

Keyifli Okumalar Dileriz

Binlerce kategoride milyonlarca PDF e-kitap, ders kitapları, dergiler ve romanlara platformumuz üzerinden ücretsiz ulaşabilirsiniz.

RESMİ WEB SİTEMİZ

<https://rantey.org>

Yedek ve Duyuru Kanallarımız

Sitemize erişim engeli gelmesi veya adres değişikliği durumunda aşağıdaki kanallardan güncel giriş adresine erişebilirsiniz:

- Telegram: <https://t.me/birkitapbir>
- WhatsApp Kanalımız : <https://whatsapp.com/channel/0029VbDHv8uE50Us4lvMoc0Y>

KONSEPT KİTAPLAR

TYT

A

ALİŞTIRAN

MATEMATİK

SORU KÜTÜPHANESİ

MATEMATİĞİ SİZİN İÇİN
◀KOLAYLAŞTIRDIK▶



PARAF YAYINLARI

VIDEO
ÇÖZÜM



MOBİL
KÜTÜPHANE



AKILLI
TAHTA





ALİŞTIRAN MATEMATİK SORU KÜTÜPHANESİ

Bu kitabın tüm hakları Paraf Yayınları'na aittir.

Kitabın tamamının ya da bir kısmının elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemi ile çoğaltılması, yayımlanması ve depolanması yasaktır.

© Copyright Paraf Yayınları - IX-I

ISBN

978-625-7423-93-9

Dizgi - Grafik Koordinatörü

Bekir KUMRU

İletişim Bilgileri

Paraf Yayınları

Merdivenköy Mah. Bora Sok. No: 1 Kat: 15

Nidakule, Göztepe / Kadıköy / İstanbul

Telefon: (0850) 480 40 94 – (0216) 354 38 39

Faks: (0216) 354 38 36

www.parafyayinlari.com

Basım Yeri

WPC Matbaacılık

Osmangazi Mah. Mehmet Deniz Kopuz Cad.

No:17/1 34522 Kiraç - Esenyurt /İSTANBUL

Tel : 0212- 886 83 30

Faks : 0212- 886 83 60



İSTİKLAL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl...
Hakkıdır, Hakk'a tapan, milletimin istiklâl!

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imânı boğar,
"Medeniyet!" dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş! Yurduma alçakları uğratma, sakın.
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın...
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri "toprak!" diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehid oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da, bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki fedâ?
Şühedâ fışkıracak toprağı sıksan, şühedâ!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüdâ.

Ruhumun senden, İlâhi, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dînin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan, İlâhi, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerred gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalar sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl:
Hakkıdır, hür yaşamış, bayrağımın hürriyet;
Hakkıdır, Hakk'a tapan, milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy



GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namûsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk

ÖN SÖZ

Sevgili öğrenciler,

Paraf Yayınları olarak yepyeni bir seri sunuyoruz. Bu özel konsept kitapları “A serisi” olarak isimlendirdik. Bu serideki eserlerimiz öğrenci ve branşların özelliklerine göre ve sadece o derse özel olarak hazırlandı. Özel konsept kitaplar serisinin bir eseri de bu “**Alıştırır Matematik Soru Kütüphanesi**” kitabıdır.

Matematik bazı öğrenciler tarafından yapılmakta zorlanılan bir derstir. Biz de zorluğu aşmaya yönelik olarak “**Alıştırır Matematik Soru Kütüphanesi**” kitabını hazırladık. Bu kitap Matematik sorularını sevdirecek çözmeye alıştıran. Bu eserimizde, Matematik konularını hücrelere ayırdık. En temel bilgilerden ve soru tiplerinden başlayarak adım adım hedefe ulaştık.

- **NE BİLMELİYİM?** ; bölümünde öğretilmesi amaçlanan temel bilgileri öğretmen anlatımı tadında sade biçimde verdik.
- **NASIL ÇÖZÜLÜR?** ; ne bilmeliyim bölümünde verilen temel bilgilerle ilgili bol miktarda örnek soru sorduk ve bunların detaylı çözümlerini yaptık.
- **NASIL UYGULARIM?** bu bölümde; ne bilmeliyim? ve nasıl çözülür? başlıkları ile verdiğimiz bilgilerle ilgili cevaplı alıştırmalar hazırladık.
- **PEKİŞTİRME TESTLERDE**; öğrenilen bilgilerin tamamının pekiştirilmesini bu testlerle sağladık. Pekiştirme testlerinde, ipucu desteği olan üniversiteye giriş sınavı standartlarında özel sorular sorduk.

Paraf Yayınları olarak “**Alıştırır Matematik Soru Kütüphanesi**” kitabını hazırlarken üniversiteye giriş sınavlarda çıkmış tüm soruları, MEB müfredatını ve kazanımları ayrıntılı biçimde inceledik. Soruların form ve içeriklerinin bu sınavlara yakın ya da benzer olmasına özen gösterdik.

Hazırladığımız “**Alıştırır Matematik Soru Kütüphanesi**” kitabının Matematiği sevdireceğini ve başarınızı artıracaklarını umuyoruz. Eserimizin hazırlanmasında fikirleriyle bize yol gösteren öğretmenlerimize ve emek harcayan herkese çok teşekkür ederiz.

PARAF YAYINLARI

Görüş ve Değerlendirmeleriniz için:
matematik@parafyayinlari.com

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

TAM SAYILARDA İŞLEMLER

Öğrenelim	9
Pekiştirelim	27

BÖLÜM 2

RASYONEL SAYILAR

Öğrenelim	31
Pekiştirelim	65

BÖLÜM 3

TEMEL MATEMATİK İŞLEMLER VE BİRİNCİ DERECEDEN DENKLEM ÇÖZME

Öğrenelim	67
Pekiştirelim	89

BÖLÜM 4

TEMEL KAVRAMLAR

Öğrenelim	91
Pekiştirelim	115

BÖLÜM 5

SAYI BASAMAKLARI

Öğrenelim	119
Pekiştirelim	131

BÖLÜM 6

BÖLME - BÖLÜNEBİLME KURALLARI

Öğrenelim	133
Pekiştirelim	155

BÖLÜM 7

EN BÜYÜK ORTAK BÖLEN - EN KÜÇÜK ORTAK KAT (EBOB - EKOK)

Öğrenelim	157
Pekiştirelim	177

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 8

BASİT EŞİTSİZLİKLER

Öğrenelim	179
Pekiştirelim	199

BÖLÜM 9

MUTLAK DEĞER

Öğrenelim	201
Pekiştirelim	225

BÖLÜM 10

ÜSLÜ İFADELER

Öğrenelim	227
Pekiştirelim	253

BÖLÜM 11

KÖKLÜ İFADELER

Öğrenelim	255
Pekiştirelim	281

BÖLÜM 12

ÇARPANLARA AYIRMA

Öğrenelim	283
Pekiştirelim	303

BÖLÜM 13

ORAN - ORANTI

Öğrenelim	307
Pekiştirelim	323

BÖLÜM 14

SAYI PROBLEMLERİ

Öğrenelim	325
Pekiştirelim	337

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 15

KESİR PROBLEMLERİ

Öğrenelim	339
Pekiştirelim	349

BÖLÜM 16

YAŞ PROBLEMLERİ

Öğrenelim	351
Pekiştirelim	361

BÖLÜM 17

YÜZDE PROBLEMLERİ

Öğrenelim	363
Pekiştirelim	375

BÖLÜM 18

KARIŞIM PROBLEMLERİ

Öğrenelim	377
Pekiştirelim	383

BÖLÜM 19

HAREKET PROBLEMLERİ

Öğrenelim	385
Pekiştirelim	397

BÖLÜM 20

VERİ - GRAFİK PROBLEMLERİ

Öğrenelim	399
Pekiştirelim	405

BÖLÜM 1

ÖĞRENELİM

TAM SAYILARDA İŞLEMLER Tam Sayılarda İşlemler

Ne Bilmeliyim? 1



İşaret Çarpması



Bir sayının önünde art arda bulunan iki veya daha fazla işaret varsa işaretleri çarparak tek işarete düşürmek gerekir. Nasıl mı yapacağız. Hadi başlayalım

Farklı işaretlerin çarpımı negatif (-), aynı işaretlerin çarpımı pozitif (+).

$$(+) \cdot (+) \Rightarrow (+) \quad (-) \cdot (-) \Rightarrow (+)$$

$$(-) \cdot (+) \Rightarrow (-) \quad (+) \cdot (-) \Rightarrow (-)$$

Nasıl Çözülür?



Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulalım.

$$\checkmark - (+7) = (- \cdot +) \cdot 7 = -7$$

$$\checkmark + (-4) = (+ \cdot -) \cdot 4 = -4$$

$$\checkmark + (+3) = (+ \cdot +) \cdot 3 = +3$$

$$\checkmark - (-6) = (- \cdot -) \cdot 6 = +6$$

$$\checkmark - (+ (-13)) = (- \cdot + \cdot -) \cdot 13 \\ = (- \cdot -) \cdot 13 = +13$$

$$\checkmark - (- (-145)) = (- \cdot - \cdot -) \cdot 145 \\ = (+ \cdot -) \cdot 145 = -145$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$\checkmark + (+3) \quad (+3)$$

$$\checkmark - (-9) \quad (+9)$$

$$\checkmark + (-5) \quad (-5)$$

$$\checkmark - (+6) \quad (-6)$$

$$\checkmark - (- (-16)) \quad (-16)$$

$$\checkmark - (- (+21)) \quad (+21)$$

Ne Bilmeliyim? 2

Toplama İşlemi



Ayça, söyle bakalım tam sayılarda toplama işlemini nasıl yapıyoruz.



Hocam, aynı işaretlileri topluyoruz. İşaretleri pozitif ise sonuç pozitif negatif ise sonuç negatif olur.



Aferin! Farklı işaretli sayılarda ne yapıyoruz.



İşte o problem hocam karıştırıyorum.



Karıştıracak bişey yok, farklı işaretli sayılarda sayıları birbirinden çıkarıp elde edilen sayının önüne büyük olanın işaretini yazıyoruz

Nasıl Çözülür?

Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulalım.

$$✓ (+15) + (+7) = + (15 + 7) = + 22$$



Pozitif işaretli sayıları topladık.

$$✓ (+21) + (+5) + (+2) = + (21 + 5 + 2) = + 28$$

$$✓ (-18) + (-9) + (-11) = - (18 + 9 + 11) = -38$$



Sayıların tamamı negatif olduğundan aynı işaretli sayılar toplanır kuralına göre topladıktan sonra başına negatif işaretini koyduk.

$$✓ (-32) + (-7) + (-41) = - (32 + 7 + 41) = -80$$

$$✓ (+27) + (-14) = + (27 - 14) = + 13$$



Farklı işaretli sayılar çıkarılır kuralına göre işlem yaptık. Burada büyük olan sayının işareti pozitif (+) olduğundan sonuç pozitif olur.

$$✓ (-49) + (+21) = -49 + 21 = - (49 - 21) = -28$$



Yine çıkarma işlemi yaptık. Fakat burada büyük olan sayının işareti negatif (-) olduğundan sonuç negatif olur.

$$✓ 7 + 8 + 0 + 2 = + 17$$



Parantez olmasa da işlemlerde farklılık yok. Sayıların tamamı pozitif veya negatif olduğunda sayılar toplanacak sonra ön tarafa işareti yazılacak.

$$✓ 123 + 238 = + 361$$

$$✓ -12 - 9 = - (12 + 9) = -21$$

$$✓ -23 - 45 = - (23 + 45) = -68$$

$$✓ -27 - 8 - 12 = - (27 + 8 + 12) = -47$$

$$✓ -1 - 9 - 5 - 4 = - (1 + 9 + 5 + 4) = -19$$

$$✓ -11 - 19 - 15 - 4 - 6 = - (11 + 19 + 15 + 4 + 6) = -55$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$\rightarrow (+4) + (+3)$$

(7)

$$\rightarrow (+7) + (+73) + (+9)$$

(89)

$$\rightarrow (+25) + (+14) + (+3) + (+12)$$

(54)

$$\rightarrow (-2) + (-6)$$

(-8)

$$\rightarrow (-178) + (-219)$$

(-397)

$$\rightarrow (-18) + (-19) + (-11)$$

(-48)

$$\rightarrow (+20) + (-15)$$

(5)

$$\rightarrow (+8) + (-3)$$

(5)

$$\rightarrow (-27) + (+34)$$

(7)

$$\rightarrow (-17) + (+42)$$

(25)

$$\rightarrow 15 + 14 + 13$$

(42)

$$\rightarrow 42 - 15$$

(27)

$$\rightarrow -17 + 49$$

(32)

$$\rightarrow -28 + 19$$

(-9)

$$\rightarrow -20 - 15 - 8$$

(-43)

$$\rightarrow -3 - 12 - 4 - 10$$

(-29)

Ne Bilmeliyim? 3

Çıkarma İşlemi



Çıkarma işleminde parantezin önündeki işaret ile parantezin içerisindeki işareti çarpın gerisi toplama işlemi kurallarının aynısı.

Nasıl Çözülür?

Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulalım.

$$✓ 14 - 10 = + (14 - 10) = +4$$

$$✓ 17 - 32 = - (32 - 17) = -15$$

$$✓ -22 - 11 = - (22 + 11) = -33$$



Bunları toplama işleminde de yaptık şimdi şu parantezli sorulara bakalım.

$$✓ (+137) - (+111) = 137 - 111 = +26$$

$$✓ (+11) - (+15) = 11 - 15 = - (15 - 11) = -4$$

$$✓ (+32) - (+45) = 32 - 45 = - (45 - 32) = -13$$

$$✓ (-44) - (-21) = -44 + 21 = - (44 - 21) = -23$$

$$✓ (-14) - (-63) = -14 + 63 = + (63 - 14) = +49$$

$$✓ (-110) - (-208) = -110 + 208 \\ = + (208 - 110) = +98$$

$$✓ -18 + 11 + 8 - 19 = - (18 + 19) + (11 + 8) \\ = -37 + 19 = -18$$

$$✓ (-24) + (-11) - (-13) = -24 - 11 + 13 \\ = - (24 + 11) + 13 \\ = -35 + 13 \\ = - (35 - 13) = -22$$

Hocam bir sürü eksi artı var kafam karıştı.



Bak güzel kızım benim, acele etmeden sakın olup yaptığım işlem sırasını takip et. Art arda gelen işaretleri çarparak düzenleme yaptım. Daha sonra pozitif sayıları kendi aralarında negatif sayıları kendi aralarında topladım. Sonuçta da farklı işaretli sayıları çıkarttım.

$$✓ (12) - (+14) - (+17) = 12 - 14 - 17 \\ = 12 - (14 + 17) \\ = 12 - 31 = - (31 - 12) = -19$$

$$✓ (-22) - (-4) - (-7) = -22 + 4 + 7 \\ = -22 + (4 + 7) \\ = -22 + 11 \\ = - (22 - 11) = -11$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$\rightarrow 32 - 10$$

(22)

$$\rightarrow (+27) - (-34)$$

(61)

$$\rightarrow 9 - 11$$

(-2)

$$\rightarrow (+18) - (+5) - (+6)$$

(7)

$$\rightarrow -15 - 33$$

(-48)

$$\rightarrow (+48) - (-52) - (-56)$$

(156)

$$\rightarrow (+12) - (+7)$$

(5)

$$\rightarrow (+14) - (-22) + (-16)$$

(20)

$$\rightarrow (+199) - (+200)$$

(-1)

$$\rightarrow -13 - 2 + 1$$

(-14)

$$\rightarrow (-16) - (-14)$$

(-2)

$$\rightarrow -28 + 19 - 7$$

(-16)

$$\rightarrow (-4) - (-15)$$

(11)

$$\rightarrow -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6$$

(3)

Ne Bilmeliyim? 4

Çarpma



Farklı işaretlerin çarpımı negatif (-), aynı işaretlerin çarpımı pozitif (+).

$$(+) \cdot (+) \Rightarrow (+) \quad (-) \cdot (+) \Rightarrow (-)$$

$$(-) \cdot (-) \Rightarrow (+) \quad (+) \cdot (-) \Rightarrow (-)$$



Çarpma işlemlerinde önce işaretler çarpılır sonra sayılarla işleme geçilirse işaret hatası yapma olasılığı azalır.



Bizim zamanımızda kerrat cetveli denilirdi. Yani, çarpım tablosunu çok iyi bilmeniz gerektiğini söylememe gerek yoktur herhalde.

Nasıl Çözülür?

1. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulalım.

$$\checkmark (+5) \cdot (+7) = (+ \cdot +) \cdot (5 \cdot 7) = +35$$

$$\checkmark (-3) \cdot (-4) = (- \cdot -) \cdot (3 \cdot 4) = +12$$

$$\checkmark (+2) \cdot (+3) \cdot (-5) = (+ \cdot + \cdot -) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5) = -30$$

$$\checkmark (+3) \cdot (-4) \cdot (-6) \cdot (+2) \cdot (-1) \\ = (+ \cdot - \cdot - \cdot + \cdot -) \cdot (3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1) = -144$$



Baş tarafa işaretleri alıp çarpmamızda hiçbir sakınca yoktur. Onlar toplama çıkarma işlemleri değil sayıların işaretleridir.

Böyle kolay oluyormuş hocam, öteki türlü hem işaretleri hem de çarptığım sayıları aklımda tutmaya çalışıyordum.



$$\checkmark 2 \cdot 4 \cdot 6 = +48$$

$$\checkmark 4 \cdot (-8) = (+ \cdot -) \cdot (4 \cdot 8) = -32$$

$$\checkmark 2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = (-) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) = -720$$

$$\checkmark (-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = (-) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = -120$$

$$\checkmark -2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = (-) \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8) = -384$$

$$\checkmark 2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (-5) = (- \cdot -) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = +120$$

$$\checkmark (-4) \cdot 7 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-3) = (- \cdot - \cdot -) \cdot (4 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3) = -168$$

$$\checkmark 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 191 \cdot 0 \cdot 191 = 0$$

$$\checkmark (+12) \cdot (+43) \cdot 0 \cdot (-345) = 0$$



Çarpmada sıfır yutan eleman olduğundan çarpanlardan biri sıfır ise çarpımın sonucu sıfırdır.

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$\rightarrow (+2) \cdot (+4) \cdot (+5)$$

(40)

$$\rightarrow (-33) \cdot (-9)$$

(297)

$$\rightarrow (+3) \cdot (-2) \cdot (-4)$$

(24)

$$\rightarrow (+6) \cdot (-7) \cdot (+10)$$

(-420)

$$\rightarrow (-5) \cdot (+2) \cdot (-6) \cdot (+3) \cdot (-4)$$

(-720)

$$\rightarrow 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$$

(720)

$$\rightarrow 13 \cdot (-18)$$

(-234)

$$\rightarrow 9 \cdot (-10) \cdot 5 \cdot (-2)$$

(900)

$$\rightarrow (-1) \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

(-105)

$$\rightarrow 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot (-6)$$

(-144)

$$\rightarrow 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4)$$

(-5040)

$$\rightarrow 15 \cdot 74 \cdot 181 \cdot 0 \cdot 191$$

(0)

$$\rightarrow (-42) \cdot (-73) \cdot 0 \cdot (-2487)$$

(0)

Ne Bilmeliyim? 5

Bölme



Farklı işaretlerin bölümü negatif (-), aynı işaretlerin bölümü pozitif (+).

$$(+)\div(+)\Rightarrow(+)$$

$$(-)\div(+)\Rightarrow(-)$$

$$(-)\div(-)\Rightarrow(+)$$

$$(+)\div(-)\Rightarrow(-)$$



Bölme işlemlerinde de çarpma işleminde olduğu gibi önce işaretler bölünür (veya çarpılır) sonra sayılarla işlem yapılır.

Nasıl Çözülür?

1. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulalım.

$$\checkmark \frac{28}{7} = 28:7 \Rightarrow \begin{array}{r} 28 \overline{) 28} \\ \underline{28} \\ 0 \end{array}$$

$$\checkmark \frac{42}{3} = 42:3 \Rightarrow \begin{array}{r} 42 \overline{) 42} \\ \underline{42} \\ 0 \end{array}$$

$$\checkmark \frac{-63}{-9} = (-63):(-9) = (-:-)\cdot(63:9) = +7$$

$$\checkmark \frac{-133}{-7} = (-133):(-7) = (-:-)\cdot(133:7) = +19$$

$$\checkmark \frac{+120}{-8} = (+120):(-8) = (+:-)\cdot(120:8) = -15$$

$$\checkmark \frac{-145}{+5} = (-145):(+5) = (-:+)\cdot(145:5) = -29$$

$$\checkmark -\frac{112}{8} = -(112:8) = -14$$

$$\checkmark \frac{-168}{8} = \frac{168}{-8} = (-:+)\cdot(168:8) = -21$$

$$\checkmark -\frac{-36}{12} = (-:-)\cdot(36:12) = +3$$

$$\checkmark -\frac{48}{-16} = (-:-)\cdot(48:16) = +3$$

$$\checkmark -\frac{-132}{-11} = (-:-)\cdot(132:11) = -12$$

$$\checkmark \frac{(-15)\cdot(+8)}{(-6)} = \frac{(-)\cdot(+)}{(-)} \cdot \frac{15\cdot8}{6} = +20$$

$$\checkmark \frac{(-4)\cdot(-9)\cdot(+5)}{(-3)\cdot(+10)} = \frac{(-)\cdot(-)\cdot(+)}{(-)\cdot(+)} \cdot \frac{4\cdot9\cdot5}{3\cdot10} = -6$$

$$\checkmark \frac{(-24)}{(+18)} \cdot \frac{(+54)}{(-16)} = \frac{(-)\cdot(+)}{(+)\cdot(-)} \cdot \frac{24\cdot54}{18\cdot16} = +\frac{3\cdot6}{2\cdot2} = +\frac{9}{2}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$\rightarrow \frac{35}{5}$$

(7)

$$\rightarrow \frac{-68}{17}$$

(-4)

$$\rightarrow \frac{-49}{-7}$$

(7)

$$\rightarrow \frac{204}{-6}$$

(-34)

$$\rightarrow \frac{340}{-17}$$

(-20)

$$\rightarrow \frac{182}{14}$$

(-13)

$$\rightarrow \frac{-78}{3}$$

(26)

$$\rightarrow \frac{-323}{19}$$

(17)

$$\rightarrow \frac{54}{-9}$$

(6)

$$\rightarrow \frac{-120}{-24}$$

(-5)

$$\rightarrow \frac{-192}{-8}$$

(-24)

$$\rightarrow \frac{(-21) \cdot (-9)}{63}$$

(+3)

$$\rightarrow \frac{(-4) \cdot (-9) \cdot (+5)}{(-3) \cdot (+10)}$$

(-6)

$$\rightarrow \frac{-32}{14} \cdot \frac{18}{-3} \cdot \frac{-42}{-8}$$

(72)

Ne Bilmeliyim? 6

Parantez Açma



Parantezin önündeki sayı (veya işaret) parantezin içerisindeki her terimle çarpılarak parantez kaldırılır.



Parantezin önünde işaret veya sayı yoksa parantez direk kaldırılabilir.

Nasıl Çözülür?

1. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulalım.

$$\checkmark - (3 - 7 - 11) = -3 + 7 + 11 = -3 + 18 = 15$$

$$\checkmark - (-8 + 12 + 19) = +8 - 12 - 19 = 8 - 31 = -23$$

$$\checkmark (-4 + 9) - (-13 + 27) = -4 + 9 + 13 - 27 = -31 + 22 = -9$$

$$\checkmark 4 \cdot (8 - 11 + 14) = 4 \cdot 8 - 4 \cdot 11 + 4 \cdot 14 = 32 - 44 + 56 = 44$$

$$\checkmark -3 \cdot (-8 - 20 + 15) = +3 \cdot 8 + 3 \cdot 20 - 3 \cdot 15 = 24 + 60 - 45 = 39$$

$$\checkmark 4 \cdot (-24 + 17) - 5 \cdot (-16 - 9) = -4 \cdot 24 + 4 \cdot 17 + 5 \cdot 16 + 5 \cdot 9 = -96 + 68 + 80 + 45 = 97$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$\rightarrow 2 \cdot (9 - 5 - 23) \quad (-38)$$

$$\rightarrow -(-3 - 6 + 7 - 11) \quad (13)$$

$$\rightarrow (29 - 12) - (105 - 89) \quad (1)$$

$$\rightarrow (7 - 42) - (-35 - 19) + (-51 + 38) \quad (6)$$

$$\rightarrow 3 \cdot (17 - 11) - 4 \cdot (-5 - 8) \quad (70)$$

$$\rightarrow -5 \cdot (8 - 11) - 6 \cdot (-3 + 9) \quad (-21)$$

Tam Sayılarda İşlemler

Ne Bilmeliyim? 7



Üs Alma

➤ 4^3 demek 3 tane 4'ün çarpımı demektir. $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ 'tür.

➤ Pozitif sayıların tüm kuvvetleri **pozitif**dir.

➤ $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

➤ Negatif sayıların ise çift kuvvetleri **pozitif**, tek kuvvetleri **negatif**dir.

$(+)^{\text{çift sayı}} = +$, $(+)^{\text{tek sayı}} = +$

$(-)^{\text{çift sayı}} = +$, $(-)^{\text{tek sayı}} = -$

➤ $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$

➤ $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

➤ $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$



Üslü ifadede parantezin üssü parantezin içerisindeki her şeyi etkiler, parantez yoksa sayının üssü yalnızca sayıyı etkiler.

➤ $-2^2 = -4$, $-2^3 = -8$, $-2^5 = -32$



Üsler yalnızca sayılara ait olduğundan kuvvetler sayıların önlerindeki işaretleri (- yi) etkilemedi.

$$\checkmark (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$

$$\checkmark (-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$$

$$\checkmark (-3)^5 = (-) \cdot 3^5 = -243$$



Negatif sayının tek kuvveti negatiftir.

$$\checkmark (-2)^7 = (-) \cdot 2^7 = -128$$

$$\checkmark (-6)^3 = (-) \cdot 6^3 = -216$$

$$\checkmark (-3)^4 = (+) \cdot 3^4 = +81$$



Negatif sayının çift kuvveti pozitiftir.

$$\checkmark (-2)^6 = (+) \cdot 2^6 = +64$$

$$\checkmark (-5)^3 = (-) \cdot 5^3 = -125$$

$$\checkmark -2^7 = (-) \cdot 128 = -128$$

$$\checkmark -7^2 = (-) \cdot 49 = -49$$

$$\checkmark -3^4 = (-) \cdot 81 = -81$$

Nasıl Çözülür?



1. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulalım.

$$\checkmark 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

$$\checkmark 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

$$\checkmark 5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

$$\checkmark 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

$\rightarrow 5^3$

(125)

$\rightarrow (-7)^3$

(-343)

$\rightarrow 10^4$

(10000)

$\rightarrow (-3)^7$

(-2187)

$\rightarrow 11^3$

(1331)

$\rightarrow (-5)^5$

(-3125)

$\rightarrow (-16)^2$

(256)

$\rightarrow -9^2$

(-81)

$\rightarrow (-5)^4$

(625)

$\rightarrow -5^4$

(-625)

$\rightarrow (-4)^4$

(256)

$\rightarrow -4^5$

(-1024)

$\rightarrow (-4)^3$

(-64)

$\rightarrow -2^9$

(-512)

Tam Sayılarda İşlemler

Ne Bilmeliyim? 8

İşlem Önceliği

Birden fazla işlemin bir arada olduğu durumlarda işlemler, işlem önceliğine göre sırasıyla yapılmalıdır.

İşlem önceliği şu sıradadır:

- Öncelikle parantez içleri hesaplanır.
- Üslü işlemler varsa, üs alma işlemi yapılır.
- Çarpma - Bölme işlemleri yapılır.
- Toplama - Çıkarma işlemleri yapılır.



Çarpma ve bölme işlemlerinden birinin diğerine veya toplama ve çıkarma işlemlerinden birinin diğerine işlem önceliği yoktur. Bunun için çarpma ve bölme işleminin veya toplama çıkarma işleminin art arda olduğu durumlarda işlem sırası parantezlerle belirlenir.

$$✓ 8 \cdot 4 - 22 : 11 = 32 - 2 = 30$$

$$✓ 6 \cdot 3 - 4 \cdot 5 - 11 \cdot 2 = 18 - 20 - 22 = -24$$

$$✓ 9 : 3 + 6 \cdot 5 - 36 : 12 = 3 + 30 - 3 = 30$$

$$✓ (-4) \cdot 6 - (-30) : (-5) = -24 - (+6)$$

$$= -24 - 6 = -30$$



Önce işaretlere dikkat ederek çarpma işlemlerini yaptık. Sonra da toplama çıkarma işlemi kurallarına göre sonucu bulduk.

Nasıl Çözülür?

1. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulalım.

$$✓ 3 \cdot 7 + 5 = 21 + 5 = 26$$

$$✓ 5 \cdot 9 - 13 = 45 - 13 = 32$$

$$✓ 11 + 14 : 7 = 11 + 2 = 13$$

$$✓ 32 - 8 \cdot 9 = 32 - 72 = -40$$

$$✓ 4 \cdot 7 - 2 \cdot 10 = 28 - 20 = 8$$

$$✓ (-32) : 8 - (-4) \cdot (-9) = -4 - (+36)$$

$$= -4 - 36$$

$$= -40$$

$$✓ (-2) \cdot 7 - 2 \cdot (-5) + 3 \cdot (-4) = -14 + 10 - 12$$

$$= -26 + 10$$

$$= -16$$

$$✓ (-21) : 3 - (-12) \cdot (-2) - 5 \cdot (-7) = -7 - 24 + 35$$

$$= -31 + 35$$

$$= 4$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$\rightarrow 6 \cdot 9 + 12$$

(66)

$$\rightarrow 15 \cdot 3 - 21$$

(24)

$$\rightarrow 29 - 7 \cdot 4$$

(1)

$$\rightarrow 52 : 13 + 37$$

(41)

$$\rightarrow 56 \cdot 7 - 20 : 5$$

(388)

$$\rightarrow 4 \cdot 5 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6$$

(30)

$$\rightarrow -12 : 6 + 4 \cdot (-2) - 3 \cdot 7$$

(-31)

Nasıl Çözülür?



1. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulalım.

$$\checkmark 5 \cdot (4 \cdot 6 + 7) = 5 \cdot (24 + 7) = 5 \cdot 31 = 155$$

$$\checkmark 4 \cdot (-2 \cdot 6 + 5 \cdot 3) = 4 \cdot (-12 + 15) \\ = 4 \cdot 3 = 12$$

$$\checkmark 15 : (8 - 3) + 24 : (4 + 2) = 15 : 5 + 24 : 6 \\ = 3 + 4 = 7$$

$$\checkmark (2 \cdot 8 - 3) \cdot (4 : 2 - 8) = (16 - 3) \cdot (2 - 8) \\ = 13 \cdot (-6) = -78$$

$$\checkmark (2 \cdot 15 - 13) + 4 : 2 = (30 - 13) + 2 \\ = 17 + 2 = 19$$

$$\checkmark 4 \cdot [4 - (7 - 3) + 6] = 4 \cdot [4 - 4 + 6] \\ = 4 \cdot 6 = 24$$

Tam Sayılarda İşlemler

Nasıl Çözülür?



$$\begin{aligned}
 & \checkmark 5 \cdot (-7) - 6 \cdot (17 - 8) - 42 : (-14 - 7) \\
 & = 5 \cdot (-7) - 6 \cdot 9 - 42 : (-21) \\
 & = -35 - 54 + 2 \\
 & = -89 + 2 = -87
 \end{aligned}$$



Önce parantez içlerini temizledik, sonra çarpma işlemlerini yaptık. En son iş toplama çıkarmaya kaldı.

$$\begin{aligned}
 & \checkmark 42 : [41 - (19 + 4) \cdot 3 + 7] - 11 \\
 & = 42 : [41 - 23 \cdot 3 + 7] - 11 \\
 & = 42 : [41 - 69 + 7] - 11 \\
 & = 42 : (-21) - 11 \\
 & = -2 - 11 = -13
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \checkmark 3 - 2 \cdot [3 - (-4 + 3) - 3 \cdot (-2 + 7)] \\
 & = 3 - 2 \cdot [3 - (-1) - 3 \cdot (+5)] \\
 & = 3 - 2 \cdot [3 + 1 - 15] \\
 & = 3 - 2 \cdot [4 - 15] \\
 & = 3 - 2 \cdot (-11) \\
 & = 3 + 22 = 25
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \checkmark -2^2 \cdot 7 - 2 \cdot (-5)^2 + 4 \cdot (-1)^3 + (-3)^3 \\
 & = -4 \cdot 7 - 2 \cdot 25 + 4 \cdot (-1) - 27 \\
 & = -28 - 50 - 4 - 27 = -109
 \end{aligned}$$



İlk iş olarak üslü ifadeleri hallettik. Sonra sıraya göre çarpma, toplama ve çıkarma işlemlerini yaptık.

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$\rightarrow 17 + 4 \cdot (23 - 12) - 3 \cdot (-12 + 8)$$

(73)

$$\rightarrow (-4)^2 + (-3^2) - 2^2$$

(3)

$$\rightarrow (-5^2) - (-5)^2 - 5^2$$

(-75)

$$\rightarrow (-1) \cdot (-3)^3 - (-5)^2$$

(2)

Nasıl Uygularım?



$$\rightarrow (+8)^2 : (-2)^4$$

(4)

$$\rightarrow -5 \cdot [12 - 5 \cdot (-4 + 3^2) - 3]$$

(80)

$$\rightarrow (-3)^3 : (+9)$$

(-3)

$$\rightarrow [(-2)^3 - (-3^2)] - [-4^2 - 5^2]$$

(42)

$$\rightarrow 2 \cdot 5^2 - 2^2 \cdot 4 + 3^2 \cdot 5$$

(79)

$$\rightarrow 12 \cdot (-14 + 32) - 44 : (-7^2 + 3^3)$$

(218)

$$\rightarrow (-2)^3 : 8 + 2 \cdot (-3)^3 - 3^3$$

(-82)

$$\rightarrow 12 - 4 \cdot [-7 - 5 \cdot [(-9)^2 - 3^4]]$$

(40)

Nasıl Uygularım?



$$\rightarrow (-4)^2 - 4 \cdot [-7 - 5 \cdot (-3)^2 + 35]$$

(84)

$$\rightarrow (5 - 7)^3 + 3 \cdot [(-6 + 9)^2 + 2 \cdot (11 - 24)]$$

(-59)

$$\rightarrow (-2)^3 \cdot 4 + 3 \cdot [-2 - (-2)^2 : 2]$$

(-44)

$$\rightarrow 2 \cdot (11 - 24) - [-6 \cdot 9 - 5 \cdot (2 - 4)^3]$$

(-12)

$$\rightarrow (-6)^2 : [(-3^2) + 2 \cdot (-3)^2]$$

(4)

$$\rightarrow 7 - [-6 \cdot 9 - 5 \cdot ((2 - 4) + 3 \cdot 5)]$$

(126)

$$\rightarrow (-6) \cdot [(-3 + 7)^2 + (8 - 4)^3]$$

(-480)

$$\rightarrow -4 \cdot (12 - 11) - \{-16 + 4 \cdot [(7 - 1) + 2 \cdot (13 - 2)]\}$$

(-100)

Ne Bilmeliyim? 9

Değişkenler Yerine Değer Verme



Bir değişkene değer verirken işaret hatası yapılmaması için değerlerin parantez içinde yazılması gerekir.

Nasıl Çözülür?

1. $x = -3$ ve $y = 2$ için aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulalım.

$$✓ -x \cdot y = -(-3) \cdot (2) = 6$$

$$✓ x^2 \cdot y^3 = (-3)^2 \cdot (2)^3 = 9 \cdot 8 = 72$$

$$✓ 4x^2 - 3y = 4 \cdot (-3)^2 - 3 \cdot (2) = 36 - 6 = 30$$

$$✓ 4 + x - 3 - y - xy = 4 + (-3) - 3 - (2) - (-3) \cdot (2) \\ = 4 - 3 - 3 - 2 + 6 = 2$$

$$✓ x^2 - y^3 - (x + y)^2 = (-3)^2 - (2)^3 - (-3 + 2)^2 \\ = 9 - 8 - (-1)^2 \\ = 9 - 8 - 1 = 0$$

Nasıl Uygularım?

1. $x = -2$ ve $y = -5$ için aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$➔ -x + y$$

$$(-3)$$

$$➔ -3x + 2y$$

$$(-4)$$

$$➔ -4xy + y^2$$

$$(-15)$$

$$➔ -2(x + y)^2 + y^3$$

$$(-223)$$

$$➔ (x - y)^2 - 3(xy - 2y)$$

$$(-51)$$

Tam Sayılarda İşlemler

1. $(-27) + (+34) - (-29) + (-16)$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -14 B) -16 C) 17 D) 18 E) 20

2. $5 \cdot (-7) - 6 \cdot (17 - 8) - 42 : (-14 - 7)$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -82 B) -87 C) -95 D) 17 E) 28

İPUCU

Önce parantez içleri, sonra çarpma-bölme, en son toplama çıkarma yapıyoruz.

3. $(-3^2) - (7 - 2 \cdot 5)^2 - (-4)^2$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -94 B) -34 C) 24 D) 36 E) 42

İPUCU

Üslere dikkat! Parantezin üssü mü? Yalnızca sayının üssü mü?

4. $x = -5$ ve $y = -8$ olmak üzere,

$$4x - 3y$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 4 B) 2 C) -2 D) -4 E) -8

İPUCU

Benden size hoca tavsiyesi değerleri yerine yazarken parantez iç-
risinde yazarsanız işaret hatası olmaz. $(-3 \cdot y = -3 \cdot (-8))$

5. $x = -2$ ve $y = -1$ olmak üzere,

$$x^3 - y^2 - x^2$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -12 B) -13 C) -18 D) -21 E) -24

6. $x = -2$ ve $y = 4$ olmak üzere,

$$(x + y)^3 - (x - y)^2$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -28 B) -26 C) 26 D) 30 E) 32

Tam Sayılarda İşlemler

7. $24 - 20 : \blacktriangle = 19$
olduğuna göre, $\blacktriangle$ yerine gelmesi gereken değer kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 10

İPUCU

Hani ilkokulda ters işlem yöntemi vardı en kolay yol bu ya da denklem çözme.

8. $18 - 7 - \blacksquare + 5 = 17$
olduğuna göre, $\blacksquare$ yerine gelmesi gereken değer kaçtır?

A) -4 B) -2 C) -1 D) 2 E) 3

9. Aşağıdaki boş kutulardan her birinin yerine toplama (+), çıkarma (-), çarpma (x) ve bölme (:) işlemlerinden farklı ikisi yerleştirildiğinde oluşan işlemin sonucu sıfır olmaktadır.

$$3 \square 12 \square 4$$

Buna göre, yerleştirilen işlemler sırasıyla aşağıdakilerden hangisinde verilmiştir?

A) +, : B) +, - C) :, +
D) -, : E) -, x

10. Aşağıdaki $\triangle$ sembollerinden her birinin yerine toplama (+), çıkarma (-), çarpma (x) ve bölme (:) sembollerinden farklı biri yazıldığında oluşan eşitlikler sağlanmaktadır.

$$6 \triangle 2 = 3$$

$$4 \triangle 9 = -5$$

$$8 \triangle -2 = 6$$

$$-4 \triangle -3 = 12$$

Buna göre, sembollerin yerine yazılan işlemler yukarıdan aşağıya doğru sırasıyla aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) x, +, -, : B) :, -, x, + C) :, -, +, x
D) x, :, -, + E) x, +, :, -

11. Hava sıcaklığı -2°C iken, ertesi gün 9°C düşmüştür.

Buna göre, hava sıcaklığı kaç $^{\circ}\text{C}$ 'ye düşmüştür?

A) -7 B) -10 C) -11 D) 2 E) 7

12. Aşağıdaki kutuların her birine 2, 3, 4, 5 ve 6 rakamlarından farklı birer tanesi yazılarak aşağıdaki eşitlik sağlanmaktadır.

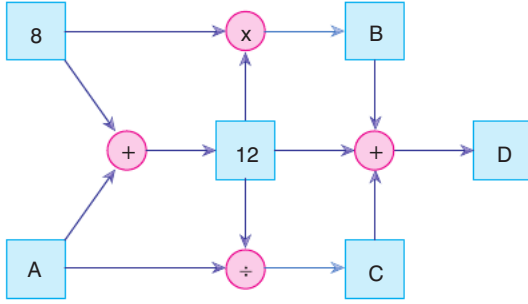
$$\square \times \square = \square + \square + \square$$

Buna göre, çarpım durumunda olan iki sayının toplamı kaçtır?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

Tam Sayılarda İşlemler

1. A, B, C ve D doğal sayılardır.



Yukarıdaki sistematik de mavi kutulardaki sayılar ok yönünde pembe dairelerdeki işlemler yapılarak işlemin sonucu ok yönündeki bir mavi kutuya yazılıyor.

Örneğin; $12 + B + C = D$ olur.

Buna göre, D değeri kaçtır?

- A) 111 B) 121 C) 141 D) 152 E) 161

- 2.

I.	-2		2
II.	2		-2
III.	-2		-2

İfadelerindeki boş kutuların içine toplama (+), çıkarma (-) ve çarpma (x) sembolleri hangi sırayla yerleştirilirse üç işlemin sonucu da aynı sayıya eşit olur?

	I	II	III
A)	+	x	-
B)	-	+	x
C)	-	x	+
D)	x	+	-
E)	x	-	+

3. Aşağıdaki kutuların içine 1'den 9'a kadar olan tam sayılardan 6 tanesi her kutuya farklı bir sayı gelecek şekilde yerleştirildiğinde tüm eşitlikler sağlanmaktadır.

$$\square + \square = 4$$

$$\square - \square = 4$$

$$\square : \square = 4$$

Buna göre, kullanılmayan tam sayıların toplamı kaçtır?

- A) 23 B) 21 C) 19 D) 17 E) 15

4. $A = \{-11, -7, 6, 8\}$

kümesinin elemanlarından farklı ikisi Δ ve $\square$ dir.

Buna göre, $\Delta - \square$ farkının değeri aşağıdakilerden hangisi olamaz?

- A) -19 B) -17 C) -4 D) 13 E) 14

- 5.

-5	-3	-2	2	3	4

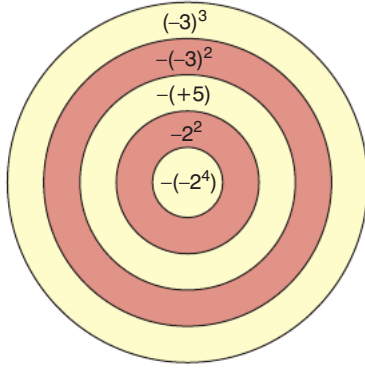
Yukarıda üzerinde sayılar bulunan kartlardan farklı iki tanesi seçiliyor.

Seçilen kartların üzerindeki sayıların çarpımı aşağıdaki değerlerden hangisi olamaz?

- A) -9 B) -15 C) -10 D) 9 E) 12

Tam Sayılarda İşlemler

6.



Canberk, şekildeki gibi puanlanmış hedef tahtasına 3 atış yapıyor. Canberk, her atışını farklı bir bölgeye isabet ettiriyor.

Canberk, isabet ettirdiği her atış için o bölgedeki puanı aldığına göre, toplamda en çok kaç puan almıştır?

- A) 7 B) 11 C) 18 D) 32 E) 38

7.

İller	Gündüz	Gece
Bayburt	3 °C	-15 °C
Kars	-2 °C	-19 °C
Erzurum	-10 °C	-25 °C
Erzincan	-3 °C	-15 °C
Gümüşhane	4 °C	-9 °C

Yukarıdaki tabloda bazı şehirlerin bir güne ait gündüz ve gece sıcaklıkları verilmiştir.

Bu tabloya göre, gece gündüz sıcaklık farkının en fazla olduğu il hangisidir?

- A) Bayburt B) Kars C) Erzurum
D) Erzincan E) Gümüşhane

8.

Aşağıdaki tabloda bazı kimyasal maddelerin donma noktaları verilmiştir.

Kimyasal Maddeler	Donma Noktaları
A	$-(-3)^4$
B	-2^6
C	$(-3)^3$

Bu maddelerin donma noktalarına göre küçükten büyüğe doğru sıralaması aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $A < B < C$ B) $A < C < B$ C) $B < A < C$
D) $C < A < B$ E) $C < B < A$

9.



Şekildeki gibi kat düğmeleri bulunan bir asansör, kat önceliğine göre değil, düğmeye basma önceliğine göre çalışmaktadır. Önce hangi katın düğmesine basılırsa asansör ilk olarak o kata gitmektedir. Zemin katta duran asansöre sadece iki arkadaş binmiş ve her ikisinde inene kadar hiç kimse asansöre binmemiştir. Bu iki arkadaş sırasıyla 5 ve -3 düğmelerine basmıştır.

Her bir katının yüksekliği 3 metre olan bu apartmanın asansöründe bulunan bu iki kişiden son kişi indiği anda asansör toplam kaç metre hareket etmiştir?

- A) 37 B) 39 C) 40 D) 42 E) 43

BÖLÜM 2

ÖĞRENELİM

RASYONEL SAYILAR

Rasyonel Sayılar

Ne Bilmeliyim? 1

KESİR

a ve b tamsayı ve $b \neq 0$ olmak üzere, $\frac{a}{b}$ ifadesine kesir, a ya kesrin **payı**, b ye de kesrin **paydası** denir.

$a \neq 0$ olmak üzere, $\frac{0}{a} = 0$, $\frac{a}{0}$ tanımsızdır.

Basit Kesir

İşaretlerine bakılmaksızın payı paydasından küçük olan kesirlere **basit kesir** denir.

$-\frac{3}{5}$, $-\frac{8}{11}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{5}$, 0 , ... sayıları basit kesirdir.

$\frac{a}{b}$ basit kesir ise $-1 < \frac{a}{b} < 1$ 'dir.

Bileşik Kesir

İşaretlerine bakılmaksızın payı paydasından büyük veya payı paydasına eşit olan kesirlere **bileşik kesir** denir.

$\frac{a}{b}$ bileşik kesir ise $\frac{a}{b} \geq 1$ veya $\frac{a}{b} \leq -1$ olur.

-2 , -1 , $-\frac{5}{3}$, $-\frac{7}{3}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{9}{5}$, 1 , 2 , 3 , ... sayıları birer bileşik kesirdir.

Tam sayılı Kesir

0 (sıfır) hariç bir tam sayı ve bir basit kesirle birlikte yazılan kesirlere **tam sayılı kesir** denir.

$a \frac{b}{c} = a + \frac{b}{c}$ dir.

$1\frac{1}{3}$, $3\frac{5}{7}$, $-2\frac{1}{4}$, ... sayıları birer tam sayılı kesirdir.

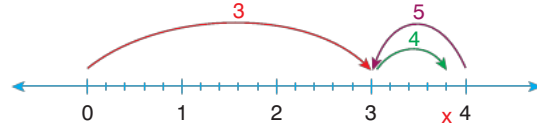
Nasıl Çözülür?

Örnek



Yukarıda bölmelere ayrılmış sayı doğrusu üzerinde gösterilen x 'in değerini bulalım.

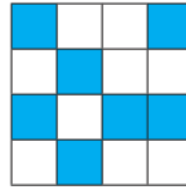
Çözüm



$$3 + \frac{4}{5} = 3\frac{4}{5}$$

Tam $\downarrow$
5 parçadan 4. parça

Örnek



Özdeş 16 kare kutudan oluşan yukarıdaki şekilde taralı alanların toplamının, toplam alana oranını temsil eden kesiri bulalım.

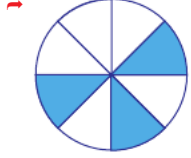
Çözüm

$$\frac{\text{Taralı kare sayısı}}{\text{Toplam kare sayısı}} = \frac{7}{16}$$

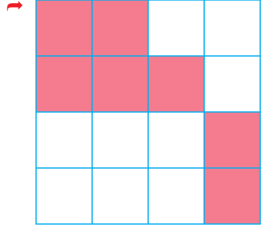
Nasıl Uygularım?



1. Aşağıda eş bölmelere ayrılmış şekillerde taralı bölümlerin alanının şeklin tamamının alanına oranını veren kesirleri yazınız.

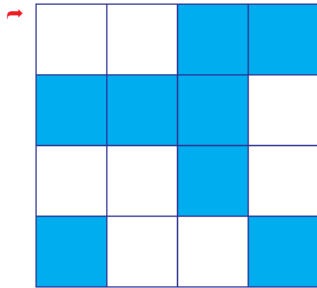


$$\left(\frac{3}{8}\right)$$

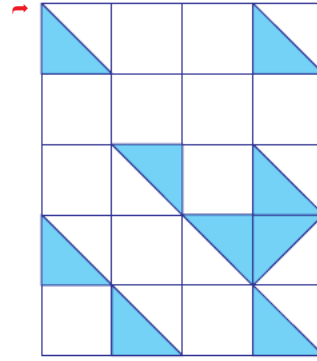


$$\left(\frac{7}{16}\right)$$

2. Aşağıda eş bölmelere ayrılmış şekillerde taralı bölümlerin alanının taralı olmayan bölümlerin alanına oranını veren kesirleri yazınız.

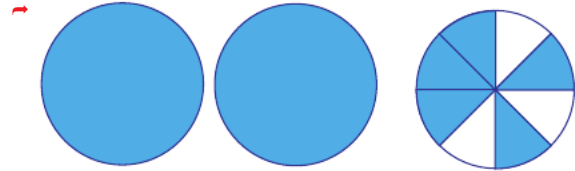


$$(1)$$

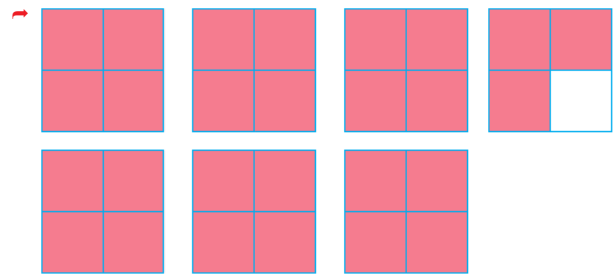


$$\left(\frac{9}{16}\right)$$

3. Aşağıdaki şekillerde taralı bölümlerin alanının şeklin tamamının alanına oranını veren kesirleri tam sayılı ve bileşik kesir olarak yazınız.



$$\left(2\frac{5}{8}\right)$$



$$\left(6\frac{3}{4}\right)$$

Nasıl Uygularım?

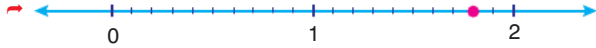


4. Aşağıdaki sayı doğruları üzerinde “●” ile gösterilen rasyonel sayıların değerlerini yazınız.

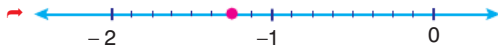
(Her sayı doğrusu üzerindeki aralıkların uzunlukları kendi içerisinde eşittir.)



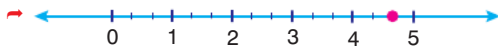
$$\left(-\frac{4}{5}\right)$$



$$\left(\frac{9}{5}\right)$$



$$\left(-\frac{5}{4}\right)$$



$$\left(\frac{14}{3}\right)$$

5. Aşağıdaki rasyonel sayıları sayı doğrusu üzerinde “●” ile gösteriniz.

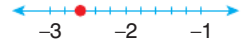
$$\frac{2}{3}$$



$$2\frac{3}{4}$$



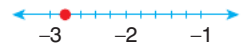
$$-2\frac{3}{5}$$



$$3\frac{2}{7}$$



$$-2\frac{4}{5}$$



Ne Bilmeliyim? 2



Tam sayılı Kesri Bileşik Kesre Çevirme

$$a \frac{b}{c} = a + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}$$

Bileşik Kesri Tam sayılı Kesre Çevirme

Bir bileşik kesri tam sayılı kesre çevirmek için kesrin payı paydasına bölünür. Elde edilen bölüm, kalan ve bölen sırasıyla tam sayılı kesrin tam kısmı, basit kesrin payı ve basit kesrin paydası olur.

Nasıl Çözülür?



$$\checkmark 4 \frac{3}{5} = 4 + \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 5 + 3}{5} = \frac{23}{5}$$

$$\checkmark -3 \frac{5}{8} = -\left(3 + \frac{5}{8}\right) = -\frac{8 \cdot 3 + 5}{8} = -\frac{29}{8}$$

$$\checkmark \frac{29}{5} \Rightarrow \begin{array}{r} 29 \overline{) 5} \\ 25 \\ \hline 4 \end{array} \Rightarrow \frac{29}{5} = 5 \frac{4}{5}$$

$$\checkmark -\frac{49}{6} \Rightarrow \begin{array}{r} 49 \overline{) 6} \\ 48 \\ \hline 1 \end{array} \Rightarrow -\frac{49}{6} = -8 \frac{1}{6}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki tamsayılı kesirleri bileşik kesre çeviriniz.

$$\rightarrow 2 \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)$$

$$\rightarrow 6 \frac{3}{5}$$

$$\left(\frac{33}{5}\right)$$

$$\rightarrow -3 \frac{4}{9}$$

$$\left(-\frac{31}{9}\right)$$

$$\rightarrow -7 \frac{5}{8}$$

$$\left(-\frac{61}{8}\right)$$

2. Aşağıdaki bileşik kesirleri tam sayılı kesre çeviriniz.

$$\rightarrow \frac{27}{5}$$

$$\left(5 \frac{2}{5}\right)$$

$$\rightarrow \frac{32}{9}$$

$$\left(3 \frac{5}{9}\right)$$

$$\rightarrow -\frac{47}{6}$$

$$\left(-7 \frac{5}{6}\right)$$

$$\rightarrow -\frac{72}{17}$$

$$\left(-4 \frac{4}{17}\right)$$

Ne Bilmeliyim? 3

**Kesirlerin Genişletilmesi veya Sadeleştirilmesi**

Herhangi bir kesrin pay ve paydası sıfırdan farklı bir sayı ile çarpıldığında (genişletme) veya bölüldüğünde (sadeleştirme) kesrin değeri (temsil ettiği büyüklük) değişmez.

k sıfırdan farklı bir reel (gerçek) sayı olmak üzere

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a : k}{b : k} \text{ dir.}$$

Nasıl Çözülür?



$$\checkmark \quad \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$$

$$\checkmark \quad \frac{3 \cdot (-5)}{5 \cdot (-5)} = \frac{-15}{-25}$$

$$\checkmark \quad \frac{9}{15} = \frac{9 : 3}{15 : 3} = \frac{3}{5}$$

$$\checkmark \quad \frac{24}{36} = \frac{24 : 12}{36 : 12} = \frac{2}{3}$$

Örnek

$-\frac{18}{42}$ kesrine denk dört tane kesir bulalım.

Çözüm



Sadeleştirme yaparak denk kesir bulalım.

$$-\frac{18}{42} = -\frac{18 : 3}{42 : 3} = -\frac{6}{14}$$

$$-\frac{18}{42} = -\frac{18 : 6}{42 : 6} = -\frac{3}{7}$$



Burada da genişleterek denk kesirler bulalım.

$$-\frac{18}{42} = -\frac{18 \cdot 2}{42 \cdot 2} = -\frac{36}{84}$$

$$-\frac{18}{42} = -\frac{18 \cdot 3}{42 \cdot 3} = -\frac{54}{126}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdakilerden hangisi $\frac{3}{5}$ kesrinin genişletilmesi ile elde edilemez?

- A) $\frac{9}{15}$ B) $\frac{12}{20}$ C) $\frac{15}{25}$ D) $\frac{21}{35}$ E) $\frac{24}{35}$ (E)

2. Aşağıdaki kesirlerden hangisi en sade şekilde yazılmıştır?

- A) $\frac{3}{9}$ B) $\frac{4}{10}$ C) $\frac{3}{39}$ D) $\frac{8}{15}$ E) $\frac{9}{42}$ (D)

3. Aşağıdaki kesirlerden hangisinin değeri $\frac{2}{7}$ değildir?

- A) $\frac{6}{21}$ B) $\frac{5}{21}$ C) $\frac{8}{28}$ D) $\frac{12}{42}$ E) $\frac{18}{63}$ (B)

Ne Bilmeliyim? 4

Toplama - Çıkarma



Paydalar eşit ise kesirler toplanırken (veya çıkarılırken) paydaları toplayın (veya çıkarın), ortak paydaya dokunmayın, aynen payda olarak yazın.

Paydalar eşit değilse önce paydaları eşitle, sonra topla. (veya çıkar)

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$\frac{4}{5} + \frac{1}{5} - \frac{3}{5}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{5} - \frac{3}{5} = \frac{4 + 1 - 3}{5} = \frac{2}{5} \text{ bulunur.}$$

Örnek

$\frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{5}{16}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm



Paydalar eşit değil. Öncelikle paydaları eşitleyelim

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{5}{16} = \frac{2 + 12 - 5}{16} = \frac{9}{16} \text{ bulunur.}$$

(2) (4) (1)

Örnek

$3 - \frac{5}{6} - \frac{7}{40}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm

$$\frac{3}{1} - \frac{5}{6} - \frac{7}{40} = \frac{360 - 100 - 21}{120} = \frac{239}{120} \text{ bulunur.}$$

(120) (20) (3)



Tam sayıların paydasında 1 olduğunu unutmayın.

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$\frac{2}{7} + \frac{1}{7} - \frac{13}{7}$$

$$\left(-\frac{10}{7}\right)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{7}{15}$$

$$\left(\frac{29}{15}\right)$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{6} + \frac{5}{12}$$

$$(1)$$

$$-\frac{4}{5} - \frac{7}{10} + \frac{3}{4}$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)$$

Nasıl Uygularım?



$$\rightarrow 3 + \frac{4}{5}$$

$$\left(\frac{19}{5}\right)$$

$$\rightarrow 12 - \frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{45}{4}\right)$$

$$\rightarrow -\frac{2}{7} - 5$$

$$\left(-\frac{37}{7}\right)$$

$$\rightarrow 4 - \frac{1}{3} - 7$$

$$\left(-\frac{10}{3}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{6} - \frac{3}{4} + 2$$

$$\left(\frac{5}{12}\right)$$

$$\rightarrow \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{3}{10} + 4$$

$$\left(\frac{133}{30}\right)$$

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$\left(4 - \frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) - \left(2 - \frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Aferin hemen paydaları eşitleyip sonucu bulmak için işlemlere başladınız, yanlış mı? Böyle yaparsanız da olur ama bu tip yalnızca toplama ve çıkarma işleminin bulunduğu soru tiplerinde önce parantezleri açarsanız size kolaylıklar sunulacaktır.

$$\begin{aligned} \left(4 - \frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) - \left(2 - \frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) &= 4 - \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - 2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \\ &= 4 - 2 - \frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \\ &= 2 + \frac{3}{3} \\ &= 2 + 1 = 3 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$



Unutmayın parantezin önünde “-” işareti varsa parantezi açınca içerideki tüm işaretler tersine döner.

Örnek

$$\left(7 - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{2}{9} - \frac{5}{4}\right) - \left(5 - \frac{7}{9}\right)$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} \left(7 - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{2}{9} - \frac{5}{4}\right) - \left(5 - \frac{7}{9}\right) &= 7 - \frac{3}{4} + \frac{2}{9} - \frac{5}{4} - 5 + \frac{7}{9} \\ &= 2 - \frac{8}{4} + \frac{9}{9} \\ &= 2 - 2 + 1 = 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$\rightarrow \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

 $\left(\frac{2}{3} \right)$

$$\rightarrow \left(1 + \frac{5}{4} \right) + \left(3 - \frac{1}{4} \right)$$

 (5)

$$\rightarrow \left(2 - \frac{1}{7} \right) - \left(\frac{6}{7} - 3 \right)$$

 (4)

$$\rightarrow \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \frac{9}{2}$$

 $\left(\frac{5}{3} \right)$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + \frac{11}{21} \right) - \left(\frac{7}{3} - \frac{10}{21} + \frac{5}{2} \right)$$

 (-5)

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$5\frac{1}{5} + 2\frac{3}{5}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Sorunun içerisindeki tam sayılı kesirlere dikkat edelim.

$$\begin{aligned} 5\frac{1}{5} + 2\frac{3}{5} &= \left(5 + \frac{1}{5} \right) + \left(2 + \frac{3}{5} \right) \\ &= 5 + \frac{1}{5} + 2 + \frac{3}{5} \\ &= 7 + \frac{4}{5} \\ &= \frac{5 \cdot 7 + 4}{5} = \frac{39}{5} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$$500\frac{1}{8} - 499\frac{5}{12}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} 500\frac{1}{8} - 499\frac{5}{12} &= \left(500 + \frac{1}{8} \right) - \left(499 + \frac{5}{12} \right) \\ &= 500 + \frac{1}{8} - 499 - \frac{5}{12} \\ &= 1 + \frac{3}{24} - \frac{10}{24} \\ &= 1 - \frac{7}{24} \\ &= \frac{24 - 7}{24} \\ &= \frac{17}{24} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$\rightarrow 4\frac{2}{5} - 2\frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{31}{15}\right)$$

$$\rightarrow 1\frac{5}{6} - \frac{2}{3} - 6\frac{1}{2}$$

$$\left(-\frac{16}{3}\right)$$

$$\rightarrow 3 + 2\frac{1}{4} - \frac{1}{6}$$

$$\left(\frac{61}{12}\right)$$

$$\rightarrow 2\frac{1}{4} - \frac{5}{8} - 3$$

$$\left(-\frac{11}{8}\right)$$

$$\rightarrow 2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{4} + 3\frac{5}{6}$$

$$\left(\frac{59}{12}\right)$$

$$\rightarrow 3\frac{1}{3} - \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right)$$

$$\left(\frac{19}{6}\right)$$

$$\rightarrow 5\frac{1}{4} - 1\frac{2}{3} - 4\frac{5}{6}$$

$$\left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4} - 2\frac{1}{6}\right) - 1$$

$$\left(-\frac{35}{12}\right)$$

Ne Bilmeliyim? 5

Çarpma

Rasyonel sayılar çarpılırken, kesirlerin paylarının çarpımı payya, paydalarının çarpımı da paydaya yazılır.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$



Çarpma işlemini yapmadan önce varsa paydaki bir sayıyla paydadaki bir sayı sadeleştirilebilir.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 5} = \frac{12}{35} \text{ bulunur.}$$

Örnek

$5 \cdot \frac{3}{4}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{1 \cdot 4} = \frac{15}{4} \text{ bulunur.}$$



Tam sayı ile kesri çarparken bakın sadece tam sayı ile payı çarptık.

Örnek

$\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{10}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{10} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 5}$$



Önce sadeleştirmeleri yaptık, şimdi çarpma zamanı

$$\Rightarrow = \frac{2 \cdot 1 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{14}{75} \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$\rightarrow \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{5}{12} \right)$$

$$\rightarrow \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{11}{2}$$

$$\left(\frac{165}{56} \right)$$

$$\rightarrow 12 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{11}$$

$$\left(\frac{36}{55} \right)$$

$$\rightarrow -\frac{9}{4} \cdot \frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{5}{2} \right)$$

$$\left(\frac{135}{64} \right)$$

$$\rightarrow \frac{20}{21} \cdot \frac{12}{2} \cdot \frac{14}{5} \cdot \frac{3}{8}$$

$$(6)$$

$$\rightarrow \frac{12}{7} \cdot \left(-\frac{9}{2} \right) \cdot \left(-\frac{14}{15} \right)$$

$$\left(\frac{36}{5} \right)$$

Ne Bilmeliyim? 6



Bölme

İki rasyonel sayı bölünürken bölünen kesir ile bölen kesrin çarpmaya göre tersi çarpılır.

$\frac{c}{d}$ nin çarpmaya göre tersi $\frac{d}{c}$ dir.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Nasıl Çözülür?



Örnek

$\frac{5}{9} : \frac{3}{2}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\frac{5}{9} : \frac{3}{2} = \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{9 \cdot 3} = \frac{10}{27} \text{ bulunur.}$$

Örnek

$4 : \frac{2}{7}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$4 : \frac{2}{7} = \frac{4}{1} \cdot \frac{7}{2} = \frac{4 \cdot 7}{1 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 7}{1 \cdot 1} = 14 \text{ bulunur.}$$



Sadeleştirme yapmak her zaman kolaylıktır.

Örnek

$\frac{3}{5} : (-6)$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\frac{3}{5} : (-6) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{-6} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{10} \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$\rightarrow \frac{5}{7} : \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{15}{7}\right)$$

$$\rightarrow \frac{4}{3} : \frac{3}{11}$$

$$\left(\frac{44}{9}\right)$$

$$\rightarrow 3 : \frac{6}{7}$$

$$\left(\frac{7}{2}\right)$$

$$\rightarrow (-4) : \frac{2}{5}$$

$$(-10)$$

$$\rightarrow (-5) : \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\left(\frac{15}{2}\right)$$

$$\rightarrow \frac{22}{7} : (-11)$$

$$\left(-\frac{2}{7}\right)$$

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$\frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{5}} \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm

$$\frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{5}} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{45} \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$\frac{\frac{15}{10}}{\frac{7}{7}} \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm

$$\frac{\frac{15}{10}}{\frac{7}{7}} = 15 \cdot \frac{7}{10} = 3 \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$\frac{\frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{8}}}{\frac{3}{8}} \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm

$$\frac{\frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{8}}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{7} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{21} \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$\frac{\frac{\frac{1}{9}}{\frac{7}{27}}}{\frac{7}{27}} \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm

$$\frac{\frac{\frac{1}{9}}{\frac{7}{27}}}{\frac{7}{27}} = \frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{27}{7}\right) = \frac{1}{1} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) = -\frac{3}{7} \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$\rightarrow \frac{\frac{1}{7}}{\frac{5}{5}}$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\frac{4}{9}}{\frac{8}{8}}$$

$$\left(\frac{32}{9}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\frac{\frac{3}{13}}{\frac{6}{7}}}{\frac{6}{7}}$$

$$\left(\frac{7}{26}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\frac{\frac{12}{7}}{\frac{5}{8}}}{\frac{5}{8}}$$

$$\left(-\frac{96}{35}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\frac{\frac{32}{27}}{\frac{16}{15}}}{\frac{16}{15}}$$

$$\left(-\frac{10}{9}\right)$$

Rasyonel Sayılar

Ne Bilmeliyim? 7



Rasyonel sayılar için de işlem önceliği tam sayılarla aynıdır.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm



Öncelik parantez içleri.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3+2}{4} : \frac{3-2}{4} \\ &= \frac{5}{4} : \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{1} = 5 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{6} : \frac{4}{3}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Çarpma-bölme dururken toplama-çıkarma işlemi yapılmaz büyüklerin önceliği vardır.

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{6} : \frac{4}{3} &= \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{5}{1} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{5 \cdot 2}{1 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \\ &= \frac{10}{3} - \frac{1}{8} = \frac{80-3}{24} = \frac{77}{24} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{6} : \frac{4}{5}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



İşlem önceliği sırasına göre işlem yaparsanız hiç bir sorun çıkmaz.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{6} : \frac{4}{5} &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{4} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{24} \\ &= \frac{18}{24} + \frac{16}{24} - \frac{5}{24} = \frac{29}{24} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$\frac{5}{3} : 5 - \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} - \frac{1}{6}\right)$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Tuzaklara düşmemek için işlem önceliğine dikkat.

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} : 5 - \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} - \frac{1}{6}\right) &= \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{3} - \left(\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 4} - \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{6} - \frac{1}{6}\right) = -\frac{7-1}{6} = -1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{5}{6}\right) \cdot \left(1 - \frac{6}{7}\right)$$

işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{5}{6}\right) \cdot \left(1 - \frac{6}{7}\right) \\ &= \frac{2-1}{2} \cdot \frac{4-3}{4} \cdot \frac{5-4}{5} \cdot \frac{6-5}{6} \cdot \frac{7-6}{7} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{1680} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$\rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{3} + 1$$

$$\left(\frac{19}{12}\right)$$

$$\rightarrow \frac{2}{9} : \frac{4}{5} - 3$$

$$\left(-\frac{49}{18}\right)$$

$$\rightarrow \frac{3}{4} : \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$(1)$$

$$\rightarrow 2 - 3 : \frac{2}{7}$$

$$\left(-\frac{17}{2}\right)$$

$$\rightarrow 3 + 2 : \frac{5}{6} + 1$$

$$\left(\frac{32}{5}\right)$$

$$\rightarrow \frac{2}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} + 2$$

$$\left(\frac{47}{30}\right)$$

$$\rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{2} : \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{11}{12}\right)$$

$$\rightarrow \left(3 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{4}{7} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{5}{28}\right)$$

$$\rightarrow \left(2 + \frac{3}{2}\right) : \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{5}\right)$$

$$\left(\frac{15}{4}\right)$$

Nasıl Uygularım?



$$\rightarrow \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{6} - \frac{7}{9} \right)$$

$$\left(\frac{1}{18} \right)$$

$$\rightarrow \left(2 - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(2 - \frac{3}{4} \right) \cdot \left(2 - \frac{4}{5} \right) \cdot \left(2 - \frac{5}{6} \right)$$

$$\left(\frac{21}{8} \right)$$

$$\rightarrow \frac{5}{6} - \frac{1}{2} : \left(3 - \frac{1}{2} \right)$$

$$\left(\frac{19}{30} \right)$$

$$\rightarrow 2 : \frac{1}{2} - \left[1 - \frac{1}{2} : \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right]$$

$$\left(\frac{14}{3} \right)$$

$$\rightarrow \left(3\frac{3}{4} - 2\frac{2}{3} \right) : \frac{1}{6}$$

$$\left(\frac{13}{2} \right)$$

$$\rightarrow \left(1 + \frac{1}{9} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{10} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{11} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{98} \right)$$

$$(11)$$

$$\rightarrow \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} : \frac{3}{4} \right)$$

$$\left(\frac{1}{16} \right)$$

$$\rightarrow \left(2 - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(2 - \frac{3}{4} \right) \cdot \left(2 - \frac{4}{5} \right) \cdot \left(2 - \frac{5}{6} \right)$$

$$\left(\frac{21}{8} \right)$$

Ne Bilmeliyim? 8

Merdiven tipi dediğimiz sorularda ana kesir çizgisine (en uzun kesir çizgisi) doğru alttan veya üstten başlayarak işlem önceliğine dikkat edilerek işlem yapılır.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}} - \frac{1}{\frac{7}{12}} \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm

$$\begin{aligned} \frac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}} - \frac{1}{\frac{7}{12}} &= \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} - 1 \cdot \frac{12}{7} \\ &= \frac{3}{\underset{(7)}{6}} - \frac{12}{\underset{(6)}{7}} = \frac{3 \cdot 7 - 12 \cdot 6}{42} \\ &= -\frac{51}{42} = -\frac{17}{14} \text{ tür.} \end{aligned}$$

Örnek

$$\frac{\frac{2}{5}}{2} + \frac{1}{\frac{5}{4}}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\frac{\frac{2}{5}}{2} + \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = \frac{5}{5} = 1 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$1 + \frac{1}{2 - \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$$

işlemin sonucunu bulalım.

Çözüm



Kesir alttan yukarı doğru geldiğine göre, bizde alt uçtan başlayalım işleme. Bu işlemleri yaparken bölme işlemlerine ve kesir önündeki işaretlere dikkat etmek gerekir.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2 - \frac{1}{\frac{12}{4} + \frac{1}{4}}} &= 1 + \frac{1}{2 - \frac{1}{\frac{13}{4}}} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{26}{13} - \frac{4}{13}} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{22}{13}} \\ &= 1 + \frac{13}{22} \\ &= \frac{22}{22} + \frac{13}{22} = \frac{35}{22} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$$3 - 1 : \frac{\frac{2}{3}}{2 - \frac{1}{3}} \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm



Yapılacak en büyük gaf, 3'ten 1'i çıkarmaktır...

$$\begin{aligned} 3 - 1 : \frac{\frac{2}{3}}{2 - \frac{1}{3}} &= 3 - 1 : \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} \\ &= 3 - 1 : \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \right) \\ &= 3 - 1 : \frac{2}{5} \\ &= 3 - 1 \cdot \frac{5}{2} \\ &= 3 - \frac{5}{2} \\ &= \frac{3 \cdot 2 - 5}{2} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$\rightarrow \frac{1}{\frac{1}{19}} + \frac{1}{\frac{1}{11}} - \frac{1}{\frac{1}{7}}$$

(23)

$$\rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{3} + \frac{1}{\frac{2}{3}}$$

 $\left(\frac{5}{3}\right)$

$$\rightarrow \frac{\frac{3}{4}}{5} - \frac{3}{\frac{4}{5}}$$

 $\left(-\frac{18}{5}\right)$

$$\rightarrow \frac{\frac{5}{6}}{7} - \frac{5}{\frac{6}{7}}$$

 $\left(-\frac{40}{7}\right)$

$$\rightarrow \frac{\frac{2}{15}}{\frac{4}{5}} - \frac{1}{\frac{6}{5}} + \frac{2}{3}$$

(0)

$$\rightarrow \frac{\left(2 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + 2\right)}{\frac{4}{3} + 1}$$

 $\left(\frac{5}{3}\right)$

$$\rightarrow 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$$

 $\left(\frac{8}{3}\right)$

Nasıl Uygularım?



$$\rightarrow \frac{5}{3} + \frac{2}{3 - \frac{4}{5}}$$

$$\left(\frac{85}{33}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1 + \frac{1 + \frac{2}{3}}{2}}{2}$$

$$\left(\frac{11}{12}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}}$$

$$\left(\frac{5}{8}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1 + \frac{1 + \frac{1}{2}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{7}{2}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2 - \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$$

$$\left(\frac{7}{11}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} : \frac{1 - \frac{1 - \frac{1}{2}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)$$

Rasyonel Sayılar

Ne Bilmeliyim? 9



ONDALIK SAYILAR

Paydası 10'un pozitif tam sayı kuvvetleri şeklinde olan (veya bu şekle getirilebilen) rasyonel sayılara **ondalık sayılar** denir.

$$\frac{5}{10} = 0,5 \quad \frac{13}{10^2} = 0,13 \quad 2\frac{17}{10^3} = 2,017 \quad -\frac{9}{5} = -\frac{18}{10} = -1,8$$

sayıları birer ondalık sayıdır.

Bir ondalık sayının virgülden önceki kısmına ondalık sayının tam kısmı, virgülden sonraki kısmına ise ondalık sayının kesir (ondalık) kısmı denir.



Bir ondalık sayının tam kısmının soluna veya kesir kısmının sağına yazılan sıfırlar sayının değerini değiştirmez.

Örneğin, $4,07 = 04,07 = 04,07000$



Rasyonel sayıların ondalık açılımını bulmanın diğer bir yolu, kesrin payının paydasına bölünmesidir.

Nasıl Çözülür?



$$\checkmark \frac{12}{125} = \frac{12 \cdot 8}{125 \cdot 8} = \frac{96}{1000} = 0,096 \text{ dir.}$$

$$\checkmark \frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100} = 0,12 \text{ dir.}$$

$$\checkmark \frac{8}{250} = \frac{8 \cdot 4}{250 \cdot 4} = \frac{32}{1000} = 0,032 \text{ dir.}$$

$$\checkmark \frac{9}{500} = \frac{9 \cdot 2}{500 \cdot 2} = \frac{18}{1000} = 0,018 \text{ dir.}$$

$$\checkmark \frac{67}{50} = \frac{67 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{134}{100} = 1,34 \text{ tür.}$$

$$\checkmark \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{375}{1000} = 0,375 \text{ tir.}$$

$$\checkmark \frac{7}{4} = \frac{7 \cdot 250}{4 \cdot 250} = \frac{1750}{1000} = 1,75 \text{ tir.}$$

$$\checkmark \frac{13}{25} \rightarrow \begin{array}{r} 130 \\ -125 \\ \hline 0050 \\ -50 \\ \hline 00 \end{array} \rightarrow \frac{13}{25} = 0,52$$



Genişleterek bulamıyorsanız, payı paydaya bölün.

$$\checkmark 0,3 = \frac{3}{10} \text{ dur.}$$

$$\checkmark 0,035 = \frac{35}{1000} = \frac{7}{200} \text{ dür.}$$

$$\checkmark 4,5 = \frac{45}{10} = \frac{9}{2} \text{ dir.}$$

$$\checkmark 12,04 = \frac{1204}{100} = \frac{301}{25} \text{ tir.}$$

$$\checkmark 7,143 = \frac{7143}{1000} \text{ dir.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki rasyonel kesirleri ondalık sayıya çeviriniz.

$$\rightarrow \frac{23}{100}$$

(0,23)

$$\rightarrow \frac{12}{5}$$

(2,4)

$$\rightarrow \frac{9}{20}$$

(0,45)

$$\rightarrow \frac{33}{25}$$

(1,32)

$$\rightarrow \frac{133}{250}$$

(0,532)

$$\rightarrow \frac{279}{500}$$

(0,558)

$$\rightarrow \frac{187}{125}$$

(1,496)

2. Aşağıdaki ondalık sayıları kesir olarak yazınız.

$$\rightarrow 0,05$$

$$\left(\frac{1}{20} \right)$$

$$\rightarrow 3,15$$

$$\left(\frac{63}{20} \right)$$

$$\rightarrow 2,07$$

$$\left(\frac{207}{100} \right)$$

$$\rightarrow 23,84$$

$$\left(\frac{596}{25} \right)$$

$$\rightarrow 78,9$$

$$\left(\frac{789}{10} \right)$$

$$\rightarrow 12,07$$

$$\left(\frac{1207}{100} \right)$$

$$\rightarrow 541,8$$

$$\left(\frac{2709}{5} \right)$$

Rasyonel Sayılar

Ne Bilmeliyim? 10



Devirli Ondalık Sayının Kesir Şeklinde Yazılması

Bir rasyonel sayı ondalıklı yazıldığında, ondalıklı kısımdaki sayılar belli bir rakamdan sonra sonsuza kadar tekrar ediyorsa (devrediyorsa) bu sayıya **devirli ondalık sayı** denir.

Devirli ondalık sayı pratik olarak,

$$\frac{(\text{sayının tamamı}) - (\text{devretmeyen kısmı})}{\left[\begin{array}{c} \text{virgülden sonra devreden} \\ \text{rakam sayısı} \\ \text{kadar 9} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{virgülden sonra devretmeyen} \\ \text{rakam sayısı} \\ \text{kadar 0} \end{array} \right]}$$

formülü ile rasyonel sayıya çevrilir.



Burada paydadaki ifade ondalık sayının kesir kısmı (virgülden sonraki kısmı) için söz konusudur.

$$a, \overline{bcde} = \frac{abcde - abc}{9900}$$

Devreden rakam sadece 9 ise, 9'un solunda bulunan ilk basamaktaki rakamın değeri 1 artırılıp 9 silinir.

$$2, \overline{39} = 2,4 \quad 0, \overline{19} = 0,2 \quad 1, \overline{9} = 2 \text{ dir.}$$

a bir rakam olmak üzere,

$$0, \overline{a} = \frac{a}{9} \text{ dur. } 0, \overline{4} = \frac{4}{9} \text{ dur.}$$

Nasıl Çözülür?



$$\checkmark 0, \overline{7} = \frac{7}{9} \text{ dur.}$$

$$\checkmark 0, \overline{5} = \frac{5}{9} \text{ dur.}$$

$$\checkmark 0, \overline{6666} = 0, \overline{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \text{ tür.}$$

$$\checkmark 0, \overline{13} = \frac{13}{99} \text{ dur.}$$

$$\checkmark 0, \overline{45} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11} \text{ dir.}$$

$$\checkmark 1, \overline{3} = 1 + 0, \overline{3} = 1 + \frac{3}{9} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \text{ tür.}$$

$$\checkmark 4, \overline{3} = 4 + 0, \overline{3} = 4 + \frac{3}{9} = 4 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3} \text{ tür.}$$

$$\checkmark 3, \overline{55} = 3, \overline{5} = 3 + 0, \overline{5} = 3 + \frac{5}{9} = \frac{32}{9} \text{ dur.}$$

$$\checkmark 7, \overline{18} = 7 + 0, \overline{18} = 7 + \frac{18}{99} = 7 + \frac{2}{11} = \frac{79}{11} \text{ dir.}$$

$$\checkmark 2, \overline{71} = \frac{271 - 27}{90} = \frac{244}{90} = \frac{122}{45} \text{ tir.}$$

$$\checkmark 3, \overline{546} = \frac{3546 - 35}{990} = \frac{3511}{990} \text{ dir.}$$

$$\checkmark \frac{7}{15} \Rightarrow \begin{array}{r} 70 \overline{) 15} \\ \underline{60} \\ 100 \\ \underline{90} \\ 100 \\ \underline{90} \\ 10 \end{array} \quad \frac{7}{15} = 0, \overline{46}$$



Verilen kesiri ondalık sayıya çevirmek için bölme yaptık sonuç devirli ondalık sayı çıktı

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki kesirleri devirli ondalık sayı olarak yazınız.

$$\rightarrow \frac{4}{9}$$

$$(0,\overline{4})$$

$$\rightarrow 7,\overline{9}$$

$$(8)$$

$$\rightarrow \frac{23}{99}$$

$$(0,\overline{23})$$

$$\rightarrow 4,\overline{2}$$

$$\left(\frac{38}{9}\right)$$

$$\rightarrow \frac{29}{90}$$

$$(0,\overline{32})$$

$$\rightarrow 5,\overline{6}$$

$$\left(\frac{17}{3}\right)$$

$$\rightarrow \frac{11}{12}$$

$$(0,\overline{916})$$

$$\rightarrow 0,\overline{37}$$

$$\left(\frac{37}{99}\right)$$

$$\rightarrow \frac{43}{30}$$

$$(1,\overline{43})$$

$$\rightarrow 4,\overline{18}$$

$$\left(\frac{46}{11}\right)$$

2. Aşağıdaki devirli ondalık sayıları rasyonel sayıya çeviriniz.

$$\rightarrow 0,\overline{5}$$

$$\left(\frac{5}{9}\right)$$

$$\rightarrow 5,\overline{24}$$

$$\left(\frac{236}{45}\right)$$

$$\rightarrow 12,\overline{69}$$

$$(12,\overline{7})$$

$$\rightarrow 0,\overline{7}$$

$$\left(\frac{7}{9}\right)$$

$$\rightarrow 3,\overline{149}$$

$$(3,\overline{15})$$

Rasyonel Sayılar

Ne Bilmeliyim? 11

Toplama - Çıkarma

- ▶ Ondalık sayılar alt alta toplanırken (veya çıkarılırken) virgüller ve aynı isimli basamaklar alt alta gelecek şekilde yazılır. Doğal sayılarda olduğu gibi (virgül düşünülmeden) işlem yapıldıktan sonra bulunan sonuç, virgüllerin hizasından virgülle ayrılır.
- ▶ Toplama veya çıkarma işlemi yapılan sayıların kesir kısmındaki basamak sayıları eşit değilse, basamak sayısı eksik olan sayının sağına eksik olan basamak sayısı kadar sıfır yazılarak kesir kısmındaki basamak sayıları eşitlenir.

Nasıl Çözülür?

Örnek

12,7 + 3,84 işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Virgüller alt alta gelecek şekilde yazıp toplayalım, boşluklara da 0 yazalım tabii ki.

$$\begin{array}{r} 12,70 \\ + 03,84 \\ \hline 16,54 \text{ bulunur.} \end{array}$$

Örnek

9,4 - 4,38 işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\begin{array}{r} 9,40 \\ - 4,88 \\ \hline 4,52 \text{ bulunur.} \end{array}$$

Örnek

2,647 + 4,35 + 3,2 işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\begin{array}{r} 2,647 \\ + 4,350 \\ + 3,200 \\ \hline 10,197 \text{ bulunur.} \end{array}$$

Örnek

75,553 - 27,4 işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\begin{array}{r} 75,553 \\ - 27,400 \\ \hline 48,153 \text{ bulunur.} \end{array}$$

Örnek

4,2 + 5,3 işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Devirli sayıların toplamında elde gelmiyorsa direk toplama yapılabilir.

$$4,2 + 5,3 = 9,5 = 9 + 0,5 = 9 + \frac{5}{10} = \frac{86}{10} \text{ dur.}$$

$$\downarrow$$

$$0,2 + 0,3 = 0,5$$

Örnek

7,7 - 4,3 işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Çıkarma işleminde devirli sayılar direk çıkarılabiliriyorsa direk çıkarılır.

$$7,7 - 4,3 = 3,4 = 3 + 0,4 = 3 + \frac{4}{10} = \frac{34}{10} \text{ dur.}$$

$$\downarrow$$

$$0,7 - 0,3 = 0,4$$

Örnek

2,5 + 4,3 + 1,1 işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Devreden yalnızca 9 ise işlem yapmadan 9'un önündeki rakam 1 artırılır.

$$2,5 + 4,3 + 1,1 = 7,9 = 8 \text{ dir.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow 13,054 + 3,29$$

(16,344)

$$\rightarrow 34,64 - 13,46$$

(21,18)

$$\rightarrow 245,4 - 27,132$$

(218,268)

$$\rightarrow 34,173 + 4,38$$

(38,553)

$$\rightarrow 23,5 + 4,17 - 4,8$$

(22,87)

$$\rightarrow 7,325 + 3,167 - 8,78$$

(1,712)

2. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow 0,\overline{3} + 0,\overline{4}$$

(0,\overline{7})

$$\rightarrow 2,\overline{1} + 0,\overline{7}$$

(2,\overline{8})

$$\rightarrow 0,\overline{7} + 0,\overline{5} + 0,\overline{6}$$

(2)

$$\rightarrow 0,\overline{7} - 0,\overline{3}$$

(0,\overline{4})

$$\rightarrow 4,\overline{8} - 2,\overline{5}$$

(2,\overline{3})

$$\rightarrow 2,\overline{4} + 3,\overline{2} - 1,\overline{5}$$

(4,\overline{1})

Ne Bilmeliyim? 12



Çarpma

➤ Ondalık sayılar çarpılırken çarpanların virgüli yokmuş gibi düşünülüp çarpma işlemi yapılır. Bulunan çarpımda, çarpanların kesir kısımlarının basamak sayılarının toplam sayısı kadar basamak, en sağdaki basamaktan itibaren sola doğru sayılıp virgülle ayrılır. Eksik kalan basamaklar olursa yerine sıfır yazılır.

Nasıl Çözülür?



Örnek

$0,8 \cdot 100 + 1,23 \cdot 10$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Bir ondalık sayıyı 10 ile çarpmak sayının virgülünü sağa doğru bir kaydırmak demektir. 100 ile çarpmak iki kere kaydırmak demektir.

$$0,8 \cdot 100 = 0,80 \cdot 100 = 80 \text{ (virgülü sağa iki basamak kaydirdik)}$$

$$1,23 \cdot 10 = 1,23 \cdot 10 = 12,3 \text{ (virgülü sağa bir basamak kaydirdik)}$$

$$0,8 \cdot 100 + 1,23 \cdot 10 = 80 + 12,3 = 92,3 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$34,6789 \cdot 1000$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$34,6789 \cdot 1000 = 34678,9 \text{ bulunur. (virgülü sağa üç basamak kaydirdik)}$$

Örnek

$23,45 \cdot 2,7$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Virgüli yokmuş gibi düşünüp çarpma işlemi yap. Bulunan çarpımda, çarpanların kesir kısımlarının basamak sayılarının toplam sayısı kadar basamak, en sağdaki basamaktan itibaren sola doğru sayılıp virgülle ayrılır. Eksik kalan basamaklar olursa yerine sıfır yaz.

$$\begin{array}{r} 2345 \\ \times 27 \\ \hline 16415 \\ + 4690 \\ \hline 63,315 \end{array}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$\rightarrow 0,7 \cdot 10$$

(7)

$$\rightarrow 1,3 \cdot 10$$

(13)

$$\rightarrow 2,34 \cdot 10$$

(23,4)

$$\rightarrow 32,45 \cdot 10$$

(324,5)

$$\rightarrow 0,745 \cdot 100$$

(74,5)

$$\rightarrow 32,56 \cdot 1000$$

(32560)

$$\rightarrow 6,7895 \cdot 1000$$

(6789,5)

$$\rightarrow 0,64 \cdot 1000$$

(640)

Nasıl Uygularım?



2. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow 0,8 \cdot 0,9$$

(0,72)

$$\rightarrow 7 \cdot 0,3$$

(2,1)

$$\rightarrow 0,34 \cdot 0,2$$

(0,068)

$$\rightarrow 3,4 \cdot 5,2$$

(17,68)

$$\rightarrow 3,47 \cdot 1,5$$

(5,205)

$$\rightarrow 58,4 \cdot 2,09$$

(122,056)

Ne Bilmeliyim? 13



Bölme

- Pay ve payda da virgülden sonraki basamak sayıları eşitle-ninceye kadar sıfır eklenir. Daha sonra virgüller kaldırılarak işlem yapılır.
- Bir sayıyı 10 a bölmek sola doğru virgülü bir basamak kay-dırmak, 100'e bölmek sola doğru virgülü iki basamak kay-dırmak demektir.

Nasıl Çözülür?



Örnek

11,3 : 10 işleminin sonucunu bulalım

Çözüm

11,3 : 10 = 1,13 bulunur. (Virgülü bir basamak sola kaydirdık.)

Örnek

27,659 : 100 işleminin sonucunu bulalım

Çözüm

27,659 : 100 = 0,27659 bulunur. (Virgülü iki basamak sola kaydirdık.)

Örnek

$\frac{24,6}{0,04}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Bölme işlemi için virgülden sonra basamak sayılarını eşitlemek için istediğin kadar sıfır ekleyebilirsin. Sonra da virgülü kaldırabilirsin.

$$\frac{24,6}{0,04} = \frac{24,60}{0,04} = \frac{2460}{4} = 615 \text{ bulunur.}$$

Örnek

3,24 : 1,8 işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} 3,24 : 1,8 &= \frac{3,24}{1,8} \\ &= \frac{3,24}{1,80} = \frac{324}{180} = 1,8 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$\rightarrow 7,9 : 10$$

(0,79)

$$\rightarrow 17,69 : 10$$

(1,769)

$$\rightarrow 23 : 100$$

(0,23)

$$\rightarrow 4,9 : 100$$

(0,049)

$$\rightarrow 32,456 : 100$$

(0,32456)

$$\rightarrow 765,5 : 10000$$

(0,07655)

2. Aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$\rightarrow \frac{7,5}{0,05}$$

(150)

$$\rightarrow \frac{42,8}{1,07}$$

(40)

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$\frac{0,5}{0,05} + \frac{6,6}{0,6} + \frac{44}{2,2}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} \frac{0,5}{0,05} + \frac{6,6}{0,6} + \frac{44}{2,2} &= \frac{0,50}{0,05} + \frac{6,6}{0,6} + \frac{44,0}{2,2} \\ &= \frac{50}{5} + \frac{66}{6} + \frac{440}{22} \\ &= 10 + 11 + 20 = 41 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$$\frac{0,9}{0,03} : \frac{0,28}{0,04} - \frac{4,2}{0,7}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} \frac{0,9}{0,03} : \frac{0,28}{0,04} - \frac{4,2}{0,7} &= \frac{0,90}{0,03} : \frac{0,28}{0,07} - \frac{4,2}{0,7} \\ &= \frac{90}{3} : \frac{28}{7} - \frac{42}{7} \\ &= 30 : 4 - 6 \\ &= 7,5 - 6 = 1,5 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$$0,05 - (0,8 + 0,2) \cdot 0,125$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} 0,05 - (0,8 + 0,2) \cdot 0,125 &= 0,05 - 1 \cdot 0,125 \\ &= 0,05 - 0,125 \\ &= -(0,125 - 0,05) \\ &= -0,075 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow \frac{24,3}{0,81} \cdot \frac{0,125}{0,25}$$

(15)

$$\rightarrow \frac{3,38}{2,5} \cdot \frac{12,5}{1,69}$$

(10)

$$\rightarrow \frac{12}{0,06} : \frac{0,36}{21,6}$$

(12000)

$$\rightarrow \frac{0,001}{0,01} : \frac{0,02}{0,004}$$

(0,02)

$$\rightarrow \frac{4,44}{44,4} : \frac{1,11}{0,333}$$

(0,03)

2. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow \frac{0,72}{0,024} + \frac{1,23}{0,041}$$

(60)

$$\rightarrow \frac{0,16}{1,6} + \frac{10,1}{0,01} + \frac{25}{0,05}$$

(1510,1)

$$\rightarrow \frac{5,2}{0,013} + \frac{0,15}{0,005} + \frac{3,6}{0,9}$$

(434)

$$\rightarrow \frac{7,75}{0,5} - \frac{2,1}{0,2}$$

(5)

$$\rightarrow \frac{3}{0,15} - \frac{4}{0,02} + \frac{1}{0,004}$$

(70)

Nasıl Uygularım?



$$\rightarrow \frac{0,5}{0,025} - \frac{5,1}{0,17} - \frac{10}{0,2}$$

(-60)

$$\rightarrow \frac{0,5}{0,05} + \frac{7,7}{0,7} + \frac{33,3}{0,3}$$

(132)

$$\rightarrow \frac{0,9}{0,03} : \frac{0,18}{0,09} + \frac{1,8}{0,9}$$

(17)

$$\rightarrow \frac{\frac{0,25}{12,5} + \frac{7,5}{1,25}}{3,01}$$

(2)

3. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow 847 \cdot (0,42 - 0,41)$$

(8,47)

$$\rightarrow (5,2 - 3,4) : 0,5$$

(3,6)

$$\rightarrow (2,9 : 10 - 0,47 \cdot 100 + 5,3)$$

(-41,41)

$$\rightarrow (5,7 + 2,3 \cdot 1,5) \cdot 0,3$$

(2,745)

$$\rightarrow (1,2 \cdot 2,3 + 1,4 : 0,7 - 43 : 1000)$$

(4,717)

$$\rightarrow 0,16 - \left(0,4 + \frac{1}{5}\right) \cdot 0,25$$

(0,01)

Ne Bilmeliyim? 14

RASYONEL SAYILARDA SIRALAMA

► Paydaları eşit olan pozitif iki kesirden payı büyük olan daha büyüktür.

$$\checkmark \frac{20}{32} < \frac{22}{32} < \frac{23}{32} \text{ dir.}$$

► Negatif sayılar karşılaştırılırken (sıralanırken) önce sayıların işareti göz önüne alınmadan sıralama yapılır. Daha sonra bütün sayılar -1 ile çarpılarak elde edilen sıralamanın yönü değiştirilir.

$$\checkmark \frac{13}{17} > \frac{9}{13} > \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{13}{17} < -\frac{9}{13} < -\frac{1}{5}$$

Nasıl çözülür?

Örnek

$$a = \frac{3}{8}, \quad b = \frac{9}{16}, \quad c = \frac{17}{32}$$

a, b ve c'yi küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm



8, 16, 32'nin ortak en küçük katı 32 olduğundan paydaları 32 de eşitleyelim.

$$a = \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{12}{32}, \quad b = \frac{9}{16} = \frac{9 \cdot 2}{16 \cdot 2} = \frac{18}{32}, \quad c = \frac{17}{32}$$

olduğundan, $\frac{12}{32} < \frac{17}{32} < \frac{18}{32} \Rightarrow a < c < b$ bulunur.

Örnek

$$a = -\frac{19}{12}, \quad b = -\frac{27}{20}, \quad c = -\frac{43}{30}$$

a, b ve c'yi küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm

$$a = -\frac{19}{12} = -\frac{95}{60}, \quad b = -\frac{27}{20} = -\frac{81}{60}, \quad c = -\frac{43}{30} = -\frac{86}{60}$$



Negatif sayılar için sıralama pozitif sayılardaki sıralamanın tam tersidir.

$$\frac{95}{60} > \frac{81}{60} > \frac{86}{60} \Rightarrow -\frac{95}{60} < -\frac{81}{60} < -\frac{86}{60}$$

$\Rightarrow a < b < c$ bulunur.

Nasıl Uygularım?

Aşağıdaki rasyonel sayıları küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

$$\rightarrow a = \frac{3}{4}, \quad b = \frac{5}{6}, \quad c = \frac{9}{16}$$

(c < a < b)

$$\rightarrow a = \frac{13}{8}, \quad b = \frac{21}{16}, \quad c = \frac{7}{4}$$

(b < a < c)

$$\rightarrow a = -\frac{11}{5}, \quad b = -\frac{5}{6}, \quad c = -\frac{7}{10}$$

(a < b < c)

$$\rightarrow a = -2\frac{3}{4}, \quad b = -2\frac{17}{20}, \quad c = -2\frac{39}{50}$$

(b < c < a)

Ne Bilmeliyim? 15

▶ Payları eşit olan pozitif iki kesirden paydası küçük olan daha büyüktür.

✓ $\frac{7}{19} < \frac{7}{18} < \frac{7}{15}$ tir.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$a = \frac{3}{7}, b = \frac{9}{25}, c = \frac{6}{13}$$

a, b ve c'yi küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm



Payları eşitlemek daha kolay gözüküyor.

Evet hocam, payları 18'de eşitleyebiliriz.

$$a = \frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 6}{7 \cdot 6} = \frac{18}{42}$$

$$b = \frac{9}{25} = \frac{9 \cdot 2}{25 \cdot 2} = \frac{18}{50}$$

$$c = \frac{6}{13} = \frac{6 \cdot 3}{13 \cdot 3} = \frac{18}{39}$$

Buradan $\frac{18}{39} > \frac{18}{42} > \frac{18}{50} \Rightarrow b < a < c$ bulunur.

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki rasyonel sayıları küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

$$a = \frac{11}{19}, b = \frac{22}{27}, c = \frac{33}{37}$$

$$(a < b < c)$$

$$a = -\frac{12}{17}, b = -\frac{8}{11}, c = -\frac{24}{29}$$

$$(c < b < a)$$

$$a = -\frac{10}{11}, b = -\frac{100}{101}, c = -\frac{1000}{1110}$$

$$(b < a < c)$$

$$a = \frac{11}{23}, b = \frac{110}{233}, c = \frac{1100}{2333}$$

$$(c < b < a)$$

Ne Bilmeliyim? 16



Pay ve paydası arasındaki fark eşit olan pozitif kesirlerin pay ve paydasındaki sayılar büyüdükçe basit kesirlerin değeri artar, bileşik kesirlerin değeri azalır.

$$\checkmark \frac{12}{19} < \frac{77}{84} < \frac{108}{115} \text{ tir. (Basit kesirler)}$$

$$\checkmark \frac{5}{2} > \frac{19}{16} > \frac{135}{132} \text{ tir. (Bileşik kesirler)}$$

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$\frac{4}{7}, \frac{10}{13}, \frac{23}{26}, \frac{1001}{1004}$$

kesirleri küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm

$$\frac{4}{7} < \frac{10}{13} < \frac{23}{26} < \frac{1001}{1004} \text{ tür.}$$



Yukarıdaki kesirlerin pay ve paydaları arasındaki farklar her biri için 3 tür. Ayrıca hepsi basit kesir olduğundan; pay ve payda büyüdükçe kesirler büyür.

Örnek

$$-\frac{255}{251}, -\frac{127}{123}, -\frac{13}{9}$$

kesirleri küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm



Yukarıdaki kesirlerin pay ve paydaları arasındaki farklar her biri için 4 tür. Ayrıca hepsi bileşik kesir olduğundan; pay ve payda büyüdükçe kesirler küçülür.

$$\frac{255}{251} < \frac{127}{123} < \frac{13}{9} \Rightarrow -\frac{13}{9} < -\frac{127}{123} < -\frac{255}{251} \text{ dir.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki rasyonel sayıları küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

$$\rightarrow a = \frac{11}{18}, \quad b = \frac{19}{26}, \quad c = \frac{27}{34}$$

$$(a < b < c)$$

$$\rightarrow a = \frac{4}{7}, \quad b = \frac{14}{17}, \quad c = \frac{24}{27}$$

$$(a < b < c)$$

$$\rightarrow a = \frac{7}{3}, \quad b = \frac{113}{109}, \quad c = \frac{337}{333}$$

$$(c < b < a)$$

$$\rightarrow a = -\frac{1003}{998}, \quad b = -\frac{2447}{2442}, \quad c = -\frac{3459}{3454}$$

$$(a < b < c)$$

Rasyonel Sayılar

Ne Bilmeliyim? 17

Rasyonel sayılar ondalık sayıya çevrilerek karşılaştırılabilir. İki ondalık sayıdan tam kısmı büyük olan daha büyüktür. Tam kısmı eşit olan ondalık sayılar virgülden sonraki kısma (kesir kısmına) bakılarak şu şekilde karşılaştırılır:

Soldan sağa doğru, sırasıyla aynı isimli basamakta birbirinden farklı olarak rastlanan ilk rakama bakılarak karşılaştırılır. Bu sayılardan (işareti de göz önüne alınarak) büyük olanın bulunduğu ondalık sayı daha büyüktür.

$$9,854 > 9,844 > 9,843 \quad -3,01 > -3,50 > -3,90$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$28,45 > 28,x59$$

olduğuna göre, x yerine yazılacak rakamların sayısını bulalım.

Çözüm

$$28,45 > 28,x59 \Rightarrow 28,450 > 28,x59$$

$$\Rightarrow \dots,450 > \dots,x59$$

olabilmesi için, x = 0, 1, 2, 3 olmak üzere 4 farklı değer alabilir.

Örnek

$$3,6x7 > 3,639$$

olduğuna göre, x yerine yazılacak rakamların sayısını bulalım.

Çözüm

$$3,6x7 > 3,639 \Rightarrow 3,6x7 > 3,639$$

$$\Rightarrow \dots,x7 > \dots,39$$

olabilmesi için, x = 4, 5, 6, 7, 8, 9 olmak üzere 6 farklı değer alabilir.



x = 3 için 37 < 39 olacağından 3'ü almadık.

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki ondalık sayıları küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

$$\rightarrow a = 4,5 \quad b = 4,548 \quad c = 4,55$$

$$(a < b < c)$$

$$\rightarrow a = 12,73, \quad b = 12,735, \quad c = 12,7349$$

$$(a < c < b)$$

$$\rightarrow a = -23,471, \quad b = -23,472, \quad c = -23,47$$

$$(b < a < c)$$

2. Aşağıdaki eşitsizliklerde x yerine yazılabilecek rakamları bulunuz.

$$\rightarrow 8,71 > x,89$$

$$(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

$$\rightarrow 1,12x > 1,124$$

$$(5, 6, 7, 8, 9)$$

$$\rightarrow 38,x85 > 38,584$$

$$(5, 6, 7, 8, 9)$$

Ne Bilmeliyim? 18

a, b, c, x, y ve z pozitif reel sayı olmak üzere,

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} \text{ ifadesinde,}$$

$x > y > z$ ise $a > b > c$ dir. (Sıralamalar aynı)

$$a \cdot x = b \cdot y = c \cdot z \text{ ifadesinde,}$$

$x > y > z$ ise, $a < b < c$ dir. (Sıralamalar ters)

Nasıl Çözülür?

Örnek

a, b ve c pozitif reel sayılardır.

$$\frac{13}{15a} = \frac{5}{6b} = \frac{3}{5c}$$

olduğuna göre, a, b, c yi küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

Çözüm

$$\frac{13}{15a} = \frac{5}{6b} = \frac{3}{5c} \Rightarrow \frac{13}{15} = \frac{5}{6} = \frac{3}{5}$$



Paydaları eşitlemek daha kolay gözüküyor.

$$\frac{13}{15} = \frac{26}{30}, \quad \frac{5}{6} = \frac{25}{30}, \quad \frac{3}{5} = \frac{18}{30}$$

olduğundan,

$$\frac{18}{30} < \frac{25}{30} < \frac{26}{30} \text{ olduğundan, } \frac{3}{5} < \frac{5}{6} < \frac{13}{15} \text{ olur.}$$

Buna göre, $c < b < a$ dir.

Örnek

x, y ve z pozitif reel sayılardır.

$$\frac{2}{3} \cdot x = \frac{3}{4} \cdot y = \frac{4}{5} \cdot z$$

olduğuna göre, x, y, z sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

Çözüm



Kesirlerin pay paydası arasındaki fark sabit ve kesirler basit kesir olduğundan sıralama işi kolay.

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} \text{ olduğundan } x > y > z \text{ dir.}$$

Nasıl Uygularım?

1. x, y ve z pozitif reel sayılar ve

$$\frac{5x}{4} = \frac{7y}{6} = \frac{13z}{12}$$

olduğuna göre, x, y, z yi küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

$$(z > y > x)$$

2. a, b, c negatif tam sayılardır.

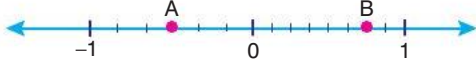
$$\frac{a}{1,6} = \frac{b}{1,61} = \frac{c}{1,612}$$

olduğuna göre, a, b, c yi küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

$$(c < b < a)$$

Rasyonel Sayılar

1.



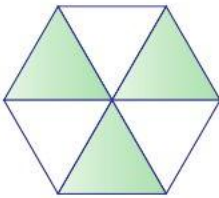
Yukarıdaki sayı doğrusunda -1 ile 0 arası altı, 0 ile 1 arası sekiz eş parçaya ayrılmış; A ile B reel sayıları işaretlenmiştir.

Buna göre, A.B ifadesinin değeri kaçtır?

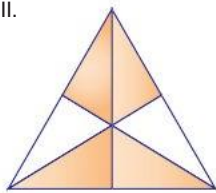
- A) $-\frac{3}{4}$ B) $-\frac{3}{8}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{3}{4}$

2.

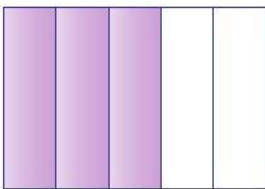
I.



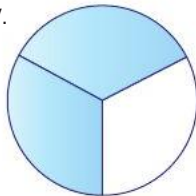
II.



III.



IV.



Yukarıda eş parçalara ayrılmış şekillerde boyalı kısımların toplam alanının, tüm şeklin alanına oranlanması ile elde edilen dört kesrin toplamı kaçtır?

- A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{13}{15}$ C) $\frac{47}{30}$ D) $\frac{73}{15}$ E) $\frac{73}{30}$

3.

Eşit hacimli 3 sürahi su ile bir bidon doldurulabiliyor.



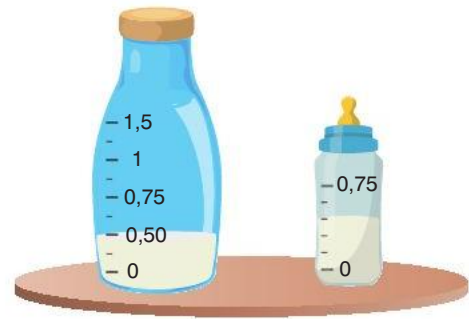
Her bir sürahi ise eşit hacimli 7 bardakla doldurulabiliyor.



Buna göre; bardağın hacminin, bidonun hacmine oranı kaçtır?

- A) $\frac{1}{21}$ B) $\frac{1}{24}$ C) $\frac{1}{30}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{15}$

4.



Şekilde hacmi 1,5 lt olan şişe ve hacmi 0,75 lt olan biberon, kendi yüzeyleri üzerinde eşit aralıklarla ölçeklendirilmişlerdir.

Şişedeki süt ile biberonun tamamı doldurulduğunda, şişede kalan süt miktarı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{3}{20}$ C) $\frac{11}{20}$ D) $\frac{1}{20}$ E) $\frac{1}{30}$

Rasyonel Sayılar

5. Kaan, pizzasının 5 eş parçasının üçünü yedikten sonra geri kalan 2 dilim pizzayı üç arkadaşına eşit olarak paylaşıyor.



Karışık pizza

Buna göre, Kaan'ın yediği pizza miktarının arkadaşlarından birine pay ettiği pizza miktarına oranı kaçtır?

- A) $\frac{6}{5}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{9}{2}$ D) $\frac{13}{10}$ E) $\frac{36}{25}$

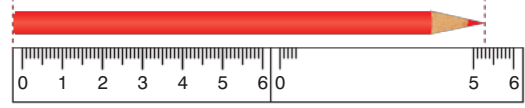
6. Bir radyonun eşit aralıklara bölünmüş radyo frekansı ayarlama göstergesindeki kırmızı ibre, kanalı ayarlanan radyonun frekansını göstermektedir.



Buna göre, bu radyoda müzik dinlemek isteyen bir kişi 98,4 frekansında yayın yapan bir kanalı dinlemek için kırmızı çizgiyi kaç küçük bölüm hareket ettirmesi gerekir?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

7. Her iki tarafında da 0,6 cm mesafe olan 6 cm'lik eş iki cetvel, aralarında boşluk bırakılmadan uç uca birleştirilerek şekildeki gibi ölçüm yapılmıştır.



Buna göre, kalemin gerçek boyu kaç cm'dir?

- A) 12,8 B) 12,9 C) 13 D) 13,1 E) 13,2

8. $\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square}$

Yukarıdaki kutuların içine -6, -3, 2 ve 12 sayıları, her kutuya farklı bir sayı gelecek şekilde yerleştirildiğinde oluşan işlemin sonucu aşağıdakilerden hangisi olamaz?

- A) -7 B) -2 C) -3,5 D) 6 E) 8

9. a, b ve c sıfırdan ve birbirinden farklı rakamlar olmak üzere, ondalık gösterimleri

$$K = a, bc$$

$$L = a, ba$$

$$M = b, ac$$

biçiminde olan üç sayı veriliyor.

$a < b < c$ olduğuna göre, bu sayıların doğru sıralaması aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $K < M < L$ B) $L < K < M$ C) $L < M < K$
D) $M < K < L$ E) $M < L < K$

BÖLÜM 3

ÖĞRENELİM

TEMEL MATEMATİK İŞLEMLER ve BİRİNCİ DERECEDEN DENKLEM ÇÖZME

Temel Matematik İşlemler

Ne Bilmeliyim?

1



Denklem çözmeye geçmeden daha sonra detaylı göreceğimiz bazı temel bilgileri bir hatırlatayım.

Ortak Çarpan Parantezine Alma

Toplam fark şeklindeki ifadeleri çarpım şekline getirebilmek için varsa her terimdeki ortak çarpan, ortak çarpan parantezine alınır.

$$P(x) \cdot Q(x) \pm P(x) \cdot B(x) = P(x) \cdot [Q(x) \pm B(x)]$$

Nasıl Çözülür?

$$\checkmark 3x + 5x - 2x = x \cdot (3 + 5 - 2) = 6x$$

$$\checkmark -2y + 3y - 14y = y \cdot (-2 + 3 - 14) = -13y$$

$$\checkmark 4a + 12b = 4 \cdot a + 3 \cdot 4 \cdot b = 4 \cdot (a + 3b)$$

$$\checkmark -5m - 10n = -5 \cdot m - 5 \cdot 2 \cdot n = -5 \cdot (m + 2n)$$

$$\checkmark -3x + 12xy = -3 \cdot x \cdot 1 - (-3) \cdot 4 \cdot x \cdot y = -3x \cdot (1 - 4y)$$

$$\begin{aligned} \checkmark -2x + 8xy + 3z &= -2 \cdot x \cdot 1 - (-2) \cdot 4 \cdot x \cdot y + 3z \\ &= -2x \cdot (1 - 4y) + 3z \\ &= -2x(1 - 4y) + 3z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark 5x - 15xy - 7a - 14ab &= 5 \cdot x \cdot 1 - 5 \cdot 3 \cdot x \cdot y - 7 \cdot a \cdot 1 + (-7) \cdot a \cdot 2 \cdot b \\ &= 5x \cdot (1 - 3y) - 7a \cdot (1 + 2b) \\ &= 5x(1 - 3y) - 7a(1 + 2b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark 4mn + 8nk - 3m - 6k &= 4 \cdot m \cdot n + 2 \cdot 4 \cdot n \cdot k - 3 \cdot m - 2 \cdot 3 \cdot k \\ &= 4n \cdot [m + 2k] - 3 \cdot [m + 2k] \\ &= 4n \cdot [m + 2k] - 3 \cdot [m + 2k] \\ &= [m + 2k] \cdot [4n - 3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark 79 \cdot 469 + 79 \cdot 243 - 79 \cdot 212 &= 79 \cdot 469 + 79 \cdot 243 - 79 \cdot 212 \\ &= 79 \cdot [469 + 243 - 212] \\ &= 79 \cdot [469 + 31] \\ &= 79 \cdot 500 = 39500 \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki ifadeleri ortak çarpan parantezine alınız.

$$\rightarrow -7a + 15a - 21a$$

$$-13a$$

$$\rightarrow -10x + 25x - 12b - 18b$$

$$15x - 30b$$

$$\rightarrow -12x + 6y - 30b$$

$$-6(2x - y + 5b)$$

$$\rightarrow 12xy + 18yz + 6y$$

$$6y(2x + 3z + 1)$$

$$\rightarrow 24ab + 12ac - 4a$$

$$4a \cdot (6b + 3c - 1)$$

$$\rightarrow 5xy - 15x + 2y - 6$$

$$(y - 3) \cdot (5x + 2)$$

$$\rightarrow 6abc - 2ab - 9c + 3$$

$$(3c - 1) \cdot (2ab - 3)$$

$$\rightarrow a(b + c) + b(b + c) - c(b + c)$$

$$(b + c)(a + b - c)$$

2. Aşağıdaki ifadeleri ortak çarpan parantezine alarak işlemlerin sonucunu bulunuz.

$$\rightarrow 47 \cdot 1001 - 47 \cdot 999$$

$$(94)$$

$$\rightarrow 19 \cdot 24 + 19 \cdot 27 - 19$$

$$(950)$$

$$\rightarrow 27 \cdot 41 + 27 \cdot 39 - 11 \cdot 35 - 11 \cdot 45$$

$$(1280)$$

Ne Bilmeliyim? 2



Ortak çarpan parantezine alma işlemi yaparken aşağıdaki üslü ifade özellikleri de çok işimize yarayacak.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

$$3^{10} = 3^{4+6} = 3^4 \cdot 3^6 \text{ veya } 3^{10} = 3^{2+8} = 3^2 \cdot 3^8$$

$$3^x + 4 = 3^x \cdot 3^4$$

$$a^{x-2} = a^x \cdot a^{-2}$$

$$5^{2x} = 5^x \cdot 5^x$$

Nasıl Çözülür?

1. Aşağıdaki ifadeleri ortak çarpan parantezine alalım.

$$\begin{aligned} \checkmark x^2 + x^5 &= x^2 + x^{2+3} = x^2 \cdot 1 + x^2 \cdot x^3 \\ &= x^2 \cdot [1 + x^3] \\ &= x^2 \cdot [1 + x^3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark a^{-4} + a^{-7} &= a^{-4} + a^{-4-3} = a^{-4} \cdot 1 + a^{-4} \cdot a^{-3} \\ &= a^{-4} \cdot [1 + a^{-3}] \\ &= a^{-4} \cdot [1 + a^{-3}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark 2^{x+4} + 2^{x+3} &= 2^x \cdot 2^4 + 2^x \cdot 2^3 = 2^x \cdot [2^4 + 2^3] \\ &= 2^x \cdot [16 + 8] \\ &= 24 \cdot 2^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark x^3 \cdot y^2 + x^4 \cdot y^4 &= x^3 \cdot y^2 + x^{1+3} \cdot y^{2+2} \\ &= x^3 \cdot y^2 \cdot 1 + x \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot y^2 \\ &= x^3 \cdot y^2 \cdot [1 + xy^2] \\ &= x^3 \cdot y^2 \cdot [1 + xy^2] \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki ifadeleri ortak çarpan parantezine alınız.

$$\rightarrow a^7 + a^6 \quad a^6 \cdot (a + 1)$$

$$\rightarrow x^4 - x^3 - x^2 \quad x^2 \cdot (x^2 - x - 1)$$

$$\rightarrow 12x^2 + 4x \quad 4x \cdot (3x + 1)$$

$$\rightarrow 5a^3 - 10a^2 - 25a \quad 5a \cdot (a^2 - 2a - 5)$$

$$\rightarrow 13 \cdot 43 - 13^2 \quad (390)$$

$$\rightarrow 15^3 - 15^2 \cdot 14 \quad (225)$$

$$\rightarrow a^2b + ab^2 - ab \quad ab \cdot (a + b - 1)$$

$$\rightarrow 10 \cdot a^2 \cdot b^3 - 15 \cdot a^3 b^2 \quad 5a^2b^2 \cdot (2b - 3a)$$

Ne Bilmeliyim? 3

Sadeleştirme

- Çarpım şeklindeki kesirli ifadelerde paydaki bir çarpanla paydadaki aynı çarpan sadeleştirilebilir.

$$\frac{\cancel{P(x)} \cdot A(x)}{B(x) \cdot \cancel{Q(x)}} \cdot \frac{\cancel{Q(x)}}{\cancel{P(x)}} = \frac{A(x)}{B(x)}$$

- Eşitliklerde her iki taraftaki aynı çarpanlar sadeleştirilebilir.

$$\cancel{P(x)} \cdot A(x) = \cancel{P(x)} \cdot Q(x) \Rightarrow A(x) = Q(x)$$

- Kesirli ifadelerin eşitliğinde her iki taraftaki paylardaki veya paydalardaki aynı çarpanlar sadeleştirilebilir.

$$\frac{\cancel{A(x)} \cdot P(x)}{B(x) \cdot \cancel{Q(x)}} = \frac{H(x)}{\cancel{Q(x)}} \cdot \frac{\cancel{A(x)}}{P(x)} \Rightarrow \frac{P(x)}{B(x)} = \frac{H(x)}{P(x)}$$

Nasıl Çözülür?

1. Aşağıdaki ifadeleri sadeleştirim.

$$\begin{aligned} \checkmark \frac{7^2}{5} \cdot \frac{18}{7^3} \cdot \frac{5^2}{9} &= \frac{\cancel{7^2}}{5} \cdot \frac{2 \cdot \cancel{9}}{\cancel{7^2} \cdot 7} \cdot \frac{5 \cdot \cancel{5}}{9} \\ &= \frac{2 \cdot 5}{7} = \frac{10}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \frac{a^5}{5b} \cdot \frac{10b^4}{a^3} &= \frac{\cancel{a^2} \cdot a^2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{5} \cdot b^3 \cdot \cancel{b}}{\cancel{5} \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{a^3}} \\ &= a^2 \cdot 2 \cdot b^3 = 2a^2b^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark 21x^2z &= 14xy \Rightarrow 3 \cdot \cancel{7} \cdot x \cdot x \cdot z = 2 \cdot \cancel{7} \cdot x \cdot y \\ &\Rightarrow 3 \cdot \cancel{7} \cdot x \cdot x \cdot z = 2 \cdot \cancel{7} \cdot x \cdot y \\ &\Rightarrow 3 \cdot x \cdot z = 2 \cdot y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \frac{-39ab}{18} &= \frac{13a^2}{-24b} \Rightarrow \frac{-\cancel{3} \cdot \cancel{13} \cdot \cancel{a} \cdot b}{\cancel{3} \cdot \cancel{6}} = \frac{\cancel{13} \cdot \cancel{a}}{-4 \cdot \cancel{6} \cdot b} \\ &\Rightarrow \frac{-3 \cdot b}{3} = \frac{a}{-4 \cdot b} \\ &\Rightarrow -b = \frac{a}{-4 \cdot b} \Rightarrow 4b^2 = a \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz.

$$\checkmark \frac{32}{16} \cdot \frac{21}{9} \cdot \frac{18}{14}$$

(6)

$$\checkmark \frac{15}{3} \cdot \frac{35}{21} \cdot \frac{27^2}{9}$$

(675)

$$\checkmark \frac{33}{18} \cdot \frac{16}{3^2} \cdot \frac{3^3}{44}$$

(2)

$$\checkmark \frac{15x}{4c} \cdot \frac{bc}{9a} \cdot \frac{12a}{3b}$$

 $\left(\frac{5x}{3}\right)$

Nasıl Uygularım?



$$\rightarrow 12x \cdot \frac{2a}{20y} \cdot \frac{5y^2}{4x^2}$$

$$\left(\frac{3ay}{2x} \right)$$

$$\rightarrow 15xz = 25xy$$

$$(3z = 5y)$$

$$\rightarrow \frac{4ab - 6a}{2a}$$

$$(2b - 3)$$

$$\rightarrow 21a^2 bc^3 = 35a^3 b^2 c$$

$$(3c^2 = 5ab)$$

$$\rightarrow \frac{6a^2 - 3a}{3a}$$

$$(2a - 1)$$

$$\rightarrow \frac{14xy}{3} = 35x$$

$$(2y = 15)$$

$$\rightarrow \frac{b(a - 3) + c(a - 3)}{(a - 3)}$$

$$(b + c)$$

$$\rightarrow \frac{18xy}{5} = \frac{9x}{10}$$

$$(4y = 1)$$

Ne Bilmeliyim? 4



Parantez Açma

- ▶ Parantez açılırken parantezin önündeki ifade ile parantezin içindeki her ifade ile çarpılır.

Nasıl Çözülür?



1. Aşağıdaki parantezleri açalım.

$$\begin{aligned} \checkmark \quad 2x \cdot (3x + 4) &= 2x \cdot 3x + 2x \cdot 4 \\ &= 6x^2 + 8x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad -3a \cdot (2a - 5) &= -3a \cdot 2a - (-3a) \cdot 5 \\ &= -6a^2 + 15a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad 6 \cdot (4m - 1) - 5 \cdot (3m + 2) &= 6 \cdot 4m - 6 \cdot 1 - 5 \cdot 3m - 5 \cdot 2 \\ &= 24m - 6 - 15m - 10 \\ &= 9m - 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad 2n \cdot (4n - 3m) - 5n \cdot (3n + 2m) \\ \Rightarrow &= 2n \cdot 4n - 2n \cdot 3m - 5n \cdot 3n - 5n \cdot 2m \\ \Rightarrow &= 4n^2 - 6mn - 15n^2 - 10mn \\ \Rightarrow &= -11n^2 - 16mn \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki parantezleri açınız.

$$\rightarrow -3 \cdot (4x + 5)$$

$$-12x - 15$$

$$\rightarrow 4a \cdot (a + 2)$$

$$4a^2 + 8a$$

$$\rightarrow 2 \cdot (5x + 1) - 3 \cdot (4 - 7x)$$

$$31x - 10$$

$$\rightarrow 3p \cdot (2m + 2p) - 5p \cdot (3p - 10m)$$

$$56pm - 9p^2$$

$$\rightarrow -5x \cdot (x + 1) - 3x \cdot (3 - 2x) + 2 \cdot (4 - x)$$

$$x^2 - 16x + 8$$

Ne Bilmeliyim? 5

BİRİNCİ DERECEDE BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

- $a \neq 0$, a ve b birer reel sayı olmak üzere,
 $ax + b = 0$ şeklindeki denklemlerdir.
 $ax + b = 0 \rightarrow x$ değişkenine bağlı
 $my + n = 0 \rightarrow y$ değişkenine bağlı
 $nz + k = 0 \rightarrow z$ değişkenine bağlı

birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerdir.

- $ax + b = 0$ denkleminin çözüm kümesi denklemin kökü olan x değerinden oluşur.

$$ax + b = 0 \text{ ise, } x = -\frac{b}{a} \text{ dir.}$$

Denklemin kökü,

$$x = -\frac{b}{a}$$

Çözüm kümesi,

$$\text{ÇK} = \left\{ -\frac{b}{a} \right\} \text{ dir.}$$



Denklemi çözmek bilinmeyenleri eşitliğin bir tarafında (x 'ler) sabit sayıları diğer tarafında bir araya getirerek bilinmeyeni bulmaktır. Unutmayın her işlem eşitliğin tarafına geçerken ters işlem olarak geçer toplama - çıkarma, çarpma - bölme.

Nasıl Çözülür?

$$\checkmark 3x + 7 = 9 \Rightarrow 3x = 9 - 7 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ tür.}$$

$$\checkmark \frac{2x - 11}{5} = 3 \Rightarrow 2x - 11 = 3 \cdot 5$$

$$\Rightarrow 2x = 15 + 11$$

$$\Rightarrow x = \frac{26}{2} = 13 \text{ tür.}$$

$$\checkmark 5x + 8 = 7x - 14 \Rightarrow 5x - 7x = -14 - 8$$

$$\Rightarrow -2x = -22$$

$$\Rightarrow x = \frac{-22}{-2} = +11 \text{ dir.}$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki denklemlerin köklerini bulunuz.

$$\rightarrow \frac{2x}{5} = 14$$

(35)

$$\rightarrow -\frac{5x}{3} = 20$$

(-12)

$$\rightarrow -\frac{3x}{7} = \frac{4}{21}$$

 $\left(-\frac{4}{9}\right)$

$$\rightarrow 2x + 3 = 15$$

(6)

$$\rightarrow -4x + 7 = 21$$

 $\left(-\frac{7}{2}\right)$

$$\rightarrow 3x - 17 = 2x + 9$$

(26)

Nasıl Uygularım?



$$\rightarrow 4x - 21 = -5x - 13$$

$$\left(\frac{8}{9}\right)$$

$$\rightarrow 6(3x - 2) = -2(3 - x)$$

$$\left(\frac{3}{8}\right)$$

$$\rightarrow \frac{3x}{2} - 3 = x - \frac{1}{2}$$

$$(5)$$

$$\rightarrow \frac{x + 4}{3} = 6$$

$$(14)$$

$$\rightarrow 6(x - 2) = 24$$

$$(6)$$

$$\rightarrow \frac{x - 7}{2} = 3$$

$$(13)$$

$$\rightarrow -5(x + 2) = 15$$

$$(-5)$$

$$\rightarrow \frac{3x - 1}{4} = 2$$

$$(3)$$

$$\rightarrow 3(x - 5) = 7(8 - 3x)$$

$$\left(\frac{71}{24}\right)$$

$$\rightarrow \frac{5 - 2x}{7} = 1$$

$$(-1)$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$2 \cdot (2 - 3x) - 3 \cdot (1 - 2x) = 11$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} 2 \cdot (2 - 3x) - 3 \cdot (1 - 2x) &= 11 \Rightarrow 4 - 6x - 3 + 6x = 11 \\ &\Rightarrow -1 + 6x = 11 \\ &\Rightarrow 6x = 11 + 1 \\ &\Rightarrow 6x = 12 \\ &\Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Çözüm kümesi de, $\mathbb{C} \cdot K = \{2\}$ bulunur.

Örnek

$$5 - 6x = 2 \cdot (1 - x) - 4x$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} 5 - 6x &= 2 \cdot (1 - x) - 4x \Rightarrow 5 - 6x = 2 - 2x - 4x \\ &\Rightarrow 5 - 6x = 2 - 6x \\ &\Rightarrow 5 - 2 = 6x - 6x \\ &\Rightarrow 3 = 0 \end{aligned}$$

Hocam bu nasıl cevap böyle birşey olamazki.



Cevabı kendin söyledin Arda, böyle birşey olamaz yani çözüm kümesi boş kümedir.

Örnek

$$3 \cdot (2 - x) + x = (1 - x) + (5 - x)$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} 3 \cdot (2 - x) + x &= (1 - x) + (5 - x) \\ \Rightarrow 6 - 3x + x &= 1 - x + 5 - x \\ \Rightarrow 6 - 2x &= 6 - 2x \\ \Rightarrow 2x - 2x &= 6 - 6 \\ \Rightarrow 0 &= 0 \end{aligned}$$

Hocam enteresan cevaplar buluyoruz.



Bir öncekinden farklı olarak burada eşitlik doğru. Bu da bütün reel sayılar bu denklemi sağlar anlamına gelir..

Örnek

$$6x + [4 - (2x - 3 \cdot (2 - x) + 5)] = 9$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm



İşleme en içten veya en dıştan başlamanız çok bir şey değiştirmez ama biz içerden dışa doğru temizliğe başlayalım.

$$\begin{aligned} 6x + [4 - (2x - 3 \cdot (2 - x) + 5)] &= 9 \\ \Rightarrow 6x + [4 - (2x - 6 + 3x + 5)] &= 9 \end{aligned}$$



Parantezin içini -3 ile çarptık, ona göre işaretlere dikkat edin.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 6x + [4 - (5x - 1)] &= 9 \\ \Rightarrow 6x + [4 - 5x + 1] &= 9 \\ \Rightarrow 6x + 4 - 5x + 1 &= 9 \end{aligned}$$



Parantezin önü (+) olunca parantezi sildim, hiçbir şey değişmedi.

$$\begin{aligned} \Rightarrow x + 5 &= 9 \\ \Rightarrow x &= 4 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Çözüm kümesi de, $\mathbb{C} \cdot K = \{4\}$ bulunur.

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki denklemlerin köklerini bulunuz.

$$\rightarrow -(1-x) + 2(3x+5) = 16$$

(1)

$$\rightarrow 3[x - (2 - 3x)] = x + 7$$

$\left(\frac{13}{11}\right)$

$$\rightarrow -2(4-3x) - 4(-5x+2) = 14$$

$\left(\frac{15}{13}\right)$

$$\rightarrow 2 - [x - (1 - x)] = 3x + 4$$

$\left(-\frac{1}{5}\right)$

$$\rightarrow (5-x) + 3(7x-2) = 4x-1$$

(0)

$$\rightarrow x - [2x - (x - 1)] = 3 - 3x$$

$\left(\frac{4}{3}\right)$

$$\rightarrow 2 \cdot (4 - 5x) - 3 \cdot (-2x + 1) = 4 \cdot (-x + 3)$$

(Ç.K. = $\emptyset$)

$$\rightarrow 2 \cdot [x - (3x + (10 - x))] = x + 5$$

$\left(-\frac{25}{3}\right)$

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$\frac{x-3}{2} = \frac{x+2}{5}$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm



İçler dışlar çarpımı yaparak işlemlere başlayalım.

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{2} = \frac{x+2}{5} &\Rightarrow 5(x-3) = 2(x+2) \\ &\Rightarrow 5x - 15 = 2x + 4 \\ &\Rightarrow 5x - 2x = 15 + 4 \\ &\Rightarrow 3x = 19 \\ &\Rightarrow x = \frac{19}{3} \text{ tür.} \end{aligned}$$

Örnek

$$\frac{0,4 + 0,05 \cdot x}{0,2 \cdot x - 0,05} = \frac{2}{3}$$

denkleminin kökünü bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} \frac{0,4 + 0,05 \cdot x}{0,2 \cdot x - 0,05} = \frac{2}{3} &\Rightarrow 3 \cdot (0,4 + 0,05 \cdot x) = 2 \cdot (0,2x - 0,05) \\ &\Rightarrow 3 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,05 \cdot x = 2 \cdot 0,2x - 2 \cdot 0,05 \\ &\Rightarrow 1,2 + 0,15 \cdot x = 0,4 \cdot x - 0,10 \\ &\Rightarrow 1,2 + 0,10 = 0,4 \cdot x - 0,15 \cdot x \\ &\Rightarrow 1,30 = 0,25 \cdot x \\ &\Rightarrow 130 = 25 \cdot x \\ &\Rightarrow \frac{130}{25} = x \\ &\Rightarrow x = \frac{26}{5} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki denklemlerin köklerini bulunuz.

$$\frac{3x-1}{5} = \frac{2x}{3}$$

(-3)

$$\frac{3x-1}{5x} = \frac{2}{7}$$

$\left(\frac{7}{11}\right)$

$$\frac{4-5x}{2x+3} = -\frac{5}{6}$$

$\left(\frac{39}{20}\right)$

$$\frac{x-3}{4} = \frac{x+2}{5}$$

(23)

Nasıl Uygularım?



$$\rightarrow \frac{3x+3}{3} = \frac{5-x}{2}$$

(1)

$$\rightarrow \frac{0,03 \cdot x - 10}{15} = \frac{1}{3}$$

(500)

$$\rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x-1}$$

(-3)

$$\rightarrow \frac{0,1 \cdot x - 2}{4} = \frac{0,2 \cdot x + 3}{3}$$

(-36)

$$\rightarrow \frac{3}{3-2x} = \frac{2}{4-x}$$

(-6)

$$\rightarrow \frac{0,3 \cdot x + 0,01}{0,2} = \frac{40 \cdot x + 30}{20}$$

 $\left(-\frac{29}{10}\right)$

$$\rightarrow \frac{0,12 \cdot x}{4} = \frac{0,15}{5}$$

(1)

$$\rightarrow \frac{0,15 \cdot x - 0,2}{0,25 \cdot x + 0,3} = \frac{4}{5}$$

(-8,8)

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$\frac{1-x}{3} - \frac{x}{2} = 2 \text{ denkleminin çözüm kümesini bulalım.}$$

Çözüm

$$\begin{aligned} \frac{1-x}{3} - \frac{x}{2} &= 2 \Rightarrow \frac{2-2x-3x}{6} = 2 \\ \Rightarrow 2-5x &= 12 \\ \Rightarrow -5x &= 10 \\ \Rightarrow x &= -2 \text{ bulunur.} \\ \text{Ç.K.} &= \{-2\} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek

$$\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+2} = 2x - \frac{2}{x+2}$$

denkleminin kökünü bulalım.

Çözüm

Hocam, paydaları eşitleyeceğiz ama çok uzun iş, ne yapacağız?



Bu tip kesirli sorularda payda eşitlemeden önce paydaları aynı olan kesirleri yan yana getirip önce onları halletmek hep kolaylık sağlar.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+2} &= 2x - \frac{2}{x+2} \\ \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+2} + \frac{2}{x+2} &= 2x \\ \Rightarrow \frac{1+x-1}{x} + \frac{x+2}{x+2} &= 2x \\ \Rightarrow \frac{x}{x} + \frac{x+2}{x+2} &= 2x \end{aligned}$$



Bakin, payda eşitlemeye gerek kalmadan işimiz ne kadar kolaylaştı..

$$\Rightarrow 1 + 1 = 2x \Rightarrow 2 = 2x \Rightarrow x = 1 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki denklemlerin köklerini bulunuz.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 1$$

$$\left(\frac{12}{7}\right)$$

$$\frac{2x}{5} + \frac{3x}{2} = \frac{7x-2}{10}$$

$$\left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{3a} = \frac{1}{6}$$

$$(7)$$

$$\frac{3x+4}{x} - \frac{2x+1}{x} = 5$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)$$

Nasıl Uygularım?



$$\rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{x}{2}} + \frac{1}{\frac{x}{3}} = \frac{1}{2}$$

(12)

$$\rightarrow \frac{3-x}{x+1} - 2 = \frac{3}{x+1}$$

 $\left(-\frac{2}{3}\right)$

$$\rightarrow \frac{1-2x}{3} + \frac{x+2}{2} = 2$$

(-4)

$$\rightarrow 4 + \frac{x}{x-2} = x + \frac{2}{x-2}$$

(5)

$$\rightarrow \frac{3-2x}{6} - \frac{x-2}{3} = 2$$

 $\left(-\frac{5}{4}\right)$

$$\rightarrow \frac{3}{x} + \frac{3}{x+1} + \frac{x-3}{x} = \frac{5}{3}$$

 $\left(\frac{7}{2}\right)$

$$\rightarrow \frac{3x-4}{5} - 1 = \frac{1}{3} - x$$

 $\left(\frac{4}{3}\right)$

$$\rightarrow 4x + \frac{1}{2}(5-3x) = \frac{11}{3}$$

 $\left(\frac{7}{15}\right)$

Temel Matematik İşlemler

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$(3a - 1) \cdot x + 3a = \frac{8}{x + 1}$$

denklemini sağlayan x in alabileceği değerlerin kümesi $\{3\}$ olduğuna göre, a değerini bulalım.

Çözüm



Denklemin kökü verilmiş ama denklemdaki a 'yı bulmamız lazım. Mantık basit, verilen kök denklemini sağlamalı. O halde, x yerine 3 yazıp ortaya çıkan eşitlikte a 'yı bulalım.

$$\begin{aligned} (3a - 1) \cdot x + 3a &= \frac{8}{x + 1} \Rightarrow (3a - 1) \cdot 3 + 3a = \frac{8}{3 + 1} \\ &\Rightarrow 9a - 3 + 3a = \frac{8}{4} \\ &\Rightarrow 12a - 3 = 2 \\ &\Rightarrow 12a = 5 \\ &\Rightarrow a = \frac{5}{12} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

m gerçel sayı olmak üzere,

$$(m + 1) \cdot x + m - 2 = 14$$

denklemin kökü -2 olduğuna göre, m değerini bulalım.

Çözüm



Denklemin kökünü yerine yaz m yi bul.

$$\begin{aligned} x &= -2 \text{ için} \\ (m + 1) \cdot x + m - 2 &= 14 \\ \Rightarrow (m + 1) \cdot (-2) + m - 2 &= 14 \\ \Rightarrow -2m - 2 + m - 2 &= 14 \\ \Rightarrow -m - 4 &= 14 \\ \Rightarrow -m &= 14 + 4 \\ \Rightarrow -m &= 18 \\ \Rightarrow m &= -18 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıda kökü verilen denklemlerde istenenleri bulunuz.

$$5 - ax = (3 - 2a) \cdot x + 3$$

denkleminin kökü $x = 1$ ise, a kaçtır?

(1)

$$m + \{2x - (3mx + 2) - 8\} = 4x$$

denkleminin kökü $x = 3$ olduğuna göre, m kaçtır?

(-2)

$$\frac{x-3}{2} + \frac{a-2}{x} = 0$$

denkleminin kökü $x = 1$ ise, a kaçtır?

(3)

Nasıl Uygularım?



$$\rightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{a-2}{x+3} = \frac{2}{x}$$

denkleminin kökü $x = 2$ ise, a kaçtır?

$$\left(-\frac{7}{4}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1-x}{ax} + \frac{4}{x+1} = 2$$

denkleminin kökü $x = 3$ ise, a kaçtır?

$$\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\rightarrow \frac{x+4}{2} - \frac{t+x}{4} = 2$$

denkleminin kökü $x = 1$ olduğuna göre, t kaçtır?

$$(1)$$

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$4 + \frac{8}{1 + \frac{x}{2}} = 6$$

denklemini sağlayan x değerini bulalım.

Çözüm



Bu soruda merdiven sorularında olduğu gibi paydaları eşitleyip sıra ile işlem yapılabilir. Daha kolay yolu mu? Çözümü iyi inceleyin.

$$4 + \frac{8}{1 + \frac{x}{2}} = 6 \Rightarrow \frac{8}{1 + \frac{x}{2}} = 2$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{x}{2} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = 3$$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$3 + \frac{5 - \frac{x}{3}}{\frac{2}{5}} = 2$$

denklemini sağlayan x değerini bulalım.

Çözüm

$$3 + \frac{5 - \frac{x}{3}}{\frac{2}{5}} = 2 \Rightarrow \frac{5 - \frac{x}{3}}{\frac{2}{5}} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{5 - \frac{x}{3}}{2} = -5$$

$$\Rightarrow 5 - \frac{x}{3} = -10$$

$$\Rightarrow 5 + 10 = \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow 15 = \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow x = 45 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



$$\rightarrow \frac{6}{2 + \frac{x}{3}} = 2$$

(3)

$$\rightarrow 7 - \frac{4}{2 - \frac{x}{3}} = 3$$

(3)

$$\rightarrow \frac{10}{\frac{x}{2} - 4} = -5$$

(4)

$$\rightarrow 2 + \frac{10}{5 - \frac{x+1}{2}} = -3$$

(13)

$$\rightarrow \frac{\frac{x+1}{3} + 1}{2} = 7$$

(38)

$$\rightarrow \frac{12}{2 + \frac{4}{1 + \frac{x}{3}}} = 2$$

(0)

$$\rightarrow 1 + \frac{\frac{x}{2} - 3}{3} = 4$$

(24)

$$\rightarrow 5 - \frac{7 + \frac{3 - \frac{x}{2}}{2}}{3} = 2$$

(-2)

Ne Bilmeliyim? 6

BİRİNCİ DERECEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

$$ax + by = c$$

$$dx + ey = f$$

şeklinde birden fazla iki bilinmeyenli denklemden oluşan sisteme iki bilinmeyenli denklem sistemi denir. Bu iki denklemi sağlayan (x, y) ikilisi sistemin çözümüdür.

Denklem sistemini çözerken yok etme metodu, yerine koyma metodu ve karşılaştırma metodundan yararlanılır.

Yok Etme Metodu:

Verilen denklemlerdeki değişkenlerden birinin katsayıları eşitlenip, taraf tarafa toplanarak veya çıkartılarak değişkenlerden biri yok edilir. Diğer değişken bulunur ve sonuca gidilir.

Yerine Koyma Metodu:

Verilen denklemlerin birinden değişkenlerden biri çekilip diğer denklemde yerine yazılarak kök bulunur.

Karşılaştırma Metodu:

Verilen denklemlerin her ikisinden de aynı değişken çekilir. Denklemlerin diğer tarafları eşitlenerek soru çözülür.

Nasıl Çözülür?**Örnek**

$$3x - y = 4$$

$$2x + 4y = -2$$

denklem sisteminin çözümünü yukarıdaki üç metodu da kullanarak bulalım.

Çözüm

Yerine koyma metodu:

$$3x - y = 4 \Rightarrow y = 3x - 4 \text{ ifadesi,}$$

$$2x + 4y = -2 \text{ denkleminde yerine yazılırsa;}$$

$$\Rightarrow 2x + 4 \cdot (3x - 4) = -2$$

$$\Rightarrow 2x + 12x - 16 = -2$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ bulunur.}$$

$$y = 3x - 4 \Rightarrow y = 3 \cdot 1 - 4 = -1 \text{ bulunur.}$$

Yok etme metodu:

$$\begin{array}{r} 4 / \quad 3x - y = 4 \\ \quad 2x + 4y = -2 \\ \hline 12x - 4y = 16 \\ + \quad 2x + 4y = -2 \\ \hline 14x = 14 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ dir.}$$

x = 1 değerini denklemlerden herhangi birinde yerine yazıp y yi bulalım.

$$3x - y = 4 \Rightarrow 3 \cdot 1 - y = 4 \Rightarrow y = -1 \text{ bulunur.}$$

Karşılaştırma metodu:

$$3x - y = 4 \Rightarrow y = 3x - 4$$

$$2x + 4y = -2 \Rightarrow y = \frac{2x + 2}{-4}$$

O halde,

$$3x - 4 = \frac{2x + 2}{-4} \Rightarrow -12x + 16 = 2x + 2$$

$$\Rightarrow 14 = 14x \Rightarrow x = 1 \text{ ve } y = -1 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$2x + 3y = -4$$

$$5x + 4y = 6$$

denklemini sağlayan x ve y değerlerini bulalım.

Çözüm

Payda eşitler gibi x'in katsayılarını eşitleyelim. Ama ters işaretli olsun.

$$-5 / \quad 2x + 3y = -4$$

$$2 / \quad 5x + 4y = 6$$

$$-10x - 15y = +20$$

$$+ \quad 10x + 8y = 12$$

$$0 - 7y = 3 \Rightarrow y = -\frac{3}{7} \text{ dir.}$$

$$y = -\frac{3}{7} \text{ için } 2x + 3y = -4$$

$$\Rightarrow 2x + 3\left(-\frac{3}{7}\right) = -4$$

$$\Rightarrow 2x - \frac{9}{7} = -4$$

$$\Rightarrow 2x = -4 + \frac{9}{7}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{-28 + 9}{7} = -\frac{19}{7}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{19}{14} \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki denklem sistemini sağlayan x ve y değerlerini bulunuz.

$$\rightarrow x + y = 12$$

$$x - y = 6$$

(9, 3)

$$\rightarrow 3x + y = 12$$

$$x - 2y = -3$$

(3, 3)

$$\rightarrow \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$$

$$5x - 2y = 4$$

(0, -2)

$$\rightarrow x - 5y = 4$$

$$2x + y = 8$$

(4, 0)

$$\rightarrow a + 2b = -4$$

$$2a - b = 7$$

(2, -3)

$$\rightarrow 3x - 4y = 5$$

$$4x - 5y = 3$$

(-13, -11)

$$\rightarrow m + n = 7$$

$$\frac{m}{2} - \frac{n}{3} = 1$$

(4, 3)

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{y} = 4$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 10$$

olduğuna göre, x değerini bulalım.

Çözüm



x ve y'lerin payda da olması kuralı değiştirmez. Alttaki denkleme -5 ile çarpıp üstteki denkleme toplayalım.

$$\begin{array}{r} \frac{3}{x} - \frac{5}{y} = 4 \\ -5/ \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 10 \\ + \\ \hline \frac{3}{x} - \frac{5}{y} = 4 \\ -\frac{5}{x} + \frac{5}{y} = -50 \\ + \\ \hline \frac{3}{x} - \frac{5}{x} = 4 - 50 \\ \Rightarrow -\frac{2}{x} = -46 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{46} \Rightarrow x = \frac{2}{46} = \frac{1}{23} \text{ bulunur.} \end{array}$$

Örnek

$$\frac{2}{x} - \frac{4}{y} = 2$$

$$\frac{5}{x} - \frac{3}{y} = 12$$

olduğuna göre, x.y değerini bulalım.

Çözüm

$$\begin{array}{r} -5/ \quad \frac{2}{x} - \frac{4}{y} = 2 \\ +2/ \quad \frac{5}{x} - \frac{3}{y} = 12 \\ + \\ \hline -\frac{10}{x} + \frac{20}{y} = -10 \\ \frac{10}{x} - \frac{6}{y} = +24 \\ + \\ \hline \frac{14}{y} = 14 \Rightarrow y = 1 \text{ dir.} \end{array}$$

$$y = 1 \text{ için; } \frac{2}{x} - \frac{4}{1} = 2 \Rightarrow \frac{2}{x} - 4 = 2 \Rightarrow \frac{2}{x} = 6$$

$$\Rightarrow 6x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ dir.}$$

Buna göre, $x \cdot y = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ bulunur.

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki denklem sistemini sağlayan x ve y değerlerini bulunuz.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 4$$

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 2$$

$$\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{10}\right)$$

$$\frac{5}{x} - \frac{2}{y} = 3$$

$$\frac{1}{x} - \frac{3}{y} = -2$$

$$(1, 1)$$

$$\frac{2}{x} - \frac{2}{y} = 5$$

$$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 4$$

$$\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{7}\right)$$

Temel Matematik İşlemler

Ne Bilmeliyim? 7

► Bilinmeyen sayısı ikiden fazla ise iki bilimeyenli denklemlerdeki metodların yanında taraf tarafa çarpma veya bölme kuralları da uygulanabilir.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$3a + 8b + 2c = 20$$

$$4a - b + 5c = 15$$

olduğuna göre, $a + b + c$ toplamını bulalım.

Çözüm



Verilen denklem sisteminde bilinmeyen sayısı denklem sayısından fazla olduğu için a , b , c sayılarını sonsuz çoklukta bulabiliriz. Ama bizden a , b ve c yi istemiyor toplamlarını istiyor. Bu yüzden direk toplamalarını bulmaya çalışalım. Taraf tarafa toptasak sanki bir şeyler olacak.

$$3a + 8b + 2c = 20$$

$$+ \quad 4a - b + 5c = 15$$

$$7a + 7b + 7c = 35 \Rightarrow a + b + c = 5$$

Hocam nereden anladık toplayacağımızı.



Ayça'cım yapabileceğim kaç tane işlem var ki toplama, çarpma bölme. Çarpma ve bölme de pek mantıklı durmuyor değil mi?

Örnek

a , b , c pozitif sayılardır.

$$a \cdot b = 5, \quad b \cdot c = 10, \quad a \cdot c = 16$$

denklem sistemini sağlayan a değerini bulalım.

Çözüm

Hocam hocam..burada da çarpma yapacağız.

$$a \cdot b = 5$$

$$\times \quad a \cdot c = 16$$

$$a^2 \cdot b \cdot c = 5 \cdot 16 \quad \text{ve} \quad b \cdot c = 10 \quad \text{olduğundan,}$$

$$\Rightarrow a^2 \cdot 10 = 80 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?

$$1. \quad x + y = 8$$

$$x + z = 3$$

$$y + z = 5$$

olduğuna göre, x in değerini bulunuz.

(3)

$$2. \quad 2a - b - 3c = 9$$

$$a - 2b - 4c = 2$$

olduğuna göre, $a + b + c$ toplamının değerini bulunuz.

(7)

$$3. \quad a, b, c \text{ pozitif reel sayı olmak üzere,}$$

$$a \cdot b = c$$

$$a \cdot c = 2b$$

$$b \cdot c = 4a$$

olduğuna göre, $a \cdot b \cdot c$ çarpımının değerini bulunuz.

(8)

Ne Bilmeliyim? 8

ÖZEL DENKLEMLER

- $A^{2n} + B^{2n} = 0 \Rightarrow A = 0$ ve $B = 0$ dir.
- $|A| + |B| = 0 \Rightarrow A = 0$ ve $B = 0$ dir.
- $2n\sqrt{A} + 2n\sqrt{B} = 0 \Rightarrow A = 0$ ve $B = 0$ dir.
- Özel denklemler çözülürken iki bilinmeyenli denklemlerdeki metodların yanında taraf tarafa çarpma veya bölme kuralları da uygulanabilir.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$(x - 4)^2 + (x + 2y)^2 = 0$$

olduğuna göre, $x + y$ değerini bulalım.

Çözüm



Özellik yukarıda, soru aşağıda hadi uygulayalım.

$$(x - 4)^2 + (x + 2y)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4\text{'tür.}$$

ve

$$\Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow 4 + 2y = 0$$

$$\Rightarrow 2y = -4 \Rightarrow y = -2\text{'dir.}$$

O halde, $x + y = 4 + (-2) = 2\text{'dir.}$

Örnek

$$(x + 4)^4 + |y - 5| + \sqrt{z - 1} = 0$$

olduğuna göre, $x \cdot y \cdot z$ değerini bulalım.

Çözüm



Her bir terimin sıfıra eşit olmasından başka çıkar yol var mı? Aferin sana Ayça, tabii ki de yok...

$$\Rightarrow x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$\Rightarrow y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5 \text{ tir.}$$

$$\Rightarrow z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1 \text{ dir.}$$

O halde, $x \cdot y \cdot z = (-4) \cdot 5 \cdot 1 = -20$ bulunur.

Nasıl Uygularım?

1. a, b, c reel sayılardır.

$$\sqrt{b - 1} + (a + 3)^2 + |5 - c| = 0$$

olduğuna göre, $a + b + c$ toplamının değerini bulunuz.

(3)

2. a, b, c reel sayılardır.

$$\sqrt{b - 4} + (a + b + 11)^2 = 0$$

olduğuna göre, a değerini bulunuz.

(-15)

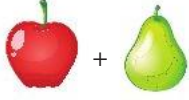
3. $(a - b - 4)^2 + (a + 2b - 2)^4 = 0$

denklemini sağlayan b değeri kaçtır?

$\left(-\frac{2}{3}\right)$

Temel Matematik İşlemler

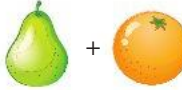
1.



$$= 25$$



$$= 28$$



$$= 39$$

olduğuna göre,

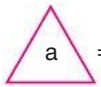


toplamlarının sonucu kaçtır?

- A) 45 B) 46 C) 48 D) 51 E) 53

2. "Geometrik bir düzgün çokgenin kenar sayısı tek ise şeklin içindeki sayı kenar sayısı ile çarpılır, kenar sayısı çift ise şeklin içindeki sayı kenar sayısına bölünür." şeklinde bir işlem tanımlanıyor.

Örneğin:



$$= 3a$$



$$= \frac{a}{4}$$

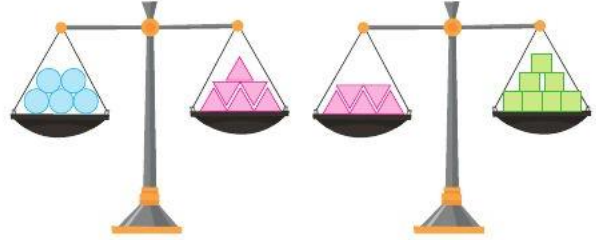
Buna göre,



eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) -3 E) -2

3. Aşağıda verilen eşit kollu teraziler dengededir.



 = 1,8 kg olduğuna göre,  değeri kaçtır?

- A) $\frac{9}{14}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{15}{7}$ D) $\frac{15}{14}$ E) $\frac{55}{44}$

4. Her a gerçel sayısı için

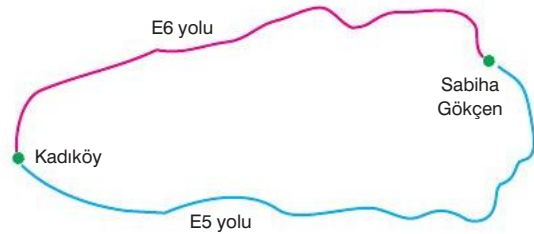
$$\boxed{a} = 3 - a$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, $\boxed{x + 2} = 2\boxed{x} - 3$ eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

5. Kadıköy'den Sabiha Gökçen Havaalanı'na iki farklı ulaşım yolu vardır.

E6 yolunun uzunluğu : $5x + 6$ kmE5 yolunun uzunluğu : $4x + 3$ km

E5 yolunun uzunluğunun, E6 yolunun uzunluğuna oranı $\frac{3}{4}$ olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Temel Matematik İşlemler

6. Aşağıdaki çarpım tablosu, üst sütun ve sol satırdaki sayıların çarpımı bu satır ve sütunun kesiştiği hücrelere yazılarak oluşturulmuştur. Örneğin; $A \cdot B = 18$ 'dir.

x	A	B	C
A		18	
B			5
C	10		

Buna göre, $A \cdot B \cdot C$ çarpımının pozitif değeri kaçtır?

- A) 36 B) 30 C) 28 D) 24 E) 18

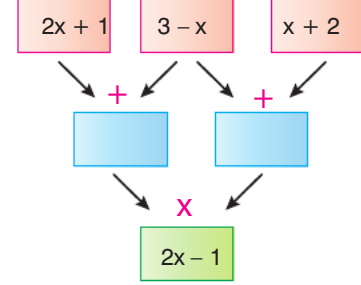
7. Aşağıdaki toplama tablosu, üst sütun ve sol satırdaki sayıların toplamı bu satır ve sütunun kesiştiği hücrelere yazılarak oluşturulmuştur.

+	x	y	z
x	10	-4	
y			3
z			

Buna göre, $x + y - z$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -16 B) -15 C) -14 D) 7 E) 5

8. Aşağıdaki düzenekte dikdörtgen kutucukların içinde yazılı olan cebirsel ifadeler ok yönündeki kutunun üzerindeki işlem yapılarak okların kesiştiği bir alt sıradaki kutunun içine yazılmaktadır.



Buna göre, x kaçtır?

- A) -5 B) -6 C) -7 D) -8 E) -9

9.
$$\frac{x+1}{3} - \frac{2-3x}{2} = \frac{5}{12}$$

denkleminin çözümünü, bir öğrenci aşağıdaki gibi yapmıştır.

1. adım:
$$\frac{x+1}{3} - \frac{2-3x}{2} = \frac{5}{12}$$

(2) (3)

2. adım:
$$\frac{2x+2-6-9x}{6} = \frac{5}{12}$$

3. adım: $2x+2-6-9x=5$

4. adım: $-7x-4=5$

5. adım: $x = -\frac{9}{7}$ olur.

Buna göre, çözümün hangi adımında ilk hata yapılmıştır?

- A) 1. adım B) 2. adım C) 3. adım
D) 4. adım E) 5. adım

BÖLÜM 4

ÖĞRENELİM

TEMEL KAVRAMLAR Sayı Kümeleri

Ne Bilmeliyim? 1

Rakamlar

Rakam = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Doğal Sayılar

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}

Tam Sayılar

$Z = \{ \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{Z^-} \quad \downarrow \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{Z^+}$

$= Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$

Pozitif tam sayılar kümesine "Sayma Sayıları" da denir ve N^+ ile gösterilir.

Rasyonel Sayılar

$Q = \left\{ \frac{a}{b}; a \in Z \text{ ve } b \in Z - \{0\} \right\}$

$\frac{1}{2}, \frac{13}{9}, \frac{7}{3}, \frac{5}{4}, -3, 4, 0$ gibi

İrrasyonel Sayılar

Virgülden sonraki kısmı düzensiz olarak sonsuza giden sayılardır. Q' ile gösterilir.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}, \pi, e, \dots$ gibi

Reel (Gerçek) Sayılar

Yukarıda gösterdiğimiz tüm sayı kümelerini içersine alan sayı kümesine "Reel Sayılar" denir.

$R = Q \cup Q'$



Doğal sayılardan bahsedilince "0" ı, tam sayılardan bahsedilince negatif tam sayılar unutmayın.

Nasıl Çözülür?

Örnek

a, b ve c birbirinden farklı rakamlardır.

$$4a + 3b - 2c$$

İfadesinin alabileceği en küçük ve en büyük değerleri bulalım.

Çözüm



Bilinmeyen sayısının, verilen denklem sayısından daha fazla olduğu denklemlerde; bilinmeyenler, rakam, doğal sayı veya tam sayı ise değer verilerek çözüme gidilir. Burada sayı kümemiz rakamlar kümesidir.



İfadenin en büyük değerini alması için ne yapmalıyız? Hadi bakalım fikri olan söylesin.



Hocam önünde (+) olanlar büyük, önünde (-) olanlara küçük olmalı ki sonuç en büyük değerini alsın.



Aferin Esat, a, b ve c yerine vereceğimiz değerlerin farklı rakamlar olacağına da dikkat edeceğiz değil mi?

$$4a + 3b - 2c$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
9 8 0 için en büyük değer:

$$36 + 24 - 0 = 60 \text{ bulunur.}$$



En küçük değer içinde önünde (+) olanlar küçük, önünde (-) olanlar büyük olmalı tabii ki.

$$4a + 3b - 2c$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
0 1 9 için en küçük değer:

$$0 + 3 - 18 = -15 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. a, b ve c birbirinden farklı rakamlardır.

Aşağıdaki ifadelerin alabileceği en küçük ve en büyük değerleri bulunuz.

$$\rightarrow 3a + 4b$$

(3 ve 60)

$$\rightarrow 4a - 2b$$

(-18 ve 36)

$$\rightarrow 4a - 3b - 6c$$

(-78 ve 33)

$$\rightarrow ab + c$$

(1 ve 79)

Nasıl Çözülür?



Örnek

a ve b pozitif tam sayılardır.

$$a + b = 19$$

olduğuna göre, $a \cdot b$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri ile en küçük değerini bulalım.

Çözüm



Bilinmeyen sayısı denklem sayısından fazla. Bu soruyu değer vererek çözmemiz lazım fakat bazı sorular için belirli kurallar oluşturulmuş

Toplamı sabit olan pozitif sayıların çarpımının; en küçük değerini bulmak için birbirine uzak değerler, en büyük değerini bulmak için birbirine yakın değerler, seçilmesi gerekir.



Hocam, kuralımıza göre en büyük değeri için sayıları birbirine yakın yani 10 ile 9 seçmeliyiz.

$a = 10$ ve $b = 9$ için, $a \cdot b = 10 \cdot 9 = 90$ en büyük değer olur.



En büyük değeri için sayıları birbirine uzak yani 0 ile 19 seçmeliyiz.



Guzuuu herhalde sorudaki pozitif tam sayı şartını görmedin.



Pardon hocam. O halde, 1 ile 18 seçmeliyiz.

$a = 1$ ve $b = 18$ için, $a \cdot b = 1 \cdot 18 = 18$ en küçük değer olur.



Guzular, değer verirken verilen kümeye ve sorulana dikkat etmemiz gerekir sakın unutmayın.

Örnek

c ve d pozitif tam sayılardır.

$$c \cdot d = 16$$

olduğuna göre, $c + d$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri ile en küçük değerini bulalım.

Çözüm

Çarpımı sabit olan pozitif sayıların toplamının; en küçük değerini bulmak için, birbirine yakın değerler, en büyük değerini bulmak için ise birbirine uzak değerler seçilmelidir.

Sayı Kümeleri

Hocam, kurala göre $c + d$ nin en küçük değeri için de sayıları birbirine yakın seçmeliyiz. Pozitif sayı şartında unutmazsak 4, 4 seçmeliyiz. En büyük değer için de sayıları birbirine uzak 1 ve 16 seçmeliyiz.



Aferin Ayça, sayılar farklı demediği için ikisinin de 4 almamızda problem yok.

$c = 4$ ve $d = 4$ için,

$c + d = 4 + 4 = 8$ en küçük değer olur.

$c = 1$ ve $d = 16$ için,

$c + d = 1 + 16 = 17$ en büyük değer olur.

Örnek

a ve b doğal sayılardır.

$$5a + 2b = 38$$

olduğuna göre, b 'nin en küçük değerini bulalım.

Çözüm



İki bilinmeyenli bir denklem ancak değer vererek çözülebilir. Değer verirken b 'nin en küçük değerini alması için a 'nın en büyük değerini alması gerektiğini unutmayalım. a 'ya kaç vererek başlayalım.

Hocam, $a = 8$ olursa $5 \cdot 8 = 40$ olur, 38'i geçersiz. Bunun için a en fazla 7 değerini alabilir.



Koçum benim.

Buna göre;

$a = 7$ için,

$$5a + 2b = 38$$

$$\Rightarrow 5 \cdot 7 + 2b = 38$$

$$\Rightarrow 35 + 2b = 38$$

$$\Rightarrow 2b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2} \text{ (b doğal sayı olmalı)}$$

$a = 6$ için,

$$5a + 2b = 38$$

$$\Rightarrow 5 \cdot 6 + 2b = 38$$

$$\Rightarrow 30 + 2b = 38$$

$$\Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4 \text{ bulunur.}$$

O halde, b 'nin alabileceği en küçük değer 4 olarak bulunur.

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki ifadelerde $a + b$ nin alabileceği en küçük ve en büyük değerleri bulunuz.

→ a ve b doğal sayılardır.

$$a \cdot b = 16$$

(8 ve 17)

→ a ve b tam sayılardır.

$$a \cdot b = 10$$

(-11, 11)

→ a ve b tam sayılardır.

$$a \cdot b = -15$$

(-14 ve 14)

→ a ve b farklı doğal sayılardır.

$$a \cdot b = 16$$

(10 ve 17)

Nasıl Uygularım?



2. Aşağıdaki ifadelerde $a \cdot b$ nin alabileceği en küçük ve en büyük değerleri bulunuz.

→ a ve b doğal sayılardır.

$$a + b = 18$$

(0 ve 81)

→ a ve b pozitif tam sayılardır.

$$a + b = 16$$

(15 ve 64)

→ a ve b farklı doğal sayılardır.

$$a + b = 10$$

(0 ve 24)

3. a ve b doğal sayılardır.

Aşağıdaki ifadelerde a 'nın alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

$$3a + 5b = 30$$

(15)

$$a \cdot b = 12$$

(28)

$$b \cdot (a + 3) = 18$$

(24)

$$a \cdot (b - 1) = 15$$

(24)

Nasıl Uygularım?



4. a ve b birer doğal sayı olmak üzere,

$$a + 2b = 12$$

olduğuna göre, b'nin en büyük değeri kaçtır?

(6)

5. a ve b birer tam sayı olmak üzere,

$$2ab = 32$$

olduğuna göre, a'nın en küçük tam sayı değeri kaçtır?

(-16)

6. a ve b birer pozitif tam sayı olmak üzere,

$$2a + 3b = 46$$

olduğuna göre, a'nın en büyük tam sayı değeri kaçtır?

(20)

7. x ve y pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$7x - y = 39$$

olduğuna göre, x + y nin en küçük değeri kaçtır?

(9)

8. Aşağıdaki ifadelerde a · b nin alabileceği en küçük ve en büyük değerleri bulunuz.

→ a ve b doğal sayılardır.

$$5a + 2b = 32$$

(0 ve 24)

→ a ve b pozitif tam sayılardır.

$$3a + b = 10$$

(3 ve 8)

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$\frac{a}{b} = \frac{8}{5} \text{ ve } \frac{a}{c} = \frac{4}{7}$$

olduğuna göre, $a + b + c$ toplamının **en küçük** değerini bulalım.

Çözüm



a'nın iki denklemde ortak eleman olduğu gözünüzden kaçmadı değil mi? O halde, değer verirken a'dan başlamamız lazım. Bu da, uzun sürecek gibi o zaman bir düzenlemeye gidelim.

$$\frac{a}{b} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{8}{14}$$

Hocam, aşağıdaki kesrin payı ve paydasını neden 2 ile çarptık?



Tuğba'cım, yukarıdaki eşitlikte a'nın karşısındaki kesirde 8 olduğu için aşağıdaki kesirde de a'nın karşısındaki sayıyı 8 yapabilmek için 2 ile çarparak genişlettim.

O halde, her iki denklemde a'nın karşısındaki sayıları eşitlediğimizde,

a'nın en küçük değeri olan 8 için;

$b = 5$ ve $c = 14$ olacağından,

$a + b + c$ nin en küçük değeri;

$8 + 5 + 14 = 27$ bulunur.

Örnek

a, b, c sayma sayılarıdır.

$$a \cdot b = 12 \text{ ve } a \cdot c = 20$$

olduğuna göre, $a + b + c$ toplamının alabileceği en büyük ve en küçük değeri bulalım.

Çözüm



Nasıl oluyor du? Yakın mı seçecektim uzak mı aklınıza gelmedi mi? Stres yok olabilecek tüm değerleri deneyin yüz tane değer olacak hali yok ya.



Sayma sayıları = Pozitif tam sayılar'dır

Buna göre,

$$a \cdot b = 12 \text{ ve } a \cdot c = 20 \text{ ise}$$

$$a = 1, b = 12, c = 20 \text{ için } a + b + c = 32 \text{ olur.}$$

$$a = 2, b = 6, c = 10 \text{ için } a + b + c = 18 \text{ olur.}$$

$$a = 3, b = 4, c \notin \mathbb{Z}^+$$

$$a = 4, b = 3, c = 5 \text{ için } a + b + c = 12 \text{ olur.}$$

$$a = 6, b = 2, c \notin \mathbb{Z}^+$$

$$a = 12, b = 1, c \notin \mathbb{Z}^+$$

Buna göre, $a + b + c$ 'nin en küçük değeri 12, en büyük değeri 32 bulunur.

Örnek

a ve b pozitif tam sayılar ve

$$\frac{10}{a} + b = 6$$

olduğuna göre, b'nin alabileceği değerler toplamını bulalım.

Çözüm



Verilen eşitliğe şöyle alıcı gözüyle bir bakalım. Eşitlikte b pozitif tam sayı olduğundan $\frac{10}{a}$ kesrinin de pozitif tam sayı olması gerekir ki toplamları 6 olabilsin.

Orası tamam da hocam ne yapacağız şimdi?



Bunu anladıysanız mesele yok. Yapılacak iş değer vermektir. Değer dediysek rastgele sallamayın, a sayısı 10'un bölenlerinden biri olmalı

$$a = 1 \text{ için}$$

$$\frac{10}{1} + b = 6 \Rightarrow 10 + b = 6 \Rightarrow b = -4 \notin \mathbb{Z}^+$$

$$a = 2 \text{ için}$$

$$\frac{10}{2} + b = 6 \Rightarrow 5 + b = 6 \Rightarrow b = 1 \text{ dir.}$$

$$a = 5 \text{ için}$$

$$\frac{10}{5} + b = 6 \Rightarrow 2 + b = 6 \Rightarrow b = 4 \text{ tür.}$$

$$a = 10 \text{ için}$$

$$\frac{10}{10} + b = 6 \Rightarrow 1 + b = 6 \Rightarrow b = 5 \text{ dir.}$$

Buna göre,

b'nin alabileceği değerler toplamı $1 + 4 + 5 = 10$ bulunur.

Nasıl Uygularım?



1. a, b ve c pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$a = 4b$$

$$b = 3c$$

olduğuna göre, $a + b + c$ toplamının en küçük değeri kaçtır?

(16)

2. a, b, c birer tam sayıdır.

$$a \cdot b = 10$$

$$b \cdot c = 12$$

olduğuna göre, $a + b + c$ nin en küçük değeri kaçtır?

(-23)

3. a, b, c birer pozitif tam sayıdır.

$$a + b = 12$$

$$a \cdot c = 15$$

olduğuna göre, $b + c$ nin en küçük değeri kaçtır?

(10)

4. a, b ve c doğal sayılar olmak üzere,

$$a = b + 2$$

$$b = c + 3$$

olduğuna göre, $a + b + c$ toplamının en küçük değeri kaçtır?

(8)

5. a ve b tam sayıdır.

$$a + \frac{5}{b} = 15$$

olduğuna göre, a'nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

(60)

6. a ve b pozitif tam sayıdır.

$$\frac{a}{7} + b = 4$$

olduğuna göre, a'nın alabileceği en büyük değer kaçtır?

(21)

Ne Bilmeliyim? 2

TEK VE ÇİFT SAYILAR

Çift Sayılar

Birler basamağı 0, 2, 4, 6, 8 olan tam sayılara **çift sayılar** denir.
n bir tam sayı olmak üzere, genel olarak **çift sayılar** $2n$ ifadesiyle belirtilir.

Tek Sayılar

Birler basamağı 1, 3, 5, 7, 9 olan tam sayılara **tek sayılar** denir.
n bir tam sayı olmak üzere, genel olarak **tek sayılar** $2n - 1$ ifadesiyle belirtilir.

► Tek Sayılar = T ve Çift Sayılar = Ç olmak üzere;

$$T \pm T \Rightarrow \text{Ç} \quad T \cdot T \Rightarrow T$$

$$T \pm \text{Ç} \Rightarrow T \quad T \cdot \text{Ç} \Rightarrow \text{Ç}$$

$$\text{Ç} \pm \text{Ç} \Rightarrow \text{Ç} \quad \text{Ç} \cdot \text{Ç} \Rightarrow \text{Ç}$$



Bu kuralları ezberlemeye hiç gerek yok değer vererek kendiniz sonucu bulabilirsiniz..

► n pozitif tam sayı olmak üzere,

$$T^n \Rightarrow T \quad \text{Ç}^n \Rightarrow \text{Ç}$$

► $n \neq 0$ ve $n \neq 1$ olmak üzere,

$$n! \Rightarrow \text{Ç}$$

$$0! = 1 \text{ ve } 1! = 1 \text{ dir.}$$

► $x \cdot y \cdot z \cdot \dots \cdot k = \text{Tek Sayı} \Rightarrow$ Bu tam sayıların **hepsi tektir.**

$x \cdot y \cdot z \cdot \dots \cdot k = \text{Çift Sayı} \Rightarrow$ Bu tam sayıların **en az biri çifttir.**

► Ardışık iki tam sayının çarpımı **daima çift sayıdır.**

► ∓ 1 dışındaki bir tam sayının **negatif kuvvetleri** tam sayı olmaz.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$32^{25} \cdot 18^{32} + 21^{49}$$

işleminin sonucunun çift sayı mı tek sayı mı olduğunu bulalım.

Çözüm



Verilen sayıların kuvvetleri bulunabilir mi?

Bulunabilse de sınav çoktan bitmiş olur herhalde hocam.



O zaman üs alma işlemi ile uğraşmayacağız. Bizim için sayının değeri değil tabanının tek veya çift olması önemli. Kuralımız gereği üsler pozitif sayı olduğundan üsleri silip tabanlarla işlem yapabiliriz.

$$32^{25} \cdot 18^{32} + 21^{49}$$

$$\Rightarrow 32 \cdot 18 + 21$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\text{Ç} \quad \text{Ç} + T$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\text{Ç} + T \Rightarrow \text{Tek sayıdır.}$$

Örnek

a bir tek sayı olmak üzere, aşağıdakilerden hangisi çift sayıdır?

A) $3a$

B) $5a + 2$

C) $(a + 2)^2$

D) $(a - 4)^3$

E) $a(a + 1)$

Çözüm



a'nın tek sayı olduğu söylendiği için işlemiz kolay, a ya herhangi bir tek sayı değeri yazarak seçenekleri kontrol edelim.

a = 1 için,

A) $3 \cdot a = 3 \cdot 1 = 3$ tek sayı

B) $5a + 2 = 5 \cdot 1 + 2 = 7$ tek sayı

C) $(a + 2)^2 = (1 + 2)^2 = 3^2 = 9$ tek sayı

D) $(a - 4)^3 = (1 - 4)^3 = (-3)^3 = -27$ tek sayı

E) $a(a + 1) = 1 \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 2 = 2$ çift sayı

E seçeneği çift sayı bulunur.

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki sayıların tek mi çift mi olduğunu bulunuz.

$$\rightarrow 9^{32} + 8^{45}$$

(Tek)

$$\rightarrow 1987^{23} - 2023^{34}$$

(Çift)

$$\rightarrow 103^{119} \cdot 73^{210}$$

(Tek)

$$\rightarrow 107^{223} \cdot 783^{345} \cdot 934^{546}$$

(Çift)

$$\rightarrow 148^0 + 34^{16}$$

(Tek)

$$\rightarrow 0! + 1! + 2! + 3! + 4!$$

(Çift)

2. a çift sayı olduğuna göre, aşağıdaki sayıların tek mi çift mi olduğunu bulunuz.

$$\rightarrow 5a + 4$$

(Çift)

$$\rightarrow a^2 - 7a$$

(Çift)

$$\rightarrow (3a + 1) \cdot (2a - 5)$$

(Tek)

$$\rightarrow (3a + 7) \cdot (2a - 5) + a$$

(Tek)

$$\rightarrow a \cdot (a + 1)$$

(Çift)

Nasıl Uygularım?



3. a tek sayı olduğuna göre, aşağıdaki sayıların tek mi çift mi olduğunu bulunuz.

$$\rightarrow 3a + 2$$

(Tek)

$$\rightarrow a^2 - a + 2$$

(Çift)

$$\rightarrow (a + 1) \cdot (2a - 3)$$

(Çift)

$$\rightarrow (a + 7) \cdot (a - 5) + 3a$$

(Tek)

$$\rightarrow a \cdot (a + 1)$$

(Çift)

4. a tek sayı, b çift sayı olduğuna göre, aşağıdaki sayıların tek mi çift mi olduğunu bulunuz.

$$\rightarrow a \cdot b$$

(Çift)

$$\rightarrow b^a$$

İPUCU

a veya b'nin pozitif olduğu söylenmiyor dikkat edin.

(Yorum yapılamaz)

$$\rightarrow a^3 + b^2$$

(Tek)

$$\rightarrow 2a + 7b$$

(Çift)

5. a bir tam sayı olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi daima tek sayıdır?

İPUCU

a çift veya tek söylenmiyor bu durumda iki durumu da düşünmelisiniz

$$\rightarrow 3a$$

(Bilinemez)

$$\rightarrow 2a^2$$

(Çift)

$$\rightarrow a^3 + a + 1$$

(Tek)

$$\rightarrow a \cdot (a + 1)$$

(Çift)

Sayı Kümeleri

Nasıl Çözülür?



Örnek

$a \cdot b \cdot c$ çarpımı tek sayı olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi çift sayıdır?

- A) $2bc - a$ B) $a + bc$ C) $a(2b - c)$
D) $3abc$ E) $a + b + c$

Çözüm



Bir çarpımın sonucu tek ise bütün çarpanlar tektir kuralına göre, a, b, c sayılarının her biri tektir. O halde, yine değer vererek işlem yapalım.

$a = 1, b = 1, c = 1$ seçelim.

- A) $2bc - a = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$ tek sayı
B) $a + bc = 1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 = 2$ çift sayı bulunur.
C) $a(2b - c) = 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1) = 1 \cdot 1 = 1$ tek sayı
D) $3abc = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 3$ tek sayı
E) $a + b + c = 1 + 1 + 1 = 3$ tek sayı

Örnek

$a - 1$ tek sayı, $b + 1$ çift sayı olduğuna göre,
($ab + a + b$)

sayısının tek mi çift mi olduğunu bulalım.

Çözüm

$a - 1 \rightarrow$ tek ise a çifttir, $a = 2$ olsun.

$b + 1 \rightarrow$ çift ise b tektir, $b = 1$ olsun.

($ab + a + b$) = ($2 \cdot 1 + 2 + 1$) = 5 tek sayı bulunur.

Örnek

x, y, z doğal sayılar ve

$$x + y = 2z + 4$$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

- A) x, y, z çift sayılardır.
B) x ve y çift sayılardır.
C) x çift sayı ise, y tek sayıdır.
D) x çift sayı ise, y çift sayıdır.
E) x tek sayı ise, y çift sayıdır.

Çözüm



x, y veya z 'den hiçbirinin tekliği veya çiftliği hakkında bilgi yok. Bakın guzular gözümüzü dört açıp sorudaki ip ucunu bulmaya çalışacağız.



z tek veya çift ne olursa olsun $2z$ çift sayıdır. 4 çift sayı olduğuna göre $2z + 4$ çift sayıdır. Ama z nin tek veya çift olması hakkında bir şey söylenemez.



$2z + 4$ çift sayı ise $x + y$ çift sayıdır. Bu durumda iki sayının toplamı çift ise sayıların ikisinde çift ya da ikisi de tek sayıdır.

Buna göre,

x tek sayı ise y de tek sayıdır.

ya da

x çift sayı ise y de çift sayıdır.

Buna göre, cevap "D" seçeneğidir.



x ve y çift sayıdır ile x çift sayı ise y çift sayıdır cümlesi aynı değildir. Birisinde kesinlik var birisinde şart var.

Nasıl Uygularım?



1. x tamsayı olmak üzere;

($5x + 2$) çift sayı olduğuna göre, aşağıdaki sayıların tek mi çift mi olduğunu bulunuz.

İPUCU

Öncelikle x sayısı tek mi? Çift mi? Onu bulmak gerekir.

$$\rightarrow x + 6$$

(Çift)

$$\rightarrow 11x + 5$$

(Tek)

Nasıl Uygularım?



$$\rightarrow 6x^2 + 1$$

(Tek)

$$\rightarrow (2a + 3) \cdot (5b - 2)$$

(Çift)

$$\rightarrow 7x - 4$$

(Çift)

$$\rightarrow (a + 3)^5 \cdot (2b + 4)^3$$

(Çift)

2. a ve b tam sayı olmak üzere,

3a - 1 tek sayı, b - 4 çift sayı olduğuna göre, aşağıdaki sayıların tek mi çift mi olduğunu bulunuz.

İPUCU

Ne yapıyoruz? Önce a ve b'nin tekliğini çiftliğini araştırıyoruz.

$$\rightarrow 3ab + 5$$

(Tek)

$$\rightarrow a^2 - b^2$$

(Çift)

$$\rightarrow 4a - 2b + 1$$

(Tek)

3. a, b ve c birer pozitif tam sayıdır.

$$a \cdot b = 2 \cdot c$$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

- A) a ve b tek sayıdır.
- B) a ve b den en az biri çift sayıdır.
- C) a çift sayı b tek sayıdır.
- D) a tek sayı b çift sayıdır.
- E) a, b ve c tek sayıdır.

(B)

4. a, b, c birer tam sayı ve

$$a + b = 2 \cdot c - 1$$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

- A) a ve b tek sayılardır.
- B) a ve b çift sayılardır.
- C) a çift ise b tek sayıdır.
- D) a tek sayı b çift sayıdır.
- E) a çift sayı b tek sayıdır.

(C)

Ne Bilmeliyim? 3

POZİTİF VE NEGATİF SAYILARDA DÖRT İŞLEM

► Aynı işaretli iki sayının toplamı, bu sayıların işareti ile aynı işaretlidir.

$$✓ (+4) + (+5) = (+9)$$

$$(-8) + (-3) = (-11)$$

► Ters işaretli iki sayının toplamı, bu iki sayıdan mutlak değeri büyük olan ile aynı işaretlidir.

$$✓ (+4) + (-5) = (-1) \text{ (Negatif olan daha büyük)}$$

$$(+8) + (-3) = (+5) \text{ (Pozitif olan daha büyük)}$$

► Bir sayıdan; kendisinden küçük bir sayı çıkarılırsa sonuç (fark) pozitif, kendisinden büyük bir sayı çıkarılırsa sonuç (fark) negatiftir.

Buna göre, a ile b nin işaretine bakılmaksızın,

$$✓ a > b \Rightarrow a - b > 0 \text{ (Büyükten küçük çıkmış)}$$

$$13 > 11 \Rightarrow 13 - 11 = 2 > 0$$

$$✓ a < b \Rightarrow a - b < 0 \text{ (Küçükten büyük çıkmış)}$$

$$-5 < 3 \Rightarrow -5 - 3 < 0 \Rightarrow -8 < 0$$

► Aynı işaretli iki sayının çarpımı (veya bölümü) pozitif, ters işaretli iki sayının çarpımı (veya bölümü) negatiftir.

$$✓ (+4) \cdot (+5) = (+20)$$

$$(-8) \cdot (-3) = (+24)$$

$$(+14) \div (+7) = (+2)$$

$$(-18) \div (-3) = (+6)$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$a < b < 0 < c$ olmak üzere,

$$I. a + b < 0$$

$$II. a + c > 0$$

$$III. a + b - c < 0$$

$$IV. b - a + c > 0$$

yukarıdaki ifadelerden hangilerinin kesinlikle doğru olduğunu bulalım.

Çözüm

I. $a < b < 0 \Rightarrow a + b < 0$ ifadesi doğru mudur?



İki negatif sayının toplamı negatif olduğundan, $a + b < 0$ ifadesi kesinlikle doğrudur.

II. $a < 0 < c \Rightarrow a + c > 0$ ifadesi doğru mudur?



Bu biraz bilek güreşine benzer hangisi daha güçlüyse sonuç onun işaretini alır. Dolayısıyla kesin bir şey söyleyemeyiz.

III. $a < b < 0 < c \Rightarrow a + b - c < 0$ ifadesi doğru mudur?

$b < 0 < c \Rightarrow b - c < 0$ dir. $a < 0$ da verilmiş,



O halde, iki negatif sayının toplamı negatif sayıdır. Yani, $b - c < 0$ ve $a < 0 \Rightarrow a + b - c < 0$ dir.

Kesinlikle doğrudur.

IV. $a < b < 0 < c \Rightarrow b - a + c > 0$ ifadesi doğru mudur?

$a < b \Rightarrow b - a > 0$ dir. $c > 0$ da verilmiş,



O halde, iki pozitif sayının toplamı pozitif sayıdır. Yani, $b - a > 0$ ve $c > 0 \Rightarrow b - a + c > 0$ dir.

Kesinlikle doğrudur.

Örnek

$a + b = 0$ olduğuna göre,

$$I. a \text{ pozitif ise } b \text{ negatiftir.}$$

$$II. a \text{ negatif ise } b \text{ pozitifdir.}$$

$$III. a \text{ ile } b \text{ aynı işaretlidir.}$$

ifadelerinden hangilerinin doğru olduğunu bulalım.

Nasıl Çözülür?



Çözüm



$a + b$ toplamı sıfır olduğundan a ile b farklı işaretlidir, aynı işaretli olamazlar.

Buna göre,

I ve II doğru iken III yanlış olur.

Örnek

$a < b < 0 < c$ olmak üzere,

- I. $\frac{a}{b-c}$
- II. $\frac{c}{a+b}$
- III. $\frac{a \cdot b}{c}$
- IV. $(a-c) \cdot (a+b)$

yukarıdaki ifadelerin işaretini bulalım.

Çözüm

I. $b < c \Rightarrow b - c < 0$ dir.



$a < 0$ verilmiş, bunları birbirine bölersek negatif sayının negatif sayıya bölümünden $\frac{a}{b-c}$ ifadesinin işareti pozitifdir, dediğinizi duyar gibi oldum.

II. $a < b < 0 \Rightarrow a + b < 0$ dir.



Pozitif c sayısının, negatif $a + b$ ifadesine bölümü negatif olduğuna göre $\frac{c}{a+b}$ ifadesinin işareti negatiftir.

III. $a < b < 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$ dir.



$c > 0$ verilmiş, pozitif iki sayının birbirine bölümü pozitif olduğuna göre $\frac{a \cdot b}{c}$ ifadesinin işareti pozitifdir.

IV. $a < 0 < c \Rightarrow a - c < 0$ dir.

$a < b < 0 \Rightarrow a + b < 0$ dir.



Negatif $a - c$ ifadesinin, negatif $a + b$ ifadesi ile çarpımı pozitif olduğuna göre $(a - c) \cdot (a + b)$ ifadesinin işareti pozitifdir.

Nasıl Uygularım?



1. $a < b < 0 < c$ olduğuna göre, aşağıdaki ifadelerin işaretlerini bulunuz.

$\rightarrow a + b$

(-)

$\rightarrow a - c$

(-)

$\rightarrow b + c$

(bilenemez)

$\rightarrow c - b$

(+)

$\rightarrow a + b - c$

(-)

$\rightarrow c - a - b$

(+)

Nasıl Uygularım?



2. $a < b < 0 < c$ olduğuna göre, aşağıdaki ifadelerin işaretlerini bulunuz.

$$\rightarrow a \cdot c$$

(-)

$$\rightarrow a \cdot b \cdot c$$

(+)

$$\rightarrow a \cdot b + c$$

(+)

$$\rightarrow a \cdot (b - c)$$

(+)

$$\rightarrow (a - b) \cdot c$$

(-)

$$\rightarrow c \cdot (a + b)$$

(-)

3. $a < 0 < b < c$ olduğuna göre, aşağıdaki ifadelerin işaretlerini bulunuz.

$$\rightarrow \frac{b}{a}$$

(-)

$$\rightarrow \frac{b \cdot c}{a}$$

(-)

$$\rightarrow \frac{a + b}{c}$$

(bilinemez)

$$\rightarrow \frac{b \cdot c}{a - c}$$

(-)

$$\rightarrow \frac{b - c}{a - b}$$

(+)

$$\rightarrow \frac{a + b - c}{a \cdot b}$$

(+)

$$\rightarrow \frac{a \cdot b + c}{a \cdot b}$$

(bilinemez)

Ne Bilmeliyim? 4

- Pozitif bir reel sayının bütün kuvvetleri pozitif, negatif bir reel sayının; tek sayı kuvvetleri negatif, çift sayı kuvvetleri ise pozitifdir.

Yani, $x \neq 0$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

x^{2n} daima pozitif ve

x^{2n-1} ile x aynı işaretlidir.



Biz bu bilgiyi nasıl kullanacağız onu söyleyelim

- Üslü bir ifadede üs çift ise taban sıfır hariç hangi sayı olursa olsun sonuç pozitif olur. Dolayısıyla çarpım ve bölüm şeklindeki ifadelerde **üssü çift olan ifade, ifadeden silinebilir**
- Negatif sayıların, tek kuvveti negatif ve pozitif sayıların, tek kuvveti pozitif olduğundan **üslü ifadelerde tek kuvvetleri silip sadece taban ile işlem yapabiliriz.**
- Sorularda çift kuvvetten başlamak işimizi kolaylaştırır.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$a^{14} \cdot b^{13} > 0$$

olduğuna göre, b nin işaretini bulalım.

Çözüm



Verilen ifade de a nın üssü çift sayı olduğundan bu ifadeyi silebiliriz.

$$a^{14} \cdot b^{13} > 0 \Rightarrow b^{13} > 0$$



b nin üssü tek sayı olduğundan bu ifadenin üssünü silebiliriz.

$$b^{13} > 0 \Rightarrow b > 0 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$a \cdot c > 0$$

$$b^2 \cdot c < 0$$

$$a^3 \cdot b^5 < 0$$

olduğuna göre, a , b ve c reel sayılarının işaretini bulalım.

Çözüm



Bakın koçlarım ve biricik kızlarım, üssü çift olanları tamamen silerken, üssü tek olanların sadece üslerini sileceksiniz.

$$b^2 \cdot c < 0 \Rightarrow b^2 \text{ üssü çift sayı olduğunda } b^2 \text{ yi silelim geriye}$$

$$c < 0 \text{ kalır. Yani } c \text{ negatiftir (-).}$$

$$a \cdot c > 0 \Rightarrow a \text{ ile } c \text{ aynı işaretlidir.}$$

$$c \text{ negatift olduğuna göre, } a \text{ da negatiftir (-).}$$

$$a^3 \cdot b^5 < 0 \text{ ifadesinde üsler tek olduğundan üsleri silersek,}$$

$$a^3 \cdot b^5 < 0 \Rightarrow a \cdot b < 0 \text{ olur.}$$

a negatift olduğuna göre çarpım sonucunun negatift olması için, b pozitif (+) olmalıdır.

Nasıl Uygularım?



1. $a < b < 0 < c$ olduğuna göre, aşağıdaki ifadelerin işaretlerini bulunuz.

$$\rightarrow a^2$$

(+)

$$\rightarrow b^3 c$$

(-)

$$\rightarrow (b - c)^2$$

(+)

$$\rightarrow c^2 - b^5$$

(+)

$$\rightarrow a^2 - b^3 + c^4$$

(+)

2. Aşağıda verilen ifadelere göre; a , b ve c nin işaretlerini bulunuz.

$$\rightarrow a \cdot b < 0, a \cdot c > 0, a \cdot b \cdot c > 0$$

(-, +, -)

$$\rightarrow a \cdot b^2 > 0, a^2 \cdot c > 0, a^3 \cdot b^3 < 0$$

(+, -, +)

$$\rightarrow a^{14} \cdot b^{13} > 0, b^{29} \cdot c < 0, a^3 \cdot c^{39} < 0$$

(+, +, -)

3. x , y ve z birer reel sayıdır.

$$z \cdot y^2 < 0$$

$$\frac{x}{z} < 0$$

$$x^{14} \cdot y \cdot z^{13} < 0$$

olduğuna göre, x , y , z nin işaretlerini bulunuz.

(+, +, -)

Ne Bilmeliyim? 5

ARDIŞIK SAYILAR

Belirli bir kurala göre art arda gelen sayılara **ardışık sayılar** denir. n bir tamsayı olmak üzere,

Ardışık tamsayılar : ..., n , $n + 1$, ...

Ardışık tek sayılar : ..., $2n - 1$, $2n + 1$, ...

Ardışık çift sayılar : ..., $2n$, $2n + 2$, ...

➤ Ardışık tamsayılar arasındaki fark 1, ardışık tek ve ardışık çift sayılar arasındaki fark 2 dir.

➤ Ardışık sayılarda işlem yapılırken artış miktarı r olmak üzere, en küçük sayıya a denilirse, diğer sayılar $a + r$, $a + 2r$, $a + 3r$ şeklinde olur.

Nasıl Çözülür?

Örnek

Dört tane ardışık tek sayının toplamı 120 dir.

Buna göre, en küçük sayıyı bulalım.

Çözüm



En küçük sayıya x denilirse, diğer sayılar $x + 2$, $x + 4$, $x + 6$ olur.

Buna göre,

$$x + x + 2 + x + 4 + x + 6 = 120$$

$$\Rightarrow 4x + 12 = 120$$

$$\Rightarrow 4x = 108$$

$$\Rightarrow x = 27 \text{ bulunur.}$$

Örnek

Ardışık yedi çift sayının toplamı 154 ise bu sayıların en küçüğünü bulalım.

Çözüm



n tek sayı olmak üzere, ardışık terimlerinin artış miktarları ya da azalma miktarları birbirlerine eşit olan n tane sayının toplamı T ise ortadaki sayı, $\frac{T}{n}$ dir.

$$\text{Ortadaki sayı} = \frac{154}{7} = 22 \text{ dir.}$$

Buna göre, bu sayıları göbekte 22 olacak şekilde yazalım, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28

Bu sayıların en küçüğü de 16 bulunur.

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki problemlerin sonuçlarını bulunuz.

➤ Yedi tane ardışık çift sayının toplamı 210 ise ortanca sayı kaçtır?

(30)

➤ Üç tane ardışık tek sayının toplamı 183 ise en küçük sayı kaçtır?

(59)

➤ Beş tane ardışık çift sayının toplamı 180 ise en büyük sayı kaçtır?

(40)

Nasıl Çözülür?



Örnek

$a > b > c$ ardışık tek tam sayılar olduğuna göre,

$$(a - b)^2 + (a - c)^3$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Ardışık tek sayılar arasındaki fark 2 olduğundan, a sayısı; b 'den 2, c 'den 4 fazladır.

Yani, $a - b = 2$ ve $a - c = 4$ 'tür.

$$\begin{aligned} (a - b)^2 + (a - c)^3 &= (2)^2 + (4)^3 \\ &= 4 + 64 = 68 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$a < b < c$ ve a, b, c ardışık çift tam sayılardır.

$$\frac{(b - a + 3) \cdot (c - a + 4)}{(c - b - 1)}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Bu tip sadeleştirme sorularında değer verebilirsiniz. Tabi ki değerler verilen şartlara uygun olmalı.

$a < b < c$ ise $2 < 4 < 6$ alalım.

$$\begin{aligned} &\frac{(b - a + 3) \cdot (c - a + 4)}{(c - b - 1)} \\ &= \frac{(4 - 2 + 3) \cdot (6 - 2 + 4)}{(6 - 4 - 1)} \\ &= \frac{5 \cdot 8}{1} = 40 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. $a < b < c$ ardışık tam sayılar olduğuna göre, aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow (b - a)^2 + (c - a)^3 \quad (9)$$

$$\rightarrow (b - c + 4)^3 + (a - c + 2)^2 \quad (27)$$

2. $a > b > c$ ardışık tek sayılar olduğuna göre, aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow (b - c)^4 + (c - a)^3 \quad (-48)$$

$$\rightarrow \frac{(b - a) \cdot (c - a)}{(c - b)} \quad (-4)$$

3. $a > b > c$ ardışık çift sayılar olduğuna göre, aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow (b - c) \cdot (a - b) \quad (4)$$

$$\rightarrow \frac{(b - a + 1) \cdot (c - a - 1)}{(c - b - 3)} \quad (-1)$$

Ne Bilmeliyim? 6

Ardışık Sayıların Toplamı

- a : ilk terim,
n : son terim,
r : artış miktarı olmak üzere;
 $a + (a + r) + (a + 2r) + \dots + n = T$ ise,

$$T = \left[\frac{n-a}{r} + 1 \right] \cdot \left[\frac{n+a}{2} \right]$$

formülü sonlu toplam formülüdür.

- Ardışık terimlerinin farkı sabit olan ardışık sayı dizilerinin terim sayısı

$$\left[\frac{n-a}{r} + 1 \right] \text{ dir.}$$

- $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ (n : terim sayısı)
 $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n \cdot (n+1)$ (n : terim sayısı)
 $1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1 = n^2$ (n : terim sayısı)
şeklinde pratik olarak da hesaplanabilir.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$\rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + 30 = \frac{30 \cdot 31}{2} = 465 \quad (n = 30)$$

$$\rightarrow 2 + 4 + 6 + \dots + 40 = 20 \cdot 21 = 420 \quad (2n = 40 \Rightarrow n = 20)$$

$$\rightarrow 1 + 3 + 5 + \dots + 21 = 11^2 = 121 \quad (2n-1 = 21 \Rightarrow n = 11)$$

Örnek

16 + 18 + 20 + ... + 60 toplamının değerini bulalım.

Çözüm



Soruda çift sayılar toplamı var ancak çift sayılar ile ilgili formülü kullanabilmek için 2 den başlaması gerekiyor değil mi?

O halde,

$$\begin{aligned} A &= 2 + 4 + \dots + 14 + 16 + 18 + \dots + 60 \\ &= 30 \cdot 31 = 930 \text{ dur.} \\ (2n &= 60 \Rightarrow n = 30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 2 + 4 + \dots + 14 = 7 \cdot 8 = 56 \text{ dir.} \\ (2n &= 14 \Rightarrow n = 7) \end{aligned}$$

Buna göre,

$$\begin{aligned} A - B &= 16 + 18 + 20 + \dots + 60 \\ &= 930 - 56 = 874 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

21 + 23 + 25 + ... + 99 toplamının değerini bulalım.

Çözüm

İlk terim = a = 21, Son terim = n = 99 ve Artış miktarı = r = 2

$$\begin{aligned} 21 + 23 + 25 + \dots + 99 \\ &= \left[\frac{99-21}{2} + 1 \right] \cdot \left[\frac{91+21}{2} \right] \\ &= 40 \cdot 56 = 2240 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

5 + 12 + 19 + 26 + ... + 82 toplamının değerini bulalım.

Çözüm

İlk terim = a = 5, Son terim = n = 82 ve Artış miktarı = r = 7

$$\begin{aligned} 5 + 12 + 19 + 26 + \dots + 82 \\ &= \left[\frac{82-5}{7} + 1 \right] \cdot \left[\frac{82+5}{2} \right] \\ &= 12 \cdot \frac{87}{2} = 522 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

17 + 22 + 27 + ... + 57 toplamının değerini bulalım.

Çözüm

İlk terim = 17, Son terim = 57, Artış miktarı = 5

$$\begin{aligned} 17 + 22 + 27 + \dots + 57 \\ &= \left[\frac{57+17}{2} \right] \cdot \left[\frac{57-17}{5} + 1 \right] \\ &= 37 \cdot 9 = 333 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + 50$$

(1275)

$$\rightarrow 2 + 4 + 6 + \dots + 100$$

(2550)

$$\rightarrow 1 + 3 + 5 + \dots + 99$$

(2500)

$$\rightarrow 7 + 11 + 15 + \dots + 43$$

(250)

$$\rightarrow 6 + 8 + 10 + \dots + 28$$

(204)

$$\rightarrow 17 + 19 + 21 + \dots + 39$$

(336)

$$\rightarrow 11 + 18 + 25 + \dots + 81$$

(506)

$$\rightarrow -15 - 9 - 3 + \dots + 33 + 39$$

(120)

2. 98 ile 202 arasındaki çift sayıların toplamı kaçtır?

(7650)

Ne Bilmeliyim? 7

ASAL SAYILAR

1'den ve kendisinden başka pozitif tamsayı böleni (veya çarpanı) olmayan 1 den büyük doğal sayılara **asal sayı** denir.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ...

sayıları birer asal sayıdır.

- 2'den başka çift olan asal sayı yoktur.
- a asal sayısını $a = 1 \cdot a$ olarak yazmak sorularda işimizi kolaylaştırır.
- Aralarındaki fark 1 olan asal sayılar 3 ve 2'dir.
- En küçük asal sayı 2'dir.

ARALARINDA ASAL SAYILAR

1'den başka pozitif ortak böleni olmayan iki veya daha fazla pozitif tam sayıya aralarında **asal sayılar** denir.

- 1 bütün pozitif tam sayılar ile aralarında asaldır.
- İki sayının aralarında asal olabilmesi için bu sayıların bir tanesinin veya **her ikisinin de asal sayı olmasına gerek yoktur.**
 - 2 ve 5
 - 12 ve 25
 - 5, 10, 12
 - 1, 5, 11

- x ile y ve a ile b aralarında asal olmak üzere,

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \text{ ise } x = a \text{ ve } y = b \text{ dir.}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

a, b pozitif tam sayı olmak üzere,

$$a \cdot (b + 3) = 7$$

olduğuna göre, a + b yi bulalım.

Çözüm



7 asal bir sayı olduğundan 1.7 veya 7.1 şeklinde yazılabilir. İki taraftaki sayılarda birbiriyle eşitlersek.

$$a \cdot (b + 3) = 1 \cdot 7$$

a = 1 iken $b + 3 = 7$, $b = 4$ olduğundan

a = 7 iken $b + 3 = 1$, $b = -2 \notin \mathbb{Z}^+$ olur.

a = 1 ve b = 4 alınır.

a + b = 5 bulunur.

Örnek

a ve b doğal sayıdır.

$$(a - b) \cdot (a + b) = 29$$

olduğuna göre, a nın değerini bulalım.

Çözüm



29 asal bir sayı olduğundan mecburen $29 = 1 \cdot 29$ şeklinde yazılır.

$$(a - b) \cdot (a + b) = 1 \cdot 29$$

a - b = 1 ve a + b = 29 elde edilir.

$$a - b = 1$$

$$+ / a + b = 29$$

$$a - b + a + b = 1 + 29 \Rightarrow 2a = 30 \Rightarrow a = 15 \text{ bulunur.}$$

Örnek

x ve y aralarında asaldır.

$$x \cdot y = 30$$

olduğuna göre, (x, y) ikilisinin alabileceği değerleri bulalım.

Nasıl Çözülür?



Çözüm



Hadi çarpımları 30 olan ikilileri söyleyin bakalım. Ama söylediğiniz ikililerin aralarında asal olmasına dikkat edin.

(1, 30) (30, 1)
(2, 15) (15, 2)
(3, 10) (10, 3)
(5, 6) (6, 5)

Hocam (1, 30) diyoruz, siz yanına (30, 1) de yazıyorsunuz, aynı değil mi?



Koçum aslanım... İkili dediği için ikililerin yer değişmiş hallerini de almamız lazım.

Örnek

$x + 3$ ile $y - 4$ aralarında asaldır.

$$\frac{x + 3}{y - 4} = \frac{16}{18}$$

olduğuna göre, $x + y$ nin değerini bulalım.

Çözüm

Sol taraftaki sayıların aralarında asal olduğu verilmiş. Sağ taraftaki sayılarda aralarında asal olsaydı hayat ne kadar güzel olacaktı.



Dert etmeyin guzular, sizin için onları da sadeleştirir aralarında asal yaparız..

$$\frac{x + 3}{y - 4} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9} \text{ dur.}$$



Sadeleştirmeyi yaptıktan sonra artık, $x + 3$ 'ü sağ tarafın payı 8'e, $y - 4$ 'ü de sağ tarafın paydası 9'a eşitleyip işlemleri yapalım.

$$x + 3 = 8 \Rightarrow x = 5$$

$$y - 4 = 9 \Rightarrow y = 13 \text{ tür.}$$

Buna göre,

$$x + y = 5 + 13 = 18 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. a ve b asal sayılardır.

$$\rightarrow a + b = 5 \text{ olduğuna göre, } a \cdot b \text{ kaçtır?}$$

(6)

$$\rightarrow a \cdot b = 39 \text{ olduğuna göre, } a + b \text{ kaçtır?}$$

(16)

2. x, y, z asal sayılardır.

$$z = 17 \cdot (x - y)$$

olduğuna göre, $x + y + z$ toplamı kaçtır?

(22)

3. $(a + b)$ ile $(2a + b)$ sayıları aralarında asaldır.

$$\frac{a + b}{2a + b} = \frac{4}{5}$$

olduğuna göre, $a - b$ kaçtır?

(-2)

Ne Bilmeliyim? 8

FAKTÖRİYEL

1 den n ye kadar olan sayma sayılarının çarpımına n faktöriyel denir ve $n!$ şeklinde gösterilir.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \text{ dir.}$$

$$2! = 1 \cdot 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7 \cdot 6! = 7 \cdot 6 \cdot 5!$$

$$0! = 1 \text{ ve } 1! = 1 \text{ dir.}$$

$$n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! = \dots$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$\frac{9!}{7!} + \frac{7!}{5!}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\frac{9!}{7!} + \frac{7!}{5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!}$$

Faktöriyelleri tamamen açmadım, işime yarayacak kısmı açtım. Şimdi de sadeleştireyim.

$$= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 9 \cdot 8 + 7 \cdot 6 = 114 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$\frac{7! + 6!}{5!}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\frac{7! + 6!}{5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5! + 6 \cdot 5!}{5!} = \frac{42 \cdot 5! + 6 \cdot 5!}{5!} = \frac{48 \cdot 5!}{5!} = 48 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$A = 7 \cdot 5!$$

olduğuna göre, $7! + 6! + 5!$ toplamının A türünden eşitini bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} 7! + 6! + 5! &= 7 \cdot 6 \cdot 5! + 6 \cdot 5! + 5! = 5! \cdot (7 \cdot 6 + 6 + 1) \\ &= 5! \cdot (7 \cdot 6 + 7) = 5! \cdot 7 \cdot (6 + 1) \\ &= 7 \cdot (7 \cdot 5!) = 7 \cdot A \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow 4 \cdot 3! + 5!$$

(144)

$$\rightarrow 15! + 16!$$

(17 \cdot 15!)

$$\rightarrow 9! - 8!$$

(8 \cdot 8!)

$$\rightarrow \frac{9!}{8!} + \frac{10!}{9!} + \frac{11!}{10!}$$

(30)

$$\rightarrow \frac{12! + 11!}{12! - 11!}$$

 $\left(\frac{13}{11}\right)$

2. $a = 4!$ olmak üzere,

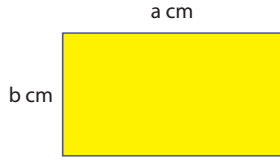
$$6! + 5! - 4!$$

ifadesinin a türünden değeri bulunuz.

(34a)

Sayı Kümeleri

1. a ve b tam sayı olmak üzere,



şeklinde verilen dikdörtgen kartonun çevresi 30 cm'dir.

Buna göre, bu kartonun alanı en fazla kaç santimetre-kare olabilir?

- A) 56 B) 45 C) 44 D) 36 E) 30

2. 1, 2, 3, 4 ve 5 sayılarının her biri birer kez kullanılarak, aralarında toplama, çıkarma ve çarpma işlemi bulunan şekildeki beş kutuya yerleştirildiğinde gösterilen eşitlik elde ediliyor.

$$\square + \square \times \square - \square = \square$$

Buna göre, eşitliğin sağ tarafındaki kutuya yazılacak sayı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. Bir torbada bulunan bilyelerden, x tane çocuğa 10'ar bilye, y tane çocuğa 15'er bilye verildikten sonra bilye almayan çocuk kalmamıştır.

Torbadaki toplam 600 tane bilyenin tamamı dağıtıldığına göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

- A) x tek sayıdır.
B) y çift sayıdır.
C) Toplam çocuk sayısı çifttir.
D) Toplam çocuk sayısı tektir.
E) x çift ise y tek sayıdır.

4. Aşağıdaki şekilde, 4 x 4'lük kare biçimli tabloya sayılar yerleştirilmiştir.

-9	8	-7
11	-6	4
2	-5	3

Tablo üzerinde, sağa - sola ve aşağı - yukarı hareket edebilen ve her yöne dödürülebilen bir çerçeve bulunmaktadır.

Buna göre, bu tablo üzerinde hareket ettirilen çerçeve içindeki üç sayının toplamının en büyük değeri en küçük değerinden kaç fazladır?

- A) 1 B) 5 C) 10 D) 13 E) 22

- 5.



Ferit, yukarıdaki bilgisayarına koyduğu şifredeki rakamları hatırlamamaktadır. Ferit şifre ile ilgili aşağıdakileri hatırlamaktadır:

- Şifre çift sayıdır.
- Şifredeki tüm rakamların toplamı tek sayıdır.
- Şifredeki tek sayı rakamlar birbirinden farklıdır.

Buna göre, kilidin şifresi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 784552 B) 658470 C) 387548
D) 287641 E) 968753

Sayı Kümeleri

6. Bir kuyrukta duran Akif, Ömer ve Tark'ın baştan kaçınıcı sırada oldukları ile ilgili aşağıdakiler bilinmektedir.

- Akif ile Ömer'in arasındaki kişi sayısı tektir.
- Akif ile Tark'ın arasındaki kişi sayısı çifttir.

Buna göre Akif, Ömer ve Tark'ın bulunduğu sıra sayıları aşağıdakilerden hangisi olabilir?

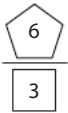
	Akif	Ömer	Tark
A)	13	24	5
B)	8	20	33
C)	17	7	21
D)	3	12	19
E)	10	5	7

7. İçinde bir A doğal sayısının yazılı olduğu n kenarlı çokgen sembolünün değeri,

$$\frac{A!}{n!} \text{ olarak tanımlanmıştır.}$$

Örnek: $\triangle_5 = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$ dir.

Buna göre,



bölümünün değeri kaçtır?

- A) 24 B) 30 C) 120 D) $\frac{1}{24}$ E) $\frac{1}{120}$

- 8.

1. sıra $\rightarrow$

2	6	10

 ...

A	B	C

 ...

2. sıra $\rightarrow$

4	8	12

 ...

K	L	M

 ...

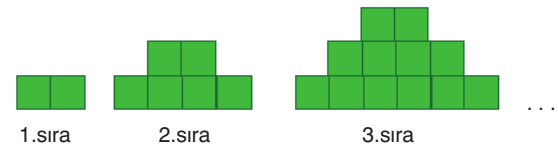
Yukarıdaki şekilde 1. ve 2. sırada çizilen eşit sayıdaki kutular karşılıklı olarak yukarıdaki gibi belli bir düzende çift sayılar ile numaralandırılmıştır.

$$A + B + C = 90$$

olduğuna göre, $K + L - M$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 22 B) 24 C) 26 D) 28 E) 30

9. Özdeş koliler belli bir kurala göre üst üste konularak sırayla aşağıdaki şekiller elde ediliyor.

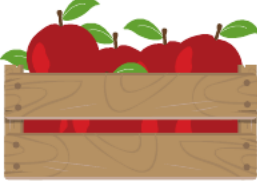


Bu şekilde koliler üst üste konulmaya devam edildiğinde 10. sıradaki şekilde toplam kaç koli olur?

- A) 182 B) 154 C) 132 D) 130 E) 110

Sayı Kümeleri

1. Kilo fiyatları aşağıda gösterilen elma ve portakalın herbirinden belirli miktarda alan bir manav, bu alışveriş için toptancıya 350 TL ödemiştir.



Kilosu 5 TL

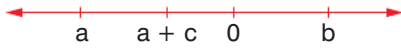


Kilosu 7 TL

Bu manav her birinden en az 10'ar kilo aldığına göre en çok kaç kilo elma almış olabilir?

- A) 35 B) 42 C) 49 D) 56 E) 63

2.



Yukarıda verilen sayı doğrusundaki sayılara göre,

- I. $c > 0$
 II. $b + c > 0$
 III. $a + b > 0$

İfadelerinden hangileri kesinlikle doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
 D) I ve II E) I ve III

3. a, b ve c gerçel sayıları için

$$-b < 0 < -a < c$$

eşitsizliği veriliyor.

Buna göre,

- I. $a \cdot b \cdot c < 0$
 II. $(b + c) \cdot a < 0$
 III. $a + b > 0$

İfadelerinden hangileri her zaman doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II
 D) I ve III E) II ve III

4.

$$\boxed{} - \boxed{} \times \boxed{} + \boxed{}$$

Yukarıda verilen kutuların her birine birbirinden farklı çift rakamlar yazılarak toplama, çarpma ve çıkarma işlemleri uygulanıyor.

Buna göre, bu işlem sonucunda elde edilen en büyük değer kaçtır?

- A) 14 B) 28 C) 36 D) 42 E) 54

Sayı Kümeleri

5. a pozitif tam sayı olmak üzere,

$$a = \begin{cases} a + 1 & , \quad a \text{ asal sayı değil ise} \\ a - 4 & , \quad a \text{ asal sayı ise} \end{cases}$$

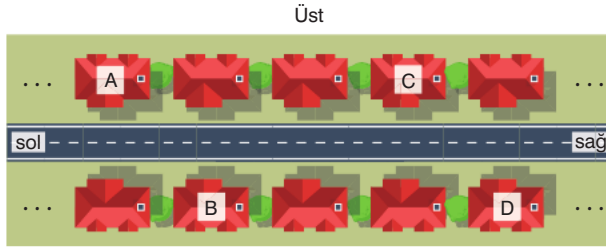
biçiminde tanımlanan işleme göre,

$$\boxed{37}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 33 B) 34 C) 39 D) 40 E) 41

6. Bir sokakta, yolun üst tarafındaki evler ardışık tek sayılarla, alt tarafındaki evler ise ardışık çift sayılarla numaralandırılmıştır. Numaralar soldan sağa doğru artmaktadır.



A ve B evlerinin numaraları için $A - B = 25$ olduğuna göre, C ve D evlerinin numaraları için $C - D$ farkı kaçtır?

- A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

7. $\blacksquare$, $\blacktriangle$, $\star$ ve $\star$

sembolleri, küçükten büyüğe doğru sıralı ardışık dört çift sayıyı göstermektedir.

$$\blacksquare + \blacktriangle + \star - \star = 32$$

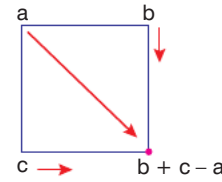
olduğuna göre,

$$\star + \star$$

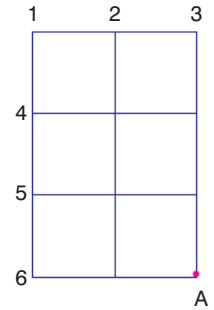
işleminin sonucu kaçtır?

- A) 46 B) 42 C) 38 D) 34 E) 30

- 8.



Şekil - 1



Şekil - 2

Bir karenin sağ alt köşesindeki sayı, Şekil - 1'deki kurala göre bulunmaktadır.

Şekil - 2'deki tablo bu kurala göre doldurulduğunda, A değeri kaç bulunur?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

BÖLÜM 5

ÖĞRENELİM

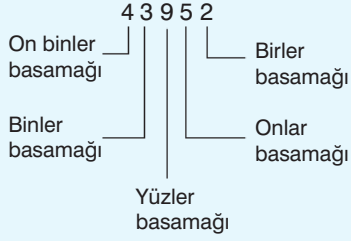
SAYI BASAMAKLARI Sayı Basamakları

Ne Bilmeliyim? 1

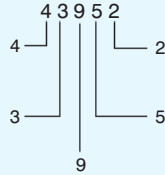


Basamak Kavramı

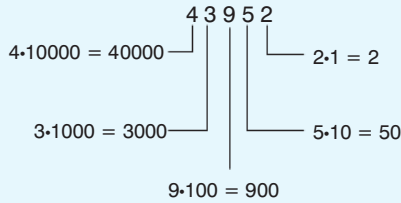
- Bir doğal sayının rakamlarının her birinin bulunduğu yere **basamak** denir.



- Her basamaktaki rakamın bulunduğu basamaktan bağımsız olarak gösterdiği değere **sayı değeri** denir.



- Rakamların bulundukları basamaklara göre aldığı değere **basamak değeri** denir.



Metin olarak ifade edilen bir sayıyı bulurken önemli olan işin hikaye kısmını iyi anlamaktır. Söylenenleri dikkatlice okuyup uygulamak gerekir. Bunun için özellikle aşağıdakilere dikkat edin.

- ✓ Sayının kümesine,
- ✓ Tam sayılardan bahsediliyorsa negatif tam sayılarda unutmamaya,

- ✓ Sayının kaç basamaklı olduğuna,
- ✓ İşaretinin söylenip söylenmediğine,
- ✓ Pozitif tam sayılarda en büyük sayı yazılacaksa en soldaki basamağa 9 yazmaya,
- ✓ Pozitif tam sayılarda en küçük pozitif sayı yazılacaksa en soldaki basamağa 1 yazmaya,
- ✓ Rakamların farklı olup olmadığına,
- ✓ Bunların dışında özel şartların olup olmadığına dikkat edilmelidir.

Nasıl Çözülür?



- ✓ İki basamaklı en büyük tam sayı (99)
- ✓ İki basamaklı en küçük doğal sayı (10)
- ✓ İki basamaklı rakamları farklı en büyük tam sayı (98)
- ✓ İki basamaklı en büyük negatif tam sayı (-10)
- ✓ İki basamaklı en küçük tam sayı (-99)
- ✓ İki basamaklı rakamları farklı en büyük tek doğal sayı (97)
- ✓ Üç basamaklı rakamları farklı en büyük tam sayı (987)
- ✓ Üç basamaklı rakamları farklı en küçük pozitif tam sayı (102)
- ✓ Rakamları farklı altı basamaklı en küçük tek tam sayı. (102345)

Nasıl Çözülür?



Örnek

Rakamları farklı dört basamaklı en büyük doğal sayının, üç basamaklı en küçük tam sayıdan kaç fazla olduğunu bulalım.

Çözüm

Rakamları farklı, dört basamaklı en büyük doğal sayı 9876'dır.
Üç basamaklı en küçük tam sayı - 999'dur.



Üç basamaklı sayıda rakamların farklı olduğu ve pozitif olduğu söylenmiyor dikkat ettiniz mi?

$$9876 - (-999) = 9876 + 999 = 10875 \text{ bulunur.}$$

Örnek

Üç basamaklı bir sayı ile iki basamaklı bir sayının arasındaki farkın en az kaç olabileceğini bulalım.

Çözüm



Guzular, rakamları farklı olsun denilmediğini fark etmişsinizdir.



İki sayının farkının en küçük değerini alması için ilk sayının olabildiğince küçük, çıkan sayının ise olabildiğince büyük değer seçilmesi gerekir, değil mi?

Tabii ki, hocam.



Verilenlere göre üç basamaklı en küçük sayı - 999, iki basamaklı en büyük sayı ise 99'dur.

Buna göre, bu sayılar arasında ki fark da en az,

$$(-999) - (99) = -1098 \text{ olabilir.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıda belirtilen sayıları bulunuz.

→ Üç basamaklı en büyük doğal sayı.

(999)

→ Dört basamaklı en küçük tam sayı.

(-9999)

→ Beş basamaklı en büyük negatif tam sayı.

(-10000)

→ Rakamları farklı üç basamaklı en küçük tam sayı.

(-987)

→ Rakamları farklı dört basamaklı en büyük pozitif çift tam sayı.

(9876)

→ Rakamları farklı dört basamaklı en küçük tek doğal sayı.

(1023)

2. Rakamları farklı, üç basamaklı en büyük tek tam sayı ile rakamları farklı, iki basamaklı en büyük negatif çift tam sayının toplamını bulalım.

(977)

3. Rakamlar kümesinin elemanları birer kez kullanılarak yazılabilen rakamları farklı, beş basamaklı iki sayının toplamının en az kaç olacağını bulalım.

(34047)

Sayı Basamakları

Nasıl Çözülür?



Örnek

0, 1, 3, 5, 7, 9 rakamlarının her biri birer defa kullanılarak yazılan ABC ve DEF üç basamaklı doğal sayılarının toplamının en küçük değerini bulalım.

Çözüm



Önce bize nasıl şartlar konulmuş onları bir anlayalım.



Sayıların ikisi de olabildiğince küçük olacak, Sayıların küçük olabilmesi için, sayılardan birinin yüzler basamağına 1, diğerinin yüzler basamağına 3 gelmesi gerekir. (0 gelirse sayı 3 basamaklı olmaz). Başka...

Hocam, bir de rakamların her biri bir kere kullanılacak.



Güzel, o halde bu şartlara uygun yazılabilecek en küçük sayılarımız 109 ve 357 olur.

Bu sayıların toplamı da, $109 + 357 = 466$ bulunur.

Hocam, 107 ile 359 alsak da olurdu demi.



Bravo. Tabiki ve cevap yine 466 olurdu.

Örnek

2, 3, 4, 5, 6 rakamları kullanılarak, rakamları farklı beş basamaklı ABCDE sayısı yazılacaktır.

$$A \cdot B = D \cdot E$$

şartını sağlayan en büyük ABCDE sayısının kaç olduğunu bulalım.

Çözüm



Verilen sayılara şöyle alıcı gözüyle bir baktığınızda çarpımları eşit sayıları bulmuşsunuzdur herhalde. Bulamadıysanız zararı yok ben bunun için burdayım.

$$6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ olduğundan}$$

$$A \cdot B = C \cdot D \text{ eşitliğinde}$$

$$A = 6, B = 2, D = 4, E = 3 \text{ için,}$$

ABCDE en büyük değeri 62543 olarak bulunur.

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıda belirtilen sayıları bulunuz.

- 0, 1, 3, 6, 7, 9 rakamlarının her biri birer defa kullanılarak yazılan ABC ve DEF üç basamaklı doğal sayılarının toplamının en küçük değeri kaçtır?

(476)

- 1, 2, 4, 5, 9 rakamlarının her biri birer defa kullanılarak yazılan en küçük çift tam sayı değeri kaçtır?

(-95412)

- 1'den 6'ya kadar olan rakamların her biri birer defa kullanılarak yazılan AB, CD ve EF iki basamaklı doğal sayılarının toplamının en büyük değeri kaçtır?

(156)

- 0'dan 5'e kadar olan rakamların her biri birer defa kullanılarak yazılan AB, CD ve EF iki basamaklı doğal sayılarının toplamının en büyük değeri kaçtır?

(123)

Nasıl Uygularım?



2. Aşağıda belirtilen şartlara uygun iki basamaklı AB sayılarını bulunuz.

$$\rightarrow A = B + 4$$

(40, 51, 62, 73, 84, 95)

$$\rightarrow A = 3 \cdot B - 4$$

(22, 53, 84)

$$\rightarrow 3A = 4B$$

(43, 86)

3. Aşağıda belirtilen şartlara uygun üç basamaklı ABC sayılarını bulunuz.

$$\rightarrow A + B + C = 2$$

(101, 110, 200)

$$\rightarrow A = B + 1 = C - 7$$

(108, 219)

$$\rightarrow A \cdot B \cdot C = 3$$

(113, 131, 311)

$$\rightarrow 2 > A \geq B \geq C$$

(111, 110, 100)

4. 1, 4, 5, 6, 8 rakamlarını kullanarak yazılan, rakamları birbirinden farklı, beş basamaklı KADEM sayısında $K + A = E + M$ dir.

Bu koşulları sağlayan kaç tane beş basamaklı KADEM sayısı vardır?

(8)

Sayı Basamakları

Nasıl Çözülür?



Örnek

Rakamları farklı üç basamaklı dört doğal sayının toplamı 458 dir.

Bu sayılardan en büyüğünün en çok kaç olabileceğini bulalım.

Çözüm



Bu sayıların en büyüğü K olsun. K'nın en büyük değerine ulaşması için diğer sayıların olabildiğince küçük olması gerekir. Doğru mu? Tabii ki.



Verilen şartlar neydi? Üç basamaklı ve rakamları birbirinden farklı olacak (🔔) sayılar farklı demiyor, rakamları birbirinden farklı diyor).

Bu şartlara göre, sayıların her üçü de 102 alınabilir.

Sayıların toplamı da 458 olacaktı.

O halde,

$$K + 102 + 102 + 102 = 458 \Rightarrow K \text{ en çok } 152 \text{ bulunur.}$$

Örnek

60 tan küçük birbirlerinden farklı, iki basamaklı beş doğal sayının toplamı 250 dir.

Bu sayılardan en küçüğünün en az kaç olabileceğini bulalım.

Çözüm



Bu sayıların en küçüğü en az K olsun. K'nın en küçük değerini alması için diğer sayıların olabildiğince büyük olması lazım. Fakat sayılarda 60'tan küçük ve birbirinden farklı olacak.



O halde bizim aradığımız sayılar 59, 58, 57, 56 olacaktır. Toplamları da 250 olacaktı.

$$K + 59 + 58 + 57 + 56 = 250$$

$$\Rightarrow K = 20 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Rakamları farklı üç basamaklı birbirlerinden farklı dört doğal sayının toplamı 963 tür.

Bu sayıların en büyüğü en çok kaç olabilir?

(654)

2. Üç tanesi 50 den büyük birbirinden farklı beş doğal sayının toplamı 245 olduğuna göre, bu sayıların en büyüğü en çok kaç olabilir?

(141)

İPUCU

En küçük sayıyı bir daha düşünün sayıların hepsi iki basamaklı olmak zorunda değil.

3. İki basamaklı, rakamları birbirinden farklı 3 farklı pozitif tam sayının toplamı 217 dir.

Bu sayıların, en küçüğü en az kaç olabilir?

(23)

İPUCU

Rakamları farklı şartına dikkat ediyorsunuz değil mi?

4. Üç tanesi 35 den küçük iki basamaklı, birbirlerinden farklı, beş pozitif tek tam sayının toplamı 273 tür.

Bu sayıların en küçüğü en az kaçtır?

(13)

İPUCU

Rakamları farklı demiyor. Sayılar farklı diyor. Şartları iyice okuyun.

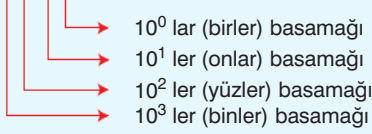
Ne Bilmeliyim? 2

ÇÖZÜMLEME

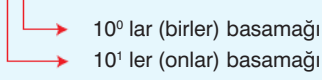


Sıra geldi bir sayının rakamlarının basamak değerlerinin toplamı şeklinde yazılmasına. Bu işleme sayının çözümlenmesi diyoruz.

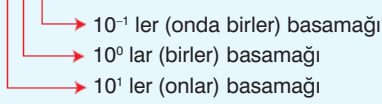
$$a b c d = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d \cdot 10^0$$



$$54 = 5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$



$$73,2 = 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1}$$



- ab, aa, abc, aaa ve abcd sırasıyla iki, üç ve dört basamaklı sayılar olmak üzere,

$$ab = 10 \cdot a + b$$

$$aa = 10 \cdot a + a = 11 \cdot a$$

$$abc = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$$

$$aaa = 100 \cdot a + 10 \cdot a + a = 111 \cdot a$$

$$abcd = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$$

Nasıl Çözülür?



1. Aşağıdaki işlemlerdeki sayıları çözümlyerek sonuçlarını bulalım.

$$\checkmark ab + a = 10 \cdot a + b + a = 11 \cdot a + b$$

$$\checkmark ab - a = 10 \cdot a + b - a = 9 \cdot a + b$$

$$\checkmark ab + ba = 10 \cdot a + b + 10 \cdot b + a = 11 \cdot a + 11 \cdot b = 11(a + b)$$

$$\checkmark ab - ba = (10 \cdot a + b) - (10 \cdot b + a) = 10 \cdot a + b - 10 \cdot b - a = 9 \cdot a - 9 \cdot b = 9 \cdot (a - b)$$

$$\checkmark abc - cba = (100 \cdot a + 10 \cdot b + c) - (100 \cdot c + 10 \cdot b + a) = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c - 100 \cdot c - 10 \cdot b - a = 99 \cdot a - 99 \cdot c = 99 \cdot (a - c)$$

Örnek

ABC üç basamaklı bir sayı ve

$$ABC - (A + B + C) = 513$$

olduğuna göre, A + B nin değerini bulalım.

Çözüm

Hocam... Hocam... Bir denklemin içerisinde iki basamaklı üç basamaklı sayı varsa o sayıyı çözümllemeliyiz değil mi? Öyle hatırlıyorum.



Çok doğru söyledin Zeynep. Aferini hak ettin.

$$ABC - (A + B + C) = 513$$

$$\Rightarrow 100 \cdot A + 10 \cdot B + C - A - B - C = 513$$

$$\Rightarrow 99 \cdot A + 9 \cdot B = 513$$

Nasıl Çözülür?



Eşitliğin sağlanması için,

$$\begin{array}{r} 513 \overline{) 99} \\ - 495 \quad 5 = A \\ \hline 18 \end{array} \quad \begin{array}{r} 18 \overline{) 9} \\ - 18 \quad 2 = B \\ \hline 0 \end{array}$$



Değer vermek uzun olur. Onun yerine en büyük katsayıdan başlayarak yukarıdaki şekilde bölme yapmak en iyisi.

Bölme işlemine göre,

$A = 5$ ve $B = 2$ olmalıdır.

O halde,

$A + B = 5 + 2 = 7$ bulunur.

Örnek

Üç basamaklı $4ab$ sayısı iki basamaklı ba sayısının 13 katından 7 fazladır.

Buna göre, iki basamaklı ba sayısını bulalım.

Çözüm

Verilenlere göre önce bir denkleminizi yazalım,

$$4ab = 13 \cdot ba + 7$$



Şimdi ne yapıyoruz? Tuğba doğru söyledi $4ab$ ve ba yı çözümlerimiz bakalım.

$$4ab = 13 \cdot ba + 7 \Rightarrow 400 + 10 \cdot a + b = 13 \cdot (10 \cdot b + a) + 7$$

$$\Rightarrow 393 + 10 \cdot a + b = 130 \cdot b + 13 \cdot a$$

$$\Rightarrow 393 = 129 \cdot b + 3 \cdot a$$

Eşitliğin sağlanması için,

$$\begin{array}{r} 393 \overline{) 129} \\ - 387 \quad 3 = b \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \overline{) 3} \\ - 6 \quad 2 = a \\ \hline 0 \end{array}$$

Bölme işlemine göre,

$b = 3$ ve $a = 2$ olmalıdır.

O halde, iki basamaklı ba sayısının değeri 32 bulunur

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıda verilen sayıları çözümleyiniz.

→ aba

$$(101a + 10b)$$

→ $4ba$

$$(400 + 10 \cdot b + a)$$

→ $a3a$

$$(101a + 30)$$

→ $ab4c$

$$(1000a + 100b + c + 40)$$

→ 8745

$$(8 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0)$$

→ 1ab,23

$$(1 \cdot 10^2 + a \cdot 10^1 + b \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2})$$

Nasıl Uygularım?



2. Aşağıdaki işlemlerdeki sayıları çözümleyerek sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow aaa + aa$$

$$(122 \cdot a)$$

$$\rightarrow abc - bc$$

$$(100 \cdot a)$$

$$\rightarrow 1a3 + 4a$$

$$(143 + 11 \cdot a)$$

$$\rightarrow ab5 - a2$$

$$(90 \cdot a + 10 \cdot b + 3)$$

$$\rightarrow ab - ba + a + b$$

$$(10a - 8b)$$

3. Aşağıdaki verilere göre, istenilen değeri bulunuz.

$$\rightarrow AB - BA = 45 \text{ ise } A - B = ?$$

(5)

$$\rightarrow 4A + A2 = 75 \text{ ise } A = ?$$

(3)

$$\rightarrow ABC - BAC = 450 \text{ ise } A - B = ?$$

(5)

$$\rightarrow AB + A + B = 59 \text{ ise } A + B = ?$$

(7)

Nasıl Uygularım?



→ $BAC - BA = 247$ ise $A + B + C = ?$

(13)

5. A3B ve B3A üç basamaklı sayılardır.

$$A3B + B3A = 1474$$

olduğuna göre, $A + B$ toplamı kaçtır?

(14)

→ $ABC + AC = 136$ ise $A + B + C = ?$

(6)

6. Üç basamaklı ABC sayısı iki basamaklı AB sayısından 375 fazladır.

Buna göre, $C - A + B$ kaçtır?

(3)

4. abc, bca ve cab üç basamaklı sayılardır.

$$abc + bca + cab = 777$$

olduğuna göre, $a + b + c$ toplamı kaçtır?

(7)

7. Üç basamaklı ab4 sayısı iki basamaklı ab sayısının 7 katından 46 fazladır.

Buna göre, ab doğal sayısı kaçtır?

(14)

Nasıl Uygularım?



8. Dört basamaklı ABC0 sayısı iki basamaklı AB0 sayısından 3250 fazladır.

Buna göre, $A + B + C$ toplamı kaçtır?

(10)

9. Üç basamaklı ABC ve iki basamaklı AB sayılarının toplamı 580 dir.

Buna göre, $A \cdot B \cdot C$ çarpımının sonucu kaçtır?

(80)

10. ab ve ba iki basamaklı doğal sayılar olmak üzere,

$$\frac{(ab + ba) \cdot (ab - ba)}{a + b} = 198$$

olduğuna göre, ab nin en büyük değeri kaçtır?

(97)

11. ABC ve CBA üç basamaklı doğal sayılardır.

Buna göre, $ABC - CBA$ farkı aşağıdakilerden hangisi ola-
maz?

- A) 99 B) 198 C) 295 D) 297 E) 396

(C)

12. Sıfırdan ve birbirinden farklı K, L ve M rakamlarının yerleri değiştirilerek elde edilen rakamları farklı iki basamaklı 6 sayı toplanıyor.

Bu toplamla ilgili aşağıdaki ifadelerden hangisi daima
doğrudur?

- A) 33 ün katı bir sayıdır.
B) 22 nin katı bir sayıdır.
C) 9 un katı bir sayıdır.
D) 6 nın katı bir sayıdır.
E) 5 in katı bir sayıdır.

(B)

Sayı Basamakları

Nasıl Çözülür?



Örnek

İki basamaklı bir doğal sayısının sağına 2 yazılarak, üç basamaklı A sayısı, aynı sayının soluna 5 yazılarak üç basamaklı B sayısı elde edilmiştir.

A + B = 975 olduğuna göre, iki basamaklı sayının rakamlarının toplamını bulalım.

Çözüm



Sağını solunu karıştıran var mı? İyi en azından bu kısmı kolay geçtik.

Önce iki basamaklı sayımızı yazalım; KL olsun.

Sağına 2 yazıp A yı bulalım; $A = KL2$

Soluna 5 yazıp B yi bulalım; $B = 5KL$

Denklemden yerlerine yazalım.

$$A + B = 975 \Rightarrow KL2 + 5KL = 975$$

$$\Rightarrow 100 \cdot K + 10 \cdot L + 2 + 500 + 10 \cdot K + L = 975$$

$$\Rightarrow 110 \cdot K + 11 \cdot L + 502 = 975$$

$$\Rightarrow 110 \cdot K + 11 \cdot L = 473$$

$$\begin{array}{r|l} 473 & 110 \\ -440 & 4 \\ \hline & 33 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 33 & 11 \\ -33 & 3 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Bölme işlemlerine göre,

$$K = 4 \text{ ve } L = 3 \Rightarrow K + L = 4 + 3 = 7 \text{ bulunur.}$$

Örnek

Her biri en az dört basamaklı dört pozitif tam sayının onlar basamağındaki rakam 4 küçültülür, yüzler basamağındaki rakam 5 büyütülür, binler basamağındaki rakam 1 küçültülürse, bu beş sayının toplamının nasıl değişeceğini bulalım.

Çözüm

Onlar basamağındaki rakam 4 küçültülürse sayı; $4 \cdot 10 = 40$ azalır.

Yüzler basamağındaki rakam 5 büyütülürse sayı; $5 \cdot 100 = 500$ artar.

Binler basamağındaki rakam 1 küçültülürse sayı; $1 \cdot 1000 = 1000$ azalır.



Bunların hepsini bir sayıya uygularsak sayıdaki değişimin ne olacağını hesaplayalım.

$$\text{Bir tane sayı : } -1000 + 500 - 40 = -540 \text{ (azalır.)}$$

$$\text{Beş tane sayının toplamı : } (-540) \cdot 5 = -2700 \text{ (azalır.)}$$

Nasıl Uygularım?



1. Bir rakamın sağına 7 yazılarak iki basamaklı A sayısı, aynı rakamın soluna 3 yazılarak iki basamaklı B sayısı elde edilmiştir.

A + B = 92 olduğuna göre, bu rakam kaçtır?

(5)

2. Üç basamaklı bir doğal sayının sağına 7 yazılarak dört basamaklı A sayısı, aynı sayının soluna 3 yazılarak dört basamaklı B sayısı elde edilmiştir.

A - B = 949 olduğuna göre, üç basamaklı sayının rakamlarının toplamı kaçtır?

(15)

3. Her biri en az iki basamaklı olan 8 tane sayı vardır.

Bunlardan her birinin birler basamağındaki rakam sayısal değeri bakımından 2 büyütülür, onlar basamağındaki rakam 2 küçültülürse bu 8 sayının toplamı ne kadar azalır?

(144)

Ne Bilmeliyim? 3

Çarpma İşlemi

$$\begin{array}{r}
 \dots \rightarrow \text{I. çarpan} \\
 \times \quad KLM \rightarrow \text{II. çarpan} \\
 \hline
 \dots \rightarrow \text{I. çarpım} \\
 \dots \rightarrow \text{II. çarpım} \\
 + \quad \dots \rightarrow \text{III. çarpım} \\
 \hline
 \dots \rightarrow \text{Sonuç}
 \end{array}$$

- ✓ I. çarpan x II. çarpan = Sonuç
- ✓ Sonuç ÷ II. çarpan = I. çarpan
- ✓ Sonuç ÷ I. çarpan = II. çarpan
- ✓ I. çarpan x M = I. çarpım $\Rightarrow$ I. çarpan = I. çarpım ÷ M
- ✓ I. çarpan x L = II. çarpım $\Rightarrow$ I. çarpan = II. çarpım ÷ L
- ✓ I. çarpan x K = III. çarpım $\Rightarrow$ I. çarpan = III. çarpım ÷ K

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıda çarpma işlemlerinde boş bırakılan yerlerdeki sayıları bulunuz.

$$\begin{array}{r}
 \rightarrow \quad 342 \\
 \times \quad 45 \\
 \hline
 1710 \\
 + \quad \dots \\
 \hline
 15390
 \end{array}$$

(1368)

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$\begin{array}{r}
 48 \\
 \times \quad ab \\
 \hline
 \dots \\
 + 192 \\
 \hline
 \dots
 \end{array}$$

Yukarıdaki çarpma işlemine göre, a + b'nin değerini bulalım.

Çözüm

$$\begin{array}{r}
 48 \\
 \times \quad ab \\
 \hline
 240 \rightarrow 1. \text{ çarpan} = b \cdot 48 = 240 \Rightarrow b = 5 \text{ dir.} \\
 + 192 \rightarrow 2. \text{ çarpan} = a \cdot 48 = 192 \Rightarrow a = 4 \text{ tür.} \\
 \hline
 \dots
 \end{array}$$

Buna göre,

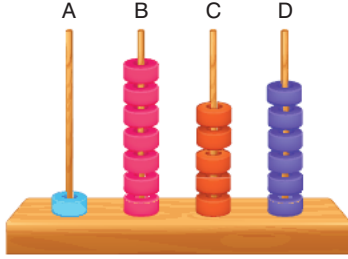
$$a + b = 4 + 5 = 9 \text{ bulunur.}$$

$$\begin{array}{r}
 \rightarrow \quad 579 \\
 \times \quad 37 \\
 \hline
 \dots \\
 + 1737 \\
 \hline
 21423
 \end{array}$$

(4053)

Sayı Basamakları

1.

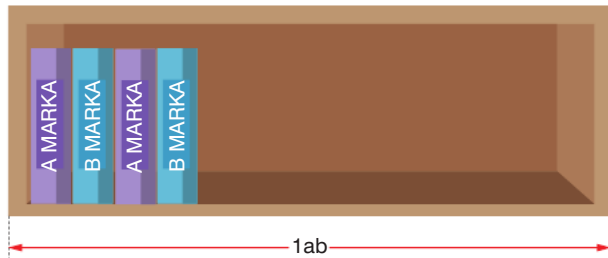


Şekildeki düzenekte 1756 sayısı gösterilmiştir.

Bu düzenekte B çubuğundan iki halka alınıp A çubuğuna, C çubuğundan üç halka alınıp D çubuğuna takılırsa, yeni oluşan sayı 1756 sayısından kaç fazla olur?

- A) 1693 B) 1773 C) 1896
D) 2104 E) 2142

2.



Bir tanesinin kalınlığı a cm olan özdeş 12 tane A marka deterjan ile, bir tanesinin kalınlığı b cm olan özdeş 11 tane B marka deterjan; genişliği üç basamaklı 1ab sayısı olan bir rafa, hiç boşluk kalmayacak şekilde dizilebilmektedir.

Buna göre, $a + b$ toplamının değeri kaçtır?

- A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

3.



Bayburt'a doğru giden bir araç, A noktasında iken kilometre sayacı $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 4 & a & 8 & 5 \\ \hline \end{array}$ sayısını, B noktasına geldiğinde ise $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 4 & 5 & b & 7 \\ \hline \end{array}$ sayısını göstermektedir.

Buna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

4.

A, B ve C birbirinden farklı rakamlardır.

Üç basamaklı ACA, ABC, BAC, BAA doğal sayıları

$$ACA < ABC$$

$$BAA < BAC$$

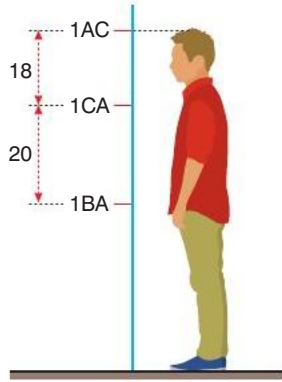
eşitsizliklerini sağlamaktadır.

Buna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

- A) $A < B < C$ B) $B < A < C$
C) $C < A < B$ D) $C < B < A$
E) $A < C < B$

Sayı Basamakları

5. Umut, beşer yıl arayla boyunu duvarın hizasında ölçüyor ve duvarı şekildeki gibi işaretleyip santimetre cinsinden üç basamaklı doğal sayılar olarak yazıyor.



Umut'un boyunun ilk beş yıl 20 cm, ikinci beş yıl 18 cm uzadığı biliniyor.

A, B ve C sıfırdan farklı rakamlar olduğuna göre, $A + B + C$ toplamı en az kaçtır?

- A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 21

6. ABCD dört basamaklı bir doğal sayı olmak üzere,

$$\overrightarrow{(ABC)} = BAC$$

$$\overleftarrow{(ABC)} = CBA$$

işlemleri tanımlanıyor.

$$\overrightarrow{(132)} + \overleftarrow{(4K6)} = 97K$$

olduğuna göre, K'nın değeri kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

7. Rakamları toplamı yine rakam olan iki basamaklı rakamları farklı kaç doğal sayı vardır?

- A) 35 B) 36 C) 41 D) 43 E) 48

- 8.



345 TL



740 TL



485 TL

Ahmet'in internet üzerinden satış yapan bir alışveriş sitesinden alacağı üç ürünün TL üzerinden fiyatları yukarıda belirtilmiştir.



Ahmet, alacağı bu ürünlerin toplam fiyatını hesap makinesiyle yanlış işlem yaparak, 1915 TL olarak buluyor.

Buna göre, Ahmet aşağıdaki hatalardan hangisini yapmıştır?

- A) Fiyatlardan birini iki kere yazmıştır.
B) Gömleğin fiyatındaki 3 rakamını 8 olarak yazmıştır.
C) Pantolonun fiyatındaki 8 rakamını 0 olarak yazmıştır.
D) Fiyatlardan birinin onlar basamağındaki rakamını 5 fazla yazmıştır.
E) Üç fiyattan birini eklemeyi unutmuştur.

9. 1, 2 veya 4 rakamları kullanılarak yazılan iki basamaklı bir doğal sayının rakamlarının toplamı ile elde edilen sayı da 1, 2 veya 4 rakamlarından oluşuyorsa bu doğal sayıya dosdoğru sayı denir.

Buna göre, kaç tane dosdoğru sayı vardır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

İPUÇU

Rakamları farklı olsun denilmiyor.

BÖLÜM 6

ÖĞRENELİM

BÖLME - BÖLÜNEBİLME KURALLARI

Bölme

Ne Bilmeliyim? 1

BÖLME

A, B, C ve K birer doğal sayı, $C \neq 0$ ve $K \geq 0$ olmak üzere, A sayısının C ile bölünmesinde bölüm B, kalan K ise,

A: Bölünen

C: Bölün

B: Bölüm

K: Kalan

$$\begin{array}{r} A \mid C \\ \cdot \\ B \\ \hline K \end{array}$$

şeklinde bölme işlemi yapılır.



Bakın çocuklar yukarıdaki şekildeki gibi bir bölme işlemi gördüğümüzde birkaç soru tipi hariç ilk yapılacak iş bölme özdeşliğini yazmaktır. Nasıl mı yazacaksınız? Hemen yazıyorum.

▶ $A = B \cdot C + K$ (Bölme özdeşliği)



Bu eşitliği yazmakla iş bitmiyor, dikkat edilecek önemli mevzulardan birisi; bölme işleminde kalan (K), bölenden (C) daha küçük olmalıdır.

▶ $K < C$ (kalan bölenden küçük olmalıdır.)

▶ $K = 0$ ise A sayısı C ile kalansız (tam) bölünüyor denir.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$\begin{array}{r} 34343 \mid 34 \\ \hline \text{Bölüm} \\ \hline \text{Kalan} \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işlemine göre, bölüm ile kalanı bulalım.

Çözüm



34 de 34 bir kere var ile işleme başlayalım.

$$\begin{array}{r} 34343 \mid 34 \\ \hline 34 \quad 1 \\ \hline 003 \end{array}$$



3 aşağı aldık ama 3 te 34 yok o halde bir tane daha rakam indirelim ama aşağıda bunun bir bedeli olmalı. Bir rakam indirmeye hakkımız varken iki rakam indirmenin bedeli bölüme bir sıfır eklemektir.

$$\begin{array}{r} 34343 \mid 34 \\ \hline 34 \quad 101 \\ \hline 0034 \\ \hline 34 \\ \hline 00 \end{array}$$



Kalan 3 ü aşağı indirdik ama bölme yapılamıyor indirecek sayı da kalmadı. Bölmenin bitmesi için bölüme bir sıfır daha eklenir ve bölme işlemi bitirilir.

$$\begin{array}{r} 34343 \mid 34 \\ \hline 34 \quad 1010 \\ \hline 0034 \\ \hline 34 \\ \hline 003 \end{array}$$

Buna göre, bölüm 1010 ve kalan 3 bulunur.

Nasıl Çözülür?



Örnek

3a iki basamaklı tam sayıdır.

$$\begin{array}{r} 68 \cdot \cdot \overline{) 3a} \\ 2 \cdot \cdot \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işlemine göre, a nın alabileceği değerler toplamını bulalım.

Çözüm



Bölme işleminin bir kısmı verilmiş a 'yı nasıl bulabiliriz.

3a'nın iki katı 68 sayısını geçmeyecek şekilde a değerlerini bulursak olur hocam.



Buna göre,

$a = 0$ için $30 \cdot 2 = 60 < 68$

$a = 1$ için $31 \cdot 2 = 62 < 68$

$a = 2$ için $32 \cdot 2 = 64 < 68$

$a = 3$ için $33 \cdot 2 = 66 < 68$

$a = 4$ için $34 \cdot 2 = 68 \leq 68$

$a = 5$ için $35 \cdot 2 = 70 > 68$ oldu. $a = 5$ alamayız.

O halde, a nın alabileceği değerler toplamı;

$0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ bulunur.

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki bölme işlemlerinde bölüm ve kalanı bulunuz.

$$\begin{array}{r} 3838 \quad 38 \\ \hline \text{Bölüm} \\ \hline \text{Kalan} \end{array}$$

(101 ve 0)

19 | 1920
—
Kalan

(10101 ve 1)

$$\begin{array}{r} 35353 \quad 35 \\ \hline \text{Bölüm} \\ \hline \text{Kalan} \end{array}$$

(1010 ve 3)

ABABC | AB
 —————
 Kalan

(1010 ve C)

Nasıl Uygularım?



2. $2a$ iki basamaklı bir doğal sayı olmak üzere,

$$\begin{array}{r} 73 \cdot \cdot \\ 2a \\ \hline 3 \cdot \cdot \end{array}$$

olduğuna göre, a 'nın alabileceği en büyük değer kaçtır?

(4)

3. $1a$ iki basamaklı bir doğal sayı olmak üzere,

$$\begin{array}{r} 348 \cdot \\ 1a \\ \hline 2 \cdot \cdot \end{array}$$

olduğuna göre, a 'nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

(27)

4. $4a3$ üç basamaklı bir doğal sayı olmak üzere,

$$\begin{array}{r} 4a3 \\ 15 \\ \hline 3. \end{array}$$

olduğuna göre, a 'nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

(35)

Nasıl Çözülür?



Örnek

A ve B pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\begin{array}{r} A \\ 9 \\ \hline B \\ B + 2 \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işleminde, A 'nın alabileceği en büyük değeri kaç olduğunu bulalım.

Çözüm



Sevgili biricik kızlarım ve koç yiğitlerim... Bölme işlemini gördüğünüz zaman ilk aklınıza gelecek şey bölme özdeşliği olmalıdır.

$$A = 9 \cdot B + (B + 2)$$



A 'nın en büyük değeri için B 'ye istediğimiz değeri verebilir miyiz?

Hayır hocam. Kalan bölenden küçük olmalıydı.



O halde,

$$B + 2 < 9 \Rightarrow B < 7 \Rightarrow B = 6 \text{ seçilirse,}$$

A 'nın en büyük değeri,

$$A = 9 \cdot B + (B + 2)$$

$$\Rightarrow A = 9 \cdot 6 + 8 = 62 \text{ bulunur.}$$

Örnek

x ve A pozitif tam sayıdır.

$$\begin{array}{r} A \\ x^2 \\ \hline 3 \\ 8 \end{array}$$

olduğuna göre, A 'nın en küçük değerini bulalım.

Çözüm

$$A = 3x^2 + 8 \text{ ve } x^2 > 8$$

En küçük değer için $x = 3$ alınırsa,

$$A = 3 \cdot 3^2 + 8 = 35 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$\begin{array}{r} A \overline{) 56} \\ \underline{ x + 3} \\ x^2 \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işlemine göre, A'nın alabileceği en büyük tam sayı değerini bulalım.

Çözüm

$$A = 56 \cdot (x + 3) + x^2$$

Hocam A'nın en büyük değeri soruluyor, bunun için x'in en büyük değerini bulmalıyız.



$$56 > x^2 \text{ olmalıydı.}$$

Buna göre, en büyük x tam sayı değeri,

$$56 > 7^2 = 49 \text{ olduğundan } x = 7 \text{ dir.}$$



Şimdi, $x = 7$ için A'nın en büyük değerini bulalım.

$$A = 56 \cdot (x + 3) + x^2$$

$$\Rightarrow A = 56 \cdot 10 + 49$$

$$\Rightarrow A = 609 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. k doğal sayı olmak üzere,

Aşağıdaki doğal sayılarda yapılan kalanlı bölme işlemlerinde A'nın alabileceği en büyük doğal sayı değerini bulunuz.

$$\begin{array}{r} A \overline{) 8} \\ \underline{ 6} \\ k \end{array}$$

(55)

$$\begin{array}{r} A \overline{) 14} \\ \underline{ 7} \\ k^2 \end{array}$$

(107)

$$\begin{array}{r} A \overline{) 6} \\ \underline{ k + 3} \\ k + 2 \end{array}$$

(41)

Bölme

Nasıl Uygularım?



2. Aşağıdaki doğal sayılarda yapılan kalanlı bölme işlemlerinde A'nın değerini bulunuz.

$$\begin{array}{r} A + 5 \overline{) A - 4} \\ \underline{ 2} \\ 3 \end{array}$$

(10)

$$\begin{array}{r} 3A - 1 \overline{) 16} \\ \underline{ 2} \\ A - 9 \end{array}$$

(12)

$$\begin{array}{r} A + 14 \overline{) 11} \\ \underline{ A - 5} \\ 9 \end{array}$$

(6)

Nasıl Çözülür?



Örnek

a ve b doğal sayılar olmak üzere, a'nın b ile bölümünde bölüm 9, kalan 8 dir.

Buna göre, a'nın alabileceği en küçük değeri bulalım.

Çözüm



Bu tip soruda soruyu okuyup anlatılanları matematik diline çevirmek bu işin püf noktasıdır.

$$\begin{array}{r} a \overline{) b} \\ \underline{ 9} \\ 8 \end{array} \text{ olur.}$$

Bölme özdeşliğine göre; $a = 9 \cdot b + 8$ dir.



Şimdi a'nın en küçük değerini nasıl bulacağız? Kim söyleyecek?

Hocam kalan bölenden küçük olacağından b yi en küçük değeri olan 9 alıp, denklemde yerine yazarsak a'nın en küçük değerini buluruz.



$b > 8$ olacağından, $b = 9$ seçersek,

$a = 9 \cdot b + 8 = 9 \cdot 9 + 8 = 89$ bulunur.

Örnek

Toplamları 140 olan iki doğal sayıdan, büyük olanı küçük olanına bölündüğünde bölüm 9, kalan 10 olmaktadır.

Buna göre, bu iki sayının farkını bulalım.

Çözüm

Büyük ve küçük sayılar sırasıyla, a ve b olsun. Verilenlere göre;

$$a + b = 140$$

Büyük sayıyı küçüğe bölüp bölme özdeşliğini yazalım.

$$\begin{array}{r} a \overline{) b} \\ \underline{ 9} \\ 10 \end{array} \quad a = 9 \cdot b + 10 \text{ olur.}$$

$$a + b = 140 \quad (a = 9 \cdot b + 10 \text{ ifadesini yerine yazalım})$$

$$\Rightarrow 9 \cdot b + 10 + b = 140$$

$$\Rightarrow 10 \cdot b = 130 \Rightarrow b = 13 \text{ tür.}$$

$$\text{Buradan, } a = 9 \cdot 13 + 10 = 127 \text{ olur.}$$

$$\text{Bu iki sayının farkı da: } a - b = 127 - 13 = 114 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Bir bölme işleminde bölünen ve bölenin toplamı 143, bölüm 14, kalan 8 olduğuna göre, bölen kaçtır?

(9)

2. İki doğal sayıdan biri diğerine bölündüğünde, bölüm 17, kalan 5 tir.

Bölünen, bölen ve bölüm toplamı 202 olduğuna göre, bölen sayı kaçtır?

(10)

3. Toplamları 558 olan iki pozitif tam sayıdan büyüğü küçüğüne bölündüğünde bölüm 13, kalan ise 12 dir.

Buna göre, büyük sayı kaçtır?

(519)

4. Farkları 165 olan iki doğal sayıdan büyüğü küçüğüne bölündüğünde bölüm 9, kalan 5 olmaktadır.

Buna göre, büyük sayı kaçtır?

(185)

Bölme

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$\begin{array}{r} A \overline{)B} \\ \underline{} 6 \\ \end{array} \quad \begin{array}{r} B \overline{)C} \\ \underline{} 5 \\ \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işlemlerine göre, A'nın C türünden ifadesini bulalım.

Çözüm



Bir tane olmuş, iki tane olmuş farketmez. Her iki işlemde de bölme özdeşliğini yazalım.

$$A = 6 \cdot B + 2 \quad \text{ve} \quad B = 5 \cdot C + 7 \quad \text{dir.}$$



Denklemlerde A'nın B ye, B'nin de C'ye bağlı olduğu dikkatinizi çekti mi? Yani zincirleme bağlılık var. Ne yapmamız lazım?

Hocam B'yi A'daki denklemde yerine yazarak, A'yı C türünden bulabiliriz.



Buna göre,

$$A = 6 \cdot B + 2$$

$$\Rightarrow A = 6 \cdot (5 \cdot C + 7) + 2$$

$$\Rightarrow A = 30 \cdot C + 42 + 2$$

$$\Rightarrow A = 30 \cdot C + 44 \quad \text{bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1.

$$\begin{array}{r} A \overline{)B} \\ \underline{} 5 \\ \end{array} \quad \begin{array}{r} B \overline{)4} \\ \underline{} 3 \\ \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işlemlerine göre, A'nın değerini bulunuz.

(74)

2.

$$\begin{array}{r} A \overline{)B} \\ \underline{} 5 \\ \end{array} \quad \begin{array}{r} B \overline{)7} \\ \underline{} C \\ \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işlemlerine göre, A'nın C türünden eşitini bulunuz.

(35 \cdot C + 17)

3. x, y, z sıfırdan farklı pozitif birer tam sayı ve

$$\begin{array}{r} x \overline{)y} \\ \underline{} 7 \\ \end{array} \quad \begin{array}{r} y \overline{)z} \\ \underline{} 6 \\ \end{array}$$

olduğuna göre, x in z türünden eşitini bulunuz.

(42 \cdot z + 15)

Nasıl Çözülür?



Örnek

2ab üç basamaklı ve ba iki basamaklı doğal sayılardır.

$$\begin{array}{r} 2ab \overline{)ba} \\ \underline{6} \\ 27 \end{array}$$

olduğuna göre, $a + b$ toplamını bulalım.

Çözüm



Sayı basamakları sorusuyla, bölme sorusu birleştirilmiş bir soru.

Hocam yine bölme özdeşliğini yazacağız, sonra da özdeşliğin içeri-
sindeki sayıları daha önce yaptığımız gibi çözümleyeceğiz değil mi?



Çalışan öğrencinin hali başka, matematik zor değil arkadaşlar yal-
nızca düzenli çalışmak gerekiyor.

Bölme özdeşliğinden,

$$2ab = 6 \cdot ba + 27$$

$$\Rightarrow 200 + 10 \cdot a + b = 6 \cdot (10b + a) + 27$$

$$\Rightarrow 200 + 10 \cdot a + b = 60 \cdot b + 6 \cdot a + 27$$

$$\Rightarrow 200 - 27 = 59 \cdot b - 4 \cdot a$$

$$\Rightarrow 173 = 59 \cdot b - 4 \cdot a$$



Eşitliğine uygun sayıları bir iki denemeden sonra bulursunuz ar-
tık.

$b = 3$ ve $a = 1$ dediniz değil mi?

Topamları da;

$$a + b = 4 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. ab iki basamaklı bir sayı olmak üzere,

$$\begin{array}{r} ab \overline{)b} \\ \underline{8} \\ 7 \end{array}$$

olduğuna göre, $b - a$ nın değeri kaçtır?

(2)

2. ab iki basamaklı bir sayı olmak üzere,

$$\begin{array}{r} 244 \overline{)ab} \\ \underline{8} \\ 12 \end{array}$$

olduğuna göre, $a + b$ nin değeri kaçtır?

(11)

Bölünebilme Kuralları

Ne Bilmeliyim? 2



Bölen ile Kalan Arasındaki İlişkiler

A'nın x ile bölümünden kalan a , B'nin x ile bölümünden kalan b olsun.

➤ $A \cdot B$ nin x ile bölümünden kalan $a \cdot b$,

➤ A^n nin x ile bölümünden kalan a^n ,

➤ $A + B$ nin x ile bölümünden kalan $a + b$,

➤ $A - B$ nin x ile bölümünden kalan $a - b$ olur.



Bulduğumuz kalan değerleri x ten büyük olursa tekrar x e böleriz, negatif olursa pozitif oluncaya kadar x ekleriz.

Nasıl Çözülür?



Örnek

A sayısının 7 ile bölümünden kalan 3 ise $A^2 + 4$ sayısının 7 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm



Kalan bulma sorularında kısaca yapılması gereken, sayının yerine kalanı yazıp işlem yapmaktır.

$$A^2 + 4 = 3^2 + 4 = 13$$



13 sayısı bölen olan 7 den büyük olduğu için 13'ün 7 ile bölümünden kalan 6 bulunur.

Örnek

Bir A sayısının 13 ile bölümünden kalan 4 olduğuna göre, $2A - 9$ sayısının 13 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm

O halde, $2A - 9$ ifadesinde A yerine kalan 4'ü yazarak işlem yapalım.

$$2A - 9 = 2 \cdot 4 - 9 = -1 \text{ olur.}$$

33'ü 13'e -1 alamayacağına göre, kalan $-1 + 13 = 12$ bulunur.

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki sayıların 17 ile bölümünden kalanları bulunuz.

$$\rightarrow 21^2$$

(16)

$$\rightarrow 35^3$$

(1)

$$\rightarrow 53^5$$

(15)

2. A doğal sayısının 9 ile bölümünden kalan 4 olduğuna göre, aşağıdaki sayıların 9 ile bölümünden kalanı bulunuz.

$$\rightarrow A - 3$$

(1)

$$\rightarrow A - 11$$

(2)

$$\rightarrow 3A + 7$$

(1)

$$\rightarrow A^2 + 13$$

(2)

3. A'nın 11 ile bölümünden kalan 7, B'nin 11 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre, aşağıdaki sayıların 11 ile bölümünden kalanı bulunuz.

$$\rightarrow A \cdot B - A - B$$

(0)

$$\rightarrow A^2 + 2AB$$

(4)

$$\rightarrow (A + B)^2$$

(1)

Ne Bilmeliyim? 3

2 ile Bölünebilme

- Birler basamağı (son rakamı) çift olan sayılar (0, 2, 4, 6, 8) 2 ile tam bölünür. (kalan 0'dır)
- Birler basamağı (son rakamı) tek olan sayıların (1, 3, 5, 7, 9) 2 ile bölümünden kalan 1'dir.

- ✓ 1347 nin 2 ile bölümünden **kalan 1'dir.**
- ✓ 23486 sayısı 2 ile tam bölünür yani **kalan 0'dır.**
- ✓ 789450 nin 2 ile tam bölünür yani **kalan 0'dır.**

Nasıl Çözülür?

Örnek

Rakamları birbirinden farklı 2a34b beş basamaklı sayısı 2 ile tam bölünebilmektedir.

Buna göre, b nin alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

b çift sayı olmalıdır.

O halde, b nin alabileceği değerler 0, 6, 8'dir.



Rakamları farklı olacağı için 2 ve 4'ü almadık.

Örnek

$$A = (274^4 + 379^5) \cdot 4375^6$$

olduğuna göre, A'nın 2 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm



Sayıların yerine kalanları yazarak işlem yapabiliyorduk.

274'ün 2 ile bölümünden **kalan 0,**

379'un 2 ile bölümünden **kalan 1,**

4375'in 2 ile bölümünden **kalan 1'dir.**

O halde, kalan;

$$(274^4 + 379^5) \cdot (4375)^6 \Rightarrow (0^4 + 1^5) \cdot 1^6 = 1 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki sayıların 2 ile bölümünden kalanları bulunuz.

$$\rightarrow 2349$$

(1)

$$\rightarrow 4^{5523}$$

(0)

$$\rightarrow 7^6 + 3^{15}$$

(0)

2. $K = (2347 + 5348)^4 \cdot (43^{12} + 5^{32})$

olduğuna göre, K'nın 2 ile bölümünden kalanı bulunuz.

(0)

3. 6a3b sayısı 2 ile tam bölünebilen dört basamaklı bir sayıdır.

Buna göre, b'nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

(20)

Bölünebilme Kuralları

Ne Bilmeliyim? 4



5 ile Bölünebilme

- Birler basamağı (son rakamı) 0 veya 5 olan sayılar 5 ile tam bölünür (kalan 0'dır).
- Birler basamağı (son rakamı) 0 veya 5 değilse, o sayıyı 5'e bölüp kalanı buluruz.
- ✓ 3457 nin 5 ile bölümünden **kalan 2 dir.**
- ✓ 34252 nin 5 ile bölümünden **kalan 2 dir.**
- ✓ 8795 sayısı 5 ile tam bölünür yani **kalan 0 dir.**

Nasıl Çözülür?



Örnek

Rakamları farklı, 2 ile tam bölünebilen, 5 ile bölündüğünde ise 4 kalanını veren, rakamları farklı üç basamaklı en büyük doğal sayıyı bulalım.

Çözüm



5 ile bölündüğünde 4 kalanını veriyorsa sayının birler basamağı ya 4 ya da 9 olmalıdır değil mi?

Evet hocam ama 2 ile de tam bölünecek, o halde birler basamağı 4 olmak zorundadır.



Aferin sana Ayça, bu şartlara göre rakamları farklı 3 basamaklı en büyük doğal sayı 984'tür.

Örnek

Beş basamaklı 48abc sayısının 5 ile bölümünden kalan 3 tür.

Bu sayının 2 ile bölümünden kalan 1 olduğuna göre, c'yi bulalım.

Çözüm



Bölünebilme sorularında 5 ile ilgili bir veri varsa en sağlam işe oradan başlamaktır.

O zaman hocam, 48abc sayısının 5 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre, $c = 3$ veya $c = 8$ 'dir.



Aferin sana Hülya, yani c ya 3 ya da 8 ama hangisi?

Hocam hocam ... Bu sayının 2 ile bölümünden kalan 1 olduğuna göre, c tek sayı olmalı yani $c = 3$ tür.



Nasıl Uygularım?



$$1. \quad \begin{aligned} x &= 3457 \\ y &= 489 \end{aligned}$$

olduğuna göre, $x^3 \cdot y^2 - 8y$ işleminin sonucunun 5 ile bölümünden kalan kaçtır?

(1)

2. Rakamları birbirinden farklı, 5 ile bölündüğünde 3 kalanını veren, üç basamaklı en büyük sayının rakamları toplamı kaçtır?

(20)

3. 7845a dört basamaklı sayısının 5 ile bölümünden kalan 1 olduğuna göre, a'nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

(7)

Ne Bilmeliyim? 5



10 ile Bölünebilme

➤ Bir sayının 10 ile bölümünden kalan , bu sayının birler basamağındaki rakamdır.

- ✓ 25343 nin 10 ile bölümünden kalan 3'tür.
- ✓ 7486 nin 10 ile bölümünden kalan 6'dır.
- ✓ 347880 sayısı 10 ile tam bölünür yani kalan 0'dır.

Nasıl Çözülür?



Örnek

Beş basamaklı 48abc sayısının 10 ile bölümünden kalan 8 dir.

Bu sayının 2 ile bölümünden kalanın kaç olduğunu bulalım.

Çözüm



Bölünebilme sorularında 5 veya 10 ile ilgili bir veri varsa en sağları işe oradan başlarıdır.

O halde, 48abc sayısının 10 ile bölümünden kalan 8 olduğuna göre, $c = 8$ 'dir.



$c = 8$ olduğuna göre, 48ab8 sayısı çift sayı olur ve 2 ile bölümünden kalan 0'dır.

Örnek

$$x = 132 \text{ ve } y = 348$$

olduğuna göre, $x^2 - y^2$ işleminin sonucunun 10 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm

132'nin 10 ile bölümünden kalan 2,

347'nin 10 ile bölümünden kalan 7,

O halde,

$$132^2 - 347^2 \Rightarrow 2^2 - 7^2 \Rightarrow 4 - 49 \Rightarrow 4 - 9 \Rightarrow -5 + 10 = 5 \text{ bulunur.}$$



Dikkat ettiniz mi? 49 un yerine de 10 ile bölümünden kalan 9 alıp işlem yaptık.Yani kalan bulma işlemlerinde her aşamada kalanlarla işlem yapabiliriz



Bir mesele daha var. Kalan negatif olamayacağına göre kalan negatif çıkarsa kalan sayı bölen ile toplanarak kalan bulunur.

Nasıl Uygularım?



1. $x = 9874$

$$y = 124369$$

olduğuna göre, $(x + y) - x \cdot y$ işleminin sonucunun 10 ile bölümünden kalan kaçtır?

(7)

2. Rakamları farklı 9b32a beş basamaklı sayısının 10 ile bölümünden kalan 7 olduğuna göre, a + b'nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

(15)

3. 87954a altı basamaklı sayısının 5 ile bölümünden kalan 4 olduğuna göre, 10 ile bölümünden kalan en fazla kaç olabilir?

(9)

Bölünebilme Kuralları

Ne Bilmeliyim? 6



4 ile Bölünebilme

► Bir A sayısının yüzler, onlar ve birler basamağındaki rakamlar sırasıyla x, y, z olmak üzere,

$A = \dots xyz$ sayısının; 4 ile bölümünden kalanı bulmak için sayının tamamına gerek yok, sadece son iki basamağı (yz) 4 e bölerek kalanı buluruz.

✓ 1ab525 sayısının 4 ile bölümünden kalan, 25'in 4 ile bölümünden kalan olan 1 dir.

8 ile Bölünebilme

► $A = \dots xyz$ sayısının; 8 ile bölümünden kalanı mı bulmak istiyorsun? Sayının tamamını yine boşver, sondaki üç basamaklı (xyz) sayısını 8 e böl, kalanı bul.

✓ 845320 sayısının 8 ile bölümünden kalan, 320 nin 8 ile bölümünden kalan olan 0 dir.

Nasıl Çözülür?



Örnek

Dört basamaklı 87a4 sayısı 4 ile tam bölünebildiğine göre, a'nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

Çözüm



87a4 sayısının son iki basamağı a4 sayısıdır. a4 sayısının 4 ün katı olması gerekir.

a'yı nasıl bulacağız hocam?



Tabiki değer vereceğiz İdil'cim.

$a = 1 \Rightarrow a4 = 14$, 4 e bölünmez.

$a = 2 \Rightarrow a4 = 24$, 4 e bölünür.

$a = 3 \Rightarrow a4 = 34$, 4 e bölünmez.

$a = 4 \Rightarrow a4 = 44$, 4 e bölünür.

$a = 5 \Rightarrow a4 = 54$, 4 e bölünmez.

$a = 6 \Rightarrow a4 = 64$, 4 e bölünür.

$a = 7 \Rightarrow a4 = 74$, 4 e bölünmez.

$a = 8 \Rightarrow a4 = 84$, 4 e bölünür.

$a = 9 \Rightarrow a4 = 94$, 4 e bölünmez.

Buna göre, a'nın alabileceği değerler toplamı,

$2 + 4 + 6 + 8 = 20$ bulunur.

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki sayılardan hangisinin 4 ile bölümünden kalan 3 tür?

A) 2113 B) 3009 C) 3206 D) 4579 E) 5008

(D)

2. Aşağıdaki sayılardan hangisi 8 ile tam bölünür?

A) 6642 B) 7132 C) 8208 D) 9662 E) 9884

(C)

3. 2400a2 beş basamaklı sayısı 4 ile tam bölünebildiğine göre, a'nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

(25)

4. 704820a altı basamaklı sayısının 4 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre, a'nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

(10)

Ne Bilmeliyim? 7



3 ile Bölünebilme

► Bir sayının 3'e bölümünden kalan, bu sayının rakamlarının sayı değerleri toplamının 3'e bölümünden kalandır.

✓ 546

$$5 + 4 + 6 = 15 \text{ olduğundan,}$$

15'in (dolayısıyla 546'nın) 3 ile bölümünden kalan 0'dır.

✓ 78509

$$7 + 8 + 5 + 0 + 9 = 29 \text{ olduğundan,}$$

29'un (dolayısıyla 78509'un) 3 ile bölümünden kalan 2'dir.

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$(4354 + 375) \cdot 293$$

işleminin sonucunun 3 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm

4354 sayısının 3 ile bölümünden kalan,

Rakamları toplayalım : $4 + 3 + 5 + 4 = 16$

16'nın 3'e bölümünden kalan da **1** dir.

375 sayısının 3 ile bölümünden kalan,

Rakamları toplayalım : $3 + 7 + 5 = 15$

15'in 3'e bölümünden kalan da **0** dir.

293 sayısının 3 ile bölümünden kalan,

Rakamları toplayalım : $2 + 9 + 3 = 14$

14'ün 3'e bölümünden kalan da **2** dir.



Sonuçta kalanı bulmak için sayıların yerine kalanları yazıp işlem yapalım.

$$(1 + 0) \cdot 2 = 2 \text{ olduğundan kalan } 2 \text{ dir.}$$

Örnek

Beş basamaklı $5a1bc$ sayısının 10 ile bölümünden kalan 8'dir.

Bu sayının 3 ile bölümünden kalan 2 ise $a + b$ nin alabileceği farklı değerleri bulalım.

Çözüm



10 ile bölümünden kalan 8 olduğuna göre, $c = 8$ 'dir. Önce bunu cebe bir koyalım.

O halde, sayı $5a1b8$ olur.



3 ile bölümünden kalan 2 olduğuna göre, rakamları toplayalım.

$$5a1b8 \Rightarrow 5 + a + 1 + b + 8 = 3 \cdot k + 2$$



3 ile bölümünden kalanın 2 olması, $3 \cdot k + 2$ şeklinde ifade edildi.

$$\Rightarrow a + b + 14 = 3 \cdot k + 2$$

$$\Rightarrow a + b = 3 \cdot k - 12$$



Şimdi k 'ya değerler verelim. En az kaç olabilir?



Hocam... En az, $k = 4$ olur.



Hadi bakalım yazalım.

$$k = 4 \Rightarrow a + b = 0 \text{ olur mu? Bence olur.}$$

$$k = 5 \Rightarrow a + b = 3 \text{ olur.}$$

$$k = 6 \Rightarrow a + b = 6 \text{ olur.}$$

$$k = 7 \Rightarrow a + b = 9 \text{ olur.}$$

$$k = 8 \Rightarrow a + b = 12 \text{ olur.}$$

$$k = 9 \Rightarrow a + b = 15 \text{ olur.}$$

$$k = 10 \Rightarrow a + b = 18 \text{ olur.}$$

$$k = 11 \Rightarrow a + b = 21 \text{ olur mu?}$$



Bence bu sefer olmaz.



Olmaz tabii hocam, iki rakamın toplamı 21 olmaz.

$a + b$ nin alabileceği **7** farklı değer vardır.

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki sayıların 3 ile bölümünden kalanları bulunuz.

→ 23587

(1)

→ 9012546

(0)

→ 22222222222222

(1)

→ 5354896·45879

(0)

2. Rakamları birbirinden farklı 7a85 dört basamaklı sayısı 3 ile tam bölünebildiğine göre, a'nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

(5)

3. Dört basamaklı 5a8b sayısının 3 ile bölümünden kalan 2 dir. Buna göre, a + b toplamı kaç farklı değer alabilir?

(6)

4. 12a68b beş basamaklı sayısı 3 ile tam bölünebildiğine göre, a + b nin en küçük ve en büyük değerini bulunuz.

(1 ve 16)

5. Rakamları farklı, 3 ile bölünebilen, üç basamaklı en büyük pozitif doğal sayı ile birler basamağı 1 olan, 3 ile bölünebilen, iki basamaklı en küçük pozitif doğal sayının toplamı kaçtır?

(1008)

6. Rakamları birbirinden farklı olan, üç basamaklı K6M sayısı 3 ve 10 ile kalansız bölünebiliyor.

Buna göre, K kaç farklı değer alabilir?

(2)

7. 8a5b dört basamaklı sayısının 10 ile bölümünden kalan 7 dir.

Bu sayının 3 ile bölümünden kalan 1 olduğuna göre, a nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

(15)

Ne Bilmeliyim? 8



9 ile Bölünebilme

➤ Bir sayının 9 a bölümünden kalan, bu sayının rakamlarının sayı değerleri toplamının 9 ile bölümünden kalandır.

✓ 546

$$5 + 4 + 6 = 15 \text{ olduğundan,}$$

15'in (dolayısıyla 546'nın) 9 ile bölümünden kalan 6 dır.

✓ 78509

$$7 + 8 + 5 + 0 + 9 = 29 \text{ olduğundan,}$$

29'un (dolayısıyla 78509'un) 9 ile bölümünden kalan 2 dir.

Nasıl Çözülür?



Örnek

Dört basamaklı a57b sayısı 5 ile tam bölünebilmektedir.

Bu sayının 9 ile bölümünden kalan 6 olduğuna göre, a'nın alabileceği değerler toplamını bulalım.

Çözüm



Yine işleme 5'ten başlayalım. 5 ile tam bölünebilen bu sayı için birler basamağı, $b = 0$ veya $b = 5$ 'tir.

Yani sayımız, a570 veya a575 olur.



9 ile bölümünden kalan 6'nın matematikçesini de yazalım.

a570 için, $a + 5 + 7 + 0 = 9 \cdot k + 6$

$$\Rightarrow 12 + a = 9 \cdot k + 6$$

$$\Rightarrow 6 + a = 9 \cdot k \text{ eşitliğinden, } k = 1 \text{ için } a = 3 \text{ bulunur.}$$



İşimiz bitti mi? Tabii ki bitmedi.

Ayrıca, a575 için, $a + 5 + 7 + 5 = 9 \cdot k + 6$

$$\Rightarrow a + 17 = 9 \cdot k + 6$$

$$\Rightarrow a + 11 = 9 \cdot k$$

eşitliğinden, $k = 2$ için $a = 7$ bulunur.

Buna göre, a değerlerinin toplamı:

$$3 + 7 = 10 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki sayıların 9 ile bölümünden kalanları bulunuz.

$$\rightarrow 45787$$

(4)

$$\rightarrow 487956$$

(3)

$$\rightarrow 122333444455555$$

(1)

$$\rightarrow 4444444444444444$$

(5)

$$\rightarrow 124586 + 3015789$$

(5)

$$\rightarrow 784516 - 84510$$

(4)

2. a sayısı 9 ile bölündüğünde kalan 5 tir.

Buna göre, aşağıdaki sayılardan hangisi 9 ile tam olarak bölünür?

A) $a - 9$

B) $a + 4$

C) $2a + 1$

D) $2a - 5$

E) $3a$

İPUCU

Kalan verilmişse bize a yerine kalanı yazmak kalıyor.

(B)

Bölünebilme Kuralları

Nasıl Uygularım?



3. On dört basamaklı aaaaaaaaaa sayısının 10 ile bölümünden kalan 7 dir.

Buna göre, bu sayının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?

(8)

4. Rakamları birbirinden farklı, dört basamaklı $a4b7$ doğal sayısı 9 ile tam bölünebilmektedir.

Buna göre, bu şartı sağlayan kaç farklı dört basamaklı $a4b7$ sayısı yazılabilir?

(4)

5. $7a89b4$ beş basamaklı sayısının 9 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre, $a + b$ nin en küçük değerini bulunuz.

(2)

6. abc biçiminde yazılmış üç basamaklı bir sayı 9 ile tam bölünebilmekte, 5 ile bölümünde ise 4 kalanını vermektedir.

Buna göre, $a + b$ toplamının alabileceği kaç farklı değer vardır?

(4)

İPUCU

Önce 5 ile bölümünden kalanla başlarsanız işimiz kolay olur.

7. Dört basamaklı $4a6b$ sayısı 5 ve 9 ile bölündüğünde 2 kalanını veren tek bir sayıdır.

Buna göre, a kaçtır?

(3)

8. Üç basamaklı $A47$ sayısının 9 ile bölümünden elde edilen kalan 1 ve üç basamaklı $B2A$ sayısının 9 ile bölümünden elde edilen kalan 8 dir.

Buna göre, üç basamaklı BABA sayısının 9 ile bölümünden elde edilen kalan kaçtır?

(3)

Ne Bilmeliyim? 9



11 ile Bölünebilme

► Bir sayının birler basamağındaki rakam (+1) ile çarpılmak şartıyla, sayının rakamları sağdan sola doğru sırasıyla bir (+1) ile, bir (-1) ile çarpılarak toplanır. Bulunan değer 11'in katı ise (pozitif veya negatif farketmez kat kattır) bu sayı 11 ile tam bölünür, 11'in katı değilse bu değer 11 ile bölümünden kalan, sayının da 11 ile bölümünden kalandır.

abcde sayısında

$$a \overline{b} c \overline{d} e = (a + c + e) - (b + d) = 11 \cdot k$$

$$+ \quad + \quad +$$

ise bu sayı 11 ile tam bölünür.

✓ 4312 ⇒ -4 + 3 - 1 + 2 = 0 ve 0 sayısı 11'in katı olduğundan 4312 sayısı 11 ile tam bölünür.

$$- + - +$$

✓ 81579 ⇒ 8 - 1 + 5 - 7 + 9 = 14 olduğundan 14 ün 11 ile bölümünden kalan 3'tür.

$$+ - + - +$$

✓ 17092 ⇒ 1 - 7 + 0 - 9 + 2 = -13 olduğundan 11 ile bölümünden kalan, -13 + 11 = -2 (yine negatif sayı) - 2 + 11 = 9'dur.

$$+ - + - +$$

Nasıl Çözülür?



Örnek

Dört basamaklı 4a5b2 doğal sayısı 11 ile bölümünden kalan 7 olduğuna göre, a + b toplamının kaç farklı değer alabileceğini bulalım.

Çözüm



11 demek en farklı özellik demektir. Yani, +, -, + muhabbeti. İşaretlere nereden başlıyoruz? Unutmayın birler basamağından...

$$4 a 5 b 2$$

$$+ - + - +$$

$$\Rightarrow (4 + 5 + 2) - (a + b) = 11 \cdot k + 7$$

$$\Rightarrow 11 - (a + b) = 11 \cdot k + 7$$

$$\Rightarrow 4 - (a + b) = 11 \cdot k$$

$$\Rightarrow 4 - 11k = a + b$$

eşitliğinin sağlanabilmesi için k'ya değer vererek

a + b değerlerini bulalım.

$$k = 0 \Rightarrow a + b = 4 \text{ olur.}$$

$$k = 1 \Rightarrow a + b = -7 \text{ olur.}$$

Hocam, iki rakamın toplamı -7 nasıl olsun.



Aferin sizi külyutmazlar.

O halde, a + b'nin alabileceği bir tane değer vardır.

Bölünebilme Kuralları

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki sayıların 11 ile bölümünden kalanları bulunuz.

→ 3948

(10)

→ 8170526

(1)

→ 33333333

(0)

→ 55555555

(5)

→ 92451072

(10)

→ 3aa5bb

(2)

2. 32a79 beş basamaklı sayısı 11 ile tam bölünebildiğine göre, a'nın değerini bulunuz.

(8)

3. A sayısının 11 ile bölümünden kalan 4,
B sayısının 11 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre,

$$A^2 - AB + B^2$$

sayısının 11 bölümünden kalan kaçtır?

(2)

4. Altı basamaklı 4b1a52 sayısı 11 ile tam bölündüğüne göre, a + b toplamı kaçtır?

(8)

5. 981ba2 altı basamaklı sayısının 11 ile bölümünden kalan 2 olduğuna göre, b - a'nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

(-7)

6. Beş basamaklı 81a45 sayısı 11 ile bölündüğünde 3 kalanını vermektedir.

Buna göre, a kaçtır?

(6)

Ne Bilmeliyim? 10



6,12,15,24 ile bölünebilme

Aralarında asal iki sayıdan her birine tam bölünebilen bir sayı, bu iki sayının çarpımına da tam bölünür. Bu kuraldan yola çıkarak aşağıdaki bölünebilme kuralları yazılabilir.

- 2'ye ve 3'e bölünen sayılar 6'ya,
- 3'e ve 4'e bölünen sayılar 12'ye,
- 3'e ve 5'e bölünen sayılar 15'e,
- 5'e ve 9'a bölünen sayılar 45'e tam bölünür.

Benzer şekilde 30'a, 36'ya, 54'e ve başka sayılar için de bölünebilme kuralları bulunabilir.

- ✓ 150 sayısının birler basamağı 0 olduğu için 2 ile tam bölünür.

150 sayısının rakamları toplamı $1 + 5 + 0 = 6$ olduğu için 3 ile de tam bölünür.

150 sayısı hem 2 ile hem de 3 ile tam bölündüğü için **6 ile de tam bölünür.**

- ✓ 225 sayısının birler basamağı 5 olduğu için 5 ile tam bölünür.

225 sayısının rakamları toplamı $2 + 2 + 5 = 9$ olduğu için 9 ile de tam bölünür.

225 sayısı hem 5 ile hem de 9 ile tam bölündüğü için **45 ile de tam bölünür.**

- ✓ 288 sayısını inceleyelim. 88 sayısı 4 ile tam bölündüğünden 288 sayısı 4 ile tam bölünür.

$2 + 8 + 8 = 18$ olduğundan 288 sayısı 9 ile de tam bölünür.

288 sayısı 4 ve 9 ile tam bölündüğü için **36 ile tam bölünür.**

Nasıl Çözülür?



Örnek

Rakamları birbirinden farklı 6a84 dört basamaklı sayısı 6 ile tam bölünebildiğine göre, a'nın alabileceği değerler toplamını bulalım.

Çözüm



6a84 sayısının 6 ile tam bölünebilmesi için hem 2 ile hem de 3 ile tam bölünmesi gerekir.

Birler basamağı 4 olduğuna göre, **bu sayı 2 ile tam bölünür.**

3 ile tam bölünmesi için, rakamları toplayalım.

$$6 + a + 8 + 4 = 3k \text{ (3'ün katı) olmalıdır.}$$

$$\Rightarrow a + 18 = 3k$$



$$0, 3, 6, 9$$

a'nın alabileceği değerler toplamı

$$0 + 3 + 6 + 9 = 18 \text{ 'dir.}$$

Örnek

Beş basamaklı 6a34b sayısı 18 ile tam bölünebilmektedir.

Buna göre, a'nın alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm



6a34b sayısının 18 ile tam bölünebilmesi için hem 2 ile hem de 9 ile tam bölünmesi gerekir. Önce işe 2 ile bölünebilmeden başlayalım.

6a34b sayısının 2 ile bölünebilmesi için b çift sayı olmalıydı yani 6a34b sayısı, 6a340, 6a342, 6a344, 6a346, 6a348 olabilir.



Şimdi hepsinin 9 ile bölünebilmesini mi inceleyeceğiz hocam? Uzun iş.



Tembellik yok. Şimdi bol işlem yapın ki sınavda hızlı olasınız.

Yukarıdaki sayıların 9 ile tam bölünebilmesi için

$$6a340 \Rightarrow 6 + a + 3 + 4 + 0 = 9 \cdot k \text{ için } a = 5 \text{ olur.}$$

$$6a342 \Rightarrow 6 + a + 3 + 4 + 2 = 9 \cdot k \text{ için } a = 3 \text{ olur.}$$

$$6a344 \Rightarrow 6 + a + 3 + 4 + 4 = 9 \cdot k \text{ için } a = 1 \text{ olur.}$$

$$6a346 \Rightarrow 6 + a + 3 + 4 + 6 = 9 \cdot k \text{ için } a = 8 \text{ olur.}$$

$$6a348 \Rightarrow 6 + a + 3 + 4 + 8 = 9 \cdot k \text{ için } a = 6 \text{ olur.}$$

Bölünebilme Kuralları

Nasıl Çözülür?



Örnek

Bir öğretmen, tanesi 15 TL den belirli sayıda kitap satın alıyor. Kendisine verilen faturada, ödenen miktarın son iki rakamı silik çıktığı için bu tutarın yalnızca 76•• biçiminde dört basamaklı bir sayı olduğu okunabiliyor.

Öğretmenin tek sayıda kitap aldığı bilindiğine göre, öğretmenin kitaplara ödediği paranın en fazla kaç TL olabileceğini bulalım.

Çözüm



Öğretmen tanesi 15 TL den belirli sayıda kitap aldığına göre, faturada görülen tutar olan 76•• sayısı 15 in katı olmalıdır. 15'in katı olan sayı 15'in asal çarpanları olan 3 ve 5 ile tam bölünür.



Öğretmenin tek sayıda kitap aldığı bilindiğine göre 76•• sayısı tek olmalıdır. 76•• sayısı 5 ile tam bölündüğü için 76•• sayısının birler basamağı 5 olmalıdır.

76•5 sayısı 3 ile de tam bölüneceğinden rakamları toplamı 3'ün katı olmalıdır.

$$7 + 6 + \bullet + 5 = 3k$$

$$\Rightarrow 18 + \bullet = 3k \text{ ise}$$

Onlar “•” basamağına gelecek sayı 0, 3, 6, 9 olabilir.

Bize en büyük değer lazım o zaman onlar basamağını 9 almamız lazım değil mi hocam? Buradan da ödenen para en fazla 7695 TL olabilir.



Aferin İdil... İşte bu kadar.

Nasıl Uygularım?



1. Rakamları farklı 2415a beş basamaklı sayısı 6 ile tam bölünebildiğine göre, a'nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

(6)

2. 1b03a beş basamaklı sayısı 12 ile tam bölünebildiğine göre, b'nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

(33)

3. Dört basamaklı 4M3N sayısı 12 ile tam bölünebildiğine göre, M + N toplamının en büyük değeri kaçtır?

(14)

Nasıl Uygularım?



4. Dört basamaklı $a9a6$ doğal sayısı 12 ile tam bölünebilmektedir.

Bu şartlara uyan kaç farklı $a9a6$ sayısı yazılabilir?

(2)

5. Rakamları birbirinden farklı $528a$ dört basamaklı sayısı 20 ile tam bölünebildiğine göre, a 'nın değerini bulunuz.

(0)

6. Dört basamaklı $7A2B$ sayısı 90 sayısının tam katıdır. Buna göre, A 'nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

(9)

7. Beş basamaklı $782ab$ sayısı 30 ile bölünebildiğine göre, a yerine gelebilecek en büyük rakam kaçtır?

(7)

8. Beş basamaklı, $67a2b$ doğal sayısı 36 ile tam bölünebildiğine göre, $a + b$ toplamının en büyük değeri kaçtır?

(12)

9. Beş basamaklı $38a2b$ doğal sayısı 15 ile tam bölünebildiğine göre, a nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

(33)

Bölme - Bölünebilme Kuralları

1. Rakamları birbirinden ve sıfırdan farklı üç basamaklı bir doğal sayının onlar basamağındaki rakam diğer basamaklarındaki rakamları tam bölüyorsa bu sayıya ortakatlı sayı denir.

Örneğin, 639 bir ortakatlı sayıdır.

Buna göre, aşağıdaki sayılardan hangisi ortakatlı sayı değildir?

- A) 248 B) 428 C) 516 D) 624 E) 936

2. Rakamları toplamına tam olarak bölünen sayılara "HARSHAD (NİVEN) SAYILARI" denir.

Örneğin; 280 sayısı $2 + 8 + 0 = 10$ ile bölümünde kalan sıfır olduğundan 280 bir HARSHAD sayısıdır.

Buna göre, aşağıdaki sayılardan hangisi bir HARSHAD sayısı değildir?

- A) 132 B) 139 C) 140 D) 153 E) 190

3. Bir manav, kasası 15 kilo olan domates kasalarından belirli sayıda kasa domates satın alıyor. Kasaların hepsini beraber kantarda tartarken, kantarın ekranı kirli olduğundan toplam ağırlığın ilk ve son rakamlarını okuyamıyor. Kantarda ağırlığın $\bullet 8 \bullet$ biçiminde üç basamaklı bir sayı olduğu okunabiliyor.

Manavın tek sayıda kasa domates aldığı bilindiğine göre, okunamayan iki rakamın toplamı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 8 B) 9 C) 11 D) 13 E) 14

4. a ve b doğal sayılar olmak üzere, $a \mid b$ gösterimi, a sayısının b sayısını tam böldüğünü ifade eder.

Bir öğrenci,

"a, b ve c tam sayıları $a \cdot b \mid c$ koşulunu sağlıyorsa $a \mid c$ ve $b \mid c$ koşullarını da sağlar." önermesinin doğru olduğunu örnek verme yöntemini kullanarak ispatlamak istiyor.

Buna göre, öğrencinin verdiği örnek aşağıdakilerden hangisi olamaz?

	a	b	c
A)	2	3	24
B)	3	5	90
C)	9	18	54
D)	5	7	105
E)	4	9	108

5. Bir sayı grubunda,

- 4 ile kalansız bölünebilen tam sayılar kümesi A,
- 6 ile kalansız bölünebilen tam sayılar kümesi B,
- 15 ile kalansız bölünebilen tam sayılar kümesi C

ile gösterilmektedir.

Buna göre,

- 20
- 60
- 75

sayılarından hangileri bu üç kümeden en az ikisinin elemanıdır?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II
D) I ve III E) II ve III

Bölme - Bölünebilme Kuralları

6. A, B ve C sıfırdan ve birbirinden farklı birer rakam olmak üzere,

AB

BC

CA

iki basamaklı doğal sayıları sırasıyla 5, 8 ve 9 ile tam bölünmektedir.

Buna göre, $A + B + C$ toplamı kaçtır?

- A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 16

7. $K = 12!$ sayısı,

I. 35

II. 63

III. 65

sayılarından hangilerine tam olarak bölünmez?

- A) Yalnız II B) I, II ve III C) I ve III
D) II ve III E) Yalnız III

8. Dört basamaklı $4AB2$ sayısının 13 ile bölümünden kalan 9'dur.

Buna göre, dört basamaklı $4AB9$ sayısının 13 ile bölümünden kalan kaçtır?

- A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

9. $8a5b$ sayısı ile ilgili olarak,

5 ile bölümünden kalan 2'dir.

4 ile tam bölünmemektedir.

bilgileri veriliyor.

Buna göre, bu sayının 9 ile tam bölünebilmesi için a kaç olmalıdır?

- A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

- 10.

$$\begin{array}{r} A \overline{) 18} \\ \cdot C \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} B \overline{) 12} \\ \cdot D \\ \hline 2 \end{array}$$

olduğuna göre, $A \cdot B$ doğal sayısının 6 ile bölümünden elde edilen kalan kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5

11. Rakamları birbirinden ve sıfırdan farklı üç basamaklı bir doğal sayının onlar basamağındaki rakam diğer basamaklarındaki rakamları tam bölüyorsa bu sayıya ortakatlı sayı denir.

Örneğin, 624 bir ortakatlı sayıdır.

Buna göre, en büyük ortakatlı sayı aşağıdaki sayılardan hangisine tam olarak bölünemez?

- A) 6 B) 12 C) 18 D) 27 E) 36

BÖLÜM 7

ÖĞRENELİM

EN BÜYÜK ORTAK BÖLEN - EN KÜÇÜK ORTAK KAT (EBOB - EKOK) Asal Çarpanlara Ayırma

Ne Bilmeliyim? 1



Bir Doğal Sayının Asal Çarpanlara Ayrılması

- 1 den büyük her doğal sayı tabanları birbirinden farklı asal sayı ve üsleri pozitif tam sayı olan sayıların çarpımı biçiminde, bir tek şekilde yazılabilir. Bu yazılış şekline doğal sayının asal çarpanlarına ayrılmış biçimi denir.
- Bir doğal sayının asal çarpanlarını bulmak için, bu doğal sayı bölünebildiği en küçük asal sayıdan başlayarak bölümde 1 elde edilene kadar asal sayılara bölünür. Elde edilen bölenlerin çarpımı sayının asal çarpanlarına ayrılmış halidir.

Nasıl Çözülür?



Örnek

48, 108 ve 150 sayılarını asal çarpanlarına ayıralım.

Çözüm

48	2	108	2	150	2
24	2	54	2	75	3
12	2	27	3	25	5
6	2	9	3	5	5
3	3	3	3	1	
1		1			

olduğundan, bu sayılar

$$48 = 2^4 \cdot 3^1,$$

$$108 = 2^2 \cdot 3^3,$$

$$150 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2$$

şeklinde asal çarpanlarına ayrılır.

Örnek

$A = 9^5 \cdot 4^3$ sayısını asal çarpanlarına ayıralım.

Çözüm



Tabandaki 4 ve 9 asal sayı değil, bu soruda da üslü ifade özelliklerini kullanarak tabanları asal sayı yapalım.

$$A = (3^2)^5 \cdot (2^2)^3$$

$$\Rightarrow A = 3^{2 \cdot 5} \cdot 2^{2 \cdot 3}$$

$$\Rightarrow A = 3^{10} \cdot 2^6 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$A = 10^6 \cdot 8^7 \cdot 5^4$ sayısını asal çarpanlarına ayıralım.

Çözüm



Tabanlar asal sayı oluncaya kadar çarpanlara ayıralım.

$$A = (5 \cdot 2)^6 \cdot (2^3)^7 \cdot 5^4$$

$$\Rightarrow A = 5^6 \cdot 2^6 \cdot 2^{3 \cdot 7} \cdot 5^4$$

$$\Rightarrow A = 5^6 \cdot 2^6 \cdot 2^{21} \cdot 5^4$$

$$\Rightarrow A = 5^{6+4} \cdot 2^{6+21}$$

$$\Rightarrow A = 5^{10} \cdot 2^{27} \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki sayıları asal çarpanlarına ayırınız.

$$\rightarrow 72$$

$$(2^3 \cdot 3^2)$$

$$\rightarrow 180$$

$$(2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1)$$

$$\rightarrow 27^8$$

$$(3^{24})$$

$$\rightarrow 10^3$$

$$(2^3 \cdot 5^3)$$

$$\rightarrow 15 \cdot 10 \cdot 8$$

$$(2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^2)$$

$$\rightarrow 12^3 \cdot 15^4$$

$$(2^6 \cdot 3^7 \cdot 5^4)$$

$$\rightarrow 6^4 \cdot 10^8 \cdot 9^5$$

$$(2^{12} \cdot 3^{14} \cdot 5^8)$$

Nasıl Çözülür?



Örnek

n ve A pozitif tam sayılardır.

$$360 \cdot n = A^2$$

olduğuna göre, n 'nin en küçük değerini bulalım.

Çözüm



$360 \cdot n = A^2$ olduğundan $360 \cdot n$ ifadesinin tam kare olması istenmektedir.

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \text{ olduğuna göre,}$$

$$360 \cdot n = A^2 \Rightarrow 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot n = A^2$$

$$\Rightarrow 2^2 \cdot 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot n = A^2 \text{ ise,}$$

$$2 \cdot 5$$



Üssü 1 olan sayıların üslerinin 2 ye tamamlanması için n nin en küçük değeri $2 \cdot 5 = 10$ olur.

Örnek

$$45 \cdot x = 15^3$$

eşitliğini sağlayan x tam sayı değerini bulalım.

Çözüm



x tam sayı ve eşitliğin bir tarafında bir sayının küpü varsa diğer taraftaki sayılar da küp şeklinde yazılabilir. Yani $45 \cdot x$ ifadesinin bir pozitif tam sayının küpü olması istenmektedir.

$$45 \cdot x = 15^3 \Rightarrow 9 \cdot 5 \cdot x = (3 \cdot 5)^3$$

$$\Rightarrow 3^2 \cdot 5 \cdot x = 3^3 \cdot 5^3 \text{ (üslerin eşitlenebilmesi için)}$$

$$3^1 \cdot 5^2$$

$$x = 3^1 \cdot 5^2 = 75 \text{ bulunur.}$$

Asal Çarpanlara Ayırma

Nasıl Uygularım?



1. a, b ve c birer pozitif tam sayıdır.

Aşağıdaki eşitliklerde sorulan ifadelerin değerlerini bulunuz.

$$\rightarrow 144 = 2^a \cdot 3^b \text{ ise } a + b = ?$$

(6)

$$\rightarrow 300 = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \text{ ise } a \cdot b \cdot c = ?$$

(4)

2. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan x değerlerini bulunuz.

$$\rightarrow 32 \cdot x = 8^2$$

(2)

$$\rightarrow 49 \cdot x = 21^3$$

(189)

$$\rightarrow 72 \cdot x = 6^{10}$$

(2⁷ · 3⁸)

$$\rightarrow 56 \cdot x = 7^3 \cdot 4^8$$

(2¹³ · 7²)

3. n pozitif tam sayı olmak üzere,

$$72 \cdot n$$

çarpımının tam kare olması için n nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

(2)

4. m ve n pozitif tam sayılardır.

$$60 \cdot n = m^2$$

olduğuna göre, m nin en küçük değeri kaçtır?

(30)

Nasıl Uygularım?



5. x ve A pozitif tam sayılardır.

$$75 \cdot x = A^2$$

olduğuna göre, x 'in en küçük değerini bulunuz.

(3)

6. a ve b pozitif tam sayılardır.

$$48 \cdot a = b^3$$

olduğuna göre, $a + b$ toplamının en küçük değeri kaçtır?

(48)

7. x ve A pozitif tam sayılardır.

$$675 \cdot x = A^3$$

olduğuna göre, x in en küçük değerini bulunuz.

(5)

Nasıl Çözülür?



Örnek

12! sayısını asal çarpanlarına ayıralım.

Çözüm



A! sayısındaki p asal çarpanının sayısı, A nın p ye art arda bölünmesinden elde edilen bölümlerin toplamı kadardır.

12 den küçük asal sayılar 2, 3, 5, 7, 11 olduğundan,

$$12! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \text{ olsun.}$$

✓ 12! sayısındaki, 2 çarpanının sayısı:

$$\begin{array}{r} 12 \mid 2 \\ \hline 6 \mid 2 \\ \hline 3 \mid 2 \\ \hline 1 \end{array}$$

olduğundan $6 + 3 + 1 = 10$ 'dur.

✓ 3 çarpanının sayısı:

$$\begin{array}{r} 12 \mid 3 \\ \hline 4 \mid 3 \\ \hline 1 \end{array}$$

olduğundan, $4 + 1 = 5$ 'tir.

✓ 5 çarpanının sayısı:

$$\begin{array}{r} 12 \mid 5 \\ \hline 2 \end{array}$$

olduğundan 2'dir.

✓ 7 ve 11 çarpanlarının sayısı birer tanedir.

Buna göre, $12! = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$ bulunur.

Asal Çarpanlara Ayırma

Nasıl Uygularım?

1. a ve n pozitif tam sayılar,
Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan n'in alabileceği en büyük değerleri bulunuz.

$$\rightarrow 7! = a \cdot 3^n$$

(2)

$$\rightarrow 7! = 2^n \cdot a$$

(4)

$$\rightarrow 45! = a \cdot 5^n$$

(10)

2. a, b ve c pozitif tam sayıları için
 $8! = 7 \cdot 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$
olduğuna göre, a + b + c toplamını bulunuz.

(10)

Ne Bilmeliyim? 2

Bir Doğal Sayının Pozitif Tam Bölen Sayısı

x, y, z, ... birbirinden farklı asal sayılar ve a, b, c pozitif tam sayılar olmak üzere, A doğal sayısı ($A \geq 2$),

$$A = x^a \cdot y^b \cdot z^c \cdot \dots$$

şeklinde asal çarpanlarına ayrılmış olsun.

➤ A sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı (PTBS),
 $PTBS = (a + 1) \cdot (b + 1) \cdot (c + 1) \cdot \dots$ şeklinde bulunur.

➤ A sayısının tüm tam bölenlerinin sayısı,
 $TTBS = 2 \cdot PTBS = 2(a + 1) \cdot (b + 1) \cdot (c + 1) \cdot \dots$
şeklinde bulunur.

➤ A sayısının bütün tam bölenlerinin toplamı 0 (sıfır) dir.

➤ A sayısının asal tam bölenleri toplamı,

$$T_A = x + y + z + \dots \text{ dir.}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

216'nın pozitif tam bölenlerinin sayısını bulalım.

Çözüm

$$216 = 36 \cdot 6 = 4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow 216 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^3 \text{ olduğundan,}$$



Pozitif tam bölenlerinin sayısı, üslerin bir fazlasının çarpımından

$$PTBS = (3 + 1) \cdot (3 + 1) = 16 \text{ bulunur.}$$

Örnek

m ve n pozitif tamsayılardır.

$$m = \frac{72}{n}$$

olduğuna göre, n'nin alabileceği değerlerin sayısını bulalım.

Çözüm



Şimdi kalkıp n yerine tam sayı değerleri vererek m'nin tam sayı olup olmadığına bakacak olursak, bu iş çok uzun sürer.



İfadesinin pozitif tam sayı olması için n değerleri 72'nin pozitif tam bölenleri olmalıdır. 72'nin pozitif bölenlerini bulmak için de 72'yi asal çarpanlarına ayırmamız gerekiyordu, hatırlıyorsunuz değil mi?

$72 = 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^2$ olduğundan, 72 sayısının pozitif tam bölen sayısı yani, n değerlerinin sayısı $(3 + 1) \cdot (2 + 1) = 12$ tanedir.

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki sayıların pozitif tam bölen sayılarını, tam bölen sayılarını ve asal bölen sayılarını bulunuz.

→ 120

(16 - 32 - 3)

→ 96

(12 - 24 - 2)

→ 9^5

(11 - 22 - 1)

→ 15^7

(64 - 128 - 2)

→ 24^3

(40 - 80 - 2)

→ $15^3 \cdot 27^4$

(64 - 128 - 2)

2. $A = \frac{144}{x}$

A sayısı, pozitif bir tam sayı olduğuna göre, x in alabileceği kaç tam sayı değeri olduğunu bulunuz.

(15)

3. 150'nin asal bölenlerinin toplamını bulunuz.

(10)

4. 150'nin asal olmayan tam bölen sayısını bulunuz.

İPUCU

150 nin tam bölen sayısını bulup asal olanları çıkarın.

(21)

Ne Bilmeliyim? 3

EBOB(EN BÜYÜK ORTAK BÖLEN)

İki veya daha fazla doğal sayıdan her birini tam bölebilen en büyük doğal sayıya bu sayıların ortak bölenlerinin en büyüğü (EBOB) denir.

a, b, c sayılarının EBOB u, $EBOB(a, b, c)$ ya da

$(a, b, c)_{\text{ebob}}$ şeklinde gösterilir.

EBOB u bulmak için;

- Sayılar asal çarpanlarına ayrılır.
- Tabanı aynı olan çarpanlardan üsleri en küçük olanlarının çarpımı bu sayıların EBOB unu verir.



24 ün çarpanlarını veya bölenlerini kim söyleyecek?

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 ve 24 hocam.



Güzel.. Selin sen de 18 in bölenlerini söyle.

1, 2, 3, 6, 9 ve 18 hocam.



1, 2, 3 ve 6 hem 24 ün hem de 18 i bölen ortak sayılar değil mi? Bu sayıların en büyüğü kaç?

6 hocam.



İşte 6 sayısına 18 ile 24'ün ortak bölenlerinin en büyüğü (EBOB) diyoruz.



EBOB i bulmak için her seferinde böyle yapmayacağız tabii ki. Yolu yukanda söyledim, uygulamasını da şimdi gösterelim.

Nasıl çözülür?

Örnek

54 ile 90'nın EBOB'unu bulalım.

Çözüm

Önce , 54 ve 90'ı en hızlı şekilde asal çarpanlarına ayıralım

$$54 = 27 \cdot 2 = 3^3 \cdot 2$$

$$90 = 9 \cdot 10 = 3^2 \cdot 2 \cdot 5$$



Şimdi tabanı aynı olan çarpanlardan üsleri en küçük olanların çarpımını bulalım.

$$EBOB(54, 90) = 3^2 \cdot 2^1 = 18 \text{ bulunur.}$$

Hocam 5 çarpanı ne oldu?



Biricik evladım... 5 ortak çarpan olmadığından o hesaba girmez.



Size ikinci bir yol daha göstereyim mi?

54	90	2
27	45	3
9	15	3
3	5	



Ne yaptığımı anladınız mı?. Bakın 54 ve 90'ı bölen en küçük asal sayı kaçtır 2, her ikisini de 2'ye böldüm. Bölümleri alta yazdım 27 ve 45. Sonra 27 ve 45'i bölen en küçük asal sayıyı bulduk 3. Her ikisini de 3'e böldük 9 ve 15. En sonda da 9 ve 15'i bölen en küçük asal sayı 3 olduğu için onları da 3'e böldüm 3 ve 5.



En alttaki 3 ve 5'i birlikte bölen asal sayı kalmadığı için işlem sonuçlandı.

Eeee... Hocam EBOB ne?



Biricik evladım, kırmızı sütündeki sayılar yok mu? Çarpınca işlem tamam.

$$EBOB(54, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2 = 18 \text{ dir.}$$

Ne Bilmeliyim? 4

EKOK (EN KÜÇÜK ORTAK KAT)

İki veya daha fazla doğal sayıdan her birine tam bölünebilen (her birinin pozitif tam sayı katı olan) en küçük doğal sayıya bu sayıların ortak katlarının en küçüğü (EKOK) denir.

a, b, c sayılarının EKOK'u,

EKOK(a, b, c) ya da $(a, b, c)_{\text{ekok}}$ şeklinde gösterilir.

EKOK u bulmak için;

- Sayılar asal çarpanlarına ayrılır.
- Bütün (tabanı aynı ya da farklı olan) çarpanlardan her birinin en büyük üslü olanlarının çarpımı bu sayıların EKOK unu verir.



Bu sefer 24 ün katlarını kim söyleyecek?

24, 48, 72, 96, 120 böyle gider hocam.



Aferin bu kadar yeter. Pelin sen de 18 in katlarını söyle.

Hocam... 18, 36, 54, 72, 90, 108



Bu iki sayının katları içerisinde ortak olan kaç var?

72 var hocam.



Peki bu sayıların katlarını yazsaydım yine ortak sayı çıkar mıydı? Tabii ki çıkardı. Yani 72 bu sayıların tek ortak katı değil ama en küçüğü. Kıssadan hisseyi söyleyelim, 24 ile 18 in ortak katlarının en küçüğü, yani EKOK u 72 dir.



EBOB i bulmak için her seferinde böyle yapmayacağız tabii ki. Yolu yukanda söyledim, uygulamasını da şimdi gösterelim.

Nasıl Çözülür?

Örnek

54 ile 90 nın EKOK unu bulalım.

Çözüm



Önce , 54 ve 90'ı en hızlı şekilde asal çarpanlarına ayıralım

$$54 = 27 \cdot 2 = 3^3 \cdot 2$$

$$90 = 9 \cdot 10 = 3^2 \cdot 2 \cdot 5$$



Şimdi bütün (tabanı aynı ya da farklı olan) çarpanlardan her bir tabanın en büyük üslü olanlarının çarpımını bulalım.

$$\text{EKOK}(54, 90) = 3^3 \cdot 2 \cdot 5 = 270 \text{ bulunur.}$$

Hocam 5 çarpanını da aldık.



Bu sefer ortak çarpan olmasına gerek yok ne varsa hepsini çarptık.



Yine ikinci bir yol daha göstereyim.

54	90	2 ✓	} EBOB
27	45	3 ✓	
9	15	3 ✓	
3	5	3	} = 2 \cdot 3^2
1	5	5	
1	1	1	

EKOK = 2 \cdot 3^3 \cdot 5



Burada ne yaptık? 54 ve 90 ı bölen en küçük asal sayıdan başlayarak ikisini birden bölme şartına bakmadan asal bölenleri yazdık ama her ikisini birden bölen varsa onları da işaretledik.



Bundan sonra, tabloda tüm asal bölenlerin hepsini çarpınca EKOK u, ikisini birden bölenleri (işaretlediklerimiz var ya onları) çarpınca EBOB u bulmuş oluruz.

$$\text{EKOK}(54, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270 \text{ bulunur.}$$

$$\text{EBOB}(54, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2 = 18 \text{ bulunur.}$$

Tek taşla iki kuş hocam...

Nasıl Çözülür?



Örnek

48, 140 ve 252 sayılarının EBOB u ile EKOK unu bulalım.

Çözüm

48	140	252	2 ✓
24	70	126	2 ✓
12	35	63	2
6	35	63	2
3	35	63	3
1	35	21	3
1	35	7	5
1	7	7	7
1	1	1	

EBOB(48, 140, 252) = $2^2 = 4$ 'tür.

EKOK(48, 140, 252) = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 5040$ 'tır.

Örnek

a, b, c birbirinden farklı asal sayılardır.

$$x = a^3 \cdot b \quad \text{ve} \quad y = a^2 \cdot b^2 \cdot c^3$$

olduğuna göre, x ve y sayılarının EBOB'u ile EKOK'unu bulalım.

Çözüm

$$x = a^3 \cdot b$$

$$y = a^2 \cdot b^2 \cdot c^3$$



Tabanları aynı olan çarpanlardan üsleri küçük olanlar alınır,

$$\text{EBOB}(x, y) = a^2 \cdot b \text{ bulunur.}$$



Her bir tabanın en büyük üslü olanlarının çarpımı alınır,

$$\text{EKOK}(x, y) = a^3 \cdot b^2 \cdot c^3 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki sayıların EBOB ve EKOK larını bulunuz.

→ 15, 40

(5 ve 120)

→ 72, 150

(6 ve 1800)

→ 360, 240, 480

(120 ve 1440)

→ $A = 2^4 \cdot 3^7$ ve $B = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^3$

($2^4 \cdot 3^4$ ve $2^6 \cdot 3^7 \cdot 5^3$)

→ $A = 5^6 \cdot 7^7$ ve $B = 2^6 \cdot 3^8 \cdot 7^3$

(7^3 ve $2^6 \cdot 3^8 \cdot 5^6 \cdot 7^7$)

→ $A = 4^6 \cdot 3^7$ ve $B = 2^6 \cdot 9^3 \cdot 5^4$

($2^6 \cdot 3^6$ ve $2^{12} \cdot 3^7 \cdot 5^4$)

→ a, b ve c asal sayılar olmak üzere,

$$A = a^3 \cdot b^4 \quad \text{ve} \quad B = a^4 \cdot b^3 \cdot c^5$$

($a^3 \cdot b^3$ ve $a^4 \cdot b^4 \cdot c^5$)

Ne Bilmeliyim? 5



İki veya daha fazla sayının EBOB u en çok bu sayıların en küçüğüne, EKOK u en az bu sayıların en büyüğüne eşit olabilir.

$$a \leq b \Rightarrow \text{EBOB}(a, b) \leq a \leq b \leq \text{EKOK}(a, b) \text{ dir.}$$

$$a = b \Rightarrow \text{EBOB}(a, b) = a = b = \text{EKOK}(a, b) \text{ dir.}$$

Nasıl Çözülür?



Örnek

Birbirinden farklı iki doğal sayının en küçük ortak katı 40 olduğuna göre, bu iki sayının toplamının alabileceği en küçük ve en büyük değeri bulalım.

Çözüm

$$a \leq b \Rightarrow \text{EBOB}(a, b) \leq a \leq b \leq \text{EKOK}(a, b) \text{ olduğundan,}$$

$$\text{EKOK}(a, b) = 40 \text{ eşitliğinde,}$$

$$a = 40 \text{ ve } b = 40 \text{ alınırsa,}$$

$$a + b = 80 \text{ en büyük değerdir.}$$

Ama hocam farklı iki doğal sayı diyor, biz eşit aldık.



Aferin.. gözünüzden kaçmadı. Doğru sayılar farklı olacaktı. Buna göre,

$$a = 40 \text{ ve } b = 20 \text{ alınırsa,}$$

$$a + b = 60 \text{ (} a \neq b \text{ için en büyük değer bulunur.)}$$



Şimdi 20 nereden geldi diyeceksiniz. Diğer sayının 40'dan farklı olması gerektiğinden 40'ı bölünebildiği en küçük asal sayıya bölerek $40 : 2 = 20$ yi bulduk.



Gelelim en küçük meselesine. Bu iki sayının toplamının en küçük değeri alması için, bu sayıları çarpımları 40 ve aralarında asal iki sayı olacak şekilde birbirine yakın sayılar seçmeliyiz.

Buna göre, 5 ve 8 sayıları toplamın en az olması için uygun sayılardır.

O halde, EKOK u 40 olan iki doğal sayının toplamı en az,

$$5 + 8 = 13 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıda EKOK'u verilen sayıların toplamlarının alabileceği en büyük ve en küçük değerleri bulunuz.

$$\rightarrow a \leq b \text{ ve } \text{EKOK}(a, b) = 12$$

(24 ve 7)

$$\rightarrow a < b \text{ ve } \text{EKOK}(a, b) = 30$$

(45 ve 11)

- $\rightarrow$ Ortak katlarının en küçüğü 45 olan birbirinden farklı iki doğal sayının toplamı en az kaçtır?

(14)

Ne Bilmeliyim? 6

▶ $EBOB(a, b) \cdot EKOK(a, b) = a \cdot b$ dir.

Bu özellik sadece iki tam sayı için her zaman doğrudur.

▶ a ile b aralarında asal ise,

$$EKOK(a, b) = a \cdot b \quad EBOB(a, b) = 1 \text{ dir.}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

İki doğal sayının EBOB u 9, EKOK u 72 dir.

Bu sayılardan biri 18 ise diğer sayıyı bulalım.

Çözüm



EBOB belli EKOK da belli, sayılardan biri de belli "Sayıların çarpımı, sayıların EBOB u ile EKOK unun çarpımına eşittir." kuralını uygulayalım. Sorudaki diğer sayı x olsun.

$$9 \cdot 72 = x \cdot 18 \Rightarrow 1 \cdot 72 = x \cdot 2 \Rightarrow 36 = x \text{ bulunur.}$$

Örnek

a ve b sayma sayıları aralarında asaldır.

$$EKOK(a, b) = 126$$

$$a + \frac{27}{b} = 17$$

olduğuna göre, a + b toplamını bulalım.

Çözüm

$$a + \frac{27}{b} = 17 \Rightarrow \frac{a \cdot b + 27}{b} = 17$$



Yukarıdaki kuralları iyice inceleyin bakalım bu soruda nasıl kullanınız.

Hocam, a ile b aralarında asal olduğundan $EBOB(a, b) = 1$, $EKOK(a, b) = a \cdot b \Rightarrow a \cdot b = 126$ dir.

Yukarıda yerine yazalım.

$$\frac{a \cdot b + 27}{b} = 17 \Rightarrow \frac{126 + 27}{b} = 17$$

$$\Rightarrow \frac{153}{b} = 17 \Rightarrow b = \frac{153}{17} = 9 \text{ olur.}$$

$$a \cdot b = 126 \Rightarrow a \cdot 9 = 126 \Rightarrow a = 14 \text{ olur.}$$

Buradan, $a + b = 9 + 14 = 23$ bulunur.

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki eşitliklerden hangisi yanlıştır?

A) $EKOK(8, 9) = 8 \cdot 9 = 72$

B) $EKOK(11, 13) = 11 \cdot 13 = 143$

C) $EKOK(14, 15) = 14 \cdot 15 = 210$

D) $EKOK(15, 24) = 15 \cdot 24 = 360$

E) $EKOK(21, 40) = 21 \cdot 40 = 840$

(D)

2. Ardışık iki doğal sayının ortak katlarının en küçüğü ile ortak bölenlerinin en büyüğünün toplamı 133 olduğuna göre, bu sayıların toplamı kaçtır?

İPUCU

Ardışık iki doğal sayı aralarında asaldı değil mi?

(23)

3. x ve y aralarında asal sayılardır.

$$EKOK(x, y) = 342$$

$$\frac{198}{y} + x = 30$$

olduğuna göre, y kaçtır?

(18)

Ne Bilmeliyim? 7

m ile n aralarında asal sayılar olmak üzere,

$$\text{EBOB}(x, y) = k \text{ ise}$$

$$x = k \cdot m \text{ ve } y = k \cdot n \text{ olurken}$$

$$\text{EKOK}(x, y) = k \cdot m \cdot n \text{ olur.}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

a ve b pozitif tamsayılarıdır.

$$a + b = 56 \text{ ve } \text{EBOB}(a, b) = 7$$

olduğuna göre, a 'nın alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

m ve n aralarında asal sayılar olmak üzere,

$$\text{EBOB}(a, b) = 7 \text{ olduğuna göre,}$$

$$a = 7 \cdot m \text{ ve } b = 7 \cdot n \text{ olsun.}$$

$$a + b = 56 \Rightarrow 7 \cdot m + 7 \cdot n = 56$$

$$\Rightarrow 7(m + n) = 56$$

$$\Rightarrow m + n = 8 \text{ dir.}$$

Buna göre,

$$m = 1 \text{ ise } n = 7 \text{ ve } a = 7m = 7 \cdot 1 = 7 \text{ olur.}$$

$$m = 3 \text{ ise } n = 5 \text{ ve } a = 7m = 7 \cdot 3 = 21 \text{ olur.}$$

$$m = 5 \text{ ise } n = 3 \text{ ve } a = 7m = 7 \cdot 5 = 35 \text{ olur.}$$

$$m = 7 \text{ ise } n = 1 \text{ ve } a = 7m = 7 \cdot 7 = 49 \text{ olur}$$



$m = 6$ ve $n = 2$ yi almadık. Neden?

Hocam, 6 ve 2 aralarında asal olmadığı için alamayız.



Aferin Dila. Bakın dikkatli öğrencinin hali böyle oluyor.

Nasıl Uygularım?

1. a ve b pozitif tam sayılardır.

Aşağıdaki ifadelerde a 'nın alabileceği değerleri bulunuz.

$$\rightarrow a + b = 42 \text{ ve } \text{EBOB}(a, b) = 6$$

(6; 36; 12; 30; 18; 24)

$$\rightarrow a + b = 80 \text{ ve } \text{EBOB}(a, b) = 8$$

(8; 24; 56; 72)

$$\rightarrow a + b = 24 \text{ ve } \text{EBOB}(a, b) = 6$$

(6; 18)

Nasıl Çözülür?



Örnek

a ve b pozitif tam sayılardır.

$$a \cdot b = 320 \text{ ve } EBOB(a, b) = 4$$

olduğuna göre, a'nın alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

m ve n aralarında asal sayılar olmak üzere,

$EBOB(a, b) = 4$ olduğuna göre,

$a = 4 \cdot m$ ve $b = 4 \cdot n$ olsun.

$$a \cdot b = 320 \Rightarrow 4 \cdot m \cdot 4 \cdot n = 320$$

$$\Rightarrow 16 \cdot m \cdot n = 320 \Rightarrow m \cdot n = 20 \text{ dir.}$$

Buna göre,

$$m = 1 \text{ ise } n = 20 \text{ ve } a = 4 \cdot m = 4 \cdot 1 = 4 \text{ olur.}$$

$$m = 4 \text{ ise } n = 5 \text{ ve } a = 4 \cdot m = 4 \cdot 4 = 16 \text{ olur.}$$

$$m = 5 \text{ ise } n = 4 \text{ ve } a = 4 \cdot m = 4 \cdot 5 = 20 \text{ olur.}$$

$$m = 20 \text{ ise } n = 1 \text{ ve } a = 4 \cdot m = 4 \cdot 20 = 80 \text{ olur.}$$

Hocam, burada da sayıların aralarında asal olmasına dikkat ettik.



Diyecek birşey kalmadı. Artık siz meseleyi kavradınız.

Nasıl Uygularım?



1. a ve b pozitif tam sayılardır.

Aşağıdaki ifadelerde a'nın alabileceği değerleri bulunuz.

$$\rightarrow a \cdot b = 200 \text{ ve } EBOB(a, b) = 5$$

(5; 40)

$$\rightarrow a \cdot b = 600 \text{ ve } EBOB(a, b) = 10$$

(10; 20; 30; 60)

Nasıl Çözülür?



Örnek

a ve b pozitif tam sayılardır.

$$EBOB(a, b) = 15 \text{ ve } EKOK(a, b) = 180$$

olduğuna göre, a + b'nin alabileceği en büyük ve en küçük değeri bulalım.

Çözüm

m ve n aralarında asal sayılar olmak üzere,

$EBOB(a, b) = 15$ olduğuna göre,

$a = 15 \cdot m$ ve $b = 15 \cdot n$ alalım.

$$EKOK(a, b) = EKOK(15 \cdot m, 15 \cdot n) = 15 \cdot m \cdot n \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow 15 \cdot m \cdot n = 180 \Rightarrow m \cdot n = 12 \text{ olur.}$$

$m = 1$ ve $n = 12$ için;

$$a = 15 \cdot m = 15$$

$$b = 15 \cdot n = 180$$

$$a + b = 195 \text{ (en büyük değer) bulunur.}$$

$m = 3$ ve $n = 4$ için;

$$a = 15 \cdot m = 45$$

$$b = 15 \cdot n = 60$$

$$a + b = 105 \text{ (en küçük değer) bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. a ve b pozitif tam sayılardır.

Aşağıdaki ifadelerde a + b'nin alabileceği en büyük ve en küçük değeri bulunuz.

$$\rightarrow EBOB(a, b) = 12 \text{ ve } EKOK(a, b) = 120$$

(132; 84)

$$\checkmark EBOB(a, b) = 10 \text{ ve } EKOK(a, b) = 200$$

(210; 90)

Ne Bilmeliyim? 8

a, b, c sabit x, y, z değişken pozitif tam sayılar olmak şartıyla;

$$A = a \cdot x = b \cdot y = c \cdot z \text{ ise,}$$

A'nın en küçük değeri EKOK(a, b, c) dir.

Nasıl Çözülür?

Örnek

a, b ve c pozitif tamsayılarıdır.

$$A = 12a = 20b = 28c$$

olduğuna göre, A'nın alabileceği en küçük değeri bulalım.

Çözüm

A'nın en küçük değeri, EKOK(12, 20, 28) dir.

12	20	28	2
6	10	14	2
3	5	7	3
1	5	7	5
1	1	7	7
1	1	1	

$$\text{EKOK}(12, 20, 28) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420 \text{ bulunur.}$$

Örnek

A bir doğal sayı, x, y, z birer pozitif tam sayı ve

$$A = 3x + 1 = 5y + 3 = 6z + 4$$

olduğuna göre, A doğal sayısının en az kaç olabileceğini bulalım.

Çözüm



3 ile 1, 5 ile 3, 6 ile 4 arasındaki fark 2 olduğundan eşitliklerin her tarafına 2 ekleyin bakın neler olacak.

$$A + 2 = 3x + 3 = 5y + 5 = 6z + 6$$

$$A + 2 = 3 \cdot (x + 1) = 5 \cdot (y + 1) = 6 \cdot (z + 1) \text{ oldu.}$$

Hocam, bir önceki soruya göre, A + 2; 3'ün, 5'in ve 6'nın ortak katı demek.

A + 2'nin en küçük değeri, EKOK(3, 5, 6) = 30 olur.

$$A + 2 = 30 \Rightarrow A = 28 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?

1. a, b ve c pozitif tam sayılardır.

Aşağıdaki ifadelerle göre, A'nın alabileceği en küçük değeri bulunuz.

$$\rightarrow A = 5a = 6b = 15c$$

(30)

$$\rightarrow A = 3a + 2 = 4a + 2 = 10a + 2$$

(62)

İPUCU

Her taraftan 2 çıkarırsak işler kolaylaşır.

$$\rightarrow A = 8a + 1 = 9b + 2 = 12c + 5$$

(65)

İPUCU

Her tarafa 7 eklemek işi çözer.

Ne Bilmeliyim? 9

EBOB Problemleri

➤ Bir uzunluk, şekil, ürün veya herhangi bir nesnenin daha küçük parçalara ayrıldığı sorular EBOB kullanılarak çözülür.



Bütünden parçaya doğru gidiş varsa EBOB kullanılır. Mesela, bir tarlanın etrafına eşit aralıklarla fidan dikilmesi, bir zeminin eş fayanslarla kaplanması, büyük bidonlardaki yağların küçük şişelere doldurulması... bütünden parçaya gitmektir.

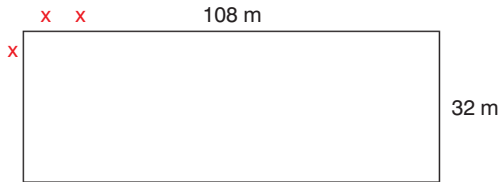
Nasıl Çözülür?

Örnek

Kenar ölçüleri 32 m ve 108 m olan dikdörtgen şeklindeki bir tarlanın etrafına köşeleri de dahil olmak üzere, eşit aralıklarla direk dikilecektir.

Bunun için en az kaç direk gerektiğini bulalım.

Çözüm



Yukarıdaki şekli çizdik. Hemen soruyorum bu soru EBOB sorusu mu? EKOK sorusu mu?

Hocam, ne yalan söyleyeyim hep karıştırıyorum.



Berkin'cim yapacağımız işlem ne? Kenarlara eşit aralıkla direk dikmek. Yani kenarları eşit aralıklara böleceğiz. Bir şeyi bölmek parçalamak demek EBOB sorusu demektir.

İki direk arasındaki mesafe x alınırsa, köşelere de direk dikileceği için x sayısı 32 ve 108'in ortak böleni olmalı ve en az sayıda direk kullanılacağı için de x mümkün olduğu kadar büyük olmalıdır.

O halde,

$$x = \text{EBOB}(32, 108) = 4m \text{ olmalıdır.}$$

$$\text{Direk sayısı} = \frac{\text{Tarlanın çevresi}}{\text{İki direk arasındaki mesafe}} = \frac{2 \cdot (108 + 32)}{4}$$

Direk sayısı = 70 bulunur.

Örnek

120, 165 ve 330 kiloluk üç çuval sırasıyla tuz, şeker ve un ile doludur. Bu üç çuvaldaki ürünler birbirlerine karıştırılmadan ve hiç artmayacak şekilde en büyük ölçekli eşit kapasiteli torbalara doldurulacaktır.

Bu iş için kaç torba gerektiğini bulalım.

Çözüm

Hocam, siz söylemeden ben söyleyeyim ürünleri böleceğimizden bu soru EBOB sorusu.



Aferin... bakın biraz düşününce oluyor.



Her bir torba x kiloluk olsun.



Ürünler birbirine karıştırılmayacak ve hiç artmayacak şartından dolayı x sayısı 120, 165 ve 330 sayılarını tam bölmelidir.

Ayrıca torbalar en büyük ölçekli olacağından x sayısı

EBOB(120, 165, 330) olmalıdır.

$$x = \text{EBOB}(120, 165, 330) = 15 \text{ kilodur.}$$

$$\text{Torba sayısı} = \frac{120 + 165 + 330}{15} = 41 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Boyutları 150 ve 140 m olan iki top kumaş eşit uzunlukta ve en az sayıda parçalara ayrılacaktır.

Parça kumaşların boyunun en çok kaç metre olması gerektiğini bulunuz.

(10)

2. Boyutları 60 m ve 80 m olan dikdörtgen şeklindeki bir bahçenin etrafına köşeleri de dahil olmak üzere eşit aralıklarla ağaçlar dikilecektir.

Bu iş için en az kaç ağaç gerekeceğini bulunuz.

(14)

3. Eni 42 metre, boyu 56 metre olan dikdörtgen biçimindeki bir tarlanın tamamı eş karelere bölünerek küçük bahçeler yapılıyor.

Bu şekilde en az kaç tane eş bahçe elde edileceğini bulunuz.

(12)

4. Nimet sayfa sayıları sırasıyla 342, 396 ve 450 olan Matematik, Türkçe ve Fizik kitaplarını her gün bir branş seçip eşit sayıda sayfa çözerek bitiriyor.

Buna göre, Nimet'in günde en çok kaç sayfa soru çözebileceğini bulunuz.

(18)

5. Üç ülkenin 36, 48 ve 54 kişilik üç sporcu kafilesi bir otele yerleşmişlerdir.

Aynı ülkenin sporcularının aynı odada bulunması ve her odada eşit sayıda sporcunun kalması şartıyla, toplam 138 kişilik bu üç kafiye için en az kaç odaya ihtiyaç olduğunu bulunuz.

(23)

6. 42 litre ayran, 63 litre limonata ve 133 litre su, eşit hacimli şişelere birbirlerine karıştırılmadan doldurulacaktır.

Buna göre, bu iş için en az kaç şişe gerekir?

(34)

Ne Bilmeliyim? 10

EKOK Problemleri

Küçük parçalar bir araya getirilerek daha büyük bir nesnenin oluşturulması sorularında EKOK kullanılır.



Parçadan bütüne doğru gidiş varsa EKOK kullanılır. Mesela, eş dikdörtgenlerle bir kare yapılması, özdeş tuğlalarla bir küp oluşturulması... parçadan bütüne gitmektir..

Nasıl Çözülür?

Örnek

Ayrıtları 4,6 ve 9 cm olan dikdörtgen prizması biçimindeki kutulardan en küçük hacimli küp oluşturulacaktır.

Bu iş için kaç tane kutu gerektiğini bulalım.

Çözüm



Küçük parçaları bir araya getirip daha büyük bir nesne elde edeceğimize göre hangi işlemi yapacağız.

EKOK hocam, artık kaptım meseleyi.

Oluşturulacak küpün bir kenarı x cm olsun.

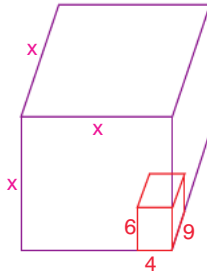
Şekilden de görüleceği gibi x sayısı 4, 6, 9'un ortak katı olacaktır. Yoksa küpte boşluklar kalacaktır.

Küpün en küçük hacimli olması istendiğinden x bu sayıların ortak katlarının en küçüğü olmalıdır.

O halde, yapılacak işlem EKOK bulmak.

$x = \text{EKOK}(4, 6, 9) = 36$ olur.

$$\begin{aligned} \text{Kutu sayısı} &= \frac{\text{Küpün hacmi}}{\text{Bir kutunun hacmi}} = \frac{36 \cdot 36 \cdot 36}{4 \cdot 6 \cdot 9} \\ &= 9 \cdot 6 \cdot 4 = 216 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$



Örnek

Üç koşucu dairesel bir pistte başlangıç noktasından aynı yönde ve aynı anda koşmaya başlıyorlar. 1. koşucu bir turu 48 saniyede, 2. koşucu bir turu 36 saniyede, 3. koşucu bir turu 54 saniyede bitiriyor.

Üç koşucu ilk hareketlerinden sonra tekrar ilk kez bir araya geldiklerinde 2. koşucunun toplam kaç tur atmış olduğunu bulalım.

Çözüm



Üç koşucunun beraber koşmaya başladıktan T saniye sonra başlangıç noktasına yan yana gelmiş olsunlar. T bu sayıların nesidir?



Cevap veriyorum hocam. Tur saniyelerinden büyük olacak ve hepsinde ortak katı olacak. O halde, EKOK'ları olmalı.

$T = \text{EKOK}(36, 48, 54) = 432$ olduğundan bu koşucular her 432 saniyede bir yan yana gelirler.

$$432 \text{ saniyede, 2. koşucu } \frac{432}{36} = 12 \text{ tur atar.}$$

Örnek

4, 5 ve 6 sayıları ile bölündüğünde her seferinde 3 kalanını veren, üç basamaklı 200'den büyük en küçük sayı değerini bulalım.

Çözüm



Kalan olmasaydı bu sayı 4,5 ve 6'nın katı olmalıydık. Ama kalan var. Burada iyi olan kalanın üç sayı içinde aynı olması.

Bu sayı A olsun, A bu üç sayıya tam bölünseydi,

$$A = 4x = 5y = 6z \text{ şeklinde yazılabilirdi.}$$

Ama kalan 3 olduğu için,

$$A = 4x + 3 = 5y + 3 = 6z + 3 \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

$$\Rightarrow A - 3 = 4x + 3 - 3 = 5y + 3 - 3 = 6z + 3 - 3$$

$$\Rightarrow A - 3 = 4x = 5y = 6z$$

$$\Rightarrow A - 3 = \text{EKOK}(4, 5, 6)$$

$$\Rightarrow A - 3 = 60 \Rightarrow A = 63 \text{ tür.}$$

Hocam 200'den büyük en küçük değeri istiyor.



Beni bitirdiniz ya. Aferin size. O halde, EKOK'un yani 60'ın işimize yarayan katlarını alıyoruz. Ne istiyoruz sayımız 200'den büyük olsun.

Buna göre,

$$A - 3 = 60 = 120 = 180 = 240 = 300 = 360 = \dots$$

200'den büyük en küçük değer 240 olduğundan,

$$A - 3 = 240 \Rightarrow A = 243 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Boyutları 36 cm ve 48 cm olan dikdörtgen şeklindeki özdeş levhalar birleştirilerek en küçük alanlı bir kare levha elde edilecektir.

Bu iş için kaç levha gerektiğini bulunuz.

(12)

2. Üç farklı elektronik reklam panosu aynı reklamı sırasıyla 12 dakika, 15 dakika ve 14 dakika aralıklarla göstermektedir.

İlk kez saat 09.00 da üçü birden aynı reklamı gösterdiğine göre, üçünün birden tekrar aynı reklamı en erken saat kaçta göstereceğini bulunuz.

(16.00)

3. Bir sınıftaki öğrenciler 4'er 4'er gruplanınca 2 öğrenci, 7 şer 7 şer gruplanınca da 5 öğrenci artmaktadır.

Buna göre, sınıfta en az kaç öğrenci olabileceğini bulunuz.

(26)

Ne Bilmeliyim? 11



Gerçek Hayatta Periyodik Olarak Tekrar Eden Durumları İçeren Problemler

- Gün problemlerinde 7 günde bir aynı güne gelinir.
- Dijital saatler 24 saatte bir aynı saati gösterir.
- Dijital olmayan yani akrep ve yelkovanlı saatler 12 saatte bir aynı saati gösterir.
- Tekrar eden sayı dizilerinde veya şekillerde sayıların veya şekillerin hangi aralıklarla tekrar ettiği bulunur.

Nasıl Çözülür?



Örnek

Bugün günlerden çarşambadır.

- i. 144 gün sonra hangi gün olduğunu,
ii. 234 gün önce hangi gün olduğunu bulalım.

Çözüm

- i. 7 günde bir aynı güne gelindiğine göre, 144'ü 7 ye bölüp kalanı bulalım.

$$\begin{array}{r} 144 \\ 7 \overline{) 20} \\ \underline{-14} \\ 6 \end{array}$$

4 gün sonrası.

Yani çarşamba gününün 4 gün sonrasıdır.

Çarşamba Perşembe Cuma Cumartesi Pazar

0 1 2 3 4
↓
Pazar günüdür.

- Çarşambayı 0 alıp üstüne 4 gün saydık, dikkat ettiniz değil mi?

- ii. Geriye doğru gitsek te 7 günde bir aynı güne gelinir. Buna göre, 234'ü 7 ye bölüp kalanı bulalım.

Nasıl Çözülür?

$$\begin{array}{r} 234 \overline{) 7} \\ \underline{33} \\ 3 \end{array}$$

3 gün öncesi.

Bu sefer çarşamba gününün 3 gün öncesidir.

Pazar Pazartesi Salı Çarşamba
3 2 1 0



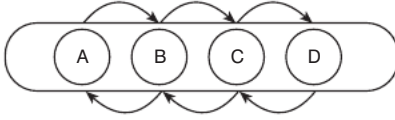
Pazar günüdür.



Çarşambayı 0 alıp geriye doğru 3 gün saydık.

Örnek

Aşağıda dört lambadan oluşan bir reklam panosu gösterilmiştir.



Panodaki lambalar A lambasından başlayarak soldan sağa doğru, D lambasından sonra ise sağdan sola doğru devamlı olarak yanıp sönmektedir. Örneğin, lambalar A-B-C-D-C-B-A-B... sırasında yanıp söndüğünden 8. sırada yanıp sönen lamba B lambasıdır.

Buna göre, 1193. sırada yanıp sönen lambanın hangisi olacağını bulalım.

Çözüm



Bu tip sorularda tekrarın kaçınıcı elemamda başladığını tesbit etmemiz lazımdır.

1. A	} 6 yanıp sönme	7. A	} 6 yanıp sönme
2. B		8. B	
3. C		9. C	
4. D		10. D	
5. C		11. C	
6. B		12. B	

olduğundan her 6 yanıp sönmeden sonra başa dönüldüğünden,

$$\begin{array}{r} 1193 \overline{) 6} \\ \underline{6} \\ 0 \end{array}$$

5 inci sıradaki harf.

O halde, 1193. sırada yanıp sönen lamba, 5. sıradaki C lambasıdır.

Örnek

1. satır	2	4	6	8	10
2. satır	12	14	16	18	20
3. satır	22	24	26	28	30
.					
.					
.					
87. satır			x		

Şekildeki tabloda ardışık çift doğal sayılar, soldan sağa kutucuklara yerleştirilerek sırayla yazılacaktır.

Buna göre 87. satırdaki x sayısının yerine gelecek sayıyı bulalım.

Çözüm

Her satırda 5 tane sayı var, o halde, 86 satırda;

$$5 \cdot 86 = 430 \text{ sayı vardır.}$$

Tablodaki sayılar çift doğal sayılar olduğundan,

$$86. \text{ satırın sonundaki sayı, } 2 \cdot 430 = 860 \text{ dir.}$$

87. satırın 3 üncü sırasındaki sayı;

$$\underline{862} \quad \underline{864} \quad \underline{866} \text{ olur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Üniversite sınavına hazırlanan Ufuk 4 günde bir deneme sınavı çözmektedir.

İlk denemesini salı günü çözen Ufuk'un 18. denemesini hangi gün çözeceğini bulunuz.

(Pazar)

2. Digital bir saatin salı günü 10.00'u gösterdikten 84 saat sonra hangi gün ve kaç gösterceğini bulunuz.

(Cuma - 22.00)

3. 29 Ekim 2022 Cumartesi günü olduğuna göre, 29 Ekim 2023 tarihinin hangi gün olacağını bulunuz.

(Pazar)

4. Bir doktor 4 günde bir nöbet tutmaktadır.
Bu doktor 3. nöbetini pazar günü tuttuğuna göre 9. nöbetini hangi gün tutmuştur?

(Çarşamba)

5. AHMETAHMETAHMET... şeklinde tekrar ederek yazılıyor.

Bu şekilde elde edilen kelimenin soldan 379. harfinin hangi harf olduğunu bulunuz.

(E)

6.

A	1	B	2	C	3	D	4

Yukarıdaki şekilde bulunan 8 lamba, A - 1 - B - 2 - C - 3 - D - 4 - A - 1 - B - 2 - ... sırasıyla yanıp sönmektedir.

Buna göre, bu döngüde 789. sırada yanacak olan lamba hangi harfle gösterilen lamba olduğunu bulunuz.

(C)

7. 2468357924683579... şeklinde tekrar eden bir sayının soldan 873. basamağındaki rakam kaçtır?

(2)

EBOB - EKOK

1.



Şu an saat 17.00 ise 117 saat sonra saat kaç olur?

- A) 14.00 B) 16.00 C) 17.00 D) 18.00 E) 19.00

2. Ardışık iki doğal sayının ortak katlarının en küçüğü ile ortak bölenlerinin en büyüğünün toplamı 241 olduğuna göre, bu sayıların toplamı kaçtır?

- A) 27 B) 28 C) 29 D) 30 E) 31

3.



Bugün günlerden pazartesi ise, 97 gün sonra hangi gün olur?

- A) Salı B) Çarşamba C) Perşembe
D) Cuma E) Pazar

4. İki doğal sayının EBOB'u 6, EKOK'u 420'dir.

Bu sayılardan biri 42 ise diğer sayı kaçtır?

- A) 36 B) 48 C) 60 D) 72 E) 78

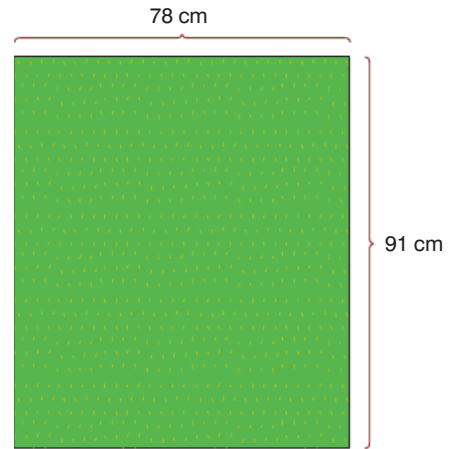
5. a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$K = 3a + 2 = 5b + 4$$

olduğuna göre, K sayısının iki basamaklı en büyük değeri kaçtır?

- A) 99 B) 96 C) 91 D) 89 E) 86

6.



Eni 78 metre, boyu 91 metre olan dikdörtgen biçimindeki bir tarlanın tamamı eş karelere bölünerek küçük bahçeler yapılıyor.

Bu şekilde en az kaç tane eş bahçe elde edilir?

- A) 36 B) 42 C) 45 D) 56 E) 63

7.

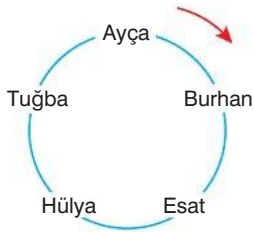


42 litre portakal suyu, 78 litre nar suyu ve 126 litre elma suyu eşit hacimli şişelere birbirlerine karıştırılmadan doldurulacaktır.

Buna göre, bu iş için en az kaç şişe gerekir?

- A) 25 B) 28 C) 35 D) 39 E) 41

8. Dairesel bir oyun alanında konumları şekilde gösterilen Ayça, Burhan, Esat, Hülya ve Tuğba isimli beş oyuncu bir topa oyun oynamaktadır. Bu oyunun her seferinde; elinde top bulunan oyuncu, ok yönünde kendinden sonraki ikinci oyuncuya topu vermektedir.



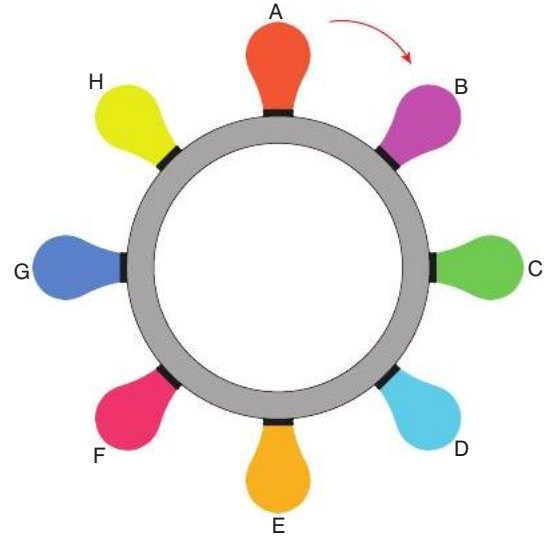
Başlangıçta top Ayça'nın elinde bulunmaktadır ve Ayça'nın topu Esat'a vermesiyle oyun başlamıştır.

Topu 1. seferde Esat, 2. seferde Tuğba almış ve oyun bu şekilde devam etmiştir.

Buna göre, 104. seferde topu kim almıştır?

- A) Ayça B) Burhan C) Esat
D) Hülya E) Tuğba

9.

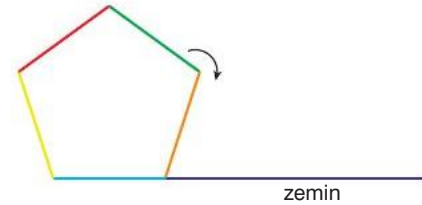


Yukarıdaki çember üzerinde bulunan 8 lamba, A'dan başlayarak saat yönünde, A - B - C - D - E - F - G - H - A - B - C ... düzenine göre yanıp sönüyor.

Buna göre, 139. sırada yanan lamba hangisidir?

- A) B B) C C) D D) E E) F

10.



Yukarıda kenarları farklı renklere boyanmış olan ve mavi kenarı üzerinde duran düzgün beşgen şeklindeki bir cisim ok ile gösterilen yönde her defasında farklı renkte bir kenar zemine değecek şekilde döndürülüyor.

Buna göre, 139. kez döndürüldüğünde zemine temas eden kenarın rengi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) Yeşil B) Kırmızı C) Sarı
D) Turuncu E) Mavi

BÖLÜM 8

ÖĞRENELİM

BASİT EŞİTSİZLİKLER Basit Eşitsizlikler

Ne Bilmeliyim? 1

GERÇEL SAYI ARALIKLARI

a ve b birer gerçel (reel) sayı olmak üzere, $a < b$ olsun.

Kapalı Aralık

a ve b sayıları ile bu sayılar arasında kalan bütün reel sayılar a, b kapalı aralığını oluştururlar.

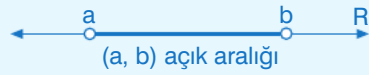
$A = \{x \mid a \leq x \leq b \text{ ve } x \text{ reel sayı}\}$ ise $x \in [a, b]$ dir.



Açık Aralık

$[a, b]$ kapalı aralığından a ve b sayıları çıkarılırsa (a, b) açık aralığı elde edilir.

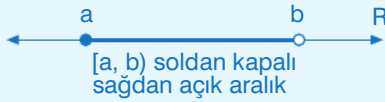
$A = \{x \mid a < x < b \text{ ve } x \text{ reel sayı}\}$ ise $x \in (a, b)$ dir.



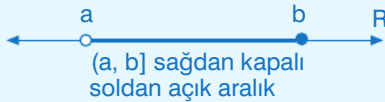
Yarı Açık Aralıklar

$[a, b]$ kapalı aralığından a ve b sayılarından sadece birisi çıkarılırsa yarı açık aralıklar elde edilir.

$A = \{x \mid a \leq x < b \text{ ve } x \text{ reel sayı}\}$ ise $x \in [a, b)$ dir.



$A = \{x \mid a < x \leq b \text{ ve } x \text{ reel sayı}\}$ ise $x \in (a, b]$ dir.



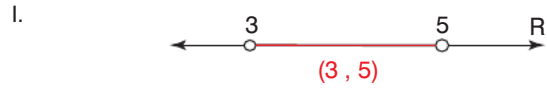
Nasıl Çözülür?

Örnek

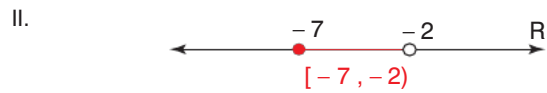
- I. $-3 < x < 5$
- II. $-7 \leq x < -2$
- III. $1 \leq x \leq 6$
- IV. $4 \leq x$ veya $-1 > x$

Yukarıdaki eşitsizlikleri sayı doğrusu üzerinde gösterelim ve aralık olarak yazalım.

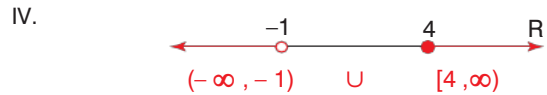
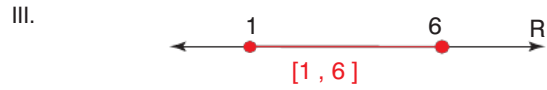
Çözüm



3 ve 5 de eşitlik olmadığından kümemize dahil değildir. Dolayısıyla sayı doğrusu üzerinde dairenin içi boş olarak gösterilir.



-7 dahil olduğu için dairenin içi kapalı, -2 dahil olmadığı için dairenin içi açık olarak gösterildi.



$-\infty$ veya ∞ daima açık parantez ile gösterilir.

" $\cup$ " sembolü, yada "veya" iki kümenin birleşimi, " $\cap$ " sembolü, yada "ve" iki kümenin kesişimi anlamına gelir.

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki aralıkları eşitsizlik olarak yazınız.

$$\rightarrow [5, 17]$$

$$(5 \leq x \leq 17)$$

$$\rightarrow [14, \infty)$$

$$(14 \leq x < \infty)$$

$$\rightarrow (-13, 2]$$

$$(-13 < x \leq 2)$$

$$\rightarrow (-\infty, 9)$$

$$(-\infty < x < 9)$$

$$\rightarrow (-113, -102)$$

$$(-113 < x < -102)$$

$$\rightarrow (-\infty, -5) \cup [10, \infty)$$

$$(-\infty < x < -5 \text{ veya } 10 \leq x < \infty)$$

$$\rightarrow [4, 10)$$

$$(4 \leq x < 10)$$

$$\rightarrow (-\infty, 2] \cup [10, 100)$$

$$(-\infty < x \leq 2 \text{ veya } 10 \leq x < 100)$$

Nasıl Uygularım?



2. Aşağıdaki eşitsizlikleri sayı doğrusunda gösteriniz.

$$\rightarrow 1 < x < 2$$



$$\rightarrow -3 < x < 5$$



$$\rightarrow 3 \leq x \leq 13$$



$$\rightarrow 2 \leq x < 7$$



$$\rightarrow x \leq 5 \text{ ve } x > -2$$



$$\rightarrow x \leq -4 \text{ ve } x > -12$$



$$\rightarrow x < 1 \text{ veya } x \geq 4$$



$$\rightarrow x \leq -3 \text{ veya } x \geq 6$$



Nasıl Uygularım?



3.



Yukarıdaki sayı doğrusu üzerinde gösterilen sayı kümesini yazınız.

$$((-\infty, -4) \cup [-1, \infty))$$

İPUCU

"U" ya da "veya" iki aralığın birleşimi anlamına gelir.

4.



Yukarıdaki sayı doğrusu üzerinde gösterilen sayı kümesindeki en büyük tam sayı ile en küçük tam sayının toplamını bulunuz.

(13)

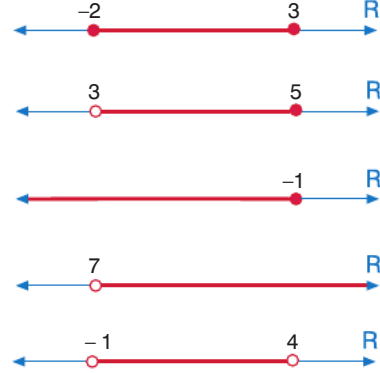
5.



Yukarıdaki sayı doğrusu üzerinde gösterilen sayı kümesindeki en büyük reel sayı değerini bulunuz.

(Bilenemez)

6.

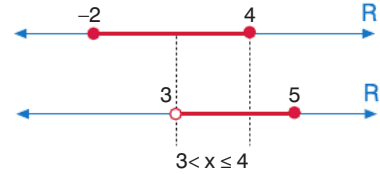


Yukarıdaki sayı doğruları üzerinde gösterilen sayı kümelerinden hangisi aşağıda verilmemiştir?

- A) $[-2, 3]$ B) $(3, 5]$ C) $(-\infty, -1)$
D) $(-1, 4)$ E) $(7, \infty)$

(C)

7.



Yukarıda çözümü gösterilen eşitsizlik sistemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\begin{cases} -2 \leq x \leq 4 \\ 3 < x \leq 5 \end{cases}$
B) $\begin{cases} -2 < x < 4 \\ 3 < x \leq 5 \end{cases}$
C) $\begin{cases} -2 \leq x < 3 \\ 4 < x \leq 5 \end{cases}$
D) $\begin{cases} -2 \leq x \leq 5 \\ 3 < x \leq 4 \end{cases}$
E) $\begin{cases} -2 \leq x \leq 4 \\ 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$

(A)

Basit Eşitsizlikler

Ne Bilmeliyim? 2

x, y birer reel (gerçek) sayı olmak üzere,

➤ Bir eşitsizliğin her iki tarafına aynı sayı eklenebilir veya çıkarılabilir.

$$x < y \text{ ise,}$$

$$x \pm a < y \pm a$$

➤ Bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı **pozitif** sayı ile çarpılabilir veya bölünebilir.

$$x < y \text{ ise,}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot a < y \cdot a \\ \frac{x}{a} < \frac{y}{a} \end{array} \right\} (a > 0)$$

➤ Bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı **negatif** sayı ile çarpılır veya bölünürse **eşitsizlik yön** değiştirir.

$$x < y \text{ ise,}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot a > y \cdot a \\ \frac{x}{a} > \frac{y}{a} \end{array} \right\} (a < 0)$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$-2 < x \leq 5$$

olduğuna göre, $2x + 1$ in bulunacağı aralığı bulalım.

Çözüm



Arkadaşlar eşitsizlik sorularında tek problem negatif sayı ile çarpma veya bölme, bunun dışında normal eşitlik varmış gibi işleme devam.

$$2 < x \leq 5 \Rightarrow -2 \cdot 2 < 2 \cdot x \leq 2 \cdot 5$$

$$\Rightarrow -4 < 2x \leq 10$$

$$\Rightarrow -4 + 1 < 2x + 1 \leq 10 + 1$$

$$\Rightarrow -3 < 2x + 1 \leq 11$$

Buna göre, $2x + 1$ ifadesi $[-3, 11]$ aralığındadır.

Örnek

$-6 < x < 1$ olduğuna göre, $\frac{1-4x}{3}$ in alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulalım.

Çözüm

$$-6 < x < 1 \Rightarrow (-6) \cdot (-4) > (-4) \cdot x > 1 \cdot (-4) \text{ (yönler değişti)}$$

$$\Rightarrow 24 > -4x > -4$$

$$\Rightarrow 24 + 1 > -4x > -4 + 1$$

$$\Rightarrow 25 > -4x > -3$$

$$\Rightarrow \frac{25}{3} > \frac{-4x}{3} > -\frac{3}{3}$$

$$\Rightarrow 8,3 > \frac{-4x}{3} > -1$$

Bu aralıktaki tam sayılar; 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 olduğundan toplamaları 36 olur.

Örnek

$$-4 < x \leq 3 \text{ ve } 3x + y = 2$$

olduğuna göre, y değerlerinin en geniş aralığını bulalım.

Çözüm



x in aralığı verilmiş, x ile y arasındaki bağıntıdan y 'yi x e bağlı yazarsak geriye helva yapmak kalıyor.

$$3x + y = 2 \Rightarrow y = -3x + 2 \text{ dir.}$$

Şimdi, $-4 < x \leq 3$ ifadesinden y 'yi elde edelim.



Önce her tarafı -3 ile çarpalım.

$$\Rightarrow -4 \cdot (-3) > (-3) \cdot x \geq (-3) \cdot 3$$

Hocam, eşitsizlik yönlerini ters yazdınız.



Eveet... Neden yaptım koçum? Çünkü negatif sayı ile çarpma bölme yön değiştirecektik.

$$\Rightarrow 12 > -3x \geq -9$$



Şimdi de her tarafa 2 eklersek işlem tamam.

$$\Rightarrow 12 + 2 > -3x + 2 \geq -9 + 2$$

$$\Rightarrow 14 > -3x + 2 \geq -7$$



Göbekte istediğim ifadeyi yani y 'yi oluşturduk değil mi?

$$\Rightarrow 14 > y \geq -7$$

Buna göre, y nin aralığı $[-7, 14)$ bulunur.

Nasıl Uygularım?



1. $x < 6$ olduğuna göre, aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

$$\rightarrow x + 2$$

$$(-\infty, 8)$$

$$\rightarrow 4x$$

$$(-\infty, 24)$$

$$\rightarrow -5x + 3$$

$$(-27, \infty)$$

$$\rightarrow \frac{x}{3}$$

$$(-\infty, 2)$$

$$\rightarrow -\frac{x+3}{2}$$

$$\left(-\frac{9}{2}, \infty\right)$$

$$\rightarrow \frac{3x-1}{4}$$

$$\left(-\infty, \frac{17}{4}\right)$$

2. $-2 \leq x < 3$ olduğuna göre, aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

$$\rightarrow x - 5$$

$$[-7, -2)$$

$$\rightarrow 7x - 3$$

$$[-17, 18)$$

$$\rightarrow 6 - 5x$$

$$(-9, 16]$$

$$\rightarrow -\frac{x+3}{2}$$

$$\left(-3, -\frac{1}{2}\right]$$

$$\rightarrow \frac{7x-1}{4}$$

$$\left[-\frac{15}{4}, 5\right)$$

Basit Eşitsizlikler

Nasıl Uygularım?



3. $-1 \leq y \leq 3$ ve $x = 3y - 2$

olduğuna göre, x in bulunacağı en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?

$[-5, 7]$

4. $-2 \leq y \leq 4$ ve $y = x + 2$

olduğuna göre, x 'in bulunacağı en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?

$[-4, 2]$

5. $-1 < x \leq 3$ ve $\frac{y-3x}{2} = 2$

olduğuna göre, y 'nin bulunacağı en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?

$(1, 13]$

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$\frac{4x-2}{-5} \leq 3$$

eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm



Çözümüne her iki tarafı -5 ile çarparak başlayacağız. Çarpacağımız sayı negatif olduğu için eşitsizlik yönünde değişiklik yapacağız.

$$\frac{4x-2}{-5} \leq 3 \Rightarrow (-5) \cdot \frac{4x-2}{-5} \geq 3 \cdot (-5)$$

$$\Rightarrow 4x - 2 \geq -15$$

$$\Rightarrow 4x \geq -15 + 2$$

$$\Rightarrow 4x \geq -13 \Rightarrow x \geq -\frac{13}{4}$$

$\left(-\frac{13}{4} \leq x < \infty\right)$ ya da $\left[-\frac{13}{4}, \infty\right)$ bulunur.

Örnek

$$\frac{x-1}{3} \leq \frac{3x+2}{2}$$

eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm



Çözümüne her iki tarafı 2 ile 3'ün ortak katı olan 6 ile çarparak başlayacağız. Çarpacağımız sayı pozitif olduğu için eşitsizlik yönünde değişiklik yapmayacağız.

$$\frac{x-1}{3} \leq \frac{3x+2}{2} \Rightarrow 6 \cdot \frac{x-1}{3} \leq \frac{3x+2}{2} \cdot 6$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (x-1) \leq 3 \cdot (3x+2)$$



Dikkat ettiniz mi? Sadeleştirme yapınca içler dışlar çarpımı yapmış gibi olduk.

$$\Rightarrow 2x - 2 \leq 9x + 6$$

$$\Rightarrow -6 - 2 \leq 9x - 2x$$

$$\Rightarrow -8 \leq 7x$$



Kritik nokta 7 ile bölme, 7 pozitif sayı olduğundan problem yok.

$$\Rightarrow -\frac{8}{7} \leq x$$

$\left(-\frac{8}{7} \leq x < \infty\right)$ ya da $\left[-\frac{8}{7}, \infty\right)$ bulunur.

Nasıl Uygularım?



1. $5x - 3 < 12$
eşitsizliğin çözüm kümesini bulunuz.

$(-\infty, 3)$

2. $3 - 2x \leq 3x - 7$
eşitsizliğin çözüm kümesini bulunuz.

$[2, \infty)$

3. $\frac{7 - 4x}{-3} \geq 7$
eşitsizliğin çözüm kümesini bulunuz.

$[7, \infty)$

4. $\frac{4 - 2x}{3} \leq 5x - 3$
eşitsizliğin çözüm kümesini bulunuz.

$\left[\frac{13}{17}, \infty\right)$

5. $\frac{x + 2}{2} < \frac{3x}{7}$
eşitsizliğin çözüm kümesini bulunuz.

$(-\infty, -14)$

6. $\frac{8 - x}{5} \geq \frac{7 - 2x}{3}$
eşitsizliğin çözüm kümesini bulunuz.

$\left[\frac{11}{7}, \infty\right)$

Basit Eşitsizlikler

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$-3 < \frac{2x-3}{5} \leq 5$$

eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin aralığını bulalım.

Çözüm



İki tarafta eşitsizlik ortada x'e bağlı ifade varsa bir tarafa ne işlem yapıyorsan diğer tarafa da aynı işlemi yapacaksın.



O halde sağ, solu, ortayı yani her yeri paydadaki 5 ile çarparak işe başlayalım. Yön ne olacak yön?

Tabii ki aynen kalacak. Hocam.

$$\begin{aligned} -3 < \frac{2x-3}{5} \leq 5 &\Rightarrow -3 \cdot 5 < \frac{2x-3}{5} \cdot 5 \leq 5 \cdot 5 \\ &\Rightarrow -15 < 2x-3 \leq 25 \\ &\Rightarrow -15 + 3 < 2x-3 + 3 \leq 25 + 3 \\ &\Rightarrow -12 < 2x \leq 28 \\ &\Rightarrow -\frac{12}{2} < \frac{2x}{2} \leq \frac{28}{2} \Rightarrow -6 < x \leq 14 \text{ olur.} \end{aligned}$$

O halde, $x \in (-6, 14]$ bulunur.

Örnek

$$-12 < -3x + 6 \leq 15$$

olduğuna göre, x ifadesinin alabileceği doğal sayıların toplamını bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} -12 < -3x + 6 \leq 15 &\Rightarrow -12 - 6 < -3x + 6 - 6 \leq 15 - 6 \\ &\Rightarrow -18 < -3x \leq 9 \\ &\Rightarrow \frac{-18}{-3} > \frac{-3x}{-3} \geq \frac{9}{-3} \end{aligned}$$



Eşitsizlikte -3'e bölme işlemi yaptığımız için yön değiştirdik.

$$\Rightarrow 6 > x \geq -3$$

Bu aralıktaki doğal sayıların toplamı;

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 15 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan x'in aralığını bulunuz.

$$\rightarrow -9 < 3x \leq 12$$

$$(-3, 4]$$

$$\rightarrow 7 < 6x - 5 \leq 13$$

$$(2, 3]$$

$$\rightarrow 0 \leq \frac{7-2x}{3} \leq 5$$

$$\left[-4, \frac{7}{2}\right]$$

$$\rightarrow -1 < \frac{3+4x}{2} < 4$$

eşitsizliğini sağlayan x'in tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

$$(0)$$

Ne Bilmeliyim? 3

► x ile y aynı işaretli sayılar ise sayılar ters çevrilince eşitsizlik yön değiştirir.

$$x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \text{ dir.}$$

► x ile y ters işaretli sayılar ise sayılar ters çevrilince eşitsizlik yönü aynı kalır.

$$x < y \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y} \text{ dir.}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$2 < \frac{1}{a} < 5$$

olduğuna göre, $10a + 3$ 'ün bulunduğu en geniş aralığı bulalım.

Çözüm

$$2 < \frac{1}{a} < 5 \Rightarrow \frac{1}{2} > a > \frac{1}{5} \text{ (ters çevirdik)}$$

$$\Rightarrow 5 > 10 \cdot a > 2 \text{ (10 ile çarptık)}$$

$$\Rightarrow 5 + 3 > 10a + 3 > 2 + 3 \text{ (3 ekledik)}$$

$$\Rightarrow 8 > 10a + 3 > 5 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$2 \leq b < 7$$

olduğuna göre, $\frac{1}{-5-2b}$ 'nin bulunduğu en geniş aralığı bulalım.

Çözüm

$$2 \leq b < 7 \Rightarrow -4 \geq -2 \cdot b > -14 \text{ (-2 ile çarptık)}$$

$$\Rightarrow -5 - 4 \geq -5 - 2b > -5 - 14 \text{ (-5 ekledik)}$$



– 5 eklemek ile 5 çıkarmak matematiksel olarak aynıdır.

$$\Rightarrow -\frac{1}{9} \leq \frac{1}{-5-2b} < -\frac{1}{19} \text{ (ters çevirdik) bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?

1. $2 \leq x < 8$ olduğuna göre, aşağıdaki ifadelerin değer aralığını bulunuz.

$$\frac{3}{x}$$

$$\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{2}\right]$$

$$\frac{1}{x+2}$$

$$\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{4}\right]$$

$$\frac{4}{2-3x}$$

$$\left[-1, -\frac{2}{11}\right)$$

2. $-6 \leq x < -3$ olduğuna göre, aşağıdaki ifadelerin değer aralığını bulunuz.

$$\frac{3}{x}$$

$$\left[-1, -\frac{1}{2}\right)$$

Basit Eşitsizlikler

Nasıl Uygularım?

$$\rightarrow \frac{1}{x+2}$$

$$\left(-1, -\frac{1}{4}\right]$$

$$\rightarrow \frac{4}{2-3x}$$

$$\left[\frac{1}{5}, \frac{4}{11}\right)$$

3. $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} < 2$ olduğuna göre, aşağıdaki ifadelerin değer aralığını bulunuz.

$$\rightarrow 4x$$

$$(2, 20]$$

$$\rightarrow 2x + 5$$

$$(6, 15]$$

Ne Bilmeliyim? 4

Aynı yönlü eşitsizliklerde taraf tarafa **toplama** yapılabilir. Fakat **çıkarma** yapılamaz.

$$\begin{array}{r} a < x < b \\ c < y < d \\ + \\ a + c < x + y < b + d \end{array}$$



Taraf tarafa toplanan eşitsizliklerin hepsinde birden eşitlik durumu varsa toplanlarına da eşitlik eklenir, bir tanesinde bile eşitlik yoksa toplanlarına eşitlik konulmaz.

$$\begin{array}{r} a \leq x \leq b \\ c < y < d \\ + \\ a + c < x + y \leq b + d \end{array}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

x ve y birer reel sayıdır.

$$-4 \leq x \leq 2 \quad \text{ve} \quad 3 \leq y < 7$$

olduğuna göre, $5x - 2y$ nin alabileceği **en küçük** ve **en büyük** tam sayı değerlerini bulalım.

Çözüm



Verilen eşitsizlikleri düzenleyip, $5x$ in ve $-2y$ nin bulunduğu aralıkları bulup, taraf tarafa toplayalım.

$$-4 \leq x \leq 2 \Rightarrow -4 \cdot 5 \leq 5 \cdot x \leq 2 \cdot 5$$

$$\Rightarrow -20 \leq 5x \leq 10$$

$$3 \leq y < 7 \Rightarrow 3 \cdot (-2) \geq (-2) \cdot y > 7 \cdot (-2)$$

$$\Rightarrow -6 \geq -2y > -14$$



Yöne dikkat edin.....



Şimdi bulduklarımızı yönler aynı olacak şekilde alt alta yazıp taraf tarafa toplayalım.

$$-20 \leq 5x \leq 10$$

$$+ \quad -14 < -2y \leq -6$$

$$-34 < 5x - 2y \leq 4$$

Hocam, -34 'te neden eşitlik koymadık.





Ne demiştik İdil? Eşitlik ancak alt alta yazılan ifadelerin hepsinde olursa konulur, bir tanesinde bile olmasa konulmaz. Burda -20 'de eşitlik var ama -14 'te yok.



$5x - 2y$ nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

Eşitlik olmadığından -33 tür.



$5x - 2y$ nin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

Eşitlik olduğundan 4 tür.



Nasıl Uygularım?



1. x ve y birer reel sayıdır.

$$-3 \leq x \leq 5 \quad \text{ve} \quad -4 \leq y < 0$$

olduğuna göre, aşağıdaki ifadelerin en geniş aralıklarını bulunuz.

$$\rightarrow x + y$$

$$[-7, 5)$$

$$\rightarrow x - y$$

$$(-3, 9]$$

$$\rightarrow 2x + y$$

$$[-10, 10)$$

$$\rightarrow x - 3y$$

$$(-3, 17]$$

$$\rightarrow 3x + 4y$$

$$[-25, 15)$$

$$\rightarrow 5x - 2y$$

$$(-15, 33]$$

Basit Eşitsizlikler

Ne Bilmeliyim? 5

► a, b, c, d reel sayılar olmak üzere,

$$a < x < b \text{ ve } c < y < d$$

eşitsizliklerinde, $x \cdot y$ çarpımının değeri sınırlardaki sayıların çarpımından elde edilen ($a \cdot c$, $a \cdot d$, $b \cdot c$, $b \cdot d$) değerlerden **en büyüğü** ile **en küçüğü** arasındadır.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$-3 < a \leq 4 \text{ ve } -2 \leq b \leq 3$$

olduğuna göre, $a \cdot b$ çarpımının ait olduğu **en geniş aralığı** bulalım.

Çözüm



Yapılacak iş basit; alttaki sınırlarla sınırları birbiriyle çarpacağız, içlerinden en küçüğü alt sınırı, en büyüğü üst sınırı yazacağız, bu kadar kolay.

$$\begin{array}{c} -3 < a \leq 4 \\ -2 \leq b \leq 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \underbrace{(-3) \cdot (-2)} = 6 & \underbrace{3 \cdot 4} = 12 \\ \text{eşitlik yok} & \text{eşitlik var} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \underbrace{4 \cdot (-2)} = -8 & \underbrace{(-3) \cdot 3} = -9 \\ \text{eşitlik var} & \text{eşitlik yok} \end{array}$$

Çarpımlarından en küçüğü -9 , en büyüğü 12 olduğundan,

$$-9 \leq a \cdot b \leq 12 \text{ dir.}$$

Hocam eşitlikleri neye göre yazdık?



Bak benim koçum aslanım, çarptığımız sayılara bakacaksın, her ikisinde de eşitlik varsa çıkan sayıya da eşitlik yazacaksın. Bunun dışında hangi durum olursa olsun eşitlik yazmayacaksın. Tamam mı?

Nasıl Uygularım?

1. x ve y birer reel sayıdır.

Aşağıda verilen aralıklara göre, $x \cdot y$ 'nin bulunacağı **en geniş aralıkları** bulunuz.

$$\rightarrow 2 < x < 5 \text{ ve } 3 < y < 4$$

$$(6, 20)$$

$$\rightarrow -7 \leq x \leq 2 \text{ ve } -6 < y \leq 4$$

$$[-28, 42]$$

$$\rightarrow -5 \leq x < -3 \text{ ve } -9 \leq y < -4$$

$$(12, 45]$$

$$\rightarrow 0 < x < 12 \text{ ve } -5 \leq y < -2$$

$$(-60, 0)$$

Ne Bilmeliyim? 6

- a ve b pozitif reel sayılar ve
 $a < x < b \Rightarrow a^2 < x^2 < b^2$ dir.
- a ve b negatif reel sayılar ve
 $a < x < b \Rightarrow b^2 < x^2 < a^2$ dir.
- a negatif, b pozitif reel sayılar olmak üzere,
 $a < x < b \Rightarrow \begin{cases} |a| < b \Rightarrow 0 \leq x^2 < b^2 \text{ dir.} \\ |a| > b \Rightarrow 0 \leq x^2 < a^2 \text{ dir.} \end{cases}$
- a ve b reel sayılar ve
 $a < x < b \Rightarrow a^3 < x^3 < b^3$
 $\Rightarrow a^5 < x^5 < b^5$ dir.



Her tarafın tek sayı kuvvetini aldığınızda a ve b nin işareti ne olursa olsun eşitsizlik yönünde değişiklik olmaz

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$3 < a < 7 \text{ ve } -4 \leq b < 3$$

olduğuna göre, $a^2 + b^2$ nin bulunduğu en geniş aralığı bulalım.

Çözüm

Hocam, a'da sınırların ikisi de pozitif direkt, kare alıyoruz....

$$7 > a > 3 \Rightarrow 7^2 > a^2 > 3^2 \Rightarrow 49 > a^2 > 9$$

Hocam, b için alt sınır negatif üst sınır pozitif yani direkt kare alamıyoruz.



Evet... Neydi kural? Bu durumda alt sınır hep sıfır olacak, üst sınır ise ikisinin karesinden hangisi büyük ise o olacak.

$$-4 \leq b < 3 \Rightarrow 0 \leq b^2 \leq (-4)^2 \Rightarrow 0 \leq b^2 \leq 16$$

O halde,

$$9 < a^2 < 49$$

$$+ \quad 0 \leq b^2 \leq 16$$

$$9 < a^2 + b^2 < 65 \text{ bulunur.}$$



Sınırlara eşitlik koymadık, acaba neden?

Nasıl Uygularım?

- Aşağıdaki verilen aralıklara göre a^2 ve a^3 'ün bulunduğu aralıkları bulunuz.

$$\rightarrow 3 < a < 7$$

$$(9, 49) \text{ ve } (27, 343)$$

$$\rightarrow -5 < a \leq -2$$

$$[4, 25] \text{ ve } (-125, -8]$$

$$\rightarrow -3 \leq a < 8$$

$$[0, 64] \text{ ve } [-27, 512)$$

$$\rightarrow -5 \leq a < 2$$

$$[0, 25] \text{ ve } [-125, 8)$$

$$\rightarrow -1 \leq a \leq 4$$

$$[0, 16] \text{ ve } [-1, 64]$$

Ne Bilmeliyim? 7

n , 1 den büyük pozitif tam sayı olmak üzere,

1 den büyük sayıların pozitif tam sayı kuvvetlerini alınca sayının değeri **büyür**.

$$x > 1 \Rightarrow x^n > x$$

0 ile 1 arasındaki sayıların pozitif tam sayı kuvvetlerini alınca sayının değeri **küçülür**.

$$0 < x < 1 \Rightarrow x^n < x$$

-1 ile 0 arasındaki sayıların pozitif tam sayı kuvvetlerini alınca sayının değeri **büyür**.

$$-1 < x < 0 \Rightarrow x^n > x$$

-1'den küçük sayıların; pozitif çift tam sayı kuvvetlerini alınca sayının değeri **büyür**, pozitif tek tam sayı kuvvetlerini alınca sayının değeri **küçülür**.

$$x < -1 \Rightarrow \begin{cases} x^{2n} > x \\ x^{2n-1} < x \end{cases}$$



Bu kuralları aklınızda tutamazsanız önemli değil. Bu dört aralıktan birer değer vererek özelliğin ne olduğunu bulabilirsiniz.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$a^2 < a, \quad b^2 > 1 \quad \text{ve} \quad a > b$$

olduğuna göre, b 'nin hangi aralıkta olduğunu bulalım.

Çözüm

$$a^2 < a \Rightarrow 0 < a < 1$$

$$b^2 > 1 \Rightarrow b > 1 \quad \text{veya} \quad b < -1 \quad \text{olur.}$$

$$a > b \quad \text{ve} \quad 0 < a < 1 \quad \text{olduğundan} \quad b < -1 \quad \text{olur.}$$



Bu yukarıdaki durumlar o kadar çok karşınıza çıkacak ki daha veriyi görür görmez düşünmeden karşılıklarını yazacaksınız.

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıda verilen aralıklara göre değer vererek yerine $<$, $>$ işaretlerinden uygun olanı yazınız.

$$\rightarrow x < -1 \quad \text{ise} \quad x^3 \dots x$$

($<$)

$$\rightarrow x < -1 \quad \text{ise} \quad x^4 \dots x^2$$

($>$)

$$\rightarrow 0 > x > -1 \quad \text{ise} \quad x^3 \dots x$$

($>$)

$$\rightarrow 0 > x > -1 \quad \text{ise} \quad x^4 \dots x^2$$

($<$)

2. Aşağıda verilenlere göre a 'nın bulunduğu aralıkları yazınız.

$$\rightarrow a^2 < a$$

(0, 1)

$$\rightarrow a^2 \leq a$$

[0, 1]

$$\rightarrow a \leq a^2$$

$(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$

$$\rightarrow 0 \leq a^2 \leq 1$$

[-1, 1]

Ne Bilmeliyim? 8



Bazı sorularda, soruda verilen öncüllerde, eşitsizlik kuralları kullanılarak istenilen ifadelerin işaretleri bulunur.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$x \cdot z < 0 < y - z$$

$$x \cdot z > x \cdot y$$

olduğuna göre, x , y ve z yi sıralayalım.

Çözüm



Öncelikle kesin veriler elde edebileceğimiz verilerden işe koyulalım.

$$0 < y - z \text{ ise } z < y \text{ dir. (I)}$$



y ile z yi sıralamak kolay oldu sıra geldi x 'e.



Bir tane daha verimiz var.

$$x \cdot z > x \cdot y$$



Her tarafı x e bölelim bölmesine de bölmede işaret önemli x pozitif mi negatif mi bilmiyoruz. O halde iki durumu da göz önüne almalıyız.

$$x > 0 \Rightarrow \frac{x \cdot y}{x} > \frac{x \cdot z}{x} \Rightarrow z > y \text{ 'yi bulduk da, bu (I) deki ve-riyle uyuşmadı.}$$

$$x < 0 \Rightarrow \frac{x \cdot z}{x} < \frac{x \cdot y}{x} \Rightarrow z < y \text{ bu ifade (I) deki veriyle aynı, o zaman işlem tamam } x \text{ negatifmiş.}$$



$x \cdot z < 0$ ise buradan çıkan sonuç x ile z ters işaretlidir. Ama hangisi pozitif? Buraya dikkat...



x i negatif bulduk, o zaman z ile x ters işaretli olacağından z pozitiftir. Şimdi verileri birleştirelim.

$x < 0$ olduğundan $z > 0$ dolayısıyla $x < z$ olur. $z < y$ bilgisini de önceden bulmuştuk.

Buna göre, $x < z < y$ bulunur.

Örnek

a , b , c reel (gerçek) sayılardır.

$$a \cdot b < 0$$

$$b \cdot c > 0$$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $a \cdot c > 0$

B) $a - b > 0$

C) $a - b < 0$

D) $a \cdot b \cdot c > 0$

E) $\frac{a}{c} < 0$

Çözüm



Verilenleri bir inceleyelim bakalım ne bulucuz. Daima doğru olanı anyoruz.

$$a \cdot b < 0 \Rightarrow a \text{ ile } b \text{ ters işaretlidir.}$$

$$b \cdot c > 0 \Rightarrow b \text{ ile } c \text{ aynı işaretlidir.}$$

Buna göre, a , b , c nin işaret tablosu iki şekilde olabilir.

a	b	c
+	-	-
-	+	+



Tabloda a ile c ters işaretli olduğundan $a \cdot c < 0$ dır. Buna göre, A seçeneği yanlıştır.

a pozitif, b negatif değer alırsa, $a - b$ pozitiftir.

Ancak a negatif, b pozitif değer alırsa, $a - b$ negatiftir.

Hocam, ne oldu? Ne yapacağız şimdi, doğru mu? Yanlış mı? Diyeceğiz.



Zeynebimm, soruda daima dediği için değişkenlik gösteren B ve C seçeneği doğru cevap olamaz.

a pozitif, b ve c negatif değer alırsa, $a \cdot b \cdot c$ çarpımı pozitiftir. Ancak a negatif, b ve c pozitif değer alırsa $a \cdot b \cdot c$ çarpımı negatiftir.

Hocam, burda da net birşey yok D seçeneği de doğru cevap olamaz.

$$a \text{ ile } c \text{ ters işaretli olduğundan } \frac{a}{c} < 0 \text{ olur.}$$

Burada kesinlik var. O halde doğru seçenek E seçeneğidir.



Yiğithan sınıfın en uyanığı sen misin? Biz uğraştık son sözü sen söyledin.

Nasıl Uygularım?



1. x, y ve z gerçel sayı olmak üzere,

$$x < 0 < y < z$$

olduğuna göre, “...” yerine “<”, “>” veya “bilinemez” ifadelerinden uygun olanını yazınız.

$$\rightarrow x + y \dots 0$$

(bilinemez)

$$\rightarrow x \cdot y \cdot z \dots 0$$

(<)

$$\rightarrow xy \dots yz$$

(<)

$$\rightarrow xy \dots xz$$

(>)

$$\rightarrow \frac{y-z}{y+z} \dots 0$$

(<)

$$\rightarrow x^2 \dots y^2$$

(bilinemez)

$$\rightarrow x^3 \dots y^3$$

(<)

$$\rightarrow \frac{1}{x} \dots \frac{1}{y}$$

(<)

2. x, y gerçel sayıları için

$$x \cdot y < 0 < x - y$$

eşitsizlikleri sağlanıyor.

Aşağıdaki ifadelerde “...” yerine “<”, “>” veya “bilinemez” ifadelerinden uygun olanını yazınız.

$$\rightarrow y \dots 0$$

(<)

$$\rightarrow x \dots 0$$

(>)

$$\rightarrow x + y \dots 0$$

(bilinemez)

$$\rightarrow -2x \dots -2y$$

(<)

$$\rightarrow \frac{y}{x} \dots 1$$

(<)

$$\rightarrow x^2 \dots y^2$$

(bilinemez)

$$\rightarrow x^3 \dots y^3$$

(>)

$$\rightarrow \frac{1}{x} \dots \frac{1}{y}$$

(>)

Ne Bilmeliyim? 9

x ve y tam sayılar olmak üzere,

$a < x < b$, $c < y < d$ olmak üzere, x ile y ye bağlı bir ifadenin alabileceği en küçük ve en büyük değer soruluyorsa; x ve y'ye verilen aralıklara uygun tam sayı değerleri seçilerek ifadede yerine yazılarak sonuca gidilir.

Nasıl Çözülür?

Örnek

x ve y birer tam sayıdır.

$$-4 \leq x < 3 \quad \text{ve} \quad -5 < y \leq 6$$

olduğuna göre,

- I. $x + y$ nin en büyük ve en küçük değerini,
- II. $x - y$ nin en büyük ve en küçük değerini,
- III. $x^2 + y^2$ nin en büyük ve en küçük değerini,
- IV. $x \cdot y$ nin en küçük değeri ile en büyük değerini bulalım.

Çözüm



Sorunun başına dikkat edin, ne diyor orda, x ve y tam sayı. O zaman taraf tarafa toplama, çıkarma, çarpma falan filan hiçbir işlem yapmıyoruz yapılacak tek şey x ve y'ye değer vermektir.

- I. $x + y$ nin en büyük değeri için,
 $x = 2$ ve $y = 6$ alınırsa, $x + y = 2 + 6 = 8$ olur.
 $x + y$ nin en küçük için,
 $x = -4$ ve $y = -4$ alınırsa, $x + y = -4 - 4 = -8$ olur.
- II. $x - y$ nin en büyük değeri için,
 $x = 2$ ve $y = -4$ alınırsa, $x - y = 2 - (-4) = 6$ olur.
 $x - y$ nin en küçük değeri için,
 $x = -4$ ve $y = 6$ alınırsa, $x - y = -4 - 6 = -10$ olur.
- III. $x^2 + y^2$ nin en büyük değeri için,
 $x = -4$ ve $y = 6$ alınırsa, $x^2 + y^2 = (-4)^2 + 6^2 = 52$ olur.



Dikkat edin... Mesele kare almak olunca sayının negatifliği önemli değil, önemli olan karesini alınca büyük olmasıdır.

$x^2 + y^2$ nin en küçük değeri için,

$$x = 0 \quad \text{ve} \quad y = 0 \quad \text{alınırsa,} \quad x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0 \quad \text{olur.}$$

IV. $x \cdot y$ nin en küçük değeri için,

$$x = -4 \quad \text{ve} \quad y = 6 \quad \text{alınırsa,} \quad x \cdot y = (-4) \cdot 6 = -24 \quad \text{olur.}$$

$x \cdot y$ nin en büyük değeri için,

$$x = -4 \quad \text{ve} \quad y = -4 \quad \text{alınırsa,} \quad x \cdot y = (-4) \cdot (-4) = +16 \quad \text{olur.}$$

Nasıl Uygularım?

1. x ve y birer tam sayıdır.

- I. $x + y$
- II. $3x - 2y$
- III. $x \cdot y$
- IV. $x^2 + y^2$

Aşağıda verilen her bir aralık için yukarıdaki ifadelerin alabileceği en büyük ve en küçük değerlerini bulunuz.

$$\rightarrow -4 \leq x < -1 \quad \text{ve} \quad 2 \leq y \leq 5$$

- I. 3 ve -2
- II. -10 ve -22
- III. -4 ve -20
- IV. 41 ve 8

$$\rightarrow -2 \leq x \leq 5 \quad \text{ve} \quad -6 < y \leq -3$$

- I. 2 ve -7
- II. 25 ve 0
- III. 10 ve -25
- IV. 50 ve 9

Basit Eşitsizlikler

Ne Bilmeliyim? 10



Eşitsizlik problemlerinde önce ne deniyor iyi anlayacağız. Sonra uygun eşitsizliği yazacağız. En son olarak kurallarımıza uygun olarak eşitsizliği çözeceğiz.

Nasıl Çözülür?

Örnek

Birinci kalite elmaların kasasındaki elma sayısı 100 ila 120 tanedir.

Birinci kalite olarak ayrılan elmaların tanesinin ağırlığı 150 ila 175 gram olduğuna göre, birinci kalite elma dolu bir kasadaki elmaların toplam ağırlığının hangi aralıkta olduğunu bulalım. (Sınır değerler dahil.)

Çözüm



Çözüme bir hatırlatma ile başlayalım. "100 ila 120 tanedir." 100 ila 120 arasında demektir.

Bir kasadaki elma sayısı.

$$100 \leq k \leq 120$$

Bir elmanın ağırlığı.

$$150 \leq e \leq 175$$



Bir kasanın ağırlığını bulmak için bu eşitsizlikleri çarpacağız. Her iki eşitsizlikte de alt ve üst sınır pozitif olduğundan direkt taraf tarafa çarpılabilir.

Hocam, yani sınırları çarpıp en büyük en küçük araştırması yapmamıza gerek yok.



Buse'cim sen bir tanesin.

$$100 \leq k \leq 120$$

$$150 \leq e \leq 175$$

$$100 \cdot 150 \leq k \cdot e \leq 120 \cdot 175$$

$$\Rightarrow 15000 \leq k \cdot e \leq 21000$$



O halde, bir kasa birinci kalite elmanın ağırlığı 15000 gram (15 kilo) ile 21000 gram (21 kilo) arasındaymış.

Örnek



°C : Sıcaklığın Celcius ölçeği

K : Kelvin sıcaklık ölçeği

olmak üzere, Kelvin ile Celcius değerleri arasında;

$$^{\circ}\text{C} = \text{K} - 273,15 \text{ bağıntısı vardır.}$$

Celcius ölçeğine göre bir şehrin sıcaklığı bir ay içerisinde,

$-8^{\circ} < ^{\circ}\text{C} < 6^{\circ}$ olduğuna göre, Kelvin sıcaklık ölçeğine göre sıcaklığın alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

Çözüm



Verilen sıcaklık derecesi Celcius türünden sorulan ise Kelvin türünden. Celcius ile Kelvin arasındaki ilişkide verilmiş o halde, ne yapacağız?

Hocam, verilen eşitsizlikte $^{\circ}\text{C} = \text{K} - 273,15$ yi yerine yazarsak istenileni buluruz.



Aferin Buse.

$$-8^{\circ} < ^{\circ}\text{C} < 6^{\circ}$$

$$\Rightarrow -8 < \text{K} - 273,15 < 6$$

$$\Rightarrow 273,15 - 8 < \text{K} < 6 + 273,15$$

$$\Rightarrow 265,15 < \text{K} < 279,15 \text{ olur.}$$

Buna göre, K'nin alabileceği en büyük tam sayı değeri 279 bulur.

Nasıl Uygularım?

1. Bir işçiye yaptığı mesai saatine (T) göre verilecek ücret (M) iki farklı şekilde hesaplanmaktadır;

I. $M = 3T - 10$

II. $M = 2T + 3$

Ücret hesaplamasında I. bağıntıyı seçen bir işçi II. duruma göre daha az mesai ücreti aldığına göre, T'nin alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

(9)

2. Ankara'dan İstanbul'a iki ayrı yoldan gidilebilmektedir.

Otomobil yolu : $2a + 120$ km

Hızlı tren yolu : $3a - 60$ km

Otomobil yolu, tren yolundan daha uzun olduğuna göre, a'nın alabileceği değerlerin aralığını bulunuz.

(20, 180)

- 3.



Berk'in boyu 120 cm, abisinin boyu $(3x - 60)$ cm, kardeşinin boyu $(x + 40)$ cm'dir.

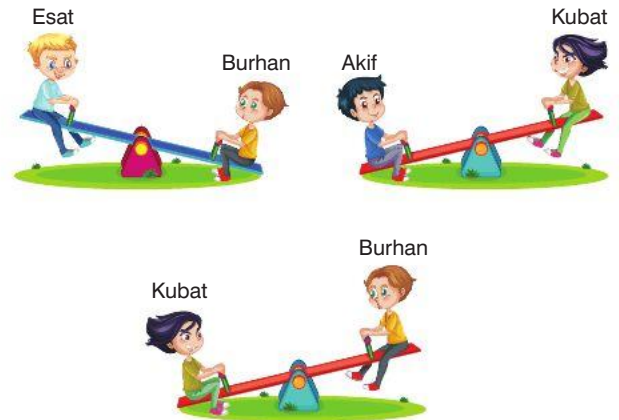
Buna göre, x'in alabileceği değerlerin aralığını bulunuz.

İPUCU

Boy sıralaması Kardeş < Berk < Abi şeklinde olmalıdır değil mi?

(60, 80)

4. Esat, Burhan, Kubat ve Akif isimli dört arkadaşın aynı tahterevalliye ikişer ikişer bindiklerinde aşağıdaki görüntüler oluşmuştur.

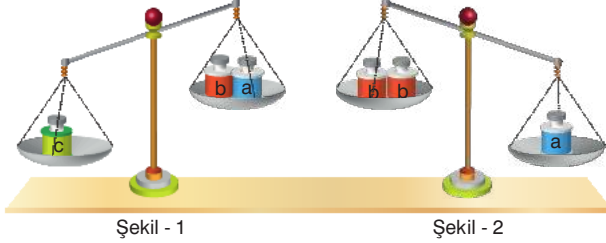


Buna göre, bu kişilerin ağırlıklarını sıralayınız.

(Esat < Burhan < Kubat < Akif)

Basit Eşitsizlikler

1.



Şekil - 1

Şekil - 2

Yukarıdaki şekillerde, terazilerin kefelerindeki yüklere göre konumları gösterilmiştir.

Buna göre, a , b ve c ağırlıklarının kütlelerinin sıralaması aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $a > b > c$ B) $a > c > b$ C) $c > a > b$
D) $c > b > a$ E) $b > c > a$

2.

$$-3 < x \leq 5$$

olmak üzere $3 - 4x$ ifadesi $[a, b]$ aralığında olduğuna göre, $a - b$ kaçtır?

- A) 32 B) -12 C) -10 D) -32 E) -42

3.

$0 < x < 1$ olmak üzere,

$$a = x^2$$

$$b = x^3$$

$$c = \frac{1}{x^2}$$

olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

- A) $a < b < c$ B) $b < a < c$ C) $b < c < a$
D) $c < a < b$ E) $c < b < a$

İPUCU

x 'e değer vermek size +1 net getirir.

4.

a bir gerçel sayı olmak üzere, $x - 3 \leq a$ eşitsizliği ile ilgili aşağıdakiler bilinmektedir.

- $x = -2$ bu eşitsizliği sağlar.
- $x = 3$ bu eşitsizliği sağlamaz.

Buna göre, a sayısının alabileceği değerleri ifade eden en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, -5]$ B) $[0, 4)$ C) $[-5, 0)$
D) $(0, 5]$ E) $[0, \infty)$

İPUCU

Eşitsizlik; $x = -2$ için doğru, $x = 3$ için yanlış olmalı.

5.

m, n, k negatif reel sayılardır.

$$\frac{n}{m} > \frac{k}{m}$$

$$k \cdot n > m \cdot n$$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $n < m < k$ B) $k < n < m$ C) $k < m < n$
D) $m < n < k$ E) $n < k < m$

İPUCU

Üstteki eşitsizliği m ile çarpın, alttaki eşitsizliği n ye bölün. Aman dikkat m ve n negatif sayılar.

6.

x, y ve z gerçel sayıları için

$$x \cdot z < 0 < y < x - y$$

olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

- A) $x < y < z$ B) $x < z < y$ C) $y < x < z$
D) $y < z < x$ E) $z < y < x$

İPUCU

x mi büyük y mi bunu bulunca z belli olur.

Basit Eşitsizlikler

7. a ve b reel sayılar olmak üzere,

- $-5 < a < 6$
- $-\frac{7}{2} < b < \frac{11}{4}$

olduğuna göre,

- I. a'nın en küçük değeri -4,9'dur.
- II. b'nin alabileceği 6 farklı değer vardır.
- III. b'nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı -3'tür.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve III
D) Yalnız II E) II ve III

8. x ve y birer gerçel sayı, $z < y < 0 < x$ olduğuna göre,

- I. $x + z < 0$
- II. $x \cdot z > x \cdot y$
- III. $x \cdot (y + z) < 0$

ifadelerinden hangileri her zaman doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II
D) I ve III E) II ve III

9. Burhan, öğle yemeğinde birer porsiyon olarak verilen çorba, pilav ve et yemeği seçeneklerinden iki tanesini parasının miktarına göre seçecektir.

Burhan, yapabileceği seçimlerde ödemesi gereken tutar ile ilgili olarak parasının miktarının

- pilav ve et yemeği seçtiğinde aştığını,
- pilav ve çorba seçtiğinde aşmadığını,
- et yemeği ve çorba seçtiğinde tam olarak yettiğini

hesaplamıştır.

Birer porsiyon çorba, pilav ve et yemeğinin fiyatları sırasıyla Ç, P ve E olduğuna göre, bu değerlerin doğru sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\text{Ç} < P \leq E$ B) $\text{Ç} \leq P < E$ C) $P \leq \text{Ç} < E$
D) $P \leq E < \text{Ç}$ E) $E \leq P < \text{Ç}$

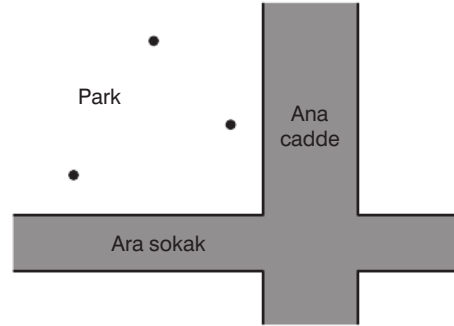
10.

- I. Bugün hava sıcaklığı -4 ile 12 derece arasında değişecek.
- II. Bu araç 100 km'lik bir mesafede 9 ile 12 litre benzin tüketiyor.
- III. Bir inek bir günde en çok 30 litre süt vermektedir.
- IV. Bazı bitkiler boyları 10 cm iken dikilir. Bu bitkilerin boyları 140 cm'yi geçmez.

Yukarıdaki ifadelerin hepsinin aralık olarak ifadesi aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

	I	II	III	IV
A)	$[-4, 12]$	$[9, 12]$	$(0, 30]$	$[10, 140]$
B)	$(-4, 12)$	$[9, 12]$	$[0, 30]$	$[10, 140]$
C)	$[-4, 12]$	$(9, 12]$	$(0, 30]$	$[10, 140]$
D)	$(-4, 12)$	$[9, 12]$	$(-\infty, 30]$	$[10, 140]$
E)	$(-4, 12)$	$[9, 12]$	$[0, 30]$	$[10, 140]$

11. Aşağıda şekilde birbirleriyle dik kesişen ve her bir kenarı doğrusal olan bir ana cadde ile bir ara sokak arasında kalan parkta bulunan tahteravalli, salıncak ve kaykayın konumlarını belirtilen üç nokta gösterilmiştir.



Bu parktaki oyun aletlerinden ana caddeye en yakın olanı kaykay, en uzak olanı ise tahteravallidir.

Buna göre, ara sokağa en yakın olan oyun aletinden en uzak olan oyun aletine doğru sıralama aşağıdakilerden hangisidir?

- A) Tahteravalli - Kaykay - Salıncak
B) Tahteravalli - Salıncak - Kaykay
C) Kaykay - Salıncak - Tahteravalli
D) Kaykay - Tahteravalli - Salıncak
E) Salıncak - Kaykay - Tahteravalli

BÖLÜM 9

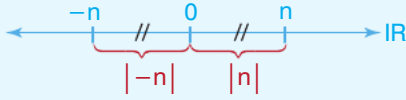
ÖĞRENELİM

MUTLAK DEĞER Mutlak Değer

Ne Bilmeliyim? 1

MUTLAK DEĞER

- Bir n reel sayısının sayı doğrusu üzerinde eşlendiği noktanın sıfır noktasına olan uzaklığına n sayısının mutlak değeri denir ve $|n|$ şeklinde gösterilir.



$$|n| = \begin{cases} n, & n > 0 \text{ ise} \\ 0, & n = 0 \text{ ise} \\ -n, & n < 0 \text{ ise dir.} \end{cases}$$



Mutlak değer gördüğünüz zaman yapılacak iş; verilen yardımcı bilgiye göre mutlak değer için işaretini bulmaktır, mutlak değer içindeki ifade, pozitif ise aynen dışarı çıkar, negatif ise (-) ile çarpılarak dışarı çıkar.

Nasıl Çözülür?

$$✓ \quad |7| = +7$$

$$✓ \quad |-8| = -(-8) = +8$$

$$✓ \quad |-5| + |-4| + |3| = (-(-5)) + (-(-4)) + (+3) \\ = 5 + 4 + 3 = 12 \text{ bulunur.}$$

$$✓ \quad |2| + |0| - |-9| = (+2) + 0 - (-(-5)) \\ = 2 + 0 - 5 = -3 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.

$$\rightarrow |11| \quad (11)$$

$$\rightarrow |-13| \quad (13)$$

$$\rightarrow |-18| + |7| \quad (25)$$

$$\rightarrow |-12| - |5| \quad (7)$$

$$\rightarrow -|-20| + |-9| \quad (-11)$$

$$\rightarrow |-3| - |-7| - |4| \quad (-8)$$

$$\rightarrow \frac{|-3-4| + |-2+7|}{|-2|} \quad (6)$$

Nasıl Çözülür?



$$\begin{aligned}
 \checkmark \quad & |-17 + 6| - |9 - 3| = \underbrace{|-11|}_{-} - \underbrace{|6|}_{+} \\
 & = (-(-11)) - (+6) \\
 & = 11 - 6 = 5 \text{ bulunur.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \checkmark \quad & \left| \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right| - \left| -\frac{1}{12} - \frac{3}{4} \right| = \left| \frac{1-3}{6} \right| - \left| \frac{-1-9}{12} \right| \\
 & = \underbrace{\left| \frac{-2}{6} \right|}_{-} - \underbrace{\left| \frac{-10}{12} \right|}_{-} \\
 & = -\left(\frac{-2}{6} \right) - \left(-\left(\frac{-10}{12} \right) \right) \\
 & = \frac{2}{6} - \frac{10}{12} = \frac{4-10}{12} = \frac{-6}{12} \\
 & = -\frac{1}{2} \text{ bulunur.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow & \underbrace{|\sqrt{7} - \sqrt{8}|}_{-} - \underbrace{|\sqrt{11} - \sqrt{7}|}_{+} \quad (\sqrt{7} < \sqrt{8}, 0 > \sqrt{7} - \sqrt{8}) \\
 & \quad \quad \quad (\sqrt{7} < \sqrt{11}, 0 < \sqrt{11} - \sqrt{7}) \\
 & = -(\sqrt{7} - \sqrt{8}) - (+(\sqrt{11} - \sqrt{7})) \\
 & = -\sqrt{7} + \sqrt{8} - \sqrt{11} + \sqrt{7} = \sqrt{8} - \sqrt{11} \text{ bulunur.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow & \underbrace{|\sqrt{5} - 2|}_{+} + \underbrace{|\sqrt{5} - 3|}_{-} \quad (\sqrt{4} = 2 < \sqrt{5}, 0 < \sqrt{5} - 2) \\
 & \quad \quad \quad (\sqrt{9} = 3 > \sqrt{5}, 0 > \sqrt{5} - 3) \\
 & = +(\sqrt{5} - 2) + (-(\sqrt{5} - 3)) = \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} + 3 = -1 \text{ bulunur.}
 \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.

$$\rightarrow |-7 + 4| - |1 - 4| \quad (0)$$

$$\rightarrow \left| \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \right| + \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right| \quad \left(\frac{2}{15} \right)$$

$$\rightarrow |\sqrt{2} - 2| + |3 - \sqrt{2}| \quad (5 - 2\sqrt{2})$$

$$\rightarrow |\sqrt{2} - 2| - |2 - \sqrt{3}| \quad (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$\rightarrow |\sqrt{5} - \sqrt{6}| + |3 - \sqrt{6}| - |-\sqrt{5}| \quad (3 - 2\sqrt{5})$$

Nasıl Çözülür?



Örnek

$a = 2$ olduğuna göre,

$$|3a - 5| + |7 - 4a|$$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$a = 2$ için;

$$\begin{aligned} |3a - 5| + |7 - 4a| &= |3 \cdot 2 - 5| + |7 - 4 \cdot 2| \\ &= |2| + |-1| \\ &\quad + \quad - \\ &= (+2) + (-(-1)) \\ &= 2 + 1 = 3 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$a = -3$ olduğuna göre,

$$|5a| + |-a|$$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$a = -3$ için;

$$\begin{aligned} |5a| + |-a| &= |5 \cdot (-3)| + | -(-3) | \\ &= |-15| + |+3| \\ &\quad - \quad + \\ &= (-(-15)) + (+3) \\ &= +15 + 3 = 18 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. $a = 2$ olduğuna göre,

$$|2a - 3| + |7 - 3a|$$

ifadesinin değerini bulunuz.

(2)

2. $a = -3$ olduğuna göre,

$$|a - 5| + |3 - a|$$

ifadesinin değerini bulunuz.

(14)

3. $x = -3$ için

$$||5 - 2x| - 13|$$

ifadesinin değerini bulunuz.

(2)

4. $x = -2, y = 3$ için

$$|2x - y| - |x + y| + |-x|$$

işleminin sonucu kaçtır?

(8)

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$x > 5 \text{ için, } |x - 4| + |5 - x|$$

toplamını bulalım.

Çözüm



Yardımcı bilgi $x > 5$, şimdi bu bilgiye göre mutlak değerlerin içlerinin işaretini bulalım.

$$x > 5 \text{ için, } x - 4 > 0 \text{ dir.}$$

$$|x - 4| = x - 4 \text{ tür.}$$

$$x > 5 \text{ için, } 5 - x < 0 \text{ dir.}$$

$$|5 - x| = -(5 - x) = x - 5 \text{ tir.}$$

$$\text{Buna göre, } x > 5 \text{ için,}$$

$$|x - 4| + |5 - x| = x - 4 + x - 5 = 2x - 9 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$-3 < x < 2 \text{ için, } |x + 3| - 2|x - 1| - 3x + 5$$

ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm



$-3 < x < 2$ aralığından bir sayı seçelim, örneğin $x = 0$ için mutlak değer içlerinin işaretini bulalım.

Hocam herkes farklı değer seçerse sonuç farklı çıkar.



Berra'cım bulacağımız değere değil, mutlak değerinin içinin pozitif mi, negatif mi olduğuna bakacağız.

$$x = 0 \text{ için, } x + 3 = 0 + 3 = 3 > 0 \text{ dir.}$$

$$\text{Yani, } |x + 3| = x + 3 \text{ tür.}$$

$$x = 0 \text{ için, } x - 1 = 0 - 1 = -1 < 0 \text{ dir.}$$

$$\text{Yani, } |x - 1| = -(x - 1) = -x + 1 \text{ dir.}$$

$$\text{Buna göre, } -3 < x < 2 \text{ için,}$$

$$|x + 3| - 2|x - 1| - 3x + 5 = x + 3 - 2 \cdot (-x + 1) - 3x + 5$$

$$\Rightarrow = x + 3 + 2x - 2 - 3x + 5 = 6 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$x < y < 0 < z \text{ olduğuna göre,}$$

$$|x + y| + |y - z| - |x - y|$$

ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm



Mutlak değerden kurtulmak için yardımcı bilgi var mı? O halde, problem yok, mutlak değer içerisindeki ifadelerin işaretini bulalım.

$$x < y < 0 \text{ ise } x + y < 0 \text{ olduğundan, içeriği } (-) \text{ ile çarpıp dışarı yazalım.}$$

$$|x + y| = -(x + y) = -x - y \text{ dir.}$$

$$y < 0 < z \text{ ise } y - z < 0 \text{ olduğundan, içeriği } (-) \text{ ile çarpıp dışarı yazalım.}$$

$$|y - z| = -(y - z) = -y + z \text{ dir.}$$

$$x < y \text{ ise } x - y < 0 \text{ olduğundan, içeriği } (-) \text{ ile çarpıp dışarı yazalım.}$$

$$|x - y| = -(x - y) = -x + y \text{ dir.}$$



Yukandaki işaret bulma işlemlerinde problem yaşıyorsanız, basit eşitsizlik konusu tam anlaşılmamış demektir.

$$\text{Buna göre,}$$

$$|x + y| + |y - z| - |x - y|$$

$$= (-x - y) + (-y + z) - (-x + y)$$

$$= -x - y - y + z + x - y$$

$$= z - 3y \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.

→ $x < 0$ olmak üzere,

$$|x|$$

$(-x)$

→ $x \leq -5$ olmak üzere,

$$|x|$$

$(-x)$

→ $a > 0$ olmak üzere,

$$|a|$$

(a)

→ $a > 4$ olmak üzere,

$$|a|$$

(a)

→ $1 < a < 3$ olmak üzere,

$$|a - 4|$$

$(4 - a)$

→ $-2 < a < -7$ olmak üzere,

$$|a + 10|$$

$(a + 10)$

2. Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.

→ $-3 < x < 3$ olmak üzere,

$$|x + 3| - |x - 3| + 2$$

$(2x + 2)$

→ $1 < x \leq 10$ olmak üzere,

$$|x - 1| - |10 - x| + x$$

$(3x - 11)$

→ $1 < x \leq y < 2$ olmak üzere,

$$|x - 1| - |y - 2| + |y - x|$$

$(2y - 3)$

Nasıl Uygularım?



3. $a > 0 > b$ olduğuna göre, aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.

$$\rightarrow |a| - |b|$$

$$(a + b)$$

$$\rightarrow |b - a| - |-a| - |-b|$$

$$(0)$$

$$\rightarrow |a - b| + |ab| + ab$$

$$(a - b)$$

4. $a < b < 0 < c$ olduğuna göre, aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.

$$\rightarrow |a| + |c|$$

$$(c - a)$$

$$\rightarrow |-a| + |-c|$$

$$(c - a)$$

$$\rightarrow |a| - |-b| - |-c|$$

$$(b - a - c)$$

$$\rightarrow |a| + |c - a|$$

$$(c - 2a)$$

$$\rightarrow |b - a| + |c - a|$$

$$(b + c - 2a)$$

Ne Bilmeliyim? 2

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$^{2n}\sqrt{x^{2n}} = |x| \text{ tir.}$$

$$^{2n-1}\sqrt{x^{2n-1}} = x \text{ tir.}$$

$$\checkmark \quad ^4\sqrt{(-3)^4} = |-3| = 3$$

$$\checkmark \quad \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| \text{ dir.}$$

$$\checkmark \quad ^3\sqrt{(-5)^3} = -5 \text{ dir.}$$



Bu özelliği köklü ifadeler konusunda detaylıca inceleyeceğiz, şimdilik şunu bilin kökün derecesi tekse sayı aynen yazılır, çiftse mutlak değer alınarak dışarı çıkar.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$^3\sqrt{(-7)^3} + ^4\sqrt{(-4)^4} + \sqrt{4}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$^3\sqrt{(-7)^3} = -7,$$

$$^4\sqrt{(-4)^4} = |-4| = 4,$$

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = |2| = 2$$

Buna göre,

$$^3\sqrt{(-7)^3} + ^4\sqrt{(-4)^4} + \sqrt{4}$$

$$= -7 + 4 + 2$$

$$= -1 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$a < 0 < b$ olmak üzere,

$$^3\sqrt{a^3} + ^4\sqrt{b^4} - ^6\sqrt{(-a)^6} + ^3\sqrt{(-b)^3}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Kök derecesi ile içindeki üslü ifadenin derecesi eşitse kök kalkar, önce bunu bir bilelim. Mesele, kök kalkınca nasıl olacak?



Hocam kök derecesi tek ise hiçbir şey yapmamıza gerek yok, çift ise mutlak değer yazacağız.

$$^3\sqrt{a^3} = a$$

$$^4\sqrt{b^4} = |b|$$

$$^6\sqrt{(-a)^6} = |-a|$$

$$^3\sqrt{(-b)^3} = -b \text{ dir.}$$



Karşımıza mutlak değerler çıktı ama olsun, ek bilgilerimiz yardımıyla mutlak değerleri hallederiz.

$a < 0 < b$ olmak üzere,

$$^3\sqrt{a^3} + ^4\sqrt{b^4} - ^6\sqrt{(-a)^6} + ^3\sqrt{(-b)^3}$$

$$= a + \underbrace{|b|}_{+} - \underbrace{|-a|}_{+} + (-b) \quad (a < 0 \text{ ise } -a > 0 \text{ dir.})$$



Mutlak değer içlerinin işaretlerini bulduk, kural neydi?

Pozitif ise aynen çıkar, negatif ise (-) ile çarp öyle çıkar..

$$= a + (b) - (-a) - b$$

$$= a + b + a - b$$

$$= 2a \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. $\sqrt[3]{(-5)^3} + \sqrt[4]{(-2)^4}$
işleminin sonucunu bulunuz.

(-3)

2. $\sqrt[5]{(-2)^5} + \sqrt[4]{(-3)^4} - \sqrt{7^2}$
işleminin sonucunu bulunuz.

(-6)

3. $\sqrt[3]{(-3)^3} + \sqrt{(-11)^2} - \sqrt{4}$
işleminin sonucunu bulunuz.

(6)

4. $y < 0 < x$ olmak üzere,
 $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$
işleminin sonucunu bulunuz.

(x - y)

5. $1 < a < 2$ olmak üzere,
 $\sqrt{(a-3)^2} - \sqrt[3]{(4-a)^3}$
işleminin sonucunu bulunuz.

(-1)

6. $x < y < 0 < z$ olmak üzere,
 $\sqrt{y^2} + \sqrt{(z-x)^2} - \sqrt{(y-z)^2}$
işleminin sonucunu bulunuz.

(-x)

Ne Bilmeliyim? 3

- ▶ $|-x| = |x|$ tir.
- ▶ $|x - y| = |y - x|$ tir.
- ▶ $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ dir.
- ▶ $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ ($y \neq 0$) dir.
- ▶ $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,
 $|x^n| = |x|^n$ dir.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$|a - b| - |a| - |b - a| + |-a|$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Yukarıda özellikleri boşuna vermedik önce özelliklere göre bir düzenleme yapalım soruya.

$$|b - a| = |a - b|, \quad |-a| = |a| \text{ dir.}$$

Buna göre,

$$\begin{aligned} &|a - b| - |a| - |b - a| + |-a| \\ &= |a - b| - |a| - |a - b| + |a| = 0 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$$2|a - b| - |3a| - |2b - 2a| + |-a| = -10$$

olduğuna göre, $|a|$ 'nin değerini bulalım.

Çözüm

$$|2b - 2a| = |2 \cdot (b - a)| = |2| \cdot |b - a| = 2 \cdot |b - a| \text{ dir.}$$

$$|3a| = |3| \cdot |a| = 3 \cdot |a| \text{ dir.}$$

Buna göre,

$$2 \cdot |a - b| - |3a| - |2b - 2a| + |-a| = -10$$

$$\Rightarrow 2 \cdot |a - b| - 3 \cdot |a| - 2 \cdot |b - a| + |-a| = -10$$

$$|b - a| = |a - b| \text{ ve } |-a| = |a| \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot |a - b| - 3 \cdot |a| - 2 \cdot |a - b| + |a| = -10$$

$$\Rightarrow -2 \cdot |a| = -10 \Rightarrow |a| = 5 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?

1. $|4x| - |-3x| + |x| = 20$
olduğuna göre, $|x|$ 'nin değerini bulunuz.

(10)

2. $\left| \frac{x}{2} \right| + \frac{|x|}{|-3|} = 15$

olduğuna göre, $|x|$ 'nin değerini bulunuz.

(18)

3. $\left| \frac{x+2}{2} \right| - |2x+4| = -18$

olduğuna göre, $|x+2|$ 'nin değerini bulunuz.

(12)

4. $|x-3| - |2x| + x = |3-x| - |-2x| + 3$

olduğuna göre, x değerini bulunuz.

(3)

Ne Bilmeliyim? 4

- ▶ $|x| \geq 0$ dır.
- ▶ $|x| > x \Leftrightarrow x < 0$ dır.
- ▶ $|x| = x \Rightarrow x \geq 0$ dır.
- ▶ $|x| = -x \Rightarrow x \leq 0$ dır.

Nasıl Çözülür?

Örnek

a ve b sıfırdan farklı gerçel sayılardır.

$a < |a|$ ve $|b| = -b$ olmak üzere,

$$|a + b| + |a|$$

ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm



Negatif sayıların mutlak değeri pozitiftir. Dolayısıyla mutlak değerleri kendinden büyüktür. Yani,

$a < |a|$ ise $a < 0$ dır.



Negatif sayı mutlak değer dışına (-) ile çarpılarak çıkarılır. Yani,

$|b| = -b$ ise $b < 0$ dır.



İki negatif sayının toplamı ne olur arkadaşlar.

Tabi ki negatif olur.

Buna göre,

$a < 0$ ve $b < 0$ ise $a + b < 0$ dır.

$$\underbrace{|a + b|}_{-} + \underbrace{|a|}_{-}$$

$= -(a + b) + (-a) = -a - b - a = -b - 2a$ bulunur.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$|b| > b, |a| = -a \text{ ve } |c| = c$$

olduğuna göre,

$$|-a| - |b| - |-c|$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm

$$|b| > b \Rightarrow b < 0$$

$$|a| = -a \Rightarrow a \leq 0$$

$$|c| = c \Rightarrow c \geq 0$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \underbrace{|-a|}_{+} - \underbrace{|b|}_{-} - \underbrace{|-c|}_{-} &= (-a) - (-b) - [-(-c)] \\ &= -a + b - c \\ &= b - c - a \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$$|a - b| = a - b$$

$$|c - a| = a - c$$

olduğuna göre, a, b, c yi küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

Çözüm

$$|a - b| = a - b \Rightarrow a - b \geq 0 \Rightarrow a \geq b \text{ dir.}$$

$$|a - c| = c - a \Rightarrow c - a \geq 0 \Rightarrow c \geq a \text{ dir.}$$

$a \geq b$ ve $c \geq a$ olduğundan, $c \geq a \geq b$ bulunur.

Nasıl Uygularım?



1. $|a| = a$, $|b| > b$ ve $|c| = -c$ olmak üzere,

$$|a - b| - |c + b|$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

(a + c)

2. $|a| = a$ ve $|b| = -b$ olmak üzere,

$$|a - b| + b$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

(a)

3. $|x| > x$ olduğuna göre,

$$|x - 3| + |-x| - 3$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

(-2x)

4. $|a + b| = -a - b$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) $a < b < 0$

B) $a < 0 < b$

C) $b < 0 < a$

D) $a + b \leq 0$

E) $a \cdot b < 0$

(D)

5. $|a| = a$ ve $|b| > b$

olduğuna göre, aşağıdaki ifadelerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) $|b| = b$

B) $a + b < 0$

C) $a > b$

D) $b > a$

E) $|a| < a$

(C)

6. $|a - b| = b - a$

$$|c - b| = c - b$$

olduğuna göre, a, b, c yi küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

(a ≤ b ≤ c)

Ne Bilmeliyim? 5

Mutlak Değerli Denklemler

- $|f(x)| = a \Rightarrow (a > 0)$ ise,
 $f(x) = a$ veya $f(x) = -a$ dir.
- $|f(x)| = a \Rightarrow (a < 0)$ ise,
Çözüm kümesi, $\emptyset$ dir.
- $|f(x)| = 0$
 $f(x) = 0$ dir.

Nasıl Çözülür?

- ✓ $|x - 3| = 0$ ise, $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$
Ç.K. = $\{3\}$ tür.
- ✓ $|3x - 4| + 2 = 0 \Rightarrow |3x - 4| = -2$
Ç.K. = $\emptyset$ dir.
- ✓ $|x| = 1999$ ise, $x_1 = 1999 \Rightarrow x_2 = -1999$
Ç.K. = $\{-1999, 1999\}$ dur.

Örnek

$$|3 - 5x| = 4$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$|3 - 5x| = 4 \text{ ise}$$

$$\Rightarrow 3 - 5x = 4 \quad \text{veya} \quad 3 - 5x = -4$$

$$\Rightarrow -1 = 5x \quad \text{veya} \quad 7 = 5x$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{5} \quad \text{veya} \quad x_2 = \frac{7}{5}$$

olduğundan, Ç.K. = $\left\{-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right\}$ dir.

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

$$\rightarrow |x + 8| = 0$$

$$\{-8\}$$

$$\rightarrow |2x - 8| = 0$$

$$\{4\}$$

$$\rightarrow |x + 4| = -7$$

$$\emptyset$$

$$\rightarrow |3x - 1| = -15$$

$$\emptyset$$

$$\rightarrow |x| = 9$$

$$\{-3, 3\}$$

$$\rightarrow |x + 4| = 2$$

$$\{-2, -6\}$$

Nasıl Uygularım?



$$\rightarrow |3x - 2| = 13$$

$$\left\{5, -\frac{11}{3}\right\}$$

$$\rightarrow \left|\frac{x-1}{2}\right| = \frac{2}{3}$$

$$\left\{\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$$

$$\rightarrow \left|\frac{2-5x}{3}\right| = 2$$

$$\left\{-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right\}$$

$$3. \quad |2x - 3| = 7$$

olduğuna göre, x in alabileceği değerler çarpımını bulunuz.

$$(-10)$$

2. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

$$\rightarrow |x + 2| + 1 = 5$$

$$\{-6, 2\}$$

$$4. \quad |x - 2| = 1$$

$$|y + 1| = 3$$

olduğuna göre, x·y çarpımının en küçük değeri bulunuz.

$$(-12)$$

$$\rightarrow 2|x + 3| - 6 = 4$$

$$\{2, -8\}$$

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$||x-3| + 1| = 5$$

denkleminin köklerinin toplamını bulalım.

Çözüm



Soruda yardımcı bilgi var mı? Yok, o zaman kural, bir kere direkt eşitle, bir kere de $(-)$ ile çarp eşitle.

Hocam iki tane mutlak değer var.



Farketmez kuzum... Önce dıştakinden başla zamanı gelince diğerini halledersin.

$$||x-3| + 1| = 5 \text{ ise,}$$

$$\checkmark |x-3| + 1 = 5 \Rightarrow |x-3| = 4$$



Yine mutlak değer çıktı... Aynı işleme devam.

$$|x-3| = 4 \text{ ise,}$$

$$x-3 = 4 \text{ veya } x-3 = -4$$

$$\Rightarrow x_1 = 7 \text{ veya } x_2 = -1 \text{ dir.}$$

$$\checkmark |x-3| + 1 = -5 \Rightarrow |x-3| = -6$$

$$|x-3| = -6 \text{ ise,}$$

Ç.K. = $\emptyset$ dir.

O halde,

$$x_1 + x_2 = 7 + (-1) = 6 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



$$1. \quad ||x| + 7| = 3$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

($\emptyset$)

$$2. \quad ||x| + 1| = 2$$

denkleminin kökler çarpımını bulunuz.

(-1)

$$3. \quad ||x-1| - 4| = 3$$

denkleminin kökler toplamını bulunuz.

(4)

Mutlak Değer

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$|x - 3| + |3 - x| = 18$$

denkleminin köklerinin çarpımını bulalım.

Çözüm



İki tane mutlak değer var. Yardımcı bilgi yok. Böyle bir denklem çözmek için bir kuralımız da yok. Ne yapalım.

İki tane mutlak değer var ama bu mutlak değer birbirine eşit değil mi?



İşte kuralları iyi bilerseniz hayat çok kolay olur.

$$|3 - x| = |x - 3| \text{ dir.}$$

$$|x - 3| + |3 - x| = 18$$

$$\Rightarrow |x - 3| + |x - 3| = 18$$

$$\Rightarrow 2 \cdot |x - 3| = 18$$

$$\Rightarrow |x - 3| = 9$$

$$x - 3 = 9 \text{ veya } x - 3 = -9$$

$$\Rightarrow x_1 = 12 \text{ veya } x_2 = -6 \text{ dir.}$$

O halde,

$$x_1 \cdot x_2 = 12 \cdot (-6) = -72 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



$$1. \quad |x + 3| + |3 + x| = 6$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\{-6, 0\}$$

Nasıl Uygularım?



$$2. \quad |x - 4| + |4 - x| = 12$$

denkleminin kökler çarpımını bulunuz.

$$(-20)$$

$$3. \quad |2x + 4| - |2 + x| = 9$$

denkleminin kökler toplamını bulunuz.

$$(-4)$$

$$4. \quad |2x| - |-6x| - |x| = -25$$

denkleminin kökler çarpımını bulunuz.

$$(-25)$$

Ne Bilmeliyim? 6

$|f(x)| = |g(x)|$ ise,
 $f(x) = g(x)$ veya $f(x) = -g(x)$ tir.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$|3x - 1| = |2x + 2|$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$|3x - 1| = |2x + 2|$$

$$\Rightarrow 3x - 1 = 2x + 2 \text{ veya } \Rightarrow 3x - 1 = -2x - 2$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{5}$$

olduğundan, Ç.K. = $\left\{-\frac{1}{5}, 3\right\}$ tür.

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

$$\rightarrow |x + 2| = |x - 5|$$

$$\left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$\rightarrow |2x + 1| = |x - 3|$$

$$\left\{-4, \frac{2}{3}\right\}$$

Nasıl Uygularım?

$$\rightarrow |x + 3| = |3x - 4|$$

$$\left\{\frac{1}{4}, \frac{7}{2}\right\}$$

$$\rightarrow |2x + 3| = |3x - 1|$$

$$\left\{-\frac{2}{5}, 4\right\}$$

$$\rightarrow |5x| = |3 - 2x|$$

$$\left\{-1, \frac{3}{7}\right\}$$

Mutlak Değer

Ne Bilmeliyim? 7

$|f(x)| = g(x)$ ise,

$f(x) = g(x)$ veya $f(x) = -g(x)$ tir.

Bulunan köklerin içinde $g(x) > 0$ yapan değerler çözüm kümesidir.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$|2x - 5| = -x + 1$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm



Bir tarafta mutlak değer var diğer tarafta yok, çözümü etkiler mi?

Hayır hocam, bir kere aynen eşitleyeceğiz, birde (-) ile çarpıp eşitleyeceğiz. Ama en sonda sağlamayı unutmayacağız.

$$|2x - 5| = -x + 1 \text{ ise}$$

$$\Rightarrow 2x - 5 = -x + 1 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow 2x - 5 = -(-x + 1) \Rightarrow 2x - 5 = x - 1 \Rightarrow x = 4 \text{ olur.}$$

Sıra geldi sağlamaya,

$$x = 2 \text{ için, } -x + 1 = -2 + 1 = -1 < 0$$

$$x = 4 \text{ için, } -x + 1 = -4 + 1 = -3 < 0$$

İki değerde çözüm kümesine alınamaz.

Yani çözüm kümesi boş kümedir. $\text{Ç.K} = \emptyset$ dir.

Örnek

$$|3x - 1| = 2x + 5$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$|3x - 1| = 2x + 5 \text{ ise}$$

$$\Rightarrow 3x - 1 = 2x + 5 \text{ veya } 3x - 1 = -2x - 5$$

$$\Rightarrow x_1 = 6 \text{ veya } 5x = -4 \Rightarrow x_2 = -\frac{4}{5}$$

$$\text{Ç.K.} = \left\{ -\frac{4}{5}, 6 \right\} \text{ dir.}$$



Bir tarafta mutlak değer var diğer tarafta yoksa mutlaka sağlama yapılması gerekir. Bulduğumuz x değerleri $2x + 5$ ifadesini pozitif yaptığı için ikisi de çözüm kümesinin elemanıdır.

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

$$\rightarrow |3x - 4| = x$$

$$\{1, 2\}$$

$$\rightarrow |x + 5| = x - 3$$

$$\emptyset$$

İPUÇU

Bulduğun kökleri mutlaka denemelisin. Acaba denklemi sağlıyor mu?

$$\rightarrow |x - 1| = 2x + 3$$

$$\left\{ -\frac{2}{3} \right\}$$

$$\rightarrow |x + 3| + x = 7$$

$$\{2\}$$

Nasıl Çözülür?



Örnek

a bir gerçel sayı olmak üzere, sayı doğrusu üzerinde a 'nın 3'e olan uzaklığı $a + 4$ birimdir.

Buna göre, a değerini bulalım.

Çözüm



İki nokta arasındaki uzaklık iki sayının farkının mutlak değerine eşitti. Buna göre a ile 3 arasındaki uzaklık $|a - 3|$ tür.

Hocam uzaklığı yine a türünden vermiş birbirine mi eşitleyeceğiz.



Buna göre,

$$|a - 3| = a + 4 \text{ tür.}$$

Denklemini çözelim. Önce direkt eşitleyelim.

$$a - 3 = a + 4$$

$$\Rightarrow -3 \neq 4 \text{ olduğundan } \mathcal{C}_1 = \emptyset \text{ dir.}$$

Şimdi $(-)$ ile çarpıp eşitleyelim

$$a - 3 = -(a + 4)$$

$$\Rightarrow a - 3 = -a - 4 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \text{ olur.}$$

Sıra geldi sağlamaya, $a = -\frac{1}{2}$ değeri $a + 4$ ifadesini pozitif yaptığı için çözüm kümesine alınır.

$$\text{Buna göre, } \mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 = \left\{-\frac{1}{2}\right\} \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Sayı doğrusunda 3 sayısına 4 birim uzaklıktaki reel sayıların toplamını bulunuz.

(6)

Nasıl Uygularım?



2. Aşağıdaki denklemlerden hangisinin çözüm kümesi sayı doğrusu üzerindeki a ' ya b birim uzaklıkta olan reel sayılardır?

$$\text{A) } |x - a| = b \quad \text{B) } |x - b| = a \quad \text{C) } |a - b| = x$$

$$\text{D) } |x - a| = |x - b| \quad \text{E) } |x + a| = b$$

(A)

3. $a > b$ olmak üzere, sayı doğrusu üzerindeki a sayısının 3'e olan uzaklığı, b sayısının 9'a olan uzaklığına eşit olduğuna göre, $a + b$ toplamının değerini bulunuz.

(12)

4. $2x + 1$ sayısının sayı doğrusunda başlangıç noktasına olan uzaklığı $4 - x$ birim olduğuna göre, x değerlerinin toplamını bulunuz.

(-4)

Mutlak Değer

Ne Bilmeliyim? 8

- x ve y reel sayılar olmak üzere,
 $|x| + |y| = 0 \Rightarrow x = 0$ ve $y = 0$ dır.
- $|f(x)|$ ifadesinin en küçük değeri,
 $f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x değeridir.
- $|x - a| + |x - b|$ ifadesinin en küçük değeri,
 $x = a$ ve $x = b$ için bulunan değerlerden küçük olanına eşittir.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$|3 + x| + |4 - 2x|$$

ifadesinin en küçük değerini bulalım.

Çözüm



Kural gereği iki mutlak değeri sıfıra eşitleyip kökleri ifadede yazalım.

$$3 + x = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ için}$$

$$|3 + (-3)| + |4 - 2 \cdot (-3)| = |0| + |10| = 0 + 10 = 10 \text{ olur.}$$

$$4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ için,}$$

$$|3 + 2| + |4 - 2 \cdot (2)| = |5| + |0| = 5 \text{ olur.}$$

O halde, bu ifadenin en küçük değeri 5 tir.

Örnek

$$|a - 2| + |b + a| = 0$$

olduğuna göre, a·b yi bulalım.

Çözüm



Mutlak değer hiçbir zaman negatif sayıya eşit olamayacağına göre, iki mutlak değer toplamı 0 (sıfır) ise ikise de 0 (sıfır) olmalıdır.

$$|a - 2| + |b + a| = 0 \text{ ise}$$

$$a - 2 = 0 \text{ ve } b + a = 0 \text{ dır.}$$

$$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ dir.}$$

$$b + a = 0 \Rightarrow b = -a \Rightarrow b = -2 \text{ dir.}$$

$$\text{Buna göre, } a \cdot b = 2 \cdot (-2) = -4 \text{ tür.}$$

Nasıl Uygularım?

$$1. \quad |2x - 18|$$

ifadesinin en küçük değeri için x değerini bulunuz.

(9)

2. Aşağıdaki ifadelerin en küçük değerlerini bulunuz.

$$\rightarrow |x + 5| + 4$$

(4)

$$\rightarrow |x - 2| + |x + 3|$$

(5)

$$\rightarrow |x + 1| + |x + 4| - 2$$

(1)

Nasıl Uygularım?



3. Aşağıdaki denklemleri sağlayan x ve y değerlerini bulunuz.

$$\rightarrow |x + 2| + |y + 5| = 0$$

$$(x = -2, y = -5)$$

$$\rightarrow |x - 3| + |y - 4| = 0$$

$$(x = 3, y = 4)$$

$$\rightarrow |x + y + 6| + |y - 2| = 0$$

$$(x = -8, y = 2)$$

4. x, y gerçel sayılardır.

$$|x - 2| + |y + 6| = 0$$

olduğuna göre, $\frac{x}{y}$ değerini bulalım.

$$\left(-\frac{1}{3}\right)$$

Ne Bilmeliyim? 9



Mutlak Değerli Eşitsizlikler

$a > 0$ için,

$$|f(x)| \leq a \Rightarrow -a \leq f(x) \leq a \text{ dir.}$$

$|f(x)| < 0 \Rightarrow \text{Ç.K.} = \emptyset$

$|f(x)| \leq 0 \Rightarrow \text{Çözüm kümesi, } f(x) = 0 \text{ eşitsizliğini sağlayan } x \text{ değeridir.}$

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$|3 - x| < 5$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$|3 - x| < 5 \Rightarrow -5 < 3 - x < 5$$

$$\Rightarrow -5 - 3 < -x < 5 - 3$$

$$\Rightarrow -8 < -x < 2$$

$$\Rightarrow -2 < x < 8 \text{ olduğundan,}$$

Ç.K. = $(-2, 8)$ bulunur.

Örnek

$$|2x - 8| \leq 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm



Mutlak değerli ifade yani, $|f(x)|$ ifadesi negatif olamaz ama soruda eşitlik var. O halde, $|2x - 8|$ ifadesi 0 (sıfır) olabilir..

$$|2x - 8| \leq 0 \Rightarrow 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 2x = 8$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ tür.}$$

Yani, Ç.K. = $\{4\}$ tür.

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

$$\rightarrow |x + 3| < 5$$

$$(-8, 2)$$

$$\rightarrow |x - 2| \leq 3$$

$$[-1, 5]$$

$$\rightarrow \left| \frac{x-1}{3} \right| < 5$$

$$(-14, 16)$$

$$2. \quad |x + 3| + |2x + 6| < 0$$

eşitsizliğin çözüm kümesini bulunuz.

$$(\emptyset)$$

$$3. \quad |x| < 3 \quad \text{ve} \quad y = 2x - 1$$

olduğuna göre, y 'nin alabileceği değerlerin en geniş aralığını bulunuz.

$$(-7, 5)$$

İPUCU

Önce x in aralığını bulup sonra x i y türünden yazınca gerisi eşitsizlik kurallarına göre işlem yapma.

$$4. \quad |x| < 5 \quad \text{ve} \quad |y| \leq 2$$

olduğuna göre, $x + y$ nin alabileceği değerlerin en geniş aralığını bulunuz.

$$(-7, 7)$$

İPUCU

x in ve y nin aralıklarını bulup taraf tarafa toplayın.

Ne Bilmeliyim? 10

$a > 0$ için,

$$|f(x)| \geq a \Rightarrow f(x) \geq a \text{ veya } f(x) \leq -a$$

$$|f(x)| \geq 0 \Rightarrow \text{Ç.K.} = \mathbb{R}$$

$$|f(x)| > 0 \Rightarrow \text{Ç.K.} = \mathbb{R} - \{f(x) = 0 \text{ yapan } x \text{ değeri}\}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$|x - 2| > 4$$

eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$|x - 2| > 4 \Rightarrow x - 2 > 4 \text{ veya } x - 2 < -4$$

$$\Rightarrow x > 6 \text{ veya } x < -2$$

$$\text{Ç.K.} = \{x \mid x < -2 \text{ veya } x > 6\}$$

$$\text{Ç.K.} = (-\infty, -2) \cup (6, \infty)$$

$$\text{Ç.K.} = \mathbb{R} - [-2, 6] \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek

$$|9x - 1| > 0$$

eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm



$|f(x)|$ daima 0 (sıfır) veya pozitif değerler alabileceğinden,

$$|9x - 1| > 0 \Rightarrow \text{Ç.K.} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{9}\right\}$$



Eşitlik olmadığından sıfır yapan değeri çıkarttık.

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

$$\rightarrow |x + 6| > 3$$

$$(-\infty, -9) \cup (-3, \infty)$$

$$\rightarrow |2x + 11| \geq 9$$

$$(-\infty, -10] \cup [-1, \infty)$$

2. $|2x + 1| > 4$

eşitsizliğini sağlayan tam sayıların toplamı kaçtır?

(2)

Nasıl Uygularım?



3.

$$\left| \frac{x+5}{12} \right| \geq \frac{1}{4}$$

olduğuna göre, x 'in alabileceği en büyük negatif tam sayı değeri kaçtır?

(-1)

5.

$$|x-4| - |x-1| > 0$$

olduğuna göre, x in alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

(2)

4.

$$|3x| + |-x| + |-2x| \geq 12$$

eşitsizliğin çözüm kümesini bulunuz.

 $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

6.

Sayı doğrusunda sıfıra olan uzaklığı -3 noktasına olan uzaklığından küçük veya eşit konumdaki sayılar, aşağıdaki eşitsizliklerden hangisinin çözüm kümesini oluşturur?

A) $|x+3| \leq |x|$

B) $|x+3| \geq |x|$

C) $|x-3| \leq |x|$

D) $|x-3| \geq |x|$

E) $3 \leq |x|$

(B)

Ne Bilmeliyim? 11

 a ve b pozitif reel sayılar ve
 $a \leq |f(x)| \leq b$ ise,
 $a \leq f(x) \leq b$ veya $a \leq -f(x) \leq b$ dir.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$1 < |x - 3| \leq 4$$

eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamını bulalım.

Çözüm

$$1 < |x - 3| \leq 4$$

$$\Rightarrow 1 < x - 3 \leq 4 \quad \text{veya} \quad -4 \leq x - 3 < -1$$

$$\Rightarrow 4 < x \leq 7 \quad \text{veya} \quad -1 \leq x < 2$$

x'in tam sayı değerleri 5, 6, 7 ve -1, 0, 1 olup toplamı 18 dir.

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

$$\rightarrow 2 < |x - 5| < 5$$

$$(0, 3) \cup (7, 10)$$

$$\rightarrow 4 < |2x + 3| \leq 7$$

$$\left(\frac{1}{2}, 2\right] \cup \left[-5, -\frac{7}{2}\right)$$

Nasıl Uygularım?

$$\rightarrow 3 \leq |4x - 5| < 9$$

$$\left[2, \frac{7}{2}\right) \cup \left(-1, \frac{1}{2}\right]$$

$$2. \quad 2 \leq |x - 3| < 7$$

olduğuna göre, x'in alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

(30)

$$3. \quad 1 < \left|\frac{x-1}{3}\right| < 2$$

olduğuna göre, x'in alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

(4)

Mutlak Değer

1. Bir hava durumu spikeri pazar akşamı canlı yayında aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

"Bu hafta boyunca sıcaklığın -2 derece olduğu kentimizde önümüzdeki haftadan itibaren havalar ısınacak ve kar yağışı, yerini sağnak şeklinde yağmurlara bırakacak. Pazar gününden sonra kent genelinde hava sıcaklığı bir önceki haftaya göre 8 ila 10 derece artmış olacak."

Bu bilgiye göre, Pazar gününden sonra kentteki sıcaklığın alabileceği değerlerin aralığını ifade eden eşitsizlik aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $|x - 6| \leq 2$ B) $|x - 7| \leq 1$
C) $|x - 8| \leq 1$ D) $|x + 2| \leq 10$
E) $|x - 10| \leq 2$

İPUCU

Sıcaklığın hangi aralıkta olması gerektiğini bul. Sonra hangi seçeneğin bu aralığı verdiğini kontrol et.

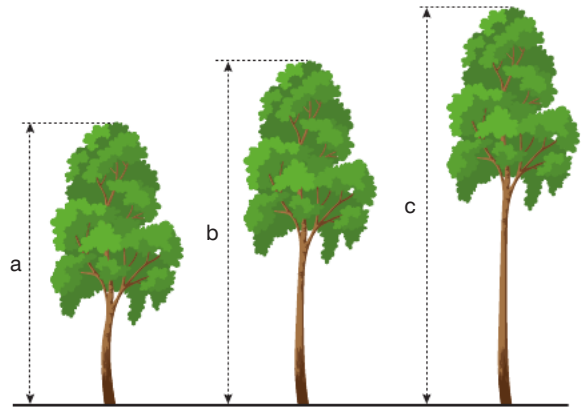
3. $|a| = 2$, $|b| = 4$ ve $|c| = 6$ olmak üzere,

$$a + b < c$$

olduğuna göre, $a + b$ toplamının alabileceği farklı değerler toplamı kaçtır?

- A) 8 B) 2 C) 0 D) -2 E) -6

4. Yan yana duran üç ağacın görünümü aşağıda verilmiştir. a , b ve c sayıları ağaçların metre türünden uzunluklarıdır.



Buna göre,

$$|a - b| + |b - c| + |a - c|$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $b - a$ B) $c - b$ C) $2b - 2a$
D) $2c - 2a$ E) $c - a$

2. Bir ehliyet kursundaki eğitmen, kursiyerlerine aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

" 120 km/saat hız ile bir ağır vasıta aracının arkasından giderken güvenli bir sürüş için hızınızı 30 ila 40 km/saat azaltmanız gerekmektedir."

Buna göre, güvenli bir şekilde sürüş için aracın hızının alabileceği değerleri ifade eden eşitsizlik aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $|x - 85| \leq 120$ B) $|x - 30| \leq 60$
C) $|x - 120| \leq 10$ D) $|x - 85| \leq 5$
E) $|x - 80| \leq 10$

Mutlak Değer

5. a bir sayma sayısı olmak üzere,

$|a|$ ifadesi, mutlak değeri a olan negatif tam sayıdan küçük en büyük tam sayıya eşittir.

Örneğin; $|4| = -5$ tir.

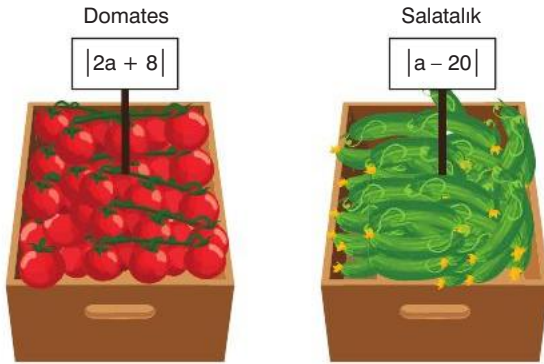
Buna göre,

$$|2| + |11|$$

toplamının değeri kaçtır?

- A) -13 B) -14 C) -15 D) -16 E) -17

- 6.



Bir manavın tezgahında bulunan domates ve salatalığın fiyatı şekilde gösterilmiştir.

Buna göre, domates ve salatalıktan birer kilo alan bir kişi en az kaç TL ücret öder?

- A) 20 B) 24 C) 32 D) 36 E) 48

İPUCU

Mutlak değerler toplamı ne zaman en küçük değeri alıyordu.

7. A ve B kamyonlarının taşıyabileceği yükler ton olarak sırasıyla T_A ve T_B sayıları almak üzere bu sayılar

$$|T_A - 20| < 5$$

$$|T_B - 12| < 8$$

eşitsizlikleri sağlamaktadır.

Buna göre, ton türünden seçeneklerden verilen yüklerden hangisini iki kamyon da taşır?

- A) 25 B) 23 C) 20 D) 18 E) 14

İPUCU

Eşitsizlikleri düzenleyip ortak aralığı bul. Ya da uğraşma seçenekleri dene.

8. a ve b reel sayı olmak üzere,

$$|x - a| \leq 5$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdaki sayı doğrusunda verilmiştir.



Buna göre, b kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 2 D) 3 E) 4

İPUCU

Eşitsizliği düzenle alt sınırı b'ye üst sınırı 12'ye eşitle.

9. Sayı doğrusu üzerinde pozitif bir A sayısı şekildeki gibi gösterilmiştir.



A sayısının 2'ye olan uzaklığı $\frac{A}{3}$ birim olduğuna göre, A kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 9

BÖLÜM 10

ÖĞRENELİM

ÜSLÜ İFADELER Üslü İfadeler

Ne Bilmeliyim? 1

ÜSLÜ İFADELER

$x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, **n tane x in çarpımı x in n inci kuvveti (üssü)** diye adlandırılır ve x^n biçiminde gösterilir ve **x üssü n** şeklinde okunur.

Buna göre, x in n. kuvveti n tane x in çarpımına eşittir.

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ tane}} \text{ tir.}$$

Burada, **x e taban**, **n ye üs** denir.

$$\checkmark x^2 = x \cdot x \quad x^3 = x \cdot x \cdot x \quad x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$$

$$\checkmark \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\checkmark \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^4$$

$$\checkmark \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{3})^6$$

$$\rightarrow \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{n \text{ tane}} = n \cdot a$$

$$\checkmark 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3$$

$$\checkmark 2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 = 6 \cdot 2^6$$

$$\checkmark \underbrace{5^x + 5^x + 5^x + \dots + 5^x}_{100 \text{ tane}} = 100 \cdot 5^x$$

0 (sıfır) hariç bütün reel sayıların sıfırıncı kuvveti 1 dir.

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

0⁰ ifadesi tanımsızdır.

Bütün n reel sayıları için $1^n = 1$

Bütün a reel sayıları için $a^1 = a$

Nasıl Çözülür?

Örnek

6 tane 2'nin çarpımının, 4 tane 2'nin toplamına oranının kaç olduğunu bulalım.

Çözüm

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{6 \text{ tane}} = 2^6 = 64$$



Çarpılan sayıyı tabana, kaç tane varsa üsse yazdık.

$$\underbrace{2 + 2 + 2 + 2}_{4 \text{ tane}} = 4 \cdot 2 = 8$$



Toplanan sayı ile adedini çarptık. Buradan sonra oranlayalım.

$$\frac{64}{8} = 8 \text{ bulunur.}$$

Örnek

5 tane -3 ün çarpımının, 9 tane 3 ün toplamına oranının kaç olduğunu bulalım.

Çözüm

$$\underbrace{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)}_{5 \text{ tane}} = (-3)^5 = -243 \text{ tür.}$$

$$\underbrace{3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3}_{9 \text{ tane}} = 9 \cdot 3 = 27 \text{ dir.}$$

Bu iki ifadenin oranı da, $-\frac{243}{27} = -9$ bulunur.

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki ifadelerin eşitini bulunuz.

$$\rightarrow 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15$$

$$(15^7)$$

$$\rightarrow (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$$

$$((-4)^7)$$

$$\rightarrow \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$$

$$\left(\left(\frac{2}{5}\right)^4\right)$$

$$\rightarrow a^x \cdot a^x \cdot a^x \cdot a^x \cdot a^x \cdot a^x \cdot a^x$$

$$((a^x)^7)$$

$$\rightarrow 19 \text{ tane } 19\text{'un çarpımı}$$

$$(19^{19})$$

$$\rightarrow 9 \text{ tane } 4x \text{ in çarpımı}$$

$$((4x)^9)$$

2. Aşağıdaki ifadelerin eşitini bulunuz.

$$\rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\left(6 \cdot \frac{1}{2} = 3\right)$$

$$\rightarrow \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4}$$

$$\left(8 \cdot \frac{a}{4} = 2a\right)$$

$$\rightarrow 11 \text{ tane } (x + 2) \text{ nin toplamı,}$$

$$(11 \cdot (x + 2))$$

3. Aşağıdaki ifadelerin eşitini bulunuz.

$$\rightarrow (5 - 7\sqrt{2})^0$$

$$(1)$$

$$\rightarrow 1^{258}$$

$$(1)$$

$$\rightarrow 1^{-34}$$

$$(1)$$

$$\rightarrow 1^{324} + 1^{2759} + 1^{-546} - 1^{-5441}$$

$$(2)$$

Ne Bilmeliyim? 2



Negatif Sayıların Kuvvetleri

Pozitif bir sayının bütün kuvvetleri pozitif; negatif bir sayının çift kuvvetleri pozitif, tek kuvvetleri negatiftir.

$a \neq 0$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}$$

$$(-a)^{2n} = a^{2n} \text{ dir.}$$

$$\checkmark (-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$$

$$\checkmark -2^2 = -(2 \cdot 2) = -4$$

$$\checkmark (-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$$

$$\checkmark -3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$$

$$\checkmark (-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125 = -5^3$$

$$\checkmark -5^3 = -(5 \cdot 5 \cdot 5) = -125$$

$$\checkmark \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{32}{243}$$



Parantezin içerisindeki (-) kuvvetten etkilenir, parantez içerisinde olmayan (-) hürdür, kuvvetten etkilenmez.

$1^n = 1$ (1 ' in bütün kuvvetleri 1 'dir.)

$(-1)^{2n} = 1$, $(-1)^{2n-1} = -1$ 'dir.



-1 in tek kuvvetleri -1 iken çift kuvvetleri $+1$ dir.

$$\checkmark (-1)^{33} = -1$$

$$\checkmark (-1)^{-38} = +1$$

$$\checkmark (-1)^{2420} = +1$$

$$\checkmark (-1)^{-3743} = -1$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki ifadelerde (...) yerine $<$ veya $>$ işaretlerinden uygun olanı yazınız.

$$\rightarrow (-3)^{13} \dots 0$$

($<$)

$$\rightarrow (-5)^{24} \dots 0$$

($>$)

$$\rightarrow (-3)^{-18} \dots 0$$

($>$)

2. $a > 0$ olmak üzere, aşağıdaki ifadelerde (...) yerine $<$ veya $>$ işaretlerinden uygun olanı yazınız.

$$\rightarrow -a^{14} \dots 0$$

($<$)

$$\rightarrow a^{173} \dots 0$$

($>$)

$$\rightarrow a^{-129} \dots 0$$

($>$)

$$\rightarrow (-a)^{39} \dots 0$$

($<$)

Ne Bilmeliyim? 3

Üslü İfadelerin Kuvveti

$$(x^n)^m = (x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

$$((x^n)^m)^k = x^{m \cdot n \cdot k}$$

$$\checkmark (2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$$

$$\checkmark \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^4 \right]^3 = \left(-\frac{1}{2} \right)^{4 \cdot 3} = \left(-\frac{1}{2} \right)^{12} = \left(\frac{1}{2} \right)^{12}$$



Çift kuvvet (–) yi yuttu gördünüz değil mi?

$$\checkmark (-3^2)^7 = (-1)^7 \cdot (3^2)^7 = -3^{14}$$



3'ün üssü olan 2. (–) yi etkilemedi ama parantezin 7. kuvvetini (–) nin üzerine yazmayı ihmal etmedik.

$$\checkmark (8^3) = (2^3)^3 = 2^9$$

$$\checkmark (27^2)^3 = ((3^3)^2)^3 = 3^{3 \cdot 2 \cdot 3} = 3^{18}$$

Üslü İfadenin Negatif Kuvveti

$x \neq 0$ ve $n > 0$ olmak üzere, $x^{-1} = \frac{1}{x}$ ifadesinin (x in çarpma işlemine göre tersinin) n inci kuvvetine yani x^{-n} **ye negatif üslü ifade** denir.

$$\underbrace{\left(\frac{1}{x} \right) \cdot \left(\frac{1}{x} \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{x} \right)}_{n \text{ tane}} = \left(\frac{1}{x} \right)^n = x^{-n} \text{ dir.}$$

$$\checkmark x^{-n} = \left(\frac{1}{x} \right)^n = \frac{1}{x^n} \quad \left(\frac{x}{y} \right)^{-n} = \left(\frac{y}{x} \right)^n = \frac{y^n}{x^n} \text{ dir.}$$



O halde, bir üslü ifadenin tabanının çarpmaya göre tersi alındığında üssünün işareti değiştirilir.

$$\checkmark 5^{-1} = \left(\frac{1}{5} \right)^1 = \frac{1}{5}, \quad 3^{-1} = \left(\frac{1}{3} \right)^1 = \frac{1}{3}$$

$$\checkmark \left(\frac{2}{3} \right)^{-1} = \left(\frac{3}{2} \right)^1 = \frac{3}{2}$$

$$\checkmark 5^{-3} = \left(\frac{1}{5} \right)^3 = \frac{1^3}{5^3} = \frac{1}{5^3}$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow \left((5^3)^4 \right)^5$$

(5⁶⁰)

$$\rightarrow \left(((198)^{51})^0 \right)^{59}$$

(1)

$$\rightarrow (16^6)^5$$

(2¹²⁰)

$$\rightarrow \left((27)^{\frac{3}{2}} \right)^6$$

(3²⁷)

$$\rightarrow (32)^{(2^4)}$$

(2⁸⁰)

2. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow (3^{-2})^3$$

(3⁻⁶)

$$\rightarrow (25^{-3})^{-2}$$

(5¹²)

$$\rightarrow \left(\left(\frac{1}{5} \right)^{-4} \right)^2$$

(5⁸)

$$\rightarrow \left(\left(\frac{1}{4} \right)^7 \right)^{-5}$$

(2⁷⁰)

Nasıl Uygularım?



3. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow (-7)^2$$

$$(49)$$

$$\rightarrow (-2)^3$$

$$(-8)$$

$$\rightarrow ((-27)^5)^2$$

$$(3^{30})$$

$$\rightarrow (-3^2)^3$$

$$(-3^6)$$

$$\rightarrow (-5^3)^4$$

$$(5^{12})$$

$$\rightarrow \left(\left(-\frac{1}{5}\right)^4\right)^2$$

$$(5^{-8})$$

4. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow -3^{-4}$$

$$\left(-\frac{1}{81}\right)$$

$$\rightarrow ((-5)^2)^{-3}$$

$$(5^{-6})$$

$$\rightarrow ((-32)^{-3})^7$$

$$(-2^{-105})$$

$$\rightarrow ((-625)^{-2})^{-5}$$

$$(5^{40})$$

$$\rightarrow \left(\left(-\frac{1}{8}\right)^{-3}\right)^5$$

$$(-2^{45})$$

$$\rightarrow \left(\left(-\frac{1}{243}\right)^5\right)^{-4}$$

$$(3^{100})$$

$$\rightarrow ((-8)^{-2})^3$$

$$(2^{-18})$$

$$\rightarrow ((-32)^{-3})^7$$

$$(-2^{-105})$$

Ne Bilmeliyim? 4

Üslü İfadelerde Toplama - Çıkarma İşlemi



Üslü ifadelerde toplama ve çıkarma işlemi yapılabilmesi için hem üsleri hem de tabanları aynı olan terimler elde edilir. Daha sonra ortak çarpan parantezine alınarak toplanır veya çıkarılır.

$$a \cdot x^n + b \cdot x^n - c \cdot x^n = x^n \cdot (a + b - c)$$

$$\checkmark 3^7 + 3^7 + 3^7 + 3^7 = 4 \cdot 3^7$$

$$\checkmark 2 \cdot 7^3 - 3 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^3 = 7^3 \cdot (2 - 3 + 5) = 4 \cdot 7^3$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$8^2 + 4^3 + 2^6$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} 8^2 + 4^3 + 2^6 &= (2^3)^2 + (2^2)^3 + 2^6 \\ &= 2^{3 \cdot 2} + 2^{2 \cdot 3} + 2^6 \\ &= 2^6 + 2^6 + 2^6 = 3 \cdot 2^6 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$



Demek ki üslü sayılar eşit değilse toplama-çıkarma yapabilmek için taban ve üsleri aynı yapmanın yolunu araştıracağız.

Örnek

$$3 \cdot 4^6 + 5 \cdot 8^4 - 7 \cdot 2^{12}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Sayılar çok büyük, üstelik üslü ifadelerin tabanları farklı. Üslü ifadelerde tabanların hepsi 2' nin kuvveti dikkatinizi çekti mi? O halde, bir düzenleme yapalım gerisi kolay.

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4^6 + 5 \cdot 8^4 - 7 \cdot 2^{12} &= 3 \cdot (2^2)^6 + 5 \cdot (2^3)^4 - 7 \cdot 2^{12} \\ &= 3 \cdot 2^{2 \cdot 6} + 5 \cdot 2^{3 \cdot 4} - 7 \cdot 2^{12} \\ &= 3 \cdot 2^{12} + 5 \cdot 2^{12} - 7 \cdot 2^{12} \\ &= 2^{12} \cdot (3 + 5 - 7) = 2^{12} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow 12 \cdot 3^4 - 7 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^4$$

(3⁶)

$$\rightarrow 4 \cdot 5^{-7} - 2 \cdot 5^{-7} + 8 \cdot 5^{-7} + 16 \cdot 5^{-7}$$

(26 · 5⁻⁷)

$$\rightarrow 7 \cdot x^{\frac{2}{3}} - 2 \cdot x^{\frac{2}{3}} + 3 \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

(8 · x ^{$\frac{2}{3}$})

$$\rightarrow 5 \cdot 81^3 + 7 \cdot 27^4 - 13 \cdot 9^6$$

(-3¹²)

$$\rightarrow 2 \cdot 9^{-3} + 4 \cdot 27^{-2}$$

(6 · 3⁻⁶)

Üslü İfadeler

Ne Bilmeliyim? 5



Üslü İfadelerde Çarpma İşlemi



Üslü ifadeler çarpılırken, tabanları aynı ise üsler toplamı ortak tabana üs olarak yazılır. Eğer üsler aynı, tabanlar farklı ise ortak olan üs tabanların çarpımına üs olarak yazılır.

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n \text{ dir.}$$

$$\checkmark 3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^{-2} = 3^{4+5-2} = 3^7$$

$$\checkmark 2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

$$\checkmark (-3) \cdot (-3)^2 = (-3)^{1+2} = (-3)^3 = -27$$

$$\checkmark 2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3)^4 = 6^4$$

$$\checkmark 2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5$$

$$\checkmark 15^5 = (5 \cdot 3)^5 = 5^5 \cdot 3^5$$

$$\checkmark 35^3 = (7 \cdot 5)^3 = 7^3 \cdot 5^3$$

$$\checkmark 3^{x+3} = 3^x \cdot 3^3$$

$$\checkmark 7^{11} = 7^9 \cdot 7^2 = 7^6 \cdot 7^5 = 7^3 \cdot 7^8$$



Yani kuralları iki taraflı bilmemiz gerekir, neyin ne zaman lazım olacağı belli olmaz.

Örnek

$(27)^3 \cdot 9^5$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$(27)^3 \cdot 9^5 = (3^3)^3 \cdot (3^2)^5 = 3^9 \cdot 3^{10} = 3^{9+10} = 3^{19} \text{ bulunur.}$$

Örnek

$9^{-x+1} \cdot 3^{2x+3}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Çarpma işlemi fakat tabanlar yine farklı üslerde eşit değil. Tabanları eşitleyebilir miyiz?

$$\begin{aligned} 9^{-x+1} \cdot 3^{2x+3} &= (3^2)^{-x+1} \cdot 3^{2x+3} \\ &= 3^{2 \cdot (-x+1)} \cdot 3^{2x+3} \\ &= 3^{-2x+2} \cdot 3^{2x+3} \\ &= 3^{-2x+2+2x+3} \\ &= 3^5 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$15^2 + 10^2 + 5^2$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} (3 \cdot 5)^2 + (2 \cdot 5)^2 + 5^2 &= 3^2 \cdot 5^2 + 2^2 \cdot 5^2 + 5^2 \\ &= 5^2 \cdot [3^2 + 2^2 + 1] \\ &= 5^2 \cdot [9 + 4 + 1] \\ &= 5^2 \cdot 15 = 25 \cdot 15 \\ &= 375 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$2^{14} + 2^{15} + 2^{16}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Tabanlar aynı üsler farklı. Bu haliyle toplama işlemi yapılamaz. O halde, düzenleme yapalım.

$$\begin{aligned} 2^{14} + 2^{14+1} + 2^{14+2} &= 2^{14} + 2^{14} \cdot 2^1 + 2^{14} \cdot 2^2 \\ &= 2^{14} \cdot [1 + 2 + 2^2] \\ &= 7 \cdot 2^{14} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$5 \cdot 4^8 - 7 \cdot 8^4$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Yine toplama işlemi ama burada ne tabanlar ne üsler aynı yine düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
 5 \cdot (2^2)^8 - 7 \cdot (2^3)^4 &= 5 \cdot 2^{16} - 7 \cdot 2^{12} \\
 &= 5 \cdot 2^{4+12} - 7 \cdot 2^{12} \\
 &= 5 \cdot 2^4 \cdot 2^{12} - 7 \cdot 2^{12} \\
 &= 2^{12} \cdot (5 \cdot 16 - 7) \\
 &= 73 \cdot 2^{12} \text{ bulunur.}
 \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{0,6} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{1,8} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{1,6}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^4$$

$$\rightarrow (-3)^3 \cdot (-3)^{13} \cdot (-3)^6$$

$$(3^{22})$$

$$\rightarrow 2^4 \cdot 64^6 \cdot 16^{-5}$$

$$(2^{20})$$

$$\rightarrow (8^5)^{-3} \cdot (32^{-2})^7$$

$$(2^{-115})$$

$$\rightarrow 5^{-x} + 3 \cdot 5^x - 2 \cdot 5^8 - 5^x$$

$$(5^9 - 5^x)$$

Nasıl Uygularım?



2. $3^2 \cdot 9^3 \cdot 27^4$

işleminin sonucu kaçtır?

$$(3^{20})$$

3. $2^{0,1} \cdot 16^{0,2} \cdot 8^{-0,3}$

işleminin sonucu kaçtır?

$$(1)$$

4. $3^{-x} + 3 \cdot 3^{2x} - 1 \cdot 3^{5-3x}$

işleminin sonucunu bulunuz.

$$(3^{7-2x})$$

5. $4^a + 1 \cdot 8^{-a} + 2$

işleminin sonucunu bulunuz.

$$(2^{8-a})$$

Nasıl Uygularım?



6. $3^7 + 3^8 + 3^9$
işleminin sonucu kaçtır?

(13·3⁷)

9. $10^5 + 5^5$
işleminin sonucu kaçtır?

(33·5⁵)

7. $5^{-2} + 5^{-3} + 5^{-4}$
işleminin sonucu kaçtır?

(31·5⁻⁴)

İPUCU

Bütün üslü ifadelerden en küçük kuvvet türünden yazalım.
Örneğin; $5^{-2} = 5^{-4+2}$

10. $21^4 + 14^4 - 7^4$
işleminin sonucu kaçtır?

(96·7⁴)

8. $10^{-5} + 10^{-6} - 10^{-7}$
işleminin sonucu kaçtır?

(109·10⁻⁷)

11. $15^3 \cdot 45^4 \cdot 5^4$
işleminin sonucu kaçtır?

(15¹¹)

Ne Bilmeliyim? 6

Üslü İfadelerde Bölme İşlemi



İki üslü ifade bölünürken, tabanları aynı ise payın üssünden payda-
nın üssü çıkarılarak bulunan fark ortak olan tabana üs olarak yazılır.
Eğer üsler aynı tabanlar farklı ise ortak olan üs tabanların bölümüne
üs olarak yazılır.

$$x^m : x^n = x^{m-n}$$

$$x^n : y^n = (x : y)^n$$

$$\checkmark \frac{3^8}{3^5} = 3^{8-5} = 3^3 = 27$$

$$\checkmark \frac{2^{-3}}{2^5} = 2^{-3-5} = 2^{-8}$$

$$\checkmark \frac{(36)^4}{6^3} = \frac{(6^2)^4}{6^3} = \frac{6^8}{6^3} = 6^{8-3} = 6^5$$

$$\checkmark \frac{10^8}{(25)^4} = \frac{10^8}{(5^2)^4} = \frac{10^8}{5^8} = \left(\frac{10}{5}\right)^8 = 2^8 = 256 \text{ dir.}$$



Bir kesrin payında (çarpım halinde) bulunan bir üslü ifadeyi paydaya
ya da kesrin paydasında (çarpım halinde) bulunan bir üslü ifadeyi
paya yazarken bu ifadenin üssünün işareti değiştirilir.

$$\checkmark \frac{x^m \cdot y^n}{z^p} = \frac{x^m \cdot z^{-p}}{y^{-n}} = \frac{z^{-p}}{x^{-m} \cdot y^{-n}} \text{ gibi.}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$\frac{(-2)^{-4} \cdot 3^{-2}}{5^{-2}}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} \frac{(-2)^{-4} \cdot 3^{-2}}{5^{-2}} &= \frac{5^2}{(-2)^4 \cdot 3^2} \\ &= \frac{25}{16 \cdot 9} = \frac{25}{144} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$$\frac{2^{14} + 2^{13}}{2^{15} - 2^{13}}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Üslü ifadeler eşit olmadığına göre toplama çıkarma yapılamaz. O halde,
daha önce yaptığımız gibi düzenleme yaparak üslü ifadeleri aynı yapalım.

$$\begin{aligned} \frac{2^{14} + 2^{13}}{2^{15} - 2^{13}} &= \frac{2^{13} + 1 + 2^{13}}{2^{13} + 2 - 2^{13}} = \frac{2^1 \cdot 2^{13} + 2^{13}}{2^2 \cdot 2^{13} - 2^{13}} \\ &= \frac{2^{13} \cdot (2 + 1)}{2^{13} \cdot (2^2 - 1)} \\ &= \frac{2^{13} \cdot 3}{2^{13} \cdot 3} = 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$$\frac{15^5 + 10^5}{3^5 + 2^5}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Yine toplama yine üslü ifadeler eşit değil, Bu seferde üslü ifadeleri eşit-
lemenin başka bir tipini uygulayalım.

$$\begin{aligned} \frac{15^5 + 10^5}{3^5 + 2^5} &= \frac{(3 \cdot 5)^5 + (2 \cdot 5)^5}{3^5 + 2^5} \\ &= \frac{3^5 \cdot 5^5 + 2^5 \cdot 5^5}{3^5 + 2^5} \\ &= \frac{5^5 \cdot (3^5 + 2^5)}{3^5 + 2^5} = 5^5 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$\frac{3^{x+2} + 3^{x+3}}{3^{x-2} + 3^{x-1}}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

Hocam, artık toplama işleminde ne yapacağımızı öğrendik. Ortak çarpan parantezi...



$$\begin{aligned} \frac{3^{x+2} + 3^{x+3}}{3^{x-2} + 3^{x-1}} &= \frac{3^{x+2} + 3^{x+2+1}}{3^{x-2} + 3^{x-2+1}} \\ &= \frac{3^{x+2} + 3^{x+2} \cdot 3^1}{3^{x-2} + 3^{x-2} \cdot 3^1} \\ &= \frac{3^{x+2} \cdot (1 + 3)}{3^{x-2} \cdot (1 + 3)} \\ &= \frac{3^{x+2}}{3^{x-2}} \\ &= 3^{(x+2)-(x-2)} = 3^{x+2-x+2} = 3^4 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow \frac{3^5 \cdot 3^7}{3^4}$$

(3⁸)

$$\rightarrow \frac{4^5 \cdot 8^7}{16^{-3}}$$

(2⁴³)

$$\rightarrow \frac{(2^2)^{-3} \cdot (2^3)^7}{(2^4)^{-5}}$$

(2³⁵)

$$\rightarrow \frac{a^x \cdot a^{x+3}}{a^{-3}}$$

(a^{2x+6})

$$\rightarrow \frac{3^{2x-5} \cdot 3^{x+4}}{3^{x-3}}$$

(3^{2x+2})

Nasıl Uygularım?



2.

$$\frac{3^{2x} + 1 \cdot 3^{x-2}}{3^{-x} + 3}$$

İşleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 3^{4x} B) 3^{4x-2} C) 3^{4x-4}
D) 3^{2x-4} E) 3^{2x-2}

(C)

3.

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 + 2 + 2 + 2 + 2}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) 3,2 B) 6,4 C) 16 D) 32 E) 64

(B)

4.

$$\frac{5^6 + 5^7}{5^6}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 5^6 E) 5^7

(A)

5.

$$\frac{21^4 - 14^4}{7^4}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) 7^5 B) $3 \cdot 7^3$ C) 75 D) 65 E) 49

(D)

6.

$$\frac{2^{2x} + 3 + 2^{2x} + 2}{4^x - 1 - 4^x - 2}$$

İşleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 64 B) 16 C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{32}$ E) $\frac{1}{64}$

(A)

7.

$$\frac{7^{3x}}{7^{2x}} + \frac{7^{4x}}{7^{3x}} - \frac{7^{5x}}{7^{4x}}$$

İşleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 7^{3x} B) 7^{2x} C) 7^x D) $3 \cdot 7^x$ E) $2 \cdot 7^x$

(C)

8.

$$\frac{18^3}{27^3 + 18^3 + 9^3}$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{1}{27}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{9}$

(C)

İPUÇU

Pay ve payda arasında ortak bir çarpan bulmalısınız.

Üslü İfadeler

Nasıl Çözülür?



Örnek

$2^x = 3$ olduğuna göre;

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{2x-1}$$

ifadesinin sonucunu bulalım.

Çözüm



Verilen $2^x = 3$, o halde, soruların içerisinde verileni elde etmeye çalışalım.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{8}\right)^{2x-1} &= 8^{-(2x-1)} = 8^{-2x+1} \\ &= (2^3)^{-2x+1} = 2^{-6x+3} = 2^{-6x} \cdot 2^3 = (2^x)^{-6} \cdot 2^3 \end{aligned}$$

Verilen ifade ortaya çıktı hocam. 2^x yerine 3 yazalım.



$$= (3)^{-6} \cdot 2^3 = \frac{2^3}{3^6} = \frac{8}{3^6} \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$2^x = a \text{ ve } 7^x = b$$

olduğuna göre, 392^x ifadesinin a ve b türünden eşitini bulalım.

Çözüm



392^x i bulabilmek için öncelikler tabandaki 392'yi asal çarpanlarına ayıralım, bakalım ortaya ne çıkacak.

$$\begin{array}{r|l} 392 & 2 \\ 196 & 2 \\ 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 2^3 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 7^2$$

$$392^x = (2^3 \cdot 7^2)^x = (2^3)^x \cdot (7^2)^x = (2^x)^3 \cdot (7^x)^2$$



Şimdi verilenlere göre $2^x = a$ ile $7^x = b$ yi yerine yazalım.

$$392^x = (2^x)^3 \cdot (7^x)^2 = a^3 \cdot b^2 \text{ bulunur.}$$

Örnek

x ve y gerçel sayıları için

$$2^x = 6^{x+y}$$

olduğuna göre, 3^x in y türünden eşitini bulalım.

Çözüm



Bu soruda özellikleri tersten kullanalım.

$$\begin{aligned} 2^x = 6^{x+y} &\Rightarrow 2^x = 6^x \cdot 6^y \\ &\Rightarrow 2^x = (2 \cdot 3)^x \cdot 6^y \\ &\Rightarrow 2^x = 2^x \cdot 3^x \cdot 6^y \\ &\Rightarrow 1 = 3^x \cdot 6^y \\ &\Rightarrow \frac{1}{6^y} = 3^x \\ &\Rightarrow 3^x = 6^{-y} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki verilere göre istenilen ifadenin eşitini bulunuz.

$$\rightarrow 2^x = a \text{ ise } 2^{3x} = ?$$

$$(a^3)$$

$$\rightarrow 3^x = 2 \text{ ise } 27^{x+1} = ?$$

$$(216)$$

$$\rightarrow 5^x = a \text{ ise } (125)^{1-x} = ?$$

$$\left(\frac{125}{a^3}\right)$$

Nasıl Uygularım?



2. $3^{x-1} = 2$ ise $9^x = ?$

(36)

→ $3^x = a$ ve $5^x = b$ ise $(225)^x = ?$

 $(a^2 \cdot b^2)$

→ $2^x = a$ ve $3^x = b$ ise $\left(\frac{16}{81}\right)^x = ?$

 $\left(\frac{a}{b}\right)^4$

3. $5^m = 2$ olduğuna göre,

$$5^{3m+2}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 25 B) 50 C) 75 D) 100 E) 200

(E)

4. $5^x = 2$

olduğuna göre, 25^{2x-1} ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{16}{25}$ C) $\frac{8}{25}$ D) $\frac{8}{5}$ E) $\frac{9}{5}$

(B)

5. $3^x = 2$

olduğuna göre, $(81)^x + 3^{x+2}$ değeri kaçtır?

- A) 16 B) 18 C) 32 D) 34 E) 36

(D)

Nasıl Uygularım?



6. $2^x = a$ ve $3^x = b$

olduğuna göre, 36^x ifadesinin a ve b türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) a^2b B) ab^2 C) a^2b^2 D) a^3b E) ab^3

(C)

7. $3^m = a$

$7^m = b$

olduğuna göre, $(189)^m$ nin a ve b türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) a^2b B) ab^2 C) a^3b D) a^2b^2 E) ab^3

(C)

8. $3^x = a$ ve $5^x = b$

olduğuna göre, $\left(\frac{27}{25}\right)^x$ ifadesinin a ve b türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{a^2}{b^2}$ B) $\frac{a^2}{b^3}$ C) $\frac{a}{b^3}$ D) $\frac{a^3}{b^2}$ E) $\left(\frac{a}{b}\right)^4$

(D)

9. $6^{x-1} = 5 \cdot 3^{x+1}$

olduğuna göre, 2^x kaçtır?

- A) 90 B) 60 C) 5^3 D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{25}$

(A)

10. $5^x = 15^{x+y}$

olduğuna göre, 3^x in y türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 5^y B) 3^y C) 15^y D) 5^{-y} E) 15^{-y}

(E)

11. x ve y gerçel sayıları için

$15^x = 3^{x+y}$

olduğuna göre, 5^x in y türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 3^y B) 5^y C) 3^{2y} D) $2y$ E) y

(A)

Ne Bilmeliyim? 7

Üslü Denklemler

► Birbirine eşit olan iki üslü ifadenin tabanları aynı ise üsleri de birbirine eşit olmalıdır.

$$x^m = x^n \Rightarrow m = n \text{ dir. } (x \neq 0, x \neq \pm 1)$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$3^{x+2} = 81$$

denkleminin kökünü bulalım.

Çözüm

$$3^{x+2} = 81 \Rightarrow 3^{x+2} = 3^4 \quad (\text{Tabanlar eşit})$$

$$\Rightarrow x + 2 = 4$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ dir.}$$

Örnek

$$(32)^{4n} = 16^5$$

olduğuna göre, n'yi bulalım.

Çözüm



Üsler eşit mi? Hayır. Tabanlar eşit mi? Hayır. Ne yapılabiliriz?

Hocam, tabanları eşitleyelim.

$$(32)^{4n} = 16^5 \Rightarrow (2^5)^{4n} = (2^4)^5$$

$$\Rightarrow 2^{20n} = 2^{20} \quad (\text{tabanlar eşit})$$

$$\Rightarrow 20 \cdot n = 20$$

$$\Rightarrow n = 1 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{3-x} = 625^{x-1}$$

denkleminin kökünü bulalım.

Çözüm

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{3-x} = 625^{x-1} \Rightarrow (5^{-2})^{3-x} = (5^4)^{x-1}$$

$$\Rightarrow 5^{-6+2x} = 5^{4x-4}$$

$$\Rightarrow -6 + 2x = 4x - 4$$

$$\Rightarrow -2 = 2x$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$3 \cdot 2^{x+1} + 10 \cdot 2^x = 64$$

olduğuna göre, x in değerini bulalım.

Çözüm

$$3 \cdot 2^{x+1} + 10 \cdot 2^x = 64 \Rightarrow 3 \cdot 2^x \cdot 2^1 + 10 \cdot 2^x = 64$$

$$\Rightarrow 6 \cdot 2^x + 10 \cdot 2^x = 64$$

$$\Rightarrow 16 \cdot 2^x = 64$$

$$\Rightarrow 2^x = \frac{64}{16} = 4$$

$$\Rightarrow 2^x = 2^2$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki denklemleri sağlayan x değerlerini bulunuz.

$$\rightarrow 2^{-x+5} = 128$$

(-2)

$$\rightarrow 8^{2x+3} = 512$$

(0)

$$\rightarrow \left(\frac{1}{16}\right)^{x-2} = 64$$

$\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\rightarrow 9^{3x-1} = 243^x$$

(2)

2. $2^{a-2} = 8$

olduğuna göre, 4^{a-3} değeri kaçtır?

- A) 4 B) 16 C) 32 D) 64 E) 256

(B)

3. $2^x + 2^x + 2^x = 12$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

(C)

4. $3^{x+1} + 3^x = 36$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(B)

Nasıl Uygularım?



5. $2^x \cdot 4^x \cdot 8^x = 256$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{8}{9}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{1}{3}$
(D)

6. $2^{a-2} = 16$

olduğuna göre, 4^{a-4} değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{16}$ C) 4 D) 16 E) 64
(D)

7. $\frac{a}{b} = 2$ ve $\left(\frac{b}{a}\right)^n = 8$

olduğuna göre, n kaçtır?

- A) -2 B) -3 C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$
(B)

Ne Bilmeliyim? 8



► Üsleri eşit olan bir üslü denklemde; üs tek sayı ise tabanlar eşit, üs çift sayı ise tabanlar eşit ya da tabanlardan biri diğerinin ters işaretlisine eşittir.

($a \neq \pm 1$, $b \neq \pm 1$) ve $n \neq 0$ olmak üzere,

$$a^n = b^n \Rightarrow \begin{cases} a = b ; & n \text{ tek sayı ise,} \\ a = b \text{ veya } a = -b ; & n \text{ çift sayı ise,} \end{cases}$$

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$(x + 1)^5 = 32$$

denkleminin köklerini bulalım.

Çözüm

$$(x + 1)^5 = 32 \Rightarrow (x + 1)^5 = 2^5 \quad (\text{Üsler eşit ve tek sayı})$$

$$\Rightarrow x + 1 = 2$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$(x + 1)^4 = 16$$

olduğuna göre, x'in alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

$$(x + 1)^4 = 2^4 \quad (\text{üstler eşit ve çift sayı})$$

$$x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1 \text{ dir.}$$

veya

$$x + 1 = -2 \Rightarrow x = -3 \text{ tür.}$$

Buna göre, Ç.K. = $\{-3, 1\}$ dir.

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki denklemleri sağlayan x değerlerini bulunuz.

$$\rightarrow (3x - 4)^5 = (x + 6)^5$$

(5)

$$\rightarrow (2x - 6)^2 = (x + 5)^2$$

$$\left(x_1 = 11, x_2 = \frac{1}{3} \right)$$

$$\rightarrow (x - 2)^3 = 8$$

(4)

$$\rightarrow (3x + 2)^4 = 81$$

$$\left(x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -\frac{5}{3} \right)$$

$$\rightarrow (2x + 1)^5 = 32$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)$$

$$\rightarrow (6 - x)^6 = 64 \cdot x^6$$

$$(x_1 = -6, x_2 = 2)$$

Ne Bilmeliyim? 9

$$x^n = 1 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 & \text{ve } x \neq 0 \\ x = 1 & \text{ve } n \text{ reel sayı} \\ x = -1 & \text{ve } n \text{ çift sayı} \end{cases}$$

olmalıdır.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$(x - 3)^{x+2} = 1$$

denkleminin çözüm kümesi bulalım.

Çözüm



Yukarıdaki üç durumu sırayla uygulayalım.

i. $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$$x = -2 \text{ için } x - 3 = -2 - 3 = -5 \neq 0$$

olduğundan $x = -2$ denklemi sağlar.



Üs sıfır oldu fakat taban sıfır olmadı mükemmel oldu.

ii. $x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$ denklemi sağlar.

iii. $x - 3 = -1$ ve $x + 2$ çift sayı olmalı

$$x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2 \text{ ve } 2 + 2 = 4 \text{ çift sayıdır.}$$



Taban -1 oldu üs de çift sayı oldu bu da mükemmel oldu.

O halde, Ç.K. = $\{-2, 2, 4\}$ dir.

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki denklemleri sağlayan x değerlerini bulunuz.

$$\rightarrow (x - 5)^{x+4} = 1$$

$\{-4, 4, 6\}$

$$\rightarrow (2x + 1)^{3x-3} = 1$$

$\{-1, 0, 1\}$

$$\rightarrow (x - 2)^{4-x} = 1$$

$\{3, 4\}$

Üslü İfadeler

Ne Bilmeliyim? 10

$$\left. \begin{array}{l} a^x = b^y \\ a^n = b^m \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{n} = \frac{y}{m} \text{ dir.}$$

Tabanları aralarında asal ve üsleri tam sayı olan iki üslü ifade birbirine eşitse, üsleri sıfır olmalıdır.

a ve b aralarında asal ve m ve n tamsayı ise,

$$a^n = b^m \Rightarrow n = m = 0 \text{ dir.}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

x, y, z ve t sıfırdan farklı gerçel sayılar olmak üzere,

$$2^x = 27^y$$

$$2^z = 9^t$$

olduğuna göre, $\frac{x \cdot t}{y \cdot z}$ nin değerini bulalım.

Çözüm



Üslü denklemlerde tabanlar eşit mi? Değil. Üsler eşit mi? Değil.



Özel durumlardan faydalanalım ama önce düzenleme yapmamız gerekli.

$$\left. \begin{array}{l} 2^x = 27^y \Rightarrow 2^x = 3^{3y} \\ 2^z = 9^t \Rightarrow 2^z = 3^{2t} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{3 \cdot y}{2 \cdot t} \Rightarrow 2 \cdot x \cdot t = 3 \cdot y \cdot z$$

$$\Rightarrow \frac{x \cdot t}{y \cdot z} = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek

a ve b tam sayı olmak üzere,

$$16^{4b+12} = 27^{3a-15}$$

olduğuna göre, a + b nin değerini bulalım.

Çözüm



Ne tabanlar eşit ne de üsler. Eşitleme durumumuz da yok. 16 ve 17 aralarında asal. Ama üsler tam sayı olduğundan sıfır olması dışında seçenek kalmıyor.

$$16^{4b+12} = 27^{3a-15}$$

$$4b + 12 = 0 \Rightarrow 4b = -12 \Rightarrow b = -3 \text{ tür.}$$

$$3a - 15 = 0 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5 \text{ dir.}$$

Buradan, a + b = -3 + 5 = 2 bulunur.

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıda verilen denklemlere göre, a · b değerini bulunuz.

$$2^a = 5$$

$$5^b = 4$$

(2)

$$4^a = 3$$

$$9^b = 2$$

$\left(\frac{1}{4}\right)$

$$8^{-a} = 3$$

$$27^{-b} = 4$$

$\left(\frac{2}{9}\right)$

$$25^x = 8^a \text{ ve } 4^y = 5^b$$

$\left(\frac{2xy}{3}\right)$

Nasıl Uygularım?



1. a ve b tam sayılar olmak üzere, aşağıdaki denklemleri sağlayan a ve b değerlerini bulunuz.

$$\rightarrow 2^{a-4} = 7^{b+3}$$

$$(a = 4, b = -3)$$

$$\rightarrow 16^{3b-12} = 27^{4a+20}$$

$$(a = -5, b = 4)$$

$$\rightarrow 3^{a+b-3} = 17^{2a-b+9}$$

$$(a = -2, b = 5)$$

$$\rightarrow 5^{a \cdot b + 36} = 9^a + b$$

$$(a = 6, b = -6) \text{ veya } (a = -6, b = 6)$$

Ne Bilmeliyim? 11



Üslü Eşitsizlikler

- $a > 1$ olmak üzere,
 $a^n > a^m \Rightarrow n > m$ dir.
- $0 < a < 1$ olmak üzere,
 $a^n > a^m \Rightarrow n < m$ dir.

Üslü İfadelerde Sıralama

- Üslü ifadelerde sıralama yapılırken sıralanacak sayıların tabanları veya üsleri eşitlenir.

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$x = (2^3)^4, y = 2^{(2^3)}, z = 2^{15}$$

x, y, z yi sıralayalım.

Çözüm



Tabanlar eşit olduğuna göre, üsleri düzenleyelim.

$$x = (2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}, y = 2^{(2^3)} = 2^8, z = 2^{15}$$



Tabanlar eşit ve 1 den büyük olduğuna göre,

$2^8 < 2^{12} < 2^{15}$ olduğundan, $y < x < z$ olur.

Örnek

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} < 4^{2x}$$

eşitliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm



Tabanları düzenleyip yine eşit hale getirelim.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} < 4^{2x} \Rightarrow (2^{-1})^{x+4} < (2^2)^{2x} \Rightarrow 2^{-x-4} < 2^{4x}$$



Yine, tabanlar eşit ve 1'den büyük olduğuna göre, eşitsizlik yönü aynı kalacak demektir.

$$\Rightarrow -x-4 < 4x \Rightarrow -4 < 5x \Rightarrow -\frac{4}{5} < x \text{ dir.}$$

olduğuna göre, Ç.K. = $\left(-\frac{4}{5}, \infty\right)$ olur.

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki a, b, c sayılarını sıralayınız.

$$\rightarrow a = 2^{11}, \quad b = 4^3, \quad c = 8^5$$

$$(b < a < c)$$

$$\rightarrow a = 5^{-5}, \quad b = 5^{-7}, \quad c = 5^{-12}$$

$$(c < b < a)$$

$$\rightarrow a = 2^{(24)}, \quad b = 4^{(32)}, \quad c = (8^2)^3$$

$$(a < b = c)$$

$$\rightarrow a = \left(\frac{1}{4}\right)^9, \quad b = \left(\frac{1}{16}\right)^5, \quad c = \left(\frac{1}{8}\right)^4$$

$$(b < a < c)$$

2. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

$$\rightarrow 2^{5-n} \geq 64$$

$$(-\infty, -1]$$

$$\rightarrow 3^{3n-6} < 3^{2n+5}$$

$$(-\infty, 11)$$

$$\rightarrow 8^{4n-1} > 4^{3n+5}$$

$$\left(\frac{13}{6}, \infty\right)$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} < \left(\frac{1}{9}\right)^{3x-4}$$

$$\left(-\infty, \frac{11}{7}\right)$$

Nasıl Uygularım?



3. $a = 2^7$, $b = 4^3$, $c = 8^4$

olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

- A) $a < b < c$ B) $a < c < b$ C) $b < c < a$
D) $b < a < c$ E) $c < b < a$

(D)

4. $x = \left(\frac{1}{3}\right)^5$, $y = \frac{1}{81}$, $z = \frac{1}{3^6}$

olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

- A) $x < y < z$ B) $x < z < y$ C) $z < y < x$
D) $z < x < y$ E) $y < x < z$

(D)

5. $4^x + 1 \leq 16^{2x-1}$

eşitsizliğin çözüm kümesini aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $[1, \infty)$ B) $[-1, \infty)$ C) $[1, 4]$
D) $[-1, 4]$ E) $(-\infty, 1]$

(A)

6. $27^{x-1} > 81$

olduğuna göre, x in alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(C)

7. $9^{m+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{m+2}$

eşitsizliğini sağlayan en küçük m tam sayısı kaçtır?

- A) -1 B) -3 C) -4 D) 2 E) 3

(A)

Ne Bilmeliyim? 12

Çok Büyük Veya Çok Küçük Sayılar

a bir rakam olmak üzere,

$a000 \dots 0 = a \cdot 10^n$ biçiminde yazılabilir.
n tane sıfır

$0,000 \dots 0a = a \cdot 10^{-n}$ biçiminde yazılabilir.
n tane rakam

✓ $0,000007 = 7 \cdot 10^{-6}$
6 basamak

✓ $0,0000008 = 8 \cdot 10^{-7} = 0,8 \cdot 10^{-6} = 0,08 \cdot 10^{-5}$
7 basamak



$A \cdot 10^n$ şeklindeki üslü ifade de A büyüdükçe n küçülür.

✓ $73 \cdot 10^{25} = 730 \cdot 10^{24} = 7300 \cdot 10^{23}$

✓ $148 \cdot 10^{45} = 14,8 \cdot 10^{46} = 1,48 \cdot 10^{47}$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$143000000000 = 1430 \cdot 10^x$$

eşitliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$143000000000 = 143 \cdot 10^9 = 1430 \cdot 10^8$$

9 tane sıfır

olduğundan, $x = 8$ bulunur.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$0,000007 + 0,0000008$$

toplamın sonucunun bilimsel şekilde gösterilmesini bulalım.

Çözüm



Verilen sayı, $0 \leq A < 10$ olmak üzere, $A \cdot 10^n$ şeklinde yazmamız gerekir.

$$0,000007 = 7 \cdot 10^{-6}$$

6 basamak

$$0,0000008 = 8 \cdot 10^{-7} = 0,8 \cdot 10^{-6}$$

7 basamak



10'nun üslerini aynı yapmak için, 8'i küçültüp 0,8 yapınca 10'nun üzerindeki -7'yi büyütüp -6 yaptık.

$$0,000007 + 0,0000008 = 7 \cdot 10^{-6} + 0,8 \cdot 10^{-6} = 7,8 \cdot 10^{-6}$$

Örnek

$$8 \cdot (25)^4 \cdot (20)^3$$

sayısının kaç basamaklı bir sayı olduğunu bulalım.

Çözüm



Yukardaki çarpma işlemini yapıp sonucu bulamayacağımıza göre, yapılacak iş sayıyı 10'un kuvveti olacak şekilde düzenlemektir. 10'un asal çarpanları da 5 ve 2 olduğundan,

$$\begin{aligned} 8 \cdot (25)^4 \cdot (20)^3 &= 2^3 \cdot (5^2)^4 \cdot (2^2 \cdot 5)^3 \\ &= 2^3 \cdot 5^8 \cdot 2^6 \cdot 5^3 \\ &= 2^{3+6} \cdot 5^{8+3} \\ &= 2^9 \cdot 5^{11} \\ &= 2^9 \cdot 5^9 \cdot 5^2 \\ &= 5^2 \cdot (2 \cdot 5)^9 \\ &= 5^2 \cdot 10^9 \\ &= 25 \cdot 10^9 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$



İki basamaklı 25'in yanına 9 tane sıfır yazınca bu sayı $2 + 9 = 11$ basamaklı olur.

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki sorularda istenenleri bulunuz.

→ $23000000000 = 23 \cdot 10^x$ ise x kaçtır?

(9)

→ $0,000000017 = 1,7 \cdot 10^x$ ise x kaçtır?

(-8)

→ $3010000000 = 3,01 \cdot 10^x$ ise x kaçtır?

(9)

→ $0,00000003 = 300 \cdot 10^x$ ise x kaçtır?

(-10)

2. $0,00005 + 0,00012$

toplamının sonucunun bilimsel gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $1,7 \cdot 10^{-4}$ B) $5,7 \cdot 10^{-4}$ C) $1,7 \cdot 10^{-5}$
D) $1,2 \cdot 10^{-6}$ E) $1,7 \cdot 10^{-8}$

(A)

3.

$$\frac{0,25 \cdot 10^{-2} + 0,5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-4}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 10 B) 5 C) 10^{-1} D) $5 \cdot 10^{-1}$ E) $5 \cdot 10^{-2}$

(A)

4.

$$\frac{0,0002 \cdot 10^{40} + 0,08 \cdot 10^{38}}{10^{36}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{100}$ C) 10 D) 100 E) 1

(C)

5.

$$256 \cdot 5^7$$

sayısı kaç basamaklı bir sayıdır?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

(C)

6.

$$(20)^5 \cdot (15)^3$$

sayısı kaç basamaklı bir sayıdır?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

(D)

Üslü İfadeler

1. Bir hesap makinesinde $\times$ tuşu bozuk olduğundan $\times$ tuşuna her basıldığında ekranda yazılı sayısının karesi alınmaktadır.

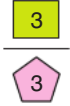
Buna göre, ekranda 2 sayısı yazılıyken $\times$ tuşuna art arda kaç kere basılırsa ekrandaki sayının değeri 4^{16} olur?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

2. n kenarlı bir düzgün çokgenin içine yazılan a doğal sayısı ile oluşturulan sembolün değeri, $a^n + a^{n-1}$ ifadesi ile bulunur.

Örneğin; $\boxed{2} = 2^4 + 2^3$ tür.

Buna göre,



işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) 1 C) 3 D) 9 E) 27

3. Dünya'da karaların alanı $1491 \cdot 10^5$ km² dir. Dünya nüfusu yaklaşık olarak $8,1 \cdot 10^9$ kişidir.

Bu bilgilere göre, Dünya'da km başına kaç kişi düşmektedir?

- A) $\frac{27}{497} \cdot 10^3$ B) $\frac{27}{497} \cdot 10^4$ C) $27 \cdot 10^3$
D) $\frac{497}{27} \cdot 10^3$ E) $\frac{497}{27} \cdot 10^4$

4. Bir kamyonetteki 16 sıranın her birinde üst üste 8 kasa ve her bir kasanın içerisinde 4 kat olmak üzere her katta 32 tane mandalina vardır.

Buna göre, bu kamyonette toplam kaç tane mandalina vardır?

- A) 2^{12} B) 2^{13} C) 2^{14} D) 2^{15} E) 2^{16}

- 5.



Gömlek
 $2^a + 2$



Ayakkabı
 $4^a - 1$

Şekilde bir mağazanın vitrinindeki ayakkabı ve gömleğin fiyatı etiketlerinde yazılmıştır.

10 tane gömleğin fiyatı 5 tane ayakkabı fiyatına eşit olduğuna göre, bir ayakkabının fiyatı kaç TL dir?

- A) 2^5 B) 2^6 C) 2^7 D) 2^8 E) 2^9

6. a, b, c pozitif tam sayılardır.

$$a > b > c$$

olduğuna göre, aşağıdaki ifadelerden hangisinin değeri tam sayıdır?

- A) $\frac{2^b}{2^a}$ B) $\frac{3^c}{3^a}$ C) $\frac{5^c}{5^a}$ D) 7^{b-a} E) $\frac{2^{a+c}}{2^b}$

Üslü İfadeler

7. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ biçiminde ifade edilen sayılara fermat sayısı denir.

Örneğin; $n = 3$ için $2^{(2^3)} + 1 = 257$ fermat sayıdır.

Buna göre, aşağıdaki sayılardan hangisi Fermat sayısıdır?

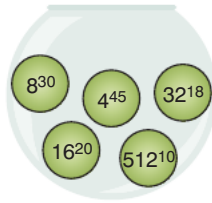
- A) 4 B) 7 C) 17 D) 129 E) 513

8. İnternet üzerinden yapılan 5 turluk bir yarışmanın ilk turuna 243000 yarışmacı katılıyor. Her turuna sonunda o tura katılan yarışmacıların $\frac{3}{4}$ 'te 2'si eleniyor ve sadece kalan yarışmacılar bir sonraki tura katılıyor.

Buna göre, 5. turun sonunda kalan yarışmacı sayısı kaçtır?

- A) $2^7 \cdot 5^4$ B) $2^8 \cdot 5^3$ C) $2^5 \cdot 5^4$ D) 10^4 E) 10^3

9.

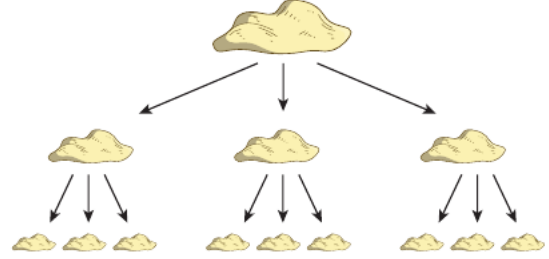


Tuğba yukarıdaki kavanozun içerisindeki toplardan birini alıyor.

Tuğba'nın aldığı topun üzerinde yazılı olan sayı diğer top-
ların üzerinde yazılı olan sayılardan farklı olduğuna göre,
Tuğba'nın aldığı topun üzerinde yazılı olan sayı kaçtır?

- A) 8^{30} B) 4^{45} C) 32^{18} D) 16^{20} E) 512^{10}

10. Eline bir oyun hamuru olan Esat, şekilde gösterildiği gibi her adımda elindeki her bir oyun hamurunu 3 parçaya ayırıyor ve 2. adım sonunda 9 parça oyun hamuru elde ediyor.



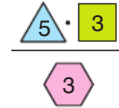
Esat başlangıçtan itibaren her adımda, elindeki her oyun hamurunu 3 yerine 2 parçaya ayırsaydı 4. adımda kaç para oyun hamuru elde ederdi?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 24

11. n kenarlı bir düzgün çokgenin içine yazılı bir a doğal sayısıyla oluşturulan sembolün değeri n^a ifadesi ile bulunur.

Örneğin; $\boxed{5} = 4^5$ dir.

Buna göre,



ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 48 B) 64 C) 72 D) 84 E) 96

12. x ve y birer gerçel sayı olmak üzere,

$$2^y \cdot (2^{x-y} + 2) - 2^x$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 2^y B) 2^{y+1} C) 2^x D) 2^{x-2} E) 2^{x+1}

BÖLÜM 11

ÖĞRENELİM

KÖKLÜ İFADELER Köklü İfadeler

Ne Bilmeliyim? 1

KÖKLÜ İFADELER

a bir reel sayı ve n, 1 den büyük bir doğal sayı olmak üzere;

$x^n = a$ eşitliğini sağlayan x sayısına a'nın n. dereceden kökü denir ve $x = \sqrt[n]{a}$ şeklinde gösterilir.

$$x^n = a \Rightarrow x = \sqrt[n]{a}$$

$$\checkmark 2^2 = 4 \Rightarrow \sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2$$

2'nin karesi 4 ise 4'ün karekökü 2'dir.

$$\checkmark 3^3 = 27 \Rightarrow \sqrt[3]{27} = 3$$

3'ün küpü 27 ise 27'nin küpkökü 3'tür.



Buraya kadar güzeldi, ama şimdi dikkat !!!

$$\checkmark x^3 = -8 \Rightarrow \sqrt[3]{-8} = -2 \text{ küpü } -8 \text{ olan sayının küpkökü } -2 \text{ dir.}$$

$$\checkmark x^2 = -4 \text{ ise karesi } -4 \text{ olan reel sayı olmadığına göre, } \sqrt{-4} \text{ de reel sayı değildir. Yani tanımsızdır.}$$

Aaa... Doğru ne yapacağız?

$\sqrt[2n]{a}$ ifadesinin bir reel sayı belirtmesi için; $a \geq 0$ olmalıdır.



Kök derecesi Ç (çift sayı) ise kökün içi negatif olamaz.

$$(\sqrt[2]{+}, 0 = +, 0)$$

$$\checkmark \sqrt{3}, \sqrt[8]{7}, \sqrt[4]{179}, \sqrt[6]{218}, \dots$$

$\sqrt[2n-1]{a}$ ifadesi a'nın bütün reel sayı değerleri için bir reel sayı belirtir.



Kök derecesi T (tek sayı) ise kök içerisi pozitif, negatif veya sıfır olabilir. ($\sqrt[2]{-}, 0 = -, 0$)

$$\checkmark \sqrt[3]{3}, \sqrt[7]{6}, \sqrt[3]{-9}, \sqrt[5]{-18}, \dots$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

Aşağıdaki ifadelerin tanım aralıklarını bulalım.

$$\checkmark \sqrt{x+2} \text{ ise } x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$\checkmark \sqrt[4]{x-3} \text{ ise } x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

$$\checkmark \sqrt[3]{x} \text{ ise } x \in \mathbb{R}$$

$$\checkmark \sqrt[5]{x+4} \text{ ise } x \in \mathbb{R}$$

Örnek

$a < 0 < b$ olmak üzere, aşağıdakilerden hangisi reel sayıdır?

A) $\sqrt{a}$

B) $\sqrt{a \cdot b}$

C) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$

D) $\sqrt[6]{a^2 \cdot b}$

E) $\sqrt[4]{a-b}$

Çözüm



Köklü ifade ne zaman reel sayı (tanımlı) oluyordu? Kökün derecesi tek sayı ise problem yoktu. Problem nerede, kök derecesi çift sayı ise içerisi pozitif sayı veya en azından sıfır olmalıydı.

Buna göre;

$$a \rightarrow - \text{ olduğundan } \sqrt{a} \notin \mathbb{R}$$

$$ab \rightarrow - \cdot + = - \text{ olduğundan } \sqrt{a \cdot b} \notin \mathbb{R}$$

$$\frac{a}{b} \rightarrow \frac{-}{+} = - \text{ olduğundan } \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \notin \mathbb{R}$$

$$a^2 \cdot b \rightarrow (-)^2 \cdot + = + \text{ olduğundan } \sqrt[6]{a^2 \cdot b} \in \mathbb{R} \text{ dir.}$$

$$a < b \rightarrow a - b < 0 \text{ olduğundan } \sqrt[4]{a-b} \notin \mathbb{R} \text{ dir.}$$

Hocam... İşaretleri tespit için değer de versek olurdu değil mi?



Tabii ki... Canın nasıl isterse.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$\sqrt{x} + \sqrt[4]{4-x} - \sqrt[3]{x-1}$$

İfadesinin bir reel sayı belirtmesi için x in alabileceği tam sayı değerleri toplamını bulalım.

Çözüm



Kök derecesi tek sayı olan $\sqrt[3]{x-1}$ e bakmaya gerek yok değil mi? Geriye ne kalıyor? Derecesi çift olanın içersi ne olmalıydı?

Hocam... Sıfırdan büyük veya eşit olmalıydı.



Yani;

$$\sqrt[3]{x-1} \in \mathbb{R} \text{ dir.}$$

$$\sqrt{x} \rightarrow x \geq 0$$

$$\sqrt[4]{4-x} \rightarrow 4-x \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x$$



İki eşitsizliğin ortak çözüm kümesi, sıfırdan büyük 4'ten küçük doğal sayılardır.

$0 \leq x \leq 4 \rightarrow$ Bu aralıktaki doğal sayılar 0, 1, 2, 3 ve 4 tür.



Eşitlikten dolayı 0 ve 4'ü de çözüme aldığımıza dikkat edin.

Bu sayıları toplayalım;

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdakilerden hangileri bir reel sayı belirtir?

$$\rightarrow \sqrt[3]{-2} \quad (\in \mathbb{R})$$

$$\rightarrow \sqrt[4]{(-2)^2} \quad (\in \mathbb{R})$$

$$\rightarrow \sqrt[5]{-3^3} \quad (\in \mathbb{R})$$

$$\rightarrow \sqrt[6]{-2^6} \quad (\notin \mathbb{R})$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{\frac{-2}{3}} \quad (\in \mathbb{R})$$

2. Aşağıdaki denklemleri sağlayan x değerlerinin reel sayı olup olmadıklarını bulunuz.

$$\rightarrow \sqrt{x} = 2 \quad (\in \mathbb{R})$$

$$\rightarrow \sqrt[4]{x} = -2 \quad (\notin \mathbb{R})$$

$$\rightarrow \sqrt[5]{x} = -2 \quad (\in \mathbb{R})$$

$$\rightarrow \sqrt[7]{-x} = -3 \quad (\in \mathbb{R})$$

$$\rightarrow \sqrt[4]{x^3} = 2 \quad (\in \mathbb{R})$$

3. Aşağıdaki ifadelerin reel sayı belirtmesi için x in alabileceği değerlerin aralığını bulunuz.

$$\rightarrow \sqrt[5]{3x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\rightarrow \sqrt{2x+3} \quad \left(\left[-\frac{3}{2}, \infty \right) \right)$$

$$\rightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt[4]{3-x} \quad ([2, 3])$$

Nasıl Uygularım?



4. Aşağıdakilerden hangisi bir reel sayı belirtmez?

- A) $\sqrt[5]{-7}$ B) $\sqrt[4]{(-3)^2}$ C) $\sqrt[3]{(-5)^3}$
 D) $\sqrt[6]{-2^6}$ E) $\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}$

(D)

5. Aşağıdaki denklemlerin hangisinde, x reel sayı değeri belirtmez?

- A) $\sqrt[3]{x} = 2$ B) $\sqrt{x} = -2$ C) $\sqrt[3]{-x} = -2$
 D) $\sqrt[5]{x^2} = 2$ E) $\sqrt[5]{x^3} = -1$

(B)

6. $x < y < 0 < z$ olmak üzere, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle reel sayıdır?

- A) $\sqrt{z + y}$ B) $\sqrt{x + z}$ C) $\sqrt{x + y}$
 D) $\sqrt{zy}$ E) $\sqrt{xyz}$

(E)

İPUCU

Karekök içerisindeki işaret önemli. Kesinlikle şartına dikkat ettiniz mi?

7. $x < y < 0$ olmak üzere, aşağıdakilerden hangisi reel sayıdır?

- A) $\sqrt{-xy}$ B) $\sqrt[4]{x-y}$ C) $\sqrt[6]{x^3y}$
 D) $\sqrt[6]{x^2y}$ E) $\sqrt{x+y}$

(C)

İPUCU

x ve y yerine değer verip kök içlerinin işaretine bakın.

8. $\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[6]{5-x}$

ifadesinin bir reel sayı belirtmesi için x in alabileceği tam sayı değerleri toplamı kaçtır?

- A) 9 B) 11 C) 12 D) 15 E) 16

(D)

9. $A = \sqrt[4]{3-x} + \sqrt{7-x} - \sqrt[3]{-x}$

A bir reel sayı olduğuna göre, x in alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

(A)

Ne Bilmeliyim? 2

Köklü İfadeyi Üslü İfade Olarak Yazma



Üslü ifadeden köklüye geçme işlemi tamam, şimdi de köklüden nasıl kurtulacağız buna bakalım.

Kökün derecesi ile kök içerisindeki üslü ifadenin üssü eşitse,



n tek sayı ise problem yok kökü kaldır gitsin.

➤ $\sqrt[n]{a^n} = a$ (n tek sayı)

✓ $\sqrt[5]{2^5} = 2$

✓ $\sqrt[3]{(-3)^3} = -3$

✓ $\sqrt[3]{(-1)^3} = -1$

✓ $\sqrt[7]{(-4)^7} = -4$



n çift sayı ise orada dur! Kökü kaldırabilirsin ama mutlaka, mutlak değer koyacaksın.

➤ $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ (n çift sayı)

✓ $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$

✓ $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$

✓ $\sqrt[6]{(-4)^6} = |-4| = 4$

✓ $\sqrt[8]{(-1)^8} = |-1| = 1$

Ne Bilmeliyim? 3

Kökün derecesi ile kök içerisindeki üslü ifadenin üssü farklı ise,



Kök içerisindeki üslü ifadenin üssünü kökün derecesine böl, dışarı yaz.

➤ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

✓ $\sqrt{2^4} = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2$

✓ $\sqrt[5]{3^{15}} = 3^{\frac{15}{5}} = 3^3$

✓ $\sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}$

✓ $\sqrt[5]{3^7} = 3^{\frac{7}{5}}$



Fark ettiniz mi? Üssün kesirli olması o sayının köklü sayı olduğunu gösterir.

✓ $5^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{5^4}$

✓ $7^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{7^3}$

✓ $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$

✓ $3^{\frac{4}{15}} = \sqrt[15]{3^4}$

Köklü İfadenin Üssünün Alınması

➤ a pozitif reel sayı olmak üzere

$$[\sqrt[n]{a}]^m = \sqrt[n]{a^m}$$

✓ $(\sqrt[7]{5^2})^3 = \sqrt[7]{5^{2 \cdot 3}} = \sqrt[7]{5^6}$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$\sqrt{(-7)^2} - \sqrt[3]{(-4)^3} - \sqrt[4]{(-2)^4}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Unutma! Çift kuvvette mutlak değer hayat kurtarır, tek kuvvette koyarsan gaflet olur.

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{(-7)^2} & - & \sqrt[3]{(-4)^3} - \sqrt[4]{(-2)^4} \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ \text{çift} & & \text{tek} \quad \text{çift} \end{array}$$

$$= |-7| - (-4) - |-2|$$

$$= 7 + 4 - (+2) = 7 + 4 - 2 = 9 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$x < 0 < y$ olmak üzere;

$$\sqrt{(-x)^2} + \sqrt[3]{(-y)^3} - \sqrt[4]{(xy)^4}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Bu tip sorularda kök derecesi ile üslü ifadenin üssü eşit ise, x, y de olsa, sabit sayı da olsa kural değişmez çift kuvvetlerde mutlak değer var, tek kuvvetlerde mutlak değer yok.

$$\sqrt{(-x)^2} + \sqrt[3]{(-y)^3} - \sqrt[4]{(xy)^4}$$

$$= \overset{+}{|-x|} + \overset{-}{(-y)} - |x \cdot y|$$



Mutlak değer konusundan sonra, "işaretler de nereden çıktı?" diyenler umarım yoktur.

O halde, ifadeleri üzerindeki işaretlerle çarpıp dışarı yazalım.

$$= +(-x) - y - (-x \cdot y) = -x - y + x \cdot y \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$\sqrt[3]{2^{x+1}} = \sqrt{8}$$

olduğuna göre, x değerini bulalım.

Çözüm



Köklü ifadeyi görmek istemiyorum diyenler için,

$$\sqrt[3]{2^{x+1}} = \sqrt{2^3} \Rightarrow 2^{\frac{x+1}{3}} = 2^{\frac{3}{2}}$$



Ne güzel üslü denklem oldu ve tabanlarda eşit, daha ne olsun. Hadi üsleri eşitleyelim.

$$\Rightarrow \frac{x+1}{3} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x + 2 = 9 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$3^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{81}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



İşe köklü ifadeyi üslü ifadeye çevirmekle başlayalım,

$$3^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{3^4} = 3^{-\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{3}}$$



Üslü ifadelerdeki çarpma işleminde tabanlar eşitse üsler toplanır kuralını hatırlıyorsunuz değil mi?

$$3^{-\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{3}} = 3^{-\frac{2}{3} + \frac{4}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9} \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$x \cdot \sqrt[3]{x} = 3$$

olduğuna göre, x değerini bulalım.

Çözüm



Her tarafın kuvvetini alarak kökleri yok edelim.

$$\begin{aligned} (x \cdot \sqrt[3]{x})^3 &= 3^3 \Rightarrow x^3 \cdot x^1 = 3^3 \\ &\Rightarrow x^4 = 3^3 \\ &\Rightarrow (x^4)^{\frac{1}{4}} = (3^3)^{\frac{1}{4}} \\ &\Rightarrow x^{4 \cdot \frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{4}} \\ &\Rightarrow x = 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki köklü sayıların eşitini bulunuz.

$$\checkmark \sqrt[5]{(-4)^5}$$

$$(-4)$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{7^3}$$

$$(7)$$

$$\rightarrow \sqrt[4]{5^4}$$

$$(5)$$

$$\rightarrow \sqrt[8]{(-13)^8}$$

$$(13)$$

$$\rightarrow \sqrt[7]{(-11)^7}$$

$$(-11)$$

2. Aşağıdaki köklü sayıları üslü ifade olarak yazınız.

$$\rightarrow (\sqrt[5]{3})^2$$

$$\left(3^{\frac{2}{5}}\right)$$

$$\rightarrow (\sqrt[4]{5^3})^2$$

$$\left(5^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{2^{\frac{2}{5}}}$$

$$\left(2^{\frac{2}{15}}\right)$$

$$\rightarrow \sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$\left(3^{-\frac{2}{5}}\right)$$

3. Aşağıdaki üslü sayıları köklü ifade olarak yazınız.

$$\rightarrow 3^{\frac{1}{5}}$$

$$\left(\sqrt[5]{3}\right)$$

$$\rightarrow 5^{-\frac{3}{4}}$$

$$\left(\sqrt[4]{\frac{1}{5^3}}\right)$$

$$\rightarrow a^{\frac{2}{3}}$$

$$\left(\sqrt[3]{a^2}\right)$$

$$\rightarrow x^{-\frac{1}{7}}$$

$$\left(\sqrt[7]{\frac{1}{x}}\right)$$

4. Aşağıdaki ifadelerde x değerlerini bulunuz.

$$\rightarrow x^5 = 3$$

$$\left(\sqrt[5]{3}\right)$$

$$\rightarrow \sqrt{x} = 7$$

$$(7^2)$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{x} = 4$$

$$(4^3)$$

$$\rightarrow \sqrt[4]{x^3} = 5$$

$$\left(5^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$\rightarrow x^{\frac{2}{3}} = 4$$

$$\left(4^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\rightarrow x^{\frac{4}{5}} = 3$$

$$\left(3^{\frac{5}{4}}\right)$$

Nasıl Uygularım?



5. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow \sqrt{(-5)^2} + \sqrt[3]{-27} + \sqrt[5]{(-7)^5}$$

(-5)

$$\rightarrow \sqrt[3]{(-5)^3} - \sqrt[5]{-1} + \sqrt[6]{(-4)^6}$$

(0)

$$\rightarrow \sqrt[7]{(-1)^7} \cdot \sqrt[6]{(-4)^6} \cdot \sqrt[3]{-27}$$

(12)

$$\rightarrow \sqrt[7]{(-12)^7} - \sqrt[5]{(-5)^5} \cdot \sqrt[4]{(-7)^4}$$

(23)

6. $x < 0 < y$ olmak üzere, aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.

$$\rightarrow \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$$

(y - x)

$$\rightarrow \sqrt{(x-y)^2} + \sqrt[3]{y^3}$$

(2y - x)

$$\rightarrow \sqrt[3]{(-y)^3} - \sqrt[4]{x^4}$$

(x - y)

$$\rightarrow \sqrt[3]{(-x)^3} + \sqrt[4]{(-x)^4} + \sqrt[6]{(-y)^6}$$

(-2x + y)

7. Aşağıdaki ifadelerde x değerlerini bulunuz.

$$\rightarrow \sqrt[3]{2^x} = 8$$

(9)

$$\rightarrow \sqrt[5]{9^{2x}} = \frac{1}{3}$$

$\left(-\frac{5}{4}\right)$

$$\rightarrow \sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}} = 32$$

(-8)

$$\rightarrow \sqrt[3]{4^{2x-1}} = 8^{x-2}$$

$\left(\frac{16}{5}\right)$

Ne Bilmeliyim? 4

Bir Sayıyı Kök Dışına Çıkarma



Köklü ifadenin içerisindeki sayılar çarpım veya bölüm şeklinde olmalı (Toplam, fark şeklindeki ifadelerde yaparsanız çuvallarsınız.)



Kökün içerisindeki sayının üssü, kökün derecesine tam olarak bölünebilmeli.



Üstteki şartlar tamamsa üslü ifadenin üssünü kökün derecesine böl dışarı yaz.

$$\sqrt[n]{a^k \cdot b} = a^{\frac{k}{n}} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[4]{2^8 \cdot 3^{12} \cdot 5^3} = 2^{\frac{8}{4}} \cdot 3^{\frac{12}{4}} \cdot \sqrt[4]{5^3} = 2^2 \cdot 3^3 \cdot \sqrt[4]{5^3}$$



Üssü bölünemeyen mecburen kök içinde kalır.

$$\sqrt[3]{\frac{3^6 \cdot 4^9}{5^{12}}} = \frac{3^{\frac{6}{3}} \cdot 4^{\frac{9}{3}}}{5^{\frac{12}{3}}} = \frac{3^2 \cdot 4^3}{5^4}$$

$$\sqrt[4]{3^{11}} = \sqrt[4]{3^8 \cdot 3^3} = 3^{\frac{8}{4}} \sqrt[4]{3^3} = 3^2 \cdot \sqrt[4]{3^3}$$



11, 4 e tam bölünmedi ama bölünen kısmını ayırdım, o kısmı çıkardım kimsenin hakkı kimseye geçmesin.

Bir Sayıyı Kök İçine Alma

$$a^m \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{m \cdot n} \cdot b}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2^1 \cdot 3^1} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

$$2^2 \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^7}$$

$$a^3 \cdot \sqrt[4]{b^3} = \sqrt[4]{a^{3 \cdot 4} \cdot b^3} = \sqrt[4]{a^{12} \cdot b^3}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{3^5}{2^7}} = \sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 3^5}{3^3 \cdot 2^7}} = \sqrt[3]{\frac{3^2}{2^4}}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$\sqrt{720}$ sayısının eşitini bulalım.

Çözüm



Öncelikle 720 sayısını çarpanlarına ayıralım. Hani şöyle uzun bir çizgi çiziyorduk, sonra da en küçük asal sayıdan başlayıp bölmeye başlıyorduk.

$$\begin{array}{r|l} 720 & 2 \\ 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2^4 \\ 3^2 \end{array}$$

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\sqrt{720} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5}$$



Gelelim fasulyenin faydalarına. Gücü yeteni kök dışına çıkartalım.

$$\begin{aligned} \sqrt{720} &= \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2^{\frac{4}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{2}} \cdot \sqrt{5} \\ &= 2^2 \cdot 3^1 \cdot \sqrt{5} \\ &= 12\sqrt{5} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki sayıları kök dışına çıkarma işlemi yaparak düzenleyin.

$$\rightarrow \sqrt[6]{3^{20}}$$

$$(27^{\frac{3}{3}})$$

$$\rightarrow \sqrt[4]{5^{15}}$$

$$(125^{\frac{4}{5}})$$

$$\rightarrow \sqrt[6]{7^{23}}$$

$$(343^{\frac{6}{7}})$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{3^9 \cdot 5^{15} \cdot 7^3}$$

$$(3^3 \cdot 5^5 \cdot 7)$$

$$\rightarrow \sqrt[5]{2^{10} \cdot 3^{12}}$$

$$(36^{\frac{5}{9}})$$

$$\checkmark \sqrt[4]{\frac{3^8 \cdot 7^{10}}{5^{16}}}$$

$$\left(\frac{3^2 \cdot 7^2}{5^4} \sqrt{7} \right)$$

$$\rightarrow \sqrt{32}$$

$$(4\sqrt{2})$$

$$\rightarrow \sqrt{576}$$

$$(24)$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{81}$$

$$(3^{\frac{3}{3}})$$

$$\rightarrow \sqrt[4]{96}$$

$$(2^{\frac{4}{6}})$$

2. Aşağıdaki kök dışındaki sayıları kök içine alarak düzenleyin.

$$\rightarrow 3 \cdot \sqrt[3]{3^5}$$

$$(\sqrt[3]{3^8})$$

$$\rightarrow 5^2 \cdot \sqrt[4]{5^2}$$

$$(\sqrt[4]{5^{10}})$$

$$\rightarrow 7^2 \cdot \sqrt[5]{7^3}$$

$$(\sqrt[5]{7^{13}})$$

$$\rightarrow 3^2 \cdot 2^3 \cdot \sqrt[3]{3}$$

$$(\sqrt[3]{3^7 \cdot 2^9})$$

Ne Bilmeliyim? 5

Toplama - Çıkarma



Köklü ifadelerde işlem olarak en fazla yanlış yapılan işlem, toplama ve çıkarma işlemidir. Niye mi? Köklü ifadelerin toplanabilmesi için hem kök derecesi, hem de kök içi aynı olmalı veya aynı yapılabilmeli.

$$a \cdot \sqrt[n]{x^m} + b \cdot \sqrt[n]{x^m} - c \cdot \sqrt[n]{x^m} = (a + b - c) \cdot \sqrt[n]{x^m} \text{ dir.}$$

✓ $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (kök dereceleri eşit) ifadesinin daha sade hali yoktur.

✓ $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ (kök içleri eşit) ifadesinin daha sade hali yoktur.

$$3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = (3 - 2 + 7) \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{75}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Verilen işlemde kök dereceleri aynı fakat kök içleri farklı. Eee, ne yapalım böylece kalsın mı? Tabii ki hayır. Kök içlerindeki sayıları aynı yapmaya çalışalım.

$$\begin{aligned} \sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{75} &= \sqrt{4 \cdot 3} - \sqrt{9 \cdot 3} + \sqrt{25 \cdot 3} \\ &= \sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{3^2 \cdot 3} + \sqrt{5^2 \cdot 3} \\ &= 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} \\ &= (2 - 3 + 5) \sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$$2\sqrt{75} - 3\sqrt{48} + 4\sqrt{108}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} 2\sqrt{75} - 3\sqrt{48} + 4\sqrt{108} &= 2 \cdot \sqrt{5^2 \cdot 3} - 3 \cdot \sqrt{4^2 \cdot 3} + 4 \cdot \sqrt{6^2 \cdot 3} \\ &= 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot 6 \cdot \sqrt{3} \\ &= 10\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 24\sqrt{3} \\ &= (10 - 12 + 24) \cdot \sqrt{3} \\ &= 22\sqrt{3} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$$

$$(4\sqrt{3})$$

$$\rightarrow 7\sqrt{a} - 4\sqrt{a} - 6\sqrt{a}$$

$$(-3\sqrt{a})$$

$$\rightarrow 7\sqrt[3]{4} - 4\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{4}$$

$$(6\sqrt[3]{4})$$

$$\rightarrow 13\sqrt[5]{7} - 2\sqrt[5]{7} + 2\sqrt[5]{7}$$

$$(13\sqrt[5]{7})$$

$$\rightarrow \sqrt{8} - \sqrt{18} - \sqrt{32}$$

$$(-5\sqrt{2})$$

Köklü İfadeler

Nasıl Uygularım?

$$\rightarrow \sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{80}$$

(3√5)

$$\rightarrow \sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{175}$$

(4√7)

$$\rightarrow 2\sqrt{12} + 5\sqrt{27} - 3\sqrt{75}$$

(4√3)

$$\rightarrow \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54}$$

(-√[3]{2})

$$\rightarrow 5\sqrt[3]{-40} + 3\sqrt[3]{135}$$

(-√[3]{5})

$$\rightarrow \sqrt[4]{48} + \sqrt[4]{243}$$

(5√[4]{3})

Ne Bilmeliyim? 6



Ondalık sayıların kökleri ile işlem yapılırken ondalıklı sayılar rasyonel sayı veya üslü ifade olarak yazılır.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$\sqrt{0,04} - \sqrt[3]{-0,064} - \sqrt[4]{0,0016}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Ondalık sayıları rasyonel sayılara çevirelim.

$$\begin{aligned} & \sqrt{0,04} - \sqrt[3]{-0,064} - \sqrt[4]{0,0016} \\ &= \sqrt{\frac{4}{100}} - \sqrt[3]{-\frac{64}{1000}} - \sqrt[4]{\frac{16}{10000}} \\ &= \sqrt{\frac{2^2}{10^2}} - \sqrt[3]{-\frac{4^3}{10^3}} - \sqrt[4]{\frac{2^4}{10^4}} \\ &= \frac{2}{10} + \frac{4}{10} - \frac{2}{10} = \frac{2+4-2}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$$\sqrt[3]{0,016} - \sqrt[3]{0,054} + \sqrt[3]{-0,002}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Bu soruda da ondalık sayıları üslü ifadeye çevirelim. Ondalık sayıyı üslü ifadeye çevirmeye bir göz atsanız iyi olur.

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{16 \cdot 10^{-3}} - \sqrt[3]{54 \cdot 10^{-3}} + \sqrt[3]{-2 \cdot 10^{-3}} \\ &= \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^1 \cdot 10^{-3}} - \sqrt[3]{3^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} - \sqrt[3]{2 \cdot 10^{-3}} \\ & \quad \downarrow \\ & \quad (-) \text{ yi kökten öne attık} \\ &= 2 \cdot 10^{-1} \cdot \sqrt[3]{2} - 3 \cdot 10^{-1} \cdot \sqrt[3]{2} - 10^{-1} \cdot \sqrt[3]{2} \\ &= 0,2 \cdot \sqrt[3]{2} - 0,3 \cdot \sqrt[3]{2} - 0,1 \cdot \sqrt[3]{2} \\ &= (0,2 - 0,3 - 0,1) \cdot \sqrt[3]{2} \\ &= -0,2 \cdot \sqrt[3]{2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdakilerden işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow \sqrt{0,4} + \sqrt{0,9} + \sqrt{0,1}$$

$$\left(\frac{3\sqrt{10}}{5} \right)$$

$$\rightarrow \sqrt{1,6} - \sqrt{2,5} + \sqrt{3,6}$$

$$\left(\frac{\sqrt{10}}{2} \right)$$

$$\rightarrow \sqrt{0,09} + \sqrt{0,16}$$

$$(0,7)$$

$$\rightarrow \sqrt{0,64} - \sqrt{0,36} + \sqrt{0,25}$$

$$(0,7)$$

$$\rightarrow \sqrt{1,21} - \sqrt{1,44} + \sqrt{1,69}$$

$$(1,2)$$

$$\rightarrow \sqrt{2,25} - \sqrt{2,89} + \sqrt{2,56}$$

$$(1,4)$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{0,008} - \sqrt[3]{0,027}$$

$$(-0,1)$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{-0,064} - \sqrt[3]{-0,125} - \sqrt[3]{0,008}$$

$$(-0,1)$$

Ne Bilmeliyim? 7

Çarpma



Çarpma- bölme işlemi yapılırken kök dereceleri aynı ise mesele yok demektir, aynı kök içerisinde kök içleri çarpılır veya bölünür. Kök dereceleri farklı ise önce kök dereceleri eşitlenir.

Buna göre, tanımlı oldukları durumlarda;

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$$

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[m]{y} = \sqrt[n \cdot m]{x^m \cdot y^n} = \sqrt[n \cdot m]{x^m \cdot y^n}$$

$$\checkmark \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$$

$$\checkmark 3\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{4} = 3\sqrt{3 \cdot 4} = 3\sqrt{12}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Köklerin kuvvetleri EKOK(2, 3) = 6 da eşitlenirse,

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3 \cdot 2]{2^3} \cdot \sqrt[3 \cdot 2]{3^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2} \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{\frac{5}{8}}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{\frac{5}{8}} = \sqrt[4 \cdot 3]{4^4} \cdot \sqrt[2 \cdot 3]{\left(\frac{5}{8}\right)^2} = \sqrt[12]{4^4} \cdot \sqrt[12]{\left(\frac{5}{8}\right)^2}$$

$$\Rightarrow = \sqrt[12]{(2^2)^4} \cdot \sqrt[12]{\frac{5^2}{(2^3)^2}} = \sqrt[12]{2^8 \cdot \frac{5^2}{2^6}}$$

$$\Rightarrow = \sqrt[12]{2^2 \cdot 5^2} = \sqrt[12]{10^2} = \sqrt[6]{10} \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

(3)

$$\rightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

(2\sqrt{2})

$$\rightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$$

(\sqrt{30})

$$\rightarrow \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7}$$

(\sqrt[3]{105})

$$\rightarrow \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$$

(3)

Nasıl Uygularım?



$$\rightarrow \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$$

(2)

$$\rightarrow 3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{5}$$

(84\sqrt{30})

$$\rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{16}$$

(2)

$$\rightarrow 2 \cdot \sqrt[4]{3} \cdot 3 \cdot \sqrt[4]{5}$$

(6 \cdot \sqrt[4]{15})

2. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$$

(a)

$$\rightarrow \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1}$$

(x + 1)

$$\rightarrow \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x}$$

(x)

$$\rightarrow \sqrt[3]{y} \cdot \sqrt[3]{y^2}$$

(y)

Nasıl Uygularım?



3. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$(\sqrt[4]{18})$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[5]{-\frac{1}{3}}$$

$$\left(\sqrt[15]{\left(\frac{1}{3} \right)^8} \right)$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{5}$$

$$(\sqrt[12]{3^4 \cdot 5^3})$$

$$\rightarrow \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{7}}$$

$$(\sqrt[20]{7})$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{-3} \cdot \sqrt[4]{3}$$

$$(-\sqrt[12]{3^7})$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{16}}$$

$$\left(\sqrt[15]{\frac{1}{4}} \right)$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$$

$$(\sqrt[4]{8})$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{5}}$$

$$(\sqrt[12]{5^5})$$

Ne Bilmeliyim? 8

Bölme

$$\sqrt[n]{x} : \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x:y} \text{ dir.}$$

$$\sqrt[n]{x} : \sqrt[m]{y} = \sqrt[n \cdot m]{x^m} : \sqrt[n \cdot m]{y^n} = \sqrt[n \cdot m]{x^m : y^n}$$

$$\checkmark \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{6}{2}} = \sqrt[4]{3}$$

$$\checkmark \frac{\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{6}} = \sqrt[5]{\frac{4 \cdot 3}{6}} = \sqrt[5]{2}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$\frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{5}}{\sqrt[6]{7}} \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm



Köklerin kuvvetleri EKOK(3, 4, 6) = 12 de eşitlenirse,

$$\frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{5}}{\sqrt[6]{7}} = \frac{4^3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot 5^3 \cdot \sqrt[4]{5}}{2 \cdot 6 \cdot \sqrt[6]{7^2}} = \sqrt[12]{\frac{4^4 \cdot 5^3}{7^2}} \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$\frac{\sqrt{2,5} - \sqrt{0,4}}{\sqrt{14,4} + \sqrt{12,1}} \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm



Toplama-Çıkarma işlemlerinde aynı kök içerisinde yazma diye bir şey olmayordu değil mi?

$$\frac{\sqrt{2,5} - \sqrt{0,4}}{\sqrt{14,4} + \sqrt{12,1}} = \frac{\sqrt{\frac{25}{10}} - \sqrt{\frac{4}{10}}}{\sqrt{\frac{144}{20}} + \sqrt{\frac{121}{10}}}$$

$$\Rightarrow = \frac{\frac{5}{\sqrt{10}} - \frac{2}{\sqrt{10}}}{\frac{12}{\sqrt{10}} + \frac{11}{\sqrt{10}}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{23} = \frac{3}{23} \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow \frac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{12}}$$

$(\sqrt[3]{3})$

$$\rightarrow \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}}$$

$(\sqrt[3]{3})$

$$\rightarrow \frac{\sqrt[4]{20}}{\sqrt{2}}$$

$(\sqrt[4]{5})$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{15}}{\sqrt[3]{-5}}$$

$(-\sqrt[6]{135})$

Nasıl Uygularım?



$$\rightarrow \frac{2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{10}}{4\sqrt{5}}$$

$$\left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{6}}$$

$$(\sqrt[6]{72})$$

$$\rightarrow \frac{2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt[3]{5}}{4\sqrt{5}}$$

$$(6 \cdot \sqrt[12]{57})$$

$$\rightarrow \frac{2\sqrt{6} \cdot \sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[8]{2}}$$

$$(2 \cdot \sqrt[8]{72})$$

2.

$$\frac{\sqrt{0,04} + \sqrt{0,09}}{\sqrt{0,25}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3 D) 0,5 E) 1
(E)

3.

$$\frac{\sqrt[3]{0,008} - \sqrt[3]{0,027}}{\sqrt[3]{0,064}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $-\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$
(B)

4.

$$\frac{\sqrt[3]{0,08} - \sqrt[3]{0,27}}{\sqrt[3]{1,25} + \sqrt[3]{0,64}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $-\frac{1}{9}$ D) $-\frac{5}{9}$ E) $-\frac{7}{9}$
(C)

Ne Bilmeliyim? 9

Paydanın Rasyonel Yapılması



Kesirli ifadelerde payda köklü sayı olunca bu sayıdan kurtulmak istenilir. Bunun için yapılması gereken işlem o sayıyı kökten kurtaracak eşleniği ile çarpmaktır.

➤ $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$

✓ $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$

✓ $\sqrt{3x} \cdot \sqrt{3x} = 3x$

➤ $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

✓ $(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1$

✓ $(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = 3$

✓ $(3 + \sqrt{5}) \cdot (3 - \sqrt{5}) = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4$

✓ $(4 - 3\sqrt{2}) \cdot (4 + 3\sqrt{2}) = 4^2 - (3\sqrt{2})^2 = 16 - 9 \cdot 2$

$\Rightarrow = 16 - 18 = -2$

➤ $\frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b}$ ve $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$ dir.

➤ $(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$ olduğundan, paydada $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ veya $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ifadelerinden biri varken diğeri ile pay ve payda çarpılarak paydada $a - b$ elde edilir.

✓ $\frac{x}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{x \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$

✓ $\frac{x}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{x \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}$

✓ $\frac{x}{a - \sqrt{b}} = \frac{x \cdot (a + \sqrt{b})}{(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b})}$

✓ $\frac{x}{a + \sqrt{b}} = \frac{x \cdot (a - \sqrt{b})}{(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})}$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$\frac{5}{\sqrt{2} - 1} - \frac{5}{\sqrt{2} + 1}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\frac{5}{\sqrt{2} - 1} - \frac{5}{\sqrt{2} + 1} = \frac{5 \cdot (\sqrt{2} + 1) - 5 \cdot (\sqrt{2} - 1)}{2 - 1}$$

$$= 5\sqrt{2} + 5 - 5\sqrt{2} + 5 = 10 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} - \frac{12}{3 - \sqrt{5}}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} - \frac{12}{3 - \sqrt{5}} \\ &= \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})(\sqrt{2})} + \frac{3 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} - \frac{12 \cdot (3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} \\ &= \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} + \frac{3 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} - \frac{12 \cdot (3 + \sqrt{5})}{9 - 5} \\ &= \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} + \frac{3 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{3} - \frac{12 \cdot (3 + \sqrt{5})}{4} \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{2} - 3 \cdot (3 + \sqrt{5}) \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{2} - 9 - 3\sqrt{5} \\ &= -9 - 2\sqrt{5} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki kesirli ifadelerin paydalarını rasyonel sayı yapınız.

$$\rightarrow \frac{3}{\sqrt{3}}$$

 $(\sqrt{3})$

$$\rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}$$

 $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

$$\rightarrow \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$$

 $(\sqrt[3]{4})$

$$\rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

 $(\sqrt{5} + \sqrt{3})$

$$\rightarrow \frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}$$

 $(-\sqrt{2}-\sqrt{7})$

$$\rightarrow \frac{5}{\sqrt{5}+2}$$

 $(5\sqrt{5}-10)$

$$\rightarrow \frac{7}{3-\sqrt{2}}$$

 $(3 + \sqrt{2})$

$$\rightarrow \frac{20}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

 $(2(2\sqrt{3} + \sqrt{2}))$

$$\rightarrow \frac{2}{2\sqrt{2}-4}$$

 $\left(\frac{\sqrt{2}+2}{-2}\right)$

$$\rightarrow \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

 $(7 + 4\sqrt{3})$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$$

 $(9 - 4\sqrt{5})$

Ne Bilmeliyim? 10

İç içe Kökler

► $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $m \geq 2$ ve $n \geq 2$ olmak üzere, tanımlı olduğu aralıklarda

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x} \quad \text{ve} \quad \sqrt[n]{y \cdot \sqrt[m]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x \cdot y^m} \quad \text{dir.}$$

$$\checkmark \sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[3 \cdot 4]{5} = \sqrt[12]{5}$$

$$\checkmark \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}} = \sqrt[2 \cdot 3 \cdot 4]{5} = \sqrt[24]{5}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$\sqrt{2 \cdot \sqrt[4]{2 \cdot \sqrt[4]{4}}}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} \sqrt{2 \cdot \sqrt[4]{2 \cdot \sqrt[4]{4}}} &= \sqrt[4]{\sqrt[4]{2^4 \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{4}}} = \sqrt[4]{\sqrt[4]{2^{4+1} \cdot \sqrt[4]{4}}} \\ &\Rightarrow = \sqrt[4]{\sqrt[4]{2^5 \cdot \sqrt[4]{4}}} = \sqrt[4]{\sqrt[4]{2^{5+4} \cdot 4}} \\ &\Rightarrow = \sqrt[4]{\sqrt[4]{2^{20+2}}} = \sqrt[4]{\sqrt[4]{2^{22}}} \\ &\Rightarrow = \sqrt[2 \cdot 4 \cdot 4]{2^{22}} = \sqrt[32]{2^{22}} = \sqrt[16]{2^{11}} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$$\sqrt[4]{3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{3}}}}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{3}}}} &= \sqrt[4]{3 \cdot \sqrt[3 \cdot 2]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[4]{3 \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{3}}} \\ &\Rightarrow = \sqrt[4]{\sqrt[6]{3^6 \cdot \frac{1}{3}}} = \sqrt[24]{3^5} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow \sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$$

$$(\sqrt[24]{2})$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[2]{\frac{2}{3}}}}}$$

$$\left(\sqrt[120]{\frac{2}{3}} \right)$$

$$\rightarrow \sqrt{2 \sqrt[3]{2 \sqrt{16}}}$$

$$(2)$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}$$

$$(\sqrt[8]{3^7})$$

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$\sqrt[6]{56 + \sqrt{66 + \sqrt[3]{-12 + \sqrt{16}}}}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



İç içe köklü ifadelerde arada toplama çıkarma işlemi varsa mutlaka en içteki kökten dışarı doğru işlem yapmamız gerekir.

$$= \sqrt[6]{56 + \sqrt{66 + \sqrt[3]{-12 + \sqrt{16}}}}$$

$$= \sqrt[6]{56 + \sqrt{66 + \sqrt[3]{-12 + 4}}}$$

$$= \sqrt[6]{56 + \sqrt{66 + \sqrt[3]{-8}}}$$

$$= \sqrt[6]{56 + \sqrt{66 - 2}}$$

$$= \sqrt[6]{56 + \sqrt{64}}$$

$$= \sqrt[6]{56 + 8}$$

$$= \sqrt[6]{64}$$

$$= \sqrt[6]{2^6} = 2 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow \sqrt{21 + \sqrt{19 - \sqrt{7 + \sqrt{4}}}}$$

(5)

$$\rightarrow \sqrt[6]{58 + \sqrt{34 + \sqrt[4]{14 + \sqrt[3]{8}}}}$$

(2)

$$\rightarrow \sqrt[5]{27 + \sqrt{28 - \sqrt[4]{84 + \sqrt[3]{-27}}}}$$

(2)

$$\rightarrow \sqrt[3]{-33 + \sqrt{32 - \sqrt[3]{-59 - \sqrt{25}}}}$$

(-3)

Ne Bilmeliyim? 11

$x = a + b$, $y = a \cdot b$ ve $a > b$ olmak üzere;

$$\checkmark \sqrt{x + 2\sqrt{y}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\checkmark \sqrt{x - 2\sqrt{y}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \text{ dir.}$$

$$\checkmark \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{(5 + 3) + 2\sqrt{5 \cdot 3}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Çarpımları 6 toplanları 5 olan iki tamsayımız 2 ve 3'tür.

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{(2 + 3) + 2\sqrt{2 \cdot 3}} = \sqrt{3} + \sqrt{2} \text{ dir.}$$

Örnek

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Kuralı uygulamaya uygulayacağınızda 2'nin olması gereken yerde 4 var önce onu bir halletmek lazım.

$$\begin{aligned} \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} &= \sqrt{9 - 2 \cdot 2\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{9 - 2\sqrt{4 \cdot 5}} \\ &= \sqrt{(4 + 5) - 2\sqrt{4 \cdot 5}} \\ &= \sqrt{5} - \sqrt{4} \\ &= \sqrt{5} - 2 \text{ dir.} \end{aligned}$$



Arada (-) varken büyük olan sayı önce yazdık.

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$$\rightarrow \sqrt{7 - 2\sqrt{12}}$$

$$(2 - \sqrt{3})$$

$$\rightarrow \sqrt{30 - 2\sqrt{29}}$$

$$(\sqrt{29} - 1)$$

$$\rightarrow \sqrt{18 + 2\sqrt{45}}$$

$$(\sqrt{15} + \sqrt{3})$$

$$\rightarrow \sqrt{16 - \sqrt{60}}$$

$$(\sqrt{15} - 1)$$

Köklü İfadeler

Ne Bilmeliyim? 12

Köklü Sayılarda Sıralama

Tanımlı olduğu durumlarda,
 $x < y < z \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} < \sqrt[n]{z}$ dir.



Yani köklü sayılar sıralanırken kök derecelerinin eşit olması gerekir.

✓ $\sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{5}$

✓ $\sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{7} < \sqrt[3]{11}$

✓ $-\sqrt[4]{8} < -\sqrt[4]{5} < -\sqrt[4]{2}$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$a = \sqrt{2}, \quad b = \sqrt[3]{3}, \quad c = \sqrt[4]{5}$$

olduğuna göre, a, b, c'yi sıralayalım

Çözüm



Kök dereceleri eşit değilse sıralama için dereceleri eşitlememiz gerekir.

OKEK(2, 3, 4) = 12 olduğundan,

$$a = \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[12]{64}$$

$$b = \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[12]{81}$$

$$c = \sqrt[4]{5} = \sqrt[3]{5^3} = \sqrt[12]{125}$$



Payda eşitler gibi dereceleri eşitledik. Kök içlerine bakarak sıralamayı yazalım.

$125 > 81 > 64$ olduğundan,

$$\sqrt[12]{125} > \sqrt[12]{81} > \sqrt[12]{64} \text{ olur.}$$

Buradan da, $c > b > a$ bulunur.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$a = 2 \cdot \sqrt[3]{3}, \quad b = 3 \cdot \sqrt[3]{2}, \quad c = 4$$

olduğuna göre, a, b, c yi sıralayalım.

Çözüm



Kök dereceleri eşit değilse sıralama için dereceleri eşitlememiz gerekir.



Burada köklü olanların dereceleri eşit hocam... Ama 4 de hiç kök yok, birde köklü sayıların önündeki sayılar var onlar ne olacak.



Yapılacak iş şu, kök içerisindeki sayıları içeri alıp, 4'ü de köklü sayı olarak yazacağız.

$$a = 2 \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 6} = \sqrt[3]{48}$$

$$b = 3 \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$$

$$c = 4 = \sqrt[3]{4^3} = \sqrt[3]{64}$$



Kök derecelerini eşitledik, şimdi kökleri görme, içerideki sayıları sırala.

$64 > 54 > 48$ olduğundan,

$$\sqrt[3]{64} > \sqrt[3]{54} > \sqrt[3]{48} \text{ olur.}$$

Buradan da, $c > b > a$ bulunur.

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki köklü sayıları büyükten küçüğe doğru sıralayınız.

$$\rightarrow a = \sqrt[5]{6}, \quad b = \sqrt[3]{5}, \quad c = \sqrt[15]{247}$$

$$(b > c > a)$$

$$\rightarrow a = 5\sqrt{2}, \quad b = 4\sqrt{3}, \quad c = 2\sqrt{5}$$

$$(a > b > c)$$

$$\rightarrow m = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \quad n = \frac{1}{\sqrt[5]{4}}, \quad r = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(n > r > m)$$

$$\rightarrow a = -13^{\frac{1}{3}}, \quad b = -19^{\frac{1}{6}}, \quad c = -33^{\frac{1}{12}}$$

$$(c > b > a)$$

2. $a = \sqrt[3]{-2}$, $b = \sqrt[3]{-3}$, $c = \sqrt[3]{-4}$

olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

- A) $a > b > c$ B) $b > c > a$ C) $c > b > a$
D) $c > a > b$ E) $b > a > c$

(A)

3. $a = 3^{\frac{1}{2}}$, $b = 11^{\frac{1}{4}}$, $c = 27^{\frac{1}{8}}$

olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

- A) $b > a > c$ B) $b > c > a$ C) $c > b > a$
D) $c > a > b$ E) $a > b > c$

(A)

4. $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $b = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$, $c = \frac{1}{\sqrt[6]{29}}$

olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

- A) $a > b > c$ B) $a > c > b$ C) $b > a > c$
D) $b > c > a$ E) $a > b > c$

(C)

Köklü İfadeler

Ne Bilmeliyim? 13

Köklü Denklemler



Köklü denklemlerde uygun düzenlemelerden sonra köklü ifadeyi ortadan kaldıracak şekilde denklemin her iki tarafının üssü alınır.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$x \cdot \sqrt[3]{x} = 3$$

olduğuna göre, x değerini bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} (x \cdot \sqrt[3]{x})^3 &= 3^3 \Rightarrow x^3 \cdot x^1 = 3^3 \\ &\Rightarrow x^4 = 3^3 \\ &\Rightarrow (x^4)^{\frac{1}{4}} = (3^3)^{\frac{1}{4}} \\ &\Rightarrow x^{4 \cdot \frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{4}} \\ &\Rightarrow x = 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$$\sqrt[3]{2\sqrt{x}} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Her sayıyı kendi köklerinin içine yazalım.

$$\sqrt[3]{2\sqrt{x}} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3}$$



2'nin yalnızca küp kökü, x'in ise iç içe hem karekökü hem küpköğü var.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} \\ &\Rightarrow \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^{\frac{1}{2}}x} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} \\ &\Rightarrow \sqrt[6]{x} = \sqrt[4]{3} \end{aligned}$$



Aferin her tarafın 6 ile 4'ün OKEK'i 12. kuvvetini alalım.

$$\begin{aligned} (\sqrt[6]{x})^{12} &= (\sqrt[4]{3})^{12} \Rightarrow x^2 = 3^3 \\ &\Rightarrow (x^2)^{\frac{1}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow x = \sqrt{3^3} \Rightarrow x = 3\sqrt{3} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?

$$1. \quad \sqrt{32} = \sqrt{50} \cdot x$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{7}{2}$
(C)

$$2. \quad x^{\frac{5}{8}} = 3$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 3^8 B) $\sqrt{3^5}$ C) $\sqrt[3]{3^8}$ D) $\sqrt[5]{3^8}$ E) $\sqrt[8]{3^5}$
(D)

$$3. \quad \sqrt[3]{x^2} = 5$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 5^3 B) 5^2 C) 5^6 D) $\sqrt{5^3}$ E) $\sqrt[3]{5^2}$
(D)

Nasıl Uygularım?



4. $\sqrt[3]{x^a} = x\sqrt{x}$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{9}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{7}{2}$
(C)

5. $x^3 \cdot \sqrt{x} = 4$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) $\sqrt[7]{16}$ B) $\sqrt[7]{5}$ C) $\sqrt[4]{27}$ D) $\sqrt[6]{27}$ E) $\sqrt[3]{2}$
(A)

6. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}} = 2$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 2^{12} B) 2^{16} C) 2^{18} D) 2^{24} E) 2^{32}
(A)

7. $\sqrt{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{2\sqrt{3}}$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 12 B) 15 C) 27 D) $\sqrt[3]{3}$ E) $\sqrt[3]{9}$
(A)

İPUCU

2'yi içeri al kökleri düzenle, her iki tarafın kuvvetini al.

8. $\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[5]{2}} = \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[5]{x}}$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) $\sqrt[15]{2}$ B) $\sqrt[3]{4}$ C) $\sqrt[3]{2}$ D) $\sqrt[15]{4}$ E) $\sqrt[5]{2}$
(C)

İPUCU

Kökleri ayır, derecelerin okek ini bul, her iki tarafın kuvvetini al.

9. $\sqrt{3\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x\sqrt{3}}$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 27 B) 9 C) 3 D) 6 E) 1
(B)

İPUCU

Kökleri ayır, derecelerin okek ini bul, her iki tarafın kuvvetini al.

Köklü İfadeler

1. $A = \sqrt{5}$ ve $B = \sqrt{3}$ olmak üzere,

$$(A + B) \cdot (A - B)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 4

- 2.



Yukarıda verilen sayı doğrusuna göre, A değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

3. 2, 4 ve 8 sayılarının tamamı aşağıdaki kutuların içine her kutuya yerine bir tane sayı gelecek biçimde yerleştirilip oluşan işlem sonuçlandırıldığında A tam sayısı elde ediliyor.

$$\sqrt{\square} + \sqrt{\square} \cdot \sqrt{\square}$$

Buna göre, A tam sayısı kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

İPUCU

Karekökü tam sayı olan yerini bulalım.

4. Aşağıdaki kutuların içine $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{20}$ sayıları her kutuya farklı bir sayı gelecek şekilde yerleştirildiğinde A, B ve C tam sayı olmaktadır.

$$\square \times \square = A$$

$$\square \times \square = B$$

$$\square \times \square = C$$

Buna göre, A + B + C toplamı kaçtır?

- A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

İPUCU

Önce sayıları düzenleyin. Sonra bakın bakalım hangilerini çarpınca kökler yok oluyor.

5. Alanı 12 cm^2 olan bir karenin çevresi kaç cm'dir?

- A) $4\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $8\sqrt{3}$ D) $6\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{2}$

- 6.

$\sqrt{72} \text{ cm}$

Şekil 1



Şekil 2

Uzunluğu $\sqrt{72} \text{ cm}$ olan Şekil 1'de tel bükülerek Şekil 2'deki gibi bir kare oluşturuluyor.

Buna göre, oluşturulan karenin alanı kaç santimetrekaredir?

- A) 3 B) $\frac{9}{2}$ C) 6 D) $6\sqrt{2}$ E) $16\sqrt{2}$

Köklü İfadeler

7. Bir mağazanın vitrininde duran 3 farklı buzdolabının boyları aşağıda verilmiştir.



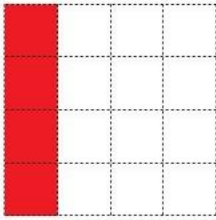
Buzdolapları soldan sağa doğru büyükten küçüğe doğru sıralandıklarına göre, a 'nın alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

İPUCU

Verilen sayılar ile bu sayıların karelerinin sıralaması aynıdır. O halde sayıların karesini alarak sıralama yapalım.

8. Aşağıdaki 16 eş kareden oluşan şekilde, kırmızı rene boyalı parçaların sayısının tüm parçaların sayısına oranı ile bir kesir elde ediliyor.



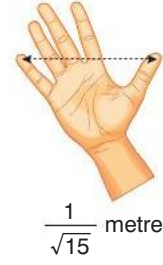
Bu kesrin kareköküne eşit olan kesri ifade etmek için boyalı olmayan parçalardan kaç tanesi daha kırmızı rene boyanmalıdır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

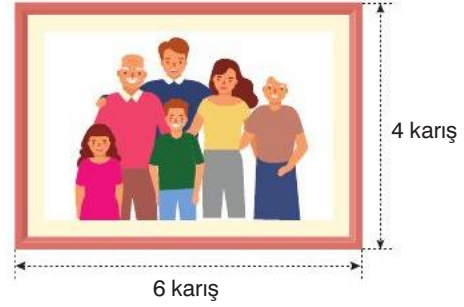
İPUCU

Kesri yazıp karekökünü almak zor bir işlem değil.

- 9.



Şekilde Esat'ın bir karışının uzunluğu metre türünden verilmiştir.



Esat duvardaki asılı olan dikdörtgen şeklindeki resmin çerçevesinin boyunu 6 karış enini ise 4 karış olarak ölçmüştür.

Buna göre, resmin çerçevesinin çevresi kaç metredir?

- A) $\frac{4}{3}\sqrt{15}$ B) $\frac{3}{2}\sqrt{15}$ C) $\sqrt{15}$ D) $6\sqrt{5}$ E) $7\sqrt{5}$

10. Tarık yerden 10 cm yükseklikte ve her bir bölmesi 50 cm genişliğinde olan bir market rafının yanında şekildeki gibi durarak boyunu ölçmek istiyor.



Buna göre, Tarık'ın boyu metre türünden aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{7}$

1-D

2-B

3-C

4-E

5-C

6-B

7-D

8-D

9-A

10-A

BÖLÜM 12

ÖĞRENELİM

ÇARPANLARA AYIRMA Çarpanlara Ayırma

Ne Bilmeliyim? 1

ÇARPANLARA AYIRMA YÖNTEMLERİ

Ortak Çarpan Parantezine Alma



Toplam fark şeklindeki ifadeleri çarpım şekline getirebilmek için varsa her terimdeki ortak çarpan, ortak çarpan parantezine alınır.

$$\rightarrow P(x) \cdot Q(x) \pm P(x) \cdot B(x) = P(x) \cdot [Q(x) \pm B(x)]$$



Bir çarpanlara ayırma sorusuyla karşılaştığınızda ilk bakacağınız şey ortak çarpan parantezine alınacak ifadelerin olup olmadığıdır.

$$\rightarrow y - x = -(x - y)$$

$$\rightarrow (y - x)^{2n+1} = -(x - y)^{2n+1} \quad (n \in \mathbb{Z})$$



Üst tek sayı, aradaki işlem (-) ise x ile y yer değişirse işaret değişir.

$$\rightarrow (y - x)^{2n} = (x - y)^{2n} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\rightarrow (x + y)^n = (y + x)^n \quad (n \in \mathbb{Z})$$



Üst çift veya aradaki işlem (+) ise rahat ol, istediğin gibi yer değiştir bir sorun çıkmaz.

Gruplandırarak Çarpanlara Ayırma



Bir polinomun her teriminde ortak olan bir çarpan yoksa, ortak çarpan olan terimler bir araya getirilerek, bu gruplar ortak çarpan parantezine alınır.

Nasıl Çözülür?

Örnek

Aşağıdaki ifadeleri inceleyiniz.

$$\begin{aligned} \checkmark \quad 3a^2b^4 + 12a^3b^2 &= 3 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot b^2 + 4 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^2 \\ &= 3 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot (b^2 + 4 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad 4xy^2 - 8x^2y^3 - 12x^3y^4 &= 4 \cdot x \cdot y^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot y^2 \cdot y - 3 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot x \cdot y^2 \cdot y^2 \\ &= 4 \cdot x \cdot y^2 \cdot [1 - 2 \cdot x \cdot y - 3 \cdot x^2 \cdot y^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad (a + b)^2(a - b) + (b + a)(b - a) \\ &= (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a - b) - (a + b) \cdot (a - b) \\ &= (a + b) \cdot (a - b) [(a + b) - 1] \end{aligned}$$

Örnek

Aşağıdaki ifadeleri inceleyiniz.

$$\begin{aligned} \checkmark \quad ax + ay - 2bx - 2by \\ &= ax + ay - 2bx - 2by \\ &= a(x + y) - 2b(x + y) \\ &= (x + y) \cdot (a - 2b) \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad 45 \cdot 49 - 36 \cdot 43 - 45 \cdot 39 + 43 \cdot 46 \\ &= 45 \cdot 49 - 45 \cdot 39 - 36 \cdot 43 + 43 \cdot 46 \\ &= 45 \cdot (49 - 39) + 43 \cdot (-36 + 46) \\ &= 45 \cdot 10 + 43 \cdot 10 = 10 \cdot [45 + 43] = 880 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$\frac{(a-b)^3 + (b-a)^3 + (a-c)^2 + c-a}{a-c-1}$$

ifadesinin sadeleştirilmiş biçimini bulalım.

Çözüm



İfadeye bir bakalım ortak paranteze alınacak bir şeyler var gibi ama bir düzenleme de lazım gibi.

Yukarıdaki özelliğe göre;

$$(a-b)^3 = -(b-a)^3 \text{ ve}$$

$$c-a = -(a-c) \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} & \frac{-(b-a)^3 + (b-a)^3 + (a-c)^2 - (a-c)}{a-c-1} \\ &= \frac{(a-c)^2 - (a-c)}{a-c-1} = \frac{(a-c) \cdot [(a-c) - 1]}{a-c-1} = a-c \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$$a-b=4 \text{ ve } b-c=5$$

olduğuna göre, $a^2 + bc - ab - ac$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm



Verilen net de, sorulan karışık. O halde, önce sorulanı bir kuralayalım bakalım ne olacak.

$$a^2 + bc - ab - ac$$



Ortak terimleri gördünüz mü?

$$= a^2 - ab + bc - ac = a \cdot (a-b) + c \cdot (b-a)$$

$$= a \cdot (a-b) - c \cdot (a-b) = (a-b) \cdot (a-c)$$



Güzel şimdi, soru netleşti. Çarpanlardan biri $a-b=4$ verilmiş. Diğer çarpan $a-c$ yi bulmak için problemde verilen eşitlikleri taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{array}{r} a-b=4 \\ + \quad b-c=5 \\ \hline a-c=9 \quad \text{olur.} \end{array}$$

Buna göre, $(a-b) \cdot (a-c) = 4 \cdot 9 = 36$ bulunur.

Örnek

$$2^x + 3^x - 10^x - 15^x$$

ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm



Kullanacağım üslü ifade özelliklerini aşağıda belirterek yazacağım siz de dikkat edin.

$$\begin{aligned} & 2^x + 3^x - 10^x - 15^x \\ &= 2^x + 3^x - (2 \cdot 5)^x - (5 \cdot 3)^x \\ &= 2^x + 3^x - 2^x \cdot 5^x - 5^x \cdot 3^x \\ &= 2^x + 3^x - 2^x \cdot 5^x - 5^x \cdot 3^x \\ &= (2^x + 3^x) - 5^x \cdot (2^x + 3^x) \\ &= (2^x + 3^x) \cdot (1 - 5^x) \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek

$$\frac{\sqrt{xy} - \sqrt{y} + x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$$

ifadesinin sadeleştirilmiş biçimini bulalım.

Çözüm



Önce üst tarafı bir düzenleyelim.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{xy} - \sqrt{y} + x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} &= \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} - \sqrt{y} + \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} - \sqrt{y} + \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{y} \cdot (\sqrt{x} - 1) + \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - 1)}{1 - \sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - 1) \cdot (\sqrt{y} + \sqrt{x})}{1 - \sqrt{x}} \\ &= -(\sqrt{y} + \sqrt{x}) \\ &= -\sqrt{y} - \sqrt{x} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Çarpanlara Ayırma

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlara ayırınız.

$$\rightarrow 9x^2 - 15x$$

$$3x(3x - 5)$$

$$\rightarrow 8ab + 2ac - 6a$$

$$2a(4b + c - 3)$$

$$\rightarrow 15xy - 5xzy - 10ytx$$

$$5xy(3 - z - 2t)$$

$$\rightarrow 5(x + y)z + 15(x + y)k$$

$$5(x + y)(z + 3k)$$

$$\rightarrow 90 \cdot 99 + 45 \cdot 302$$

$$(22\,500)$$

$$\rightarrow 9a^2b - 6ab^2$$

$$3ab(3a - 2b)$$

$$\rightarrow a^3 - a^2 - a + 1$$

$$(a - 1) \cdot (a^2 - 1)$$

$$\rightarrow \frac{8a^2}{5b} + \frac{12a}{25b^2}$$

$$\frac{4a}{5b} \left(2a + \frac{3}{5b} \right)$$

2. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlara ayırınız.

$$\rightarrow m(m - b) + b(b - m)$$

$$(m - b)^2$$

$$\rightarrow 4(x + y)^2 - 12(y + x)^3$$

$$4(x + y)[1 - 3(x + y)]$$

$$\rightarrow 5(a + b)^2c + 15(a + b)^3c^2$$

$$[5(a + b)^2 \cdot c \cdot (1 + 3c \cdot (a + b))]$$

Nasıl Uygularım?



$$\rightarrow 3(a + b)^2 + 6(b + a)^3 - 9(b + a)^2$$

$$[6 \cdot (a + b)^2 \cdot ((a + b) - 1)]$$

$$\rightarrow 6m + 3n - 2m^2n - n^2m$$

$$(3 - nm) \cdot (2m + n)$$

$$\rightarrow 3(x - y)^2 - 6(x - y)^3$$

$$[3(x - y)^2 \cdot (1 - 2(x - y))]$$

$$\rightarrow 135 \cdot 139 - 247 \cdot 339 - 130 \cdot 139 + 339 \cdot 242$$

$$(-1000)$$

$$\rightarrow (a + b)^3 \cdot (a - b) + (b + a)^4 \cdot (b - a)^2$$

$$(a + b)^3 \cdot (a - b) [1 + (a + b)(a - b)]$$

$$\rightarrow x(c - a) + y(a - c) - cx + cy$$

$$a \cdot (y - x)$$

3. Aşağıdaki ifadeleri gruplandırarak çarpanlara ayırınız.

$$\rightarrow 3ax + 6ay - 4bx - 8by$$

$$(3a - 4b) \cdot (x + 2y)$$

$$\rightarrow (a - b)^2a - (b - a)^2b - a + b$$

$$(a - b) \cdot [(a - b)^2 - 1]$$

$$\rightarrow x^3 + 4x^2 - x - 4$$

$$(x + 4) \cdot (x^2 - 1)$$

$$\rightarrow x^3a + 8y^2 + 8x^3 + ay^2$$

$$(a + 8) \cdot (x^3 + y^2)$$

Çarpanlara Ayırma

Nasıl Uygularım?



$$\rightarrow a^5 + a^4 - a^3 - a^2$$

$$a^2 \cdot (a + 1) \cdot (a^2 - 1)$$

$$\rightarrow 3 + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + 1)$$

4. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlara ayırınız.

$$\rightarrow 3 \cdot 2^{10} + 5 \cdot 2^{12} + 2^{14}$$

$$(39 \cdot 2^{10})$$

$$\rightarrow \sqrt{5} - 5$$

$$\sqrt{5} \cdot (1 - \sqrt{5})$$

$$\rightarrow 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$$

$$(13 \cdot 3^x)$$

$$\rightarrow 2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{10} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$\rightarrow 14^x + 21^x$$

$$7^x \cdot (2^x + 3^x)$$

$$\rightarrow 3\sqrt{7} - 7\sqrt{3}$$

$$\sqrt{21} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{7})$$

$$\rightarrow 27^5 - 18^5$$

$$9^5 \cdot (3^5 - 2^5)$$

$$\rightarrow \sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{7} + \sqrt{14}$$

$$(\sqrt{5} + \sqrt{7}) \cdot (1 + \sqrt{2})$$

Ne Bilmeliyim? 2

ÖZDEŞLİKLERDEN YARARLANARAK
ÇARPANLARA AYIRMA

İki Kare Farkı Özdeşliği

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b) \text{ dir.}$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $a \quad b$



İki terimli bir ifadenin arasında (-) varsa ifade ne şekilde olursa olsun ifadeyi bu özdeşlik yardımıyla çarpanlara ayırabilirsiniz.

$$x^2 - 9 = (x + 3) \cdot (x - 3)$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $x \quad 3$

$$9a^2 - 4 = (3a + 2) \cdot (3a - 2)$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $3a \quad 2$

$$m^2 - \frac{1}{16} = \left(m + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(m - \frac{1}{4}\right)$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $m \quad \frac{1}{4}$

$$4x^2 - y = (2x + \sqrt{y}) \cdot (2x - \sqrt{y})$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $2x \quad \sqrt{y}$

$$4a - 3b = (2\sqrt{a} + \sqrt{3b}) \cdot (2\sqrt{a} - \sqrt{3b})$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $2\sqrt{a} \quad \sqrt{3b}$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $a + b \quad a - b$

$$= (a + b + a - b) \cdot (a + b - a + b) = 2a \cdot 2b = 4ab$$

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $x \quad \frac{1}{x}$

$$4^x - 9^x = (2^x + 3^x) \cdot (2^x - 3^x)$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $2^x \quad 3^x$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$a^4 - b^4$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm

$$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2) \cdot (a^2 - b^2)$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $a^2 \quad b^2 \quad a \quad b$

$$= (a^2 + b^2) \cdot (a + b) \cdot (a - b)$$

Örnek

$$(a + b - c)^2 - (a - b - c)^2$$

ifadesinin en sade şeklini bulalım.

Çözüm



İki tane tam kare ifade ve arada da (-) var, en klasik iki kare farkı sorusu. Kuralımız neydi? Parantez içlerini bir kere topla, bir kere çıkar ve çarp.

$$(a + b - c)^2 - (a - b - c)^2$$

$$= (a + b - c + a - b - c) \cdot (a + b - c - a + b + c)$$

$$= (2a - 2c) \cdot 2b = 4b \cdot (a - c) \text{ dir.}$$

Örnek

$$a - b = b - c = 5$$

olduğuna göre, $a^2 + c^2 - 2b^2$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

Öğrenci Konuşma: Hocam, soruda $a^2 - 2b^2$ var hemen onu iki kare farkı olarak açsak olur mu?



Açabilirsin Ayça, ama bir işe yaramaz kökler falan gelir işler karışır. Başka bir yol göstereyim?

$$a^2 + c^2 - 2b^2 = a^2 - b^2 + c^2 - b^2$$



Ne yaptık, iki tane iki kare farkı ortaya çıkardık, geri kalanı işlem.

$$= (a - b) \cdot (a + b) + (c - b) \cdot (c + b)$$

$$= (a - b) \cdot (a + b) - (b - c) \cdot (c + b)$$

$$= 5 \cdot (a + b) - 5 \cdot (c + b)$$

$$= 5 \cdot [a + b - c - b] = 5 \cdot (a - c) \text{ dir.}$$

Çarpanlara Ayırma

Nasıl Çözülür?



Verilen denklemlerden,

$$\begin{array}{r} a - b = 5 \\ + \quad b - c = 5 \\ \hline a - c = 10 \quad \text{dur.} \end{array}$$

O halde,

$$a^2 + c^2 - 2b^2 = 5 \cdot (a - c) = 5 \cdot 10 = 50 \quad \text{bulunur.}$$

Örnek

$$2016 \cdot 2004 + 36$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm



Bazen de iki kare farkı özdeşliğini tersten uygulamak gerekir. 2016 ile 2004 ün ortası 2010 dur. Bakın şimdi ne yapıcım.

$$\begin{aligned} 2016 \cdot 2004 + 36 &= (2010 + 6) \cdot (2010 - 6) + 6^2 \\ &= 2010^2 - 6^2 + 6^2 \\ &= 2010^2 \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^4 + 1) = (x^k - 1)$$

olduğuna göre, k nın değerini bulalım.

Çözüm



Matematikte soru çözmek tecrübe gerektirir. Soruyu ilk görüşte çöze-yebilirsiniz ama bir soru tipini öğrendikten sonra bol bol örnek çözerek o soru tipini unutmanız gerekir.

$$\begin{aligned} (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^4 + 1) &= (x^k - 1) \\ \Rightarrow (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^4 + 1) &= (x^k - 1) \\ \Rightarrow (x^4 - 1) \cdot (x^4 + 1) &= (x^k - 1) \\ \Rightarrow (x^8 - 1) &= (x^k - 1) \end{aligned}$$

O halde,

$$x^8 = x^k \Rightarrow k = 8 \quad \text{bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlara ayırınız.

$$\rightarrow n^2 - 144$$

$$(n - 12) \cdot (n + 12)$$

$$\rightarrow x^2 - 4y^2$$

$$(x - 2y) \cdot (x + 2y)$$

$$\rightarrow a^2c^2 - 9b^2$$

$$(ac - 3b) \cdot (ac + 3b)$$

$$\rightarrow (3,47)^2 - (6,53)^2$$

$$(3,47 - 6,53) \cdot (3,47 + 6,53)$$

$$\rightarrow (a + b)^2 - b^2$$

$$a \cdot (a + 2b)$$

Nasıl Uygularım?



$$\rightarrow (2x + y)^2 - (x - 2y)^2$$

$$(3x - y) \cdot (x + 3y)$$

$$\rightarrow \frac{a^2}{m^2} - \frac{b^2}{n^2}$$

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{n}\right) \cdot \left(\frac{a}{m} - \frac{b}{n}\right)$$

$$\rightarrow (a + b - c)^2 - (a - b + c)^2$$

$$(4a(b - c))$$

$$\rightarrow 2^{2x} - 3^{2x}$$

$$(2^x - 3^x) \cdot (2^x + 3^x)$$

2. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlara ayırınız.

$$\rightarrow m - n$$

$$(\sqrt{m} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{m} + \sqrt{n})$$

$$\rightarrow 16^x - \frac{1}{49^x}$$

$$\left(4^x - \frac{1}{7^x}\right) \cdot \left(4^x + \frac{1}{7^x}\right)$$

$$\rightarrow 4a^2 - 9b$$

$$(2a - 3\sqrt{b}) \cdot (2a + 3\sqrt{b})$$

$$\rightarrow a^4 - b^4$$

$$(a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2)$$

$$\rightarrow m^2 - \sqrt{n}$$

$$(m - \sqrt[4]{n}) \cdot (m + \sqrt[4]{n})$$

$$\rightarrow a^6 - b^6$$

$$(a^3 - b^3) \cdot (a^3 + b^3)$$

Nasıl Uygularım?



3. Aşağıdaki ifadelerin eşitini bulunuz.

$$\rightarrow (2x + y) \cdot (2x - y)$$

$$(4x^2 - y^2)$$

$$\rightarrow (a - b + c) \cdot (a - b - c)$$

$$(a - b)^2 - c^2$$

$$\rightarrow (\sqrt{7} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{5})$$

$$(7 - 5)$$

$$\rightarrow (2 + \sqrt{7}) \cdot (2 - \sqrt{7})$$

$$(4 - 7)$$

$$\rightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$\rightarrow (2^{-x} + 3^{-x}) \cdot (2^{-x} - 3^{-x})$$

$$(2^{-2x} - 3^{-2x})$$

$$\rightarrow \left(5^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(5^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$(5 - 3)$$

4. Aşağıdaki işlemleri iki kare farkı özdeşliğinden faydalanarak sadeleştiriniz.

$$\rightarrow 399 \cdot 409$$

$$(404)^2 - 5^2$$

$$\rightarrow 111 \cdot 89 + 121$$

$$(100^2)$$

$$\rightarrow 2016 \cdot 1984 + 256$$

$$(2000)^2$$

$$\rightarrow 1294 \cdot 1302 - 1298^2$$

$$(-4^2)$$

Ne Bilmeliyim? 3

İki Küp Toplamı veya Farkı Özdeşlikleri

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

↓ ↓
a b

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

↓ ↓
a b

$$x^3 + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$$

↓ ↓
x 1

$$m^3 + 27 = (m + 3) \cdot (m^2 - 3m + 9)$$

↓ ↓
m 3

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot \left(a^2 - a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\right)$$

↓ ↓
a $\frac{1}{a}$

$$a \cdot \frac{1}{a} = \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot \left(a^2 - 1 + \frac{1}{a^2}\right)$$

$$x^3 - 8 = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)$$

↓ ↓
x 2

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x^2 + x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

↓ ↓
x $\frac{1}{x}$

$$x \cdot \frac{1}{x} = \left(x - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$27^x + 8^x = (3^x)^3 + (2^x)^3$$

↓ ↓
3^x 2^x

$$= (3^x + 2^x) \cdot (3^{2x} - 3^x \cdot 2^x + 2^{2x})$$

$$= (3^x + 2^x) \cdot (9^x - 6^x + 4^x)$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlara ayırınız.

$$n^3 - 64$$

$$(n - 4) \cdot (n^2 + 4n + 16)$$

$$x^3 + 8y^3$$

$$(x + 2y) \cdot (x^2 - 2xy + 4y^2)$$

$$8a^3 - 27b^3$$

$$(2a - 3b) \cdot (4a^2 + 6ab + 9b^2)$$

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2}\right)$$

$$8^x - \frac{1}{27^x}$$

$$\left(2^x - \frac{1}{3^x}\right) \cdot \left(4^x + \frac{2^x}{3^x} + \frac{1}{9^x}\right)$$

2. Aşağıdaki ifadelerin eşitini bulunuz.

$$(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$$

$$(x^3 - 1)$$

$$(x + 3) \cdot (x^2 - 3x + 9)$$

$$(x^3 + 27)$$

Ne Bilmeliyim? 4

Tam Kare Özdeşliği

$$\rightarrow (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\rightarrow (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\rightarrow (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

$$\begin{aligned} \checkmark (x + 4y)^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 4y + (4y)^2 \\ &= x^2 + 8xy + 16y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark (2a - 3b)^2 &= (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3b + (3b)^2 \\ &= 4a^2 - 12ab + 9b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{2}{x} + \left(\frac{2}{x}\right)^2 \\ &= x^2 + 4 + \frac{4}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark (2^x + 3^x)^2 &= (2^x)^2 + 2 \cdot 3^x \cdot 2^x + (3^x)^2 \\ &= 2^{2x} + 2 \cdot 6^x + 3^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark (a + b + 2)^2 &= a^2 + b^2 + 2^2 + 2(ab + 2a + 2b) \\ &= a^2 + b^2 + 4 + 2ab + 4a + 4b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark (2a - b - 1)^2 &= (2a)^2 + (-b)^2 + (-1)^2 + 2 \cdot [2a \cdot (-b) + 2a \cdot (-1) + (-b) \cdot (-1)] \\ &= 4a^2 + b^2 + 1 + 2 \cdot [-2ab - 2a + b] \\ &= 4a^2 + b^2 + 1 - 4ab - 4a + 2b \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki tam kare ifadeleri açınız.

$$\rightarrow (x + 4)^2$$

$$(x^2 + 8x + 16)$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{3}{x}\right)^2$$

$$\left(x^2 + 6 + \frac{9}{x^2}\right)$$

$$\rightarrow \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)^2$$

$$\left(\frac{x^2}{4} - 2 + \frac{4}{x^2}\right)$$

$$\rightarrow (5^x - 3)^2$$

$$(5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 9)$$

$$\rightarrow (\sqrt{2} - 3)^2$$

$$(2 - 6\sqrt{2} + 9)$$

$$\rightarrow (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2$$

$$(3 + 2\sqrt{15} + 5)$$

Nasıl Uygularım?



$$\rightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2$$

$$\left(x + 2 + \frac{1}{x} \right)$$

$$\rightarrow (x + y - z)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot (xy - yz - xz)$$

$$\rightarrow (a - b - c)^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot (-ab - ac + bc)$$

$$\rightarrow (x - 2y + z)^2$$

$$x^2 + 4y^2 + z^2 + 2 \cdot (-2xy - 2yz + xz)$$

$$\rightarrow (a - 3b + 5)^2$$

$$a^2 + 9b^2 + 25 + 2 \cdot (-3ab + 5a - 15b)$$

Ne Bilmeliyim? 5



Tam Kare Araştırması



Bir de bu işin tersi var. Verilen üç terimli bir ifadenin tam kare olup olmadığını bulmak.

Üç terimli bir ifadede aynı işaretli iki terimin karekökleri çarpımının 2 katı üçüncü terime eşit oluyorsa bu ifade tam karedir.

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 \text{ dir.}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ a & & b \\ \swarrow & & \searrow \\ 2 \cdot a \cdot b & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(Kare kökleri alalım)} \\ \text{(Çarpımlarının 2 katı)} \end{array}$$

$$\checkmark x^2 + 4xy + 4y^2 = (x + 2y)^2$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ x & & 2y \\ \swarrow & & \searrow \\ 2 \cdot x \cdot 2y = 4xy & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(Kare kökleri alalım)} \\ \text{(Çarpımlarının 2 katı)} \end{array}$$

$$\checkmark 4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ 2x & & 3y \\ \swarrow & & \searrow \\ 2 \cdot 2x \cdot 3y = 12xy & & \end{array}$$

$$\checkmark -9m^2 + 6m - 1 = -(9m^2 - 6m + 1) \text{ dir.}$$

$$9m^2 - 6m + 1 = (3m - 1)^2$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ 3m & & 1 \\ \swarrow & & \searrow \\ 2 \cdot 3m \cdot 1 = 6m & & \end{array}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} -9m^2 + 6m - 1 &= -(9m^2 - 6m + 1) \\ &= -(3m - 1)^2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Çarpanlara Ayırma

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki ifadeleri tam kare olarak yazınız.

$$\rightarrow x^2 + 4x + 4$$

$$(x + 2)^2$$

$$\rightarrow a^2 - 6a + 9$$

$$(a - 3)^2$$

$$\rightarrow a^2 + 4ab + 4b^2$$

$$(a + 2b)^2$$

$$\rightarrow m^2 + 16m + 64$$

$$(m + 8)^2$$

$$\rightarrow 4x^2 + 4x + 1$$

$$(2x + 1)^2$$

$$\rightarrow 9a^2 - 6a + 1$$

$$(3a - 1)^2$$

Ne Bilmeliyim? 6



İki Terimin Toplamının (veya Farkının) Küpü

$$\rightarrow (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$\rightarrow (x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Aşağıdaki ifadeleri inceleyiniz.

$$\checkmark (x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\checkmark (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$\checkmark (2 + a)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot a + 3 \cdot 2 \cdot a^2 + a^3 \\ = 8 + 12a + 6a^2 + a^3$$

Nasıl Çözülür?



Örnek

Aşağıdaki ifadeleri inceleyiniz.

$$\checkmark (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$\checkmark (a - 2)^3 = a^3 - 3a^2 \cdot 2 + 3 \cdot a \cdot 2^2 - 2^3 \\ = a^3 - 6a^2 + 12a - 8$$

Örnek

x ve y birer gerçel sayı olmak üzere,

$$x^3 - 3x^2y = 3$$

$$y^3 - 3xy^2 = 11$$

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre, x - y farkını bulalım.

Çözüm



Altındaki ifadeyi (-) ile çarpıp taraf tarafa toplayalım, bakalım ne çıkacak?

$$x^3 - 3x^2y = 3$$

$$- y^3 - 3xy^2 = 11$$

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 3 - 11$$

$$(x - y)^3 = -8 = (-2)^3$$

$$\Rightarrow x - y = -2 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki parantez küp ifadeleri açınız.

$$\rightarrow (x - 3)^3$$

$$(x^3 - 9x^2 + 27x - 27)$$

$$\rightarrow (2x - y)^3$$

$$(8x^3 - 12x^2 + y + 6xy^2 - y^3)$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3$$

$$\left(x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$$

2. Aşağıda açılımları verilen ifadeleri bulunuz.

$$\rightarrow a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a - b)^3$$

$$\rightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$(x - 2)^3$$

$$\rightarrow (a - 1)^3 - 3(a - 1)^2 + 3(a - 1) - 1$$

$$(a - 1 - 1)^3$$

Ne Bilmeliyim? 7

 **$ax^2 + bx + c$ Üç Terimlisinin Çarpanlarına Ayrılması**

► $a = 1$ iken; çarpımları c , toplamları b olacak şekilde iki sayı (m ve n) mevcutsa bu ifadenin çarpanlarına ayrılmış şekli, $c = m \cdot n$ ve $b = m + n$ olmak üzere,

$$x^2 + bx + c = (x + m) \cdot (x + n) \text{ olur.}$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ m + n & m \cdot n \end{array}$$

$$\checkmark x^2 - 2x - 15 = (x - 5) \cdot (x + 3)$$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ -5 + 3 & -5 \cdot 3 \end{array}$$

$$\checkmark x^2 - 4x - 45 = (x - 9) \cdot (x + 5)$$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ -9 + 5 & -9 \cdot 5 \end{array}$$

$$\checkmark x^2 - (a + 4)x + 4a = (x - 4) \cdot (x - a)$$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ -4 + (-a) & -4 \cdot (-a) \end{array}$$

$$\checkmark x^2 - ax - 6a^2 = (x - 3a) \cdot (x + 2a)$$

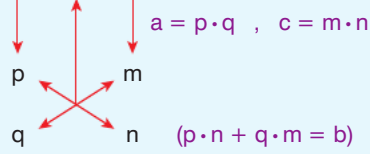
$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ -3a + 2a & -3a \cdot 2a \end{array}$$

Çarpanlara Ayırma

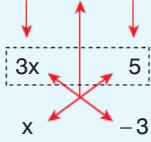
Ne Bilmeliyim? 8

► $a \neq 1$ iken; c nin iki çarpanı (m ve n) ile a nın iki çarpanı (p ve q) arasında $p \cdot n + q \cdot m = b$ şeklinde bir eşitlik sağlanıyorsa aşağıdaki ifadenin çarpanlarına ayrılmış şekli,

$ax^2 + bx + c = (px + m) \cdot (qx + n)$ biçiminde olur.

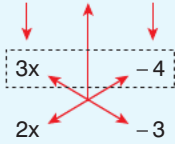


✓ $3x^2 - 4x - 15 = (3x + 5) \cdot (x - 3)$



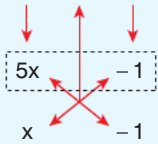
$3x \cdot (-3) + x \cdot 5 = -4x$ (ortadaki terim)

✓ $6x^2 - 17x + 12 = (3x - 4) \cdot (2x - 3)$



$3x \cdot (-3) + 2x \cdot (-4) = -17x$ (ortadaki terim)

✓ $5x^2 - 6x + 1 = (5x - 1) \cdot (x - 1)$



$5x \cdot (-1) + x \cdot (-1) = -6x$ (ortadaki terim)

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlara ayırınız.

→ $x^2 + 4x + 3$

$(x + 3) \cdot (x + 1)$

→ $a^2 - 6a + 5$

$(a - 5) \cdot (a - 1)$

→ $x^2 - x - 2$

$(x - 2) \cdot (x + 1)$

→ $m^2 + 6m - 16$

$(m + 8) \cdot (m - 2)$

Nasıl Uygularım?



$$\rightarrow x^2 - 15x + 54$$

$$(x - 9) \cdot (x - 6)$$

$$\rightarrow a^2 - 4ab - 12b^2$$

$$(a + 2b) \cdot (a - 6b)$$

$$\rightarrow x^2 - 25xy + 24y^2$$

$$(x - 24y) \cdot (x - y)$$

$$\rightarrow x^2 - (a + b)x + ab$$

$$(x - a) \cdot (x - b)$$

2. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlara ayırınız.

$$\rightarrow 2a^2 - a - 1$$

$$(2a + 1) \cdot (a - 1)$$

$$\rightarrow 3x^2 - 4x - 15$$

$$(3x + 5) \cdot (x + 3)$$

$$\rightarrow 12m^2 - 11m - 15$$

$$(3m - 5) \cdot (4m + 3)$$

$$\rightarrow 6a^2 - ab - 5b^2$$

$$(a - b) \cdot (6a + 5b)$$

$$\rightarrow 2ax^2 + (2a - b)x - b$$

$$(2ax - b) \cdot (x + 1)$$

Çarpanlara Ayırma

Ne Bilmeliyim? 9

Özdeşlikler Yardımıyla Değer Bulma

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2) \\ &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2) \\ &= (x - y)^3 + 3xy(x - y) \end{aligned}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$m + n = 7 \text{ ve } n \cdot m = 11$$

olduğuna göre, $m^2 + n^2$ 'nin değerini bulalım.

Çözüm



$m^2 + n^2$ ile $m \pm n$ aynı sorunun içerisinde varsa yapılacak iş, $m \pm n$ nin karesini almaktır. Ya da formül kullanılacak.

$$m + n = 7 \Rightarrow (m + n)^2 = 7^2$$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 + 2 \cdot m \cdot n = 49$$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 + 2 \cdot 11 = 49$$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 = 27 \text{ dir.}$$

Örnek

$$a^2 + b^2 = 35 \text{ ve } a - b = 8$$

olduğuna göre, $a \cdot b$ nin değerini bulalım.

Çözüm



$a - b = 8$ olduğuna göre, kare alalım.

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ olduğundan,}$$

$$\Rightarrow 8^2 = 35 - 2ab$$

$$\Rightarrow 2ab = 35 - 64$$

$$\Rightarrow a \cdot b = -\frac{29}{2} \text{ olur.}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$x + \frac{2}{x} = 3$$

olduğuna göre, $x^2 + \frac{4}{x^2}$ nin değerini bulalım.

Çözüm

$$x + \frac{2}{x} = 3 \Rightarrow \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} + 2 \cdot x \cdot \frac{2}{x} = 9$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} + 4 = 9 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$x + y = 5$$

$$x \cdot y = 7$$

olduğuna göre, $x^3 + y^3$ 'ün değerini bulalım.

Çözüm



Değer bulma sorularında, $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ lı kuralını uygulamak daha uygun görünüyor.

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 = (5)^3 - 3 \cdot 7 \cdot 5$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 = 125 - 105 \Rightarrow x^3 + y^3 = 20 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

olduğuna göre, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = (3)^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (3)$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 - 9 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 18 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki verilere göre istenilen değeri bulunuz.

$$\rightarrow m^2 + n^2 = 23 \text{ ve } n \cdot m = 5 \text{ ise } m - n \text{ kaçtır?}$$

($\mp \sqrt{13}$)

$$\rightarrow a^2 + b^2 = 34 \text{ ve } a + b = 8 \text{ ise } a \cdot b \text{ kaçtır?}$$

(15)

$$\rightarrow a - b = -4 \text{ ve } a \cdot b = -7 \text{ ise } a^2 + b^2 \text{ kaçtır?}$$

(2)

$$\rightarrow a + b = 12 \text{ ve } a \cdot b = 15 \text{ ise } a^2 + b^2 \text{ kaçtır?}$$

(114)

$$\rightarrow x - \frac{4}{x} = 8 \text{ ise } x^2 + \frac{16}{x^2} \text{ kaçtır?}$$

(72)

$$\rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 4 \text{ ise } \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \text{ kaçtır?}$$

(14)

Çarpanlara Ayırma

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$\frac{y^2 - x^2}{x^2 - xy + y^2} : \frac{x - y}{x^3 + y^3}$$

ifadesinin en sade şeklini bulalım.

Çözüm



Sadeleştirme sorularında varsa önce ortak çarpan parantezine alma işlemi yapılır. Daha sonra da gördüğünüz özdeşlikler açılır.

$$\frac{y^2 - x^2}{x^2 - xy + y^2} : \frac{x - y}{x^3 + y^3}$$

$$= \frac{(y + x) \cdot (y - x)}{x^2 - xy + y^2} : \frac{x - y}{(y + x) \cdot (x^2 - xy + y^2)}$$



Özdeşlikleri açtık. Birde aradaki bölmeden dolayı ters çevirme işlemimiz var.

$$= \frac{(y + x) \cdot (y - x)}{x^2 - xy + y^2} \cdot \frac{(y + x) \cdot (x^2 - xy + y^2)}{x - y}$$

$$= \frac{(y + x) \cdot \cancel{(y - x)}}{\cancel{x^2 - xy + y^2}} \cdot \frac{(y + x) \cdot \cancel{(x^2 - xy + y^2)}}{\cancel{x - y}}$$

$$= - (y + x) (y + x)$$

$$= - (y + x)^2 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



$$2. \quad \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} + \frac{ab}{a + b}$$

ifadesinin en sade şekli aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) 2a C) 2ab D) a - b E) a + b

(E)

İPUCU

Özdeşlikleri açın ve sadeleştirin, sonra ortaya çıkan ifadeye dikkat edin.

$$3. \quad \frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 2x} : \frac{x + 7}{x^2 + x}$$

ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) x + 1 B) x - 7 C) $\frac{x}{x + 1}$

D) $\frac{x + 1}{x - 1}$ E) $\frac{x + 7}{2}$

(A)

$$4. \quad \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} : \frac{3x - 2}{x^2 - 2x}$$

ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) -1 C) x D) $\frac{1}{x}$ E) $\frac{x + 1}{x}$

(C)

Nasıl Uygularım?



5. $\frac{a(a-b) + b(b-a) + b-a}{a-b-1}$
ifadesinin en sade şekli aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $b+a$ B) $a-b$ C) $2a-b$
D) $2a+2b$ E) $2a-2b$

(B)

İPUCU

İşaretlere dikkat edelim.

6. $\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2 + 3ab} + b$
ifadesinin en sade şekli aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $2a$ B) $2a-b$ C) $2a-2b$ D) a E) b

(D)

İPUCU

Tam kare ifadeyi açmayla işe başlayın.

7. $\frac{x^3 - 1}{x^3 + x^2 + x} + \frac{1}{x}$
ifadesinin en sade şekli aşağıdakilerden hangisidir?
- A) x B) $-x$ C) 1 D) -1 E) $x-1$

(C)

İPUCU

Önce ortak parantez, sonrası özdeşlik.

8. $\frac{x^2 - x + 1}{x + 5} : \frac{x^4 + x}{2x^3 + 9x^2 - 5x}$
ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $\frac{1}{x}$ B) $\frac{1}{2-x}$ C) $\frac{2x-1}{1+x}$
D) x E) $x+1$

(C)

İPUCU

Sadeleştirme sorularında sıra, önce ortak çarpan parantezi sonra özdeşliklerdir.

9. $\frac{a^4 - a^3}{a^4 - a^2} \cdot \frac{a+1}{a^2 - a}$
ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $\frac{a+1}{a}$ B) $\frac{1}{a-1}$ C) $\frac{1}{a+1}$
D) $\frac{a}{a-1}$ E) $\frac{a}{a+1}$

(B)

İPUCU

Sadeleştirme sorularında sıra, önce ortak çarpan parantezi sonra özdeşliklerdir.

10. $\frac{x^3 - 16x}{3x^2 - 2x} : \frac{x^2 - x - 12}{3x^2 + 7x - 6}$
ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $\frac{1}{x}$ B) $\frac{1}{4-x}$ C) $\frac{x}{4+x}$
D) $x-4$ E) $x+4$

(E)

İPUCU

Unutma önce ortak çarpan parantezi sonra özdeşlikler.

Çarpanlara Ayırma

1. $a + c = 10$
 $c - b = 3$
 olduğuna göre, $ab - c^2 + bc - ac$ işleminin sonucu kaçtır?
 A) -30 B) -21 C) -14 D) 14 E) 24

2. $x + 2y = 8$
 $x - 3z = 2$
 olduğuna göre, $x^2 - 3xz + 2xy - 6yz$ ifadesinin değeri kaçtır?
 A) 24 B) 16 C) -18 D) -16 E) -24

3. $\sqrt{47 \cdot 63 + 64}$
 işleminin sonucu kaçtır?
 A) 35 B) 39 C) 45 D) 55 E) 56

İPUCU

47 = x ise 63 = x + 16 olur.

4. $\left(2 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(4 + \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{81}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 8 B) 16 C) 27 D) 32 E) 81

İPUCU

Soldan sağa çarpanları birleştirirsek zincirleme iki kare farklarını görebiliriz.

5. $\frac{a^2 - 1}{(1 - \sqrt{a}) \cdot (1 + \sqrt{a})} + 1$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) -1 C) $\sqrt{a}$ D) $-\sqrt{a}$ E) -a

İPUCU

Üstteki iki kare farkını sonuna kadar açın.

6. x ve y birer gerçel sayı olmak üzere,

$$x^3 + 3x^2y = 14$$

$$y^3 + 3xy^2 = 13$$

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre, x + y kaçtır?

- A) 3 B) 2 C) 1 D) -1 E) -3

İPUCU

Taraf taraf toplayın bakalım hangi açılım çıkacak.

Çarpanlara Ayırma

7.
$$\frac{2^{20} - 2^8}{(2^6 + 1) \cdot (2^6 - 1)}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 64 B) 128 C) 256 D) 512 E) 1024

8.
$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{16}\right) = 1 - \frac{1}{2^k}$$

olduğuna göre, k kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

9. Her x gerçel sayısı için

$$x^2 + ax - 14 = (x + 2) \cdot (x + b)$$

olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

- A) -12 B) -9 C) -7 D) 8 E) 9

10.
$$\left(\frac{x}{1+x} - \frac{x}{1-x}\right) : \frac{x}{1-x^2}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -x B) -2x C) x D) x² E) 1 + x

İPUCU

Paydaları eşitleyin, iki kare farklarına dikkat!

11.
$$\frac{\sqrt{21} - \sqrt{7} + \sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + 1$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -√7 B) -√5 C) √3 D) 0 E) 1

İPUCU

21 ve 15'i çarpanlarına ayırınca ortak çarpanları görebilirsiniz.

12.
$$(79)^2 + (43)^2 - (77)^2 - (41)^2$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 340 B) 380 C) 480 D) 520 E) 548

1-A

2-B

3-D

4-B

5-E

6-A

7-C

8-D

9-A

10-B

11-C

12-C

Çarpanlara Ayırma

1. $(2x - 1)^2 = ax^2 - 4x + b$
olduğuna göre, $a + b$ kaçtır?
A) -4 B) -3 C) 4 D) 5 E) 6

2. $\frac{8}{1-a} = b$
olduğuna göre,
 $4 + ab - b$
ifadesinin değeri kaçtır?
A) -8 B) -4 C) 0 D) 8 E) 12

3. Her birinin içerisinde $(m - 1)$ tane kutu bulunan m tane koli vardır.
Kutuların her birinin içerisinde $(m + 1)$ tane oyuncak olduğuna göre, bu kolilerin tamamının içerisinde toplam kaç tane oyuncak vardır?
A) $m^2 - 1$ B) $m^2 - m$ C) $m^2 + m$
D) $m^3 - m$ E) $m^3 - m^2$

4. Bir bidonda $(a^2b^2 - 1)$ litre süt vardır.
Bu bidondaki sütün tamamı $(ab - 1)$ litrelik özdeş şişelere doldurulacak olursa toplam kaç şişe gerekir?

A) $ab + 1$ B) $ab - 1$ C) ab D) $a - b$ E) $b + 1$

5. Bir manav toptancıdan kilosu a liradan a kilo mandalinayı veresiye olarak almıştır. Manav bu mandalananın b kilosunu b liradan satarak paranın tamamı ile toptancıya olan borcunun bir kısmını ödüyor.

Buna göre, manavın toptancıya kaç lira borcu kalmıştır?

A) $a^2 - b^2$ B) $b^2 - a^2$ C) $a - b$
D) $2(a - b)$ E) $a + b$

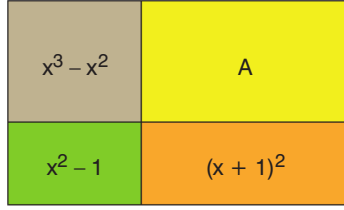
6. Bir ilçede bulunan k tane mahallenin her birinde m tane çocuk parkı bulunmaktadır. Bu parkların her birine n tane salıncak kuruluyor. Fakat bir süre sonra bu ilçedeki n tane mahallenin birer parkında bulunan k tane salıncığın kırıldığı görülüyor.

Buna göre, son durumda sağlam olarak kalan salıncakların sayısını veren ifade aşağıdakilerden hangisidir?

A) $k \cdot n \cdot (m - 1)$ B) $k \cdot n \cdot (m + 1)$
C) $m \cdot n \cdot (k - 1)$ D) $k \cdot m \cdot (n - 1)$
E) $k \cdot (m - n - 1)$

Çarpanlara Ayırma

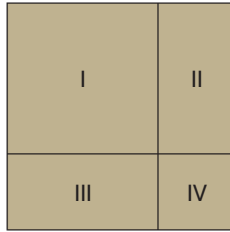
7. Bir dikdörtgen her biri dikdörtgen olan dört parçaya ayrıldı-
ğında oluşan görünüm aşağıda verilmiştir. Şekilde her alanı
veren ifade alanın içerisine yazılmıştır.



Buna göre, A aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $x^2 + x$ B) $x^3 + x^2$ C) $x(x + 1)^2$
D) $(x^2 + x)^2$ E) $x^3 - 1$

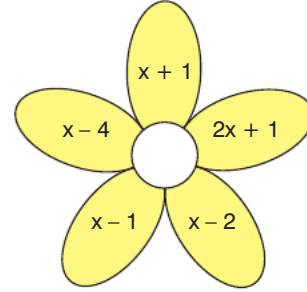
8. Kenar uzunluğu m birim olan bir kare şeklindeki gibi dört böl-
geye ayrılmıştır. I. nolu bölge kenar uzunluğu n birim olan bir
karedir.



Buna göre, II ve III ile gösterilen bölgelerin alanları top-
lamı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2n(m - n)$ B) $2n(m + n)$ C) $2m^2 - n^2$
D) $m^2 - n^2$ E) $m - n$

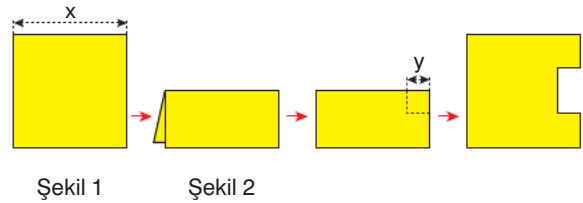
9. Ahmet Öğretmen bir etkinlikte öğrencilere " $2x^2 - x - 1$ ve
 $x^2 - 3x - 4$ ifadelerinin çarpanlarını aşağıdaki kağıt çiçeğin
dört yaprağına yazdım o yaprakları koparın" demiştir.



Buna göre, öğrenciler doğru yaprakları kopardığında ge-
riye kalan yaprakta yazan ifade aşağıdakilerden hangi-
sidir?

- A) $x - 4$ B) $x - 1$ C) $x + 1$
D) $x - 2$ E) $2x + 1$

10. Bir kenar uzunluğu x birim olan Şekil 1'deki kare kağıt tam or-
tasından ikiye katlanarak Şekil 2 elde edilmiştir. Daha sonra
Şekil 2'deki iki katlı kağıdın sağ üst köşesinden bir kenarı y
birim olan kare kesilip alınıyor.



Buna göre, en son elde edilen kesik kağıt açıldığında olu-
şan şeklin bir yüzeyinin alanı birimkare türünden aşağıda-
kilerden hangisine eşit olur?

- A) $x^2 - y^2$ B) $x^2 - 2y$ C) $x^2 - 2y^2$
D) $\frac{x^2}{4} - y^2$ E) $\frac{x^2}{2} - 2y^2$

BÖLÜM 13

ÖĞRENELİM

ORAN - ORANTI

Oran - Oranti

Ne Bilmeliyim? 1

ORAN - ORANTI

Oran

En az biri sıfırdan farklı ve birimleri aynı olan iki çokluğun birbirine bölümüne oran denir.

a'nın b'ye oranı $\frac{a}{b}$ dir.

Oranti

Oranların birbirine eşitliğine oranti denir.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ birer oran olmak üzere,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ (ikili oranti)}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \text{ (üçlü oranti)}$$

k: oranti sabiti (oranti katsayısı)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \text{ orantisında}$$

$$a = b \cdot k$$

$$c = d \cdot k$$

$$e = f \cdot k \text{ olarak yazılabilir.}$$

$$\checkmark \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \text{ ise, } a = 2k, b = 3k \text{ ve } c = 4k \text{ alınabilir.}$$

$$\checkmark \frac{a}{b} = \frac{4}{5} \text{ ise, } a = 4k, b = 5k \text{ alınabilir.}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \text{ orantısı,}$$

$a:c:e = b:d:f$ biçiminde de ifade edilebilir.

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = k \text{ için } \frac{a+2b}{a-b} \text{ oranını bulalım.}$$

Çözüm

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = k \text{ ise } a = 3k \text{ ve } b = 4k \text{ olur.}$$

Buna göre,

$$\begin{aligned} \frac{a+2b}{a-b} &= \frac{3k+2 \cdot 4k}{3k-4k} \\ &= \frac{11k}{-k} \\ &= -11 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

$$a:b:c = 4:3:7$$

orantisında oranti sabiti 3 olduğuna göre, $a + b + c$ toplamını bulalım.

Çözüm



Önce verilen ifadeyi alışık olduğumuz tarzda yazalım ve içler dışlar çarpımı yapalım.

$$a:b:c = 4:3:7 \text{ için oranti sabiti 3 ise } \frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7} = 3 \text{ diyebiliriz.}$$

$$a = 4 \cdot 3 = 12$$

$$b = 3 \cdot 3 = 9$$

$$c = 7 \cdot 3 = 21 \text{ olur.}$$

Buradan,

$$a + b + c = 12 + 9 + 21 = 42 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Çözülür?



Örnek

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f} = 4 \text{ orantısında,}$$

$$\left(\frac{a+b}{b}\right) \cdot \left(\frac{e-f}{f}\right)$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

1. yol



Oran orantı sorularında uygulanacak ilk kural içler dışlar çarpımıdır.

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f} = 4 \Rightarrow a = 4b \text{ ve } e = 4f \text{ dir.}$$



Şimdi, bu değerleri sorulan ifadede yerine yazalım.

$$\left(\frac{a+b}{b}\right) \cdot \left(\frac{e-f}{f}\right) = \left(\frac{4b+b}{b}\right) \cdot \left(\frac{4f-f}{f}\right)$$

$$\Rightarrow = \frac{5b}{b} \cdot \frac{3f}{f} = 15 \text{ bulunur.}$$

2. yol



Verilen ifadeyi düzenleyebiliriz. Hadi bakalım onu da gösterelim.

$$\left(\frac{a+b}{b}\right) \cdot \left(\frac{e-f}{f}\right) = \left(\frac{a+b}{b}\right) \cdot \left(\frac{e-f}{f}\right)$$

$$= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{b}\right) \cdot \left(\frac{e}{f} - \frac{f}{f}\right)$$

$$= \left(\frac{a}{b} + 1\right) \cdot \left(\frac{e}{f} - 1\right)$$

$$= (4 + 1) \cdot (4 - 1)$$

$$= 5 \cdot 3 = 15 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki istenenleri bulunuz.

$$\rightarrow \frac{a}{b} = 4 \text{ ise } \frac{3b}{4a} = ?$$

$$\left(\frac{3}{16}\right)$$

$$\rightarrow \frac{a}{b} = -2 \text{ ise } \frac{a^2}{b^2} = ?$$

$$(4)$$

$$\rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \text{ ise } \frac{-a}{\frac{2}{b}} = ?$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{1}{4} \text{ ise } \frac{3a}{\frac{b}{4}} = ?$$

$$(-3)$$

$$\rightarrow \frac{a}{b} = -1 \text{ ise } \frac{a+b}{b} = ?$$

$$(0)$$

Nasıl Uygularım?



2. Aşağıdaki istenenleri

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$$

orantısına göre bulunuz.

$$\rightarrow \frac{x+y}{x-y}$$

(7)

$$\rightarrow \frac{3x-2y}{x}$$

 $\left(\frac{3}{2}\right)$

$$\rightarrow \frac{x^2+y^2}{x \cdot y}$$

 $\left(\frac{25}{12}\right)$

$$\rightarrow \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

 $\left(\frac{7}{25}\right)$

3. Aşağıdaki istenenleri

$$a : b : c = 2 : 3 : 5$$

orantısına göre bulunuz.

$$\rightarrow a + b + c = 20 \text{ ise } b = ?$$

(6)

$$\rightarrow b - 3a + 2c = 28 \text{ ise } c = ?$$

(20)

$$\rightarrow a \cdot b = 120 \text{ ise } c^2 = ?$$

(500)

$$\rightarrow a^2 + b^2 = 52 \text{ ise } c^2 = ?$$

(100)

Nasıl Uygularım?



4. Aşağıdaki x değerlerini bulunuz.

$$\rightarrow \frac{x-2}{4} = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{10}{3}\right)$$

$$\rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{3}{2}$$

$$(-3)$$

$$\rightarrow \frac{2x}{3} = \frac{1-x}{2}$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)$$

5. Aşağıdaki istenenleri bulunuz.

$$\rightarrow \frac{4b}{3a-b} = 3 \text{ ise } \frac{a}{b} = ?$$

$$\left(\frac{7}{9}\right)$$

$$\rightarrow \frac{x+y}{2x-y} = \frac{2}{3} \text{ ise } \frac{x-y}{x+2y} = ?$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)$$

$$\rightarrow \frac{2x-y}{2y-x} = \frac{1}{4} \text{ ise } \frac{x+y}{x-y} = ?$$

$$(-5)$$

Ne Bilmeliyim? 2

Oranların paylarının toplamı (farkı), paydalarının toplamına (farkına) bölünürse orantı sabiti değişmez.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{a \pm c}{b \pm d} = k \text{ dir.}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \Rightarrow \frac{a \cdot x + c \cdot y + e \cdot z}{b \cdot x + d \cdot y + f \cdot z} = k \text{ dir.}$$

$$\checkmark \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{3a}{3b} = \frac{-c}{-d} = k \Rightarrow \frac{3a - c}{3b - d} = k$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2} = \frac{c}{5} \text{ ve } a + 3b - 2c = 4$$

olduğuna göre, a'nın değerini bulalım.

Çözüm

1. yol



İçler dışlar çarpımı ile çözüme gidebiliriz.

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2} = \frac{c}{5} = k \text{ olsun.}$$

$$a = 3 \cdot k, \quad b = 2 \cdot k, \quad c = 5 \cdot k \text{ olur.}$$

$$a + 3b - 2c = 4 \Rightarrow 3k + 6k - 10k = 4$$

$$\Rightarrow -k = 4 \Rightarrow k = -4 \text{ tür.}$$

$$k = -4 \text{ ise}$$

$$a = 3 \cdot k = 3 \cdot (-4) = -12 \text{ bulunur.}$$

2. yol



Bir de özellik kullanarak çözelim.

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2} = \frac{c}{5} = k \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{3 \cdot b}{3 \cdot 2} = \frac{-2 \cdot c}{-2 \cdot 5} = k$$

$$\Rightarrow \frac{a + 3b - 2c}{3 + 6 - 10} = k$$

$$\Rightarrow \frac{4}{-1} = k \Rightarrow k = -4 \text{ tür.}$$

$$\text{Buradan, } k = -4 \text{ ise}$$

$$a = 3 \cdot k = 3 \cdot (-4) = -12 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki istenenleri bulunuz.

$$\rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 4 \text{ ise } \frac{a - 2c}{b - 2d} = ?$$

(4)

$$\rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = -2 \text{ ise } \frac{a + 3c - e}{b + 3d - f} = ?$$

(-2)

$$\rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \text{ ise } \frac{2a + c - 3e}{2b + d - 3f} = ?$$

(k)

Ne Bilmeliyim? 3

Oranlar taraf tarafa çarpılırsa,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \Rightarrow \frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f} = k^3 \text{ tür.}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e} = \frac{1}{k} \text{ dır.}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k &\Rightarrow \frac{a \cdot d^2 \cdot f}{e \cdot b \cdot c^2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{f}{e} \cdot \frac{d^2}{c^2} \\ &\Rightarrow = k \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = 4$$

olduğuna göre, $\frac{a \cdot c \cdot f}{b \cdot d \cdot e}$ yi bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} \frac{a \cdot c \cdot f}{b \cdot d \cdot e} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{f}{e} \\ &= 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} \\ &= 4 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki istenenleri

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$$

orantısına göre bulunuz.

$$\rightarrow \frac{e-f}{e}$$

$$\left(\frac{k-1}{k} \right)$$

$$\rightarrow \frac{a^3 \cdot f^2 \cdot c}{b^3 \cdot d \cdot e^2}$$

$$(k^2)$$

$$\rightarrow \left(\frac{c-d}{c} \right) \cdot \left(\frac{e+f}{e} \right)$$

$$\left(\frac{k^2-1}{k^2} \right)$$

$$2. \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = 4$$

olduğuna göre, $\frac{a^2 \cdot d \cdot e}{b^2 \cdot c \cdot f}$ işleminin sonucu kaçtır?

$$(16)$$

İPUCU

Oran ters çevrilirse orantı katsayısı da ters çevrilir.

Ne Bilmeliyim? 4

ORANTI ÇEŞİTLERİ

Doğru Oranti

a **artarken** b de aynı oranda **artıyorsa** ya da a **azalırken** b de aynı oranda **azalıyorsa**, a ile b doğru orantılıdır.

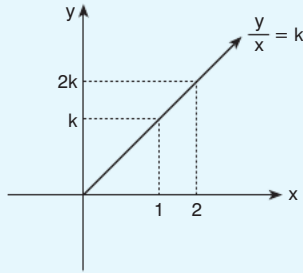
- Oranı (bölümü) sabit olan iki çokluk **doğru orantılı** veya kısaca **orantılıdır** denir. y ile x doğru orantılı ise,

$$\frac{y}{x} = k \text{ (sabit) olur.}$$

- a, b, c sayıları, sırasıyla x, y, z ile doğru orantılı ise,

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = k \text{ dir.}$$

- y ve x doğru orantılı ise grafik



şeklinde dir.

- Problem sorularında oranti kurulurken, aynı cinsten çokluklar alt alta gelecek şekilde yazılır. Doğru oranti için çapraz, oklar çizilir. Oklar yönünde çarpma işlemi yapılarak iki çarpım eşitlenir.

Doğru oranti;

$$\begin{array}{ccc} a & \times & b \\ c & \times & x \end{array}$$

$$a \cdot x = b \cdot c$$

Bir makine,

$$\begin{array}{ccc} 2 \text{ saatte} & \times & 5 \text{ halı dokursa,} \\ 6 \text{ saatte} & \times & \text{kaç (x) halı dokur.} \end{array}$$

$$2 \cdot x = 6 \cdot 5 \Rightarrow x = 15 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

2a sayısı $3b + 1$ ile orantılıdır.

$$a = 5 \text{ için } b = 3$$

olduğuna göre, $a = 3$ için b nin kaç olduğunu bulalım.

Çözüm



İki ifade birbiriyle doğru orantılı ise birbirlerine bölümleri sabittir.

Hocam burda orantılı diyor.



Zeynep'im, unuttun mu? Orantının türü belirtilmemiş ise doğru orantı anlayacaktık.

Buna göre, 2a ile $3b + 1$ sayıları doğru orantılı ise,

$$\frac{2a}{3b + 1} = k \text{ (sabit) olur.}$$

$$a = 5 \text{ iken } b = 3 \text{ ise}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3 + 1} = k \Rightarrow k = 1 \text{ 'dir.}$$



Oranti sabitini bulduk. k değişmeyip sabit kalacağına göre,

$$a = 3 \text{ iken}$$

$$\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot b + 1} = 1$$

$$\Rightarrow 3b + 1 = 6$$

$$\Rightarrow b = \frac{5}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek

a, b, c sayıları sırasıyla 5, 2 ve 6 ile orantılıdır.

$$2a - b + 3c = 104$$

olduğuna göre, a, b ve c nin değerlerini bulalım.

Çözüm



Önce orantıyı yazalım, sonrası zaten işlem yeteneği,

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{2} = \frac{c}{6} = k \Rightarrow a = 5k, b = 2k, c = 6k \text{ dir.}$$



Bu değerleri denklemden yerine yazalım.

Nasıl Çözülür?



$$2a - b + 3c = 104$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 5k - 2k + 3 \cdot 6k = 104$$

$$\Rightarrow 26k = 104$$

$$\Rightarrow k = 4 \text{ tür.}$$



Sıra geldi, a , b ve c yi bulmaya

$$a = 5 \cdot k = 5 \cdot 4 = 20$$

$$b = 2 \cdot k = 2 \cdot 4 = 8$$

$$c = 6 \cdot k = 6 \cdot 4 = 24 \text{ bulunur.}$$

Örnek

4, 6, 12 ile orantılı olarak paylaştırılan bir miktar paradan en az alan 72 TL almıştır.

Buna göre, en çok alanın kaç TL para aldığını bulalım.

Çözüm



Parayı paylaşan üç kişinin aldığı paralar a , b ve c TL olsun. a , b , c sırasıyla 4, 6 ve 12 ile orantılı (doğru) olduğundan,

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{6} = \frac{c}{12} = k \Rightarrow a = 4k, b = 6k, c = 12k \text{ dir.}$$



En az alan $a = 4k$ dir.

$$\text{Buna göre, } a = 4k = 72 \Rightarrow k = 18 \text{ dir.}$$



En çok alan $c = 12k$ dir.

O halde,

$$c = 12k = 12 \cdot 18 = 216 \text{ TL bulunur.}$$

Örnek

Bir öğrenci 120 soruyu 150 dakikada çözerse, 180 soruyu kaç dakikada çözeceğini bulalım.

Çözüm



Soru sayısı arttıkça çözme süreside artar. Yani soru sayısı ile süre doğru orantılıdır.

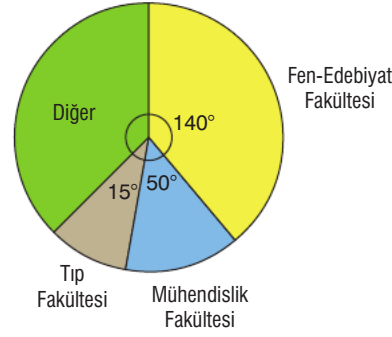
$$120 \text{ soru} \quad \times \quad 150 \text{ dk}$$

$$180 \text{ soru} \quad \times \quad x$$

$$\text{Doğru orantı; } 120 \cdot x = 180 \cdot 150 \Rightarrow x = 225 \text{ dk}$$

Örnek

Şekildeki dairesel grafikte bir okulda üniversiteyi kazanan öğrencilerin kazandıkları bölümlere göre dağılımı gösterilmiştir.



Okulda fen edebiyat fakültesi kazananların sayısı, mühendislik fakültesi kazananların sayısından 30 fazla olduğuna göre, tıp fakültesi kazananların sayısını bulalım.

Çözüm



Grafikte ne söylenmek isteniyor, öncelikle onu anlayalım.



140° lik açığa sahip fen edebiyat kazananların sayısı, 50° lik açığa sahip mühendislik kazananların sayısından 30 kişi fazla. Yani bu işin matematikçesi,

$$140 - 50 = 90^\circ \text{ lik dilim } 30 \text{ öğrenciye karşılık gelir.}$$



Bizden ne isteniyor, 15° açığa sahip tıp kazananların sayısı. Basit bir doğru orantı ile sonucu bulalım.

$$90^\circ \quad \times \quad 30 \text{ öğrenci}$$

$$15^\circ \quad \times \quad x \text{ öğrenci}$$

$$\text{Doğru orantı; } 90 \cdot x = 30 \cdot 15$$

$$x = 5 \text{ öğrenci bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki istenenleri bulunuz.

→ $(x + 2)$ sayısı $2y$ ile doğru orantılıdır.

$x = 1$ için $y = 2$ ise, $y = 4$ için $x = ?$

(4)

→ $(5 - a)$ sayısı $(2b - 1)$ ile doğru orantılıdır.

$a = 2$ için $b = 2$ ise, $a = -2$ için $b = ?$

(4)

2. Aşağıdaki istenenleri bulunuz.

→ a, b ve c sayıları sırasıyla 4, 9 ve 16 sayılarıyla orantılıdır.

$c - 2b + 3a = 20$ ise $a - b = ?$

(-10)

→ a, b, c pozitif sayıları sırasıyla 3, 5, 8 ile orantılıdır.

$b^2 - ac = 4$ ise $a = ?$

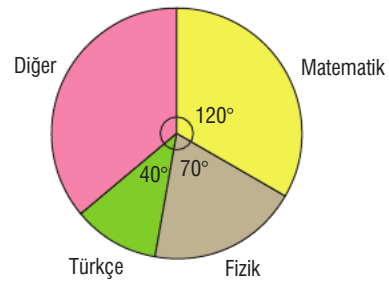
(6)

→ Aynı kapasitede 6 işçi bir günde 120 metrekare duvar örebilmektedir.

Aynı kapasitedeki bu işçilerden kaç tanesi bir günde 200 metrekare duvar örebilir?

(10)

→ Bir kitapçıda aylık satılan YKS kitaplarının adetlerinin derslere göre dağılımı aşağıdaki dairesel grafikte gösterilmiştir.



Kitapçıda satılan matematik kitaplarının sayısı fizik kitaplarının sayısından 300 tane fazla olduğuna göre, satılan Türkçe kitaplarının sayısı kaçtır?

(240)

Nasıl Uygularım?



3. Bir öğrenci 51 dakikada 21 soru çözebildiğine göre, aynı hızla 17 dakikada kaç soru çözebilir?

(7)

4. Bir araç 150 km yolu 3 saatte gidebildiğine göre, aynı hızla 450 km yolu kaç saatte gidebilir?

(9)

5. Eşit kapasiteli 5 usta bir günde 180 tane masa yapabildiğine göre, aynı ustalardan 3'ü bir günde kaç tane masa yapabilir?

(108)

6. 96 metre uzunluğunda bir kumaş 7 ve 9 ile orantılı olacak şekilde iki parçaya ayrılıyor.

Buna göre, parçalar arasındaki fark kaç metredir?

(12)

7. 135 tane bilye yaşları 7, 9, 11 olan üç çocuğa yaşlarıyla doğru orantılı olarak paylaştırılıyor.

Buna göre, en büyük çocuk kaç bilye alır?

(55)

8. 7, 15, 60 ile orantılı olarak üç kişiye paylaştırılan bir miktar paradan en az alan 60 bin TL almıştır.

Buna göre, en çok alan kaç bin TL para almıştır?

(225)

Ne Bilmeliyim? 5



Ters Oranti

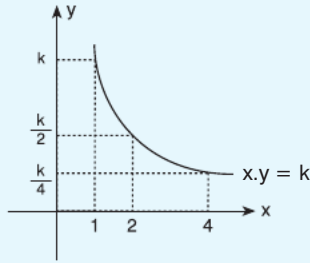
a **artarken** b aynı oranda **azalıyorsa** ya da a **azalırken** b aynı oranda **artıyorsa**, a ile b ters orantılıdır.

Çarpımı sabit olan iki çokluk **ters orantılıdır** denir. y ile x ters orantılı ise,

$$y \cdot x = k \text{ (sabit) olur.}$$

a, b, c sayıları sırasıyla x, y, z sayıları ile ters orantılı ise,
 $a \cdot x = b \cdot y = c \cdot z = k$ dir.

y ve x ters orantılı ise grafik



şeklindedir.

Problemlerde oranti kurulurken, aynı cinsten çokluklar alt alta gelecek şekilde yazılır. Ters oranti için paralel oklar çizilir. Oklar yönünde çarpma işlemi yapılarak iki çarpım eşitlenir.

Ters oranti;

$$a \longrightarrow b$$

$$c \longrightarrow x$$

$$a \cdot b = c \cdot x$$

Bir işi özdeş

3 makine ————— 12 saatte yapıyorsa,

4 makine ————— kaç (x) saatte yapar.

$$3 \cdot 12 = 4 \cdot x \Rightarrow x = 9 \text{ saat bulunur.}$$

Nasıl Çözülür?



Örnek

x + 1 sayısı y + 5 ile **ters** orantılıdır.

$$x = 6 \text{ iken } y = 4$$

olduğuna göre, x = 8 iken y sayısını bulalım.

Çözüm



İki ifade birbiriyle ters orantılı ise çarpımları sabit olacaktı.

x + 1 ile y + 5 sayıları ters orantılı ise,

$$(x + 1) \cdot (y + 5) = k \text{ (sabit) olur.}$$

$$x = 6 \text{ iken } y = 4 \text{ ise}$$

$$(6 + 1) \cdot (4 + 5) = k \Rightarrow k = 63 \text{ olup,}$$

$$x = 8 \text{ iken}$$

$$(8 + 1) \cdot (y + 5) = 63 \Rightarrow 9 \cdot (y + 5) = 63$$

$$\Rightarrow y + 5 = 7 \Rightarrow y = 2 \text{ bulunur.}$$

Örnek

a, b ve c sayıları sırasıyla 3, 5 ve 2 ile ters orantılıdır.

$$a - b + c = 19$$

olduğuna göre, b sayısını bulalım.

Çözüm



Ters orantıda sırasıyla sayıların çarpımı sabit olacaktı.

$$3a = 5b = 2c = k \text{ yazılırsa,}$$

$$a = \frac{k}{3}, b = \frac{k}{5}, c = \frac{k}{2} \text{ dır.}$$

$$a - b + c = 19 \Rightarrow \frac{k}{3} - \frac{k}{5} + \frac{k}{2} = 19$$

$$\Rightarrow \frac{10k - 6k + 15k}{30} = 19$$

$$\Rightarrow 19 \cdot k = 30 \cdot 19$$

$$\Rightarrow k = 30 \text{ dur.}$$

$$\text{Buna göre, } b = \frac{k}{5} = \frac{30}{5} = 6 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Çözülür?



Örnek

12 ve 16 yaşlarındaki iki çocuk bir miktar bilyeyi yaşları ile ters orantılı olarak paylaşıyorlar.

Toplam bilye sayısı 70 olduğuna göre, bu çocuklardan en çok alanın kaç bilye aldığını bulalım.

Çözüm



Çocuklardan birinin a, diğerinin b tane bilyesi olsun. a ve b, 12 ve 16 ile ters orantılı olduğundan,

$$12 \cdot a = 16 \cdot b = k \Rightarrow a = \frac{k}{12} \text{ ve } b = \frac{k}{16} \text{ alınabilir.}$$

$$a + b = 70 \Rightarrow \frac{k}{12} + \frac{k}{16} = 70$$

(4) (3)

$$\Rightarrow \frac{7k}{48} = 70 \Rightarrow \frac{k}{48} = 10 \Rightarrow k = 480 \text{ olur.}$$



Ters orantılı olduğundan, yaşı küçük olan yani 12 yaşındaki çocuk daha çok bilye almıştır.

Buna göre, $a = \frac{k}{12} = \frac{480}{12} = 40$ bulunur.

Örnek

Bir musluk bir havuzu 14 saatte dolduruyor.

Musluktan birim zamanda akan su miktarı (kapasitesi) %30 azaltılırsa, havuzun kaç saatte dolacağını bulalım.

Çözüm



Musluktan birim zamanda akan su miktarı yani kapasitesi 100x olsun. Kapasitesi % 30 azaltılırsa kapasitesi 100x'ten 70x'e düşer önce bunu kavrayalım.



Şimdi geldi sıra orantı çeşidine. Musluğun kapasitesi veya hızı, azaltılırsa havuzun dolma süresi ne olur.

Tabii ki hız azalırsa süre uzar hocam. Yani aralarında ters orantı var.



$$100x \longrightarrow 14 \text{ saatte}$$

$$70x \longrightarrow a \text{ saatte}$$

Ters orantı; $100x \cdot 14 = 70x \cdot a \Rightarrow a = 20 \text{ saat}$ bulunur.

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki istenenleri bulunuz.

→ (a - 1) ile (b + 1) sayıları ters orantılıdır.

a = 3 iken b = 1 ise b = 3 iken a = ?

(2)

→ (2a - 3) ile b sayıları ters orantılıdır.

b = 5 için a = 2 olduğuna göre, a = 5 için b = ?

$\left(\frac{5}{7}\right)$

2. Aşağıdaki istenenleri bulunuz.

→ a, b ve c sayıları sırasıyla 1, 2 ve 4 ile ters orantılıdır.

2a - c = 14 ise b = ?

(4)

Nasıl Uygularım?



→ $(a + 1)$ ve $(b - 1)$ sayıları sırasıyla 4 ve 8 ile ters orantılıdır.

$a + b = 6$ ise, $a \cdot b = ?$

(9)

→ Eşit kapasiteli 4 usta bir işi 18 günde yapabilmektedir.

Aynı işi 12 günde yapabilmek için aynı kapasite kaç usta daha gereklidir?

(2)

İPUCU

Ters orantı mı var, doğru orantı mı var?

3. Bir araç 120 km/saat hızla 3 saatte aldığı bir yolu, 2,5 saatte alması için hızını saatte kaç km artırmalıdır?

(24)

4. Bir ustanın günde 6 saat çalışarak 5 günde bitirebildiği bir işi, 3 günde bitirebilmesi için günde kaç saat çalışması gerekir?

(10)

5. 45 tane şeker 6 ve 9 ile ters orantılı olacak şekilde iki çocuğa dağıtılıyor.

Buna göre, az alan çocuk kaç şeker almıştır?

(18)

İPUCU

Orantıyı doğru yazıp orantı sabitini buldunuz mu işlem tamam.

6. 66 tane bilye yaşları 2, 3, 6 olan üç çocuğa yaşlarıyla ters orantılı olarak paylaştırılıyor.

Buna göre, en küçük çocuk kaç bilye alır?

(33)

Ne Bilmeliyim? 6

Bileşik Orantı

İçinde **hem doğru, hem de ters orantı bulunan orantılar** bileşik orantıdır.

→ y sayısı; x ile doğru, z ile ters orantılı ise,

$$\frac{y \cdot z}{x} = k \text{ (sabit) olur.}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

2a sayısı 3b sayısı ile doğru, (4c - 2) sayısı ile ters orantılıdır.

Buna göre, a = 2 ve b = 4 iken c = 5 ise a = 1 ve b = 6 iken c nin kaç olduğunu bulalım.

Çözüm



Ters orantılı olanla çarpıp, doğru orantılı olana bölüceğiz işte bütün mesele bu kadar.

Buna göre,

$$\frac{2a}{3b} \cdot (4c - 2) = k \text{ dir. } a = 2, b = 4 \text{ ve } c = 5 \text{ için,}$$

$$\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot (4 \cdot 5 - 2) = k \Rightarrow k = 6 \text{ olur.}$$

Buradan da,

a = 1, b = 6 için,

$$\frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 6} \cdot (4 \cdot c - 2) = 6 \Rightarrow \frac{1}{9} \cdot (4 \cdot c - 2) = 6$$

$$\Rightarrow (4 \cdot c - 2) = 54 \Rightarrow 4c = 56$$

$$\Rightarrow c = 14 \text{ bulunur.}$$

Örnek

Bir boyacı yeşil ve sarı boyaları miktarları sırasıyla 2 ve 3 ile doğru orantılı olacak şekilde, beyaz boyayı ise miktarı 5 ile ters orantılı olacak şekilde karıştırıyor.

Boyacı karışımda 520 gr boya kullandığına göre, kaç gram yeşil boya kullandığını bulalım.

Çözüm



Dikkat ettiniz değil mi? Hem doğru orantı, hem ters orantı var. Yapılacak işlem değişmiyor, doğru orantılıları bölüp, ters orantılı olanları çarpıcaz.

Yeşil (y), sarı (s), beyaz (b) olsun.

$$\frac{y}{2} = \frac{s}{3} = 5b = k \Rightarrow y = 2k, s = 3k, b = \frac{k}{5} \text{ dir.}$$

$$y + s + b = 520 \Rightarrow 2k + 3k + \frac{k}{5} = 520$$

$$\Rightarrow \frac{26k}{5} = 520 \Rightarrow k = 100 \text{ bulunur.}$$

Yeşil boya (y) idi.

$$y = 2k = 2 \cdot 100 = 200 \text{ gr bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıdaki istenenleri bulunuz.

→ (x + y) sayısı; x ile doğru, (y + z) ile ters orantılıdır.

x = 1 ve y = 1 için z = 1 ise

x = 2 ve y = 2 için z = ?

(0)

→ x sayısı; (x - 1) ile doğru, (y + 1) ile ters orantılıdır.

x = 2 için y = 1 ise y = 2 için x = ?

(4)

2. Aşağıdaki istenenleri bulunuz.

→ Bir tel 2 ile doğru, 3 ile ters orantılı olacak şekilde iki parçaya ayrılıyor.

Parçaların uzunlukları farkı 120 cm olduğuna göre, başlangıçtaki telin boyunu bulunuz.

(168)

Nasıl Uygularım?



- 74 metrelik bir ip 3 ve 6 ile doğru 4 ile ters orantılı olarak üçe bölünüyor.

En kısa parçanın uzunluğunu bulunuz.

(2)

3. 145 tane kitap 2 ile doğru, 4 ve 6 ile ters orantılı olarak üç farklı kutuya konuluyor.

En az kitap alan kutu kaç kitap alır?

(10)

4. Bir sınıftaki öğrenciler 3 ile doğru, 5 ile ters orantılı iki gruba ayrılabilir.

Sınıftaki öğrenci sayısı 48 olduğuna göre az olan grupta kaç öğrenci vardır?

(3)

Ne Bilmeliyim?

7



- Hem doğru hem de ters oranti birlikte kullanılan iş problemleri için;

$$\frac{\text{I. iş miktarı}}{\text{I. işle ilgili diğer verilerin çarpımı}} = \frac{\text{II. iş miktarı}}{\text{II. işle ilgili diğer verilerin çarpımı}}$$

formülü kullanılarak sorular daha pratik olarak çözülebilir.

Nasıl Çözülür?



Örnek

Eşit kapasiteli 4 usta 24 çift ayakkabıyı 6 saatte yaparsa, bunlarla aynı kapasitedeki 6 ustanın 42 çift ayakkabıyı kaç saatte yapacağını bulalım.

Çözüm



Önce formülsüz yapalım.



İşçi sayısı ile zaman ters orantılı, zaman ile iş doğru orantılıdır. (artar mı, azalır mı, sorusunu kendinize sorun). Doğru orantılı ise köşeli çarp, ters orantılı ise karşılıklı çarp.

I. iş;	4 usta	6 saatte	24 çift
II. iş;	6 usta	x saatte	42 çift
	Ters oranti		Doğru oranti

$$4 \cdot 6 \cdot 42 = 6 \cdot x \cdot 24$$

$$x = 7 \text{ saat bulunur.}$$



Şimdi kural ile yapalım. Birinci iş 24 ayakkabı, ikinci iş 42 ayakkabı. O halde, kuralı yazalım.

$$\frac{24}{4 \cdot 6} = \frac{42}{6 \cdot x}$$

$$\Rightarrow 24 \cdot 6 \cdot x = 42 \cdot 4 \cdot 6$$

$$\Rightarrow x = 7 \text{ saat bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aşağıdaki istenenleri bulunuz.

- 12 işçi günde 2 saat çalışarak 8 m^2 halıyı 4 günde, 4 işçi, günde a saat çalışarak 12 m^2 lik halıyı 18 günde dokuyor.

Buna göre, a kaçtır?

(2)

- 5 işçi günde t saat çalışarak bir işi 16 günde bitirirse, 8 işçi günde $5t$ saat çalışarak aynı işi kaç günde bitirir?

(2)

İPUCU

Her iki durumda da aynı iş yapılırsa iş miktarlarını 1 alınız.

2. 6 işçi günde 8 saat çalışarak 4 günde 4000 m^2 duvar boyayabiliyor.

5000 m^2 lik başka bir duvarı günde 5 saat çalışarak 8 günde boyayabilmek için kaç işçi gereklidir?

(6)

3. Eş kapasiteli 3 musluk bir çocuk havuzunu 8 saatte doldurabilmektedir.

Aynı kapasitede 12 musluk bu çocuk havuzunun 3 katı büyüklüğündeki bir havuzu kaç saatte doldurabilir?

(6)

4. Eşit kapasiteli 8 tane işçinin günde 8 saat çalışmasıyla k günde bitirilebilen bir iş, aynı kapasitede 10 tane işçi günde 6 saat çalışarak $k + 1$ günde bitiriyor.

Buna göre, k kaçtır?

(15)

Oran - Orantı

1. Bir çiftlikte A tane koyun, B tane inek, C tane tavuk bulunmaktadır.

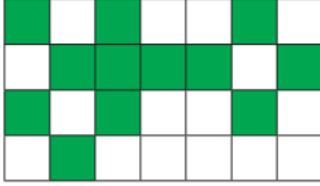
$$\frac{A}{B} = \frac{3}{2} \text{ ve } \frac{B}{C} = \frac{5}{7}$$

olduğu biliniyor.

Bu çiftlikte 156 tane hayvan olduğuna göre, kaç tane tavuk vardır?

- A) 40 B) 45 C) 56 D) 63 E) 72

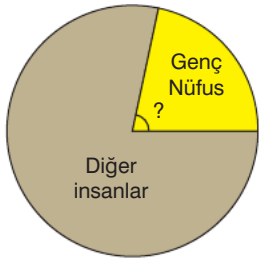
2. Bir kareli zemindeki bazı kareler yeşile boyandığında oluşan görünüm aşağıda verilmiştir.



Bu zemindeki yeşil kare sayısının beyaz kare sayısına oranının $\frac{4}{3}$ olması için kaç kare daha yeşile boyanmalıdır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

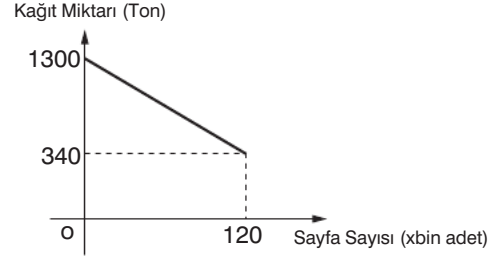
3. Türkiye'de genç nüfusun diğer insanların nüfusuna oranının $\frac{3}{17}$ olduğu bilinmektedir.



Buna göre, Türkiye'nin nüfusunda, gençler ile diğer nüfusun payını gösteren bir dairesel grafikte genç nüfus kaç derecelik bir merkez açı ile gösterilir?

- A) 48 B) 52 C) 54 D) 56 E) 58

4. Bir matbaada bulunan 1300 ton kağıt, kitap basmada kullanıldıkça kalan kağıt ve basılan sayfa sayısı miktarları arasındaki doğrusal bağıntının grafiği aşağıdaki gibi olmaktadır.



Buna göre, bu matbaada 160 bin sayfa basıldığında kalan kağıt miktarı kaç tondur?

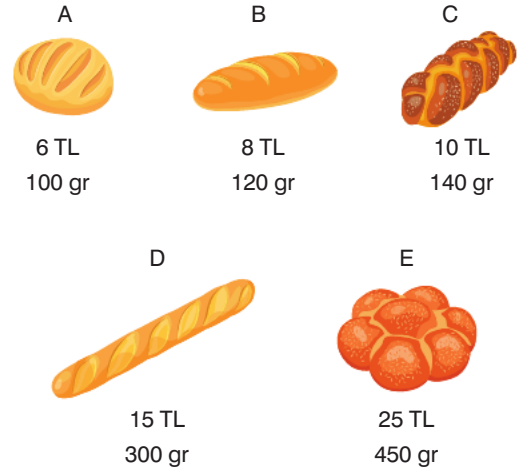
- A) 20 B) 30 C) 40 D) 60 E) 80

İPUCU

120 bin sayfa baskı için kaç kilo kağıt kullanılmış bulun ve 160 bin için orantı kurun.

5. Bir fırında A, B, C, D ve E olmak üzere beş çeşit ekmek üretilmektedir.

Bu ekmeklerin ağırlıkları ve fiyatları aşağıda verilmiştir.

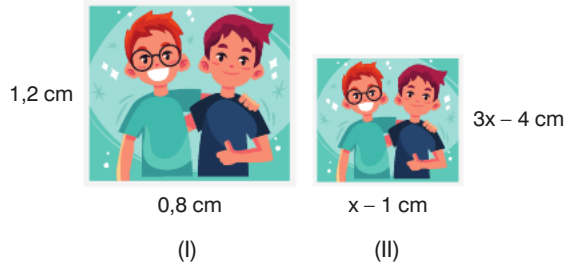


Buna göre, bu ekmeklerden hangisinin birim fiyatı en ekonomiktir?

- A) A B) B C) C D) D E) E

Oran - Orantı

6. Bir fotoğrafın iki farklı boyutu aşağıda verilmiştir.



İkinci fotoğraf, birinci fotoğrafın belli oranda küçültülmüş hali olduğuna göre, ikinci fotoğrafın kısa kenarı kaç cm dir?

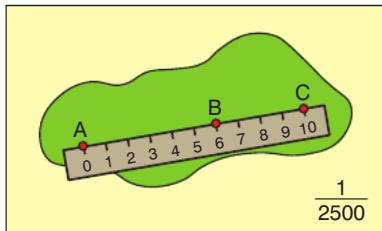
- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{7}{8}$

7. Akif ile abisinin yaşları toplamının yaşları farkına oranı $\frac{5}{2}$ olduğuna göre, Akif'in yaşının abisinin yaşına oranı kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{3}{7}$

8. Bir harita üzerindeki uzunluğun gerçek uzunluğuna oranına "harita ölçeği" denir.

Örneğin, bir haritada 1 cm olarak ölçülen mesafe gerçekte 50.000 cm ise bu haritanın ölçeği $\frac{1}{50.000}$ olur.



Yukarıdaki şekilde verilen ölçekli haritada A, B, C noktaları arasındaki uzaklıklar şekildeki gibi ölçülmüştür.

Buna göre, gerçekte B'nin A'ya olan uzaklığı, B'nin C'ye olan uzaklığından kaç metre fazladır?

- A) 50 B) 75 C) 100 D) 250 E) 500

9. $\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6}$ olmak üzere,

$$3a + b - 2c = 30$$

olduğuna göre, c kaçtır?

- A) 12 B) 18 C) 24 D) 32 E) 36

10. $3x = 2y$ ve $2x = z$

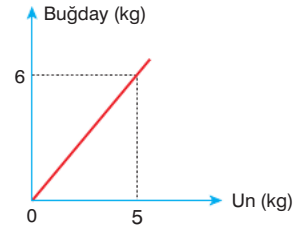
olduğuna göre, $\frac{x \cdot y}{z^2}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{7}{8}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{2}{3}$

İPUCU

İfadeyi önce tek eşitlik olarak yazın, sonrası bir önceki soru ile benzer işlem.

11. Aşağıdaki doğrusal grafikte buğdaydan elde edilen un miktarı verilmiştir.



Buna göre, 30 kg un elde etmek için kaç kg buğday gereklidir?

- A) 20 B) 25 C) 30 D) 36 E) 42

12. $5x = 2y = 4z$

$$x + y + z = 38$$

olduğuna göre, x'in değeri kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 10

İPUCU

Ekok(5, 2, 4) = 20 olduğundan üstteki ifadeyi (20·k) ya eşitleyin.

BÖLÜM 14

ÖĞRENELİM

SAYI PROBLEMLERİ Sayı Problemleri

Ne Bilmeliyim? 1



Önce sayılarla haşır neşir olalım



Sayı problemleri TYT nin en önemli ve seçici konularından biridir. Öyle formülü, ekstra bir bilgisi yoktur, burada önemli olan problemi iyi anlayıp, anlatılanı denklem haline dökülmektir. Bizde burada bu konuyu örnekler üzerinden anlatacağız. Hadi bakalım kolay gelsin.



Denklem kurulurken veya problem matematik diline çevrilirken birbirinden bağımsız her bilinmeyen farklı sembolle gösterilir.



Sevgili öğrenciler, problemin çözülebilmesi için de seçilen bilinmeyen sayısı kadar denkleme ihtiyaç vardır. O kadar denkleminiz yoksa değer vermekten başka seçeneğiniz yoktur.



Bilinmeyen sayısını arttırmamak için birbiri cinsinden yazılabilecek bilinmeyenlerde farklı semboller kullanılmamalıdır.

- ✓ İki sayının toplamı 3 ise; sayılardan biri x , diğeri $3 - x$ alınır.
- ✓ İki sayıdan biri diğeri 5 katına eşitse; sayılardan biri x diğeri $5x$ alınır.
- ✓ Ardışık üç tam sayı; x , $x + 1$ ve $x + 2$ alınır.
- ✓ Ardışık üç çift tam sayı x , $x + 2$ ve $x + 4$ alınır.

Nasıl Çözülür?



Örnek

Aşağıdaki ifadeleri matematik diline çevirelim.

- ✓ Bir sayının 4 fazlasının 2 katı,

$$2 \cdot (x + 4)$$

- ✓ Bir sayının 5 katının 7 fazlası,

$$5x + 7$$

- ✓ Bir sayının 3 katının karesi,

$$(3x)^2$$

- ✓ Bir sayının 4 eksiğinin yarısı,

$$\frac{x - 4}{2}$$

- ✓ Bir sayının küpü ile 3 katının toplamı 17 ise,

$$x^3 + 3x = 17$$

- ✓ Bir sayının karesinin 4 fazlası kendisinin 2 katına eşitse,

$$a^2 + 4 = 2a$$

- ✓ İki sayının farkının 2 fazlasının karesi,

$$(m - n + 2)^2$$

- ✓ İki sayıdan birinin 3 katı diğeri karesinin 5 fazlasına eşit ise,

$$3a = b^2 + 5$$

Nasıl Çözülür?



Örnek

Ardışık iki tam sayıdan küçük sayının 3 katının 18 fazlası, büyük sayının 2 katının 7 eksiğine eşit olduğuna göre, küçük sayıyı bulalım.

Çözüm



Ardışık tam sayılar arasındaki fark 1'dir. O halde, bu sayıları tek bilinmeyenle nasıl yazabiliriz?

Hocam, birine x dersek diğeri $x + 1$ olur.



Buna göre,

$$\begin{aligned} 3 \cdot x + 18 &= 2 \cdot (x + 1) - 7 \Rightarrow 3x + 18 = 2x + 2 - 7 \\ &\Rightarrow 3x + 18 = 2x - 5 \\ &\Rightarrow 3x - 2x = -18 - 5 \\ &\Rightarrow x = -23 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

Toplamları 77 olan üç sayıdan, ikinci sayı birinci sayının 3 katından 2 fazla ve üçüncü sayı birinci sayının 2 katından 3 eksik olduğuna göre, ikinci sayıyı bulalım.

Çözüm



Bu üç sayıyı yine tek bilinmeyene bağlı olarak yazalım. Tabii ki, bunu yaparken hangi sayı hangisinin katı, hangisi hangisinden ne kadar fazla, ne kadar eksik dikkat edeceksiniz.

I. sayı	II. sayı	III. sayı
x	$3x + 2$	$2x - 3$

Bunları toplayıp 77'ye eşitleyelim.

$$\begin{aligned} x + 3x + 2 + 2x - 3 &= 77 \Rightarrow 6x - 1 = 77 \\ &\Rightarrow 6x = 78 \\ &\Rightarrow x = 13 \text{ tür.} \end{aligned}$$

Buna göre, ikinci sayı;

$$3x + 2 = 3 \cdot 13 + 2 = 41 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Bir sayının 4 fazlasının 7 katı aynı sayının 8 katının 5 eksiğine eşit olduğuna göre, bu sayı kaçtır?

(33)

2. Bir sayının iki katının 124 eksiği ile aynı sayının 236 fazlasının toplamı, bu sayının 3 katından kaç fazladır?

(112)

3. Ardışık iki tek sayının kareleri farkı 128 olduğuna göre, küçük sayı kaçtır?

(31)

4. Toplamları 280 olan üç tane doğal sayıdan ikinci sayı birinci sayının 3 katından 8 eksik, üçüncü sayı ise ikinci sayının 4 katıdır.

Buna göre, en küçük sayı kaçtır?

(20)

Sayı Problemleri

Nasıl Çözülür?



Bir bütünün nasıl paylaşıldığına bakalım.

Örnek

Bir çubuk 6 eşit parçaya ayrılıyor. Ayrılan bu parçalardan her biri 3 cm daha kısa olursa bu çubuk 9 eşit parçaya ayrılabilir.

Buna göre, çubuğun boyunu bulalım.

Çözüm



İlk durumda her bir parçanın boyu x alınırsa,

Çubuğun boyu: $6 \cdot x$ olur. (I)



Parçaları 3 cm kısaltılırsa, her bir parçanın boyu $(x - 3)$ cm olur. Boy kısalınca parça sayısı da 6'dan 9'a çıktığından,

Çubuğun boyu: $9 \cdot (x - 3)$ olur. (II)



(I) ve (II) denklemlerin ikisi de çubuğun boyuna eşit olduğuna göre, denklemleri eşitleyelim,

$$6x = 9 \cdot (x - 3) \Rightarrow x = 9 \text{ olur.}$$

$$\text{Çubuğun boyu: } 6 \cdot x = 6 \cdot 9 = 54 \text{ cm bulunur.}$$

Örnek

Ayça ve Tuğba bir miktar parayı şu şekilde paylaşıyor. Ayça, Tuğba'nın aldığı paranın 2 katından 300 TL fazla alıyor. Tuğba, Ayça'dan 200 TL alırsa ikisinin paraları birbirine eşit oluyor.

Buna göre, paylaşılan paranın kaç TL olduğunu bulalım.

Çözüm



Önce verilenlerin matematikçesini yazalım.

Tuğba'nın aldığı para: x olsun.

Ayça'nın aldığı para: $2x + 300$ olur.



Şimdi aradaki işlemin matematikçesini yazalım.



Tuğba, Ayça'dan 200 TL alınca parası 200 TL artar, tabii ki Ayça'nınki de 200 TL azalır.

$$x + 200 = 2x + 300 - 200 \Rightarrow 400 - 300 = 2x - x$$

$$\Rightarrow x = 100 \text{ dür.}$$

$$\text{Toplam para; } x + 2x + 300 = 3x + 300$$

$$\Rightarrow = 3 \cdot 100 + 300 = 600 \text{ TL bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. 14 arkadaş parasını eşit ödemek üzere halı saha kiralyorlar. İçlerinden 4 kişinin parası olmadığı için diğerleri ödemeleri gerekenden 20 TL daha fazla ödüyorlar.

Buna göre, halı saha toplam kaç TL'ye kiralanmıştır?

(700)

İPUÇU

Kişi başına düşen para, x den $x + 20$ ye çıkar değil mi?

2. Volkan, Alper ve Ömer'in toplam 1200 TL'si vardır. Volkan, Alper ve Ömer'e 150 şer TL, Alper'de Ömer'e 50 TL verdiğinde üçünün paraları eşit oluyor.

Buna göre, başlangıçta Alper'in kaç TL'si vardır?

(300)

İPUÇU

Son durumda paraları eşitse hepsinin 400'er TL'si olur değil mi? O halde, geriye doğru da gidebilirsiniz.

3. Dört kardeş, 1500 TL'yi paylaşıyor. Bu paylaşımda birinci kardeş, ikinciden 50 TL; ikinci kardeş, üçüncüden 100 TL; üçüncü kardeş, dördüncüden 150 TL fazla alıyor.

Buna göre, en fazla para alan kardeş kaç TL almıştır?

(500)

Nasıl Çözülür?



Öğrenciler sıralara otursun, kuşlar ağaca konsun mantık ayıdır.

Örnek

Bir sınıfta öğrenciler sıralara 2'şer 2'şer oturlarsa 5 öğrenci ayakta kalıyor; eğer bu öğrenciler sıralara 3'er 3'er oturlarsa 2 sıra boş kalıyor.

Buna göre, sınıftaki sıra sayısını bulalım.

Çözüm



Sıra sayısı x olsun. Öğrenciler sıralara 2'şer 2'şer oturlarsa, oturan öğrenci sayısı $2x$ olur. 5 öğrenci de ayakta kalıyorsa,

öğrenci sayısı = $2x + 5$ olur. (I)



Dila ikinci denklemi söyle bakalım.

Hocam, öğrenciler 3'er 3'er oturunca 2 sıra boş kalıyorsa,



öğrenci sayısı = $3 \cdot (x - 2)$ dir. (II)



(I) ve (II) denklemlerini eşitleyerek sıra sayısını bulalım.

$$2x + 5 = 3 \cdot (x - 2) \Rightarrow 2x + 5 = 3x - 6$$

$$\Rightarrow x = 11 \text{ bulunur.}$$

Örnek

Bir miktar bardak mutfaktaki raflara, 8'erli dizilince 6 bardak açıkta kalıyor, 10'arlı dizilince raflarda 12 bardaklık yer kalıyor.

Buna göre, mutfaktaki toplam bardak sayısını bulalım.

Çözüm



Mutfaktaki raf sayısına k diyelim. Her rafta 8 bardaktan $8k$ gelir, 6 bardakta açıkta kalmıştı, buna göre bardak sayısı;

$$B = 8k + 6 \text{ olur.}$$



Hocam, mutfaktaki bardak sayısı B değil de $B + 12$ olsaydı, raflara 10 arlı olarak tam dizilicekmiş. O halde,

$$B + 12 = 10k \Rightarrow B = 10k - 12 \text{ olur.}$$

İki denklemi eşitleyelim,

$$8k + 6 = 10k - 12 \Rightarrow 2k = 18 \Rightarrow k = 9 \text{ dur.}$$

Bardak sayısı da, $B = 8k + 6 = 8 \cdot 9 + 6 = 78$ bulunur.

Nasıl Uygularım?



1. Bir kuş sürüsü bahçedeki ağacın dallarına 8'erli konduğunda 3 dal boş kalıyor. Kuşlar dallara 6'şarlı konduğunda ise 12 kuş havada kalıyor.

Buna göre, kuş sürüsündeki toplam kuş sayısı kaçtır?

120

İPUÇU

Kuşları ürkütmeden...Kuş sayısını veren iki denklemi yazıp eşitleyerseniz mesele kalmaz.

2. Bir miktar kutu marketteki raflara, 12'şerli dizilince 3 kutu açıkta kalıyor, 15'erli dizilince 2 raf boşta kalıyor.

Marketteki raf sayısı kaçtır?

(11)

3. Bir yardım kampanyasında bir miktar şeker depremzedelere, 5'er kilo dağıtılsa 150 kilo şeker artıyor. Depremzedelere 6'şar kilo şeker dağıtılsa 20 depremzedeye şeker kalmıyor.

Buna göre, dağıtılacak toplam şeker miktarı kaç kilodur?

(1500)

Sayı Problemleri

Nasıl Çözülür?



Oteldeki odalara turist yerleştirme, çiftlikteki tavuk ve tavşanların ayak sayısı veya cepteki bozuk para hesabında hep aynı işlemler yapılır.

Örnek

50 ve 25 kuruşluklardan oluşan 40 tane madeni paranın tutarı 16 TL dir.

Bu paralardan 50 kuruşlukların sayısını bulalım.

Çözüm



50 kuruşlukların sayısına x , 25 kuruşlukların sayısına y diyerek çözüm yapabiliriz. Ama her zaman ne kadar az bilinmeyen o kadar az sorun demektir. O halde, beni izleyin.

40 madeni paranın, x tanesi 50 kuruşluk ise $40 - x$ tanesi 25 kuruşluktur.

Toplam tutar, 16 TL (1600 Krş) ise;

$$50 \cdot x + 25 \cdot (40 - x) = 1600$$

$$\Rightarrow 50 \cdot x + 1000 - 25 \cdot x = 1600$$

$$\Rightarrow 25 \cdot x = 600$$

$$\Rightarrow x = 24 \text{ bulunur.}$$

Örnek

Bir otelde bir kısmı 2 kişilik, diğerleri 5 kişilik olan toplam 25 oda vardır.

Otelin toplam kapasitesi 51 kişilik olduğuna göre, 5 kişilik oda sayısını bulalım.

Çözüm



Sorular farklı ama çözüm yolu aynı. 5 kişilik oda sayısına x dersek, 2 kişilik oda sayısı $(15 - x)$ olur. Burada anlaşılmayan yer yok değil mi?

Toplam kişi sayısı 51 olduğuna göre,

$$5 \cdot x + 2 \cdot (15 - x) = 51 \Rightarrow 5 \cdot x + 30 - 2 \cdot x = 51$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x = 21$$

$$\Rightarrow x = 7 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Bir merdivenin basamaklarını 3'er 3'er çıkıp 4'er 4'er inen bir çocuğun çıkarken attığı adım sayısı inerken attığı adım sayısından 15 fazladır.

Buna göre, merdiven kaç basamaklıdır?

(180)

İPUCU

İnerken adım sayısı x ise çıkarken $x + 15$ dir. Merdivenin basamak sayısını gösteren ifadeleri eşitledik mi işlem tamam.

2. Bir sinema salonunda tam bilet 180 TL , indirimli bilet 150 TL dir.

250 kişinin sinemaya geldiği bir günde 42300 TL hasılat elde edildiğine göre, sinemaya gelenlerin kaç indirimli bilet almıştır?

(90)

İPUCU

Hasılatı verecek denklemde indirimli bilet sayısını x alırsanız tam bilet sayısı $250 - x$ olur.

Nasıl Çözülür?

*Doğruydu yanlıştı derken elde kalan net hesabı.*

Örnek

160 soruluk bir sınavda her 4 yanlış bir doğruyu götürmektedir.

20 soruyu boş bırakan bir öğrenci 110 net yaptığına göre, bu öğrencinin kaç soruyu doğru cevapladığını bulalım.

Çözüm

*160 sorudan 20'sini boş bıraktıysa cevaplanan soru sayısı 140'dır. Elde var birrr.**Diyelim ki D tanesini doğru yaptı, o halde, 140 – D tanesini yanlış yapmıştır. Etti ikiii.**Şimdi can alıcı nokta, 4 yanlış bir doğruyu götürüyorsa, 140 – D tane yanlış, $\frac{140 - D}{4}$ tane doğruyu götürür.*

Hocam, yani yanlış sayısını 4 e bölünce silinen doğrularımızı buluruz. O halde, yaptığımız toplam doğru sayısından, silinen doğru sayısını çıkarırsak net sayımızı bulmuş oluruz.



$$D - \frac{140 - D}{4} = 110 \Rightarrow \frac{4D - 140 + D}{4} = 110$$

$$\Rightarrow 5D - 140 = 4 \cdot 110$$

$$\Rightarrow 5D - 140 = 440$$

$$\Rightarrow 5D = 580 \Rightarrow D = 116 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek

80 soruluk bir sınavda her bir net 5 puan değerinde ve her 4 yanlış da bir doğruyu götürmektedir.

Tüm soruları cevaplandırarak 175 puan alan bir öğrencinin kaç soruyu doğru cevapladığını bulalım.

Çözüm

*Her net 5 puan ve biz 175 puan aldıysak, $175 : 5 = 35$ net yapmışız demektir.**Bu sefer net hesabını hızlı yapalım. 80 sorudan, D tanesi doğru ise (80 – D) yanlış olacağından net sayımız,*

$$D - \frac{80 - D}{4} = 35 \Rightarrow \frac{5D - 80}{4} = 35$$

$$\Rightarrow 5D - 80 = 140$$

$$\Rightarrow 5D = 220 \Rightarrow D = 44 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. 120 soruluk bir sınavda her 4 yanlış bir doğruyu götürmektedir.

80 tane soruyu doğru cevaplayan, x tane soruyu da boş bırakan bir öğrenci 72 net yaptığına göre, x kaçtır?

(8)

İPUCU

80 doğrunun 8'i yanlış sorulara kurban gitmiş değil mi?

2. 3 yanlışın bir doğruyu götürdüğü 100 soruluk bir sınavda İrem'in 72 neti vardır.

Tüm soruları cevaplayan İrem kaç soruyu doğru cevaplamıştır?

(79)

Sayı Problemleri

Nasıl Çözülür?



İki ileri bir geri mehter adımı hesabında da kafalar çok karışıyor.

Örnek

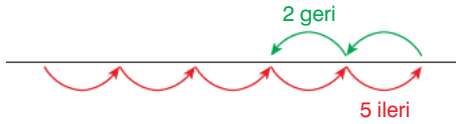
Erkan düz bir yol boyunca 5 adım ileri 2 adım geri atarak ilerliyor.

Erkan toplam 150 adım attığına göre, Erkan'ın kaç adım ilerlediğini bulalım.

Çözüm



Erkan 5 adım ileri 2 adım geri gidiyorsa, toplam $5 + 2 = 7$ adım attığında, ilerlemesi $5 - 2 = 3$ adım olur. Tam kavrama için birde şekilde gösterelim.



Bu tamam da şimdi bu işi kaç sefer yapabiliyor onu bulalım.

$$\begin{array}{r} 150 \quad 7 \\ - \quad 21 \\ \hline 3 \end{array}$$

olduğundan,



Erkan bu işlemi 21 kere yapmıştır. Bu işi her yaptığında 3 adım ilerleyebiliyordu.

Buna göre,

Erkan bu şekilde $21 \cdot 3 = 63$ adım ilerlemiş olur.

Hocam, bu kalan 3 vardı. O ne oldu?



Aferin, Ayça zurnanın son deliği burası. O kalan son 3 adım nereye doğru atılmak zorunda, tabii ki ileri. Yani,

Erkanın toplam ilerlemesi;

$$63 + 3 = 66 \text{ adım olur.}$$

Nasıl Uygularım?

1. Meryem doğrusal bir yol boyunca adımlarını, 10 adım ileri 3 adım geri atarak yürüyor. Meryem toplam 314 adım atıyor ve attığı her adım 45 cm'dir.

Meryem bulunduğu yerden kaç metre ilerlemiştir?

(76,5)

İPUÇU

Yapacağınız hesap, 13 te 7 ise 314 te ne olur?

2. 25 metrelik bir kuyunun dibinde bulunan bir kurbağa, dışarı çıkmak için kuyunun duvarından yukarı doğru art arda zıplıyor. Her zıplamasında 120 cm tırmanan kurbağa, her zıplayıştan sonra 30 cm yere doğru kaymaktadır.

Buna göre kurbağa kaçınıcı sıçrayışında kuyudan dışarı çıkmış olur?

- A) 26 B) 27 C) 28 D) 29 E) 30

(C)

İPUÇU

2500'ü 120'ye mi 90'na mı böleceksiniz iyi düşünün. Bir de kalan meselesi var kuyunun dışına çıkınca geri kayma olur mu?

Nasıl Çözülür?



Önümüzde kaç kişi var arkamızda kaç kişi var, öne mi yakınız, sona mı yani sıra problemlerine bakalım.

Örnek

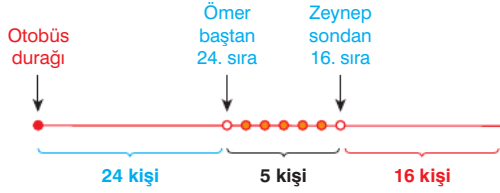
Ömer, bir otobüs kuyruğunda baştan 24. sırada, Zeynep ise son-
dan 16. sıradadır.

İkisi arasında 5 kişi daha bulunduğuna ve Ömer otobüse daha
yakın olduğuna göre, otobüs kuyruğunda kaç kişi olduğunu
bulalım.

Çözüm



Tabi ki soruda çözüm yaparken ne yazık ki her kuyrukta bulunan hak hu-
kuk tanımayan araya kaynak yapanları hesap dışında tutacağız.



Şekile göre, Zeynep'in önünde 29 kişi vardır. Zeynep sondan 16. kişi ol-
duğuna göre,

Kuyruktaki kişi sayısı; $29 + 16 = 45$ bulunur.

Nasıl Uygularım?

1. Bilet gişesindeki kuyrukta, Selçuk baştan 12. Tarık ise, son-
dan 9. sıradadır.

Selçuk ile Tarık arasında 8 kişi olduğuna göre, bu kuy-
rukta en çok kaç kişi vardır?

(29)

2. Kübra bir bilet kuyruğunda baştan $(n + 3)$. sırada,sondan da
 $(n - 2)$. sıradadır.

Kuyrukta 76 kişi olduğuna göre, n kaçtır?

(38)

İPUÇU

Önündekiler veya arkasındakiler kişinin sırasının 1 eksiği kadar-
dır değil mi?

Nasıl Çözülür?



Düzenli artış veya azalma soruları

Örnek

Asım, test kitabını çözerken her gün bir önceki gün çözdüğü soru
sayısından 10 soru fazla çözüyor.

Asım, 1500 soruluk bu kitabı 15 günde bitirdiğine göre, soru
çözmeye başladığı ilk gün kaç soru çözdüğünü bulalım.

Çözüm



Asım ilk gün A tane soru çözsün. Buradan hareketle, diğer günleri bu-
lalım.

1. gün A
2. gün $A + 10 = A + 1 \cdot 10$
3. gün $A + 20 = A + 2 \cdot 10$
4. gün $A + 30 = A + 3 \cdot 10$
- ...
15. gün $A + 140 = A + 14 \cdot 10$



Hepsini toplarsak 15 tane A dan $15 \cdot A$ gelir, mavileri de 10 parante-
zinde yazalım,

$$\begin{aligned} \Rightarrow 15 \cdot A + 10 (1 + 2 + 3 + \dots + 14) &= 1500 \\ \Rightarrow 15 \cdot A + 10 \cdot 105 &= 1500 \\ \Rightarrow 15 \cdot A &= 1500 - 1050 \\ \Rightarrow 15 \cdot A &= 450 \Rightarrow A = 30 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?

1. Arda her gün bir önceki günden 20 soru fazla çözmektedir.
On beşinci günde, dördüncü gün çözdüğünün 3 katı kadar
soru çözmüştür.

Buna göre, ilk gün çözdüğü soru sayısı kaçtır?

(50)

İPUÇU

İlk gün çözdüğü soru sayısı x ise 15. gün çözdüğü soru sayısı
 $(x + 14 \cdot 20)$ dir.

Sayı Problemleri

Nasıl Çözülür?



Biraz da işin ticari kısmına bakalım. İlk ders, ticarete kârı zararını iyi hesap edemezsen, hayata başladığın yerden değil daha geriden başlarsın.

Örnek

Elmaların 15 kiloluk çuvalını 5 TL'den alıp 3 kilosunu 5 TL'ye satan bir manav 80 TL kâr ettiğine göre, bu manavın toplam kaç çuval elma sattığını bulalım.

Çözüm



Şimdi dikkat edin, elmaları çuval çuval alıp, kilo ile satıyoruz.

1 çuval yani 15 kg elma 5 TL'den alınırsa,

1kilosu $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ TL'den alınır.

3 kilosu 5 TL'den satılırsa, 1kilosu $\frac{5}{3}$ TL'den satılır.



Alış, satış fiyatı belli şimdi kârımızı bulalım,

Satış Fiyatı – Alış Fiyatı = Kâr

1 kilo elmadan $\frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ TL kâr elde edilir.

1 kilo elmadan	$\frac{4}{3}$ TL kâr
x kilo elmadan	80 TL kâr

Doğru orantı olduğundan, köşeli çarpalım.

$$1 \cdot 80 = x \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow x = 60 \text{ kilodur.}$$

60 kilo elmada $\frac{60}{15} = 4$ çuval eder.

Örnek

Kırtasiyeciden 1 silgi, 3 kalem, 6 defter alan bir kimse toplam 74 TL ödemiştir.

Bir kalemin fiyatı bir silginin fiyatının 7 katı, bir defterin fiyatı da bir kalemin fiyatının 3 katı olduğuna göre, bir silginin fiyatını bulalım.

Çözüm

Silgi; s, kalem; k, defter; d olsun. Verilenlere göre,

$$k = 7s, \quad d = 3k = 3 \cdot 7s = 21s \quad \text{ve}$$

$$s + 3k + 6d = 74$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 7s & 21s \end{array}$$

$$\Rightarrow s + 21s + 126s = 74 \Rightarrow 148s = 74 \Rightarrow s = 0,5 \text{ TL bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. 4 tanesi 120 TL'den satılan çoraptan x deste, 6 tanesi 300 den satılan eldivenden y deste alan bir toptancı toplam 4200 TL ödemiştir.

Toptancı eldivenlerin tanesini $10 \cdot x$ liradan, çorapların tanesini $10 \cdot y$ liradan satarak 1200 TL kâr ettiğine göre, $x + y$ toplamı kaçtır?

(12)

İPUCU

Önce bir eldiven ve bir çorabın fiyatını bulun. Bir destede 10 tane olduğunu da hatırlatayım

2. Bir manav tezgâhtaki elmaların kilosunu 35 TL'den satarsa 2800 TL zarar, 45 TL'den satarsa 2000 TL kâr ediyor.

Buna göre, pazarcının kaç kilo elması vardır?

(480)

İPUCU

Satış fiyatı; maliyet artı kâr veya maliyet eksi zarardır.

Nasıl Çözülür?



Malların çürümesi veya kırılmasına ticarete dikkat edilmezse esnafı batırır. Hediye almak ise her zaman iyidir.

Örnek

Kilosu 2 TL olan yaş üzüm kurutulunca, kuru üzümün kilosu 5 TL ye gelmiştir.

Buna göre, 70 kg yaş üzüm alan bir tüccarın üzümü kuruttuktan sonra kuru üzümün kilosunu 8 TL'ye satarsa kaç TL kâr edeceğini bulalım.

Çözüm



Kilosu 2 TL'den 70 kg üzüme $70 \cdot 2 = 140$ TL ödedik. Biz ne yaptık üzümü kuruttuk. Kurutunca üzüm ne oldu, tabii ki hafifledi. Kaç kiloya düştü nasıl buluruz?

Hocam kuru üzümün kilosu 5 TL'ye mal olmuş. O halde toplam maliyeti yani 140 TL'yi 5 TL'ye bölersek kaç kilo kuru üzümümüz var buluruz.



Aferin, koçum senden esnaf olur.

$$K = 140 : 5 = 28 \text{ kg bulunur.}$$



Elde ne kadar kuru üzüm var bulduk. Kilosunu 8 TL'den satarsak elimize ne kadar para geçer.

$$28 \cdot 8 = 224 \text{ TL gelirimiz oldu.}$$

$$\text{Gelir} - \text{Giderden kârı hesaplayalım; } 224 - 140 = 84 \text{ TL kâr edilir.}$$

Örnek

Bir toptancı 200 TL vererek 30 yumurta aldığı bakkala 6 yumurta hediye ediyor.

Buna göre, bakkalın aldığı 1 yumurtanın maliyetinin ne kadar azaldığını bulalım.

Çözüm

Bakkal 30 yumurtayı 200 TL'ye alırsa tanesini $\frac{200}{30}$ TL'ye alır.

30 yumurtaya 6 yumurta hediye alınca, bakkal aslında 200 TL'ye 36 tane yumurta almış olur.

Bu durumda da 1 tane yumurta $\frac{200}{36}$ TL'ye alınmış olur.

Bir yumurtanın maliyeti ne kadar azalmış olur.

$$\frac{200}{30} - \frac{200}{36} = \frac{200}{180} = \frac{10}{9} \text{ TL azalmış olur.}$$

Nasıl Uygularım?



- 12 tane yaş incir 1 kg gelmektedir. İncirler kurutulunca 18 tane kuru incir 1 kg gelmektedir.

Yaş incirin kilogramı 125 TL'den alınıp, kuru incirin kilogramı 240 TL'den satıldığına göre, 1 kg kuru incirin satışından kaç TL kâr edilir? (Kurutma masrafı yoktur.)

(52,5)

İPUÇU

3 kilo yaş incirden 2 kilo kuru incir elde edilir ben söyledim, hesabı siz yapın.

2. Bir bardak çayın 10 TL, bir tostun 80 TL olduğu bir çay bahçesinde bir tost alana 1 bardak çay bedavadır.

Buna göre, 12 tost yiyen bir grup, toplam 25 bardak çay içtiğine göre, en az kaç TL hesap öder?

(1090)

İPUÇU

Çayların 12 si beleş değil mi?

Nasıl Çözülür?



Bir toplulukta kaç erkek, kaç kadın var. Kim kiminle muhabbet ediyor. Yani biraz dedikodu hesabı yapalım.

Örnek

Bir gruptaki her bayanın, bayan arkadaşlarının sayısı erkek arkadaşlarının sayısının 2 katından 1 fazladır. Her erkeğin de bayan arkadaşlarının sayısı, erkek arkadaşlarının sayısının 5 eksiğinin 3 katıdır.

Buna göre, grupta kaç kişi olduğunu bulalım.

Çözüm

Bayan sayısı = b , Erkek sayısı = e olsun.



Bu sorudaki can alıcı noktayı söylüyorum. Topluluktaki bayan sayısı b ise her bayanın bayan arkadaşlarının sayısı $b - 1$ dir. Her erkeğin erkek arkadaşlarının sayısı da $e - 1$ dir. Tamam mı? Burdan sonrası hesap kitap işi.



Önce bir bayana göre denkleminizi kuralım. Bu kısmı yukardan bir daha okuyun.

$$b - 1 = 2 \cdot e + 1 \quad \text{..... (I)}$$



Şimdi erkeğe göre yazalım.

$$b = 3 \cdot (e - 1 - 5) = 3 \cdot (e - 6) \quad \text{..... (II)}$$

II. denklemdaki b nin e türünden değerini I. denklemden yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} b - 1 &= 2 \cdot e + 1 \Rightarrow 3 \cdot (e - 6) - 1 = 2 \cdot e + 1 \\ &\Rightarrow 3e - 18 - 1 = 2e + 1 \Rightarrow e = 20 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Buna göre,

$$b = 3 \cdot (e - 6) = 3 \cdot (20 - 6) \Rightarrow b = 42 \text{ bulunur.}$$

Buna göre, grupta; $e + b = 20 + 42 = 62$ kişi vardır.

Örnek

Erkek yolcu sayısının, bayan yolcu sayısının 3 katından 10 fazla olduğu bir otobüse uğradığı ilk durakta 12 erkek 5 bayan yolcu binerken, 4 erkek 6 bayan yolcu otobüsten inmiştir.

Son durumda otobüsteki erkek yolcu sayısı, bayan yolcu sayısının 4 katı olduğuna göre, başlangıçta otobüste kaç bayan yolcu olduğunu bulalım.

Çözüm

	Erkek yolcular	Bayan yolcular
Başlangıç:	$3 \cdot b + 10$	b
Son durum:	$3 \cdot b + 10 + 12 - 4$	$b + 5 - 6$

Yukarıdaki tabloyu anladınız değil mi? Otobüsten inenleri kırmızı, binenleri mavi ile gösterdim

$$3 \cdot b + 18 = 4 \cdot (b - 1)$$

$$\Rightarrow 3b + 18 = 4b - 4$$

$$\Rightarrow b = 22 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?

1. Bir dershanedeki Ahmet Öğretmenin erkek öğretmen arkadaşlarının sayısı, bayan öğretmen arkadaşlarının sayısının 2 katıdır. Hülya Öğretmenin bayan öğretmen arkadaşlarının sayısı, erkek öğretmen arkadaşlarının sayısından 8 eksiktir.

Bu dershanedeki toplam öğretmen sayısı kaçtır?

(19)

2. Bir futbol takımındaki yabancı oyuncu sayısı, yerli oyuncu sayısının 2 katından 1 fazladır. Bu takıma 5 yabancı 4 yerli oyuncu gelir, takımdan 8 yabancı 5 yerli oyuncu ayrılırsa takımda toplam 27 oyuncu oluyor.

Bu takımda başlangıçta kaç yerli oyuncu vardır?

(10)

Nasıl Çözülür?

*Gruba gelen, giden, kalan hesabı.*

Örnek

Bir sınıftaki kız ve erkek öğrencilerin sayıları toplamı 36'dır. Sınıftan 10 kız öğrenci ayrılıp, 8 erkek öğrenci gelince erkek öğrencilerin sayısı, kız öğrencilerin sayısına eşit oluyor.

Buna göre, başlangıçta sınıftaki erkek öğrenci sayısını bulalım.

Çözüm

*Verilenlere göre denklemleri kuralım.*

$$k + e = 36$$

$$k - 10 = e + 8 \Rightarrow k - e = 18$$

$$k + e = 36$$

$$- / k - e = 18$$

$$2e = 36 - 18 \Rightarrow e = 9 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



- 36 yolcusu bulunan bir otobüse 6 bayan yolcu binip, otobüsten 4 erkek yolcu inerse otobüsteki bayanların sayısı ile erkeklerin sayısı eşitleniyor.

Başlangıçta otobüste kaç erkek yolcu olduğunu bulalım.

(23)

- Bir salonda matematik ve fizik öğretmenleri bulunmaktadır. Salondaki matematik öğretmenleri sayısı, fizik öğretmenleri sayısının 3 katıdır. Salondan 2 matematik ve 4 fizik öğretmeni ayrıldığında matematik öğretmenleri sayısı, fizik öğretmenleri sayısının 5 katı olmaktadır.

Buna göre, ilk durumda salondaki öğretmen sayısını bulalım.

(36)

Nasıl Çözülür?

*Yer, mekan aynı yerleştirme farklı*

Örnek

Bir öğrenci elindeki parasıyla 10 tane silgi ile 5 tane kalem veya 20 tane silgi alabilmektedir.

Buna göre, öğrencinin bu parayla kaç tane kalem alabileceğini bulalım.

Çözüm

Silgi : S TL, Kalem : 4 TL olsun.

$$10S + 5K = 20S \Rightarrow 5K = 10S$$

$$\Rightarrow K = 2S \Rightarrow S = \frac{K}{2} \text{ dir.}$$

*1 silginin parası 1 kalemin parasının yarısı kadardır. Öğrenci 20 silgi alabilecek parayla*

$$20S = 20 \cdot \frac{K}{2} = 10K \Rightarrow 10 \text{ kalem alır.}$$

Nasıl Uygularım?



- Bir kamyonete, 11 kasa ile 18 koli veya 8 kasa ile 22 koli yerleştirebiliyor.

Buna göre, 6 kasanın yerine kaç koli yerleşebileceğini bulalım.

(8)

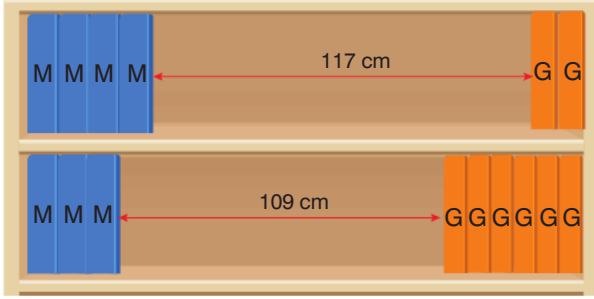
- Bir depo 8 buzdolabı ile 10 televizyon veya 4 buzdolabı ile 30 televizyon almaktadır.

Buna göre, bu depoya en çok kaç tane televizyon konulabileceğini bulalım.

(50)

Sayı Problemleri

1.



Yukarıdaki şekilde verilen kitaplığın raflarına dizilen matematik kitapları kendi aralarında, geometri kitapları kendi aralarında özdeşdir. Kitaplığın iki rafına kitaplar şekildeki gibi dizilmiştir.

Bu raflardan her birinin uzunluğu 130 cm olduğuna göre, bir matematik kitabının kalınlığı kaç cm'dir?

- A) 1,5 B) 1,8 C) 2 D) 2,2 E) 2,5

2.

Bir toplantıdaki kişilere ikram yapılmak isteniliyor. Bu gruptaki 24 kişinin her birine birer içecek, tost ve dondurma düşecek kadar malzeme toplantıya getiriliyor. Ancak, toplantıya katılacak kişilerin bir kısmı toplantıya gelmediğinden, orada bulunan her bir kişiye 2 tost, 3 içecek ve 1 dondurma veriliyor.

İkram sonunda bu malzemelerden toplam 36 adet arttığına göre, artan tost sayısı kaçtır?

- A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

3.

30 kg'lık bir teneke peyniri 1500 liraya alan bir bakkal bunu net ağırlığı 500 gr olan paketler halinde satacaktır. Her paket için 2,5 lira paketleme masrafı olmaktadır.

Bu bakkal, 30 kg peynirin satışından 450 lira kâr elde etmek istediğine göre, bir paket peyniri kaç liradan satmalıdır?

- A) 30 B) 35 C) 38 D) 40 E) 45

İPUCU

$Kâr = Satış Fiyatı - Alış Fiyatı - Masraflar$

4.

Bir manav 8, 9, 11, 15, 21 ve 32 kiloluk altı kasanın dört tanesini domates ve iki tanesini biber ile doldurmuştur. Kasalar-daki domates miktarı biber miktarının 3 katıdır.

Buna göre, manav kaç kiloluk kasalara biber koymuştur?

- A) 8 ve 9 B) 9 ve 11 C) 9 ve 15
D) 8 ve 15 E) 8 ve 115

İPUCU

Kasa ağırlıklarının toplamını 4'e bölersek biber miktarını buluruz.

5.

Doğal taşlardan tesbih üreten bir kişi aşağıdaki görselde gösterilen 33 doğal taşlı bir tesbihler üretmektedir.



Tesbih sadece kırmızı ve siyah olmak üzere iki tip doğal taş kullanılarak üretilmiştir.

Bir paket tesbihin üretiminde kullanılan siyah taş sayısı, kırmızı taş sayısının 3 katından 30 eksik olduğuna göre, bir paketde kaç tane tesbih vardır?

- A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

6.

Bir taksimetre, ilk 5 km'de her 1 km için sabit bir ücret, 5 km'den sonraki her 1 km için ise öncekinden farklı ve yine sabit bir ücret yazmaktadır.

Buna göre, 14 km yol alındığında 33 TL, 22 km yol alındığında ise 49 TL yazan taksimetre 7 km yol alındığında kaç TL yazar?

- A) 11 B) 13 C) 16 D) 19 E) 23

Sayı Problemleri

7. Bir aş evinde ihtiyaç sahiplerine çorba dağıtılacaktır. Bir tencere çorbanın tamamı, özdeş boş kaselere veya özdeş boş bardaklara tamamen doldurularak dağıtılmaktadır. Bir tencere çorba, 120 kâse ve 150 bardağı ya da 75 kâse ve 200 bardağı tamamen doldurmaktadır.



Buna göre, bir tencere çorba kaç kâseyi tamamen doldurur?

- A) 250 B) 255 C) 260 D) 275 E) 280

8. Bir iş yerinde aynı gün işe başlayan Gamze ve Seda'nın maaşlarıyla ilgili olarak aşağıdakiler bilinmektedir.

- Gamze'nin ilk maaşı 19000 TL, Seda'nın ilk maaşı 16000 TL'dir.
- Gamze'nin maaşı her 6 ayda bir 1500 TL artıyor.
- Seda'nın maaşı her 4 ayda bir A TL artıyor.

Bu kişilerin ilk maaşlarını aldıktan 4 yıl sonra maaşları eşit olduğuna göre, A kaçtır?

- A) 1250 B) 1300 C) 1500 D) 1750 E) 1800

9. Ayça Hanım, pazartesi günü 600 dolar, salı günü 450 dolar bozdurmuştur. Eğer pazartesi günü 450 dolar, salı günü 600 dolar bozdursaydı ilk duruma göre eline 300 TL az para geçecekti.

Buna göre, bir doların salı günkü fiyatı pazartesi gününküne göre kaç TL düşmüştür?

- A) 1,5 B) 2 C) 2,5 D) 3 E) 3,5

İPUÇU

Doların pazartesi günkü fiyatı p, salı günkü fiyat s olsun. İki bilinmeyenli iki denklem yazınca aradaki fark 300 olacak.

10. Sami Usta limonata yapmak için malzeme olarak

- 6 tane limon ya da 2 bardak limon suyu
- 10 bardak su
- 2 bardak şeker

kullanmaktadır.

18 limon, 4 bardak limon suyu, 14 bardak şekeri ve sürekli çeşmeden akan suyu olan Sami Usta, elindeki malzemelerin yettiği kadar bu tarife göre limonata yapmıştır.

Buna göre, son durumda Sami Usta'nın elinde kalan şeker miktarı kaç bardaktır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

İPUÇU

Önce limonlarla ne kadar limonata yapılacağını bulun sonra kalan şeker ve limon suyu ile limonata hesabı yapın, su beleş.

11. Bir öğrenci günlük çözdüğü soru sayılarını kayıt altına alıyor. Öğrenci çözdüğü soruları kayıt yaparken o günle birlikte o günden önce çözülen toplam soru sayısını yazıyor. Öğrencinin beş günlük tuttuğu kayıtlar aşağıda verilmiştir.

Pazartesi ve öncesi	: 250
Salı ve öncesi	: x
Çarşamba ve öncesi	: 600
Perşembe ve öncesi	: 800
Cuma ve öncesi	: y

Öğrencinin cuma ve öncesinde çözdüğü soru sayısı, salı ve öncesinde çözdüğünün 3 katıdır. Ayrıca cuma günü çözdüğü soru sayısı, salı günü çözdüğü soru sayısından 270 fazladır.

Buna göre, öğrencinin çarşamba günü çözdüğü soru sayısı kaçtır?

- A) 160 B) 170 C) 190 D) 200 E) 210

İPUÇU

Tabloya iyi bakın denklemleri doğru kurdunuz mu gerisi kolay.

BÖLÜM 15

ÖĞRENELİM

KESİR PROBLEMLERİ Kesir Problemleri

Nasıl Çözülür?



Kesirlerle işlemlerin nasıl yapılacağını bakalım.

Örnek

$\frac{3}{4}$ ü ile $\frac{2}{5}$ inin farkı 21 olan sayıyı bulalım.

Çözüm



Sayı x olsun. Bir sayının $\frac{3}{4}$ ünü bulmak için sayıyı, o kesirle çarpmanız gerekir.

Buna göre,

x in; $\frac{3}{4}$ ü, $\frac{3}{4} \cdot x$ ve $\frac{2}{5}$ i, $\frac{2}{5} \cdot x$ tir.

$$\frac{3}{4} \cdot x - \frac{2}{5} \cdot x = 21$$

(5) (4)

$$\Rightarrow \frac{15x - 8x}{20} = 21 \Rightarrow 7x = 420 \Rightarrow x = 60 \text{ bulunur.}$$

Örnek

Değeri $\frac{3}{5}$ olan bir kesrin paydasına 3 eklenir payından 2 çıkarılırsa değeri $\frac{1}{2}$ oluyor.

Bu kesri bulalım.

Çözüm

Kesri, değeri $\frac{3}{5}$ olduğu için $\frac{3x}{5x}$ alalım.

Verilenlere göre,

$$\frac{3x - 2}{5x + 3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 6x - 4 = 5x + 3 \Rightarrow x = 7 \text{ dir.}$$

Buna göre, kesir;

$$\frac{3x}{5x} = \frac{21}{35} \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Bir sayının $\frac{1}{6}$ sı ile aynı sayının $\frac{2}{5}$ inin toplamı 17 ise bu sayı kaçtır?

(30)

2. $\frac{3}{4}$ ünün 7 eksiği, $\frac{1}{3}$ ünün 3 fazlasına eşit olan sayı kaçtır?

(24)

3. Üç sayının toplamı 282'dir. Birinci sayı ikinci sayının $\frac{1}{4}$ üne, ikinci sayı üçüncü sayının $\frac{3}{8}$ ine eşittir.

Buna göre, en büyük sayı kaçtır?

(192)

İPUÇU

Üçüncü sayıya x diyerek işe başlamak kolaylık sağlar. Ayrıca, x sayısının; a katının, b katı $b.a.x$ dir.

Nasıl Çözülür?

*Genel kesir sorularına bir bakalım*

Örnek

Ali arsasının $\frac{1}{4}$ ünü yan komşusuna satınca komşusunun arsası Ali'nin arsasının 3 katı oluyor.

Buna göre, Ali arsasını satmadan önce komşusunun arsasının Ali'nin arsasının kaç katı olduğunu bulalım.

Çözüm

*Ali'nin arsası $4x$, komşusunun arsası k olsun.**Ali arsanın $\frac{1}{4}$ ünü komşusuna verirse komşusunun $k + x$, Ali'nin $3x$ arsası olur.*

Verilere göre,

$$k + x = 3 \cdot 3x$$

$$\Rightarrow k = 8x \text{ tir.}$$

Satıştan önce Ali'nin arsası ($4x$) komşusunun arsası ($8x$) olduğundan oran $\frac{8x}{4x} = 2$ dir.

Örnek

40 yolcusu bulunan bir otobüsten 4 erkek yolcu inince bayanların sayısı erkeklerin $\frac{1}{3}$ ü oluyor.

İlk durumda otobüste kaç bayan yolcu olduğunu bulalım.

Çözüm

$$e + b = 40 \Rightarrow e = 40 - b \text{ dir.}$$

$$(e - 4) \cdot \frac{1}{3} = b \Rightarrow (40 - b - 4) = 3b$$

↑

4 erkek
yolcu indi

$$\Rightarrow 36 - b = 3b$$

$$\Rightarrow 4b = 36$$

$$\Rightarrow b = 9 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Bir otobüste bulunan yolcuların $\frac{1}{4}$ ü bayandır. Bu otobüse 5 erkek yolcu binip 5 bayan yolcu otobüsten inerse, bayan yolcu sayısı erkek yolcu sayısının $\frac{1}{4}$ ü oluyor.

Başlangıçta otobüste kaç bayan yolcu vardır?

(25)

2. Burak parasının $\frac{1}{4}$ ünü, Ahmet ise parasının $\frac{1}{5}$ ini hiç parası olmayan Ayten'e verince Ayten'in 130 lirası oluyor.

Başlangıçta Burak'ın parası, Ahmet'in parasının yarısı olduğuna göre, Burak Ayten'e kaç lira vermiştir?

(50)

3. Çiğdem parasının üçte birini Jale'ye vermiştir. Daha sonra Jale de elindeki toplam paranın üçte birini harcamıştır.

Jale'nin başlangıçta 120 TL si, son durumda da 140 TL si olduğuna göre, Çiğdem'in başlangıçta kaç TL si vardır?

(270)

Kesir Problemleri

Nasıl Çözülür?



Bir bütün birden fazla kesirli parçalara ayrılırsa, bu bütünün tamamını kesirlerin paydalarının EKOK'una eşit olacak şekilde seçebiliriz.

Örnek

Bir işçi bir duvarın $\frac{3}{4}$ ünü günde 30 m² örerek, geri kalan $\frac{1}{4}$ ünü de günde 24 m² örerek 17 günde bitiriyor.

Bu işçinin ördüğü duvarın tamamının kaç m² olduğunu bulalım.

Çözüm



Kesirlerin paydaları eşit, o halde iş kolay duvarın tamamını 4x alalım.

$\frac{3}{4}$ ü 3x, $\frac{1}{4}$ ü de x olur.

Günde 30 m² duvar örerse 3x m² duvarı, $\frac{3x}{30}$ günde örer.

Günde 24 m² duvar örerse x m² duvarı, $\frac{x}{24}$ günde örer.

O halde, işin tamamı 17 gün sürdüğüne göre, bu ikisinin toplamı 17 olmalı.

$$\frac{3x}{30} + \frac{x}{24} = 17 \Rightarrow \frac{17 \cdot x}{120} = 17 \Rightarrow x = 120 \text{ m}^2 \text{ bulunur.}$$

Buna göre, işin tamamı, $4x = 4 \cdot 120 = 480 \text{ m}^2$ bulunur.

Örnek

Üç sayıdan birincisi, ikincisinin $\frac{1}{4}$ üne, ikincisi ise üçüncü sayının $\frac{1}{6}$ sına eşittir.

Üçüncü sayı birinci sayıdan 46 fazla olduğuna göre, üçüncü sayıyı bulalım.

Çözüm



Sayılar hep ikinci sayıya göre orantılı verildiğinden, hesaplarımıza göre ikinci sayıya 4x diğelim.

1. sayı	2. sayı	3. sayı
x	4x	24x

$$24x - x = 46 \Rightarrow 23x = 46 \Rightarrow x = 2 \text{ bulunur.}$$

O halde,

3. sayı: $24x = 24 \cdot 2 = 48$ bulunur.

Örnek

Bir öğretmen maaşının $\frac{4}{9}$ unu ev kirasına, $\frac{1}{6}$ sını fatura ödemele-rine, $\frac{1}{12}$ sini de eğitim giderlerine ayırıyor.

Bu öğretmenin geriye 11000 TL'si kaldığına göre, tüm maaşın kaç TL olduğunu bulalım.

Çözüm



$(9, 6, 12)_{\text{ekok}} = 36$ olduğu için öğretmenin maaşını $36 \cdot x$ alınca kesirleri hesaplamak çok kolay olur.

Evet hocam böylece kesirli işlemlerden de kurtulmuş oluruz, o işlemler çok vakit alıyor.

Buna göre, öğretmen maaşının;

$$36x \cdot \frac{4}{9} \rightarrow 16x \text{ ini ev kirasına,}$$

$$36x \cdot \frac{1}{6} \rightarrow 6x \text{ ini fatura giderlerine,}$$

$$36x \cdot \frac{1}{12} \rightarrow 3x \text{ ini eğitim giderlerine ayırmıştır.}$$

Bundan sonra öğretmenin geriye 11000 TL'si kaldığına göre;

$$36x - (16x + 6x + 3x) = 11000$$

$$\Rightarrow 11x = 11000 \Rightarrow x = 1000 \text{ TL'dir.}$$

O halde, öğretmenin maaşı;

$$36 \cdot x = 36 \cdot 1000 = 36000 \text{ TL bulunur.}$$

Örnek

Bir kafedeki tüm müşterilerin $\frac{1}{6}$ sı kahve, $\frac{1}{5}$ i çay, $\frac{1}{3}$ ü de soğuk meşrubat içmektedir.

Bu kafede 18 müşteri herhangi bir içecek içmediğine göre, kafedeki kahve içen müşteri sayısını bulalım.

Çözüm



$(6, 5, 3)_{\text{ekok}} = 30$ olduğu için kafedeki müşteri sayısını $30 \cdot x$ alalım.

Buna göre, kafedeki

$$30 \cdot x \cdot \frac{1}{6} \rightarrow 5x \text{ müşteri kahve,}$$

$$30 \cdot x \cdot \frac{1}{5} \rightarrow 6x \text{ müşteri çay,}$$

$$30 \cdot x \cdot \frac{1}{3} \rightarrow 10x \text{ müşteri soğuk meşrubat içmiştir.}$$

Nasıl Çözülür?



Geriye kalan, yani herhangi bir içecek içmeyen müşteri sayısı 18 olduğundan;

$$30x - (5x + 6x + 10x) = 18$$

$$\Rightarrow 9x = 18 \Rightarrow x = 2 \text{ dir.}$$

O halde, kafedeki kahve içen müşteri sayısı,

$$5 \cdot x = 5 \cdot 2 = 10 \text{ bulunur.}$$

Örnek

Kadem proje ödevi için öğretmenin verdiği soruların ilk gün $\frac{1}{12}$ sini, ikinci gün kalanın $\frac{3}{8}$ ini, üçüncü gün kalanın $\frac{1}{3}$ ünü ve dördüncü günde 110 soru çözerek ödevini bitiriyor.

Kadem'in ödevinde kaç soru olduğunu bulalım.

Çözüm

Hocam, soru sayısını $(3, 8, 12)_{\text{ekok}} = 24$ olduğu için $24 \cdot x$ aldım ama olmadı küsürlü sayılar çıktı.



Bütüne göre değil de kalana göre verilen kesirlerde bu tip arızalar olur. Bunun da kolayı var. Soru sayısını EKOK'un katlarından biri alınabilir. Ya da, en kolayı paydaların çarpımı alabiliriz.

Buna göre, $12 \cdot 8 \cdot 3 = 288$ olduğundan soru sayısı $288 \cdot x$ olsun.

Kadem;

soruların, $288x \cdot \frac{1}{12} \rightarrow 24x$ ini ilk gün çözünce geriye,

$$288x - 24x = 264x \text{ soru kalır,}$$

$264x \cdot \frac{3}{8} \rightarrow 99x$ ini ikinci gün çözünce geriye,

$$264x - 99x = 165x \text{ soru kalır.}$$

$165x \cdot \frac{1}{3} \rightarrow 55x$ ini üçüncü gün çözünce geriye,

$$165x - 55x = 110x \text{ soru kalır.}$$

Geriye 110x soru kaldı. Dördüncü gün 110 tane soru çözdüğüne göre,

$$110x = 110 \Rightarrow x = 1 \text{ dir.}$$

O halde, ödevdeki soru sayısı; $288 \cdot x = 288 \cdot 1 = 288$ bulunur.

Nasıl Uygularım?



1. Bir memurun aylık maaşının $\frac{1}{4}$ ünü ev kirasına, $\frac{1}{3}$ ünü mutfak masrafına, $\frac{1}{8}$ ini eğitim masrafına harcıyor.

Geriye 10500 TL kaldığına göre, bu memurun aylık maaşı kaç TL dir?

(36000)

2. Bir deponun $\frac{1}{5}$ i su ile doludur. Depoya 110 lt su ilave edilince deponun $\frac{3}{4}$ ü dolmuş oluyor.

Buna göre, deponun tamamı su ile dolu iken kaç litre su alır?

(200)

İPUÇU

Deponun hacmi 20x litre olsun.

Kesir Problemleri

Nasıl Uygularım?



3. Bir manifaturacı bir top kumaşın, önce $\frac{1}{4}$ ünü metresi 30 TL'den, sonra kalanının $\frac{1}{3}$ ünü metresi 20 TL'den, daha sonra kalanın tamamını metresi 15 TL'den satıyor.

Bir top kumaşın satışından manifaturacının eline 1800 TL geçtiğine göre, bir top kumaş kaç metredir?

(90)

İPUCU

Kumaşın uzunluğunu 12x alırsa gerisi gelir.

4. Bir otomobil bir yolun önce $\frac{1}{5}$ ini, daha sonra kalan yolun $\frac{1}{7}$ sini gidiyor. Eğer 130 km daha giderse toplam yolun yarısını gitmiş olacaktır.

Buna göre, yolun tamamı kaç km'dir?

(700)

İPUCU

Yolun uzunluğunu 35x değilse 70x alsanız daha iyi olur.

Nasıl Çözülür?



Her dolu şişenin bir de kendi ağırlığı yani darasının olduğuna unutmayın.

Örnek

Su dolu bir şişenin ağırlığı a gramdır. Suyun $\frac{1}{5}$ i içilince şişenin ağırlığı b gr oluyor.

Buna göre, boş şişenin ağırlığını bulalım.

Çözüm

Boş şişenin ağırlığı = x, İçindeki suyun ağırlığı = 5y olsun.



Şişeyi tarttık a gram geldi, bu ağırlık, boş şişenin ve içerisindeki suyun toplam ağırlığıdır.

$$x + 5y = a \dots\dots\dots (I)$$



Suyun $\frac{1}{5}$ ini içince 5y suyun y si gitti, geriye 4y su kaldı. Şimdi tartınca ağırlık b gram geldi.

$$x + 4y = b \dots\dots\dots (II)$$



İki denklem elde ettik. Hocam, bizden şişenin ağırlığı yani x i isteniyor gerisini biz yapalım.

$$-4 / \quad x + 5y = a$$

$$+ \quad 5 / \quad x + 4y = b$$

$$x = 5b - 4a \text{ gram bulunur.}$$

Örnek

Bir kamyon; içindeki yük ile birlikte 18 ton gelmektedir. Kamyona içerisindeki yükün $\frac{4}{3}$ katı kadar daha yük konulduğunda ağırlığı 30 ton olmaktadır.

Buna göre, boş kamyonun ağırlığını bulalım.

Çözüm

Boş kamyonun ağırlığı = k, Yükün ağırlığı = 3y olsun.



İlk durumun denklemini yazalım.

$$k + 3y = 18 \dots\dots\dots (I)$$



3y nin $\frac{4}{3}$ ü 4y olduğundan, 4y daha yük koyalım.

$$k + 3y + 4y = k + 7y = 30 \dots\dots\dots (II)$$

Nasıl Çözülür?



Yine iki denklem var yürüyelim kim tutar bizi.

$$\begin{array}{r} 7 / k + 3y = 18 \\ + -3 / k + 7y = 30 \\ \hline 4k = 126 - 90 \\ \Rightarrow 4k = 36 \Rightarrow k = 9 \text{ ton bulunur.} \end{array}$$

Nasıl Uygularım?



1. Bir su deposu $\frac{2}{7}$ si doluyken 13 ton, $\frac{1}{3}$ ü boşken 29 ton gelmektedir.

Buna göre, depo tamamen dolu iken kaç ton gelir?

(43)

İPUCU

Deponun ağırlığı d, kapasitesi $3.7.x = 21x$ olsun.

2. Tamamı hafriyat dolu bir kamyonun ağırlığı 20 tondur. Kamyon içindeki hafriyatın $\frac{3}{8}$ ini boşalttığında ağırlığı 14 ton olmaktadır.

Boş kamyonun ağırlığı kaç tondur?

(4)

İPUCU

Kamyonun boş ağırlığı k, içerisindeki hafriyatın ağırlığı 8h olsun. Sonrası iki bilinmeyenli denklem

Nasıl Çözülür?



Belli bir oranda çürüme sorularında formül yok işin mantığı var. Biraz dikkatle bu iş hal olur.

Örnek

Bir manav elmaların $\frac{2}{9}$ u çürüyerek fire vermiştir.

Buna göre, maliyetin hangi oranda arttığını bulalım.

Çözüm



En güzeli yine kesirlerle uğraşmak yerine değer vermek. Kilosu 1 TL'den 9 kilo elmayı $1 \cdot 9 = 9$ TL ödeyerek alsın.



Elmaların 2 kilosu ($\frac{2}{9}$ u) çürüdüğüne göre, geriye 7 kilo elma kaldı. Bu ne demektir, manav 9 TL ye 9 kilo değil 7 kilo elma almış olur.

Buna göre,

$$9 \cdot 1 = x \cdot 7 \Rightarrow x = \frac{9}{7} \text{ dir.}$$

O halde, 1 TL'ye alınan elmanın kilosu $\frac{9}{7}$ ye çıktığına göre maliyet,

$$\frac{9}{7} - 1 = \frac{2}{7} \text{ oranın da artmıştır.}$$

Örnek

Bir bakkal aldığı bardakların $\frac{3}{8}$ ini taşıma esnasında kırıyor.

Bakkal kalan bardakların tanesini alış fiyatının $\frac{1}{3}$ ü kadar fazlasına satarsa, bu bakkalın zararı maliyetinin kaçta kaç olduğunu bulalım.

Çözüm



Bakkal, tanesi 3 liradan 8 tane bardak alırsa, bardakların maliyeti, $3 \cdot 8 = 24$ lira olur.



Bakkal, bardakların $\frac{3}{8}$ i (3 tanesi) kırılınca, geriye kalan 5 bardağı alış fiyatının $\frac{1}{3}$ ü kadar fazlasına satarsa satış fiyatı ne olur bulalım bakalım.

Bir bardağın satış fiyatı: $3 + 1 = 4$ lira olur.

Toplam gelir: $5 \cdot (3 + 1) = 20$ lira olur.

Dolayısıyla zararı: $24 - 20 = 4$ lira olur.

Buna göre, Bakkalın zararı maliyetin, $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ sı olur.

Kesir Problemleri

Nasıl Uygularım?



1. Bir bakkalın aldığı bardakların $\frac{1}{8}$ i taşıma sırasında kırılmıştır.
Buna göre, maliyet hangi oranda artar?

 $\left(\frac{1}{7}\right)$

2. Bir manavın aldığı domatesin $\frac{1}{5}$ i çürük çıkmıştır.
Buna göre, maliyet kaç katına çıkar?

 $\left(\frac{5}{4}\right)$

3. Bir tüccarın aldığı sebzelerin üçte biri taşıma esnasında, on beşte biri de dükkanında satışa çıkartmadan çürüdüğü için atılmıştır.
Bu durumda bu sebzelerin maliyeti hangi oranda artmıştır?

 $\left(\frac{2}{3}\right)$

Nasıl Çözülür?



Bir telin bir ucundan bir parça tel kesilirse telin orta noktası kesilen parçanın yarısı kadar kayar. En iyisi ezberi bırakın mantığını öğrenin.

Örnek

Bir çubuğun bir ucundan $\frac{1}{5}$ i kesilirse çubuğun orta noktası 3 cm kayıyor.

Buna göre, çubuğun boyunu bulalım.

Çözüm

Çubuğun boyu $10x$ olsun.



Kuralı uygulamak için ideal soru,

Çubuğun ucundan $\frac{1}{5}$ i yani, $10x \cdot \frac{1}{5} = 2x$ i kesilirse,

Orta nokta, $\frac{2x}{2} = x$ cm kayar.



Soruda bu işlem sonunda çubuğun orta noktası 3 cm kaydığına göre,

Çubuğun boyu; $x = 3 \Rightarrow 10 \cdot x = 30$ cm bulunur.

Örnek

Bir parça lastik bir ucundan çekilerek boyunun $\frac{1}{8}$ 'i kadar uzatılıyor, lastiğin orta noktası eski durumundan 4 cm kaydığına göre, lastiğin çekilmeden önceki uzunluğunu bulalım.

Çözüm

Lastiğin boyu $16x$ olsun. Orta nokta $8x$ olur.



İşin mantığına bakalım,

Bir uçtan, $16x \cdot \frac{1}{8} = 2x$ uzattık.

O halde, lastiğin boyu $16x + 2x = 18x$ olur.

Lastiğin orta noktası da $\frac{18x}{2} = 9 \cdot x$ olur.

Telin orta noktası 4 cm kaydığına göre,

$9 \cdot x - 8 \cdot x = 4 \Rightarrow x = 4$ cm bulunur.

Buna göre, lastiğin başlangıçtaki boyu,

$16 \cdot x = 16 \cdot 4 = 64$ cm bulunur.

Nasıl Uygularım?



1. Bir telin bir ucundan $\frac{1}{6}$ sı kesilirse kalan telin orta noktası ilk duruma göre 7 cm kayıyor.

Buna göre, telin kesilmeden önceki boyu kaç cm'dir?

(84)

2. Bir parça tel bir ucundan çekilerek boyunun $\frac{3}{8}$ i kadar uzatılıyor, telin orta noktası eski durumundan 3 cm kayıyor.

Bu telin uzatılmadan önceki boyu kaç cm'dir?

(16)

3. Bir tel parçasına, boyunun $\frac{5}{6}$ sı kadar ekleme yapılırca orta noktası eskisine göre, 100 cm kayıyor.

Eklenen parçanın uzunluğu kaç cm'dir?

(200)

Nasıl Çözülür?



Boyu x cm olan bir mum a saatte tükeniyorsa, bir saatte $\frac{x}{a}$ kadar yanar. a saat sonra boyu $x - \frac{x}{a}$ olur.

Örnek

Boyları aynı uzunlukta olan iki mumdan biri 4 saatte, diğeri 7 saatte tükenmektedir.

İkisi aynı anda yakıldıktan kaç saat sonra boyları oranının $\frac{1}{4}$ olacağını bulalım.

Çözüm

Mumların boyunu, $4 \cdot 7 = 28$ olduğundan $28 \cdot x$ alalım.



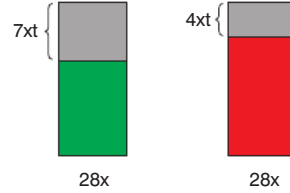
İşe, mumların 1 saatte ne kadarının yanacağını bulalım, 4 saatte $28x$ i yanan mumun 1 saatte $7x$ i, t saatte $7x \cdot t$ si yanar.



7 saatte $28x$ i yanan mumun 1 saatte $4x$ i, t saatte $4x \cdot t$ si yanar.



Ama hesap yanan boylar üzerinden değil kalan boylar üzerinden olacak.



Kalan boyları oranlayalım,

$$\begin{aligned} \frac{28x - 7xt}{28x - 4xt} &= \frac{1}{4} \Rightarrow 4 \cdot (28x - 7xt) = 28x - 4xt \\ &\Rightarrow 112x - 28xt = 28x - 4xt \\ &\Rightarrow 112x - 28x = 28xt - 4xt \\ &\Rightarrow 84x = 24xt \Rightarrow t = \frac{7}{2} \text{ saat bulunur.} \end{aligned}$$

Nasıl Uygularım?



1. A mumunun boyu, B mumunun boyunun 2 katıdır. A mumu 5 saatte, B mumu 8 saatte tükenmektedir.

İkisi aynı anda yakıldıktan kaç saat sonra A mumunun boyu B mumunun boyu ile eşit olur?

$\left(\frac{40}{11}\right)$

Kesir Problemleri

Ne Bilmeliyim? 1

► Bir işin tamamını tek başlarına A, B, C saatte bitirebilen üç işçi birlikte çalışmaya başladıklarından t saat sonra, işin m kadar kısmını bitiriyorlarsa,

$$\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right) \cdot t = m \text{ olur.}$$

Burada, işin tamamı bitiyorsa; $m = 1$,

işin yarısı bitiyorsa; $m = \frac{1}{2}$

işin üçte ikisi bitiyorsa; $m = \frac{2}{3}$ alınır.

Nasıl Çözülür?

Örnek

Naz ile İpek bir işi birlikte 16 günde bitirebiliyorlar. Bu iş te Naz 3 gün, İpek 4 gün çalışırsa işin $\frac{1}{5}$ i bimiş oluyor.

Buna göre, Naz'ın bu işi tek başına kaç günde yapabileceğini bulalım.

Çözüm



Soru ne kadar kanşık olursa olsun önemli olan bir kişinin bir günde yaptığı iş miktarı ve toplam kaç gün çalıştığıdır.

Buna göre, Naz işin tamamını x günde yaparsa bir günde $\frac{1}{x}$ ini; 3 günde $\frac{3}{x}$ ini yapar.

İpek ise işin tamamını y günde yaparsa bir günde $\frac{1}{y}$ sini; 4 günde $\frac{4}{y}$ sini yapar.

Denklemleri kuralım,

$$-4 / \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{5}$$

$$-\frac{4}{x} + \frac{3}{x} = -\frac{4}{16} + \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x} = -\frac{4}{80} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow x = 20 \text{ gün bulunur.}$$

Örnek

Bir işçi belli bir işi 12 günde, başka bir işçi de aynı işi 15 günde bitirebilmektedir.

İki işçinin birlikte bu işi kaç günde bitirebileceğini bulalım.

Çözüm



İşçi problemlerinde önemli iki nokta var. Birincisi her işçinin kaç gün çalıştığı. İkincisi ise işin ne kadarının bittiği. Bu soruda iki işçi işe birlikte başlayıp iş bitene kadar birlikte çalıştıklarına göre, çalışma süreleri eşittir (t). İşin tamamının bitmesi istenildiği içinde formülümüzde $m = 1$ alınacak demektir.

$$\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{15}\right) \cdot t = 1 \Rightarrow \frac{9}{60} \cdot t = 1$$

$$\Rightarrow t = \frac{60}{9} = \frac{20}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek

Enes bir işin $\frac{1}{3}$ ünü 8 günde, Kemal ise aynı işin yarısını 20 günde yapabilmektedir.

İkisinin beraber bu işi kaç günde bitirebileceğini bulalım.

Çözüm



Bir iş yaparken süre ne kadar uzun olursa, iş miktarı da o kadar artar. Yani iş miktarı ile zaman doğru orantılıdır.



Buna göre, Enes ve Kemal'in işin tamamını bitirme sürelerini hesaplayalım.

Enes işin $\frac{1}{3}$ ünü 8 günde yaparsa tamamını

$$3 \cdot 8 = 24 \text{ günde yapar.}$$

Kemal işin yarısını 20 günde yaparsa tamamını $2 \cdot 20 = 40$ günde yapar.

İkisi beraber aynı işi t günde bitirirlerse,

$$\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{40}\right) \cdot t = 1 \Rightarrow \frac{8 \cdot t}{120} = 1$$

$$\Rightarrow t = 15 \text{ gün bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Ayhan bir işi $\frac{x}{6}$ günde, Melih ise aynı işi $\frac{x}{4}$ günde tamamlayabiliyor. Ayhan ve Melih bu işi birlikte 6 günde bitirebiliyorlar.

Ayhan tek başına kaç günde tamamlar?

- A) 10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 20

(A)

2. Akif ile Bahadır bir işi birlikte 15 saatte bitiriyor.

Akif 3 saat, Bahadır 7 saat çalıştığında işin $\frac{2}{5}$ i bittiğine göre, Akif bu işin tamamını tek başına kaç saatte bitirir?

- A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60

(E)

3. Bir işin tamamını, Berk 40 günde, Nimet ise aynı işin $\frac{2}{5}$ ini 8 günde yapabilmektedir.

İkisi birlikte bu işin $\frac{3}{8}$ ini kaç günde yapabilirler?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

(C)

4. Bir işi Ahmet 12 saatte, Meriç 8 saatte bitirebiliyor. Ahmet işe başlayıp 4 saat çalıştıktan sonra Meriç yardıma geliyor. Birlikte 2 saat çalıştıktan sonra, Ahmet işi bırakıyor.

Buna göre, Meriç kalan işi tek başına kaç saatte bitirebilir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(B)

İPUCU

Ahmet ve Meriç'in toplam kaç gün çalıştığını hesaplayın gerisi gelir.

Kesir Problemleri

1. Bir çuval pirincin önce $\frac{1}{8}$ i sonra kalanının $\frac{1}{6}$ sı daha sonra kalanının $\frac{1}{3}$ ü satılıyor.

Geriye 70 kg pirinç kaldığına göre, bu çuvalda başlangıçta kaç kg pirinç vardı?

- A) 96 B) 116 C) 124 D) 144 E) 156

2. Üç ambarдан birincisindeki buğdayın $\frac{1}{5}$ i ikinci ambara aktarılıyor. İkinci ambara buğday konulduktan sonraki toplam buğdayın $\frac{1}{6}$ sı da üçüncü ambara aktarılıyor.

Son durumda, ambarların üçünde de 20 şer ton buğday olduğuna göre, başlangıçta üçüncü ambardaki buğday kaç tondur?

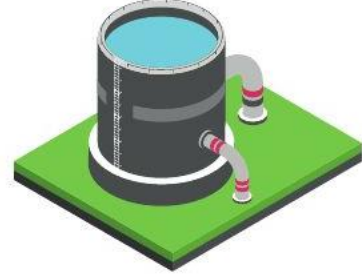
- A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 16

3. Bir miktar yolcusu olan bir otobüse 5 kadın binerse yolcuların $\frac{2}{3}$ ü erkek oluyor. Eğer otobüse 4 erkek binip, otobüsten 2 kadın yolcu inseydi yolcuların $\frac{3}{4}$ ü erkek olacaktı.

Buna göre, otobüsteki yolcu sayısı kaçtır?

- A) 70 B) 65 C) 62 D) 58 E) 50

4.



Bir su deposunun $\frac{7}{11}$ 'i doludur.

Depodaki suyun 80 litresi kullanılınca deponun $\frac{3}{7}$ 'si dolu olduğuna göre, bu su deposunun tamamı kaç litre su almaktadır?

- A) 365 B) 375 C) 385 D) 420 E) 470

5. Bir kafede oturan üç arkadaş 6 bardak çay, 2 bardak portakal suyu içmiş ve tatlı yemiştirler. Üç arkadaşın ödedikleri hesabın görünen kısmı aşağıda verilmiştir.

HESAP			
	Adet	Birim Fiyat	Toplam Fiyat
Bardak çay	6	15 TL	
Portakal suyu	2	45 TL	
Tatlı			
Toplam			520 TL

Buna göre, bu üç arkadaşın tatlı için ödediği ücretin toplam ücrete oranı kaçtır?

- A) $\frac{17}{26}$ B) $\frac{17}{23}$ C) $\frac{11}{17}$ D) $\frac{13}{17}$ E) $\frac{23}{27}$

Kesir Problemleri

6. Ayça, mutfak tartısıyla bir su bardağını önce tam dolu bir şekilde ardından yarısına kadar dolu ve son olarak da içinde bir miktar suyla tartıyor. Aşağıda bu tartma işlemlerinin gram türünden sonuçları gösterilmiştir.



Buna göre, son tartma işleminde bardağın kaçta kaçı doludur?

- A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{3}{14}$ D) $\frac{5}{14}$ E) $\frac{1}{3}$

7. Bir pazarcı öğlene kadar mallarının bir kısmını satıyor. Öğleden sonra,

- 60 kg daha mal satarsa tüm mallarının $\frac{8}{15}$ ini,
- Öğleden önce sattığı malın $\frac{1}{4}$ ü kadar daha satarsa tüm mallarının $\frac{5}{9}$ unu satmış oluyor.

Buna göre, pazarcının tüm malının ağırlığı kaç kilogramdır?

- A) 675 B) 700 C) 725 D) 750 E) 800

8. • Undan hamur edilirken oluşan kütle artış oranı $\frac{1}{5}$ tir.
• Hamurdan ekmek elde edilirken verilen fire oranı $\frac{1}{10}$ dur.

Yukarıdaki bilgilere göre, 216 gramlık bir ekmek için kaç gram un gereklidir?

- A) 190 B) 200 C) 210 D) 220 E) 224

9. Yakıt deposu tam doluyken 64 litre benzin alan bir aracın eşit aralıklı çizgilerle ölçüm yapan yakıt göstergesi Şekil 1 deki gibidir. Bu araçla belli bir mesafe yolculuk yapılırken yakıt göstergesi Şekil 2 deki görünüme gelmiştir.



Şekil 1



Şekil 2

Buna göre, araç bu yolculukta kaç litre benzin harcamıştır?

- A) 48 B) 45 C) 42 D) 36 E) 32

BÖLÜM 16

ÖĞRENELİM

YAŞ PROBLEMLERİ Yaş Problemleri

Nasıl Çözülür?



Bugünkü (şimdiki) yaşı x olan bir kişinin;
 t yıl sonraki yaşı; $x + t$
 t yıl önceki yaşı; $x - t$ dir.

Örnek

Kubat ile Berkin'in yaşları toplamı 32 dir.

5 yıl sonra; Kubat'ın yaşı Berkin'in yaşının 2 katı olacağına göre, Kubat'ın şimdiki yaşını bulalım.

Çözüm



Denklemleri tek bilinmeyene bağlı olarak yazmaya çalışalım.
Kubat'ın yaşı K alınırsa Berkin'in yaşı $32 - K$ olur.



5 yıl sonrasına gidecek olursak herkes 5 yaş büyümüş olacak tabii ki.

Kubat'ın yaşı: $K + 5$

Berkin'in yaşı: $32 - K + 5 = 37 - K$ olur.

O halde,

$$K + 5 = 2 \cdot (37 - K) \Rightarrow K + 5 = 74 - 2 \cdot K$$

$$\Rightarrow 3 \cdot K = 69$$

$$\Rightarrow K = 23 \text{ bulunur.}$$

Örnek

Selma'nın yaşı Arif'in yaşının 2 katına eşittir. 7 yıl önce, Selma'nın yaşı Arif'in yaşının 5 eksiğinin 3 katına eşitti.

Buna göre, Arif'in bugünkü yaşını bulalım.

Çözüm



Arif'in şimdiki yaşı x alınırsa Selma'nın yaşı $2x$ olur. Şimdi zaman tüne-
liyle 7 yıl öncesine gidelim.

7 yıl önce Selma'nın yaşı; $2x - 7$

7 yıl önce Arif'in yaşı; $x - 7$ dir.



7 yıl öncesinden devam edelim ve istenilen denklemi kuralım.

$$2x - 7 = 3 \cdot (x - 7 - 5) \text{ (Dikkat!!! Arif in 7 yıl önceki yaşının 5 eksiği)}$$

$$\Rightarrow 2x - 7 = 3x - 36$$

$$\Rightarrow x = 29 \text{ bulunur.}$$

Örnek

48 yaşındaki bir babanın 16 ve 18 yaşlarında iki çocuğu vardır.

Kaç yıl sonra çocukların yaşları toplamının babalarının yaşına eşit olacağını bulalım.

Çözüm

	Baba	Çocuklar
Şimdiki yaşlar :	48	$16 + 18 = 34$
t yıl sonra :	$48 + t$	$16 + t + 18 + t = 34 + 2t$



Çocukların her biri t yaş büyür değil mi? t yıl sonra çocukların yaşları
toplamı babalarının yaşına eşit olacağından,

$$48 + t = 34 + 2t$$

$$\Rightarrow t = 14 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Şule'nin bugünkü yaşı 18'dir.
Şule'nin 6 yıl sonraki yaşı, kaç yıl önceki yaşının 4 katıdır?
(12)
2. Bugün 49 yaşında olan bir kişinin 13 yıl sonraki yaşı ile 9 yıl önceki yaşının toplamı kaçtır?
(102)
3. Yalçın'ın 9 yıl sonraki yaşı 7 yıl önceki yaşının 3 katı olacağına göre, Yalçın'ın şimdiki yaşı kaçtır?
(15)
4. Bugünkü yaşı 34 olan bir kişinin kaç yıl sonraki yaşı, 9 yıl önceki yaşının 2 katının 5 eksiğine eşit olur?
(11)
5. Mert doğduğunda babası 32 yaşında idi.
Mert ile babasının 4 yıl sonraki yaşlarının toplamı 58 olduğuna göre, Mert'in bugünkü yaşı kaçtır?
(9)
6. Arda ve Ferdi'nin bugünkü yaşları sırasıyla 8 ve 19'dur.
Kaç yıl sonra Ferdi'nin yaşı Arda'nın yaşının 2 katı olur?
(3)

Yaş Problemleri

Nasıl Çözülür?

Yaşı x olan bir kişi, a yıl önce doğsaydı; $x + a$ a yıl sonra doğsaydı; $x - a$ yaşında olurdu.İki kişinin yaşları oranı $\frac{a}{b}$ ise bu kişilerin yaşları $a \cdot x$ ve $b \cdot x$ alınarak sorular çözülür.

Örnek

Tuğba, Ziya'dan 6 yaş büyüktür. Tuğba 5 yıl önce, Ziya'da 2 yıl sonra doğmuş olsaydı, bugünkü yaşları toplamı 35 olacaktı.

Buna göre, Tuğba'nın bugünkü yaşının kaç olduğunu bulalım.

Çözüm

Tuğba = T, Ziya = Z yaşında olsun.



Tuğba 5 yıl önce doğsaydı şimdiki yaşı ne olurdu?

 $T + 5$ olurdu.

Ziya 2 yıl sonra doğsaydı şimdiki yaşı ne olurdu?

 $Z - 2$ olurdu.

Bu durumda,

$$(T + 5) + (Z - 2) = 35 \Rightarrow Z + T = 32 \text{ (I)}$$



Tuğba Ziya'dan 6 yaş büyümüş bunu da yazalım.

$$T - Z = 6 \text{ (II)}$$

O halde, (I) ve (II) denklemlerinden

$$\begin{array}{r} T + Z = 32 \\ + \quad T - Z = 6 \\ \hline \end{array}$$

$$2T = 38 \Rightarrow T = 19 \text{ bulunur.}$$

Örnek

Bugünkü yaşları oranı $\frac{3}{5}$ olan iki kişinin 4 yıl önceki yaşları oranı $\frac{1}{2}$ idi.

Buna göre, bu iki kişiden küçük olanın yaşını bulalım.

Çözüm

Birin yaşı $3x$ ise diğerinin ki $5x$ olur. 4 yıl önceki oranı yazalım.

$$\frac{3x - 4}{5x - 4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 6x - 8 = 5x - 4 \Rightarrow x = 4 \text{ olur.}$$

O halde, bu iki kişiden küçüğü; $3x = 3 \cdot 4 = 12$ bulunur.

Nasıl Uygularım?



- Emine, Malik'ten 8 yaş büyüktür.

Emine 5 yıl önce, Malik ise 4 yıl sonra doğmuş olsalardı ikisinin yaşları farkı kaç olurdu?

(17)

- Zeynep'in bugünkü yaşının Ömer'in bugünkü yaşına oranı $\frac{6}{7}$ dir.

8 yıl sonra, ikisinin yaşlarının ortalaması 47 olacağına göre, Zeynep'in bugünkü yaşı kaçtır?

(36)

- Mehmet'in yaşının Simge'nin yaşına oranı dört yıl önce $\frac{2}{3}$ iken bugün $\frac{4}{5}$ tir.

Buna göre, Simge'nin şimdiki yaşı kaçtır?

(10)

Nasıl Çözülür?



- Bir kişinin doğum yılı küçüldükçe yaşı büyür.
- Bir kişinin doğum yılı A, şimdi bulunduğu yıl B olsun.
Bu kişinin şimdiki yaşı: $B - A$ olur.

Örnek

1984 yılında doğan bir matematikçi, yaşını soran bir arkadaşına,



Bugünkü yaşı, doğum yılımın rakamları toplamından 14 fazladır.

yanıtını veriyor.

Buna göre, bu konuşmanın hangi yılda yapıldığını bulalım.

Çözüm

Doğum yılı 1984'ün rakamları toplamı,

$$1 + 9 + 8 + 4 = 22 \text{ 'dir.}$$



Bugünkü yaşı doğum yılının rakamlarının toplamından 14 fazlasına eşit olması, konuşma yapıldığında $22 + 14 = 36$ yaşında olduğunu gösterir.

Buna göre, konuşmanın yapıldığı yıl;

$$1984 + 36 = 2020 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Sercan'ın 2023 yılındaki yaşı, 2009 yılındaki yaşının 3 katına eşittir.

Buna göre, Sercan'ın doğum yılı kaçtır?

(2002)

2. Nalan'ın doğum yılı A, Ersin'in doğum yılı $(A - 9)$ 'dur.

Nalan 21 yaşında iken, Ersin'in yaşı kaçtır?

(30)

İPUCU

Hangisi büyük? Kaç yaş büyük?

3. Bir annenin yaşı,

- 2020 yılında kızının şimdiki yaşının 4 katına,
 - 2010 yılında kızının şimdiki yaşının 3 katına,
- eşittir.

Buna göre, annenin doğum yılı kaçtır?

(1980)

4. Gülşah a yılında, Hilal $a - 6$ yılında doğmuştur. 2028 yılında Hilal'in yaşı, Gülşah'ın yaşının 2 katı olacaktır.

Buna göre, a kaçtır?

(2022)

Yaş Problemleri

Nasıl Çözülür?



- n kişinin bugünkü yaşları toplamı x olsun. Bu n kişinin yaşları toplamı, a yıl sonra; $x + n \cdot a$
 a yıl önce; $x - n \cdot a$ dır.

Örnek

Bugünkü yaşları toplamı 252 olan, 14 kişilik bir sınıfın 3 yıl sonraki yaşları toplamını bulalım.

Çözüm



3 yıl sonra sınıfta bulunan 14 kişinin her biri 3'er yaş büyümüş olacağından yaşları toplamı, $3 \cdot 14 = 42$ artmış olacaktır.

O halde, şimdiki yaşları toplamı 252 olan bu sınıfın, 3 yıl sonraki yaşları toplamı,

$$252 + 3 \cdot 14 = 252 + 42 = 294 \text{ bulunur.}$$

Örnek

Bir babanın şimdiki yaşı üç çocuğunun şimdiki yaşları toplamından 4 fazladır.

6 yıl sonra, babanın yaşı ile çocuklarının yaşları toplamı 132 olacağına göre, çocukların şimdiki yaşları toplamını bulalım.

Çözüm



Çocukların şimdiki yaşları toplamına T dersek, babanın yaşı, $B = T + 4$ olur.



6 yıl sonrasına gidecek olursak, herkes 6 yaş büyümüş olacak.

Babanın yaşı; $T + 4 + 6 = T + 10$ olacak.



Burada problem yok da çocukların yaşları toplamı kaç artacak? 3 kişinin her biri 6 yaş büyürse yaşlar toplamı $3 \cdot 6 = 18$ artar, dolayısıyla da çocukların yaşları toplamı $T + 18$ olur.

O halde, çözüme devam edelim, 6 yıl sonra babanın yaşı ile çocuklarının yaşları toplamı 132 olacağına göre,

Babanın 6 yıl sonraki yaşı; $T + 10$

Çocukların 6 yıl sonraki yaşları toplamı; $T + 18$

$$T + 18 + T + 10 = 132 \Rightarrow 2T + 28 = 132$$

$$\Rightarrow 2T = 104 \Rightarrow T = 52 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



- Üç kardeşin bugünkü yaşlarının toplamı 25 olduğuna göre, 5 yıl sonraki yaşlarının toplamının 3 yıl önceki yaşlarının toplamına oranı kaçtır?

(5/2)

- Bir annenin şimdiki yaşı 48, üç çocuğunun şimdiki yaşları toplamı 65'tir.

Kaç yıl sonra çocukların yaşlarının toplamı, annenin yaşının 2 katına eşit olur?

(31)

- Bir babanın şimdiki yaşı, üç çocuğunun şimdiki yaşları toplamından 12 fazladır.

4 yıl önce; babanın yaşı bu üç çocuğunun yaşları toplamının iki katına eşit olduğuna göre, çocukların şimdiki yaşları toplamı kaçtır?

(32)

Nasıl Çözülür?



- İki kişi arasındaki yaş farkı sabittir, yıldan yıla değişmez.
- Fakat yaşları oranı ve toplamı değişir.

Örnek

Ömer ile annesinin şimdiki yaşları farkı 27'dir. 5 yıl sonra, Ömer'in yaşının 4 katı annesinin yaşına eşit olacaktır.

Ömer'in annesinin şimdiki yaşını bulalım.

Çözüm



Ömer'in 5 yıl sonraki yaşına x denilirse, annesinin 5 yıl sonraki yaşı $4x$ olur.



Yaşlar farkı değişmeyeceğine göre, 5 yıl sonrada yaşlar farkı 27 olur.

$$4x - x = 27 \Rightarrow 3x = 27 \Rightarrow x = 9 \text{ dur.}$$



Şimdi tekrar şimdiki zamana gelelim.

Annenin şimdiki yaşı; $4x - 5 = 4 \cdot 9 - 5 = 31$ bulunur.

Örnek

Aynur'un şimdiki yaşı, iki kardeşinin yaşları farkının 5 katına eşittir.

5 yıl sonra; Aynur'un yaşı, iki kardeşinin yaşları farkının 4 katından 15 fazla olduğuna göre, kardeşlerinin yaşları farkını bulalım.

Çözüm

Aynur'un kardeşlerinin yaşları farkı F olsun.

Aynur'un yaşı; $5F$ olur.



Aradan 5 yıl geçti, Aynur büyüdü mü? Evet. Kardeşleri büyüdü mü? Evet. Şimdi dikkat, kardeşlerin yaşları farkı değişti mi?

Hayır.



Buna göre, 5 yıl sonra,

Aynur'un yaşı; $5F + 5$ olur.

Kardeşlerinin yaşları farkı; F kalır.

Aynur'un yaşı, iki kardeşinin yaşları farkının 4 katından 15 fazla olacaktır.

$$5F + 5 = 4F + 15 \Rightarrow F = 10 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Ayça'nın yaşı Selin'in yaşından 5 fazladır.

10 yıl sonra; Ayça'nın yaşı, ikisinin yaşları farkının 3 katının 5 fazlasına eşit olacağına göre, Selin'in şimdiki yaşı kaçtır?

(5)

2. Ahmet'in şimdiki yaşı, iki kardeşinin yaşları farkının 2 katından 9 fazladır.

6 yıl sonra; Ahmet'in yaşı, iki kardeşinin yaşları farkının 3 katına eşit olacağına göre, Ahmet şimdi kaç yaşındadır?

(39)

Yaş Problemleri

Nasıl Çözülür?



- A ve B sırasıyla x ve y ile orantılı ise
 $A = x \cdot k$ ve $B = y \cdot k$ olur.

Örnek

Nuri ve Sami'nin yaşları sırasıyla 5 ve 3 ile orantılıdır.

İkisinin yaşları toplamı, yaşları farkından 42 fazla olduğuna göre, Sami'nin yaşını bulalım.

Çözüm



Biraz oran orantı konusunu hatırlayalım. Nuri = $5x$ yaşında ise
Sami = $3x$ yaşındadır.

İkisinin yaşları toplamı; $5x + 3x = 8x$ olur.

İkisinin yaşları farkı; $5x - 3x = 2x$ olur.



Yaşları toplamı, yaşları farkından 42 fazla olduğuna göre,

$$8x = 2x + 42 \Rightarrow 6x = 42 \Rightarrow x = 7 \text{ olur.}$$

O halde; Sami = $3x = 3 \cdot 7 = 21$ yaşındadır.

Örnek

Bugünkü yaşları 3 ve 4 ile orantılı iki kardeşin 8 yıl sonraki yaşları 5 ve 6 ile orantılı olacaktır.

Bu iki kardeşten büyük olanın bugünkü yaşını bulalım.

Çözüm



İki kardeşin bugünkü yaşları $3x$ ve $4x$ olsun. 8 yıl sonra yaşları $3x + 8$ ile $4x + 8$ olacaktır.



8 yıl sonra, iki kardeşin yaşları sırasıyla 5 ve 6 ile orantılı olacakmış. Bunu nasıl denklem olarak yazıyorduk oran orantıda hatırlayın bakalım.

Hocam, doğru orantılı çoklukların bölümleri sabitti.



$$\frac{3x + 8}{5} = \frac{4x + 8}{6} \Rightarrow 18x + 48 = 20x + 40$$

$$\Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \text{ tür.}$$

O halde, büyük kardeşin bugünkü yaşı:

$$4x = 4 \cdot 4 = 16 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Bugünkü yaşları 2 ve 3 ile doğru orantılı olan iki kişinin 4 yıl önceki yaşları sırayla 3 ve 5 ile doğru orantılıdır.

Buna göre, bu iki kişinin bugünkü yaşlarının toplamı kaçtır?

(40)

2. Bugünkü yaşları 5 ve 2 ile orantılı olan iki kişinin 12 yıl sonraki yaşları sırayla 8 ve 5 ile doğru orantılı olacaktır.

Buna göre, bu iki kişinin bugünkü yaşları farkı kaçtır?

(12)

Nasıl Çözülür?



- Yaş ortalaması, n yılda n kadar değişir. Bugünkü yaşları ortalaması a olan bir grubun,
 n yıl sonraki yaş ortalaması: $a + n$
 n yıl önceki yaş ortalaması: $a - n$ olur.

Örnek

Bugünkü yaşları toplamı 420 olan bir grup öğrencinin üç yıl önceki yaş ortalaması 17'dir.

Buna göre, gruptaki öğrenci sayısını bulalım.

Çözüm



Grupunkilerin 3 yıl önceki yaş ortalaması 17 olduğuna göre, bugünkü yaş ortalaması $17 + 3 = 20$ olur.

Bugünkü yaşları toplamı 420 olduğuna göre,
 gruptaki öğrenci sayısı; $420 : 20 = 21$ bulunur.

Örnek

Dört kişinin 5 yıl sonraki yaş ortalaması $n + 2$ dir.

Bu kişilerin, 3 yıl önceki yaş ortalaması $2n - 18$ olduğuna göre, n 'yi bulalım.

Çözüm



Yaş ortalaması bir kişinin yaşımı gibi artar veya azalır. Değil mi?



Dört kişinin 5 yıl sonraki yaş ortalaması $n + 2$ ise, şimdiki yaş ortalaması ne olur?

Hocam, 5 azalacağından, $n + 2 - 5 = n - 3$ olur?



Güzel şimdiki yaş ortalamasını bulduk. Peki, 3 yıl önceki yaş ortalaması ne olur?

3 azalacağından, $n - 3 - 3 = n - 6$ olur.



Her şey mükemmel, sonuç gelsin bakalım.

3 yıl önceki yaş ortalaması $2n - 18$ olarak verildiğine göre,



$$2n - 18 = n - 6 \Rightarrow n = 12 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



- Asım, Zeynep'ten 13 yıl önce, Zeynep'te Ömer'den 5 yıl sonra doğmuştur.

Üçünün 3 yıl önceki yaşlarının ortalaması 11 olduğuna göre, Zeynep kaç yaşındadır?

(8)

- Bir babanın şimdiki yaşı, 3 er yıl arayla doğmuş üç çocuğunun şimdiki yaşları toplamına eşittir.

Baba ve çocuklarının 5 yıl sonraki yaşları ortalaması 26 olacağına göre, baba bugün kaç yaşındadır?

(42)

Yaş Problemleri

Nasıl Çözülür?



İki kişiden biri diğerinin yaşında olduğu zaman tablo yapıp yaş farkının sabitliği ilkesini kullanarak problem çözülür.

Örnek

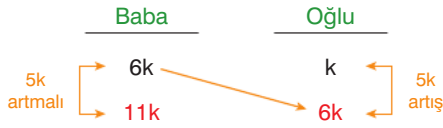
Bir babanın bugünkü yaşı oğlunun bugünkü yaşının 6 katıdır.

Oğlu babanın bugünkü yaşına geldiğinde ikisinin yaşları toplamı 85 olacağına göre, babanın bugünkü yaşını bulalım.

Çözüm



Önce kendimize göre bir tablomuzu yapalım



Tabloda dikkatinizi ne çekti?

Hocam, buradaki meseleden anladığım, önemli olan kaç katına çıktığı değil aradaki artış miktarı, yani fark.



Ya sen can mısın? Canan mısın? Bravo!

Oğlu babanın bugünkü yaşına geldiğinde ikisinin yaşları toplamı 85 olacağından,

$$11k + 6k = 85 \Rightarrow 17k = 85$$

$$\Rightarrow k = 5 \text{ dir.}$$

O halde, babanın bugünkü yaşı,

$$B = 6k = 6 \cdot 5 = 30 \text{ bulunur.}$$

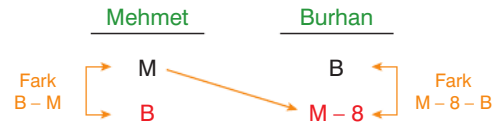
Örnek

Mehmet ile Burhan'ın şimdiki yaşları toplamı 72'dir. Mehmet, Burhan'ın şimdiki yaşında iken Burhan'ın yaşı Mehmet'in şimdiki yaşından 8 eksikti.

Buna göre, Burhan'ın şimdiki yaşını bulalım.

Çözüm

Mehmet'in şimdiki yaşı M, Burhan'ın şimdiki yaşı B olsun.



Geçen süre yani fark ikisi için de eşit olduğundan,

$$B - M = M - 8 - B$$

$$\Rightarrow 2B - 2M = -8$$

$$\Rightarrow B - M = -4 \text{ olur.}$$



Yaşları toplamı 72 olduğundan,

$$M + B = 72$$

$$+ \quad B - M = -4$$

$$2B = 68$$

$$\Rightarrow B = 34 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Serra ile annesinin bugünkü yaşlarının toplamı 69'dur.

Serra annesinin bugünkü yaşına geldiğinde annesi 72 yaşına geleceğine göre, annesinin bugünkü yaşı kaçtır?

(47)

2. Emel 23 yaşında, Beyza x yaşındadır.

Emel $4x - 5$ yaşına geldiğinde, Beyza kaç yaşında olur?

($5x - 28$)

3. Murat'ın bugünkü yaşı Erkan'ın bugünkü yaşının 4 katıdır. Murat, Erkan'ın bugünkü yaşında iken Serkan doğmuştur.

Erkan Murat'ın bugünkü yaşına geldiğinde üçünün yaşları toplamı 85 olacağına göre, Murat'ın bugünkü yaşı kaçtır?

(20)

4. Kadem ile Kubat'ın bugünkü yaşları toplamı 64'tür.

Kadem, Kubat'ın bugünkü yaşındayken Kubat 5 yaşında olduğuna göre, Kadem bugün kaç yaşındadır?

(41)

İPUCU

İleri bir zamana gidilse de geçmiş bir zamana gidilse de işlem aynı sonuçtaki aradaki fark sabit kalacak. Kubat'ın yaşına K, Kadem'in yaşına $64 - K$ demek işi kolaylaştırır.

Yaş Problemleri

1. Bir babanın şimdiki yaşı, iki çocuğunun şimdiki yaşları toplamından 24 fazladır.

5 yıl sonra; babanın yaşı, çocukların yaşları toplamının 2 katından 5 eksik olacağına göre, baba bugün kaç yaşındadır?

A) 32 B) 34 C) 35 D) 36 E) 38

2. Bir ailede iki çocuğun yaşları $m + 2n$ ile $2m - n$, baba ve annenin yaşları ise sırasıyla ikişer basamaklı mn ile nm sayıdır.

Babanın yaşı, anne ile çocukların yaşları toplamına eşit olduğuna göre, babanın yaşı (mn) kaçtır?

A) 65 B) 63 C) 53 D) 51 E) 45

3. Bir annenin şimdiki yaşı, yaşları farklı iki çocuğunun şimdiki yaşları toplamından 20 fazladır.

Dört yıl önce, bu annenin yaşı iki çocuğunun yaşları toplamının 3 katı olduğuna göre, bugün büyük çocuk en az kaç yaşındadır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

4. Bugünkü yaşları toplamı 378 olan bir grup öğrencinin üç yıl önceki yaş ortalaması 15'tir.

Buna göre, gruptaki öğrenci sayısı kaçtır?

A) 21 B) 22 C) 23 D) 25 E) 27

5. Mehmet ve Ahmet'in bugünkü yaşları toplamı 79 olduğuna göre, 7 yıl sonraki yaşları toplamı kaçtır?

A) 81 B) 85 C) 89 D) 93 E) 97

6. Yaşları 7'den büyük olan dört kardeşin bugünkü yaşları toplamı 54 olduğuna göre, 7 yıl önceki yaşları toplamı kaçtır?

A) 20 B) 22 C) 26 D) 29 E) 32

Yaş Problemleri

7. Ayça ile Tuğba'nın şimdiki yaşlarının toplamı 34'tür.

3 yıl sonra Tuğba'nın yaşı Ayça'nın yaşının 4 katı olacağına göre, Tuğba şimdi kaç yaşındadır?

A) 26 B) 27 C) 28 D) 29 E) 30

8. Bugünkü yaşları 4 ve 7 ile orantılı olan iki kardeşin 10 yıl sonrakı yaşları 2 ve 3 ile orantılı olacaktır.

Bu iki kardeşin bugünkü yaşları toplamı kaçtır?

A) 50 B) 55 C) 60 D) 65 E) 70

9. Hülya ile Meryem'in bugünkü yaşları toplamı 61'dir. Meryem, kendisinden daha yaşlı olan Hülya'nın yaşına geldiğinde ise yaşları toplamı 91 olacaktır.

Buna göre, Meryem'in bugünkü yaşı kaçtır?

A) 23 B) 25 C) 27 D) 29 E) 33

10. Bir babanın şimdiki yaşı; 4'er yıl arayla doğan dört çocuğunun şimdiki yaşları toplamına eşittir.

En büyük çocuk doğduğunda baba 42 yaşında olduğuna göre, en küçük çocuğun şimdiki yaşı kaçtır?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

11. Bir annenin bugünkü yaşı, kızının bugünkü yaşının 8 katıdır.

Kızı annenin bugünkü yaşına geldiğinde ikisinin yaşları toplamı 69 olacağına göre, annenin bugünkü yaşı kaçtır?

A) 24 B) 30 C) 36 D) 42 E) 48

12. Bir anne ile babanın şimdiki yaşları toplamı üçüz çocuklarının şimdiki yaşları toplamının 2 katından 9 eksiktir.

12 yıl sonra; anne ile babanın yaşları toplamı çocukların yaşları toplamına eşit olacağına göre, çocuklar bugün kaç yaşındadır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

1-E

2-C

3-E

4-A

5-D

6-C

7-D

8-B

9-A

10-A

11-A

12-E

BÖLÜM 17

ÖĞRENELİM

YÜZDE PROBLEMLERİ Yüzde Problemleri

Nasıl Çözülür?



- Bir A sayısının % x i, $A \cdot \frac{x}{100}$ dür.
- B sayısının, A sayısının yüzde kaç olduğunu bulmak için orantı kurulur.
- Ya da $\frac{B}{A} \cdot 100$ işlemi yapılır.

Örnek

Hangi sayının % 40'ının 80 olduğunu bulalım.

Çözüm

Sayı x olsun.

$$x \cdot \frac{40}{100} = 80 \Rightarrow x = 200 \text{ bulunur.}$$

Örnek

Aylık bursu 600 lira olan bir öğrencinin bursuna 450 lira zam yapılmıştır.

Yapılan zam oranı yüzde kaç olduğunu bulalım.

Çözüm

1. Yol



Orantı kurarak sonucu bulalım.

600 lirada	450 zam
100 de	x

$$x = \frac{100 \cdot 450}{600} = \frac{450}{6} = 75 \text{ bulunur.}$$

2. Yol



Ya da kuraldan.

$$x = \frac{450}{600} \cdot 100 = 75 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. 150 sayısının % 30 u ile % 10 unun toplamı kaçtır?

(60)

2. 0,16 sayısının % 4 ü kaçtır?

(0,0064)

3. 1,08 sayısının % 150 si kaçtır?

(1,62)

4. Hangi sayının % 45 inin % 25 i 90 dır?

(800)

Nasıl Uygularım?



5. A sayısının % 45 i, B sayısının % 36 sına eşittir.

Buna göre, $\frac{A}{B}$ oranı kaçtır?

 $\left(\frac{4}{5}\right)$

6. 45 TL'ye alınıp 54 TL'ye satılan malın satışından elde edilen kâr % kaçtır?

(20)

7. 63 kalemi aldığı fiyata 84 kalem satan birinin zararı % kaçtır?

(25)

8. 4x liraya alınan bir mal 5x liraya satılırsa yüzde kaç kâr elde edilir?

(25)

Nasıl Çözülür?



Örnek

90 soruluk bir fen sınavında ilk 30 sorudan % 60 ını doğru cevaplayan bir öğrencinin bu sınavdaki doğru cevaplarının oranının % 80 olması için kaç tane daha soruyu doğru olarak cevaplama gerektiğini bulalım.

Çözüm



Öğrencinin doğru cevaplarının oranının % 80 olması için 90 sorudan,

$$90 \cdot \frac{80}{100} = 72 \text{ sini doğru cevaplama gerekir.}$$



Öğrenci ilk 30 sorunun % 60 ını doğru cevaplamış ise,

$$30 \cdot \frac{60}{100} = 18 \text{ soruyu doğru cevaplamıştır.}$$

O halde, öğrencinin $72 - 18 = 54$ tane daha soruyu doğru cevaplama gerekir.

Örnek

Bir pazarcı bir günde meyve tezgahında bulunan 130 kilo kiraz, 160 kilo erik ve 110 kilo kayısının tamamını satmıştır.

Buna göre, pazarcının sattığı erik miktarının sattığı tüm meyvelerin yüzde kaç olduğunu bulalım.

Çözüm



Öncelikle tüm meyvelerin toplam ağırlığını bulalım.

$$\text{Toplam meyve} = 130 + 160 + 110 = 400 \text{ kilodur.}$$

Buna göre, erik miktarı yüzdesi;

$$\% \text{ Erik} = \frac{\text{Erik miktarı}}{\text{Toplam meyve miktarı}} \cdot 100$$

$$\Rightarrow \% \text{ Erik} = \frac{160}{400} \cdot 100$$

$$\Rightarrow \% \text{ Erik} = 40 \text{ bulunur.}$$

Yüzde Problemleri

Nasıl Uygularım?



1. % 40 ı kız öğrenci olan bir sınıfa, 12 kız öğrenci daha katıldığında, sınıftaki kız öğrenci oranı % 50 olmuştur.

Buna göre, sınıftaki erkek öğrenci sayısı kaçtır?

(36)

2. Bir hastanede doktor, hemşire ve hasta bakıcılardan oluşan sağlık personeli sayısı 80'dir.

Sağlık personelinin %40'ı doktor, 12 tanesi hasta bakıcı olduğuna göre, sağlık personelinin yüzde kaç hemşiredir?

(45)

3. Bir memurun brüt ücretinden bu ücretin yüzde 8'i, yüzde 5'i ve yüzde 3'ü olmak üzere, üç ayrı kesinti yapılmaktadır.

Bu memurun net ücreti 10080 TL olduğuna göre, brüt ücret kaç TL'dir?

(12000)

Nasıl Çözülür?



Yüzde problemlerinde yüzdesi alınan çokluğu 100x (veya 100 de olabilir) kabul ederek, soruları daha pratik bir şekilde çözebiliriz.

Örnek

Bir pazarcı öğlene kadar malının % 30'unu, öğleden sonra ise kalan malının % 60'ını satıyor.

Buna göre, pazarcının bir günde malının yüzde kaçını sattığını bulalım.

Çözüm



Pazarcının 100 kg malı olsun diyerek işe başlayıp çok şematik bir çözüm yapalım.

$$100 \xrightarrow{-\% 30} 100 - 30 = 70 \xrightarrow{-\% 60} 70 - 42 = 28$$

kalan kalan

$$\left(100 \cdot \frac{30}{100} = 30 \text{ satıldı.}\right) \quad \left(70 \cdot \frac{60}{100} = 42 \text{ satıldı.}\right)$$

Buna göre, 100 kg maldan 28 kg kaldığına göre;

Satılan mal, $100 - 28 = 72$ kg dir. Bu da malın % 72 si demektir.

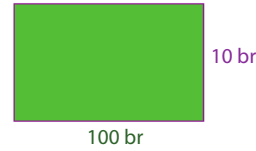
Örnek

Bir dikdörtgenin kısa kenarı % 20 azaltılır, uzun kenarı % 10 artırılırsa, alanının nasıl değişeceğini bulalım.

Çözüm



Dikdörtgenin kısa kenarını 10 br, uzun kenarını 100 br alarak alanını bulalım.



$$A = 10 \cdot 100 = 1000 \text{ br}^2 \text{ dir}$$



Uzun kenar % 10 artırılırsa 100 br → 110 br olur. Kısa kenarı % 20 azaltılırsa 10 br → 8 br olur. Şimdi alanı bulalım.



$$A = 8 \cdot 110 = 880 \text{ br}^2 \text{ dir}$$

Buna göre, Alan, 1000 br^2 den 880 br^2 ye düştüğüne göre 120 br^2 azalmıştır.

Azalma miktarı, 1000 'de 120 ise 100 'de 12 (% 12) olur.

Nasıl Uygularım?



1. Bir otobüs gideceği yolun % 40'ını alınca mola veriyor. Otobüs kalan yolun % 50'sini alınca ikinci molasını veriyor.

Buna göre, ikinci moladan sonra geriye yolun yüzde kaç kalmıştır?

(30)

2. Sema telefondaki resminin enini % 20 artırıp, boyunu % 15 azaltıyor.

Buna göre, fotoğrafın ekranda kapladığı alandaki değişim nasıl olur?

(% 2 artar)

3. Bir lastik çekilip uzatıldığında boyu % 150 artıyor.

Buna göre, çekilmiş halde 0,85 metre olan lastiğin çekilmeden önceki boyu kaç metredir?

(0,34)

Nasıl Çözülür?



• **Arttırma - Zam - Kâr:**

A sayısı % x i kadar arttırılırsa,

$$A + A \cdot \frac{x}{100} = \frac{(100 + x) \cdot A}{100} \text{ olur.}$$

• **İndirim - İskonto - Zarar:**

A sayısı % x i kadar azaltılırsa,

$$A - A \cdot \frac{x}{100} = \frac{(100 - x) \cdot A}{100} \text{ olur.}$$

Örnek

x sayısı %25'i arttırılırsa y sayısı, y sayısı da %20 azaltılırsa z sayısı elde ediliyor.

Buna göre, $\frac{x}{z}$ oranını bulalım.

Çözüm



Ben aşağıda uzun uzun yine yazıcam ama siz her seferinde bu kadar uğraşmadan bir sayının fazlasını bulmak için 100 e (veya 1 e) ekleyerek, eksikliğini bulmak için 100 den (veya 1 den) çıkarak sonucu bulmayı öğrenmelisiniz.

$$x + x \cdot \frac{25}{100} = y \Rightarrow y = \frac{125x}{100} = \underbrace{1,25 \cdot x}_{\text{işte bunu öğren}} \text{ ve}$$

$$y - y \cdot \frac{20}{100} = z \Rightarrow z = \frac{80y}{100} = \underbrace{0,80 \cdot y}_{\text{işte bunu öğren}} \text{ olur.}$$



Birinci denklemde elde edilen y nin x türünden değeri, ikinci denklemde yerine yazalım.

$$\begin{aligned} z &= \frac{80y}{100} \Rightarrow z = \frac{80}{100} \cdot \frac{125x}{100} \\ &\Rightarrow z = \frac{4}{5} \cdot \frac{5x}{4} \\ &\Rightarrow z = x \Rightarrow \frac{x}{z} = 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek

% 20 zararlarla 160 TL'ye satılan bir malın, % 30 kârla kaç TL'ye satılacağını bulalım.

Çözüm

Satış Fiyatı = Alış Fiyatı (maliyet) + Kâr

Satış Fiyatı = Alış Fiyatı (maliyet) – Zarar

Yüzde Problemleri

Nasıl Çözülür?



Bakın Guzular... yukarıda verilen denklemler hayatın denklemleri. Hayatta bir iş yapacağınızda kârınızı, zararınızı iyi hesap etmelisiniz.



Alış fiyatı $100x$ olan bir malın % 20 zararlı satış fiyatı $80x$ olur.



Alış fiyatı $100x$ olan bir malın % 30 kârla satış fiyatı $130x$ olur.

Buna göre,

$$\begin{array}{ccc} 80x & \searrow & 160 \\ 130x & \nearrow & S \end{array}$$

Doğru orantı; $80x \cdot S = 130x \cdot 160 \Rightarrow S = 260 \text{ TL bulunur.}$

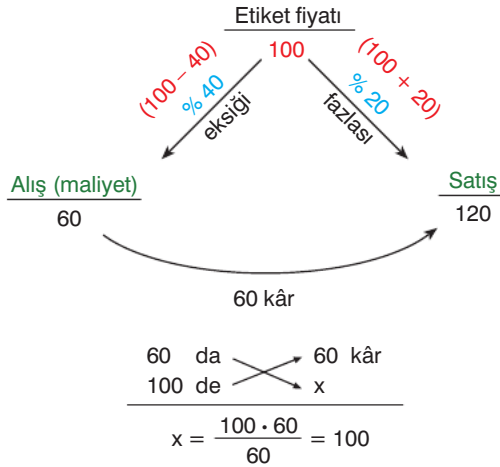
Örnek

Bir ürün etiket fiyatının % 40 eksikliğine alınıp, etiket fiyatının % 20 fazlasına satılırsa maliyet üzerinden % kaç kâr elde edileceğini bulalım.

Çözüm



Yüzde dışı ortada sayı yok. O halde değer vererek çözmek en akılcı yoldur.



olduğundan, elde edilen kâr % 100 dür.

Örnek

Maliyet fiyatı üzerinden % 40 kâr ile satılan bir mala satış fiyatı üzerinden % 20 indirim yapıldığında bu malın indirimli satışından elde edilen kârın, maliyet fiyatı üzerinden yüzde kaç olacağını bulalım.

Çözüm



Maliyete 100 diyerek şema ile soruyu çözelim.



Örnek

Etiket fiyatı % 20 kârla hesaplanmış bir malın, maliyeti % 10 azaltılıp, etiket fiyatı % 5 artırıldığında, kâr oranının yüzde kaç olacağını bulalım.

Çözüm



Yine maliyet 100 TL olsun. Etiket fiyatı ne olur.

120 TL olur hocam.



Maliyeti % 10 azaltırsam yeni maliyet ne olur.

90 TL olur hocam.



Güzel son noktayı koyuyoruz etiket fiyatını % 5 artırdığımızda yeni satış fiyatımız ne olur.

120'yi % 5 artıracamızdan 126 TL olur hocam.



Mükemmelsiniz, şimdi son durumda kâr ne oldu?

Hocam son durumda 90'a alıp 126 sattık yani 36 TL kâr ettik. Yüzdesi de;

$$\begin{array}{ccc} 90 \text{ da} & \searrow & 36 \text{ kâr} \\ 100 \text{ de} & \nearrow & x \end{array}$$

Doğru orantı: $90 \cdot x = 36 \cdot 100 \Rightarrow x = 40 \text{ olur.}$

Son durumda elde edilen kâr % 40 olur.

Nasıl Uygularım?



1. Bir üniversitenin öğrenci sayısı açıldığı yıldan sonra her yıl % 20 artmaktadır.

Buna göre, 2 yıl sonra bu üniversitenin öğrenci sayısı ilk açıldığı yıla göre yüzde kaç artmış olur?

(44)

2. Etiket fiyatının % 40 eksikğine alınan bir mal, etiket fiyatının % 16 eksikğine satılırsa elde edilen kâr yüzde kaç olur?

(40)

3. % 25 kârla 200 liraya satılan bir mal, % 25 zararlı satılırdı kaç liraya satılırdı?

(120)

4. Etiket fiyatı üzerinden % 30 indirim yapılarak 350 liraya satılan bir ürünün etiket fiyatı kaç liradır?

(500)

5. Etiket fiyatı üzerinden % 20 zam yapılarak 540 liraya satılan bir gömleğe etiket fiyatı üzerinden yapılan zam miktarı kaç liradır?

(90)

6. % 30 zararlı 1400 liraya satılan bir ürün % 40 kârla satılırdı kaç liraya satılırdı?

(2800)

Yüzde Problemleri

Nasıl Uygularım?



7. Bir malı % 80 kârla satan mağaza, bu malın satış fiyatını % 40 düşürdüğünde malın indirimli fiyatı 540 TL oluyor.

Bu malın başlangıçtaki satış fiyatı kaç TL'dir?

(900)

8. Bir malın etiket fiyatı, maliyeti üzerinden % 30 kârla hesaplanmıştır.

Bu mal etiket fiyatı üzerinden % 40 indirimle satılırsa bu malın satışından yapılan zarar, maliyeti üzerinden TL % kaç olur?

(22)

9. Bir satıcı maliyet üzerinden % 50 kârla sattığı bir mala, maliyetinin % 30'u kadar indirim yapıyor.

Son durumda 150 TL kâr ettiğine göre, bu malın maliyeti kaç TL'dir?

(750)

10. Bir satıcı bir malı maliyeti üzerinden % 40 kârla satmaktadır.

Satıcı, bu malın satış fiyatı üzerinden % 30 indirim yaptığında son durumdaki satış fiyatı için, maliyet fiyatına göre kâr-zarar durumu nasıl olur?

(% 2 zarar)

11. Etiket fiyatı maliyeti üzerinden % 30 kârla hesaplanan bir mal etiket fiyatından 50 TL eksiğine satılıyor.

Bu mal indirimli fiyatla satıldığında maliyeti üzerinden % 10 kâr edildiğine göre, malın maliyeti kaç TL'dir?

(250)

12. Bir malın etiket fiyatı, maliyeti üzerinden % 30 kârla hesaplanmıştır.

Bu mal, etiket fiyatı üzerinden % 20 indirimle satılırsa, elde edilen kâr yüzde kaç olur?

(4)

Nasıl Uygularım?



13. Bir ürüne alış fiyatı üzerine % 20 KDV, sonra bu fiyat üzerine % 40 ÖTV ve son olarak da tüm fiyat üzerine % 10 Stopaj olmak üzere üç ayrı vergi eklenerek ürünün maliyeti hesaplanmaktadır.

Bu ürünün hesaplanan maliyeti 1848 TL olduğuna göre, alış fiyatı kaç TL'dir?

(1000)

14. Bir giyim mağazası mallarını % 120 kâr ile satmaktadır.

Buna göre, reklam amacıyla piyasaya dağıttığı % 40'lık indirim kuponu ile gelen müşterilerden yüzde kaç kâr etmiştir?

(32)

15. Buğdaydan ağırlığının % 80 i kadar un, undan da ağırlığının % 150 si kadar hamur elde edilmektedir.

Buna göre, 600 kg hamur elde etmek için kaç kg buğday gereklidir?

(500)

Nasıl Çözülür?



İndirim yapılırken satışlar artar. Bu işin içinden çıkmanın kolay yolu yine değer vermektir.

Örnek

Bir firma, ürünlerinin satış fiyatlarında % 45 indirim yaptığında satışları eskiye göre % 60 artmıştır.

Buna göre, bu firmanın günlük hasılatındaki değişmeyi bulalım.

Çözüm



Değer verip meseleyi tatlıya bağlayalım. 100 tane ürün, tanesi 100 TL'den satılarak 10 000 TL hasılat elde edilir.

Fiyat % 45 indirilirse, satış fiyatı; $100 - 45 = 55$ TL olur.

Ürünün satışı % 60 artarsa günlük $100 + 60 = 160$ tane satılır.

55 TL'den satılan 160 adet ürünün,

$55 \cdot 160 = 8800$ TL hasılat elde edilir.



10 000 TL'den 8 800 TL'ye indiği için günlük hasılat 1 200 TL azaldı.

$$\begin{array}{ccc} 10000 \text{ de} & \searrow & 1200 \text{ azaldı} \\ & \times & \\ 100 \text{ de} & \nearrow & x \text{ TL azalır.} \end{array}$$

Doğru orantı: $10000 \cdot x = 1200 \cdot 100$

$x = 12$ olduğundan, hasılat % 12 azalır.

Yüzde Problemleri

Nasıl Uygularım?



1. Bir mağaza fiyatlarda % 70 indirim yapınca satışlarda % 80 artış oluyor.

İlk duruma göre, mağazanın elde ettiği gelirin artma-azalma durumu nasıl olur?

(% 46 azalır)

2. Bir mağaza, kışlık montlarda % 60 mevsim sonu indirimi uyguladığında bir günde satılan mont sayısının % 30 arttığını görüyor.

Buna göre, mağazanın kasasına bir günde giren para yüzde kaç azalmıştır?

(48)

Nasıl Çözülür?



Satın alındıktan sonra fire veren mallar için veya satın alınırken eşantıyon olarak hediye alındığında maliyet veya elde edilen kâr hesaplanırken orantı kurulup hesap yapılabilir.

Örnek

Bir sütçü litresini 20 liraya aldığı sütün her 5 litresine ücret ödeme-diği sudan 1 litre ekleyerek litresini 30 liradan satıyor.

Sütçünün bu satıştaki kâr oranını bulalım.

Çözüm



5 litre süte kilosu 20 TL'den 100 TL ödedik.



Nasrettin hocanın hikayesinde olduğu gibi, eve geldik süt doğurdu ve 6 kilo oldu.



Eldeki 6 kilo sütü kilosu 30 TL'den 180 TL'ye sattık. Kârımızı siz söyleyin.



Toplam 100 TL verdik, 180 TL gelirimiz oldu. Yani 100 TL de 80 TL kâr ettik. Bu da % 80 kâr eder hocam.



Gördünüz mü? Hesap kitap ne kadar basit.

Örnek

Satın aldığı aynı türden her bir düzine kalem için eşantıyon olarak 3 kalem alan bir kırtasiyecinin satın aldığı kalemlerin birim fiyatındaki azalma oranının yüzde kaç olduğunu bulalım.

Çözüm



Düzinede 12 tane kalem olduğunu biliyorsunuz değil mi?



Şimdi gelelim hesaba. Her 12 kaleme 3 kalem hediye. Kalemin tanesini 10 TL'den alsam düzinesi 120 TL eder.



Söyleyin bakalım elimizde kaç kalem var?



Düzinede 12 var, 3 de hediye aldık 15 kalem hocam.



Yani, ben aslında 12 kaleme değil 15 kaleme 120 TL ödedim. O halde, bir kalem bana $120 \div 15 = 8$ TL'ye gelmiş olur.

Buna göre, maliyetteki azalma oranı; 10 da 2 ise % 20 dir.

Nasıl Uygularım?



1. Bir kırtasiyecici 80 kalem almak için ödediği paraya 50 kalem satmıştır.

Buna göre, kırtasiyecinin kârı yüzde kaçtır?

(60)

2. Bir mağaza 4 çift çorap alana 1 çift çorap ediyedir.

Buna göre, mağaza bu kampanya ile bir çift çorabı yüzde kaç indirimle satmaktadır?

(% 20)

3. Satın aldığı aynı türden her 14 kalem için eşantıyon olarak 2 kalem alan bir kırtasiyecinin satın aldığı kalemlerin maliyetindeki azalma oranı % kaç olur?

(% 12,5)

4. “5 kalem alana 1’i bedava” kampanyası düzenleyen bir kırtasiyenin kalem başına yaptığı indirim yüzde kaçtır?

(20)

5. Bir telefon operatörü 4 GB internet paketi alımlarında “4 al 3 öde” kampanyası düzenlemiştir.

Buna göre, bu kampanyadan faydalanan bir müşteri yüzde kaçlık bir indirimden faydalanmıştır?

(25)

6. Yaş sabun kuruyunca % 20 kütle kaybetmektedir.

Bir miktar yaş sabunu kurutup aynı fiyata satan bir satıcı kuru sabunun satışından kilogram başına yüzde kaç zarar eder?

(20)

Yüzde Problemleri

Nasıl Çözülür?



Bir ürünü parça parça farklı fiyatlar satmak hesabı zorlaştırır. Değer vermek işinizi her zaman kolaylaştırır.

Örnek

Bir malın % 20 si % 20 kârla, %10 u %10 zararla, % 30 u % 50 kârla satılıyor.

Geriye kalan kısmı yüzde kaç kârla satılırsa bu malın tamamının satışından % 50 kâr elde edilebileceğini bulalım.

Çözüm



Ne mal belli ne parası belli, değer verilecek en güzel soru tipi. 10 tane mal tanesi 10 TL'den, $10 \cdot 10 = 100$ TL'ye alınmış olsun.

% 20 si, yani 2 tanesi % 20 kârla, tanesi 12 TL'den,

$2 \cdot 12 = 24$ TL ye satılır.

% 10 u, yani 1 tanesi % 10 zararla, tanesi 9 TL'den,

$1 \cdot 9 = 9$ TL ye satılır.

% 30 u, yani 3 tanesi % 50 kârla, tanesi 15 TL'den,

$3 \cdot 15 = 45$ TL ye satılır.

Satılan mallardan elde edilen gelir toplam;

$24 + 9 + 45 = 78$ TL dir.

Kalan 4 tane mal, tanesi x TL'den $4x$ TL'ye satılsın.

$$78 + 4x = 100 + \underbrace{100 \cdot \frac{50}{100}}_{\% 50 \text{ kâr}}$$

$$78 + 4x = 150 \Rightarrow x = 18 \text{ TL olmalıdır.}$$



10 TL'ye alınan mal 18 TL'ye satılması gerektiğine göre, 8 TL kâr ile satılması gerekir.

$$\begin{array}{ccc} 10 \text{ TL de} & \searrow & 8 \text{ kâr} \\ 100 & \swarrow & k \text{ TL kâr edilir.} \end{array}$$

Doğru orantı: $k = 80$ olduğundan, kalan kısım % 80 kârla satılmalıdır.

Nasıl Uygularım?



1. Bir manav elindeki üzümlerin % 40 ını % 25 kârla satıyor. Manav üzümlerinin %10'unu çürüdüğü için atıyor.

Manav geri kalan üzümleri yüzde kaç kârla satarsa, üzümlerin satışından toplam % 20 kâr etmiş olur?

(40)

2. Bir kırtasiyeci elindeki kalemlerin % 60 ını % 20 zararla, % 20 sini % 40 kârla satıyor.

Kırtasiyecinin bu kalemlerin tamamının satışından zarar etmemesi için geri kalan kalemleri en az yüzde kaç kârla satması gerekir?

(20)

Nasıl Çözülür?



Yıllık enflasyon oranının % a olduğu bir ülkede 100 TL'ye alınan bir mal bir yıl sonunda, $100 + a$ TL olur.

Örnek

Yıllık enflasyon oranının % 20 olduğu bir ülkede memurların maaşlarına 6 ayda bir % 10 zam uygulanmaktadır.

Bir yıl sonunda, bu ülkedeki memurların alım gücünün nasıl değiştiğini bulalım.

Çözüm



Bir malın fiyatı ile bir memur maaşı 100 TL olsun.

Bu malın yıl sonundaki fiyatı;

$$100 \xrightarrow[\text{enflasyon}]{\% 20} 120 \text{ TL}$$

Memurun maaşı yıl sonunda;

$$100 \xrightarrow[\text{+ 10}]{\text{Birinci 6 ayda} \\ \text{+ \% 10}} 110 \xrightarrow[\text{+ 11}]{\text{İkinci 6 ayda} \\ \text{+ \% 10}} 121 \text{ TL olur.}$$



Şimdi karıştırılan meseleye gelelim, alım gücünü nasıl hesaplayacağız.



Bakın koçlarım ve biricik kuzularım, 100 liralık mal 120 liraya çıktı. Ben eskiden 100 liralık maaşımla 100 liralık malın hepsini alıyordum. Şimdi, mal 120 liraya benim maaşım 121 liraya çıktı. Yani malı alabildiğim gibi 1 liram da arttı.

O halde,

Memurun kazancı, 120 TL de $121 - 120 = 1$ TL'dir.

120 de	1 TL artış
100 de	x

Doğru orantı:

$$x = \frac{1 \cdot 100}{120} = 0,8 \text{ olduğundan,}$$

Bir yıl sonunda memurların alım gücündeki artış % 0,8 olur.

Nasıl Uygularım?



1. Birinci ve ikinci 6 aylık dönemlerde enflasyon oranı % 20 olan bir ülkede yıllık enflasyon oranı yüzde kaçtır?

(44)

2. Yıllık enflasyon oranının % 25 olduğu bir ülkede memur maaşlarına 1 yılda % 20 zam yapılıyor.

Buna göre, bu ülkede memurların satın alma gücü yüzde kaç azalmıştır?

(4)

3. Yıllık enflasyonun % 56 olduğu bir ülkede, memurların maaşlarına ilk 6 ay için % 20 zam yapılıyor.

Memurların yıllık alım güçlerinin azalmaması için ikinci 6 aylık dönem için memura en az yüzde kaç zam yapılmalıdır?

(30)

Yüzde Problemleri

1. Haftalık harçlığının % 20 sini biriktiren bir öğrencinin 5 hafta sonunda 110 TL'si olmuştur.

Bu öğrencinin haftalık harçlığı kaç TL'dir?

- A) 100 B) 110 C) 120 D) 130 E) 140

2. Bir satıcı elindeki malın önce % 25 ini, daha sonra da kalan malın % 30 unu satmıştır.

Buna göre, başlangıçtaki malın yüzde kaç satılmamıştır?

- A) 40 B) 42,5 C) 45 D) 47,5 E) 52,5

3. Bir mağaza elindeki gömleklerin 80 tanesini % 80 kârla, geriye kalanları da % 10 zararla satıyor.

Mağazanın bu satış sonucundaki kârı %62 olduğuna göre, % 10 zararla kaç gömlek satmıştır?

- A) 40 B) 35 C) 30 D) 25 E) 20

4. Bir mal a liradan satılırsa % 20 kâr, b liradan satılırsa % 20 zarar edilmektedir.

Buna göre, a sayısı b sayısından yüzde kaç fazladır?

- A) 25 B) 30 C) 40 D) 50 E) 60

5. Bir depoda bulunan karpuz ve kavun miktarları toplam 80 tondur. Karpuzların % 12 si, kavunların ise % 9 u çürümüştür. Çürüyen karpuz ve kavun miktarı toplam 9 tondur.

Buna göre, depoda kaç ton sağlam kavun vardır?

- A) 17,5 B) 17,6 C) 18,2 D) 18,4 E) 18,6

6. Bir dikdörtgenin bir kenarı % 20 kısaltıldığında, alanın değişmemesi için diğer kenarı yüzde kaç uzatılmalıdır?

- A) 15 B) 18 C) 20 D) 25 E) 30

Yüzde Problemleri

7. Bir satıcının tanesini 2 TL'ye mal ettiği bir koli tabağın %15'i taşıma sırasında kırılmıştır. Bu satıcı kalan tabakların tanesini 2,4 TL'den satmıştır.

Buna göre, maliyet üzerinden, sonuçtaki kâr-zarar durumu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) % 2 kâr B) % 2,5 kâr C) % 3 kâr
D) % 2,5 zarar E) % 2 zarar

8. Kabuklu fıındığın ağırlığının % 85'i kadar iç fıındık, iç fıındığın da ağırlığının % 240'ı kadar çikolata elde edilmektedir.

Buna göre, 612 kg çikolata elde etmek için kaç kg kabuklu fıındık gereklidir?

- A) 240 B) 280 C) 300 D) 320 E) 340

9. x liraya alınan bir mal % 60 kârla $3x - 28$ liraya satılmıştır.

Buna göre, x kaçtır?

- A) 20 B) 25 C) 28 D) 30 E) 32

10. Bir markette maliyet üzerinden % 30 kârla satılan bir ürüne bir kampanya dolayısıyla etiket fiyatı üzerinden % 10 indirim yapılmıştır.

Bu ürüne indirim yapılmasaydı 26 lira daha fazla kâr edileceğine göre, bu ürünün maliyeti kaç liradır?

- A) 160 B) 180 C) 190 D) 200 E) 220

11.

- Her ürüne % 20 indirim.
- Aynı üründen iki tane alana ikinci üründe indirimli fiyat üzerinden ilave % 10 indirim.

Yukarıdaki kampanyanın olduğu bir marketten aynı üründen iki tane birden alan bir müşteri, yine bu üründen ayrı ayrı iki tane alan müşteriye göre 16 lira daha az ödeme yaptığına göre, bu ürünün etiket fiyatı kaç liradır?

- A) 200 B) 210 C) 220 D) 240 E) 300

12. Son üç yıl içinde tek yıllarda % 20 değer kazanmış, çift yıllarda ise % değer kaybetmiş bir borsa hissesinin 2019 yılı sonundaki değeri 12,96 lira olduğuna göre, bu hissenin 2017 yılı başındaki değeri kaç liradır?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13,5

BÖLÜM 18

ÖĞRENELİM

KARIŞIM PROBLEMLERİ Karışım Problemleri

Nasıl Çözülür?



- Saf maddelerin karıştırılması;
- A maddesinden a gram, B maddesinden b gram alınarak oluşturulan bir karışımda

$$A \text{ maddesinin yüzdesi} : \frac{a}{a+b} \cdot 100$$

$$B \text{ maddesinin yüzdesi} : \frac{b}{a+b} \cdot 100 \text{ dır.}$$

Örnek

30 gr şeker, 40 gr un ve 130 gr nişasta karıştırılıyor.

Karışımındaki şeker oranının yüzde kaç olduğunu bulalım.

Çözüm

$$\% \text{ şeker} = \frac{\text{şeker miktarı}}{\text{toplam karışım}} \cdot 100 = \frac{30}{30 + 40 + 130} \cdot 100 = \frac{100 \cdot 30}{200} = 15 \text{ bulunur.}$$

Örnek

Şeker oranı % 25 olan 160 kilogram un-şeker karışımındaki şeker miktarı A, un miktarı B ise B - A farkını bulalım.

Çözüm

Şeker oranı % 25 olduğundan;

$$A = 160 \cdot \frac{25}{100} = 40 \text{ kg şeker,}$$

Karışımın % 25 i şeker ise % (100 - 25) = % 75'i un olduğundan, un miktarı;

$$B = 160 \cdot \frac{75}{100} = 120 \text{ kg un vardır.}$$

Buna göre, B - A = 120 - 40 = 80 kg olur.

Nasıl Uygularım?



1. 240 gram süt, 60 gram şeker ve 100 gram su karıştırılıyor.

Karışımındaki şeker oranı yüzde kaçtır?

(15)

2. (a + 4b) gram tuz ve 3a gram su karıştırılıyor.

Karışımındaki su oranı yüzde kaçtır?

$$\left(\frac{75a}{a+b} \right)$$

3. 150 gramlık şeker-su karışımının şeker oranı % 30 dur.

Buna göre, karışımındaki $\frac{\text{şeker}}{\text{su}}$ oranı kaçtır?

$$\left(\frac{3}{7} \right)$$

Nasıl Çözülür?



Karışımların karıştırılması;

Karışım problemlerinde; miktar ve yüzdeleri verilmiş iki madde karıştırıldığında elde edilen yeni karışımın yüzdesi için;

$$\left[\begin{array}{c} \text{I. madde} \\ \text{miktarı} \end{array} \right] \cdot (\text{yüzdesi}) + \left[\begin{array}{c} \text{II. madde} \\ \text{miktarı} \end{array} \right] \cdot (\text{yüzdesi}) = \left[\begin{array}{c} \text{I. + II. madde} \\ \text{miktarı} \end{array} \right] \cdot (\text{yeni karışımın yüz.})$$
 formülü kullanılır.

Örnek

Ağırlıkça %28 i şeker olan 1200 gram limonatanın $\frac{1}{4}$ ü, ağırlıkça % 20'i şeker olan 2500 gram limonatanın $\frac{1}{5}$ i alınıp yeni bir limonata elde ediliyor.

Yeni limonatanın şeker oranının yüzdesini bulalım.

Çözüm



Önce karıştıracağımız madde miktarlarını bulalım.

Birinci limonatadan, $1200 \cdot \frac{1}{4} = 300$ gr alınır.

İkinci limonatadan, $2500 \cdot \frac{1}{5} = 500$ gr alınır.



Şunu unutmayın, $\frac{1}{4}$ ü ve $\frac{1}{5}$ i alınan maddelerin yüzdeleri değişmez.



O halde, ağırlık çarpı yüzde formülümüzü kullanıp limonatomuzun şeker oranını bulalım.

$$300 \cdot \frac{28}{100} + 500 \cdot \frac{20}{100} = (300 + 500) \cdot \frac{x}{100}$$



Gördüğünüz gibi paydadaki 100 leri yazmanın bir anlamı yok, direkt yukarıdaki formülü kullanabiliriz.

$$\Rightarrow 300 \cdot 28 + 500 \cdot 20 = (300 + 500) \cdot x$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 28 + 5 \cdot 20 = 8 \cdot x$$

$$\Rightarrow 184 = 8 \cdot x$$

$$\Rightarrow x = 23 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Tuz oranı % 24 olan 36 lt tuzlu su ile tuz oranı % 12 olan 54 lt tuzlu su karıştırılıyor.

Oluşan yeni karışımın tuz oranı yüzde kaçtır?

(16,8)

2. A kabındaki karışımın % 8'i, B kabındaki karışımın da % 4'ü tuzdur. A kabındaki karışımın $\frac{1}{4}$ ü, B kabındaki karışımın da $\frac{1}{6}$ sı alınarak yeni bir karışım elde ediliyor.

Oluşan yeni karışımın % 7'si tuz olduğuna göre, ilk durumda B kabında bulunan karışım miktarının, A kabında bulunan karışım miktarına oranı kaçtır?

$\left(\frac{1}{2}\right)$

3. % 10'u tuz olan 40 gram tuz-su karışımı ile % 25'i tuz olan kaç gr tuzlu su karıştırılırsa, oluşan karışımın tuz oranı % 15 olur?

(20)

Karışım Problemleri

Nasıl Çözülür?



- Bir karışımın yüzdesi neyse ondan bir kısmı dökülse de, alınsa da miktar değişir ama yüzdesi değişmez.
- Bir karışıma saf maddeler ilave ediliyorsa yüzdelere dikkat edilmesi gerekir.

Örnek

% 30'u alkol olan 7a litrelik bir karışımın $\frac{2}{7}$ si dökülerek yerine dökülen miktar kadar saf alkol ekleniyor.

Elde edilen 7a litrelik karışımın yüzde kaçının alkol olacağını bulalım.

Çözüm

Karışımın, $7a \cdot \frac{2}{7} = 2a$ dökülüyor.



Bu işlem sonunda karışım $7a - 2a = 5a$ litre kalır. Karışım azalır ama yüzdesi değişmez.



Karışım 5a kaldı yüzdesi de % 30. Şimdi bu karışıma 2a litre saf alkol karıştırırsak (saf alkolün alkol oranı % 100 dür.)



Şimdi buraya dikkat! Karışıma 2a litre saf alkol karıştırırsak (yani saf madde). Karışımın verilen yüzde neydi? Alkol yüzdesi. Biz ne ilave ediyoruz alkol. O halde, alkol saf maddesinin yüzdesini %100 almalıyız.

$$5a \cdot \frac{30}{100} + 2a \cdot \frac{100}{100} = 7a \cdot \frac{x}{100}$$

alkol orani alkol orani alkol orani

$$\Rightarrow 150 \cdot a + 200 \cdot a = 7 \cdot a \cdot x$$

$$\Rightarrow 350 = 7 \cdot x$$

$$\Rightarrow x = 50 \text{ bulunur.}$$

Buna göre, son durumdaki karışımın % 50 si alkoldür.

Nasıl Uygularım?



1. Şeker oranı % 10 olan 50 kg şekerli suya 10 kg şeker karıştırılıyor.

Oluşan yeni karışımın şeker oranı yüzde kaçtır?

(25)

2. Su oranı % 75 olan 40 kg şekerli suya 5 kg şeker karıştırılıyor.

Oluşan yeni karışımın şeker oranı yüzde kaçtır?

$\left(\frac{100}{3}\right)$

İPUÇU

Su oranı verilmiş şeker oranı soruluyor. O halde, su oranı %75 olan karışımın şeker yüzdesini bularak işleme başlayın.

3. % 10 u alkol olan 10 litrelik bir karışımın 2 litresi dökülerek yerine 4 litre saf alkol ekleniyor.

Elde edilen, karışımın alkol oranı yüzde kaçtır?

(40)

Nasıl Çözülür?



Bir karışıma saf maddeler ilave ediliyorsa yüzdelere dikkat edilmesi gerekir.

Örnek

%12'si tuz olan 20 litre tuzlu suya kaç litre su eklenirse yeni karışımın tuz yüzdesinin % 5 olacağını bulalım.

Çözüm



Karışımın verilen tuz yüzdesi. Biz ne ilave ediyoruz su. O halde, su saf maddesinin yüzdesini % 0 almalıyız. Yani kısaca yüzdesi verilen saf maddenin yüzdesi %100, o maddenin dışındaki saf maddelerin yüzdesi % 0 alınır.

$$20 \cdot \frac{12}{100} + x \cdot \frac{0}{100} = (20 + x) \cdot \frac{5}{100}$$

karışımın tuz yüzdesi suyun tuz yüzdesi yeni karışımın tuz yüzdesi

$$\Rightarrow 240 = 100 + 5x$$

$$\Rightarrow x = 28 \text{ litre bulunur.}$$

Örnek

% 15'i şeker olan 40 kg'lık şeker su karışımına 10 kg şeker ve 30 kg su ilave edildiğinde oluşan yeni karışımın şeker yüzdesini bulalım.

Çözüm



Burada neye dikkat edicez, var mı söyleyecek olan?

Hocam, şekerin şeker yüzdesini 100, suyun şeker yüzdesini 0 alıcaz.



$$40 \cdot \frac{15}{100} + 10 \cdot \frac{100}{100} + 30 \cdot \frac{0}{100} = (40 + 10 + 30) \cdot \frac{x}{100}$$

karışım şeker su yeni karışım

$$\Rightarrow 600 + 1000 = 80 \cdot x$$

$$\Rightarrow x = \frac{1600}{80}$$

$$\Rightarrow x = 20 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Tuz oranı %7 olan 150 gramlık tuzlu su çözeltisinin, tuz oranını %10'a çıkarmak için çözeltiliye kaç gram tuz katılmalıdır?

(5)

2. Su oranı % 80 olan A gram tuzlu su karışımına 14 gram tuz, 86 gram su katılıyor.

Elde edilen yeni karışımın tuz oranı %18 olduğuna göre A kaçtır?

(200)

İPUÇU

Dikkat edin, su oranı verilmiş tuz oranı soruluyor.

3. A kg karışımın şeker oranı % 20 dir. Bu karışıma 4 kg şeker eklenirse karışımın şeker oranı % 30'a çıkıyor.

Buna göre, A kaçtır?

(28)

Karışım Problemleri

Nasıl Çözülür?



Bir karışıma bir madde eklenirse formülde toplanır, bir madde çıkarılırsa formülde eksi yazılır.

Örnek

Şeker oranı % 15 olan 40 litre şekerli sudan kaç litre su buharlaştırılınca şeker oranının % 25 olacağını bulalım.

Çözüm



Karışım ısıtılınca buharlaşan madde yani azalan madde yalnızca saf su dur. Suyun da şeker yüzdesi 0 alınır.



40 litrelik karışımdan x litre su buharlaştırıldığında kalan 40 - x litrelik karışımın şeker oranı % 25 olsun.

$$40 \cdot \frac{15}{100} - x \cdot \frac{0}{100} = (40 - x) \cdot \frac{25}{100}$$

karışım buharlaşan su son karışım

$$\Rightarrow 40 \cdot 15 = (40 - x) \cdot 25$$

$$\Rightarrow 600 = 1000 - 25 \cdot x$$

$$\Rightarrow 25 \cdot x = 400$$

$$\Rightarrow x = 16 \text{ litre bulunur.}$$

Örnek

% 15 i şeker olan 40 kg lık şeker su karışımına 10 kg şeker eklenip karışımdan 30 kg su buharlaştırıldığında oluşan yeni karışımın şeker yüzdesini bulalım.

Çözüm



Burada neye dikkat edicez, var mı söyleyecek olan?

Hocam, şekerin şeker yüzdesini 100, suyun şeker yüzdesini 0 alıcaz.



$$40 \cdot \frac{15}{100} + 10 \cdot \frac{100}{100} - 30 \cdot \frac{0}{100} = (40 + 10 - 30) \cdot \frac{x}{100}$$

karışım şeker su yeni karışım

$$\Rightarrow 600 + 1000 = 20 \cdot x$$

$$\Rightarrow x = \frac{1600}{20}$$

$$\Rightarrow x = 80 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



- 20 litrelik bir tuzlu suyun tuz oranını % 15'ten % 18'e çıkarmak için bu karışımdan kaç litre su buharlaştırılmalıdır?

$$\left(\frac{10}{3}\right)$$

- % 30'u tuz olan 200 gram tuzlu sudaki karışımın % 20'si buharlaştırılıyor.

Buna göre, son durumdaki karışımın tuz oranı yüzde kaçtır?

$$(37,5)$$

- % 10 tuzluluk oranı olan 120 gram tuzlu suyun 12 gramı buharlaştırıldıktan sonra karışıma 12 gram tuz ilave ediliyor.

Buna göre, yeni karışımın tuz oranı yüzde kaç olur?

$$(20)$$

İPUÇU

Karışıma girenler (+), çıkanlar (-) olacak.

Nasıl Çözülür?

*Bazen karıştırılan nesneler farklı olabilir*

Örnek

A sınıfının % 30'u gözlüklü, B sınıfının % 60'ı gözlüksüzdür.

A ve B sınıflarındaki öğrencilerin tamamının % 32'si gözlüklü olduğuna göre, A sınıfının öğrenci sayısı B sınıfının öğrenci sayısının kaç katı olduğunu bulalım.

Çözüm

*Öğrencileri karıştıralım bakalım.*

A sınıfının mevcudu A, B sınıfının mevcudu B olsun.

$$A \cdot \underbrace{\frac{30}{100}}_{\text{gözlüklü}} + B \cdot \underbrace{\frac{40}{100}}_{\text{gözlüklü}} = (A + B) \cdot \underbrace{\frac{32}{100}}_{\text{gözlüklü}}$$

$$\Rightarrow 30 \cdot A + 40 \cdot B = 32 \cdot A + 32 \cdot B$$

$$\Rightarrow 8 \cdot B = 2 \cdot A$$

$$\Rightarrow A = 4 \cdot B \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. A sınıfındaki öğrencilerin % 10'u sarışın, B sınıfındaki öğrencilerin % 25'i sarışındır.

İki sınıftaki öğrencilerin % 18'i sarışın ise, A sınıfının öğrenci sayısının, B sınıfının öğrenci sayısına oranı kaçtır?

 $\left(\frac{7}{8}\right)$

2. İçerisinde % 25 oranında fındık bulunan bir çerez karışım 15 gram fındık vardır.

Karışım 15 gram fındık eklenirse son durumda fındığın yüzdesi kaç olur?

(40)

İPUCU

Önce karışımın toplam miktarını bulun.

3. A torbasındaki a tane topun % 20'si beyaz, B torbasındaki b tane topun % 30'u beyaz C torbasındaki c tane topun % 45'i beyaz renklidir. Bu üç torbadaki toplar başka bir torbada birleştirildiğinde bu torbadaki topların % 32'si beyaz oluyor.

Buna göre; a, b ve c arasındaki bağıntı nedir?

(13c = 12a + 2b)

Karışım Problemleri

1. 100 gr un, 20 gr kabartma tozu ve 10 gr tuzdan homojen bir karışım elde ediliyor.

Bu karışımın 1 gramında kaç gr tuz bulunur?

- A) $\frac{1}{13}$ B) $\frac{2}{13}$ C) $\frac{3}{11}$ D) $\frac{2}{11}$ E) $\frac{1}{12}$

2. % 20'si tuz olan 150 gram tuzlu su ile % 10'u tuz olan 250 gram tuzlu su karıştırılıyor.

Yeni karışımın tuz oranı yüzde kaç olur?

- A) 11,75 B) 12 C) 12,75 D) 13,75 E) 14,25

3. Ağırlıkça % 48'i şeker olan homojen bir un-şeker karışımının $\frac{1}{8}$ i alınarak yerine aynı ağırlıkta un ekleniyor.

Yeni karışımın ağırlıkça şeker yüzdesi kaçtır?

- A) 36 B) 38 C) 40 D) 42 E) 45

4. Ağırlıkça % 50'si şeker olan un-şeker karışımından A kg, % 30'u şeker olan başka bir un-şeker karışımından ise B kg alınarak % 35'i şeker olan yeni bir karışım elde ediliyor.

Buna göre, $\frac{B}{A}$ kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) $\frac{9}{4}$ D) $\frac{7}{2}$ E) 4

5. % 70 i su olan a litrelik bir karışıma 40 litre daha su ilave ediliyor.

Elde edilen yeni karışımın % 85'i su olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 20 B) 25 C) 40 D) 50 E) 55

6. Tuz oranı % 5 olan 160 gramlık tuzlu su çözeltisinin tuz oranını % 8'e çıkarmak için kaç gram su buharlaştırılmalıdır?

- A) 30 B) 40 C) 50 D) 60 E) 65

Karışım Problemleri

7. Ağırlıkça % 30'u şeker olan 20 kg'lık un-şeker karışımına 6 kg un, 2 kg şeker daha eklendiğine göre, yeni karışımın $\frac{\text{şeker (kg)}}{\text{un (kg)}}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{2}{7}$ E) $\frac{2}{5}$

8. Kakao ve süten A ve B gibi iki homojen karışım yapılmıştır. A'nın ağırlığı 120 gr ve kakao oranı % 10, B'nin ağırlığı 180 gr ve süt oranı % 80'dir.

A ve B karıştırıldığında elde edilen yeni karışımın kakao oranı % kaç olur?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

İPUCU

Dikkat birinde kakao oranı, diğerinde süt oranı verilmiş.

9. A torbasındaki topların % 72'si, B torbasındaki topların da % 48'i beyazdır.

Bu iki torbadaki topların tümünün % 52'si beyaz olduğuna göre, A torbasındaki top sayısının, B torbasındaki top sayısına oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

10. % 70 i su olan a litrelik bir şeker-su karışıma 20 litre daha su ilave ediliyor.

Elde edilen yeni karışımın % 10'u şeker olduğuna göre, a kaçtır?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

11. % 30'u alkol olan 30 lt alkol su karışımına 9 lt su, 1 lt saf alkol karıştırılıyor.

Elde edilen yeni karışımın alkol oranı % kaç olur?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

12. A kg şeker, B kg un, C kg kakao karıştırılıyor.

Bu karışımın ağırlıkça yüzde kaç şekerdir?

A) $\frac{100}{A + B + C}$

B) $\frac{A}{A + B + C}$

C) $\frac{B + C}{A + B + C}$

D) $\frac{A}{100 \cdot (A + B + C)}$

E) $\frac{100 \cdot A}{A + B + C}$

BÖLÜM 19

ÖĞRENELİM

HAREKET PROBLEMLERİ Hareket Problemleri

Nasıl Çözülür?



- Bir hareketlinin birim zamanda (1 saatte, 1 dakikada, 1 saniyede) aldığı yola hız denir.
- Belli bir hızla belli bir süre (zaman) giden bir aracın aldığı yol,
$$Yol = Hız \times Zaman$$
$$x = v \cdot t \text{ eşitliği kullanılarak bulunur.}$$
- Bu denklemden, $t = \frac{x}{v}$ ile $v = \frac{x}{t}$ de yazılabilir.

Örnek

Hızı 30 km/saat olan bir aracın,

- 4 saatte kaç km yol alacağını,
- 2 saatte kaç metre yol alacağını,
- 20 dakikada kaç km yol alacağını,
- 12 dakikada kaç metre yol alacağını,

bulalım.

Çözüm



Hızın 30 km/saat olması bu araç 1 saatte 30 km yol alıyor demektir. Şimdi birimlere dikkat ederek istenilenleri bulalım.

Buna göre,

i. $x = v \cdot t = 30 \cdot \left(\frac{\text{km}}{\text{saat}}\right) \cdot 4 \text{ (saat)} = 120 \text{ km}$ bulunur.

ii. $x = v \cdot t = 30 \cdot \frac{1000}{1} \cdot \left(\frac{\text{metre}}{\text{saat}}\right) \cdot 2 \text{ (saat)} = 60\,000 \text{ m}$ bulunur.
 $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$

iii. $x = v \cdot t = 30 \cdot \frac{1}{60} \cdot \left(\frac{\text{km}}{\text{dakika}}\right) \cdot 20 \text{ (dakika)} = 10 \text{ km}$ bulunur.
 $1 \text{ saat} = 60 \text{ dakika}$

iv. $x = v \cdot t = 30 \cdot \frac{1}{60} \cdot 1000 \cdot \left(\frac{\text{metre}}{\text{dakika}}\right) \cdot 12 \text{ (dakika)} = 6000 \text{ m}$ bulunur.
 $1 \text{ saat} = 60 \text{ dakika}$ $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$

Nasıl Uygularım?



1. Hızı saatte 120 km olan bir araç için aşağıdaki istenilenleri bulunuz.

→ 3 saatte kaç km yol alır.

(360)

→ 1,5 saatte kaç metre yol alır.

(180 000)

→ 40 dakikada kaç km yol alır.

(80)

→ 24 dakikada kaç metre yol alır.

(48 000)

Nasıl Uygularım?



2. Hızı 110 km/sa olan bir araç 1210 km'lik bir yolu kaç saatte alır?

(11)

3. 450 km'lik yolu 6 saatte alan bir aracın hızı kaç km/sa tir?

(75)

4. Bir araç 300 km lik bir yolu 6 saatte gidiyor.
Hızını saatte 10 km artırarak aynı yolu kaç saatte döner?

(5)

5. Bir motosikletli 4V km lik bir yolu $(V + 30)$ km/sa hızla 3 saatte gidiyor.

Motosikletlinin hızı kaç km/sa tir?

(120)

Nasıl Çözülür?



Hareket problemlerinde ya yolların ya da sürelerin eşitliğinden gidilir.

Örnek

Bir araç A ile B şehirleri arasındaki yolu, normal hızından saatte 10 km daha fazla hızla giderse 3 saatte, normal hızından saatte 8 km daha az hızlı giderse 4 saatte gidebiliyor.

Buna göre, A ile B şehirleri arasındaki yolun kaç km olduğunu bulalım.

Çözüm



Yolların mı, sürelerin mi eşitliğini kullanacağız?

Hocam alınan yollar eşit.

Doğru söze ne denir? Aracın normal hızı V km/sa olsun, 10 km/sa fazlası $V + 10$, 8 km/sa eksikliği $V - 8$ olur.

YOL	HIZ	SÜRE
AB	$V + 10$	3 saat
AB	$V - 8$	4 saat

$$|AB| = (V + 10) \cdot 3 = (V - 8) \cdot 4$$

$$\Rightarrow 3V + 30 = 4V - 32$$

$$\Rightarrow V = 62 \text{ km/saat}$$

Buradan,

$$|AB| = (V + 10) \cdot 3 = (62 + 10) \cdot 3$$

$$\Rightarrow |AB| = 72 \cdot 3$$

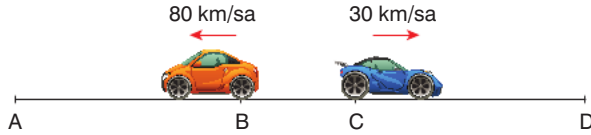
$$\Rightarrow |AB| = 216 \text{ km bulunur.}$$

Hareket Problemleri

Nasıl Çözülür?



Örnek

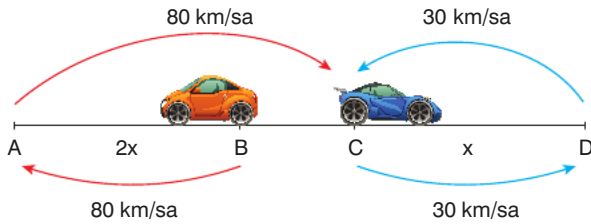


Şekilde, $|AB| = 2 \cdot |CD|$ ve $|BC| = 60$ km dir.

B ve C noktalarından saatteki hızları 80 km ve 30 km olan iki araç aynı anda ve birbirlerine zıt yönde hareket ediyorlar. C den hareket eden D ye varıp hiç durmadan geriye dönerek C ye, B den hareket eden de A ya varıp hiç durmadan geriye dönerek C ye aynı anda varıyor.

Buna göre, $|AD|$ uzunluğunu bulalım.

Çözüm



$$|AB| = 2 \cdot |CD| = 2x$$



Sürelerin eşitliğinden giderek çözüm yapalım. B den hareket edenin aldığı toplam yol $2x$ gitti, $2x$ de geri geldi bir de 60 km gitti. Hızı 80 km/saat. C den hareket edenin aldığı toplam yol x gitti, x geri geldi. Hızı 30 km/saat

$$t_1 = t_2$$

$$\Rightarrow \frac{2x + 2x + 60}{80} = \frac{x + x}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{4x + 60}{8} = \frac{2x}{3}$$

$$\Rightarrow 12x + 180 = 16x$$

$$\Rightarrow 180 = 4x$$

$$\Rightarrow x = 45 \text{ km dir.}$$

Buradan,

$$|AD| = 2x + 60 + x$$

$$\Rightarrow |AD| = 2 \cdot 45 + 60 + 45$$

$$\Rightarrow |AD| = 195 \text{ km bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Bir araç A şehrinden B şehrine 7 saatte gidiyor. Dönüşte hızını saatte 20 km artırarak A şehrine 5 saatte varıyor.

Buna göre, dönüşteki hızı kaç km/sa tir?

(70)

- 2.



Saatteki hızları 3V ve 5V olan iki araç A noktasından aynı anda B noktasına doğru harekete başlamıştır.

Hızı fazla olan araç öbüründen 150 dakika önce C noktasına vardığına göre, hızı az olan araç B noktasına kaç saatte gitmiştir?

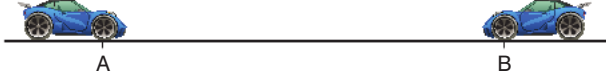
(6,25)

Nasıl Uygularım?



3. 100 km/sa

80 km/sa



Bir araç, iki kent arasındaki yolu saatte ortalama 100 km hızla gidip, hiç mola vermeden saatte ortalama 80 km hızla dönerek yolculuğu 9 saatte tamamlıyor.

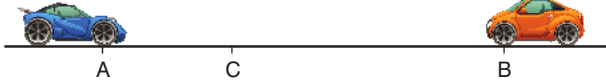
Bu iki kent arasındaki uzaklık kaç km dir?

(400)

4. Hızı saatte 75 km olan bir hareketli A noktasından, hızı saatte 60 km olan diğer bir hareketli B noktasından birbirlerine doğru aynı anda hareket ediyorlar ve C noktasında karşılaşıyorlar.

75 km/sa

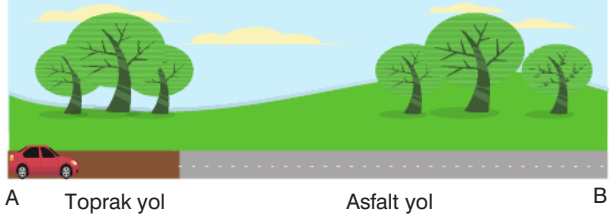
60 km/sa



A dan hareket eden, karşılaştıklarından 4 saat sonra B noktasına vardığına göre, |AB| yolu kaç km dir?

(675)

5.

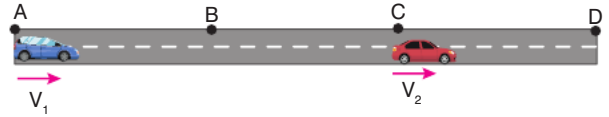


A ve B kentleri arasındaki yolun $\frac{1}{6}$ 'sı toprak yol, diğer kısmı ise asfalt yoldur. Yolun toprak kısmında saatte V km hızla giden bir araç, asfalt kısmında saatte 4V km hızla gitmiştir.

Bu koşullarda A ile B kentleri arasındaki yolun tamamını 4 saatte giden bu araç, yolun toprak kısmını kaç saatte gitmiştir?

 $\left(\frac{16}{9}\right)$

6.



Şekildeki yolda $|AD| = 4$, $|BC| = 3$, $|CD|$ olarak verilmiştir.

A ve C noktalarındaki araçlar V_1 ve V_2 hızları ile aynı anda aynı yöne doğru hareket ettiğinde D noktasına aynı zamanda varıyorlar.

Buna göre, $\frac{V_1}{V_2}$ oranı kaçtır?

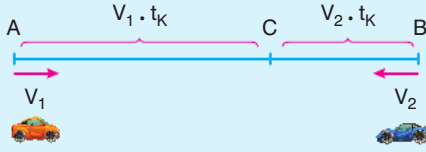
(3)

Hareket Problemleri

Nasıl Çözülür?



Zıt Yönde (Birbirine Doğru) Hareket Eden Araçlar



A ve B noktalarından aynı anda birbirlerine doğru yola çıkan iki araç, t_k saat sonra C de karşılaşıyorlarsa;

$$|AB| = (V_1 + V_2) \cdot t_k$$

$$\Rightarrow t_k = \frac{|AB|}{V_1 + V_2} \text{ dir.}$$

Örnek

Birbirlerinden 80 km uzakta olan iki hareketli aynı anda ve birbirlerine doğru harekete başladıktan 4 saat sonra karşılaşıyorlar.

Bu araçtan yalnızca biri hızını kaç km azaltırsa karşılaşmanın 1 saat geç gerçekleşebileceğini bulalım.

Çözüm



Birbirlerine doğru hareketlendiklerine göre sürelerin eşitliğinden gidilecek. Ama uzun uzun uğraşmak yerine yukarıda verdiğim kuraldan gidelim.

$$t_k = \frac{|AB|}{V_1 + V_2}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{80}{V_1 + V_2}$$

$$\Rightarrow V_1 + V_2 = 20 \text{ km/sa tir.}$$



Şimdi araçlardan biri hızını örneğin V km/sa azaltsın. Bu durumda karşılaşma 1 saat geç olacaksa, $t_g = 4 + 1 = 5$ saat sonra olacaktır.

$$t_g = \frac{|AB|}{V_1 - V + V_2} \Rightarrow 5 = \frac{80}{V_1 + V_2 - V}$$

$$\Rightarrow 5 = \frac{80}{20 - V}$$

$$\Rightarrow 20 - V = 16$$

$$\Rightarrow V = 4 \text{ km/sa bulunur.}$$

Örnek

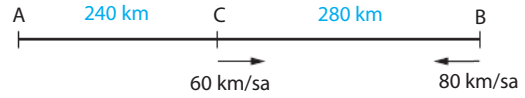
Aralarındaki uzaklık 520 km olan A ve B şehirlerinden A dan B ye doğru saatteki hızı 60 km olan bir araç yola çıktıktan 4 saat sonra B den A ya doğru saatteki hızı 80 km olan ikinci bir araç yola çıkıyor.

Buna göre, bu araçların karşılaşmalarından kaç saat sonra B den hareket eden aracın A ya ulaşacağını bulalım.

Çözüm



Önce A dan hareket eden araç 4 saat yol alsın. 4 saatte $4 \cdot 60 = 240$ km yol alır. A dan hareket eden araç 4 saat sonra C noktasına vardı. Tam bu zamanda B den diğer araç harekete başlıyor.



Şimdi arada $520 - 240 = 280$ km yol var. Karşılaşma problemi oldu değil mi?

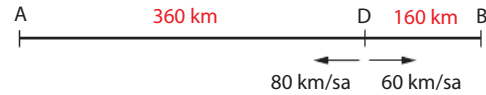
$$t_k = \frac{|CB|}{V_1 + V_2}$$

$$\Rightarrow t_k = \frac{280}{60 + 80}$$

$$\Rightarrow t_k = 2 \text{ saattir.}$$



B den hareket eden 2 saatte 160 km yol alacağından son durum aşağıdaki şekildeki gibi olur.



Hocam buradan sonrası kolay. Bize sorulan B den hareket eden aracın, $|AD|$ mesafesini kaç saatte alacağı.

$$t = \frac{|AD|}{80} = \frac{360}{80} = 4,5 \text{ saat bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Aralarında 420 km uzaklık bulunan A ve B şehirlerinden saatte V_1 ve V_2 kilometre hızlarla aynı saatte karşılıklı olarak sefere başlayan aynı firmaya ait iki otobüs 3,5 saat sonra karşılaşıyorlar.

Bu otobüslerin hızları toplamı kaç km/sa tir?

(120)

2.

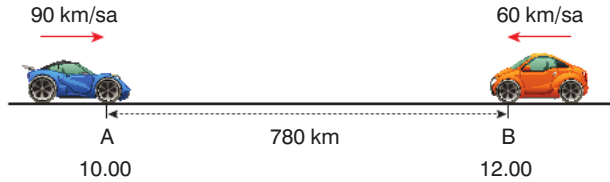


Şekildeki hızlarla aynı anda hareket eden iki araçtan hızlı olan A - B yolunun yarısına 1 saatte geliyor.

Buna göre, bu iki araç harekete başladıktan kaç dakika sonra karşılaşırlar?

(80)

3.

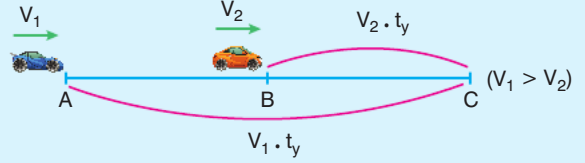


A ve B kentleri arasındaki mesafe 780 km'dir. Hızı saatte 90 km olan bir araç A dan B ye doğru saat 10.00 da, hızı saatte 60 km olan başka bir araç ise B den A ya doğru saat 12.00 da hareket ediyor.

Bu iki araç saat kaçta karşılaşırlar?

(16.00)

Nasıl Çözülür?

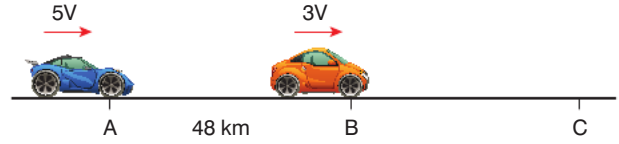


A ve B'den aynı anda ve aynı yönde harekete başlayan iki araç t_y saat sonra C'de yan yana geliyorlarsa;

$$|AB| = (V_1 - V_2) \cdot t_y$$

$$t_y = \frac{AB}{V_1 - V_2} \text{ dir.}$$

Örnek



Aralarındaki uzaklık 48 km olan A ve B şehirlerinden sırasıyla $5V$ ve $3V$ hızları ile aynı anda ve aynı yönde hareket eden iki araç 3 saat sonra C noktasında buluştuklarına göre $|BC|$ nin kaç km olduğunu bulalım.

Çözüm



Klasik yakalama sorusu, kural yukanda, çözüm aşağıda guzular.

$$t_y = \frac{|AB|}{5V - 3V}$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{48}{2V}$$

$$\Rightarrow 2V = 16$$

$$\Rightarrow V = 8 \text{ km/sa}$$

Buna göre hızları bulalım

$$5V = 5 \cdot 8 = 40 \text{ km/sa}$$

$$3V = 3 \cdot 8 = 24 \text{ km/sa}$$



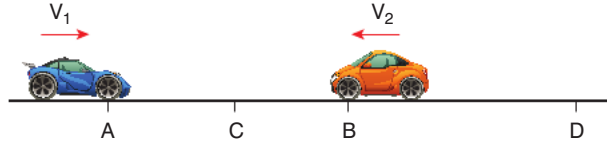
B den hareket eden aracın hızı saatte 24 km ve B den C ye 3 saatte git-
tiğine göre,

$$|BC| = 3 \cdot 24 = 72 \text{ km bulunur.}$$

Hareket Problemleri

Nasıl Çözülür?

Örnek



İki hareketli aynı anda ve birbirlerine doğru A ve B noktalarından hareket ederlerse 3 saat sonra C de karşılaşıyorlar. İki hareketli aynı anda ve aynı yönde hareket ederlerse A dan hareket eden hareketli diğerine 5 saat sonra D de yetişiyor.

Buna göre, iki aracın hızlarının oranını bulalım.

Çözüm



İlk durumda birbirlerine doğru hareket söz konusu. O halde, karşılaşma problemlerinde kullanılan kuralımızı yazalım. Araçların hızları V_1 ve V_2 verilmiş.

$$t_k = \frac{|AB|}{V_1 + V_2} \Rightarrow 3 = \frac{|AB|}{V_1 + V_2}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot V_1 + 3 \cdot V_2 = |AB| \text{ (I)}$$



Şimdi yetişme kuralımıza göre denklemi söyleyin.

Hocam, aradaki mesafe bölü hızlar farkı olacak.

$$t_y = \frac{|AB|}{V_1 - V_2} \Rightarrow 5 = \frac{|AB|}{V_1 - V_2}$$

$$\Rightarrow 5 \cdot V_1 - 5 \cdot V_2 = |AB| \text{ (II)}$$

Buna göre, (I) ve (II) nin eşitliğinde,

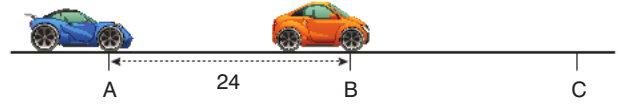
$$3 \cdot V_1 + 3 \cdot V_2 = 5 \cdot V_1 - 5 \cdot V_2$$

$$\Rightarrow 8 \cdot V_2 = 2 \cdot V_1$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 4 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?

1.



Aralarında 24 km mesafe bulunan A ve B semtlerinden aynı anda yola çıkan iki otomobil C semtine 40 dakika sonra aynı anda varıyorlar.

A dan yola çıkan otomobilin hızı, B den yola çıkan otomobilin hızından saatte kaç km fazladır?

(36)

2.

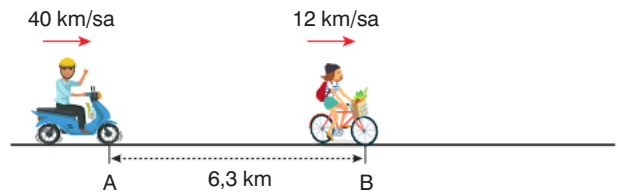


A şehrinde saatteki hızı 80 km olan bir araç, B şehrinde de saatteki hızı 100 km olan diğer bir araç karşılıklı olarak aynı anda birbirine doğru hareket başladıktan 4 saat sonra karşılaşıyorlar.

Buna göre, bu iki araç aynı anda aynı yöne doğru hareket etseydi hızlı olan araç yavaş olan araca kaç saat sonra yetişirdi?

(36)

3.



Şekildeki A ve B kentleri arasındaki uzaklık 6,3 km dir. A dan hızı saatte 40 km olan bir motosikletli, B den hızı saatte 12km olan bir bisikletli aynı anda, aynı yöne doğru yola çıkıyorlar.

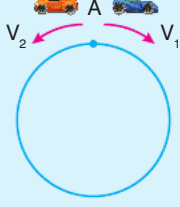
Bisikletli kaç km yol aldığında motosikletli onu yakalar?

(2,7)

Nasıl Çözülür?

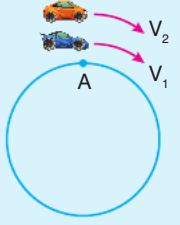


Dairesel Pist Etrafında İki Hareketlinin Durumları



Şekildeki dairese pistin A noktasından aynı anda zıt yönde tur atan iki hareketlinin ilk kez karşılaşma süresi t_k ise,

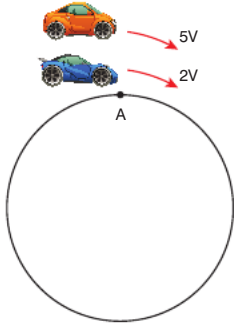
$$t_k = \frac{\text{Çevre}}{V_1 + V_2} \text{ dir.}$$



Şekildeki dairese pistin A noktasından aynı anda aynı yönde tur atan iki hareketlinin ilk kez yan yana gelme süresi t_y ise,

$$t_y = \frac{\text{Çevre}}{V_1 - V_2} \text{ dir. } (V_1 > V_2)$$

Örnek



Çevresi 1200 metre olan şekildeki dairese pistin A noktasından aynı anda ve aynı yönde hareket eden, hızları dakikada 5V ve 2V metre olan iki hareketli, ilk kez 8 dakika sonra tekrar yan yana geldiğine göre, hızı az olan hareketlinin dakikada kaç metre yol aldığı bulalım.

Çözüm



Düz yoldaki yakalama sorusu gibi düşünersek aynı formül burada da geçerlidir.

$$t_y = \frac{\text{Çevre}}{V_1 - V_2} \Rightarrow 8 = \frac{1200}{5V - 2V}$$

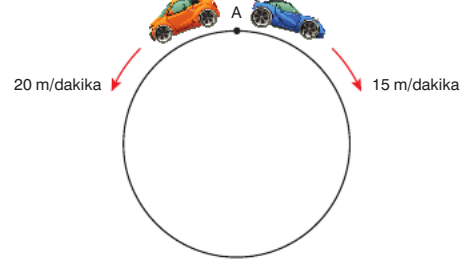
$$\Rightarrow 3V = \frac{1200}{8}$$

$$\Rightarrow 3V = 150$$

$$\Rightarrow V = 50 \text{ m/dakika olur.}$$

Buradan, hızı az olanın hızı $2V = 2 \cdot 50 = 100 \text{ m/dakika}$ bulunur.

Örnek



Hızları dakikada 15 metre ve 20 metre olan iki hareketli çember üzerindeki A noktasından aynı anda ve birbirlerine ters yönde hareket ettikten 6 dakika sonra ilk kez karşılaşıyorlar.

Karşılaşmalarından kaç dakika sonra, hızı az olan hareketlinin A ya varacağını bulalım.

Çözüm

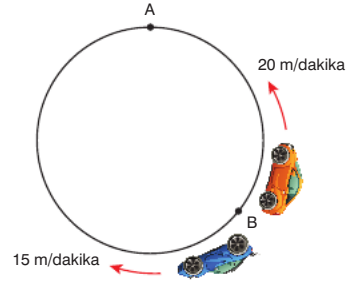


Dairesel de olsa karşılaşma sorusunda kural aynı.

$$t_k = \frac{\text{Çevre}}{V_1 + V_2} \Rightarrow 6 = \frac{\text{Çevre}}{15 + 20}$$

$$\Rightarrow \text{Çevre} = 6 \cdot 35$$

$$\Rightarrow \text{Çevre} = 210 \text{ metredir.}$$



Hızı az olan hareketli 210 metrelik yolu kaç dakikada alır.

$$t_1 = \frac{\text{Çevre}}{V_1} = \frac{210}{15} = 14 \text{ dakikadır.}$$

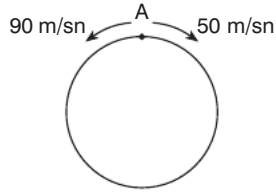


Bu iki aracı 6 dakika sonra karşılaştırmışlardı o zaman yavaş olan karşılaştıktan $14 - 6 = 8$ dakika sonra A noktasına varmıştır

Nasıl Uygularım?



1.



Şekildeki dairesel pistin A noktasından şekildeki hızlarla zıt yönde aynı anda harekete başlayan iki araç 11 sn sonra karşılaşıyorlar.

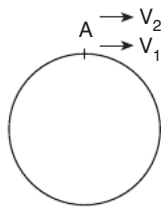
a) Pistin çevresi kaç metredir?

(1540)

b) Karşılaşmalarından sonra hızı yavaş olan hareketli A noktasına kaç sn'de ulaşır?

(19,8)

2.

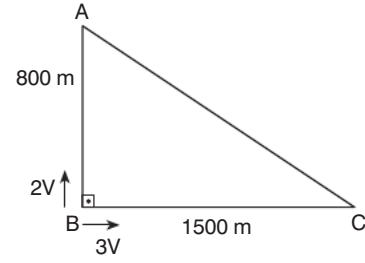


Şekildeki dairesel pistin A noktasından aynı anda yola çıkan iki hareketli aynı yönde giderlerse 8 dakika sonra tekrar yan yana geliyorlar, zıt yönde giderlerse 6 dakika sonra karşılaşıyorlar.

Buna göre, $\frac{V_1}{V_2}$ kaçtır? ($V_1 > V_2$)

(7)

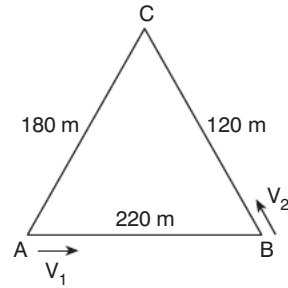
3.



Dik üçgen şeklindeki bir pistin B köşesinden, hızları saatte 2V ve 3V olan iki araç, aynı anda ve şekildeki gibi harekete başlarsa A dan kaç metre uzakta karşılaşırlar?

(800)

4.



A ve B den birer araç saat yönünün tersinde, ABC pisti üzerinde aynı anda tur atmaya başlıyorlar.

A dan yola çıkan araç bir turunu 5 saatte, B den yola çıkan araç bir turunu 10 saatte tamamladığına göre, araçlar ilk defa nerede yan yana gelirler?

(AC arasında)

Nasıl Çözülür?



Bağıl Hız Soruları



Bağıl hız sorularında aynı yönlü hızlar toplanır, farklı yönlü hızlar çıkarılır. Örneğin, nehirde hareket eden bir motor için, motorun hızı V_M , akıntının hızı V_A olmak üzere,

Kayığın hızı akıntıya karşı, $V_M - V_A$ iken,
Akıntı yönünde, $V_M + V_A$ alınır. ($V_M > V_A$)

Örnek

Bir motor bir nehirde bir yolu akıntıya karşı 45 dakikada gidiyor ve aynı yolu, akıntı yönünde 30 dakikada geri dönüyor.

Akıntının hızının motorun hızına oranını bulalım.

Çözüm

Motorun hızı: V_M , Akıntının hızı: V_A , Gidilen yol: x olsun.

$$x = (V_M - V_A) \cdot 45 \text{ (Akıntıya karşı)}$$

$$x = (V_M + V_A) \cdot 30 \text{ (Akıntıyla aynı yönde)}$$



İki eşitliği taraf tarafa oranlarsak,

$$\frac{x}{x} = \frac{45 \cdot (V_M - V_A)}{30 \cdot (V_M + V_A)} \Rightarrow 1 = \frac{3 \cdot (V_M - V_A)}{2 \cdot (V_M + V_A)}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{3V_M - 3V_A}{2V_M + 2V_A}$$

$$\Rightarrow 2V_M + 2V_A = 3V_M - 3V_A$$

$$\Rightarrow 5V_A = V_M \Rightarrow \frac{V_A}{V_M} = \frac{1}{5} \text{ bulunur.}$$

Örnek

Durgun sudaki hızı saatte 40 km olan bir kayak, akıntı hızı 8 km olan bir nehirde akıntı yönünde belli bir süre gidiyor ve hiç durmadan başladığı yere geri gidiyor.

Gidiş dönüş için kayakçının sadece 4 saati olduğuna göre, kayığın toplam aldığı mesafeyi bulalım.

Çözüm



Burada hesabımızı iyi yapmamız lazım. Kıyıda 4 saatte gidip gelecek kadar uzağa açılmamız. Yoksa denizin ortasında duba gibi kalırız.

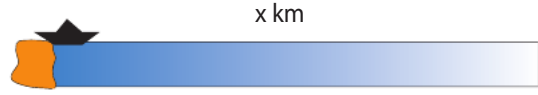
Buna göre,

Kayığın akıntı yönündeki hızı: $40 + 8 = 48 \text{ km/saat}$

Kayığın akıntının tersi yönündeki hızı: $40 - 8 = 32 \text{ km/saat}$



Toplam gidiş 4 saat sürecekti, gidiş t saat sürerse dönüş $(4 - t)$ saat sürecektir. Kayığın gidiş dönüşte aldığı yol eşit olduğundan,



$$x = 48 \cdot t = 32 \cdot (4 - t) \Rightarrow 3 \cdot t = 2 \cdot (4 - t)$$

$$\Rightarrow 3t = 8 - 2t \Rightarrow 5t = 8 \Rightarrow t = \frac{8}{5} \text{ saattir.}$$

O halde, kayığın aldığı toplam yol;

$$2 \cdot x = 2 \cdot 48 \cdot t \Rightarrow 2 \cdot x = 2 \cdot 48 \cdot \frac{8}{5} \Rightarrow 2 \cdot x = 153,6 \text{ km bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?

1.



Bir deniz motoru A ile B noktaları arasındaki mesafeyi saatte $(v + 40)$ km hızla 36 dakikada gidip, saatte $(v - 14)$ km hızla 90 dakikada geliyor.

Buna göre, $|AB|$ uzunluğu kaç km dir?

(54)

2. Bir koşucunun hızının rüzgârın hızına oranı $11'$ dir.

Bu koşucu 3 km'lik bir mesafeyi, rüzgâra karşı 6 dakikada koşabildiğine göre, koşucunun saatteki hızı kaç km dir?

(33)

Hareket Problemleri

Nasıl Çözülür?



Tren Soruları



Tren ve tünel sorularında trenin tünelden tamamen çıkması için trenin, tünelin boyu ile kendi boyunun toplamı kadar mesafeyi gitmesi gerekir.

x km uzunluğundaki bir tren, y km uzunluğundaki bir tüneli V km/saat hızla t saatte geçmişse,

$$x + y = V \cdot t \text{ olur.}$$

Örnek

Saatte 120 km hızla hareket eden bir tren, 1600 metrelik bir tüneli 1,5 dakikada geçtiğine göre, trenin boyunun kaç metre olduğunu bulalım.

Çözüm



Öncelikle birimleri aynı türe çevirmeliyiz ki sonradan problem çıkmasın.

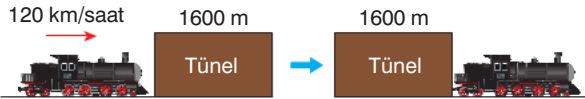
$$V = 120 \frac{\text{km}}{\text{sa}}$$

$$\Rightarrow V = 120 \cdot \frac{1000}{60} \frac{\text{m}}{\text{dakika}}$$

$$\Rightarrow V = 2000 \frac{\text{m}}{\text{dakika}}$$



Trenin boyu x metre olsun. Bu durumda, trenin tüneli geçmesi için alması gereken yol $(1600 + x)$ metre olur. Bu mesafeyi de 1,5 dakikada geçmesi gerekiyordu.



Buna göre,

$$1600 + x = 2000 \cdot 1,5$$

$$\Rightarrow 1600 + x = 3000$$

$$\Rightarrow x = 1400 \text{ metre bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?



- 150 metre uzunluğundaki bir tren, 80 km/saat hızla giderken bir tüneli 45 saniyede geçtiğine göre, tünelin uzunluğu kaç metredir?

(850)

- Uzunlukları sırasıyla 1,4 km ve 1,8 km olan iki tünelden, birincinin bitiş noktasıyla ikincinin başlangıç noktası arasındaki uzaklık 4,5 km dir.

Uzunluğu 0,3 km, saatteki hızı 120 km olan bir tren, birinci tünele girdiği andan kaç dakika sonra ikinci tünelden tamamen çıkar?

(4)

Nasıl Çözülür?



Ortalama Hız

$$V_{\text{ort}} = \frac{\text{Toplam Yol}}{\text{Toplam Zaman}}$$

Bir araç bir yolu V_1 hızıyla gidip V_2 hızıyla dönüyorsa gidiş dönüşteki ortalama hızı,

$$V_{\text{ort}} = \frac{2V_1 \cdot V_2}{V_1 + V_2} \text{ formülüyle daha kolay hesaplanabilir.}$$

Örnek

Bir araç 80 km/saat hızla gittiği yolu 120 km/saat hızla geri dönüyor.

Bu aracın, gidiş dönüşteki saatteki ortalama hızını bulalım.

Çözüm



Toplam yol bölü toplam zaman ortalama hızı veriyordu. Ama biz burada yukarıdaki pratik kuralı uygulayalım.

$$V_{\text{ort}} = \frac{2 \cdot V_1 \cdot V_2}{V_1 + V_2} \Rightarrow V_{\text{ort}} = \frac{2 \cdot 80 \cdot 120}{80 + 120} = 96 \text{ km/saat bulunur.}$$

Örnek

Bir araç bir yolun $\frac{1}{4}$ ünü V hızıyla, $\frac{1}{6}$ sini $\frac{V}{2}$ hızıyla, kalanını da $2V$ hızıyla gidiyor.

Bu aracın yol boyunca ortalama hızını bulalım.

Çözüm



Yolun tamamı EKOK(4, 6) = 12 olduğundan $12x$ olsun.

$$\frac{1}{4} \text{ ünü } (3x \text{ ini}) \rightarrow V \text{ ile}$$

$$\frac{1}{6} \text{ sini } (2x \text{ ini}) \rightarrow \frac{V}{2} \text{ ile}$$

kalanını $(7x \text{ ini}) \rightarrow 2V$ ile gidiyor.

$$V_{\text{ort}} = \frac{\text{Toplam yol}}{\text{Toplam zaman}}$$

$$\Rightarrow V_{\text{ort}} = \frac{12x}{\frac{3x}{V} + \frac{2x}{\frac{V}{2}} + \frac{7x}{2V}}$$

$$\Rightarrow V_{\text{ort}} = \frac{8V}{7} \text{ olur.}$$

Nasıl Uygularım?



1. Bir araç bir yolun yarısını V hızıyla, kalanını $2V$ hızıyla gidiyor ve yolun tamamını V hızıyla geri dönüyor.

Bu aracın, gidiş dönüşte ortalama hızı kaç V dir?

$\left(\frac{8}{7}\right)$

2.



$|AB| = |BC| = 2 \cdot |CD| = 2 \cdot |DE|$ olmak üzere,

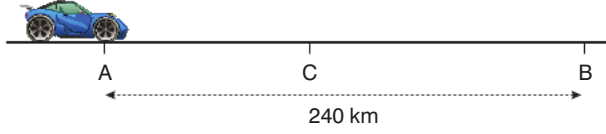
A dan harekete başlayan bir araç B de hızını 2 katına çıkararak yoluna devam ediyor. C noktasından itibaren ise hızını ilk hızının 3 katına çıkararak E noktasına varıyor.

Aracın yol boyunca ortalama hızı 72 km/sa olduğuna göre, bu aracın ilk hızı kaç km/sa tir?

(44)

Hareket Problemleri

1.

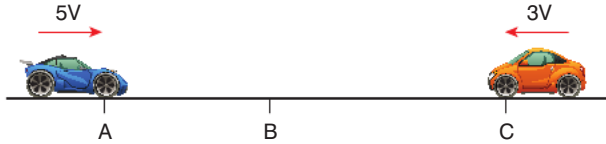


A ile B arası 240 km dir. A dan yola çıkan bir araç AC arasını saatte V km hızla 3 saatte, CB arasını saatte $(V + 30)$ km hızla 2 saatte almıştır.

Buna göre, V kaç km/sa tir?

- A) 24 B) 32 C) 36 D) 40 E) 42

2.



A ve B noktalarında bulunan iki hareketliden birisi A dan C ye doğru $5V$ hızla, diğeri de C den A ya doğru $3V$ hızla birbirleriyle aynı anda harekete başlıyor. A dan hareket eden C ye varıp hiç vakit kaybetmeden geriye dönerek B ye, C den hareket eden A ya varıp hiç vakit kaybetmeden geriye dönerek B ye aynı anda varıyor.

Buna göre, $\frac{|BC|}{|AC|}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{5}{7}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{7}{8}$

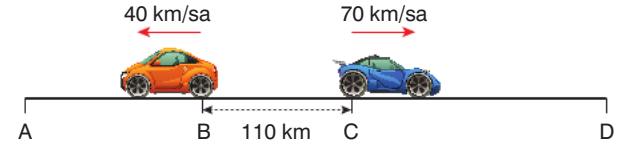
3.

Aralarında 1200 km mesafe bulunan iki hareketli A ve B den karşılıklı olarak hareket edip 8 saat sonra karşılaşıyorlar.

Hareketlilerden birinin hızı diğerrinin hızının dört katı olduğuna göre, hızlı olan hareketli $|AB|$ yolunu kaç saatte alır?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

4.



Şekilde verilen hızlarla, B ve C den aynı anda ve birbirlerine zıt yönde hareket eden iki araç sırasıyla A ve D ye ulaştıktan sonra hiç vakit kaybetmeden geriye dönerek hızlarını değiştirmeden yollarına devam ediyorlar.

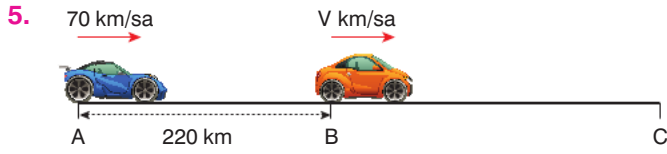
$|CD| = 3 \cdot |AB|$ olmak üzere, bu iki araç hareketlerinden 9 saat sonra karşılaştığına göre, karşılaştıkları noktanın C ye olan uzaklığı kaç km dir?

- A) 30 B) 40 C) 50 D) 60 E) 70

İPUÇU

Karşılaşma sorusu gibi düşünün alınacak toplam mesafe bölü hızlar toplamı.

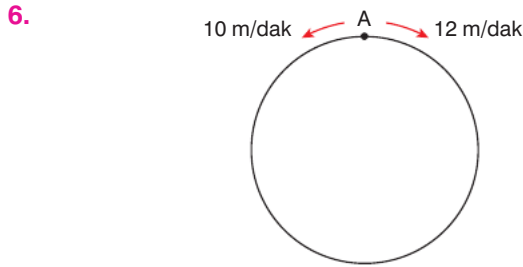
Hareket Problemleri



Aralarında 220 km mesafe bulunan, A ve B noktalarındaki iki hareketliden birinin hızı saatte 70 km değerinin hızı V km dir.

Aynı yönde hareket eden bu iki araçtan hızlı olanı diğerine 5 saat sonra yetiştiğine göre, V kaçtır?

- A) 18 B) 22 C) 24 D) 26 E) 28



Şekildeki dairesel pistin A noktasından aynı anda ve şekilde belirtilen yönlerde, iki hareketli 10 m/dak ve 12 m/dak hızlarla hareket ediyor.

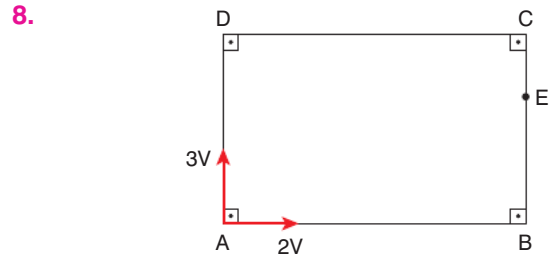
İlk karşılaşmaları gerçekleşinceye kadar yavaş olan hareketli 60 m yol aldığına göre, pistin çevresi kaç m dir?

- A) 112 B) 122 C) 132 D) 144 E) 156

7. A ve B kentlerinden saatteki hızları sırasıyla, v_1 ve v_2 olan ($v_1 > v_2$) iki araç, birbirlerine doğru aynı anda hareket ederlerse $\frac{3}{2}$ saat sonra karşılaşıyorlar. Bu araçlar aynı kentlerden aynı yönde hareket ederlerse hızlı giden araç 5 saat sonra diğerine yetişiyor.

Buna göre, $\frac{v_1}{v_2}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{11}{5}$ B) $\frac{13}{5}$ C) $\frac{13}{7}$ D) $\frac{15}{7}$ E) $\frac{13}{5}$



Şekildeki, dikdörtgen biçimli ABCD koşu pistinin A köşesinde iki koşucu durmaktadır. Koşuculardan biri B ye doğru saatte $2V$ hızıyla, öteki de D ye doğru saatte $3V$ hızıyla aynı anda koşmaya başlıyor. Koşucular ilk kez [BC] üzerindeki E noktasında karşılaşıyorlar.

$|EC| = 140$ m olduğuna göre, ABCD dikdörtgeninin çevresi kaç m dir?

- A) 900 B) 1100 C) 1200 D) 1300 E) 1400

9. Bir araç A kenti ile B kenti arasındaki yolu saatte ortalama $3v$ km hızla giderek 10 saatte alıyor.

Bu araç aynı yolun yarısını ortalama $2v$ km/saat hızla aldıktan sonra, tüm yolu yine 10 saatte tamamlamak için yolun kalan kısmını ortalama kaç km/saat hızla gitmelidir?

- A) $6v$ B) $5v$ C) $4v$ D) $\frac{10v}{3}$ E) $\frac{11v}{3}$

10. Hızları farkı 4 km/saat olan iki araç, aynı noktadan aynı anda, zıt yönde hareket ediyorlar.

Hareketlerinden 3 saat sonra aralarındaki uzaklık 132 km olduğuna göre, bu süre boyunca daha yavaş giden araç kaç km yol almıştır?

- A) 72 B) 60 C) 54 D) 48 E) 46

BÖLÜM 20

ÖĞRENELİM

VERİ - GRAFİK PROBLEMLERİ

Veri - Grafik Problemleri

Ne Bilmeliyim? 1

Aritmetik Ortalama

$x_1, x_2, \dots, x_n$ veri grubunun "aritmetik ortalaması",

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \text{ dir.}$$

Nasıl Çözülür?

Örnek

Yaş	15	18	19	20
Kişi Sayısı	4	2	3	1

Yukarıdaki tablo bir gruptaki kişilerin yaşlarına göre dağılımını göstermektedir.

Buna göre, bu grubun yaş ortalamasını bulalım.

Çözüm



Aritmetik ortalama, gruptaki kişilerin yaşları toplamının kişi sayısına bölümünden bulunur. Buna göre, yaş ortalaması,

$$\bar{x} = \frac{15 \cdot 4 + 18 \cdot 2 + 19 \cdot 3 + 20 \cdot 1}{4 + 2 + 3 + 1} = \frac{173}{10} = 17,3 \text{ tür.}$$

Örnek

20 kişilik bir sınıfın matematik notlarının ortalaması 61'dir.

Bu sınıftaki kızların matematik notlarının ortalaması 70, erkeklerin matematik notlarının ortalaması 55 olduğuna göre, sınıftaki kız öğrenci sayısını bulalım.

Çözüm



Aritmetik ortalama ile kişi sayısı çarpılırsa notların toplamı bulunur. O halde, kızların ve erkeklerin notları toplamını bularak işe başlayalım.

$$\text{Kızların notlar toplamı} = k \cdot K_{\text{ort}} = 70 \cdot k$$

$$\text{Erkeklerin notlar toplamı} = e \cdot E_{\text{ort}} = 55 \cdot e$$

$$\text{Sınıfın notlar toplamı} = s \cdot S_{\text{ort}} = 61 \cdot 20$$

Buna göre,

$$\text{Sınıfın notlar toplamı} = s \cdot S_{\text{ort}} = k \cdot K_{\text{ort}} + e \cdot E_{\text{ort}}$$

$$\Rightarrow 61 \cdot 20 = 70 \cdot k + 55 \cdot e$$

$$\Rightarrow 61 \cdot 20 = 5 \cdot [14k + 11e]$$

$$\Rightarrow 61 \cdot 4 = 14k + 11e$$

$$\Rightarrow 244 = 14k + 11e$$



Bir de bu denkleme ek olarak sınıftaki toplam öğrenci sayısını biliyoruz.

$$-11 / \quad e + k = 20 \quad (\text{sınıf mevcudu})$$

$$11e + 14k = 244$$

$$3k = 24 \Rightarrow k = 8 \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?

1. 5, 6, 6, 7, 8, x, y, 9, 12

veri grubunun aritmetik ortaması 8 olduğuna göre, $x + y$ kaçtır?

(19)

2. 15 i bayan olan 25 kişilik bir grubun yaş ortalaması 30 dur.

Erkeklerin yaş ortalaması 36 olduğuna göre, bayanların yaş ortalaması kaçtır?

(26)

Ne Bilmeliyim? 2

Mod (tepe değeri)

- Bir veri grubunda en çok tekrar eden sayıya bu grubun “**modu** (tepe değeri)” denir.

Medyan (Ortanca)

- Terimleri küçükken büyüğe sıralanmış bir veri grubundaki terim sayısı tek ise tam ortadaki sayı, terim sayısı çift ise ortadaki iki sayının aritmetik ortalaması “**medyan**” dir.

Nasıl Çözülür?

Örnek

12, 4, 6, 6, 11, 4, 6, 8, 7

veri grubunun medyanı ile modunu bulalım.

Çözüm



Öncelikle verileri sıraya koyalım. Terim sayısı tek.

4, 4, 6, 6, 6, 7, 8, 11, 12



Sıralamada ortadaki yani göbekteki sayı 6 olduğundan medyan (ortanca) 6 dir.



Veri grubunda en çok kullanılan sayı 6 olduğundan mod (Tepe değeri) 6 dir.

Örnek

- ✓ 4, 5, 7, 10, 14, 14, 15, 16 veri grubunda çift sayıda terim olup ortadaki iki değerin aritmetik ortalaması $\frac{10 + 14}{2} = 12$ olduğundan **medyan 12 dir.**

- ✓ 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5 veri grubunun **modu 3 tür.**



Tepe değeri, bazı veri gruplarında birden fazla değer olabileceği gibi bazı veri gruplarında olmayabilir.

- ✓ 1, 1, 2, 3, 3, 3, 5, 8, 8, 8 veri grubunda 3 ve 8 sayıları diğerlerine göre, en çok tekrar etmektedir. Bu nedenle veri grubunun **tepe değeri 3 ve 8 olmak üzere iki tanedir.**

- ✓ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ve 2, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6 veri guruplarının **tepe değeri yoktur.** Çünkü her iki veri gurubunun da diğerlerine göre daha çok tekrar eden herhangi bir elemanı yoktur.

Nasıl Uygularım?

1. 17, 7, 5, 11, 13, 9, 6, 6, 7, 5
veri grubunun mod değerleri toplamı kaçtır?

(18)

2. 5, 3, 1, 7, x, y, 4
veri grubunun medyanı 5 olduğuna göre, x + y en az kaçtır?

(10)

3. Aşağıdaki veri gruplarından hangilerinin mod değeri yoktur?

- I. 2, 3, 3, 4, 4, 5, 7
II. 7, 5, 4, 4, 3, 3, 1, 8
III. 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4
IV. 11, 8, 7, 11, 5, 6, 11

(III)

Ne Bilmeliyim? 3

Standart Sapma

Bir veri grubunun standart sapma değeri bulunurken,

- ✓ Verilerin aritmetik ortalaması bulunur.
- ✓ Her bir veri ile aritmetik ortalama arasındaki fark bulunur.
- ✓ Bulunan farkların her birinin karesi alınır ve elde edilen sayılar toplanır.
- ✓ Bu toplam, veri sayısının 1 eksiğine bölünür ve çıkan sonucun karekökü alınır.

n elemanlı bir veri grubunun aritmetik ortalaması $\bar{x}$ olsun.

Veriler, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ şeklinde ise bu veri grubunun standart sapması (S);

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

formülü ile hesaplanır.

- ✓ Veriler arasında açıklık arttıkça standart sapma büyür.
- ✓ Aritmetik ortalamaları eşit olan veri gruplarındaki farklılık standart sapma yardımıyla belirlenir.
- ✓ Bir veri grubunun standart sapması, veri grubunda bulunan terimlerin aritmetik ortalamasının ne kadar uzağına yayıldığını gösterir.
- ✓ Büyük standart sapma terimlerin ortalamadan uzağa yayıldığını, küçük standart sapma ise terimlerin ortalamasının yakınına yayıldığını gösterir.
- ✓ Standart sapma;

Küçükse

- i. Risk az
- ii. Veriler arası fark az
- iii. İstikrar var
- iv. Veri grubu homojen
- v. Ayırt edicilik az

şeklinde yorumlanabilir.

Büyükse

- Risk fazla
- Veriler arası fark fazla
- İstikrar yok
- Veri grubu heterojen
- Ayırt edicilik fazla

Nasıl Çözülür?

Örnek

1, 3, 4, 6, 6

veri grubunun, standart sapmasını bulalım.

Çözüm



Öncelikle aritmetik ortalamayı bulalım.

$$\bar{x} = \frac{1 + 3 + 4 + 6 + 6}{5} = 4 \text{ 'tür.}$$



Veri grubunun eleman sayısı 5 olduğundan,

$$S = \sqrt{\frac{(1-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (6-4)^2 + (6-4)^2}{5-1}}$$

$$\Rightarrow = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ bulunur.}$$

Nasıl Uygularım?

1. Aşağıda beş öğrencinin matematik sınavlarından aldıkları notlar verilmiştir.

Akif: 70, 30, 50, 80

Kubat: 40, 60, 50, 55

Ömer: 80, 30, 90, 20

Enes: 100, 90, 40, 50

Murat: 40, 45, 40, 48

Yukarıdaki verilere göre, hangi öğrencinin standart sapması en küçüktür?

- A) Akif B) Kubat C) Ömer
D) Enes E) Murat

(E)

İPUCU

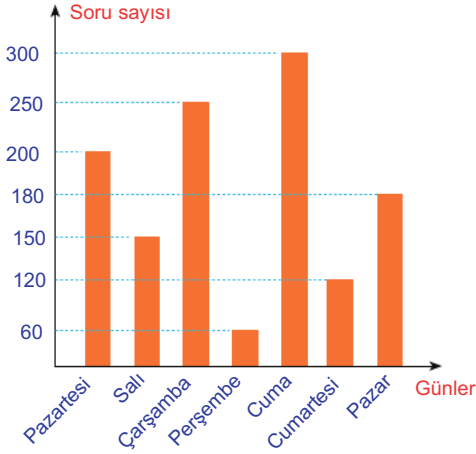
Aritmetik ortalamalar eşit olduğunda, veriler birbirine ne kadar yakınsa standart sapma o kadar küçüktür.

Nasıl Çözülür?



Sütun Grafiği: Gözlem sonuçlarının yatay eksen üzerinde sütunlarla gösterilmesiyle oluşturulan grafiklerdir.

Örnek



Yukarıdaki tablo bir öğrencinin bir haftada çözdüğü günlük soru sayısının dağılımını göstermektedir.

Buna göre, tabloyu yorumlayalım.

Çözüm



En uzun sütun Cuma gününde olduğundan en çok soruyu Cuma günü (300 soru) çözmüştür.



Hocam en kısa sütun Perşembe günü olduğundan en az soruyu Perşembe günü (60 soru) çözmüştür.



Öğrenci bir haftada toplam,

$$60 + 120 + 150 + 180 + 200 + 250 + 300 = 1260 \text{ soru çözmüştür.}$$



Öğrencinin haftalık ortalama çözdüğü soru sayısı

$$\frac{60 + 120 + 150 + 180 + 200 + 250 + 300}{7} = 18$$



Öğrenci 3 gün ortalamanın üstünde soru çözmüştür.



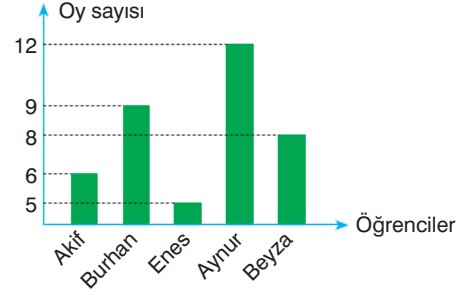
Cuma günü Pazartesi günü çözdüğü soru sayısının % 50 si kadar fazla soru çözmüştür.

$$\frac{\text{Cuma}}{300} - \frac{\text{Pazartesi}}{200} = 100 \text{ soru fazla çözmüş.}$$

100 soru 200 sorunun % 50'sidir.

Nasıl Uygularım?

1.



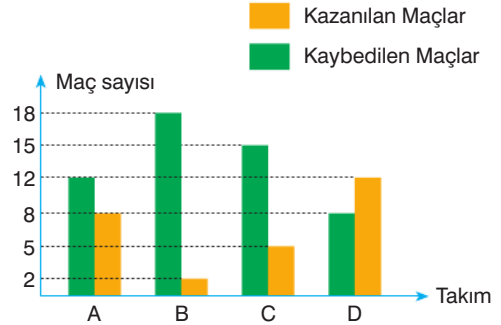
Yukarıda bir sınıftaki başkanlık seçiminde adayların aldığı oyları gösteren sütun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır?

- A) Toplam oy sayısı 40'tır.
- B) Başkan olarak Aynur seçilmiştir.
- C) Aynur oyların % 30 unu almıştır.
- D) Burhan, Enes ve Akif'in oylarının toplamından fazla oy almıştır.
- E) En az oyu Enes almıştır.

(D)

2.



Yukarıda bir ligteki 4 takımın kazandığı ve kaybettiği maç sayıları gösteren sütun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

- I. Lig lideri D takımıdır.
- II. Her bir takım 20 maç yapmıştır.
- III. A takımını maçlarının % 60'ını kaybetmiştir.

ifadelerinden hangisi doğrudur?

- A) I ve II
- B) II ve III
- C) I ve III
- D) Yalnız I
- E) I, II ve III

(E)

Veri - Grafik Problemleri

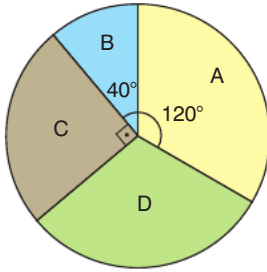
Nasıl Çözülür?



Bir değişkenin bir bütün içerisindeki oranını belirlemek için "daire grafiği", daha uygundur.

Örnek

Bir ilaç karışımındaki A, B, C, D maddelerinin miktarlarını gösteren daire grafiği aşağıda verilmiştir.



Karışımındaki D maddesi miktarı 55 mg olduğuna göre, A, B ve C madde miktarını bulalım.

Çözüm



Grafikte gördüklerimizi bir yazalım.

A maddesi, 120°

B maddesi, 40°

C maddesi, 90° lik, dilimle gösterilmiş.

O halde,

D maddesi; $360^\circ - (120^\circ + 40^\circ + 90^\circ) = 110^\circ$ dilime karşılık gelir.



D maddesinin ağırlığı 55 mg verilmişti. Orantıyı kuralım.

D maddesi; $110^\circ \rightarrow 55 \text{ mg}$ (Derecenin yarısı)

A maddesi; $120^\circ \rightarrow 60 \text{ mg}$ dir.

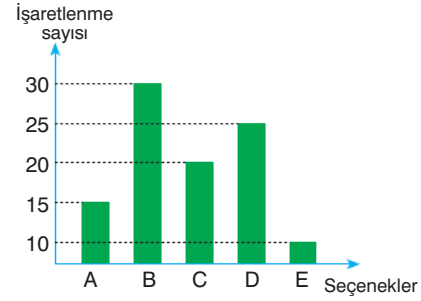
B maddesi; $40^\circ \rightarrow 20 \text{ mg}$ dir.

C maddesi; $90^\circ \rightarrow 45 \text{ mg}$ dir.

Nasıl Uygularım?

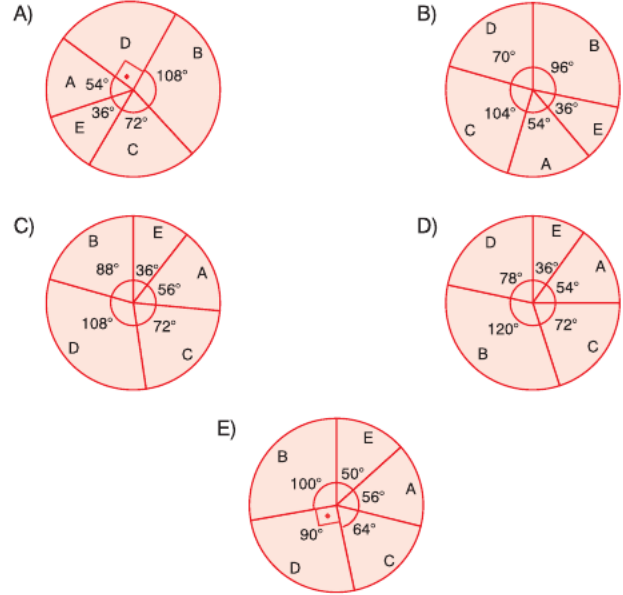


1.



Yukarıdaki grafik 100 soruluk bir sınavda, bir öğrencinin 5 seçenekten hangisinin kaç defa işaretlediğini göstermektedir.

Buna göre, bu verilere ait dairesel grafik aşağıdakilerden hangisidir?



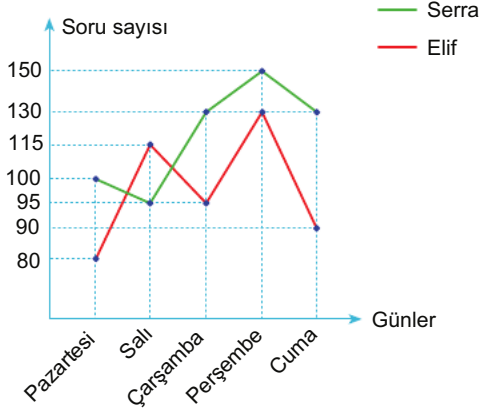
(A)

Nasıl Çözülür?



Bir değişkenin zaman içerisindeki değişimini incelemek için "çizgi grafiği" daha uygundur.

Örnek



Yukarıdaki grafik, Serra ile Elif'in haftanın beş gününde çözmüş oldukları soru sayılarını göstermektedir.

Bu grafiği yorumlayalım.

Çözüm



Serra toplam; $100 + 95 + 130 + 150 + 130 = 605$ soru çözmüştür.



Elif toplam; $80 + 115 + 95 + 130 + 90 = 510$ soru çözmüştür.



Elif, en fazla (130 soru) soruyu **Perşembe günü** çözmüştür.



Serra en az (95 soru) soruyu **Salı günü** çözmüştür.



Elif yalnızca Salı günü, Serra'dan daha fazla soru çözmüştür. ($115 - 95$)

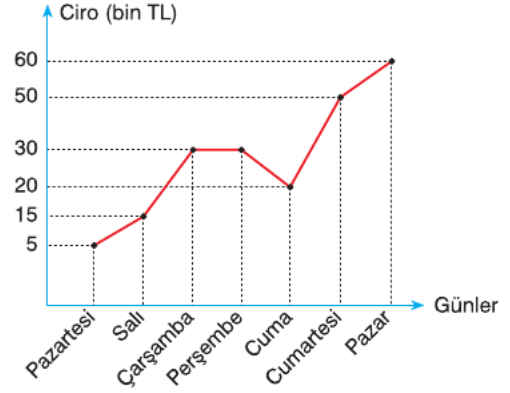


Serra ortalama $\frac{605}{5} = 121$ soru çözmüştür.

Nasıl Uygularım?



1.



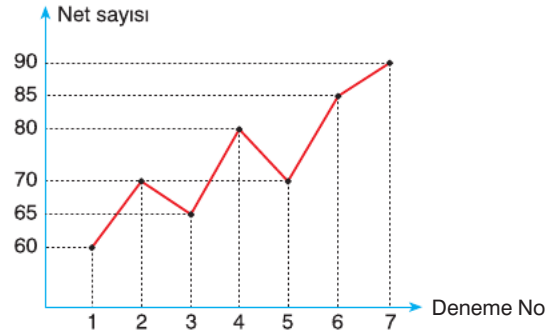
Yukarıdaki grafikte bir mağazanın bir haftalık cirosu gösterilmiştir.

Buna göre, bu mağaza günlük ortalama kaç bin TL satış yapmıştır?

- A) 25 B) 30 C) 32 D) 35 E) 36

(B)

2.



Yukarıdaki çizgi grafiğinde bir öğrencinin girdiği yedi deneme sınavında yaptığı netler gösterilmiştir.

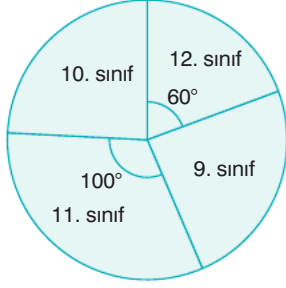
Buna göre, bu öğrenci hangi denemelerde tüm denemelerin ortalaması üzerinde net yapmıştır?

- A) 5, 6 ve 7 B) 4, 5, 6 ve 7 C) 4, 6 ve 7
D) 2, 4, 5, 6 ve 7 E) 2, 6 ve 7

(C)

Veri - Grafik Problemleri

1.

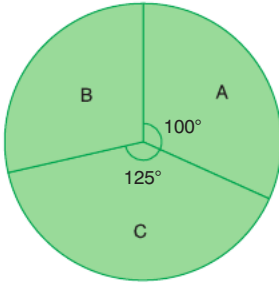


Bu okuldaki 9., 10., 11. ve 12. sınıftaki öğrencilerin dağılımı gösteren daire grafik yukarıda verilmiştir.

11. ve 12. sınıftaki öğrencilerin, toplamı 240 olduğuna göre, 9. ve 10. sınıftaki öğrencilerin sayılarının toplamı kaçtır?

- A) 260 B) 280 C) 300 D) 320 E) 350

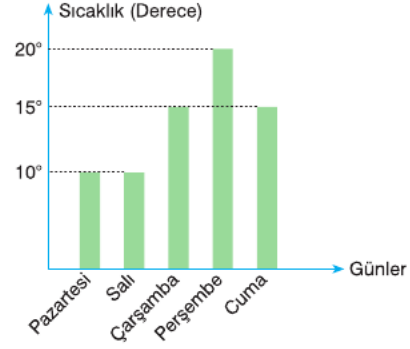
2. Aynı ürünü üreten A, B ve C firmalarının pazar payları şekildedeki dairesel grafikte verilmiştir.



Buna göre, B firması pazar payının yüzde kaçına sahiptir?

- A) 35 B) 37,5 C) 40 D) 42,5 E) 45,8

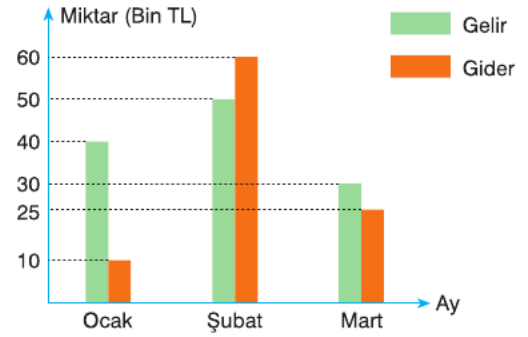
3. Bir ilin beş günlük sıcaklık ölçüm sonuçları aşağıda grafikte verilmiştir.



Yukarıdaki grafiğe göre, bu sıcaklıkların standart sapması aşağıdaki aralıkların hangisinde yer alır?

- A) [3, 4] B) [4, 5] C) [5, 6]
D) [6, 7] E) [7, 8]

4.



Yukarıdaki grafik bir firmanın yılın ilk üç ayındaki gelir ve gider durumunu göstermektedir.

Buna göre, bu firmanın bu üç aylık dönemdeki toplam gelir-gider farkı kaç bin TL'dir?

- A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

Veri - Grafik Problemleri

5. I. Standart sapmanın küçük olması veri grubunun istikrarını gösterir.
 II. Aritmetik ortalama standart sapmayı etkiler.
 III. Verilerin açıklığı arttıkça standart sapma büyür.
 IV. Eşit elemanlardan oluşan veri grubunun standart sapması 0'dır.

Yukarıdaki bilgilerden hangileri yanlıştır?

- A) IV B) I ve II C) II ve III
 D) Hepsi E) Hiçbiri

6. Bir veri grubu için aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

- A) Aritmetik ortalama veri grubunun elemanıdır.
 B) Medyan veri grubunun elemanıdır.
 C) Mod veri grubunun elemanıdır.
 D) Birden fazla mod değeri olamaz.
 E) Standart sapma küçüldükçe veri grubundaki değerler aritmetik ortalamadan uzaklaşır.

7. Bir satıcının 8 gün boyunca yaptığı ciro rakamları 500, 200, 300, 200, 700, 850, 400, 250 şeklindedir.

Bu satıcının cirolarının aritmetik ortalaması ile tepe değerinin toplamı kaçtır?

- A) 600 B) 625 C) 725 D) 750 E) 800

8.

Sınıf	Aritmetik Ortalama	Standart Sapma
K	90	6
L	100	5
H	110	7
M	90	5
N	100	3

Yukarıdaki tablo bir dersanedeki eşit sayıda öğrenci bulunan beş sınıfa yapılan deneme sonucunda öğrencilerin elde ettiği netler kullanılarak oluşturulmuştur.

Verilenlere göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) En başarılı sınıf N sınıfıdır.
 B) N sınıfı L sınıfına göre daha homojendir.
 C) H sınıfı en başarısız sınıftır.
 D) K sınıfı M sınıfına göre daha homojendir.
 E) En başarısız sınıf N sınıfıdır.

9. Bir sınıfta yapılan matematik sınavında alınan notlar ve bu notları alan öğrenci sayıları aşağıda verilmiştir.

Öğrenci sayısı	13	15	9	4	1
Not	50	60	70	85	100

Buna göre, not dağılımının tepe değeri ile medyanı toplamı kaçtır

- A) 145 B) 135 C) 130 D) 120 E) 110