadınlar en iyi işlere daha fazla erişebilmelidir –örneğin, hamilelik ve doğum izni için daha iyi düzenlemeler yoluyla– ve esas olarak kadınlar tarafından yapılan işler daha iyi ücretlendirilmelidir ama tam olarak aynı işi yapmak için daha az maaş almak, neyse ki çok sık olmuyor.

İstatistikler kolaylıkla dünyayı olduğundan farklı gösterebilirler çünkü genellikle ortalamaları kullanırlar. Gelir artışı değeri, hane sayısının ortalama bir hanedeki insan sayısına bölünmesiyle bulunan bir ortalamadır. Erkekler ve kadınlar arasındaki ücret farkı istatistiği de bir ortalamadır. Ortalamalar perde arkasında neler olduğuna dair her zaman net fikir vermez. Ücret farklılığının erkeklerin kadınlardan farklı işlere sahip olmasından kaynaklandığı dosdoğru ortada değildir. Aşağıdaki dört grafiğe bakın. Ölçümler tamamen farklı yerlerde ve yine de ortaya

çıkan istatistiksel veriler aynıdır. Gauss ve Laplace yöntemi, grafiklerin dördünde de en iyi tahmin için aynı çizgiyi üretir.



Aynı öngörülen sonuca sahip tamamen farklı dört ölçüm seti

İşte bu yüzden istatistikleri okurken dikkatli olmalısınız. Dünya görüşünüzü doğrulayan bir istatistik bulmak neredeyse her zaman mümkündür. Geçmişte her şeyin çok daha iyi olduğunu düşünüyorsanız muhtemelen artık eskisinden bir buçuk kat daha fazla kazandığımıza inanmayacaksınız. Ama neyse ki sizinle aynı fikirde olan resmi bir istatistik var. Ya da göçmenlerin ülkenizi güvensiz hale getirdiğini mi düşünüyorsunuz? Öyleyse cinayetlerde yüzde 10'luk bir artış tam da aradığınız istatistiktir. Elbette aynı şey tersi için de geçerlidir. Kadınlarla erkekler arasındaki maaş farklılıkları olduğuna dair tüm iddiaların

saçma olduğunu düşünen herhangi biri, aynı şirkette aynı işi yapan kadınlara erkeklerle neredeyse aynı ücretin verildiğini gösteren istatistikleri ortaya koyabilir. Ve haklılardır da ama bu, var olan eşitsizlikler konusunda bir şeyler yapmamak için bir neden değildir.

Tüm bu risklere rağmen ortalamalar çok faydalı olabilirler. Karmaşık durumları çabucak anlamamıza yardımcı olurlar. Zengin ülkelerdeki erkeklerin ve kadınların maaşları hakkında başka nasıl net bir fikir edinebilirsiniz? Tüm maaşları tek tek karşılaştırmak çok fazla iş. Tıpkı olasılığı hesaplamak ve tahmin yapmak için bir yöntem ihtiyacımız olduğu gibi, tüm bu verilere ilişkin genel bir bakış elde etmek için de ortalamalara ihtiyacımız var. Bu tahminler ister hasat için ister GPS ile konumları belirlemek veya fotoğrafları keskinleştirmek için kullanılsın, matematiğin kullanımıyla daha iyi ve daha pratik bir hale geldiler. Ayrıca bu bölümün başında bahsettiğimiz kamuoyu yoklamalarında da kullanılıyorlar.

Herkese ayrı ayrı sormaya gerek yok

Seçim anketleri bir süredir ortalıkta dolaşüyor. Yüz yıldan biraz fazla bir süredir, herkese ayrı ayrı sormak zorunda kalmadan tüm nüfusun nasıl oy vereceğini tahmin edecek matematiğe sahibiz. Bu aslında oldukça basit bir fikre dayanıyor. İnsanların yüzde kaçının Donald Trump'ın işini iyi yaptığını düşündüğünü öğrenmek istiyorsunuz diyelim. Bu, örneğin nüfusun yüzde 40'ı olabilir. Ama bunu anlamak için herkese Trump hakkında ne düşündüğünü sormuyorsunuz; çok fazla iş olur bu. Bir anketin arkasındaki fikir, rasgele seçildikleri sürece sorularınızı daha küçük bir gruba sorabilmenizdir. Herkesin bu küçük grupta bulunma şansı eşitse gruptaki birinin Trump'ın işini iyi

yaptığını düşünmesi hâlâ yüzde 40'lık bir olasılıktır. Diğer bir deyişle bu küçük grup, ülkenin geri kalanının iyi bir yansımasıdır.

Anketlerde kullanılan matematik, esas olarak anketlerin ne kadar güvenilir olduklarını hesaplamak için kullanılır. Anketi yapacağınız örnekleminizi rasgele seçebilirsiniz ve yine de bu kişilerin hepsi Trump hayranları olabilir. Ne kadar çok kişi ile anket yaparsanız bu durumun gerçekleşme olasılığı o kadar düşük olur ve bu, sonuçlarınızı daha doğru hale getirir. Yani her şey olması gerektiği gibi giderse çünkü insanları rasgele seçmek gerçekten çok zordur. 1936 ABD başkanlık seçimlerini ele alalım. Amerika, Büyük Buhran'ın son zamanlarındaydı ve alınması gereken ciddi ekonomik kararlar vardı. Herkes iki adaydan hangisinin kazanacağını bilmek istiyordu: Demokrat Franklin D. Roosevelt mi yoksa Cumhuriyetçi Alf Landon mu? Etkili bir haftalık dergi olan *The Literary Digest*, 10 milyon abonesi arasında bir anket düzenlemeye karar verdi. Bu, 1936'da 125 milyon civarında olan ABD nüfusunun yaklaşık yüzde 10'uydu. Bu 10 milyon kişinin yaklaşık 2,4 milyonu ankete katıldı.

Dergi kısa bir süre sonra bu devasa anketin sonuçlarını yayımladı. Landon'un yüzde 57,1 oyla kazanacağını tahmin ediyorlardı. Ancak seçimler yapıldığında, *Digest*'in anketi tamamen yanlış çıktı: Roosevelt, yüzde 60,8'lik ezici bir zafer kazandı, Landon ise oyların yalnızca yüzde 36,5'ini aldı. Peki, yanlış giden neydi? Anketin muazzam ölçeğine rağmen, örneklem seçimi aslında rasgele değildi. *Digest*, örneklemini telefon rehberlerinden, kendi abonelelerinden ve kulüp ve derneklerin üyelik listelerinden seçmişti. Büyük Buhran döneminde sadece zenginler telefon, dergi aboneliği ve kulüp üyelik ücretlerini karşılayabiliyordu. Bu kişilerin de Cumhuriyetçilere oy verme olasılıkları

daha yüksek olduğundan, *Digest* çoğunlukla Landon'a oy veren kişileri seçmişti.

Son zamanlarda bu kadar büyük bir fiyasko görmedik. 2016 ABD seçimleri için yapılan anketler de tamamen yanlıştı, uzmanlar Hilary Clinton'ın yüzde 70 ila 99 oranında bir kazanma şansına sahip olduğunu tahmin ediyorlardı. Yine de kulağa tuhaf da gelse 2016 anketleri 1936'dan bu yana yapılmış en doğru anketler arasındaydı; anket tahminleriyle sonuçlar arasındaki fark, aslında görüldüğü kadar geniş değildi. Clinton'ın kazanma şansını bir yana koyarsak anketler Clinton'ın yüzde 46,8 Trump'ınsa yüzde 43,6 alacağını tahmin ediyordu. Esas olarak önemli olan aradaki farktı, o da sadece üç puandı. Seçim sonunda, Clinton yüzde 48,2, Trump yüzde 46,1 oy aldı. Gerçekleşen oylardaki fark tahmin edilenden biraz daha küçüktü, 2,1 puan. Yine de anketler, Clinton'ın Trump'tan daha fazla oy alacağını doğru bir şekilde tahmin etmişti. Trump'ı buna rağmen Beyaz Saray'a taşıyan, ABD'nin seçim sistemi idi.

Sonuç olarak, üç şey ters gitti. Örneklem seçimi yine de tamamen rasgele değildi. Anketler zaman içinde kademeli olarak iyileşti ama üniversite eğitimi olan kişiler anketlere, üniversite eğitimi olmayanlara göre daha sık yanıt vermektedir. Bu kişilerin Clinton'a oy verme olasılıkları daha yüksek olduğundan, anketler Trump seçmenlerinin önemli bir kısmını gözden kaçırdı. Tıpkı 1936'da olduğu gibi, yoksulları ve düşük eğitimlileri anketlere dahil etmek hâlâ zor.

İkincisi, Trump'ın zaferini sağlayan eyaletlerde güvenilir bir anket yapmak kolay değildi. Anketlere göre Pennsylvania, Wisconsin ve Florida, Clinton'a oy verecekti; geçmişte böyle olmuştu. Ancak 2016'da bu üç eyaletteki pek çok insan, seçimlerden önceki haftaya kadar kime oy

vereceklerine karar vermemişti ve kararsızların neredeyse tamamı sonunda Trump'a oy verdi. Hiçbir anket bunu tahmin edemezdi; seçmenlerin kendileri bile anketler yapıldığında bilmiyorlardı.

Üçüncüsü, Trump'a oy vermeyi düşündüğünü söylemeyen insanlar vardı. Gerçekten karar vermemişler miydi yoksa itiraf etmeye mi utanıyorlardı, bilmiyoruz. Ama anket şirketleri daha çok Clinton seçmenlerinden net yanıt almıştı. Bu da anket şirketlerinin hatası değildi. İnsanları anketlere yanıt verirken doğruyu söylemeye zorlayamazsınız. Anketlerde yapılan tek gerçek hata, örneklemin eğitim düzeyindeki dengesizlikti. Diğer faktörler ancak daha sonra netleşti. Gerçekten yanıldıkları tek şey, seçmenlerin Pennsylvania, Wisconsin ve Florida'daki dönüşlerini önceden görememektir. Gerisini doğru tahmin ettiler.

Tüm bu örnekler, istatistiklerin hiçbir şekilde çevremizdeki dünyanın mükemmel bir resmini vermediğini göstermektedir. Anketler, doğru icra edilse bile çoğu zaman yanlış sonuçlar verebilir. Ortalamalar yanıltıcı olabilir ve birbiriyle hiçbir ilgisi olmayan şeyler arasında yakın bir korelasyon çıkabilir. Tam da bu yüzden, bir miktar istatistik anlayışına sahip olmak, bir ortalamaya nasıl ulaşıldığını bilmek veya bir korelasyonun iki grafiğin birbirine benzemesinden başka bir şey söylemediğini anlamak yararlıdır. İstatistikler bizi yanıltabilir ama çok faydalı da olabilirler. İstatistiğin, testiniz pozitif çıktığında gerçekten kanser olma olasılığınızı hesaplamak için kullanılabileceğini görmüştük. Ve bu olasılığın görüldüğünden çok daha düşük olabildiğini de. Bu şekilde, istatistikler belirsizliklerin üzerine ışık tutulmasını sağlayabilir. Ortalamalar ve benzeri diğer rakamlar da bir bilgi yığınına genel bir bakış fırsatı sunar. Tüm bu değerler olan biteni sizin için özetler ama size durumun mükemmel bir resmini vermezler. Bu

mükemmel resim için vaktimiz de yoktur zaten. Ekonomiyle ilgili mevcut tüm bilgileri okuyamayız mesela. O halde bize bazı şeylerin ne kadar daha iyi veya daha kötü olduğuna dair bir fikir veren birkaç ortalama çok daha fazla işimize yarayabilir.

Öyleyse matematiğin bu alanını anlamak önemli mi? Kalkülüste olduğu gibi, muhtemelen istatistiği de günlük hayatınızda kullanmanız gerekmeyecektir. Yine de istatistik hakkında bir şeyler bilmek faydalıdır. Sonuçta, birçok bilgimizi anketlerden ve istatistiklerden alıyoruz. Ancak anketler ve istatistikler bizi çok farklı şekillerde yanıltabilir. Adalet Bakanı Sessions, istatistikleri kurnazca kullanarak Amerikalılara ülkelerindeki güvenlik konusunda çarpık bir tablo çizmişti. Anketler, örneklemelerin seçilme şekli nedeniyle kazara veya kasıtlı olarak yanlış sonuçlar verebilir. Yine de tüm bilimsel araştırmalar, deney sonuçlarının tesadüfi olup olmadığını belirlemek için istatistiklerden yararlanır.

Bu şekilde, istatistiklerin hayatlarımız üzerinde büyük etkisi vardır. Çocuklarınız için en iyisi nedir? Nasıl sağlıklı kalabilirsiniz? Önümüzdeki seçimlerin sonucu ne olacak? Koleraya ne sebep olur? Bir bilgisayar, bir görüntüde ne olduğunu nasıl anlar? E-posta sağlayıcınız hangi e-postaların *spam* olduğunu nasıl bilir? Büyük miktarlarda veriyle uğraşmamız gerektiği her durumda, bu verileri anlamlandırmak için istatistiklere başvururuz. Bu, tüm bilgileri analiz etmenin açık ara en iyi yoludur. İşte bu nedenle istatistiğin hayatlarımız üzerinde bu kadar büyük ve genişleyen bir etkisi vardır. Okuduğunuz her parça verinin arkasında istatistiksel bir hesaplama olacaktır. Medyada ortalamaları ve yüzdeleri ne sıklıkla gördüğünüzü veya duyduğunuzu bir düşünün. İstatistikler, sorgusuz sualsiz kabul etmeniz gereken gerçekler değildir; bir

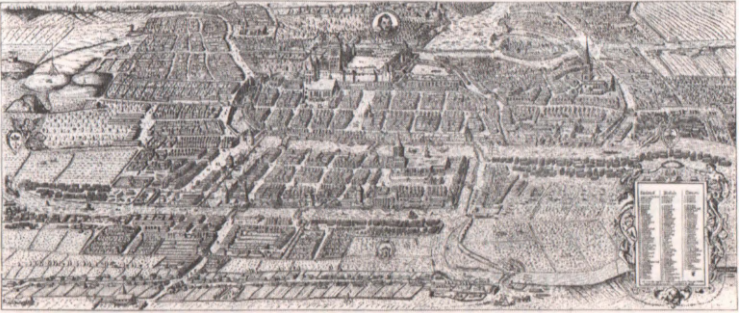
yerlerden gelirler. Nasıl hesaplandığını ve nasıl yanlış gidebileceğini anlarsanız bu bilgilere daha eleştirel bir gözle bakabilirsiniz.

7 BÖLÜM

Akıl Bulmacaları

18. yüzyılın başlarında, günümüzde Rusya'nın Kaliningrad şehri olan Königsberg hakkında bir bulmaca pek meşhurdu. Şehrin içinden bir nehir geçmektedir ve bu nehrin içinde de iki büyük ada vardır. Nehir boyunca adaları birbirine ve anakaraya bağlayan yedi köprü vardır. Aşağıdaki harita, o zamanki Königsberg'i gösterir ve köprüler dairelerle işaretlenmiştir. Bulmaca şuydu: Her köprüyü yalnızca bir kez geçerek tüm şehri yürümek mümkün müdür?

Verdrikkblatt zur sechshundert jährigen Geburtsfeier der Königl. Stadt Königsberg in Preußen

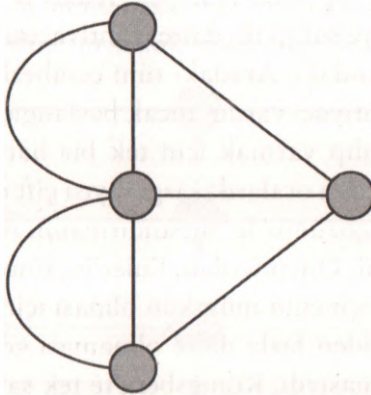


Königsberg haritası ve meşhur yedi köprü

Bulmacayı çözmenin bir yolu, şehir içinde çok sayıda farklı rota denemektir. Ancak bu yol çok uzun zaman

alırdı ve önceki bölümden hatırladığımız Leonhard Euler'ın 1736'da gösterdiği gibi, imkânsızdı. Bu, Euler'ın başarılarından yalnızca biriydi: Sinüs, kosinüs ve teğetler dahil olmak üzere birçok yeni matematiksel kavramı Euler tasarlamıştır. Görme yetisini yavaş yavaş kaybettiğinde bile matematik hakkında düşünmeye devam etmiş, hatta körlüğün zihnine odaklanmasına yardımcı olduğunu çünkü dikkatinin daha az dağıldığını söylemiştir.

Euler, konuyla ilgisiz bilgileri görmezden gelerek bulmacayı çözmenin daha kolay olacağını düşündü. Örneğin Königsberg haritasının problemle hiçbir ilgisi yoktu, önemli olan sadece köprülerdi. Böylece köprüleri çizgi, adaları ve anakarayı da daire şeklinde çizdi. Bir köprüden diğerine ancak ikisi de aynı daireye bağlıysa yürüyebilirsiniz. Euler'ın Königsberg bulmacası çizimi, günümüzde çizge (graf) olarak bilinen şeyin bir örneğidir.



Königsberg'in yedi köprüsünün grafik şeklinde gösterimi

Çizgede ya da başlangıç ve bitiş noktaları aynı veya farklı olan bir devrede, nasıl yürüdüğünüzün önemi yoktur. Önemli olan her köprüyü yalnızca bir kez geçmenizdir. Bir devre oluşturacaksanız başlangıç ve bitiş noktanıza

giden en az iki çizgi olmalıdır çünkü aynı hattı iki kez kullanma izniniz yoktur. Başlangıç ve bitiş noktanızın farklı olduğu senaryoda ise başlangıç noktasından çıkan ve bitiş noktasına varan birer çizgi olmalıdır.

Bu iki nokta arasında, bir daireden diğerine yürür, her daireye bir köprüyü geçerek varır, başka bir köprüyü geçerek o daireden ayrılırsınız. Dolayısıyla her ara durakta iki çizgi boyunca yürümüş olursunuz. Aynı anda iki köprüyü geçemez veya daha önce geçtiğiniz bir köprüden kaçınmak için tekne kullanamazsınız.

Tüm bu faktörleri hesaba katarsanız bütün köprülerden geçmenin mümkün olduğu sadece iki durum olduğunu göreceksiniz. Bir devre oluşturursanız çizgedeki her daireye dokunan çift sayıda çizgi olmalıdır: her ara durakta iki (veya dört veya altı, aynı daireyi farklı köprüler üzerinden ziyaret etme sayınıza bağlı olarak) ve iki de başlangıç ve bitiş noktalarında. A'dan B'ye yürürseniz tek sayıda çizgiye sahip iki daireye ihtiyacınız vardır; başlangıçtaki ve sondaki. Aradaki tüm çemberlerin hâlâ çift sayıda çizgiye ihtiyacı vardır ancak başlangıç ve bitiş noktalarınızda, ayrılıp varmak için tek bir hatta ihtiyacınız vardır ve bu yüzden oralarda çizgi sayısı çift olmayacaktır.

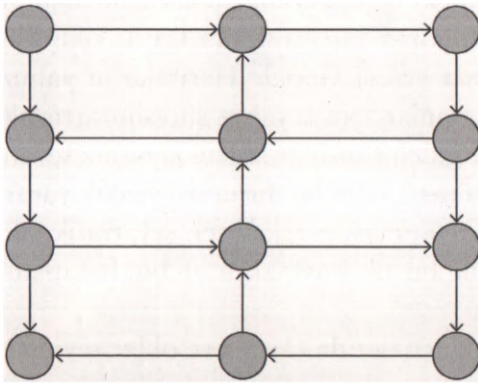
Tüm bunları gözünüzde canlandırmanın zor olup olmadığı önemli değil. Önemli olan, Euler'in, tüm köprülerden ancak bir kez geçmenin mümkün olması için tek sayıdaki çizgiye sahip ikiden fazla daire olmaması gerektiği sonucuna varmış olmasıydı. Königsberg'te tek sayıda köprüye sahip dört daire olduğundan, şehrin içinden yürümek ve her köprüyü yalnızca bir kez geçmek imkânsızdır. Ne kadar çabalarsanız çabalayın, asla yapamazsınız.

Bütün bunların günlük yaşamınızda pek işe yaramadığını düşünebilirsiniz. Ancak nasıl oyunlar olasılık teorisinin gelişmesine yol açıtıysa grafik teorisi de bu bulmacayla

başladı. Euler, bulmacayı daireler ve çizgilerle daha soyut bir şekilde tanımlayarak çözme fikrini ortaya atan ilk kişiydi. Ve bu fikir artık Google Haritalar ile rotaları planlamak için kullanılıyor.

Tek yönlü trafik

Königsberg’de, her iki yönde de köprüleri geçebileceğiniz için haritanın altından başlayıp yukarı doğru ilerlemenizin ya da tam tersini yapmanızın bir önemi yoktu. Ancak bazı durumlarda, örneğin tek yönlü sokakları olan bir trafik sisteminde yönünüz çok önemlidir. O durumda basit çizgiler yeterli olmayacaktır; size hangi yöne gitme izninizin olduğunu göstermek için oklara ihtiyaç vardır. Örneğin Manhattan’da neredeyse tüm sokaklar tek yönlüdür. New York’ta araba kullanmayı matematiksel terimlerle düşünmek istiyorsanız bunu hesaba katmanız gerekir. Bir grafik olarak Manhattan’ın sokak planı şuna benzer:



Manhattan'ın sokak planı

Buradaki daireler, oklarla gösterilen tek yönlü caddeler arasındaki kavşaklardır. Sol alttaki kavşağa geldiğinizde orada sıkışıp kalabileceğinizi görebilirsiniz çünkü oradan

uzaklaşan bir çizgi yoktur. Bu çizge, –en azından trafik kurallarına her zaman uyanlar için– bir sokak planı olarak işe yaramaz.

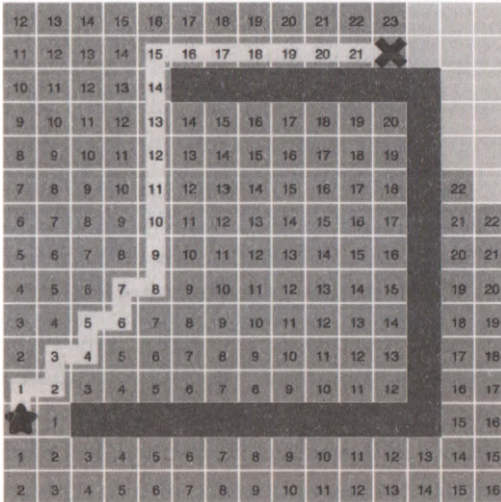
Sol sütundaki kavşakları silerseniz tüm kavşaklara girip çıkabilirsiniz. Yatay ve dikey olarak çift sayıda kavşak olduğunda çizge işe yarar. Bu şekilde, çizgede görebileceğiniz gibi, tam bir devre elde edersiniz. Sokak planının çalışmama nedeni, soldaki devrenin tamamlanmamış olmasıdır. Bu yüzden sol üstteki kavşağa gidemez veya sol alttakinden uzaklaşamazsınız. Sağ üst ve sağ alttaki kesişimler ile ilgili bir sorun yoktur çünkü oralarda devre tamamlanmıştır. Bir matematikçi, bir şehir planlamacısına bunun her zaman işe yaradığını kolayca gösterebilir, böylece planlamacı pratik bir sokak planının nasıl tasarlanacağını düşünürken zamandan tasarruf edebilir.

Elbette Google Haritalar'ın da çizgelerinde oklara ihtiyacı vardır. Sistem, bir rotayı hesaplamak için bir caddenin tek yönlü olup olmadığını bilmelidir. Ayrıca, tıkanıklığın her iki yöndeki trafiği etkileyip etkilemediğini de bilmesi gerekir. Otoyolun bir tarafında trafik sıkışıklığı var, diğer tarafında yoksa Google Haritalar'ın yalnızca sıkışık taraftaki insanlar için seyahat süresini artırması gerekir. Diğer yöne giden şanslılar arasındaysanız seyahat süreniz aynı kalacaktır. Oklar bu durumlarda çok yararlı olabilir; bilgisayarın yapması gereken tek şey, trafik sıkışıklığının olduğu yöne bir ok koymaktır ve bu, hesaplamaya dahil edilecektir.

Google Haritalar'da sayılar ve oklar seyahat sürelerini ve yolları temsil eder. 1. Bölüm'den hatırlayacağınız gibi, fiziksel bir haritaya bakmak zorunda kalmadan bir rotayı hesaplamak için bu iki faktöre sahip olmak yeterlidir. En kısa rotayı bulmak için basit bir hesaplama görmüştük: Bilgisayar, seçilen hedefe giden en kısa rotayı bulana

kadar olası tüm rotaları uzunluk sırasına göre izler. Aradığı rotayı bulmadan önce, daha kısa olanları da takip etmiş ama yanlış hedefe varmıştır. Bu hesaplama Dijkstra'nın algoritması olarak bilinir.

Çizimde, Dijkstra'nın algoritması, sol alttaki yıldızdan sağ üst köşedeki çarpıya en iyi rotayı bulmak için kullanılmıştır. Daha net görülebilmesi için çizge, daireler yerine bloklar halinde gösterilmiştir. Her bloğun, bitişik bloklar yönünde dört oku olduğunu hayal edebilirsiniz. Başka bir deyişle bir kareden diğerine yalnızca yatay ve dikey olarak seyahat edebilirsiniz. Karanlık blok sırası, bir nehri veya arabanızla geçemeyeceğiniz başka bir engeli temsil eder. Numaralandırılmış her blok, algoritmanın gitmek istediğiniz yer olup olmadığını görmek için baktığı bir yerdir ve her numara o rotadaki adım sayısını temsil eder. Açık renkli bloklar, bilgisayarın tüm olası rotalar arasında belirlediği en kısa rotayı gösterir.



Dijkstra'nın algoritmasıyla hesaplanan, adım sayısı yirmi üçten az olası tüm güzergâhları gösteren çizge

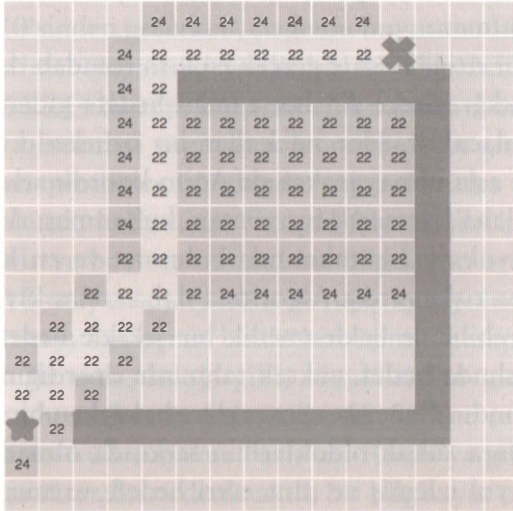
Dijkstra'nın algoritması, her zaman olduğu gibi, rotayı çok sistematik hesaplamıştır. Bilgisayar ilk olarak bir blok uzunluğundaki tüm yollara bakar. Bu yollar şekilde 1 ile işaretlenmiştir. Daha sonra 2 ile işaretlenmiş tüm rotalara geçer. Yirmi iki blok ötedeki çarpıya ulaşmak çok uzun sürer çünkü yirmi üç bloktan daha kısa birçok rota vardır. Bilgisayar, hedefe ulaşmasalar bile bu rotaların hepsini hesaplar. Ve bu algoritmanın sorunu da budur: Doğru yolu bulmadan önce bilgisayarın çok sayıda hesaplama yapması gerekir.

Ne kadar çok yol varsa ve hedef ne kadar uzaksa, rotayı hesaplamak o kadar uzun sürer. Bu yüzden Google Haritalar bu algoritmayı kullanmaz. Bu tür şirketlerde çoğu zaman olduğu gibi, Google'ın kullandığı program bir sırdır ama rota bulmada hangi yöntemlerin popüler olduğunu bildiğimiz için makul bir tahminde bulunabiliriz. Bunlardan biri A* (A yıldız) algoritmasıdır. A mümkün olan en kısa rotaları da hesaplaması açısından Dijkstra'nın algoritmasına benzer. Ancak A*, hedefe olan mesafenin bir tahminini de içerir.

Böyle bir tahmin yapmak zor değildir. Her ne kadar bilgisayar tüm çizgeyi göremese de biraz ek bilgi sayesinde epey yol kat edebilir. Örneğin Google Haritalar, başlangıç noktanızın ve varış noktanızın koordinatlarını bilir. Enlemler arasındaki ortalama mesafe 111 kilometre iken, boylamlar arasındaki mesafe değişir; ekvatorunda yaklaşık 111 kilometre iken kutuplarda sıfıra yakındır. Böylece, bilgisayar rotanın başlangıcı ve bitişi arasında kaç boylam ve enlem olduğunu bildiğinde, aralarındaki mesafeyi ve hedefinize ulaşmanızın ne kadar süreceğini tahmin edebilir. Ancak bu tahmin, yolların sayısı, hız sınırları, trafik sıkışıklığı gibi bilgileri hesaba katmaz. Bu nedenle Google, tahminlerini yapmak için şüphesiz daha iyi bir

yöntem kullanır. Bunun tam olarak ne olduğunu bilmiyoruz ancak arkasındaki fikir A* algoritmasından çok farklı değildir. Google, matematiksel olarak hesaplamaya başlamadan önce bir rotanın ne kadar süreceği konusunda akıllıca bir tahmin yapar.

A* algoritmasının arkasındaki matematiksel püf noktası, yalnızca kat edilen mesafeye bakmakla kalmayıp aynı zamanda gidilecek mesafeyi de tahmin etmesidir. Ardından, yalnızca bu iki değerin toplamının mümkün olduğunca düşük olduğu rotaları dikkate alır. Bu, epey fark yaratabilir. Çizge, A* algoritmasının yukarıda Dijkstra algoritması kullanılarak hesaplanan rotayı nasıl oluşturduğunu gösteriyor. Gördüğümüz gibi, bilgisayar çok daha az sayıda olası rotaya bakıyor.



Aynı rotanın A* algoritmasıyla hesaplanması

Bu örnekte, A* algoritmasının yirmi iki blok tahmini çok doğrudu ve gerçek en kısa rotayı buldu. Bu tahmine, enlem ve boylam hesaplamasında kullanılabilecek bir

matematik parçasıyla ulaştı: Başlangıç noktasının koordinatlarını (alttan üç, soldan bir) hedefin koordinatlarından (alttan on dört, soldan on iki) çıkardı. Elde edilen toplam, $(14 - 3) + (12 - 1) = 22$ idi. Hedefe kalan mesafenin ara tahminleri de bu yöntem kullanılarak yapılabilir.

Bilgisayar önce hedefe varmayan birçok rotaya bakar. Örneğin, bir köprü olsa hedefe daha hızlı ulaşabileceği nehir boyuna. Yine de A^* , Dijkstra'nın algoritmasından bariz daha hızlıdır. Şeklin sağ alt kısmında tamamen yanlış yöndeki bloklar yoktur. Bunun nedeni, o alana ulaşmanın zor olması ve algoritmanın oraya ulaşmak için başlangıç noktasından itibaren çok adım atması gereğiğidir, bu nedenle bilgisayar hedeften çok uzak olduğunu tahmin etmiştir. Bu iki mesafenin toplamı, tamamen yanlış yöndeki rotalar için çok yüksektir, dolayısıyla A^* bunları hesaba katmaz.

Tahmin ettiği mesafe gerçek en kısa rotadan daha yüksek olmadığı sürece A^* her zaman hedefe giden en kısa rotayı bulacaktır. Her ne kadar bu örnekte kullanılan yöntemle asla olmayacaksa da A^* 'ın koordinatları çıkarmaktan daha karmaşık bir yöntem kullanması durumunda daha yüksek bir tahminde bulunma ve en kısa yolu bulamama riski vardır. Algoritma daha sonra kıvrımlı bir rota izleyebilir ve beklenmedik bir şekilde hedefe ulaşabilir ki aslında hedef, yüksek tahminin önerdiğinden çok daha yakındır. Örneğin, seçeneklere bakarken bir sürü ara sokakta (ara sokak olduklarının farkında olmadan) kıvrımlı bir yol izlemiş ve şans eseri hedefe varmış olabilir. Bilgisayar bunu tahmin edemez çünkü yüksek tahmine göre hedefe yakın bir yerde değildir.

Bu dezavantajına rağmen A^* , Dijkstra'nın algoritmasından açıkça daha iyidir çünkü bilgisayarın uzun mesafelerde çok daha az hesaplama yapması gerekir. Süreci

hızlandırmak için başka matematiksel püf noktaları da vardır. Örneğin, bilgisayar hem başlangıç hem de varış noktasından aynı anda başlayarak, iki rota kavuşana kadar her iki yönden rotayı hesaplayabilir. Başlangıç noktasından itibaren ilk adımı, ardından hedeften ilk adımı, ardından başlangıçtan itibaren ikinci adımı vb. hesaplar ve A^* kullanarak her iki yönde kalan mesafeyi tahmin eder. Akıllı programlama ile bir bilgisayar, tüm Kuzey Amerika karayolu ağı boyunca en uygun rotaları bile hesaplayabilir.

Bu karayolu ağıyla yapılan bir deney, iki yöntem arasındaki farkın ne kadar büyük olduğunu göstermiştir. Ağın tamamı 21.133.774 daire (kavşaklar) ve 53.523.592 bağlantı çizgisinden (yollar) oluşmaktadır. Dijkstra'nın algoritması, bir rota bulmak için bu çemberlerin ortalama 6.938.720'sinden geçerken, çizgenin boyutunu küçültmek için tahminler yapan iki yönlü bir A^* algoritması, "yalnızca" 162.744 daireye bakarak en kısa rotayı bulmuştur.

Bu ön tahminleri yapmak çok önemlidir ve günümüzde en yaratıcı yenilikler bu alanda yapılmaktadır. Örneğin, yaygın olarak kullanılan "otoyol hiyerarşileri," çizgeyi basitleştirir ve böylece normal bir bilgisayar, orijinal çizgesinde 18 milyon daire olan Avrupa karayolu ağındaki en kısa rotayı saniyenin binde biri içinde hesaplayabilir. İsminden de anlaşılacağı gibi, otoyollardan giden uzun rotalar muhtemelen en kısa yollardır. Sadece şehir içi ve köy yollarını kullanırsanız Paris'ten Roma'ya gitmek çok daha uzun sürer, bu nedenle akıllı bir bilgisayar onları göz ardı eder. Yalnızca başlangıç noktanızı ve varış noktanızı otoyol ağına bağlayan daha küçük yollara bakar.

Bilgisayar hangi okların otoyol olduğunu önceden bilmez. "Otoyol hiyerarşileri" yönteminin önündeki temel zorluk, biri o işi önceden yapmak zorunda kalmadan

otoyolları tespit etmektir. Orijinal çizgedeki en kısa süren rotalar içinde bilgisayarın en sık karşılaştığı yollara bakarak bunu tamamen otomatik olarak yapabilir. Taşra yolları uzun mesafelerdeki en kısa rotalarda çok sık görünmeyeceğinden, bilgisayar bunları görmezden gelir ve geriye yalnızca daha önemli yollar kalır. “Otoyol hiyerarşileri” yönteminin arkasındaki, otoyolların çok sayıda insan tarafından kullanılan yollar olduğu fikri, bilgisayarın milyonlarca önemsiz daireyi ve oku göz ardı edebileceği ve bu sayede hesaplanacak çok daha az rota olduğu anlamına gelir.

Paris’ten Roma’ya giden rotaya geri dönersek: Bilgisayar önce Paris’teki başlangıç noktasından en yakın otoyola nasıl gidileceğine bakar ve ardından, rotayı her iki uçtan hesapladığı için Roma’daki varış noktasından da aynısını yapar. Otoyolları bulduktan sonra, diğer tüm yolları görmezden gelebilir ve her iki uçtan gelen rotalar otoyolda kavuşana kadar hesaplamaya devam eder. Otoyollar hariç tüm yollar göz ardı edilerek hesaplama çok daha basit hale getirilmiştir. Bu şekilde, koordinatlarınıza göre yolculuğunuzun mesafesini tahmin etmekten, üzerinde yapılan yolculukların sayısına göre otoyolları tanımaya kadar bir dizi matematiksel fikir, çok uzun mesafelerdeki rotaları otomatik olarak hesaplamamıza olanak sağlamıştır.

İnternet üzerinde yolculuklar

Buna benzer çizgelerle her gün sadece Google Haritalar’ı kullandığımızda değil, hareket halinde olmadığımızda da karşılaşıyoruz. Google’da yaptığınız her aramada bunlar kullanılır. Gördüğünüz site ziyaret sayıları büyük ölçüde Google’ın internet üzerinde kendi kendine yaptığı yolculuklara dayanıyor. Bu yolculuklar arama motorlarını

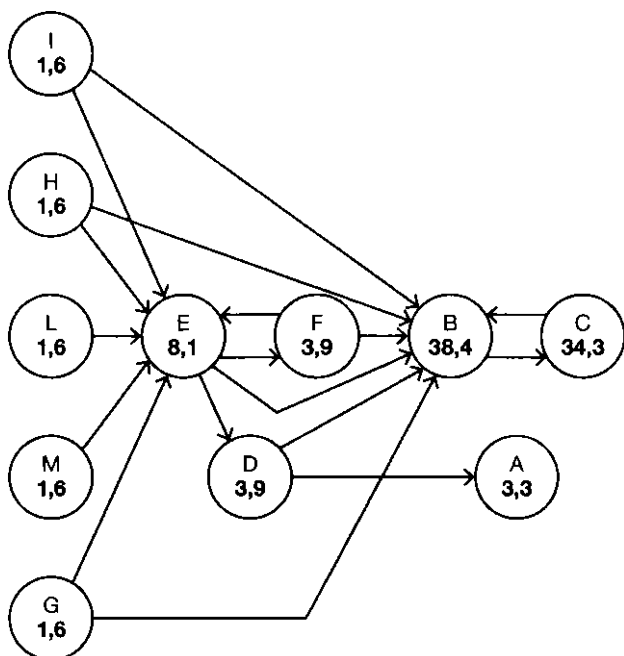
çok daha iyi hale getirdi. Giriş bölümünde söylediğim gibi, Google'dan önce arama motorları kendilerini bile bulamıyorlardı!

Google'ın kurucuları, en önemli internet sayfalarının nasıl bulunacağı sorununu matematikle çözdü. İnterneti hiperbağlantılarla birbirine bağlanmış web sayfalarından oluşan büyük bir çizge olarak gören ilk kişiler onlardı. Örneğin Wikipedia'da, sayfadan sayfaya atlayarak internette seyahat edebilirsiniz. Yolculuğunuz sırasında aynı sayfaya rastlıyorsanız önemli bir sayfa olmalıdır çünkü ziyaretçi sayısı listesinde üst sıralarda yer alıyordur. Bu nedenle Google, arama yaptığınızda hangi sayfaya gideceğinizi belirlemek için internette seyahat ederek çok zaman harcar. Ve bu sayfa da yalnızca Bill Clinton'ın eski bir fotoğrafını gösteren, az bilinen bir web sitesi değil, çok büyük sıklıkla Wikipedia olacaktır.

Elbette Google bunu matematiksel bir hesaplama kullanılarak yapar. Bu da iyi bir şeydir çünkü o zaman doğru web sitelerini önemli olarak etiketlediğinden çok daha fazla emin olabilir. İnternette rasgele seyahat ederseniz bir yerlerde, örneğin komplo teorileriyle ilgili bir grup web sitesi içinde sıkışıp kalma şansınız yüksektir. Tüm bu sitelerin birbiriyle bağlantıları vardır ancak bunlar Wikipedia'dan daha önemli bilgi kaynakları değildir. Google'ın hesaplaması aradaki farkı görebilmenizi de sağlar; bu, internette rasgele gezindiğinizde pek mümkün olmaz. Bu şekilde çoğu arama komplo teorileriyle değil, doğru bilgilerle sonuçlanır. Örneğin yakın zamanda yapılan bir araştırma, Google'ın daha tutarlı gerçekleri içeren haber sitelerini daha üst sıralarda listelediğini buldu.

Bir sonraki sayfadaki çizgenin tüm interneti gösterdiğini hayal edin. Dairelerdeki harfler web sitelerini temsil ediyor. Örneğin B, diğer birçok sitenin atıfta bulunduğu

güvenilir bir bilgi kaynağı, Wikipedia olabilir. Sayılar her sitenin Google'ın gözünde ne kadar önemli olduğunu gösterir; bunlar Google'ın hesaplaması gereken puanlardır. Yüksek bir puan, bir web sitesinin önemli olduğu anlamına gelirken, düşük bir puan, o siteyi ziyaret etmek istiyorsanız siteyi gerçekten bilmeniz gerektiği anlamına gelir. En azından Google'a göre öyle.



Google'ın gözünden internet

Bu sayıları, tüm internette gerçekten bir yolculuğa çıkmış gibi yaparak hesaplıyorsunuz. Bir web sitesinden diğerine bağlantılarla, çizgedeki oklarla gidirsiniz. I web sitesinde bir şey okursunuz ve sonra E sitesine gidirsiniz. Oradan, F aracılığıyla B'ye ulaşırsınız. Bu örnekte, neredeyse tüm yollar B'ye (Wikipedia) çıkar ve bu nedenle B yüksek bir

puan alır. Kısa sürede kendinizi B'nin sayfalarından birinde bulursunuz.

Wikipedia, daha fazla bilgi kaynağı olarak başka bir web sitesine, C'ye bağlantı verir. C yalnızca Wikipedia ile bağlantılı olmasına rağmen, yüksek bir puan alır çünkü –hakkındaki tüm şikâyetlere rağmen– Wikipedia oldukça güvenilirdir. Yalnızca bir sitenin bağlantı verdiği D, çok daha düşük bir puana sahiptir. Bu nedenle yalnızca bakmakta olduğunuz sayfaya kaç sitenin bağlantı verdiği değil, aynı zamanda bağlantı veren bu sitelerin ne kadar yüksek puan aldığı da önemlidir.

Biraz daha netleşiyor mu? Diyelim ki iki web sitesi arasında seçim yapmanız gerekiyor: 11 Eylül hakkında bir Wikipedia sayfası ve saldırılarla ilgili komplo teorilerini destekleyen bir sayfa. Google'a göre, önce bu sitelere verilen bağlantı sayısına bakmalısınız. Wikipedia'da bu sayı epey yüksektir ama komplo teorisini ortaya atan insanlar, sitelerinin daha fazla bağlantıya sahip olmasını sağlamak için epey para harcamışlardır. Yani neredeyse hiç kimse- nin ziyaret etmediği ve her türden saçmalığı içeren pek çok web sitesi, komplo teorisi sitesine bağlantı vermektedir. Bu, Wikipedia'nın aniden daha az önemli hale geldiği anlamına mı geliyor? Kesinlikle hayır. Google, insanlar 11 Eylül ile ilgili bilgi aradığında karşılıklarına ilk önce çok para harcanan komplo teorisi sitesinin çıkmasını istemez: Google kullanıcıları, en çok paranın harcandığı bilgileri değil, en güvenilir bilgileri görmek ister. Google, belirli bir sayfaya bağlantı veren sitelerin ne kadar önemli olduğunu hesaba katarak bunun gerçekleşmesini kısmen sağlayabilir. BBC'ye komplo teorilerinin bağlantılarını kendi sitesine yerleştirmesi için ödeme yapamazsınız; bu nedenle Google, BBC sitesindeki bağlantılara başka bir sitenin para karşılığı sattığı bağlantılardan çok daha fazla değer verir.

Ama aslında interneti böyle kullanmayız. En son ne zaman bağlantıdan bağlantıya tıklayarak art arda elli web sitesini ziyaret ettiniz? Çoğunlukla, örneğin Facebook'a gitmek istiyorsanız, sitenin adresini (URL) yazmanız yeterlidir. İyi bilinen sitelere bağlantılar yoluyla gitmek zahmetlidir. Google da bunu her zaman yapmaz. Bazen hesaplamasını yaparken doğrudan bir siteye gidecektir. Aynı şekilde, aniden Wikipedia'dan Facebook'a (örneğin, resimde B'den E'ye) atlayabilirsiniz çünkü arkadaşlarınızın yeni bir şey gönderip göndermediğini merak edersiniz. Sonunda Facebook'a ulaşmak için web sitelerindeki bağlantıları (çizgedeki okları) takip etmek yerine adres çubuğuna Facebook'u girersiniz. Hesaplanırsa bilgisayarın bir bağlantı yerine URL kullanma (bir oku takip etmek yerine rasgele bir daireye atlama) olasılığı altıda birdir. Bu, davranışımızı tam olarak taklit etmez ama bilgisayarın bir URL'yi yazmasının altıda bir olasılığı, hesaplamayı çok fazla yavaşlatmadan (olasılık ne kadar düşükse hesaplama o kadar uzun sürer) web sitelerinin görece önemi hakkında epey bilgi verir.

Sonuç olarak bu, sayılarla doldurulması gereken büyük bir bilmecedir başka bir şey değildir. C web sitesine B üzerinden giderseniz C'nin puanı artar çünkü gelen bağlantı, web sitesini daha önemli hale getirir. C'den B'ye geri dönerseniz B de puanını yükseltir çünkü B'ye olan bağlantılardan biri daha önemli hale gelmiştir. Bu da C'nin puanını tekrar artırır ve bu böyle devam eder. Neyse ki puanlar sonsuz bir şekilde artmaz. Belli bir noktada artık değişmedikleri matematiksel olarak ispatlanabilir. Google genellikle yaklaşık elli hesaplama sonra durur. Bir başka deyişle arama motorunu kullanarak bulunabilen her web sitesi için Google elli kez puan hesaplar. Bu hesaplardan sonra puanlar artık değişmez.

Yani işin matematiği şu şekildedir: Rasgele farklı web sitelerini ziyaret etmek için arada bir URL'ler girerek, bağlantılardan oluşan bir çizgede gezinirsiniz. En önemli siteler, çok sayıda başka önemli sitelerle bağlantıları olan sitelerdir; başka bir deyişle, internette yolculuğunuz sırasında sık karşılaştığınız sayfalardır. Ve bu sadece web siteleri için değil, diğer durumlarda da çok işe yarar; örneğin hangi filmleri beğenebileceğinizi bulmak için.

Filmleri bir çizgeyle izleme

Netflix, yeni filmler ve diziler önermek için aynı hesaplamaı kullanır. Netflix bilgisayarları, algoritmalarını Google kadar gizli tuttuğu için tam emin olmasak da muhtemelen tavsiyelerine ulaşmak için üzerinde seyahat ettiğiniz bir çizge kullanıyor. Belki sadece afişini gördüğünüz veya bir arkadaşınız çok hevesle önerdiği için tamamen farklı bir film arayabilirsiniz. Netflix, zevkinizin ne olduğunu anlamaya çalışmak için seçimlerinizi kullanır. Sizi birkaç grupta kategorize eder ve bu kategorilere göre de önerilerde bulunur. Tüm bunların arkasında, Google'ın kullandığıyla aynı matematiksel hesaplama vardır. *Iron Man*'i izlerseniz ne olacağına baktığımız 1. Bölüm'ü hatırlayalım. Netflix, diğer tüm aboneleri hakkında bildiklerini, bu abonelerin *Iron Man*'i izledikten sonra ne izlediklerini ve kaç kişinin *Iron Man*'in ardından *Iron Man 2*'yi izlediği bilgilerini kullanır. Eğer bu sayı çoksa, *Iron Man 2* iyi bir öneridir ve ona daha önce izlediğiniz filmlere ve dizilere benzediğini gösteren yüksek bir yüzde verir. *Blue Planet* bu kadar yüksek bir puan almaz çünkü aksiyon filmlerini ve doğa belgesellerini izlemeyi seven çok daha az insan vardır.

Matematiksel olarak Netflix ile Google arasında ne-redeyse hiç fark yoktur. Netflix'in algoritması insanların

davranışlarını taklit eder. Sizinle aynı zevke sahip birçok insanın izlediği filmleri büyük ihtimalle sizin de izleyeceğinizi varsayar; tıpkı Google'ın, çok sayıda önemli web sitesinin bağlantı verdiği web sitelerinin de önemli olduğunu varsayması gibi. Sevdiğiniz filmlere benzeyen bir filmi beğeneceksiniz. Ve ara sıra biraz macera arar ve sırf beğenip beğenmediğinizi görmek için tamamen farklı bir şey izlerseniz matematiksel hesaplama, benzer bir film veya diziye düz bir çizgi şeklinde gitmez, çizgede tamamen farklı bir yere atlar.

İnternetteki en önemli bilgileri bulmak için geliştirilen bir matematik parçasının, kullanıcıların zevklerine uygun film ve dizileri bulmak için de kullanılabileceğini görüyoruz. Her ikisi de çok fazla hesaplama kapasitesi gerektirir. Netflix'te çok sayıda film ve dizi vardır ve hepsine bir puan verilmesi gerekir. Ve tıpkı Google'da olduğu gibi, bu puanın defalarca, her kullanıcı için yeniden hesaplanması gerekir. Hesaplamalar, Netflix'in size sunduğu film ve dizilerin tercihlerinize uygun olmasını sağlamaya çalışır.

Ancak bu yol her zaman işe yaramaz: Netflix size daha önce gördüklerinizden tamamen farklı bir film veya dizi öneremez. Başka bir deyişle sizi gerçekten şaşırtamaz. Önerilerini, daha önce izlediklerinize en çok benzeyen filmlere bakarak hesaplar; beğenebileceğiniz tamamen farklı şeye bakarak değil. Matematik bunu yapamaz: Filmler hakkında hiçbir fikri yoktur.

Kanseri daha etkili tedavi etmek için matematiği kullanmak

Çizgelerle çalışmayı sevenler yalnızca büyük internet şirketleri değildir. Çizgeleri hastaneler de örneğin kanser için belli bir tedavinin ne kadar etkili olacağını tahmin etmek

için kullanırlar. Tedavi, kısmen genlerdeki farklılıklar nedeniyle hastadan hastaya değişir; ancak Google ve Netflix tarafından kullanılan aynı hesaplama ile bu farklılıkları oldukça doğru tahmin etmenin mümkün olduğu kanıtlanmıştır. Bu hesaplamaları kullanmadan önce doktorlar vakaların yüzde 60'ında haklı çıkıyordu. 2012 yılında yapılan bir çalışmada çizge teorisini kullanmaya başladıklarında, daha ilk baştan yüzde 72'lik bir başarı oranı elde ettiler. Bu, doğru tedavi önerilmediği takdirde işe yaramayabilecek tedavilerde değerli zamanlarını kaybedecek olan tüm hastalar için muazzam bir gelişmeydi.

Kanser tedavisi tahminleri, küçük bir gen grubuna dayanmaktadır. Matematik kullanılmadan önce, bu grubu seçmek bir tahmin meselesiydi. Her araştırmacı, kendi seçtiği gen grubuna odaklanır, bunlar da genellikle meslektaşlarının incelediği genlerden tamamen farklı olurdu. Kimse tam olarak hangi genlerin en önemlileri olduğunu bilmiyordu ve çok sayıda gen bulunduğu için mantıklı bir seçim yapmak neredeyse olanaksızdı. Durumu daha da zorlaştıran, araştırmacıların spesifik bir tedaviden sonra farklı davranan genleri aramaları ama bazı genlerin bunu, kendilerini görünür şekilde değiştirmeden diğer genlerin davranışlarını etkileyerek yapmasıdır. Bunun sonucunda önemli genler kendilerini araştırmacılardan gizleyebilmektedirler. Spesifik bir tedaviden sonra hangi genlerin önemli ölçüde değiştiğini belirlemek epey zor bir iştir.

Belirli bir şeyi bulmak için muazzam miktarda bilgiyi araştırmak, tam olarak Google ve Netflix'in yaptığı şeydi ve bir grup araştırmacı aynı hesaplamaları genlere uygulama fikrini ortaya attı. Ardından, genlerin davranışlarını nasıl değiştirdiklerine ve birbirlerini nasıl etkilediklerine dair deneylere dayalı bir çizge tasarladılar. Daireler

genleri, aralarındaki çizgilerse birbirlerini ne kadar etkilediklerini temsil ediyordu.

Bu yöntemin Google ve Netflix'te uygulanandan küçük bir farkı vardı: Araştırmacılar işe tüm genlere aynı puanı vererek başlamadılar. Başlangıç puanları, genleri hastanın hayatta kalma şansı ile ilişkilendiren diğer araştırmalara dayanıyordu. Örneğin çok aktif bir gen kanserle savaşmaya yardımcı olabilir ve bu nedenle o gene yüksek bir başlangıç puanı verilir, bu da doktorların ona bakmasının önemli olduğu anlamına gelir. Sonrasında çizge, Google ve Netflix ile tamamen aynı şekilde çalışır: Bir bilgisayar, genlerin birbirleri üzerindeki etkileri hesaba katıldığında puanlarının nasıl değiştiğini görmek için genden gene dolaşır.

Puanların sürekli olarak yeniden hesaplanması sonucunda, hastanın hayatta kalma şansı ve tedaviye verecekleri tepki için en çok öneme sahip olan birkaç gen ortaya çıkar. Bu şekilde algoritma, genlerin önemi ve birbirleri üzerindeki etkileri ile ilgili tüm bilgileri işleyerek kanser tedavisinde doğrudan veya dolaylı olarak en önemli genleri tam olarak bulur. Matematik, genlerle ilgili tüm bilgilerin eksiksiz bir özetini, 2012'den önce kullanılan diğer yöntemlere kıyasla çok daha kolay ve tutarlı bir şekilde oluşturur. Böylece, bu amaç için tasarlanmamış olsa da bir parça matematik hayat kurtarabilir.

Facebook, arkadaşlıklar ve yapay zekâ

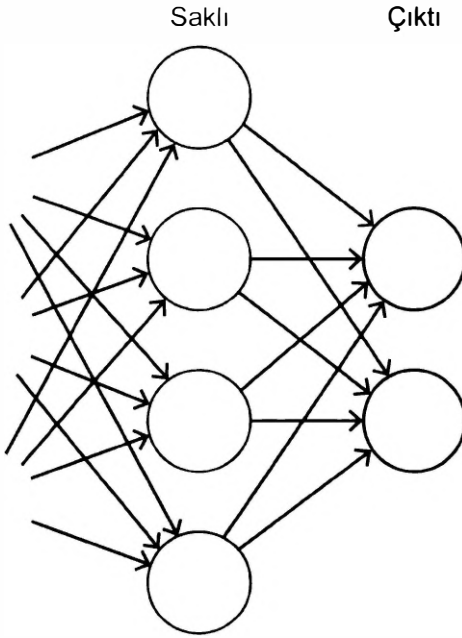
Son örneğimiz olan Facebook da hesaplamalar yapmak için buna benzer çizgeler kullanır: Amacı, bilgileri değil, önerdiği arkadaşları sınıflandırmaktır. Sonuçta Facebook kimin kiminle arkadaş olduğunu bilir ve her kullanıcıyı gösteren ve arkadaşlarına bağlayan muazzam bir çizge

oluşturur. Facebook sizden başlayarak ve çizgede gezinerek gerçek hayatta kimlerle karşılaşmış olabileceğinizi hesaplayabilir. Sizinle aynı arkadaşlara sahip biriyle bir partide tanışmış olma şansınız yüksektir. Aynı şey sizinle aynı arkadaşlara sahip olan diğer kişi için de geçerlidir. Bunu ölçmek biraz zor ama diyelim ki yaklaşık yirmi tane ortak arkadaşınız olsun. Arkadaşlarınızdan birinin sizi bu kişiye bağlama ihtimali vardır. Başka bir deyişle, Facebook yalnızca kimi tanıdığınızı değil, kimi tanıyabileceğinizi de bilir.

Bu sizi endişelendiriyor olabilir ama Facebook'un sizin hakkınızda bildiği diğer şeyler kadar endişe verici değildir: Facebook kimi aradığınızı, hangi web sitelerini ziyaret ettiğinizi ve sizinle ilgili benzeri pek çok şeyi bilir. Facebook'un kullanıcıları, hatta hiç hesap açmamış insanlar hakkında bile ne kadar çok veri toplamaya çalıştığıyla ilgili birçok hikâye vardır. Hepsi bu veri yığını çizgelerle analiz edebilmek içindir. Facebook, arama sonuçlarını Google'ın yaptığı gibi sıralamaz ama "sinir ağlarını" kullanır. Bu ağlar, konuşma tanımadan istenmeyen postaları filtrelemeye ve tıbbi teşhislere kadar neredeyse her türlü yapay zekâ uygulamasını mümkün kılarlar. Ayrıca hedefli reklamcılığı geliştirmek için de kullanılırlar. Bu sayede Facebook, kullanıcılarını "180 gün içinde muhtemelen bir Mazda satın alacak kişiler" gibi gruplara ayırır.

Sinir ağları, muazzam miktarda veri sayesinde, Facebook'un siz daha kararınızı vermeden önce ne satın alabileceğinizi bilmesini sağlar. Buradaki fikir, çizgelerin sadece hangi çemberlerin en önemli olduğunu hesaplamamızı sağlaması değil, aynı zamanda onları beynimizi taklit etmek için de kullanabiliyor olmamızdır. Birbirine bağlanan ve sinyal gönderen nöronların yerini ağlar, yani birbirine bağlı oklar aracılığıyla sayı alışverişi yapan dairelerden

oluşan çizgeler alır. Bilgi bir uçtan girilir ve diğer taraftan bir tahmin olarak çıkar: Örneğin, bir Facebook kullanıcısı olarak sizle ilgili bilgiler sayesinde hangi reklam kategorilerinin size en uygun olacağı tahmin edilir. Bu çizgeler, boşlukları doğru sayılarla doldurmaya çalıştığınız bulmacalar değil, tamamen farklı bir şey hakkında tahminlerde bulunmak için kullanılabilecek dinamik bir bütündür.



Bir sinir ağının ölçekli modeli

Resimde görüldüğü gibi, sinir ağı bir çizgedir ama dairelerin oynadığı rol farklıdır. Soldaki sütun girdidir; tıpkı beynimizde olduğu gibi, bilginin girdiği yer burasıdır. Girdi, beynimiz söz konusu olduğunda bir fotoğraf veya yüz olabilir ancak bu ağlarda 0 ile 1 arasındaki sayılar biçimindedir. Bu sayılar –bilgi– daha sonra orta bölümdeki dört dairede işlenir. Sol üstteki giriş çemberindeki

1, ortadaki üst çembere geçtiğinde 0,5 olabilir çünkü bu çemberden çıkan her girdi değeri ikiye bölünür. Tıpkı nöronlar arasındaki bağlantıların bilgiyi değiştirmesi gibi, oklar da sayıları değiştirir. Bağlantıların hepsi eşit derecede güçlü değildir, bu yüzden bazı nöronlar birbirlerini diğerlerinden çok daha fazla etkiler; bir girdi değerini çarpabilir veya ikiden daha fazla bir sayıya bölebilirler. Algoritma, bir çizge aracılığıyla beynin işleyişini taklit eder.

Girdinin bu bağlantılar aracılığıyla değiştirildiği birçok ara turdan sonra, bilgiler sağ sütundaki dairelere, çıktıya ulaşır. Girdi, örneğin, bir yüzün resmiyse sağdaki iki daire bu yüzün bir erkeğe mi yoksa bir kadına mı ait olduğu sorusunun yanıtlarıdır. Bilgisayar resimdeki yüzün bir erkeğe ait olduğundan eminse, “erkek” için olan daire 1, kadın için olan daire ise 0 değerini alır. Bilgisayarın bu sonuca nasıl vardığı –bir başka deyişle girdiyi nasıl çıktıya dönüştürdüğü– genellikle bilinmemektedir.

Çoğu durumda, bilgisayar ara adımları kendisi tasarlar. Problemleri çözdükçe çizgeyi değiştirir. Bu, bilgisayarın yanıtlarını bildiği fotoğraflar üzerinde pratik yaparak sorunları çözmede daha iyi hale geldiği “eğitim aşaması”dır. Bu yüzden sık sık bilgisayarların “öğrenebileceğini” söyleriz. Bilgisayarlar daireler arasındaki bağlantının değerini, yani okların yanındaki sayıları değiştirirler. Sol üstteki girdi dairesi, örneğin fotoğraftaki kişinin saçının uzunluğunu ifade ediyorsa bu, hesaplama için ilk başta o kadar önemli olmayabilir. Bu durumda daire ve ondan gelen oklar çok düşük bir puana sahip olacaktır. Bilgisayar “alıştırma yaparken” saç uzunluğunun önemli bir faktör olduğunu keşfedebilir ve “saç dairesi”nden gelen oklara daha yüksek bir sayı atayabilir.

Bunun için yığınla veriye ihtiyaç vardır. Yüz tanıma için çok sayıda fotoğraf lazımdır ve eğitim için her

fotoğraftakinin erkek mi yoksa kadın mı olduğunu bilmemiz gerekir. Bilgisayar işe oldukça rasgele başlar. İlk fotoğraftaki hiçbir şeyi tanımaz ancak daha sonra doğru olanla karşılaştırılan ve eğitim aşamasında ölçüt olarak kullanılan bir yanıt üretir. Bu karşılaştırmaya dayanarak, bir sonraki fotoğrafa geçmeden önce bir dizi değişiklik yapar. Bu süreci yeterince sık tekrar ederse neredeyse her zaman doğru yanıtı bulacaktır.

Örneğin bir bilgisayar, sonunda Go oyununda bir insanı yendi. Uzun bir süre bu oyun bilgisayarlara çok zor geliyordu ama başarılı bilgisayar, insan rakibini mağlup etmeden önce kendisine karşı milyonlarca oyun oynamak için muazzam bir çizge kullandı. Çizgeyi değiştirmek için her oyunun nasıl kazanıldığına dair bilgileri kullandı. Bunu yaparken oyunun kurallarını ve nasıl daha iyi oynatabileceğini kendine öğretti. Günümüzde bir bilgisayarın, oyunu dünya şampiyonunu yenecek kadar iyi öğrenmesi için sadece üç güne ihtiyacı var.

Facebook, bir Mazda satın alma olasılığınızın olup olmadığını öğrenmek için aynı fikri kullanıyor. İstihbarat servisleri ise suçluları ve teröristleri tespit etmek için kullanmak istiyor. Çin, çizge teorisi sayesinde bir toplumsal kredi sistemi kuruyor ve nüfusun her üyesine davranışlarına bağlı olarak bir puan veriyor. Teorinin, bazıları oldukça endişe verici olan birçok olası uygulaması mevcut. Bilgisayarlar, örneğin, bir kişinin cinsel tercihini bir fotoğraftan belirleyebilir. Tahminler henüz mükemmel değil ama bu mümkün. Bu da tahminlerin kötüye kullanıma açık oldukları anlamına geliyor.

Cambridge Analytica skandalı buna iyi bir örnektir. Bu İngiliz-Amerikan danışmanlık şirketi, Facebook'tan alınan, hangi mesajların kimler üzerinde en çok etkili olacağı da dahil olmak üzere pek çok veriyi, siyasi tercihleri

tahmin etmek için kullandı ve insanları Donald Trump'a oy vermeye nasıl ikna edeceği üzerine çalıştı. Şirket ayrıca 2015 yılında ABD başkan adayı Ted Cruz'un kampanyası için çalıştı ancak kampanya çok başarılı olamadı. Cambridge Analytica'nın çalışmalarının insanların oy verme tercihleri üzerinde ne gibi bir etkisi olduğunu asla bilemeyeceğiz ama apaçık ortada olan şey, şirketin ilk başta tüm bu verilere asla erişememiş olması gerektiği ve bu verilerle çizge teorisi sayesinde çok şey yapabileceğidir.

Arka plandaki çizgeler

Gördüğümüz gibi, çizgeler her yerde istatistikler gibi doğrudan değil; arka planda karşımıza çıkar. Tıpkı integral ve türevde olduğu gibi, bir navigasyon sistemini veya Google veya Netflix'i kullanmak için çizgeler hakkında hiçbir şey bilmemize gerek yoktur. Öyleyse çizge teorisi hakkında bir fikir sahibi olmak önemli mi? Bence önemli çünkü çizgelerin kullanım şekli hayatlarımız üzerinde muazzam bir etkiye sahip olabilir.

Bu bölümün başında, Google Haritalar'ın hedefinize giden en hızlı rotayı hesaplamak için çizgeleri nasıl kullandığını gördük. Integral ve türev gibi, bu tür uygulamalar da hayatımızı çok fazla değiştirmez. Bazı şeyleri kolaylaştırırlar; örneğin artık harita okumayı bilmeniz gerekmez. Ancak bu uygulamaları gerçekten isteyip istemediğimiz gibi daha ciddi sorular sormamızı sağlamazlar. Elbette A'dan B'ye olabildiğince çabuk gitmenin bir yolunu bulmak istiyoruz. Çizge teorisi bunu kolaylaştırıyorsa ne âlâ. Bir kullanıcı olarak tüm bunların nasıl çalıştığını bilmenize çok da gerek yok.

Ancak Google, Facebook ve diğer şirketlerin bilgi toplamak için çizge teorisini kullanmaları veya sinir ağları

yoluyla kararlar almaları tamamen farklı bir konudur. Bu durumda işin arka planı hakkında bir şeyler bilmek epey işe yarar. Örneğin, birdenbire çok sayıda kişisel veriye erişmek isteyen istihbarat teşkilatlarını ele alalım. Bu verilerle ne yapacaklar? İçinde hangi bilgileri bulabilirler? Sürecin hangi adımları insanlar tarafından denetlenir ve sürece insanlar dahil olmazsa ne olur? Sadece çizge teorisini anlayan biri bu tür sorulara gerçekten cevap verebilir.

Çizge teorisi hakkında bilgi sahibi olmanın fikirlerimizi oluşturmamıza yardımcı olduğu birçok alan var. Google ve Facebook, kullanıcılarını genellikle halihazırda düşündüklerini doğrulayan bilgilerle beslendikleri bir “balonun” içine yönlendirir. Bir kullanıcı olarak, alternatif düşünme yolları bulmak için özel bir çaba göstermeniz gerekir. Google ve Facebook bu konuda bir şey yapamaz mı? Diğer tüm bakış açılarına erişimleri var. Onlar da internette mevcut, öyleyse neden onları görmüyoruz? Olayları başka bir perspektiften de görmek istediğimi neden açıkça ortaya koyamıyorum? Basit cevap, Google ve Facebook tarafından kullanılan matematiğin bunu yapmak için tasarlanmamış olmasıdır. Algoritmalarını, ilgilendiğimiz konuyla hâlâ bir ilgisi olan tamamen farklı şeyleri görebilmemiz için uyarlayamazlar.

Gördüğümüz gibi, Google ve Facebook için en önemli bilgi, bulunması en kolay olan, başka bir deyişle aradığınız bilgiye en çok benzeyen bilgidir. Netflix’in tamamen beklenmedik ancak izleme tercihlerinize mükemmel şekilde uyan bir filmi önerememesi gibi, Google da arama çubuğuna girdiğiniz belirli terimlerin dışında kalan bilgileri sunamaz. Yalan haberleri filtrelemek görüldüğü kadar basit değildir çünkü matematiksel hesaplamalar bir web sitesinde ne olduğunu “göremez”. Elbette matematikçiler bunu mümkün kılmak için çok çalışıyorlar ama bunun

bir gecede olmayacağı da açık. Kullandıkları matematik bunu zorlaştırıyor.

Yalan haberler ile mahremiyet ve yapay zekâ ile ilgili endişeler önemli sosyal sorunlar haline geldi ve bunlar tamamen çizge teorisinin olanaklarına ve sınırlamalarına dayanıyor. İşte bu nedenle matematiğin bu alanında biraz da olsa fikre sahip olmak çok önemlidir. Bugün karşı karşıya olduğumuz büyük sosyal sorunlar hakkında bir fikir beyan etmek istiyorsanız altlarında neyin yattığını, hangi çözümlerin uygulanabilir olduğunu ve hangilerinin olmadığını bilmeniz gerekir. Ve bunu çizge teorisini anlamadan yapamazsınız.

8. BÖLÜM

Matematik ne işe yarar?

Matematik –tekrar söyleyeyim– çok yararlıdır. Ve çoğu zaman farkında olmasak da günlük hayatımızla çok ilgilidir. Peki, matematiğin bu kadar iyi işlemesi nasıl mümkün olabilir? Bu soruyu 2. Bölüm’de sordum ve matematiği nasıl –Platon ve mağarası örneğinde olduğu gibi soyut bir form veya Sherlock Holmes’un hikâyeleri gibi insan tarafından üretilmiş olarak– düşündüğünüzün önemli olmadığını gördük. Her iki durumda da matematiğin faydası hemen görünür olmaz. Bu kadar soyutsa matematiğin çevremizdeki gerçeklikle nasıl bir ilgisi olabilir?

Bunun gibi sorular, matematiği olabildiğince basit tutmaya yardımcı olur. Peki, sayılar nasıl faydalı olur? Sayıları epey uzun zaman önce, miktarları daha tutarlı takip edebilmek için kullanmaya başladık. Bunu yapabildik çünkü sayıların doğası, her türlü durumda kullanılmalara izin verir. Pozitif tamsayılar özel ve basittir: 1 ile başlarsınız ve üzerine 1 eklemeye devam edersiniz. Yani 2, 1 ile 3 arasındaki sayıdan başka bir şey değildir. Sayarken 1’i, ilk şeyi koyduğumuz bir nevi kutu olarak kullanırsınız, 2 de bir sonraki şeyin kutusudur ve bu böyle devam eder.

İçine koyduğunuz ister ekmek olsun ister madeni para, bu şeyleri yerleştirme sıranız kutuları birbirinden ayrı tutar. Ama bu her durumda işe yaramaz. Kum yığınlarını saymayı deneyin. Yerde bir tane kum yığını oluşturun, sonra bir tane de hemen yanında. Büyük ihtimalle her iki yığın da biraz çökecek ve birbirine karışacaktır. Böylece, iki ayrı yığın yerine, yalnızca biraz daha büyük bir yığınınız olacaktır. Bir kum yığını artı başka bir kum yığını hâlâ bir kum yığınınına eşittir. Bu $1 + 1 = 1$ anlamına mı gelir? Tabii ki değil, sayıların kum yığınlarında işe yaramamasının nedeni, sadece kumların ayrı birimler halinde olmamalarıdır. Bu sorunu bir ölçü birimi kullanarak çözebilirsiniz. Örneğin kum için litre kullanabilirsiniz. Bu durumda, kumun tamamı büyük bir yığın haline gelse bile bir litre artı bir litre, iki litredir. Birimler, miktarları ölçebilmek için sayıları kullanmanızı sağlar. Bir başka deyişle sayıların oldukça katı bir yapısı vardır ama bu yapı çok kullanışlıdır çünkü çevremizdeki her yerde aynı yapıya rastlarız. Yine de bu, sayılarla istediğiniz her şeyi yapabileceğiniz anlamına gelmez çünkü kum yığınlarını saymak hâlâ zordur.

Sorumuza geri dönelim: Sayılar ne kadar yararlıdır? Sayılar, etrafımızdaki şeyleri yapılandırmamıza yardımcı olurlar. Kullanışlı ve kolay uygulanabilirdirler çünkü dikkatimizi o yapıya odaklarlar, önemli olmayan tüm detayları görmezden gelirler. Bu nedenle matematik, Sherlock Holmes hikâyelerinden farklıdır. Hikâyeler gerçekliğin oldukça iyi bir tasvirini sunarlar: Böylece, örneğin Sherlock Holmes zamanındaki Londra hakkında bir şeyler öğrenebilirsiniz. Ancak sunmadıkları şey, özür. Hikâyelerde, sayıların miktarlar için yaptığı gibi, dikkatinizi belirli bir özelliğe odaklayan yapılar yoktur.

Matematikteki hatalar

Matematik, etrafımızda gördüğümüz şeyleri bir düzene koymanın mükemmel bir yoludur. Bu nedenle matematiği, örneğin miktarları anlamak için kullanabilirsiniz. Kulağa hoş geliyor ama iş her zaman bu kadar basit değil. Daha karmaşık matematiği kullanmaya başladığımızda, matematik gerçeği yakından yansıtmayı bırakır ve kısa süre sonra hatalar ortaya çıkar. Örneğin, Google'ın algoritması, bir web sitesinden diğerine her bağlantının pozitif olduğunu, hiçbirinin sizi saçma veya yanlış bilgilerle dolu bir siteye götürmediğini varsayar. Bu tür sayfaların arama sonuçlarınızda görünmesini istemezsiniz ancak matematik aradaki farkı anlayamaz, sitelere gelen bağlantı için fazladan puan verir. Tıpkı Facebook'un çizgesinde hangi insanları gerçekten tanıdığınızı, kimleri arkadaşlık listenize öylesine eklediğinizi göremediği gibi. Matematiğin gözünde, Facebook'taki tüm kişilerinizle eşit derecede arkadaşsınız.

Matematik durumları basitleştirdiği için her zaman mükemmel bir resim sağlayamaz. Fizikteki standart sorulardan birini ele alalım: Birisi bir kaleye top atışı yapıyor. Gülle nereye inecek? Matematiksel hesaplama, biri pozitif biri negatif olmak üzere iki yanıt verir. Gülle, ya ateş ettiğiniz kale duvarı yönünde 100 metre ileriye (pozitif yanıt) ya da tam tersi yönde 100 metre geriye (negatif yanıt) inecektir. İkinci yanıtın saçma olduğu açıktır: Bir gülle asla topun tam tersi yönüne gitmez.

Sayılar sayesinde, etrafımızdaki durumları mükemmel şekilde düzene koyduğu için matematiğin yararlı olduğunu söylemek kolaydır. Bu, neyi saydığınıza dikkat ettiğiniz sürece doğrudur. İşleri biraz daha karmaşık hale getirirseniz ve dünya ile matematiksel yapılar arasında farklılıklar

ortaya çıkarsa matematiksel hesaplamalar ortaya gerçekte olanlardan farklı bir sonuç çıkaracaktır. Bu durumlarda bile matematiğin işe yaradığını söylemek için yeterli benzerlikler bulabiliriz. Bir güllenin ters yöne doğru uçmayacağından emin olduğumuz için hesaplamayı yine de kullanabiliriz; sadece negatif sayıyı atarız.

Peki, bu tam olarak nasıl işler? Matematiğin faydalı olması için ne tür benzerlikler olması gerekiyor? Hesaplamalarımız kaç tane hata içerebilir? Bunu bilmiyoruz. Felsefeciler bu soruları hararetle tartışıyorlar. Bu tartışmaların sonuçlanmasını beklemek hiç iyi bir fikir değil, bu yüzden şimdilik benzerliklerin matematiğin pratikte nasıl çalıştığını açıklamaya yardımcı olduğunu söylemekle yetinelim. Matematik, çevremizdeki dünyayı, başka türlü farkına varamayacağımız şekillerde yapılandırır. Ayrıntıları unutmayı ve karşılaştığımız pratik soruna odaklanmayı kolaylaştırır.

Hepsi tesadüf mü?

Gerçeklikle arasındaki benzerlikler: Matematiğin ne kadar yararlı olabileceğini belirlemede esas önemli olan budur. Peki, bu benzerlikler nereden geliyor? Durup dururken mi ortaya çıktılar yoksa matematikçiler matematiği bizim de kullanabileceğimiz bir şey hale getirmek için çok mu çalıştılar? Bu sorunun da henüz net bir cevabı yok. Matematikçilerin önemli bulduğu şeylere bir bakın. Gündelik hayatta işe yarayacak sayısız buluş yapan Arşimet, küreler, silindirler ve koniler üzerine teoreminin bu buluşların en önemlisi olduğunu düşünüyordu. Ancak bu, pratikte hiçbir faydası olmadığı açık olan buluştu. Bir koni elde etmek için silindirden ne kadar çıkarmanız gerektiğinin ne önemi var? Bunu kendiniz yaparak da öğrenebilirsiniz.

Matematikçiler genellikle keşiflerinin pratikte nasıl uygulanabileceği ile ilgilenmezler. Bu nedenle matematiğin bu kadar yararlı olması neredeyse tesadüf gibi görünüyor; belki sayılar ve geometri için değil ama kesinlikle matematiğin incelediğimiz alanları için. 3. Bölüm’de gördüğümüz gibi, aritmetik ve geometri, gündelik sorunları çözenin bir yolu olarak ortaya çıktı. İnsanlar giderek genişleyen topluluklarda yaşamaya başladığında, ciddi idari sorunlar ortaya çıktı. Şehir devletleri vergi toplamak, yiyecek kaynaklarını takip etmek ve gelecek için planlama yapmak için daha verimli yollar bulmak zorundaydı ve sayılar bu sorunları çözmelerine yardımcı oldu.

Ancak bu sayılar oldukça yavaş evrildi. Mezopotamya’da taş sikkeler vardı, bu sayede yanınıza aldığınız sikkeler karşılığında kaç ürününüz olduğunun hesabını yapabiliyordunuz. Zamanla sikkeler yerini, bir yığın taşa göre daha kolay taşınabilen kil tabletler üzerindeki işaretlere bıraktı. Kısacası, sayıları faydalı oldukları için kullanmaya başladık. Bu bir tesadüf değildi; ilk matematiksel toplamalar son derece pratikti. Matematik yararlıydı çünkü zor bir problemi çözüyordu.

Birkaç yüzyıl sonrasına baktığımızda, resmin biraz daha az net olduğunu görüyoruz. Çeşitli kültürlerdeki matematikçiler “yararsız” problemler üzerinde çalışmaya başladılar. Bu problemleri çözmeye çalışmalarının nedeni, çözümün gündelik hayatta bir işe yarayacağı değil, merakları veya statülerini yükseltme arzularıydı. Durum hâlâ böyle: En çok bu “işe yaramaz” matematiğe saygı duyuyoruz. Yunanların son derece soyut matematiksel çalışmalarını hâlâ anıyoruz. Tüneli kazan Eupalinos’u neredeyse hiç kimse hatırlamaz ama büyük matematikçi Pisagor’un adını herkes bilir.

Matematikçiler soyut fikirleri hangi amaçla geliştirmiş olursa olsunlar bu fikirler pratikte uygulanabilirdir. Pisagor teoremi, dik açılı bir üçgene sahip olup olmadığınızı anlamamanın yararlı bir yoludur ve Arşimet'in çalışmaları'nın pek çoğunun doğrudan pratik uygulamaları vardır. Kalkülüs, olasılık teorisi ve grafik teorisi gibi matematiğin daha zor alanları da aynı şekildedir; tarihe bakarsanız bu alanların da çoğu zaman tesadüfen ortaya çıkmış olmadığını görürsünüz.

Örneğin Newton ve Leibniz, kalkülüsün önemli hale geleceğini hemen anlamışlardı. Newton kalkülüsü fizik çalışmalarında hemen kullandı. İlk başta zor gelse de matematiksel teorilerini doğrudan uygulayabildiler çünkü arkalarındaki fikir aslında çok basitti: Değişimi incelemek istiyorlardı. Ve elbette dört bir yanımızda değişimi görüyoruz. Newton bir çizge üzerinde yürüdüğünü hayal ederek değişimi matematiğinde de gördü. Bu da fikrin biraz daha soyut hale gelmesine yol açtı ancak geçerliliği azalmadı.

Elbette ki değişimi hesaplamak için kullanılan bir yöntem gündelik hayatta uygulanabilir. Bu da yöntemin gelişiminin görüldüğü kadar tesadüfi olmadığı anlamına gelir. Benzer şekilde, olasılık teorisi, sonuçlanmadan durması gereken oyunlarla başladı. Bunun kamuoyu yoklamaları, hastalık veya suç rakamlarıyla hiçbir ilgisi yok gibi görünse de dolaylı olarak var. Matematikçiler kendilerine kesin olarak bilmedikleri şeyleri nasıl hesaplayacaklarını, belirsizlikle tam olarak nasıl başa çıkacaklarını soruyorlardı.

Belirsizlik karşımıza her türlü durumda çıkabiliyor. Dolayısıyla matematiksel olarak hesaplamanın bir yolunu biliyorsanız belirsizliği etrafınızdaki dünyayı incelemek için kullanabilirsiniz. Olasılık teorisini uygulamak basit

değildi. Anket yapabilmemiz ve anketlerin doğruluklarını matematiksel olarak hesaplayabilmemiz tam anlamıyla yüzyıllar aldı. Ama bu uygulamalar ortaya tesadüfen çıkmadı; matematikçiler belirsizlikle ilgilenmeye başladılar ve nihayetinde çevremizdeki somut belirsizlikleri incelemek için kullanılabilecek bir şey üzerinde çalıştılar. İster yararsız oyunlar olsun ister başka bir şey, potansiyel zaten orada, incelemeyi seçtikleri konulardaydı.

Bu durum, çizge teorisi için bile geçerlidir. Euler, matematiğin bu alanını Königsberg'in yedi köprüsü bulmacasına dayanarak başlattı. Bulmacanın pratik değeri çok azdı: Şehir merkezinde yürüyüp her köprüyü yalnızca bir kez geçmenin matematiksel olarak imkânsız olduğunu bilmek ne işe yarardı ki? Altta yatan fikir de ilk bakışta görülmüyor: Yürüyüşe çıkmanın rota planlayıcıları veya arama motorlarıyla pek ilgisi yok gibi ama soruna biraz daha genel bakınca işler değişiyor ki bunu da sonradan yapmak daha kolay. Euler, farklı yerlerin birbirine bağlı olduğu bir ağ üzerinde çalıştı. Daha sonra başka durumlarda da buna benzer ağlarla karşılaştık.

Bu, özellikle günümüzde geçerli. En bariz örneği sosyal ağlar ama çok daha fazlası da var. Trafik ağları çizge teorisi ile çalışmak için çok uygun bir alan. Tren ve metro ağları da öyle; bu sayede tarifeler oluşturulabiliyor. Ayrıca, daha önce gördüğümüz gibi, film ve dizi ağları ile birbirlerinin davranışlarını etkileyen genlerin oluşturduğu ağlar da çizge teorisinin kullanım alanlarından birkaçı. Çizge teorisi, ağlar ve ağların özellikleri hakkında genel bir çalışma alanı, dolayısıyla bu teorinin gündelik hayatta geniş çapta uygulanabilmesi tesadüf değil.

Matematikçilerin soyut çalışmaları, genellikle günlük hayatta karşılaştığımız şeylerden ilham alır. Bu nedenle matematiğin bu alanlarının çevremizdeki dünyayı daha

iyi anlamak için kullanılabilmesi tesadüf değildir. Matematiğin yararlı olmasının altında tüm bunlar yatar.

Matematik yardımcı olur

Şu ana kadar iki önemli soruya baktık: matematiği yararlı kılan nedir ve bu durum tamamen tesadüf müdür? Hem matematiği neden bu şekilde kullanmak isteyelim ki? Daha önce de söylediğim gibi, aslında matematik, onsuz da yapabileceğimiz bir şeyi yapmamızı sağlamaz. 2. Bölüm'deki Pirahâları ve diğer kültürleri hatırlayın. Matematik kullanmadan miktarlar, şekiller, sosyal gruplar, değişim gibi pek çok şeyle mükemmel bir şekilde çalışabildiler. Biri onlara makinelerin nasıl yapıldığını gösterecek olsaydı eminim gerekli tüm adımları takip edip kendi başlarına yapabilirlerdi. Sonuçta matematik makinelerde veya binalarda değil. İnsanlar matematiğin yardımı olmadan da pek çok şey yapabilirler; sadece işleri çok daha zorlaştırır.

Matematiksel fikirlerin ve gerçekliğin yapıları arasındaki benzerlikler, matematiğin gündelik sorunları çözme-yi kolaylaştırdığı anlamına gelir. Matematik gerçekliği basitleştirir. Yalnızca yapıya odaklanınca tüm ayrıntıları kafanızda tutmanıza gerek kalmaz. Yirmi bir ve yirmi iki somun ekmek arasındaki farkı, ekmekleri iki sıra halinde düzgünce dizene ve sıralardan birinin diğerinden biraz daha uzun olduğunu görene kadar anlayamayız. Matematiğin bizim için yaptığı esas olarak budur.

Örneğin havayı ele alalım. Hava durumunu uzunca bir süre matematik kullanmadan tahmin ettik ve bunu hâlâ yapabiliriz. Tek yapacağımız, mevcut havayı çok yakından incelemek ve nasıl değişebileceğini tahmin etmek. Rüzgâr doğudan geliyorsa ve o yönde çok sayıda yağış

görüyorsak yağmur yağacağından gayet emin olabiliriz. Ancak o kadar çok şey o kadar hızlı değişir ki tüm bu küçük farklılıkları ve değişiklikleri takip etmemiz neredeyse imkânsızdır. Zamanımız da yetmez; her şeyi kalın bir deftere yazar ve çözmek için 100 yıl harcayabilirsiniz ama bu, kimsenin işine yaramaz.

Matematik, hava akımları ve bu akımların zaman içinde nasıl değiştikleri gibi, havanın en önemli yönlerine odaklanmamızı sağlar. Bu sayede tüm bu hesaplamaları bilgisayarlara bırakabiliriz; aksi takdirde hava tahminlerini yapmak için formülleri kullanmak yine de mümkün olmazdı. Bunu ancak kalkülüs sayesinde yapabiliriz. O olmadan bir bilgisayar bile hava durumunu tahmin edemez.

Dolayısıyla matematik, karmaşık problemleri daha basit hale getirerek işimizi kolaylaştırır. Matematiksel bir yöntem uygulamanızın nedeni, matematikteki ve gerçekteki yapılar arasında benzerlik olmasıdır. Bu benzerlik sayesinde gerçek dünyada karşınıza çıkan ayrıntıları görmezden gelebilirsiniz. Zamanın donmasını sağlayabilir ve bu sayede hava durumunun tüm parçalarına bakabilirsiniz. Ya da insanlar arasındaki tüm farklılıkları görmezden gelip yalnızca ortalama gelire veya siyasi tercihlere odaklanabilirsiniz. Bu, sorunları çözmeyi çok daha kolay hale getirir.

Bu kitapta ele alınan matematik uygulamalarının çoğu böyle çalışır. Ancak bazen matematik tamamen farklı bir şekilde işe yarayabilir: Yeni çözümler önerebilir. Bunun bazı örneklerini 1. Bölüm'de gördük.

Matematik, fizikte sürekli olarak sürprizlerle ortaya çıkar. Bilim insanları Paul Dirac ve Augustin Fresnel, hesaplamalarının beklenmedik sonuçlar üretmesi sayesinde yeni keşifler yaptılar. Tıpkı top mermisinde olduğu gibi, parçacıklar ve ışığın davranışları ile yaptıkları deneyler,

ilk bakışta çılgınca gelen sonuçlara yol açtı ama sonuçların doğru olduğu ortaya çıktı. Matematik, gerçekliğe düşündüğümüzden daha iyi uyar; hatta bizim henüz fark etmediğimiz şeyleri bile ortaya çıkarır.

Bunun nasıl olduğunu tam olarak bilmiyoruz. Matematiğin neden bu kadar iyi işlediği bir muamma. Yani, gerçekten o kadar iyi mi işliyor, yoksa sadece şansımız mı yaver gitti, emin değiliz. Matematiğin problemleri nasıl basitleştirdiği, yeni teoriler bulmamızı nasıl sağladığı oldukça açık olsa da görünüşte garip gelen sonuçların bazen yeni keşiflere yol açabilmesi o kadar da açık değil. Ancak bu durum matematiği daha az özel yapmaz.

Günlük hayatımızda da

Bu yeni keşifler genellikle bilimde karşımıza çıkar. Çoğu insan muhtemelen matematiği tuhaf matematiksel tahminler yapabilecek seviyede kullanmaz. Ancak fiilen kullanmasak da matematik günlük hayatımızda işimize yarar çünkü çevremizdeki dünyayı anlamamızı kolaylaştırır. Liseyi bitirdikten sonra kalkülüs kullanmamıza gerek olmaz ve eğer şanslıysak üzerinde epey zaman harcadığımız tüm bu formüllere bir daha rastlamayacağız. Formülleri benim bile kullanmam gerekmiyor, üstelik ben bir matematik felsefecisiyim. Öyleyse neden ısrarla matematik hakkında bir şeyler bilmemiz gerektiğini söylüyorum?

Her gün dolaylı olarak temas kurduğumuz tek şey matematik değildir. Örneğin, araba motorları veya siyaset: Her ikisinin de hayatlarımız üzerinde büyük etkisi var. Arabalar olmasaydı etrafta dolaşmak bizim için çok daha zor olurdu; kamyonlar ve kamyonetler olmasa satın aldığımız ve kullandığımız mallara ulaşmakta epey sorun yaşardık. Aynı şey siyaset için de geçerli. Genel olarak,

çoğumuzun siyasetle doğrudan bir teması yok ve yine de siyasi kararlar hepimizi etkiliyor. Araba motorlarının ve siyasetin hayatlarımız üzerinde dolaylı ama derin bir etkisi var. Peki bu, nasıl çalıştıklarını bilmemiz gerektiği anlamına mı geliyor?

Araba motoru söz konusu olduğunda bu çılgınca olur. Sürücülerin arabalarının nasıl çalıştığını bilmelerine gerek yoktur. Tek ilgilendikleri şey, motorun yaptıklarıdır. Örneğin, benzinli motordan elektrikli motora geçmek, hayatınızda çok fazla fark yaratmaz; arabanız ilerlemeye devam eder. Yeni motor daha çevre dostu olabilir ama özünde farklı değildir.

Siyasette durum farklı. Demokratik bir rejimden otoriter rejime geçiş kesinlikle herkesi etkileyecektir. Yeni bir yasanın çıkarılması gibi daha küçük değişiklikler de günlük hayatımızı etkiler. Bu yüzden hepimiz okulda siyasi sistemin nasıl işlediğini öğreniriz. Siyaset bazen günlük hayatımızdan uzak görünse de nasıl işlediğine dair bir şeyler bilmek son derece önemlidir. Siyasetle her gün karşılaşsanız da işin arka planında neler olup bittiğini bilmeniz gerekir.

Aynı durum matematik için de geçerlidir ama matematiğin farklı alanlarının farklı kullanım alanları vardır. Küme teorisi gibi çok teorik disiplinlerin günlük yaşamla neredeyse hiçbir ilgisi yoktur ve bu yüzden bu kitapta o teoriyi ele almadım. Ancak matematiğin gündelik hayatta sıklıkla kullanılan alanları arasında da büyük farklar vardır. İntegral ve türev çok önemlidir fakat otomobil motorları ile politikadan daha fazla ortak noktaları vardır. Matematikçiler değişimi hesaplamak için başka bir yol bulsaydılar da bu büyük bir sorun yaratmazdı. İntegrali ve türevi kullanmanın bile farklı yolları vardır ama hangi yöntemin kullanıldığı önemli değildir. Hepsi aynı hava

tahmininin, aynı binanın ve aynı seçim tahminlerinin ortaya çıkmasına yol açar. Önemli olan, yöntemin işe yaramasıdır. Nasıl olduğunu çok fazla düşünmemize gerek yoktur.

İntegral ve türev o kadar çok yerde kullanılır ki onları biraz da olsa anlamamanın bir zararı olmaz. Her ikisiyle de birçok meslekte karşılaşırız ve günümüz toplumunun gelişiminde çok önemli bir rol oynadılar. 5. Bölüm'de de söylediğim gibi, integral ve türev, tıpkı tarih gibidir; çevrenizdeki dünyanın nasıl oluştuğunu, her şeyin neden şu anki halinde olduğunu bilmek, size toplum hakkında daha iyi bir bakış açısı sağladığı için faydalıdır. İntegral ve türeve de aynı şekilde bakabilirsiniz. Kalkülüs, tarihteki en etkili fikirlerden biridir. Dolayısıyla hesaplamaların ayrıntıları günlük hayatımızda doğrudan önemli olmasa bile onunla ilgili bir şeyler öğrenmek iyidir.

Öte yandan istatistik, hayatımız üzerinde büyük etkiye sahiptir. Ortalama gelirdeki iyileştirmelerin nasıl hesaplandığı, hesaplama sonucunu ve dolayısıyla toplum hakkındaki düşüncemizi büyük ölçüde değiştirebilir. Aynı anketler, erkekler ve kadınlar arasındaki maaş farklarına ilişkin veriler ve bilimsel araştırmanın sonuçları için de geçerlidir. İstatistik, büyük miktarda veriyi erişilebilir hale getirerek ve veriler arasındaki fark etmediğimiz ilişkileri bize göstererek epey işimize yarayabilir. Sorun, istatistiğin dünya görüşümüzü değiştirmek için kolayca kullanılabilir veya manipüle edilebilir olmasındadır.

Ankette hangi yöntemlerin kullanıldığı, anketin nasıl yapıldığı veya bir ortalamanın neye dayandığı, dünyaya bakışımızı ve karar verişimizi etkileyebilir. Tıpkı siyasete eleştirel bakabilmemiz ve politikacıların bize söylediği her şeye inanmamamız gerektiği gibi, istatistiklere de eleştirel bir gözle bakabilmek, kendi görüşlerimizi oluşturmamız

için önemlidir. Bunun için de matematik bilgisi gereklidir; hesaplamaları kendimiz yapmak için değil, işin nereden yanlış gidebileceğini anlamak için. İstatistikler günlük hayatımızda paha biçilmezdir.

Son olarak, çizge teorisi var. Bu teorinin de hayatlarımız üzerinde muazzam bir etkisi vardır çünkü Google ve Facebook gibi şirketler, hangi bilgileri göreceğimizi belirlemek için çizgeleri kullanır. Matematğin bu alanının hayatımıza istatistikten çok daha fazla nüfuz etmesine yol açan da budur: Örneğin Google çizgeleri kullanma şeklini değiştirirse bu, tamamen farklı bilgiler göreceğiniz, yanlış yönlendirilebileceğiniz, hatta bilgiye neredeyse hiç erişemeyeceğiniz anlamına gelebilir. Bunu, insanların esas olarak kendileri gibi düşünen ve aynı tercihlere sahip olan başkalarıyla temasa geçmelerini sağlayan bilgi balonlarında görüyoruz.

Çizge teorisi, bilgileri Google gibi web siteleri aracılığıyla nasıl elde ettiğimizi gösterir. En azından bunun kadar önemli olan, bu bilgiler karşılığında verdiğimiz bilgilere ne olduğunu görmemizdir. Google, Facebook ve diğer internet şirketleri topladıkları tüm kişisel verilerle ne yapabilir? Bu bilgilere kimin erişimi vardır ve sürecin hangi kısımları tamamen otomatiktir? Bunlar, insanları çok kaygılandıran sorulardır ve gerçekten iyi yanıtlar istiyorlarsa arkasındaki matematiği anlamaları gerekir. Ancak bu şekilde neyin mümkün olup neyin olmadığı, yapay zekânın gerçekte nasıl çalıştığı ve tehlikelerin nereden kaynaklandığı hakkında fikir beyan edebilirler.

O kadar iş gücü arasında tüm bunları yapmaya, karşılaştığınız her rakamı kontrol etmeye, yapay zekâ konusundaki en son gelişmeleri izlemeye ve bir taraftan da normal bir hayat sürmeye kimin vakti var? Kimsenin ve bunlara gerek de yok. İşin sadece özünü anlayarak epey yol kat

edebilirsiniz. Bu, bir çalışmanın veya bir kamuoyu yoklamasının şaşırtıcı sonuçlarına eleştirel bir gözle bakmanızı sağlamak için yeterlidir. Ayrıca, istihbarat servislerinin hangi verileri toplayıp toplayamayacağı hakkında daha aktif düşünmenizi sağlar çünkü biraz matematik size bu verilerle ne yaptıkları hakkında daha iyi bir fikir verir.

Matematik, özellikle de matematiğin daha zor kısımları, çevremizdeki dünyayı çok daha iyi algılamamızı sağlar. Günlük hayatınızda matematiksel hesaplamalara neredeyse hiç rastlamıyor olabilirsiniz, ama –on beş yaşındaki halime de bunu söyledim– etrafınızda gördüğünüz her şey matematiğin çalışma alanındadır. Tuhaf şekilli binalar, hava durumu tahminleri, devasa verilere dayalı anketler ve tahminler, arama motorları ve yapay zekâ: Hepsi matematiğin temel fikirlerini kavradığınızda daha iyi anlayacağınız şeylerdir. Özellikle günümüzde dünya giderek daha karmaşık hale geliyor ve dünyayı daha az kafa karıştırıcı hale getirecek bir şeye ihtiyacımız var. Matematiğin yaptığı da tam olarak budur ve bir şekilde anlaşılması, genellikle düşündüğümüzden daha kolaydır.

GÖRSELLER

- s. 8: Sameboat Wikimedia Commons/CC-BY-SA-4.0
- s. 11: © Elias Wirth
- s. 51: Elizabeth S. Spelke, *Space, Time, and Number in the Brain: Searching for the Foundations of Mathematical Thought*,
18. Bölüm, “Natural Number and Natural Geometry,” Görsel
18.5, Elsevier’in izniyle kullanılmıştır.
- s. 100: Wikipedia/Rich Niewirowski Jr.
- s. 147: © Red Blob Games
- s. 149: © Red Blob Games

KAYNAKÇA

- Barner, D., Thalwitz, D., Wood, J. vd. (2007). "On the relation between the acquisition of singularplural morpho-syntax and the conceptual distinction between one and more than one." *Developmental Science* 10 (3), ss. 365–73.
- Batterman, R. (2009). "On the explanatory role of mathematics in empirical science." *The British Journal for the Philosophy of Science*, ss. 1–25.
- Bauchau, O. ve Craig, J. (2009). *Structural Analysis: With Applications to Aerospace Structures*. Dordrecht: Springer.
- Bianchini, M., Gori, M. ve Scarselli, F. (2005). "Inside PageRank". *ACM Transactions on Internet Technology* 5 (1), ss. 92–128.
- Boyer, C. (1970). The History of the Calculus." *The Two-Year College Mathematics Journal* 1 (1), ss. 60–86.
- Brin, S., & Page, L. (1998). "The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine." *Computer Networks and ISDN Systems* 30, ss. 107–17.
- Bueno, O. ve Colyvan, M. (2011). "An Inferential Conception of the Application of Mathematics." *Noûs* 45 (2), ss. 345–74.
- Buijsman, S. (2019). "Learning the Natural Numbers as a Child". *Noûs* 53 (1), 3–22.
- Burton, D. (2011). *The History of Mathematics: An Introduction*, 7th edition. McGraw-Hill, New York. (*Matematik Tarihi – Giriş*, Nobel Akademik Yayıncılık, 2017.)

- Carey, S. (2009). "Where Our Number Concepts Come From." *Journal of Philosophy* 106 (4), ss. 220–54.
- Cartwright, B. ve Collett, T. (1982). "How Honey Bees Use Landmarks to Guide Their Return to a Food Source." *Nature* 295, ss. 560–64.
- Chemla, K. (1997). "What is at Stake in Mathematical Proofs from Third-Century China?" *Science in Context* 10 (2), ss. 227–51.
- Chemla, K. (2003). "Generality Above Abstraction: The General Expressed in Terms of the Paradigmatic in Mathematics in Ancient China." *Science in Context* 16 (3), ss. 413–58.
- Cheng, K. (1986). "A Purely Geometric Module in the Rat's Spatial Representation." *Cognition* 23, ss. 149–78.
- Christensen, H. (2015). "Banking on Better Forecasts: The New Maths of Weather Prediction." *The Guardian*, 8 Ocak 2015. Çevrimiçi adresi: <https://www.theguardian.com/science/alexs-adventures-in-numberland/2015/jan/08/banking-forecasts-maths-weather-predictionstochastic-processes>
- Colyvan, M. (2001). "The Miracle of Applied Mathematics." *Synthese* 127 (3), ss. 265–78.
- Cullen, C. (2002). "Learning from Liu Hui? A Different Way to Do Mathematics." *Notices of the AMS* 49 (7), ss. 783–90.
- Dehaene, S., Bossini, S. ve Giraux, P. (1993). "The Mental Representation of Parity and Number Magnitude." *Journal of Experimental Psychology: General* 122, ss. 371–96.
- Dehaene, S., Izard, V., Pica, P. vd. (2006). "Core Knowledge of Geometry in an Amazonian Indigene Group." *Science* 311, ss. 381–4.
- Doeller, C., Barry, C. ve Burgess, S. (2010). "Evidence for Grid Cells in a Human Memory Network." *Nature* 463, ss. 657–61.
- Dorato, M. (2005). "The Laws of Nature and The Effectiveness of Mathematics." *The Role of Mathematics in Physical Sciences* içinde, ss. 131–44. Dordrecht: Springer.
- Edwards, C. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. Dordrecht: Springer.
- Englund, R. (2000). "Hard Work – Where Will It Get You?"

- Labor Management in Ur III Mesopotamia.” *Journal of Near Eastern Studies* 50 (4), ss. 255–80.
- Ekstrom, A., Kahana, M., Caplan, J. vd. (2003). “Cellular Networks Underlying Human Spatial Navigation.” *Nature* 425, ss. 184–7.
- Epstein, R. ve Kanwisher, N. (1998). “A Cortical Representation of the Local Visual Environment.” *Nature* 392, ss. 598–601.
- Everett, D. (2005). “Cultural Constraints on Grammar and Cognition in Pirahã: Another Look at the Design Features of Human Language.” *Current Anthropology* 46 (4), ss. 621–46.
- Ezzamel, M. ve Hoskin, K. (2002). “Rethorizing Accounting, Writing and Money with Evidence from Mesopotamia and Ancient Egypt.” *Critical Perspectives on Accounting* 13, ss. 333–67.
- Feigenson, L., Carey, S. ve Hauser, M. (2002). “The Representations Underlying Infants’ Choice of More: Object Files versus Analog Magnitudes.” *Psychological Science* 13 (2), ss. 150–56.
- Feigenson, L. ve Carey, S. (2003). “Tracking Individuals via Object Files: Evidence from Infants’ Manual Search.” *Developmental Science* 6 (5), ss. 568–84.
- Feigenson, L., Dehaene, S. ve Spelke, E. (2004). “Core systems of Number.” *Trends in Cognitive Sciences* 8 (7), ss. 307–14.
- Ferreirós, J. (2015). *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices*. Princeton: Princeton University Press.
- Fias, W. ve Fischer, M. (2005). “Spatial Representation of Number.” Campbell, J. (der.), *Handbook of Mathematical Cognition* içinde, ss. 43–54. New York: Psychology Press.
- Fias, W., Van Dijck, J. ve Gevers, W. (2011). “How Is Number Associated with Space? The Role of Working Memory.” Dehaene, S. ve Brannon, E. (der.), *Space, Time and Number in the Brain: Searching for the Foundations of Mathematical Thought* içinde, ss. 133–48. Amsterdam: Elsevier Science.
- Fienberg, S. (1992). “A Brief History of Statistics in Three and One-Half Chapters: A Review Essay.” *Statistical Science* 7 (2), ss. 208–25.
- Fischer, R. (1956). “Mathematics of a Lady Tasting Tea.” Newman, J. (der.), *The World of Mathematics*, bk. III, vol.

- VIII, *Statistics and Design of Experiments* içinde, ss. 1514–21. New York: Simon & Schuster.
- Franceschet, M. (2011). “PageRank: Standing on the Shoulders of Giants.” *Communications of the ACM* 54 (6), ss. 92–101.
- Frank, M., Everett, D., Fedorenko, E. vd. (2008). “Number as a Cognitive Technology: Evidence from Pirahã Language and Cognition.” *Cognition* 108, ss. 819–24.
- Freedman, D. (1999). “From Association to Causation: Some Remarks on the History of Statistics.” *Journal de la société française de statistique* 140 (3), ss. 5–32.
- Fresnel, A. (1831). “Über das Gesetz der Modificationen, welche die Reflexion dem polarisirten Lichte einprägt.” *Annalen der Physik* 98 (5), ss. 90–126.
- Geisberger, R., Sanders, P., Schultes, D. ve Delling, D. (2008). “Contraction Hierarchies: Faster and Simpler Hierarchical Routing in Road Networks.” McGeoch C.C. (der.), *Experimental Algorithms. WEA 2008. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 5038 içinde, ss. 319–33. Heidelberg: Springer Berlin.
- Gleich, D. (2015). “PageRank Beyond the Web.” *SIAM Review* 57 (3), ss. 321–63.
- Gordon, P. (2004). “Numerical Cognition without Words: Evidence from Amazonia.” *Science* 306, ss. 496–9.
- Gori, M. ve Pucci, A. (2007). “ItemRank: A Random-Walk Based Scoring Algorithm for Recommender Engines.” *IJCAI-07 Proceedings of the 20th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, ss. 2766–71.
- Hamming, R. (1980). “The Unreasonable Effectiveness of Mathematics.” *American Mathematical Monthly* 87 (2), ss. 81–90.
- Hensley, S. (2008). “Too Much Safety Makes Kids Fat.” *Wall Street Journal*, 13 Ağustos 2008. Çevrimiçi adresi: <https://blogs.wsj.com/health/2008/08/13/too-much-safety-makeskids-fat/>
- Hermer, L. ve Spelke, E. (1994). “A Geometric Process for Spatial Re-orientation in Young Children.” *Nature* 370, ss. 57–9.
- Hodgkin, L. (2005). *A History of Mathematics: From Mesopotamia to Modernity*. Oxford: Oxford University Press.

- Høyrup, J. (2001). "Early Mesopotamia: A Statal Society Shaped by and Shaping Its Mathematics." *Contribution to Les mathématiques et l'état*, CIRM Luminy, 15–19 Ekim 2001.
- Høyrup, J. (2007). "The Roles of Mesopotamian Bronze Age Mathematics: Tool for State Formation and Administration – Carrier of Teachers" Professional Intellectual Autonomy." *Educational Studies in Mathematics* 66, ss. 257–71.
- Høyrup, J. (2014). "A Hypothetical History of Old Babylonian Mathematics: Places, Passages, Stages, Development." *Ganita Bharati* 34, ss. 1–23.
- Høyrup, J. (2014b). "Written Mathematical Traditions in Ancient Mesopotamia: Knowledge, Ignorance, and Reasonable Guesses." Bawanypeck, D. ve Imhausen, A. (der.), *Traditions of Written Knowledge in Ancient Egypt and Mesopotamia* içinde. Goethe Üniversitesi'nde, Aralık 2011 ve Mayıs 2012 tarihlerinde düzenlenmiş iki atölyenin tutanakları, ss. 189–213. Münster: Ugarit-Verlag.
- Huff, D. (1954). *How to Lie with Statistics*. New York: W. W. Norton & Company. (İstatistik ile Nasıl Yalan Söylenir? Sarmal Yayınevi.)
- Imhausen, A. (2003a). "Calculating the Daily Bread: Rations in Theory and Practice." *Historia Mathematica* 30, ss. 3–16.
- Imhausen, A. (2003b). "Egyptian Mathematical Texts and Their Contexts." *Science in Context* 16 (3), ss. 367–89.
- Imhausen, A. (2006). "Ancient Egyptian Mathematics: New Perspectives on Old Sources." *The Mathematical Intelligencer* 28 (1), ss. 19–27.
- Izard, V., Pica, P., Spelke, E. vd. (2011). *Proceedings of the National Academy of Sciences* 108 (24), ss. 9782–7.
- Kennedy, C., Blumenthal, M., Clement, S. vd. (2017). "An Evaluation of 2016 ABD seçim anketleri, American Association for Public Opinion Research, rapor yayın tarihi: 4 Mayıs 2017. Çevrimiçi adresi: <https://www.aapor.org/Education-Resources/Reports/An-Evaluation-of-2016-Election-Polls-in-the-U-S.aspx>
- Kleiner, I. (2001). "History of the Infinitely Small and the Infinitely Large in Calculus." *Educational Studies in Mathematics* 48, ss. 137–74.
- Langville, A. ve Meyer, C. (2004). "Deeper Inside PageRank." *Internet Mathematics* 1 (3), ss. 335–80.

- Lax, P. ve Terrell, M. (2014). *Calculus With Applications*. Dordrecht: Springer.
- Lee, S., Spelke, E. ve Vallortigara, G. (2012). "Chicks, like Children, Spontaneously Reorient by Three-Dimensional Environmental Geometry, Not by Image Matching." *Biology Letters* 8 (4), ss. 492–4.
- Li, P., Ogura, T., Barner, D. vd. (2009). "Does the Conceptual Distinction Between Singular and Plural Sets Depend on Language?" *Developmental Psychology* 45 (6), ss. 1644–53.
- Lützen, J. (2011). "The Physical Origin of Physically Useful Mathematics." *Interdisciplinary Science Reviews* 36 (3), ss. 229–43.
- Madden, D. ve Keri, A. (2009). "The Mathematics behind Polling." Çevrimiçi adresi: http://math.arizona.edu/~jwatkins/505d/Lesson_12.pdf.
- Malet, A. (2006). "Renaissance Notions of Number and Magnitude." *Historia Mathematica* 33, ss. 63–81.
- Melville, D. (2002). "Ration Computations at Fara: Multiplication or Repeated Addition?" Steele, J. and Imhausen, A. (der.), *Under One Sky: Astronomy and Mathematics in the Ancient Near East* içinde, ss. 237–52. Münster: Ugarit-Verlag.
- Melville, D. (2004). "Poles and Walls in Mesopotamia and Egypt." *Historia Mathematica* 31, ss. 148–62.
- Mercer, A., Deane, C. ve McGeeny, K. (2016). "Why 2016 Election Polls Missed Their Mark." Pew Research Center, 9 Kasım 2016. Çevrimiçi adresi: <http://www.pewresearch.org/fact-tank/2016/11/09/why-2016-electionpolls-missed-their-mark/>.
- Morrisson, J., Breitling, R., Higham, D. vd. (2005). "GeneRank: Using Search Engine Technology for the Analysis of Microarray Experiments." *BMC Bioinformatics* 6, s. 233.
- Negen, J. ve Sarnecka, B. (2012). "Number-Concept Acquisition and General Vocabulary Development." *Child Development* 83 (6), ss. 2019–27.
- Nuerk, H., Moeller, K. ve Willmes, K. (2015). "Multi-digit Number Processing: Overview, Conceptual Clarifications, and Language Influences." Kadosh, C. ve Dowker, A. (der.),

- The Oxford Handbook of Numerical Cognition* içinde, ss. 106–39. Oxford: Oxford University Press.
- Núñez, R. (2017). “Is There Really an Evolved Capacity for Number?” *Trends in Cognitive Sciences* 21, ss. 409–24.
- Owens, K. (2001a). “Indigenous Mathematics: A Rich Diversity.” *Proceedings of the Eighteenth Biennial Conference of The Australian Association of Mathematics Teachers, Australian Association of Mathematics Teachers Inc., Adelaide* içinde, ss. 157–67.
- Owens, K. (2001b). “The Work of Glendon Lean on the Counting Systems of Papua New Guinea and Oceania.” *Mathematics Education Research Journal* 13 (1), ss. 47–71.
- Owens, K. (2012). “Papua New Guinea Indigenous Knowledges about Mathematical Concept.” *Journal of Mathematics and Culture* 6 (1), ss. 20–50.
- Owens, K. (2015). *Visuospatial Reasoning: An Ecocultural Perspective for Space, Geometry and Measurement Education*. Cham: Springer International Publishing.
- Pica, P., Lemer, C., Izard, V. vd. (2004). “Exact and Approximate Arithmetic in an Amazonian Indigene Group.” *Science* 306 (5695), ss. 499–503.
- Pincock, C. (2004). “A New Perspective on the Problem of Applying Mathematics.” *Philosophia Mathematica* 12 (2), ss. 135–61.
- Pucci, A., Gori, M. ve Maggini, M. (2006). “A Random-Walk Based Scoring Algorithm Applied to Recommender Engines.” Nasraoui, O., Spiliopoulou, M., Srivastava, J. vd. (der), *Advances in Web Mining and Web Usage Analysis. WebKDD 2006. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 4811 içinde, ss. 127–46. Heidelberg: Springer Berlin.
- Radford, L. (2008). “Culture and Cognition: Towards an Anthropology of Mathematical Thinking”. English, L. (der.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 2. baskı içinde, ss. 439–64. New York: Routledge.
- Rice, M. ve Tsotras, V. (2012). “Bidirectional A* Search with Additive Approximation Bounds.” *Proceedings of the Fifth Annual Symposium on Combinatorial Search* içinde. SOCS 2012.

- Ritter, J. (2000). "Egyptian Mathematics." Selin, H. (der.), *Mathematics Across Cultures: The History of Non-Western Mathematics* içinde, ss. 115–36. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Robson, E. (2000). "The Uses of Mathematics in Ancient Iraq, 6000–600 BC." Selin, H. (der.), *Mathematics Across Cultures: The History of Non-Western Mathematics* içinde, ss. 93–113. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Robson, E. (2002). "More than Metrology: Mathematics Education in an Old Babylonian Scribal School." Imhausen, A. ve Steele, J. (der.), *Under One Sky: Mathematics and Astronomy in the Ancient Near East* içinde, ss. 325–65. Münster: Ugarit-verlag. Sarnecka, B., Kamenskaya, V., Yamana, Y. vd. (2007). "From Grammatical Number to Exact Numbers: Early Meanings of One, Two, and Three in English, Russian, and Japanese." *Cognitive Psychology* 55, ss. 136–68.
- Sarnecka, B. ve Lee, M. (2009). "Levels of Number Knowledge During Early Childhood." *Journal of Experimental Child Psychology* 103, ss. 325–37.
- Schlote, A., Crisostomi, E., Kirkland, S. vd. (2012). "Traffic Modelling Framework for Electric Vehicles." *International Journal of Control* 85 (7), ss. 880–97.
- Shafer, G. (1990). "The Unity and Diversity of Probability." *Statistical Science* 5 (4), ss. 435–562.
- Shaki, S. and Fischer, M. (2008). "Reading Space into Numbers: A Cross-Linguistic Comparison of the SNARC Effect." *Cognition* 108, ss. 590–99.
- Shaki, S. ve Fischer, M. (2012). "Multiple Spatial Mappings in Numerical Cognition." *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance* 38 (3), ss. 804–9.
- Spelke, E. (2011). "Natural Number and Natural Geometry." Brannon, E. ve Dehaene, S. (der), *Time and Number in the Brain: Searching for the Foundations of Mathematical Thought Attention & Performance XXIV* içinde, ss. 287–317. Oxford: Oxford University Press.
- Steiner, M. (1998). *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

- Stigler, S. (1986). *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Syrett, K., Musolino, J. ve Gelman, R. (2012). "How Can Syntax Support Number Word Acquisition?" *Language Learning and Development* 8, ss. 146–76.
- Tabak, J. (2004). *Probability and Statistics: The Science of Uncertainty*. New York: Facts on File.
- The Economist* (2017a). "Crime and Despair in Baltimore: As America Gets Safer, Maryland's Biggest City Does Not." *The Economist*, 29 Haziran 2017. Çevrimiçi adres: <https://www.economist.com/unitedstates/2017/06/29/crime-and-despair-in-baltimore>.
- The Economist* (2017b). "The Gender Pay Gap: Women Still Earn a Lot Less than Men, Despite Decades of Equal-Pay Laws. Why?" *The Economist*, 7 Ekim 2017. Çevrimiçi adres: <https://www.economist.com/international/2017/10/07/the-gender-pay-gap>.
- The Economist* (2018). "The Average American is Much Better Off Now than Four Decades Ago: Estimates of Income Growth Vary Greatly Depending on Methodology." *The Economist*, 31 Mart 2018. Çevrimiçi adres: <https://www.economist.com/finance-and-economics/2018/03/31/the-average-american-is-much-better-off-now-than-four-decades-ago>.
- Vargas, J., López, J., Salas, C. vd. (2004). "Encoding of Geometric and Featural Spatial Information by Goldfish (*Carassius auratus*)." *Journal of Comparative Psychology* 118 (2), ss. 206–16.
- Wang, F. ve Spelke, E. (2002). "Human Spatial Representation: Insights from Animals." *Trends in Cognitive Science* 6 (9), ss. 376–82.
- Wassman, J. ve Dasen, P. (1994). "Yupno Number System and Counting." *Journal of Cross-Cultural Psychology* 25 (1), ss. 78–94.
- Wigner, E.P. (1960). "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences." *Communications on Pure and Applied Mathematics* 13 (1), ss. 1–14.

- Wilson, M. (2000). "The Unreasonable Uncooperativeness of Mathematics in the Natural Sciences." *The Monist* 83 (2), ss. 296–314.
- Winter, C., Kristiansen, G., Kersting, S. vd. (2012). "Google Goes Cancer: Improving Outcome Prediction for Cancer Patients by Network-Based Ranking of Marker Genes." *PLoS Computational Biology* 8 (5), e1002511.
- Wynn, K. (1992). "Addition and Subtraction by Human Infants." *Nature* 358, ss. 749–50.
- Xu, W. (2003). "Numerosity Discrimination in Infants: Evidence for Two Systems of Representations." *Cognition* 89, B15-B25.

DİZİN

İllüstrasyonlar *italik* belirtilmiştir.

221b Baker Street 23

A* (A Yıldız) algoritması 148–51, 149

açılar, ölçüm 71, 71

algoritmalar 147–51, 147, 149, 157, 170

Almanca 44

Almanya 88

Amazon yağmur ormanı 33–5, 53

ABD 133–4

Anderson, Carl David 29

anketler, seçim 16–17, 108–9, 111, 137–41

anti-elektronlar 28

anti-madde parçacıkları 28, 29, 176

Antik Çin 77–81

Antik Mısır 66–72

araba

hız sabitleyici 83–4, 87, 90, 104

motorları 177

sürücüsüz 84, 90

hız 83, 87, 91–2

arama motorları 1–2

aritmetik 4, 63, 171

arkadaşlıklar 160–5

Ars Conjectandi (Bernoulli) 111–13

Arşimet 73–6, 84, 87, 171, 172

Atina 109

avcı-toplayıcılar 58

Avrupalı güçler 121

Ay 122, 123

aylar 89

aynalar 29–30

başkanlık seçimleri, ABD 16–17, 108, 111, 138–40, 164–5

Bayes, Thomas 118

Bayes'in formülü 118, 119–21

BBC web sitesi 155

bebekler, nesneleri ayırt etme

42–3, 45, 46, 47

Pekin'deki CCTV Kulesi, 102, 103

belirsizlik 108–41, 173

Bernoulli ailesi 112

Bernoulli, Jacob, *Ars Conjectandi* 111–13, 118, 119

beyin

ve oda planları 52

şekiller ve 50

ve miktarları kestirmek 41–4

- bilgisayarlar
ve algoritmalar 148–52, 160–4
arabada 83–4
Bilim insanları 27
binom dağılımı 113–16, 114–15
bira 69
Blue Planet 15, 15, 157
boğulmak, yüzme havuzlarında
130, 131, 132
böcekler ve şekil farkındalığı 50
Brexit referandumu 108
Brin, Sergey 2
Broad Street, Londra 127, 128
bulutlar 98
Büyük Buhran, ABD 138
- Cage, Nicolas 130–2, 131
Cambridge Analytica skandalı
164–5
Cermen dilleri 44
CERN, Cenevre 117
Chicago 133
cinayetler, ABD 133–4
cinsiyet farklılıkları, gelir ve 135
civcivler 49, 50–1, 51
Clinton, Bill 2
Clinton, Hillary 17, 108, 111,
113, 139–40
Conan Doyle, Sir Arthur 24, 32
Cruz, Ted 164
- çarpım tablosu 63
çarpma 79
çeyiz 38
çıkartma 42
çift kör deneyler 128–9
çiftçiler 66, 70
çiftçilik 79, 126
Çin 164
çiviyazısı 61, 61
çizge teorisi 3, 16, 159, 167,
172–4, 179
çizgeler, arka plandaki 165–7
çocuklar
saymak 43–4
ve geometrik şekiller 51–2
obezite 132
çubuklar, saymak 38, 77, 77
- “daireden kare yapmak” 74
daireler 28, 49, 60, 74, 79, 84
de Méré, Chevalier 109
de Moivre, Abraham 113–14,
116
değişim
ölçmek 90–2, 93, 99, 175
hızı 90–1
denetmenler 56–7, 62
Dijkstra’nın algoritması 147–51,
147
dik açılı üçgenler 65, 65, 73, 172
dikdörtgenler 50–1, 51, 53, 79,
97, 97
dil
Fransızca 44
Cermen dilleri 44
İbranice 49
Japonca 44
matematik ve 33–5, 38, 44
Rusça 49
Tok Pisin 38
Dirac, Paul 28–9, 32, 176
diziler, TV 12–16, 16
doğrusal denklemler 79
Dünya 26, 27, 27–8
düşünce kuruluşları 134
düz çizgiler 1, 34–5, 53, 73,
122–5, 123, 125
- e-postalar ve spam 118–19
eğriler 92, 93, 114–15, 114–15,
124
ekinler 125–6
ekmek 69, 81
ekonomide değişim 103–4
ekonomik araştırma enstitüleri
17, 104
elektronlar 28

- elipsler 28
 en 79
 enlem ve boylam 121-2, 148
 erkekler, maaşlar ve 135
 Eski Krallık, Mısır 67
 espresso makinesi 17, 90
 etrafımızdaki dünya, matematik
 ve 26-32, 42-3
 Euler, Leonhard 122-3, 142-3
 Eupalinos 72-3, 172
 Eupalinos Tüneli, Samos 72-3
 Everett, Daniel 34-5

 Facebook 2, 4-5, 156, 160-6,
 170, 179
 falcılık 77
 Fermat, Pierre de 109-10
 filmler 12-16, 15, 130, 131, 132,
 157-8
 Finsbury Park 9
 fizik 25, 27-9, 32, 101, 170, 176
 fizikçiler 27, 28, 29-32
 Fransızca 44
 Fresnel, Augustin 29-30, 176

 Galileo Galilei 89
 Gauss, Carl Friedrich 124-6,
 125, 136
 gemiler 60, 110-11, 121
 genler 159-60
 geometri 4, 49-55, 63, 171
 geometrik şekiller 34, 42, 49-55
 gerçeklik, benzerlikler 171-6
 Giza Piramidi 67
 Go (oyun) 164
 Golden Gate Köprüsü, San
 Francisco 40, 100-1, 101
 Google 1, 2, 153-60, 154, 165-
 6, 170, 179
 Google Haritalar 7-8, 10-12, 11,
 146, 148-9
 göçmenler 133
 Güneş 26, 27, 122
 güneş sistemi 26, 89, 122, 123
 modeli 27-8
 güvenlik ve oyun alanları 132

 hacim 74, 75, 84, 87-8, 97
 hane başına ortalama gelir, ABD
 134
 haritalar
 kolera 127
 okumak 7-12, 53-4, 54
 Harold, John 127
 hatalar, matematikte 169-71
 hava 175
 tahmini 98-100
 hava akımları 98-9, 175
 hayvanlar
 satışı 79
 ve şekil farkındalığı 50-1, 51
 hesaplama yöntemleri 79-80
 hız
 araba 83, 87, 91-2
 değişimi 90-1
 hız sabitleyici, araba 83-4, 87,
 90, 104
 Higgs parçacığı 116, 117, 118
 Hindistan 68
 hiyeratik yazı 67, 68, 68
 hiyeroglifler 67
 Holborn 9-10
 Hollandaca 44
 Holmes, Sherlock 23-5, 32, 169
 Huff, Darrell, *İstatistiklerle Nasıl
 Yalan Söylenir?* 133
 hükümetler, vergiler ve 58, 103-4

 Irak 56-7
Iron Man 14, 15, 15, 157
Iron Man 2 14, 15, 15, 157
 ısı/sıcaklık
 termostat 104
 hava 98
 ışık, davranışı of 29-30
 ışık, yansıma 29-30, 31

 İbranice 49

- “inekler”, matematik 80
 İngilizce 44
 İngiltere 88
 inşaat projeleri 62, 63
 integraler ve türevler 100–2
 integral (kalkülüs) 88, 94–107,
 114–15, 177–8
 internet 153–7, 154
 istatistik 3, 17, 108–9, 110, 114–
 15, 121–41, 178–9
İstatistiklerle Nasıl Yalan
 Söylenir? (Huff) 133
 istihkam çalışmaları 80
 İsveç 83
 İsveç otayolları 83

 Japonca 44
 Jüpiter 89

 kabileler 33–41, 45, 47, 53–4, 58
 kadınlar, maaşlar ve 135
 kafa, kazada hareketi 95–8
 kahve makinesi 17, 90
 kalkülüs 3, 88–107, 172–3, 176,
 177–8
 kano 39–40
 kanser
 olma olasılığının hesaplanması
 120
 tedavi tahmini 158–60
 karekökler 79, 85
 kareler 21–2, 21, 74
 karmaşık matematik 30, 64, 66,
 72
 Kâtelere 40
 kâtipler 61–2, 66–7, 70
 katsayılar 132
 Kaveve, Papua Yeni Gine 41
 kelime problemleri, matematiksel
 63–5
 Kepler, Johannes 89
 kesirler 68–9, 74, 79, 86–7
 Kewabiler 40, 47
 kil tabletler 59–60, 67, 172

 kirisler 101–2, 102
 Kiriwina Adaları 39
 kişisel veriler 161, 163–5,
 179–80
 kolera 126–30, 127
 komplo teorileri 153, 155
 koni 60, 74–5, 75, 84, 171
 Kopernik 27–8
 korelasyon 130–3, 131
 korku filmleri 13, 14
 kosinüs 143
 Königsberg (Kaliningrad) köp-
 rü bulmacası 142–5, 142,
 173–4
 köprüler 40, 47, 142–5, 142
 Kraliyet Cemiyeti 89–90
 kuantum mekaniği 28–9
 kum 169
 kumar 109
 kuşlar ve şekil farkındalığı 50
 küme teorisi 177
 küreler 74–5, 75, 84, 171

 Lambeth su şirketi 128–9, 130
 Landon, Alf 138
 Laplace, Pierre Simon 124–6,
 125, 136
 Legendre, Adrien-Marie 124
 Leibniz, Gottfried Wilhelm 84,
 88–90, 172–3
Literary Digest, The 138
 litre 169
 Loboda halkı 35–6, 45
 Londra Metrosu 8–10, 8

 Madang, Papua Yeni Gine 41
 madeni para 36, 38, 69
 yazı tura 113–16
 Mağara Alegorisi (Platon) 19,
 20–2
 makineler, gündelik 104
 mal, değiş tokuş 69
 Manhattan, New York 145–6,
 145

- Mars 89
matematiğin soyutlaması 172–4
ve beyin 47
Yunanlar ve 72
haritalar ve 53
gerekliliği 4
Platon ve 19, 20, 22, 24–6, 32
ve gerçeklik 168
matematiğin yararlılığı 168–80
matematik felsefesi 4, 18, 23–5,
171
“matematik ne işe yarar?” 1–2,
19
matematiksel beceri 4
*Matematiksel Sanat Üzerine Do-
kuz Bölüm* (Jiuzhang Suans-
hu) 79–81
Mayer, Tobias 121–2, 123, 124–5
meslekler 66–7
meteorologlar 98–100
metro, Londra 8–10, 8
Mezopotamya 58–66, 126, 172
Mezopotamya’da okul 62–6
miktar, birimler 94–8, 169
miktarlar, büyük 42, 44–9, 48
miktarlar, küçük 41–4, 48
mimarlar 62
Moğolistan 80
motorlar, araba 177
muhasabe 56–8, 57, 61–2
Mundurukú halkı 53–4
negatif sayılar 170
Netflix 12–16, 15, 157–8
New York 126, 134
Newton, Isaac 26–8, 88–90,
172–3
Ve hız sabitleyici 84
ve de Moivre 113
yerçekimi teorisi 32, 105
“Nijeryalı prens” spamı 119
Nil Nehri 67, 70
Nippur, Mezopotamya 63
Nobel Ödülleri 29
nöronlar, beyin 52–3
Nüfus Bürosu, ABD 134
obezite, çocuk 132
olasılık teorisi 109–29, 110,
114–15, 172, 173
Orta Krallık, Mısır 67, 70
ortalama
boy 114
gelir 124, 135
ve ölçüm 123–4
hız 91–2
kullanımı 137
ortalama gelir, ABD 134
otoyol hiyerarşileri 151–2
oyun alanlarının güvenli olması
132
oyunlar, matematik 110–11, 110,
113
Öklid 72, 73
ölçüm, ölçü
hatası 117, 123–4, 125
birimleri 36, 39–41, 169
Page, Larry 2
papirüs 67
Papua Yeni Gine 35–41
para 35–6, 38, 69, 109
parçacıklar 28
Pascal, Blaise 109–10
Pi (sayı) 76, 85, 86–7
pilot, otomatik 18, 104
Pirahâlar 33–5, 53, 174
piramitler 67, 69, 71
Pisagor 74
Pisagor teoremi 1, 65, 73, 79,
172
Platon 18, 19–23, 32
Platonistler 20, 22, 24, 25
politika 177
politika planları 17
pozitronlar 28, 29
protonlar 28

- referandum, Brexit 108
renkler, şekiller ve 51, 53
Richardson, Lewis 98–9
roketler, SpaceX 104
Romalılar 73, 74
Roosevelt, Franklin D. 138
rota planlayıcıları 147–51, 147,
173–4
Rusça 49
rüzgâr 100, 175
- sağ ve sol, farklar 48–9
salgınlar, kolera 126–30, 127
Sanayi Devrimi 3
savaş makineleri 74
sayı sistemleri 61, 61, 77–8, 77–8
sayılar
ve vücut parçaları 37
karmaşık 30
öğrenmek, sayıları 43–4
eksi 170
“yeni” 90
Pi 76, 85, 86–7
“gerçek” 20–2
semboller 60, 77
tam 168
sözcükler 33–5, 36, 77
sayıları öğrenmek 43–4
sayma sistemleri 35, 37–8, 37,
78, 168–9
seçim anketleri 16–17, 108–9,
111, 137–41
seçimler 104
seksagesimal (altmışlık) sayı sis-
temi 61, 61
semboller, sayı 60, 77
Sessions, Gen Jeff 133–4, 141
Seven Sisters 9–10
Shu-Sin, Kral 56–7, 66
sıfır 68, 78, 93
sıvı dinamiği 74
silindirler 74–5, 75, 84–5, 171
Simpson, Thomas 116, 118,
- 125–6
sinir ağları 161, 162, 165
sinüs 143
Snow, John 126–9
Sokrates 18
sol ve sağ, farklar 48–9
sonsuzluk 76, 85, 86, 87, 90,
93–4
sosyal ağlar 174
sosyal medya 2, 4–5, 156, 160–5,
170, 179
sosyal-kredi sistemi 164
Southwark & Vauxhall su şirketi
128–9, 130
sözleşmeler
Mezopotamya 62–3
SpaceX roketleri 104
spam, olasılığı 118–19
Stevin, Simon 86
su şirketleri, kolera ve 128–9
su ve yüzey yansımaları 30, 31
Susa, Mezopotamya 59
sürücüsüz arabalar 84, 90
- şans 109–21, 110
şehirlerin büyümesi 58–9, 67, 81,
171–2
şekiller 79
- tahıl 56, 59–61, 126
tahmin 148–51
inşaat 71
gıda 61, 70
kabileler ve 40–1, 47–9
tahmin, hava 98–100
tahminler, matematiksel 26–7,
176
tam sayılar 168
teğetler 143
tek yönlü sokaklar 145, 145
tekil ve çoğul arasındaki ayrım
44
tekil ve çoğul ayrımlar 44
termostatlar 104

- Thames Nehri 128
ticaret, kumar 110–11
Tok Pisin (dil) 38
top atışı 170
toplama 42
trafik şebekeleri 174
Trump, Donald 108, 111, 137–8,
139–40, 164
tüccarlar
Brezilyalı 33–5
Mısırlı 69
tümör büyümesi 91, 95
türev (kalkülüs) 88, 94, 99–100,
100–7, 177–8
Twitter 2

uçaklar 18, 104
Umma, Irak 56–7
URL 156
Uruk, Mezopotamya 59
uzunluk, ölçmek 46–7, 85

ücretler 70, 81, 135
üçgenler 65–6, 85, 86
dik açılı 65, 65, 73, 172

vergi sistemleri 58–9, 67, 72, 79,
81, 103
vücut parçaları
ile ölçmek 39
sayılar ve 37

web siteleri 14, 18, 153–7

Wikipedia 153, 154–6

yağmur 175
Yahoo 2
yalan haber 2, 133–7
yapay zekâ 160–5
yarıçap, ölçmek 75, 75
“yazı” veya “tura” 113–16,
114–15
Yeni Krallık, Mısır 67
“yeni” sayılar 90
yerçekimi teorisi 26–7, 100
yerli halklar
Kâte 40
Kewabi 40, 47
Loboda 35–6, 45
Mundurukú 53–4
Pirahã 33–5, 53
Yupno 37–8
yiyecek depoları 59, 61
Yunanlar, Antik 69, 72–6, 84–6,
94
Yupno halkı 37–8
yükseklik, grafiklerde 114, 115
yüz tanıma 163–4
yüzey yansıması, su ve 30, 31
yüzeyler 74
yüzme havuzları, boğulmak 130,
131, 132

zihinsel resim 52



Nicolas Cage'in oynadığı film sayısı ile havuzlarda boğulan insan sayısı arasındaki ilinti ne olabilir?

Matematikten yararlanarak hız sınırı cezalarına itiraz edebilir miyiz?



Binlerce yıl önce Mezopotamya halkları rakamları icat etmişti: O zamandan beri matematiği tutabilene aşk olsun! Sevsek de korksak da –ya da “Ben sözelciyim,” diyerek konuyu geçiştirsek de– artık gündelik hayatta kullandığımız pek çok şeyin arkasında matematik var. Peki ama kahve makinenizden telefonunuzdaki uygulamalara, hemen her araç gerecin **sizin adınıza her şeyi hesapladığı bu yeni dünyada matematikten anlamanıza gerçekten gerek var mı?**

*Pisagor Evimizin Her Şeyi'*nde Stefan Buijsman, felsefe, psikoloji ve tarihi birleştirerek okuyucuyu matematiğin harikalar diyarına götürüyor. Matematikten habersiz gelişmiş topluluklardan insanların doğuştan gelen becerilerine (Bebekler sayabilir mi?), şansın hesaplanabilirliğinden çağın teknolojilerinin ardındaki sayısal dünyaya kadar uzanan Buijsman, neden yeni bir lisandan önce **matematikten anlamayı** seçmemiz gerektiğini, aksi takdirde başkalarının matematiğiyle (algoritmalar, kampanyalar, anketler, yalan haberler) aldatılmaya ne kadar açık olduğumuzu ortaya koyuyor.

Pisagor Evimizin Her Şeyi, henüz on sekiz yaşındayken yüksek lisansını, yirmi yaşındayken doktorasını tamamlamış bir dâhiden, sayılar ve matematikle ilgili düşüncelerimizi kökünden değiştiren bir rehber.

“Buijsman'ın, matematiğin esas kıymetinin gerçekliği basitleştirmesinde saklı olduğunu anlatan, büyük bir teorisi var.”

—PUBLISHER'S WEEKLY



domingo
www.domingo.com.tr

978-605-198-218-2



9 786051 982182

KDV'den muafdir.

48 TL