

# Keyifli Okumalar Dileriz

Binlerce kategoride milyonlarca PDF e-kitap, ders kitapları, dergiler ve romanlara platformumuz üzerinden ücretsiz ulaşabilirsiniz.

## RESMİ WEB SİTEMİZ

<https://rantey.org>

### Yedek ve Duyuru Kanallarımız

Sitemize erişim engeli gelmesi veya adres değişikliği durumunda aşağıdaki kanallardan güncel giriş adresine erişebilirsiniz:

- Telegram: <https://t.me/birkitapbir>
- WhatsApp Kanalımız : <https://whatsapp.com/channel/0029VbDHv8uE50Us4lvMoc0Y>

Ensar Yılmaz



3.

BASIM

# Oyun Teorisi





# OYUN TEORİSİ



# OYUN TEORİSİ

Gözden Geçirilmiş 3. Basım

Ensar Yılmaz



Literatür Yayınları: 659

## **OYUN TEORİSİ**

Gözden Geçirilmiş 3. Basım

Prof. Dr. Ensar Yılmaz

Birinci Basım: Ekim 2009

İkinci Basım: Ekim 2012

Gözden Geçirilmiş Üçüncü Basım: Ekim 2016

**Genel Yayın Yönetmeni:** Kenan Kocatürk

**Kapak Tasarım:** Arda Bogosyan

**Baskı Öncesi Hazırlık:** Emel Atik

**Baskı ve Cilt:** Ceylan Matbaa

Maltepe Mah. Davutpaşa Cad. Güven İş Merkezi

No: 83/317-318-319 Zeytinburnu-İstanbul

Sertifika No: 23352

Tel: (0212) 613 10 79

ISBN: 978-975-04-0740-6

© Copyright 2009, 2012, 2016, **Literatür:** Yayıncılık

Bu kitabın yayın hakları Literatür Yayıncılık Dağıtım Pazarlama San. ve Tic. Ltd. Şti.'ne aittir. Kitabın tamamı veya bir bölümü hiçbir biçimde fotokopi yoluyla çoğaltılamaz, dağıtılamaz, yeniden elde edilmek üzere saklanamaz.

Sertifika No: 10843

**Literatür:** Yayıncılık, Dağıtım, Pazarlama, San. ve Tic. Ltd. Şti.

İstiklal Caddesi, İpek Sokak, No: 10 Kat: 2 TR-34433

Beyoğlu, İstanbul, Türkiye

T (0212) 292 4120

F (0212) 245 5987

E [literatur@literatur.com.tr](mailto:literatur@literatur.com.tr)

[www.literatur.com.tr](http://www.literatur.com.tr)

*“Babam’a, Annem’e ve Ablam’a...”*

*Algısız kavramlar boş, kavramsız algılar kördür*  
Immanuel Kant

*Duygusu olmayan akıldan daha tehlikelisi yoktur*  
Charlie Chaplin

|                                                                |           |
|----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Giriş</b>                                                   | <b>1</b>  |
| <b>1 Tam Bilgili Statik Oyunlar</b>                            | <b>6</b>  |
| 1.1 Giriş . . . . .                                            | 6         |
| 1.2 Stratejik-Biçimli Gösterim ve Baskın Strateji . . . . .    | 7         |
| 1.2.1 Stratejik-Biçimli Gösterim . . . . .                     | 7         |
| 1.2.2 Pür Stratejilerde Kesin Baskınlık . . . . .              | 9         |
| 1.2.3 Pür Stratejilerde Zayıf Baskınlık . . . . .              | 13        |
| 1.2.4 Rasyonelliğin Ortak Bilgi Olması . . . . .               | 14        |
| 1.3 Makul Stratejiler . . . . .                                | 16        |
| 1.4 Nash Dengesi . . . . .                                     | 18        |
| 1.4.1 Bazı Klasik Oyun Örneklerinde Pür Nash Dengesi . . . . . | 21        |
| 1.4.2 Nash Dengesi, Baskınlık ve Makul Stratejiler . . . . .   | 31        |
| 1.5 En İyi Tepki Fonksiyonu . . . . .                          | 34        |
| 1.6 Nash Dengesi Uygulamaları . . . . .                        | 37        |
| 1.6.1 Ortak Mülkiyet Trajedisi . . . . .                       | 37        |
| 1.6.2 Rant Arama Davranışı . . . . .                           | 39        |
| 1.6.3 Cournot Rekabet Modeli . . . . .                         | 40        |
| 1.6.4 Bertrand Rekabet Modeli . . . . .                        | 46        |
| 1.6.5 Hotelling Fiyatlandırma Modeli . . . . .                 | 55        |
| 1.7 Yerel Noktalar . . . . .                                   | 57        |
| 1.8 Pür Stratejilerde Nash Dengesinin Varlığı . . . . .        | 59        |
| 1.9 Nash Dengesi Üzerine Yapılan Değerlendirmeler . . . . .    | 64        |
| 1.9.1 Nash dengesi ile ilgili bazı teknik problemler . . . . . | 64        |
| 1.9.2 Nash dengesine yapılan eleştiriler . . . . .             | 67        |
| <b>Sorular</b>                                                 | <b>74</b> |

|                                                                                                    |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>2 Karma Stratejiler</b>                                                                         | <b>82</b>  |
| 2.1 Giriş . . . . .                                                                                | 82         |
| 2.2 Beklenen Fayda Kavramı . . . . .                                                               | 83         |
| 2.3 Karma Stratejiler Tanımı . . . . .                                                             | 89         |
| 2.4 Karma Stratejiler ve Kesin Baskınlık . . . . .                                                 | 94         |
| 2.5 Karma Strateji Nash Dengesi . . . . .                                                          | 96         |
| 2.5.1 Eşleşen Paralar . . . . .                                                                    | 99         |
| 2.5.2 Cinsiyetler Savaşı . . . . .                                                                 | 102        |
| 2.5.3 Refah Oyunu . . . . .                                                                        | 103        |
| 2.6 Belirli Grup Oyunlarda Karma Strateji Nash Dengesi . . . . .                                   | 106        |
| 2.7 Sürekli Değişkenlerle Karma Strateji Dengesi . . . . .                                         | 110        |
| 2.8 Karma Stratejilerde Nash Dengesinin Varlığı . . . . .                                          | 115        |
| 2.9 Bağdaşık Denge . . . . .                                                                       | 118        |
| <b>Sorular</b>                                                                                     | <b>124</b> |
| <b>3 Tam Bilgili Dinamik Oyunlar</b>                                                               | <b>127</b> |
| 3.1 Giriş . . . . .                                                                                | 127        |
| 3.2 Dinamik Oyun Tanımı . . . . .                                                                  | 128        |
| 3.3 Bilgi . . . . .                                                                                | 132        |
| 3.3.1 Bilgi Kümesi . . . . .                                                                       | 132        |
| 3.3.2 Zaman Doğrusu . . . . .                                                                      | 136        |
| 3.3.3 Mükemmel Hatırlama . . . . .                                                                 | 137        |
| 3.3.4 Mükemmel, Kesin, Asimetrik ve Tam Bilgi . . . . .                                            | 138        |
| 3.4 Genişleyen-Biçimli Oyunlarda Pür Stratejiler ' . . . . .                                       | 145        |
| 3.5 Genişleyen-Biçim ve Stratejik-Biçim İlişkisi . . . . .                                         | 149        |
| 3.6 Genişleyen-Biçimli Oyunlarda Denge . . . . .                                                   | 153        |
| 3.6.1 Geriye Doğru Çıkarsama . . . . .                                                             | 153        |
| 3.6.2 Altoyun Mükemmel Denge . . . . .                                                             | 157        |
| 3.7 Karma ve Davranış Stratejileri . . . . .                                                       | 165        |
| 3.8 Altoyun Mükemmel Nash Dengesi Uygulamaları . . . . .                                           | 168        |
| 3.8.1 Ültimatoma Oyunu . . . . .                                                                   | 169        |
| 3.8.2 Cinsiyetler Savaşı . . . . .                                                                 | 170        |
| 3.8.3 Stackelberg Rekabet Oyunu . . . . .                                                          | 171        |
| 3.8.4 Giriş Oyunu . . . . .                                                                        | 175        |
| 3.8.5 İşçi, İşveren ve Merkez Bankası İlişkisine Dair Bir Model . . . . .                          | 176        |
| 3.9 Hareketlerin Gözlemlendiği Çok-Aşamalı Oyunlar . . . . .                                       | 179        |
| 3.9.1 Banka Hücumu . . . . .                                                                       | 182        |
| 3.9.2 Küçülen Bir Piyasadan Çıkış . . . . .                                                        | 183        |
| 3.9.3 Gümrük Politikası . . . . .                                                                  | 185        |
| 3.10 Geriye Doğru Çıkarsama ve Altoyun Mükemmel Denge Kavramlarına Getirilen Eleştiriler . . . . . | 188        |
| 3.11 İleriye Doğru Çıkarsama . . . . .                                                             | 191        |

|                                                              |            |
|--------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Sorular</b>                                               | <b>195</b> |
| <b>4 Eksik Bilgili Statik Oyunlar</b>                        | <b>201</b> |
| 4.1 Giriş . . . . .                                          | 201        |
| 4.2 Bayesyen Oyunların Tanımı . . . . .                      | 201        |
| 4.3 Bayesyen Oyunların Stratejik-Biçimli Gösterimi . . . . . | 205        |
| 4.4 Bayesyen Nash Dengesi . . . . .                          | 208        |
| 4.5 Bayesyen Oyun Uygulamaları . . . . .                     | 209        |
| 4.5.1 Asimetrik Bilgi Altında Cournot Rekabeti . . . . .     | 209        |
| 4.5.2 Cinsiyetler Savaşı . . . . .                           | 212        |
| 4.5.3 Yatırım-Giriş Oyunu . . . . .                          | 213        |
| 4.5.4 Bayesyen Bertrand Oyunu . . . . .                      | 216        |
| 4.5.5 Kamu Malı Sunumu . . . . .                             | 218        |
| <b>Sorular</b>                                               | <b>221</b> |
| <b>5 Eksik Bilgili Dinamik Oyunlar</b>                       | <b>228</b> |
| 5.1 Giriş . . . . .                                          | 228        |
| 5.2 Mükemmel Bayesyen Nash Dengesi . . . . .                 | 230        |
| 5.3 Sinyalleme Oyunları . . . . .                            | 238        |
| 5.3.1 Pür Stratejilerde Dengenin Gösterimi . . . . .         | 239        |
| 5.3.2 Karına Stratejilerde Dengenin Gösterimi . . . . .      | 247        |
| 5.4 Sinyalleme Oyun Uygulamaları . . . . .                   | 249        |
| 5.4.1 Firma Yatırımı ve Sermaye Yapısı . . . . .             | 249        |
| 5.4.2 Emek Piyasasında Sinyalleme . . . . .                  | 250        |
| 5.5 Ardısal Denge . . . . .                                  | 254        |
| 5.5.1 İnanç ve Strateji İlişkisi . . . . .                   | 257        |
| 5.5.2 Ardısal Rasyonellik . . . . .                          | 263        |
| 5.6 Titreyen-El Mükemmel Denge . . . . .                     | 269        |
| 5.7 Öz Denge . . . . .                                       | 276        |
| <b>Sorular</b>                                               | <b>279</b> |
| <b>6 Tekrarlı Oyunlar</b>                                    | <b>285</b> |
| 6.1 Giriş . . . . .                                          | 285        |
| 6.2 Tekrarlı Oyunların Gösterimi . . . . .                   | 286        |
| 6.3 Sınırlı Tekrarlı Oyunlar . . . . .                       | 291        |
| 6.4 Sınırsız Tekrarlı Oyunlar . . . . .                      | 294        |
| 6.5 Sınırsız Tekrarlı Oyun Uygulamaları . . . . .            | 299        |
| 6.5.1 Tekrarlı Cournot Oyunu . . . . .                       | 299        |
| 6.5.2 Tekrarlı Bertrand Oyunu . . . . .                      | 303        |
| 6.5.3 Etkin Ücret . . . . .                                  | 305        |
| 6.5.4 Ürün Kalitesi Oyunu . . . . .                          | 308        |
| 6.6 Minmax ve Maxmin Fayda Düzeyleri . . . . .               | 310        |

|                 |                                                                              |            |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.7             | Folk Teoremi . . . . .                                                       | 314        |
| <b>Sorular</b>  |                                                                              | <b>320</b> |
| <b>7</b>        | <b>İhaleler</b>                                                              | <b>328</b> |
| 7.1             | Giriş . . . . .                                                              | 328        |
| 7.2             | Tam Bilgi Altında İhaleler . . . . .                                         | 331        |
| 7.2.1           | Kesikli Teklif Değerli İhaleler . . . . .                                    | 331        |
| 7.2.2           | Sürekli Teklif Değerli İhaleler . . . . .                                    | 333        |
| 7.3             | Bağımsız Özel Değerli İhaleler . . . . .                                     | 336        |
| 7.3.1           | Birinci-Fiyat, Kapalı Zarf İhalesinde Fiyat Teklif Verme Davranışı . . . . . | 336        |
| 7.3.2           | Hollanda İhalesinde Teklif Verme Davranışı . . . . .                         | 344        |
| 7.3.3           | İkinci-Fiyat Kapalı Zarflı İhalesinde Teklif Verme Davranışı . . . . .       | 344        |
| 7.3.4           | İngiliz İhalesinde Teklif Verme Biçimi . . . . .                             | 345        |
| 7.4             | İhalelerde Gelir Karşılaştırmaları . . . . .                                 | 346        |
| 7.5             | Çifte İhale . . . . .                                                        | 349        |
| 7.6             | Ortak-Değer İhaleleri . . . . .                                              | 351        |
| <b>Sorular</b>  |                                                                              | <b>360</b> |
| <b>8</b>        | <b>Pazarlık Teorisi</b>                                                      | <b>366</b> |
| 8.1             | Giriş . . . . .                                                              | 366        |
| 8.2             | Nash Pazarlık Çözümü . . . . .                                               | 367        |
| 8.3             | Kalai-Smorodinsky Çözüm Kuralı . . . . .                                     | 372        |
| 8.4             | Koalisyon Oyunları . . . . .                                                 | 376        |
| 8.4.1           | Bağlayıcı Koalisyon Oyunu . . . . .                                          | 378        |
| 8.4.2           | Çekirdek . . . . .                                                           | 380        |
| 8.5             | Ardısal Pazarlık . . . . .                                                   | 382        |
| 8.5.1           | Pozitif Zaman Tercihi Altında Pazarlık . . . . .                             | 383        |
| 8.5.2           | Sonsuz Ufuk Altında Pazarlık . . . . .                                       | 386        |
| 8.5.3           | Asimetrik Bilgi Altında Ardısal Pazarlık . . . . .                           | 389        |
| <b>Sorular</b>  |                                                                              | <b>396</b> |
| <b>Kaynakça</b> |                                                                              | <b>401</b> |
| <b>Index</b>    |                                                                              | <b>410</b> |

Oyun teorisi iktisadın ve sosyal hayatın hemen her alanına nüfuz eden bir yöntem olma özelliğini aşan bir şekilde, sosyal ilişkilerin iç içe geçen yapısını dikkate alan temel bir düşünme biçimine dönüşmüştür. Bu kitap iktisadi analizin artık ayrılmaz bir parçası haline gelen oyun teorisini lisans-lisansüstü arası bir düzeyde anlatmayı amaçlamaktadır. Kitabın içeriği oyun teorisinin temel nitelikteki konularını içermekle birlikte, temelde benim ilgi ve tercihlerime göre belirlendi.

Modern sosyal bilimlerin bu denli yoğun bir şekilde kullandığı oyun teorisiyle ilgili Türkçe ders kitabı veya makale yayını şaşkınlık yaratacak kadar azdır. Hatta bunun yok denecek düzeyde olduğunu söylersek abartmış olmayız. Doğrusunu söylemek gerekirse ben de bu kitabı İngilizce yazmayı planlıyordum. Fakat bu alanda Türkçe kaynakların azlığı beni Türkçe yazmaya yöneltti. Umarım bu kitapla birlikte Türkçe oyun teorisi yazınına yapılacak katkılar zamanla hızlanarak artar.

Türkçe kaynak eksikliğinin yarattığı en büyük sorunlardan biri, oyun teorisinde kullanılan temel kavramların Türkçe karşılıklarıyla ilgili ortaya çıkan problemlerdir. Bazı kavramların Türkçe karşılıklarının henüz yerleşmemiş olmasından, bazı kavramların tam Türkçe karşılıklarının olmayışından veya kullanılan karşılıkların söylenmek isteneni karşılamamasından dolayı bu tür kavramları kendim türetmek zorunda kaldım. Örneğin “continuation game” kavramını süreklilik oyunu, “rationalizable strategy” kavramını makul strateji, “correlated equilibrium” kavramını bağdaşık denge ve “grim strategy” kavramını yavuz strateji olarak kullandım. Bununla birlikte “proper equilibrium” kavramının Türkçe karşılığını bulmakta oldukça zorlandım. Fakat matematikçilerin “proper subset” kavramını öz altküme diye kullanmalarından faydalanarak ben de proper equilibrium kavramını “öz denge” diye nitelendirmenin daha doğru olacağını düşündüm. Kavramların ortak ve yaygın bir kullanıma sahip olması aramızdaki iletişimin daha sağlıklı olmasına ve bu alanda Türkçe öğretiminin daha da yaygınlaşmasına imkan verecektir.

Sosyal etkileşimin dili haline gelen oyun teorisinin temel kavramlarını anlatırken mantıksal ve formel bir dil kullandım. Bu formel dilin temel aracı matematiktir.

Konunun ilgili tanımlarını, önermelerini, teoremlerini ve çoğu zaman bunların ispatlarını matematiksel bir dille anlattım. Fakat oyun teorisine matematiğin bir alt disiplini olarak bakmadığımı belirtmek isterim. Oyun teorisi sosyal olanı analiz eder ve bunun için de matematiğin dilini kullanır. Temel olan “sosyal” dir; ben de buna dikkat ettim. Dolayısıyla kitapta oyun teorisinin temel kavramlarını analitik bir dille anlatırken bu dilin ima ettiği dış dünya karşılıklarının verilmesine de özen gösterdim.

Kitapta kullanılan matematik genel olarak bir iktisat lisans öğrencisinin bilmesi gereken düzeydedir. Bu düzey bazı bölümlerde artsa da, genel olarak lisans düzeyinde öğrenilen matematik ve istatistik bilgisiyle kitabı takip etmek mümkündür. Kitabı büyük oranda kendi içinde yeterli bir formatta hazırlamaya çalıştım. Daha ileri düzeyde matematik bilgisine ihtiyaç duyulduğunda gerekli kavramları da metin içinde veya dipnotlarla açıklamaya çalıştım. Gerekli olmayan teknik konuları anlatmaktan mümkün mertebe kaçındım. Fakat bu teknik bütünsellikten kaçınıldığı anlamına gelmiyor. Okuyucular ispatları atladıklarında bu, onların kitabı anlama sürekliliğini engellemeyecektir.

Dil, hem düşünmenin yapısı hem de aracı olduğundan düşünme biçimini şekillendirmesi açısından oldukça önemlidir. Bu yüzden bir kitabın kullandığı dil de ilgili herkesin anlamasını kolaylaştıracak şekilde olmalıdır. Soyutlama, analitik derinlik ve istenilen teknik formasyon açısından kitaplarda karşılaşılan genel bir problem, öğrencilerin tek aşamada her şeyi anlamalarının istenmesidir. Bu tehlikenin farkında olduğumdan, kitapta orta ve ileri düzey anlatımı birleştirmeyi, seçilen bolca örnek ve uygulamayla bu düzey geçişkenliğini sağlamayı amaçladım. Bu, aynı zamanda teori ile reel olan arasındaki bağı kopmamasına yardımcı olmaktadır.

Kitabın farklı bölümlerindeki konuların, birbiriyle bağlantılarına sürekli vurgu yapan pedagojik bir yöntem izledim. Bu şekilde konular arası sürekli bir bilgi ve ilgi akışkanlığı korunarak öğrencilerin büyük resmi görmeleri sağlandı. Bu yüzden ilerleyen bölümlerde, daha önceki bölümlerde kullanılan kavramlara ve örneklere sık sık göndermeler yapılmaktadır. Verilen bir örnek, kitap boyunca çok yerde karşımıza çıkmakta ve varsayımlar değiştikçe, örneğin tam bilgidен eksik bilgiye geçildiğinde, ya da hareketler aynı anda oynanan bir yapıdan ardışal oynanan bir yapıya geçtiğinde sonuçların nasıl değiştiği ve bunun ne anlama geldiği gösterilmektedir. Bu durum pedagojik olduğu gibi, öğrenciye herhangi bir durumu oyun-teorik olarak nasıl modelleyebileceği konusunda da yardımcı olmaktadır. Bu anlamda öğrenci, modelde kullanılan varsayımların ve matematiksel mantığın nasıl işlevsel hale getirilebileceğini ve dolayısıyla kurulan modelin sonuçlarının varsayımlara nasıl bağlı olduğunu görebilecektir.

Kitabı okuyan herkesin kitap içindeki hataları bildirmesinin bir kamu hizmeti olduğunu hatırlatırım ve bunu büyük bir memnuniyetle karşılayacağımı belirtmek isterim. Kitabın bu üçüncü baskısında ilk iki baskıda yer alan yazım ve notasyon hataları düzeltilmiştir. Bu tür düzeltmelerin kitabın okunmasını kolaylaştırdığı muhakkaktır. Ayrıca üçüncü baskıda bölüm sonlarında konuyla ilgili sorular çoğaltılmıştır. Söylemek gereksiz olabilir ama tüm hatalar bana aittir.

Bu kitap yıllardır verdiğim oyun teorisi derslerinin birikimi sonucunda yazıldı; derslerde anlatılanların, ders notlarının ve öğrencilerimle yaptığım tartışmaların sonucunda ortaya çıktı. Bu bilgi alışverişi sürecinde oyun teorisini sevmeyen hiç bir öğrencimle karşılaşmadım. Umarım bu kitap bu sevgiye daha fazla katkıda bulunur. Öğrenci dostu kitapları hep sevdim. Bu kitabı da elimden geldiğince öyle hazırlamaya çalıştım.

Her yazar veya bilim adamı geçmiş ve şimdiki düşünce devlerinin omuzlarındadır. Bu yüzden onların bize kattıklarını her daim ifade etmek gerektiğini düşünüyorum. Onlara buradan saygılarımı ve minnettarlığımı sunuyorum.

Kitabın taslağını detaylı bir şekilde okudukları ve önerileri ile yaptıkları katkılar için Saim Sayın ve Tunç Durmaz'a ve kitabın hazırlanmasında teknik her türlü yardımı için Barış Vardar, Özdemir Teke, Necip Bulut ve Yusuf Yalçinkaya'ya çok teşekkür ederim. Bu arada teşvikleri, yardımları, tavsiyeleri ve öğrettikleri için tüm hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Bir kitap yazmanın sabır, dayanıklılık ve yoğunlaşma gibi bütünsel bir güç gerektirdiğini bir kez daha fark ettim. Bu gücün temel kaynağı ve motivasyonu olan aileme sonsuz sevgilerimi ve minnettarlığımı sunmak istiyorum.

Ensar Yılmaz  
Beşiktaş, İstanbul  
Ağustos 2016



1940'ların sonunda ekonometri ve oyun teorisi iktisadın umut vaat eden iki metodu olarak görülüyordu. Her iki metodun da iktisadi olguları gözlemlemek, anlamak ve açıklamak konusunda önemli faydaları olacağı düşünülüyordu. Fakat bilindiği üzere, sadece ekonometri kısa sürede bu umutlarla paralel olarak gelişti ve iktisadın ayrılmaz bir parçası haline geldi. Oyun teorisi uzun süre daha çok matematikçi kökenli iktisatçıların ilgilendiği bir alt disiplin olarak kaldı ve iktisadi problemlerle ilgilenmek yerine daha çok teorik tanımlar ve ispatlar şeklinde aksiyomatik bir gelişme gösterdi.

Fakat 1970'lerden itibaren iktisatçılar kompleks iktisadi problemlerin yapısını anlamak için oyun teorisinin neler yapabileceğini görmeye başladılar. Oyun teorisinin kendi içindeki gelişmeler, özellikle bilgi (belirsizlik, asimetrik bilgi gibi) ve zaman (olayların dinamiği) kavramlarının daha gerçekçi yapılar halinde iktisadi analize dahil edilmesine imkan vermiştir. Oyun teorisi 1980'lerde çok hızlı bir şekilde “ana akım” iktisadın ayrılmaz bir parçası haline geldi. Ekonometri uygulamalı iktisadın tek metodu olurken, oyun teorisi de mikroekonominin tek metodu haline gelmiştir.

Oyun teorisinin bir disiplin olarak von Neumann ve Morgenstern'in 1944 yılında yayınlanan “The Theory of Games and Economic Behavior” adlı kitabı ile başladığı varsayılır. Bu kitap önemli bir oyun teorik kavram olan “çatışma”nın matematiksel olarak ifade edilebileceğini göstermiştir. Mahkumlar Çıkması kavramının gelişimi ve John Nash'in 1950'lilerin başında dengenin tanımı ve varlığı konusundaki makaleleri modern işbirlikçi-olmayan oyunların (bağımsız bireysel hareketlerin olduğu oyunlar) temellerini atmıştır. Aynı zamanda işbirlikçi oyunlarda da (grup halinde hareket edilen oyunlar) önemli sonuçlara ulaşıldı. Yani 1950'li yılların başında, oyun teorisinin gelecek 20 yılda kullanacağı tüm kavramlar geliştirilmişti.

Fakat 1970'lerin ortasına kadar oyun teorisi yine de otonom bir alan olarak kaldı; iktisadın temel problemleriyle çok ilgilenmedi. Bu durum Schelling'in 1960

yılında büyük beklentiler yaratan “The Strategy of Conflict” kitabına ve bir oyunun çekirdeği ile genel denge kavramı arasındaki ilişkiyi inceleyen bir dizi makalesine rağmen böyle devam etti.

Diğer yandan, 1970’ler aynı zamanda iktisatçıların “bilgi” konusunu önemsemeye başladığı bir dönem olmuştur. Bireylerin eksik bilgiye sahip oldukları ve sınırlı rasyonel oldukları dikkate alınarak iktisadi analiz yapılmaya başlandı. Bu daha gerçekçi bir yaklaşımdı. Böylece oyun teorisinin ayakları daha fazla yere basmaya başladı. Bu kavramlara “zaman” (hareketlerin ardışıklığı) da dahil edilince genelde iktisatta özelde ise oyun teorisinde önemli bir gelişme kaydedilmiş oldu. Özellikle Selten (1965)’in “mükemmel denge” ve Harsanyi (1967)’nin “eksik bilgi” hakkında yazdıklarıyla oyun teorisi doğal gelişme mecrasını bulmuştur.

Oyun teorisi özellikle 1980’li yıllardan itibaren büyük bir ilerleme göstermiştir. Bunun ardındaki temel neden oyun teorisindeki gelişmelerin yanı sıra, iktisat metodolojisinin derleşik makroekonomik yapılardan daha mikroekonomik analize kayan bir yapı göstermesidir. Geçmişte makroekonomistler analizlerine derleşik davranışa ilişkiler (tüketim fonksiyonu gibi) ile başarlarken, mikroekonomistler ise bireyi birbirinden kopuk adalar halinde maksimizasyon yapan birimler olarak düşünürlerdi. Günümüzde makroekonomi mikro temeller üzerinden yapılmaktadır. Mikroekonomi ise fayda fonksiyonları, üretim fonksiyonları, aktörlerin kaynakları ve bilgi düzeyleri ve zaman üzerinde yaptıkları başlangıç varsayımları üzerinden analiz yapmaktadır. Bu varsayımlarla başlayan iktisatçı, aktörlerin sürekli stratejik etkileşim halinde olmasını da dikkate alarak optimal hareketlerini tanımlamaya ve bulmaya çalışmaktadır.

Stratejik etkileşimden kastedilen şey, bir oyuncunun herhangi bir gruptaki en azından bir bireyin refahını hareketleriyle etkilemesi durumudur. Aksi takdirde oyun sadece birbirinden bağımsız karar alma problemleri serisine dönerdi. Oyuncular aldıkları kararların birbirinin refahını etkilediğinin farkındadırlar ve kararlarında bunu dikkate alırlar. Dolayısıyla oyun kavramı, oyuncuların yapabilecekleri hareketler ve bu hareketler sonucunda alacakları faydalar üzerinden tanımlanan kısıtları ifade eden stratejik etkileşim zemini olarak ifade edilebilir. Bir oyunun çözümü ve dengesi ise belirli oyun gruplarında ortaya çıkan sonuçların sistematik bir şekilde ifade edilmesidir. Oyun teorisi, oyun grupları için analitik ve sezgisel çözüm önerilerinde bulunur ve bu çözümlerin özelliklerini inceler.

Oyun teorisi temelde bireyin rasyonel davranış gösterdiği varsayımı üzerinden analiz yapar. Bireyin rasyonelliği kısaca şöyle tanımlanır: Bireyin önündeki alternatiflerin farkında olması, oyunda bilinmeyenler üzerine beklentiler oluşturmaması, alternatifleri hakkında açık tercihlerinin olması ve hareketlerini bir optimizasyon sonucunda belirlemesidir. Yani oyun teorisinde temelde rasyonel bir bireyin belirli hareketleri, bu hareketlerin belirli sonuçları (bu sonuçlar kesin veya belirli bir olasılığa göre gerçekleşebilir) ve sonuçlar hakkında belirli tercihleri vardır. Tüm bu durumları oyun teorisi genel olarak matematik aracılığıyla formel olarak ifade eder. Fakat oyun teorik fikirler doğası gereği matematikle ifade edilmek zorunda değildir. Yani oyun teorik bir yapı hiç matematik kullanılmadan da aynı içerikte ifade edilebilir. Fakat matematiksel formülasyon, kavramları daha belirgin hale

getirdiği gibi, kullanılan kavramlar arasındaki tutarlılığı izlememize imkan verir ve varsayımların ima ettiklerini analiz etmemizi kolaylaştırır. Bu yüzden kitapta oyun teorik fikirler hem matematiksel bir dille ifade edildi, hem de bu ifadelerin ardındaki temel motivasyonlar ve gerçekte neye karşılık geldikleri ortaya konuldu.

Matematiksel modellerin oyun teorisinde yaygın bir şekilde kullanımı, bu kullanımın içeriğinden bağımsız olarak oyun teorisine matematiksel bir ilginin oluşmasını sağlasa da bu kitapta, oyun teorisine matematiğin bir alt alanı olarak değil, daha çok sosyal olguları, özellikle iktisadi etkileşim içinde karar alan bireylerin davranışını anlamaya çalışan bir sosyal bilim olarak yaklaşıyoruz. İktisatçı kurduğu oyun teorik modellerde matematiksel ispatlarla bazı önermelere ulaştıktan sonra bunları tekrar söze çevirir. Bu önermelerin sonuçlarının gerçek dünyayla uyumlu olup olmadığına bakar. Örneğin çoklu denge bulunduğunda bile modeli kuran iktisatçı “bazı hikayelerin doğru” olamayacağını düşünebilir. Reel dünyadaki olası sonuçları da dikkate alarak bazılarını elemine eder, yani dengeyi sürekli bir şekilde rafine etme ya da makulleştirme çabası içindedir. Bu durum aynı zamanda oyun teorisinde çok sayıda denge kavramının da ortaya çıkışının temel nedenidir. Bu yüzden kitapta vardığımız sonuçların gerçek hayatta nelere karşılık geldiği sürekli vurgulanmıştır. Matematiksel sonuçlar, ancak sezgisel olarak anlamlıysa ilginç ve dikkate değer kabul edilmiştir. Yani matematiğin tümdengelimci, aksiyomatik muhakeme biçimini sadece bir açıklama ve anlama aracı olarak kullandık.

Diğer yandan, oyun teorisinin vardığı sonuçları ampirik olarak, özellikle ekonometrik modellerle test etmek oldukça zordur. Çünkü modellerde kullanılan parametreleri ölçmek ciddi bir problemdir. Fakat bunun yerine yapılan deneysel çalışmalar, içinde barındırdıkları problemlere rağmen, oyun teorisinin dayandığı temel iddiaların ve sonuçların test edilmesine imkan vermektedir. Bu deneysel sonuçların bir kısmı oyun teorisinin iddialarıyla aynı doğrultudayken bir kısmı da bunu tezatlayan sonuçlar sunmaktadır. Deneyler yine de hem birey davranışlarını gözlemlene hem de oyun teorisinin anlama kapasitesini artırması açısından önemlidir. Oyun teorik yapılar gelecekteki olaylar hakkında tahminlerde bulunabilir fakat temel motivasyonu bu değildir; tahminden çok olguları açıklamak ve anlamakla ilgilenir.

Oyun teorisi iktisadın hemen her alanına nüfuz eden bir yöntem haline gelmiştir. Endüstriyel organizasyondan uluslararası ticarete, emek piyasalarından politik ekonomiye uzanan geniş bir yelpaze içinde uygulama alanı bulmaktadır. Dahası sosyal hayatın her alanı özü itibarıyla stratejik ve etkileşim kavramlarının uygulama alanı olduğundan sosyoloji, psikoloji ve siyaset bilimi gibi çok sayıda sosyal bilimde oyun teorisinin analitik araçları yaygın bir şekilde kullanılmaya başlanmıştır. Bu yüzden oyun teorisinin en önemli işlevlerinden biri, sosyal bilimlerin arasında interdisipliner çalışmaların ortaya çıkışına aracı olma potansiyeli taşımasıdır. Oyun teorik modelleme bir ortak yöntem olarak sosyal olanı anlamayı daha sağlıklı hale getirebilir. Aumann ve Hart (1992)’e göre oyun teorisi sosyal bilimlerin rasyonel tarafının analizi için bir tür şemsiye ya da “birleşik alan teorisi” olarak görülebilir.

Etkileşim içeren sosyal hayatın tüm durumlarına bir prensip olarak uygulanabilecek bir metodoloji sunar. Elster (1982)'de etkileşimi sosyal hayatın özü olarak kabul ederek, oyun teorisinin sosyal yapı ve sosyal değişimi analiz etmek için bize sağlam mikro temeller sunduğunu belirtir.

Bu kitap oyunları bilgi ve zaman üzerinden kategorilere ayırarak incelemektedir. Oyunları aşağıdaki tabloda da gösterildiği gibi, bilgi üzerinden tam ve eksik, zaman üzerinden ise statik ve dinamik diye sınıflandırıyoruz.

|       |         | Bilgi                                     |                                             |
|-------|---------|-------------------------------------------|---------------------------------------------|
|       |         | Tam                                       | Eksik                                       |
| Zaman | Statik  | Stratejik-biçimli oyunlar                 | Bayesyen oyunlar                            |
|       | Dinamik | Tam bilgili<br>Genişleyen-biçimli oyunlar | Eksik bilgili<br>Genişleyen-biçimli oyunlar |

Kitabın 1. Bölümünde statik tam bilgili oyunlar incelenecektir. Bu tür oyunlarda oyuncular oyunun yapısı hakkında tam bilgiye sahiptirler ve hareketlerini aynı anda (simultane) seçerler. Hareketlerin aynı anda seçildiği oyunlara stratejik-biçimli veya normal-biçimli oyunlar da denir. Bu tür oyunların çözümünde kullanılan temel denge kavramı Nash dengesidir.

2. Bölümde yine aynı yapı içinde (tam bilgili statik oyunlarda) daha önceki bölümde kullanılan pür stratejiler yerine oyuncuların hareketlerini rassallaştırmaları durumunda ortaya çıkan karma stratejileri ve karma strateji Nash dengesini inceleyeceğiz.

3. Bölümde, tam bilgi varsayımına devam ederek fakat zamanı statikten dinamiğe çevirdiğimizde, yani oyuncuların aynı anda değil ardışal hareket ettikleri durumlarda oluşan oyunlara bakacağız. Genişleyen-biçimli oyunlar olarak bilinen bu tam bilgili dinamik oyunlarda kullanılan geriye doğru çıkarsama ve altoyun mükemmel denge kavramlarına bakacağız.

4. Bölümde, bu sefer bilgi varsayımını değiştiriyoruz; tam bilgi yerine eksik bilgi varsayımında bulunuyoruz fakat oyunun statik oynandığı varsayımını muhafaza ediyoruz. Bayesyen oyunlar da denen bu eksik bilgili statik oyunlarda kullanılan denge kavramı Bayesyen Nash dengesidir. Oyuncuların Bayes kuralıyla yeni gelen bilgileri de dikkate alarak inançlarını güncellediklerini varsayıyoruz. Oyuncular bu şekilde oluşan yeni inançlarıyla aynı anda hareket ettiklerinde ortaya çıkan denge niteliğini vereceğimiz örneklerle tartışacağız.

5. Bölümde, eksik bilgi altında oyuncuların ardışal hareket ettiklerini varsaydığımızda oluşan eksik bilgili dinamik oyunlara bakacağız. Bu tür oyunlarda oyuncuların bazıları diğer oyuncularından önce hareket etse de bu onların gerçek tipleri hakkında tam olarak bilgi vermeyebilir. Hareketler mesaj gibi algılanırken, bu mesajlardan hareketle tiplerin ne olduğuna dair inançlar oluşturulur. Bu tür oyunların çözümü için kullanılan denge kavramı ise Bayesyen mükemmel Nash dengesidir. Bu bölümde daha çok eksik bilgili dinamik oyunların bir çeşidi olan sinyalleme oyunları üzerinde duracağız. Daha sonra mükemmel Bayesyen den-

genin verdiği bazı makul olmayan sonuçları rafine etmek için geliştirilen ardısal dengeyi tartışacağız. Yine eksik bilgili dinamik oyunları rafine etme arayışında olan diğer denge kavramları titreyen-el mükemmel denge ve öz denge (proper equilibrium) kavramları incelenecektir.

Kitabın 6. Bölümünden itibaren daha önce gördüğümüz oyun kategorilerinin çeşitli varyantları olan konuları göreceğiz. 6. Bölümde genişleyen-biçimli oyunlar kategorisi içinde düşünülebilecek tekrarlı oyunlar tanıtılacaktır. 7. Bölümde daha çok statik ve eksik bilgi formatında oynanan ihaleler konusuna yoğunlaşacağız. Kitabın son bölümü olan 8. Bölümde ise pazarlık oyunlarına bakacağız. Bu bölümde ilk önce pazarlığın aksiyomatik teorilerini tartışacağız ve daha sonra stratejik unsurların önemli olduğu ardısal pazarlık oyunlarını inceleyeceğiz.

---

## Tam Bilgili Statik Oyunlar

---

### 1.1 Giriş

Bu bölümde tam bilgi altında ve oyuncuların aynı anda (simultane) hareket ettikleri oyunları inceleyeceğiz. Bu tür oyunlara *stratejik-biçimli* veya *normal-biçimli* oyunlar denir. Tam bilgiden kasıt, oyundaki her oyuncunun fayda fonksiyonunun (oyuncuların seçtikleri hareketler sonucunda elde ettikleri faydayı belirleyen fonksiyon) tüm oyuncuların ortak bilgisi dahilinde olmasıdır. Stratejik-biçimli oyunlarda zaman yoktur. Her oyuncu hareketini bir kez ve aynı anda seçer. Burada “aynı anda” dan kasıt, oyuncuların hareket etmeden önce birbirlerinin hareketlerini gözlemleyemediklerini ifade etmektir. Yoksa zaman, kronolojik zaman olmak zorunda değildir. Yani bir oyuncu diğerinden önce de hareket etmiş olabilir ama diğer oyuncu bunu göremiyorsa bu anlamda yine eş anlı tanımını kullanabiliyoruz.

Stratejik-biçimli oyunlarda her oyuncunun, tüm oyuncuların hareketlerinden ortaya çıkan olası sonuçlar listesi, buna *strateji profili* diyeceğiz, üzerine tercihleri vardır. Yani stratejik bir oyun, ilerleyen bölümlerde daha formel tanımlarını vereceğimiz üç temel unsurdan oluşur: oyuncular kümesi, hareket kümesi ve her oyuncunun strateji profilleri üzerindeki tercihleri. Çok sayıda durum stratejik oyun olarak modellenenebilir. Örneğin, oyuncuların firmalar, hareketlerin fiyat belirlemek, ve tercihlerin ise firmaların kârları olduğu bir stratejik oyun düşünebiliriz veya oyuncuların ülkeler, hareketlerin ülkelerin döviz kurlarını belirlemeleri ve tercihlerin dış ticaret dengesi olduğu bir oyun düşünülebilir. Buna benzer çok sayıda olay stratejik bir oyun olarak ifade edilebilir.

Bu bölümde ilk önce stratejik-biçimli (veya normal-biçimli) oyundan ne anladığımızı belirttikten sonra bu tür oyunların formel gösterimini vereceğiz. Daha sonra baskın strateji dengesini ve makul stratejilerin (veya rasyonelize edilebilir stratejiler) ne olduğunu tartışacağız. Bunun ardından tam bilgili stratejik-biçimli

oyunlarda kullanılan yaygın bir denge kavramı olan Nash dengesini tanıtacağız ve bunu örnekler üzerinden tartışacağız. Sonraki alt bölümde Nash dengesini bulmada kullandığımız diğer bir yaklaşım olan en iyi tepki fonksiyonu incelenecek ve buna dair örnekler verilecektir. Çok sayıda Nash dengesinin olması durumunda bu dengelerden daha muhtemel bir dengenin bulunması için kullanılan bir kavram olan yerel nokta kavramını tanıttıktan sonra, Nash dengesinin sürekli değişkenlerde var olmasının koşullarını tartışacağız ve bu bölümün sonunda Nash dengesi üzerine yapılan tartışmaları aktaracağız.

## 1.2 Stratejik-Biçimli Gösterim ve Baskın Strateji

### 1.2.1 Stratejik-Biçimli Gösterim

Statik bir oyunu gösterirken genelde matris gösterimini kullanırız. Statik oyunların matris gösterimine *stratejik-biçimli gösterim* ya da *normal-biçimli gösterim* denir. Böyle bir oyunda her bir oyuncu aynı anda bir hareket seçer ve oyuncuların seçtikleri hareketlerin kombinasyonu, yani *strateji profili*, her oyuncu için bir fayda düzeyi belirler. Stratejik-biçimli gösterimi daha iyi ifade edebilmek için oyun teorisinin klasik bir örneği olan Mahkumlar Çıkması oyunu ile başlayalım.

İki kişi çalıntı bir malı paylaşırlarken yakalanıyorlar. Polis açıkça çalınan malı ellerinde bulundurmalarından dolayı bu kişileri suçlamak için yeterince kanıta sahiptir. Fakat gerçekte bu suçu işlediklerine dair bir kanıta sahip değildir. Bu yüzden mahkumların suçlarını itiraf etmelerini sağlayacak bir cezalandırma mekanizması düzenlenir. Bunun için de mahkumların ayrı hücrelerde sorgulanmalarının daha iyi olacağına inanılmaktadır. Amaç suçu itiraf ettirmektir. Savcı, eğer aralarından birinin itiraf etmesi ve diğerinin itiraf etmemesi durumunda, itiraf edenin 1 yıl, etmeyenin ise 5 yıl yatacağını söylemektedir. Fakat her ikisi de itiraf ederse kanıta ihtiyaç kalmayacaktır, her ikisini tutuklayacak ve 4 yıllıa yargılayacaktır. Savcı bu önerinin aynısını diğer sanığa da götürüyor. Eğer her ikisi de itiraf etmezse savcı sanıkları malı çalmakla suçlayamayacak sadece çalıntı mal bulundurmaktan yargılanıp 2'şer yıl mahkumiyetle yargılanacaklardır. Böyle bir durumun tasarlanması bizi Mahkumlar Çıkması denen bir problemle karşı karşıya getirir. Bu oyunda sanıkların önemsedığı tek şey hapisanede ne kadar yıl yatacaklardır, hiç bir sanık diğerinin yatacağı yıllıa ilgilenmemektedir. Bu oyunda hapisanede geçirilen yıllar Tablo 1.1'de verildiği gibi matris formatında gösterilmektedir.

|                 | itiraf etme (C) | itiraf et (D) |
|-----------------|-----------------|---------------|
| itiraf etme (C) | -2, -2          | -5, -1        |
| itiraf et (D)   | -1, -5          | -4, -4        |

**Tablo 1.1 Mahkumlar Çıkması**

Burada 1. sanığı (1.oyuncu) satır oyuncusu olarak ve 2. sanığı (2.oyuncu) sütun oyuncusu olarak adlandırıyoruz. Matristeki iki satır 1.oyuncunun hareketlerini

gösterirken, iki sütun 2.oyuncunun iki olası hareketini gösterir. Matris içindeki her kutudaki sayılar oyuncuların hareket profiline karşılık gelen faydasını gösterir, birinci sayı 1.oyuncunun elde ettiği fayda düzeyi iken ikinci sayı 2.oyuncunun elde ettiği fayda düzeyidir.

Bu oyunda her bir oyuncunun *itiraf etme* (bunu  $C$  ile gösteriyoruz) ve *itiraf et* (bunu da  $D$  ile gösteriyoruz) şeklinde iki hareketi veya stratejisi vardır. İtiraf etme stratejisi oyuncuların kendi aralarındaki bir tür örtük işbirliğini veya dayanışmayı gösterirken (örtük çünkü aralarında diyalog yok), itiraf et ise bu işbirliğinden sapma gibi düşünülebilir.

Eğer hem 1.oyuncu hem de 2.oyuncu işbirliğini seçerse (her ikisi de itiraf etmezse) ( $C, C$ ) profili gerçekleşir ve her ikisi de 2 yıl yatar. Oyunculardan biri işbirliğini ( $C$ ) ve diğeri bu işbirliğinden sapmayı ( $D$ ) seçerse, sırasıyla 5 ve 1 yıl yatarlar. Diğer kutular da benzer olarak her iki oyuncunun aynı anda seçtikleri hareketlere karşılık elde edecekleri fayda düzeylerini gösterir.

Burada dikkat edilirse oyuncuların seçimlerini bazen hareket bazen de strateji olarak nitelendirdik. Aslında oyun teorisinde hareket ve strateji birbirinden farklı kavramlardır. Bu farkı ilerleyen bölümlerde daha net olarak anlatacağız. Fakat şimdilik bu ayrımı dikkate almadan her iki kavramı birbirinin yerine kullanacağız.

Şimdi bu oyunu genelleştirerek matematiksel notasyonla ifade edelim. Stratejik-biçimli bir oyun şunları içerir:

(i) Oyuncular kümesi,  $n$  sayıda oyuncunun olduğu bir oyuncular kümesi vardır,  $N = \{1, \dots, i, \dots, n\}$ ,  $i$  burada herhangi bir oyuncuyu gösterir.

(ii) Strateji kümesi, her oyuncunun sahip olduğu bir strateji kümesi vardır. Herhangi bir  $i$  oyuncusunun strateji kümesi,  $S_i$  ile gösterilir. Bu  $i$  oyuncusunun strateji kümesi veya strateji uzayının herhangi bir stratejisi ise  $s_i$  ile gösterilir. Ayrıca  $s_i$  stratejisinin  $S_i$  stratejiler kümesinin bir elemanı olduğu  $s_i \in S_i$  şeklinde ifade edilir. Tüm oyuncuların olası tüm stratejilerinden oluşabilecek stratejiler profiline ise kartezyen çarpımla gösteririz,  $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ . Herhangi bir strateji profili,  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S$ , oyundaki  $n$ -oyuncunun her biri için bir stratejiyi gösteren  $n$  tane eleman içeren sıralı bir kümedir veya  $n$  boyutlu bir vektör olarak da nitelendirilebilir.

(iii) Herhangi bir  $i$  oyuncusunun  $(s_1, \dots, s_n)$  strateji profillerine karşılık gelen fayda düzeyi şöyle ifade edilir:

$$u_i : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow R.$$

Bu tanımların yardımıyla stratejik-biçimli bir oyunu tanımlayabiliriz:

**Tanım 1.1**  $n$ -oyunculu bir oyunun stratejik-biçimli gösterimi, oyuncuların strateji kümeleri,  $S_1, \dots, S_n$ , ve bu oyuncuların fayda fonksiyonlarından,  $u_1, \dots, u_n$ , oluşur. Stratejik-biçimli bir oyun da  $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$  ile gösterilir.

Yukarıda verilen Mahkumlar Çıkmazı oyununu bu notasyonların yardımıyla ifade edelim: Oyuncular kümesi:  $N = \{1, 2\}$ ; stratejiler veya hareketler kümesi:

$S_1 = S_2 = \{C, D\}$ ; ve tercihlerini gösteren fayda fonksiyonları:  $u_1(C, C) = -2$ ,  $u_1(C, D) = -5$ ,  $u_1(D, C) = -1$ ,  $u_1(D, D) = -4$ ,  $u_2(C, C) = -2$ ,  $u_2(C, D) = -1$ ,  $u_2(D, C) = -5$ , ve  $u_2(D, D) = -4$ ; ve oyunun kendisi  $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$ .

İki oyunculu ve iki stratejili bir oyunda stratejik gösterim en genel haliyle Tablo 1.2'de gösterilmektedir :

|       | $S_1$                          | $S_2$                          |
|-------|--------------------------------|--------------------------------|
| $s_1$ | $u_1(s_1, s_1), u_2(s_1, s_1)$ | $u_1(s_1, s_2), u_2(s_1, s_2)$ |
| $s_2$ | $u_1(s_2, s_1), u_2(s_2, s_1)$ | $u_1(s_2, s_2), u_2(s_2, s_2)$ |

**Tablo 1.2** İki oyunculu stratejik-biçimli bir oyunun genel gösterimi

Geleneksel bir kabul olarak, satırlar 1.oyuncunun stratejilerini, sütunlar ise 2.oyuncunun stratejilerini göstermektedir. Matris içindeki değerler ise sırasıyla 1.oyuncu ve 2. oyuncunun ilgili strateji profillerine karşılık gelen fayda düzeylerini göstermektedir. Biz de bu kitap boyunca aynı geleneği sürdüreceğiz.

### 1.2.2 Pür Stratejilerde Kesin Baskınlık

Oyun teorisinde stratejiler temelde pür ve karma strateji olarak ikiye ayrılır. Pür strateji kesin olarak oynanan stratejiler iken karma stratejiler belirli bir olasılığa göre oynanan stratejilerdir. Bu bölümde sadece pür stratejilerle ilgileneceğiz. Sonraki bölümde karma stratejileri detaylı bir şekilde tartışacağız.

Bir oyunun temel unsurlarını tanımladıktan sonra, oyun-teorik bir problemi nasıl çözeceğimize bakalım. Burada oyun-teorikten kasıt her bir oyuncunun refahının diğer oyuncuların hareketlerine bağımlı olduğunu ifade etmektir. Mahkumlar Çıkmazı oyununda da dikkat edilirse sanıkların sadece kendi hareketleri değil diğerinin de hareketleri hapisanede geçirecekleri yılları belirlemede etkilidir.

Mahkumlar Çıkmazı probleminde (Tablo 1.1'e bakın), eğer sanıklardan biri itiraf et hareketini oynarsa, diğer oyuncu da itiraf et hareketini oynayacaktır çünkü bu durumda 4 yıl yatar, aksi takdirde yani diğeri itiraf ederken kendisi itiraf etmezse 5 yıl yatar. Benzer olarak, eğer sanıklardan biri itiraf etmezse, diğer oyuncu itiraf eder. Çünkü bu durumda 1 yıl yatar, aksi takdirde 2 yıl yatar. Yani herhangi bir oyuncu için, karşı taraf neyi oynarsa oynasın, itiraf et hareketi her zaman rasyoneldir. Böyle stratejilere, yani bir oyuncunun diğer oyuncuların stratejilerinden bağımsız her zaman optimal olan stratejilerine *baskın strateji* denir. Eğer bir oyunun bir stratejisi diğer oyuncuların tüm stratejileri için her zaman daha iyi bir sonuç yaratıyorsa buna *kesin baskın strateji* denir.

**Tanım 1.2** *Stratejik-biçimli bir  $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$  oyununda,  $s'_i$  ve  $s''_i$  stratejileri  $i$  oyuncusunun olası stratejileri olsun,  $s'_i, s''_i \in S_i$ . Eğer diğer oyuncuların stratejilerinin her olası profili için,  $i$  oyuncusunun  $s'_i$  stratejisinden elde ettiği fayda,  $s''_i$  stratejisini oynamasından elde ettiği faydadan kesin daha fazla ise*

$s'_i$  stratejisine kesin baskın strateji denir:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n) > u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s''_i, s_{i+1}, \dots, s_n), \forall s_{-i} \in S_{-i}, \quad (1.1)$$

burada  $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ ,  $i$  oyuncusunun dışındaki oyuncuların herhangi bir strateji profilidir;  $S_{-i} = S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$  ise  $i$  oyuncunun strateji kümesinin dışındaki diğer tüm oyuncuların strateji kümelerinin tüm olası stratejiler profilidir; ve  $-i$  notasyonu  $i$  oyuncusu dışındaki tüm diğer oyuncuları tanımlamak için kullanılır, yani  $-i = N \setminus \{i\}$ .

Bu tanımdan hareketle hiç bir zaman oynanmayacak strateji de kesin mahkum strateji olarak tanımlanır. Yani rasyonel oyuncular kesin olarak hiçbir zaman kesin mahkum stratejileri oynamazlar çünkü oyundaki herhangi bir oyuncunun böyle bir stratejinin oynanacağına dair beklentisi yoktur. Böylece her iki oyuncu da mahkum stratejilerini silerler ve hiç bir zaman oynamazlar.

Tablo 1.1'de verilen oyunda itiraf etme hareketi kesin mahkum veya başka bir ifadeyle itiraf et hareketi kesin baskın stratejidir. Dolayısıyla itiraf etme hareketi hiç bir zaman oynanması rasyonel olmayan bir stratejidir, bu yüzden silinir. Oynanması her zaman rasyonel olan itiraf et hareketi baskın stratejidir, karşı rakibin hareketinden bağımsız bir şekilde oynanması durumunda oyuncu her zaman daha yüksek bir fayda sağlar. Sonuç olarak her iki oyuncu da itiraf et hareketini oynar, dolayısıyla oyundaki denge davranışı (itiraf et, itiraf et) = (D,D) şeklinde olur.

Rasyonel oyuncuların kesin mahkum stratejileri oynamamaları aslında böyle stratejilerin diğer oyuncuların herhangi bir stratejisine göre en iyi tepki olmamasından kaynaklanmaktadır. Tabii burada önemli olan nokta, rasyonel bir oyuncunun böyle bir stratejiyi oynamayacağını diğer oyuncuların bilmek zorunda olmasıdır. Yani herkes birbirinin rasyonel olduğunu bilmelidir. Buna rasyonelliğin ortak bilgi olması denir. Bu konuya aşağıda daha detaylı bakacağız.

Oyuncular kesin mahkum stratejilerini asla oynamayacaklarından, bu stratejileri baştan eleyerek ilerlerler. Çünkü hiç bir oyuncu bu stratejilerin oynanmayacağını bilir. Şimdi bu duruma bir örnek verelim.

### Örnek 1.1

Tablo 1.3'de iki oyunculu bir oyun verilmektedir. Burada 1. oyuncu herhangi bir stratejisine kesin baskın olan başka bir stratejiye sahip değildir. 2.oyuncu C hareketini oynamadığı müddetçe, U stratejisini oynamak M'yi oynamaktan daha iyidir. Fakat 2.oyuncu C hareketini oynarsa bu durumda 1.oyuncunun D hareketini oynaması daha iyidir; 2.oyuncu R'yi oynamadığı müddetçe D hareketini oynamak U hareketini oynamaktan daha iyidir. Fakat eğer bu hareketi oynarsa bu durumda U daha iyidir. Kısaca 1.oyuncunun optimal hareketleri 2.oyuncunun ne oynadığına bağlı olarak değişir. Çünkü 1.oyuncunun, 2.oyuncu hangi hareketi seçerse seçsin her zaman daha iyi sonuç veren kesin baskın bir stratejisi yoktur.

|     |     |     |     |               |     |     |     |               |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|---------------|-----|-----|-----|---------------|-----|-----|-----|
|     | $L$ | $C$ | $R$ |               | $L$ | $R$ |     | $L$           | $R$ |     |     |
| $U$ | 4,3 | 5,1 | 6,2 | $\rightarrow$ | $U$ | 4,3 | 6,2 | $\rightarrow$ | $U$ | 4,3 | 6,2 |
| $M$ | 2,1 | 8,4 | 3,6 |               | $M$ | 2,1 | 3,6 |               | $D$ | 5,9 | 2,8 |
| $D$ | 5,9 | 9,6 | 2,8 |               | $D$ | 5,9 | 2,8 |               |     |     |     |
|     |     |     |     |               |     |     |     |               |     |     |     |
|     |     |     |     |               |     | $L$ |     |               | $L$ |     |     |
|     |     |     |     | $\rightarrow$ | $U$ | 4,3 |     | $\rightarrow$ | $D$ | 5,9 |     |
|     |     |     |     |               | $D$ | 5,9 |     |               |     |     |     |

**Tablo 1.3** Sürekli eliminasyon yöntemi

Diğer yandan 2.oyuncu için *R* stratejisi *C* stratejisine göre kesin baskın stratejidir. 1.oyuncu neyi seçerse seçsin, 2.oyuncu *C* yerine *R* hareketini oynayarak her zaman daha yüksek bir fayda elde edecektir: 1.oyuncu *U* hareketini seçtiğinde kendisi *C* yerine *R* hareketini seçerse daha yüksek fayda elde eder,  $2 > 1$ ; eğer 1.oyuncu *M* hareketini seçerse *C* yerine *R* hareketini oynamak daha yüksek fayda sağlar,  $6 > 4$ ; ve aynı şekilde 1.oyuncunun *D* hareketine karşı *C* yerine *R* hareketini oynamak daha yüksek fayda sağlar,  $8 > 6$ . Yani rasyonel olan 2.oyuncu *R* varken hiç bir zaman *C* stratejisini oynamayacaktır (dikkat ederseniz *R* stratejisi, ne *L* stratejisine kesin baskın ne de onun tarafından kesin mahkum edilir). Eğer 2.oyuncu 1.oyuncunun rasyonel olduğunu ve 1.oyuncu da onun rasyonel olduğunu bildiğini biliyorsa, 2.oyuncu oyunu Tablo 1.3'deki ikinci matriste olduğu gibi oynayacaktır. Yani *C* mahkum stratejisi silinerek oyun oynanmaya devam eder.

Şimdi de Tablo 1.3'de verilen ikinci matrise bakalım. 1.oyuncu için *U* stratejisinin *M* stratejisine kesin baskın olduğunu görüyoruz çünkü eğer 2.oyuncu *L* hareketini oynarsa 1.oyuncu *M* yerine *U* hareketini oynamakla daha yüksek fayda elde eder,  $4 > 2$ ; ve eğer 2.oyuncu *R* hareketini oynarsa 1.oyuncu benzer olarak *M* yerine *U* hareketini oynadığında daha yüksek fayda elde eder,  $6 > 3$ . Yani rasyonel olan 1.oyuncu, 2.oyuncunun da rasyonel olduğunu bildiğinden asla *M* stratejisini seçmeyecektir. Sonuç olarak 2.oyuncu da 1.oyuncunun asla *M*'yi seçmeyeceğini bilir (yine dikkat ederseniz *U* stratejisi, *D*'ye göre ne baskın ne de mahkumdur).

2.oyuncu, 1.oyuncunun rasyonel olduğunu ve 1.oyuncunun da onun rasyonel olduğunu bildiğini biliyorsa, bu durumda 2.oyuncu oyunu Tablo 1.3'deki üçüncü matristeki gibi oynanacağını bilir. Dikkat ederseniz 2.oyuncu için *L* hareketi *R* hareketine kesin baskındır. Çünkü eğer 1.oyuncu *U* hareketini seçerse 2.oyuncunun *R* hareketi yerine *L* hareketini oynaması kendisine daha fazla fayda sağlar,  $3 > 2$ ; fakat eğer 1.oyuncu *D* hareketini seçerse yine *R* hareketi yerine *L* hareketini seçmek daha yüksek fayda sağlar,  $9 > 8$ . Yani rasyonel olan 2.oyuncu, 1.oyuncunun da rasyonel olduğunu bildiğinden, asla *R* stratejisini seçmeyecektir.

Aynı rasyonellik varsayımı altında bu sefer *R* stratejisi silinir ve oyun dördüncü matristeki gibi oynanır. Fakat şimdi, *D* stratejisi *U* stratejisine kesin baskındır böylece 1.oyuncu *U* stratejisini hiç bir zaman oynamayacaktır. Bu yüzden 1.oyuncunun rasyonel seçimi *D*'dir. Bu da oyunun sonucunun (*D*,*L*) olacağı anlamına gelir. Dolayısıyla dengede 1. oyuncu 5, 2.oyuncu da 9 birimlik fayda elde ederler.

Bu süreç kesin mahkum stratejilerin sürekli eleminasyonu denir.  $G$  oyunun çözümü  $(D, L)$  dengesidir. Bu dengeye *sürekli-baskın strateji dengesi* denir.  $G$  oyununa da *baskın-çözülebilir* denir.

Şimdi sürekli eleminasyon yöntemini daha formel olarak ifade edelim. Bunun için de kesin mahkum stratejilerin sürekli eleminasyonu için genel bir prosedür tanımlayalım. Bunun için  $G = \{N, (S_i), (u_i)\}$  oyunu ile başlayalım. Herhangi bir  $i$  oyuncusu için kesin mahkum stratejilerin eleminasyonu ile kalan stratejileri  $S_i^1$  ile gösterelim. Böylece eleminasyon sonrası yeni oyunumuz aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$G^1 = \{N, (S_i^1), (u_i)\},$$

burada her  $u_i$  fonksiyonu asıl fayda fonksiyonunun, kesin mahkum stratejilerin elenmesi sonucu kalan daha küçük bir tanım aralığında tanımlanmış fayda fonksiyonudur. Bu prosedüre devam edildikçe, örneğin  $\tau \in N = \{1, 2, \dots\}$  defa kadar devam edildiğinde daha da küçülen ve indirgenmiş bir oyuna sahip oluruz,

$$G^\tau = \{N, (S_i^\tau), (u_i)\},$$

burada her  $i \in N$  oyuncusu için  $S_i^\tau$  stratejiler kümesi,  $G^{\tau-1}$  oyunundaki  $S_i^{\tau-1}$ 'deki kesin mahkum stratejilerin silinmesi sonunda kalan stratejilerden oluşur.

Asıl  $G(\cdot)$  oyunu sınırlı bir oyun olduğu için sürekli eleminasyon prosedürünün belli aşamasından sonra oyun artık küçülmeyecektir:

$$S_i^\tau = S_i^{\tau+1} = S_i^{\tau+2} = \dots$$

Bu yüzden yeni oyun şöyle tanımlanabilir, her  $i \in N$  oyuncusu için  $G^\infty = G^\tau$  ve  $S_i^\infty = S_i^\tau$ . Burada  $S_i^\infty$  stratejileri artık başka stratejiler tarafından mahkum edilemeyen stratejilerin bulunduğu kümedir. Dolayısıyla  $G^\infty$  oyunu da  $G$  başlangıç oyunundan sürekli eleminasyon yöntemiyle türetilen ve daha da küçülmeyen *artık oyun* olarak nitelendirilen oyundur. Yani  $S_i^\infty$  sürekli eleminasyon sonunda  $i$  oyuncusunun elinde kalan pür stratejileri göstermektedir. Oyuncuların strateji kümelerinin kartezyen çarpımı ise,  $S^\infty = \prod_{i \in N} S_i^\infty$ , kesin mahkum stratejilerin sürekli eleminasyonundan kalan strateji profil kümesini verir. Oyun rasyonelliğin ortak bilgisi altında oynandığı için, geriye kalan herhangi bir pür strateji profili,  $S^\infty$  kümesi içinden olacaktır, yani  $s_i \in S^\infty$ .

|     | $l$   | $r$   |
|-----|-------|-------|
| $u$ | 10, 5 | 10, 4 |
| $m$ | 8, 4  | 8, 5  |
| $d$ | 12, 5 | 6, 4  |

**Tablo 1.4**

Tablo 1.4'de verilen oyuna bakalım. Bu oyunun dengesini sürekli eleminasyon yöntemi ile bulmaya çalışalım. Burada 1.oyuncunun  $m$  stratejisinin mahkum strateji olmasından dolayı ( $u$  stratejisine mahkum) silinmesi ile birlikte 2.oyuncunun  $l$

stratejisi  $r$  stratejisini mahkum eder ve  $r$ 'nin silinmesi ile de 1.oyuncunun  $d$  stratejisi  $u$  stratejisini mahkum eder. Bu yüzden sürekli eliminasyon dengesi  $(d,l)$  olur. Bu durumu yukarıda tanıttığımız notasyonla ifade edelim:

$$\begin{aligned} S_1^0 &= \{u, m, d\}, \quad S_2^0 = \{l, r\} \\ S_1^1 &= \{u, d\}, \quad S_2^1 = \{l, r\}; \quad S_1^2 = \{u, d\}, \quad S_2^2 = \{l\} \\ S_1^3 &= \{d\}, \quad S_2^3 = \{l\}, \quad \text{dolayısıyla } S_1^\infty = \{d\}, \quad S_2^\infty = \{l\} \end{aligned}$$

### 1.2.3 Pür Stratejilerde Zayıf Baskınlık

Daha önce belirtildiği gibi mahkum stratejiler asla oynanmayacağı için elenmelidir. Fakat bazen “her zaman daha iyi” strateji yerine “her zaman daha kötü değil” stratejisi söz konusu olabilir. Yani bir strateji diğer stratejilerin bazılarına göre daha iyidir ama bazılarına göre aynı düzeyde fayda sağlıyor olabilir.

**Tanım 1.3**  $G = \{N, (S_i), (u_i)\}$  gibi stratejik bir oyunda,  $i$  oyuncusunun iki stratejisi  $s'_i, s''_i \in S_i$  olsun. Eğer  $s'_i$  stratejisi en az  $s''_i$  stratejisi kadar iyi ise,  $s'_i$  stratejisi  $s''_i$  stratejisine zayıf baskındır denir. Başka bir deyişle aşağıdaki koşul sağlanırsa  $s'_i$  stratejisi  $s''_i$  stratejisine zayıf baskındır denir,

$$u_i(s'_i, s_{-i}) \geq u_i(s''_i, s_{-i}), \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

Burada söylenmek istenen şey,  $s'_i$  hiç bir zaman  $s''_i$ 'den daha kötü değildir, fakat bazen daha iyidir. Kesin mahkum stratejilerin sürekli eliminasyonu ile kesin baskın strateji dengesine ulaştığımızı daha önce gördük. Fakat bu metodu zayıf baskın stratejilerin olduğu bir oyunda uygulamak daha tartışmalıdır. Çünkü zayıf mahkum stratejileri silmek oyunun sonucunu etkileyebilir. Bunu bir örnek üzerinde gösterelim.

### Örnek 1.2

Tablo 1.5'de verilen oyuna bakalım. Burada 1.oyuncu için  $D$  stratejisi,  $U$  stratejisine göre kesin mahkumdur. Böylece eğer ilk önce  $D$  stratejisini silersek,  $L$  stratejisinin  $R$ 'ye zayıf baskın olduğu bir oyun kalır. Bu durumda  $R$ 'yi elemekle,  $U$  stratejisinin  $M$ 'ye kesin baskın olduğu bir oyunla karşılaşırız. Böylece denge  $(U,L)$  olur (ilk satırda oluşan denge). Fakat dikkat ederseniz başlangıçta verilen oyunda  $U$  stratejisi de  $M$ 'ye kesin baskındır. Bu yüzden  $M$  stratejisini eleyerek de başlayabiliriz,  $M$  elendikten sonra 2.oyuncunun  $L$ 'yi elemesi ve 1.oyuncunun da  $D$  stratejisini elemesiyle, oyunda  $(U,R)$  sonucu oluşur (ikinci satırda oluşan denge).

Eğer 1.oyuncunun  $M$  ve  $D$  stratejilerini aynı anda silersek (çünkü iki strateji de  $U$ 'ya göre mahkum stratejilerdir), Tablo 1.6'da gösterildiği gibi 2.oyuncu için her stratejinin diğerine zayıf baskın olduğu bir oyunla karşılaşırız. Yani  $M$  ve  $D$  birlikte elendiğinde 2.oyuncu  $L$  hareketini de  $R$  hareketini de oynayabilir. Bu yüzden

|          |          |          |   |          |          |          |  |          |          |  |          |          |
|----------|----------|----------|---|----------|----------|----------|--|----------|----------|--|----------|----------|
|          | <i>L</i> | <i>R</i> |   |          | <i>L</i> | <i>R</i> |  |          | <i>L</i> |  |          | <i>L</i> |
| <i>U</i> | 3, 2     | 2, 2     |   | <i>U</i> | 3, 2     | 2, 2     |  | <i>U</i> | 3, 2     |  | <i>U</i> | 3, 2     |
| <i>M</i> | 1, 1     | 0, 0     | → | <i>M</i> | 1, 1     | 0, 0     |  | <i>M</i> | 1, 1     |  |          |          |
| <i>D</i> | 0, 0     | 1, 1     |   |          |          |          |  |          |          |  |          |          |

|          |          |          |   |          |          |          |  |          |          |  |          |          |
|----------|----------|----------|---|----------|----------|----------|--|----------|----------|--|----------|----------|
|          | <i>L</i> | <i>R</i> |   |          | <i>L</i> | <i>R</i> |  |          | <i>R</i> |  |          | <i>R</i> |
| <i>U</i> | 3, 2     | 2, 2     |   | <i>U</i> | 3, 2     | 2, 2     |  | <i>U</i> | 2, 2     |  | <i>U</i> | 2, 2     |
| <i>M</i> | 1, 1     | 0, 0     | → | <i>D</i> | 0, 0     | 1, 1     |  | <i>D</i> | 1, 1     |  |          |          |
| <i>D</i> | 0, 0     | 1, 1     |   |          |          |          |  |          |          |  |          |          |

**Tablo 1.5** Zayıf mahkum stratejileri elemek oyunun sonucunu etkiler

1.oyuncunun hangi mahkum stratejiyi önce sileceği 2.oyuncunun neyi sileceğini belirlemektedir. Yani 1.oyuncu için kesin mahkum stratejilerin silinme sırası, 2.oyuncunun sonraki süreçte hangi zayıf mahkum stratejilerin eleneceğini belirler.

|          |          |          |   |          |          |          |  |          |          |
|----------|----------|----------|---|----------|----------|----------|--|----------|----------|
|          | <i>L</i> | <i>R</i> |   |          | <i>L</i> | <i>R</i> |  |          | <i>L</i> |
| <i>U</i> | 3, 2     | 2, 2     |   | <i>U</i> | 3, 2     | 2, 2     |  | <i>U</i> | 3, 2     |
| <i>M</i> | 1, 1     | 0, 0     | → |          |          |          |  |          |          |
| <i>D</i> | 0, 0     | 1, 1     |   |          |          |          |  |          |          |

**Tablo 1.6**

Dengenin ne olacağının silme sırasına bağlı olması gibi bir durum, eğer sadece kesin mahkum stratejiler olsaydı ortaya çıkmazdı. Çünkü diğer oyuncuların stratejilerini silmek asla kesin mahkum bir stratejinin mahkum edilmesini engellemez fakat zayıf mahkum stratejinin mahkum edilmesine neden olabilir. Bunun nedeni,  $s_i$ 'nin zayıf mahkum strateji olması için, ihtiyaç duyulan şey diğer bir  $s'_i$  stratejisinin, tüm  $s_{-i}$  stratejileri için, en az  $s_i$  kadar iyi olmasıdır ve rakibin en az bir stratejisi için  $s_i$ 'den daha iyi olmasıdır. Eğer özellikle rakibin bu stratejisi elenirse,  $s_i$  ve  $s'_i$  stratejileri rakibin kalan tüm stratejileri için aynı düzeyde fayda sağlarlar ve biri diğerine zayıf baskın olmayacaktır.

## 1.2.4 Rasyonelliğin Ortak Bilgi Olması

Oyunun baskın strateji dengesini bulma süreci (hiç bir oyuncunun asla mahkum stratejileri oynamayacakları süreç), her adımdaki elemelerde diğer oyuncunun rasyonel olmasını gerektirmektedir. Yani sadece oyuncuların rasyonel olmalarını değil aynı zamanda tüm oyuncuların diğer tüm oyuncuların rasyonel olduğunu bilmeleri gerekir. Dahası oyuncuların tümü “oyuncuların tümü diğer tüm oyuncuların rasyonel olduğunu bildiğini” bilir ve bu mantık silsilesi böylece devam eder gider, *ad infinitum*. Bu varsayım, oyun teorisinde çok kullanılan rasyonelliğin ortak bilgi

olması varsayımdır.

Ortak rasyonelliği şöyle de tanımlamak mümkündür. Örneğin  $P$ , “1.oyuncu rasyoneldir” gibi bir önerme olsun. Eğer  $P$  ortak bilgiye

(i) Herkes  $P$ 'yi bilir

(ii) Herkes herkesin  $P$ 'yi bildiğini bilir

(iii) Herkes herkesin  $P$ 'yi bildiğini bildiğini bilir ve bu şekilde devam eder...

Kısaca eğer  $P$  ortak bilgi ise, bu durumda şöyle yazılabilir:

$$(\text{Herkes biliyorki})^k \text{ herkes } P\text{'yi biliyor, } k \in \{1, 2, \dots\}.$$

Kısaca ortak rasyonellik varsayımı oyuncuların diğer oyuncuların bildiği herşeyi bilme durumunu tanımlar. Bu onların bilgilerinin bir parçasıdır ve böylece herkes herkesin  $P$ 'yi bildiğini bilir. Gerçekte ortak bilgi daha basit bir şekilde şöyle de anlatılabilir. Örneğin siz ve ben  $X$  olayı gerçekleştğinde ordaydık. Yine farzedelim ki bu olay olurken her ikimiz göz temasında bulunduk. Artık  $X$  olayının olduğunu ikimizin de bildiğini biliyoruz. Yani  $X$  olayının olduğunu ben biliyorum. Siz benim bunu bildiğimi biliyorsunuz. Ben de benim bunu bildiğimin bilindiğini biliyorum...

İki oyunculu bir oyun düşünelim, bu oyun  $i$  ve  $j$  oyuncuları arasında oynansın, her birinin pür-strateji uzayı ise sırasıyla  $S_i$  ve  $S_j$  olsun. Bu oyunun mahkum stratejilerinin elenmesi öncesi olası sonuç kümesinin,  $S = S_i \times S_j$  strateji profil kümesinin bir elemanı olacağını biliyoruz. Daha önce belirttiğimiz gibi rasyonel bir oyuncu asla mahkum stratejiyi oynamaz. Eğer  $i$  oyuncusunun  $\tilde{s}_i$  gibi bir mahkum stratejisi varsa ve  $j$  oyuncusunun ise mahkum bir stratejisi yoksa, bu durumda  $i$  oyuncusu rasyonel olduğundan bu stratejiyi asla oynamayacaktır. Bu yüzden oyunun sonucu daha küçük bir strateji profil kümesinden gelecektir:

$$S' = S_i \setminus \{\tilde{s}_i\} \times S_j.$$

Daha önce söylendiği gibi  $i$  oyuncusunun mahkum stratejisi olan  $\tilde{s}_i$ 'nin silinmesini rasyonalize edecek varsayımı yapmamız gerekir. Bunun için gerekli olan varsayım rasyonelliğin ortak bilgisidir. Yani bunun için  $j$  oyuncusunun sadece rasyonel olması değil aynı zamanda  $i$  oyuncusunun  $\tilde{s}_i$  stratejisini asla oynamayacağını da bilmesi gerekir. Benzer şekilde eğer  $\tilde{s}_i$  stratejisi silindikten sonra şimdi de  $j$  oyuncusunun kesin mahkum olan  $\tilde{s}_j$  stratejisinin benzer bir muhakeme ile silinmesi durumunda oyunun sonucu şu strateji profilinden gelmelidir:

$$S'' = S_i \setminus \{\tilde{s}_i\} \times S_j \setminus \{\tilde{s}_j\}.$$

Süreç böylece rasyonelliğin ortak bilgisini de kullanarak devam ederek oyunun dengesini bulmaya çalışır. Yani eğer rasyonellik ortak bilgi ise mahkum stratejileri sonsuz kere silebiliriz. Fakat pratik hayatta gerçek oyuncuların düşünceler hakkındaki düşüncelerinin sınırsız bir hiyerarşiyi izlemeleri pek makul gözükme-yebilir. Yani insanlar kafalarında sürekli silme işlemini bir-iki aşamadan fazla yapmazlar.

Rasyonelliğin ortak bilgi olma varsayımının yarattığı sonuçları Tablo 1.7’de verilen oyun üzerinden takip edelim.

|          | <i>L</i> | <i>M</i> | <i>R</i> |
|----------|----------|----------|----------|
| <i>U</i> | 2, 2     | 1, 1     | 4, 0     |
| <i>D</i> | 1, 2     | 4, 1     | 3, 5     |

**Tablo 1.7**

1. Eğer sütun oyuncusu rasyonel ise *M*’yi oynamamalıdır (çünkü kesin mahkumdur).

2. Eğer satır oyuncusu diğer oyuncunun rasyonel oyuncu olduğunu biliyorsa, *D*’yi oynamayacaktır (çünkü sütun oyuncusunun *M*’yi oynamayacağını bilir).

3. Sütun oyuncusu da satır oyuncusunun kendisinin (yani sütun oyuncusunun) rasyonel olduğunu bildiğini bilir. Bu yüzden satır oyuncusunun *D*’yi oynamayacağını bilir. Dolayısıyla kendisi de *R*’yi oynamayacaktır. Bu da (*U,L*)’nin tek denge olarak ortaya çıkmasına neden olacaktır.

Rasyonelliğin ortak bilgi olduğu varsayımının önemini ifade edebilmek için Tablo 1.7’de verilen oyunda oyuncuların neyi bildiklerine dair alternatif bir varsayım da bulunalım:

i. Oyuncular rasyonel

ii. 1.oyuncu, 2.oyuncunun renk vermediğini ve eşit olasılıkla davranışlarını rassallaştırdığını varsayıyor.

iii. 2.oyuncu, 1.oyuncunun rasyonel olduğunu ve 1.oyuncu da 2. oyuncunun eşit olasılıkla hareketlerini rassallaştırarak oynadığını düşünüyor.

Bu durumda 1.oyuncu kendisine en yüksek ortalama faydayı sağlayan *D* hareketini optimal olarak seçer (çünkü beklenen faydası daha yüksek). 2.oyuncu bunu doğru tahmin eder ve *R* hareketini seçer.

Görünürde bu alternatif varsayımı yapmakta herhangi bir yanlışlık yoktur. Fakat bazı olası tutarsızlıkların ortaya çıkmasına imkan vermektedir: Varsayalım yukarıdaki oyun 1. ve 2.oyuncular arasında sürekli oynanan bir oyun olsun. Yine 1. ve 2. oyuncuların yukarıda tanımlanan bilgi modeline sahip olduğunu ve sürekli (*D,R*) oynadıklarını varsayalım. 1.oyuncu bir müddet sonra 2.oyuncunun tutarlı bir şekilde *R*’yi oynadığını fark edecektir. Bu yüzden yukarıda verilen bilgi yapısını değiştirip 2. oyuncunun varsaydığı gibi renksiz olmadığını düşünecektir. Gerçekte 1.oyuncu bir kez 2. oyuncunun tutarlı bir şekilde *R* stratejisini oynadığı kanaatine varırsa kendisi *U* stratejisine sapacaktır. Fakat eğer rasyonelliğin ortak bilgi olduğu varsayımı yapılsaydı bu tür tutarsızlıklar olmayacaktı. Bu da bu varsayımın oyun teorisinde neden bu kadar yaygın bir şekilde kullanıldığını açıklamaktadır.

### 1.3 Makul Stratejiler

Rasyonelliğin ortak bilgi olduğu varsayımı altında, mahkum stratejilerin sürekli eliminasyonu tekniği ile silinmesi sonunda oyundaki her oyuncunun bu süreç sonu-

cunda elinde kalan bir strateji alt kümesi olur. Hiçbir oyuncu bu strateji alt kümesinin dışındaki bir stratejiyi hiç bir zaman oynamayacaktır. Fakat kalan stratejiler içinde artık mahkum strateji olmadığından direkt olarak elenmeleri de söz konusu olmayacaktır.

**Tanım 1.4** *Mahkum stratejilerin elenmesiyle kalan sonuçlar kümesine makul stratejiler denir.*

Bu tanım özü itibariyle stratejilerin rassal oynanma durumunu da içerir. Yani karma stratejiler kullanılarak da eleminasyon yapılabilir. Fakat bu durumu ancak karma stratejileri gördükten sonra ifade edeceğiz.

Makul stratejiler (veya rasyonalize edilebilir stratejiler) asla en iyi tepki olmayacak stratejilerin sürekli eleminasyonu sonucunda kalan stratejilerdir<sup>1</sup>. Bu yüzden bir oyuncu optimal stratejilerini makul stratejiler kümesinden seçer. Bu strateji kümesindeki her stratejiyi tutarlı bir şekilde gerekçelendirerek rasyonel bir şekilde oynayabilir. Fakat bir oyuncu kendi inançlarına göre en iyi tepkiyi verse bile, bu diğer oyuncular hakkındaki inançlarının doğru olduğu anlamına gelmez. Yani eğer karşı oyuncu irrasyonel bir oyuncu ise her şeyi yapabilir. Bu anlamda kendisinin en iyi tepki vermesi anlamsızlaşabilir. Bunu daha iyi anlamak için bir örnek verelim.

### Örnek 1.3

Tablo 1.8'de verilen oyunda rasyonel olan 1. oyuncu eğer 2.oyuncunun  $z$  hareketini oynayacağını düşünseydi en iyi tepkisi olan  $B$  hareketini oynardı. Fakat rasyonel olan 2. oyuncu asla  $z$  stratejisini oynamayacaktır çünkü bu strateji  $y$  stratejisi tarafından mahkum edilmektedir. Eğer 1. oyuncu, 2.oyuncunun rasyonel olduğunu bilseydi, bu oyuncunun asla  $z$ 'yi oynamayacağını bilirdi. Dolayısıyla 1. oyuncu  $B$ 'nin 2.oyuncunun rasyonel olarak oynadığı hiç bir stratejiye en iyi tepki olmayacağını anlardı. Böylece 2.oyuncu  $z$  stratejisini elemine ettiğinde, yani strateji kümesi  $\{w, x, y\}$  olduğunda, 1.oyuncu için  $B, C$  tarafından,  $E$ 'de  $D$  tarafından mahkum edilir.

|     | $w$  | $x$    | $y$   | $z$    |               | $w$ | $x$  | $y$    |       |
|-----|------|--------|-------|--------|---------------|-----|------|--------|-------|
| $A$ | 7, 5 | -8, 4  | 0, 4  | 99, 3  | $\rightarrow$ | $A$ | 7, 5 | -8, 4  | 0, 4  |
| $B$ | 5, 0 | 4, 1   | 15, 9 | 100, 8 |               | $C$ | 6, 0 | 5, 8   | 20, 4 |
| $C$ | 6, 0 | 5, 8   | 20, 4 | 10, 2  |               | $D$ | 2, 6 | 7, -10 | 3, 9  |
| $D$ | 2, 6 | 7, -10 | 3, 9  | 10, 8  |               |     |      |        |       |
| $E$ | 1, 6 | 2, -10 | 1, 7  | 8, 6   |               |     |      |        |       |

**Tablo 1.8** Eleminasyon sürecinde kalan makul stratejiler

<sup>1</sup> İki oyunculu oyunlarda sürekli eleminasyon yoluyla elde edilen stratejiler ile makul stratejiler birbiri ile aynıdır. Fakat ikiden daha fazla oyunculu oyunlarda bu doğru olmayabilir.

Sonuç olarak, eğer 1. ve 2. oyuncuların her ikisi de rasyonelse ve eğer 1.oyuncu 2. oyuncunun, ve 2.oyuncu da 1.oyuncunun rasyonel olduğunu biliyorsa artık il-gimizi Tablo 1.8’de verilen oyunun sağında bulunan daha küçük matrise yönelte-biliriz. Çünkü bundan sonra eliminasyon yoktur. Bu yüzden bu strateji profilinde her strateji diğer oyuncunun stratejilerine göre rasyonelize edilip, oynanabilir. Yani makul stratejiler,  $i$  oyuncusunun artık asla mahkum edilmeyen son süreçte kalan  $S_i^\infty$  stratejiler kümesidir. 1.oyuncunun makul stratejiler kümesi  $S_1^\infty = \{A, C, D\}$  iken, 2.oyuncunun makul stratejiler kümesi ise  $S_2^\infty = \{w, x, y\}$ ’dir. Örneğin 1.oyuncu  $A$  stratejisini her zaman rasyonelize ederek (gerekçelendirerek) oynaya-bilir: Eğer 1.oyuncu, 2.oyuncunun  $w$  stratejisini oynadığını düşünürse  $A$  stratejisini oynamak rasyoneldir. Bu yaklaşım 1.oyuncunun diğer tüm makul stratejileri için doğru olduğu gibi, aynı mantık 2.oyuncu için de geçerlidir.

Makulluk kavramı Bernheim (1984) ve Pearce (1984) tarafından bağımsız olarak geliştirildi. Kavram temelde üç önerme üzerine kuruludur:

- i. Oyuncular diğer oyuncuların seçimlerini tam olarak bilemezler.
- ii. Oyuncular rasyoneldir, dolayısıyla olaylar hakkında inançları veri alındığında optimal davranırlar.
- iii. Rasyonellik ve tercihler ortak bilgidir.

Bu önermeler şu anlama gelir: İki oyunculu bir oyun düşünelim. Oyuncu-lar aynı anda oynadıkları için tam olarak birbirlerinin ne oynayacağını bilemezler. 1.oyuncunun rasyonel olması demek onun 2.oyuncunun asla en iyi tepki olmayan bir stratejiyi oynamamasını beklemesi demektir. Dahası 1.oyuncunun sahip olduğu inançlar 2.oyuncunun rasyonel olması ile de tutarlı olmalıdır. Yani 1. oyuncunun inançları, 2.oyuncunun kendisine (1.oyuncuya) dair inançlarına göre hiç bir zaman rasyonel olmayan (ya da en iyi tepki olmayan) stratejileri oynamayacağı anlamına da gelir. Dolayısıyla rasyonellik ortak bilgidir.

## 1.4 Nash Dengesi

Ekonomi biliminde genel anlamda arz-talep eşitliği diye tanımlanan piyasa denge kavramı merkezi öneme sahip bir kavramdır. Bu kavramın teorik çekiciliği, denge durumunda hiç kimsenin herhangi bir dışsal faktör olmadan davranışını değiştirme gibi bir eğilim içinde olmamasından kaynaklanır. Davranıştaki bu değişmeme veya düzenlilik hali günlük hayatta da karar alırken tahminlerimizin temelini oluşturur.

İnsanların davranışlarındaki düzenlilikleri, stratejik yapıların tahmini için de kullanırız. Bunun için de genel olarak insanların rasyonel oldukları yani kendi faydalarını düşündüklerini ve diğer insanların davranışlarındaki düzenliliklerden de haberi olduklarını düşünürüz. Standart arz-talep yapısında olduğu gibi, strate-jik yapılarda da rasyonel olarak sürdürülen davranış düzenliliğine denge diyoruz. Stratejik yapılardaki en önemli denge kavramlarından biri Nash dengesidir. John Nash tarafından geliştirilen bu kavram o kadar yaygın kullanılan bir denge kavramı haline geldi ki iktisatçılar bir oyunun dengesinin baştan Nash dengesi ya da rafine Nash dengesi biçimlerinden biri olduğunu varsayar.

Şimdi Nash dengesinin ne olduğuna bakalım. Bunun için de Tablo 1.9'da verilen iki oyunculu bir oyunu inceleyelim. Bu oyunda her iki oyuncu için de baskınlık ilişkileri yok ve bu yüzden tüm stratejileri kesin mahkum stratejilerin sürekli eliminasyonu ile kalan stratejiler olarak düşünebiliriz. İki oyuncu olduğunda, bu aynı zamanda makul pür strateji profiller kümesidir. Örneğin  $(U, l)$  strateji profilini düşünelim. Bu sonucun makul olduğunu inançlara bakarak görebiliriz. 1.oyuncu eğer 2.oyuncunun  $l$  stratejisini oynayacağına inanırsa en iyi tepkisi  $U$  stratejisidir. 2.oyuncunun  $l$  seçimi de rasyonalize edilebilir, çünkü 2.oyuncu da, 1.oyuncunun  $U$  stratejisini oynayacağını düşünürse  $l$  stratejisini oynaması rasyoneldir. Bu yüzden bu tutarlı inançlar kümesi  $U$  stratejisini oynamayı makul kılar. Yine benzer olarak 1.oyuncu 2.oyuncunun  $r$  stratejisini oynayacağını düşünürse  $D$  stratejisini oynaması rasyoneldir, 2.oyuncu da 1.oyuncunun  $D$  stratejisini oynadığında  $r$  stratejisini oynaması rasyoneldir. Yani her iki oyuncunun her iki stratejiye dönük karşılıklı tutarlı inançlara sahip olması  $(D, r)$  dengesini verir.

|     | $l$  | $r$  |
|-----|------|------|
| $U$ | 5, 5 | 4, 4 |
| $D$ | 4, 4 | 5, 5 |

**Tablo 1.9**

Fakat oyun bittikten sonra her iki oyuncu da 1.oyuncunun  $U$ , ikinci oyuncunun da  $r$  stratejisini oynadığını görürse, yani her oyuncu rakibinin oyunu hakkındaki inançlarının doğru çıkmadığını görürse, herkes kendi seçiminden pişmanlık duyar. Daha spesifik olarak 1.oyuncu 2.oyuncunun  $l$  seçeceğini beklediği için  $U$  stratejisini oynadı fakat 2.oyuncu  $r$  stratejisini seçti. Eğer 1.oyuncu 2.oyuncunun  $r$  seçeceğini bilseydi  $U$  yerine  $D$  stratejisini seçerdi. Benzer olarak 2.oyuncu, 1.oyuncunun  $D$ 'yi oynayacağına inandığı için  $r$  stratejisini seçti fakat 1.oyuncu bunun yerine  $U$  hareketini seçti. Eğer 2.oyuncu, 1.oyuncunun  $U$  hareketini oynayacağını bilseydi,  $l$  hareketini oynamayı tercih ederdi. Buna göre  $(U, r)$  sonucu, her oyuncu karşı oyuncunun stratejileri üzerinde oluşturduğu inançlara göre en iyi tepkidir fakat oyuncuların birbiri hakkındaki inançları birbirleri ile tutarlı değildir.

Şimdi de  $(U, l)$  strateji profiline daha detaylı bakalım.  $U$  stratejisi 1.oyuncu için makul bir stratejidir. 2.oyuncu için de  $l$ 'nin makul bir strateji olduğunu görmek için aşağıdaki gibi tutarlı inançlar olmalıdır:

(i) 2.oyuncu, 1.oyuncunun  $U$  hareketini oynayacağına inanmaktadır.

(ii) 2.oyuncu, 1.oyuncunun da kendisinin (2.oyuncunun)  $l$  oynayacağına inandığına inanmaktadır.

Oyun bu şekilde oynandığında, 1.oyuncu  $U$  hareketini, 2.oyuncu da  $l$  hareketini oynadığında, her oyuncunun diğerinin stratejisi hakkındaki tahmini gerçekten doğru çıkar. Her oyuncu kendi doğru inançlarına göre oynadığından, hiç bir oyuncu seçimlerinden pişmanlık duymaz.

Başka bir ifadeyle, rasyonel oyuncular rakiplerinin stratejilerini tahmin ederken sadece rakipleri hakkında oluşturdukları inançlara göre en iyi tepkiyi vermezler

aynı zamanda rakiplerinin gerçek oyunlarına en iyi tepkiyi verirler. Oyuncular rakiplerinin stratejilerini doğru tahmin ettikleri zaman ve bu tahminlere göre en iyi tepkiyi oynadıkları zaman, sonuç strateji profili Nash dengesidir.

**Tanım 1.5** *Stratejik-biçimli*  $G = \{N, (S_i), (u_i)\}$  oyununda, eğer her  $i$  oyuncusunun,  $s_i^*$  stratejisi diğer  $(n - 1)$  oyuncunun  $(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$  stratejilerine en iyi tepkisi ise,  $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$  strateji profili *pür strateji Nash dengesidir*:

$$u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*), \forall i \in N, \forall s_i \in S_i$$

veya kısaca

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*), \forall i \in N, \forall s_i \in S_i,$$

burada  $s_i^*$ ,  $i$  oyuncusunun faydasını maksimize eden değerdir, yani

$$s_i^* = \arg \max_{s_i \in S_i} u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*).$$

Bu tanımlamayı daha iyi anlamaya çalışalım. Bunun için  $G = \{N, (S_i), (u_i)\}$  stratejik-biçimli bir oyunun çözümünün  $(s'_1, \dots, s'_n)$  strateji profili olduğunu iddia edelim. Eğer  $(s'_1, \dots, s'_n)$  strateji profilinin Nash dengesi değilse, bu şu anlama gelir: belirli bir  $i$  oyuncusu için  $s'_i$  stratejisi,  $(s'_1, \dots, s'_{i-1}, s'_{i+1}, \dots, s'_n)$  strateji profiline verilen en iyi tepki değildir. Yani  $i$  oyuncusu için  $s''_i \in S_i$  gibi daha yüksek fayda sağlayan başka bir strateji var demektir:

$$u_i(s'_1, \dots, s'_{i-1}, s'_i, s'_{i+1}, \dots, s'_n) < u_i(s'_1, \dots, s'_{i-1}, s''_i, s'_{i+1}, \dots, s'_n).$$

Eğer biri  $(s'_1, \dots, s'_n)$  strateji profilinin  $G(\cdot)$  oyunun çözümü olduğunu iddia ediyorsa ve bu strateji profili Nash dengesi değilse, en azından bir oyuncu bu tahminden sapma niyeti gösterir. Burada da inançların doğruluğu ve tutarlılığı devreye girer. Örneğin bir oyunun nasıl oynanması gerektiği şeklinde bir kural varsa, bu kuralın tavsiye ettiği stratejiler Nash dengesidir. Aksi takdirde en azından bir oyuncu bu kurala uymazdı. Başka bir deyişle,  $i$  oyuncusu kendi denge reçetesinin ona tavsiye ettiği stratejilerin rasyonelliğini sorgular: Acaba rakipleri  $s_{-i}^*$  strateji profilini (diğer tüm oyuncuların stratejileri) oynadığında bu stratejiyi oynamaya devam eder mi? Ve acaba karşı tarafın bu stratejide kaldığını bilirse başka bir stratejiye sapar mı? Eğer saparsa, demek ki bu stratejiden daha fazla fayda düzeyi sağlayan başka bir stratejisi var demektir. Bu yüzden de bu strateji Nash denge stratejisi değildir. Eğer aynı stratejide kalıyorsa bu Nash dengesidir. Bu diğer oyuncu için de geçerlidir.

#### Örnek 1.4

Tablo 1.10'da verilen oyunda tek bir Nash dengesi vardır:  $(x, w)$ . Bunu şöyle teyit edebiliriz. Eğer 1.oyuncu 2.oyuncunun  $w$  stratejisini oynadığını düşünse  $y$  yerine  $x$  stratejisini oynaması daha iyi sonuç verir. Fakat eğer 2.oyuncu 1.oyuncunun  $x$  stratejisini oynamayı sürdüreceğini düşünse hangi stratejiyi oynar, evet o da

$w$  oynamaya devam eder. Yani her iki oyuncunun birbiri hakkındaki inançları tutarlı ve dolayısıyla oyuncular sonuçtan pişmanlık duymazlar. Sonuç olarak  $(x, w)$  strateji profili Nash dengesidir. Dolayısıyla her iki oyuncunun birbirlerinin stratejilerine verdikleri tepkiler en iyi tepkilerdir. Bu yüzden de Nash dengesi durağandır, hiç bir oyuncu stratejisini değiştirmez.

|     |      |      |
|-----|------|------|
|     | $w$  | $z$  |
| $x$ | 2, 3 | 1, 1 |
| $y$ | 0, 1 | 2, 0 |

**Tablo 1.10** Tek bir Nash dengesi var

Örneğin  $(x, z)$  strateji profilinin Nash dengesi olmadığını gösterelim. Eğer 1.oyuncu, 2.oyuncunun  $z$  stratejisini oynadığını düşünse  $x$  stratejisini oynamaktan vazgeçer, çünkü  $y$  stratejisine kaymak daha iyi sonuç verir. Benzer olarak 1.oyuncu  $x$  stratejisini oynadığında 2.oyuncu  $z$  stratejisinde kalmaz,  $w$  stratejisine kayar. Yani hiç bir oyuncu için  $(x, z)$  strateji profilinde kalmak rasyonel değildir. Dolayısıyla bu strateji profili durağan değildir.

Şimdi aşağıdaki altbölümde oyun teorisinin bazı klasik oyun örneklerini tanıtacağız. Bu oyun örnekleri Nash dengesini daha iyi anlamamıza yardımcı olacağı gibi, kitabın ilerleyen bölümlerinde bir çok kez karşımıza çıkacak oyunlardır.

### 1.4.1 Bazı Klasik Oyun Örneklerinde Pür Nash Dengesi

#### *Cinsiyetler Savaşı*

Nash dengesini daha iyi anlamak için kullanılabilecek örneklerden biri klasik bir oyun olan Cinsiyetler Savaşı oyunudur. Bu oyun kısaca boks maçına gitmek isteyen bir erkek ile bir bale gösterisini seyretmek isteyen bir kadın arasındaki çatışmayı anlatan bir oyundur. Tercihleri farklı olan ama gerekirse tercihlerini birbirinin lehine değiştirecek kadar da birbirini seven bir çiftle karşı karşıyayız. Oyuncuların faydaları Tablo 1.11’de gösterildiği gibidir.

|             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|
|             | <i>boks</i> | <i>bale</i> |
| <i>boks</i> | 2, 1        | 0, 0        |
| <i>bale</i> | 0, 0        | 1, 2        |

**Tablo 1.11** Cinsiyetler Savaşı

Her iki oyuncunun da aynı anda karar vermek zorunda olduğu bu oyunda dikkat edilirse baskın strateji dengesi yoktur. Fakat bu oyunda iki Nash dengesi vardır. Bunlardan biri  $(boks, boks)$  strateji profilidir. Eğer kadın, erkeğin boks hareketini seçtiğini düşünürse boks hareketini seçer (1.oyuncu olan erkek satır oyuncusudur) ve eğer erkek kadının boks hareketini seçtiğini düşünürse boksu seçmeye devam eder. Diğer strateji profili  $(bale, bale)$ ’nin de aynı muhakeme ile Nash dengesi olduğu görülür.

Soru oyuncuların hangi Nash dengesinin seçileceğini nerden bildikleridir? Boksa ve baleye birlikte gitmek, her ikisi de Nash dengesidir, fakat farklı davranışlardan oluşan Nash dengeleridir. Nash dengesi doğru ve tutarlı inançlar olduğunu varsayar. Eğer bu oyuncuların önceden bir araya gelip konuşmaları mümkün değilse, erkek baleye gidebilir ve kadın da boksa gidebilir, her biri diğerinin düşünceleri hakkında yanlış bir anlayışa sahip olabilir. Fakat eğer oyuncular birbiri ile iletişim halinde değilse bile, Nash dengesi bu oyunun tekrarı ile daha fazla ortaya çıkan denge olabilir.

Diğer yandan dikkat edilirse Cinsiyetler Savaşındaki her bir Nash dengesi pareto etkindir. Yani diğer hiç bir strateji profili bir oyuncunun faydasını düşürmeden diğerinin faydasını artırmaz. Çok sayıda oyunda Nash dengesi pareto etkin değildir. Örneğin Tablo 1.1'de verilen Mahkumlar Çıkmazı oyununda Nash dengesi tektir ama pareto etkin değildir. Yani (*itiraf et, itiraf et*) denge profili  $(-4, -4)$  fayda düzeyi sağlamasına rağmen her iki oyuncunun faydalarını  $(-2, -2)$  düzeyine yükselten başka bir strateji profili vardır, o da (*itiraf etme, itiraf etme*)'dir.

Cinsiyetler Savaşı oyunun söylemeye çalıştığı temel şey: İki oyuncunun tercihleri arasında çatışma olabilir fakat birlikte hareket etmek yine de iyidir. Bu yüzden bu oyunun ima ettiği durumlarla ekonominin (veya genel olarak sosyal hayatın) bir çok alanında karşılaşırız. Örneğin bunlardan biri endüstri genelinde bir mal standardı oluşturmak konusunda görülür. İki firmanın ayrı ayrı ürettiği malların standartları konusunda farklı tercihleri olabilir. Fakat ürünlerinin ortak standartlara sahip olmasının da tüketicileri teşvik edeceğini bilmelerinden dolayı, firmaların birlikte hareket etmeleri her firma için daha iyi olabilir.

Cinsiyetler Savaşında hem erkek hem de kadın aynı anda hareket ediyorlar. Fakat birinin daha önce hareket etmesine imkan verirse, örneğin erkek boks bileti önceden alabilir, aralarındaki sevgiden dolayı kadın da boksa gideceğinden denge erkeğin lehine gelişir. Bu tür dinamik ardışıl oyunlara bu kitabın ilerleyen bölümlerinde bakacağız.

### *Eşleşen Paralar*

İki kişi aynı anda ellerindeki bir madeni parayı havaya attıktan sonra paraların yazı veya tura mı geldiğini birbirlerine göstermeye karar veriyorlar. Eğer paraların aynı tarafı gelirse (yazı-yazı veya tura-tura), 2. oyuncu, 1. oyuncuya 1 lira veriyor fakat eğer farklı tarafları gelirse (yazı-tura veya tura-yazı) 1.oyuncu, 2.oyuncuya 1 lira veriyor. Her oyuncu sadece kendi aldığı parayı önemsemektedir. Bu stratejik durum Tablo 1.12'de gösterilmektedir. Bu oyunda oyuncuların çıkarları birbirlerine tamamen zıttır. Birinci oyuncu diğer oyuncu ile aynı hareketi isterken, ikinci oyuncu tam tersi hareketi istemektedir.

|      |       |       |
|------|-------|-------|
|      | tura  | yazı  |
| tura | 1, -1 | -1, 1 |
| yazı | -1, 1 | 1, -1 |

**Tablo 1.12 Eşleşen Paralar**

Bu oyuna benzer bir mantığı barındıran iktisattan bir örnek verelim. Yerleşik bir firma ile yeni bir firmanın yeni bir ürünün görünüşü hakkında tercihleri buna oldukça uygun bir durumu ifade etmektedir. Her iki firmanın da üretilen malın görünüşü hakkında iki farklı seçeneğe sahip olduklarını varsayalım. 1. firma (mevcut yerleşik firma) yeni firmanın ürününün kendi ürününden farklı bir görüntüye sahip olmasını isterken (çünkü tüketicilerin yeni firmanın aynı görünüşlü malını alabileceğini düşünmektedir), 2. firma (yeni firma) kendi ürünün yerleşik firma ile aynı görünüme sahip olmasını istemektedir. Böylece yerleşik firmanın oluşmuş ününden faydalanmak istemektedir.

Dikkat edilirse bu oyunda Nash dengesi yoktur. Çünkü bir oyuncu için iyi olan bir hareket diğeri için tamamen kötüdür. Yani eğer 1.oyuncu 2.oyuncunun turayı seçeceğini düşünürse, turayı seçer fakat 2.oyuncu 1.oyuncunun turayı seçtiğini düşünürse daha önceki tura stratejisinde durmayacak, yazı stratejisine kayar. Benzer olarak eğer 1.oyuncu 2.oyuncunun yazı stratejisini seçtiğini düşünürse yazıyı seçer fakat 2..oyuncu eğer 1.oyuncunun bu stratejide kalacağını (yani yazıda kalacağını) düşünürse stratejisini hemen değiştirir, turaya geçer. Dolayısıyla durağan bir denge söz konusu değildir.

Oyunculardan birinin kazancının diğeri kaybı olduğu bu tür oyunlara *sıfır-toplamlı oyunlar* denir. Bu oyunlarda kazançların toplamı, kayıpların toplamına eşit ve hepsinin toplamı da sıfırdır, yani  $\sum_{i=1}^n u_i(\cdot) = 0$ . Bu oyunların önemli bir özelliği, her strateji profiline pareto etkin olmasıdır. Çünkü her strateji profiline diğeri geçişte en azından bir oyuncunun durumu daha kötü hale gelir. Tüm strateji profillerinin tamamının pareto etkin olduğu oyunlar aynı zamanda *çatışma oyunları* olarak bilinir.

#### *Geyik Avı*

Geyik avlamak isteyen bir grup avcı olduğunu varsayalım. Fakat avcılar tek başına hareket etmek istediklerinde güçleri ancak tavşan avlamaya yetmektedir. Avcıların arasındaki bu ilişki aşağıdaki gibi oyun teorik olarak ifade edilebilir.

Her avcı iki opsiyona sahiptir: geyik avlanmaya odaklanmak veya tavşan yakalamak. Eğer tüm avcılar geyik avlamayı amaçlarsa, geyiği avlayıp eşit şekilde paylaşabileceklerdir. Fakat eğer bir avcı enerjisini tavşanı yakalamaya verirse, geyik kaçacak ve yakalamak imkansızlaşacaktır. Dolayısıyla tavşan, enerjisini tavşan yakalamaya verenin olacaktır. Bu arada her avcıya düşecek geyik hissesi tavşandan daha fazladır.

İki oyunculu (iki avcı) böyle bir oyunda her oyuncunun hareket kümesi:  $\{geyik, tavşan\}$ ; her oyuncunun ilk tercihi her oyuncunun geyik avına çıkması, bunu takip eden tercih kendisinin tavşan avına çıkmasıdır, en son tercihi ise kendisinin geyik, diğeri tavşanı seçmesidir, yani eli boş dönmek. Avcıların tercihleri Tablo 1.13'de sayısal olarak gösterilmektedir. Çok oyunculu diğer tüm oyunlarda olduğu gibi bunu bir matris tablosunda ile göstermek oldukça zordur. Bu yüzden basitlik olsun diye iki avcının olduğu varsayımı altında bir tablo oluşturduk.

Geyik Avı oyununda iki Nash dengesi vardır.

(i) (*geyik, geyik*) strateji profili bir Nash dengesidir. Çünkü her oyuncu karşı

|               |              |               |
|---------------|--------------|---------------|
|               | <i>geyik</i> | <i>tavşan</i> |
| <i>geyik</i>  | 2, 2         | 0, 1          |
| <i>tavşan</i> | 1, 0         | 1, 1          |

**Tablo 1.13** Geyik oyunu

tarafın geyik stratejisi seçeceğini düşünse kendisi de geyik stratejisini seçer. Karşı oyuncu da eğer bu oyuncunun geyik stratejisinde kalacağını düşünse geyik stratejisini oynamaya devam eder.

(ii) (*tavşan*, *tavşan*) da bir Nash dengesidir. Karşı oyuncu tavşan yakalarsa oyuncunun kendisi de tavşan yakalamak isteyecektir çünkü bu durumda geyik oynamak daha düşük bir fayda sağlar. Benzer olarak diğer oyuncu da bu oyuncunun tavşanda kaldığını bilse tavşan oynamaya devam edecektir.

Diğer hiç bir strateji profili Nash dengesi değildir çünkü hiç bir oyuncu (*geyik*, *tavşan*) ya da (*tavşan*, *geyik*) strateji profillerini oynamayacaktır. Başka bir deyişle, karşı taraf geyik seçtiğinde tavşan oynamayacak, ya da karşı taraf tavşan seçtiğinde geyik oynamayacaktır.

#### *Koordinasyon Oyunu*

İki oyunculu bir oyunda, her iki oyuncunun hareket kümesi,  $\{\text{büyük}, \text{küçük}\}$  şeklinde olduğunu varsayalım. Büyük ve küçük seçimleri büyük ve küçük objelerin seçimine karşılık gelebilir. Asıl olan seçilen objelerin uyumlu olmasıdır. Eğer iki oyuncu da büyük veya küçük obje seçerse faydaları diğer tercihlerine göre, yani birinin büyük diğerinin küçük seçmesi, daha yüksek fayda sağlar. Fakat her iki oyuncunun büyük seçmesi ikisine de ikisinin de küçük seçmesinden daha fazla fayda sağlar. Bu tercih sıralaması Tablo 1.14’de verilmektedir.

|              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|
|              | <i>büyük</i> | <i>küçük</i> |
| <i>büyük</i> | 2, 2         | -1, -1       |
| <i>küçük</i> | -1, -1       | 1, 1         |

**Tablo 1.14** Koordinasyon oyunu

Bu oyunun (*büyük*, *büyük*) ve (*küçük*, *küçük*) strateji profilleri oyunun iki Nash dengesidir. Yani her oyuncu diğeri büyük seçtiğinde büyük, küçük seçtiğinde küçük seçecektir. Fakat (*büyük*, *büyük*) strateji profili, (*küçük*, *küçük*) strateji profiline pareto baskındır. Başka bir deyişle, her iki oyuncunun (*büyük*, *büyük*) strateji profilini tercih etmesi her ikisi için de daha iyi bir sonuç doğurmaktadır. Çoğu ekonomist oyunun gerçekleşen sonucunu tahmin etmek için pareto etkin dengeyi gösterirler. Eğer oyuncular arasında oyun öncesi iletişim söz konusu olsaydı bu denge durumunun rahatlıkla ortaya çıkacağını söylemek mümkün olurdu. Fakat ilginç soru eğer iletişim yoksa sonucun ne olacağı ile ilgilidir. Pareto-etkin denge hala geçerli midir? Fakat bu soru iktisadın değil daha çok psikolojinin konusuna girmektedir.

Bu tür oyunlarda dikkat edilirse oyuncular, kendileri için daha iyi strateji pro-

filleri üzerinde anlaşılırlarsa (koordineli hareket ederlerse) daha yüksek refah düzeylerine ulaşabilirler. Bu yüzden bu tür oyunlara *koordinasyon oyunları* denir. Bu örnekte çok sayıda Nash dengesi olan koordinasyon durumu söz konusu olduğundan, bu koordinasyonlar üzerine tercih sıralaması yapılabilir. Bu yüzden bu koordinasyon oyunlarına *sıralı-pareto koordinasyon oyunu* denir.

Diğer bir koordinasyon problemi Tablo 1.15'de gösterilmektedir. *Tehlikeli koordinasyon* diye de nitelendirilen bu oyun, sıralı-pareto koordinasyon oyunundaki ile aynı Nash dengelerine sahiptir. Fakat farklılık denge-dışı fayda düzeylerinde ortaya çıkmaktadır. Bu farklılık oyundaki dengenin daha düşük fayda veren Nash dengesinde oluşmasına neden olabilir. Dolayısıyla denge, pareto mahkum dengede oluşabilir.

Eğer 1.oyuncunun, 2.oyuncunun rasyonel olmadığına dönük bir kaygısı varsa ya da ilgisinin dağınık olduğunu düşünüyorsa, 1.oyuncu büyük stratejisini oynamaya gönülsüz olacaktır. Çünkü eğer 2.oyuncu küçük stratejisini bir şekilde oynarsa  $-1000$  gibi yüksek bir zarar düzeyi ile karşılaşabilir. Bu yüzden risk almayı göze almayıp küçük stratejisini seçebilir böylece en fazla  $-1$  gibi çok daha düşük bir zararla karşılaşabilir. Gerçek hayatta insanlar hatalar yaparlar ve bunun maliyeti de yüksek olabilir. Hatanın küçük bir olasılıkla bile olsa gerçekleşmesinin maliyeti yüksek olabilir. Bu yüzden beklenen sonuç, sıralı-pareto koordinasyon oyununda olduğu gibi (*büyük, büyük*) strateji profili olmayabilir.

|              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|
|              | <i>büyük</i> | <i>küçük</i> |
| <i>büyük</i> | 2, 2         | -1000, -1    |
| <i>küçük</i> | -1, -1       | 1, 1         |

**Tablo 1.15** Tehlikeli Koordinasyon oyunu

Şimdi de başka bir koordinasyon oyun örneği ile devam edelim. Bu örnekte bireylerin risk davranışlarına bakalım. Tablo 1.16'da verilen oyunu düşünün. Bu oyunda iki pür strateji Nash dengesi vardır:  $(U, l)$  ve  $(D, r)$ . Her iki pür strateji Nash dengesi oyunun tahminini kolaylaştırır. Görünen o ki  $(U, l)$  dengesi pareto baskındır, fakat  $(D, r)$  daha güvenilir bir sonuçtur. Çünkü her oyuncu bu denge profiline uymakla 7 almayı garanti eder. Halbuki  $(U, l)$  dengesine göre hareket etmek rakibin buna uymaması durumunda sıfır fayda almasına neden olabilir. Bu yüzden 1.oyuncu emin olmadıkça kendine en uygun olan  $D$  stratejisini seçer.

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
|          | <i>l</i> | <i>r</i> |
| <i>U</i> | 9, 9     | 0, 8     |
| <i>D</i> | 8, 0     | 7, 7     |

**Tablo 1.16** Risk baskınlık

Benzer iddia 2.oyuncu için de geçerlidir. 2.oyuncu  $l$  hareketini, 1.oyuncunun  $U$  hareketini oynadığından çok emin olmadıkça oynamayacaktır. Bu da 1.oyuncunun, 2.oyuncunun  $l$  hareketini oynayacağına dair şüphesini artırır, bu yüzden

1.oyuncu için  $D$ 'yi oynamayı daha cazip hale getirir. 2.oyuncu da 1.oyuncunun böyle düşünebileceğini fark eder ve bu yüzden o da daha temkinli davranır ve  $r$  hareketini seçer. Böylece  $(D, r)$  strateji profili oyunun denge davranışı olur. Burada söylenmek istenen şey  $(D, r)$  strateji profilinin rasyonel oyuncular tarafından oynanmak zorunda olduğunu belirtmek değil, bunun daha makul bir davranış olduğunu belirtmektir. Bu yüzden  $(D, r)$  dengesi *risk baskın dengedir*.

Oyun öncesi oyuncuların kendi aralarında herhangi bir anlaşmanın olmaması ve birbirini hakkında sahip oldukları güvensizliklerden dolayı dengenin  $(D, r)$ 'de sonuçlandığını gördük. Acaba oyun öncesi diyalog bu güvensizliği giderebilir mi?

İki oyuncunun pareto etkin olan  $(U, l)$  dengesi üzerinde anlaştıklarını varsayalım. İki oyuncu  $(U, l)$  dengesini oynamak için önceden anlaşsalar bile, 1.oyuncu şöyle bir mantık yürütebilir: Hiç konuşmamış olsaydık ben  $D$  hareketini seçecektim. Şimdi konuştuk ama hala 2.oyuncunun  $l$  hareketini oynayacağından emin değilim o zaman benim de  $U$  hareketini oynamak için yeterli motivasyonum var mı? Hayır. 2.oyuncu gerçek niyetlerinden bağımsız olarak benim onun  $l$  hareketini oynayacağına inandırmak ve dolayısıyla da benim  $U$  hareketini oynatmaya yönlendirmek isteyebilir. Dolayısıyla bu anlaşmaya uymak rasyonel değildir. Aynı şekilde 2. oyuncu  $(U, l)$  dengesinin oynanmasına dönük benzer muhakemeyi izleyebilir. Dolayısıyla her iki oyuncu da bu anlaşmanın geçerliliği konusunda emin değildirler ve başlangıçtaki gibi şüphelerini korurlar ve pareto mahkum fakat risk baskın denge olan  $(D, r)$  strateji profilini oynarlar.

Tabi bu düşünce biçimi her oyun için geçerli değildir. Çünkü bazen diyalog koordinasyonun gerçekleşmesini sağlayabilir. Tablo 1.17'de verilen oyuna bakalım. Pareto-sıralı olmayan iki Nash dengesi vardır. Yani 1.oyuncu bir dengeyi diğerine tercih ederken 2.oyuncu diğerini tercih etmektedir. Oyunda her Nash dengesi diğer denge-dışı sonuca baskındır. Oyuncular Nash dengesi-üzerinde koordine olmayı tercih edebilirler, ki bu her ikisinin tercihleri farklı olsa da mümkündür, çünkü koordinasyonsuzluk daha kötü bir sonuca neden olmaktadır.

|     | $l$  | $r$  |
|-----|------|------|
| $U$ | 2, 1 | 0, 0 |
| $D$ | 0, 0 | 1, 2 |

**Tablo 1.17**

İki oyuncunun oyun öncesi şöyle anlaştıklarını varsayalım: oyun en iyi satır dengesi olan  $(U, l)$  strateji profilindeki gibi oynansın. Bu durumda 1.oyuncu, 2.oyuncunun  $l$  hareketini oynayacağına inanmalı mıdır? Eğer 2.oyuncu  $l$  yerine  $r$  hareketini oynasaydı, bu durumda 1.oyuncunun da  $U$  yerine  $D$  hareketini oynamasını isterdi. Bu da 1.oyuncunun da anlaşmaya uymamasını istemek anlamına gelirdi. Çünkü anlaşmadan tek başına sapmak daha iyi sonuç vermez.

Fakat 1.oyuncu  $U$  hareketinde kalacaktır, çünkü  $D$  hareketini oynadığında, eğer 2.oyuncu  $r$  oynarsa 1 alırken  $U$  da kalması ona 2 kazandıracaktır. Burada 2.oyuncu  $(U, l)$  anlaşmasına vararak, 1. oyuncuya şu sinyali vermek istiyor evet ben 1.oyuncunun  $U$  hareketini oynamasını istiyorum. Yukarıda oyunun tersine 1.oyuncu da

anlaşmaya uyacağı sinyali vermektedir. Çünkü dediğimiz gibi anlaşmadan sapan daha iyi sonuç elde edemez. Bu yüzden her iki pür Nash dengesinden birinde varılan anlaşma veya koordinasyon kendisini gerçekleştiren dengedir. Bu da aslında bir Cinsiyetler Savaşı oyunundaki temel mantığı yansıtır.

#### *Tavuk Oyunu*

Oyun teorisinin bir diğer klasik oyunu Tavuk Oyunu diye nitelendirilen oyundur. Bu oyun örneğin tek bir şeritli yola doğru ilerleyen iki şoförün her ikisi de tek şeritli yola tek başına girmek için hızlı bir şekilde arabalarını sürdükleri bir durumu nitelemek için kullanılabilir. Bu oyunda her oyuncu diğerinin yarıştan çekilmesini ister. Fakat diğeri çekilmeden kendisinin çekilmesi onur kırıcı olacağından çekilmeyi tercih etmeyecektir, yani kimse korkaklık göstermek istemeyecektir (tavuk ismini buradan alıyor). Her ikisi çekilmediğinde tek şerit yeterli olmayacağından kaza yapacaklardır.

Tablo 1.18 böyle bir oyunu göstermektedir. Oyunda iki Nash dengesi vardır. Eğer 1.oyuncu 2.oyuncunun çekil hareketini oynayacağını düşünse kendisi için en iyi hareket çekilme'dir. Eğer 2.oyuncu, 1.oyuncunun çekilme hareketini oynayacağını düşünse çekil hareketinde kalır mı? Evet kalır, dolayısıyla durağan bir durum söz konusudur. Bu yüzden Nash dengelerinden biri (çekil, çekilme)'dir. Diğer yandan eğer 1.oyuncu 2.oyuncunun çekilme oynayacağını düşünse çekil hareketini oynar. Eğer 2.oyuncu 1.oyuncunun çekil hareketini oynadığını düşünse çekilme hareketinde kalır mı? Evet kalır, dolayısıyla bu strateji profili de durağandır. Dolayısıyla (*çekilme, çekil*) de diğer bir Nash dengesidir.

|                | <i>çekil</i> | <i>çekilme</i> |
|----------------|--------------|----------------|
| <i>çekil</i>   | 0, 0         | -1, 1          |
| <i>çekilme</i> | 1, -1        | -10, -10       |

**Tablo 1.18** Tavuk oyunu

Bu oyundan çıkan temel davranış kalıbı, biri ısrar ettiğinde (yani çekilmemek) ısrar etmemek (çekilmek), fakat diğeri ısrar etmediğinde ısrar etmektir. Bu anlamda Tavuk Oyunu bir anti-koordinasyon oyunudur. Her oyuncu için de karşıt stratejileri izlemek optimaldir (halbuki koordinasyon oyunlarında aynı stratejileri izlemek daha iyi sonuçlar verir).

Biyolojiden esinlenerek Şahin-Güvercin Oyunu da denen bu oyun, Tablo 1.19'da verilen parametrelerle daha genel olarak tanımlanabilir. Burada  $X > L > T > W$  fayda yapısına sahip her oyun bir Tavuk oyunu veya Şahin-Güvercin oyunudur.

|                 | <i>güvercin</i> | <i>şahin</i> |
|-----------------|-----------------|--------------|
| <i>güvercin</i> | $L, W$          | $T, T$       |
| <i>şahin</i>    | $X, X$          | $W, L$       |

**Tablo 1.19** Şahin-Güvercin oyununun genel gösterimi

### *Mahkumlar Çıkmazı*

Daha önce Tablo 1.1'de verdiğimiz Mahkumlar Çıkmazı oyununda, dengeğin baskın strateji kavramı ile bulunabileceğini belirtmiştik. Fakat aynı sonuca Nash dengesi ile de varabiliriz: 1.sanık itiraf stratejisini izlediğinde, 2.sanık için de en iyi tepki itiraf etmektir. Fakat eğer 1.sanık, 2.sanığın itiraf edeceğini bilseydi itiraf etmeye devam eder miydi? Evet ederdi, stratejisini değiştirmezdi. Benzer olarak 2.sanık da 1.sanığın itiraf edeceğini bilseydi stratejisini değiştirmezdi. Dolayısıyla itiraf etmek her iki oyuncunun birbirlerine verdikleri en iyi tepkidir. Stratejilerini değiştirmezler, denge stratejileri durağandır, dolayısıyla Nash dengesidir.

Tablo 1.20'de belirtilen fayda parametreleri arasındaki ilişki,  $L > X > T > W$  şeklinde olan her oyun bir Mahkumlar Çıkmazı oyunudur.

|   | C   | D   |
|---|-----|-----|
| C | X,X | W,L |
| D | L,W | T,T |

**Tablo 1.20** Mahkumlar Çıkmazı oyunun genel gösterimi

Mahkumlar Çıkmazı problemi sadece mahkumların içinde bulundukları çıkmazı değil, çok sayıda durumu tanımlamak için kullandığımız bir modeldir. Örneğin literatürde sıkça rastladığımız, bazı varsayımlar altında, ülkelerin silahlanma yarışı içinde olmaları bir mahkumlar çıkmazı problemi olarak tanımlanabilir.

İki ülke savunmaya ve sağlığa harcama yapma gibi iki stratejiye sahip olsun (Hindistan/Pakistan veya Türkiye/Yunanistan gibi). Her ülke için en iyi tercih kendisinin silahlanması diğer ülkenin silahlanmaması (yani sağlık harcaması yapması) şeklindedir. İkinci en iyi tercih her ikisinin de sağlık harcaması yapması ve en kötü tercih ise kendisinin sağlık harcaması diğer ülkenin silahlandığı durumdur. Bu tercih sıralaması aşağıdaki Tablo 1.21'de sayısal olarak gösterilmektedir.

|         | sağlık  | savunma |
|---------|---------|---------|
| sağlık  | 10, 10  | -10, 20 |
| savunma | 20, -10 | 0, 0    |

**Tablo 1.21** Bir Mahkumlar Çıkmazı oyunu

Her iki ülkenin de diğeri ne yaparsa yapsın en iyi tepkisi savunma harcaması yapmaktadır. Diğer oyuncu sağlığa harcama yaptığında birinci ülke silaha harcama yaparak üstün konuma geçmeye çalışır, eğer diğer ülke savunmaya harcama yaptığında ise bu ülkenin avantaj sağlamaması için birinci ülkenin yine silaha harcama yapması gerekir. Her iki ülke de böyle düşüneceğinden denge strateji profili olan (savunma, savunma) baskın-strateji ve Nash dengesidir.

Fakat gerçekte sağlığa harcama yapmak her ülke için de en iyi strateji profildir. Bu yüzden her iki ülke için de daha iyi bir denge varken, yani pareto etkinlik söz konusu iken, daha kötü bir denge stratejisi izlerler. Bu da standart Mahkumlar Çıkmazı oyununda olduğu gibi bireysel rasyonalitenin (her ülke için ayrı ayrı daha

iyi olan durum) sosyal rasyonaliteyi (her ikisi için de aynı anda daha iyi olan durum) sağlamadığını göstermektedir. Eğer her iki ülke de sağlığa harcama yaparak işbirliğine girselerdi refah düzeylerini artırmış olacaktı, yani pareto iyileştirme sağlayabilirlerdi.

Diğer bir mahkumlar çıkmazı problemi ise duopol oyunudur. Basit bir duopol oyununda, iki firma aynı malı üretir ve her biri yüksek veya düşük fiyat uygular. Her iki firma da en yüksek kâr elde etmek ister. Eğer her iki firma da yüksek fiyat stratejisini seçerse her biri 1000 lira kâr etmektedir. Eğer bir firma yüksek diğeri düşük fiyat seçerse yüksek seçen firmaya talep olmayacak 200 lira kaybı olacaktır, düşük fiyat uygulayan firma ise tüm talebi karşılayacak 1200 lira kazanacak (fiyatı düşük ama sattığı miktar yüksek). Eğer her iki firma da düşük fiyat stratejisini seçerse her biri 600 lira kazanacaktır. Her firmanın tek kaygısı kendi kâr düzeyidir, bu yüzden firmaların tercihlerini elde ettikleri kârlarla gösterebiliriz (Tablo 1.22).

|        | yüksek     | düşük      |
|--------|------------|------------|
| yüksek | 1000, 1000 | -200, 1200 |
| düşük  | 1200, -200 | 600, 600   |

**Tablo 1.22** Duopol oyunu

Bu oyunun Mahkumlar Çıkmazı oyunundan tek farkı isim farklılığı fakat arındaki mantık aynıdır. Firmanın yüksek hareketi, standart Mahkumlar Çıkmazı oyununda işbirliğine (itiraf etme), düşük hareketi de sapma (itiraf et) stratejisine karşılık gelmektedir. Görünen o ki her iki firma için en iyi strateji düşük fiyat uygulamaktır. Dolayısıyla denge strateji profili (*düşük, düşük*) olur. Eğer 1.firma 2.firmanın yüksek oynayacağını düşünse en iyi hareketi ona karşı piyasada üstünlük sağlamak için fiyatı düşük seçmektir, ve eğer 2.firma 1.firmanın düşük oynayacağını düşünse yüksek oynamaya devam eder mi? Hayır devam etmez, o da düşük stratejisine kayar. Eğer 1.firma, 2.firmanın düşük oynadığını düşünse düşük oynar, 2.firma da 1.firmanın düşüğe kaldığını düşünse o da düşük oynamaya devam eder. Dolayısıyla durağan denge, yani Nash dengesi (*düşük,düşük*)’te oluşur.

Dikkat edilirse baskın strateji dengesi de aynı denge sonucunu verir. Çünkü düşük oynamak diğer firma neyi oynarsa oynasın her zaman daha iyi bir stratejidir. Eğer 2.firma yüksek oynarsa düşük oynamak rasyoneldir (2.firmaya karşı avantaj sağlamak için), benzer olarak eğer 2.firma düşük oynarsa yine düşük oynamak rasyoneldir (2.firmanın avantaj sağlamasını engellemek için).

Bu arada şunu söylemeden geçmeyelim. Duopol oyununda mahkumlar çıkmazına benzer bir durum söz konusu derken Tablo 1.22’de verilen fayda düzeyleri buna imkan sağlamıştır. Yoksa farklı fayda yapılarında çok daha farklı durumlar ve dengelerle karşılaşabiliriz.

Daha önce söylediğimiz gibi Mahkumlar Çıkmazı oyunu günlük hayatın bir çok alanında yaygın bir şekilde karşılaşılan bir problemdir. Bu tür problemler aslında daha kolektif hareket etme ya da koordinasyon problemlerine işaret eder. Bunlardan bazıları:

i. Herkes arabasını kullanarak işine gitmeyi ister. Fakat bu trafik yoğunluğuna neden olur. Eğer herkes toplu taşıma araçlarını seçseydi sosyal açıdan daha iyi bir durum söz konusu olurdu. Fakat buradaki problem diğerleri toplu taşımayı seçtiğinde sizin kendi arabanızı kullanmanızın daha iyi olmasından kaynaklanmaktadır.

ii. OPEC üyesi ülkeler anlaşıp petrol arzına sınır getirirlerse bu her üye ülke için daha iyi bir durumu ifade edebilir (fiyatı yükseltmek her ülke için daha fazla kâr demek). Fakat bu ülkelerden biri anlaşmayı bozup kendisine tahsis edilen kotadan daha fazlasını arz ederse daha fazla kâr edebilir. Dolayısıyla her ülkenin diğer ülkelerin anlaşmaya sadık kalmaları durumunda anlaşmayı tek başına ihlal etmesi daha kârlı gözükmektedir.

iii. Pazar günleri her dükkan sahibinin (veya esnafın) kendi dükkanını kapatması iyidir çünkü dükkan sahipleri dinlenirler ve açık dükkan olmadığı için de müşteriler diğer dükkanlara gidemezler. Fakat dükkan sahiplerinden birinin diğer dükkanlar kapalıyken dükkanını açması, kendisinin diğer dükkanların müşterilerini çekmesine neden olacağından daha kârlı bir durumdur. Yani eğer diğerleri dükkanlarını açmazlarsa dükkanı açmak iyidir. Fakat eğer diğerleri açarlarsa dükkanı zaten açmak gerekir. Çünkü herkes dükkanı açmazsam müşterilerim onlara yöneleceklerdir diye düşünecektir. Dolayısıyla her durumda dükkanı açık tutmak rasyoneldir. Bu her dükkan sahibi için böyledir ve herkes dükkanını açacaktır. Bu da daha düşük bir refah düzeyine karşılık gelebilir çünkü dükkan sahipleri dinlenemeyecekleri gibi müşteri sayıları da değişmeyecektir.

Bu arada yukarıda verdiğimiz oyunlardan Mahkumlar Çıkmazı, Cinsiyetler Savaşı ve Geyik Avı simetrik oyun dediğimiz oyun kategorisindeki oyunlardır. Burada sırası gelmişken simetrik oyun ve simetrik denge kavramlarını biraz açıklayalım.

Daha önce söylediğimiz gibi stratejik bir oyunun Nash dengesi bir popülasyondaki bireyler arasındaki etkileşimle ortaya çıkan durağan duruma karşılık gelir. Bu popülasyonda bireyler anonim bir şekilde simetrik bir etkileşim içindeler. Örneğin bir kaldırımda birbirine yaklaşan yayaları düşünün veya farklı yönlerden bir kavşağa yaklaşan şoförleri düşünün. Her bir yaya veya şoförün birbirine göre durumu aynıdır, yani simetriktir.

İki oyunculu bir oyunda oyuncuların simetrik olduğunu söylemek her bir oyuncunun aynı hareketler kümesine sahip olduğunu ve oyuncuların 1.oyuncu veya 2. oyuncu olmaktan bağımsız bir şekilde birbirine benzer olduklarını söylemek demektir. Dolayısıyla 1.oyuncu sonuç hakkında 2.oyuncunun düşündüğü gibi düşünmektedir. Bu da oyuncuların aynı hareketleri seçmeleri durumunda aynı faydayı almaları anlamına gelir.

**Tanım 1.6** *İki oyunculu stratejik bir oyunda oyuncuların sahip oldukları strateji kümeleri ve her strateji profili için fayda düzeyleri aynı ise, yani  $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$ , bu oyun simetrik bir oyundur.*

Mahkumlar Çıkmazı, Cinsiyetler Savaşı ve Geyik Avı simetrik oyunlar iken,

Eşleşen Paralar oyunu, simetrik oyun değildir. Aşağıdaki Tablo 1.23'de bir simetrik oyunun genel yapısı verilmektedir.

|   |        |        |
|---|--------|--------|
|   | A      | B      |
| A | $w, w$ | $x, y$ |
| B | $y, x$ | $z, z$ |

**Tablo 1.23** Simetrik oyun

Tablo 1.24'de verilen birbirine doğru yürüyen yayalar örneğine bakalım. Her yaya iki olası harekete sahiptir: sağdan ve soldan gitmek. Her ikisinin de farklı yönlerden değil de aynı yönden gitmeleri her ikisi için iyi olacaktır aksi takdirde birbirleri ile çarpışabilirler. Bu bir simetrik oyundur. Tablo 1.24'de görüldüğü gibi Nash dengeleri basitçe (sol, sol) ve (sağ, sağ) şeklindedir. Yani iki durağan durum dengesi vardır. Bunlardan birinde her yaya diğerine yaklaşıırken soldan yürüyecektir veya her ikisi de sağdan yürüyecektir.

|     |      |      |
|-----|------|------|
|     | sol  | sağ  |
| sol | 1, 1 | 0, 0 |
| sağ | 0, 0 | 1, 1 |

**Tablo 1.24** Bir simetrik oyun örneği

## 1.4.2 Nash Dengesi, Baskınlık ve Makul Stratejiler

Şimdi Nash dengesinin, baskın strateji dengesi ve makul stratejiler ile arasındaki ilişkilerini inceleyelim. İlk önce Nash dengesi ile baskın strateji dengesi arasındaki ilişkiye bakalım. Bu ilişki için bir takım önermelerde bulunacağız. Bunlardan birincisi, kesin mahkum stratejilerin sürekli eliminasyon yöntemi Nash dengelerini silmez.

**Önerme 1.1** Eğer  $G = \{N, (S_i), (u_i)\}$  stratejik-biçimli oyunun  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$  stratejileri Nash dengesi ise, bu denge kesin baskın stratejilerin sürekli eliminasyonu sonrası kalan stratejilerdir.

**İspat.** Bunun ispatı için çelişki ile ispat yöntemini (olmayana ergi yöntemini) kullanalım. Yani Nash dengesindeki stratejilerden birinin kesin mahkum stratejilerin sürekli elenmesi sürecinde elendiğini varsayalım ve sonra bunu tezatlayan bir durumun ortaya çıkacağını gösterip, Nash dengesinin elenmesinin yanlış olduğunu gösterelim.  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$  strateji profili, stratejik-biçimli  $G = \{N, (S_i), (u_i)\}$  oyunun Nash dengesi olduğunu varsayalım. Aynı zamanda  $s_i^*$  stratejisinin,  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$  stratejilerinin elenen ilk stratejisi olduğunu varsayalım (kesin mahkum olduğu için). Bu durumda  $S_i$  kümesinde henüz elenmeyen başka  $s_i'$  stratejisi var demektir ve bu strateji  $s_i'$  stratejisine kesin baskın demektir. Dolayısıyla bunu şöyle ifade edebiliriz,

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i^*, s_{i+1}, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \dots, s_n),$$

bu durum diğer oyuncuların strateji kümelerinden henüz elenmemiş stratejilerden elde edilmiş her  $(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$  strateji profili için doğrudur. Fakat  $s'_i$  ilk elenen stratejilerden biri olduğu için, diğer oyuncuların denge stratejileri henüz elenmediğinden bu şu anlama gelir:

$$u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s'_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) < u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s'_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*). \quad (1.2)$$

Fakat (1.2) sonucu,  $s'_i$  stratejisi  $(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s'_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$  strateji profiline en iyi tepki olduğundan Nash dengesi tanımına uymaz. Dolayısıyla  $s'_i$  stratejisine kesin baskın bir  $s'_i$  stratejisi olamaz. ■

Diğer bir önermemiz ise, kesin mahkum stratejilerin elenmesiyle bulunan baskın strateji dengesinin Nash dengesi olduğudur.

**Önerme 1.2**  $G = \{N, (S_i), (u_i)\}$  stratejik-biçimli oyunda, kesin mahkum stratejilerin sürekli eliminasyonu ile elde edilen  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$  denge stratejisi aynı zamanda Nash dengesidir.

**İspat.** Bu önermenin ispatı için de çelişki ile ispat yöntemini kullanalım. İlk önce baskın stratejilerin sürekli eliminasyonu sonucunda sadece  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$  stratejisinin kaldığını fakat bunun Nash dengesi olmadığını varsayalım. Herhangi bir  $i$  oyuncusu için Nash dengesi olan  $s_i^*$  stratejisinin oyunun belirli bir aşamasında diğer başka bir  $s_i$  stratejisi tarafından mahkum edildiğini ve dolayısıyla silindiğini varsayalım. Bunları formel olarak ifade edelim,

$$u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s'_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) < u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*). \quad (1.3)$$

Yine oyunun belirli bir aşama sonunda  $i$  oyuncusunun kalan stratejilerinden  $s'_i$  stratejisinin de  $s_i$  stratejisini mahkum ettiğini varsayalım,

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n), \quad (1.4)$$

bu sonuç bu aşamada diğer oyuncuların strateji kümelerinden kalan stratejilerden elde edilen her  $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$  strateji için geçerlidir. Diğer oyuncuların  $(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$  stratejileri asla elenmediğinden dolayı, (1.4)'nin ima ettiği şeyi şöyle ifade edebiliriz,

$$u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s'_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) < u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s'_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*). \quad (1.5)$$

Eğer  $s'_i = s_i^*$  (yani  $s_i^*$  stratejisi  $s_i$  stratejisini mahkum ederse), bu durumda (1.5)'de belirtilen durum (1.3)'de belirtilen durumu tezatlar. Dolayısıyla ispat biter. Fakat eğer  $s'_i \neq s_i^*$  ise, daha sonraki aşamada  $s'_i$  gibi diğer bir strateji,  $s'_i$  stratejisini mahkum eder çünkü  $s'_i$  bu süreçten kalan strateji olamaz. Dolayısıyla (1.4) ve (1.5)'deki eşitsizliklere benzer şekilde  $s_i$  ve  $s'_i$  yerine sırasıyla  $s'_i$  ve  $s''_i$  yazabiliriz. Tekrardan eğer  $s''_i = s_i^*$  ise, ispat biter; aksi takdirde iki tane daha benzer eşitsizlik tanımlanabilir. Burada  $s_i^* \in S_i$  elenmekten kurtulan tek strateji olduğundan dolayı, bu süreci tekrarlamakla sonuçta ispatı tamamlamış oluruz. ■

Her baskın strateji dengesi bir Nash dengesi iken her Nash dengesi bir baskın strateji dengesi değildir. Eğer bir strateji baskın ise, bu strateji diğer oyuncuların her stratejisine -denge stratejisi dahil- göre en iyi tepkidir fakat eğer bir strateji Nash dengesi ise, o sadece diğer oyuncuların denge stratejilerine en iyi tepkidir. Örneğin Mahkumlar Çıkmazı oyununda (Tablo 1.1) baskın strateji dengesi (itirat et, itirat et) bir baskın strateji ve aynı zamanda Nash dengesidir. Fakat Cinsiyetler Savaşı (Tablo 1.11) oyununda iki Nash dengesi olmasına rağmen baskın strateji dengesi yoktur.

Şimdi basit örnekler üzerinden bir kaç ilgi çekici durumdan bahsedelim. Örneğin, bazı oyuncuların zayıf mahkum stratejileri Nash dengesi olabilir. Tablo 1.25’de verilen örnek bunu gösteriyor. Burada her iki oyuncunun  $\beta$  stratejileri zayıf baskındır. Fakat bu aynı zamanda Nash dengesidir.

|          |          |         |
|----------|----------|---------|
|          | $\alpha$ | $\beta$ |
| $\alpha$ | 0,0      | 1,0     |
| $\beta$  | 0,1      | 3,3     |

**Tablo 1.25** Zayıf mahkum stratejiler Nash dengesi olabilir

Diğer yandan, her Nash dengesi profili makul stratejidir fakat tersi doğru değildir. Makulluk ile Nash dengesi arasındaki ortak unsur oyuncuların diğerleri hakkındaki inançları veri alındığında oyuncuların rasyonel davranmalarıdır. Nash dengesinde bu inançlar tüm oyuncular için tutarlı olmayı gerektirirken makulluk kavramında böyle bir varsayım yoktur. Aşağıda Tablo 1.26’da verilen örneğe bakalım.

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
|     | $L$ | $C$ | $R$ |
| $T$ | 3,0 | 0,2 | 0,3 |
| $M$ | 2,0 | 1,1 | 2,0 |
| $B$ | 0,3 | 0,2 | 3,0 |

**Tablo 1.26**

Bu oyunda tüm stratejiler makul stratejidir. Örneğin 1. oyuncu  $T$  hareketini seçebilir çünkü 2. oyuncunun  $L$  hareketini seçeceğini düşünebilir. 1.oyuncu neden böyle düşündüğünü kendisine açıklarken, şöyle bir mantık yürütür: çünkü 2.oyuncu benim  $B$ ’yi oynayacağımı düşünüyor. Böyle bir düşünceye sahip olmak diğer oyuncunun hiç bir zaman en iyi tepki olmayacak bir hareketi oynamayacağı düşüncesine dayanır. Yani eğer 2.oyuncu  $L$  hareketini oynamayı düşünüyorsa bunu ancak 1.oyuncunun  $B$  hareketi oynayacağını düşündüğünden dolayıdır.

Bu durumda 1.oyuncu  $T$  hareketini oynar çünkü 2.oyuncunun kendisinden  $B$  hareketini beklediğini düşünür. Fakat 2.oyuncu da eğer 1.oyuncunun kendisinden  $L$  hareketi beklediğini düşünürse, 1.oyuncunun  $T$  hareketini oynayacağını bildiğinden  $R$  hareketini oynar. Dolayısıyla aralarından biri yanılır. Çünkü inançlar tutarlı değildir. Bu muhakeme Nash dengesini cazip kılan taraftır. Bu durumu

göstermek için Nash dengesinin  $(M, C)$  strateji profili olduğunu düşünelim. 1. oyuncu  $M$ 'yi oynar çünkü 2.oyuncunun  $C$ 'yi oynayacağına inanır ve bunu kendisine açıklarken şöyle düşünür: 2.oyuncu 1. oyuncunun  $M$ 'yi oynayacağına inanır. 2.oyuncu da bu durumda  $C$ 'yi oynar çünkü 1.oyuncunun  $M$ 'yi oynayacağını düşünür. Denge  $(M, C)$ 'de oluşur bu aynı zamanda makul stratejidir. Dolayısıyla Nash dengesi inançların tutarlı olduğu bir makul stratejidir.

## 1.5 En İyi Tepki Fonksiyonu

Nash dengesini bulurken özellikle kesikli stratejiler (sınırlı sayıda stratejiler) yerine sürekli stratejiler ile karşılaşsak yani eğer oyuncuların belli bir aralıkta istedikleri değeri seçmelerine imkan verilirse matris gösterimini kullanmak mümkün olmayacaktır. Bunun yerine oyuncular fayda fonksiyonlarını maksimize edecek seçim değişkenlerini (stratejilerini) cebirsel yöntemleri kullanarak seçeceklerdir. Yani amaçları yine faydalarını maksimize etmektir fakat faydalarını maksimize edecek stratejileri bulmanın yöntemi farklı olacaktır. Stratejilerin sürekli olduğu durumlarda Nash dengesini bulmak için oyuncuların en iyi tepki fonksiyonlarını bulmamız gerekir. Gerçi en iyi tepki fonksiyonu tanım gereği tüm strateji kategorileri (kesikli ve sürekli) için geçerli olsa da sürekli değişkenlerin olduğu durumlarda optimal veya en iyi hareketi bulmamıza oldukça yardımcı olacaktır<sup>2</sup>.

Herhangi bir  $i$  oyuncusunu düşünün. Amacımız bu oyuncu için kendi stratejisi kümesi içinde en yüksek faydayı sağlayan stratejisini bulmaktır. Diğer oyuncuların  $s_{-i}$  stratejileri veriyken,  $i$  oyuncusunun en iyi strateji kümesini  $B_i(s_{-i})$  ile gösterelim. Daha formel olarak gösterirsek:

$$B_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i : u_i(s'_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_i \in S_i\} \quad (1.6)$$

$B_i(s_{-i})$  kümesinde  $i$  oyuncusunun herhangi bir stratejisi, örneğin  $s'_i$ , diğer oyuncuların  $s_{-i}$  stratejileri veri alındığında, en az diğer tüm stratejileri kadar iyidir, yani  $u_i(s'_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \forall s_i \in S_i$ . Kısaca biz buna  $i$  oyuncusunun en iyi tepki fonksiyonu diyoruz. Burada  $B_i(s_{-i})$  kümesinin her elemanı  $i$  oyuncusunun  $s_{-i}$  stratejisine en iyi tepkisidir. Eğer diğer oyuncular  $s_{-i}$  stratejilerine bağlı hareket ederlerse  $i$  oyuncusu  $B_i(s_{-i})$  kümesi dışındaki herhangi bir hareketi seçerek daha iyisini yapamaz.  $B_i(s_{-i})$  fonksiyonu küme-değerli bir fonksiyondur. Yani diğer oyuncuların hareketlerine karşılık  $i$  oyuncusunun hareket kümesini verir. Bu yüzden birden fazla stratejiyi içerebilir.

Nash dengesi daha önce de tanımlandığı gibi herhangi bir oyuncunun diğer oyuncuların hareketleri veri alındığında hareketini değiştirerek daha iyisini yapamayacağı durumdur. Bunu da şöyle de ifade etmek mümkündür: Nash dengesi her

<sup>2</sup>Sınırlı sayıda değer alan değişkenlere kesikli değişken denir. Örneğin bir kesikli değişken  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  değerlerini alabilir. Fakat 1.7 değerini alamaz. Veya zar üzerindeki sayılar kesikli değerlerdir. Sınırsız sayıda değer alabilen değişkenlere ise sürekli değişken denir. Bir sayı aralığı, örneğin  $[0, 1]$ , aralığındaki tüm değerleri alabilir. Dolayısıyla sürekli bir değişkendir. Herhangi bir değeri alabildikleri için örneğin insan boyu ya da zaman sürekli bir değişkendir.

oyuncunun diğer oyuncuların hareketlerine karşı en iyi tepkisidir. Eğer her oyuncunun stratejisi diğer oyuncuların stratejilerine en iyi tepki ise,  $s^*$  strateji profili Nash dengesidir, yani

$$s_i^* \in B_i(s_{-i}^*), \forall i \in N.$$

Eğer her  $i$  oyuncusu diğer oyuncuların  $s_{-i}$  stratejilerine tek bir tepki fonksiyonuna sahipse, yukarıdaki ilişkileri denklemler olarak yazabiliriz. Bu durumda her  $i$  oyuncusu ve diğer oyuncuların  $s_{-i}$  hareketleri için  $B_i(s_{-i})$ 'nin tek bir tepki fonksiyonunu  $b_i(s_{-i})$  diye belirtelim. O zaman yukarıdaki ilişki şöyle tanımlanabilir:

$$s_i^* = b_i(s_{-i}^*), \forall i \in N.$$

Bu durumda  $n$ -sayıda oyuncu olduğunda  $n$ -sayıda tepki fonksiyonu olacaktır. Eğer sadece iki oyuncu varsa bu denklemler şöyle ifade edilir:

$$s_1^* = b_1(s_2^*),$$

$$s_2^* = b_2(s_1^*).$$

Özetle iki oyunculu bir oyunda her oyuncunun diğer oyuncunun hareketine verdiği  $(s_1^*, s_2^*)$  tepkisi bir Nash dengesidir. Çünkü 1.oyuncunun  $s_1^*$  stratejisi, 2. oyuncunun  $s_2^*$  stratejisine en iyi tepkisidir ve 2. oyuncunun  $s_2^*$  stratejisi ise 1. oyuncunun  $s_1^*$  stratejisine en iyi tepkisidir.

Stratejik-biçimli bir oyunun eğer strateji değişkeni reel sayılar kümesinin bir açık aralığında tanımlıysa Nash dengesini bulmanın basit bir yolu vardır: En iyi tepki fonksiyonları, fayda fonksiyonlarının,  $u_i(s_1, \dots, s_n)$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , eğer strateji uzayları açık bir aralıkta tanımlıysa birinci derece koşullarından, yani her oyuncunun fayda fonksiyonunu kendi strateji değişkenine göre türevini alıp sıfıra eşitlenmesi ile bulunur:

$$\frac{\partial u_i(s_1, \dots, s_n)}{\partial s_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (1.7)$$

Her oyuncu (1.7) denkleminin çözümünden kendi en iyi tepki fonksiyonunu diğer oyuncuların stratejileri cinsinden elde eder:

$$s_i^* = b_i(s_{-i}), i = 1, 2, \dots, n.$$

Böyle  $n$  tane en iyi tepki fonksiyonu ortaya çıkar ve bu denklemler aynı anda çözüldüğünde ortaya Nash dengesi çıkar. Dolayısıyla herkesin en iyi strateji değerleri,  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ , elde edilir. Burada unutmadan şunu söylemekte fayda var. Oyuncular faydalarını maksimize etmeye çalıştıklarından dolayı bu bir maksimizasyon problemidir. Her oyuncunun fayda fonksiyonunun birinci dereceden türevinin sıfıra eşitlenmesi gerekli koşuldur, fakat yeterli koşul değildir. Maksimizasyon için yeterli koşul, fayda fonksiyonunun,  $u_i(\cdot)$ , ikinci dereceden türevinin sıfırdan küçük veya ona eşit olmasıdır,  $\partial^2 u_i / \partial s_i^2 \leq 0$ . En iyi tepki fonksiyonlarıyla Nash dengesini nasıl bulacağımızı daha iyi anlamak için bir örnek verelim.

### Örnek 1.5

İki bireyin sinerjik bir ilişki içinde olduklarını düşünelim. Yani her iki birey de bu ilişkiye daha fazla emek verdiklerinde her ikisi de daha iyi duruma gelmektedirler (bu duruma stratejik tamamlayıcılık da denir). Örneğin  $j$  bireyinin veri  $a_j$  çabası için,  $i$  bireyi çabasını,  $a_i$ , artırdığında faydası ( $u_i$ ) artmaktadır. Fakat belli bir değerden sonra da ise düşmektedir. Daha spesifik olarak ifade edersek  $i$  bireyinin tercihlerini yansıtan fayda fonksiyonu aşağıdaki gibi olsun:

$$u_i = a_i(c + a_j - a_i), i = 1, 2, \quad (1.8)$$

burada  $a_i$ ,  $i$  oyuncusunun çabası,  $a_j$  de  $j$  oyuncusunun çabasıdır ve  $c > 0$  bir sabittir. Her oyuncunun strateji kümesi her birinin negatif olmayan çaba düzeyleridir ve her oyuncunun tercihleri de yukarıdaki fonksiyonda gösterildiği gibidir.

Her oyuncu sonsuz sayıda strateji veya hareket imkanına sahip olduğundan dolayı daha önceki oyunlarda olduğu gibi stratejilerini bir tabloda göstermek artık mümkün değildir. Bu oyunun Nash dengesini bulmak için her şeyden önce oyuncuların en iyi tepki fonksiyonlarını bulmamız gerekiyor. Bu oyun simetrik fayda fonksiyonlarına sahip olduğunda  $i$  oyuncusunun herhangi bir  $a_j$  hareketine en iyi tepki fonksiyonu aşağıdaki gibidir (yukarıdaki (1.8) tercih fonksiyonunun  $a_i$ 'ye göre birinci dereceden koşulundan bulundu):

$$b_i(a_j) = \frac{1}{2}(c + a_j).$$

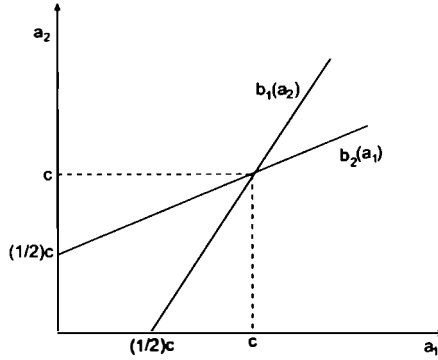
En iyi tepki fonksiyonları Şekil 1.2 gösterilmektedir. 1. oyuncunun hareketleri yatay eksende gösterilirken 2.oyuncunun hareketleri dikey eksende gösterilmektedir. 1.oyuncunun en iyi tepki fonksiyonu 2.oyuncunun her hareketine karşılık olarak kendisinin verdiği en iyi tepki düzeyi olan çabayı göstermektedir. Grafikte dikey eksen de herhangi bir noktaya karşılık 1.oyuncunun tepkisi en iyi tepki fonksiyonunda ona karşılık gelen yatay tepkidir, yani yatay eksen deki noktaya  $b_1(a_2)$  üzerinden ulaşılan noktadır. 2.oyuncunun en iyi tepki fonksiyonu ise 1.oyuncunun her tepkisine karşılık verdiği dikey tepkidir, yani  $b_2(a_1)$ . Kısaca yatay eksen de bir  $a_1$  noktası alın, bunun  $b_2$  fonksiyonundaki dikey değerine bakın veya dikey eksen de herhangi bir  $a_2$  değeri alın, bunun  $b_1$  fonksiyonunda yatay değerine bakın.

Her iki tepki fonksiyonunun,  $a_1 = b_1(a_2)$  ve  $a_2 = b_2(a_1)$ , kesiştiği nokta her iki oyuncunun birbirine en iyi tepki verdiği noktadır. Dolayısıyla Nash dengesidir. Bu oyunda en iyi tepki fonksiyonları sadece bir tek noktada kesişmektedir. En iyi tepki fonksiyonlarının kesiştiği noktayı bulmak aşağıda verilen her iki tepki fonksiyonunun aynı anda çözülmesini gerektirir:

$$a_1 = \frac{1}{2}(c + a_2) \text{ ve } a_2 = \frac{1}{2}(c + a_1).$$

Bu iki denklemi aynı anda çözersek  $a_1^* = c$  ve  $a_2^* = c$  sonucunu elde edebiliriz.

Dolayısıyla tek bir Nash dengesi vardır, o da  $(a_1^*, a_2^*) = (c, c)$ 'dir.



**Şekil 1.1** Birinci ve ikinci oyuncunun en iyi tepki fonksiyonları

Bu örnekte her oyuncunun tek bir tepki fonksiyonu vardır ve tepki fonksiyonları doğrusal fonksiyonlar şeklindedir. Fakat eğer bir oyuncu birden fazla tepki fonksiyonuna sahipse birden fazla Nash dengesi olabilir. Aynı şekilde doğrusal olmayan tepki fonksiyonları da birden fazla Nash dengesinin var olmasına yol açabilir. Bunu ileride daha detaylı tartışacağız.

## 1.6 Nash Dengesi Uygulamaları

### 1.6.1 Ortak Mülkiyet Trajedisi

Bir bölgede yaşayan  $n$ -sayıda çiftçimiz olsun,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  ve bu çiftçiler 1 koyun beslemek veya koyun beslememek (0 koyun) gibi iki stratejiye sahip olsunlar, yani her bir çiftçinin strateji kümesi  $S_1 = S_2 = \dots = S_n = \{0, 1\}$  şeklindedir. Koyun beslemenin faydası 1 birimken iken bunun çevreye zararı 5 birimdir (*negatif dışsallık*). Bu zarar tüm çiftçiler tarafından eşit olarak paylaşılmaktadır. Dolayısıyla herhangi bir  $i$  ( $= 1, 2, \dots, n$ ) çiftçisi için fayda fonksiyonu şöyledir:

$$u_i(s_1, \dots, s_n) = s_i - \frac{5}{n} \sum_{j=1}^n s_j = \left(\frac{n-5}{n}\right)s_i - \frac{5}{n} \sum_{j \neq i} s_j.$$

Bu fayda fonksiyonundan, çiftçilerin optimal hareketleri, yani koyun besleyip beslemeyecekleri, çiftçi sayısına bağlı olduğu görülmektedir. Üç farklı durum söz konusu olabilir:

(i) Eğer  $n < 5$  ise;  $s_{-i} \in S_{-i}$  veri alındığında,  $i$  oyuncusunun koyun besleyip beslememe durumuna göre fayda fonksiyonu şöyledir:

$$u_i(1, s_{-i}) = \left(\frac{n-5}{n}\right) - \frac{5}{n} \sum_{j \neq i} s_j \quad \text{ve} \quad u_i(0, s_{-i}) = -\frac{5}{n} \sum_{j \neq i} s_j.$$

$n < 5$  olduğundan dolayı,  $(\frac{n-5}{n}) < 0$  olur, dolayısıyla  $u_i(0, s_{-i}) > u_i(1, s_{-i})$   $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ . Bu da şunu gerektirir:

$$B_i(s_{-i}) = \{0\}, \forall i \in N.$$

Dolayısıyla her çiftçinin koyun beslemediği,  $(0, 0, \dots, 0)$ , durumu Nash dengesidir. Sonuç olarak çiftçi sayısı 5'den küçükse negatif dışsallığın yükü daha az çiftçi arasında paylaşıldığından çiftçilerin koyun beslemek gibi bir motivasyonu yoktur.

(ii) Eğer  $n = 5$  ise,  $s_{-i} \in S_{-i}$  veri alındığında, benzer olarak  $i$  çiftçisinin fayda fonksiyonu şöyledir:

$$u_i(1, s_{-i}) = -\frac{5}{n} \sum_{j \neq i}^n s_j \text{ ve } u_i(0, s_{-i}) = -\frac{5}{n} \sum_{j \neq i}^n s_j,$$

dolayısıyla

$$u_i(0, s_{-i}) = u_i(1, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

Bu da şu anlama gelir

$$B_i(s_{-i}) = \{0, 1\}, \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

Görülebileceği gibi burada tüm strateji profilleri Nash dengesidir. Sonuç olarak çiftçiler koyun beslemekle beslememek arasında kayıtsız kalırlar.

(iii) Eğer  $n > 5$ ,  $s_{-i} \in S_{-i}$  veri alındığında, benzer olarak  $i$  çiftçisinin fayda fonksiyonu:

$$u_i(1, s_{-i}) = (\frac{n-5}{n}) - \frac{5}{n} \sum_{j \neq i}^n s_j \text{ ve } u_i(0, s_{-i}) = -\frac{5}{n} \sum_{j \neq i}^n s_j,$$

dolayısıyla

$$u_i(0, s_{-i}) > u_i(1, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

Bu da şu demek

$$B_i(s_{-i}) = \{1\}, \forall i \in N.$$

Bu yüzden  $(1, \dots, 1)$  Nash dengesidir. Eğer  $n > 5$  ise tüm çiftçilerin koyun beslemesi optimaldir. Çünkü maliyet (koyun beslemekten doğan negatif dışsallık) daha fazla çiftçi arasında paylaşılmaktadır.

Diğer yandan eğer devlet her koyun için 5 birimlik bir “çevreye zarar vergisi” koyarsa, bu durumda çiftçilerin fayda fonksiyonu şu şekilde olur:

$$u_i(s_1, \dots, s_n) = s_i - 5s_i - \frac{5}{n} \sum_{j=1}^n s_j = -4s_i - \frac{5}{n} s_i - \frac{5}{n} \sum_{j \neq i}^n s_j,$$

dolayısıyla

$$u_i(0, s_{-i}) = -\frac{5}{n} \sum_{j \neq i}^n s_j \text{ ve } u_i(1, s_{-i}) = -4 - \frac{5}{n} - \frac{5}{n} \sum_{j \neq i}^n s_j.$$

Sonuç

$$B_i(s_{-i}) = \{0\}, \forall i \in N$$

Bu da  $(0, \dots, 0)$  durumunun Nash dengesi olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla vergi sonrası çiftçilerin koyun beslememesi kendileri için daha optimaldir.

## 1.6.2 Rant Arama Davranışı

Sabit bir pastanın paylaşılması problemini andıran bir problemle karşı karşıyayız. Belirli ve sabit miktarda bir rantın,  $R$ , paylaşılacak istendiğini düşünüyoruz. Bu rantı elde etmek için iki firma,  $i$  ve  $j$  firması, rekabet içindeler. Bu yüzden de rantı elde etmek için harcama yapmak zorundalar,  $x_i$  ve  $x_j \in [0, \infty)$ . Yaptıkları harcama ranttan alacakları payı artırmasına rağmen kendileri için bir maliyettir.

Herhangi bir  $i$  firmasının ranttan aldığı payı,  $s_i$ , şöyle tanımlıyoruz:

$$s_i = \frac{x_i}{x_i + x_j}.$$

Açıkça görülebileceği gibi herhangi bir firmanın ranttan aldığı pay kendi harcaması ile doğru, diğer firmanın harcaması ile tercih orantılıdır.

Bu durumda  $i$  firmasının elde ettiği kâr, ranttan aldığı toplam miktar eksi yaptığı harcamadır:

$$\pi_i = s_i R - x_i = \left( \frac{x_i}{x_i + x_j} \right) R - x_i.$$

Böylece  $i$  firmasının en iyi tepki fonksiyonunu bulmak için yukarıda ifade edilen kâr fonksiyonunun  $x_i$  harcama düzeyine göre türevini alıp sıfıra eşitleriz:

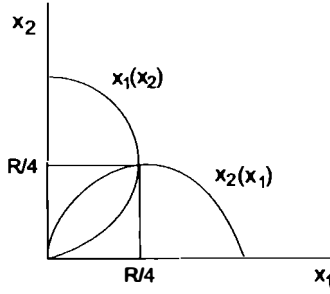
$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} = \left( \frac{(x_i + x_j) - x_i}{(x_i + x_j)^2} \right) R - 1 = 0.$$

Dolayısıyla  $i$  firmasının en iyi tepki fonksiyonu:

$$(x_i + x_j)^2 = x_j R \Rightarrow x_i = \sqrt{x_j R} - x_j.$$

Benzer şekilde  $j$  firmasının en iyi tepki fonksiyonu da elde edilir (her iki oyuncunun da en iyi tepki fonksiyonları Şekil 1.2'de gösterilmektedir). Oyuncular simetrik olduğundan harcama düzeyleri dengede birbirine eşit olacaktır:

$$x = \sqrt{x R} - x \Rightarrow x^* = \frac{R}{4}.$$



**Şekil 1.2** Birinci ve ikinci oyuncunun lineer olmayan en iyi tepki fonksiyonları

Dolayısıyla dengede mevcut rantı,  $R$ , elde etmek için her firma  $R/4$  kadar harcama yapmak zorundadır. Böylece rantı elde etmek için etkin olmayan bir şekilde toplamda  $R/2 (= R/4 + R/4)$  kadar harcama yapılmaktadır. Bu aslında bir tür sosyal kayıp olarak ifade edilebilir. Rekabet sosyal anlamda etkin olmayan bir sonuç yaratmaktadır.

Bu analizi  $n$  tane firmanın olduğu daha genel bir durum için yapalım. Her firmanın ranttan alacağı pay ( $s_i$ ) şöyle tanımlanırdı:

$$s_i = \frac{x_i}{\sum_{j=1}^n x_j}.$$

Denge harcama düzeyinin aynı metodu izleyerek aşağıdaki gibi olduğunu kolayca bulabiliriz:

$$x^* = \frac{n-1}{n^2} R.$$

Buradan da görüldüğü gibi eğer firma sayısı arttıkça firma başına düşen rant azalmaktadır,  $\partial x^*/\partial n < 0$ . Toplam sosyal kayıp,  $nx^* = \frac{n(n-1)}{n^2} R$ , ise firma sayısı arttıkça **artar**,  $\partial(nx^*)/\partial n > 0$ . Firma sayısı arttıkça her bir firmanın kârı düşmektedir,  $\partial \pi_i/\partial n < 0$ . Yani rekabet bu anlamda sosyal açıdan etkin olmayan bir sonuç yaratmaktadır.

### 1.6.3 Cournot Rekabet Modeli

Belirli sayıda firmanın kendi aralarındaki rekabet biçimine yani stratejik etkileşimine oligopol dendiğini biliyoruz. Gerçi bu tanımda firma sayısı çok önemli olmasa da stratejik etkileşim anahtar kelimedir. Oligopol yapıların incelenmesi, genel stratejik bir oyun için Nash dengesi kavramının formel olarak ifade edilmesinden çok daha önce gerçekleşmiştir. İlk olarak Cournot (1838) firmalar arası etkileşim ilişkisine bakmıştır. İki firma arasındaki rekabetten doğan üretim dengesinin varlığına işaret etmiştir. Fakat bu dengenin Nash dengesi olduğu düşüncesi aslında çok eski olmadığı gibi Nash'in kendisi de Cournot'dan haberi de değildir. Leonard (1944) tarafından yapılan bir çalışma bu bağlantıyı kurar ve ondan sonra da Cournot

modeli iktisadi analizin ayrılmaz bir parçası haline gelir.

Bir endüstrideki firmaların kendi aralarındaki rekabeti genelde miktar, fiyat veya malın niteliği üzerinden gerçekleşir. Cournot modeli miktar rekabetini esas alan bir modeldir. Bu modelde homojen bir mal  $n$  sayıda firma tarafından üretilmektedir. Herhangi bir  $i$  firması için  $q_i$  kadar mal üretmenin maliyeti  $C_i(q_i)$  ile ifade ediliyor, burada  $C_i$  monoton artan bir fonksiyondur (daha fazla çıktı, daha fazla maliyetle üretilmektedir). Satılan tüm çıktı tek bir fiyattan satılmaktadır ve bu fiyat mala olan talep ve firmanın üretim miktarı ile belirlenmektedir. Spesifik olarak, eğer firmaların toplam çıktı düzeyi  $Q$  ise piyasa fiyatı  $p(Q)$ 'dır, burada  $p(\cdot)$  *ters talep fonksiyonudur*. Ters talep fonksiyonunun,  $p(\cdot)$ , pozitif değerler alan monoton azalan bir fonksiyon olduğunu kabul ediyoruz, dolayısıyla firmaların toplam çıktı düzeyi artarsa, fiyat azalmaktadır. Piyasadaki toplam çıktı düzeyi tüm firmaların üretim miktarlarının toplamı olduğundan, yani  $Q = q_1 + \dots + q_n$ , fiyat düzeyi  $p(q_1 + \dots + q_n)$  şeklinde yazılabilir. Böylece herhangi bir  $i$  firmasının geliri  $q_i p(q_1 + \dots + q_n)$ 'dir. Yani  $i$  firmasının kârı, geliri eksi maliyetine eşittir:

$$\pi_i(q_1, \dots, q_n) = q_i p(q_1 + \dots + q_n) - C_i(q_i). \quad (1.9)$$

Kısaca bu oyunda, oyuncular firmalardır, her firmanın seçim değişkeni yani hareket kümesi olası çıktılarından oluşan bir kümedir ve her firmanın tercihleri (1.9)'de ifade edilen kâr tarafından temsil edilir. Bu oyun yapısı Cournot oligopol oyunu olarak bilinir.

Basitlik olsun diye piyasada iki firma olduğunu, firmaların maliyetlerinin sabit ve ters talep fonksiyonunun ise lineer olduğunu varsayalım. Her firmanın maliyet fonksiyonu simetrik ve  $C_i(q_i) = cq_i$  ve  $c \geq 0$  şeklindedir (marjinal maliyet sabit, yani  $c$ 'dir).

Ters talep fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır :

$$p(Q) = \begin{cases} \alpha - Q, & \text{eğer } Q \leq \alpha \\ 0, & \text{eğer } Q > \alpha \end{cases}$$

burada  $\alpha > 0$  sabit bir parametredir ve yandaki eşitsizlik ilişkileri fiyat düzeyini ( $p$ ) pozitif tutabilmek için verilmiştir.

Bu modelde Nash dengesini bulmak için yine firmaların en iyi tepki fonksiyonlarını bulmamız gerekir. Bunun için de ilk önce firmaların kârlarını bulmalıyız. Fakat bundan önce bir noktayı daha belirtmekte fayda var. Açıkça görülebileceği gibi, eğer firmaların çıktı düzeylerinin toplamı,  $\alpha$  parametresinden küçükse, yani  $q_1 + q_2 \leq \alpha$  ise, piyasa fiyatı  $p(q_1 + q_2) = \alpha - q_1 - q_2$  olur fakat eğer  $q_1 + q_2 > \alpha$  ise fiyat  $p = 0$  olur.

Kısaca 1.firmanın kârı şudur:

$$\begin{aligned} \pi_1(q_1, q_2) &= q_1(p(q_1 + q_2) - c) \\ &= \begin{cases} q_1(\alpha - q_1 - q_2 - c), & \text{eğer } q_1 + q_2 \leq \alpha \\ -cq_1, & \text{eğer } q_1 + q_2 > \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

İlk önce 2.firmanın veri  $q_2$  değeri için kendi  $q_1$  üretim değerini belirleyecek en iyi tepki fonksiyonunu bulmalıyız. 1.firmanın en iyi tepki fonksiyonunu kendi kâr fonksiyonunun  $q_1$ 'e göre birinci derece koşulundan buluruz:

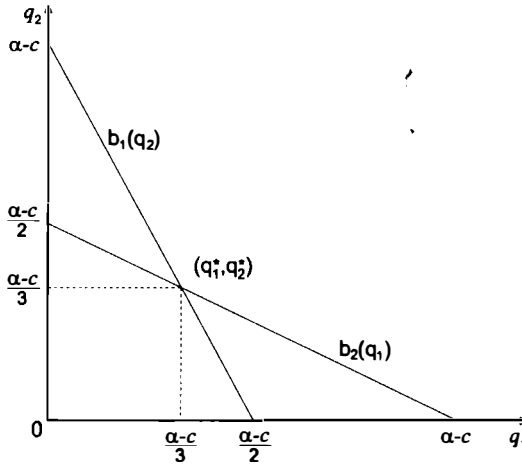
$$b_1(q_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c - q_2), & \text{eğer } q_2 \leq \alpha - c \\ 0, & \text{eğer } q_2 > \alpha - c \end{cases}$$

Dikkat edilirse 1.firmanın en iyi tepki fonksiyonu 2.firmanın  $q_2$  değerlerine bağlıdır. Burada örneğin  $q_2 = 0$  iken 1.firmanın en iyi tepkisi  $b_1(0) = \frac{1}{2}(\alpha - c)$ 'dir. 2.firmanın çıktı düzeyi arttıkça 1.firmanın kâr azalmaktadır. Çünkü 2.firmanın daha fazla çıktı düzeyi daha düşük fiyata karşılık gelmektedir.

2.firmanın problemi 1.firmanın problemi ile simetrik olduğundan (benzer maliyet ve talep fonksiyonuna sahipler, dolayısıyla simetrik oyun), 2.firmanın  $b_2(q_1)$  en iyi tepki fonksiyonu 1.firmanınki ile aynıdır, dolayısıyla

$$b_2(q_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c - q_1), & \text{eğer } q_1 \leq \alpha - c \\ 0, & \text{eğer } q_1 > \alpha - c \end{cases}$$

2.firmanın en iyi tepki fonksiyonu da 1.firmanın veri üretim değerine verdiği en iyi tepkiyi belirtir. Bu durum Şekil 1.3'de de gösterildiği gibi  $b_1$  fonksiyonu dikey eksendeki her noktayı yatay eksendeki diğer noktalarla ilişkilendirir,  $b_2$  ise yatay eksendeki her noktayı dikey eksen ile ilişkilendirir.



Şekil 1.3 Cournot modelinde oyuncuların en iyi tepki fonksiyonları

Şimdi de Cournot-Nash dengesini bulalım. Nash dengesi tanım gereği şunu söyler: 1.firmanın  $q_1^*$  üretim düzeyi, 2.firmanın  $q_2^*$  üretim düzeyine verilen en iyi tepkidir ve  $q_2^*$  miktarı da  $q_1^*$  tepkisine verilen en tepkidir:

$$q_1^* = b_1(q_2^*) \text{ ve } q_2^* = b_2(q_1^*).$$

Bu noktalar tepki fonksiyonlarının kesiştikleri noktalardır. Yani yukarıda ifade edilen  $b_1(q_2)$  ve  $b_2(q_1)$  tepki fonksiyonlarının birlikte çözümünden elde edilen noktalardır (bu örnekte tek bir nokta vardır). Tepki fonksiyonları daha açık bir şekilde aşağıda ifade edilmektedir:

$$q_1 = \frac{1}{2}(\alpha - c - q_2),$$

$$q_2 = \frac{1}{2}(\alpha - c - q_1).$$

Bu iki denklemi aynı anda çözdüğümüzde şunu buluruz:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{1}{3}(\alpha - c).$$

Böylece tek bir Cournot-Nash dengesinin olduğunu görürüz. Bu dengede toplam üretim ve piyasa fiyat düzeyi sırasıyla şöyledir:

$$Q^* = \frac{2}{3}(\alpha - c),$$

$$p^*(Q^*) = \frac{1}{3}(\alpha + 2c).$$

Burada şunu görmek mümkün  $\alpha$  arttıkça yani tüketiciler bu malı almaya daha istekli olduklarında hem toplam  $Q^*$  denge üretim miktarı hem de  $p^*$  piyasa denge fiyatı artmaktadır. Diğer yandan eğer marjinal maliyet artarsa her firmanın üretim miktarı düşerken (dolayısıyla toplam üretim de düşer), piyasa fiyatı artar.

Yukarıda verdiğimiz maliyet fonksiyonunun hem lineer hem de her firma için aynı marjinal maliyete sahip olduğunu varsaydık. Fakat maliyet fonksiyonlarını farklı marjinal maliyetlerle,  $c_1 > c_2$  gibi, veya lineer olmayan, örneğin  $C_i(q_i) = q_i^2$  şeklinde de tanımlayabilirdik veya maliyet fonksiyonu sabit maliyetli tanımlanabilirdi, örneğin  $C_i(q_i) = f + cq_i$  gibi, burada  $f$  sabit maliyeti göstermektedir. Bu durumda doğal olarak denge değerleri maliyet fonksiyonlarına bağlı olarak değişirdi.

Diğer yandan, bu iki firma kartel gibi (yani tekel gibi) hareket etselerdi fiyatın marjinal maliyete eşit olduğu noktada,  $MR = MC$ , üretimde bulunacaklardı, burada  $MR = \alpha - Q$  ve  $MC = c$ 'dir. Dolayısıyla bu tekel yapıda denge miktar ve fiyat düzeyi şöyledir:

$$Q_m^* = \frac{(\alpha - c)}{2} \text{ ve } p_m^* = \frac{\alpha + c}{2}.$$

Fakat eğer bu firmalar tam rekabetçi gibi davransalardı  $p = MC = c$  noktasında üretim yaparlardı. Dolayısıyla

$$Q_c^* = \alpha - c \text{ ve } p_c^* = c.$$

Dikkat edilirse, Cournot üretim ve fiyat düzeyi,  $Q^*$  ve  $p^*$ , tekel ve tam rekabetçi

üretim düzeyleri arasında bir üretim düzeyine sahiptir,  $Q_c^* > Q^* > Q_m$  ve  $p_c^* < p^* < p_m$ . Şimdi de firma sayısını artırmamız durumunda Cournot modelinde neyin değiştiğine bakalım.

#### *n-Oyunculu Cournot Modeli*

İki farklı endüstri yapısı içinde  $n \geq 1$  tane firma olduğunu varsayalım: (i)  $n$  tane homojen firmanın olduğu, yani hepsinin aynı maliyet fonksiyonuna sahip olduğu bir endüstri ve (ii)  $n$  tane heterojen firmanın olduğu, yani her firmanın farklı maliyet fonksiyonuna sahip olduğu bir endüstri. Farklı maliyet yapılarına sahip firmalar durumunda  $n$  tane birinci-dereceden koşula ihtiyaç (yani  $n$  tane en iyi tepki fonksiyonu olacağından) olacağından, çözümü daha kolay olan (i) durumuna yani aynı üretim teknolojisine sahip endüstri ile başlayalım.

##### *(i) Homojen firmalar*

Her  $i = 1, 2, \dots, n$  firması için  $c_i = c$  olsun. Her firmanın ters talep fonksiyonunu yine lineer kabul edelim,  $p(Q) = a - bQ$ , burada  $Q = \sum_{i=1}^n q_i$ . Tüm firmalar aynı maliyet yapısına sahip olduğundan dolayı, sadece bir firmanın problemine odaklanabiliriz ve buradan hareketle de diğer firmaların denge miktar düzeylerini simetrik yapıdan dolayı türetebiliriz. Bunun için 1.firmayı seçelim.

1.firma  $q_1$ 'i seçmekle kârını maksimize etmeye çalışır:

$$\max_{q_1} p(Q)q_1 - cq_1 = \left[ a - b \left( \sum_{i=1}^n q_i \right) \right] q_1 - cq_1.$$

Birinci dereceden koşul aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = a - 2bq_1 - b \sum_{i=2}^n q_i - c = 0.$$

Buradan hareketle 1.firmanın en iyi tepki fonksiyonunu diğer firmaların çıktı düzeylerinin,  $q_2, q_3, \dots, q_n$ , bir fonksiyonu olarak şöyle yazabiliriz:

$$q_1 = b_1(q_2, q_3, \dots, q_n) = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n q_i. \quad (1.10)$$

Tüm firmalar aynı olduğundan, her firmanın Cournot dengesinde aynı çıktı düzeyinde üretimde bulunacağını söyleyebiliriz, yani  $q_1^* = q_2^* = \dots = q_n^*$ . Herhangi bir  $i$  firması da aynı düzeyde üretim yapar, yani  $q^* = q_i^*$ . Sonra bu değeri daha önce türettiğimiz en iyi tepki fonksiyonlarına koyarız (dikkat edin bu değeri en iyi-tepki fonksiyonlarında yerine koymuyoruz aksi takdirde bu her firmanın diğer firmaların çıktı düzeyini kontrol ettiği anlamına gelir). Burada simetri mantığını kullanmak, sadece teknik olarak  $n$  bilinmeyenli  $n$  tane denklemi çözmeyi kolaylaştırır. Böylece (1.10)'den hareketle,  $q = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}(n-1)q$  ilişkisini elde ederiz. Dolayısıyla,

$$q^* = \frac{a-c}{(n+1)b} \text{ ve } Q^* = \left( \frac{a-c}{b} \right) \left( \frac{n}{n+1} \right). \quad (1.11)$$

Her firmanın denge fiyat ve kâr düzeyi ise basitçe şöyledir:

$$p^* = \frac{a + nc}{n + 1} \text{ ve } \pi_i^* = \frac{(a - c)^2}{(n + 1)^2 b} = b(q^*)^2. \quad (1.12)$$

Şimdi de şöyle bir soru soralım: Firma sayısında bir değişim olduğunda neler değişir? Yani acaba  $n$  değiştiğinde bu durum fiyata, her firmanın çıktısına ve kârına nasıl etkide bulunur? Bunun için de ilk önce  $n = 1$  kabul edelim. Bunu (1.11) ve (1.12)'de yerine koyalım. Bu bize tek el çözümü verecektir. Eğer  $n = 2$  ise bu durumda daha önce yukarıda bulduğumuz iki firmalı Cournot değerlerini verecektir.

Şimdi firma sayısını artıralım. Eğer  $n$  firma sayısı sonsuza giderse aşağıdaki denge değerlerini buluruz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^* = 0 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} Q^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a - c}{b} \right) \left( \frac{n}{n + 1} \right) = \frac{a - c}{b}.$$

Görünen o ki Cournot dengesinde firma sayısı sonsuza gittikçe, her firmanın üretim düzeyi sıfıra yaklaşır. Fakat endüstrinin toplam çıktı düzeyi daha önce verilen rekabetçi çıktı düzeyine eşit olur. Ayrıca firma sayısı arttıkça birim üretim maliyeti olan rekabetçi piyasa fiyatına yakınsar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n + 1} + \frac{nc}{n + 1} = c = p_c.$$

Kısaca piyasa yapısı Cournot da olsa piyasadaki firma sayısı arttıkça denge piyasa üretim ve fiyat düzeyi rekabetçi denge değerlerine yakınsar.

#### (ii) Heterojen Firmalar

Firmaların farklı maliyet fonksiyonlarına sahip olduğu bir endüstriye bakalım. Bu endüstride üretim dengesini bulmak daha zor çünkü yukarıdaki simetrik yapının sağladığı kolaylık artık yok. Dolayısıyla  $n$  tane birinci dereceden koşul bulma metoduna başvuramayız. Bu yüzden farklı bir yöntem izliyoruz.

Firma sayısı  $n$  olan bir Cournot piyasasında, marjinal maliyeti  $c_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , olan her  $i$  firması aşağıdaki amaç fonksiyonunu çözen  $q_i$  düzeyini seçer:

$$\max_{q_i} \pi_i(q_i, q_{-i}^c) = \left[ a - bq_i - b \left( \sum_{j \neq i}^n q_j^c \right) \right] q_i - c_i q_i.$$

Tüm  $i$ 'ler için  $q_i^c > 0$  olduğunu varsaydığımızda, birinci dereceden koşul şudur:

$$a - 2bq_i^c - b \left( \sum_{j \neq i}^n q_j^c \right) = c_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.13)$$

Şimdi her  $n$  tane çıktı düzeyi için  $n$  tane birinci dereceden koşul tanımlamak yerine, toplam üretim düzeyini düşünerek, yani  $\sum_{j \neq i}^n q_j^c = Q^c - q_i^c$  tanımından hareketle problemi çözelim. Bu yüzden (1.13) birinci dereceden koşulunu yeniden yazarsak

şunu elde ederiz:

$$a - bq_i^c - bQ^c = c_i. \quad (1.14)$$

Ve (1.14) ifadesini tüm  $q_i$ 'ler üzerinden toplarsak,  $i = 1, \dots, n$ , aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$na - bQ^c - bnQ^c = \sum_{i=1}^n c_i.$$

Buradan hareketle Cournot denge piyasa üretim ve fiyat düzeyi şöyle olur:

$$Q^* = \frac{na}{(n+1)b} - \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{(n+1)b} \text{ ve } p^* = \frac{a}{n+1} - \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{n+1}.$$

Sonuç olarak şunu söyleyebiliriz. Firmaların farklı sabit birim maliyetlere sahip olduğu bir endüstride, Cournot dengesinde tüm firmalar pozitif üretimde bulunursa, Cournot endüstri üretim ve fiyat düzeyi firmaların birim maliyetlerinin firmalar arasındaki dağılımından ziyade sadece birim maliyetlerinin toplamına bağlıdır.

### 1.6.4 Bertrand Rekabet Modeli

Cournot oyununda her firma stratejik bir ortamda çıktı düzeyini belirlemektedir. Piyasadaki fiyat toplam talebin toplam üretimle ilişkisine bağlı olarak edilgen olarak belirlenir. Fakat dış dünyada daha çok firmaların kendi fiyatlarını seçtiklerini ve daha sonra oluşan talebin firmaların satış gelirlerini belirlediğini gözlemledik. Alternatif bir duopol modelinde Bertrand (1883), Cournot modelinden farklı olarak rekabetin miktar üzerinden değil de fiyat üzerinden olduğu bir model tanımlar. Firmaların seçtikleri fiyata göre talebi karşıladıklarını ifade eder. Fakat Bertrand'ın fiyatı strateji değişkeni olarak kullandığı model, yapı olarak Cournot modeline benzerdir.

Bu bölümde ilk önce Bertrand modelinin genel yapısını ve bunun daha spesifik hali olan iki tane firmanın olduğu piyasayı tanıtaçaz. Ayrıca firmaların homojen mal yerine farklılaştırılmış mal üretmeleri durumunu ve en son olarak da Bertrand firmalarının kapasite kısıtı altında nasıl davrandıklarını inceleyeceğiz.

#### *Genel Bertrand Modeli*

Tek bir mal  $n$  sayıda firma tarafından üretilmektedir. Her firma  $C_i(q_i)$  maliyet fonksiyonuna sahiptir. Firmaların farklı fiyatlar belirlemesi durumunda, tüm tüketiciler bu talebi karşılayacak en düşük fiyatı teklif eden firmadan alacaktır. Eğer birden fazla firma en düşük fiyatı belirlerse, bu firmalar tüm piyasayı eşit şekilde paylaşacaktır. Firma üretim değerini, stratejik olarak seçmiyor basit bir şekilde veri fiyatlarında karşılaştığı tüm talebi karşılıyor. Bu durumda ters talep fonksiyonu yerine doğrudan talep fonksiyonunu tanımlamak daha uygun olacaktır. Yani eğer  $p$  fiyatında mal varsa, toplam talep edilen miktar  $Q(p)$ 'dir.

Kısaca oyuncuların firmalar, her firmanın hareket kümesinin olası tüm fiyatlar kümesi olduğu (negatif olmamak koşuluyla) ve her firmanın tercihlerinin aşağıdaki

kâr fonksiyonu ile ifade edildiği bir oyuna sahibiz:

$$\pi_i = p_i Q(p_i) / m - C(Q(p_i) / m).$$

Eğer  $i$  firması en düşük fiyatı uygulayan  $m$  tane firmadan biriye piyasadaki kârın  $1/m$  kadarını alır; eğer  $m = 1$  ise yani  $i$  firmasının  $p_i$  fiyatı diğer tüm firmalardan daha düşükse kârın tamamını alır; fakat eğer bazı firmaların fiyatı  $p_i$ 'den düşükse, bu durumda  $\pi_i = 0$  olur.

Yukarıda  $n$  firma için verilen ve genel olarak tanımlanan Bertrand modelinin iki-firmalı, lineer talepli ve sabit marjinal maliyetli bir yapıda nasıl işlediğine bakalım. İki firmanın sabit marjinal maliyetinin,  $c$ , olduğunu varsayalım, yani toplam maliyet,  $i = 1, 2$  için,  $C_i(q_i) = cq_i$  şeklindedir. Talep fonksiyonu,  $p \leq \alpha$  için  $Q(p) = \alpha - p$  ve  $p > \alpha$  için  $Q(p) = 0$ 'dır.

Her birim miktarın üretim maliyeti sabit olduğundan,  $c$ , herhangi bir  $i$  firması sattığı her birim için  $p_i - c$  kadar kâr eder. Dolayısıyla firmanın kârı şöyle tanımlanır:

$$\pi_i(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_i - c)(\alpha - p_i), & \text{eğer } p_i < p_j \\ \frac{1}{2}(p_i - c)(\alpha - p_i), & \text{eğer } p_i = p_j \\ 0, & \text{eğer } p_i > p_j \end{cases}$$

burada  $j$  diğer firmadır ( $j = 2$  eğer  $i = 1$  ve  $j = 1$  eğer  $i = 2$  ise).

Daha önce olduğu gibi, bu oyununun Nash dengesini bulmak için firmaların en iyi tepkilerini bulmamız gerekiyor. Eğer  $j$  firması  $p_j$  fiyatını uygularsa,  $i$  firmasının uygulayacağı en iyi fiyat nedir? Eğer  $i$  firması  $p_j$  fiyatını uygularsa,  $j$  firması ile piyasayı paylaşır; fakat eğer biraz daha da düşük bir fiyat uygularsa, tüm piyasanın talebini karşılar. Yani  $p_j$ ,  $c$ 'yi aşarsa  $i$  firması  $p_j$ 'nin altında fiyat uygulayarak pozitif kâr elde eder ve bu durum  $p_j$  fiyatını uygulaması durumunda alacağı piyasa kârının yarısından daha iyi bir sonuç verir. Eğer  $p_j$  fiyatı çok yüksekse  $i$  firması fiyatını  $p_j$ 'nin altına az da olsa indirerek daha iyisini yapabilir. Çünkü daha düşük fiyat uygulamakla elde edilen talep artışı fiyattaki düşmeyi telafi etmektedir. Son olarak, eğer  $p_j$ ,  $c$ 'den düşükse  $i$  firması bu fiyatta veya bunun altında bir fiyatta negatif kâr elde eder. Halbuki eğer  $p_j$ 'den daha yüksek bir fiyat uygularsa bu kâr sıfır olacaktır.

Yukarıda ifade ettiklerimizi, yani  $i$  firmasının kârının  $j$  firmasının  $p_j$  fiyatının bir fonksiyonu olmasını daha formel olarak ifade edelim. Burada  $i$  firmasının kârını,  $((p_i - c)(\alpha - p_i))$ , maksimize eden fiyatı  $p_m$  ile ifade edelim. Bu fiyat aslında bir tekelin uygulayacağı fiyattır.

Şimdi  $i$  firmasının fayda fonksiyonunu farklı  $p_j$  değerleri için dört durumda değerlendirelim:

i.  $p_j < c$  durumunda, eğer  $p_i \leq p_j$  ise,  $i$  firmasının kârı negatiftir veya eğer  $p_i > p_j$  ise kârı sıfırdır. Dolayısıyla  $p_j$ 'den büyük her fiyat  $p_j$ 'ye en iyi tepkidir. Kısaca  $i$  firmasının tepki fonksiyonu  $b_i(p_j) = \{p_i : p_i > p_j\}$ .

ii.  $p_j = c$  durumunda, benzer olarak  $p_j$  fiyatına eşit veya daha yüksek bir fiyat

uygulamak en iyi tepkidir, yani  $b_i(p_j) = \{p_i : p_i \geq p_j\}$ .

iii.  $c < p_j \leq p_m$  durumunda,  $i$  firmasının kârı,  $p_i$  fiyatının,  $p_j$ 'ye doğru yukarı çekilmesi ile artar. Kâr düzeyi  $p_i = p_j$  olduğunda hemen sıfırlanır. Bu yüzden eğer  $i$  firması,  $p_j$ 'den daha az fakat ona yakın bir fiyat seçerse, kârını daha yüksek düzeye getirir. Fakat  $p_j$ 'den daha düşük herhangi bir fiyat için yine her zaman  $p_j$ 'den daha düşük ama ona daha yakın bir fiyat vardır. Bu yüzden bir en iyi tepki fiyatı tanımlamak zordur. Bu yüzden  $b_i(p_j) = \emptyset$  kümedir (açık küme sendromu).

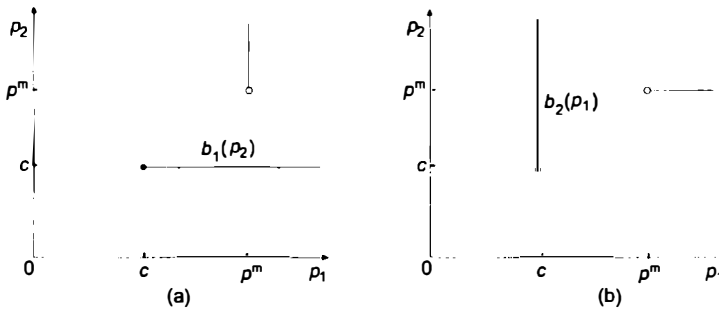
iv.  $p_j > p_m$  durumunda,  $p_m$  fiyatı  $i$  firmasının tek en iyi tepkisidir. Çünkü  $p_m$  aynı zamanda kârını maksimize eden fiyattır.

Kısaca  $i$  firmasının en iyi tepki fonksiyonunu özetlersek:

$$b_i(p_j) = \begin{cases} \{p_i : p_i > p_j\}, & \text{eğer } p_j < c \\ \{p_i : p_i \geq p_j\}, & \text{eğer } p_j = c \\ \emptyset, & \text{eğer } c < p_j \leq p_m \\ \{p_m\}, & \text{eğer } p_j > p_m \end{cases}$$

Görüldüğü gibi Bertrand duopol oyununda en iyi tepki fonksiyonu Cournot durumundan daha farklıdır. Rakibin bazı hareketleri için en iyi tepki yokken bazıları için de çok sayıda en iyi tepki değeri vardır.

Şekil 1.4(a) ve (b) panelleri sırasıyla 1. ve 2. firmanın en iyi tepki fonksiyonlarını göstermektedir. Sol taraftaki panelde taralı alan  $c$ 'den daha düşük bir  $p_2$  fiyatı için en iyi tepkinin  $p_2$ 'den daha yüksek bir fiyat olduğunu göstermektedir. Yukarıya doğru eğilimli kısmın siyah bir doğruya sahip olmaması sadece  $p_2$ 'den daha yüksek (eşit değil) fiyatların dahil edilmesinden kaynaklanmaktadır. Üstteki yatay siyah doğru ise  $p_2 = c$  için  $c$ 'ye eşit veya daha yüksek herhangi bir fiyatın en iyi tepki olduğunu göstermektedir. Dolu nokta dahil edilen noktayı, boşluk ise dahil edilmeyen noktayı göstermektedir. 2. firmanın en iyi tepki fonksiyonu da benzer şekilde (b) panelinde gösterilmektedir.



Şekil 1.4 Bertrand modelinde en iyi tepki fonksiyonları

Şimdi bu oyunun Nash dengesinin ne olduğuna bakalım. Eğer Nash dengesi  $(p_1^*, p_2^*)$  fiyat çifti ise bu şu anlama gelir: 1.firmanın  $p_1^*$  fiyatı, 2.firmanın  $p_2^*$  fiyatına en iyi tepkidir, ve  $p_2^*$  fiyatı da  $p_1^*$  fiyatına en iyi tepkidir. Bu iki tepki fonksiyonunun

kesiştikleri tek bir nokta vardır:  $(p_1^*, p_2^*) = (c, c)$ . Yani tek bir Nash dengesi var. Bu da her firmanın  $c$  fiyatını uyguladığı durumdur.

Bertrand oyununda sonuç olarak (i)  $(p_1, p_2) = (c, c)$  noktası Bertrand-Nash dengesidir. Eğer bir firma  $c$  fiyatını uygularsa diğer firma  $c$  fiyatından başka bir fiyattan daha iyisini yapamaz. Çünkü fiyatını yükseltirse hiç bir mal satamaz ve düşürürse zarar eder (ii) İkinci olarak, diğer herhangi bir  $(p_1, p_2)$  fiyat çiftinin Nash dengesi olmadığını gösterebiliriz.

a. Eğer her oyuncu  $i = 1$  veya  $i = 2$  için,  $p_i < c$  ise, fiyatı en düşük olan firmanın kârı negatiftir ve bu firma fiyatını yükselterek  $c$ 'ye çekebilir ve kârını artırabilir.

b. Eğer  $p_i = c$  ve  $p_j > c$  ise,  $i$  firması fiyatını biraz yükselterek kârını sıfırdan daha farklı yani pozitif yapabilir.

c. Eğer  $p_i > c$  ve  $p_j > c$  ise,  $p_i \geq p_j$  durumunda  $i$  firması  $p_i$  fiyatını  $p_j$ 'nin altına çekerek kârını yükseltebilir.

Şu ana kadar elde ettiklerimizden çıkaracağımız önemli sonuçlardan biri benzer yapıdaki (aynı maliye ve talep fonksiyonlarına sahip olma) firmaların bile Cournot ve Bertrand Nash dengelerinin birbirinden farklı olduğudur. Bertrand duopol modelinde denge fiyatı sabit birim maliyete,  $p = c$ , eşitken, Cournot modelinde bu değer  $p = \frac{1}{3}(\alpha + 2c)$ 'dir. Bertrand denge fiyatı firmanın zarar etmediği en düşük fiyat düzeyidir. Fakat Cournot denge fiyatı daha yüksektir. Cournot oyununda, firma sayısının artması ile birlikte fiyatın düştüğünü ve marjinal maliyete,  $c$ , yaklaştığını gördük. Fakat Bertrand modelinde bunu sadece iki firma sağlar.

Bu farkı yaratan şey her iki oyunda strateji değişkenlerinin farklılığıdır. Cournot modelinde strateji değişkeni miktarken, Bertrand modelinde fiyattır. Farklı strateji değişkenleri farklı muhakemeler demektir. Cournot'da örneğin bir firma eğer kârını artırmak istiyorsa, diğer firmanın aynı düzeyde üretime devam ettiğini düşünerek, üretim miktarını artırır. Fiyat da bu üretim düzeyine uyarlanır. Bertrand'da ise firma kâr etmek istiyorsa, diğer firmanın fiyatının değişmediğini düşünüp, fiyatını aşağı çekmek ister. Miktar bu fiyata göre ayarlanır, böylece piyasa dengesi sağlanır. Örneğin tarımsal ürünlerin toptan fiyatlarının Cournot modelinde tanımlandığı gibi hareket ettiği söylenebilir, ilk önce hasat belirlenir ve sonra fiyatlar ortaya çıkar, fakat perakende yiyecek piyasasındaki fiyatların Bertrand modeline daha benzer hareket ettiği söylenebilir çünkü belirlenen fiyata göre talep karşılanır.

#### *Mal farklılaştırması altında Bertrand modeli*

Dikkat edilirse yukarıda verilen Bertrand modelinde üretilen mal homojendir. Mallar homojenken tek bir Nash dengesi vardır ve her firma aynı fiyatı uygulamaktadır. Bu fiyat düzeyi sadece iki firma ile gerçekleştirilen rekabetçi fiyat dengesidir, buna *Bertrand paradoksu* da denir. Bu paradokstan kurtulmanın bir yolu firmalara sürekli etkileşim imkanı vermek yani oyunun tekrarlı oynanan bir oyun halinde düşündürmektir. Çünkü bu süreç firmalar arasında işbirliğine yol açabilir, dolayısıyla denge fiyatı rekabetçi dengenin üzerinde gerçekleşebilir. İkinci bir yol mal farklılaştırılmasına imkan vermek. Birinci yol, daha sonra göreceğimiz tekrarlı oyunlar bağlamında analiz edilmesi gereken bir konudur, fakat ikinci yolu burada

gösterebiliriz.

Basit Bertrand modelinden farklı olarak bu modelde firmalar arasında aşırı bir bağımlılık ilişkisi tanımlanmamaktadır (basit modelde homojen mal üretildiğinde iki firmanın kararları birbirini çok etkiler). Birbirine benzer fakat farklı mallar üreten iki firmamız olsun. 1. ve 2. firmanın talep fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned}q_1 &= a - p_1 + bp_2, \\q_2 &= a - p_2 + bp_1.\end{aligned}$$

Burada  $b$  parametresi iki malın birbirine göre ikame veya tamamlayıcı olup olmadığını belirtmektedir. Eğer  $b > 0$  ise ikame,  $b < 0$  ise tamamlayıcı maldır. Daha önce varsaydığımız gibi firmalar  $c$  gibi sabit bir marjinal maliyete sahiptir ve sabit maliyet yoktur.

Firmaların en iyi tepki fonksiyonlarını bulmak için ilk önce kâr fonksiyonlarını tanımlamamız gerekir. 1.firmanın kârı şöyledir:

$$\pi_1 = p_1 q_1 - c q_1.$$

1.firmanın en iyi tepki fonksiyonu kâr fonksiyonunun  $p_1$  değerine göre birinci dereceden koşulundan türetilim<sup>3</sup> :

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = a - 2p_1 + bp_2 + c = 0.$$

Dolayısıyla en iyi tepki fonksiyonu

$$p_1 = \frac{a + c + bp_2}{2}.$$

Benzer olarak 2.firmanın en iyi tepki fonksiyonunu bulalım. Birinci dereceden koşulundan,

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = a - 2p_2 + bp_1 + c = 0$$

ve dolayısıyla 2.firmanın en iyi tepki fonksiyonu

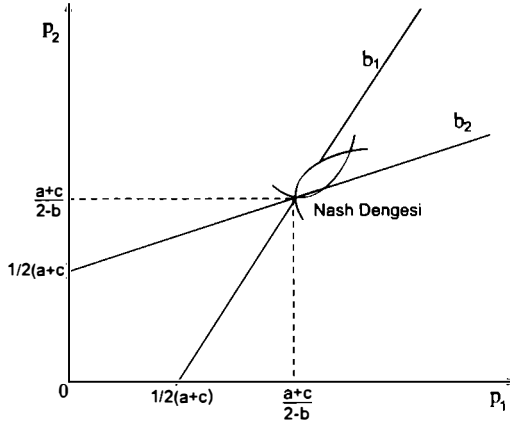
$$p_2 = \frac{a + c + bp_1}{2}.$$

İki tepki fonksiyonu da Şekil 1.5'de gösterilmektedir.

Her firmanın da tepki fonksiyonları yukarı eğilimlidir. Bu da iki firmanın fiyatlarının stratejik tamamlayıcı oldukları anlamına gelir. Firmalardan birinin fiyatını yükseltmesi diğerinin de fiyatını yükseltmesine neden olmaktadır. Bu da her iki firma için iyi bir sonuç oluşturmaktadır. Bu durum Cournot modelinde farklı işler. Bir Cournot firması üretimini artırırsa (denge dışındaki bir noktada), rakibi tersini

---

<sup>3</sup> $\partial^2 \pi_1 / \partial p_1^2 < 0$  olduğundan dolayı  $\pi_1(\cdot)$  fonksiyonunun bir maksimum değeri vardır.



**Şekil 1.5** Mal farklılaştırması altında Bertrand modelinde en iyi tepki fonksiyonları

yapar yani üretimini kısar. Çünkü üretimini artıran firma rakibinin kendi stratejisini artırması durumunda alacağı marjinal faydayı azaltır dolayısıyla rakip firma üretimini kısar. Bu duruma *strateji ikame* denir. Bu durumda tepki fonksiyonları aşağı eğimlidir (Cournot oyununda olduğu gibi, Şekil 1.3'e bakın).

Şimdi de oyunun dengesini bulalım, bunun için her iki firmanın da en iyi tepki fonksiyonlarını aynı anda çözmemiz gerekir. Bu bize Bertrand-Nash dengesini verir. Her iki tepki fonksiyonunu aynı anda çözdüğümüzde, her firmanın denge fiyat düzeyini buluruz:

$$p_1^* = p_2^* = \frac{a + c}{2 - b}.$$

Bu denge sonucu da Cournot-Nash dengesinde olduğu gibi Pareto etkin değildir. Çünkü her iki firma işbirliği ile daha yüksek fiyat belirleyebilir. Pareto baskın sonuçlar, Bertrand modelinde Şekil 1.5'de gösterilen eş-değer kâr fonksiyonlarının arasında kalan alan, yani lens-şekli içindeki alan olarak gösterilebilir (Fakat bu Pareto baskın sonuçlar arasından birini başarmak yine zordur çünkü en azından biri bu sonuçtan sapma eğiliminde olacaktır ve dolayısıyla bu sonucu sürdürmek zordur).

#### *Kapasite kısıtı altında Bertrand modeli*

Dikkat edilirse klasik Bertrand modeli çok da gerçekçi olmayan bir şekilde firmaların herhangi bir kapasite kısıtı olmadan üretim yaptığını varsaymaktadır. Şimdi bu varsayımı biraz değiştirelim. Burada tanıtacağımız model Bierman ve Fernandez (1998)'den adapte edilmiştir.

İki firmanın da belirli bir malı günde 0.5 ton kadar, sabit bir marjinal maliyetle üretme kapasitesine sabit olduğunu varsayalım. Gerçi firmaların kapasite seçimi de stratejik bir karar olabilir. Fakat biz bu durumu burada incelemeyeceğiz. Kısaca

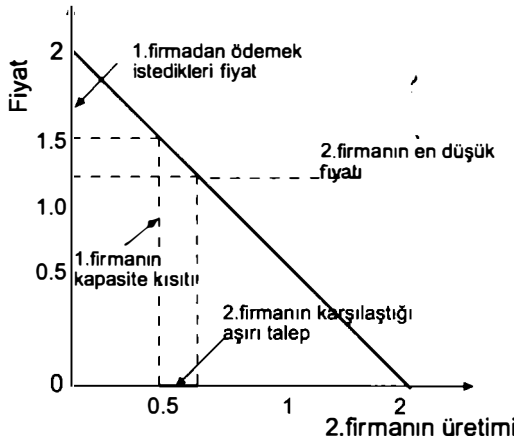
firmaların belirli bir kapasitesi var ve bu kapasiteyi aşamadıklarını varsayıyoruz. Her iki firmanın,  $i = 1, 2$ , maliyet yapısı aşağıdaki gibidir:

$$C_i = \begin{cases} 0.25q_i, & \text{eğer } 0 \leq q_i \leq 0.5 \\ \infty, & \text{eğer } q_i > 0.5 \end{cases}$$

Eğer firmalar aynı fiyatı uygulamak zorunda kalsaydılar piyasa talebi aşağıdaki gibi olurdu (ters talep fonksiyonu):

$$p = \begin{cases} 2 - (q_1 + q_2), & \text{eğer } q_1 + q_2 \leq 2 \\ 0, & \text{eğer } q_1 + q_2 > 2 \end{cases} \quad (1.15)$$

Kapasite kısıtı olduğunda, ilk önce talep fazlası durumunda tüketicilerin taleplerinin nasıl karşılanacağı tanımlanmalıdır. Bunun için çok sayıda metot tanımlanabilir fakat biz burada mala en yüksek fiyatı verenin malı alacağını varsayalım. Örneğin 2.firma 1.20 lira fiyat uygulasin ve 1.firma ise 1.30 lira fiyat uygulasin. Tüketiciler ilk olarak 2.firmadan 0.8 birim talepte bulunacaklardır ((1.15) denklemin-den görülebilir). Fakat 1.firma bu talebin sadece 0.5 kadarlık kısmını karşılayabilir (çünkü kapasite kısıtı 0.5 tondur). Yani aşırı talep vardır. Şekil 1.6'da görülebileceği gibi kalan tüketiciler en az 1.50 lira kadar ödeme yapmak isterler. Fakat bazıları 1.20 lira ile bu malları alırken, kalan tüketiciler 1.firmadan 1.30 liraya malı daha yüksek bir fiyattan almak zorunda olacaklardır.



Şekil 1.6 Talep fazlası durumunda ortaya çıkan durum

Şimdi 1.firmanın bakış açısına bakalım. 1.firmanın fiyatının 2.firmanın fiyatından daha yüksek olduğu varsayımını koruyalım. Yani şanslı olan tüketicilerin malı 2.firmadan aldıkları, kalanların ise mecburen 1.firmaya yöneldikleri anlamına gelir. 1.firmanın ters talep fonksiyonu:

$$p_1 = \begin{cases} 1.5 - q_1, & \text{eğer } q_1 \leq 1.5 \\ 0, & \text{eğer } q_1 > 1.5 \end{cases}$$

1.firma fiyatın 1.5'ten daha fazla olduğu durumda satış yapamaz. Örneğin 1.firma 1.30 fiyatında 0.2 birim satış yapmayı beklemektedir. Eğer 1.firma 2.firmadan daha düşük bir fiyat uygularsa, 1.firma en yüksek ödemeyi yapmak isteyen tüketicilerin talebini karşılayacak 2.firma da artık talebi karşılayacaktır. Artık talebi,  $q_1^a$ , şöyle tanımlayabiliriz:

$$q_1^a = \begin{cases} 1.5 - p_1, & \text{eğer } p_2 < p_1 \leq 1.5 \\ 0, & \text{eğer } p_2 < p_1 > 1.5 \end{cases}$$

Şimdi de 1.firmanın satış fonksiyonunu her iki firmanın uyguladığı fiyatlar cinsinden tanımlayalım:

$$q_1(p_1, p_2) = \begin{cases} \min\{1.5 - p_1, 0.5\}, & \text{eğer } p_2 < p_1 \leq 1.5 \\ \frac{1}{2} \min\{2 - p_1, 0.5\}, & \text{eğer } p_2 = p_1 \leq 2 \\ \min\{2 - p_1, 0.5\}, & \text{eğer } p_1 < p_2 \text{ ve } p_1 \leq 2 \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (1.16)$$

Yukarıdaki matematiksel ifade şu anlama gelir: 1.firma fiyatını 2.firmanın fiyatından daha yüksek belirlerse satışları artık talep ve kapasite kısıtı arasından en düşük olanı tarafından belirlenir (birinci satır). Eğer iki firma da aynı fiyatı seçerse, satışlar seçilen fiyatta oluşan piyasa talebinin (1.15) denkleminde belirtilen talep) yarısı ve kapasite kısıtı arasından en düşük olan tarafından belirlenir (ikinci satır). Eğer 1.firma 2.firmanın fiyatının altında fiyat uygularsa, satışları piyasa talebi ve kapasite kısıtı arasında en düşük olan tarafından belirlenir (üçüncü satır). Bu durumlar dışındaki herhangi bir durumda üretim düzeyi sıfır olacaktır (dördüncü satır).

Denklem (1.16)'i daha iyi anlamak için, örneğin 1.satır için bir örnek verelim. Örneğin  $p_1 = 1.4$  ve  $p_2 = 1.3$  olsun. En düşük fiyat 2.firmanın olduğu için (1.15) denkleminde verilen toplam talep fonksiyonundan 2.firma toplam talep miktarı olan 0.7 'nin ( $0.7 = q_1 + q_2$ ) 0.5'ini karşılar. Artık talebin  $q_1^a = 1.5 - p_1$  birimlik kısmını da 1.firma karşılar, yani 0.1 kadarlık kısmını karşılar. Bu değer yani 0.1 miktarı 1.firmanın üretim değeridir. Üçüncü satırda ise 1.firma daha düşük bir fiyat uyguladığı için piyasa talebini karşılar, seçtiği fiyat düzeyi kısıtın altında veya ona eşit üretimde bulunmasını sağlayacaktır. Eğer fiyatını 1.8 seçerse piyasa talebinin 0.2'ini karşılar fakat daha düşük bir fiyat uygularsa, örneğin 1.2 gibi, bu durumda kapasitesi kadar üretim yapar.

1.firmanın kâr fonksiyonunu şöyle yazabiliriz:

$$\pi_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_1 - 0.25) \min\{1.5 - p_1, 0.5\}, & \text{eğer } p_2 < p_1 \leq 1.5 \\ \frac{1}{2}(p_1 - 0.25) \min\{2 - p_1, 0.5\}, & \text{eğer } p_2 = p_1 \leq 2 \\ (p_1 - 0.25) \min\{2 - p_1, 0.5\}, & \text{eğer } p_1 < p_2 \text{ ve } p_1 \leq 2 \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (1.17)$$

Bu kâr fonksiyonu direkt (1.16) denkleminde gelmektedir (çünkü kâr fonksiyonu fiyat eksi marjinal maliyet çarpı satış miktarıdır). İlk önce mahkum stratejilere (hiç bir zaman oynanması rasyonel olmayan stratejiler) bakalım. İki strateji kümesinin mahkum stratejilerden oluştuğunu görürüz: marjinal maliyetin altında fiyat uygulamak (zarara neden olur) ve en yüksek ödemede bulunacak tüketicinin verebileceğinden daha yüksek bir fiyat uygulamak (satış olmayacaktır). Bu yüzden mahkum olmayan stratejiler  $[0.25, 2]$  aralığında fiyatlar uygulamaktır. Dolayısıyla kendimizi bu aralıktaki fiyatlara odaklayacağız.

İlk önce 1.firmanın tepki fonksiyonunu türetilim. 1.firmanın tepki fonksiyonunu türetirken 2.firmanın üç farklı fiyat aralığında hareket edebileceğini biliriz: (i)  $0.25 \leq p_2 \leq 1$  (ii)  $1 < p_2 \leq 1.5$  ve (iii)  $1.5 < p_2$ . Şimdi her bir durumda 1.firmanın en iyi tepkisinin ne olduğuna bakalım.

(i) Eğer 1.firma, 2.firmanın  $[0.25, 1]$  kapalı aralığında bir fiyat seçtiğini düşünürse, en iyi tepkisi ne olur? Bu aralıkta en az 1 birim talep edilir, ki bu iki firmanın toplam kapasitesine eşit veya ondan daha büyüktür. Sonuç olarak eğer 1.firma bu aralıkta bir fiyat seçerse ve bu fiyat 2.firmanın fiyatından daha düşük veya ona eşitse kapasite miktarı kadar satış yapar. Böylece bu aralıkta 1 fiyatını uygulamak kârını maksimize eden fiyattır. Eğer 1 fiyatının üstünde bir fiyat uygularsa ancak artık talebi karşılar. Birim başına kârı artsa da daha az mal satar. Satışlardaki düşüş kâr marjındaki artışı bastırır ve toplam kâr düşer. Bu yüzden 1.firmanın 1 fiyatı uygulaması, 2.firmanın bu fiyat aralığındaki fiyatlarına verilen en iyi tepkidir.

(ii) Fakat eğer 1.firma, 2.firmanın  $(1, 1.5]$  aralığında bir fiyat seçtiğini düşünürse en iyi tepkisinin ne olduğuna bakalım. 1.firmanın optimal stratejisi 2.firmanın fiyatının altında bir fiyat uygulamaktır,  $p_2 - \varepsilon$ , burada  $\varepsilon > 0$  yeterince küçük bir sayıdır, ve böylece kapasite kadar satmaktır. Bunun sebebi oldukça açık: Eğer 1.firma  $p_2$  fiyatını uygularsa her iki firma da piyasayı paylaşırlar ve satışları  $\frac{1}{2}(2 - p_2)$  düzeyine düşer. Bu 1.firmanın 0.5 olan kapasitesinden daha düşüktür çünkü  $p_2 > 1$ . Eğer 1.firma 2.firmanın fiyatından biraz daha yüksek bir fiyat uygularsa, yani  $p_2 + \varepsilon$ , satışları daha fazla düşer, çünkü satışları  $1.5 - (p_2 + \varepsilon)$  düzeyine düşer, bu da yine 0.5 düzeyinden daha düşüktür.

(iii) Son olarak eğer 1.firma, 2.firmanın 1.5 birimin üstünde bir fiyat uyguladığını düşünürse ( $p_2 > 1.5$ ) en iyi tepkisine bakalım. Bu fiyatta, eğer 2.firmanın fiyatı 1.firmanın fiyatından daha düşükse, 2.firma tüm piyasayı alır ve 1.firmanın satışları sıfır olur. Bu yüzden 1.firmanın kâr maksimize eden stratejisi 1.50 fiyatını uygulamaktır, böylece tüm piyasayı ele geçirmek mümkün olur. Böylece kapasitesi kadar satış yapacaktır. Dolayısıyla 2.firmanın bu fiyat aralığına en iyi tepkisi 1.50

fiyatını uygulamaktır.

Tüm tepki fonksiyonları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir:

| <i>2.firmanın fiyatı</i> | <i>1.firmanın en iyi tepkisi</i> |
|--------------------------|----------------------------------|
| $0.25 \leq p_2 \leq 1$   | $p_1 = 1$                        |
| $1 < p_2 \leq 1.5$       | $p_1 = p_2 - \varepsilon$        |
| $1.5 < p_2$              | $p_1 = 1.5$                      |

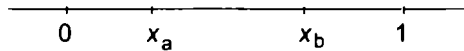
Benzer olarak 2.firmanın da en iyi tepki fonksiyonu elde edilir. Her iki firmanın tepki fonksiyonlarının kesiştiği tek bir fiyat vardır, o da 1'dir. Bu fiyat düzeyi Nash dengesidir. Bu fiyatta firmalar kapasiteleri kadar satış yaparlar ve pozitif kâr ederler. Kısaca kapasite kısıtı altında klasik Bertrand modelinin aksine firmalar kâr ederler. Ayrıca ilginç bir şekilde eğer firmalar yine kapasite kısıtı altında olup Cournot gibi rekabet etselerdi, Bertrand modeli ile aynı denge sonucunu elde ederlerdi.

### 1.6.5 Hotelling Fiyatlandırma Modeli

Bir malın fiyatlandırılmasında mala ulaşma mesafesinin (firmanın lokasyonu) önemli olduğu modellere Hotelling modelleri denir. Alıcı için A bakkalındaki peynirle, B bakkalındaki peynir arasındaki tek fark, eğer fiyatlar aynı ise, hangi bakkala gitmenin daha az maliyetli olduğudur. Tüketiciler bu yüzden nerede yaşadıklarına bağlı olarak farklı bakkalları seçerler ve ancak fiyatlar arasındaki fark yeterince büyükse bir bakkaldan diğerine kayarlar.

Lokasyon modelleri literatürde önemli bir yer tutar. Bu bölümde Hotelling'in 1929 yılındaki klasik makalesinde ifade ettiği fiyatlandırma modelini tanıtacağız. Hotelling fiyatlandırma modelinde, firmalar veri lokasyonlar için fiyat seçerler.

Modelde  $a$  ve  $b$  gibi iki firma vardır. Bu firmalar Şekil 1.7'de gösterildiği gibi  $x_a$  ve  $x_b$  noktalarında bulunmaktadır, burada  $x_a < x_b$ . Her iki firma da fiyatlarını,  $p_a$  ve  $p_b$ , aynı anda seçmektedir. Tüketicilerin lokasyonu  $x \in [0, 1]$  aralığında homojen (uniform) dağılmakta ve her tüketicinin bir satıcıyı seçtiği varsayılmaktadır<sup>4</sup>.



Şekil 1.7 Hotelling lokasyonu

Her tüketicinin bir birim mal aldığını düşünüyoruz. Başka bir ifadeyle tüketici talebinin,  $[0, 1]$  aralığında homojen dağıldığını varsayıyoruz. Basitlik olsun diye

<sup>4</sup>Sürekli homojen dağılım (uniform dağılım) simetrik olasılık dağılımlarından biridir. Bu dağılımda aynı uzunluğa sahip tüm aralıkların olasılıkları eşittir. Tanım aralığı iki parametre olan minimum ve maximum değerleri olan  $a$  ve  $b$  ile tanımlanır,  $[a, b]$ . Olasılık yoğunluk fonksiyonu şöyle ifade edilir:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a \text{ veya } b < x \end{cases}$$

firmaların üretim maliyetlerinin 0 olduğunu kabul edelim. Her tüketicinin amacı ödediği fiyat artı ulaşım maliyetini minimize etmektir:

$$u_x \text{ noktasındaki alıcı} = F - \min\{p_a + c|x_a - x|, p_b + c|x_b - x|\}, \quad (1.18)$$

Burada  $F$  malın tüketiminden elde edilen faydayı ve  $c$  mesafe başına katlanılan maliyeti göstermektedir.

Bir alıcının faydası ödediği fiyata ve gitmek zorunda olduğu mesafeye bağlıdır. Fiyatlar bir tarafa bırakıldığında,  $x = 0$  noktasındaki alıcı için iki satıcı arasında en çekici olan firma,  $a$  firmasıdır fakat  $x = 1$  noktasındaki alıcı için en çekici olan firma  $b$  firmasıdır.

$x = 0$  noktasındaki alıcı malı  $a$  firmasından alır eğer

$$F - (p_a + cx_a) > F - (p_b + cx_b),$$

(bu koşulun,  $x = 0$  durumunu (1.18) fonksiyonunda yerine koyduğumuzda alıcının  $a$  veya  $b$  firmasından alışveriş yapma maliyetleri karşılaştırılarak elde edildiğine dikkat edin) dolayısıyla

$$p_a - p_b < c(x_b - x_a), \quad (1.19)$$

Benzer olarak  $x = 1$  noktasındaki alıcı malı  $b$  firmasından alır eğer

$$F - [p_a + c(1 - x_a)] < F - [p_b + c(1 - x_b)],$$

dolayısıyla

$$p_b - p_a < c(x_b - x_a). \quad (1.20)$$

Şimdi amacımız iki piyasanın sınırında olan  $x^*$  noktasındaki alıcının (yani iki firma arasında kayıtsız kalan alıcı) lokasyonunu bulalım. Dikkat ederseniz, eğer  $a$  firması  $x_b$  noktasındaki alıcıyı çekmek isterse, aynı zamanda  $x > x_b$  noktalarındaki tüm alıcıları da çeker çünkü  $x_b$  noktasından daha ötedeki alıcıların her satıcıdan uzaklıkları aynı oranda artar. Dolayısıyla burada bilmek istediğimiz şey  $x_a$  ve  $x_b$  arasında kayıtsız bir alıcının olup olmadığıdır. Bunu şöyle bulabiliriz, (1.18) denkleminde hareketle kayıtsız alıcıyı bulabiliriz:

$$F - [p_a + c(x^* - x_a)] = F - [p_b + c(x_b - x^*)].$$

Buradan aşağıdaki eşitliği elde ederiz,

$$p_b - p_a = c(2x^* - x_a - x_b).$$

Sonuç olarak kayıtsız kalan tüketicinin lokasyonunu,  $x^*$ , şöyle ifade ederiz:

$$x^* = \frac{1}{2c}[(p_b - p_a) + c(x_a + x_b)]. \quad (1.21)$$

Buradan hareketle şunu söyleyebiliriz,  $a$  firması, 0 ve  $x^*$  arasındaki tüm

tüketicilere toplamda daha düşük bir maliyetle (fiyat artı mesafe) hizmet ettiğinden, (1.21) denklemi  $a$  firmasının talebini gösterir. Bu yüzden  $b$  firmasının talebi de  $(1 - x^*)$  olur. Eğer  $p_b = p_a$  ise (1.21) denkleminde  $x^* = \frac{x_a + x_b}{2}$  olur ve dikkat ederseniz beklenildiği gibi bu değer  $c$  parametresinden bağımsızdır çünkü fiyatlar aynı olduğunda her iki firmaya da eşit mesafede olan tüketici, kayıtsız tüketicidir, yani mesafeden kaynaklanan maliyeti dikkate almayacaktır.

Firmaların talep fonksiyonlarını bulduk, dolayısıyla her firmanın kâr fonksiyonunu elde edebiliriz. 1.firmanın kâr fonksiyonu  $p_a x^*$  ve 2.firmanın kâr fonksiyonu ise  $p_b(1 - x^*)$ 'dir, burada  $x^*$  değeri (1.21)'de tanımlandığı gibidir. Sırasıyla  $a$  ve  $b$  firmalarının kâr fonksiyonlarını aşağıda olduğu gibi daha açık bir şekilde yazalım,

$$\begin{aligned}\pi_a &= p_a \frac{1}{2c} ((p_b - p_a) + c(x_a + x_b)), \\ \pi_b &= p_b \left[ 1 - \frac{1}{2c} ((p_b - p_a) + c(x_a + x_b)) \right].\end{aligned}$$

Bu kâr fonksiyonlarından hareketle firmaların en iyi tepki fonksiyonlarını bulabiliriz. Bunu da her firmanın kâr fonksiyonunu kendi seçim değişkenine yani fiyatına göre türevini alıp sıfıra eşitleyerek elde edebiliriz:

$$\frac{d\pi_a}{dp_a} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{d\pi_b}{dp_b} = 0.$$

Bu iki birinci dereceden koşulun aynı anda çözümünden Nash dengesi fiyat değerleri bulunur. Bu denge fiyat değerleri şunlardır (siz de kontrol edin):

$$p_a = \frac{(2 + x_a + x_b)c}{3} \quad \text{ve} \quad p_b = \frac{(4 - x_a - x_b)c}{3} \quad (1.22)$$

Yukarıdaki ilk denklemden görülebileceği gibi, büyük  $x_a$  değeri firmaya daha fazla tüketici sağlayacağından ve daha büyük  $x_b$  değeri ise daha fazla rekabet edebileceği alıcının var olmasına yol açacağından,  $a$  firması daha yüksek fiyat uygular. En basit durumda, yani  $x_a = 0$  ve  $x_b = 1$  olduğunda her iki firma  $c$  değerine eşit bir fiyat uygular. Sonuç olarak dengede kârlar pozitifdir ve ulaşım maliyeti ile birlikte artar.

## 1.7 Yerel Noktalar

Daha önce gördüğümüz gibi bir oyunun hiç bir Nash dengesi olmayabileceği gibi (Eşleşen Paralar), çok sayıda Nash dengesi de olabilir (Cinsiyetler Savaşı). Çok sayıda Nash dengesi olduğunda, hangisinin gerçekleşeceğini öngörmek zordur. Bu oyun teorisinin, denge ne olacağına dair beklenti oluşturmada karşılaştığı ciddi bir sorundur.

Çoklu Nash dengesinden kurtulmanın yani dengeyi rafine etmenin bir yolu *yerel nokta (focal point)* yaklaşımıdır. Ekonomistler bazı oyunların bazı Nash dengelerinin *yerel* olarak bilinmesinden dolayı daha fazla oynanabileceğini belirtirler.

Schelling 1960 yılında yazdığı “The Strategy of Conflict” adlı kitabında yerel noktayı şöyle tanımlar: “her bireyin beklentisi diğerinin ondan yapmasını beklediği şeyi beklemektir” (s.57). Bu duruma bu yüzden *Schelling noktası* da denir.

Schelling bu kavramı daha iyi ifade edebilmek için New York Oyunu (daha sonra bu isimle yaygınlık kazandı) denen bir oyun örneği verir. Bu oyunda yarınl biri ile New York’ta buluşacaksınız. Fakat sorun nerede ve ne zaman buluşacağınızı bilmemenizdir (bunun sebebi bir haberleşme problemi olabilir). Bu aslında bir şehrin herhangi bir zaman ve yerinde buluşmaya dair bir koordinasyon oyunudur. Schelling bu soruyu çok sayıda öğrenciye sorar, aldığı cevap “öğle vakti Grand Central Terminali” (New York’ta merkezi bir yolcu terminali). Aslında mesele nerede buluşulmasından çok (bu bir bar veya kütüphane de olabilir), önemli olan şey buluşma yerlerinin sıklığı, genel kabul görmesi ya da gelenek haline gelmesidir.

Tablo 1.27’de verilen bu oyunun iki Nash dengesi olduğu görülür. Fakat bu dengelerden biri olan her ikisinin Grand Central Terminalinde (G) buluşmaları daha öne çıkar. Farklı yerlere gitmeleri durumunda faydaları her ikisi için sıfır iken, G’de buluşmaları diğer yerde (Empire State Binası- E) buluşmalarından daha fazla fayda sağladığından pareto baskın dengeye yönelmeleri beklenir. Yani dikkat edilirse G her ikisinin de haberli olduğu bir yer, buluşmak için en uygun yer diye düşündükleri bir yer, yani bu anlamda yerel noktadır.

|   | G        | E      |
|---|----------|--------|
| G | 100, 100 | 0, 0   |
| E | 0, 0     | 50, 50 |

**Tablo 1.27** New York oyunu

### Örnek 1.6

İki kişi yolda buldukları 100 lirayı kendi aralarında nasıl bölüşeceklerini düşünmektedirler. Sonunda şöyle bir yöntem izlediklerini varsayalım; Her biri aynı anda 100 TL’nin ne kadarını paylaşacaklarını ilan etsinler. Eğer toplam talep 100 TL’den yüksek olursa, her ikisi de bir şey elde edemeyecek, aksi takdirde birbirine önerdiklerini alacaklardır. İki oyuncunun hareket kümesi bu değerlerin seçildiği aralıktır, yani  $A_i = [0, 100]$ . Dolayısıyla elde edecekleri faydaları şöyle ifade edebiliriz:

$$u_i(x_1, x_2) = \begin{cases} x_i, & \text{eğer } x_1 + x_2 \leq 100 \\ 0, & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

burada  $x_i, i = 1, 2$  oyuncusunun önerdiği değerdir.

Bu oyunda çok sayıda Nash dengesi vardır ve bunlar aşağıda verilen eşitliği sağlayan her  $(x_1, x_2)$  kombinasyonundan oluşur,

$$\{(x_1, x_2) \in [0, 100] : x_1 + x_2 = 100\}.$$

Kısaca 100 liranın herhangi bir paylaşımı Nash dengesidir. Yani örneğin diğer oyuncu 40 seçtiğinde benim 60, veya diğeri 70 seçtiğinde benim 30 seçmem en iyi tepkidir ve bu diğer oyuncu için de geçerlidir. Fakat bu oyun çok sayıda oynandığında, çoğu durumda dengenin (50,50) olduğu görülmektedir. Dolayısıyla 50-50 paylaşımı yerel nokta gözükmektedir. Bu sonuç belki de eşitlik kaygılarından kaynaklanan bir şekilde gerçekleşmektedir. Fakat bu denge formel analizle ifade edilen bir sonuçtan çok gerçek hayattaki gözlemlerle desteklenen bir durumdur.

Yerel nokta kavramı çok sağlam teorik temelleri olan bir kavram değildir. Daha çok deneysel oyun teorisinin üzerinde durduğu bir konudur. Temel kalkış noktası çok sayıda Nash dengesinin olduğu oyunlarda görülen durağan durumlarla uyumlu davranışların varlığıdır. Bazı oyunlarda bazı dengelerin gerçekleşmesi daha olasıdır. Böyle oyunlarda hareketlerin isimleri, doğası veya ekstradan sahip olunan bilgi oyuncuları önceden dengeye yönlendirebilir.

## 1.8 Pür Stratejilerde Nash Dengesinin Varlığı

Eşleşen Para oyununda olduğu gibi her stratejik-biçimli oyun bir Nash dengesine sahip olmayabilir. Fakat bir oyunda karma stratejiler cinsinden en azından bir Nash dengesinin var olduğunu biliyoruz. Bunun ispatını bundan sonraki bölümde göstereceğiz. Şimdi burada sadece sürekli pür stratejilerde Nash dengesinin var olma koşullarını tartışacağız. Bir oyun grubunun dengesinin (veya dengelerinin) var olduğunu ispatlamak bu dengelerin incelenmesi için de bir kolaylık sunar. Çünkü her oyun için açıkça denge olup olmadığını araştırmaktan ve boş bir küme ile karşılaşmaktan kurtuluruz. Bir oyunda Nash dengesinin olmamasının dört tane sebebi olabilir:

### 1. Sınırsız strateji uzayı

Örneğin hisse senedi borsasında, Haşim aldığı kredi ile istediği kadar hisse senedi,  $x$ , alabilir. Bu yüzden strateji kümesi, alabileceği hisse miktarıdır,  $[0, \infty)$ , bu sınırsız bir kümedir dolayısıyla kompakt değildir. Eğer Haşim bugünkü hisse fiyatının yarından daha düşük olduğunu düşünüyorsa, fayda fonksiyonu  $\pi(x) = x$  olduğundan sınırsız sayıda hisse senedi alacaktır fakat açıkça bu denge alımı olmaz. Eğer aldığı miktar örneğin 1000 ve altında bir değerle sınırlandırılıysaydı, yani strateji uzayı  $[0, 1000]$  olsaydı, denge alımı  $x = 1000$  olurdu. Fakat bazen strateji uzayı sonsuz da olsa, Cournot oyununda olduğu gibi, sınırsızlık sorun yaratmaz çünkü oyunun optimum değeri bir iç çözüm şeklindedir. Diğer oyunlarda ise sınırlılık aslında doğanın koyduğu bir kısıttır (Zaman, kaynaklar gibi). Bu denge çözümlerinin varlığını kolaylaştıran bir durumdur.

### 2. Açık strateji kümesi

Şimdi de Tarkan'ın stratejisinin  $x \in [0, 100)$  olduğunu düşünelim ve fayda fonksiyonu  $\pi(x) = x$  olsun. Tarkan'ın strateji uzayı,  $[0, 100)$ , sınırlıdır fakat kapalı bir küme değildir, yani açık bir kümedir. Tarkan 100'den az herhangi bir pozitif bir sayıyı seçebilir fakat 100'ü seçemez. Bu da dengenin olmadığı anlamına gelir. Çünkü eğer 99.9 değerini seçse, bundan daha iyi bir seçim her zaman olacaktır

(açık küme sendromu). Bu teknik bir problemdir eğer strateji uzayını  $[0, 100]$  diye yazarsak, denge ortaya çıkar,  $x = 100$ .

### 3. Kesikli strateji uzayı

Herhangi bir oyunda işçinin az çalışmakla hiç çalışmamak arasında bir seçeneği yoksa işçinin en iyi tepkisini oluştururken herhangi bir çalışma düzeyine ulaşması mümkün olmayacağından denge söz konusu olmayabilir. Yani strateji kümelerinin konveks olmamasından dolayı strateji uzaylarında istedikleri bir noktaya varamazlar<sup>5</sup>. Bu dengenin olmasını engelleyebilir. Bu problem sadece kesikli strateji uzaylarına sahip  $2 \times 2$  büyüklüğündeki oyunlarla sınırlı değildir. Daha ziyade strateji uzayındaki boşluklardan kaynaklanır. Örneğin, bir oyuncu  $\{[0, 10], [90, 100]\}$  aralığında seçimde bulunsun. Bu aralık sürekli, kapalı ve sınırlı bir kümedir. Fakat bu küme konveks değildir çünkü kümede boşluklar vardır. Dolayısıyla optimal hareket bu kümenin elemanı olmayan bir değer olabileceğinden, oyunun dengesi olmayabilir.

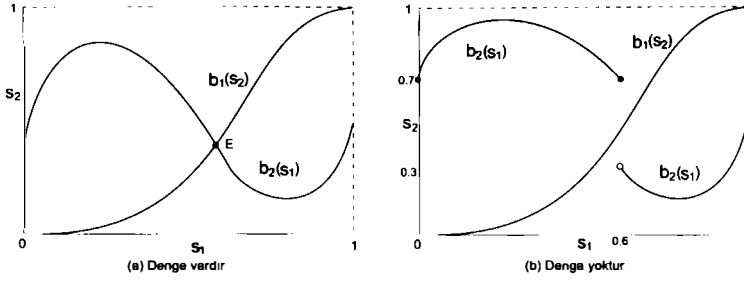
### 4. Konkav olmayan veya sürekli olmayan fayda fonksiyonlarından türetilen sürekli olmayan tepki fonksiyonlarının varlığı

Strateji uzayları kapalı, sınırlı ve konveks olsa da dengenin varlığı hala garanti değildir. Nash dengesinin var olması için tepki fonksiyonlarının birbirini kesmesi gerekir. Eğer en iyi tepki fonksiyonları sürekli değilse, birbirlerini kesmeyebilirler. Şekil 1.8 iki oyunculu bir oyunda her oyuncunun 0 ve 1 aralığında bir değeri strateji olarak seçtiği durumu göstermektedir. 1.oyuncunun,  $b_1(s_2)$  en iyi tepki fonksiyonu her olası  $s_2$  değeri için bir veya daha fazla  $s_1$  değeri seçer. 2.oyuncunun  $b_2(s_1)$  tepki fonksiyonu, her olası  $s_1$  değeri için bir veya daha fazla  $s_2$  değeri seçer. Şekil 1.8'in sol tarafındaki (a) panelinde E noktasında bir Nash dengesi vardır çünkü iki tepki fonksiyonu burada kesişirler.

Şekil 1.8'in sağ tarafındaki (b) panelinde ise Nash dengesi yoktur. Burada problem 2.firmanın  $b_2(s_1)$  tepki fonksiyonunun  $s_1 = 0.6$  noktasında sürekli olmamasıdır. Çünkü bu noktada fonksiyon 0.7'den 0.3'e zıplar, yani küçük bir değişiklik fonksiyonunu  $b_2(0.6) = 0.7$ 'den  $b_2(0.6001) = 0.3$  noktasına atar. Sonuç olarak tepki fonksiyon eğrileri asla kesişmez ve dolayısıyla bir dengeden bahsedilemez.

En iyi tepki fonksiyonları iki sebepten dolayı sürekli olmayabilirler. Birinci sebep, tepki fonksiyonun türetildiği fayda fonksiyonunun kendi veya diğer oyuncuların stratejilerine göre sürekli olmamasından kaynaklanabilir. Klasik Bertrand modeli buna örnek verilebilir. İkinci sebep ise 1.oyuncunun fayda fonksiyonunun konkav olmaması durumunda ortaya çıkabilir. Eğer fayda fonksiyonu konkav değilse, bu fonksiyonun lokal maksimum değerleri olabilir, fakat global maksimum değeri yoktur. Bu yüzden parametreler değiştikçe fayda fonksiyonunu maksimum yapan değerler de düzgün bir şekilde değil de bir noktadan diğerine hızlı bir şekilde değişir.

<sup>5</sup>Bir  $\{x\}$  kümesinin konveks olması şu anlama gelir: eğer  $x_1$  ve  $x_2$  kümedeki iki nokta ise, herhangi  $\theta \in [0, 1]$  için  $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2$  noktası da bu kümenin içindedir. Yani içinden iki nokta seçilen bir küme, bu iki noktayı birleştiren doğrunun üzerindeki tüm noktaları da içeriyorsa konveks kümedir.



Şekil 1.8 Sürekli ve süreksiz tepki fonksiyonları

Nash dengesi kavramının yokluğunu veya çokluğunu Cournot oyunu üzerinden tartışalım. Daha önce Cournot oyunu için verdiğimiz örnekler daha çok talep fonksiyonunun lineer olduğu ve marjinal maliyetin sabit olduğu örneklerdi. Şimdi bunu daha genelleştirelim ve bu durumda ortaya çıkan dengeleri tartışalım. Yine iki firmalı bir piyasa olsun ve firmaların seçtikleri üretim değerleri de  $q_1$  ve  $q_2$  olsun. Maliyet fonksiyonları  $c(q_1)$  ve  $c(q_2)$ , ve talep fonksiyonu ise  $p(q)$  şeklinde ifade edilir, burada  $q = q_1 + q_2$ . Firmalar homojen mal ürettiklerinden her mal için piyasada aynı fiyat geçerlidir.

1.firmanın bakış açısını ele alalım. Cournot-Nash dengesinde, 1.firma veri  $q_2$  değeri için  $q_1$  üretim miktarını seçer. Dolayısıyla  $q_1$  değeri  $q_2$ 'nin bir fonksiyonudur,  $q_2$  burada veri yani ekzojen değişkendir. 1.firma seçtiği hareketin, yani üretim miktarının, fiyat üzerindeki etkisini talep fonksiyonu üzerinden,  $p = p(q)$ , burada  $q = q_1 + q_2$ , gözlemler:

$$\frac{\partial p}{\partial q_1} = \frac{dp}{dq} \frac{\partial q}{\partial q_1}.$$

Bu arada 1.firmanın kâr fonksiyonu ise şöyle ifade edilir,

$$\pi_1 = p(q)q_1 - c(q_1). \quad (1.23)$$

1.firma kendi tepki fonksiyonunu, (1.23) denkleminde ifade edilen kâr fonksiyonunu kendi strateji parametresine göre türevini alıp sıfıra eşitleyerek elde eder:

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = p + \frac{dp}{dq} q_1 - \frac{dc}{dq_1} = 0.$$

Bu da şu anlama gelir:

$$q_1 = \frac{c' - p}{p'}, \quad (1.24)$$

burada  $c' = dc/dq_1$  ve  $p' = dp/dq$ . Eğer  $p(q)$  ve  $c(q)$  fonksiyonlarının fonksiyonel formlarını açık şekilde bilseydik, (1.24) denkleminde  $q_1$  düzeyini,  $q_2$  değerinin bir fonksiyonu olarak çözebilirdik.

Daha genel olarak, 2.firmanın üretimindeki bir değişimin 1.firmanın üretiminde yarattığı etkiyi bulmak için 1.firmanın tepki fonksiyonundaki değişime bakmak gerekir (yani (1.24)'de ifade edilen fonksiyonun  $q_2$ 'e göre türevi alınır):

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{(p - c')(p'' + p'' \frac{dq_1}{dq_2})}{(p')^2} + \frac{c'' \frac{dq_1}{dq_2} - p' - p' \frac{dq_1}{dq_2}}{p'}. \quad (1.25)$$

Yukarıdaki (1.25) denkleminde,  $\frac{dq_1}{dq_2}$ 'i çekerek tepki fonksiyonun eğimini bulmuş oluruz

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{(p - c')p'' - (p')^2}{2(p')^2 - c''p' - (p - c')p''}. \quad (1.26)$$

Eğer hem talep hem de maliyet fonksiyonu lineer kabul edilirse, yani  $p'' = 0$  ve  $c'' = 0$  ise, (1.26)'de verilen denklem aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\frac{dq_1}{dq_2} = -\frac{(p')^2}{2(p')^2} = -\frac{1}{2}.$$

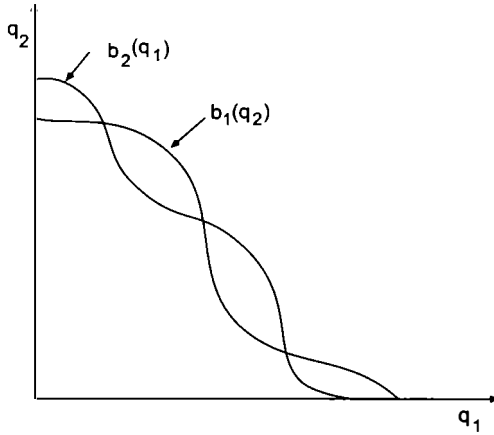
Fakat daha genel tanımlanmış bir modelde basit bir lineer modelin sonuçlarından daha farklı durumlar söz konusu olabilir. Talep ve maliyet fonksiyonlarının, fonksiyonel yapılarındaki özelliklere bağlı olarak Nash dengesi olmayabilir veya çok sayıda olabilir. Eğer talep fonksiyonu konkav ve maliyet fonksiyonu konveks ise, yani sırasıyla  $p'' < 0$  ve  $c'' > 0$  şeklindeyse, fiyat marjinal maliyetten daha fazla olduğu için ( $p > c'$ ), yukarıdaki (1.26) denklemi tepki fonksiyonlarının negatif eğimli olduğunu söyler çünkü  $2(p')^2 - c''p' - (p - c')p'' > 0$  ve  $(p - c')p'' - (p')^2 < 0$ 'dır. Eğer tepki fonksiyonları negatif eğilimliyse, kesişirler ve dolayısıyla denge oluşur. Maliyet fonksiyonlarını genelde azalan getiriden (veya sabit getiriden dolayı) dolayı konveks kabul ederiz. Fakat talep fonksiyonu konkav veya konveks olabilir. Eğer talep eğrisi lineer değilse, (1.26)'de ifade edilen denklem bize çok sayıda Nash dengesinin olabileceğini gösterir (Şekil 1.9).

Eğer talep konveks veya maliyetler konkav ise,  $p'' > 0$  ve  $c'' < 0$ , tepki fonksiyonları pozitif eğilimlidir. Bu durumda tepki fonksiyonları kesişmeyebilir ve dolayısıyla denge oluşmayabilir. Bu problem aynı zamanda 1.firmanın (1.23)'de ifade edilen kâr fonksiyonundan da görülebilir. Eğer  $p(q)$  konkav ise, kâr fonksiyonu konkav olmayacaktır bu da karşımızda bir kâr maksimizasyon problemi olmadığı anlamına gelir çünkü kâr maksimizasyonu için kâr fonksiyonunun konkav olması gerekir, yani  $\partial^2 \pi / \partial q^2 \leq 0$ .

#### *Nash Dengesinin İspatı*

Şimdi Nash dengesinin varlığını garanti altına alacak durumu daha teknik bir dille ifade edelim. Dengenin varlığını gösteren en basit ispatlardan birini sunacağız (burada kullanılan matematiksel dil kitabın geneline göre daha gelişkin olabilir, ilgili matematiksel kavramlar için kendiniz daha detaylı inceleme yapabilirsiniz).

Bir oyunun Nash dengesi olduğunu göstermek için  $s_i^* \in B_i(s_{-i}^*)$ ,  $\forall i \in N$  durumunu sağlayacak bir strateji profilinin olduğunu göstermek yeterlidir ((1.6)'e bak).



**Şekil 1.9** Tepki fonksiyonlarının fonksiyonel yapılarına bağlı olarak çok sayıda Nash dengesi olabilir

Küme-değerli bir  $B : S \rightarrow S$  fonksiyonunu, şöyle tanımlayalım  $B(s) = \times_{i \in N} B_i(s_{-i})$ . Böylece (1.6) basitçe vektör formatında,  $s^* \in B(s^*)$ , yazılabilir. *Sabit nokta teoremleri*,  $B$  üzerinde  $s^* \in B(s^*)$  durumunu sağlayan bir  $s^*$  değeri olduğunu garanti eden koşulları tanımlar. Çok sayıda sabit nokta teoremi vardır. Biz burada bunlardan Kakutani (1941) sabit nokta teoremini kullanacağız.

*Kakutani Sabit Nokta Teoremi:*  $X$  kümesi,  $\mathcal{R}^n$ 'nin kompakt ve konveks bir alt kümesi, yani  $X \subset \mathcal{R}^n$  olsun ve  $f : X \rightarrow X$  aşağıdaki koşulları sağlayan küme-değerli bir fonksiyondur:

- Tüm  $x \in X$  için,  $f(x)$  boş olmayan ve konveks bir kümedir.
- $f$  grafiği kapalıdır (yani  $\{x_n\}$  ve  $\{y_n\}$  öyle ki tüm  $n$ 'ler için  $y_n \in f(x_n)$ ,  $x_n \rightarrow x$  ve  $y_n \rightarrow y$ , dolayısıyla  $y \in f(x)$ 'dir). Bu yüzden  $x^* \in f(x^*)$  durumunu sağlayacak bir  $x^* \in X$  değeri vardır<sup>6</sup>.

Eğer her  $s^* \in S$  için  $\{s_i \in S_i : (s_{-i}^*, s_i) \succeq_i s^*\}$  kümesi konveks ise, ve  $S_i$  üzerinde tanımlanan konkav-benzeri bir  $\succeq_i$  tercih ilişkisi varsa, aşağıdaki önermede bulunabiliriz:

**Önerme 1.3** Bir  $G = \{N, (S_i), (\succeq)\}$  stratejik oyununda eğer her  $i \in N$  oyuncusunun  $S_i$  stratejiler kümesi, Ökliden uzayın boş-olmayan kompakt, konveks bir

<sup>6</sup>Matematiksel olarak grafiği şöyle tanımlayabiliriz: Bir  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonun (daha genel olarak bir ilişkinin) grafiği,  $\{(x, y) \mid y \in f(x)\}$  kümesidir. Eğer  $f$  reel-değerli bir fonksiyonsa, grafik basitçe bunun haritasıdır. Kapalı grafik ise, fonksiyonun (ilişkinin) grafiğinin kapalı küme olması demektir. Daha formel olarak ifade edersek, grafik üzerindeki herhangi bir nokta üzerinde tanımlanan bir dizinin,  $\{(x_n, y_n)\}$ ,  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \rightarrow x^*$  ve  $y_n \rightarrow y^*$  olması ve yakınsayan  $y^*$  değerinin grafik üzerinde olmasıdır yani,  $y^* \in f(x^*)$  olmasıdır.

alt kümesi ve  $\succeq$  tercih sıralaması sürekli ve  $S_i$  kümesi üzerinde konkav-benzeri ise stratejik oyunun bir Nash dengesi vardır.

**İspat.**  $B : S \rightarrow S$  fonksiyonunu,  $B(s) = \times_{i \in N} B_i(s_{-i})$  şeklinde tanımlayalım (burada  $B_i$ ,  $i$  oyuncusunun (1.6)'de tanımlanan en iyi tepki fonksiyonudur). Her  $i \in N$  için,  $B_i(s_{-i})$  kümesi boş-olmayan bir kümedir çünkü  $\succeq_i$  sürekli ve  $S_i$  kompakttır.  $B_i(s_{-i})$  kümesi aynı zamanda konvektir çünkü  $\succeq_i$  tercih ilişkisi  $S_i$ 'de konkav benzeridir. Son olarak  $B$  kapalı bir grafiğe sahiptir çünkü her  $\succeq_i$  ilişkisi sürekli. Yani Kakutani teoremi ile  $B$  fonksiyonu sabit bir noktaya sahiptir. Dolayısıyla bu sabit nokta oyunun Nash dengesidir. ■

Bu sonuç belirli koşulları sağlayan stratejik-biçimli bir oyunun en azından bir Nash dengesi olduğunu belirtir. Daha önce gördüğümüz gibi bir oyunun birden fazla dengesi olabilir. Ayrıca dikkat ederseniz yukarıda verilen önerme bir oyunun sınırlı stratejiye sahip olduğu oyunlarda geçerli değildir çünkü böyle bir durumda her oyuncunun strateji kümesi konveks olmayacaktır.

## 1.9 Nash Dengesi Üzerine Yapılan Değerlendirmeler

Nash dengesi üzerine yapılan değerlendirmeleri iki başlık altında toplayacağız. Bunlardan birincisi Nash dengesi ile ilgili bazı teknik problemler ve ikincisi ise Nash dengesi üzerine yapılan tartışmalar ve eleştirilerdir.

### 1.9.1 Nash dengesi ile ilgili bazı teknik problemler

Nash dengesi ile ilgili iki önemli nokta vardır. Buñlardan biri dengeñin rafine edilmesi diğeri dengeñin seçimidir. Dengeñin rafine edilmesi demek, herhangi bir oyunu makul oynamanın gerekli koşullarını belirlemek veya “kendisini-empoze etmenin” gerekli ve yeterli koşullarını tanımlamaktır. Denge seçimi ise çok sayıda denge arasında bazılarını eleyerek tahmin de bulunmayı kolaylaştırmaktır. Yani birinci nokta bazı denge noktalarının varlığındaki problemlerle ilgilenirken ikinci nokta denge noktalarındaki çokluğu bir problem olarak algılar.

Nash dengesi ekonomik uygulamalarda en fazla karşılaşılan denge kavramı olduğu için bunun ne demek olduğunu ve sınırlarını görmek önemlidir. Bunun içinde ilk önce Nash dengesinin karşılaştığı bazı temel problemleri ifade edelim.

*a. Nash dengesi bazı oyuncuların zayıf baskın stratejilerinden oluşabilir.*

Daha önce ifade ettiğimiz bir durumdan bahsedelim. Tablo 1.28'de verilen oyunda  $(\alpha, \alpha)$  Nash dengesidir. Bu denge zayıf mahkum stratejilerden oluşmaktadır. Şimdi bu dengeñin makul olup olmadığına bakalım. Eğer 1.oyuncu, 2.oyuncunun  $\alpha$  stratejisini oynayacağı konusunda kesin bir kanaate sahipse,  $(\alpha, \alpha)$  sonucu makuldur. Fakat eğer oyuncuların herhangi birinin kafasında rakibinin  $\beta$ 'yı oynayacağına dair bir olasılık belirirse, beklenen faydayı maksimize eden rasyonel davranış  $\beta$  hareketini oynamaktır. Oyuncuların rakiplerinin davranışları hakkında “kesin” kanaatlere sahip olmaları nadir karşılaşılan bir durum olduğundan, zayıf mahkum Nash dengesi makul gözükmemektedir.

|          |          |         |
|----------|----------|---------|
|          | $\alpha$ | $\beta$ |
| $\alpha$ | 0,0      | 1,0     |
| $\beta$  | 0,1      | 3,3     |

**Tablo 1.28**

*b. Nash dengesi tek değildir.*

Dengenin çokluğu tahminde bulunmayı zorlaştıran bir faktördür. Bu problemi gidermek için çok sayıda yöntem uygulanabilir. Bunun için modeli kuran kişi oyunun kurallarına daha fazla detay ekleyebilir veya temel denge kavramına ilave koşullar ekleyerek tek bir denge strateji profilinin ortaya çıkmasını sağlayabilir. Modeli kuran kişi Nash dengesini rafine edebilmek için birden fazla metod kullanılabilir. Örneğin çok sayıda Nash dengesi arasından pareto baskın Nash dengesi seçilebilir veya oyun-öncesi anlaşmalar (gerçi bunlar her zaman üzerinde anlaşılan dengeleri dayatmazlar) bazı oyunlar için tek bir dengeyi empoze edebilirler veya daha önce bahsettiğimiz yerel nokta yaklaşımında belirtilen yerel bilginin insanların davranışlarını yönlendirdiğini ve dolayısıyla günlük hayatta dengeye varmayı kolaylaştırdığını görürüz.

*c. Nash dengesi koalisyonlardan muaf değildir.*

Tablo 1.29'da verilen oyuna bakalım. Bu oyunda dikkat edilirse, oyuncuların kendi aralarındaki bir ön diyalogla pareto mahkum olan, (1, 1) Nash dengesini oynamamaları mümkündür. Yani eğer oyuncular oyun-öncesi bir diyalogla koalisyon oluşturarak, (1, 1) Nash dengesini oynamayıp, her ikisi için daha iyi sonuçlar doğuran, pareto etkin bir denge olan  $(r, r) = (3, 3)$  strateji profilini takip edebilirler. Bu anlamda Nash dengesi koalisyonlara dirençli değildir.

|     |      |      |
|-----|------|------|
|     | $l$  | $r$  |
| $l$ | 1, 1 | 0, 0 |
| $r$ | 0, 0 | 3, 3 |

**Tablo 1.29**

Bu konuyu biraz formel tartışalım.  $G$  gibi stratejik-biçimli bir oyunun pareto optimal Nash dengesi  $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$  olsun, bu durumda aşağıdaki koşulu sağlayan  $b^* = (b_1^*, \dots, b_n^*) \in N(G)$  gibi başka bir strateji profili yok demektir (burada  $N(G)$ ,  $G$  oyunun Nash denge kümesini göstermektedir),

$$u_i(a^*) < u_i(b^*), \forall i \in N.$$



$G$  oyunun tüm pareto optimal Nash dengeleri kümesini ise  $N_p(G)$  ile gösterelim. İki kişilik bir oyunda pareto optimal Nash dengesi sonucu özellikle ilgi çekicidir (ön diyaloga müsaade edildiğinde). Çünkü böyle bir sonuç bir şekilde gerçekleştiğinde oyuncular ne tek taraflı sapma motivasyonuna sahip olacaktır (Nash dengesinin istediği gibi) ne de birlikte sapma motivasyonuna sahip olacaklardır (pareto

optimalitenin istediği gibi). Beklenileceği gibi Tablo 1.29'da verilen  $G$  oyunun pareto Nash dengesi kümesi,  $N_p(G) = \{r, r\}$ 'dir. Fakat örneğin herhangi bir Cinsiyet Savaşı oyununda (Tablo 1.11'e bakın) pareto optimallik kavramı bize kesin bir sonuç vermez çünkü  $N_p(\cdot) = N(\cdot)$ . Dolayısıyla Cinsiyetler Savaşı oyununda her iki Nash dengesi pareto optimaldir.

Pareto optimal Nash dengesinin, Nash dengesini rafine etmesi ancak Nash dengesi koalisyonlara karşı muafsa mümkündür. Bunun nedeni ise Nash dengesi ile sağlanan durağanlıktan tek taraflı sapmanın rasyonel olmamasıdır. Yani Nash dengesi, oyuncuların herhangi bir koalisyona doğru sapmalarından dolayı daha yüksek bir fayda elde etmelerine imkan vermemelidir. Pareto optimal Nash dengesi bu durumu düzeltir. Bireylerin tek taraflı sapmalarının rasyonel olmamasının yanında oyuncuların tamamından oluşan bir koalisyondan sapmanın da rasyonel olmaması sağlanır. Fakat dengeyi rafine etme çabası problemi tamamen çözmez. Aşağıda pareto optimal Nash dengesinin, koalisyonları dikkate aldığımızda tatminkâr bir şekilde daha rafine bir dengenin oluşmasını sağlamadığını gösteren bir örnek verilmektedir.

Tablo 1.30'da verilen üç-kişilik oyuna bakalım. 1.oyuncu satır, 2.oyuncu sütun ve 3.oyuncu da  $l$  ve  $r$  matrislerini seçsin.

|     |             |          |     |             |         |
|-----|-------------|----------|-----|-------------|---------|
|     | $L$         | $R$      |     | $L$         | $R$     |
| $U$ | 2, 1, 1     | 1, 0, 0  | $U$ | 1, 0, 0     | 1, 2, 2 |
| $D$ | 0, 0, 0     | 1, 1, -5 | $D$ | 0, 0, 0     | 0, 1, 1 |
|     | $l$ matrisi |          |     | $r$ matrisi |         |

**Tablo 1.30**

Bu  $G$  oyununda pareto optimal Nash dengeleri aynı zamanda Nash dengeleridir,  $N_p(G) = \{(U, L, l), (U, R, r)\} = N(G)$ . Fakat koalisyonların varlığı, yani oyuncuların birlikte hareket etmeleri,  $(U, L, l)$  pareto optimal Nash dengesinin durağan olmadığını gösterir. Oyunda 2. ve 3.oyuncular bir koalisyon kurarak, yani  $R$  ve  $r$  hareketlerini oynayarak,  $(U, L, l)$  dengesinden sapabilirler.

Koalisyonlara karşı muaf olan Nash dengesine *kesin Nash dengesi* denir. Yani oyunculara ön diyalog veya iletişim imkanı verildiğinde de aynı Nash dengesi korunuyorsa Nash dengesi kesin Nash dengesidir<sup>7</sup>. Kesin Nash dengesi,  $N_S(G)$  optimal Nash dengelerinin bir alt kümesidir,  $N_S(G) \subset N_p(G) \subset N(G)$ , çünkü bazı pareto optimal Nash dengeleri koalisyonlara karşı dirençli değildir. Yukarıdaki örnekte olduğu gibi:  $\{(U, R, r)\} = N_S(G) \subset N_p(G) = \{(U, L, l), (U, R, r)\}$ .

*d. Her Nash dengesi dirençli değildir.*

Nash dengesinin dirençli olması oyuncuların fayda fonksiyonlarının çok az değiştirilmesi durumunda dahi oyun dengesinin değişmemesi demektir. Maalasef her Nash dengesi dirençli değildir. Örneğin Tablo 1.31'de verilen oyunda  $(U, L)$  dirençli bir Nash dengesidir. Halbuki  $(D, R)$  dirençli bir Nash dengesi değildir. Çünkü 1.oyuncunun  $(U, R)$  strateji profilindeki faydası biraz artsa, yani  $u_1(U, R) =$

<sup>7</sup> Kesin Nash dengesi kavramı ilk defa Robert Aumann (1976) tarafından geliştirilmiştir.

$\varepsilon$  olsa ( $\varepsilon$  yeterince küçük pozitif bir sayıdır),  $(D, R)$  profili Nash dengesi olmaktan çıkar.

|     |      |      |
|-----|------|------|
|     | $L$  | $R$  |
| $U$ | 1, 1 | 0, 0 |
| $D$ | 0, 0 | 0, 2 |

**Tablo 1.31**

## 1.9.2 Nash dengesine yapılan eleştiriler

Oyun teorisinin zamanla daha formel ve bütünlükçü bir teori olarak ortaya çıkmasıyla birlikte ileri sürülen teorilerin gerçekliğinin sınanması bir zorunluluk haline geldi. Bunun için reel aktörlerle laboratuvar ortamında deneyler yapıldı. Bu deneylerin sonuçları bazen ileri sürülen teorileri destekler nitelikte iken bazen de tam tersine onları tezatlar yönde olmuştur.

Eğer Nash dengesi ile gözlemlenen davranışlar arasında bir ayrışma varsa bu daha önce belirttiğimiz rasyonel davranışlar ve beklentilerin doğruluğu varsayımlarının sınanmasını gerektirir. Bazı oyunlarda bu varsayımların çalıştığı bazılarında ise çalışmadığı gözlemlenmektedir. Bu da teorinin daha da iyileştirilmesi ve daha sağlam bir zemine oturtulması gerektiğini ima eder.

Nash dengesini deneysel olarak test etmek için her oyuncunun tercihlerinin gerçek oyuncuların tercihleri ile uyumlu olması gerekir. Örneğin alınan parasal miktarların fayda fonksiyonu ile uyumlu olduğunu düşündüğümüzde, yani insanların sadece aldıkları para arttıkça bundan memnun olduklarını düşünmek bir çok kültürdeki aktörler için doğru olabilir, fakat bunun her zaman doğru olduğunu söylemek doğru olmayabilir. Hatta bu bazı kültürlerde bencillik olarak algılanır. Dolayısıyla aktörlerin bencil olup olmadığını kontrol etmedikçe aslında iki şeyi aynı anda test ediyor oluruz: ilki insanlar bencildir hipotezini, diğeri insanların davranışlarını Nash dengesi kavramına göre belirlendiği hipotezini. Bazı durumlarda her iki hipotezi de test etmek isteyebiliriz. Fakat sadece Nash dengesi teorisini test etmek istiyorsak, bireylerin tercihlerinin bununla uyumlu olup olmadıklarından emin olmalıyız.

Stratejik bir oyunda hangi hareketler oyuncular tarafından seçilir? Rasyonel karar-verme teorisine göre her oyuncu mevcut hareket kümesi içinde kendisine en yüksek fayda veren hareketi seçer. Bir oyunda, herhangi bir oyuncu için en iyi hareket genelde diğer oyuncuların hareketlerine bağlıdır. Yani bir oyuncu hareket ettiğinde diğer oyuncuların da davranışlarını aklında tutacaktır. Dolayısıyla herhangi bir oyuncu diğer oyuncuların davranışları hakkında bir inanç oluşturmak zorundadır. Her oyuncunun oyun hakkında bir tecrübeye sahip olduğunu varsaysak bile her oyuncu oyunu her seferinde ayrı bir şekilde oynar. Yani bir oyuncu sadece belirli spesifik oyuncuların davranışlarına aşina olmadığı gibi, davranışını da her karşılaştığı spesifik oyuncuya göre de düzenlemez.

Oyundaki herhangi bir oyuncu çok sayıda oyuncudan oluşan bir topluluğun sadece bazı üyeleri ile karşılaşır. Her oyun her seferinde rassal seçilmiş oyuncularla oynanır. Yani her oyuncu oyunda sürekli değişen çok sayıda oyuncu ile oynama imkanı bulur. Yani oyuncunun tecrübesi onu tipik spesifik oyuncular hakkında değil genel olarak oyuncular hakkında inançlar oluşturmaya imkan verir.

Nash dengesi kavramı durağan durumlarla uyumlu bir kavramdır. Bu yüzden bu kavramın iddia ettiği şeyi deneysel olarak incelerken oyuncuların herhangi bir oyunu oynarken kazandıkları tecrübe ile oluşan davranışları hakkında gözlemlerimiz önemlidir. Hep aynı oyuncu ile karşılaşmış olsalardı böyle bir tecrübeye ihtiyaç duymayacaklardı. Zaten Nash dengesi kavramı da oyunun her seferde farklı kişilerle oynandığını varsayar. Her oyuncu ya oyunu hep farklı kişilerle oynayıp tecrübe kazandığını ve diğer oyuncuların da ortalama nasıl oynayacağı hakkında görüş edindiğini ya da oyuncuların zaten tecrübeleri olduğunu varsayar. Bir örnek vermek gerekirse, alıcılar ve satıcılar arasındaki etkileşime bakalım. Alıcılar ve satıcılar sürekli bir etkileşim içindeler fakat sürekli etkileşimin çoğu eşleşmelerin rassal olarak gerçekleştiği bir etkileşimdir. Çoğu durumda, bir alıcı veri satıcı ile sadece bir kez işlem yapar veya sürekli fakat karşındakini tanımadan gerçekleşen bir işlem gerçekleşmektedir (örneğin büyük bir alışveriş merkezindeki bir mağazadaki satıcı gibi).

Özetle, çalıştığımız Nash dengesinin iki önemli unsuru vardır. İlk olarak, oyuncu her karşı oyuncu hakkında oluşturduğu inançla rasyonel seçim modeline uygun olarak hareketini seçer. İkinci olarak her oyuncunun diğer oyuncuların hareketleri hakkındaki inançları birbiri ile tutarlıdır. Yani Nash dengesinde oyuncular diğer oyuncuların oyunu nasıl oynadıklarına dair açık düşünceleri vardır ve düşünceler kendisini gerçekleştiren niteliktedir.

Burada diğer önemli bir sorun oyuncuların birbiri hakkındaki inançlarının kaynağının ne olduğudur, yani bu düşünceler veya inançlar nereden gelmektedir. Bunu açıklamaya çalışan belirli görüşler vardır:

i. *Oyun reçetesi*: Buna göre oyunun dışında bazıları oyunun nasıl oynanması gerektiği konusunda bir reçete önermektedir. Bu reçete durağan bir nitelik göstermektedir. Yani her hangi bir oyuncu eğer diğer oyuncuların da bu reçeteyi takip edeceğine inanırsa bu reçeteden sapmaz. İşte bu Nash dengesidir.

Örneğin, bir danışman çok sayıda oyuncuya strateji tavsiyelerinde bulunmaktadır. Eğer bazı oyuncular danışmanın tavsiye ettiği stratejilerin dışında stratejiler izlemeleri durumunda daha iyi sonuçlar alıyorsa, bu tavsiyeler Nash dengesini veren nitelikte değil demektir. Fakat eğer danışman Nash dengesini oluşturan stratejileri tavsiye etseydi, tüm oyuncular bu işten mutlu olacaklardır. Çünkü bu stratejilerden sapma göstermeyeceklerdir. Dolayısıyla mantıklı, rasyonel ve iyi bir danışman Nash dengelerini tavsiye edecektir.

ii. *Rasyonel içedönüklük*: Buna göre Nash dengesi bir oyunu oynamanın makul bir yolu olabilir. Çünkü diğer oyuncuların ne yapacaklarına dair inançları onların rasyonel olmaları ile tutarlıdır. Bu özellikle tek bir Nash dengesinin olduğu oyunlar için iyi bir açıklamadır. Fakat çoklu Nash dengeleri için daha az ikna edici bir

açıklamadır.

iii. *Oyun-öncesi diyalog*: Buna göre oyuncuların diyalog kurabileceği bir oyun öncesi safha vardır. Oyuncular bu safhada nasıl oynamaları gerektiği konusunda anlaşabilirler. Bu anlaşmalar kendisini empoze eden anlaşmalar oluşturabilir. Nash dengesi oyuncular arasında açık veya örtük bir anlaşma gibi de algılanabilir. Bu anlaşmaya bir kez varıldı mı, herhangi bir dışsal belirleyici güce ihtiyaç kalmaz. Çünkü her oyuncunun kendi çıkarı eğer diğerleri de bunu takip eder bu anlaşmaya uymaktır. İşbirlikçi-olmayan oyunlarda Nash dengesini içeren anlaşmalar ayakta kalan anlaşmalardır.

Aumann (1976) Nash dengesinin önemli bir varsayımı olan inançların tutarlılığı varsayımını bir örnek üzerinden şöyle savunur. Varsayalım siz yağmurun yarın yağma olasılığının 3/4 olduğuna inanıyorsunuz, ben ise bu olasılığın 1/4 olduğuna inanıyorum. Bu beklentiler üzerinden bir iddiaya girelim, yani eğer yağmur yağmazsa bana 1 lira vereceksiniz fakat eğer yağmur yağarsa ben size 1 lira ödeyeceğim. Toplamda net kazanç sıfırdır (sıfır toplamalı bir oyun gibi), çünkü sizin kazancınız benim kaybımdır. Fakat beklenen fayda düzeyleri böyle değildir. Her birimizin beklenen faydası:  $3/4$  olasılıkla 1 lira,  $1/4$  olasılıkla -1'dir. Ortalamada her birimiz 50 kuruş ( $1 \times \frac{3}{4} - 1 \times \frac{1}{4} = 0.5$ ) kazanmayı bekleriz. Dolayısıyla beklentilerimiz birbirleri ile uyumlu değildir. Eğer ikimiz de rasyonel bireyler isek ancak farklı bilgi kümelerine veya farklı kanıtlara sahipsek anlaşmamamız söz konusu olmalıdır. Fakat eğer sahip olduğumuz bilgileri birbirimiz ile paylaşmamız söz konusu olsaydı, ya da birbirimizi ikna etmek için sahip olduğumuz bilgileri birbirimize sunsaydık, beklentilerimiz birbirine yakınlaşırdı. Yani beklentilerimizi revize etme eğilimi gösterirdik. İkimiz arasındaki anlaşmazlık bilgi paylaşımı arttıkça azalır, beklentilerimiz birbirine yaklaşır. Beklentilerin birbirine tam anlamıyla yaklaştığı noktada ise artık bahis anlamlı olmaktan çıkar. Yani Aumann'a göre rasyonel olan ve aynı düzeyde bilgiye sahip bireyler anlaşmamak üzerine anlaşmazlar.

Fakat Aumann'ın yaptığı gibi inançların karşılıklı tutarlılığını bu şekilde savunmak iyi bir kalkış noktası olmayabilir. Çünkü bu savunma oyuncuların gerçek zaman üzerindeki diyaloguna dayalı olarak geliştirilen bir argümandır. Aumann bu diyalogun nerede ve nasıl yapıldığını belirtmez. Böyle bir süreç olmadan da anlaşma söz konusu olamaz. Aumann'ın bu iddiası özellikle tek seferlik oyunlar için ciddi bir problem olarak karşımıza çıksa bile etkileşimin birden fazla olduğu oyunlarda daha makul bir açıklamaya dönüşür. Yani örneğin oyunu bir kez oynadınız baktınız oyun sonunda (ex-post) birbirinizden farklı beklentilere sahip olduğunuzu gördünüz, bir sonraki oyunda beklentileri revize etme yoluna gitmeniz daha olası hale gelir. Oyunu tekrarlama sayısı arttıkça beklentiler birbirine daha fazla yaklaşır.

Bu arada aynı bilginin aynı beklentilere yol açtığı düşüncesi de tartışmalı bir konudur. Çünkü subjektif beklentilerin farklılığı sadece bilgi farklılığına dayalı olmayabilir. Örneğin bir at yarışında kazanan ata dair farklı beklentiler bahisçilerin sadece atların performanslarına dair bilgi farklılığından değil aynı zamanda atlara dair kendi farklı subjektif inançlarına da dayanır.

iv. *Evrim*: Buna göre Nash dengesi oyuncuların davranışlarını diğer oyunculara göre sürekli adapte ettikleri dinamik uyarlanma sürecinde ortaya çıkan olası durağan noktalar. Bu tanım Nash dengesine evrimci bir bakış açısını yansıtır ve biyolojik evrimi tanımlamak için kullanılır. Yani Nash dengesi bir oyun sürekli oynandığında ortaya çıkan sonuçtur. Dolayısıyla Nash dengesi insanların sürdürmekten mutlu olduğu istikrarlı sosyal gelenekler gibidir.

Evrimci yaklaşıma göre oyuncular belirli stratejileri oynamaya programlanmışlardır, örneğin ortalamaya göre hareket etmek gibi. Diğer oyuncuların fayda düzeylerini bilmedikleri gibi stratejilerini de bilmemektedirler. Sosyal öğrenme yoluyla kendi stratejilerinin toplumdaki oyuncuların ortalamasından daha iyi mi yoksa daha kötü mü olduklarını gözlemlerler. Örneğin arabalarını diğer insanların (komşuları ile örneğin) arabaları ile karşılaştıran insanlar olduğunu düşünelim. Eğer komşularının arabalarının kendilerinininkinden daha iyi olduğunu düşünürlerse kendilerinin iyi stratejilere sahip olmadığını ve komşularının stratejilerini taklit etmeleri gerektiğini düşüneceklerdir. Çünkü komşusu daha iyi bir strateji izlemiş ki daha iyi bir arabaya sahip olmuş diye düşünecektir. Bu biyolojide ortama uyum sağlayan türlerin daha çok yavru vermesi gibidir. Fakat bu evrimci yaklaşımın önemli bir zaafı vardır, o da oyuncuların rasyonelliğini oldukça törpüler ve onları düşünsel anlamda çok edilgen tanımlar.

v. *Öğrenme*: Buna göre denge teorisi çoğu oyunun ilk aşamalarında oyunu açıklamada zorlanırken, oyunun ilerleyen aşamalarındaki dengeyi açıklamada daha başarılıdır. Bu denge-dışı durumdan denge durumuna kayışı, insanların kendi aralarındaki ilişkilerden öğrendiği bilgilerle açıklamak mümkündür. Oyuncular aynı oyunu zaman içinde çok sayıda oynadıklarından dolayı hangi stratejileri oynamaları gerektiği konusunda daha fazla bilgiye sahip olurlar.

Oyuncular diğer oyuncuların bir kara kutu olduğunu düşünürler buna göre ya belirli bir stratejiyi oynadıklarını veya belirli bir olasılık dağılımına uygun olarak stratejilerini rassallaştırdıklarını düşünürler. Oyuncular daha fazla bilgi topladıkça kara kutunun içinde nelerin döndüğünü daha iyi anlamaya çalışırlar ve diğer oyuncuların stratejilerini de daha iyi tahmin edebilir hale gelirler. Oluşturdıkları inanca uygun olarak en iyi tepki fonksiyonlarını oluştururlar.

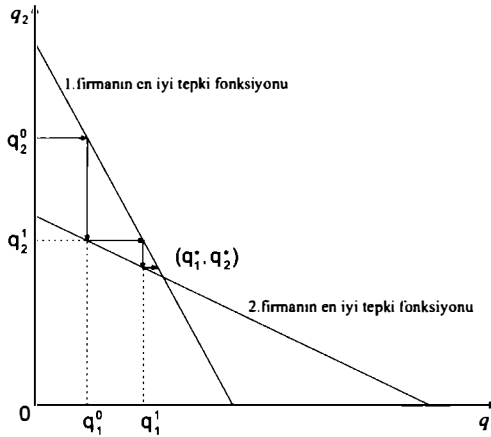
Öğrenme modelleri bireyin rasyonel olduğu varsayımında bulunur fakat rasyonelliğin ortak bilgi olduğu varsayımın da bulunmaz. Gerçekte oyuncunun diğer oyuncunun ne olduğuna dair bilgisinin olmaması stratejik etkileşimi ortadan kaldırır. Bu da bireyin geçmişte edindiği bilgiyi kullanmadığı anlamına gelir. Dolayısıyla karşı oyuncunun stratejiler üzerinde bir makina gibi rassallaştırma yaptığını düşünebilir. Çünkü karşı tarafın ne olduğunu, yani rasyonel olup olmadığını bilmemektedir.

Bu noktada önemli bir tartışma yapmak istiyoruz o da dengenin ortaya çıkma sürecini tanımlamak. Oyunu oynarken tecrübe kazanan oyuncular hakkında bilgi toplamının şöyle bir zorluğu vardır: Oyunun dengeye yakınsadığını nereden biliyoruz? Çünkü Nash dengesi sadece denge ile ilgilenmektedir. Dengeye giderken oyuncuların seçimlerinin izlediği patika hakkında çok şey söylememektedir. Fakat

örneğin Cournot oyunu özünde bir öğrenme süreci içerir. Öğrenme sonucunda denge gerçekleşir. Şimdi Cournot firmalarının miktar rekabeti yaptığı piyasada dengenin nasıl oluştuğuna bakalım. Başka bir deyişle Cournot uyarlanma mekanizmasına bakalım. Gerçi Cournot modelinde büyük bir nüfus yok fakat her firmanın rolunu üstlenen bir aktör vardır.

İki firmalı bir Cournot oyununda,  $i = 1, 2$ , her firmanın stratejisi homojen bir malın üretim miktarını,  $q_i \in [0, \infty)$ , seçmektedir. Her iki oyuncunun seçtiği vektör uzayını da  $q$  ile gösterelim.  $i$  oyuncusunun en iyi tepki fonksiyonunun  $b_1(q_2) = \arg \max_{q_1} u_1(q_1, q_2)$  ve  $b_2(q_1) = \arg \max_{q_2} u_2(q_1, q_2)$  olduğunu biliyoruz. Cournot uyarlanma sürecinde, zaman periyotları kesiklidir, dolayısıyla  $t = 1, 2, \dots$  şeklinde ifade edilir. Oyunun  $q^0 = (q_1^0, q_2^0)$  gibi herhangi bir strateji profilinde başladığını varsayalım. Uyarlanma sürecinde her oyuncu her periyotta rakibinin bir önceki seçtiği değere göre en iyi tepkiyi vermektedir, örneğin  $t$  periyodunda  $i$  oyuncusu  $q_i^t = b_i(q_{-i}^{t-1})$  pür stratejisini seçmektedir. Daha sonraki  $t + 1$  periyodundaki tepki ise  $q_i^{t+1} = b_i(q_{-i}^t)$  şeklindedir. Cournot süreci böyle devam eder. Bu sürecin durağan durumu, strateji parametresi olan üretimin bir daha değişmeyecek bir şekilde geldiği noktadır,  $q^* = f(q^*)$  yani  $q = q^*$  bir kez bu noktaya geldikten sonra sonsuza kadar orada kalacaktır. Bu her oyuncu için geçerlidir. Hiç bir oyuncu stratejisini değiştirmeyecektir, dolayısıyla Nash dengesidir, yani  $q_i^* = b_i(q_{-i}^*)$ .

Bunu Şekil 1.10'dan takip edersek ne söylemek istediğimiz daha iyi anlaşılır.



Şekil 1.10 Cournot uyarlanma süreci

En iyi tepki fonksiyonlarını çizdikten sonra sürecin nasıl dengeye,  $(q_1^*, q_2^*)$ , geldiğine bakalım. Firmalar denge-dışındaki her periyotta üretimlerini değiştirirler. Her firma diğer firmanın bir önceki periyottaki üretim miktarını sabit düşünerek buna göre üretim düzeyini belirler: 1.firma, 2.firmanın  $q_2^0$  düzeyinde üretim yaptığını düşündüğünde en iyi tepkisi, en iyi tepki fonksiyonu üzerindeki üretim miktarıdır, yani  $q_1^0$ 'dir. Daha sonra 2.firma, 1.firmanın bu verdiği en iyi tepkiye kendi en

iyi tepkisini verir. Yani kendi en iyi tepki fonksiyonu üzerindeki değeri olan  $q_2^1$  düzeyinde üretir. Daha sonra bu sefer 1.firma buna en iyi tepkisini,  $q_1^2$ , verir. Süreç bu şekilde iki tepki fonksiyonun keşiştiği üretim düzeylerine ulaşana kadar devam eder, yani  $q_1^*$  ve  $q_2^*$ . Bu durum hangi başlangıç noktasından başlarsa başlasın değişmez, dengeye yakınsar. Bu da Nash dengesinin global istikrarlı olduğu anlamına gelir. Fakat çok sayıda Nash dengesi olsaydı varılacak denge başlangıç noktasından bağımsız olmayacaktı, bu yüzden de global istikrarlı olmayacaktı.

Dikkat ederseniz bu süreç kronolojik zaman anlamında gerçekleşmez, yani süreç "1.oyuncu, 2.oyuncunun üretim düzeyini gözlemler ve bunu değiştirmeyeceğini düşünür ve daha sonra en iyi tepkisini verir. 2.firma da benzer şekilde düşünerek üretimini seçer ve süreç böyle devam eder" cümlesindeki gibi gerçekleşmez. Diğer ifade ile bu fiiliyatta gerçekleşen bir süreç olmaktan ziyade (yani her aşamada firmalar üretim kararlarını fiziksel olarak gerçekleştirmezler), bir düşünme sürecidir. Dolayısıyla süreç zihinsel zaman üzerinden gerçekleşir. Kronolojik zaman üzerinden gerçekleşmez. Yani firmalar o bunu yaparsa ben bunu yaparım şeklinde düşünür ve bu düşünme süreci onları dengeye taşır.

Dengeye bir kez varıldıktan sonra herhangi bir dışsal şoktan dolayı dengeden uzaklaşma söz konusu olabilir. Zaman içinde mevcut dengeye geri dönmek zorunlu olmadığı gibi dönülmesi durumunda da bunun zaman alması mümkündür. Fakat eğer sonunda tekrar aynı dengeye gelinirse buna dengenin *dinamik istikrarlı* olması denir. Şimdi bu noktada Cournot dengesinin dinamik istikrarlı olmasının analitik koşullarını tanımlayalım.

Herhangi bir oyuncunun, örneğin 1.oyuncunun  $u_1(q_1, q_2)$  fayda fonksiyonundan en iyi tepki fonksiyonunu,  $\partial u_1(q_1, q_2)/\partial q_1 = 0$  örtük fonksiyonel formdan  $q_1$ 'in çekilmesi ile elde edebiliriz, yani kısaca 1.oyuncunun  $q_1 = b_1(q_2)$  şeklinde tepki fonksiyonunu buluruz<sup>8</sup>. Daha sonra örtük fonksiyon teoremini bu fonksiyonel formda kullanarak tepki fonksiyonunun eğimini buluruz:

$$\frac{dq_2}{dq_1} = - \frac{\partial^2 u_1 / \partial^2 q_1}{\partial^2 u_1 / \partial q_1 \partial q_2}. \quad (1.27)$$

(1.27) denklemindeki ifadeyi doğrudan  $q_1 = b_1(q_2)$  tepki fonksiyonunun eğimi şeklinde de yazabiliriz:

$$\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{db_1^{-1}(q_1)}{dq_1} = \frac{dq_2}{db_1(q_2)}.$$

Benzer olarak 2.oyuncunun tepki fonksiyonunun eğimi şu şekilde ifade edilir,

$$\frac{dq_2}{dq_1} = - \frac{\partial^2 u_2 / \partial q_2 \partial q_1}{\partial^2 u_2 / \partial^2 q_2} \text{ veya } \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{db_2(q_1)}{dq_1}.$$

Dinamik istikrar için gerekli koşul, tepki fonksiyonlarının eğimlerinin birbirine

<sup>8</sup>Sürekliliği türevlenebilir  $F(x, y) = 0$  gibi örtük bir fonksiyondan, eğer  $y = f(x)$  gibi bir fonksiyon tanımlanabiliyorsa, örtük fonksiyon teoremi kısaca  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = - \frac{F_x}{F_y}$  şeklinde ifade edilir.

oranlarının aşağıdaki şekilde belirtildiği gibi 1'den küçük olmasıdır:

$$\left| \frac{db_2(q_1)}{dq_1} \right| / \left| \frac{dq_2}{db_1(q_2)} \right| < 1$$

veya

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial q_1 \partial q_2} < \frac{\partial^2 u_1}{\partial^2 q_1} \frac{\partial^2 u_2}{\partial^2 q_2}.$$

Yani kısaca iki en iyi tepki fonksiyonunun eğimleri arasındaki ilişki Cournot den-  
gesinin istikrarlı olup olmadığını belirleyecektir.



## Sorular

1. Aşağıdaki ifadenin doğru mu yanlış mı olduğunu belirtin ve cevabınızı anlatan bir örnek verin: “Statik bir oyunda bir oyuncunun baskın bir stratejisi varsa, oyun sonunda mutlaka mümkün olan en iyi neticeyi alır.”
2. Aşağıdaki sıfır toplamlı olmayan oyunlarda pür stratejilerdeki tüm Nash dengelerini bulun. Bu dengeleri bulurken attığınız adımları betimleyiniz.

a)

|        | sol | sağ |
|--------|-----|-----|
| yukarı | 2,4 | 1,0 |
| aşağı  | 6,5 | 4,2 |

b)

|        | sol | merkez | sağ |
|--------|-----|--------|-----|
| yukarı | 0,1 | 9,0    | 2,3 |
| orta   | 5,9 | 7,3    | 1,7 |
| aşağı  | 7,5 | 10,10  | 3,5 |

c)

|        | sol | merkez | sağ  |
|--------|-----|--------|------|
| kuzey  | 2,3 | 8,2    | 10,6 |
| yukarı | 3,0 | 4,5    | 6,4  |
| aşağı  | 5,4 | 6,1    | 2,5  |
| güney  | 4,5 | 2,3    | 5,2  |

3. Aşağıda verili oyunlar için:

|   | P    | R    |
|---|------|------|
| M | 1, 7 | 0, 0 |
| N | 1, 0 | 2, 1 |

|   | P    | R    | S    |
|---|------|------|------|
| M | 3, 3 | 1, 0 | 6, 1 |
| N | 0, 1 | 0, 0 | 4, 2 |
| O | 1, 6 | 2, 4 | 5, 5 |

- a) Kesin-baskılananların elenmesi (iterative elimination of strictly dominated strategies) yöntemiyle elenemeyen tüm pür stratejileri bulun.
- b) Zayıf-baskılanmayan tüm pür stratejileri bulun.
- c) Tüm Nash dengelerini bulun.
- d) Herhangi bir zayıf-baskılanan strateji içermeyen Nash dengelerini bulun.

4. Aşağıdaki oyunun sadece baskınlık kavramı kullanılarak çözülüp çözülemeyeceğini kontrol edin ve bir Nash dengesi bulun.

|        | sol | merkez | sağ   |
|--------|-----|--------|-------|
| yukarı | 4,3 | 2,7    | 0,4   |
| aşağı  | 5,5 | 5,-1   | -4,-2 |

5. Tavuk oyunu, Cinsiyetler Savaşı ve Geyik Avı oyunlarına birer örnek vererek bu oyunların ardındaki temel mantığı açıklayınız.
6. Aşağıdaki tabloda iki oyuncunun faydaları verilen tam bilgili statik bir oyunda

|    | a1  | a2  | a3  |
|----|-----|-----|-----|
| s1 | 2,2 | 3,0 | 4,0 |
| s2 | 3,3 | 2,0 | 1,0 |
| s3 | 1,3 | 5,5 | 0,2 |
| s4 | 1,1 | 1,1 | 2,3 |

- a) Tüm mahkum stratejileri eleyniz. Bu elemin ardındaki varsayımlar nelerdir?
- b) Bu oyunda makul (rasyonalize edilebilir) stratejiler nelerdir?
- c) Pür strateji Nash dengesi (veya dengeleri) nedir?
7. Yıldız Teknik Üniversitesi İktisat bölümünde oyun teorisi dersi alan bir grup öğrenci birlikte bir lokantaya gidiyorlar. Her öğrenci yiyeceği yemeği aynı anda seçiyor. Fakat faturayı paylaşıyorlar. Herkes eşit oranda katkıda (ödemede) bulunuyor. Eğer yemeğin fiyatı  $p$  ve katkı payı (ödeme)  $x$  ise her birinin fayda fonksiyonu aşağıdaki gibidir

$$U_i = \sqrt{p_i} - x$$

Oyunun Nash dengesini bulun, yani öğrenciler hangi fiyattan yemek yemeyi tercih ederler?

8. İki firmalı bir piyasa olduğunu varsayalım. Bu piyasada, marginal maliyet sabit ve 1. ve 2.firma için sırayla  $c_1 = 12$  ve  $c_2 = 10$ 'dur. Toplam talep miktarı  $Q = q_a + q_b$ 'dir. Talep fonksiyonu ise

$$p = 120 - Q.$$

- a) Eğer firmalar Cournot gibi davranırlarsa her firma için oluşan Nash miktar dengesi nedir? Kâr düzeyi nedir?
- b) Bertrand gibi davranırlarsa her firma için oluşan Nash fiyat dengesi nedir? Kâr düzeyi nedir?

- c) Tekel (kartel) gibi davranırlarsa her firma için oluşan miktar dengesi nedir? Kâr düzeyi nedir?
- d) Yukarıdaki üç farklı piyasa yapısında ortaya çıkan sonuçları karşılaştırınız. Miktar ve fiyat farklılıklarının gerekçesini açıklayınız.

9. Aşağıdaki soruları açıklayınız.

- a) Her baskın strateji dengesinin bir Nash dengesi fakat her Nash dengesinin bir baskın strateji olmadığını örneklerle gösterin.
- b) Her baskın strateji dengesi bir mahkumlar çıkmazı mıdır? Örneklerle gösteriniz.
10. Yaşlı bir kadın caddenin karşısına geçmek için yardım istemektedir. Ona yardım edecek sadece bir kişiye ihtiyaç var; daha fazla kişi de yardımcı olabilir ama bunun kadına fazladan bir katkısı olmayacaktır. Etrafta yardım edebilecek iki kişi var; aynı anda yardım edip etmeme konusunda karar vermeleri gerekiyor. Her biri yaşlı hanımın karşıdan karşıya geçmesinden (kimin yardım ettiğinden bağımsız olarak) 3 birim değerinde keyif alacaktır. Yardımda bulunmanın maliyeti ise herkes için harcanacak zamanın değeri olan 1'e eşit. Bu hikayeye uygun bir oyun kurun. Bu oyunun stratejik gösterimini (matris) ve tüm pür strateji Nash dengelerini bulunuz.
11. Zeynep ve Zeycan'ın 1 litre meyve suyunu paylaşması gerekiyor. Her birinin  $c \in [0, 1]$  litre meyve suyu tüketimiyle elde ettiği (von Neumann-Morgestern) fayda  $u(c) = \sqrt{c}$  olarak veriliyor. İki kişinin de kendi payı için bir öneri yapması gerektiğini varsayın; Zeynep için  $x \in [0, 1]$  ve Zeycan için  $y \in [0, 1]$ . Teklifler aynı anda ve birbirinden bağımsız olarak yapılıyor. İki teklif  $x + y \leq 1$  şartını sağlarsa herkes önerdiği miktarı alıyor. Aksi durumda kimse bir şey almıyor. Bu durumu stratejik bir oyun olarak tanımlayın ve pür-strateji Nash dengelerini bulun.
12. 100 kişiden, oyunu kazanana verilmek üzere masaya birer TL koyması isteniyor. Herkese 0 ile 100 arasındak bir numara seçmesi söyleniyor. Seçtiği numara tüm seçilmiş numaraların ortalamasının 3'te 2'sine en yakın olan kişiye ödül veriliyor. Hangi numarayı seçerdiniz ve neden?
13. Şefikcan ve Erdem iki farklı odada bulunuyorlar. Oynayacakları oyunun kuralları ikisine de açıklanıyor. Her biri şu altı harften birini seçmeleri isteniyor: G, K, L, M, R, V. Eğer ikisi de aynı harfi seçerse aşağıdaki ödülleri alacaklar:

| Harf     | G | K | L | M | R | V |
|----------|---|---|---|---|---|---|
| Şefikcan | 3 | 2 | 6 | 3 | 4 | 5 |
| Erdem    | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Eğer her biri farklı harf seçerse ikisi de 0 alacaktır. İki oyuncu da bu çizelgeyi biliyor ve birbirlerinin bunu bildiklerini de biliyorlar. Bu oyunun tablosunu çizin ve tüm pür strateji Nash dengelerini bulun.

14. İki oyuncu  $x_1 + x_2$  değerindeki bir kamu malını sunmak için efor düzeylerini aynı anda seçiyorlar;  $x_1, x_2 \in [0, 1]$ . Bu seçimlerin sonucu olarak elde edecekleri fayda düzeyleri şu şekilde veriliyor:

$$u_1(x) = (x_1 + x_2)\sqrt{1 - x_1}$$

$$u_2(x) = (x_1 + x_2)\sqrt{1 - x_2}$$

Bu duruma tekabül eden normal-biçimli pür strateji oyununu,  $G = (N, S, u)$ , belirtin. İki oyuncunun da en iyi tepki fonksiyonlarını ve oyundaki pür-strateji Nash dengeleri kümesini bulun. Bulduğunuz kümeyi yatay ekseninde  $x_1$ 'in ve dikey ekseninde  $x_2$ 'nin olduğu bir grafik üzerinde gösterin.

15. Bir sermayedar ve bir işçi birlikte bir iş yapmak istemektedirler. Sermayedar,  $K$  kadar sermaye sağlamakta işçi ise emeğini  $L$  sunmaktadır. Birlikte yaptıkları üretimde  $f(K, L) = \sqrt{KL}$  fonksiyonu ile ifade edilmektedir. Her iki taraf da girdilerini  $K$  ve  $L$ ' lerini aynı anda sunmaktadır. Sermayenin birim maliyeti  $r > 1/4$  ve emeğin birim maliyeti ise  $w > 1/4$  kadardır. İşçi  $\bar{L}$  gibi bir miktardan daha fazlasını sunamamaktadır. Sermayedar ve işçi çıktıyı eşit oranda eşit oranda paylaşmaktadır. Bu durumda makul stratejileri bulun.
16. 30 liralık ödülün olduğu bir oyun düşünelim. 3 tane yarışmacı var; A, B ve C. Her birinin 3 seçeneği var: 15 liralık bilet almak, 30 liralık bilet almak veya hiç bilet almamak. Bu seçimi aynı anda ve birbirlerinden bağımsız olarak yapıyorlar. Bunu takiben verilen kararlara göre oyunun organizatörü ödülü veriyor. Hiç bilet alınmamışsa doğal olarak ödül de verilmemektedir. Aksi durumda yani bilet alındığında ödül en pahalı bileti alana, eğer sadece bir kişiye fakat eğer en pahalı bileti alan birden çok kişi ise bu durumda ödül bunlar arasında paylaştırılıyor. Bu oyunu stratejik biçimde gösterin ve tüm pür strateji Nash dengelerini bulun.
17. Tüketiciler tekdüze şekilde alışveriş caddesinde 1 km boyunca dağılmıştır. Dondurma fiyatları regüle edilmiş ve tüketiciler yürümeyi sevmediklerinden kendilerine en yakın dondurmacıdan alışveriş yapmaktadırlar. Dondurmacılar caddedeki dükkanlarının yerlerini eşanlı olarak seçmektedir. Eğer aynı noktayı seçerlerse aynı miktarda satış yapacaklardır.

- a) 2 tane dondurmacı olduğunu varsayınız. Oyunun tüm pür-strateji Nash dengelerini bulunuz. Oyuncuların hareket kümesi (yol üzerinde ala-

cakları pozisyonlar)  $s_i = [0, 1]$  şeklindedir ve kazanç fonksiyonları ise aşağıdaki gibidir:

$$u_i(s_i, s_j) = \begin{cases} \frac{s_i + s_j}{2}, & \text{eğer } s_i < s_j \\ \frac{1}{2}, & \text{eğer } s_i = s_j \\ 1 - \frac{s_i + s_j}{2}, & \text{eğer } s_i > s_j \end{cases}$$

b) 3 tane dondurmacı olduğunda hiçbir pür-strateji dengesi olmadığını gösteriniz.

18. Bir köydeki çiftçilerin sayısını  $I$  olarak alalım. Bu çiftçilerin her birinin köyün ortak arazisinde inek otlatma hakkı vardır. Bir ineğin üreteceği süt miktarı çayırda otlayan toplam inek sayısı olan  $N$ 'e bağlıdır. Belli bir sayıda ineği olan ( $n_i$ ) bir çiftçinin elde edeceği toplam sütün miktarı şöyle ifade edilir:  $n_i v(N)$ . Ayrıca eğer inek miktarı kritik eşiği geçerse verim sıfıra düşer:  $N > N'$  için  $v(N) = 0$ . Burada  $v$  fonksiyonunun türevleri şöyledir:  $v' < 0$  ve  $v'' \leq 0$ . Her bir ineğin maliyeti  $c$  ve inek sayısı kusursuz bir şekilde bölünebilir olsun ve  $v(0) > c$  olduğunu varsayalım. Çiftçiler eş zamanlı olarak kaç tane inek satın alacaklarına karar verecekler ve satın alınan inekler çayırda otlatılacaktır.

a) Bu oyunu stratejik biçimli olarak yazın

b) Oyunun dengesini bulun ve sosyal olarak en uygun durum (social optimum) ile karşılaştırın.

19. Kitapta gördüğünüz hotelling modelinin değiştirilmiş bir versiyonunu düşünün. Bu sefer  $x$  noktasında bulunan bir müşterinin fayda düzeyi dondurmasını A'dan alırsa  $v - p_A - k(x - x_A)^2$  ve B'den alırsa  $v - p_B - k(x - x_B)^2$  olarak veriliyor, müşteriler ikinci dondurmadan negatif fayda elde ediyorlar. Dondurmacılar üretici şirkete dondurma başına  $c < 1$  lira ödüyor.

a) Satıcılar yerlerini aynı anda seçiyor. Bu etkileşimi stratejik bir oyun olarak tanımlayın ve Nash dengeleri kümesini bulun. Denge sonuçlarını tüketici faydaları ve satıcı kârları bakımından değerlendirin.

b) Bu sefer dondurma fiyatı düzenlemeye tabi ve belirli bir  $p > c$  değeri olarak belirleniyor.  $p + k < v$  olarak kabul edin. Bu durumda yerleri  $[0, 1]$  aralığında homojen dağılan müşterilerden her birinin satıcıların yerleri ne olursa olsun bir dondurma alacağını doğrulayın. Satıcıların yerlerini toplumsal refahı (tüketici faydaları ve satıcı kârlarının toplamı) maksimize edecek şekilde belirleyin (toplumsal olarak optimal noktaları bulun).

20. 1.oyuncu H ve L kartlarından birini eşit olasılıkla almaktadır. 2.oyuncu kartı göremez. 1.oyuncu kartının L olduğunu açıklar. Bu durumda 2.oyuncuya 1 TL ödeme yapmak zorundadır. Ya da 1.oyuncu kartının H olduğunu açıklar,

bu durumda 2.oyuncu 1.oyuncunun doğru söylediğini kabul eder ya da kartı görmekte ısrarcı olur. 2.oyuncu 1.oyuncunun doğru söylediğini kabul ederse, 1 TL ödemek zorundadır. Eğer kartı görmek isterse ve kart L ise 1.oyuncu 2.oyuncuya 4 TL öder, kart H ise 2.oyuncu 1.oyuncuya 4 TL öder. Her oyuncunun strateji kümelerini tanımlayınız ve bu oyunun Nash dengesini bulunuz.

21. Deterjan piyasasında 2 firma vardır. Her iki firma da yeni ürün geliştirmek için Ar-Ge yatırımı yapabilmektedir. Bu yatırımın maliyeti 1 milyon TL'dir. Her 2 firmada ürünlerine kutu başına 2 TL'den satmaktadır. Deterjanlara olan toplam talep 4 milyon TL'dir. Üretim maliyeti kutu başına 1 TL'dir. Eğer sadece tek firma Ar-Ge yatırımı yaparsa pazarın %70'ini alır, aksi durumda Pazar payını paylaşırlar.

- a) Kazanç matrisini oluşturunuz. Nash dengesini bulunuz. Oyunda baskın stratejiye sahip midir? Pareto optimal sonuçlar nedir?
- b) Bir firma piyasaya yeni formüllü bir deterjan sürerse, toplam talebin 5 milyon kutuya yükseleceğini varsayın. Kazanç matrisini oluşturunuz. Nash dengesini bulunuz. Oyunda oyunda baskın stratejiye sahip midir? Pareto optimal sonuçlar nedir?

22. Bir malın piyasa talebi aşağıdaki gibidir:

$$P(q) = \begin{cases} 140 - q, & \text{eğer } q < 140 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

- a) Firmaların tepki fonksiyonlarını tanımlayınız.
- b) Cournot dengesini bulunuz.
- c) Cournot dengesinin sonuçlarını, tam rekabet piyasası ve tek el sonuçları ile karşılaştırınız.
- d) Firmalar için bir diğer seçenek ise tek el çıktının yarısını üretmektir. Bu seçenek firmalar için daha iyi midir? Bunun neden Cournot dengesi olmadığını açıklayınız?
23. Üç oyunculu bir oyunda, 1.oyuncu satırı, 2.oyuncu sütunu, 3.oyuncu ise matrisi seçmektedir. Bu oyunun Nash dengesi nedir?

|   | L         | R         |
|---|-----------|-----------|
| T | (6, 3, 2) | (4, 8, 6) |
| B | (2, 3, 9) | (4, 2, 2) |

ve

|   | L         | R         |
|---|-----------|-----------|
| T | (7, 2, 2) | (0, 0, 2) |
| B | (9, 4, 8) | (0, 0, 0) |

24. Bir malın piyasa talebi aşağıdaki gibidir:

$$P(q) = \begin{cases} 100 - q, & \text{eğer } q < 100 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Piyasada 2 firma olduğunu varsayınız, ve ortalama değişken maliyet  $c = 50$  TL'dir. Firmalar fiyat üzerinde rekabet etmektedir.

- a) Firmaların tepki fonksiyonlarını tanımlayınız.
- b) Bertrand dengesini bulunuz.
- c) Eğer firma sayısı 3 olsaydı cevabınız değişir miydi? Neden?

25. Ters talep fonsiyonun  $P(q) = a - q$  olduğu bir Cournot duopol piyasasında firmaların asimetric marjinal maliyetleri 1.firma için  $c_1$  ve 2.firma için de  $c_2$  şeklindedir. Eğer her firma için  $0 < c_i < a/2$  koşulu sağlanırsa Nash dengesi nedir? Eğer  $c_1 < c_2 < a$  ise Nash dengesi ne olur?
26. Aşağıdaki tabloda iki oyuncu arasında oynanan statik bir oyunun fayda matrisi verilmektedir. Fakat bazı değerler konusunda belirsizlik söz konusudur. Bu belirsizlik  $x$  ile gösterilmektedir.

|   | L       | C       | R    |
|---|---------|---------|------|
| T | 2, 0    | 1-x, 1  | 4, 2 |
| M | 3, 4    | 1, 2-2x | 2, 3 |
| B | 1+2x, 3 | 0, 2    | 3, 0 |

- a) Oyunda B hareketinin kesin mahkum olmasını sağlayan  $x$  aralığını belirtiniz.
  - b) Mahkum stratejilerin sürekli eliminasyonu sonucunda 1. oyuncunun (T, M) ve 2. oyuncunun (L,R) stratejilerine sahip olması için  $x$  ne olmalıdır?
27. Eğer bir oyun kesin mahkum stratejilerin tekrarlı olarak elenmesiyle çözülüyorsa, bu oyunun sadece bir tane Nash dengesi olduğunu kanıtlayınız.
28.  $n$  tane çiftçinin her biri maliyetsiz şekilde istedikleri kadar buğday üretebilmektedirler. Buna göre toplam üretim  $q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$  olmaktadır. Buğday  $p$  fiyatından satıldığında toplam talep ise  $p = e^{-q}$  olmaktadır.
- a) 1 birim buğday üretmenin tüm kâr-maksimizasyonu yapan çiftçilerin stratejilerini domine ettiğini gösteriniz. Bu stratejinin çiftçiye  $e^n$  kadar kâr getirdiğini gösteriniz.
  - b) Her çiftçinin  $1/n$  kadar buğday üretmesinin çiftçiler arasında olabilecek en iyi anlaşma olduğunu anlatınız. Bu durumda çiftçi başına kârın  $1/en$  olduğunu gösteriniz.
  - c)  $xe^{-x}$  'in  $x = 1$  durumunda en büyük olduğunu gösteriniz. Çiftçilerin  $1/n$  kadar buğday üretme anlaşmasına sadık kaldıklarında daha fazla kâr edeceğini gösteriniz.

- d) Bu durumun kamusal mülkiyet trajedisine örnek olup olmadığını tartışınız. Bu tür n-oyunculu oyunlar neden mahkumlar çıkmazı oyununa örnektir?
29. Talep eğrisinin  $Q = D(p)$ ,  $D(p)$  'nin negatif eğimli olduğu ve en düşük fiyatın  $p$  olduğu 2 firmadan oluşan bir piyasa olduğunu varsayınız. En düşük fiyatı veren firma tüm talebi alacaktır. Fiyatlar eşit ise toplam talebi paylaşacaklardır. Firmaların üretim maliyetleri yoktur.
- a) Rakip firmanın monopol  $p_m$  fiyatından daha yüksek fiyatlandırma yaptığında, diğer firma için en iyi cevabın monopol fiyatından satış yapması olduğunu gösteriniz.
- b) Rakip firmanın  $p > 1$  fiyatından ya da monopol  $p_m$  fiyatından daha düşük fiyatlandırma yaptığında, diğer firma için en iyi cevabın  $p$  fiyatından daha düşük fiyatta satış yapması olduğunu gösteriniz.
- c) Tek Nash dengesinin her iki firmanın da  $p = 1$  fiyatlandırması yapması olduğunu gösteriniz.
- d) Piyasa da 3 firma olursa Nash dengesi oluşur mu?  $n$  firma olduğu durum da Nash dengesi oluşur mu?
30. Güzel bir şehirde iki gıda firması bulunmaktadır; ekmek üreten 1. firma ve peynir üreten 2. firma. Bir somun ekmeğin maliyeti 1 lira iken bir kilo peynirin maliyeti 2 liradır. 1.firmanın ekmek başına fiyatı  $P_1$  ve 2.firmanın bir kilo peynir için fiyatı  $P_2$  ise sırasıyla haftalık satışları  $Q_1$  bin ekmek ve  $Q_2$  bin kilo peynir aşağıdaki denklemlere göre belirleniyor:

$$Q_1 = 10 - P_1 - 0.5P_2, \quad Q_2 = 12 - 0.5P_1 - P_2$$

- a) Bu iki firmanın en iyi tepki fonksiyonlarını bulun, en iyi tepki eğrilerini çizin ve oyundaki Nash dengesi fiyatlarını bulun.
- b) İki firmanın ortak hareket ettiğini ve müşterek kârı maksimize etmek için fiyatları beraber belirlediğini varsayalım. Müşterek kârı maksimize eden fiyatları bulun.
- c) Nash dengesi fiyatlarıyla toplam kârı maksimize eden fiyatlar arasındaki farkın mantıksal bir açılmasını yapın. Müşterek kâr maksimizasyonu neden bir Nash dengesi değildir?
- d) Bu soruda ekmek ve peynir iki tamamlayıcı maldır. Eğer elimizde ikame mallar olsaydı en iyi tepki fonksiyonları ve müşterek kârı maksimize eden fiyatlar nasıl değişirdi?

---

### Karma Stratejiler

---

#### 2.1 Giriş

Şu ana kadar pür strateji dediğimiz anlaşılması daha kolay ve gerçek hayatta da sıkça karşılaşılan stratejilerle analiz yaptık. Fakat eğer oyuncuların pür stratejiler üzerinde belirli bir olasılıkla oynamalarına imkan verirse, karma strateji dediğimiz yeni bir kavramla karşılaşırız. Karma stratejide bir oyuncu sonuçta kendi pür stratejilerinden herhangi birini seçer, fakat hangisinin oynanacağı belirli bir olasılıkla belirlenir. Pür strateji oyuncuya hangi hareketi seçeceğini belirten bir kural iken, karma strateji ona bir hareketi hangi olasılıkla seçmesi gerektiğini söyleyen bir kuraldır.

Daha önce gördüğümüz Eşleşen Paralar oyununu hatırlayalım. Bu oyunun bir pür strateji Nash dengesi olmadığını görmüştük. Fakat sezgisel olarak yazı ve tura arasında bir tür rassallaştırmanın da iyi bir strateji olabileceği düşünülebilir. Bu da tam anlamıyla bir karma stratejidir. Dolayısıyla dengenin varlığı problemi aslında kendimizi pür stratejilerle sınırlandırdığımızdan dolayı ortaya çıkan bir durumdur. Karma stratejinin kullanılması dengeyi garanti altına alır. Oluşan yeni dengeye karma strateji Nash dengesi denir.

Karma stratejilerin gerçekte tam olarak ne olduğu, niçin kullanıldığı ve nasıl yorumlanması gerektiği oldukça tartışmalı bir konudur. En fazla kabul gören yaklaşıma göre, bir oyuncunun pür stratejilerini rassallaştırmasındaki temel mantık, kendi stratejileri hakkında diğer oyuncuların kafalarında belirsizlik yaratmaktır. Yani bir oyunda bir oyuncu bazen sağ bazen sol oynayarak diğer oyuncunun kendi davranışını öngörmesini engellemeye çalışır, dolayısıyla belirsizlik yaratır. Kendisi hangi hareketi oynayacağını bilir fakat rakibi açısından bir belirsizlik söz konusudur. Oyuncu bu belirsizlikten fayda sağlayabilir. Havayolu şirketlerinin ne kadar boş koltuğa sahip olduklarını söylemede isteksiz olmalarının temel sebebi, hem düzenli

yolcuların boş koltuk sayısına göre hareket etmelerini engellemek hem de son anda yolculuğa karar veren yolcuları teşvik etmek istemeleri de yine benzer bir mantıkla anlaşılabilir.

Bu bölümde karma stratejileri tanıtmadan önce belirsizlik altında bireylerin nasıl karar verdiklerini ve beklenen fayda kavramını inceledik. Karma stratejilerde kesin baskınlık ve Nash dengesi kavramlarını sırasıyla inceledikten sonra belirli oyun kategorilerinde ve oyuncuların sürekli seçim değişkenlerine sahip olduklarında oluşan karma strateji dengesini inceledik. Daha sonra karma stratejilerde dengenin varlığını gösterdik. Son olarak karma stratejilerde kullanılan kavramlara ihtiyaç duyduğumuz için karma stratejiler bölümüne koymayı tercih ettiğimiz bağdaşık dengeyi inceledik.

## 2.2 Beklenen Fayda Kavramı

Şimdiye kadar gördüğümüz oyunlar deterministik oyunlardı. Bu gibi oyunlarda oyuncular strateji profillerini kesin olarak bilirler. Bu yüzden bireylerin tercihlerini deterministik fayda fonksiyonu,  $u$ , ile gösterebiliriz ve bunu bireyin kendi tercihleri üzerinde sıralama yapması için kullanabiliriz. Örneğin hareket kümesindeki  $a$  ve  $b$  gibi iki hareket arasında bireyin tercihi aşağıdaki gibiyse,

$$u(a) > u(b),$$

birey  $a$  hareketini  $b$  hareketine tercih ediyor demektir, yani  $a \succeq b$ .

Fakat çoğu durumda burada varsayıldığının tersine oyun sonunda elde edeceğimiz faydayı bilemeyebiliriz. Hayatın her alanında hareket ettikten sonra sonucunu tam olarak bilemediğiniz çok sayıda durum söz konusu olabilir. Belirsizliğin, belirliliğin tersine oldukça yaygın bir durum olmasından dolayı kitabın bu bölümünde ve ilerleyen bölümlerinde sıkça kullanacağımız belirsizlik kavramını ve buradan türeyen bir davranış varsayımı olan beklenen fayda hipotezini tanıtacağız. Bu hipotez bize belirsizliğin olduğu oyunlarda dengenin nasıl bulunacağı konusunda oldukça yardımcı olacaktır.

Bazen hareketlerin kendileri belirli sonuçların elde edilmesi için yeterli değildir. Çünkü bazı şeyler insanların kontrolleri dışındadır. Zamanın herhangi bir anında olası çok sayıda durum söz konusu olabilir ve bunlardan sadece biri gerçekleşir. Bu yüzden insanlar şimdi aldıkları bir kararın sonuçlarını yarın kestiremezler. Yarın hangi durumun gerçekleşeceğini Doğa'nın (Doğa, oyun teorisinde bir oyuncu gibi düşünülür) belirlediğini ve bildiğini varsayıyoruz. İnsanlar ise hangi durumun gerçekleşeceğini bilmeseler de onların olası tüm durumların rassal bir şekilde belirli bir olasılık dağılımına göre gerçekleştiğini bildiklerini varsayıyoruz.

Eğer  $A$  olası hareketler kümesi,  $D$  olası durumlar kümesi ve  $C$  olası sonuçlar kümesi ise, herhangi bir  $a \in A$  hareketi ve herhangi bir  $d \in D$  durumundan oluşan kombinasyon belirli bir  $c \in C$  sonucu üretir:

$$(d, a) \rightarrow c = f(d, a).$$

Eğer bir durumu tam anlamıyla öngörebiliyorsak bu durum kesinlik içerir fakat eğer tam anlamıyla öngöremiyorsak belirsizlik söz konusudur. Bu durumda olası tüm durumlara dair bir kanaat oluşturmamız gerekir. Yani  $D$  kümesinin her elemanı için bir olasılık tanımlamamız gerekir. Oyuncular beklentilerini durumlar üzerine tanımlanmış olasılık dağılımlarına göre belirleyecektir.

Bir birey sonuçlarını tam olarak öngöremediği bir durumla karşılaştığında nasıl karar verir? John von Neumann ve Oskar Morgenstern 1944 yılında yazdıkları “Theory of Games and Economic Behavior” adlı kitapta bunun cevabını verdiler: Bireyler beklenen faydalarını maksimize edecek şekilde davranırlar. Bu varsayıma *beklenen fayda hipotezi* denir.

Rassal durumlarda nasıl karar verildiğine geçmeden önce, *lotari* kavramını tanıtalım. Genel anlamda lotari bir şans oyunu olarak bilinir, üzerinde belirli sayılar yazılan ve seçilen bir sayının elinizdeki ile aynı olması durumunda kazandığınız bir şans oyunu. Fakat lotari aslında belirli durumları ifade etmek için kullanılan önemli bir kavramdır çünkü herhangi bir rastgele seçimle gerçekleşen olayları tanımlamak için kullanılabilir. Örneğin herhangi bir mecburi hizmetin ülkenin neresinde yapılacağını belirleyen kura çekimleri, konser biletleri talihlilerini belirlemek için yapılan çekilişler gibi çok sayıda alana uzatılabilecek bir mantığa sahiptir. Kısaca herhangi bir belirsizlik durumunu bir tür lotari olarak düşünebiliriz. Bu yüzden rasyonel bir bireyin farklı kesin-olmayan sonuçları nasıl sıraladığını anlamak için farklı lotari-leri nasıl sıraladığını anlamak gerekir.

Olası  $N$  tane sonucun olduğu bir durumu tanımlayan sonuçlar kümesi  $C = \{C_1, \dots, C_N\}$  verildiğinde,  $C$  üzerine tanımlanan bir *basit lotariyi*  $L$  ile gösteriyoruz. Basit lotari  $C$  sonuçlar kümesindeki elemanların sırasıyla  $\{p_1, \dots, p_N\}$  olasılıkları ile belirlendiği rassal bir seçimi tanımlar. Burada örneğin  $p_i$  olasılığı  $C_i$  sonucunun gerçekleşme olasılığını gösterir. Bu olasılıklar negatif olmayan değerler alırlar ve toplamları bire eşittir, yani  $p_i \geq 0$  ve  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ . Basit lotari şöyle de gösterilir:  $L = (C_1 : p_1, C_2 : p_2, \dots, C_N : p_N)$ .

Örneğin size şöyle bir basit lotari önerilsin: zar atmayı kabul ederseniz 2 lira kesin ödeyeceksiniz fakat zarı attıktan sonra üzerindeki her nokta için bir lira alacaksınız. Zarı attınız ve 5 geldi: yani 3 lira kazançlısınız fakat eğer 1 gelirse 1 lira kaybınız var demektir. Bu durumda sonuç kümesi,  $C = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ . Eğer zar adılse her olayın gerçekleşme olasılığı  $1/6$  olacağından, lotariyi şöyle yazabiliriz:  $L = (-1 : \frac{1}{6}, 0 : \frac{1}{6}, 1 : \frac{1}{6}, 2 : \frac{1}{6}, 3 : \frac{1}{6}, 4 : \frac{1}{6})$ . Benzer olarak, kesin bir durumu bile lotari ile ifade edebiliriz, örneğin 10 liralık aldığınız bir hediye için:  $(10 : 1)$ .

Şimdi basit lotariyi formel olarak tanımlayalım.

**Tanım 2.1** *Herhangi bir basit lotari,  $L$ , bir olasılık listesi olarak tanımlanır, yani  $L = (p_1, \dots, p_N)$ ,  $p_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, N$  ve  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ , burada  $p_i$ ,  $i$  sonucunun gerçekleşme olasılığıdır.*

Diğer yandan *bileşik lotari* diye nitelendirdiğimiz diğer bir lotari türü vardır. Bileşik lotaride sonuçların bazılarının kendisi basit lotaridir. Bileşik lotari iki aşamalıdır. İlk aşamada bir lotari çekilir, çıkan sonuçlardan bazıları da basit bir

lotari olabilir, yani bu lotari içinde de sonuçlar belirli bir olasılığa bağlı olarak gerçekleşebilir. Lotari içinde lotari söz konusudur. Örneğin bileşik lotariyi, birinin bir ödülü kazanmak için önce yarışmaya katılacaklar arasına seçilmesi ve sonrasında da tekrardan basit bir lotari ile kazanma imkanını tanımlamak için kullanılabiliriz.

Bileşik lotarinin ilk aşaması hangi lotarinin,  $\{L_1, \dots, L_K\}$ , oynanacağını belirlemektir. Eğer bileşik lotarinin ilk aşamasında seçilen lotari basit bir lotari ise, ikinci aşamasında sonuç belirlenir ve lotari sona erer. Fakat eğer ikinci aşamada seçilen lotari de bileşik ise, ikinci aşama üçüncü lotarinin seçimi ile sonuçlanır. Üçüncü lotari de üçüncü aşamada oynanır ve böyle devam eder gider.

Bileşik lotariler içindeki  $k = 1, \dots, K$  tane lotarinin her birinin belirli bir seçilme olasılığı olsun, bunu da  $\alpha_k$  ile gösterelim. Bileşik lotarideki her basit lotarinin içindeki sonuçların seçilme olasılığı ise,  $(p_1^k, \dots, p_N^k)$ ,  $k = 1, \dots, K$ , şeklinde gösterilsin. Böylece bileşik lotarinin formel tanımını verebiliriz:

**Tanım 2.2**  $K$  tane basit lotari olsun ve  $L_k = (p_1^k, \dots, p_N^k)$  herhangi bir  $k$  lotarisini göstereyin.  $k$  basit lotarisinin seçilme olasılığı,  $\alpha_k > 0$ , verildiğinde,  $(L_1, \dots, L_K; \alpha_1, \dots, \alpha_K)$  bileşik lotarisi tüm basit lotarileri içeren bir lotaridir.

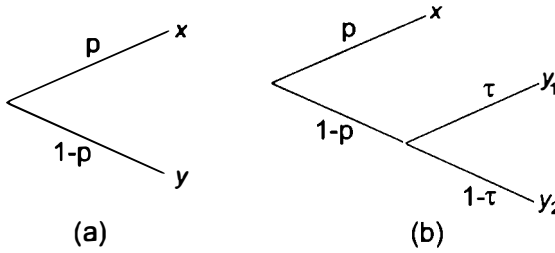
Herhangi bir bileşik lotarinin,  $(L_1, \dots, L_K; \alpha_1, \dots, \alpha_K)$ , ona karşılık gelen indirgenmiş lotari diyebileceğimiz bir basit lotarisini,  $L = (p_1, \dots, p_N)$  hesaplayabiliriz, yani basit lotarideki olasılıkların aynısını türetebiliriz:  $p_i = \alpha_1 p_i^1 + \dots + \alpha_K p_i^K$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Herhangi bir bileşik lotarinin indirgenmiş lotarisi  $L = \alpha_1 L_1 + \dots + \alpha_K L_K$  vektör toplamı ile de bulunabilir. Basit ve bileşik lotari ilişkisini anlamayı kolaylaştırmak için daha somut bir örnek verelim.

### Örnek 2.1

$L = (x, y, p)$  gibi basit bir lotarimiz olsun, burada  $x$  sonucu  $p$  olasılıkla,  $y$  sonucu da  $1 - p$  olasılıkla gerçekleşsin. Şimdi de bileşik bir lotari tanımlayalım. Bu sefer  $x$  sonucunun gerçekleşme olasılığı yine  $p$  olsun fakat  $y$  doğrudan bir sonuç olmaktan çok basit bir lotari olsun. Bu lotarinin sonuçları da sırasıyla  $y_1$  ve  $y_2$  şeklindedir,  $y_1$ 'in gerçekleşme olasılığı  $\tau$  ve  $y_2$ 'nin gerçekleşme olasılığı ise  $1 - \tau$  şeklindedir, yani  $L = (x, (y_1, y_2, \tau), p)$ . Bu örnekte indirgenmiş lotari ise  $L = (p, (1 - p)\tau, (1 - p)(1 - \tau))$  olarak ifade edilir. Şekil 2.1(a) ve (b) sırasıyla basit ve bileşik lotarileri göstermektedir.

Bir karar alıcı nihai sonuçlar üzerine tanımlanmış indirgenmiş lotariye göre karar vereceğinden biz de sadece basit lotarilerle (indirgenmiş lotari de bir basit lotaridir çünkü) ilgileneceğiz.

Sonuçlar üzerine tanımlanan alternatif lotariler kümesi,  $\mathcal{L}$ , yani sonuçlar kümesi üzerine tanımlanmış tüm basit lotariler kümesini alalım. Rasyonel bir bireyin  $\mathcal{L}$  üzerine tam ve geçişli tercihleri sahip olduğunu düşünelim. Bu bize herhangi iki lotariyi karşılaştırma imkanı verir. Tercihlerin sıralaması tamdır: Eğer sonuçlar kümesindeki  $C_1$  ve  $C_2$  gibi iki sonuç arasında  $C_1$  sonucu  $C_2$  sonucuna ( $C_1 \succ C_2$ )



Şekil 2.1 (a) Basit lotari (b) Bileşik lotari

veya  $C_2$  sonucu  $C_1$  sonucuna tercih edilebilir ( $C_2 \succ C_1$ ) veya  $C_1$  ve  $C_2$  sonuçları arasında kayıtsız olabilir ( $C_1 \sim C_2$ ). Yani birey sonuçlar üzerindeki tercihini net olarak ifade etmelidir. Tercih sıralaması geçişlidir: Eğer  $C_1, C_2$ 'e ve  $C_2, C_3$ 'e tercih ediliyorsa dolayısıyla  $C_1, C_3$ 'e tercih edilir yani  $C_1 \succ C_2$  ve  $C_2 \succ C_3$  ise  $C_1 \succ C_3$ . Bu özellik bireyin tercihlerini izlenebilir kılar, tercihlerinde bir tutarsızlığın söz konusu olmamasını garanti eder.

Tercihlerin bu iki özelliği bize beklenen fayda hipotezi için gerekli ilk aksiyomu verir, bu *tutarlılık aksiyomudur*.

**Birinci Aksiyom (Tutarlılık).** Sınırlı sonuçlar kümesi,  $C$ , için tanımlanan  $\mathcal{L}$  lotariler kümesinin elemanları üzerinden yapılan tam ve geçişli tercih sıralaması tutarlıdır.

Tutarlılık aksiyomu  $C$  sonuçlar kümesinin sonuçlarını en kötünden en iyiye sıralama imkanı verir. Yani aslında lotariler üzerine yapılan tercih, sonuçlar üzerine tercih yapıldığını ima eder:  $C_1$  sonucunun  $C_2$  sonucuna tercih edilmesi demek  $L_{C_1}$  lotarisinin  $L_{C_2}$  lotarisine tercih edilmesi demektir. Eğer lotariler üzerindeki tercih sıralaması tam ve geçişli ise,  $C$ 'deki sonuçların benzer özelliklere sahip olduğunu görebiliriz.  $C$  sonuç kümesi sınırlı olduğundan dolayı,  $C$  kümesinin her zaman en iyi ve en kötü değerleri vardır. Bunları sırasıyla  $C_y$  ve  $C_k$  ile gösterelim. Örneğin  $C = \{1.5, 1, -4, -7\}$  sonuç kümesinde en kötü değer  $C_k = -7$  iken en iyi değer  $C_y = 1.5$ 'dir.

Şimdi sadece en iyi ve en kötü sonuçlardan oluşan özel bir lotari tanımlayalım:  $L(p) = (C_y : p, C_k : 1 - p)$ . Eğer  $p$  olasılığını 0'dan 1'e artırırsak  $C_y$  sonucu daha muhtemel hale gelir ve tersine  $C_k$  daha az muhtemel hale gelir. Sonuç olarak,  $p$  arttıkça  $L(p)$  lotarisi daha istenilir hale gelir. Bu da beklenen değer hipotezinin ikinci aksiyomunu verir, *monotonluk*.

**İkinci Aksiyom (Monotonluk).** Eğer  $p > q$  ise,  $L(p)$  lotarisi  $L(q)$  lotarisine tercih edilir.

Beklenen fayda teoremi için ihtiyaç duyduğumuz diğer aksiyom ise *süreklilik aksiyomudur*.

**Üçüncü Aksiyom (Süreklilik).** Eğer herhangi bir  $L, L', L'' \in \mathcal{L}$  için aşağıdaki durum söz konusu ise basit lotariler kümesi,  $\mathcal{L}$ , üzerine yapılan  $\succeq$  tercih sıralaması

süreklidir:

$$\begin{aligned} \{\alpha \in [0, 1] : \alpha L + (1 - \alpha)L' \succeq L''\} &\subset [0, 1], \\ \{\alpha \in [0, 1] : L'' \succeq \alpha L + (1 - \alpha)L'\} &\subset [0, 1]. \end{aligned}$$

Bu aksiyoma göre olasılıklardaki küçük değişiklikler iki lotari arasındaki sıralamayı çok etkilemeyecektir. Örneğin araba ile seyahat evde oturmaya tercih ediliyorsa, yeterince küçük bir ölüm kazasının varlığı dahil edildiğinde bile hala araba ile seyahat, evde oturmaya tercih edilir.

Dördüncü aksiyom *bağımsızlık aksiyomudur*. Basitçe iki lotari arasındaki tercih ilişkisini üçüncü bir lotarinin varlığının etkilemediğini ifade eden aksiyomdur.

*Dördüncü Aksiyom (Bağımsızlık).* Eğer tüm  $L, L', L'' \in \mathcal{L}$  için ve  $\alpha \in (0, 1)$  için aşağıdaki durum söz konusu ise basit lotariler kümesi,  $\mathcal{L}$ , üzerine yapılan  $\succeq$  tercih sıralaması bağımsızdır;

$$L \succeq L' \text{ ise } \alpha L + (1 - \alpha)L'' \succeq \alpha L' + (1 - \alpha)L''.$$

Kısaca eğer iki lotariyi üçüncü bir lotari ile karmalaştırırsak tercihler değişmez.

Süreklilik aksiyomu  $\succeq$  tercih yapısını yansıtan bir fayda fonksiyonunun varlığını ima eder:  $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ , yani eğer  $U(L) \geq U(L')$  ise,  $L \succeq L'$  olduğunu ima eder. Bağımsızlık aksiyomu ise  $U(\cdot)$  fayda fonksiyonu üzerine daha fazla yapı empoze etmemize imkan verir. Bu da belirsizlik altında karar vermenin temelini oluşturur. Bağımsızlık aksiyomu bize tercihlerin bir fayda fonksiyonu formunda tanımlanmasına imkan verir. Şimdi beklenen fayda tanımını verelim.

**Tanım 2.3** Eğer  $N$  tane sonucun her birine atfedilen  $u = (u_1, \dots, u_N)$  gibi fayda değerleri varsa ve bu her sonuç için olasılık atfeden  $L = (p_1, \dots, p_N) \in \mathcal{L}$  gibi bir basit lotari söz konusu ise,  $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$  fayda fonksiyonu, beklenen fayda formuna (von Neumann-Morgenstern beklenen fayda fonksiyonu, kısaca vNM fonksiyonu) sahiptir denir ve şöyle ifade edilir:

$$U(L) = p_1 u_1 + \dots + p_N u_N = \sum_{i=1}^N p_i u_i. \quad (2.1)$$

Yukarıda (2.1)'de ifade edilen  $U(L)$  fonksiyonu beklenen fayda fonksiyonudur. Her olası durumda elde edilen faydaların,  $u_i$ , ona karşılık gelen olasılıkları,  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , ile çarpılması ve sonra hepsinin toplanması ile bulunur. Beklenen fayda fonksiyonunu  $U(L) = E(u)$  olarak da gösterebiliriz, burada  $E$  beklenen operatörüdür. Örneğin havaya atılan bir paranın yazı gelmesi durumunda 2 lira kazandığınızı, tura gelmesi durumunda ise 1 lira kaybettiğinizi düşünelim, bu oyunda beklenen fayda fonksiyonunuz  $U(\cdot) = E(u) = \frac{1}{2}u(2) - \frac{1}{2}u(1)$  olarak ifade edilir.

Beklenen fayda fonksiyonu iki yararlı özelliğe sahiptir. Bunlardan biri lineerlik (doğrusallık) diye adlandırdığımız özellik diğeri de kardinallik özelliğidir. Fayda fonksiyonun lineerliği aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

**Tanım 2.4** Bir fayda fonksiyonu,  $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ , şu özelliği sağlarsa lineerdir:

$$U\left(\sum_{k=1}^K \alpha_k L_k\right) = \sum_{k=1}^K \alpha_k U(L_k),$$

bu koşul herhangi  $K$  lotarisi için geçerlidir, burada  $L_k \in \mathcal{L}$ ,  $k = 1, \dots, K$  ve  $(\alpha_1, \dots, \alpha_K) \geq 0$ ,  $\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1$ .

Lineerlik kısaca bir bileşik lotarinin faydası basit lotarilerin beklenen değeri olarak ifade edilebilir demektir. Diğer yandan, eğer beklenen fayda formu, monoton artan lineer dönüşümlerle korunursa buna kardinallik diyoruz.

**Tanım 2.5**  $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu,  $\mathcal{L}$  üzerine tanımlanan  $\succeq$  tercih ilişkisini gösteren bir vNM beklenen fayda fonksiyonu olsun. Bu durumda eğer her  $L \in \mathcal{L}$  için  $V(L) = \beta U(L) + \gamma$  durumunu sağlayacak  $\beta > 0$  ve  $\gamma$  parametreleri varsa,  $V : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $\succeq$  tercih ilişkisi için tanımlanan diğer bir vNM beklenen fayda fonksiyonudur.

Basitçe yukarıdaki tanım şu anlama gelir: Her beklenen fayda fonksiyonunun pozitif lineer dönüşümü de aynı tercih yapısını içeren bir beklenen fayda fonksiyonudur. Yani eğer  $U(\cdot)$  bir vNM fayda fonksiyonu ise,  $V(\cdot) = \beta U(\cdot) + \gamma$  fayda fonksiyonu da vNM özelliğini koruyan ve  $U(\cdot)$  ile aynı tercih sıralamasını gösteren bir fonksiyondur. Fakat lineer olmayan transfromasyonlarda bu özellik korunamayabilir. Diğer bir şekilde ifade edersek daha genel olarak tüm monoton dönüşümler bir fayda fonksiyonu verir, fakat bu durumda beklenen fayda formu korunmayabilir.

Şimdi tüm bunlardan hareketle vardığımız temel iddiayı, beklenen fayda teoremini açıklayalım.

**Teorem 2.1** Basit lotariler kümesi,  $\mathcal{L}$ , üzerine yapılan  $\succeq$  tercih sıralamasının tutarlılık, süreklilik ve bağımsızlık koşullarını sağladığını varsayalım. Her sonuca  $u_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) gibi bir fayda değeri atfettiğimizde,  $L = (p_1, \dots, p_N)$  ve  $L' = (p'_1, \dots, p'_N)$  gibi herhangi iki lotari için şu sonuca sahip oluruz:

$$L \succeq L' \text{ eğer } \sum_{i=1}^N u_i p_i \geq \sum_{i=1}^N u_i p'_i.$$

Yani kelimelerle ifade edersek, eğer bir karar alıcının lotariler üzerinde tercihleri tutarlılık, süreklilik ve bağımsızlık koşullarını sağlıyorsa, karar alıcının tercihleri beklenen fayda formu ile ifade edilen bir fayda fonksiyonu ile gösterilebilir.

Yukarıda verdiğimiz aksiyomlar sağlansa bile vNM fayda fonksiyonu direkt gözlemlenemediği için beklenen fayda hipotezini test etmek zordur. Gözlemlenen şey sadece bireyin iki çift lotari arasındaki yaptığı tercihtir. Fakat beklenen fayda teoremi için gerekli koşulların test edilmesi bu teoremin test edilmesi şeklinde yorumlanabilir.

Belirsizlik konusu söz konusu olduğunda bireylerin riske karşı tutumlarının farklılığı hakkında da yararlı bir kaç kavramı tanıtmak faydalı olacaktır. Bireyleri

genel anlamda risk-nötr, riskten-kaçınan ve risk-seven diye üç kategoriye ayırabiliriz.

Lotari sonuçlarının para ile ölçüldüğünü varsayalım ve bireyin tercihleri her sonucun para ile ölçüldüğü bir beklenen fayda fonksiyonu ile temsil edilsin. Eğer bir birey kesin sonuçlu bir lotarinin sonucu ile aynı beklenen değeri veren başka bir lotari arasında kayıtsızsa bu birey *risk-nötr* bireydir. Yani böyle bireyler kesin  $x$  lirayı almakla ortalamada  $x$  lirayı almak arasında kayıtsızdırlar. Bu bireylerin fayda fonksiyonları lineerdir,  $u(x) = cx + b$ , burada  $x$  bireyin elde edeceği sonucu gösterir, ve  $c > 0$  ve  $b$  sabit parametrelerdir.

Eğer insanlar sigortalanmayı düşünüyorlarsa tercihleri *riskten-kaçınan* bir bireyin tercihidir. Yani böyle bireyler kesin  $x$  lirayı ortalamada  $x$  liraya tercih ederler. Böyle bireylerin fayda fonksiyonları, konkavdır, yani  $u = f(x)$  fayda fonksiyonunun ikinci dereceden türevi negatiftir,  $f''(x) < 0$ . Örneğin  $u = a\sqrt{x} + b$ ,  $a > 0$ , fonksiyonu riskten-kaçınan bir bireyin tercihini temsilen kullanılabilir.

Diğer yandan, eğer bir birey ortalamada  $x$  lira almayı kesin  $x$  almaya tercih ediyorsa *risk-seven* bireydir. Örneğin ortalamada kendilerine çok daha az bir gelir sağlayan bir piyango bileti alan insanlar risk-seven insanlar olarak düşünülebilir. Bu bireylerin fayda fonksiyonları ise konvektir, yani ikinci dereceden türevi pozitifdir,  $f''(x) > 0$ . Örneğin  $y = ax^2 + b$ ,  $a > 0$ , risk-seven bir bireyin fayda fonksiyonu olarak kullanılabilir.

Somut bir örnek üzerinden ifade edersek bir bireyin başlangıç geliri  $w_0$  olsun. İki lotari arasında tercih yapan bir birey olsun. Birinci lotaride,  $L_1$ , eğer yazı gelirse 100 lira kazanacak fakat eğer tura gelirse 100 lira kaybedecektir. Diğer bir lotaride,  $L_2$ , ise, bireyin birinci lotariye katılmadan kesin olarak  $w_0$  değerine sahip olması söz konusudur. Eğer birey bu iki lotari arasında farksızsa, yani  $U(L_1) = U(L_2)$  ( $0.5 \times u(w_0 + 100) + 0.5 \times u(w_0 - 100) = u(w_0)$ ) ise, birey risk nötr-bireydir. Fakat eğer birey iki lotari arasında kayıtsız değilse,  $L_1$  lotarisine katılmama kararı veriyorsa, yani  $U(L_1) < U(L_2)$ , ( $0.5 \times u(w_0 + 100) + 0.5 \times u(w_0 - 100) < u(w_0)$ ). Bu kararı veren birey riskten-kaçınan bireydir. Diğer yandan eğer birey birinci lotariyi seçerse,  $U(L_1) > U(L_2)$ , ( $0.5 \times u(w_0 + 100) + 0.5 \times u(w_0 - 100) > u(w_0)$ ). Bu kararı veren birey ise risk seven birey olarak nitelendirilir.

## 2.3 Karma Stratejiler Tanımı

Şimdi yukarıda verilen kavramların yardımıyla sıkça kullanacağımız bir kavram olan karma stratejiyi tanımlayabiliriz. Herhangi bir  $i$  oyuncusunun karma stratejisi  $i$  oyuncusunun pür strateji seçimleri olan  $S_i$  üzerinde bir olasılık dağılımıdır, bunu  $\sigma_i \in \Delta(S_i)$  şeklinde ifade ediyoruz. Eğer  $i$  oyuncusu  $\sigma_i$  karma stratejisini oynuyorsa ve eğer  $s_i$  pür stratejilerden biriyse, yani  $s_i \in S_i$ , bu durumda pür stratejiyi seçme olasılığı  $\sigma_i(s_i)$  ile gösterilir. Bu yüzden karma strateji,  $\sigma_i$ ,  $i$  oyuncusunun pür strateji uzayından,  $S_i$ ,  $[0, 1]$  aralığına tanımlanmış bir fonksiyon olarak görebiliriz, yani  $\sigma_i : S_i \rightarrow [0, 1]$ . Bu arada  $i$  oyuncusunun karma strateji uzayı ise  $\sum_i = \Delta(S_i)$  ile gösterilir.

Karma bir strateji her  $s_i \in S_i$  için  $[0, 1]$  aralığında bir değer belirler. Her oyuncu bir sefer oynanan bir oyunda sadece bir strateji seçer,  $s_i \in S_i$ . Bu yüzden herhangi bir karma strateji  $\sigma_i \in \Delta(S_i)$  öyle olmalı ki pür stratejilerle ilgili olasılıkların toplamı 1 olmalıdır, yani  $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$ . Bu özellik  $\sigma_i$  karma stratejisinin,  $S_i$  üzerinde tanımlanan bir olasılık dağılımı olmasından kaynaklanmaktadır.

Oyuncuların karma bir strateji profili  $n$ -sayıdaki oyuncunun karma stratejilerinden oluşur, yani  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ ,  $\sigma_i \in \sum_i$ , burada  $\sum_i$  herhangi bir  $i \in N$  oyuncusunun karma stratejileri uzayıdır. Herhangi bir oyunun karma strateji profilleri uzayı,  $\sum$ , bireylerin karma stratejiler uzayının kartezyen çarpımıdır,  $\sum = \prod_{i \in I} \sum_i$ , yani tüm strateji profillerinin kümesidir,  $\sum = \sum_1 \times \sum_2 \times \dots \times \sum_n$ . Bu arada  $i$  oyuncusunun dışındaki karma strateji uzayı ise  $\sum_{-i} = \prod_{j \in I \setminus \{i\}} \sum_j$  şeklinde ifade edilir.

Bir karma stratejinin,  $\sigma_i \in \sum_i$ , her pür stratejiye pozitif olasılık atfettiği stratejilerden oluşan kümeye *support* (kısaca *supp*) denir, bunu daha formel olarak ifade edersek,

$$\text{supp}(\sigma_i) = \{s_i \in S_i : \sigma_i(s_i) > 0\}.$$

Kısaca  $\sigma_i$  karma stratejinin *support*'u  $i$  oyuncusunun oynayabileceği tüm pür stratejileri barındırır: tüm  $\sigma_i \in \sum_i$  için,  $\text{supp}(\sigma_i) \subset S_i$ .

Şunu da unutmadan belirtelim aslında her pür strateji seçimi, bu stratejinin seçilme olasılığının 1 olduğu bir karma strateji seçimine karşılık gelir. Dolayısıyla her pür strateji bir karma strateji gibi de düşünülebilir.

Oyuncular kendi pür stratejilerini,  $s \in S$ , seçtiklerinde,  $i$  oyuncusunun faydası  $u_i(s)$  olarak ifade edildiğini daha önce belirtmiştik. Oyuncular  $s$  pür stratejisini oynadıkları zaman hareketlerini rassallaştırmadıklarından dolayı sonuçlanan fayda vektörü kesindir, yani deterministiktir. Şimdi aynı soruyu soralım: Oyuncular karma stratejilerini,  $\sigma \in \sum$ , oynadıkları zaman, faydaları nedir ve nasıl ifade edilir?

Bu durumda ortaya çıkan fayda düzeyleri artık olasılıklara bağlı olacağından deterministik fayda fonksiyonundan bahsedemeyiz. Bunun yerine beklenen fayda fonksiyonu yani *vNM fayda fonksiyonu* ile bireylerin tercihlerini ifade etmemiz gerekecektir. Basitlik olsun diye  $i$  oyuncusunun  $\sigma \in \sum$  karma stratejiden beklenen faydasını,  $U(\cdot)$  veya  $Eu_i(\sigma)$  ile gösterebiliriz, burada  $U(\cdot)$  veya  $Eu_i : \sum \rightarrow \mathbb{R}$  şeklinde ifade edilir (bu kitabın ilerleyen bölümlerinde bir notasyon kolaylığı olduğu için bazen beklenen faydayı,  $U(\cdot)$  ve  $Eu_i$  notasyonları yerine doğrudan  $u_i$  ile ifade etmeyi tercih edeceğiz).

Oyuncuların rassallaştırmaları birbirinden bağımsız olduğundan dolayı,  $s = (s_1, \dots, s_n)$  strateji profilinin gerçekleşme olasılığı her  $i$  oyuncusunun  $s_i$  stratejilerinin oynanma olasılıklarının çarpımına eşittir. Karma stratejiye,  $\sigma$ , uygun olarak  $i$  oyuncusunun  $s_i \in S_i$  pür stratejisini oynama olasılığı  $\sigma_i(s_i)$ 'dir. Bu yüzden  $s$  strateji profilinin  $\Pr(s)$  oynanma olasılığı oyuncular  $\sigma$  karma stratejisine göre hareket ettiklerinde her oyuncunun pür stratejilerinin oynanma olasılıklarının

çarpımıdır:

$$\begin{aligned}\Pr(s) &= \Pr((s_1, \dots, s_n)) = \Pr(1.\text{oyuncu } s_1) \dots \Pr(n.\text{oyuncu } s_n) \\ &= \sigma_1(s_1) \dots \sigma_n(s_n) = \prod_{i=1}^n \sigma_i(s_i).\end{aligned}$$

Oyunda  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  karma strateji profili oynandığında  $i$  oyuncusunun beklenen faydasını bulmak için her olası  $s \in S$  pür stratejisine gidip bakmalıyız. Her pür strateji profili için  $i$  oyuncusunun beklenen faydasını buluruz. Tüm olası pür strateji profillerinin olasılıklarla ağırlıklandırılmış değerlerinin toplamı ise bize bu oyuncunun beklenen faydasını verir. Yani oyuncular  $\sigma$  karma strateji profiline göre hareket ettiklerinde,  $i$  oyuncusunun  $n$ -oyunculu bir oyunda beklenen faydası aşağıdaki gibi bulunur:

$$U(\sigma) = Eu_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \Pr(s) u_i(s) = \sum_{s \in S} \left( \prod_{j=1}^n \sigma_j(s_j) \right) u_i(s). \quad (2.2)$$

Karma strateji profili,  $\sigma$ , oyuncuların karma stratejiler listesidir. Her bir oyuncu için bir tane karma strateji vardır,  $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ . Herhangi bir  $i$  oyuncusunun karma stratejisi,  $\sigma_i$ , pür stratejilerine karşılık gelen olasılıkların listesidir. Bir sonucun gerçekleşme olasılığını bulmak için bu sonucu üreten pür stratejilerin seçilme olasılıklarını hesaplamak gerekir. Yani eğer pür strateji profili,  $s \in S$ , belirli bir sonucu üretiyorsa bu sonucun olasılığı bu profildeki her oyuncunun seçtiği pür stratejinin seçilme olasılıklarının çarpımına eşittir (bağımsızlıktan dolayı). Yukarıda daha soyut bir düzlemde tanımlanan karma strateji kavramını bir örnekle somutlaştıralım.

## Örnek 2.2

İki oyunculu bir oyun düşünelim. Her oyuncunun karma stratejisi Tablo 2.1'de parantez içinde gösterilen değerlerdir. 1.oyuncu iki pür stratejiye sahipken, 2.oyuncu üç tane pür stratejiye sahiptir. Bu durumda oyunun strateji uzayı şöyle ifade edilebilir:

$$S = S_1 \times S_2 = \{(U, L), (U, M), (U, R), (D, L), (D, M), (D, R)\}.$$

|          | $L(p)$ | $M(q)$ | $R(1-p-q)$ |
|----------|--------|--------|------------|
| $U(t)$   | 2, 8   | 7, 7   | 0, 3       |
| $D(1-t)$ | 1, 5   | 7, 4   | 9, 6       |

**Tablo 2.1**

1.oyuncunun karma stratejisi  $(t, 1 - t)$  şeklinde sıralı bir ikilidir:  $t$  olasılıkla  $U$ ,  $1 - t$  olasılıkla da  $D$  stratejisini oynamaktadır, yani  $\sigma_1(t, 1 - t)$ . Alternatif olarak şöyle de yazabiliriz,  $\Pr(U) = \sigma_1(U) = t$ ,  $\Pr(D) = \sigma_1(D) = 1 - t$ . Dolayısıyla, 1.oyuncunun karma strateji uzayı, yani olası tüm karma stratejiler kümesi aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$\Sigma_1 = \{(t, 1 - t) : t \in [0, 1]\}.$$

Diğer yandan 2.oyuncu üç tane pür stratejiye sahip olduğundan, karma stratejisi,  $\sigma_2(p, q, 1 - p - q)$ , yani  $\Pr(L) = \sigma_2(L) = p$ ,  $\Pr(M) = \sigma_2(M) = q$  ve  $\Pr(R) = \sigma_2(R) = 1 - p - q$  şeklindedir. 2.oyuncunun karma strateji uzayı da şöyle ifade edilir,

$$\Sigma_2 = \{(p, q, 1 - p - q) : p, q \geq 0, p + q \leq 1\}.$$

Şimdi her pür strateji profili için olasılıklar katsayı matrisini bulalım. Tablo 2.2'nin kutucuklarında bu olasılık katsayıları hesaplanmış olarak verilmektedir.

|              | $L(p)$     | $M(q)$     | $R(1 - p - q)$       |
|--------------|------------|------------|----------------------|
| $U(t)$       | $tp$       | $tq$       | $t(1 - p - q)$       |
| $D((1 - t))$ | $(1 - t)p$ | $(1 - t)q$ | $(1 - t)(1 - p - q)$ |

**Tablo 2.2**

Bu olasılık katsayılar matrisi 1.oyuncunun satır olasılığı ile 2.oyuncunun sütun olasılığının çarpımı ile bulunur. Örneğin  $(D, L)$  strateji profiline karşılık gelen olasılık katsayısı basitçe  $(1 - t)p$ 'dir. Strateji profili  $s = (D, L)$  olduğunda yaptığımız aslında iki oyuncunun bu stratejilerine karşılık gelen olasılıkları,  $\sigma_1(D)$  ve  $\sigma_2(L)$ , birbiri ile çarpmaktır veya başka bir ifade ile:

$$\prod_j \sigma_j(s_j) = \sigma_1(s_1)\sigma_2(s_2) = \sigma_1(D)\sigma_2(L) = (1 - t)p.$$

1.oyuncunun karma strateji profilinden beklenen faydasını hesaplamak için Tablo 2.2'deki her fayda düzeyini ona karşılık gelen olasılık katsayısı ile çarpıp, sonra tüm kutucukları toplarız. Örneğin  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  karma stratejisini düşündüğümüzde, ki burada 1.oyuncunun  $U$  ve  $D$  pür stratejilerini  $\sigma_1 = (1/6, 5/6)$  karma stratejisine göre rassallaştırarak oynadığını ve 2.oyuncunun da  $L, M$  ve  $R$  stratejilerini  $\sigma_2 = (9/10, 0, 1/10)$  karma stratejisine göre rassallaştırarak oynadığını varsayalım. Böylece 1. ve 2. oyuncunun bu karma strateji profili için beklenen faydasını (2.2)'de tanımlandığı gibi hesaplayabiliriz.

1.oyuncunun beklenen faydasını (2.2)'den yararlanarak şöyle buluruz,

$$\begin{aligned} Eu_1(\sigma) &= [tp(2) + tq(7) + t(1 - p - q)(0)] \\ &\quad + [(1 - t)p(1) + (1 - t)q(7) + (1 - t)(1 - p - q)(9)] \\ &= t[p(2) + q(7) + (1 - p - q)(0)] + \\ &\quad (1 - t)[p(1) + q(7) + (1 - p - q)(9)]. \end{aligned}$$

Bu da şöyle ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} Eu_1 &= \frac{1}{6}Eu_1(U) + \frac{5}{6}Eu_1(D) \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{9}{10}2 + 0.7 + \frac{1}{10}0\right) + \frac{5}{6}\left(\frac{9}{10}1 + 0.7 + \frac{1}{10}9\right) = \frac{18}{10}. \end{aligned}$$

Burada  $Eu_1(U)$ , 1.oyuncunun  $U$  stratejisini kesin oynaması durumunda elde edeceği beklenen faydası iken,  $Eu_1(D)$  1.oyuncunun  $D$  stratejisini oynadığında beklenen faydasıdır.

2.oyuncunun beklenen faydası da şöyle bulunur,

$$\begin{aligned} Eu_2 &= \frac{9}{10}Eu_2(L) + 0Eu_2(M) + \frac{1}{10}Eu_2(R) \\ &= \frac{9}{10}\left(\frac{1}{6}8 + \frac{5}{6}5\right) + 0\left(\frac{1}{6}7 + \frac{5}{6}4\right) + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}3 + \frac{5}{6}6\right) = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Benzer olarak  $Eu_2(L)$ ,  $Eu_2(M)$  ve  $Eu_2(R)$ , 2.oyuncunun sırasıyla  $L$ ,  $M$  ve  $R$  stratejilerini kesin oynaması durumunda beklenen faydalarını gösterir.

Karma stratejilerde tercihlerin vNW fonksiyonu ile tanımlanması (yani beklenen değerler üzerinden tanımlanması) pür stratejilerle karşılaştırıldığında bir takım farklılıklara neden olmaktadır. Bunlardan biri karma stratejilerdeki dengenin özelliği dengenin sadece ordinal değerlere göre değil fayda düzeylerinin kardinal değerlerine (sayısal büyüklükleri) de bağlı olmasıdır. Ordinal sıralamalar karma stratejilerde dengenin varlığı ile ilişkili iken kardinal değerler karma stratejilerin olasılık değerlerini bulmak için gereklidir. Yani fayda düzeylerini biraz değiştirdiğimizde bu dengeyi etkilemezken, karma strateji olasılıkları değişir<sup>1</sup>. Bu durumları ifade edebileceğimiz bir örnek verelim.

### Örnek 2.3

☛ Tablo 2.3'de verilen oyunda Şefik (1.oyuncu) ve Şahgöl (2.oyuncu) birlikte oynamaktadır. Tablo 2.3'de ordinal tercihlerle ifade edilen iki oyun yapı olarak birbirinin aynı olan iki oyundur. Her iki oyun da Mahkumlar Çıkmazı oyunudur. İki

<sup>1</sup>Ordinal fayda herhangi bir seçim kümesindeki elemanları en çok tercih edilenden en az tercih edilene göre sıralar. Seçim kümesindeki elemanlardan (mallar örneğin) elde edilen faydanın sayısal değeri, yani kardinal faydası, ancak sıralama yapmak için kullanılır. Bu yüzden sayısal büyüklükler önemli değildir. Örneğin, kardinal fayda dondurmada alınan faydanın şekerden alınan faydanın iki katı olduğunu söyleyebilirken, ordinal fayda bunu söylemez, sadece dondurma şekere tercih edilir der ve ne kadar şiddetle tercih edildiği önemli değildir. Tercihin neden böyle olduğu yani neden dondurmanın seçildiği ekonominin konusu değildir. Bu yüzden tercihler veri alınır sözünü kullanırız. Ekonomide kullandığımız fayda fonksiyonları ise daha çok tercihleri sıralamak için yani ordinal amaçlar için kullanılır ( $u(a) > u(b) \Rightarrow a \succ b$ ). Bu yüzden herhangi bir fayda fonksiyonunun herhangi bir pozitif monoton transformasyonu bu yapıyı yani sıralama yapısını korur. Diğer yandan ordinallik sadece bireylerin kendi tercihleri için yapılır. Kardinalliğin yaptığı gibi bireyler arasında fayda karşılaştırması yapmaz.

oyunda da her oyuncu için en iyi tepki kendisinin  $D$ , diğer oyuncunun  $C$ 'yi seçtiği durumdur, bundan sonraki en iyi sonuçlar sırasıyla  $(C,C)$ ,  $(D,D)$  ve  $(C,D)$ 'dir.

|     |      |      |     |      |      |
|-----|------|------|-----|------|------|
|     | $C$  | $D$  |     | $C$  | $D$  |
| $C$ | 2, 2 | 0, 3 | $C$ | 3, 3 | 0, 4 |
| $D$ | 3, 0 | 1, 1 | $D$ | 4, 0 | 1, 1 |

**Tablo 2.3**

Fakat yukarıda verilen tablolar vNM tercihleri ile ifade edildiğinde iki farklı oyundur. Örneğin sol taraftaki tabloda Şefik'in  $(C,C)$  deterministik sonucundan elde ettiği fayda,  $(D,C)$  sonucunun  $1/2$  olasılıkla ve  $(D,D)$  sonucunun da  $1/2$  olasılıkla gerçekleştiği bir lotari ile aynıdır,  $2 = (1/2).3 + (1/2).1$ . Halbuki sağ taraftaki tabloda Şefik'in  $(C,C)$  deterministik sonucunda elde ettiği fayda onun bu lotariden elde ettiği beklenen faydadan daha büyüktür,  $3 > (1/2).4 + (1/2).1$ . Yani sol taraftaki tablo Şefik'in  $(C,C)$  deterministik durum ile lotari arasında kayıtsız olduğu durumu gösterirken, sağ taraftaki tabloda, bu oyuncunun  $(C,C)$  deterministik durumunu lotariye tercih ettiğini göstermektedir.

Kısaca bu iki tablo şunu göstermektedir. Bu oyunlar ordinal tercihler anlamında aynı stratejik oyun iken, vNM tercihleri açısından farklı stratejik oyunlardır. Bu yüzden fayda düzeylerini gösteren tablodaki sayıların yorumlanması çok açık olmayabilir. Bu durumlarda Nash dengesini yorumlamak için, makul bir varsayım yapılabilir: Eğer oyuncuların hareketlerini rassal olarak seçmelerine imkan verilmezse, fayda tablosundaki sayılar oyuncuların ordinal tercihlerini gösterir. Fakat eğer oyunculara hareketlerini rassallaştırma imkanı verilirse, fayda tablosundaki sayıların beklenen değerleri oyuncuların sonuçlar üzerine oluşturulan lotariye dönük tercihlerini gösteren fayda düzeyleridir.

## 2.4 Karma Stratejiler ve Kesin Baskınlık

Daha önce gördüğümüz baskınlık kavramını karma stratejilere genelleştirebiliriz. Pür bir stratejinin mahkum olup olmadığını anlamanın yolu diğer oyuncuların tüm pür stratejilerine her zaman daha iyi bir tepki olacak bir karma stratejinin olup olmadığına bakmaktır.

**Tanım 2.6**  $G(\cdot)$  gibi stratejik bir oyunda eğer aşağıdaki koşul geçerliyse  $\sigma_i \in \sum_i$  karma stratejisi,  $s_i$  pür stratejisine kesin baskındır;

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \quad \forall i \in s_{-i} \in S_{-i}. \quad (2.3)$$

Bu tanımda eğer eşitsizlik eşitlik halini alırsa ve eşitsizlik en azından bir  $s_i$  için geçerli olursa  $s_i$  stratejisi zayıf-baskın olur.

Şuna dikkat edin,  $i$  oyuncusunun bir  $s_i$  pür stratejisinin  $\sigma_i$  gibi bir karma stratejiye mahkum olmasını diğer oyuncuların  $s_{-i}$  pür stratejilerine göre düşünüyoruz.

Çünkü veri bir  $s_i$  stratejisi için,  $\sigma_i$  stratejisi ((2.3) koşulunu sağlıyor) diğer oyuncuların pür stratejileri için geçerliyse,  $i$  oyuncusunun karma stratejisi diğer oyuncuların karma stratejileri,  $\sigma_{-i}$ , için de geçerlidir. Çünkü diğer oyuncular  $\sigma_{-i}$  karma stratejilerini oynarken,  $i$  oyuncusunun elde ettiği fayda, diğer oyuncuların pür stratejilerini oynadıkları zaman elde ettikleri faydaların bir konveks kombinasyonudur (ağırlıklandırılmış ortalamasıdır). Yani  $i$  oyuncusunun  $\sigma_i$  karma stratejisinin diğer oyuncuların  $s_{-i}$  pür stratejilerine baskın olması bu oyuncuların  $\sigma_{-i}$  karma stratejilerine de baskın olduğu anlamına gelir.

Kesin pür mahkum bir strateji diğer oyuncuların karma stratejilerine en iyi tepki olamaz. Örneğin  $i$  oyuncusunun  $s'_i$  hareketi  $\sigma_i$  karma strateji tarafından mahkum edilsin. Herhangi bir  $i$  oyuncusu  $\sigma_i$  karma stratejisini ve diğer oyuncular da  $\sigma_{-i}$  karma stratejisini uyguladığında  $i$  oyuncusunun beklenen faydası  $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$  olur, bu fayda düzeylerinin ağırlıklandırılmış ortalamasıdır. Diğer oyuncular da her hareketlerine atadıkları olasılıkların ( $\sigma_{-i}$ ) sonucuna göre beklenen faydalarını hesaplarlar. Eğer  $s'_i$  hareketi  $\sigma_i$  tarafından mahkum ediliyorsa bu şu anlama gelir: diğer oyuncuların  $s_{-i}$  stratejileri için,  $u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$  demektir. Bu yüzden  $i$  oyuncusu  $\sigma_i$  karma stratejisini kullandığı zaman,  $i$  oyuncusunun beklenen faydası, diğer oyuncuların karma stratejileri,  $\sigma_{-i}$ , veri alındığında  $s'_i$  hareketini oynamasından beklenen faydasından daha fazla olacaktır. Yani kısaca kesin mahkum bir hareket herhangi bir karma stratejide kullanılmaz, yani pozitif olasılıkla ağırlandırılmaz. Karma stratejileri bulmak için ilk önce kesin mahkum stratejilerin silinmesi gerekir. Kesin mahkum bir stratejiye pozitif olasılık veren bir karma stratejinin kendisi de mahkumdur (mahkum stratejiye daha az olasılık veren bir başka mahkum stratejiye göre).

Şimdi de aşağıda karma strateji ve baskınlık ilişkisine dair diğer bir takım özellikleri örnekler üzerinden tartışalım.

1. Zayıf mahkum olmayan pür stratejilere pozitif olasılık verilse bile karma bir strateji kesin mahkum edilebilir. Tablo 2.4'de verilen oyuna bakalım. Oyunu Birsen (1.oyuncu) ve Veli (2.oyuncu) birlikte oynamaktadır. Birsen'in  $U$  ve  $M$  stratejilerinin her birini  $1/2$  olasılıkla oynaması, Veli'nin ne oynadığından bağımsız olarak, ona  $-1/2$  gibi bir beklenen fayda sağlar (bunu kolayca hesaplayabilirsiniz). Bu karma strateji, ona her zaman 0 fayda sağlayan  $D$  pür stratejisi tarafından kesin mahkum edilir. Dikkat ederseniz ne  $U$  ne de  $M$  stratejisi zayıf mahkum olmalarına rağmen bu durum geçerlidir.

|     | $L$   | $R$   |
|-----|-------|-------|
| $U$ | 1, 3  | -2, 0 |
| $M$ | -2, 0 | 1, 3  |
| $D$ | 0, 1  | 0, 1  |

**Tablo 2.4**

2. Diğer herhangi bir pür strateji tarafından kesin mahkum edilemeyen bir strateji, karma bir strateji ile kesin mahkum edilebilir. Tablo 2.5'de bu durumu

açıklayacak bir örnek verebiliriz. 1.oyuncu için U stratejisi ne M ne de D stratejisi tarafından kesin olarak mahkum edilebilir.

|          |          |          |   |          |          |      |          |          |      |
|----------|----------|----------|---|----------|----------|------|----------|----------|------|
|          | <i>L</i> | <i>R</i> |   |          |          |      |          |          |      |
| <i>U</i> | 1, 3     | 1, 0     |   | <i>L</i> | <i>R</i> |      | <i>R</i> |          |      |
| <i>M</i> | 4, 0     | 0, 3     | → | <i>M</i> | 4, 0     | 0, 3 | →        | <i>M</i> | 0, 3 |
| <i>D</i> | 0, 1     | 3, 1     |   | <i>D</i> | 0, 1     | 3, 1 | →        | <i>D</i> | 3, 1 |

**Tablo 2.5**

2. oyuncunun ne oynadığından bağımsız olarak 1.oyuncunun *U* stratejisini oynaması ona her zaman 1 kazandırır. Fakat eğer 1.oyuncu şöyle bir karma strateji oluşturursa: *M* ve *D* stratejilerini 1/2 olasılıkla oynarsa, 2.oyuncu *L* hareketini seçtiğinde 2, *R* hareketini seçtiğinde 3/2 kadar kazanır. Bu karma strateji 2. oyuncunun ne oynadığından bağımsız olarak, *U* stratejisini her zaman mahkum eder, çünkü  $2 > 1$  ve  $3/2 > 1$ .

Bu oyunda çok sayıda karma strateji tanımlanabileceğini unutmamak gerekir. Örneğin 1.oyuncu, 2.oyuncunun *L* stratejisine *U* stratejisinden daha iyi bir strateji oluşturmak için *M* stratejisini 1/4 olasılığının üstünde oynamalı  $\sigma_1(M) > 1/4$ . Benzer olarak *R* stratejisine karşı yine *U* stratejisinden daha iyi bir strateji oluşturmak için *D* stratejisini 1/3 olasılığının üstünde oynamalıdır,  $\sigma_1(D) > 1/3$ . Dolayısıyla *M* stratejisinin 2/3 olasılığının altında oynanması gerekir,  $\sigma_1(M) < 2/3$ . Bu iki durumu da dikkate aldığımızda, şu sonucu elde ederiz:  $\sigma_1(M) \in (1/4, 2/3)$  olmalıdır (bu olasılıkların doğruluğunu siz de kontrol edin). Yani bu aralık içindeki değerleri sağlayan tüm karma stratejiler *U* stratejisine her zaman kesin baskındır. Tüm yapmamız gereken amacımıza uygun karma strateji olasılıklarını belirlemektir.

Bu arada oyunda *U* stratejisinden daha yüksek bir fayda sağlayacak *M* ve *D* stratejilerinden oluşan uygun bir karma stratejisinin belirlenmesi ile *U* stratejisi silinir. Bu silinme sonrası devam eden oyunda 2.oyuncunun da *L* stratejisini silmesi ile denge (*D,R*)’de oluşur.

## 2.5 Karma Strateji Nash Dengesi

Sürekli eliminasyon yoluyla bulunan denge sezgisel olarak güçlü temellere otursa bile bu tür dengelere sahip oyunlar çok değildir. Bu yüzden de karma stratejilerde Nash dengesi kavramına bakmamız gerekir.

**Tanım 2.7**  $G = \{N, (S_i), (u_i)\}$  gibi stratejik biçimli bir oyunda, her *i* oyuncusu için  $\sigma_i^*$  stratejisi  $\sigma_{-i}^*$  stratejisine en iyi tepkiyse,  $(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)$  karma strateji Nash dengesidir, yani

$$\forall s_i \in S_i, u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \quad \forall i, s_i \in S_i.$$

Burada  $i$  oyuncusu dışındaki diğer tüm oyuncuların karma strateji profilinin,  $\sigma_{-i} \in \sum_{-i}$ , oynandığını veri alırsak,  $i$  oyuncusunun en iyi karma stratejisi nedir? Bunun cevabı  $i$  oyuncusunun en iyi tepki fonksiyonundan gelir,  $B_i : \sum_{-i} \rightarrow \sum_i$ , ki bu fonksiyon, diğer oyuncuların karma-strateji profil uzayını  $\sum_{-i}$ ,  $i$  oyuncusunun  $\sum_i$  karma stratejileri ile ilişkilendirir. Formel olarak ifade edersek  $i$  oyuncusunun problemi, her  $\sigma_{-i} \in \sum_{-i}$  karma strateji profili için,  $i$  oyuncusunun karma stratejilerinden oluşan  $B_i(\sigma_{-i}) \subset \sum_i$  kümesini bulmaktır:

$$B_i(\sigma_{-i}) = \arg \max_{\sigma_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}),$$

burada  $B_i(\sigma_{-i})$ 'nin boş bir küme olmaması, yani en iyi tepki olan bir karma stratejinin var olması için,  $S_i$  pür stratejiler kümesinin boş olmayan ve sınırlı bir küme olması gerekir (karma stratejilerde Nash dengesinin varlığını daha sonra tartışacağız). Karma stratejilerde en iyi tepki fonksiyonlarını daha somutlaştırmak için aşağıdaki örneğe bakalım.

#### Örnek 2.4

İki oyunculu ve her bir oyuncunun iki harekete sahip olduğu bir oyun düşünelim, 1. oyuncunun hareketleri  $T$  ve  $B$  iken, 2.oyuncunun hareketleri  $L$  ve  $R$  şeklindedir ve  $i(= 1, 2)$  oyuncusunun fayda fonksiyonu  $u_i$ 'dir. 1.oyuncunun  $\sigma_1(T)$  karma stratejisi  $T$  hareketine atfedilen olasılığı gösterirken,  $\sigma_1(B)$  ise  $B$  hareketine atfedilen olasılığı gösterir (unutmadan  $\sigma_1(T) + \sigma_1(B) = 1$ ). Daha uygun bir gösterim için  $p = \sigma_1(T)$  ve  $1 - p = \sigma_1(B)$  olsun. Benzer olarak, 2.oyuncunun karma stratejisinin  $L$  hareketine atfettiği olasılık  $q = \sigma_2(L)$  ve  $R$  hareketine atfettiği olasılık ise  $1 - q = \sigma_2(R)$ 'dir ( $\sigma_2(L) + \sigma_2(R) = 1$ ).

Oyuncuların amacı  $\sigma_1$  ve  $\sigma_2$  karma stratejilerini seçmektir. Herhangi bir  $(s_1, s_2)$  strateji çiftinin gelme olasılığı, 1. oyuncunun  $s_1$  stratejisine atfettiği olasılığın 2.oyuncunun  $s_2$ 'ye atfettiği olasılığın çarpımına eşittir. Tablo 2.6'da dört olası sonuç için karma strateji profili  $(\sigma_1, \sigma_2)$  verilmektedir.  $(T, L)$  sonucu  $pq$  olasılıkla,  $(T, R)$  sonucu  $p(1 - q)$  olasılıkla,  $(B, L)$  sonucu  $(1 - p)q$  olasılıkla ve  $(B, R)$  sonucu da  $(1 - p)(1 - q)$  olasılıkla gerçekleşir.

|            |            |                  |
|------------|------------|------------------|
|            | $L(q)$     | $R(1 - q)$       |
| $T(p)$     | $pq$       | $p(1 - q)$       |
| $B(1 - p)$ | $(1 - p)q$ | $(1 - p)(1 - q)$ |

**Tablo 2.6**

Bu olasılık dağılımından hareketle 1.oyuncunun  $(\sigma_1, \sigma_2)$  karma strateji çiftinden beklenen fayda fonksiyonunu yazalım,

$$Eu_1(\cdot) = pq u_1(T, L) + p(1 - q) u_1(T, R) + (1 - p)q u_1(B, L) + (1 - p)(1 - q) u_1(B, R)$$

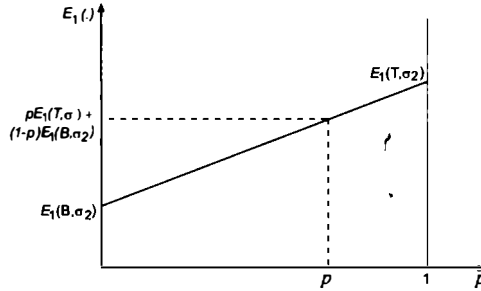
veya bunu şöyle de yazmak mümkündür,

$$Eu_1(\cdot) = p[qu_1(T, L) + (1 - q)u_1(T, R)] + (1 - p)[qu_1(B, L) + (1 - q)u_1(B, R)] \quad (2.4)$$

Yukarıda (2.4)'de ifade edilen ilk kare parentez içindeki değer 1.oyuncunun  $T$  pür stratejisini (yani  $T$  stratejisini 1 olasılıkla oynuyor) oynadığında ve 2.oyuncunun  $\sigma_2$  karma stratejisini oynadığında beklenen faydasını gösterirken, ikinci kare parantez ise 1.oyuncunun  $B$  pür stratejisini oynadığında ve 2.oyuncunun da yine  $\sigma_2$  karma stratejisini oynadığında beklenen faydasını göstermektedir. Bu her iki beklenen faydayı sırasıyla  $E_1(T, \sigma_2)$  ve  $E_1(B, \sigma_2)$  ile gösterelim. Bu durumda 1.oyuncunun  $(\sigma_1, \sigma_2)$  karma strateji çiftinden beklenen faydası şöyledir,

$$pE_1(T, \sigma_2) + (1 - p)E_1(B, \sigma_2).$$

Dolayısıyla 1.oyuncunun  $(\sigma_1, \sigma_2)$  karma strateji profilinden beklenen faydası 2. oyuncunun  $\sigma_2$  karma stratejisini oynadığında  $T$  ve  $B$  stratejilerinden beklenen faydaların ağırlıklandırılmış ortalamasıdır. Diğer bir nokta 2.oyuncunun karma stratejisi veri alındığında, 1.oyuncunun beklenen faydası  $p$ 'nin lineer bir fonksiyonudur. Şekil 2.2'de görüldüğü gibi bu fonksiyon bir lineer doğru şeklindedir ve  $E_1(T, \sigma_2) > E_1(B, \sigma_2)$  durumunu göstermektedir.



**Şekil 2.2** Birinci oyuncunun en iyi tepki fonksiyonu

1.oyuncunun faydasının  $p$ 'nin lineer bir fonksiyonu olması dolayısıyla, 2.oyuncunun karma stratejisine verdiği en iyi tepkinin üç olası durumu vardır:

i. Eğer  $E_1(T, \sigma_2) > E_1(B, \sigma_2)$  ise, 1.oyuncunun en iyi tepkisi  $T$  pür stratejisidir (Şekil 2.2'deki gibi).

ii. Eğer  $E_1(B, \sigma_2) > E_1(T, \sigma_2)$  ise, 1.oyuncunun en iyi tepkisi  $B$  pür stratejisidir (1.oyuncunun,  $p$ 'nin bir fonksiyonu olan beklenen faydası yukarıda verilen Şekil 2.2'nin tersine negatif eğimli bir doğrudur)

iii. Eğer  $E_1(T, \sigma_2) = E_1(B, \sigma_2)$  ise, 1.oyuncunun tüm karma stratejileri aynı beklenen faydayı verir. Bu yüzden tüm tepkiler en iyi tepkidir (bu durumda Şekil 2.2 yatay eksenli bir doğru olur). Benzer şekilde 2. oyuncu için de en iyi tepki fonksiyonu türetilebilir.



|          |        |          |
|----------|--------|----------|
|          | $T(q)$ | $Y(1-q)$ |
| $T(p)$   | 1, -1  | -1, 1    |
| $Y(1-p)$ | -1, 1  | 1, -1    |

**Tablo 2.8 :** Eşleşen Para oyununda karma strateji dengesi

Veri stratejiler için 1.oyuncunun beklenen faydasını yazalım. 1.oyuncu  $p$  olasılıkla turayı seçtiğinde, eğer 2.oyuncu  $q$  olasılıkla turayı seçerse 1 lira kazanır fakat 2.oyuncu eğer yazıyı seçerse 1 lira kaybeder (bu da  $1-q$  olasılıkla gerçekleşir). Benzer olarak, 1.oyuncu  $1-p$  olasılıkla yazıyı seçtiğinde, eğer 2.oyuncu  $q$  olasılıkla turayı seçerse 1 lira kaybeder fakat eğer 2.oyuncu yazıyı seçerse 1 lira kazanır.

Böylece 1.oyuncunun beklenen faydası şöyledir,

$$\begin{aligned} E(u_1) &= p[q(1) + (1-q)(-1)] + (1-p)[q(-1) + (1-q)(1)] \\ &= p(2q-1) + (1-p)(1-2q). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Benzer olarak 2.oyuncunun beklenen faydası ise aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned} E(u_2) &= q[p(-1) + (1-p)(1)] + (1-q)[p(1) + (1-p)(-1)] \\ &= q(1-2p) + (1-q)(2p-1). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Şimdi karma strateji Nash dengesini oluşturacak  $p$  ve  $q$  değerlerini bulalım. Bunu da (2.5) ve (2.6)'de belirtilen beklenen fayda fonksiyonlarını maksimize eden  $p$  ve  $q$  olasılıklarını bularak yaparız. 1.oyuncunun (2.5)'de belirtilen fayda fonksiyonunu maksimize eden değer, bir köşe çözüm olabilir, yani  $p = 0$  ve  $p = 1$ . Bunlar 1.oyuncunun pür stratejileridir, yani  $p = 1$  iken 1.oyuncu her zaman turayı oynar ve  $p = 0$  iken ise 1.oyuncu her zaman yazıyı seçer. Diğer bir durum  $p$ 'nin bir iç çözümünün olmasıdır, yani beklenen fayda fonksiyonunu maksimize eden  $p$  değerinin  $0 < p < 1$  arasında bir değer alması demektir. Bu durumda  $E(u_1)$ 'nin  $p$ 'ye göre türevi sıfıra eşitlenir,

$$\frac{\partial E(u_1)}{\partial p} = 2q - 1 - (1 - 2q) = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{2}.$$

Bu bize  $q = 1/2$  iken,  $p$ 'nin herhangi bir iç değerinin maksimum adayı olduğunu söylemektedir. Matematiksel olarak bu anlamlıdır çünkü eğer  $q = 1/2$  ise 1.oyuncunun beklenen faydası her zaman sıfır olacaktır (bu durumda 1.oyuncunun faydası  $p$ 'nin değerinden bağımsızdır):

$$E(u_1) = p(2q-1) + (1-p)(1-2q) = p(0) + (1-p)(0) = 0.$$

Sezgisel olarak bunun ne anlama geldiğine bakalım. 2.oyuncu tura ve yazı arasında rassal bir seçimde bulunduğu anda, 1.oyuncu için her strateji en iyi tepkidir. Yani eğer her zaman turayı seçerseniz, beklenen faydanız sıfırdır; eğer her zaman

yazıyı seçerseniz de beklenen faydanız sıfırdır veya isterseniz  $1/2$  olasılıkla tura seçerseniz de beklenen faydanız sıfırdır.

Kısaca 1.oyuncunun stratejisi hakkında elde ettiğimiz sonuç şudur: Eğer 2.oyuncu  $q = 1/2$  olasılıkla stratejilerini rassallaştırırsa herhangi bir  $p$  değeri 1.oyuncu için en iyi tepkidir. Fakat eğer 2.oyuncunun stratejisi  $q \neq 1/2$  ise, 1.oyuncunun en iyi tepkisi bir pür stratejidir yani eğer  $q > 1/2$  ise 1.oyuncunun en iyi tepkisi her zaman turayı oynamaktır fakat eğer  $q < 1/2$  ise bu durumda ise 1.oyuncunun en iyi tepkisi her zaman yazıyı oynamaktır. Özetle 1.oyuncunun en iyi tepki fonksiyonu şöyledir:

$$B_1(q) = \begin{cases} \{0\}, & \text{eğer } q < \frac{1}{2} \\ \{p : 0 \leq p \leq 1\}, & \text{eğer } q = \frac{1}{2} \\ \{1\}, & \text{eğer } q > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Şimdi de aynı yaklaşımı 2.oyuncunun stratejilerini bulmak için kullanalım. Yine 2.oyuncunun beklenen faydasını maksimize eden değer ya bir köşe çözümdür ( $q = 1$  veya  $q = 0$ ) ya da bir iç çözümdür,  $0 < q < 1$ . Eğer bir iç çözüm ise, benzer şekilde 2.oyuncunun en iyi tepkisini şöyle buluruz,

$$\frac{\partial E(u_2)}{\partial q} = 1 - 2p - (2p - 1) = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2}.$$

Böylece 1.oyuncu  $p = 1/2$  olasılığını seçerse, 2.oyuncunun herhangi bir  $q$  seçimi en iyi tepki olacaktır. Fakat 1.oyuncu  $p \neq 1/2$  olasılığını seçerse, 2.oyuncunun en iyi tepki fonksiyonu pür stratejidir; eğer 1.oyuncu  $p > 1/2$  stratejisini seçerse, 2.oyuncunun en iyi tepkisi her zaman yazıyı oynamaktır fakat  $p < 1/2$  stratejisini seçerse, 2.oyuncunun en iyi tepkisi her zaman turayı oynamaktır. Özetle 2.oyuncunun en iyi tepki fonksiyonu ise aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$B_2(p) = \begin{cases} \{1\} & \text{eğer } p < \frac{1}{2} \\ \{q : 0 \leq q \leq 1\} & \text{eğer } p = \frac{1}{2} \\ \{0\} & \text{eğer } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Her iki oyuncunun da en iyi tepki fonksiyonlarını Şekil 2.3'deki gibi gösterebiliriz.

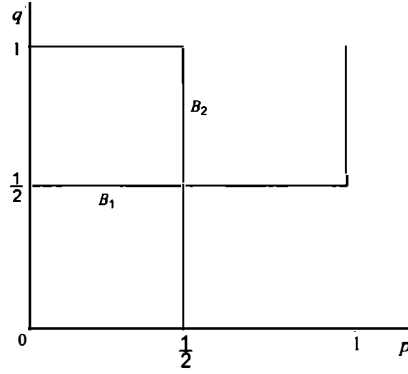
Şimdi de bulduğumuz sonuçların hepsini bir araya getirip karma-strateji Nash dengesini bulmaya çalışalım. Eğer 1.oyuncunun  $p$  seçimi 2.oyuncunun  $q$  seçimine en iyi tepki ise, stratejisi  $p = 1$ ,  $p = 0$  veya  $0 < p < 1$  olabilir. Eğer 2.oyuncunun  $q$  seçimi 1.oyuncunun  $p$  seçimine en iyi tepki ise, stratejisi  $q = 1$ ,  $q = 0$  veya  $0 < q < 1$  olabilir. Sonuç olarak 1.oyuncunun üç seçimi ve 2.oyuncunun üç seçimi bize 9 tane Nash dengesi adayı verir. Bunlar:

i. Dört pür strateji adayı:  $(p = 1, q = 1)$ ,  $(p = 1, q = 0)$ ,  $(p = 0, q = 1)$ ,  $(p = 0, q = 0)$

ii. Bir karma strateji adayı:  $(0 < p < 1, 0 < q < 1)$

iii. Dört pür/karma strateji kombinasyonu:  $(p = 1, 0 < q < 1)$ ,  $(p = 0, 0 < q < 1)$ ,  $(0 < p < 1, q = 1)$ ,  $(0 < p < 1, q = 0)$

Kolayca görülebileceği gibi dört pür strateji adayı karşılıklı en iyi tepkiler



**Şekil 2.3** Eşleşen Paralar oyununda en iyi tepki fonksiyonları

değildir, yani pür Nash dengesi yoktur. Yine görebileceğimiz gibi dört pür/karma strateji kombinasyonu da en iyi tepkiler değildir. Örneğin  $(p = 0, 0 < q < 1)$  Nash dengesi değildir çünkü eğer 1.oyuncu  $p = 1$  olasılığına kayarsa, 2.oyuncunun en iyi tepkisi artık  $0 < q < 1$  olmayacaktır, bunun yerine en iyi tepkisi  $q = 0$ 'ı seçmek olacaktır.

Fakat karma strateji adayı Nash dengesidir: 1.oyuncunun  $0 < p < 1$  arasında bir değer seçimi  $q = 1/2$  iken en iyi seçimdir. 2.oyuncunun  $0 < q < 1$  arasında bir değer seçimi,  $p = 1/2$  iken en iyi seçimdir. Böylece oyuncuların stratejileri karşılıklı en tepkiler olan  $p = q = 1/2$  olacaktır. Yani bu oyunun dengesi karma strateji Nash dengesidir. Bu da Şekil 2.3'de her iki oyuncunun en tepki fonksiyonlarının kesiştiği noktadır.

## 2.5.2 Cinsiyetler Savaşı

İki oyunculu vNM tercihli bir oyunu düşünelim ve bu oyunda oyuncuların hareket profilleri üzerindeki tercihleri Cinsiyetler Savaşı'ndaki ile aynı olsun. Oyuncuların tercihleri Tablo 2.9'da gösterilmektedir.

|          |        |          |
|----------|--------|----------|
|          | $B(q)$ | $S(1-q)$ |
| $B(p)$   | 2, 1   | 0, 0     |
| $S(1-p)$ | 0, 0   | 1, 2     |

**Tablo 2.9** Cinsiyetler Savaşında karma strateji dengesi

Bu oyunun karma strateji dengesini bulalım. Bunun için ilk önce 1.oyuncunun en iyi tepki fonksiyonunu bulalım. 2.oyuncu  $B$  stratejisini  $q$  olasılıkla oynasın. Bu durumda 1.oyuncunun  $B$  hareketini oynamasından beklenen faydası  $2q + 0.(1 - q) = 2q$  iken,  $S$  hareketini oynamasından beklenen faydası  $0.q + 1.(1 - q) = 1 - q$ 'dır. Yani eğer  $2q > 1 - q$  veya  $q > 1/3$  ise, 1.oyuncunun  $B$

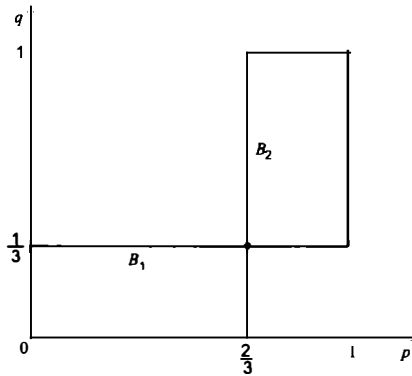
pür stratejisini oynaması gerekir. Eğer  $q < 1/3$  ise bu durumda da  $S$  pür stratejisini oynaması daha rasyoneldir. Fakat eğer  $q = 1/3$  ise hem  $B$  hem de  $S$  yani 1.oyuncunun tüm karma stratejileri aynı beklenen faydayı verir. Böylece her karma strateji en iyi tepkidir. Özetle, 1.oyuncunun en iyi tepki fonksiyonu

$$B_1(q) = \begin{cases} \{0\}, & \text{eğer } q < 1/3 \\ \{p : 0 \leq p \leq 1\}, & \text{eğer } q = 1/3 \\ \{1\}, & \text{eğer } q > 1/3 \end{cases}$$

Benzer olarak 2.oyuncunun da en iyi tepki fonksiyonunu bulabiliriz:

$$B_2(p) = \begin{cases} \{0\}, & \text{eğer } p < 2/3 \\ \{q : 0 \leq q \leq 1\}, & \text{eğer } p = 2/3 \\ \{1\}, & \text{eğer } p > 2/3 \end{cases}$$

Her iki oyuncunun da en iyi tepki fonksiyonları aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.



Şekil 2.4 Cinsiyetler Savaşında en iyi tepki fonksiyonları

Bu oyunun üç Nash dengesi vardır:  $(p, q) = (0, 0)$ ,  $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$  ve  $(1, 1)$ . Birinci ve üçüncü dengeler oyuncuların pür stratejilerinin rassallaştırmalarına imkan verilmediği durumdaki standard pür Nash dengeleridir. İkinci denge ise yeni dengedir. Karma strateji kavramı ile ortaya çıkan dengedir. Denge, her oyuncunun  $B$  ve  $S$  hareketlerinin pozitif olasılıkla oynandığı dengeyi gösterir, yani  $(B, B)$ ,  $(B, S)$ ,  $(S, B)$  ve  $(S, S)$  sonuçları pozitif olasılıkla gerçekleşir, dolayısıyla her bir sonucun dengede gerçekleşmesi mümkündür.

### 2.5.3 Refah Oyunu

Refah oyunu, devletin fakir birine iş arıyorsa yardım etmek istediği, ama iş aramıyorsa yardım etmek istemediği ve fakir kişinin de ancak devlet yardımına bağımlı olmaması durumunda iş arayacağı bir durumu modellemek için kullanılan klasik bir oyundur.

Tablo 2.10 her olası durum için bu oyunun fayda düzeylerini göstermektedir. Bireyin *çalışmak* stratejisi *çalışmak* istediğini ve dolayısıyla iş aradığını gösteriyor, *çalışmamak* stratejisi ise *çalışmak* istemediğini ve dolayısıyla iş aramadığına karşılık gelmektedir. Devlet iş arayan kişiye yardım etmeyi istemektedir. Fakat iş aramayana yardım etmeyecektir. Dolayısıyla devletin stratejileri *yardım* ve *yardım yok* şeklindedir. Bu yüzden hiç bir oyuncu baskın strateji dengesine sahip değildir.

|                   | <i>çalışmak</i> | <i>çalışmamak</i> |
|-------------------|-----------------|-------------------|
| <i>yardım</i>     | 3, 2            | -1, 3             |
| <i>yardım yok</i> | -1, 1           | 0, 0              |

**Tablo 2.10** Refah oyunu

Her strateji profiline Nash dengesinin olup olmadığına bakarak karar verelim.

1. (*yardım, çalışmak*) strateji profili bir Nash dengesi değildir çünkü eğer devlet yardım ederse, işsiz kişi iş aramayacaktır, yani *çalışmak* istemeyecektir.

2. (*yardım, çalışmamak*) Nash dengesi değildir çünkü eğer işsiz kişi *çalışmak* istemiyorsa devlet yardım etmemeyi seçecektir.

3. (*yardım yok, çalışmamak*) da Nash dengesi değildir, çünkü işsiz çalışmaya kayacaktır.

4. (*yardım yok, çalışmak*) Nash dengesi değil çünkü devlet yardıma kayacaktır.

Buradan çıkan sonuç, oyunun bir pür strateji Nash dengesinin olmadığıdır. Fakat Refah Oyunu bir karma strateji Nash dengesine sahiptir. Oyuncuların fayda düzeyleri Tablo 2.10'daki fayda düzeylerinin beklenen değerleridir. Eğer devlet *yardım* hareketini  $p$  olasılıkla oynarsa ve işsiz kişi de  $q$ 'olasılıkla çalışırsa, devletin beklenen faydası

$$\begin{aligned} u_d &= p[3q + (-1)(1 - q)] + (1 - p)[-1 \cdot q + 0 \cdot (1 - q)] \\ &= p(5q - 1) - q. \end{aligned}$$

Eğer sadece pür stratejilerin olduğuna imkan verirse,  $p$  olasılığı 0 veya 1'e eşit olur. Fakat oyunda karma strateji izlendiğinde devletin  $p$  hareketi sıfırdan bire uzanan bir aralığa sahip olur, dolayısıyla pür stratejiler bunun uç noktalarıdır. Eğer bunun bir maksimizasyon problemi olduğuna imkan verirse, devletin beklenen fayda fonksiyonunun seçim değişkenine göre türevini alıp birinci derece koşulundan optimal olasılık değerini buluruz:

$$\frac{\partial u_d}{\partial p} = 5q - 1 = 0 \Rightarrow q = 0.2.$$

Elde ettiğimiz bu sonuç, karma strateji dengesinde, işsiz kişi zamanın %20'sini iş arayarak geçireceğini göstermektedir. Bu oldukça ilginç bir sonuç aslında, çünkü devletin problemine bakarken işsizinin optimal strateji parametresini bulduk. Böyle bir sonuç bulduk çünkü standard şekilde maksimizasyon metodunu kullanmadık. Problem işsizinin stratejisine bağlı olarak üç stratejiden birinin devletin faydasını

maksimize edebilmesidir: (i) eğer işsiz yeterince çalışma isteğinde değilse, yardım yok ( $p = 0$ ), (ii) eğer kişi çalışmayı yeterince yüksek olasılıkla isterse, yardım et ( $p = 1$ ) (iii) eğer işsiz çalışma olasılığı  $q = 0.2$  sınırındaysa, herhangi bir olasılıkla yardım et, çünkü devlet kayıtsızdır.

Üçüncü durum karma bir stratejinin varlığına işaret eder. Bunu görmek için, aşağıdaki adımlara bakalım:

1. Devlet için optimal bir karma strateji vardır
2. Eğer kişi zamanının %20'sinden fazlasında iş ararsa devlet yardım etmeyi seçecektir. Fakat eğer kişi zamanının %20'sinden daha azında iş aramayı seçerse devlet asla yardım etmeyecektir.
3. Eğer karma strateji devlet için optimal ise, kişi çalışmayı %20 olasılıkla seçmelidir

Bu arada devletin yardım yapma olasılığını bulmak için işsiz fayda fonksiyonuna ( $u_i$ ) bakmalıyız. İşsiz fayda fonksiyonu aşağıda belirtildiği gibidir,

$$u_i = p[2q + 3(1 - q)] + (1 - p)1 \cdot q + 0 \cdot (1 - q) = -q(2p - 1) + 3p. \quad (2.7)$$

(2.7)'deki fayda fonksiyonunun birinci dereceden koşulundan işsiz en iyi tepki fonksiyonunu buluruz,

$$\frac{\partial u_i}{\partial q} = -(2p - 1) = 0 \Rightarrow p = 0.5.$$

Eğer işsiz çalışmayı 0.20 olasılıkla seçerse, devlet %100, %0 veya bunun arasında bir olasılıkla yardım etme arasında kayıtsızdır. Eğer stratejiler Nash dengesi ise devlet yardım etme olasılığını  $p = 0.5$  olasılıkla seçmelidir. Böylece karma strateji Nash dengesinde devlet yardımı 0.5 olasılıkla ve işsiz iş aramayı 0.2 olasılıkla seçmelidir. Denge sonucu, fayda matrisindeki dört kutudan biri olabilir. En yüksek gerçekleşme olasılığı olanlar ise (*yardım yok, çalışmamak*) ve (*yardım, çalışmamak*) her birinin aynı anda gerçekleşme olasılığı  $0.4 (= 0.5(1 - 0.2))$ 'dir.

Bu örnek üzerinden karma stratejilerin tam anlamıyla ne olduğunu biraz tartışalım. Çünkü karma strateji aslında oldukça tartışmalı bir kavramdır. Genel olarak karma strateji oyuncuların pür stratejilerini rassallaştırmasıdır. Fakat genel kabul gören görüş, karma strateji oyuncunun stratejilerini rassallaştırması diğer oyuncuların nezdinde kendisinin ne yapacağı konusunda belirsizlik yaratması olarak tanımlanır. Bu tanım nispeten daha tatminkâr gözükmektedir.

Karma stratejiler pür stratejiler kadar sezgisel anlamaya dönük kavramlar değildir. Bu yüzden bir çok oyun teorisyeni model kurarken kendisini pür strateji dengeleriyle sınırlandırır. Karma stratejilerin kullanımına karşı çıkan bir argümana göre, gerçek hayatta insanlar rassal harekette bulunmazlar. Fakat bu güçlü bir itiraz değildir çünkü karma stratejilerin olduğu bir oyunda, rassallık herhangi bir oyuncu açısından değil de oyundaki diğer oyuncular açısından söz konusudur. Yani birey hangi harekette bulunacağını bilir fakat belirsizlik diğerleri açısından mevcuttur. Açıkça rassallık çok genel olmasa bile bazı alanlarda mümkündür, örneğin

vergi müfettişleri rassal denetim yaparlar veya telefon şirketleri rassal olarak operatörlerinin nazik olup olmadıklarını kontrol ederler.

Daha sorunlu olan durum ise, karma stratejiyi seçen bir oyuncunun her zaman iki pür strateji arasında kayıtsız olma durumudur. Refah oyununda, işsiz, devletin karma stratejini veri aldığı anda, iki pür strateji ve tüm karma stratejiler arasında kayıtsızdır. Eğer işsiz belirli bir karma strateji izlemese, yani  $q = 0.2$  stratejisini izlemese, denge olmayacaktır çünkü devlet buna tepki olarak stratejisini değiştirecektir. İşsiz kişi tarafından seçilen olasılıktaki küçük bir sapmada bile denge oluşmasını engelleyecektir çünkü devlet tepki verecektir. Bu anlamda karma Nash dengesi zayıf bir dengedir.

Refah Oyununu yorumlamanın diğer bir yolu da tek bir işsizin olduğunu düşünmek yerine çok sayıda benzer fayda ve tercihlere sahip işsizler olduğunu düşünmektir. Devlet her bir işsize aynı şekilde davranmaktadır. Karma strateji dengesinde her bir işsiz çalışmayı 0.2 olasılıkla seçer, bir kişilik oyunda olduğu gibi. Fakat çok oyunculu bir oyun bir pür strateji dengesine sahiptir: işsizlerin yüzde 20'si *çalışmak* pür stratejisini, kalan yüzde 80' ni ise *çalışmamak* pür stratejisini seçer. Fakat buradaki problem bir işsizin nasıl olup ta bir stratejiyi veya diğerini seçtiğidir. Fakat model dışındaki bireysel karakterlerin bu tür davranışları belirlediğini varsayabiliriz. Tabi burada oyuncu sayısı önemlidir çünkü bir birey varken oyuncuların yüzde şu kadarı diyemeyiz. Bunun için de oyuncuların sayısını sürekli bir değişken olarak düşünmek mümkün ve kolaylaştırıcı bir varsayım olarak kullanabiliriz.

Karma stratejileri için yapılan başka bir yorum da şöyle olabilir (bu yorum tek bir işsizin olduğu bir yapıda da geçerlidir): İşsiz kişi, bir işsizler popülasyonundan seçilsin ve devlet bu işsizin nasıl biri olduğunu bilmesin. Devletin bildiği tek şey (0.2, 0.8) oranlarında iki tip işsiz olduğudur: çalışmayı seçenler eğer devlet  $p = 0.5$  olasılıkla yardım etmeyi seçerse ve çalışmayı seçmeyenler aksi durumda.

## 2.6 Belirli Grup Oyunlarda Karma Strateji Nash Dengesi

Karma strateji mantığının önemli oranda kullanıldığı üç oyun kategorisi vardır. Bu oyun kategorilerini Tablo 2.11 üzerinden tanımlayalım:

|        |        |
|--------|--------|
| $m, w$ | $n, x$ |
| $p, y$ | $r, z$ |

**Tablo 2.11**

**Koordinasyonsuzluk oyunları:** Bu tür oyunlar tek bir dengeye sahiptirler, o da karma stratejilerle ifade edilir. Fayda düzeyleri şöyledir: (i)  $m > p, r > n, x > w, y > z$  veya (ii)  $p > m, n > r, w > x$  ve  $z > y$  dir. Refah Oyunu bir koordinasyonsuzluk oyunudur.

**Koordinasyon oyunları:** Bu tür oyunlar üç dengeye sahiptirler: iki simetrik pür strateji dengesi ve bir tane de simetrik karma strateji dengesidir. Fayda düzeyleri

şöyledir:  $m > p, r > n, w > x$ , ve  $z > y$ . Cinsiyetler Savaşı koordinasyon oyunlarına örnek olarak verilebilir.

*Katkı oyunları* üç dengeye sahiptir. İki simetrik olmayan (asimetrik) pür strateji dengesi ve bir simetrik karma strateji dengesi. Fayda düzeyleri şöyledir:  $p > m, n > r, x > w$ , ve  $y > z$ . Fakat  $p < n$  ve  $y > x$  durumunda da bu geçerlidir. Rasmusen (2005) bu oyunları *katkı oyunları* olarak nitelendirmektedir. Bunun gerekçesini de şöyle açıklamaktadır. İki oyunculu bir oyunda her bir oyuncu kamu malının arzına katkıda bulunma seçeneğinin olmasına rağmen her oyuncu diğerinin maliyeti taşımasını ister. Bu oyunun Mahkumlar Çıkmazı oyunundan farkı, bir katkı oyununda her oyuncu ancak gerekliyse tek başına katkıda bulunmayı ister. Diğer yandan katkı oyunları Cinsiyetler Savaşı oyunundan farklı bir oyun gibi gözüktse de özünde aynı oyunlardır. Her iki oyun da iki oyuncuya göre ters sıralı iki pür strateji dengesine sahiptir.

Şimdi de belirli grup oyunlarda karma strateji Nash dengesinin genel parametrelerle nasıl ifade edileceğine bakalım. Tablo 2.12'de genel parametrelerle ifade edilen fayda matrisi verilmektedir.

|                |             |                 |
|----------------|-------------|-----------------|
|                | $L(\alpha)$ | $R(1 - \alpha)$ |
| $U(\beta)$     | $m, w$      | $n, x$          |
| $D(1 - \beta)$ | $p, y$      | $r, z$          |

**Tablo 2.12**

Oyunun karma strateji dengesini bulmak için, pür stratejilerden gelen beklenen faydaları eşitleriz:

$$u_1(U) = \alpha m + (1 - \alpha)n, \quad (2.8)$$

$$u_1(D) = \alpha p + (1 - \alpha)r. \quad (2.9)$$

Yukarıdaki iki denklemi, (2.8) ve (2.9), eşitlersek, denge  $\alpha^*$  ( $\alpha$  parametresi 2.oyuncunun  $L$  hareketini oynama olasılığıdır) değerini buluruz:

$$\alpha^* = \frac{r - n}{(r - n) + (m - p)}. \quad (2.10)$$

Beklenen faydaları eşitlemek, kayıtsız kaldığı karma stratejiyi bulmaya yarar. Bu yöntem özü itibarıyla seçim değişkenine göre beklenen fayda fonksiyonunun türevini alıp sifıra eşitlemekle aynıdır, dolayısıyla aynı sonucu verir.

Benzer olarak, 2.oyuncu için pür stratejilerden beklenen faydalarını eşitler,

$$u_2(sol) = \beta w + (1 - \beta)y = u_2(sağ) = \beta x + (1 - \beta)z.$$

Buradan hareketle denge  $\beta^*$  ( $\beta$  parametresi 1.oyuncunun  $U$  hareketini oynama olasılığıdır) değerini buluruz,

$$\beta^* = \frac{z - y}{(z - y) + (w - x)}. \quad (2.11)$$

Şimdi (2.10) ve (2.11) ile ifade edilen denge karma stratejilerine ait bir takım özellikleri ifade edelim:

Birincisi, karma strateji mevcut olmasa bile, karma bir strateji bulmak için faydaları-eşitleyen metodu izleyebiliriz. Örneğin  $D$  hareketinin 1.oyuncu için kesin baskın olduğunu varsaydığımızda, yani  $p > m$  ve  $r > n$ , 1.oyuncu karma strateji izlemeyi istemeyecektir böylece denge karma strateji cinsinden ifade edilemez. Bu durumda (2.10) yanıltıcı olarak  $\alpha^* > 1$  sonucunu verecektir.

İkinci olarak, karma strateji dengesi sadece faydaların ordinal değerlerine değil aynı zamanda kardinal değerlerine de bağlıdır (bunu daha önce ifade etmiştik). Ordinal sıralamalar, bir dengenin karma stratejilerle ifade edilip edilmeyeceğini belirtmek için gerekli bilgi iken, kardinal değerler karma stratejilerin değerlerini bulmak için gereklidir. Örneğin Mahkumlar Çıkmazında (Tablo 1.1) (itiraf, itiraf) profilindeki fayda düzeyinde küçük bir değişiklik dengeyi etkilemezken, yukarıdaki tablodaki (D, R) strateji profilinde oluşan  $z$  değeri biraz değiştirilirse 2.oyuncunun (2.11)'de ifade edilen denge karma olasılığı,  $\beta^*$ , değişir.

Üçüncüsü, kardinal değerler önemli olmasına rağmen, oyunun yapısını çok değiştirmeden fayda düzeyleri lineer dönüştürme ile değiştirilebilir (monoton ve lineer olmayan dönüştürmeler oyunun yapısını etkileyebilir), yani yukarıdaki tablodaki her  $\pi$  fayda değeri eğer  $a + b\pi$  değeri olarak lineer dönüştürülürse (2.11) denklemini şöyle olur:

$$\begin{aligned}\gamma^* &= \frac{(a + bz) - (a + by)}{((a + bz) - (a + bz)) + ((a + bw) - (a + bx))} \\ &= \frac{z - y}{(z - y) + (w - x)} = \beta^*.\end{aligned}$$

Fakat gördüğümüz gibi denge olasılık değeri değişmedi. Kısaca fayda değerleri lineer dönüştürüldüğünde karma strateji dengesi ve karma strateji denge değerleri değişmiyor.

Dördüncüsü, Refah Oyununda da ifade edildiği gibi her oyuncunun karma stratejisi sadece diğer oyuncunun fayda parametrelerine bağlıdır. Örneğin (2.11)'de ifade edilen 1. oyuncunun denge karma stratejisi, sadece 2.oyuncunun  $w, x, y$  ve  $z$  parametrelerine bağlıdır, bu ifadede kendi parametreleri yoktur. Bu 2.oyuncu için de geçerlidir. Şimdi bu genel formatta verilen oyunun daha özel bir hali olan denetim oyununa bakalım.

## Örnek 2.6 Denetim Oyunu

Oyun teorisinin standart oyunlarından biri de Denetim Oyunudur. Denetim Oyunu bir tek karma strateji dengesine sahip bir koordinasyonsuzluk problemidir. Bu oyun, aynı zamanda karma stratejiler ile rassal hareketler arasındaki ayrılması zor fakat önemli olan bir farkı göstermek için de kullanılır.

Vergi müfettişleri vergi mükelleflerinin verdikleri beyanların doğru olup olmadığını belirlemek için teftişte bulunurlar. Müfettişlerin amacı minimum maliyetle

hileyi (yanlış beyanı) engellemeye çalışmaktır. Mükellefler eğer yakalanmazlarsa hile yapmayı istemektedirler. Hileyi engellemenin faydasının 5 olduğunu, denetleme yapmanın maliyetinin  $m < 5$  olduğunu, mükelleflerin kanuna itaat etmelerinin maliyetinin 1 olduğunu ve hile yaparken yakalanmanın cezasının ise  $c > 1$  olduğunu varsayalım. Tablo 2.13'de vergi müfettişi satır oyuncusu (1.oyuncu) ve vergi mükellefi sütun oyuncusu (2.oyuncu) olarak gösterilmektedir.

|                              | <i>hile</i> ( $\alpha$ ) | <i>itaat</i> ( $1 - \alpha$ ) |
|------------------------------|--------------------------|-------------------------------|
| <i>denetim</i> ( $\beta$ )   | $5 - m, -c$              | $5 - m, -1$                   |
| <i>güven</i> ( $1 - \beta$ ) | $0, 0$                   | $5, -1$                       |

**Tablo 2.13** Denetim oyunu

Faydaları-eşitleme yöntemini veya birinci dereceden koşulu kullandığımızda karma strateji dengesini elde ederiz ((2.10) ve (2.11)'de ifade edildiği gibi):

$$\Pr(hile) = \alpha^* = \frac{5 - (5 - m)}{(5 - (5 - m)) + ((5 - m) - 0)} = \frac{m}{5}, \quad (2.12)$$

$$\Pr(denetim) = \beta^* = \frac{-1 - 0}{(-1 - 0) + (-c - 1)} = \frac{1}{c}. \quad (2.13)$$

Buradan hareketle (2.12) ve (2.13)'deki denge karma stratejileri kullanırsak beklenen faydalar aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha^*(0) + (1 - \alpha^*)(5) = 5 - m, \\ u_2 &= \beta^*(-c) + (1 - \beta^*)(0) = -1. \end{aligned}$$

Şimdi bu Denetim Oyununu biraz değiştirelim. Müfettişin her şüpheli için denetim politikası yerine rassal bir örnekleme denetlediğini varsayalım. Bu yeni yöntem karma strateji olmak zorunda değildir. Denetim Oyunun ilk versiyonunda, (2.13)'da ifade edildiği gibi karma strateji dengesi tüm şüphelilerin  $1/c$  olasılıkla denetlenmesi sonucuna varmıştık. Bu durum, şüphelilerin  $1/c$  kadarının rassal çekilerek denetleneceğinin ilan edilmesi durumundan farklıdır.

Bu oyun için önce müfettiş hareket eder ve hareketi vergi gelirlerinin ne kadarının denetleneceğini seçmek olsun,  $\mu$ . Müfettiş şüphelilerin yanlış bilgi vermemelerini sağlamak istemektedir. Bunun için aşağıdaki durumu sağlayan  $\mu$  değerini seçer:

$$u_1(itaat) \geq \pi_1(hile) \Rightarrow -1 \geq \mu(-c) + (1 - \mu)(0) \Rightarrow \mu \geq 1/c. \quad (2.14)$$

Dengede bu yüzden müfettiş  $\mu = 1/c$  olasılığını seçer (daha yüksek bir denetim olasılığını sürdürmek rasyonel olmadığından, denetim olasılığı,  $1/c$ 'e eşitlenir). Vergi mükellefleri kurala itaat ederler. Bu durumda denetçinin faydası  $u_1 = 5 - \mu m$  olur, ki bu fayda düzeyi birinci oyundaki  $5 - m$  değerinden daha iyidir. Mükellefin faydası ise her iki durumda da aynıdır,  $u_2 = -1$  (fayda düzeylerinin böyle olduğunu

faýda matrisinden  $\mu$  olasılığını da kullanarak teýit edin).

Bu oyunda müfettişin hareketi rassal olsa da, oyunun dengesi pür stratejilerden oluşur. Bu durum oyunun birinci versiyonundan farklıdır çünkü mükellef itaat hareketini seçse bile müfettiş maliyetli denetimi yapmak zorundadır. Bu oyunun ilk versiyondan diğer bir farklılığı, hareket kümesinin sürekli olmasıdır. Birinci oyunda karma stratejilere imkan verilse bile yani strateji kümesi,  $\beta \in [0, 1]$  aralığından gelse bile, hareket kümesi  $\{\text{denetim, güven}\}$  şeklinde kesiklidir. Fakat ikinci oyunda hareket kümesi sürekli,  $\mu \in [0, 1]$ 'dir.

Karma stratejili oyunlar sürekli stratejili oyunlar gibidir. Çünkü bu oyunlarda strateji değişkeni olan olasılık 0 ile 1 sürekli aralığından seçilir. İkinci oyunda da aslında strateji 0 ve 1 aralığından seçilir fakat bu örneğin yüzde 70 denetim olasılığını seçmek şeklinde bir karma strateji değildir. Bu oyundaki karma strateji muhtemelen şöyle bir seçim olurdu, örneğin 0.5 olasılıkla denetim olasılığının %60 ve 0.5 olasılıkla da denetim olasılığının %80 seçildiği bir karma strateji gibidir. Denetim olasılığının %70 olduğu bir pür strateji ile bir karma strateji (%70 denetim ve 30% denetim yok gibi bir karma strateji) arasında önemli bir fark vardır. Pür strateji seçimi geri dönüşü olan bir seçim değildir, oyuncu pür stratejileri arasında kayıtsız olduğu durumlarda bile pür strateji seçimini sürdürür. Fakat karma strateji dengede oyuncunun ne yapması konusunda kayıtsız olduğunda yaptığı bir tercihtir.

Aşağıdaki bölümde karma stratejilerle sürekli stratejiler arasındaki farkı daha net göstermeye çalışacağız.

## 2.7 Sürekli Değişkenlerle Karma Strateji Dengesi

Şu ana kadar baktığımız oyunlar bir açıdan basitti. Çünkü hareket kümesindeki hareketlerin kardinalliği (sayısı) sınırlıydı. Oysa biliyoruz ki hareketleri sürekli bir aralıkta tanımlayabiliriz. Bir oyuncu örneğin 10 ile 20 arasında sonsuz sayıda fiyattan herhangi bir fiyatı seçebilir veya her oyuncunun negatif olmayan bir miktar düzeyi seçme imkanına sahip olduğu Cournot oyununda olduğu gibi oyuncular sonsuz hareketler kümesine sahip olabilir.

Bu tür oyunların karma stratejilerini bulma yöntemi, kullanılan teknikler farklı olsa da, her oyuncunun sınırlı sayıda harekete sahip olduğu oyunlarda karma strateji bulma prensibi ile aynıdır. Sınırsız hareket kümesine sahip bir oyuncunun karma stratejisi, hareket kümelerine atfedilen olasılıklarla belirlenir, yani kümedeki tek bir harekete atfedilen olasılıklarla belirlenmez. Çünkü bu durumda tüm olasılıklar sıfır olurdu (sonsuz eleman içeren bir aralıktan bir noktanın gelme olasılığı sıfırdır). Böyle oyunlar daha çok tek boyutlu aralıklarla (reel sayılar kümesinde) ifade edilen hareketler kümesidir. Bu tür durumlarda karma strateji dengesinin nasıl bulunduğunu anlamak için örnekler verelim.

### Örnek 2.7

Örneğin iki oyunculu bir oyun düşünelim. Her bir oyuncunun hareket kümesi  $[a_i, b_i]$ ,  $i = 1, 2$ , aralığında tanımlı olsun. Her oyuncunun karma stratejisi bu

aralıktaki dağılım fonksiyonu ile ifade edilecektir. Yani her bir  $i$  oyuncusunun karma stratejisi, her bir  $s_i$  stratejisi için tanımlanan  $0 \leq F_i(s_i) \leq 1$  bir olasılık fonksiyonudur, burada  $F_i(s_i)$  bize  $i$  oyuncusunun en fazla  $s_i$  stratejisini (veya hareketini) seçme olasılığını verir.

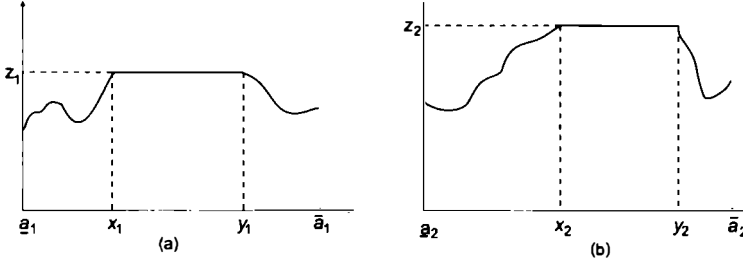
Böyle oyunlarda karma strateji Nash dengesinin biçimi çok kompleks olabilir. Fakat bu oyunlarda bazen basit dengelere de sahip olabiliriz. Buna uygun bir örnek verelim. Her  $i = 1, 2$  oyuncusu için aşağıdaki koşulları sağlayan  $(F_1, F_2)$  karma strateji çiftini düşünelim:

(i) Herhangi bir  $i$  oyuncusunun  $F_i$  karma stratejisi,  $[x_i, y_i]$  aralığının dışındaki aralıklara şu olasılıkları atfediyor:  $w < x_i$  için  $F_i(w) = 0$  ve  $w \geq y_i$  için  $F(w) = 1$ .

(ii)  $i$  oyuncusu  $s_i$  stratejisini seçtiğinde ve diğer  $j$  oyuncusu  $F_j$  karma stratejisini seçtiğinde,  $i$  oyuncusunun beklenen faydası aşağıdaki gibidir:

$$u_i = \begin{cases} z_i, & x_i \leq a_i < y_i \\ \leq z_i, & a_i < x_i \text{ ve } a_i > y_i \end{cases}$$

burada  $z_i$  sabit bir parametredir. Oyuncuların beklenen faydaları Şekil 2.5'de gösterilmektedir.



**Şekil 2.5** (a) Birinci oyuncunun beklenen faydası (b) İkinci oyuncunun beklenen faydası

Şekil 2.5(a)'da 1.oyuncunun karma stratejisi,  $F_1$ , sadece  $[x_1, y_1]$  aralığındaki hareketlere pozitif olasılık atfeder, 2.oyuncu da benzer olarak Şekil 2.5(b)'de  $[x_2, y_2]$  aralığındaki hareketlere pozitif olasılık atfeder. 2.oyuncunun  $F_2$  karma stratejisi verildiğinde, 1.oyuncunun beklenen faydası sol taraftaki şekilde ifade edilir ve 1.oyuncunun  $F_1$  karma stratejisi verildiğinde 2.oyuncunun beklenen faydası sağ tarafta gösterildiği gibidir, böylece  $(F_1, F_2)$  karma strateji dengesidir.

### Örnek 2.8

Burada vereceğimiz oyun örneği Osborne (2003)'den derlenmiştir. Bu oyun bir ihale örneği olmasına rağmen (ihale oyunlarını daha sonra ayrı bir bölümde detaylı inceleyeceğiz), içinde barındırdığı mantık açısından daha genel amaçlar için de kullanılabilir. Böyle bir oyunun karma stratejisinin nasıl bulunduğu bakalım.

İki kişi  $M$  değerindeki bir obje için kapalı bir zarf içinde teklifte bulunuyorlar. Her birinin teklifi  $M$  değerine kadar negatif olmayan bir sayı olabilir. Kazanan kişi en yüksek teklifte bulunan kişidir. Tekliflerin aynı olması durumunda her biri objenin yarısını almaktadır, bu da  $M/2$ 'dir. Bu durum stratejik bir oyun olarak modellenenebilir. İhale oyunu olarak düşünülen bu oyun aynı zamanda her çıkar grubunun hükümeti ikna etmek için para harcadığı ve en fazla para harcayanın kazandığı bir lobicilik faaliyeti olarak da düşünülebilir.

Her  $i$  oyuncusunun tercihleri aşağıda verilen fayda fonksiyonunun beklenen değeridir:

$$u_i(a_1, a_2) = \begin{cases} -a_i & \text{eğer } a_i < a_j \\ M/2 - a_i, & \text{eğer } a_i = a_j \\ M - a_i & \text{eğer } a_i > a_j \end{cases}$$

burada  $j$  diğer oyuncudur.

Bu oyunun pür strateji Nash dengesi yoktur. Çünkü:

i. Eğer  $x < M$  ise, hiç bir hareket çifti  $(x, x)$ , Nash dengesi değildir çünkü her bir oyuncu teklifini artırarak faydasını artırabilir.

ii.  $(M, M)$  Nash dengesi değildir çünkü oyuncular tekliflerini sıfıra çekerek faydalarını da  $-M/2$  düzeyinden 0 düzeyine çıkartabilirler.

iii. Eğer  $a_1 \neq a_2$  ise hiç bir  $(a_1, a_2)$  hareket çifti Nash dengesi değildir çünkü teklifi daha yüksek olan oyuncu teklifini azaltarak faydasını artırabilir (ve teklifi daha düşük olan oyuncu, eğer teklifi pozitif ise, teklifini 0'a çekerek faydasını artırabilir).

Oyunun bir karına strateji Nash dengesine sahip olduğunu düşünelim. Bunun için  $F_i$ ,  $i$  oyuncusunun karma stratejisini gösterebilir (olası teklif aralıkları üzerine tanımlanan dağılım fonksiyonu). Tek bir teklifin olasılığının sıfır olacağını biliyoruz zaten. Böylece  $F_i(a_i)$ ,  $i$  oyuncusunun en fazla  $a_i$  teklifinde bulunma olasılığını göstermektedir. Dahası bir önceki örnekte olduğu gibi, strateji çiftlerinin,  $(F_1, F_2)$ , her iki oyuncunun da sadece  $x_i$  ve  $y_i$  aralığındaki değerlere pozitif olasılık atfettiğini düşünüyoruz.

Böyle bir dengeğin varlığını araştırmak için, ilk önce 2. oyuncunun karma stratejisi veri alındığında, 1.oyuncunun  $a_1$  hareketini oynadığında beklenen faydasını bulalım:

i. Eğer  $a_1 < x_2$  ise  $a_1$  değeri 2.oyuncunun teklifinden kesin (bir olasılıkla) daha azdır, bu durumda 1.oyuncunun faydası  $-a_1$ 'dir

ii. Eğer  $a_1 > y_2$  ise  $a_1$  değeri 2.oyuncunun teklifini kesin aşar, bu durumda 1.oyuncunun faydası ise  $M - a_1$ 'dir

iii. Eğer  $x_2 \leq a_1 < y_2$  ise 1.oyuncunun beklenen faydası şöyle hesaplanır. 2. oyuncunun teklifinin  $a_1$ 'den az olma olasılığı  $F_2(a_1)$ 'dir. Bu durumda 1.oyuncunun faydası  $M - a_1$ ; 2.oyuncun  $a_1$  değerini aşma olasılığı  $1 - F_2(a_1)$ 'dir ve bu durumda 1.oyuncunun faydası ise  $-a_1$ 'dir. 2.oyuncunun teklifinin  $a_1$  değerine eşit olması sıfırdır (tek bir nokta olduğu için). Yani kısaca 1. oyuncunun beklenen faydası

şöyledir:

$$(M - a_1)F_2(a_1) + (-a_1)(1 - F_2(a_1)) = MF_2(a_1) - a_1.$$

Şimdi  $x_2$  ve  $y_2$  değerlerini ve  $F_2$  stratejisini bulmamız gerekir ki bu değerler 1.oyuncunun beklenen faydası Şekil 2.5'in (a) panelinde gösterilen koşulu sağlayacak şekilde olmalıdır: Fayda fonksiyonu  $x_1$  ve  $y_1$  aralığında sabit bir değer alır ve  $a_1 < x_1$  ve  $a_1 > y_1$  aralığında bu sabit değerden daha az bir değer alır. Faydasının  $x_1 \leq a_1 \leq y_1$  aralığında sabit kalması için, bu aralıkta  $MF_2(a_1) - a_1 = c_1$  (herhangi bir  $c_1$  sabiti için) koşulu sağlanmalıdır. Aynı zamanda  $F_2(x_2) = 0$ ,  $F_2(y_2) = 1$  ve  $F_2$ 'nin azalmayan bir fonksiyon (kümülatif (birikimli) dağılım fonksiyonu) olması gerekir. Aynı koşullar  $x_2, y_2$  ve  $F_1$  için de sağlanmalıdır.

Eğer  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $y_1 = y_2 = M$  ve  $0 \leq z \leq M$  aralığındaki tüm  $z$ 'ler için  $F_1(z) = F_2(z) = z/M$  (homojen dağılımdan dolayı) ise tüm koşullar sağlanır. Her oyuncunun beklenen faydası sabittir ve tüm  $a_1$  hareketleri için sıfıra eşittir.

Kısaca her oyuncu hareketlerini homojen bir şekilde rassallaştırdığında oyun karma Nash dengesine sahip olur. Dengede her oyuncunun beklenen faydası 0'dır. Ortalamada bir oyuncunun harcadığı miktar malın değerine eşittir.

### Örnek 2.9 Patent Yarışı

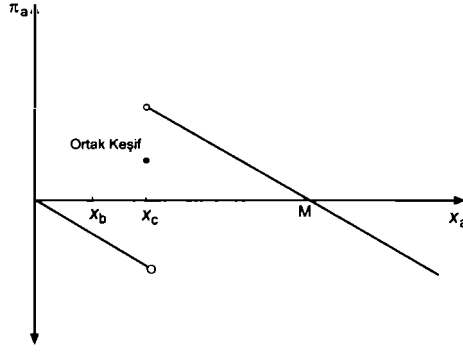
Birbirine benzer üç firmamız olsun, A, B ve C firmaları. Her firma araştırma-geliştirme (AR-GE) faaliyetlerine aynı anda  $x_i \geq 0$ ,  $i = a, b, c$ , kadar harcama yapıyor. Firmalar risk nötrdür (yani fayda fonksiyonları lineerdir) ve iskonto oranı sıfırdır (yani yarının önemi yok). İnovasyon (teknolojik yenilik)  $t(x_i)$  zamanında gerçekleşmektedir. Eğer AR-GE harcamaları artarsa bu daha kısa sürede inovasyon yapılacağı anlamına gelir, yani  $t'(x_i) < 0$ . Patentin parasal değeri  $M$  (patenti alan firmaya sağladığı katkı) kadardır. Eğer birden fazla sayıda firma aynı anda yenilik yaparsa patentin değeri eşit şekilde paylaşılmaktadır. Aşağıda  $i$  oyuncusunun fayda yapısı verilmektedir:

$$\pi_i = \begin{cases} M - x_i & \text{eğer } t(x_i) < t(x_j), \forall j \neq i, \\ \frac{M}{1+n} - x_i, & \text{eğer } t(x_i) = t(x_k), n \geq 1 \\ -x_i, & \text{eğer } t(x_i) > t(x_j), \exists j \end{cases} \quad (2.15)$$

burada  $n$  aynı anda inovasyon yapan firma sayısını göstermektedir.

Yukarıda (2.15)'de belirtilen birinci satır,  $i$  firması diğer firmalardan daha erken bir inovasyon yaparsa, elde edeceği fayda patentin değeri eksi yaptığı harcama kadar,  $M - x_i$ , olduğunu ifade eder. Fakat eğer diğer herhangi bir firma ile aynı zamanda inovasyon yaparsa (ikinci satır), bu firmalarla patentin değerini paylaşacaktır,  $M/(1+n)$ , dolayısıyla faydası  $M/(1+n) - x_i$  olur. Üçüncü satır ise şunu ifade eder: Eğer  $i$  firması inovasyonu daha geç yaparsa bu durumda bu yarışı kaybedecek ve kaybı da yaptığı harcama kadar olacaktır,  $-x_i$ .

Bu oyunun bir pür strateji Nash dengesi yoktur çünkü fayda fonksiyonları sürekli değildir. Bir firmanın harcamasındaki küçük bir değişim denge fayda düzeylerinde



Şekil 2.6 Patent oyunu

büyük farklılıklar yaratacaktır (bu durum  $a$  firması için  $x_b$  ve  $x_c$  'nin sabit değerleri için Şekil 2.6'da görülebilir). Şekildeki harcama düzeyleri denge değerleri değildir. Eğer  $a$  firması herhangi bir araştırma harcaması olan  $x_a$  düzeyini seçerse ki bu değer  $M$ 'den daha azdır,  $b$  firması  $x_a + \varepsilon$  ile cevap verecek patenti kazanacaktır. Eğer  $a$  firması,  $x_a = M$  harcama düzeyini seçerse bu durumda  $b$  ve  $c$  firmaları  $x_b = 0$  ve  $x_c = 0$  ile tepki verecektir, bu da  $A$  firmasının  $x_a = \varepsilon$ 'a kaymasına neden olacaktır.

Fakat bu oyunda simetrik bir karma strateji dengesi vardır, yani tüm oyuncular için aynı karma strateji söz konusudur. Burada  $i$  firmasının  $x$ 'e eşit veya ondan daha az bir harcama düzeyi seçmesinin olasılığını  $F_i(x)$  ile gösterelim. Bu fonksiyon firmanın karma stratejisini tanımlar. Karma strateji dengesinde bir oyuncu rassallaştırdığı pür stratejiler arasında kayıtsızdır. Pür stratejiler olan  $x_a = 0$  ve  $x_a = M$  harcama düzeyleri sıfır fayda sağladığından dolayı,  $a$  firması  $[0, M]$  aralığında rassallaştırma yaptığında her karma strateji için beklenen faydası sıfıra eşit olmak zorundadır. Pür stratejisi olan  $x_a$ 'dan beklenen faydası, "kazanmanın değeri eksi araştırma maliyetinin beklenen değeri" dir:

$$\pi_a(x_a) = \Pr(x_a \geq X_b, x_a \geq X_c)M - x_a = 0,$$

burada  $x$  rassal-olmayan değişkenleri ve  $X$  ise rassal değişkenleri temsil ediyor. Bu şöyle de yazılabilir (olasılıkların bağımsızlığından dolayı):

$$\pi_a(x_a) = M \Pr(X_b \leq x_a) \Pr(X_c \leq x_a) - x_a = 0$$

veya

$$\pi_a(x_a) = M F_b(x_a) F_c(x_a) - x_a = 0. \quad (2.16)$$

(2.16) denklemini tekrar düzenlediğimizde aşağıdaki yeni denklemi elde ederiz:

$$F_b(x_a) F_c(x_a) = \frac{x_a}{M}.$$

Tüm bu üç firma da simetrik yapıdan dolayı aynı karma dağılımı  $F(x)$ 'i seçer:

$$F(x) = \left(\frac{x}{M}\right)^{1/2}, 0 \leq x \leq M.$$

Özetle bu oyunda ortaya çıkan karma strateji Nash dengesi şunu göstermektedir: firmalar inovasyon için aşırı harcamalarda bulunurlar. Dolayısıyla tüm bu üç oyuncunun beklenen faydası sıfırdır. Çünkü patentin tüm değeri patent yarışı sırasında harcanmaktadır. Toplum açısından, patent için koşturmak tekel bir firma için daha erken sürede inovasyonun gerçekleşmesine neden olmakta, fakat bu durum yapılan maliyete değmemektedir.

## 2.8 Karma Stratejilerde Nash Dengesinin Varlığı

Kitabın daha önceki bölümünde sürekli strateji değişkenlerde Nash dengesinin varlık koşullarını Kakutani sabit nokta teoremi ile göstermiştik. Fakat oyuncuların stratejileri kesikli değişken olduğunda Nash dengesinin olamayabileceğini biliyoruz. Şimdi herhangi bir oyunda pür stratejiler kesikli de olsa rassallaştırılarak oynanmaları durumunda, yani pür stratejiler karma stratejiler şeklinde oynandıklarında, her zaman bir Nash dengesinin var olduğunu göstereceğiz.

Daha önce ifade edildiği gibi Kakutani (1941)'e göre aşağıdaki koşullar sağlandığında,  $f(x) : X \rightarrow X$ ,  $x \in X \subset R^n$  fonksiyonu sabit bir noktaya sahiptir, yani  $x \in f(x)$ :

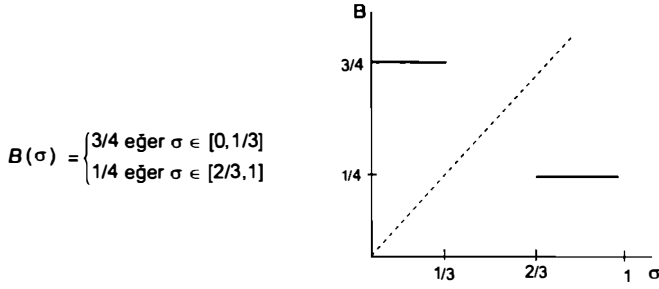
(i)  $X$  kümesi  $R^n$  uzayının kompakt, konveks ve boş-olmayan bir kümesidir. (ii)  $f(x)$ , tüm  $x'$  ler için boş-olmayan bir kümedir. (iii)  $f(x)$ , tüm  $x'$  ler için konveks bir kümedir. (iv)  $f$  kapalı bir kümedir.

Şimdi karma stratejilerde Nash dengesinin varlığının ispatını göstermek için bu koşulları en iyi tepki fonksiyonu olan  $B(\cdot)$  üzerinden tanımlayalım, yani  $f(x)$  fonksiyonu yerine  $B(\sigma)$  en iyi tepki fonksiyonunu yazalım, burada  $\sigma \in [0, 1]$  karma strateji olasılık değerini göstermektedir.

Kakutani sabit nokta teoremi,  $B : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  fonksiyonunun (ya da ilişkisini) yukarıdaki tüm koşulları sağladığında sabit bir noktası olduğunu ispatlar.

Kakutani'deki birinci koşul yani,  $\sigma \in [0, 1]$  kümesinin kompakt, konveks ve boş-olmayan bir küme olmasının neden önemli olduğuna bakalım. Örneğin  $\sigma = (0, 1)$  gibi kompakt olmayan bir tanım aralığında (açık bir küme olması dolayısıyla kompakt değil)  $B(\sigma) = \sigma^2$  fonksiyonunun kolayca görülebileceği gibi sabit bir noktası yoktur. Eğer  $\sigma$  boş bir küme olsaydı açıkça yine sabit bir nokta olmayacaktı. Eğer konveks olmasaydı da sabit bir noktası olmayacaktı, örneğin  $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$  tanım aralığı konveks değildir (çünkü arada boşluk var), bu konveks olmayan aralık üzerinden aşağıdaki gibi bir fonksiyon tanımlayalım. Açıkça bu fonksiyonun sabit noktası yoktur çünkü ortasında boşluk vardır (Şekil 2.7).

İkinci koşul olan  $B(\sigma)$  ilişkisinin boş olmaması gerekir. Örneğin aşağıdaki gibi  $B : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  gibi bir ilişki tanımlandığında açıkça  $B(\sigma)$  ilişkisi sabit bir

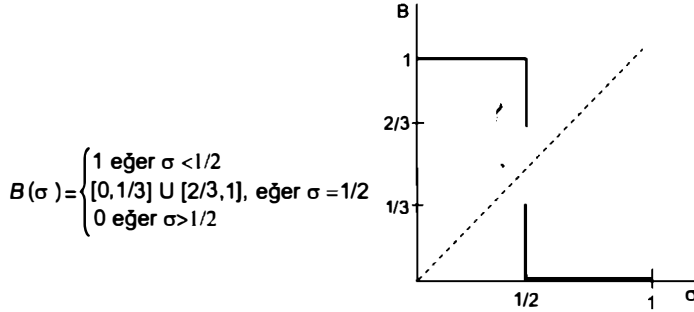


**Şekil 2.7** Konveks olmayan  $\sigma$  tanım aralığı

noktaya sahip değildir çünkü içinde bir boşluk vardır.

$$B(\sigma) = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{eğer } \sigma \in [0, \frac{1}{3}] \\ \emptyset & \text{eğer } \sigma \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{1}{4} & \text{eğer } \sigma \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

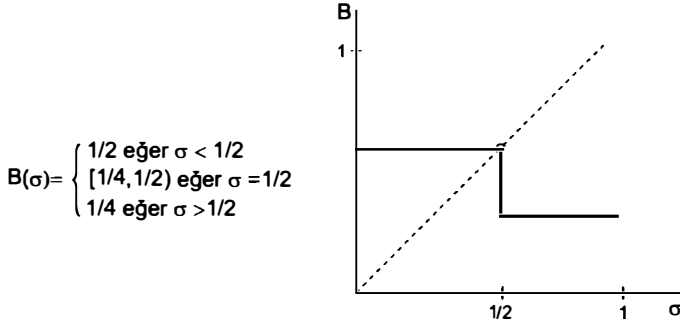
Üçüncü koşul sağlanmazsa yani eğer  $B(\sigma)$  konveks değilse, grafiğin sabit noktası yoktur. Şekil 2.8'de verilen örnek böyle bir durumu göstermektedir.



**Şekil 2.8**  $B(\sigma)$  konveks değil

Eğer son koşul sağlanmazsa, yani  $B(\sigma)$  kapalı bir grafik değilse, fonksiyon yine sabit bir noktaya sahip olmayacaktır. Örneğin Şekil 2.9'da gösterildiği gibi  $B(1/2) = [1/4, 1/2)$  konveks bir küme olmasına rağmen, bu küme kapalı değildir. Dolayısıyla sabit noktası yoktur.

Şimdi  $2 \times 2$  (iki kişili ve iki stratejili) büyüklüğünde bir oyunun karma Nash dengesinin varlığını ispatlayalım (bu ispat daha genel yapıdaki oyunlara, yani çok sayıda oyunculu ve stratejili oyunlara da genişletilebilir). Aslında yapmak istediğimiz şey, en iyi tepki fonksiyonlarının bir sabit noktası olup olmadığını göstermektir. 1.oyuncunun stratejilerini  $U$  ve  $D$  ile, 2.oyuncunun stratejilerini ise  $L$  ve  $R$  ile gösterelim.



Şekil 2.9  $B(\sigma)$  kapalı bir grafik değil

Yukarıda ifade edilen birinci koşul sağlanır: En iyi tepki fonksiyonu  $B : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ 'dir. Burada  $\sigma = [0, 1] \times [0, 1]$  karesi konveks ve kompakttır (çünkü sınırlı ve kapalıdır).

İkinci koşul için  $B(\sigma)$  kümesinin boş olmadığını kontrol edelim. Eğer  $B_1(\sigma_2)$  ve  $B_2(\sigma_1)$  boş değilse,  $B(\sigma)$  boş değildir. Bunu  $B_1(\sigma_2)$  için gösterelim (benzer olarak  $B_2(\sigma_1)$  için de gösterilebilir). 1.oyuncu  $\alpha$  stratejisini ve 2.oyuncu  $\beta$  stratejisini oynadığında beklenen faydası,  $u_1(\alpha)$ , şöyle ifade edilebilir:

$$u_1(\alpha) = \alpha\beta u_1(U, L) + \alpha(1 - \beta)u_1(U, R) + (1 - \alpha)\beta u_1(D, L) + (1 - \alpha)(1 - \beta)u_1(D, R).$$

Fayda fonksiyonu,  $u_1(\alpha)$ ,  $\alpha$ 'e göre sürekli bir fonksiyondur.  $\alpha$  değerinin  $[0, 1]$  kapalı aralıkta tanımlı olduğunu biliyoruz. Bu yüzden  $u_1(\alpha)$  fonksiyonu bu aralıkta bir maksimuma sahiptir<sup>2</sup>. Bu yüzden 1.oyuncunun  $u_1(\alpha)$  fayda fonksiyonunu maksimize eden bir en iyi tepki değeri,  $\alpha^*$ , vardır.

Üçüncü koşul ise şöyle kontrol edilir. Eğer 1.oyuncunun, 2.oyuncunun  $\beta$  stratejisine en iyi iki tepkisi varsa yani  $\alpha_1^*$  ve  $\alpha_2^*$  değerleri mevcutsa, 1.oyuncunun herhangi bir  $\lambda \in (0, 1)$  için  $U$  hareketini  $\lambda\alpha_1^* + (1 - \lambda)\alpha_2^*$  olasılıkla oynaması da en iyi tepkidir. Hem  $\alpha_1^*$  hem de  $\alpha_2^*$  en iyi tepki olduklarından 1.oyuncuya aynı faydayı sağlarlar. Bu da şu anlama gelir 1.oyuncu  $\alpha_1^*$  stratejisini  $\lambda$  olasılıkla,  $\alpha_2^*$  stratejisini de  $(1 - \lambda)$  olasılıkla oynaması durumunda da elde edeceği fayda aynı olacaktır. Dolayısıyla 1.oyuncunun en iyi tepki fonksiyonu,  $B(\sigma)$ , konvektir.

Dördüncü koşul en iyi tepki fonksiyonunun,  $B(\sigma)$ , grafiğinin kapalı olmasını ifade eder.  $B(\sigma)$  grafiği üzerinde alınan bir noktanın etrafında tanımlanan bir dizinin yakınsayan değerlerinin de bu grafik üzerinde olduğunun gösterilmesi ile grafiğin kapalı olduğu da görülür (ispatı çok daha teknik olduğu için burada vermedik).

Böylece yukarıda verilen dört koşul gerçekleştiğinde en iyi tepki fonksiyonu

<sup>2</sup>Reel analizden kapalı aralıkta tanımlı sürekli bir fonksiyonun maksimum ve minimum değerlere sahip olduğunu biliyoruz.

bir sabit noktaya sahip olur. Dolayısıyla karma stratejilerde Nash dengesinin varlığı böylece ispatlanmış olur.

## 2.9 Bağdaşık Denge

Nash dengesi dikkat edilirse oyuncuların birbiri ile bağdaşık olmayan bir şekilde yani bağımsız hareket ettikleri durumda ortaya çıkan dengeleri nitelendirmek için kullandığımız bir denge kavramıdır. Eğer oyunculara oyun öncesi birbirleri ile diyaloga girme imkanı verilseydi ve sonra birbiri ile temas kuramayacakları bir şekilde farklı odalara gönderilseydiler ve bu ayrı fiziksel mekanlara aralarında koordinasyon sağlayıcı sinyaller yollamak mümkün olsaydı, her iki oyuncu da daha kazançlı çıkabilirdi. Aumann (1974) eş anlı oynanan oyunlar için geliştirdiği *bağdaşık denge* (*correlated equilibrium*) kavramı bu tür sinyallerle nelerin başarılabileceğine bakar. Bu bölümde kısaca oyuncuların eş anlı hareket ettikleri ve stratejilerinin birbiri ile ilişkili olması durumunda ortaya çıkan denge durumlarına bakacağız. Tablo 2.14’de verilen bir oyuna bakalım.

|   | M    | N    |
|---|------|------|
| X | 5, 1 | 0, 0 |
| Y | 4, 4 | 1, 5 |

**Tablo 2.14**

Bu oyun, iki Nash dengesi olan Cinsiyetler Savaşı oyununa benzemektedir. Bunlardan biri,  $(X, M)$ , 1.oyuncunun tercih ettiği dengedir; diğer Nash denge ise  $(Y, N)$ ’dir, bu da 2.oyuncunun tercih ettiği dengedir. Bu dengelere ilaveten, her oyuncunun hareketlerini eşit olasılıkla ( $1/2$  olasılıkla), oynadıkları karma stratejilerde de bir Nash dengesi vardır. Bu da her iki oyuncuya  $5/2$  fayda sağlar. Fakat bu fayda düzeyi etkin bir değer değildir çünkü  $(Y, M)$  profili her oyuncu için çok daha yüksek olan 4 birimlik fayda sağlar. Bu etkinsizliğin nedeni oyuncuların karma stratejilerini belirlerlerken birbirinden bağımsız rassallaştırma yapmalarından kaynaklanır. Çünkü bu tür rassallaştırma kaçınılmaz olarak en kötü strateji profili olan  $(X, N)$ ’e pozitif olasılık atfetmeyi zorunlu kılar. Aslında oyuncular daha uygun bir koordinasyon mekanizması ile, bu stokastik bir mekanizma olabilir, oyunda daha etkin bir denge elde edebilirler.

Oyuncuların, örneğin şöyle bir koordinasyon mekanizması ile hareket ettiklerini düşünelim: Adil bir parayı havaya atsinlar ve eğer tura gelirse,  $(X, M)$  strateji profilini oynasınlar fakat eğer yazı gelirse,  $(Y, N)$  strateji profilini oynasınlar. Her iki alternatif strateji de Nash dengesi olduğundan dolayı böyle bir rassallaştırma aynı zamanda bir dengedir. Yani eğer oyuncular bu koordinasyon mekanizmasını kullanmak için anlaşsalar, oyunculardan hiç biri bundan sapma eğilimi göstermeyecektir. Dahası bu stratejiden her oyuncunun beklenen faydası 3’tür. Yani bu koordinasyon mekanizması ile oluşan denge, birbirinden bağımsız rassallaştırma ile oluşan karma stratejiden oluşan denge değerinde,  $5/2$ , daha yüksektir. Daha

genel olarak ifade edersek, ortak gözlemlenen rassal bir değişkeni kullanarak (burada paranın havaya atılması), Nash dengesi olan fayda düzeylerinin tüm konveks bileşimlerini elde edebiliriz.

Bu mekanizmaya rağmen, elde edilen sonuç hala oyundaki  $(Y, M)$  strateji profiline göre daha az etkindir  $(3 < 4)$ . Maalasef  $(Y, M)$  strateji profili bir denge değildir. Bu yüzden elde edilmesi de çok zor gözükmemektedir. O zaman soruyu şöyle soralım: Oyuncular acaba bu strateji profiline yakın bir fayda elde edebilirler mi? İlk bakışta cevabın negatif olacağını bekleyebiliriz çünkü bir strateji profili Nash dengesi değilse, hiç bir şey hareketlerini bağımsız bir şekilde seçen oyuncuların bu strateji profilini oynamaya zorlayamaz. Fakat kullanılan kullanılabilecek bir koordinasyon mekanizması ile oyunculara gönderilen sinyaller herkesçe ortak gözlemlenebiliyorsa (atılan para örneğinde olduğu gibi yazı-tura sinyalleri herkesçe gözlemleniyor), bu iddia sezgisel olarak doğru olabilir. Dolayısıyla sorunun cevabı evet olabilir.

Kısaca her bir oyuncuya farklı fakat bağdaşık yani birbirini ile ilişkili sinyaller gönderen bir sinyalleme mekanizması veya koordinasyon mekanizması düzenlenirse oyuncular daha iyisini yapabilirler (bağlayıcı bir sözleşme olmadığına dikkat edin). Örneğin Tablo 2.14'de verilen oyun için böyle bir mekanizma düşünelim. Bu oyun eşit olasılıklı üç duruma sahip olsun: A, B ve C. Eğer A gerçekleşirse, 1.oyuncu mükemmel bilgilidir (yani nerede olduğunu tam olarak bilir). Fakat eğer durum B veya C ise, 1.oyuncu hangisinin geçerli olduğunu bilmemektedir. 2.oyuncu tersine, eğer durum C ise mükemmel bilgiye sahiptir. Fakat A ile B arasında bir ayrım yapamamaktadır. Bu dönüştürülmüş oyunda Nash dengesi: kendisine durumun A olduğu söylendiğinde 1.oyuncu X hareketini oynar, (B,C) olduğu söylendiğinde Y hareketini oynar; 2.oyuncu ise, durumun C olduğu söylendiğinde N ve (A, B) söylendiğinde M hareketini oynar. Şimdi de bunu kontrol edelim yani 1.oyuncunun sapma göstermeyeceğini gösterelim. 1.oyuncu A durumunu gözlemlediğinde, 2.oyuncunun (A, B) durumunu gözlemlediğini biliyor dolayısıyla 2.oyuncunun M hareketini oynayacağını biliyor. Bu durumda kendisinin en iyi tepkisi X olacaktır. Eğer 1.oyuncu (B,C) durumunu gözlemlerse, bu bilgiye bağlı olarak 2.oyuncudan eşit olasılıkla beklediği hareket M ve N'dir. Bu durumda 1.oyuncu kendi seçimlerinden beklediği ortalama fayda düzeyi 2.5'dir ve dolayısıyla Y hareketini oynar. Bu yüzden 1.oyuncu en iyi hareketini seçer, aynı durum 2.oyuncu için de geçerlidir. Yani oyuncuların stratejilerinin birbirini ile bağdaşık olduğu durumda yeni bir denge oluşturduk. Sonuçların,  $(X,M)$ ,  $(Y,M)$  ve  $(Y,N)$ , her biri 1/3 olasılıkla seçilir ve  $(X,N)$  kötü sonucu asla gerçekleşmez. Bu yeni dengede beklenen fayda 10/3, ki bu sinyal veya koordinasyon mekanizmasının olmadığı asıl oyundaki denge fayda düzeylerinin konveks bileşiminin dışındadır. Yani sinyal mekanizması (yani bağdaşık stratejilerin varlığı) eski dengeleri ortadan kaldırmıyor çünkü eğer oyuncular sinyalleri ihmal ederlerse sinyal mekanizması fayda düzeylerini etkilemez. Bağdaşık denge için bir örnek daha verelim.

## Örnek 2.10

Tablo 2.15'de verilen oyuna bakalım. Oyunda 1.oyuncu satırları, 2.oyuncu sütunları ve 3.oyuncu ise matrisleri seçmektedir.

|          |          |          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|          | <i>L</i> | <i>R</i> |          | <i>L</i> | <i>R</i> |          | <i>L</i> | <i>R</i> |
| <i>T</i> | 0, 0, 3  | 0, 0, 0  | <i>T</i> | 2, 2, 2  | 0, 0, 0  | <i>T</i> | 0, 0, 0  | 0, 0, 0  |
| <i>D</i> | 1, 0, 0  | 0, 0, 0  | <i>D</i> | 0, 0, 0  | 2, 2, 2  | <i>D</i> | 0, 1, 0  | 0, 0, 3  |
|          | <i>a</i> |          |          | <i>b</i> |          |          | <i>c</i> |          |

Tablo 2.15

Bu oyunda dört tane pür Nash dengesi vardır:  $(D,L,a)$ ,  $(T,R,a)$ ,  $(T,R,c)$  ve  $(D,L,c)$ . Ayrıca çok sayıda karma strateji söz konusudur. Fakat bu sonuçların hiç birinde oyuncuların fayda düzeyleri 1 birimi aşmamaktadır.

Bir koordinasyon mekanizmasının ya da bir bir anlaşmanın şunu tavsiye ettiğini varsayalım: 3.oyuncu *a* matrisini oynasın ve 1. ve 2.oyuncular adil bir paradan gelen sonuca göre davranınsınlar: eğer tura gelirse,  $(T,L)$  profilini ve eğer yazı gelirse  $(D,R)$  profilini oynasınlar. Bu anlaşma görüleceği gibi  $(2,2,2)$  sonucunu verir. Bu dengede tek taraflı hiç bir sapma rasyonel değildir. Burada dikkat edilmesi gereken şey, 3.oyuncunun paranın sonucunu bilmiyor olmasıdır. Aksi takdirde kendisinin bu dengeden sapması rasyonel olurdu.

Şimdi yukarıda verdiğimiz ilk örneği daha formel tanımlayalım ve buradan da bağdaşık dengenin formel tanımına geçelim. Spesifik olarak ifade edersek, koordinasyon mekanizmasının belirli bir durum kümesinden,  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ , üç durumun her birini eşit olasılıkla ürettiğini varsayalım (burada  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  sırasıyla *A*, *B* ve *C* durumlarına karşılık geliyor). Fakat belirli bir durum gerçekleştiğinde, mekanizma artık aynı sinyali her iki oyuncuya da iletmez:

- Eğer  $\omega_1$  gerçekleşirse, 2.oyuncuya  $U = (\omega_1, \omega_2)$  olayının, yani  $\omega_1$  veya  $\omega_2$  durumunun gerçekleştiği haber verilir, halbuki 1.oyuncu tam olarak  $\omega_1$  durumunun gerçekleştiğini öğrenir.
- Eğer  $\omega_2$  gerçekleşirse, 1.oyuncu  $V = (\omega_2, \omega_3)$  olayının gerçekleştiğini öğrenir, fakat 2.oyuncu  $U = (\omega_1, \omega_2)$  olayının gerçekleştiği bilgisini almaya devam eder.
- Son olarak, eğer  $\omega_3$  durumu ortaya çıkarsa, 1.oyuncu  $V = (\omega_2, \omega_3)$  olayının gerçekleştiğini öğrenir fakat 2.oyuncu tam olarak  $\omega_3$  durumunun gerçekleştiğini öğrenir.

Daha kesin şekilde ifade edersek, bu tür bir asimetrik sinyal verme durumu her oyuncuya tahsis edilen bilgi bölmesi ( $H_i$ ) ile aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$H_1 = \{\omega_1, V\},$$

$$H_2 = \{U, \omega_3\}.$$

Şimdi de mekanizmanın her oyuncu tarafından alınan sinyallere göre aşağıdaki tepkileri tavsiye ettiği varsayalım:

- 1.oyuncu eğer  $\omega_1$  ise  $X$ , eğer  $V$  ise  $Y$  oynamalıdır.
- 2.oyuncu eğer  $U$  ise  $M$ , eğer  $\omega_3$  ise  $N$  oynamalıdır.

Eğer oyuncular bu tavsiyeleri takip ederlerse, her oyuncunun beklenen faydası  $10/3$  olur. Bu değer de açıkça iki Nash dengesi arasında rassallaştırılan iki pür Nash dengesinin sonucunda elde edilen fayda olan 3 düzeyinden daha yüksektir.

Formel olarak bir koordinasyon aracını ya da mekanizmasını  $\{\Omega, \{H_i\}, p\}$  olarak tanımlarız. Burada  $\Omega$  mekanizmanın sonuçlarına karşılık gelen durum kümesini,  $p$  durum kümesi üzerine tanımlı olasılık kümesini ve  $H_i$  ise  $i$  oyuncusunun hangi  $\omega \in \Omega$  durumun gerçekleştiğine dair bilgi kümesini gösterir. Eğer gerçek durum  $\omega$  ise  $i$  oyuncusuna durumun  $h_i(\omega)$  bilgi kümesinde olduğu söylenir.

Herhangi bir  $i$  oyuncusunun  $H_i$  bilgi bölmesi, her  $\omega$  durumuna  $h_i(\omega)$  bilgi kümesini tahsis eder, yani  $\omega \in h_i(\omega)$ . Burada  $h_i(\omega)$  bilgi kümesi, gerçek durum  $\omega$  iken,  $i$  oyuncusunun olası diye düşündüğü durumları verir. Pozitif önsel olasılıklı tüm  $h_i$  için,  $i$  oyuncusunun  $\Omega$  hakkındaki olasılıkları Bayes kural ile belirlenir:  $\omega \in h_i$  için  $p(\omega | h_i) = p(\omega)/p(h_i)$  ve  $\omega \notin h_i$  için  $p(\omega | h_i) = 0$ .

Sinyalleme veya koordinasyon mekanizmasının geçerli olduğu bir oyunda  $i$  oyuncusunun aldığı tüm olası sinyalleri,  $h_i \subset H_i$ , pür stratejilerle,  $s_i \in S_i$ , ilişkilendiren fonksiyonu,  $\gamma_i$  ile tanımlayalım. Dikkat ederseniz eğer  $\omega' \in h_i(\omega)$  ise,  $\gamma_i$  fonksiyonu  $\omega$  ve  $\omega'$  durumlarında aynı hareketleri tanımlar. Bu şekilde bilgi kümelerinden  $S_i$ 'nin elemanlarına stratejiler tanımlamak yerine, daha uygun fakat buna denk bir tanımlama kullanmak daha iyi olabilir. Bu yeni tanımlamada pür stratejileri,  $\gamma_i$  fonksiyonu ile  $\Omega$  durum kümesinden  $S_i$  pür strateji kümesine tanımlanır. Fakat fazladan bir özelliğin dahil edilmesi ile bu yapılır. Bu özellik şöyle tanımlanır eğer  $\omega' \in h_i(\omega)$  ise  $\gamma_i(\omega) = \gamma_i(\omega')$  olduğu kabul edilir. Buna stratejilerin bilgi yapısına adapte edilmesi denir. Şimdi bağdaşık dengeyi tanımlayalım.

**Tanım 2.8** *Eğer  $\{\Omega, \{H_i\}, p\}$  bilgi yapısına sahip bir oyunda her  $i$  oyuncusu için adapte edilen her  $\hat{\gamma}_i$  stratejisi için aşağıdaki durum söz konusu ise  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  strateji profili bağdaşık dengedir:*

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u_i(\gamma_i(\omega_i), \gamma_{-i}(\omega)) \geq \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u_i(\hat{\gamma}_i(\omega_i), \gamma_{-i}(\omega)). \quad (2.17)$$

Eğer  $\Omega$  durum kümesi üzerine tanımlanan  $p$  dağılımı herkes için aynı ise ortaya çıkan dengeye *objektif bağdaşık denge* denir, fakat eğer oyunculara farklı olasılıklara (inançlara) sahip olma imkanı verildiğinde ortaya çıkan dengeye *subjektif bağdaşık denge* denir.

Bu tanıma göre  $\gamma_i$  stratejisi,  $i$  oyuncusunun beklenen faydasını, yani  $h_i$  bilgi kümesinde hangi durumun gerçekleştiğini bilmeden elde edilecek olası faydasını

maksimize eder, başka bir deyişle,  $\gamma_i$  stratejisi her  $i$  oyuncusunun pozitif önsel olasılık attığı her  $h_i$  için tanımlanan koşullu beklenen faydasını maksimize eder.

(2.17)'de verilen tanıma denk bir tanım da şöyle ifade edilebilir. Her  $i$  oyuncusu için  $h_i$  bilgi kümeleri,  $p(h_i) > 0$  ve tüm  $s_i$  için aşağıdaki koşul sağlandığında da bağdaşık denge söz konusudur:

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega \mid h_i) u_i(\gamma_i(\omega_i), \gamma_{-i}(\omega)) \geq \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega \mid h_i) u_i(\gamma_i(\omega_i), \gamma_{-i}(\omega)).$$

Yukarıda verilen tanım, (2.17)'de ifade edilen ilk tanımın  $p(h_i)$ 'e bölünmesi ile bulunduğu dikkat ediniz (bölmenin,  $p(\cdot)$  olasılığını koşullu olasılığa dönüştürdüğüne dikkat edin).

Fakat bu tanım her şeye rağmen çok işlevsel olmayabilir çünkü bu tanımın kendisi bilgi yapısına çok bağlıdır. Gerçekte sınırsız sayıda olası durum kümesi ( $\Omega$ ) ve her bir durum kümesi için de çok sayıda bilgi yapıları mümkün olabilir. Bu da bağdaşık dengenin yukarıda verilen kavramlar ile ifade edilmesini zorlaştırır. Bu yüzden bağdaşık denge için daha uygun bir tanım kullanacağız. Bu alternatif tanım belirli bir koordinasyon mekanizması için bağdaşık dengeyi sağlayan hareketler üzerine tanımlı bir ortak olasılık dağılımını ve her oyuncunun nasıl oynaması gerektiğini belirleyen bir koordinasyon mekanizmasını ifade eder. Yani Tablo 2.15'de verilen örnekte, 1.oyuncuya, durumun (B,C) olduğunu söylemek yerine D hareketini oynaması söylenir; eğer 1.oyuncuya D hareketi oynaması söylendiğinde, 2.oyuncunun R hareketini oynamasının koşullu olasılığı 1/2 ise, 1. oyuncu bu tavsiyeye uyar.

**Tanım 2.9** *Bağdaşık denge,  $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$  pür stratejiler profili üzerine tanımlanan herhangi bir olasılık,  $p(\cdot)$ , dağılımıdır. Bu olasılık dağılımı her  $i$  oyuncusunun  $u_i : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \rightarrow R$  fayda fonksiyonu için ve  $S_i$ 'den  $S_i$ 'e ilişki kuran her  $d_i(\cdot)$  fonksiyonu için aşağıdaki koşulu sağlar:*

$$\sum_{s_i \in S_i} p(s_i, s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s_i \in S_i} p(s_i, s_{-i}) u_i(d_i(s_i), s_{-i}). \quad (2.18)$$

İlk tanımda olduğu gibi bu ikinci tanıma da denk bir tanım yapabiliriz. Buna göre eğer her  $i$  oyuncusunun her  $s_i$  stratejisi için  $p(s_i) > 0$  ve her  $s'_i \in S_i$  alternatif stratejisi için aşağıdaki koşul sağlanırsa, her  $p(\cdot)$  tavsiyesi üzerinden tanımlanan maksimizasyon bağdaşık dengedir:

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_{-i} \mid s_i) u_i(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_{-i} \mid s_i) u_i(s'_i, s_{-i}), \forall s'_i \in S_i.$$

Dikkat edilirse bu tanım, (2.18)'de verilen ifadedeki eşitsizliğin her iki tarafını da  $p(s_i)$  ile bölünmesi ile elde edilir. Bu yeni tanımda eşitsizliğin sol tarafı  $i$

oyuncusu eğer  $s_i$  stratejisini seçerse beklenen faydasıdır, sağ taraf ise  $s'_i$  stratejisini seçerse beklenen faydasını gösterir. Bu tanım şunu ima eder: Eğer diğer oyuncu bu tavsiyeye uyarsa,  $i$  oyuncusu  $s_i$  stratejisini oynama tavsiyesine uymadığı takdirde daha avantajlı hale gelmemelidir. Burada  $p$  olasılığını üçüncü bir kişi tarafından oyunculara yapılan bir tavsiye gibi yorumluyoruz. Diğer tüm oyuncuların bu tavsiyeyi takip ettiğini örtük olarak varsaydığımızda, bu tavsiyeye uymak bizim için de en iyi tepki ise bağdaşık denge gerçekleşir.

Eğer  $p(\cdot)$  dağılımı 0 veya 1 değerleri alacak şekilde tanımlanırsa, pür Nash dengesi bir bağdaşık denge sayılır. Ve eğer  $p(\cdot)$ , denge stratejilerin talep ettiği ortak dağılım olarak tanımlanırsa, bu anlamda karma strateji Nash dengesi de bağdaşık dangedir. Fakat her oyuncuya yapılan tavsiyeler rakiplerin oyunları hakkında bilgi sunmaz, yani her oyuncu bağımsız davranmış gibi olur.

Bağdaşık dengeler kümesi konveks bir kümedir, dolayısıyla bağdaşık dengeler kümesi en az Nash dengelerinin konveks bileşimi kadar büyüktür. Bu konveks bileşimi sadece herkesçe bilinen koordinasyon mekanizmaları ile sağlanır. Herkesçe bilinmeyen (mükemmel olmayan) koordinasyon mekanizmaları Nash kümesinin konveks bileşimin dışında dengelere neden olabilir.

Sınırlı stratejinin olduğu oyunlarda karma Nash dengesi var olduğundan dolayı, bağdaşık denge de vardır. Gerçekte bağdaşık dengenin varlığı Nash dengesinin varlığından daha kolay sağlanır çünkü bağdaşık denge kümesi lineer eşitsizlikler ile tanımlanır, yani konvektir. Dolayısıyla lineer metotlarla (sabit nokta teoremleri yerine) gösterilebilir.

## Sorular

1. Aşağıda verilen oyunun karma strateji Nash dengelerini bulunuz.

|   | L   | C   | R   |
|---|-----|-----|-----|
| U | 3,3 | 1,2 | 2,0 |
| D | 2,1 | 2,2 | 1,3 |

2.  $\{1, \dots, K\}$  kümesinden  $n$  kişi birer sayı seçmektedir. 1 lira değerinde bir ödül, seçilen sayıların ortalamasının  $2/3$ 'üne en yakın seçim yapanlar arasında paylaştırılmaktadır. Bu oyunun sadece bir karma strateji dengesi olduğunu ve burada oyuncuların pür strateji seçtiğini gösterin.
3. İki yatırımcı sonunda 1 lira değerinde ödül olan bir yarışmaya giriyorlar. Bu yarışmada her bir oyuncu  $[0, 1]$  aralığında herhangi bir miktarda harcama yapabilirler. En çok harcamayı yapan yatırımcı yarışmayı kazanıyor ve beraberlik durumunda her bir yatırımcı 0.5 lira kazanıyor. Bu yarışmayı stratejik bir oyun olarak formüle edin ve oyunun karma strateji Nash dengesini bulun.
4. Zeynep, Kemal'e şu oyunu oynamayı teklif ediyor: " Aynı anda birbirimize bozuk paranın bir yüzünü gösterelim. İkimiz de tura gösterirsek sana 3 lira vereceğim. İkimiz de yazı gösterirsek sana 1 lira vereceğim. Aynı yüzü göstermezsek sen bana 2 lira vereceksin". Kemal şu akıl yürütmeyi yapıyor: " İki tura olasılığı  $1/4$  ve bu durumda 3 lira alıyorum. İki yazı olasılığı da  $1/4$  ve bu durumda 1 lira alıyorum. Farklı yüzlerin olasılığı ise  $1/2$  ve bu durumda 2 lira veriyorum. Öyleyse bu adil bir oyun." Kemal doğru mu düşünüyor? Düşünmüyorsa bu akıl yürütme neden yanlış? Zeynep'in bu oyundaki beklenen faydası nedir?
5. İşveren işçinin kaytarıp kaytarmadığını denetlemektedir. İşveren denetimini  $q$  olasılıkla yaparken (yani zamanın  $q$  oranında denetim yapmakta), işçi de  $r$  olasılıkla (yani zamanın  $r$  oranında kaytarma yapmaktadır). Kaytarmak işçi için çalışmaya göre daha iyidir. İşveren için de denetim maliyetlidir; maliyet  $c \in (0, 100)$  kadardır. Bu mantık üzerine kurulmuş oyunda oyuncuların fayda düzeyleri aşağıdaki tabloda verildiği gibidir:

|        | denetle       | denetleme   |
|--------|---------------|-------------|
| çalış  | 60, $100 - c$ | 60, 100     |
| kaytar | 0, $-c$       | 100, $-100$ |

- a) Her iki oyuncunun da en iyi tepki fonksiyonlarını bulunuz ve çiziniz.
- b) Oyunun karma strateji Nash dengesini bulunuz.
6.  $\{1, \dots, K\}$  kümesinden 2 kişi birer sayı seçiyor. Seçilen sayı aynı olursa 2. oyuncu 1. oyuncuya 1 lira ödüyor; aksi halde herhangi bir ödeme yok. Her

oyuncunun beklenen parasal faydasını maksimize etmeye çalıştığı bu tam rekabetçi oyunun karma strateji Nash dengesini bulun.

7. A ordusunun verili 3 hedeften birine saldırmak için kullanabileceği 1 adet uçağı vardır. B ordusunun ise bu 3 hedeften birine yerleştireceği 1 adet uçaksavar silahı vardır. A ordusu bir hedefi ancak savunmasızsa ve ordu o hedefe saldırırsa ele geçirebilmektedir. Hedeflerin değeri  $v_1 > v_2 > v_3 > 0$  olarak veriliyor. A ordusu zararın beklenen değerini maksimize etmek isterken, B ordusu bunu minimize etmek istemektedir. Bu mücadeleyi tam rekabetçi stratejik bir oyun olarak kurgulayın ve oyunun karma strateji Nash dengelerini bulun.
8. Bir futbol takımında olduğunuzu varsayınız. Penaltı kullanmak üzeresiniz, ve topu sağ ya da sol köşeye atmaya karar vereceksiniz. Rakip kaleci ise sağ ya da sol köşeye atlayacaktır. Kaleci ile aynı köşe tercihinde bulunursanız, kaleci 1 olasılıkla topu kurtaracaktır. Ters köşe tercihinizde bulunursanız 1 olasılıkla gol olacaktır.
  - (a) Bu durumu normal biçimli oyun olarak gösteriniz.
  - (b) Oyundaki tüm pür ve karma Nash dengelerini bulunuz.
  - (c) Siz sağ köşeyi seçtiğinizde kaleci de sağa atlayış yaptığında gol olma olasılığının  $2/3$  ve siz sol köşeyi seçtiğinizde kaleci de sola atlayış yaptığında gol olma olasılığının  $1/3$  olduğunu varsayınız. Bu durumda tüm Nash dengelerini bulunuz.
9.  $N$  oyuncunun oynadığı bir oyunda her bir oyuncu  $X$  ve  $Y$  seçeneklerinden birini seçiyor. Oyun sonunda  $X$  ve  $Y$  seçen toplam oyuncu sayısı sırasıyla  $m_x$  ve  $m_y$  olsun ( $m_x + m_y = N$ ). Buna göre  $X$  seçen oyuncuların elde ettiği fayda  $u_x = 2m_x - m_x^2 + 3$  ve  $Y$  seçenlerin faydası  $u_y = 4 - m_y$  olarak veriliyor.
  - a)  $N = 2$  olarak veriliyor. Bu oyunu normal-biçimde gösterin ve eğer varsa pür-strateji Nash dengelerini bulun
  - b) Bu sefer  $N = 3$  olsun. Bu yeni oyunun kaç tane pür-strateji Nash dengesi vardır?
  - c)  $N = 3$  varsayımıyla devam edelim. Bu oyunda her oyuncunun  $X$  seçeneğine  $p$  olasılığını atadığı simetrik bir karma-strateji Nash dengesi olup olmadığını bulun.
10. A ordusu 3 olası hedeften birini vurabilen bir uçağa sahiptir. B ordusu tek bir hedefe kitlenebilen uçaksavara sahiptir.  $K$  hedefinin değeri  $v_k$  ve  $v_1 > v_2 > v_3$  şeklindedir. A ordusu hedef savunmasız ise o hedefe saldırır ve yok eder. A ordusu hedefleri yok etmeyi maksimize etmeyi istemektedir. B Ordusu ise bunu minimize etmek istemektedir. Bu oyunu stratejik form

biçiminde gösteriniz. Oyunda pür-strateji Nash dengesi var mıdır?  $v_3 \rightarrow 0$ 'e yaklaştıkça ve  $v_2$  ve  $v_3$  sabit kalırsa denge stratejileri nasıl değişir?

11. Aşağıda verilen oyunda karma-strateji Nash dengesinin her zaman var olduğunu gösteriniz. (Matris içinde verilen harfler rasgele seçilmiş reel sayıları temsil ediyor.)

|       | $B_1$ | $B_2$ |
|-------|-------|-------|
| $A_1$ | u, a  | l, m  |
| $A_2$ | w, x  | y, z  |

12. İki oyunculu bir oyunda şu bilgiler veriliyor:

$$S_1 = \{A, B, C\}, S_2 = \{X, Y, Z\}$$

$$u_1(A, X) = 6, u_1(A, Y) = 0, u_1(A, Z) = 0$$

Bunlara ek olarak oyunun bir karma-strateji Nash dengesinin olduğunu; bu dengede iki oyuncunun da tüm stratejileri pozitif olasılıklarla oynadığını ve oyuncuların dengede beklenen faydalarının sırasıyla 4 ve 6 olduğu biliyoruz. Bu bilgiler ışığında 2. oyuncunun  $X$  seçeneğine atadığı olasılığı hesaplamak mümkün mü? Eğer mümkünse bu olasılık ne olur?

13. 1.oyuncu A ve B oyunları arasında karar vermektedir. Bu karardan sonra oyun eşanlı olarak oynanmaktadır. 1.oyuncu hangi oyunun oynandığını bilmekte, fakat 2.oyuncu bu bilgiye sahip değildir.

A                      B

|     | $L$   | $R$  |
|-----|-------|------|
| $U$ | 1, 0  | 0, 1 |
| $D$ | -1, 2 | 2, 0 |

|     | $L$  | $R$   |
|-----|------|-------|
| $U$ | 4, 3 | -3, 2 |
| $D$ | 1, 0 | 0, 0  |

Oyunda her pür-strateji pozitif olasılıkla oynandığında, tesadüfi karma strateji Nash dengesini bulunuz?

14. Aşağıdaki oyunda 1. oyuncu iki satırdan birini, 2. oyuncu iki sütundan birini ve 3. oyuncu da üç matristen birini seçiyor.

|     | $L$   | $R$   |
|-----|-------|-------|
| $T$ | 0,0,3 | 0,0,0 |
| $B$ | 1,0,0 | 0,0,0 |

A

|     | $L$   | $R$   |
|-----|-------|-------|
| $T$ | 2,2,2 | 0,0,0 |
| $B$ | 0,0,0 | 2,2,2 |

B

|     | $L$   | $R$   |
|-----|-------|-------|
| $T$ | 0,0,0 | 0,0,0 |
| $B$ | 0,1,0 | 0,0,3 |

C

- a) Pür-strateji denge faydalarının  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  ve  $(0, 0, 0)$  olduğunu gösterin
- b) 3. oyuncu B'yi seçerken 1. ve 2. oyuncuların eşit olasılıklarla  $(T, L)$  ve  $(B, R)$  oynadıkları bir bağdaşık dengesinin olduğunu gösterin.

---

### Tam Bilgili Dinamik Oyunlar

---

#### 3.1 Giriş

Şu ana kadar her oyuncunun eş anlı hareket ettiği (diğer oyuncuların birbirinin hareketlerini gözlemleyemediği durum) oyunlarla ilgilendik. Bu oyunlarda oyuncular aynı anda hareketlerini seçerler ve oyun sonunda oluşan hareket profili ile de her bir oyuncunun elde ettiği fayda düzeyi belirlenir. Fakat oyunların hepsinde stratejik etkileşim aynı anda gerçekleşmez. Çok sayıda oyunda oyuncuların hareketlerinde bir ardısallık, yani hareketlerin sırayla gerçekleştiği durumlar söz konusu olabilir. Ardısallığın olduğu bu tür oyunlarda bir oyuncu hareket ettiğinde diğer oyuncu oyunda ne olduğu bilgisine sahip olur. Tüm bu zamanlama ve bilgiye dair konular *genişleyen-biçimli gösterim veya ağaç oyunu* diyebileceğimiz gösterimlerle analiz edilir. Belli bir ardısallık içeren tüm oyunları *dinamik oyunlar* diye nitelendiriyoruz.

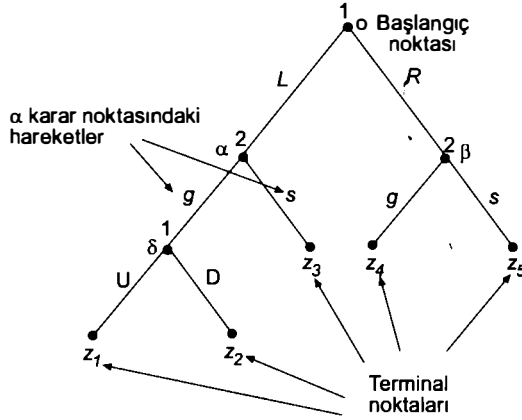
Bu bölümde ilk önce dinamik oyunların unsurlarını tanıtacağız. Dinamik oyunlarda hareketler ardısal olduğundan oyuncuların hareket etmeden önce neleri bildikleri önemlidir, dolayısıyla bu durumu tanımlayan bilgi kavramı önemli hale gelir. Bu yüzden bilgi konusuna detaylı olarak bakacağız. Bunun ardından genişleyen-biçimli oyunlarda pür ve karma stratejilerin yanında diğer bir strateji kategorisi olan davranış strateji kavramını inceleyeceğiz. Dinamik bir oyun için gerekli tüm kavramları tanıttıktan sonra bu tür oyunlarda kullanılan temel denge yaklaşımları olan geriye doğru çıkarsama ve altoyun mükemmel Nash dengesini inceleyeceğiz. Daha sonra her aşamada statik oynanan aşamalı oyunları tanıttıktan sonra, son olarak ileriye doğru çıkarsama kavramını inceleyeceğiz.

### 3.2 Dinamik Oyun Tanımı

Dinamik oyunlar ardışal hareketlerin olduğu oyunlardır. Oyunda oyunculardan biri diğerinin hareketini gözlemler ve buna göre hareket eder. Bu tür oyunlar ağaç biçiminde ifade edilirler. Statik oyunlardaki matris gösterimi dinamik oyunlar için pek elverişli bir gösterim değildir. Bu yüzden ilk önce ağaç gösterimini tanıtalım.

Bir ağaç oyunu bir başlangıç noktası ile başlar. Dallar halinde genişleyerek ilerler. Bu yüzden bu oyunlara *genişleyen-biçimli oyunlar* da denir. Oyuncuların oyun sıraları geldiğinde, karar vermeleri gereken noktalara varmışlardır. Bu noktalardan dallar çıkar. Her dal bir hareketi temsil eder. Bir karar noktasından diğerine tek bir patika vardır. Sonuçta ağacın en son dalına veya dalın ucuna geldiğimizde ağaç oyunu biter. Ağaç oyunlarında döngüler yoktur. Yani herhangi bir noktadan başlayan oyun yine o noktaya dönemez, genişleyen bir yapı gösterir. Başka bir deyişle karar noktaları belirli bir zaman diliminde vardığınız istasyonlar gibidir. Buralarda nereye gideceğinize karar verirsiniz, dolayısıyla kararlarınız yönünüzü belirler. Ve en son vardığınız terminalde inersiniz ve oyun biter.

Bu söylediklerimizi aşağıda verilen şekil üzerinden izleyelim. Şekil 3.1,  $o$  başlangıç noktası ile başlar ve burada 1.oyuncu ilk hareket eden oyuncudur (aksi söylenmedikçe ilk hareket eden oyuncu her zaman 1.oyuncudur). Bu oyunun başladığı noktadır ve aynı zamanda bir karar noktasıdır. Çünkü 1.oyuncu burada hangi hareketi seçeceğini belirler.



Şekil 3.1 Genişleyen-biçimli bir oyunun temel unsurları

Bir oyuncu için oyunun başlangıcı Doğa tarafından belirlenebilir. Yani ilk hareket eden Doğa olabilir. Bu yüzden 1.oyuncu için çok sayıda başlangıç karar noktası olabilir. Şekil 3.1'de verilen oyuna devam edelim. Başlangıç karar noktasında 1. oyuncunun iki hareketi söz konusudur, bunlar  $L$  ve  $R$  'dir. Yani  $o$  karar noktasında, hareket kümesi  $A(o) = \{L, R\}$ 'dir. 1.oyuncu kendi hareket kümesinden bir hareketi seçtikten sonra hareket sırası 2.oyuncuya geçer. Yani

bir ağaç dalından 2.oyuncunun karar noktasına indik. Eğer 1.oyuncu  $L$  hareketini seçerse 2.oyuncu kendini  $\alpha$  karar noktasında bulur, fakat eğer  $R$  hareketini seçerse 2.oyuncu kendini  $\beta$  karar noktasında bulur. Yani  $o$  karar noktasından çıkan iki dal 2.oyuncunun nerede olduğunu belirler. 2.oyuncu hem  $\alpha$  hem de  $\beta$  karar noktasında aynı iki harekete sahiptir. Bunlar  $g$  ve  $s$  hareketleridir, yani  $A(\alpha) = A(\beta) = \{g, s\}$ .

2.oyuncunun kendisine hareket sırası geldiğinde bildiği şey, onun bilgi kümesini oluşturur. Dolayısıyla 1.oyuncu  $\alpha$  ve  $\beta$  ile gösterilen iki bilgi kümesine sahiptir. Dolayısıyla  $\alpha$  bilgi kümesinde 2.oyuncu, 1.oyuncunun  $L$  hareketini oynadığını ve  $\beta$  bilgi kümesinde 1.oyuncunun  $R$  hareketini oynadığını bilir. Bilgi kümelerinin her biri bu yüzden bir karar noktasına sahiptir.

Daha genel ifade edersek, her oyuncu her bilgi kümesinde ne yapacağını seçer. Herhangi bir  $i$  oyuncusunun bir hareketi onun bilgi kümesinden seçeceği bir harekettir, bu seçimi  $a_i$  ile gösterelim. Bir bilgi kümesindeki seçim alternatiflerini ise  $A_i$  ile gösterelim. Doğal olarak hareketler kümesi bilgi kümelerine bağlı olarak değişebilir.

Her karar noktası  $x_i \in X_i$  şeklinde ifade edilir, burada  $X_i$ ,  $i$  oyuncusunun karar noktaları kümesini göstermektedir. Bu durumda  $A_i(x_i)$ ,  $i$  oyuncusunun  $x$  karar noktasındaki hareketler kümesini gösterir ve varılan her karar noktası bir bilgi kümesinin elemanıdır,  $x \in h$ , burada  $h$  bilgi kümesini gösterir.

Şekil 3.1'de görüldüğü gibi 2. oyuncu da hareket ettikten sonra sıra tekrardan 1.oyuncuya gelir. Eğer 2.oyuncu  $\alpha$  karar noktasında  $g$  hareketini seçerse 1.oyuncu kendisini bu sefer  $\delta$  karar noktasında bulunur. Bu noktada da iki hareketi vardır,  $U$  ve  $D$ . Fakat 2.oyuncu bu karar noktasında  $s$  hareketinde bulunursa, oyun biter. Benzer olarak 2.oyuncu  $\beta$  karar noktasında hareket ettiğinde 1.oyuncuya tekrar oyun sırası gelmeden oyun biter.

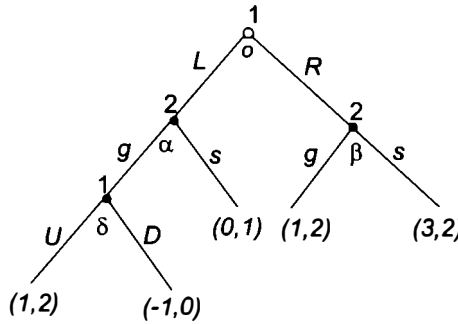
Dikkat ederseniz her  $x \in X$  karar noktasını sadece bir oyuncuya tahsis ediyoruz, yani her karar noktası bir oyuncuya aittir. Bunu daha genel ifade edebiliriz.  $n$ -oyunculu ve Doğa'nın da olduğu bir oyunda,  $i \in N \cup \{0\}$ , (burada 0, Doğa oyuncusunu gösteriyor), her karar noktasına bir oyuncu tahsis etmeyi oyuncu fonksiyonu dediğimiz bir fonksiyonla ifade edebiliriz:  $\iota : X \rightarrow (N \cup \{0\})$ , burada her  $x \in X$  karar noktası için,  $\iota(x)$  fonksiyonu bir oyuncu tanımlar. Örneğimizde belirli karar noktaları için oyuncu fonksiyonu  $\iota(\delta) = 1, \iota(\beta) = 2$  şeklindedir. Burada  $i \in N \cup \{0\}$  oyuncusuna tahsis edilen karar noktaları kümesi ise  $X_i = \{x \in X : \iota(x) = i\}$  ile gösterilir. Böylece  $X = \{X_0, X_1, \dots, X_n\}$ , tüm oyuncuların karar noktaları kümesinin kümesidir. Kısaca bir karar noktası spesifik belirli bir oyuncuya aittir veya bir oyuncu spesifik belirli bir noktanın sahibidir deriz. Şekil 3.1 oyunda her bir oyuncunun karar noktaları kümesi,  $X_1 = \{\alpha, \delta\}$  ve  $X_2 = \{\beta\}$  şeklindedir (bu oyunda Doğa yok).

Diğer yandan, Şekil 3.1'e bakıldığında oyun ağacının son noktalarında artık bir dal uzanmamaktadır. Bu oyunun bittiği noktalar. Bunlara *terminal noktalar* denir. Terminal noktaları kümesini  $Z$  ile gösteriyoruz. Şekil 3.1'deki oyunda 5 tane terminal nokta vardır,  $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$ . Karar ve terminal noktaları oyunun toplam noktalarını verir, dolayısıyla  $X \cup Z$  ifadesi oyunun toplam noktalarını verir.

Oyun terminal noktalarından birine vardığında biter. Terminal noktalara oyunun sonuçları diyoruz.

Oyundaki her  $z \in Z$  terminal noktası bir sonuca karşılık gelir. Sonuçlar oyuncuların tercihlerini yansıtır. Her oyuncunun vNM tercihleri olduğunu düşünüyoruz. Bu da daha önce ifade edildiği gibi beklenen fayda formunda olan  $u_i : Z \rightarrow R$  fayda fonksiyonu ile gösterilir. Her oyuncu bu fayda fonksiyonunu maksimize etmeye çalışır.

Şekil 3.1'de verilen oyun, daha somut ve oyuncu sırasını da belirten bir yapı içinde terminal noktalarında elde edilen fayda düzeyleri ile birlikte Şekil 3.2'de gösterilmektedir. Sırasıyla her terminal tarih için (yani sonuç değerine uzanan patika için) fayda değerleri:  $(u_1, u_2) = (1, 2)$ ,  $(u_1, u_2) = (-1, 0)$ ,  $(u_1, u_2) = (0, 1)$ ,  $(u_1, u_2) = (1, 2)$  ve  $(u_1, u_2) = (2, 3)$  şeklindedir.



Şekil 3.2 Mükemmel bilgili genişleyen-biçimli bir oyun

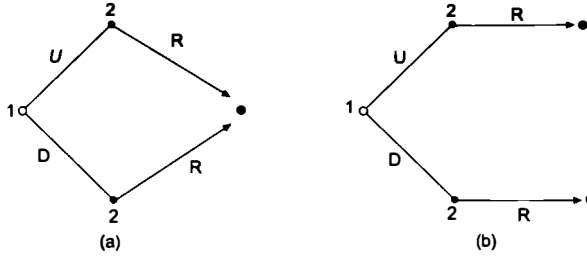
Bu arada genişleyen-biçimli bir oyunda veya bir ağaç oyununda, oyunun nasıl oynandığına dair bir takım belirsizliklerden kaçınmak için burada dört temel basit kuralı tanımlamakta fayda vardır.

**Kural 1:** Her karar noktası en fazla bir karar noktası tarafından öncelenebilir.

Şekil 3.3(a)'daki ağaç oyunu Kural 1'i ihlal eder. 2. oyuncu iki karar noktasına ve bu karar noktalarından aynı terminal noktasına giden dallara sahiptir. Bu 1. oyuncunun sonuçlar üzerinde etkili olmadığı anlamına gelir. Eğer 1. oyuncunun etkisi olsaydı, ağaca 1.oyuncunun her hareketi için iki terminal noktası eklenmeliydi (Şekil 3.3(b)'de olduğu gibi). Kural 1, kısaca bir karar noktasının diğerinin ardından geldiğini ve iki karar noktası arasında sadece bir patika olduğunu söyler. Yani eğer 2.oyuncunun oynadığı nokta, 1.oyuncunun oynadığı noktayı takip ediyorsa, 1.oyuncunun karar noktası, 2.oyuncunun karar noktasının önceleyicisidir. Dolayısıyla da bir terminal noktalarının sonraki noktaları olmadığı gibi, başlangıç noktalarının da önceleyici noktaları yoktur.

**Kural 2:** Oyun ağacındaki hiç bir patika bir karar noktasını kendisine bağlamaz.

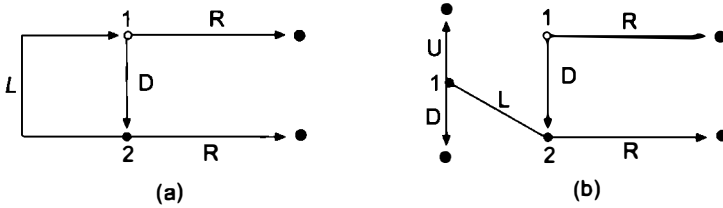
Şekil 3.4(a)'da görüldüğü gibi eğer 1. oyuncu D hareketini oynarsa 2.oyuncuya sıra gelir, fakat 2.oyuncu L hareketini oynadığında oyun sırası tekrar 1.oyuncuya geçer, yani bir döngü söz konusudur. Bu tür belirsizlerden kaçınmak için ağaç



Şekil 3.3

oyunlarının döngüsel halkalar oluşturmaması gerektiğini şart koşuyoruz.

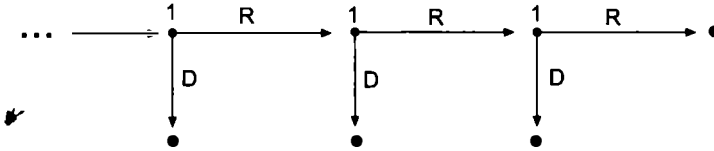
Şekil 3.4(b)'de gösterildiği gibi bu problem şöyle çözülür: 1.oyuncu iki kere hareket eder: bir 2.oyuncudan önceden, iki 2.oyuncudan sonra.



Şekil 3.4

**Kural 3:** Her karar noktası tek bir başlangıç noktasından sonra gelir.

Şekil 3.5 Kural 1 ve 2'yi sağlar fakat oyunun bir başlangıç noktası yoktur. Bu yüzden Kural 3'e ihtiyaç duyarız.



Şekil 3.5

**Kural 4:** Her ağaç oyunu tam olarak bir başlangıç noktasına sahiptir.

Kural 1, 2 ve 3 her karar noktasının tam olarak bir başlangıç noktasının sonrasından gelen noktalar olduğunu ima eder fakat ağacın tümü birden fazla karar noktasına sahip olabilir. Bu olduğunda karar noktaları geldiği başlangıç noktalarına göre farklı ayrıntı kümelerine ayrılabilir. Bu da bir ağaç içinde farklı oyunlar olduğu anlamına gelir. Kural 4 bu problemi giderir.

Diğer yandan, genişleyen-biçimli bir oyunda eğer sınırlı sayıda karar noktası

söz konusu ise bu oyuna sınırlı oyun, aksi takdirde sınırsız oyun denir. Sınırlılık şu üç koşulu gerektirir: (i) sınırlı sayıda oyuncunun olması (ii) sınırlı sayıda hareket olması ve (iii) sınırlı sayıda tarihin olması.

Eğer genişleyen-biçimli bir oyunda bu üç koşuldan biri sağlanmazsa, bu sonsuz sayıda karar noktasının olacağı anlamına gelir. Örneğin, sınırsız sayıda oyuncunun olduğu bir oyunda her oyuncunun karar noktaları düşünüldüğünde bu sonsuz karar noktası demektir; oyunda sınırlı sayıda oyuncu olabilir fakat bu oyuncuların sınırsız sayıda hareketleri söz konusu olabilir; veya bir oyun sonsuza kadar oynanabilir yani oyun ağacı sürekli büyüyen bir oyuna dönüşür, bu durumda oyunun tarihi sonsuza gider, dolayısıyla sınırsız karar noktası söz konusudur.

Bu kitapta karşılaşacağımız belirli bazı sınırsız oyun grupları vardır. Bu oyun gruplarından biri, özellikle oyuncuların hareket veya strateji kümelerinin reel sayıların bir alt kümesinden geldiği oyunlardır. Örneğin bir oyuncunun oyunda  $[0, 1]$  aralığında herhangi bir hareketi seçme imkanına sahip olması bu oyunu sınırsız yapar. Diğer bir sınırsız oyun grubu, kitabın ilerleyen bölümlerinde göreceğimiz tekrarlı oyunlardır. Bu tür oyunlar da sınırsızdır çünkü oyun sonsuza kadar oynanır, dolayısıyla tarih sonsuzdur.

Yukarıdaki tartışmadan genişleyen- biçimli oyunların genel yapısını ve temel kavramlarını verdik. Fakat dikkat edilirse bu yapının en önemli ayaklarından birinin bilgi olduğu açıkça görülür. Bu yüzden bu konuyu aşağıda daha detaylı tartışacağız.

## 3.3 Bilgi

### 3.3.1 Bilgi Kümesi

Eğer stratejik düşünmenin yarısı diğer oyuncuların ne yapacağını tahmin etmekse, diğer yarısı diğer oyuncuların ne bildiğini düşündürmektedir. Hatırlayacağımız gibi statik oyunlardaki hareketler eş anlı olduğundan dolayı, oyuncular bilgilerini birbirlerini gözlemleyerek elde etme imkanına sahip değillerdir. Fakat eğer oyuncular oyunu ardışal oynuyorlarsa neyi bildikleri anahtar bir öneme sahip olur. Eş anlı hareketli oyunlar ve ardışal hareketli oyunlar arasındaki temel fark, ardışal oyunlarda, ikinci oyuncunun, kendi hareketinden önce, kendisinden önce hareket eden 1. oyuncunun nasıl hareket ettiğini gözlemleyerek elde ettiği bilgidir.

Herhangi bir oyun için kimin neyi ne zaman bildiği önemli bir konudur. Bu da *bilgi kümesi* kavramı ile ifade edilir. Herhangi bir  $i$  oyuncusunun bilgi kümesi farklı patikalar üzerinde bir oyuncuya ait karar noktaları kümesidir. Bu  $i$  oyuncusunun sırası geldiğinde bildiği noktalarlardır. Yani  $i$  oyuncusu hangi oyuncunun hareket sırasına sahip olduğunu bilir, fakat oyunun varlığı ağaç dalını bilmeyebilir. Kısaca bir bilgi kümesi  $h \in X$  bir karar noktaları kümesidir fakat bu karar noktalarının hangisinde olduğu bilinmeyebilir.

Bir oyun ağacında bilgiyi anlamak için noktalarla *tarih* arasındaki bağlantıyı anlamak gerekir. Oyunun herhangi bir noktasındaki tarih, kimin neyi ne zaman yaptığını gösteren kayıttır. Ağaç oyunlarında başlangıç noktasından herhangi bir

noktaya giden tek bir patika vardır. Bu yüzden eğer vardığınız noktayı biliyorsanız, oraya varış tarihini de biliyorsunuz demektir.

Genişleyen-biçimli oyunları bu anlamda iki sınıfa ayırabiliriz: (i) mükemmel bilgili oyunlar. Bu oyunlarda oyun sırası size geldiğinde ağacın neresinde olduğunu bilirsiniz. Bu da oyunun tarihini tamamen biliyorsunuz demektir ve (ii) mükemmel-olmayan bilgili oyunlar. Bu oyunlarda oyun sırası sizde olduğunda oyunun tarihi hakkında belirsizsiniz demektir. Oyunun tarihi hakkındaki belirsizlik hangi noktada olduğunuza dair belirsizliğe karşılık gelir.

Bu belirsizliği ifade etmek için bilgi kümesi kavramını kullanabiliriz. Oyunu oynarken, diğer oyuncuların hareketleri karar noktalarınızdan birine varılmasına neden olur. Bu gerçekleştiğinde, hangi karar noktalarından birine varıldığını kesin olarak bilmeyebilirsiniz. Bu belirsizlik belirli bir bilgi kümesine varıldığını belirterek ifade edilir. Tüm bildiğiniz şey bilgi kümesindeki bir karar noktasına vardığınızdır fakat hangisi olduğunu bilmiyorsunuz. Bunu bilgi kümenize varıldığını belirten bir mesaj gibi de düşünebiliriz.

Aynı durumu daha genel olarak düşünelim. Bir oyunu bir aşamalar dizisi gibi düşünmek mümkündür. Her aşamada tüm oyuncular kendi seçim kümelerinden, yani kendilerini buldukları tarihlerde,  $A_i(h)$  hareketlerini seçerler. Eğer seçim hiç bir şey yapmamak ise bu durumda oyuncunun hareket kümesi boştur,  $h = \emptyset$ . Burada  $h^0$  oyunun başlangıcındaki tarihtir ve  $a^0 = (a_1^0, \dots, a_N^0)$ ,  $h^0$  tarihini takip eden hareket profilidir. Sonra  $h^1$ ,  $a^0$  ile tanımlanır ve  $A_i(h^1)$ ,  $i$  oyuncusu oradayken önünde olan hareketler kümesini gösterir. Bu şekilde devam edersek son aşama olan  $K$ 'ya varırız ve buradaki tarih önceki aşamalardaki hareketlerden oluşan bir dizi şeklinde yazılabilir,

$$h^{K+1} = (a^0, a^1, \dots, a^K),$$

burada  $K + 1$  oyundaki toplam aşama sayısını göstermektedir. Bazı oyunlarda bu sonsuz olabilir, yani  $K = \infty$ . Bu durumda oyunun sonucu sonsuz tarihtir ve  $h^\infty$  şeklinde ifade edilir.

Diğer yandan, olası tüm tarihleri  $H = \{h^k\}$  ile gösterelim. Her  $h^{K+1}$  tarihi tanım gereği oyunun başından sonuna kadarki hareketler dizisini tanımladığından, buna *terminal tarih* denir. Tüm terminal kümesi oyunda ortaya çıkan sonuçlar kümesidir,  $Z = \{h^{K+1}\} \subset H$ .

Bilgi kümelerini anlamlı kılmak için bu kümelerin üzerine belirli sınırlamalar getirmek gerekir. Bu sınırlamalardan birincisi, her karar noktasının tam olarak tek bir bilgi kümesine ait olmasıdır. Eğer birden fazla bilgi kümesine ait bir karar noktası olsaydı, bu karar noktasına varıldığına dair hangi mesajı aldığınız iyi tanımlanmamış olacaktı. Bu yüzden tüm bilgi kümelerinin kümesi,  $H$ , karar noktalarının bir bölmesini (*partition*) oluşturur:  $X = \cup_{h \in H} h$  ve  $\forall h, h' \in H, h \cap h' = \emptyset$ .<sup>1</sup>

Bölme kavramı burada önemli bir kavramdır. Bunu biraz açıklayalım. Bilgi

<sup>1</sup>A kümesinin bir bölmesi, A kümesinin alt kümelerinin bir kümesidir. Örneğin  $\{X, Y, Z\}$  kümesinin beş tane bölmesi vardır:

$\{\{X\}, \{Y\}, \{Z\}\}, \{\{X, Y\}, \{Z\}\}, \{\{X, Z\}, \{Y\}\}, \{\{X\}, \{Y, Z\}\}$  ve  $\{\{X, Y, Z\}\}$ .

kümeleri karar noktalarını *bölmelere* ayırır. Böylece her karar noktası tek bir bilgi kümesine ait olur. Bu şekilde bilgi kümeleri tarihlerle ilişkilendirilir. Yani bilgi bölmesi, oyunun herhangi bir aşamasında oyuncunun birbirinden ayırabileceğini bildiği farklı pozisyonları gösterir ve tüm olası noktaları bilgi kümeleri denilen alt kümelere böler. Dolayısıyla herhangi bir oyundaki  $i$  oyuncusunun bilgi bölmesi bu oyuncunun bilgi kümelerinin kümesidir.

İkinci sınırlama, bir bilgi kümesindeki tüm karar noktalarının aynı oyuncuya ait olmasıdır, yani  $\forall h \in H, \forall x, x' \in h, \iota(x) = \iota(x')$ . Aksi takdirde, iki veya daha fazla oyuncu sıralarının kendilerinde olduğunu düşünebilirlerdi. Her  $h \in H$  bilgi kümesinin sahibi bir oyuncu vardır,  $i \in N \cup \{0\}$ , ve bu bilgi kümesi tamamen  $i$  oyuncusunun karar noktaları kümesi içindedir, yani  $h \subset X_i$  dir.

Bilgi kümelerinin kümesi olan  $H$  kümesini her oyuncuya ait bilgi kümelerinin kümesine ayırabiliriz, yani bilgi bölmeleri oluşturabiliriz: Her  $i \in N \cup \{0\}$  oyuncusu için,  $H_i = \{h \in H : \forall x \in h, \iota(x) = i\}$  kümesi  $i$  oyuncusunun bilgi kümelerini içerir. Bu yüzden tüm  $i \in I \cup \{0\}$ ' ler için  $\cup_{h \in H_i} h = X_i$ 'dir.

Üçüncü ve son sınırlama, bir bilgi kümesindeki her noktanın, mevcut hareketlerden oluşan aynı kümeye sahip olmasıdır. Aksi takdirde oyuncu kendi önünde hangi hareketin olduğuna emin olmayacaktır, yani  $\forall h \in H, \forall x, x' \in h, A(x) = A(x')$ .

Bir bilgi kümesi tekil olabilir, yani sadece tek bir nokta içerebilir. Eğer her oyuncunun her bilgi kümesi tekilse, oyun mükemmel bilgili bir oyundur, yani  $h \in H, \#(h) = 1$  veya alternatif olarak şöyle de ifade edilebilir,  $\forall i \in N \cup \{0\}, \forall h \in H_i, \#(h) = 1$ . Eğer herhangi bir bilgi kümesi birden fazla karar noktasına sahipse, yani bazı oyuncular için,  $\exists i \in N \cup \{0\}, \exists h \in H_i, \#(h) > 1$  ise, bu oyun mükemmel-olmayan bilgili bir oyundur. Örneğin Şekil 3.2'deki oyun mükemmel bilgili oyundur, dolayısıyla

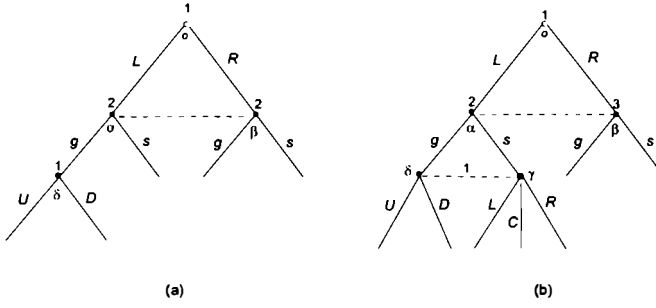
$$H_1 = \{\{o\}, \{\delta\}\}, H_2 = \{\{\alpha\}, \{\beta\}\}.$$

Şimdi Şekil 3.2'de ifade oyunun bilgi yapısını biraz değiştirelim: 2.oyuncu kendisine hareket sırası geldiğinde 1.oyuncunun ilk hareketini gözlemleyememektedir, dolayısıyla iki karar noktasından hangisinde olduğunu bilemez. Bu mükemmel-olmayan bilgi yapısı, Şekil 3.6'da iki karar noktası çizgili bir doğru ile birleştirilerek gösterilmiştir.

Bu oyunda üç tane bilgi kümesi vardır. 1.oyuncuya ait iki tane bilgi kümesi ve 2.oyuncuya ait bir bilgi kümesi vardır. Dikkat ederseniz 2.oyuncu kendi bilgi kümesinin her iki karar noktasında iki harekete sahiptir:  $A(\alpha) = A(\beta) = \{g, s\}$ . Bu oyundaki her oyuncunun bilgi kümelerinin kümesini, yani bilgi bölmeleri ise şöyledir,

$$H_1 = \{\{o\}, \{\delta\}\}, H_2 = \{\{\alpha, \beta\}\}.$$

Diğer yandan Şekil 3.2'de verilen oyunun daha farklı bir bilgi yapısı ile tanımlanan başka bir versiyonu Şekil 3.6(b)'de gösterilmektedir. Bu oyunda bilgi kümeleri üzerine konan sınırlamaların iki defa ihlal edildiğini görürüz. Bunlardan biri, bir bilgi kümesi farklı oyunculara ait karar noktalarını içermektedir, yani  $h =$

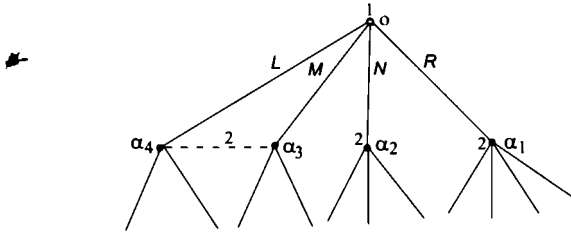


**Şekil 3.6** (a) Mükemmel olmayan bilgi (b) Makul olmayan bilgi

$\{\alpha, \beta\}$  bilgi kümesini düşünelim, burada  $\iota(\alpha) = 2$  fakat  $\iota(\beta) = 3$ . Diğer ihlal ise, 1.oyuncunun ikinci bilgi kümesinde farklı karar noktalarında bu oyuncuya ait farklı hareketler vardır. Yani  $h' = \{\delta, \gamma\}$  bilgi kümesini düşünelim, burada ise  $A(\delta) = \{U, D\}$  ve  $A(\gamma) = \{L, C, R\}$ . Bilgi kümesi kavramını daha da somutlaştırmak için aşağıdaki örnek üzerinden tartışmaya devam edelim.

### Örnek 3.1

Şekil 3.7'de verilen oyunda 1.oyuncu  $o$  karar noktasında hareket ederken, 2.oyuncu  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ve  $\alpha_4$  karar noktalarında hareket etmektedir. 1.oyuncu kendi hareketini bilir, fakat 2.oyuncu sadece şunu söyleyebilir: 1.oyuncunun hareketleri  $\alpha_1, \alpha_2$  veya "diğeri" ne yol açtı. Diğerinden kasıt, 2.oyuncu  $\alpha_3$  veya  $\alpha_4$  noktalarından birinde karar verecektir fakat hangisinde olduğunu bilmemektedir. Çünkü 2.oyuncu  $\alpha_3$  ve  $\alpha_4$  arasında bir ayrım yapamamaktadır. Eğer 1.oyuncu  $\alpha_3$ 'e neden olan hareketi seçerse onun bilgi kümesi basitçe  $\{\alpha_3\}$  olacaktır fakat 2.oyuncunun bilgi kümesi  $\{\alpha_3, \alpha_4\}$ 'dir. Şekil 3.7 noktalı-çizgi  $\alpha_3$  ve  $\alpha_4$  karar noktalarının 2.oyuncu için aynı bilgi kümesinde olduğunu göstermektedir.



**Şekil 3.7** Bilgi kümeleri ve bilgi bölmeleri

Bir karar noktası bir oyuncunun iki ayrı bilgi kümesine ait olamaz. Eğer  $\alpha_3$  karar noktası hem  $\{\alpha_2, \alpha_3\}$  ve hem de  $\{\alpha_3, \alpha_4\}$  bilgi kümesine aitse, bu durumda oyun  $\alpha_3$  noktasına varmışsa, 2.oyuncu  $\{\alpha_2, \alpha_3\}$ 'deki karar noktasında mı yoksa

$\{\alpha_3, \alpha_4\}$ 'deki karar noktasında mı olduğunu bilemeyecektir. Bu da gerçekte her ikisinin aynı bilgi kümesi olduğu anlamına gelir.

Eğer 2.oyuncunun bilgi kümelerinden birindeki karar noktaları hareket ettiğindeki karar noktaları ise, hareket kümesi her karar noktasında aynı olacaktır çünkü oyuncu kendi hareket kümesini bilir. 2.oyuncu  $\alpha_3$  ve  $\alpha_4$ 'de aynı karar noktalarına sahiptir çünkü  $\alpha_3$  farklı harekete sahip olsaydı orada olduğunu bilecek ve bilgi kümesi sadece  $\{\alpha_3\}$ 'e indirgenecekti. 2.oyuncu, kendi hareket kümesinde üç veya dört hareket olup olmadığını bilmek zorundadır. Aynı sebepten dolayı,  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  karar noktaları aynı bilgi kümesinde yer alamaz.

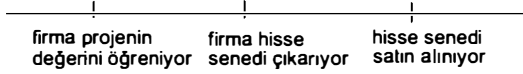
1. oyuncu için  $\{o\}$  bir bilgi bölmesidir. 2.oyuncunun sahip olduğu bilgi bölmesi ise  $(\{\alpha_1\}, \{\alpha_3\}, \{\alpha_3, \alpha_4\})$ 'dir. Dikkat ederseniz 2.oyuncunun bilgi kümelerinden biri,  $\{\alpha_3, \alpha_4\}$ 'dir. Bilgi kümeleri daha fazla eleman içerdiklerinde oyuncunun nerede olduğuna dair belirsizlik artar. Eğer bir bölmedeki bilgi kümelerinin sayısını azaltır ve bunlardaki karar nokta sayılarını artırırız, buna *kabalaştırma* (coarsening) denir. Eğer bir bölmedeki bir veya daha fazla bilgi kümelerini ayırırsak ki bu bilgi küme sayısını artırır ve bilgi kümelerindeki elemanları azaltırsak buna da *inceltme* denir. İnceltilmiş bilgi bölmesi "daha iyi bilgi" için kullanılan formel bir tanımdır. Tüm bilgi bölmeleri birbirinin rafine edilmiş hali değildir. Dolayısıyla tüm bilgi bölmeleri sahip oldukları bilgi niteliklerine göre sıralanmayabilir. Özellikle bir bilgi bölmesinin daha fazla bilgi kümelerini içermesi bunun diğer bir bilgi bölmesinin rafinesi olduğu anlamına gelmez.

2. oyuncunun I.bölme diye nitelendirdiğimiz  $\{\{\alpha_1\}, \{\alpha_3\}, \{\alpha_3, \alpha_4\}\}$  bölmesinin yanında şu bilgi bölmelerinin olduğunu varsayalım: Her varılan karar noktasındaki bilgi kümesi  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  ise yani bilgi bölmesi  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  olur (buna II.bölme diyelim) ve eğer  $\alpha_1, \alpha_2$  ve  $\alpha_3$  karar noktalarında bilgi kümesi  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  iken,  $\alpha_4$  karar noktasında bilgi kümesi  $\{\alpha_4\}$  ise, bu da bize  $\{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \{\alpha_4\}\}$  bilgi bölmesini verir (buna da III.bölme diyelim). I. bölme ile III. bölmeyi karşılaştıralım. I. bölme karar noktalarını üç bilgi kümesine ayırırken, III. bölme iki bilgi kümesine ayırır. Fakat III. bölme, I. bölmenin kabalaştırılmış hali değildir. Çünkü I. bölmedeki bilgi kümelerini birleştirerek III. bölmeye varılamaz. Bu yüzden III. bölmeye sahip oyuncu daha kötü bilgiye sahiptir. Eğer varılan karar noktası  $\alpha_1$  ise, I. bölme bize daha fazla bilgi verir. Fakat varılan nokta  $\alpha_4$  ise, III. bölme bize daha fazla bilgi verir. Diğer yandan II.bölmede oyuncu herhangi bir karar noktasını ayırt edemediğinden nihai hantallaştırma söz konusudur.

### 3.3.2 Zaman Doğrusu

Zaman doğrusu oyunda olayların sırasını göstermek için kullanılır. Özellikle sürekli stratejilerin olduğu ve bilginin dışsal olarak geldiği oyunlar için yararlı bir kavramdır. Zaman doğrusunu, geçen zamanı göstermekten ziyade hareketlerin ve olayların sırasını göstermek için kullanılır. Bazı olaylar anlık gerçekleşirken, bazıları ise bir aralık boyunca gerçekleşir. Bu yüzden bazen kararların alındığı "an" önemliyken, bazen de verilen karar sonrası geçen reel zaman önemlidir. En büyük fark ise oyuncuların reel zamanda, daha önce alacakları parasal ödemelerden

dolayı bir zaman tercihinə sahip olmalarının önem kazanmasıdır.



Şekil 3.8 Zaman doğrusu

Zaman doğrusu ile yapılan modellerde görülen genel bir yanlışlık olayların tarihsel sıralamasını reel zamandaki olaylarla sınırlandırılmasıdır. Yani örneğin bir firma projenin değerini öğrenir öğrenmez hisse senedi çıkarmaya karar versin. Modeli kuran kişi bunu zaman doğrusu üzerinde aynı tarihteki iki olay gibi tanımlayabilir. Bu da modeli inceleyen kişinin iki olayı da aynı anda mı ya da hangisinin daha önce olduğuna dair bir karışıklık yaşamasına imkan verebilir. Şekil 3.8'in gösterdiği gibi aslında önce projenin değeri öğrenilir sonra hisse senedi çıkartılır. Zaman doğrusu bu zamanlamayı göstermesi açısından önemlidir.

### 3.3.3 Mükemmel Hatırlama

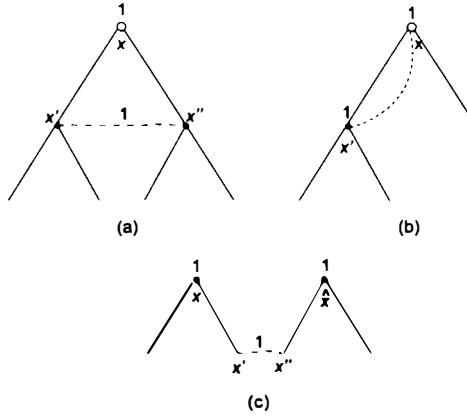
Genişleyen-biçimli oyunlarda genelde oyuncuların *mükemmel hatırlama* (*perfect recall*) özelliğine sahip oldukları varsayılır. Yani oyuncular daha önce bildiklerini unutmadıkları gibi, her oyuncu daha önce seçtiği hareketleri hatırlar ve buna göre davranır. Bunu daha formel şöyle tanımlayabiliriz:

(i) Eğer iki karar noktası aynı bilgi kümesindeyse, hiç biri diğerinin önceki noktası değildir

(ii) Eğer  $x'$  ve  $x''$  karar noktaları aynı bilgi kümesindeyse ve bunlardan biri  $x'$ 'den önce gelen bir nokta ise bu durumda  $x$  ile aynı bilgi kümesinde olan diğer karar noktası,  $\hat{x}$  gibi bir önceki noktaya sahiptir (muhtemelen  $x'$ 'in kendisidir) ve  $x$  noktasında yapılan hareketin  $x'$  noktasına yol açması  $\hat{x}$ 'de yapılan hareketin  $x''$  noktasına yol açması ile aynıdır.

Şekil 3.9 bu koşullara uymayan durumları yani mükemmel-olmayan hatırlamalı durumları göstermektedir. Şekil 3.9(a), (ii) koşuluna uymayan bir özellik göstermektedir. Çünkü 1.oyuncunun ikinci bilgi kümesinde  $x$  noktası hem  $x'$  ve hem de  $x''$  noktasından önceki noktadır. Yani  $x'$ 'den çıkan hareketler farklıdır. Şekil 3.9(b) ise (i) koşuluna uymamaktadır. Çünkü  $x$  ve  $x'$  aynı bilgi kümesinde yer almaktadır fakat  $x$  noktası  $x'$  noktasından önce gelmektedir. Son olarak Şekil 3.9(c) yine (ii) koşuluna uymamaktadır. Çünkü  $x'$  ve  $x''$  aynı bilgi kümesinde yer almaktadır ve  $x$  noktası  $x'$  noktasından önce ve  $\hat{x}$  noktası  $x''$  noktasından önce gelmesine rağmen,  $x$  ve  $\hat{x}$  noktalarının kendileri aynı bilgi kümesinde değildir.

Genişleyen-biçimli oyunlar genelde mükemmel hatırlamalı oyunlardır. Yani ne zaman bir oyuncu hareket etse, kendi geçmiş hareketleri dahil oyunun daha öncesinde oluşan herşeyi biliyor demektir. Mükemmel hatırlamalı bir oyun mükemmel bilgili ya da mükemmel-olmayan bilgili bir oyun olabilir. Fakat mükemmel-olmayan hatırlamalı bir oyun her zaman mükemmel-olmayan bilgili bir oyundur.



**Şekil 3.9** Bazı mükemmel olmayan hatırlama durumları

Çünkü mükemmel-olmayan hatırlamalı bir oyunda oyuncular her durumda oyunun neresinde olduğunu bilmeyeceklerdir. Bu kitapta yaptığımız temel varsayımlardan biri oyuncuların mükemmel hatırlama özelliğine sahip olduklarıdır.

### 3.3.4 Mükemmel, Kesin, Asimetrik ve Tam Bilgi

Bir oyunun bilgi yapısını dört farklı şekilde sınıflandırabiliriz: mükemmel, tam, kesin ve simetrik bilgi.

i. *Mükemmel bilgili oyun*, her bilgi kümesi tek-elemanlı (tekil) oyundur. Aksi takdirde, mükemmel-olmayan bilgili oyundur. Mükemmel bilgili oyunda bilgiye dair güçlü bir varsayımda bulunulur: Her oyuncu her zaman oyun ağacının neresinde olduğunu bilir. Hiç bir hareket eş anlı değildir ve tüm oyuncular Doğa'nın hareketlerini gözlemler. Örneğin Mahkumlar Çıkmazı oyunu mükemmel-olmayan bilgili bir oyun iken (tüm statik oyunlar mükemmel-olmayan bilgili oyunlardır) daha sonra göstereceğimiz standart Giriş Oyunu mükemmel bilgili bir oyundur. Bu oyunda piyasadaki mevcut firma piyasaya girmek isteyen firmanın girip girmediğini görür. Dolayısıyla nerde olduğunu bilir.

ii. *Kesin bilgili oyun*, herhangi bir oyuncu hareket ettikten sonra Doğa'nın hareket etmediği oyundur. Dolayısıyla oyun başladıktan sonra oyunun herhangi bir aşamasında şans diye nitelendirebileceğimiz Doğa'nın hareketlerinin olmadığı oyunlar kesin bilgili oyunlardır. Aksi takdirde oyun *belirsizlik* oyunudur. Kesin bilgili oyunlarda Doğa'nın ilk hareket eden oyuncu olmasına müsaade edilir. Fakat oyuncular hareket ettikten sonra Doğa yine devreye giriyorsa bu belirsizlik oyunudur, girmiyorsa kesin bilgili oyundur. Bu anlamda oyuncuların tiplerinin oyunun başında belirlendiği eksik bilgili oyunlar da bir belirsizlik oyunu olarak düşünülmeyebilir. Kesin olmayan bilgi, oyunda gelecekte elde edilecek fayda düzeylerinin belirsizliğine neden olur. Oyuncular davranışlarını bu anlamda beklenen fayda üzerinden

belirler. Kesin bilgili bir oyunda eğer hiçbir eş anlı hareket yoksa bu oyun aynı zamanda mükemmel bilgili bir oyundur. Örneğin Mahkumlar Çıkmazı kesin ve mükemmel-olmayan bilgili bir oyundur veya oyuna kimin önce başlayacağını belirlemek için zar atılan bir satranç oyunu yine kesin bilgili bir oyundur (aynı zamanda mükemmel bilgili bir oyundur), çünkü oyunun ilerleyen aşamalarında Doğa'nın hareketleri (ya da şans) yoktur. Fakat tavla oyunu her aşamasında Doğa'nın devrede olduğu bir oyundur, bu yüzden kesin bilgili olmayan bir oyundur, aynı zamanda mükemmel bilgili bir oyundur.

iii. *Simetrik bilgili oyun*, bir oyuncunun hareket ettiği bir noktada bilgi kümesinin diğer her oyuncunun bilgi kümeleri ile aynı olduğu oyundur. Aksi durumda oyun *asimetrik bilgili* bir oyundur. Asimetrik bilgili bir oyunda, bilgi kümeleri birbirinden farklılık gösterdiğinden, oyuncular aynı zamanda mükemmel-olmayan bilgiye sahiptirler çünkü bilgi farklılığını gösteren bilgi kümeleri tek-elemanlı değildir. Asimetrik bilgide bazı oyuncular *özel bilgiye* sahiptir, yani farklı ve diğerinden daha kötü olmayan bir bilgi bölmesine sahiptir. Simetrik bilgili bir oyunda Doğa'nın hareketleri olabilir veya eş anlı hareketler olabilir fakat bu durumlar herhangi bir oyuncuya bilgi avantajı sağlamayacaktır. Örneğin Mahkumlar Çıkmazı kesin, mükemmel-olmayan ve simetrik bilgili bir oyundur.

iv. *Eksik bilgili oyun*, ilk olarak Doğa'nın hareket ettiği ve bu hareketin en azından bir oyuncu tarafından gözlemlenemediği oyundur. Aksi takdirde *tam bilgili oyundur*. Eksik bilgili oyun aynı zamanda mükemmel-olmayan bilgili oyundur. Çünkü bir oyuncunun bilgi kümesi birden fazla eleman içerir. Eş anlı hareketlerin olduğu oyunlar tam fakat mükemmel-olmayan bilgili oyunlardır. Herhangi bir eksik veya asimetrik bilgili oyun aynı zamanda mükemmel-olmayan bilgili bir oyundur.

Diğer yandan, çok sayıda eksik bilgili oyun asimetrik bilgili oyundur. Fakat iki kavram aynı değildir. Eğer Doğa'nın bir ilk hareketi yoksa, ve 2.oyuncu, 1.oyuncunun yaptığı bir hareketi gözlemleyemiyorsa ve 1.oyuncu sonra tekrar hareket ediyorsa, oyun asimetrik fakat tam bilgili bir oyundur. Bir oyun hem eksik hem de simetrik bilgili olabilir, örneğin genç yaşta çalışmaya başlayan birinin yeteneklerini ne kendisi ne de işveren bilmektedir, fakat zamanla yeteneklerini hem kendisi hem de işveren öğrenmeye başlıyor.

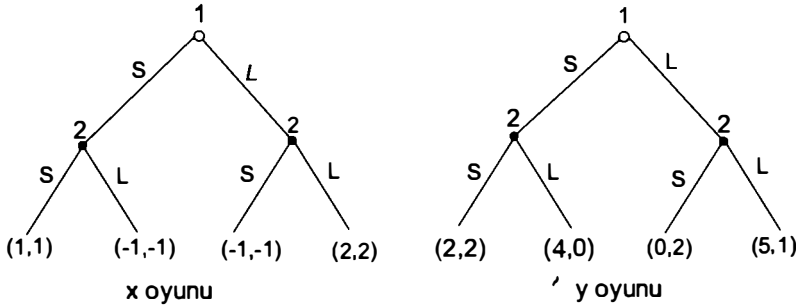
Tam bilgi, oyun teorisi literatüründe iki farklı anlamda kullanılır. Birincisi, yukarıda verdiğimiz tanımlamadır. Fakat tam bilgi, diğer ikinci bir tanımlamada ise (ki bu eski tanımlamadır), tüm oyuncuların oyunun kurallarını bilme durumu olarak tanımlanır, aksi takdirde eksik bilgi söz konusudur. Fakat bu tanımlama kullanıldığında, oyuncuların bilgi kümelerinin ne olduğunu tam olarak ifade etmek sorunlu hale gelmektedir. 1960'lı yılların sonuna kadar, oyun teorisyenleri bu tanımdan hareketle eksik bilgili oyunların analiz edilemeyeceğini belirtiyorlardı. Fakat Harsanyi (1967) ikinci tanımlamadan hareketle, eksik bilgili bir oyunun temel unsurlarını değiştirmeden mükemmel olmayan bilgili bir oyuna dönüştürebileceğini belirtir. Buna Harsanyi dönüşümü denir. Bunu Doğa'nın ilk önce hareket edip farklı oyunlar arasında seçim yaptığı bir oyuna dönüştürerek yapar.

Yeni dönüştürülen oyunda, tüm oyuncular artık yeni kuralları bilirler. Böylece Harsanyi'nin bu önerisi, eksik bilgili oyun tanımını sıradanlaştırmıştır ve insanlar bu terimi yeni dönüştürülen oyun için kullanmaya başladılar. Yani eski tanım altında, eksik bilgili bir oyun tam bilgili bir oyuna dönüşmüş oldu. Yeni tanımlamaya göre yeni dönüştürülen oyun eksik bilgili oyundur.

Harsanyi dönüşümüne bir örnek verelim. Bu aynı zamanda eksik bilgiden neyi kastettiğimizi daha iyi anlamamıza yardımcı olacaktır.

### Örnek 3.2

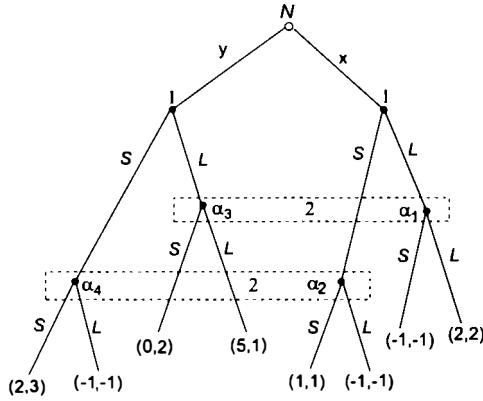
Şimdi de oyundaki 2. oyuncu olan *Alim*'in oyunun fayda düzeylerini tam olarak bilmediğini varsayalım. Fakat oyundaki fayda düzeylerinin ne olacağına dair belirli bir inancı vardır ve bu inançlarını subjektif olasılıkla ifade etmektedir. Örneğin %60 olasılıkla Şekil 3.10'da gösterilen  $x$  oyunun oynanacağına ve %40 olasılıkla da  $y$  oyunun oynanacağına inanmaktadır.



Şekil 3.10

Fakat *Ethem* 1.oyuncu olarak oyunun fayda düzeylerini bilmektedir. Sorun *Alim*'in bunu bilmemesidir (yani söz konusu olan eksik bilgili bir oyundur). Bu oyun aynı zamanda asimetrik ve kesinlik içeren bir oyundur (Doğa oyuncular hareket etmeye başladıktan sonra hareket etmezler).

Oyun Şekil 3.10'da gösterildiği biçimde analiz edilemez. Böyle bir oyunu analiz eder hale getirmek için Harsanyi dönüşümünü kullanmalıyız. Oyunu bu yüzden Şekil 3.11'deki gibi yeniden modelleyebiliriz. Bu doğrultuda Doğa ilk harekette bulunarak *Alim*'in subjektif olasılıkları ile uyumlu bir şekilde  $x$  ve  $y$  oyunlarının fayda düzeylerini belirlediğini düşünüyoruz. Şekil 3.11'deki oyun, Şekil 3.10'daki oyunun aynısını göstermektedir. Fakat şimdi analiz edilebilir hale gelmiştir. Artık hem *Ethem* hem de *Alim* oyunun kurallarını biliyor, şimdiki tek fark, *Ethem* Doğa'nın hareketini gözlemlerken *Alim* bunu yapamıyor. Burada *Alim*'in subjektif olasılıklarının ortak bilgi olduğunu unutmayalım.



**Şekil 3.11** Harsanyi dönüştürümü

Şimdi aşağıda vereceğimiz iki örnekle hem bilgi kümesi kavramını (kimin neyi ne zaman bildiği) hem de bunun ağaç gösterimini anlamayı daha da somutlaştıralım.

### Örnek 3.3 Eşleşen Para oyunun çeşitli versiyonları

İki oyuncunun her biri sahip oldukları bozuk parayı havaya atıp ve sonra paraları birbirleri ile karşılaştırıyorlar. Eğer paralar eşleşirse (yani paranın aynı tarafları gelirse), 1.oyuncu 2. oyuncuya 1 lira öder. Eğer eşleşmezse (farklı tarafları gelirse), 2. oyuncu 1. oyuncuya 1 lira öder.

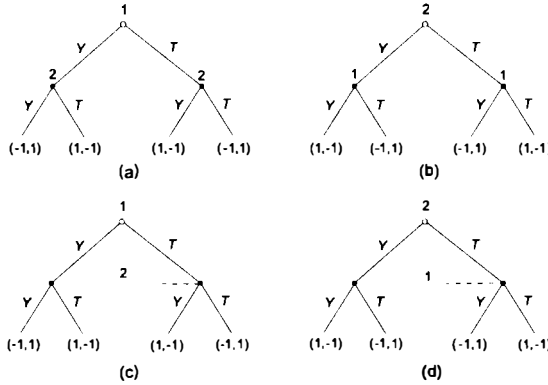
Bu örnekte sorulması gereken soru şudur: Oyuncular oynamaya başladıklarında neyi biliyorlar? Biraz düşündükten sonra, oyuncuların hareket edebileceği beş farklı olası durumun söz konusu olduğunu görebiliriz: (i) 1.oyuncu önce hareket eder ve 2. oyuncu hareket etmeden önce onun hareketini gözlemler (ii) 2.oyuncu önce hareket eder ve 1.oyuncu kendisi hareket etmeden önce onun hareketini gözlemler (iii) 1.oyuncu önce hareket eder fakat 2.oyuncu hareket etmeden önce onun hareketini gözlemleyemez (iv) 2.oyuncu önce hareket eder fakat 1.oyuncu hareket etmeden önce onun hareketini gözlemleyemez (v) oyuncuların her ikisi de aynı anda hareket eder.

Her oyuncu, (i) ve (ii) durumlarında kendi sırası geldiğinde diğer oyuncunun ne yaptığını bildiğinden bu oyunlar mükemmel bilgili oyunlardır. Fakat diğer üç durumda hiç bir oyuncu diğer oyuncunun ne yaptığını bilmediğinden bu oyunlar mükemmel olmayan bilgili oyunlardır. Daha açıkçası son üç durum her oyuncu açısından aynıdır. Dolayısıyla ne 1.oyuncu ne de 2.oyuncu kendi kararlarını verirken diğerinin hareketini bilir. Eğer diğerinin hareketini gözlemleyemiyorlarsa ne zaman hareket ettikleri önemli değildir. Yani 1.oyuncu açısından, 2. oyuncunun önceden yapmış olduğu fakat göremediği hareketi veya onunla aynı anda seçimde bulunması veya onun hareketini gözlemlemeden gelecekte yapacağı seçimi önemli değildir.

Böylece durumu nasıl tanımladığımıza bağlı olarak oyunun üç farklı gösterimine

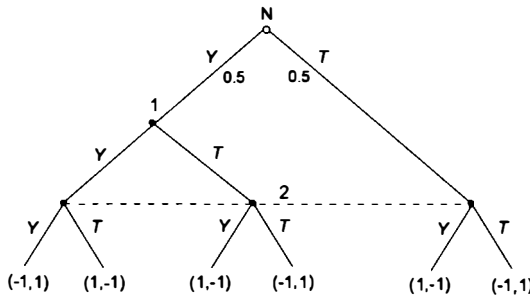
sahibiz. Şekil 3.12 genişleyen-biçimli bu durumları göstermektedir. Mükemmel olmayan bilgili durumun iki versiyonunun birbirine eşit olduğuna dikkat edin.

Oyuncuların birbirinin faydalarını bildiklerini varsaydığımızdan burada verilen Eşleşen Paralar oyunu tam bilgili bir oyundur. Şekildeki (a) ve (b) durumları mükemmel bilgili oyunları gösterirken, (c) ve (d) mükemmel-olmayan bilgili durumları göstermektedir. Burada (c) ve (d) durumlarının denk gösterimler olduğunu görmek için oyuncuların bilgi kümelerine bakmak yeterlidir (yani hareket edecekleri zaman ne biliyorlar). Aynı zamanda, (c) ve (d) durumlarında ilk hareket eden oyuncu olmamasına rağmen oyunda başlangıç noktası olduğunu görebilirsiniz.



**Şekil 3.12** Eşleşen Para oyununda olası durumlar

Eşleşen Para oyunun başka bir versiyonunu düşünelim. Paranın havaya atıldığı bir oyunun sonucunu sadece 1.oyuncunun gözlemlediğini varsayalım. Eğer sonuç yazıysa (Y), Eşleşen Paralar oyunu oynanır. Fakat sonuç tura (T), 2.oyuncu T veya Y hareketini seçer. Yani 2.oyuncu, 1.oyuncunun mu yoksa Doğa'nın mı tura oynadığını bilmemektedir (Şekil 3.13).

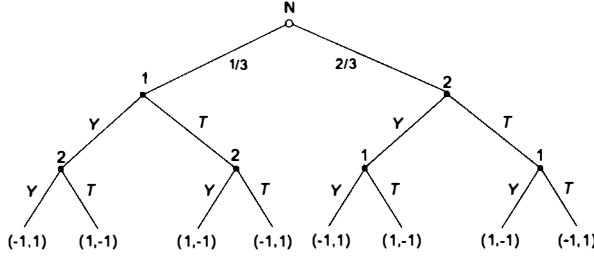


**Şekil 3.13**

Bu oyunda 2.oyuncu, 1.oyuncunun gerçekte oynayıp oynamadığı konusunda belirsizdir ve oynaması durumunda da neyi oynadığı hakkında da kesin bir fikre

sahip değildir. 2.oyuncunun bilgi kümesi, bu yüzden, üç karar noktasının tümünü dahil eder. 1.oyuncu Doğa'nın seçimini gözlemlediğinden dolayı sadece bir tek bilgi kümesine sahiptir ve bu tekildir.

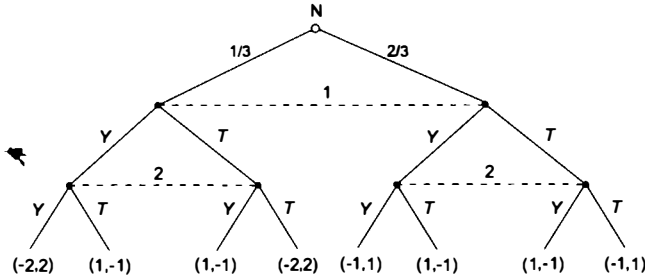
Şimdi de şöyle bir durum söz konusu olsun: Eşleşen Paralar oyununu oynamadan önce, oyuncuların kimin önce oynayacağını belirlemek için zar atıldığını varsayalım. Eğer gelen sayı üçten az ise 1.oyuncu ilk oynayan kişi olsun aksi takdirde 2.oyuncu ilk oynayan oyuncu olsun (Şekil 3.14).



Şekil 3.14

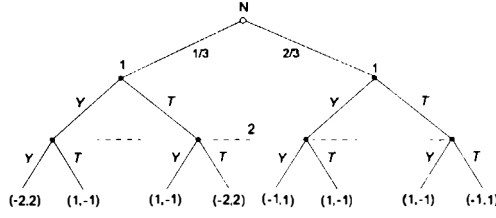
Bu oyun kesin bilgili bir oyundur. Çünkü Doğa oyunun başında hareket etse de oyun başladıktan sonra hareket etmez. Oyun aynı zamanda mükemmel bilgili bir oyundur çünkü 1.oyuncu 2.oyuncunun hareketini gözlemler.

Eşleşen Para oyunun başka bir versiyonunda ise, Eşleşen Paralar oyununu oynamadan önce, oyuncular birbirlerine 1 lira mı yoksa 2 lira mı ödeyeceklerini belirlemek için zar atarlar. Eğer zar 3'den az ise 1.oyuncu 2 lira öder, diğer durumda 1 lira öder. 1.oyuncu zarın sonucunu gözlemler fakat 2.oyuncu gözlemleyemez ve oyuncular aynı anda hareket ederler (Şekil 3.15). Bu oyun mükemmel bilgili olmayan bir oyundur çünkü 2.oyuncu 1.oyuncunun 2 mi yoksa 1 mi ödeyeceğini bilemez. Dahası her iki oyuncu da Eşleşen para oynamaya başladıklarında birbirinin hareketlerini gözlemleyemezler.



Şekil 3.15

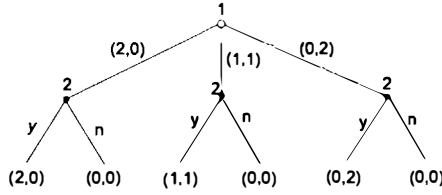
Başka bir durumda, 2.oyuncu zarın sonucunu gözlemler fakat 1.oyuncu bunu gözlemleyemez ve oyuncular aynı anda hareket ederler (Şekil 3.16).



Şekil 3.16

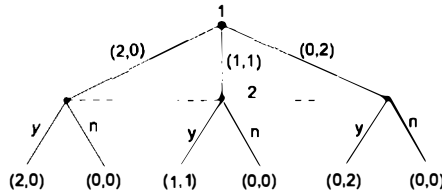
### Örnek 3.4 İki malın bölüşümü

İki kişi bölünemez iki objeyi paylaşmak için şöyle bir prosedür takip etsinler: Oyunculardan biri malların nasıl paylaşılacağını önersin, diğer oyuncu bu teklifi kabul veya ret etsin. Ret durumunda hiç kimse objelerden herhangi birini alamadığı gibi herkes sadece kendi aldığı obje sayısı ile ilgilenmektedir. Şekil 3.17 bu durumu göstermektedir.



Şekil 3.17 Mükemmel bilgili iki-mallı bir bölüşüm oyunu

Bu oyunun başka bir versiyonunda, 2.oyuncu önerinin ne olduğunu bilmeksizin kabul etmek veya ret etmek durumunda olsun (Şekil 3.18). Dolayısıyla daha önceki oyunu mükemmel olmayan bilgili bir oyuna dönüştürmüş olduk.



Şekil 3.18 Mükemmel bilgili iki-mallı bir bölüşüm oyunu

Yukarıda verdiğimiz tanımları da kullanarak şimdi genişleyen-biçimli bir oyunun formel tanımını verebiliriz.

**Tanım 3.1** Sınırlı ve mükemmel hatırlamanın olduğu genişleyen biçimli bir oyun,  $\Gamma = \{N, (X, \succ), \iota(x), A(\cdot), H, u(\cdot)\}$ , aşağıdaki unsurları içerir:

(i) Oyuncular kümesi  $N$  ile gösterilirken, herhangi bir oyuncu  $i$  ile gösterilir,  $i \in N$ ,  $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ , burada 0 Doğa'yı göstermektedir.

(ii) Bir ağaç oyunu,  $(X, \succ)$ , sınırlı sayıda  $x \in X$  karar noktası ve bir öncelik ilişkisi,  $\succ$ , içerir, burada  $x \succ x'$ ,  $x$  karar noktası  $x'$  karar noktasından daha önce gelir anlamındadır. Bu ilişki geçişli ve asimetriktir yani kısmi sıralama içerir<sup>2</sup>. Bu, oyunun  $x$  noktasından  $x'$  noktasına ve  $x'$  noktasından da  $x$  noktasına gitmesi gibi döngülerin oluşmasını engeller. Buna ek olarak her  $x$  karar noktasını hemen önceleyen tek bir karar noktası olmalıdır yani bir karar noktası  $x: x \succ x'$  ise,  $x'' \succ x$  ve  $x'' \neq x'$  durumu şu anlama gelir,  $x' \succ x''$  veya  $x'' \succ x'$ . Dolayısıyla eğer  $x'$  ve  $x''$  karar noktaları  $x$ 'in iki önceleyici noktası ise bu ya  $x'$  noktası,  $x''$  noktasından önce gelir ya da  $x''$  noktası,  $x'$  noktasından önce gelir demektir.

(iii) Herhangi bir karar noktasının önceleyicisi olmayan tüm noktaları içeren terminal noktalar kümesi ise  $z \in Z$  ile gösterilir. Her  $z$ , ağaç boyunca patikayı belirler, yani oyunun sonucunu temsil eder. Sonuçların fayda karşılıkları,  $u_i : Z \rightarrow R$  fayda fonksiyonu ile temsil edilir ve  $u = (u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_N(\cdot))$  ise her bir oyuncunun fayda fonksiyonları kümesidir.

(iv) Oyuncu fonksiyonu  $\iota : X \rightarrow N$  ile tanımlanır, yani  $\iota(x)$  fonksiyonu  $x$  karar noktasında hangi oyuncunun hareket ettiğini belirtir.  $A(x)$  ise  $x$  noktasındaki olası hareketler kümesini gösterir.

(v) Oyun ağacının karar noktalarını bölmelere ayıran bilgi kümeleri vardır,  $h \in H$ . Ve  $h(x)$ ,  $h$  bilgi kümesinde  $x$  noktasının olduğunu gösterir. Eğer  $x' \in h(x)$  ise bu durumda  $A(x') = A(x)$ 'dir. Ayrıca  $A(h)$ ,  $h$  bilgi kümesindeki olası hareketler kümesini temsil eder.

(vi) Tüm şans noktaları için (Doğa'nın hareketi), yani olası tüm alternatif durumlar için bir olasılık dağılımı tanımlanır.

### 3.4 Genişleyen-Biçimli Oyunlarda Pür Stratejiler

Strateji kavramı genişleyen biçimli-oyunlarda anahtar bir role sahiptir. Herhangi bir  $i$  oyuncusunun stratejisi ona her bilgi kümesinde hangi hareketi seçeceğini söyleyen bir hareket planıdır. Yani bir strateji oyuncuya sırası geldiğinde veri bilgide ne zaman ne yapacağını söyler; her olası durum için bir hareket tanımlar. Genişleyen-biçimli bir oyunda strateji bütüncül ve koşullu bir hareket planı olduğundan dolayı her olası bilgi kümesi için bir hareket planı belirler. Bu biraz sezgi dışı görülebilir çünkü stratejinin her bilgi kümesindeki tüm hareketlerin belirtilmesi demek, oyuncunun daha önceki bilgi kümelerindeki hareketlerinden dolayı asla ulaşılmaması mümkün olmayan hareketlerin de dahil edilmesi demektir. Fakat stratejinin bu tanımı Nash dengesinin genişleyen-biçimli oyunlara genişletilmesine imkan vermektedir. Bunu somut örnekler üzerinde gördüğümüzde daha anlaşılır olduğunu göreceğiz.

<sup>2</sup>Tam sıralama değildir çünkü iki karar noktası karşılaştırılamayabilir. Aynı bilgi kümesinde olduklarında bir karar noktası diğerini öncelemez.

**Tanım 3.2** Genişleyen-biçimli  $\Gamma$  oyununda,  $i$  oyuncusunun pür stratejisi, bilgi kümesinden hareketler kümesine tanımlanan bir fonksiyondur, yani  $s_i : H \rightarrow A$ , burada  $s_i(h) \in A_i(h)$ ,  $\forall h \in H$ .

### Örnek 3.5

Daha önce verdiğimiz iki malın paylaşım örneğine bakalım (Şekil 3.17). 1.oyuncu sadece ilk tarihten ( $\emptyset$ ) sonra hareket etmektedir ve stratejisi üç olası hareketi içerir,  $S_1 = \{(2, 0), (1, 1), (0, 2)\}$ . Diğer yandan 2.oyuncu üç farklı tarihten sonra hareket etmektedir ve bu oyuncunun stratejisi bu tarihlerin her birinden sonra neyi oynaması gerektiğini belirler. Yani 2.oyuncunun stratejisi her elemanın belirli bir tarihten sonra ne yapması gerektiğini belirten üç elemanlı bir kümedir. 2.oyuncunun stratejisini göstermek için  $(abc)$  üçlüsünü kullanabiliriz,  $a$  hareketi  $(2, 0)$ 'dan sonra alınan hareketi,  $b$  hareketi  $(1, 1)$ 'den sonra, ve  $c$  hareketi  $(0, 2)$ 'den sonra alınan hareketi gösterebilir. Örneğin  $(yyn)$  ( $y$  kabul anlamında,  $n$  ise ret anlamında kullanılmıştır),  $(2, 0)$  ve  $(1, 1)$  tekliflerini kabul etmeyi ve  $(0, 2)$  hareketini ret etmeyi belirten bir stratejidir. Strateji bütüncül bir koşullu hareket planı olduğundan, toplamda 2.oyuncu 8 stratejiye sahiptir (her olası durum için 2 harekete sahip olduğundan, toplamda  $2^3 = 8$  strateji vardır):

$$S_2 = \{(yyy), (yyn), (yyn), (yny), (nyy), (nyn), (nny), (nnn)\}.$$

Stratejinin koşullu bir hareket planı olduğunu tekrardan hatırlayalım. Örneğin  $(nny)$  stratejisi şöyle okunur: eğer 1.oyuncu  $(2, 0)$  teklif ederse ret et, eğer  $(1, 1)$  teklif ederse ret et ve eğer  $(0, 2)$  teklif ederse kabul et. Strateji aynı zamanda bütüncül bir hareket planı olduğundan, 2.oyuncunun stratejisi 1.oyuncunun her olası hareketi için kendisinin ne yapması gerektiğini-belirtmek zorundadır.

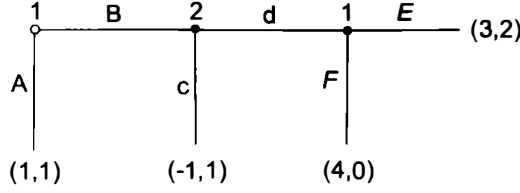
### Örnek 3.6

Burada 2.oyuncunun hareket etmeden önce ve hareket ettikten sonra 1.oyuncunun hareketini gösteren basit bir oyun örneği verelim. Şekil 3.19'da verilen oyunda iki oyuncu var,  $i \in \{1, 2\}$ . Oyun yedi tarihe sahiptir:

$$\{(\emptyset), (A), (B), (B, c), (B, d), (B, d, E), (B, d, F)\}.$$

$H_i$ 'nin  $i$  oyuncusunun bilgi bölmesini ve  $A_i(h)$ 'nin ise tüm  $h \in H_i$  için  $h$  bilgi kümesindeki olası hareketler kümesini gösterdiğini hatırlarsak, bu oyunda 1. oyuncunun  $\emptyset$  bilgi kümesinde iki harekete sahip olduğunu şöyle ifade ederiz:  $A_1(\emptyset) = \{A, B\}$ ;  $(B, d)$  bilgi kümesinde de iki olası harekete sahiptir,  $A_1(B, d) = \{F, E\}$ ; 2.oyuncu ise  $B$  bilgi kümesine geldiğinde, orada mevcut iki hareketi vardır,  $A_2(B) = \{c, d\}$ . Oyunda dört terminal tarih vardır:

$$Z = \{A, (B, c), (B, d, E), (B, d, F)\}.$$



Şekil 3.19

Strateji bütüncül bir koşullu hareket planı olduğundan dolayı, her bilgi kümesindeki hareketleri belirtmek zorundadır. 1.oyuncu oyunda iki bilgi kümesine sahiptir ve bu yüzden stratejisi iki unsurdan oluşur: birinci bilgi kümesindeki alınacak bir hareket ve ikinci bilgi kümesinde alınacak bir hareket. Her iki durumda da iki olası hareketi vardır. Bu yüzden toplamda dört stratejiye sahiptir:

$$S_1 = \{(AE), (AF), (BE), (BF)\}.$$

2.oyuncu ise sadece iki hareket içeren bir bilgi kümesine sahip olduğundan iki olası stratejiye sahiptir:

$$S_2 = \{c, d\}.$$

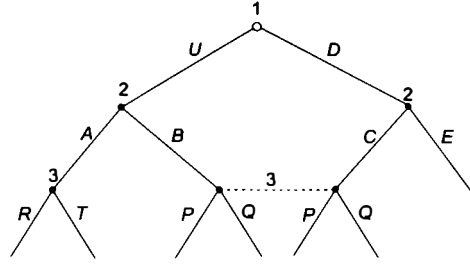
Strateji bir oyuncunun hareketi sırasında her bilgi kümesinden seçtiği hareketi karakterize ettiğinden, buna stratejinin takip edilmesi durumunda varılamayacak olan bilgi kümeleri de dahildir. Yani yukarıdaki oyunda (Şekil 3.19), ilk iki strateji, yani  $(AE)$  ve  $(AF)$  stratejileri,  $(B, d)$  tarihinden sonraki hareketleri tanımlar. Halbuki bu stratejiler başlangıç noktasındaki  $A$  hareketini tanımlar, yani  $A$  hareketi seçildiğinde  $(B, d)$  tarihi asla gerçekleşmez ve ikinci bilgi kümesine asla varılamaz. Fakat stratejinin tanımı gereği bu hareket profilleri stratejiler içinde yer alır.

### Örnek 3.7

Şekil 3.20'de gösterilen oyunun stratejilerini tanımlayalım. Oyunda üç oyuncu vardır. 1.oyuncu  $\emptyset$  tarihini takip eden bir bilgi kümesine sahiptir ve bu bilgi kümesinde iki harekete sahiptir:  $A_1(\emptyset) = \{U, D\}$ . 2.oyuncu iki bilgi kümesine sahiptir, biri  $U$  tarihini takip eden, diğeri  $D$  tarihini takip eden bilgi kümesidir. Her bilgi kümesinde iki hareketi vardır:  $A_2(U) = \{A, B\}$  ve  $A_2(D) = \{C, E\}$ . 3.oyuncu da iki bilgi kümesine sahiptir: birincisi  $(U, A)$  tarihini takip eden, diğeri ise  $(U, B)$  ve  $(D, C)$  tarihlerini takip eden. 3. oyuncu da her bilgi kümesinde iki harekete sahiptir:  $A_3(U, A) = \{R, T\}$  ve  $A_3(U, B) = A_3(D, C) = \{P, Q\}$ .

Stratejiler kısaca şöyledir:

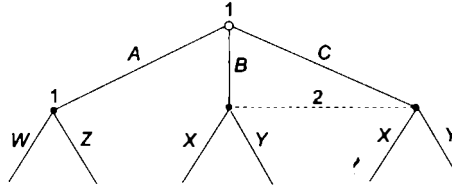
$$S_1 = \{U, D\}, S_2 = \{AC, AE, BC, BE\}, \\ S_3 = \{RP, RQ, TP, TQ\}.$$



Şekil 3.20 Üç oyunculu genişleyen-biçimli bir oyun

### Örnek 3.8

Necati (1.oyuncu) ve Tuncer'in (2.oyuncu) Şekil 3.21'de ifade edilen oyunu oynadıklarını düşünelim. Bu oyunda Necati iki bilgi kümesine sahiptir. Bunlardan biri  $\emptyset$  tarihini takip eden tarih, diğeri ise A tarihini takip eden tarihtir. Birinci bilgi kümesinde, Necati üç harekete sahiptir,  $A_1(\emptyset) = \{A, B, C\}$ 'dir. İkinci bilgi kümesinde Necati iki harekete sahiptir,  $A_1(A) = \{W, Z\}$ .



Şekil 3.21

Diğer yandan Tuncer B tarihini takip eden veya C tarihini takip eden sadece bir tek bilgi kümesine sahiptir. Bu bilgi kümesinde mevcut iki harekete sahiptir,  $A_2(B) = A_2(C) = \{X, Y\}$ . Bu yüzden kısaca bu oyunda stratejiler şöyledir:

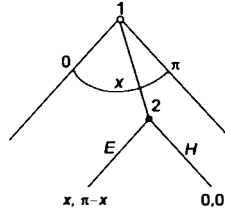
$$S_1 = \{AW, AZ, BW, BZ, CW, CZ\}$$

$$S_2 = \{X, Y\}.$$

Yukarıda verdiğimiz örneklerde oyunların sınırlı olduğunu varsaydık. Şimdi de sınırsız bir oyun örneği verelim.

### Örnek 3.9

1. oyuncunun, 2. oyuncuya  $\pi$  büyüklüğünde sonsuz bölünebilir bir pastayı paylaşma önerisinde bulunduğu bir oyun düşünelim. Yani bölüşüm önerisi şu şekilde,  $(x, \pi - x)$ , burada  $x \in [0, \pi]$  1.oyuncunun payını,  $\pi - x$  ise 2. oyuncunun payını göstermektedir.



**Şekil 3.22** Bir pastanın sonsuz bölümlü paylaşımı

2.oyuncu yapılan bu öneriyi gözlemler ve kararı kabul veya ret şeklindedir. Kabul ettiğinde pasta bölünecek ve ret ettiğinde ise her iki oyuncu da pastadan hiç bir şey alamadan oyun bitecektir. Bu oyunda 1.oyuncu sonsuz sayıda teklifte bulunma imkanına sahiptir ve 2.oyuncu da kabul ve ret seçimlerinden oluşan sonsuz sayıda bilgi kümesine sahiptir. Açıkça bu durumda strateji sayısını hesaplamak mümkün değildir.

Şekil 3.22 bu durumu gösteren genişleyen-biçimli bir oyunu göstermektedir. 1.oyuncunun kendi bilgi kümesinde sonsuz sayıda hareketi olduğunu göstermek için, minimumu 0 ve maksimumu  $\pi$  olan öneriler, bu iki değer arasında çizilebilecek dalların yayı şeklinde düşünülebilir. 2.oyuncu her olası teklif sonunda sonsuz sayıda bilgi kümesine sahip olduğundan dolayı  $x$  ile gösterilen herhangi bir dalı ve 2.oyuncunun bu öneriyi takip eden bilgi kümesi gösterilmektedir. 2.oyuncu, 1.oyuncunun her önerisi sonucunda ret ve kabul gibi iki seçeneği olduğunda tepkisi bu öneriye bağlı olarak değişebilir. 2.oyuncunun tepkisini oyunun tarihinin bir fonksiyonu gibi yazmak için, tüm bilgi kümelerini kapsayan bir karar kuralı belirtmeliyiz. Örneğin bir karar kuralı şöyle olabilir: “1.oyuncunun ne teklif ettiğinden bağımsız tüm önerileri kabul et”. Bir diğeri “1.oyuncunun ne teklif ettiğinden bağımsız olarak tüm teklifleri ret et”. Daha sofistike bir kural: “en az  $y$  kadar verdiğinde kabul et diğerlerini ret et”. Yani kısaca böyle düşünebileceğimiz sonsuz sayıda strateji olabilir.

### 3.5 Genişleyen-Biçim ve Stratejik-Biçim İlişkisi

Genişleyen-biçimli bir oyunu,  $\Gamma$ , stratejik-biçimli bir oyuna,  $G$ , dönüştürmek (ya da tersi bir dönüştürme) analiz yapmada bir takım kolaylıklar sunar. Bu algoritmik bir şekilde yapılır. İlk önce, oyuncular için tüm pür stratejiler bulunur. Sonra tüm strateji profilleri için beklenen sonuçlar bulunur. Son olarak beklenen sonuçlarla ifade edilen fayda fonksiyonlar tanımlanır.

Bu dönüştürmeyi daha formel bir dille ifade edebiliriz. Dönüştürmede oyuncular kümesi aynı kalır. Herhangi bir  $i \in N$  oyuncusu için normal biçimdeki  $S_i$  stratejiler kümesi genişleyen biçimdeki stratejiler kümesi ile aynı olsun. Herhangi bir  $s \in S$  strateji profili için ve  $\Gamma$  ağacındaki herhangi bir karar noktası için,  $p(x | s)$  başlangıç noktasından başlayarak veri stratejide oyunun  $x$  karar noktasından geçme

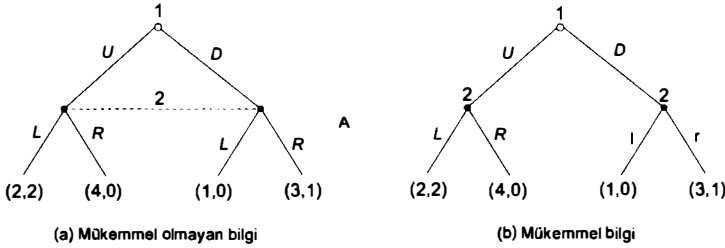
olasılığını gösterir. Terminal bir karar noktasında  $z \in Z$ , herhangi bir  $i$  oyuncusunun elde ettiği fayda  $u_i(z)$  olsun. Bu oyuncunun herhangi bir  $s \in S$  strateji profili için beklenen faydası,  $U_i(s)$ , şöyle tanımlanır:

$$U_i(s) = \sum_{z \in Z} p(z|s) u_i(z).$$

Yani eğer tüm oyuncular  $s$  strateji profiline göre stratejilerini uygularlarsa,  $i$  oyuncusunun beklenen faydası,  $U_i(s)$  olur. Eğer  $G$  oyunu,  $\Gamma$  oyunundan bu şekilde türetilirse buna  $\Gamma$ 'nin stratejik-biçimli gösterimi (ya da normal gösterimi) denir. Bu soyut ifadeleri örneklerle daha da somutlaştıralım.

### Örnek 3.10

Şekil 3.23'de verilen genişleyen-biçimli iki oyunun stratejik-biçimli gösterimini bulalım.



Şekil 3.23

Şekil 3.23(a)'da verilen mükemmel olmayan bilgili oyunda, 1. ve 2.oyuncuların her biri iki stratejiye sahiptir:  $S_1 = \{U, D\}$  ve  $S_2 = \{L, R\}$ . Dolayısıyla dört strateji profili oluşur:

$$S = S_1 \times S_2 = \{(U, L), (D, L), (U, R), (D, R)\}.$$

Şans hareketleri olmadığında (Doğa'nın bir hareketi yok), fayda fonksiyonlarını dönüştürmeye gerek kalmaz. Bu oyunun stratejik gösterimi Tablo 3.1'de gösterilmektedir.

|   | L    | R    |
|---|------|------|
| U | 2, 2 | 4, 0 |
| D | 1, 0 | 3, 1 |

Tablo 3.1

Şekil 3.23(b)'de gösterilen oyun ise biraz farklıdır. 1.oyuncunun hala iki stratejisi,  $S_1 = \{U, D\}$ , olmasına rağmen, 2.oyuncu seçimini 1.oyuncunun kararına göre

belirler. Burada 2.oyuncunun iki bilgi kümesi vardır ve stratejisi iki hareket belirlemek zorundadır. 1.oyuncu  $U$  ve  $D$  hareketlerini seçtikten sonra sırasıyla hareket kümeleri  $A_2(U) = \{L, R\}$  ve  $A_2(D) = \{l, r\}$  şeklindedir. Dolayısıyla 2.oyuncunun strateji kümesi dört pür stratejiden oluşur:  $S_2 = \{(L, l), (L, r), (R, l), (R, r)\}$ . Yani oyunda sekiz strateji profili vardır:

$$S = S_1 \times S_2 = \left\{ \begin{array}{l} \langle U, (L, l) \rangle, \langle U, (L, r) \rangle, \langle U, (R, l) \rangle, \langle U, (R, r) \rangle, \\ \langle D, (L, l) \rangle, \langle D, (L, r) \rangle, \langle D, (R, l) \rangle, \langle D, (R, r) \rangle \end{array} \right\}.$$

Bu oyunda belirsizlik olmadığından dolayı, fayda fonksiyonlarını dönüştürmeye de gerek yoktur. Bu yüzden stratejik-biçim Tablo 3.2'deki gibidir,

|     | $(L, l)$ | $(L, r)$ | $(R, l)$ | $(R, r)$ |
|-----|----------|----------|----------|----------|
| $U$ | 2, 2     | 2, 2     | 4, 0     | 4, 0     |
| $D$ | 1, 0     | 3, 1     | 1, 0     | 3, 1     |

**Tablo 3.2**

Dikkat edilirse genişleyen-biçimli bir oyunun bilgi yapısında ufak bir farklılık birbirinden tamamen farklı stratejik-biçimli gösterimlere neden olabilmektedir.

Tekrardan Şekil 3.17'deki genişleyen-biçimli oyuna dönelim. Bu oyunu oyuncularının buna denk gelen pür stratejilerini ve faydalarını tanımlayarak stratejik-biçimli oyuna dönüştürebiliriz. Oyuncuların stratejilerini zaten biliyoruz:

$$S_1 = \{(2, 0), (1, 1), (0, 2)\} \text{ ve}$$

$$S_2 = \{(yyy), (yyn), (ynn), (yny), (nyy), (nyn), (nny), (nnn)\}.$$

Bu bize  $3 \times 8$  strateji profili verir. Belirsizlik olmadığı için, fayda fonksiyonlarını yeniden tanımlamamıza gerek yok. Sonuç olarak Tablo 3.3'deki stratejik-biçim gösterimini elde ederiz:

|          | $(yyy)$ | $(yyn)$ | $(ynn)$ | $(yny)$ | $(nyy)$ | $(nyn)$ | $(nny)$ | $(nnn)$ |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $(2, 0)$ | 2, 0    | 2, 0    | 2, 0    | 2, 0    | 0, 0    | 0, 0    | 0, 0    | 0, 0    |
| $(1, 1)$ | 1, 1    | 1, 1    | 0, 0    | 0, 0    | 1, 1    | 1, 1    | 0, 0    | 0, 0    |
| $(0, 2)$ | 0, 2    | 0, 0    | 0, 0    | 0, 2    | 0, 2    | 0, 0    | 0, 2    | 0, 0    |

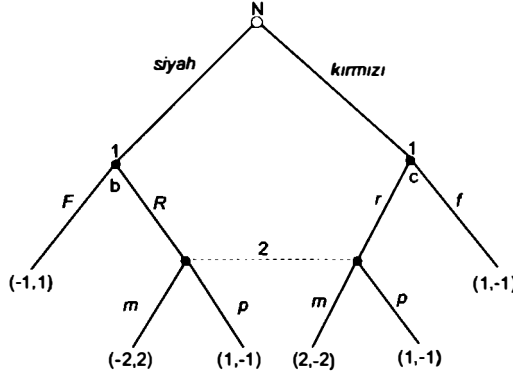
**Tablo 3.3**

### Örnek 3.11

Şimdi de Myerson kart oyunu denen oyuna bakalım. Bu oyunda belirsizlikler olduğu için elde edilecek fayda düzeyleri beklenen fayda değerleri olarak ifade edilmelidir. Oyunda ilk önce Doğa hareket etmektedir. Doğa'nın iki olası hareketi vardır: *kırmızı* ve *siyah*. Kartın rengini gören 1.oyuncu *açıklamak* ve *saklamak* arasında bir tercih yapar. 1. oyuncu, farklı renklerde farklı davranma imkanına

sahiptir. Yani kart siyahken bir karara, kırmızı iken diğer bir karara varabilir. Fakat her iki durumda da hareketleri, *yükseltmek* ve *çekilmek* şeklindedir.

Eğer 1.oyuncu *R* hareketini seçerse, hareket sırası 2.oyuncuya geçer. 2.oyuncu da iki harekete sahiptir: *görür* veya *pas* geçer, bu hareketler sırasıyla *m* ve *p* ile gösterilir. Şekil 3.24 bu oyunu ağaç formunda göstermektedir.



Şekil 3.24 Myerson Kart oyunu

2.oyuncu hareket sırası kendisine geldiğinde, 1.oyuncunun kırmızı mı yoksa siyah karta mı sahip olup olmadığını bilmiyor. Dolayısıyla 2.oyuncunun bilgi kümesi hem (*siyah*, *R*) hem de (*kırmızı*, *r*) tarihlerini içerir. Çünkü bu tarihlerin her biri 2.oyuncu için farklı bir karar noktasında bulunmasına neden olur. Bunları şekilde çizgili doğru ile gösterdik.

1.oyuncu kendisine hangi kartın geleceğini bilmediğinden, stratejisini kartın rengine göre belirler. Çünkü yükselt veya çekil hareketlerini seçmeden önce kartın rengini görür. Bu yüzden dört farklı stratejiye sahiptir,  $S_1 = \{Rr, Rf, Fr, Ff\}$ . Diğer yandan 2.oyuncu 1.oyuncu sadece yükselt oynarsa kendisine hareket sırası geleceğinden, 2.oyuncunun pur stratejileri  $S_2 = \{m, p\}$ 'dir. Dolayısıyla oyundaki strateji profili ise şöyledir:

$$S = S_1 \times S_2 = \left\{ \begin{array}{l} (Rr, m), (Rr, p), (Rf, m), (Rf, p), \\ (Fr, m), (Fr, p), (Ff, m), (Ff, p) \end{array} \right\}$$

Şimdi de oyuncular için beklenen fayda fonksiyonlarını tanımlamalıyız. Sonuç kartın rengine bağlı olduğu için gerçek sonucu tahmin edemeyiz. Örneğin varsayalım ki 1.oyuncu *Fr* stratejisini seçti ve 2.oyuncu ise *m* stratejisini seçti, böylece strateji profili (*Fr*, *m*) olur. Yani 1.oyuncu eğer kart siyahsa çekil oynar, kart kırmızı ise yükselt oynar ve 2.oyuncu da bunu görür (1.oyuncunun strateji profilindeki ilk hareket siyah sonrası hareketini, ikinci hareketi ise kırmızı sonrası hareketini göstermektedir). Bu durumda 1.oyuncunun fayda düzeyi, eğer kart siyahsa -1 fakat eğer kart kırmızı ise 2 olur.

Öyleyse 1.oyuncunun (*Fr*, *m*) profilinden beklenen faydası nedir? *Fr* strate-

jisini seçmek 2.oyuncunun  $m$ 'yi seçtiği veri alındığında bir lotari seçimine benzer. Bu lotaride 1.oyuncu 0.5 olasılıkla  $-1$  alacak, 0.5 olasılıkla 2 alacaktır. Bu durumda 1. oyuncunun beklenen faydası şöyle hesaplanır:

$$\begin{aligned} u_1(Fr, m) &= 1/2 \times u_1(siyah, F) + 1/2 \times u_1(siyah, r, m) \\ &= 1/2 \times (-1) + 1/2 \times (2) = 0.5. \end{aligned}$$

Benzer şekilde 2.oyuncunun beklenen faydası ise

$$\begin{aligned} u_2(Fr, m) &= 1/2 \times u_2(siyah, F) + 1/2 \times u_2(siyah, r, m) \\ &= 1/2 \times (1) + 1/2 \times (-2) = -0.5. \end{aligned}$$

Bu şekilde devam edersek, tüm strateji profilleri üzerinden beklenen faydaları buluruz. Böylece belirsizliğin olduğu bu oyunun stratejik-biçimli gösterimine oluşturabiliriz. Tablo 3.4'de bu oyunun stratejik-biçimli gösterimi verilmektedir.

|      | $m$       | $r$   |
|------|-----------|-------|
| $Rr$ | 0, 0      | 1, -1 |
| $Rf$ | -0.5, 0.5 | 1, -1 |
| $Fr$ | 0.5, -0.5 | 0, 0  |
| $Ff$ | 0, 0      | 0, 0  |

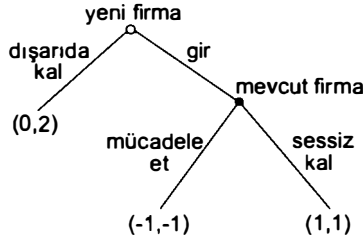
**Tablo 3.4**

## 3.6 Genişleyen-Biçimli Oyunlarda Denge

### 3.6.1 Geriye Doğru Çıkarsama

Genişleyen-biçimli oyunların önemli bir kısmında oyuncular kendilerine oyun sırası geldiğinde daha önce yapılmış hareketler hakkında tam bilgiye sahiptirler, yani tüm karar noktaları tekildir,  $h(x) = \{x\}$ . Bu oyunlara daha önce belirtildiği gibi mükemmel bilgili oyunlar denir.

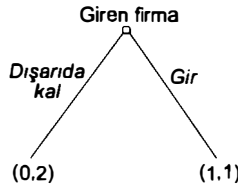
Bu oyunlardan biri de oyun teorisinde adı sıkça geçen Giriş oyunudur. Bu oyunda tek bir piyasada rekabet eden iki firma vardır. Bunlardan biri piyasada şu an üretim yapan mevcut firma, diğeri ise henüz üretim yapmayan fakat piyasaya girmeyi düşünen, yeni firmadır. Yeni firma piyasaya girmek veya dışarıda kalmak gibi iki karardan birini vermek zorundadır. Eğer dışarıda kalırsa, eski durumu devam edecek ve oyun sona erecektir. Fakat eğer girerse, mevcut firma, fiyatı düşürerek bu firma ile mücadele edecek veya duruma razı olup bir şey yapmayacaktır. Eğer yeni firma dışarıda kalırsa mevcut firmanın faydası 2 iken yeni firmanın 0'dır. Eğer yeni firma girerse, ve mevcut firma savaşırsa her iki firmanın faydası  $-1$ , fakat eğer mevcut firma duruma razı olursa her iki firmanın faydası 1 olmaktadır. Bu oyun Şekil 3.25'de gösterilmektedir.



**Şekil 3.25** Giriş oyunu

Mevcut firma için en iyisi yeni firmayı dışarıda bırakıp tekel kârı olan 2 değerini almaktır. Fakat soru yeni firma dışarıda kalacak mı? Bu açıkça mevcut firmanın tepkisine bağlıdır. Eğer mevcut firma savaşılarak tepki verirse, yeni firmanın faydası  $-1$  olacaktır ve bu yüzden yeni firmanın dışarıda kalması daha iyidir. Diğer yandan, eğer mevcut firma girmeye rıza gösterirse, yeni firma girmelidir. Yani oyunun sonucu mevcut firmanın girişe nasıl tepki vereceğine indirgenebilir.

Şimdi yeni firmanın girdiğini varsayalım. Acaba mevcut firma için en iyi hareket nedir? Açıkça girişe rıza göstermektir, yani  $-1$  yerine  $1$  almayı tercih etmektir. Sonuç olarak yeni firma açısından, oyun Şekil 3.26'de verilen oyuna indirgenir. Burada mevcut firmanın optimal kararı sonucunda kalan fayda düzeylerini yerinde bırakarak oyunu tekrardan çizdik. Açıkça yeni firma girmeyi seçecektir çünkü bu ona  $1$  kazandıracaktır, alternatif olan dışarıda kalmak dolayısıyla  $0$  almaktır. Dikkat edilirse buradaki düşünme biçimi oyunun son aşamaşına gidip oradan geriye doğru düşünerek optimal hareketin seçilmesi şeklindedir. Bu durumdaki denge stratejileri aday firmanın girmesi, mevcut firmanın ise bu girişe rıza göstermesidir. Bu bir Nash dengesidir. Mükemmel bilgili oyunlarda Nash dengesini bu şekilde bulma yöntemine *geriye doğru çıkarsama* yaklaşımı denir.



**Şekil 3.26**

Herhangi bir mükemmel bilgili genişleyen-biçimli oyunda ortaya çıkan Nash dengeleri kümesi bu oyunun stratejik-biçimindeki Nash dengeleri kümesidir. Giriş Oyununda yeni firmanın iki stratejisi vardı: sessiz kal ve mücadele et. Oyunun stratejik-biçimi Tablo 3.5'de gösterilmektedir. Buradan iki Nash dengesi olduğu anlaşılmaktadır: (gir, sessiz kal) ve (dışarıda kal, mücadele et) gibi. İlk denge geriye doğru çıkarsama yöntemi ile zaten ortaya çıkmaktadır. Fakat ikinci dengede

yeni firma hep dışarıda kal stratejisini seçmektedir. Bu strateji, ancak giriş durumunda mevcut firmanın savaşıacağı düşünüldüğünde optimaldir. Dahası mevcut firmanın stratejisi mücadele et ise yeni firmanın dışarıda kalması optimaldir, böylece mevcut firmanın sessiz kal veya mücadele et stratejisini seçmesi arasında bir fark yoktur, faydasını etkilemez. Yani hiç bir oyuncu diğer oyuncunun stratejisi veriyken farklı bir strateji izleyerek faydasını artıramaz.

|                     |                    |                    |
|---------------------|--------------------|--------------------|
|                     | <i>sessiz kal,</i> | <i>mücadele et</i> |
| <i>gir</i>          | (1, 1)             | (-1, -1)           |
| <i>dışarıda kal</i> | (0, 2)             | (0, 2)             |

**Tablo 3.5**

Herhangi bir stratejik-biçimli oyunda Nash dengesinin arkasındaki mantık şunu söyler: Diğer oyuncuların stratejileri veri alındığında her oyuncunun stratejisi durağan durumda optimaldir ve her oyuncunun oyun tecrübesi diğer oyuncuların hareketleri konusunda doğru tahminde bulunmasına imkan verir. Fakat bu mantık genişleyen-biçimli Giriş Oyununa uygulanamaz çünkü *dışarıda kal* hareketini seçen yeni firma asla mevcut firmanın *gir* tarihinden sonra hareketini gözlemleyemez, çünkü mevcut firma bu durumda hareket etmez zaten.

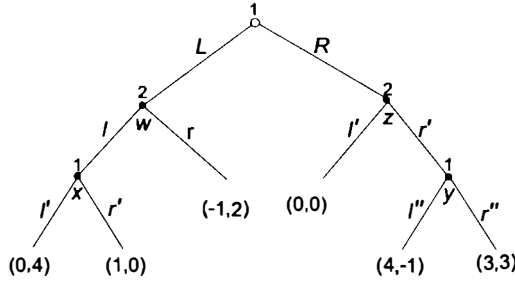
Diğer yandan bu oyunda mevcut firmanın eğer firma girerse mücadele etmeyi kafasına koymadığını varsayıyoruz. Sessiz de kalabilir mücadele de edebilir. Eğer mevcut firma giriş durumunda savaşmaya söz verseydi, buradaki analiz tamamen farklı olacaktı. Böyle bir söz verme yeni firmayı dışarıda bırakırdı, ki bu mevcut firmanın istediği birşeydir. Böyle bir söz vermenin olmadığı durumda, mevcut firma yeni firmanın girmesi durumunda mücadele edeceğini ilan edebilirdi. Fakat böyle bir tehdit inandırıcı değildir çünkü yeni firma girdikten sonra mevcut firma için en iyi olan sessiz kalmaktır. Yani *inandırıcı tehdit*, uygulama fırsatı geldiğinde uygulaması oyuncunun kendi çıkarına olan tehdittir. İnandırıcı olmayan tehditler rasyonel oyuncular tarafından ihmal edilir. Şimdi geriye doğru çıkarsama yaklaşımını nispeten daha kompleks bir örnek üzerinden tartışalım.

### Örnek 3.12

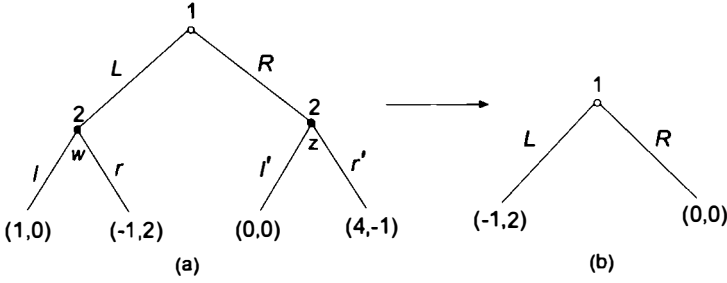
Şekil 3.27'de verilen oyunun dengesini bulalım. Bunun için de terminal noktalarından bir önceki karar noktalarından başlayalım. Bu durumda olan iki karar noktası var, bunlar  $x$  ve  $y$ 'dir. Her ikisi de 1.oyuncuya aittir. 1.oyuncu  $x$  karar noktasında  $r'$  hareketini seçerek en iyisini yapar ve  $y$  karar noktasında ise en iyi seçimi  $l''$  hareketidir.

Sonuç olarak Şekil 3.27'deki oyun, Şekil 3.28(a)'daki oyuna indirgenir, ki burada  $x$  ve  $y$  karar noktaları fayda vektörü ile yer değiştirir. Bunu yeni indirgenmiş oyun üzerinden tekrar edelim.

Burada hem  $w$  hem de  $z$  terminal noktalar öncesi karar noktaları olur. Bunlar 2.oyuncuya ait karar noktalarıdır. Eğer  $w$  karar noktasına varılırsa, 2.oyuncu için en iyi hareket  $r$  hareketini seçmektir ve eğer  $z$  karar noktasına varılırsa 2.oyuncu



Şekil 3.27



Şekil 3.28

için en iyi hareket  $l'$  olacaktır. Bu sonuçları da kullanarak elde ettiğimiz yeni oyun Şekil 3.28(b)'de verilen oyundur. İndirgenmiş bu yeni oyunda ise açıkça 1.oyuncu  $R$  hareketini seçer.

Sonuç olarak oyuncular optimal stratejilerini takip ettiklerinde ortaya çıkan sonuç, dengede her bir oyuncunun sıfır fayda almasıdır,  $(0,0)$ . Fakat her oyuncunun sıfır fayda alması biraz ilginç gözükabilir çünkü her bir oyuncunun 3 olması mümkünken 0 almaktadırlar. Bunun sebebi ise oyuncuların her aşamada rasyonel davranmalarıdır:  $z$  karar noktasına varıldığında 2.oyuncunun  $r'$  hareketini yapması hata olurdu çünkü 1.oyuncu rasyonel olarak  $y$  karar noktasında,  $r''$  hareketini değil  $l''$  hareketini seçer, çünkü  $l''$  hareketi 1.oyuncuya daha yüksek bir fayda sağlar. 2.oyuncu, bunu doğru bir şekilde tahmin ettiği için,  $z$  noktasında  $l'$  hareketini oynar. Bu hareket 2.oyuncuya 0 kazandırır, aksi takdirde  $-1$  alırdı.

Yukarıda verdiğimiz her iki örnek için tanımladığımız prosedür sınırlı mükemmel bilgili tüm oyunlar için geçerlidir. Bu prosedürde elde edilen optimal stratejilere *geriye doğru çıkarsama stratejileri* denir. Oyunun sonundan başlayarak geriye doğru gelerek optimal hareketi bulma metodu ise daha önce ifade ettiğimizi gibi *geriye doğru çıkarsama* olarak nitelendirilir. Bu şekilde oyun başından itibaren optimal bir strateji izlenir. Yani diğer oyuncuların stratejileri veri alındığında, eğer planınız oyunun başında optimalsa ve bu stratejiye bağlı kalırsanız, oyun

başladıktan sonra da kararınızı asla değiştirmeyeceksinizdir (diğer oyuncuların kendi stratejilerine sadık kaldıkları müddetçe). Dikkat edilirse geriye doğru çıkarsama algoritmasında temel fikir, oyunda daha önce alınan hareketler ileride harekette bulunacak oyuncuların optimal davranışlarını dikkate alarak şimdiden optimal davranışta bulunmaktadır. Bu aslında dinamik programlama prensibinin birden fazla kişinin olduğu bir durum için yapılan yorumundan başka bir şey değildir.

Diğer yandan eğer  $s$  stratejisi mükemmel bilgili ve sınırlı genişleyen- biçimli bir oyunun geriye doğru çıkarsama stratejisi ise  $s$  stratejisi aynı zamanda bu oyunun Nash dengesidir. Özetle her geriye doğru çıkarsama ile elde edilen strateji profili Nash dengesidir. Çünkü geriye doğru çıkarsama algoritması, mükemmel bilgili ve sınırlı oyunlarda her zaman sonlanır. Fakat tersi doğru değildir. Yani her Nash dengesi geriye doğru çıkarsama stratejisi değildir. Şekil 3.25’de verilen Giriş oyununda geriye doğru çıkarsama stratejisi yeni firmanın girmesi ve mevcut firmanın bu girişe razı olmasıdır. Bu aynı zamanda Nash dengesidir. Fakat oyunda başka bir Nash dengesi daha vardır: Yeni firma dışarıda kalır ve mevcut firma mücadele eder. Dikkat ederseniz, diğer oyuncunun stratejisi veri alındığında, hiç bir oyuncu stratejisini değiştirerek faydasını artıramaz bu yüzden bu stratejiler bir Nash dengesidir.

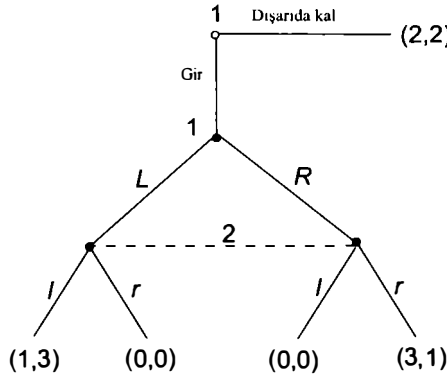
Fakat bu Nash dengesi anlamlı gözükmemektedir çünkü mevcut firmanın savaşma tehdidi inandırıcı değildir. Tehdit inandırıcı değil çünkü kendisine bu tehdidi gerçekleştirme imkanı verildiğinde gerçekleştirmek rasyonel değildir. Yeni firma bunu gördüğü için piyasaya girer. Yeni firmanın ileriye düşünmesi kendisini geriye doğru çıkarsama stratejilerinde gösterir. Bu yüzden çok sayıda Nash dengesi olduğunda, bunlardan bazıları makul veya inandırıcı olmama yüzünden elemine edilir.

### 3.6.2 Alt oyun Mükemmel Denge

Geriye doğru çıkarsama tekniği mükemmel bilgili oyunlara oldukça iyi bir şekilde uygulanabilmektedir. Fakat bu teknik diğer oyunlara hemen genişletilemez. Örneğin Şekil 3.29’de gösterilen oyuna bakın. Bu oyunda 1.oyuncu, 2.oyuncu ile koordinasyon oyunu oynama opsiyonuna sahiptir. Şimdi buna geriye doğru çıkarsama tekniğini uygulayalım.

Daha önce olduğu gibi ilk adım tüm bilgi kümelerinin yerini belirlemek ve bilgi kümelerindeki hangi hareketin seçileceğini saptamaktır. Bu bilgi kümelerinde hangi hareket seçilirse seçilsin sonuçta oyun biter. Oyun sırası 2.oyuncuya geldikten sonra ve kendisi  $l$  veya  $r$  hareketini oynadıktan sonra oyun biter. Geriye doğru çıkarsama algoritmasına göre, sırası gelen 2.oyuncu orada optimal hareketini seçer. Bu şu anlama gelir 2.oyuncunun en iyi hareketi 1.oyuncunun hareketine bağlıdır: 1.oyuncu  $L$  hareketini seçerse, 2.oyuncu  $l$  hareketini fakat eğer 1.oyuncu  $R$  hareketini seçseydi 2.oyuncu  $r$  hareketini seçerdi. Fakat buradaki problem, bilgi kümesinin tanımı gereği 2.oyuncu, 1.oyuncunun hangi harekette bulunacağını bilmemesidir.

Geriye doğru çıkarsamanın mantığında oyunun başından itibaren nasıl ilerleyeceği sonraki aşamalarda nasıl oynanacağı ile ilişkilidir. Fakat bu örnekte tersi de doğrudur. Yani oyunun sonradan optimal olarak nasıl oynanacağını (2.oyuncunun



Şekil 3.29

bilgi kümesinde) belirlemek için, ilkin oyunun başlarında nasıl ilerlediğini (yani 1.oyuncu  $L$  mi yoksa  $R$  hareketini mi seçti?) anlamak zorundayız. Dolayısıyla bu oyunda, genel olarak da mükemmel-olmayan bilgili oyunlarda, oyunun belirli noktalarının hem öncesinde hem de sonrasında optimal hareketleri eş anlı olarak belirlememiz gerekiyor.

Bu oyunda oyunun son bilgi kümesinde nasıl oynanacağından hareket etmemiz gerekmesine rağmen, bunu bırakıp bir adım geriye giderek 1.oyuncunun karar noktasına hareket edelim. Bu noktadan itibaren oyunun nasıl ilerleyeceğini bakalım. Bunu yapmak, oyunun "belirli bir bölümünden" itibaren yani bir altoyunda oyunun nasıl oynanacağına bakmak demektir. Dolayısıyla oyuncular sadece diğer oyuncuların stratejilerine en iyi tepkiyi değil, oyunun her aşamasında (gelecekteki her karar noktasında) kendi optimal stratejileri düşünürler. Ancak böyle rasyonel davranmış olurlar.

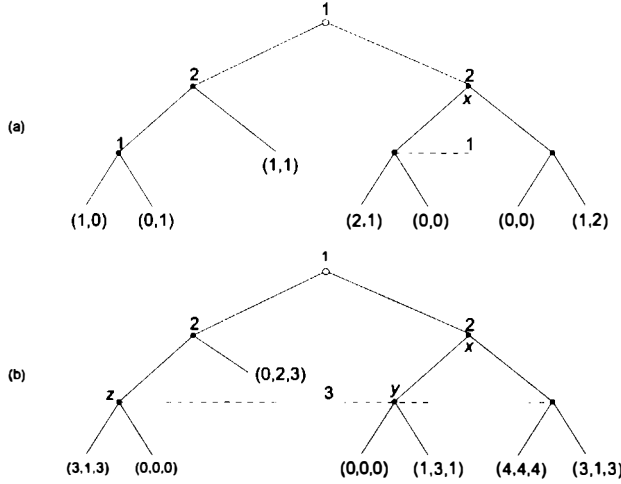
Nash dengesi kavramı genişleyen-biçimli bir oyundaki ardışal yapıyı ihmal eder. Stratejilere oyun başlamadan bir kez yapılan seçimler gibi bakmaktadır. Bu yüzden bu tür oyunlarda kullanılması gereken denge kavramı şunu vermelidir: her oyuncunun stratejisi diğer oyuncuların stratejileri veri iken sadece oyunun başlangıcında değil fakat oyunun her olası tarihinde optimal olmalıdır.

Şimdi genişleyen-biçimli oyunlarda denge kavramını tanıtmadan önce altoyun kavramını tanıtmalıyız.

**Tanım 3.3** Genişleyen-biçimli bir oyunda eğer  $x$  karar noktasını zayıf-takip eden  $y$  gibi başka bir karar noktası varsa ve  $z$  noktası da  $y$  karar noktasını içeren bilgi kümesinde ise  $z$  aynı zamanda  $x$  karar noktasını zayıf-takip eder. Dolayısıyla  $x$  karar noktası bir altoyun tanımlar.

Kısaca her oyuncu sırası geldiğinde  $x$  noktasına varıldığını biliyorsa,  $x$  karar noktası bir altoyun tanımlar. Dikkat ederseniz yukarıdaki tanımda zayıf-takip ederken  $y = x$  durumuna da imkan vererek,  $x$ 'in bir altoyunu tanımlamasının ancak

$x$  tekil bir bilgi kümesi ise mümkün olacağını belirtmek istedik, yani  $h(x) = \{x\}$ . Şekil 3.30(a) bir altoyunu tanımlayan  $x$  karar noktasını gösterirken, Şekil 3.30(b) altoyun olmayan  $x$  karar noktasını gösterir. Şekil 3.30(a)'da 1.oyuncunun tekil-olmayan bilgi kümesindeki her karar noktası,  $x$  karar noktasını takip etmektedir. Şekil 3.30(b)'de tersine hem  $y$  ve hem de  $z$  karar noktaları, 3.oyuncunun bilgi kümesindedir fakat sadece  $y$  noktası  $x$  karar noktasını takip eder.



**Şekil 3.30**

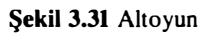
Altoyunu basitçe şöyle de tanımlamak mümkündür: *i.* tek bir karar noktasından başlar *ii.* bu karar noktasını takip eden tüm karar ve terminal faydalarını dahil eder ve *iii.* asıl oyunun herhangi bir bilgi kümesini kesmez. Yani kısaca bir altoyun her oyuncunun bilgi bölgesindeki tek bir karar noktasından başlayıp tüm takip eden terminal noktalarını da dahil eden karar noktalarını içeren oyuna denir.

Altoyun,  $\Gamma$  asıl oyunun,  $x$  noktasından itibaren tanımlanan,  $\Gamma_x$  gibi daha küçük bir oyundur;  $\Gamma_x$ ,  $x$  karar noktasını takip eden tüm noktaları içerir ve bilgi yapısını ve fayda düzeylerini  $\Gamma$  olan asıl oyundan devralır. Genişleyen-biçimli bir oyunun,  $\Gamma$ , herhangi bir terminal-olmayan  $h$  tarihi için,  $h$  tarihini takip eden bir oyun vardır. Dolayısıyla her terminal-olmayan tarihin bir altoyunu vardır ve altoyunların sayısı terminal-olmayan tarihlerin sayısına eşittir. İlk tarihle ( $\emptyset$ ) başlayan altoyun oyunun kendisidir. Oyunun kendisinin dışındaki her altoyuna *öz (proper) altoyun* denir.

Altoyun kavramı “bugün hayatınızın kalan kısmının ilk günüdür” durumunu anlamak için kullandığımız bir kavramdır. Altoyun, asıl oyun içinde daha küçük bir oyundur. Asıl oyunda bu altoyunla karşılaşıldığında da oyun aynı bilgi koşulları altında oynanacaktır. Yani daha büyük bir oyunda daha küçük olan bir altoyun ile karşılaşılsaydı, oyunun kalanında bu altoyunda oynanmaya devam edilecekti.

Oyunun belirli bir bölümünden itibaren nasıl oynanacağı fikri ilk defa Selten (1965, 1975) tarafından geliştirildi. Yani altoyunu kendi içinde bir oyun olarak

Şimdi Şekil 3.29'de gösterilen oyunda altoyun kavramını da kullanarak Nash denge çözüm kavramının nasıl uygulanacağına bakalım. 1.oyuncunun *gir* hareketinden itibaren oynanmaya başlanan altoyunu Şekil 3.31'da gösterilmektedir. Bu altoyunun iki pür Nash dengesi vardır:  $(L, l)$  ve  $(R, r)$ . Asıl oyunun altoyununa varıldığında, bu Nash dengelerinden birinin oynanacağını varsayalım, bu  $(L, l)$  dengesi olsun. Bu durumda ortaya çıkan fayda düzeyi  $(1, 3)$  olur.



160

Bu oyunun mükemmel bilgili oyunla bir takım benzerlikleri vardır. Birincisi bu stratejiler 1.oyuncunun, ilk karar noktasındaki hareketinin oyunun sonraki aşamalarında da Nash dengesinin oynayacağına dayalı olması açısından ileriye dönük düşündüğünü gösterir. Bu yüzden sadece ileriye dönük bakmaz aynı zamanda oyunun ilerleyen bölümlerinde de, yani takip eden bir altoyunda da oynanan oyunun, Nash dengesini verecek şekilde rasyonel oynanacağını düşünür. İkinci olarak bu stratejiler, başlangıçta verilen asıl oyunun Nash dengesini oluşturur.

Altoyun kavramı ile bulduğumuz denge stratejilerine *altoyun mükemmel denge stratejileri* denir. Şekil 3.29'da verilen altoyunda hatırlarsanız iki Nash dengesi vardı ve biz bunlardan rastgele sadece birini seçmiştik. Eğer diğeri seçilseydi bu durumda sonuçlanan stratejiler farklı olacaktı. Fakat dikkat ederseniz bu stratejiler de altoyun mükemmel stratejilerdir.

**Tanım 3.4** *Eğer  $s$  pür stratejisi genişleyen-biçimli oyunun,  $\Gamma$ , her altoyununda Nash dengesini oluşturuyorsa bu bir pür strateji altoyun mükemmel dentedir.*

Herhangi bir genişleyen-biçimli oyunda,  $\Gamma$ , oyunun tümü aynı zamanda bir altoyun olduğundan dolayı,  $\Gamma$  oyununun pür strateji altoyun mükemmel dengesi aynı zamanda bu oyunun pür strateji Nash dengesidir. Sonuç olarak, altoyun mükemmel denge kavramı Nash dengesi kavramının rafine edilmiş halidir. Fakat her Nash dengesi altoyun mükemmel değildir. Buna bir örnek verelim.

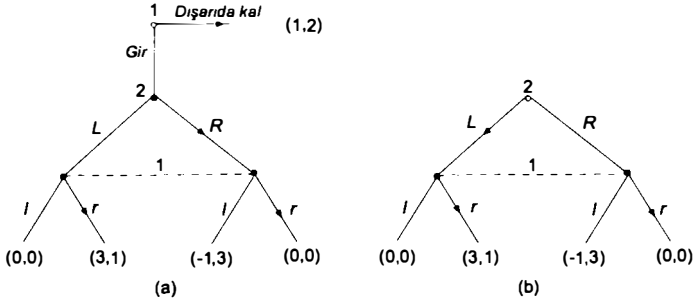
### Örnek 3.13

Rıfat (1.oyuncu) ve Kezban (2.oyuncu) Şekil 3.33'de verilen oyunu oynamaktadırlar. Şekil 3.33(a)'da oklarla gösterilen strateji profili, (*dışarıda kal*,  $R$ ,  $r$ ), bir Nash dengesi profilidir çünkü hiç bir oyuncu diğer oyuncunun stratejisi veri alındığında stratejisini değiştirerek daha yüksek bir fayda elde edemez. Fakat bu, dengelerin altoyun mükemmel denge oldukları anlamına gelmez. Bunu görmek için, Kezban'ın karar noktasında başlayan altoyunda izlenen stratejilerin bu altoyunun bir Nash dengesi olmadığına dikkat edin. Bu durum Şekil 3.33(b)'de ayrı olarak çizilen altoyunda görülmektedir. Eğer Kezban Rıfat'ın  $r$  oynadığını bilse,  $R$  oynamaya devam etmez,  $L$  stratejisine sapar çünkü daha fazla fayda elde eder, dolayısıyla 0 yerine 1 alır.

Aşağıdaki teorem altoyun mükemmelliğin tüm genişleyen-biçimli oyunlara uygulanabileceğini göstermektedir. Dolayısıyla altoyun mükemmellik dengesinin, sadece mükemmel bilgili oyunlara uygulanan geriye doğru çıkarsama yaklaşımının genelleştirilmiş bir hali olduğunu ifade eder.

**Teorem 3.1** *Altoyun mükemmel denge, geriye doğru çıkarsama yaklaşımının genel halidir. Mükemmel bilgili her sınırlı genişleyen-biçimli oyun için geriye doğru çıkarsama stratejileri kümesi pür altoyun mükemmel denge kümesi ile örtüşür.*

**İspat.** İlk önce her geriye doğru çıkarsama stratejisinin altoyun mükemmel olduğunu ispatlayalım. Geriye doğru çıkarsama stratejisini  $s$  ile gösterelim. Mükemmel



**Şekil 3.33** (a) Nash dengesi fakat altoyun mükemmel değil (b) İkinci oyuncunun altoyundaki en iyi tepkisi

bilgili bir oyunda her nokta bir altoyunu tanımladığından dolayı  $s$  stratejisi  $x$  ile tanımlanan her altoyunda bir Nash dengesini oynamayı teşvik eder. Fakat her  $x$  için tanımlanan  $\Gamma_x$  altoyunu mükemmel bilgili bir oyun olduğundan,  $s$  açıkça altoyun için geriye doğru çıkarsama stratejisidir. Sonuç olarak  $s$  stratejisi,  $\Gamma_x$  altoyunun Nash dengesini oluşturur.

Şimdi de her pür strateji altoyun mükemmel dengenin, geriye doğru çıkarsama stratejisi olup olmadığını ispatlayalım. Bu sefer altoyun mükemmel stratejisini  $s$  ile gösterelim. Bunun için basitçe sondan bir önceki karar noktasını düşünelim. Bu nokta bir kişilik bir altoyunu tanımlar ve  $s$  altoyun mükemmel stratejisi olduğundan sıra kendisine geldiğinde faydasını maksimize eden seçimi yapacaktır (aksi takdirde tek-kişilik altoyunun Nash dengesi olamazdı). Sonuç olarak orada  $s$  ile tanımlanan hareket geriye doğru çıkarsama algoritması ile tutarlı olacaktır. Şimdi de  $x$  karar noktasını düşünelim. Bu karar noktasını takip eden son karar noktaları vardır (yani terminal noktalarından önceki karar noktaları). Bu yüzden  $x$  karar noktası onu takip eden noktaları içeren bir altoyunu tanımlar,  $s$  stratejisi ise bir geriye doğru çıkarsama algoritması belirler. Bu altoyunda  $s$  stratejisi bir Nash dengesini teşvik ettiğinden, bu strateji  $x$  karar noktasında  $u(x)$  oyuncusu için en iyi seçimi önerir. Sonuç olarak  $x$  gibi herhangi bir karar noktasında belirlenen hareket aynı zamanda geriye doğru çıkarsama metodu ile uyumludur. Yani oyun ağacından bu şekilde geriye doğru ilerlemek bize oyunun rasyonel seçimini verir. ■

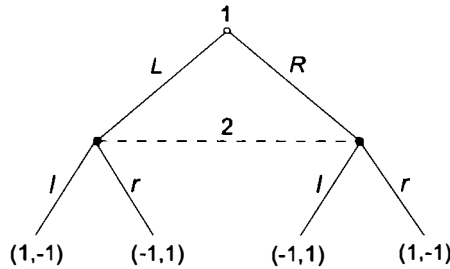
Altoyunlar büyük ağacın içinde yerleşmiş yapılardır. Daha küçük altoyunlar da daha büyük altoyunlar içine yerleşmiş gibidirler. Bizim istediğimiz tüm bu yapı içinde tüm altoyunlarda geçerli olabilecek bir dengenin varlığıdır. En küçük altoyunlar, başlangıçtan uzaklaştıkça ve daha fazla bir altoyun olmadığı durumda elde ettiğimiz altoyunlardır. Dengeyi kontrol etmenin en kolay yolu sondan, en küçük altoyundan başlanmasıdır. Yani dengenin varlığını bu altoyunlardan hareketle kontrol etmeye başlarız. Oyunda yukarı doğru çıkarız, altoyunu büyütürüz ve tüm oyunda dengenin geçerli olup olmadığını bakarız. Örneğin Mahkumlar Çıkmazı probleminde, ve diğer eş anlı oyunlarda olduğu gibi, tek bir altoyun Nash

dengesi vardır bu da tüm oyunun Nash dengesidir. Fakat sınırsız oyunlarda son bir altoyun olmadığı için bu yöntemi uygulamak mümkün değildir.

Diğer yandan bazı stratejik-biçimli oyunlarda pür strateji Nash dengeleri olmayabileceğinden, pür strateji altoyun mükemmel dengeler de her zaman olmayabilir. Buna bir örnek verelim.

### Örnek 3.14

Şekil 3.34'de verilen oyuna bakın. Bu oyunda oyunun kendisi sadece bir altoyun olduğu için, pür strateji altoyun mükemmel dengeler kümesi bu oyunun pür strateji Nash dengeler kümesi ile örtüşür. Fakat bu oyunda Nash dengesi olmadığı görülmektedir. Bu yüzden altoyun mükemmel dengeyi garanti altına almak için oyuncuların hareketlerini rassallaştırmalarına imkan vermek gerekir. Genişleyen-biçimli oyunlarda rassallaştırma stratejilerini yani karma ve davranış stratejilerini ilerleyen altbölümde tartışacağız.

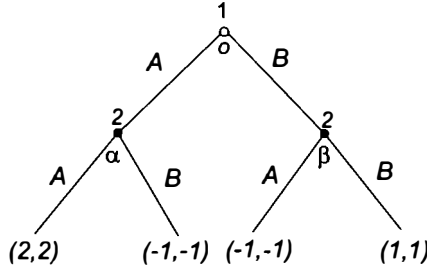


Şekil 3.34 Pür strateji altoyun mükemmel dengenin olmadığı bir oyun

Altoyun mükemmellik, hareketlerin sırası ve denge patikası ile denge arasındaki ayrıma dayanan bir denge kavramıdır. *Denge patikası* oyun ağacının dengede takip edilen patikasıdır. Fakat dengenin kendisi bir strateji kombinasyonudur, ki bu strateji kombinasyonu oyuncuların diğer oyuncuların denge patikasından sapmalarına tepkilerini de dahil eder. Denge-dışı tepkiler denge patikası üzerindeki kararlar için de son derece önemlidir. Örneğin bir oyuncu, eğer diğer bir oyuncu denge hareketlerinden sapsa belli bir harekette bulunacağına dair bir tehditte bulunabilir. Bu tehdit hiç kullanılmazsa bile bir etkiye sahip olacaktır. Mükemmellik (baştaki altoyun kelimesini bazen kullanmayacağız) kavramını yine bir örnek üzerinden inceleyelim.

Şekil 3.35'de verilen oyuna bakalım. Bu oyunu sırasıyla 1. ve 2. oyuncu olan Aygül ve Birgül birlikte oynamaktadırlar. Oyuncular disk büyüklüğünü seçmektedirler. Eğer her ikisi de aynı büyüklükte disk seçerlerse elde edecekleri fayda daha büyük olmaktadır (bir koordinasyon oyunu yani) ve eğer her ikisi de büyük disk, A, seçerse en büyük fayda elde edeceklerdir (her ikisinin küçük disk, B, seçmesinden daha fazla). Aygül önce hareket eder, bu yüzden strateji kümesi  $\{A, B\}$  şeklindedir.

Birgül'ün stratejisi ise daha farklıdır çünkü her bilgi kümesi için bir hareket belirler. Birgül'ün Bilgi kümesi Aygül'ün seçtiğine bağlıdır ve strateji kümesi Aygül'ün stratejilerine tepkilerini yansıtır. Dolayısıyla Birgül'ün stratejileri tek hareketlerden oluşmaz. Tablo 3.6'da gösterildiği gibi dört farklı tepki verir (satur oyuncusu Aygül, sütun oyuncusu Birgül'dür):



Şekil 3.35

|   | (A,A)  | (A,B) | (B,A)  | (B,B)  |
|---|--------|-------|--------|--------|
| A | 2, 2   | 2, 2  | -1, -1 | -1, -1 |
| B | -1, -1 | 1, 1  | -1, -1 | 1, 1   |

Tablo 3.6

Tablo 3.6'da verilen Birgül'ün herhangi bir strateji profilindeki ilk hareketi, Aygül'ün A'yı seçtiğinde, ikinci hareketi ise Aygül'ün B'yı seçtiğinde verdiği tepkiyi göstermektedir. Örneğin (A,A) strateji profili şu anlama gelir. Aygül A'yı seçtiğinde, Birgül A hareketini oynamaktadır, Aygül B hareketini seçtiğinde Birgül yine A hareketini oynamaktadır.

Stratejik gösterimden üç Nash dengesinin olduğunu görürüz:  $E_1 = \{A, (A, A)\}$ ,  $E_2 = \{A, (A, B)\}$  ve  $E_3 = \{B, (B, B)\}$ . Burada  $E_1$  dengesinde her ikisi de büyük seçer.  $E_2$  dengesinde her ikisi de büyük seçer ve  $E_3$  dengesinde her ikisi de küçük seçer.  $E_1$  dengesinde, Birgül, Aygül'ün ne seçtiğinden bağımsız A stratejisi ile tepki verecektir böylece Aygül istekli bir şekilde A stratejisini seçer.  $E_2$  dengesinde, Birgül, Aygül ne seçerse onu seçer.  $E_3$  dengesinde ise Aygül B seçer çünkü kendisi ne yaparsa yapsın Birgül'ün B stratejisi ile tepki vereceğini bilir. Birgül, B ile tepki vermeyi isteyecektir çünkü dengede Aygül B seçer.

Birgül'ün  $E_3$  dengesindeki (B,B) stratejisini düşünün. Eğer Aygül, A seçerek dengeden sapma gösterseydi, Birgül'ün B tepkisine yapışması makul olmayacaktır. Bunun yerine o da A seçmelidir. Eğer Aygül A tepkisini bekleyseydi, ilk aşamada A seçerdi ve  $E_3$  dengesi makul bir denge olmayacaktı. Benzer bir argüman da, Birgül'ün (A,A) stratejisinin rasyonel bir tercih olmayacağını gösterir, yani  $E_1$  de makul bir denge değildir. Dolayısıyla sadece  $E_2$  dengesi makul gözükmektedir. Çünkü oyundaki hareket sırası oyuncuların kararları için önemlidir. Stratejik-biçim

gösteriminde ortaya çıkan temel problem basit Nash dengesinde karşılaşılan problemle aynıdır: kimin ilk önce hareket ettiğinin ihmal edilmesi. Aygül önce hareket ediyor, ve bu Birgül'e, Aygül hareket ettikten sonra tekrar düşünme imkanı vermektedir.

Kısaca  $E_1$  ve  $E_3$  dengeleri Nash dengesidir. Fakat "mükemmel" Nash dengesi değildir. Eğer bir strateji profili sadece denge patikasında değil diğer tüm olası patikalarda – farklı altoyunlarda da- denge olarak kalmaya devam ediyorsa bu strateji kombinasyonu mükemmel dentedir.

Oyundaki mükemmel dengeyi altoyun kavramı ile gösterelim. Şekil 3.35'de üç altoyun olduğu görölmektedir: (i) tüm oyun (ii)  $\alpha$  karar noktasından başlayan altoyun ve (iii)  $\beta$  karar noktasından başlayan altoyun. Burada  $E_1$  dengesi altoyun mükemmel değildir çünkü sadece (i) ve (iii) altoyunlarında Nash dengesidir, (ii) altoyununu da Nash dengesi değildir çünkü Aygül küçük oynadıktan sonra Birgül'ün büyük oynaması rasyonel değildir.  $E_3$  strateji profili de altoyun mükemmel değildir çünkü sadece (i) ve (ii) altoyunlarında Nash dengesidir, (iii) altoyununda Nash dengesi değildir.  $E_2$  strateji profili tüm altoyunlarda Nash dengesi olduğundan altoyun mükemmel Nash dengesidir.

### 3.7 Karma ve Davranış Stratejileri

Daha önceki bölümlerde belirtildiği gibi pür stratejilerin varlığı Nash dengesinin varlığını garanti altına almaz. Bu genişleyen-biçimli oyunlar için de doğrudur. Nitekim yukarıda altoyun mükemmel pür Nash denge stratejisi olmayan bir oyun gördük (Şekil 3.34). Dolayısıyla statik oyunlara benzer bir şekilde dinamik oyunlarda da stratejiler rassallaştırılabilir. Dolayısıyla altoyun mükemmel Nash dengesinin varlığını garanti altına almak için, tüm oyuncuların stratejilerini rassallaştırmalarına imkan vermek gerekir.

Genişleyen-biçimli bir oyunda rassallaştırma yapmak için iki yol izlenebilir. Bunlardan biri, aynen stratejik-biçimli oyunlarda olduğu gibi oyun başlamadan her pür stratejiye bir olasılık atfedilir. Bu yolla oyunun başında bir kez ve tüm oyun için bir rassallaştırma yapılır. Oyunun ilerleyen bölümlerinde rassallaştırma yani pür stratejilerin seçilme olasılıkları oyunun akışına göre değiştirilmez. Bu karma stratejidir.

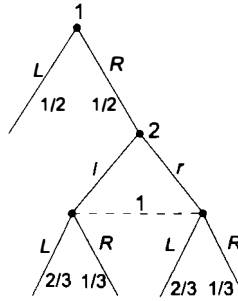
İkinci yol ise oyunda sıra ne zaman size gelirse ayrı bir rassallaştırma yapmanızdır. Karma stratejilerde olduğu gibi tüm oyun için ve tüm pür stratejilerin üzerine bir kereye mahsus rassallaştırma yapmak yerine, her oyun sırasında mevcut stratejiler üzerinden rassallaştırma yapılır. Örneğin oyunda size iki kere sıra gelirse, bu iki farklı rassallaştırma yapabileceğiniz anlamına gelir ve her biri o an elinizdeki stratejiler üzerine yapılır. Bu rassallaştırmalar birbirinden bağımsızdır. Bu strateji biçimine de *davranış stratejisi* denir.

Karma ve davranış stratejileri arasındaki farkı daha iyi belirtmek için Luce ve Raiffa (1957) şöyle bir karşılaştırma yaparlar: "Pür strateji her sayfasında belirli bir bilgi kümesinde nasıl oynanacağını belirten belirli bir talimatname içeren bir ki-

taptır. Pür stratejiler uzayı bir kütüphaneyi oluşturan kitaplardır. Karma strateji kitaplar üzerine bir olasılık dağılımıdır (yani hangi kitapların seçileceğini belirleyen olasılık dağılımı). Davranış strateji ise tek bir kitaptır her sayfasında rassal bir davranış tanımlar”.

Her  $i$  oyuncusunun karma stratejisi,  $\sigma_i$ , daha önce tanımlandığı gibi  $i$  oyuncusunun pür stratejiler kümesi  $S_i$  üzerindeki bir olasılık dağılımıdır. Dolayısıyla  $\sigma_i(s_i)$ , her  $s_i \in S_i$  pür stratejinin seçilme olasılığını gösterir, burada  $\sigma_i(s_i) \in [0, 1]$  ve  $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$ . Diğer yandan,  $b_i$  davranış stratejisi her  $i$  oyuncusunun bilgi kümelerinin her biri için orada mevcut olan hareketler üzerindeki bir olasılık dağılımını tanımlar.

Örneğin Şekil 3.36’da 1.oyuncu ilk bilgi kümesinde  $L$  ve  $R$  hareketlerinin her birini  $1/2$  olasılıkla seçer ve ikinci bilgi kümesinde ise  $L$  ve  $R$  hareketini sırasıyla  $2/3$  ve  $1/3$  olasılıkla seçtiği bir davranış stratejisi söz konusudur.



Şekil 3.36 Davranış stratejisi

Yukarıda söylediklerimizi daha formel olarak tanımlayalım. Davranış stratejisi,  $i$  oyuncusunun her  $h \in H$  bilgi kümesinde mevcut her  $a \in A(h)$  hareketi için bir olasılık tanımlar. Bu olasılığı  $b_i(a | h)$  gösterelim.  $A(h)$  hareketler kümesi üzerine tanımlanan olasılıklar kümesini ise  $\Delta(A(h))$  şeklinde gösterelim. Bu yüzden her  $h \in H_i$  için  $b_i(\cdot | h) \in \Delta(A(h))$ 'dir. Dolayısıyla her  $i \in N$  oyuncusu için ve her  $h \in H_i$  bilgi kümesi için:

$$\sum_{a \in A(h)} b_i(a | h) = 1,$$

yani  $i$  oyuncusunun  $b_i$  davranış stratejisi, sınırlı  $H_i$  kümesindeki her bilgi kümesi için yukarıdaki koşulu sağlayacak şekilde bir olasılık dağılımı tanımlar. Bu yüzden  $i$  oyuncusunun  $B_i$  davranış stratejileri uzayı, olası davranış stratejilerinin Kartezyen çarpımı olarak şöyle tanımlanır:

$$B_i = \prod_{h \in H_i} \Delta(A(h)). \quad (3.1)$$

Davranış stratejisi ile ilişkili terminal noktaları üzerine oluşan olasılık dağılımını hesaplamak için her bir patikadan ilerleme olasılığını hesaplamak gerekir. Belirli

bir  $z$  terminal noktası için, başlangıç noktasından bu noktaya kadar geçen patikayı izliyoruz. Bu patika boyunca her karar noktasında belirli bir hareket seçilir. Bu hareketin bulunduğu bilgi kümesinde gerçekleşme olasılığına bakarız. Her farklı bilgi kümesinde farklı bir rassallaştırma takip edildiği için bu rassallaştırmalar birbirinden bağımsızdır. İlgili patikanın başlangıç noktasından sonuna kadar geçen karar noktalarında geçmenin olasılığı bu patika boyunca tüm karar noktalarındaki olasılıkların çarpımına eşittir. Sonuçlar üzerine ortaya çıkan olasılık dağılımı önemlidir. Çünkü bu oyuncuların beklenen faydalarını belirler.

Herhangi bir  $z$  terminal noktasını düşünelim. Başlangıç noktasından  $z$ 'ye kadar giden patikada,  $\hat{X}(z)$  ile gösterilen terminal olmayan noktalar kümesi ile karşılaşacaktır. Patika boyunca her terminal olmayan nokta,  $x \in \hat{X}(z)$ , belirli bir  $i(x) \in N$  oyuncusuna aittir ve belirli bir bilgi kümesine aittir,  $h_x = \hat{h}(x) \in H_{i(x)}$ . Her  $x \in \hat{X}(z)$  karar noktası da belirli bir  $a \in A(h_x)$  hareketini  $z$  terminal noktasına giden patika üzerinde tutacak şekilde olmalıdır, bu hareketi de  $\hat{a}(x, z) \in A(h_x)$  ile gösterelim. Bu arada  $i(x)$  oyuncusunun  $a(x, z)$  hareketini,  $x$ 'in  $h_x$  bilgi kümesine varması durumundaki olasılığı  $b_{i(x)}(\hat{a}(x, z) \mid h_x)$ 'dir. Böylece  $b = (b_1, \dots, b_n)$  davranış strateji profili oynandığı zaman,  $z$  terminal noktasına varılma olasılığı şudur:

$$\Pr(z \mid b) = \prod_{x \in \hat{X}(z)} b_{i(x)}(\hat{a}(x, z) \mid \hat{h}_x).$$

İlk bakışta davranış ve karma stratejiler birbirinden tamamen farklı görünen rassallaştırmalar gibidir. Yani örneğin bir oyuncu bir karma strateji uyguladığında, rulet tekerini bir kez çeviriyor gibi düşünebiliriz. Bu çevrimin sonucunda hangi pür stratejilerin (her bilgi kümesindeki deterministik seçimler kümesi yani) oynanacağı belirlenir. Fakat bir davranış stratejisi izlediğinde, aslında bir birinden bağımsız olarak rulet tekerini her yeni bilgi kümesine gelindiğinde yeniden çevrilmesi demektir.

Herhangi bir  $i$  oyuncusunun  $B_i$  davranış stratejileri uzayı, yukarıda (3.1) ifadesinde verilmektedir ve  $i$  oyuncusunun karma stratejiler uzayının da  $\sum_i = \Delta(S_i)$  olarak ifade edildiğini biliyoruz. Aşağıda gösterildiği gibi karma stratejileri her bilgi kümesindeki mevcut hareketler cinsinden de yazabilir, bu gösterim karma stratejilerin  $B_i$  ile ilişkisini görmek açısından yararlı olabilir:

$$B_i = \prod_{h \in H_i} \Delta(A(h)), \quad \sum_i = \Delta\left(\prod_{h \in H_i} A(h)\right).$$

Mükemmel hatırlamalı oyunlarda bu iki ayrı rassallaştırmanın birbirine denk olduğu ispatlanmıştır. Yani veri bir davranış stratejisi için ona denk bir karma strateji ya da veri bir karma stratejisi için de ona denk bir davranış stratejisi bulabiliriz. Dolayısıyla her iki strateji de terminal noktalar üzerinde aynı olasılıkları verir. Fakat karma stratejiler daha çok stratejik-biçimli oyunlarda yararlı bir uygulama iken davranış stratejisi genişleyen-biçimli oyunlarda bir yararlı bir uygulama biçimidir.

Örneğin 1.oyuncu için üç pür strateji tanımlayalım, bunlar  $LL$ ,  $RL$ , ve  $RR$ 'dir. Bu pür stratejiler üzerine tanımlanan karma stratejiler olarak da sırasıyla  $1/2$ ,  $1/3$  ve  $1/6$  olasılıklarını belirleyelim. Buna denk gelen davranış stratejisi nedir? Bunu bulmak için varılan her noktanın bilgi kümesindeki hareketin olasılığını belirlemek gerekir. Örneğin, 1.oyuncunun ilk bilgi kümesine varıldığında orada  $L$ 'nin ve  $R$ 'nin seçilme olasılığı  $1/2$  olsun. 1.oyuncunun ikinci bilgi kümesine ise ancak  $RL$  ve  $RR$  ile varılır. Sonuç olarak bu pür stratejiler seçildikten sonra 1.oyuncunun ikinci bilgi kümesinde  $L$ 'nin seçilme olasılığı  $2/3$ 'tür ve  $R$ 'nin seçilme olasılığı ise  $1/3$ 'tür. Bunları bir araya getirirsek Şekil 3.36'da verilen davranış stratejisine denk bir durum ortaya çıkar.

Şimdi altoyun mükemmel dengenin varlığı hakkında şunu söyleme imkanına sahibiz:

**Teorem 3.2** *Her mükemmel hatırlamalı ve sınırlı genişleyen-biçimli oyun altoyun mükemmel dengeye sahiptir.*

**İspat.** İspat için oyunun sonundan başlayarak geriye doğru oyunun başına doğru ilerleyerek her aşamada istenilen davranış stratejisini inşa etmeye çalışacağız. Bunun için kendisi dışında altoyun içermeyen bir altoyun seçelim. Bu her zaman mümkündür. Çünkü oyun sınırlı bir oyundur. Daha önce belirtildiği gibi her sınırlı stratejik-biçimli oyunda en azından bir Nash dengesi söz konusudur. Dolayısıyla bu altoyunda da karma stratejilerle ifade edilebilecek bir Nash dengesi vardır. Asıl oyun mükemmel hatırlamaya sahip olduğundan dolayı, altoyun da bu özelliğe sahiptir. Bu yüzden bu altoyundaki karma strateji kendisine denk bir davranış stratejisine sahiptir. Bu denklikten dolayı bu davranış stratejisi de altoyunda bir Nash dengesi oluşturur. Şimdi de altoyun yerine bu altoyundaki denge strateji ile belirlenen fayda vektörünü koyalım. Böylece oyunu küçültmüş olduk ve altoyundaki tüm davranış stratejisini belirlemiş olduk. Bu süreci indirgenmiş oyun için de tekrarlayabiliriz ve böyle yapmaya devam ederiz. Asıl oyun için bütün bir davranışsal strateji elde edene kadar bu devam eder. Bu algortima bir yerde biter çünkü oyun sınırlı bir oyundur. Böylece belirlenen davranış stratejisinin altoyun mükemmel denge olması, daha önce söylenen geriye doğru çıkarsama stratejilerinin Nash dengesi olması ile paralel bir mantıkla bulunur. Yani oyunun başındaki optimal hareketler oyunun ilerleyen aşamalarındaki optimal davranışlara göre belirlenir. ■

### 3.8 Altoyun Mükemmel Nash Dengesi Uygulamaları

Bu bölümde vereceğimiz farklı oyun örneklerinde altoyun mükemmel Nash dengesinin nasıl bulunacağını ve bunun her oyun için ne anlama geldiğine bakacağız. Bu da altoyun mükemmel denge kavramını daha somut hale getirecektir.

### 3.8.1 Ültimat Oyunu

İki kişinin  $w$  gibi bir parayı paylaşmak için şöyle bir prosedürü kullandığını düşünelim. 1.kişi, 2.kişiye  $[0, w]$  aralığında bir öneride bulunsun. Eğer 2.kişi, 1.kişinin teklifini kabul ederse, 1.kişi geriye kalan kısmı almaktadır. Eğer 2. kişi teklifi red ederse, ikisi de hiç bir şey alamayacaktır. Herkes aldığı para miktarı ile ilgilenir ve herkes daha fazla para almayı tercih eder. 1. kişinin teklif ettiği miktar herhangi bir sayı olabilir (tam sayı olmak zorunda değil).

*Ültimat Oyunu* da denilen bu oyunu şöyle modelleyebiliriz: İki oyuncu var, ve *terminal tarihler*  $(x, Z)$  diziler kümesinden oluşur, burada  $x$  değeri 1.oyuncunun teklif ettiği miktardır ve  $0 \leq x \leq w$  aralığındadır,  $Z$  ise  $K$  (kabul) veya  $R$  (ret) şeklindedir; *oyuncu fonksiyonu* ise tüm  $x$  değerleri için  $v(\emptyset) = 1$  ve  $v(x) = 2$  şeklindedir; *tercihler* ise her bir oyuncunun aldığı parayı gösteren fayda düzeyleri tarafından gösterilir, örneğin  $(x, K)$  terminal tarihi için, 1.kişi  $w - x$  miktarını alırken 2.kişi  $x$  miktarını alır ve  $(x, R)$  terminal tarihi için herkes 0 alır.

Bu oyun sınırlı ve mükemmel bilgili bir oyundur. Dolayısıyla altoyun mükemmel dengeyi bulmak için geriye doğru çıkarsama metodunu kullanabiliriz. İlk olarak 1 birim uzunluğunda altoyunlar düşünün, ki burada 2.kişi, 1.kişiden gelen teklifi ya kabul eder ya da ret eder. 1.kişinin her olası teklifi için, böyle bir altoyun vardır. 1.kişinin teklifinin  $x > 0$  olması durumunda takip eden bir altoyunda, 2.kişinin optimal kararı kabul etmektir (eğer ret ederse, hiç bir şey alamaz). Teklifin  $x = 0$  olması durumunu takip eden altoyunda, 2.kişi kabul etmek ve ret etmek arasında kayıtsızdır. Yani bir altoyun mükemmel dengede 2.kişinin stratejisi ya tüm teklifleri (0 dahil) kabul etmektir ya da  $x = 0$  teklifini ret etmektir.

Şimdi oyunun tümünü düşünelim. 2.oyuncunun her olası altoyun mükemmel denge stratejisi için 1.oyuncunun optimal stratejisini bulmamız gerekir.

i. Eğer 2.kişi tüm teklifleri kabul ederse (0 dahil), 1.kişinin optimal teklifi 0'dır (bu ona  $w$  faydasını sağlar).

ii. Eğer 2.kişi 0 hariç tüm teklifleri kabul ederse, ilginç bir şekilde 1.kişinin hiç bir davranışı optimal değildir. Yani hiç bir  $x > 0$  teklifi optimal değildir çünkü her tekliften daha iyi bir teklif mümkündür. 0 teklifi optimal değildir çünkü 2.kişi bunu ret eder. Böylece 1.kişinin faydası 0 olur. Bu yüzden  $w$ 'den daha az ve pozitif bir teklif daha iyi bir sonuç verir.

Bu arada bu oyunda 2.oyuncunun sahip olduğu opsiyonları değiştirerek oyun yapısını daha farklı bir hale getirebiliriz. Örneğin 2.oyuncuya, teklifi ret ettikten sonra karşı hareket yapma imkanı verebiliriz. Bu durumda oyun daha çok bir pazarlık problemine döner. 2.oyuncuya ret etme gibi bir opsiyon verilmeseydi oyun *diktator oyunu* olarak nitelendirilir. Bu yüzden 2.oyuncunun oyunda stratejik bir rolü olmayacaktır.

Ültimat oyunu ile ilgili yapılan deneysel çalışmaların sonuçları, altoyun mükemmel dengenin iddia ettiği sonuçlarla uyumlu olmadığını göstermektedir. Deneysel sonuçlar bireylerin kendi aldıklarının yanında eşitlik kaygılarından dolayı diğerlerinin de ne aldıklarına dikkat ettiğini göstermektedir. Bu yüzden pozitif teklifleri bazen ret ettikleri de gözlemlenmektedir. Deneysel sonuçlar şöyle de yo-

rumlanabilir: 1.oyuncu 2.oyuncunun tekliflerini ret edebileceği korkusuna sahip olabilir. Bu korku rasyonedir çünkü küçük teklifler ret edilebilir. Peki neden 2.oyuncu bu şekilde davranır? Çünkü aslında günlük hayatta insanlar bir seferlik bir ilişkiden çok kendilerini tekrarlanan ilişkiler içinde bulurlar. Bu yüzden düşük bir teklifi kabul etmek yerine, bunu bugün ret ederek karşı oyuncuyu cezalandırmak amaçlanır. Böylece bir “ün” oluşturarak, amaç 1.oyuncunun başka zamanlarda daha fazla teklifte bulunmasını sağlamaktadır. Deneysel sonuçları açıklamak için kullanılan diğer bir yorum da oyuncuların oyun teorisinin beklediği kadar rasyonel davranmadıkları, “ortalama” hareket ettikleri şeklindedir.

### 3.8.2 Cinsiyetler Savaşı

Bu oyunda 1.oyuncu evde kitap okumak mı yoksa bir konsere gitmek mi konusunda karar verecektir. Eğer kitap okursa oyun biter. Fakat eğer konsere giderse, Cinsiyetler Savaşı oyununda olduğu gibi, kendisi ve arkadaşı birbirinden habersiz olarak karar verirler (biri diğerinin seçimini bilmeden). Önlerindeki seçenek Mozart (M) veya Puccini (P) konserine gitmektir. Her iki oyuncu da sevdikleri bestecinin konserine arkadaşı ile gitmeyi evde oturup kitap okumaya tercih eder; evde kalma tercihi, her ikisinin de arkadaşı ile sevmediği besteciye dinlemeye tercih edilmektedir; en kötü tercih ise konserlere ayrı ayrı gitmektir.

Bu durumu daha formel olarak gösterirsek:  $N = \{1, 2\}$ , terminal tarihler:  $(kitap, (konser, (M, M))), (konser, (M, P)), (konser, (P, M)), (konser, (P, P))$  şeklindedir; oyuncu fonksiyonu  $\iota(\emptyset) = 1$  ve  $\iota(konser) = \{1, 2\}$  şeklindedir; ilk tarihte 1.oyuncunun hareketler kümesi  $A_1(\emptyset) = \{konser, kitap\}$  ve konser tarihi sonrasındaki 1.oyuncunun hareketler kümesi,  $A_1(konser) = \{M, P\}$ , konser tarihi sonrasında 2.oyuncunun hareketler kümesi ise  $A_2(konser) = \{M, P\}$ 'dir; oyuncuların tercihleri ise şöyledir. 1.oyuncu için:

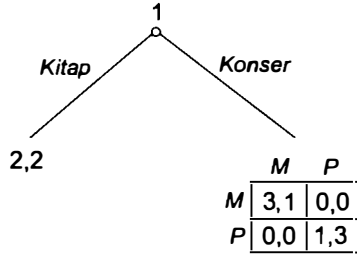
$$(konser, (M, M)) \succ kitap \succ (konser, (P, P)) \succ \\ (konser, (M, P)) \sim (konser, (P, M))$$

2.oyuncu için:

$$(konser, (P, P)) \succ kitap \succ (konser, (M, M)) \succ \\ (konser, (M, P)) \sim (konser, (P, M)).$$

Bu oyun Şekil 3.37'de gösterilmektedir.

1.oyuncunun stratejisi, oyunun başında ve konser tarihi sonrasındaki hareketlerini tanımlar; 2.oyuncunun stratejisi ise konser tarihinden sonra hareketini tanımlar. Dolayısıyla 1.oyuncu  $(konser, M)$ ,  $(konser, P)$ ,  $(kitap, M)$ , ve  $(kitap, P)$  gibi dört tane stratejiye sahipken, 2.oyuncu M ve P gibi iki tane stratejiye sahiptir. Hatırlarsanız bir oyuncunun stratejisi bir hareket planından daha fazla bir şeydir. Strateji oyuncu hareket ettikten sonra her tarih için bir hareket tanımlar, yani denge-dışı hareketler



Şekil 3.37

için de hareket tanımlanır. Örneğin 1.oyuncunun stratejisi, oyunun başında kitap hareketini seçtikten sonra bile konser tarihinden sonra ne yapacağını belirtir. Oysa kitap hareketi sonrası konser hareketine zaten varılamayacaktır.

Bu oyunun stratejik-biçimli gösterimi Tablo 3.7’de verilmektedir. Buradan da görüleceği gibi üç tane Nash dengesi vardır:  $((konser,M),M)$ ,  $((kitap,M),P)$  ve  $((kitap,P),P)$ .

|              | M    | P    |
|--------------|------|------|
| $(konser;M)$ | 3, 1 | 0, 0 |
| $(konser;P)$ | 0, 0 | 1, 3 |
| $(kitap,M)$  | 2, 2 | 2, 2 |
| $(kitap,P)$  | 2, 2 | 2, 2 |

Tablo 3.7

Şekil 3.37’de görüldüğü gibi oyunda iki altoyun vardır: Tüm oyun ve 1.oyuncunun *konser* hareketini seçtikten sonra oyuncuların oynadığı altoyun. İkinci altoyunda, terminal tarihler  $(M,M)$ ,  $(M,P)$ ,  $(P,M)$  ve  $(P,P)$  şeklindedir. Bu altoyunda geriye doğru çıkarsama şöyle işler:

- konser* tarihini takip eden altoyunda, iki tane Nash dengesi var, basitçe  $(P,P)$  ve  $(M,M)$ .
- konser* tarihini takip eden altoyundaki sonuç  $(P,P)$  ise, oyunun başında 1.oyuncunun optimal seçimi *kitap*’tır.
- konser* tarihini takip eden altoyundaki sonuç  $(M,M)$  ise, oyunun başında 1.oyuncunun optimal seçimi *konser*’dir.

Bu durumda şunu söyleyebiliriz: oyun iki altoyun mükemmel dengeye sahiptir:  $((kitap,P),P)$  ve  $((konser,M), M)$ .

### 3.8.3 Stackelberg Rekabet Oyunu

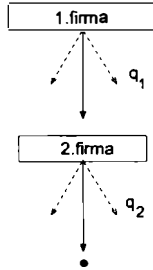
Daha önce verdiğimiz duopol oyun modellerinde (Bertrand ve Cournot gibi) her firma hareketini seçerken diğerinin hareketlerini gözlemleyemediğini varsaymıştık. Şimdi firmaların birbirlerinin hareketlerini gözlemleyebildiklerini varsayalım. Yani

bir firma hareket ettiğinde diğeri bu firmanın neyi seçtiğini gözlemlediğini varsayalım ve bu durumun sonucu nasıl etkilendiğine bir bakalım. Dolayısıyla, aynı anda hareket etmek mi? İlk önce hareket etmek mi? Yoksa sonra hareket etmek mi daha iyi sonuçlar üretir? sorularını cevaplandırmamız gerekir.

Yine iki firmanın olduğu bir piyasa düşünelim, her iki firma da aynı malı üretsün. Herhangi bir  $i$  firmasının  $q_i$  malını üretme maliyeti  $C_i(q_i)$ 'dir; piyasadaki toplam üretim miktarı  $Q$  iken fiyat  $p(Q)$  şeklinde belirlenir. Her firmanın stratejik değişkeni, Cournot'da olduğu gibi,  $i$  firmasının negatif olmayan üretim düzeyidir,  $q_i \geq 0$ . Fakat firmalar Cournot'dakinden farklı olarak üretim kararlarını ardışıl vermekteler. Yani bir firma üretim kararını verir, sonra diğer firma bunu gözlemler ve üretim kararını verir. Firmaların tercihlerini kâr fonksiyonları ile tanımlanır:

$$\pi_i = q_i P(q_1 + q_2) - C_i(q_i), \quad i = 1, 2$$

1.firma oyunun başlangıcında ilk hareket eden firmadır, stratejisi basitçe  $q_1$  çıktı düzeyidir. 2.firma, 1.firmanın çıktı düzeyini seçtiği her tarihten sonra hareketini, yani  $q_2$  üretim düzeyini belirler. Yani 2.firmanın stratejisi 1.firmanın her olası çıktı düzeyine kendi üretim düzeyi ile karşılık veren bir fonksiyondur. Bu durum genel hatlarıyla Şekil 3.38'da gösterilmektedir.



**Şekil 3.38** Stackelberg oyunu

Oyun mükemmel bilgili ve sınırlı bir ufka sahiptir. Bu yüzden altoyun mükemmel dengeyi bulmak için geriye doğru çıkarsama metodunu kullanabiliriz:

i. İlk olarak, 1.firmanın herhangi bir çıktı düzeyi için, 2.firmanın kârını maksimize eden çıktı düzeylerini buluruz. Bunun için de 1. firmanın her  $q_1$  çıktı düzeyi için, 2. firmanın buna karşılık gelen bir çıktı düzeyi olsun, yani 2.firmanın en iyi tepki fonksiyonuna sahip,  $b_2(q_1)$ , olduğunu varsayıyoruz. Dolayısıyla herhangi bir altoyun mükemmel dengede, 2. firmanın stratejisi  $b_2(\cdot)$ 'dir.

ii. Daha sonra, 2. firmanın veri stratejisi için, 1. firmanın kârını maksimize edecek çıktı düzeyini buluruz. 1. firma,  $q_1$  düzeyini seçtiği zaman, 2. firma  $b_2(q_1)$  çıktısını seçer, bu da toplam çıktı düzeyini belirler,  $Q = q_1 + b_2(q_1)$ . Böylece piyasada  $p(q_1 + b_2(q_1))$  fiyatı oluşur. Dolayısıyla 1. firmanın altoyun mükemmel denge düzeyindeki çıktı düzeyi aşağıdaki kâr fonksiyonunu maksimize

eden düzeydir:

$$\pi_1 = q_1 p(q_1 + b_2(q_1)) - C_1(q_1).$$

Bu kâr maksimize eden tek bir çıktı düzeyinin,  $q_1^*$ , olduğunu kabul edelim. Eğer 2. firma, 1. firmanın her  $q_1$  çıktı düzeyine karşılık tek bir en iyi tepki fonksiyonuna sahipse,  $b_2(q_1)$ , ve 1. firma da tek bir en iyi tepkiye sahipse,  $q_1^*$ , oyunun altoyun mükemmel dengesi  $(q_1^*, b_2(q_1^*))$ 'dır. Yani 1. firmanın denge stratejisi  $q_1^*$  ve 2. firmanın denge stratejisi ise  $b_2(\cdot)$  fonksiyonudur. 2. firma tarafından seçilen çıktı düzeyi, 1. firmanın denge çıktısı veriyken,  $b_2(q_1^*)$ , yani  $q_2^*$ 'dir. 1. firma  $q_1$  düzeyini seçtiği zaman denge çıktı çifti, 2. firmanın denge stratejisini kullandığı veri alındığında,  $(q_1, b_2(q_1))$  olur. Yani 1.firma çıktı düzeyini değiştirdiğinde, sonuç 2. firmanın  $b_2$  tepki fonksiyonuna göre değişir. Dolayısıyla  $(q_1^*, q_2^*)$  altoyun mükemmel denge sonucunu, 2. firmanın en iyi tepki fonksiyonu üstünde 1. oyuncunun kârını maksimize eden bir nokta olarak karakterize edebiliriz.

Bu genel formda verilen oyunu daha spesifik olarak ifade edelim. Örneğin sabit marjinal maliyetli bir üretim fonksiyonu ve lineer bir ters talep fonksiyonu olduğunu düşünelim. Her  $i = 1, 2$  için maliyet fonksiyonu  $C_i(q_i) = cq_i$  ve ters talep fonksiyonu ise  $p(Q) = \alpha - Q$  olsun, burada  $c > 0$  ve  $c < \alpha$ . Bu varsayımlar altında 2.firmanın, 1.firmanın seçtiği her  $q_1$  çıktı düzeyine verdiği en iyi tepki fonksiyonunu, 2. firmanın kâr fonksiyonunun birinci dereceden koşulundan türetiriz. 2.firmanın kâr fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\pi_2 = q_2(\alpha - c - q_1 - q_2),$$

dolayısıyla 2. firmanın en iyi tepki fonksiyonu şudur:

$$b_2(q_1) = \frac{1}{2}(\alpha - c - q_1).$$

Böylece Stackelberg oyunun altoyun mükemmel dengesinde 2. firmanın stratejisi, yani  $b_2$  tepki fonksiyonu 1. firmanın kâr fonksiyonunda yerine konur. Böylece 1. firmanın optimal  $q_1^*$  çıktı düzeyi ise aşağıda verilen 1. firmanın kâr fonksiyonunu maksimize eden değerdir:

$$\pi_1 = q_1(\alpha - c - (q_1 + \frac{1}{2}(\alpha - c - q_1))) = \frac{1}{2}q_1(\alpha - c - q_1).$$

Birinci dereceden koşuldan hareketle şunu elde ederiz:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = \frac{1}{2}(\alpha - c) - q_1 = 0.$$

Böylece 1. firmanın en iyi tepki düzeyi  $q_1^* = \frac{1}{2}(\alpha - c)$  bulunur.

Bu durumda 1.firmanın stratejisinin  $q_1^*$  çıktı düzeyi olduğu ve 2.firmanın stratejisinin ise  $b_2$  olduğu tek bir altoyun mükemmel denge vardır. 2.firmanın denge üretim düzeyi ise  $q_1^*$  değerinin 2.firmanın tepki fonksiyonunda yerine konulması

ile bulunur:  $q_2^* = b_2(q_1^*) = \frac{1}{4}(\alpha - c)$ . 1. ve 2.firmanın kârları sırasıyla şöyledir:

$$\pi_1 = q_1^*(p(q_1^* + q_2^*) - c) = \frac{1}{8}(\alpha - c)^2$$

$$\pi_2 = q_2^*(p(q_1^* + q_2^*) - c) = \frac{1}{16}(\alpha - c)^2$$

Fakat hatırlanırsa aynı varsayımlar altında Cournot oyununda her firmanın çıktı düzeyi  $\frac{1}{3}(\alpha - c)$  ve kâr düzeyi ise  $\frac{1}{9}(\alpha - c)^2$ 'di. Dolayısıyla ortaya çıkan sonuç, Stackelberg oyununda ilk önce hareket eden yani lider firma olan 1.firma, altoyun mükemmel dengede Cournot dengesine göre daha fazla üretim yapar ve daha fazla kâr elde eder. 2.firma da daha az üretim yapar ve daha az kâr elde eder. Kısaca bu oyunda ilk hareket eden daha avantajlı pozisyonadadır. Stackelberg oyununda ilk önce hareket eden firmanın, 1.firmanın, altoyun mükemmel dengede Cournot dengesine göre daha fazla üretim ve daha fazla kâr yapması veri herhangi bir maliyet ve ters talep fonksiyonu için de geçerlidir.

Yukarıda bulduğumuz sonuçları toparlarsak,

(i) Stackelberg oyununda, ilk hareket eden firma altoyun mükemmel dengede, Cournot Nash dengesinden daha iyi durumdadır. Bunu anlamanın en basit yolu şöyle düşündürmektir: Stackelberg oyununda 1.firmanın opsiyonlarından biri Cournot Nash dengesindeki çıktı düzeyini seçmektir. Eğer bu üretim düzeyini seçerse, 2.firmanın en iyi tepkisi aynı Nash dengesindeki üretim düzeyini seçmektir. Yani böyle bir çıktı düzeyi seçerek, 1.firma Cournot Nash dengesindeki düzeyle aynı kâr düzeyini elde edecektir. Fakat daha farklı bir çıktı düzeyi seçerse muhtemelen daha yüksek bir kâr düzeyi elde edebilir.

(ii) Yine yukarıdaki örnekte gördüğümüz gibi, 1.firma Stackelberg oyunun altoyun mükemmel dengesinde, Cournot Nash dengesinden daha fazla üretim yapar, oysa 2.firma da daha az üretim yapar. Bu sonuç 2.firmanın en iyi tepki fonksiyonunun azalan bir fonksiyon olduğu (yani 1.firma için daha fazla üretim 2.firma için daha az üretim demek olduğunda) her durumda geçerlidir. Fakat şuna dikkat edilmeli, maliyet ve talep fonksiyonları değiştikçe, Stackelberg oyunun altoyun mükemmel dengesindeki çıktı düzeyi de değişir.

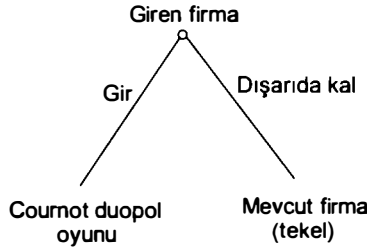
Diğer yandan, Stackelberg oyununda 1.firmanın altoyun mükemmel dengesindeki çıktı düzeyi genel olarak 2.firmanın çıktı düzeyine en iyi tepki fonksiyonu değildir: Eğer 1.firma, 2.firma çıktı düzeyini seçtikten sonra uyarılama yapabiliyorsa, bunu yapmak isterdi. Fakat eğer 1.firma bu imkana sahip olsaydı ve 2.firma onun bu imkana sahip olduğunu bilseydi, 2.firma farklı bir çıktı düzeyinde üretimde bulunurdu. Gerçekten, eğer bu oyuna 1.firmanın bir çıktı düzeyi seçtiği üçüncü bir aşama ekleseydik, ilk aşama anlamsızlaşırdı ve 2.firma ilk hareket eden firma olurdu. Böylece altoyun mükemmel dengede 1.firma eş anlı oynanan oyundaki Nash dengesinden daha kötü bir durumda olurdu. Özetle, 1.firma, 2.firma çıktı düzeyini seçtikten sonra çıktı düzeyini değiştirerek kârını artırabilse bile, bu imkana sahip olduğu oyunda 1.firma, 2.firmadan önce çıktı düzeyini seçmek zorunda olduğu ve bunu değiştiremediği durumdan daha kötü durumda olacaktır. Yani 1.firma

fikrini değiştirmeyeceğine dair söz vermeyi tercih edecektir.

### 3.8.4 Giriş Oyunu

Daha önce verdiğimiz Giriş Oyunun başka bir versiyonuna bakalım. Belirli bir piyasa mevcut tek bir firma tarafından tekelleştirilmiş durumdadır. Diğer bir ikinci firma bu piyasaya girmeyi düşünmektedir. Eğer piyasaya girmez dışarıda kalırsa mevcut firma tekel konumunu sürdürecektir fakat eğer piyasaya girerse her iki firma da Cournot oyunundaki gibi hareket edeceklerdir (Şekil 3.39).

Giriş üretim maliyetinin yanında,  $f$  gibi sabit bir maliyeti gerektirir. Eğer firma piyasanın dışında kalırsa kârı sıfırdır, fakat eğer piyasaya girerse firmalar aynı anda üretim düzeylerini seçerler (Cournot oyununda olduğu gibi). Burada  $i$  firmasının  $q_i$  miktarını üretmesinden kaynaklanan maliyeti  $C_i(q_i)$ 'dir. Eğer firmaların toplam üretim düzeyi  $Q$  ise piyasa fiyatı  $p(Q)$  şeklinde belirlenir. Bu oyunun terminal tarihleri şöyledir:  $(q_1, q_2)$  çıktı çiftleri için (*gir*,  $(q_1, q_2)$ ) ve herhangi bir  $q_1$  düzeyi için (*dışarıda kal*,  $q_1$ ) şeklindedir. Her firmanın tercihleri kârları tarafından temsil edilir: (*gir*,  $(q_1, q_2)$ ) terminal tarihi için mevcut firmanın kârı  $\pi_1 = q_1 p(q_1 + q_2) - C_1(q_1)$  ve giren firmanın kârı  $\pi_2 = q_2 p(q_1 + q_2) - C_2(q_2) - f$  iken, (*dışarıda kal*,  $q_1$ ) terminal tarihi için mevcut firmanın kârı  $\pi_1 = q_1 P(q_1) - C_1(q_1)$  ve giren firmanın kârı sıfırdır.



Şekil 3.39

Bu genel formda tasarlanan oyunu daha somut bir örnek üzerinden tartışalım. Tüm  $q_i$  üretim düzeyi için birim maliyetin,  $c$ , sabit olduğu  $C_i(q_i) = cq_i$  gibi bir maliyet fonksiyonuna ve  $p(Q) = \alpha - Q$  gibi bir ters talep fonksiyonuna sahip olduğumuzu varsayalım. Altoyun mükemmel dengeleri bulmak için ilk önce *gir* tarihini takip eden altoyuna bakalım. Bu altoyunun stratejik biçimi Cournot duopol örneği ile aynıdır ( $f$  sabit maliyeti istisna) ve tek bir Nash dengesine sahiptir, bu da her bir firmanın  $\frac{1}{3}(\alpha - c)$  düzeyinde üretimde bulunduğu denge üretim düzeyidir. Dengede mevcut firmanın kârı  $\frac{1}{9}(\alpha - c)^2$  ve yeni firmanın kârı ise  $\frac{1}{9}(\alpha - c)^2 - f$  şeklindedir.

Şimdi *dışarıda kal* tarihini takip eden altoyuna bakalım. Bu altoyunda mevcut firma çıktı düzeyini seçer. Mevcut firmanın kârı,  $q_1$  çıktı düzeyinde şöyledir:

$$\pi_1 = q_1(\alpha - q_1) - cq_1 = q_1(\alpha - c - q_1).$$

Bu kâr fonksiyonunu maksimum yapan değer ise  $q_1 = \frac{1}{2}(\alpha - c)$ 'dir (yeni firma dışarıda kaldığı için oyun tek bir firmanın optimizasyon problemine döner, dolayısıyla bu optimal  $q_1$  düzeyi  $\partial\pi_1/\partial q_1 = 0$  denklemini sağlayan değerdir). Buradan *dışarıda kal* tarihini takiben oluşan altoyunda mevcut firmanın altoyun mükemmel dengesinin  $q_1 = \frac{1}{2}(\alpha - c)$  olduğu ortaya çıkar.

Son olarak, oyunun başlangıcında piyasaya girmek isteyen firmanın hareketini düşünelim. Eğer dışarıda kalırsa kârı sıfırdır halbuki piyasaya girerse sonuçlanan altoyunda veri hareketler için, kârı  $\frac{1}{9}(\alpha - c)^2 - f$  olur. Yani herhangi bir altoyun mükemmel dengede mevcut firma eğer  $\frac{1}{9}(\alpha - c)^2 > f$  ise piyasaya girer ve  $\frac{1}{9}(\alpha - c)^2 < f$  ise dışarıda kalır. Fakat  $\frac{1}{9}(\alpha - c)^2 = f$  ise oyunda iki altoyun mükemmel denge vardır, bu durumda birinde firma girer, diğerinde dışarıda kalır.

Özetlemek gerekirse, altoyun mükemmel dengelerin kümesi  $f$ 'nin alacağı değerlere bağlıdır. Tüm dengelerde eğer firma girerse mevcut firmanın stratejisi  $\frac{1}{3}(\alpha - c)$  miktarını üretmektir, aksi takdirde  $\frac{1}{2}(\alpha - c)$  miktarını üretmektir. Giren firmanın stratejisi ise, eğer girerse,  $\frac{1}{3}(\alpha - c)$  düzeyinde üretimde bulunmaktadır.

i. Eğer  $\frac{1}{9}(\alpha - c)^2 > f$  ise yeni firmanın girdiği tek bir tek altoyun mükemmel denge vardır. Sonuç yeni firma girer ve her firma  $\frac{1}{3}(\alpha - c)$  düzeyinde üretir.

ii. Eğer  $\frac{1}{9}(\alpha - c)^2 < f$  ise, yeni firmanın dışarıda kaldığı tek bir altoyun mükemmel denge vardır. Sonuç, yeni firmanın dışarıda kaldığı ve mevcut firmanın ise  $\frac{1}{2}(\alpha - c)$  ürettiği dengedir

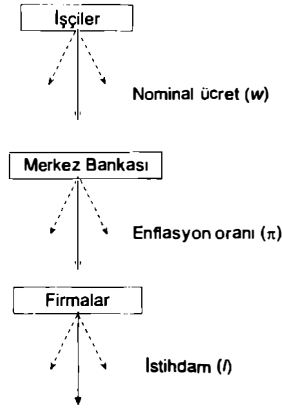
iii. Eğer  $\frac{1}{9}(\alpha - c)^2 = f$  ise oyunun iki altoyun mükemmel dengesi vardır. Bu dengelerden biri  $\frac{1}{9}(\alpha - c)^2 < f$  durumu için, diğeri de  $\frac{1}{9}(\alpha - c)^2 > f$  durumu içindir.

Mevcut firmanın, yeni firmanın piyasaya girmesinden sonra onunla mücadele etmesi altoyun mükemmel denge değildir. Çünkü yeni firmanın piyasaya girmesi sonucunda oluşan tarihte bu hareketi (mücadele etmesi) mevcut firmanın altoyundaki Nash dengesi değildir. Altoyunda bir tek Nash dengesi vardır, o da her firmanın  $\frac{1}{3}(\alpha - c)$  kadar ürettiği durumdur. Başka bir ifade ile mevcut firmanın mücadele tehdidi yeni firmanın piyasaya girmesinden sonra inandırıcı değildir.

### 3.8.5 İşçi, İşveren ve Merkez Bankası İlişkisine Dair Bir Model

Bu bölümde işçi, işveren ve merkez bankasının aldıkları kararların birbirini etkilediği bir diğer dinamik oyun modeline bakalım. Üç periyot halinde oynan oyunun birinci periyodunda işçiler parasal ücretlerini,  $w$ , seçerler fakat ikinci periyotta enflasyon oranının,  $\pi$ , ne olduğunu bilmeden bu kararlarını vermek durumundalar. İkinci periyodun başında, merkez bankası enflasyon oranını,  $\pi$ , seçer. Daha sonra üçüncü periyotta işverenler istihdam düzeyini,  $l$ , belirlerler (modelde kullanılan tüm değişkenler logaritmik olarak tanımlanmıştır). Bu oyun Şekil 3.40'de gösterilmektedir.

Merkez bankası enflasyon oranını,  $\pi$ , indirekt olarak kontrol edebilmektedir, yani para arzını,  $m$ , kontrol etmekle enflasyon oranını yönlendirmektedir,  $\pi = f(m)$ , burada  $f(\cdot)$  artan bir fonksiyondur.



**Şekil 3.40** Genişleyen-biçimli bir oyunda işçi-merkez bankası-işveren ilişkisi

İşçilerin amacı, işverenlerin istihdam düzeyi,  $l$ , ile kendilerinin arz ettikleri emek arzı,  $l^s$ , arasındaki farkı minimize etmektir. İşçiler emek arzlarını reel ücrete göre belirlemektedirler. Basitlik olsun diye emek arz fonksiyonunu lineer tanımlayalım,  $l^s = \alpha(w - \pi)$ . Böylece işçilerin fayda fonksiyonu,  $u_w$ , aşağıdaki gibidir:

$$u_w(w, l, \pi) = -(l - l^s)^2 = -(l - \alpha(w - \pi))^2. \quad (3.2)$$

Merkez bankasının amacı ise basit: Enflasyon politikası ile hedeflediği istihdam ve enflasyon değerlerini, sırasıyla  $\bar{l}$  ve  $\bar{\pi}$ , gerçekleştirmek. Merkez bankasının amacı bu anlamda aşağıda ifade edilen fayda fonksiyonunu maksimize etmektir:

$$u_M(w, l, \pi) = -(l - \bar{l})^2 - \mu(\pi - \bar{\pi})^2, \quad (3.3)$$

burada  $\mu$  merkez bankasının enflasyon ve istihdama verdiği önemi gösteren sabit bir parametredir. Daha yüksek  $\mu$  değeri enflasyona daha fazla ağırlık verildiğini dolayısıyla da istihdama daha az ağırlık verildiği anlamına gelir. Dikkat edilirse (3.3)'de ifade edilen amaç fonksiyonunda, merkez bankasının amacı, istihdam,  $l$ , ve enflasyon,  $\pi$ , oranlarının, durağan optimal değerlerinden, sırasıyla  $\bar{l}$  ve  $\bar{\pi}$ , sapmaların karesinin toplamını minimum da tutmaktır. Yani enflasyon ve istihdam hedef değerlerinden uzaklaştıkça marjinal kayıplar artmaktadır, amacı bunu asgari düzeyde tutmaktır.

Diğer yandan, işverenlerin amacı ise kendilerinin mevcut istihdam düzeyi ile kârlarını maksimize eden istihdam düzeyi arasındaki farkı minimize etmektir:

$$u_E(w, l, \pi) = -(l - \theta(\pi - w))^2, \quad (3.4)$$

burada  $\theta(\pi - w)$  terimi firmanın optimizasyonundan gelen emek talebini göstermektedir.

Bu oyun dinamik ve mükemmel bilgili bir oyundur. Bu yüzden bu oyunun alt oyun mükemmel dengesini geriye doğru çıkarsama yaklaşımı ile bulabiliriz. İşverenler en son hareket ettiklerinden dolayı, işçilerin seçtiği parasal ücret ve merkez bankası tarafından seçilen enflasyon oranını veri alarak, faydalarını,  $u_F(l, w, \pi)$ , maksimize edecek  $l^*$  istihdam düzeyini seçerler. Bunu da (3.4)'deki amaç fonksiyonunu maksimize eden değeri bularak yaparlar, yani 3.4'de verilen amaç fonksiyonun  $l$  istihdam düzeyine göre birinci dereceden koşulundan en iyi tepki fonksiyonunu bulurlar:

$$l^*(w_2, \pi_2) = \theta(\pi - w). \quad (3.5)$$

İkinci olarak hareket eden oyuncu ise merkez bankasıdır. Merkez bankasının amacı ise en son hareket eden işverenlerin tepkisini,  $l^*(w_2, \pi_2)$ , de dikkate alarak enflasyon oranını belirlemektir:

$$\max_{\pi} u_M(w, l(w, \pi), \pi). \quad (3.6)$$

Yani sosyal kayıp fonksiyonunu minimize eden  $\pi_2$  değerini bulmayı amaçlar:

$$\min_{\pi} (\theta(w - \pi) - \bar{l})^2 + \mu(\pi - \bar{\pi})^2, \quad (3.7)$$

Merkez bankası buradan yani (3.7)'nin  $\pi$ 'e göre birinci dereceden koşulundan en iyi tepki fonksiyonunu bulur:

$$\pi^*(w) = \frac{\mu\bar{\pi} + \theta\bar{l} + \theta^2 w}{\mu + \theta^2}. \quad (3.8)$$

İşçiler bu oyunda ilk hareket eden oyuncularlardır. Bu yüzden talep ettikleri parasal ücret seçimi onların istihdam ve enflasyon beklentisine bağlı olacaktır. İşçilerin rasyonel olduğunu düşünüyoruz ve dolayısıyla işçiler ileriye bakarak yani merkez bankasının seçeceği enflasyon oranını,  $\pi$ , düşünerek, şimdiden nasıl bir ücret talebinden bulunacaklarını belirleyeceklerdir. Bu da şu anlama gelir:

$$\pi^e = \pi^*(w). \quad (3.9)$$

İşçinin (3.2)'de ifade edilen fayda fonksiyonuna işverenlerin ve merkez bankasının (3.5) ve (3.8) en iyi tepki fonksiyonlarını koyduğumuzda şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} u_w(w, l^*, \pi^*) &= u_w(w, l^*(w, \pi^*(w)), \pi^*(w)) \\ &= -[l^*(w, \pi^*(w)) - \alpha(w - \pi^*(w))]^2 \\ &= -[\theta(\pi^*(w) - w) - \alpha(w - \pi^*(w))]^2 \\ &= -(\theta + \alpha)^2(\pi^*(w) - w)^2. \end{aligned}$$

Bu ifadeyi maksimize eden değer  $w^* = \pi^*(w)$ 'dir (birinci dereceden koşuluna bakın). Bu değeri (3.8)'de yerine koyarsak, denge ücret değerini buluruz:

$$w^* = \bar{\pi} + \frac{\theta}{\mu} l^*. \quad (3.10)$$

Böylece  $\pi^*(w^*) = w^*$  olduğundan dolayı, reel ücret düzeyi sıfır olur, yani  $(w^* - \pi^*) = 0$  (tüm değişkenlerin logaritmik ifade edildiğini unutmayın). Optimal emek düzeyi ise (3.5)'den bulunur, yani  $l^*(\cdot) = 0$  olur (bu değer logaritmik olduğunda emek düzeyi 1 demektir). Buradan çıkan sonuç, merkez bankası belirlediği enflasyon ve istihdam hedeflerine ancak  $l^*(\cdot) = 0$  ise ulaşabilir.

### 3.9 Hareketlerin Gözlemlendiği Çok-Aşamalı Oyunlar

Dinamik oyunlar içinde önemli bir oyun grubu da gözlemlenen hareketlerin olduğu çok-aşamalı oyunlardır. Bu oyunlar genel olarak oyuncuların önceki periyotlarda yaptıklarını bildikleri fakat bulundukları periyotta eş anlı davrandıkları durumları tanımlar. Daha formel tanımı ise aşağıda verilmektedir.

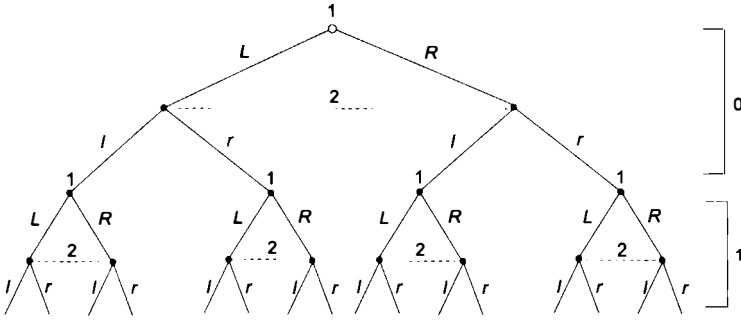
**Tanım 3.5** *Gözlemlenen hareketlerin olduğu aşamalı bir oyunda: (i) tüm oyuncular  $k$  aşamasında hareketlerini seçerken önceki periyotlarda,  $0, 1, 2, \dots, k-1$ , seçilen hareketleri bilirler ve (ii) tüm oyuncular her  $k$  aşamasında eş anlı hareket ederler. Yani hiç bir oyuncu  $k$  aşamasında diğer oyuncuların neyi seçtiğini gözlemleyemez.*

Stackelberg oyunu iki aşamalı bir oyundur. Birinci aşamada lider firma bir çıktı düzeyi seçer, ikinci aşamada ikinci firma (takipçi firma) liderin çıktı düzeyini öğrenir ve kendisinin optimal çıktı düzeyini seçer ve oyun biter. Mükemmel bilgili oyunlar, gözlemlenen hareketlerin olduğu çok-aşamalı oyunların özel bir durumudur. Her aşama bir tek oyuncunun hareketini içerir. Diğer yandan, Bertrand ve Cournot oyunları da tek aşamalı oyunlar gibi düşünülebilir.

Çok-aşamalı oyunlar sınırsız bir ufka sahip olabilirler bu yüzden onları ağaçlarla formel olarak gösteremeyiz. Fakat sınırlı-uzunlukta gözlemlenen hareketlerin olduğu çok-aşamalı oyunlar sınırlı genişleyen-biçimli oyunların özel bir durumudur. Şekil 3.41 iki defa tekrarlı  $2 \times 2$  büyüklüğünde (2 oyunculu 2 statejili bir oyun) eş anlı bir oyunu gösterir. Oyunun ilk oynanışının sonunda, her oyuncu tarafından yapılan seçimler ortak bilgiye dönüşür.  $2'e 2'$  li ağaçların beş kökü oyunun tarihlerini verir. İlk kök henüz bir şeyin olmadığı tarihi gösterir. Ondan sonra soldan sağa dört tarih söz konusudur,  $Ll, Lr, Rl$  ve  $Rr$ , yani ilk aşamanın dört olası oynanışına karşılık gelir. İlk aşama sadece bir tek oyuna sahiptir. İkinci aşamada ise, dört olası oyun vardır, her biri ilk aşamalı oynanışın dört olası tarihine karşılık gelir.

Bu yapıyı gösteren bir oyun ağacını kullanmak oldukça zor olabilir. Örneğin 5 kere tekrarlanan Cinsiyetler Savaşı oyunu için kaç tane terminal nokta gereklidir? Bunu düşünün.

Şimdi bu tür oyunları tanımlamak için daha cebirsel bir yöntem izleyeceğiz. Sınırlı sayıda oyuncunun,  $i \in N$ , olduğu sınırlı aşamalı bir oyun düşünelim. Her



**Şekil 3.41** Gözlemlenen hareketlerin olduğu iki aşamalı bir oyunun soyut gösterimi

aşamadaki oyunlar eş anlı oynanır. Burada  $h^0 = \emptyset$  ilk tarihi gösterir ve 0. aşamada tüm oyuncular  $i \in N$   $A_i(h^0)$  kümesinden hareketler seçerler. Her aşamanın sonunda oyuncular ilgili aşamanın hareket profilini seçer. Burada 0. aşamada seçilen hareket profili,  $a^0 = (a_1^0, \dots, a_N^0)$ 'dir. 1. aşamada, oyuncular  $h^1$  tarihini öğrenirler,  $h^1 = a^0$ . Gerçekte  $i$  oyuncusunun birinci aşamada sahip olduğu hareketler, daha önce ne olduğu ile ilişkilidir, böylece  $A_i(h^1)$ , tarih  $h^1$  iken olası ikinci-aşama hareketlerini gösterir. Böyle sürekli devam edilirse,  $h^{k+1}$  tarihi  $k$  aşama sonundaki tarihi yani daha önceki periyotlardaki hareketler dizisini verir:

$$h^{k+1} = (a^0, a^1, \dots, a^k).$$

Diğer yandan  $A_i(h^{k+1})$  bize  $i$  oyuncusunun, tarih  $h^{k+1}$  iken  $k+1$  aşamasındaki olası hareketlerini gösterir. Oyunda  $K+1$  sayıda aşama vardır. Eğer  $K = \infty$  ise oyunda sonsuz sayıda aşama olduğu anlamına gelir. Bu durumda oyun sonsuz tarihe sahiptir, dolayısıyla  $h^\infty$  şeklinde ifade edilir. Her  $h^{K+1}$ , tanım gereği oyunun başından itibaren tüm hareketler dizisini tanımladığından, tüm terminal tarihlerin kümesi,  $H^{K+1}$ , oyunun tüm olası sonuçlar kümesi ile aynıdır.

Bu yapı içinde,  $i$  oyuncusunun pür stratejisi, basitçe her olası  $h^k$  tarihi için her  $k$  aşamasında oyunun nasıl oynanacağını planını verir. Eğer  $H^k$ , bize  $k$ -aşamasındaki tarihlerin kümesini veriyorsa ve bu aşamadaki hareketler kümesi

$$A_i(H^k) = \bigcup_{h^k \in H^k} A_i(h^k).$$

ise,  $i$  oyuncusunun pür stratejisi,  $\{s_i^k\}_{k=0}^K$  gibi bir fonksiyonlar dizisidir, burada her  $s_i^k$ ,  $H^k$  tarihinden  $i$  oyuncusunun olası hareketlerine bir ilişki tanımlar, yani  $A_i(H^k)$  (başka bir deyişle her  $h^k$  için  $s_i^k(h^k) \in A_i(h^k)$  durumunu sağlar). Bu tür strateji profili ile türetilen hareketler dizisi: 0. aşamadaki hareketler  $a^0 = s^0(h^0)$ , birinci aşamadaki hareketler  $a^1 = s^1(a^0)$ , ikinci aşamadaki hareketler  $a^2 = s^2(a^0, a^1)$  ve böyle devam eder. Buna strateji profili patikası denir. Terminal tarihler oyunun tüm aşamalarını gösterdiklerinden, her  $i$  oyuncunun faydasını bir

fonksiyon olarak ifade edebiliriz,

$$u_i : H^{K+1} \rightarrow R.$$

Çoğu uygulamalarda fayda değerleri aşama aşama toplanır, yani her oyuncunun tüm faydası tek-aşamalı faydalarının,  $u_i(a^k), k = 0, \dots, K$ , bir çeşit ağırlıklanmış ortalamasıdır.

Her strateji profiline  $H^{K+1}$  sonucunu attettiğimizde ve her sonucu da fayda vektörüne atadığımızda, her strateji profilinin faydasını hesaplayabiliriz. Bu bağlamda pür-strateji Nash dengesi basitçe hiç bir oyuncunun refahını daha iyi hale getirecek bir stratejiye sahip olmadığı durumdur. Bu da tüm  $s'_i$  stratejileri için  $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$  demektir.

Bu tür oyunlardaki ardışıklığı görmek için her aşamasında eş anlı oynanan iki aşamalı bir oyunun nasıl oynandığına bakalım. Yani bu oyunda ilk aşamada oyuncular eş anlı hareket ederler, dolayısıyla mükemmel olmayan bilgi söz konusudur. Fakat bu aşamada çıkan sonucu gördükten sonra ikinci aşamaya geçerler ve orada da bir kez daha eş anlı hareket ederler. Bu oyunu daha açık bir şekilde ifade edersek:

- i. 1. ve 2. oyuncu eş anlı olarak  $a_1 \in A_1$  ve  $a_2 \in A_2$  hareketlerini seçerler.
- ii. 3. ve 4. oyuncu ilk aşamadaki  $(a_1, a_2)$  sonucunu gözlemler ve sonra yine eş anlı  $a_3$  ve  $a_4$  hareketlerini seçerler.
- iii. Oyuncuların fayda fonksiyonları ise şöyledir:  $u_i(a_1, a_2, a_3, a_4), i = 1, 2, 3, 4$ .

Bu oyunun aşama sayısı ve oyuncu sayısı artırılabilir. Örneğin oyuncu sayısı, 3. ve 4.oyuncuların, ikinci aşamadaki 1. ve 2. oyuncuları olduğu düşünülerek azaltılabilir.

Bu tür oyunların denge çözümlerini bulmak için geriye doğru çıkarsama algoritmasını kullanabiliriz. Oyunun sonundan başlayarak, yani 2.aşamadan başlayarak 3. ve 4.oyuncunun 1. aşamadaki sonucu veri alarak nasıl çözdüklerine bakarız. Oyunu basitleştirmek için, birinci aşamada seçilen her olası  $(a_1, a_2)$  çözümü için ikinci aşamada tek bir Nash dengesi olduğunu varsayıyoruz, bu da  $(a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2))$  ile gösterilir.

Optimal  $(a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2))$  hareketleri bulmak için  $u_i(\cdot)$  fayda fonksiyonunun birinci dereceden koşullarından faydalanırız:

$$\frac{\partial u_3}{\partial a_3} = 0 \text{ ve } \frac{\partial u_4}{\partial a_4} = 0.$$



1. ve 2. oyuncular, 2. aşamadaki oyuncuların yani 3. ve 4.oyuncunun tepki fonksiyonlarını,  $(a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2))$ , eş anlı hareket ettikleri 1.aşamada dikkate alırlar.

1. ve 2. oyuncu arasındaki eş anlı oynanan oyun şöyle tanımlanır:

- i. 1. ve 2.oyuncular aynı anda  $a_1 \in A_1$  ve  $a_2 \in A_2$  hareketlerini seçerler
- ii. Fayda fonksiyonları ise  $u_i(a_1, a_2, a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2)), i = 1, 2$ , şeklindedir.

Bu durumda ortaya çıkan Nash dengesinin  $(a_1^*, a_2^*)$  olduğunu varsayalım. Böylece  $u_i(a_1^*, a_2^*, a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2))$  bu iki aşamalı oyunun altoyun mükemmel

Nash dengesidir.

Burada şunu da ifade etmeden geçmeyelim: optimal  $a_1^*$  ve  $a_2^*$  değerleri aşağıdaki denklemleri çözen değerlerdir.

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{da_1} &= \frac{\partial u_1}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial a_3} \frac{\partial a_3}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial a_4} \frac{\partial a_4}{\partial a_1} = 0, \\ \frac{du_2}{da_2} &= \frac{\partial u_2}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_3} \frac{\partial a_3}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_4} \frac{\partial a_4}{\partial a_2} = 0.\end{aligned}$$

Bu her iki denklemde ifade edilen 2. ve 3.terimler ikinci aşamadaki 3. ve 4. oyuncuların 1. ve 2.oyuncuların hareketleri üzerindeki dolaylı etkilerinin dikkate alındığını gösterirken, her iki denklemdeki 1.terimler ise her iki oyuncunun kendi hareketlerinin direkt etkileridir.

Diğer yandan oyun 2.aşamaya geldiğinde eğer 3. ve 4.oyuncu tarafından Nash dengesi olmayan bir takım tehditler yapılırsa, bu aşamaya geldikten sonra bu tehditler geçerliliğini yitirir. Yani tehditleri gerçekleştirmek rasyonel olmayacaktır.

### 3.9.1 Banka Hücumu

İki mudinin her biri bir bankaya  $M$  kadar mevduat yatırır. Bankanın da bu parayı uzun dönemli bir yatırım projesine yatırdığını düşünelim. Eğer mudi, proje bitmeden önce parasını çekmek zorunda kalırsa,  $2x$  kadarını geri alabilir, burada  $M > x > M/2$ . Fakat eğer yatırımın zamanında bitmesine müsaade ederse, toplamda  $2X$  kadar alacaktır, burada  $X > M$ .

Mudilerin paralarını çekmeleri için iki tarihin olduğunu varsayıyoruz: 1.tarih, bankanın yaptığı yatırımının vadesinin dolmadığı tarih, 2.tarih ise bu vadeden sonraki tarihtir. Eğer her iki mudi paralarını 1.tarihte çekerlerse, her biri  $x$  kadar alır ve oyun biter. Eğer sadece bir mudi 1.tarihte parasını çekerse tüm  $M$  mevduatını alabilir ve diğer mudi ise  $2x - M$  kadar alabilir ve oyun biter. Son olarak, eğer hiç bir mudi 1.tarihte parasını çekmezse, projenin vadesinde bitmesine imkan verildiği için mudiler paralarını 2.tarihte çekebilirler. Eğer her iki mudi de 2.tarihte paralarını çekerse her biri  $X$  alacaktır ve oyun bitecektir. Eğer sadece bir mudi 2.tarihte parasını çekerse  $2X - M$  alır, diğer mudi ise  $M$  alır ve oyun biter. Son olarak, eğer hiç bir mudi 2.tarihte parasını çekmezse banka her mudiye  $X$  kadar ödemedede bulunur. Bu aşamalı oyun Tablo 3.8'de gösterilmektedir.

|       | çek         | çekme       |       | çek         | çekme       |
|-------|-------------|-------------|-------|-------------|-------------|
| çek   | $x, x$      | $M, 2x - M$ | çek   | $X, X$      | $2X - M, M$ |
| çekme | $2x - M, M$ | diğer aşama | çekme | $M, 2X - M$ | $X, X$      |
|       | 1.tarih     |             |       | 2.tarih     |             |

**Tablo 3.8**

Bu oyunu analiz etmek için, geriye doğru çıkarsama metodunu kullanabiliriz. Bu yüzden 2.tarihteki stratejik-biçimli oyuna bakalım. Basitçe  $X > M$  (ve

dolayısıyla  $2X - M > X$ ) olduğundan dolayı parayı çekmek çekmemeye kesin baskın olduğundan dolayı, oyunda tek bir Nash dengesi vardır: her iki mudi de paralarını çeker ve elde ettikleri getiri  $(X, X)$ 'dir. İskonto olmadığından dolayı basitçe bu getiriyi 1.tarihteki tabloda yerine koyabiliriz. Buradaki diğer aşama yerine Tablo 3.9'da olduğu gibi  $(X, X)$  diye yazılır.

|              | <i>çek</i>  | <i>çekme</i> |
|--------------|-------------|--------------|
| <i>çek</i>   | $x, x$      | $M, 2x - M$  |
| <i>çekme</i> | $2x - M, M$ | $X, X$       |

**Tablo 3.9**

$x < M$  (dolayısıyla  $2x - M < x$ ) olduğundan dolayı, bu yeni oyunun iki tane pür alt oyun mükemmel Nash dengesi vardır. Bunlardan biri, her iki mudinin parasını çektiği dengedir, bu durumda fayda düzeyi  $(x, x)$ 'dir. İkinci denge ise, her iki mudinin de bekleyip 2.tarihte paralarını çektiği dengedir,  $(X, X)$  (yani 1.tarihte paralarını çekmeyip, 2.tarihte çektikleri denge).

Bu dengelerin birincisi banka hücumu olarak nitelendirilir. Eğer mudilerden biri diğerinin 1.tarihte parasını çekeceğini düşünürse, bu mudinin de en iyi tepkisi parasını çekmektir. Fakat bekleyip 2.tarihte paralarını çekerlerse daha yüksek fayda elde edeceklerdir. Bu durum Mahkumlar Çıkmazı probleminden bir açıdan farklıdır. Her iki oyun da sosyal açıdan daha düşük bir dengenin oluşmasına rağmen Mahkumlar Çıkmazı oyununda bu denge tektir. Halbuki bu oyunda daha etkin olan ikinci bir denge de söz konusudur. Yani bu model banka hücumlarının ne zaman gerçekleşeceğini tahmin edemez, sadece dengelerden birinin bu olduğunu söyler.

### 3.9.2 Küçülen Bir Piyasadan Çıkış

Burada gösterilen model Osborne (2003)'den adapte edilmiştir. Modelde belirli bir piyasada iki firma olduğu varsayılmaktadır. Bunlardan biri büyük bir üretim kapasitesine sahipken, diğerinin kapasitesi küçüktür. Firmaların mallarına olan talep her geçen gün düşmektedir. Soru firmaların ne zaman piyasayı terk edecekleri ve hangi firmanın ilkin bu piyasadan çıkacağıdır. Şimdi bu duruma bakalım.

Zamanı kesikli bir değişken gibi düşünelim. Piyasada  $t$  periyodunda fiyat  $p_t(Q)$  ile gösterilmektedir. Fiyatın zamanla düştüğünü varsayıyoruz, yani her  $Q$  değeri için ve  $t \geq 1$  için,  $p_{t+1}(Q) < p_t(Q)$  durumu söz konusudur. Biz burada firmaların piyasada kaldıkları müddetçe ne kadar ürettiklerinden ziyade onların çıkış kararları ile ilgiliyiz. Bu yüzden  $i$  firmasının tek kararı sabit bir çıktı düzeyini,  $k_i$ , üretmek veya üretmemektir, ( $k_i$ ,  $i$  firmasının kapasitesi olarak düşünülebilir). Bir firma üretimi durdurduğunda, tekrardan üretime geçemez. 2.firmanın kapasitesinin 1.firmadan daha küçük olduğunu,  $k_2 < k_1$ , ve her firmanın  $q$  üretim düzeyini üretmekten dolayı katlandıkları maliyetin ise  $cq$  olduğunu varsayalım.

Bu oyun zaman üzerinden ilerlerken her iki firma her periyotta eş anlı piyasada kalıp kalmama kararı vermek zorundadır. Firmaların hareketleri piyasada kal ve

piyasadan çıkış şeklindedir.

Oyuncu fonksiyonunu şöyle tanımlayabiliriz: Hiç bir firmanın piyasayı terk etmediği  $h$  tarihinden sonra  $\tau(h) = \{1, 2\}$ ; sadece 2.firmanın terk ettiği  $h$  tarihinden sonra  $\tau(h) = 1$ ; veya sadece 1.firmanın terk ettiği  $h$  tarihinden sonra  $\tau(h) = 2$  şeklindedir.

Her firmanın tercihi, her terminal tarihi elde ettiği getiri ile ilişkilendiren bir kâr fonksiyonudur. Herhangi bir  $i (= 1, 2)$  firmasının  $t$  periyodundaki kârı eğer diğer firma piyasadan çıkarsa,  $(p_t(k_i) - c)k_i$  olurken, diğer firmanın kalması durumunda kârı  $(p_t(k_1 + k_2) - c)k_i$  olur.

Eğer  $p_t(k_i) < c$  durumu söz konusu ise, herhangi bir periyotta,  $i$  firması zarar eder, kalan tek firma olsa bile zarar eder çünkü piyasa fiyatı birim maliyetten daha azdır. Eğer piyasadaki tek firma  $i$  firması ise kârlı olduğu son periyodu  $t_i$  ile gösterelim. Yani  $t_i$  periyodu  $p_t(k_i) \geq c$  durumunu sağlayan en büyük  $t$  değeridir (yani kârlı kaldığı en uzun süre). Ve  $k_1 > k_2$  olduğundan dolayı  $t_1 \leq t_2$ 'dir. Bunun anlamı ise, büyük firmanın piyasada yalnız kaldığı durumda kâr etmediği periyot küçük firmanın yalnız kaldığı durumda kâr etmediği periyottan daha uzun değildir.

Oyun sonsuz zaman ufkuna sahip bir oyundur. Fakat  $t_i$  periyodundan sonra piyasada kalan tek bir firma olsa da  $i$  firmasının kârı negatiftir. Dolayısıyla eğer  $i$  firması  $t$  periyodundan sonra herhangi bir periyotta piyasada ise, her altoyun mükemmel dengede bu periyotta çıkmayı seçer. Özellikle her iki firma da  $t_2$  periyodundan sonraki her periyotta piyasadan çıkmayı tercih eder. Firmaların daha önceki periyotlardaki altoyun mükemmel dengelerini bulmak için  $t_2$  periyodundan itibaren geriye doğru çıkarsama metodunu kullanabiliriz.

Eğer 1.firma (daha büyük olan)  $t_1$  periyodundan sonraki herhangi bir periyotta piyasada kalırsa, bu firma, 2.firma piyasada bulunsun ya da bulunmasın, piyasadan çıkmalıdır. Sonuç olarak eğer 2.firma  $t_1 + 1$  ile  $t_2$  arası bir periyotta hala piyasada üretim yapıyorsa, bu durumda piyasada kalmalıdır. 1.firma böyle bir periyotta piyasadan çıkmalıdır ve onun yokluğunda 2.firmanın kârı pozitiftir.

Şimdiye kadar şu sonucu elde ettik: Her altoyun mükemmel dengede 1.firmanın stratejisi  $t_1 + 1$  periyodundan itibaren her periyotta piyasayı terk etmektir ve 2.firmanın stratejisi ise  $t_2 + 1$  periyodundan itibaren her periyotta piyasadan çıkmaktır.

Şimdi  $t_1$  periyodunu düşünelim, yani 2.firmanın olmadığı 1.firmanın kârının pozitif olduğu son periyodu düşünelim. Eğer 2.firma piyasadan çıkarsa, bu periyottan itibaren kâr sıfırdır. Eğer piyasada kalırsa ve 1.firma çıkarsa bu durumda  $t_1$  periyodundan, ayrıldığı  $t_2$  periyoduna kadar geçen sürede kâr eder. Eğer her iki firma da kalırsa, 2.firma  $t_1$  periyodunda bir kayıpla karşılaşır fakat  $t_2$  periyoduna kadarki periyotlarda kâr elde edebilir çünkü her altoyun mükemmel dengede 1.firm  $t_1 + 1$  periyodunda piyasadan çıkar. Yani eğer 2.firmanın  $t_1$  periyodunda bir dönemlik kaybı, 1.firmanın bu periyotta piyasada faaliyet gösterdiği periyotta,  $t_1 + 1$  periyodundan itibaren tüm kârlarından daha azsa, 1.firmanın  $t_1$  periyodunda bulunup bulunmamasından bağımsız olarak, 2.firma her altoyun mükemmel dengede piyasada kalır.  $t_1 + 1$  periyodunda, 1.firma piyasada yokken, fiyat nispeten

yüksektir, bu yüzden 2.firmanın bir periyotluk kaybının sonraki periyotlarda elde ettiği kardan daha az olduğu varsayımı geniş bir parametreler ailesi için geçerlidir. Bu yüzden bundan sonra bu varsayımın geçerli olacağını düşünebiliriz.

Özetle her altoyun mükemmel dengede 2.firma  $t_1$  periyodunda piyasada kalır, böylece 1.firma optimal karar verip piyasadan çıkar (sonraki periyotta piyasadan çıkmalıdır, eğer  $t_1$  periyodunda piyasada kalırsa zarar eder çünkü 2.firma hala piyasadadır)

Şimdi geriye doğru düşünmeye devam edelim. Eğer 2.firma  $t_1 - 1$  periyodunda piyasada kalırsa  $t_1$ 'den  $t_2$  periyoduna kadarki periyotta kâr eder. Çünkü 1.firma  $t_1$ 'deki her altoyun mükemmel dengede piyasadan çıkar. Bu  $t_1 - 1$  periyodunda bir kayba neden olabilir (eğer 1.firma bu periyotta piyasada kalırsa), fakat bu kayıp 1.firmanın piyasada olduğu  $t_1$  periyodundaki kayıptan daha azdır. Yani 1.firmanın  $t_1 - 1$  periyodundaki hareketinden bağımsız olarak, 2.firmanın en iyi hareketi bu periyotta piyasada kalmaktır. Eğer  $t_2 < t_1 - 1$  ise 1.firma  $t_1 - 1$  periyodunda 2.firmanın da olduğu bu periyotta zarar eder ve bu yüzden piyasadan çıkması gerekir.

Aynı mantıkla firmaların kârlı bir şekilde bir arada bulunamayacakları ilk periyot için de düşünülebilir. Böyle bir durumdaki her periyotta, her altoyun mükemmel dengede 1.firma eğer çoktan çıkmamışsa piyasadan çıkar. Her firmanın kârlı bir şekilde piyasada birlikte olduğu son periyodu  $t_0$  ile gösterirsek, bu durumda  $t_0$ ,  $p_t(k_1 + k_2) \geq c$  koşulunu sağlayan en büyük  $t$  değeridir.

Eğer 2.firmanın  $t_1$  periyodundaki kaybı, ki bu periyotta her iki firma da aktif durumda,  $t_1$  periyodundan yalnız tek kaldığı  $t_2$  periyoduna kadar ki stirede elde ettiği kardan daha azsa bu oyunun tek bir altoyun mükemmel dengesi vardır. Bu dengede büyük firma  $t_0 + 1$  periyodunda piyasadan çıkar (yani her iki firmanın da birlikte kâr edemediği ilk periyot) ve 2.firma (küçük olan)  $t_2$  periyoduna kadar piyasada kalmaya devam eder.

### 3.9.3 Gümrük Politikası

İki ayrı ülkenin gümrük politikalarını ve aralarındaki uluslararası rekabeti oyun teorik olarak modelleyelim. Ülkeleri  $i$  ve  $j$  indisleri ile tanımlayalım. Her ülke ( $i$  ve  $j$ ) gümrük tarifesini belirleyen bir hükümete, hem ulusal ekonomiye hem de dış piyasaya üretim yapan bir firmaya ve aynı zamanda hem yerli firmadan hem de yabancı firmadan mal alan tüketicilere sahiptir. Eğer  $i$  ülkesindeki piyasada toplam mal miktarı  $Q_i$  ise, piyasa fiyatı  $p_i(Q_i) = \alpha - Q_i$ 'dir. Burada  $i$  ülkesindeki firma (bundan sonra  $i$  firması diye nitelendirilecektir) yerli tüketim için  $d_i$  ve ihracat için  $e_i$  kadar üretimde bulunur, yani  $Q_i = d_i + e_j$ . Firmalar sabit marjinal maliyetin,  $c$ , olduğu fakat sabit maliyetlerin olmadığı bir üretim yapısına sahipler. Dolayısıyla  $i$  firmasının toplam maliyeti  $C_i(d_i, e_i) = c(d_i + e_i)$  şeklindedir. Firmalar aynı zamanda ihracat yaptıklarından gümrük vergisi maliyetleri ile karşılaşır. Eğer  $i$  firması  $j$  ülkesine  $e_i$  kadar ihracat yaparsa  $j$  ülkesinin uyguladığı  $t_j$  gümrük tarifesinden dolayı,  $t_j e_i$  kadar gümrük vergisini  $j$  hükümetine ödemek zorundadır.

Oyunda olayların akışı şöyle gelişir. İlk olarak, hükümetler aynı anda gümrük tarifelerini,  $t_i$  ve  $t_j$ , seçerler. İkinci olarak, firmalar gümrük tarifelerini gözlemlerler

ve aynı anda hem yerli hem de ihracat için üretimlerini belirlerler, yani sırasıyla  $(d_i, e_i)$  ve  $(d_j, e_j)$  değerlerini belirlerler. Üçüncü olarak, fayda düzeyleri,  $i$  firmasının kârı,  $\pi_i$ , ve  $i$  ülkesinin toplam refahı,  $u_i$ , aşağıdaki gibi belirlenir:

$$\pi_i(t_i, t_j, d_i, e_i, d_j, e_j) = [\alpha - (d_i + e_j)] d_i + [\alpha - (e_i + d_j)] e_i - c(d_i + e_i) - t_j e_i, \quad (3.11)$$

ve

$$u_i(t_i, t_j, d_i, e_i, d_j, e_j) = \frac{1}{2} Q_i^2 + \pi_i(t_i, t_j, d_i, e_i, d_j, e_j) + t_i e_j. \quad (3.12)$$

Yukarıdaki (3.12) denklemi  $i$  ülkesinin toplam refahını verir. Bu da üç unsurdan oluşur: tüketici artışı (ters talep fonksiyonu  $p_i(Q_i) = \alpha - Q_i$  verildiğinde eğer piyasada satılan miktar  $Q_i$  ise toplam tüketici artışı,  $(1/2)Q_i^2$  'e eşittir),  $i$  firmasının kârı ve  $i$  hükümetinin diğer ülkenin  $j$  firmasından aldığı gümrük gelirinin toplamından oluşur.

Şimdi hükümetlerin  $t_i$  ve  $t_j$  gümrük tarifelerini seçmiş olduklarını varsayalım. Eğer  $(d_i^*, e_i^*, d_j^*, e_j^*)$  düzeyi, iki firma arasında her iki piyasadaki Nash dengesi ise, her iki firma için  $(d_i^*, e_i^*)$  değerleri aşağıdaki problemi çözen değerler olmalıdır:

$$\max_{h_i, e_i \geq 0} \pi_i(t_i, t_j, d_i, e_i, d_j^*, e_j^*).$$

Burada  $\pi_i(t_i, t_j, d_i, e_i, d_j^*, e_j^*)$  kâr düzeyi,  $i$  firmasının hem  $i$  piyasasındaki kârı (sadece  $d_i$  ve  $e_j^*$  değerlerinin bir fonksiyonudur) ve hem de  $j$  piyasasındaki kârıdır (bu da sadece  $e_i$ ,  $d_j^*$  ve  $t_j$  değerlerinin bir fonksiyonudur). Aslında  $i$  firmasının iki-piyasalı optimizasyon problemi basitçe her biri bir piyasa için basit bir çift optimizasyon problemidir, yani  $d_i^*$  aşağıdaki problemi çözen değerdir,

$$\max_{d_i \geq 0} d_i [\alpha - (d_i + e_j^*) - c],$$

ve  $e_i^*$  de aşağıdaki problemi çözen değerdir,

$$\max_{e_i \geq 0} e_i [\alpha - (e_i + d_j^*) - c] - t_j e_i.$$

Buna göre optimal yerli tüketim miktarı,  $d_j^*$ , şudur:

$$d_j^* = \frac{1}{2}(\alpha - e_j^* - c). \quad (3.13)$$

Optimal ihracat miktarı,  $e_i^*$ , ise şudur:

$$e_i^* = \frac{1}{2}(\alpha - d_j^* - c - t_j). \quad (3.14)$$

Böylece (3.13) ve (3.14) fonksiyonları her iki firma için de geçerli olan en iyi tepki fonksiyonlarıdır. Yani dört bilinmeyenli olan,  $(d_i^*, e_i^*, d_j^*, e_j^*)$ , dört denkleme sahibiz. Fakat bu denklemleri iki bilinmeyenli iki denkleme indirgeyebiliriz:

$$d_i^* = \frac{\alpha - c + t_i}{3} \text{ ve } e_i^* = \frac{\alpha - c - 2t_j}{3}. \quad (3.15)$$

Dikkat edilirse,  $i$  piyasasında,  $i$  firmasının marjinal maliyeti  $c$  iken,  $j$  firmasının maliyeti  $c + t_i$  kadardır. Bu durumda  $j$  firmasının maliyeti daha yüksek olduğu için bu piyasa için daha az üretir. Fakat eğer  $j$  firması daha az üretecekse, bu denge fiyatının daha yüksek olacağı anlamına gelir, böylece  $i$  firması daha fazla üretmeyi isteyecektir. Dolayısıyla dengede, (3.15)'de görüldüğü gibi,  $d_i^*$  değeri  $t_i$  ile artan bir ilişkiye sahipken,  $e_j^*$  değeri  $t_i$  ile azalan bir ilişkiye sahiptir.

İki firma arasındaki ikinci-aşama oyunun çözümünden sonra, şimdi geriye doğru gelerek birinci aşamada iki hükümet arasında eş anlı oynanan oyunda gümrük tarife oranlarının nasıl bulunacağına bakalım. Hükümetler  $t_i$  ve  $t_j$  tarife oranlarını eş anlı belirliyorlar. Hükümetlerin fayda fonksiyonları  $u_i(t_i, t_j, d_i^*, e_i^*, d_j^*, e_j^*)$  şeklindedir, burada  $d_i^*$  ve  $e_i^*$  değerleri (3.15)'de de görüldüğü gibi  $t_i$  ve  $t_j$ 'nin bir fonksiyonudur. Şimdi hükümetler arasında oynanan bu oyunun Nash dengesini bulalım.

Eğer  $(t_i^*, t_j^*)$  hükümetler arası oyunun Nash dengesi ise, her  $i$  için,  $t_i^*$  aşağıdaki problemi çözen değerdir:

$$\max_{t_i \geq 0} u_i(t_i, t_j, d_i^*, e_i^*, d_j^*, e_j^*)$$

burada

$$u_i(\cdot) = \frac{(2(\alpha - c) - t_i)^2}{18} + \frac{(\alpha - c + t_i)^2}{9} + \frac{(\alpha - c - 2t_j^*)^2}{9} + \frac{t_i(\alpha - c - 2t_i)^2}{9}.$$

(ikinci aşamada bulunan değerler ((3.12)'de yerine kondu).

Böylece her  $i$  firması için,  $t_j^*$  değerinden bağımsız olarak, denge  $t_i^*$  düzeyi şudur:

$$t_i^* = \frac{\alpha - c}{3}.$$

Başka bir deyişle bu modelde her hükümet için baskın strateji, gümrük oranını  $(\alpha - c)/3$  düzeyinde seçmektir.

Eğer  $t_i^* = t_j^* = (\alpha - c)/3$  değerlerini (3.15)'de yerine koyarsak,

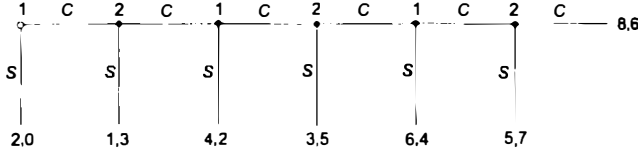
$$d_i = \frac{4(\alpha - c)}{9} \text{ ve } e_i^* = \frac{\alpha - c}{9}.$$

ikinci aşamadaki firma üretim düzeylerini de elde ederiz. Yani gümrük tarifesini oyununun alt oyun mükemmel dengesi şöyledir:

$$t_i^* = t_j^* = (\alpha - c)/3, d_i^* = d_j^* = 4(\alpha - c)/9, e_i^* = e_j^* = (\alpha - c)/9.$$

### 3.10 Geriye Doğru Çıkarsama ve Altoyun Mükemmel Denge Kavramlarına Getirilen Eleştiriler

Bazı oyunlarda geriye doğru çıkarsama algoritmasının bulunduğu dengeler sezgisel olarak çok güçlü olmayabilir. Bu oyunlardan biri Kırkayak oyunudur. Şeklinden dolayı Kırkayak oyunu denen bu oyuna bakalım (Şekil 3.42). Oyunda oyuncular sırayla hareket etmektedirler. Her hareket sırası gelen oyuncu ya oyunu durduracak (S) veya oyuna devam edecektir (C). Oyunun herhangi bir hareket anında, eğer diğer oyuncu (2.oyuncu) bundan sonraki aşamada oyunu durduracaksa, oyuncumuzun (1.oyuncu) oyuna devam etmektense durdurması daha iyidir. Fakat eğer diğer oyuncu oyunu durdurmak yerine devam ederse oyuncumuz daha iyi bir duruma gelecektir. Bu durum  $T$  periyotluk oyunun her aşamasında geçerli olan bir mantığı göstermektedir.



Şekil 3.42 Kırkayak oyunu

Bu oyun sınırlı ve mükemmel bilgili bir oyun olduğundan dengeyi geriye doğru çıkarsama metodu ile bulabiliriz. Yukarıda ifade ettiğimiz gibi her hareket sonrası, bunu takip eden oyuncunun oyunu durdurması devanı ettirmesinden daha iyidir. Oyuncunun bu hareketi veri alındığında, ondan önce hareket eden oyuncu oyuna devam etmektense oyunu durdurmayı tercih eder. Bu şekilde geriye doğru ilerledikçe, oyunun tek bir dengesi olduğu görülür. Bu da her oyuncunun stratejisinin kendisine sıra geldiğinde oyunu durdurmasıdır. Yani sonuç 1.oyuncunun oyunu hemen durdurmasıdır.

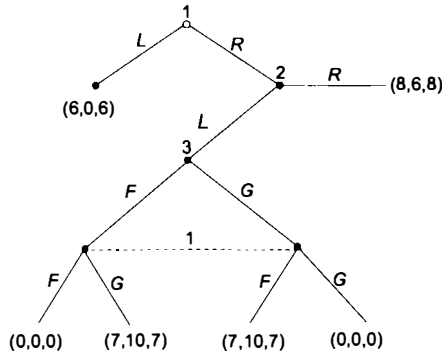
1. oyuncunun oyunu hemen durdurmasındaki mantık anlaşılabilir. Fakat bu davranış biçimi, özellikle  $T$  periyodu çok uzunsa, sezgisel olarak çok mantıklı gözükmemektedir. 1. oyuncunun oyunu durdurmasındaki temel mantık, eğer oyunu devam ettirmesi durumunda 2. oyuncunun 2. periyotta oyunu durduracağına inanmasından kaynaklanmaktadır. Dahası 2. oyuncunun 2.periyotta oyunu durdurma kararı, oyuna devam etmesi durumunda 1. oyuncunun 3.periyotta oyunu durduracağına inanmasından kaynaklanır. Oyunu durduran her karar benzer düşüncelere dayanır. 100 periyotluk bir oyunun 21. periyodunda karar veren bir oyuncu düşünelim. Tabi 21. aşamaya ilk 20 periyottan sonra geldiler. Acaba 21. periyotta karar verilirken ilk 20 karar dikkate alınacak mıdır yani bunların karşı tarafın hatasıyla devam ettiğini düşünüp oyunu durduracak mı yoksa gelecek periyotta diğer oyuncuya daha fazla güvenip oyunu durdurmayacağını mı düşünecek? Bu soruların kolay cevapları yoktur. Bu tür sorular yapılan deneysel çalışmalarla gözlemlenmeye çalışılmıştır. Ama bu tür deneylerde gözlenen şey, geriye doğru çıkarsama yakla-

şımının iddia ettiği gibi oyunun hemen durmadığı şeklinde yani 5-10 periyot oynandığını göstermektedir.

Geriye doğru çıkarsama bize sadece bir algoritma sunar. İnsanların denge- den sapmaları durumunda oluşacak duruma karşı ilgisiz olduklarını veya bunu düşünebilecek bir kapasiteye sahip olmadıklarını varsaymaktadır. Bu yaklaşım insanları oynadıkları oyunlarda dar bir algoritmaya hapseder. Dolayısıyla insanların daha büyük bir pencereden bakabileceklerini ihmal eder.

Altoyun mükemmellik kavramı geriye doğru çıkarsamanın bir uzantısı olduğundan, geriye doğru çıkarsamaya yöneltilen eleştirilerle benzer eleştirilere muhataptır. Dahası altoyun mükemmellik dengesi, tüm oyuncuların bir altoyunda oynadıkları konusunda anlaşmalarını ima eder, fakat bu altoyunda oynamayı geriye doğru çıkarsama argümanları tahmin edemezse bile bu iddia sürdürülür. Bu problemi öne çıkaran oyun teorisyenleri vardır. Bu yüzden oyuncuların denge dışı patikadaki bir altoyunda hangi Nash dengesinin oynanacağı konusunda daha zayıf denge kavramları önerirler, yani bu durumda oyuncuların oynanacak Nash dengeleri hakkında anlaşmazlık içinde olmalarına imkan verirler.

Bu durumu görmek için Şekil 3.43'de verilen üç oyunculu bir oyuna bakalım. Birinci aşamada, 1.oyuncu  $L$  hareketini oynar ve oyun biter,  $(6,0,6)$  getirileri elde edilir; veya  $R$  hareketini oynar, bu da oyun sırasının 2.oyuncuya geçmesine neden olur. 2.oyuncu da burada ya  $R$  hareketini oynar, oyun biter elde ettikleri getiriler  $(8,6,8)$  olur; ya da  $L$  hareketini oynar bu durumda ise 1. ve 3.oyuncular (2.oyuncu değil) eş anlı hareketli olan koordinasyon oyununu oynarlar, ki burada her bir oyuncu  $F$  veya  $G$  hareketini seçer. Eğer farklı hareketler seçerlerse, her biri 7, ikinci oyuncu ise 10 alır; eğer aynı hareketleri seçerlerse üç oyuncu da 0 alır.



Şekil 3.43

Üçüncü aşamada 1. ve 3. oyuncular arasında oynanan koordinasyon oyununda üç Nash dengesi vardır: ikisi pür strateji dengesi (her ikisinde de getiriler  $(7, 10, 7)$  olur) ve karma strateji, (bu durumda ise getiriler  $(7/2, 5, 7/2)$  olur). Eğer 1. ve 3.oyuncunun koordineli hareket etmeleri sonucu denge oluşmuşsa, 2. oyuncu  $L$ 'yi oynar ve böylece 1. oyuncu  $R$  hareketini oynar, beklediği fayda 7 olur. Eğer üçüncü

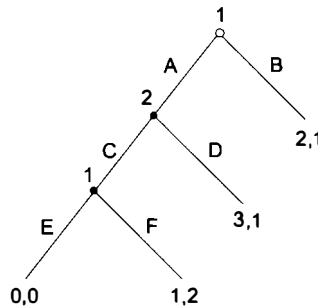
aşamada etkin olmayan karma strateji dengesi olursa, 2. oyuncu  $R$ 'yi oynar ve tekrardan 1. oyuncu da  $R$ 'yi oynar, bu sefer beklediği getiri 8 olur. Dolayısıyla tüm altoyun mükemmel dengelerde, 1.oyuncu  $R$ 'yi oynar.

Fakat yine de 1.oyuncunun  $L$  hareketini oynaması makul olabilir. Eğer kendisi üçüncü aşamada 3.oyuncu ile bir koordinasyonunun olacağını olası görmüyorsa,  $L$  hareketini oynaması mümkündür. Çünkü koordinasyon oyunu sonucunda beklediği getiri  $7/2$ 'dir, bu da  $L$  oynaması durumunda elde edeceği getiriden, 6, daha düşüktür. Fakat 1.oyuncu, 2.oyuncunun üçüncü aşamada etkin bir denge üzerinde koordine olunabileceğini düşünmesinden de çekinmektedir.

Kısaca söylemek istediğimiz şey, altoyun mükemmellik kavramı sadece oyuncuların tüm altoyunlarda Nash dengesini oynadığını varsaymaz. Aynı zamanda tüm oyuncuların aynı dengeyi beklediklerini varsayar. Bunun makul olup olmaması ise herşeyden önce bir dengenin oluşma sebebi hakkındaki düşünceye bağlıdır.

Diğer yandan incelediğimiz bazı durumlar bir altoyun mükemmel dengenin durağan durum olduğu yorumuna uymamaktadır. Bazı durumlarda alternatif bir yorum daha açıklayıcı olabilir: Her oyuncu optimal stratejisini diğer oyuncuların tercihlerini biliyorken, en iyi hareketlerinden türetir. Gerçekte bu yorum da problemlidir. Şimdi bu yorumda ortaya çıkan problemi tartışalım.

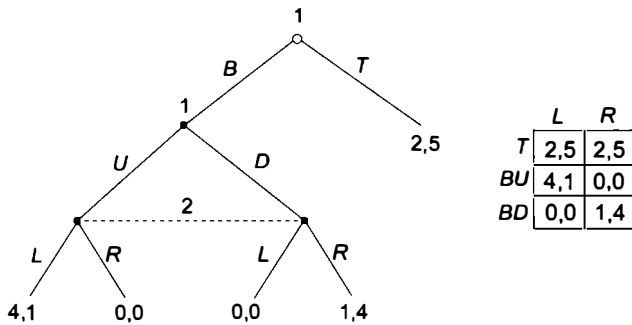
Şekil 3.44'de verilen oyuna bir bakalım. Bu oyunda 1.oyuncu, 2.oyuncudan hem daha önce hem de daha sonra hareket etmektedir. Oyunda 1.oyuncunun (B, F) ve 2.oyuncunun C hareketini oynadığı bir tek altoyun mükemmel denge vardır. 2.oyuncunun oyunu nasıl analiz ettiğine bir bakalım. Eğer oyunun başlangıcında 1.oyuncunun tek bir rasyonel hareketinin B olduğunu düşünüyorsa, ve sonra 1.oyuncunun A hareketini seçtiğini görürse bundan ne çıkarılmalıdır? Bir şeylerin yanlış gittiğini düşünmüş olmalıdır. Belki 1.oyuncu bir hata yaptı veya 1.oyuncunun tercihlerini yanlış anladı veya 1.oyuncu rasyonel değil. Eğer 1.oyuncunun basit bir şekilde hata yaptığına ikna olursa oyunun kalanını yorumlama biçimi değişmeyecektir. Fakat eğer 1.oyuncunun motivasyonunun kendisinin düşündüğünden farklı olduğunu düşünürse, oyunun kalanını tamamen yeniden düşünecektir.



Şekil 3.44

### 3.11 İleriye Doğru Çıkarsama

Şekil 3.45’de hem genişleyen-biçimde hem de stratejik-biçimde verilen oyuna bakalım. Oyunda Şaizer (1.oyuncu) ve Alper (2.oyuncu) birlikte oynamaktadırlar. Bu oyunda her karar noktası, bir altoyunun bir kökü olarak düşünülebilir. Bu yüzden geriye doğru çıkarsamanın altoyun mükemmellikten öte bir anlamı yoktur. Çünkü (2, 5) sonucu (yani Şaizer’in T hareketini oynadığı ve altoyunda (D, R)’nin oynandığı denge durumu) altoyun mükemmel olmasından dolayı, geriye doğru çıkarsama bu dengeyi dışlayamaz.

**Şekil 3.45**

191

Özetlersek oyunun kendisini gerçekleştiren bir değerlendirmeye sahip olması için, rakiplerinin gelecekteki rasyonel davranışlarından çıkarılan çıkarsamalarla tutarlı olmasının yanında (geriye doğru çıkarsama), rakiplerinin geçmişteki rasyonel davranışlarından çıkan çıkarsamalarıyla da, yani *ileriye doğru çıkarsama* mantığı ile de tutarlı olması gerekir. İleriye doğru çıkarsama kavramı, bir oyuncunun önceki hareketlerinden gelecekte nasıl oynayacağına dair diğer oyuncuların çıkarsamalarda bulunmasıdır. Bu yaklaşım ilk defa Kohlberg ve Mertens (1986) tarafından ileri sürüldü. İleriye doğru çıkarsama için bir örnek daha verelim.

### Örnek 3.15

Bu örnek de daha önce Şekil 3.37’de verdiğimiz Cinsiyetler Savaşı oyunudur. Bu oyunun stratejik-biçimi Tablo 3.10’da verilmektedir.

|              | <i>M</i> | <i>P</i> |
|--------------|----------|----------|
| <i>kitap</i> | 2, 2     | 2, 2     |
| <i>M</i>     | 3, 1     | 0, 0     |
| <i>P</i>     | 0, 0     | 1, 3     |

**Tablo 3.10**

Stratejik biçimde de görülebileceği gibi, 1.oyuncunun *P* stratejisi, *kitap* hareketine kesin mahkumdur. Eğer 1.oyuncunun *P* hareketi elenirse, bu durumda 2.oyuncunun *P* hareketi de zayıf mahkum olduğundan elenir. Sonuçta 1.oyuncunun *kitap* hareketi, *M* tarafından mahkum edilir. Dolayısıyla denge (*M*, *M*)’de oluşur.

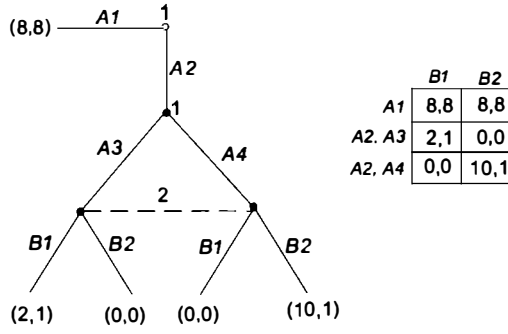
Genişleyen-biçimli bu oyunda elemeler dizisi şu sonucu elde etmemize imkan verir. 2.oyuncu eğer 1.oyuncunun *kitap* hareketini seçmediğini bilirse bu ancak onun ileride *M*’yi oynamayı düşündüğünü düşünmesine neden olacaktır. Dolayısıyla 2.oyuncu da *M* hareketini seçmelidir. Bu da ileriye doğru çıkarsama mantığıdır.

İleriye doğru çıkarsama yaklaşımı ile geriye doğru çıkarsama yaklaşımlarını karşılaştıralım. Bunu bir örnek üzerinden tartışalım.

### Örnek 3.16

Şekil 3.46’de verilen oyunda 1.oyuncu ilk önce hareket etmektedir. Eğer *A1* hareketini seçerse oyun biter fakat *A2* hareketini seçerse oyun devam eder. Daha sonra yine 1.oyuncu hareket eder (*A3* veya *A4* hareketlerini seçiyor) ve 2.oyuncu kendi hareketini, 1.oyuncunun *A3* veya *A4* hareketinden hangisini seçtiğini bilmeden seçer. Yani 2.oyuncu 1.oyuncunun *A2* hareketini seçtiğini görüyor fakat *A3* veya *A4* hareketinden hangisini seçtiğini görememektedir.

Oyunun stratejik-gösteriminden görülebileceği gibi iki tane Nash dengesi vardır: (*A1*, *B1*) ve (*A2*, *A4*, *B2*). İlk denge, yani (*A1*, *B1*), genişleyen-biçimli gösterim üzerinden bakıldığında geriye doğru çıkarsama testinden geçer, bu yüzden bu oyunun Nash dengesidir.



Şekil 3.46

Şimdi neden ilk dengenin, (A1, B1), geriye doğru çıkarsama ile elde edildiğine bakalım. Bunun için oyunun en sonundan yani 2.oyuncunun kendisine hareket sırası geldiğinde daha önce ne olduğundan bağımsız ne seçtiğine bakmamız gerekir. Bu noktada 2.oyuncunun seçimi (geçmişteki hareketlere dair herhangi bir bilgi olmadan) olan B1 ve B2 hareketleri 2.oyuncu için eşit şekilde makul gözükten stratejilerdir çünkü 2.oyuncu mahkum stratejiye sahip değildir. Eğer 2.oyuncu bilgi kümesinin sol tarafında ise B1 hareketini oynamayı tercih eder. Fakat eğer kendi bilgi kümesinin sağ tarafında ise B2 hareketini oynar.

Fakat acaba bu bilgi kümesinde 1.oyuncunun fayda düzeyleri 2.oyuncuya 1.oyuncunun bu bilgi kümesinde hangi hareketi oynayacağı hakkında bir bilgi sunar mı? Cevap hayır. Çünkü 1.oyuncu da mahkum bir stratejiye sahip değildir. Eğer 1.oyuncu 2.oyuncunun B1 hareketini oynayacağını düşünse, o da A3 hareketini oynar; eğer B2 hareketini oynayacağını düşünse o da A4 hareketini oynar. Bu yüzden her iki oyuncu da sağ veya sol karar noktalarının hangisinde olduğuna dair bir bilgiye sahip değildir. Yani herhangi bir karar noktasında olma ihtimali aynıdır. Bu yüzden 2.oyuncu karma strateji izleyebilir. Yani B1 ve B2 hareketlerini 1/2 olasılıkla rassallaştırır.

Dengede 1.oyuncu bu davranışı tahmin eder ve şöyle düşünür "eğer ben A1 hareketini oynarsam, garanti bir şekilde 8 alırım aksi takdirde, (A2, A3) strateji profili ortalamada bana  $1 (= \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 0)$  kazandırırken, (A2, A4) kombinasyonu ortalamada bana  $5 (= \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 10)$  birim fayda kazandırır. Bu durumda A1 hareketini seçerim". Bu denge oyunun geriye doğru çıkarsama ile ortaya çıkan tek Nash dengesidir.

Aynı oyun için ileriye doğru çıkarsama metodunu kullanalım. Burada geriye doğru çıkarsama kavramının dikkate almadığı bir soru sorarak başlayalım: Eğer 1.oyuncu A2 hareketini oynadıysa sonraki karar noktasında neden A3 oynamayı düşünsün?

1. oyuncunun A3 hareketini oynamaktan dolayı elde edeceği en yüksek kazanç 2 birimdir, dolayısıyla rasyonel bir oyuncu olan 1. oyuncu A1 yerine A3 hareketini hiç bir zaman tercih etmez. Bu yüzden 1.oyuncunun A1 hareketini oynamak

yerine A2 hareketini oynamasının temel mantığı ileride A4 oynayarak A1'den daha yüksek fayda elde etmektir. Bu fayda düzeyi 10'dur. Bu durumda 2.oyuncu 1.oyuncunun A2 hareketini oynamasını 1.oyuncunun A4 hareketini oynamak istediği şeklinde düşünür ve dolayısıyla kendisinin en iyi tepkisi B2 olur.

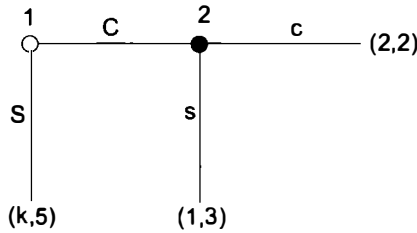
Bu şekilde ileriye doğru çıkarsama, geriye doğru çıkarsamanın iddia ettiği dengenin tersine dengenin (A2, A4, B2) olduğunu iddia eder. Bu farklılık her iki yaklaşımın ardındaki mantık farklılığından kaynaklanır. Geriye doğru çıkarsamanın ardındaki temel mantıkta oyunun son bilgi kümesindeki fayda düzeylerinden hareketle ne olacağına bakarak geriye doğru gidilerek karar vermek söz konusu iken, ileriye doğru çıkarsama mantığında daha önceki bilgi kümelerindeki fayda düzeylerini dikkate alarak gelecekteki hareketleri tahmin etmek vardır.

## Sorular

1. Aşağıdaki soruları cevaplandırınız:

- Mahkumlar çıkmazı probleminde birinci mahkum önce hareket etseydi (yani kararını 2. oyuncudan önce açıklasaydı), sonuç değişir miydi?
- “Dinamik bir oyunda ilk hareket eden oyuncu mutlaka kazanır.” Bu önerme doğru mudur? Cevabınızı örnek bir oyunla destekleyin.

2. Aşağıda verilen genişleyen biçimli oyunu düşünelim.



- $k = 1$  olduğunu varsaydığımızda, Nash dengelerini ve altoyun mükemmel Nash dengeleri bulunuz.
  - S hareketinin altoyun mükemmel Nash dengesi olması için  $k$  parametresi hangi aralıkta olmalıdır?
  - (C,c) tek Nash dengesi olması için  $k$  hangi aralıkta olmalıdır?
3. Ahmet ve Barış sırayla sayı seçiyorlar. İlk Ahmet'in seçtiği bu oyunda sırası gelen oyuncu 1 ile 10 arasındaki sayılardan birini söyleyebiliyor. Oyun boyunca seçilen rakamlar toplanıyor ve bu toplam 99'u geçince oyun sona eriyor. Aşağıda oyunun iki versiyonu veriliyor. Soruları bu ilk versiyon için de yanıtlayın. (i) Toplamı tam olarak 100'e eşit hale getiren oyuncu kazanır ve (ii) Söylediği sayıyla toplamın 99'u aşmasına neden olan oyuncu kaybeder.
- Oyunu kim kazanır?
  - İki oyuncu için de optimal stratejileri belirtin
4. İki ordu (1. ve 2. ordu) birbiri ile savaşmaktadır. 2. ordunun bir müfrezesi tarafından tutulan bir ada için savaşıyorlar. 1. ordunun  $K$  adet, 2. ordunun ise  $L$  adet müfrezesi var. Adanın bir ordunun kontrolünde olduğu her seferde diğer ordu saldırabiliyor. Saldırı sonucunda genel kural olarak; adadaki müfrezeler ve saldıran ordunun bir müfrezesi yok oluyor, saldıran taraf adayı

alıyor ve eğer kaldıysa adayı bir müfrezeyle kontrolü altına alıyor. Her iki ordunun kumandanı da ellerinde kalan müfreze sayısı ile ilgileniyor ve adayı elde tutmaya da bir müfrezeden fazla ikiden az değer biçiyor. Bir saldırı sonucu iki ordu da müfrezesiz kalırsa iki kumandanın da fayda düzeyi 0 oluyor. Bu durumu genişleyen-biçimli bir oyun olarak inceleyin ve altoyun mükemmel denge kavramından yararlanarak, kazananı  $K$  ve  $L$ 'nin bir fonksiyonu olarak belirleyin.

5. Aşağıdaki gibi 2 oyunculu statik bir oyun vardır:

|   | A   | B   | C   | D   |
|---|-----|-----|-----|-----|
| A | 3,1 | 0,0 | 0,0 | 5,0 |
| B | 0,0 | 1,3 | 0,0 | 0,0 |
| C | 0,0 | 0,0 | 2,2 | 0,0 |
| D | 0,0 | 0,5 | 0,0 | 4,4 |

- Oyundaki tüm pür-strateji Nash dengelerini bulunuz.
  - Oyunun 2 kere oynandığını varsayınız. İlk aşamada (D,d) oynanırsa pür-strateji altoyun dengesi nasıl oluşur?
6. Bir oy verme oyununda üç oyuncu (A, B ve C) üç alternatif (1, 2 ve 3) arasında seçim yapıyor. B seçeneği statükoya tekabül ediyor, A ve C ise karşı alternatiflerdir. İlk aşamada oyuncular B'nin karşısında A ve C'den hangisinin alternatif olarak sunulacağına karar veriyor. İlk seçimi kazanan alternatifle B alternatifi arasındaki seçim ikinci turda yapılıyor. Her iki turda da oy verme işlemi aynı anda yapılıyor. Oyuncular için önemli olan sadece en sonda hangi seçeneğin kazandığı, oraya varıncaya kadar hangi oy dizisinin gerçekleştiğiyle ilgilenmiyorlar. Oyundaki fayda düzeyleri

$$u_1(A) = u_2(B) = u_3(C) = 2$$

$$u_1(B) = u_2(C) = u_3(A) = 1$$

$$u_1(C) = u_2(A) = u_3(B) = 0$$

şeklinde veriliyor.

- Oyuncular her aşamada oyun sonunda kazanmasını istedikleri alternatif için oy kullanırsa sonuç ne olur?
- Zayıf baskınlık ile hiçbir stratejinin elenemeyeceği şartı eklendiğinde altoyun kusursuz dengenin sonucunu bulun. Domine edilen stratejilere izin verilirse neyin değiştiğini belirtin.

7. İki ülkenin, A ve B, olduğu bir durumda sadece B ülkesinde tüketilen bir ürün düşünelim. İki ülkedeki firmaların toplam üretim miktarı  $Q$  ve ters talep fonksiyonu  $p = p(Q)$  olsun. Burada  $c$  sabit marjinal maliyeti ve  $q_m$  ise tekel çıktı düzeyini gösterebilir.

- a) Ürünün sadece A ülkesinde üretildiğini varsayalım. Bu ülkede  $n$  ( $> 1$ ) sayıda firma Cournot tarzı rekabet halinde. A ülkesindeki hükümetin amacının ülkesindeki firmaların kârları ile kendi gelirinin toplamını maksimize etmek olduğunu hesaba katarak, bu hükümet için birim başına ihracat vergisini

$$\frac{-p'(q_m)(n-1)q_m}{n}$$

olarak belirlemeyi optimal politika haline getiren şartları bulun. Sonucu dışsallık üzerinden yorumlayın.

- b) Şimdi her ülkede birer üretici olduğunu düşünelim. Oyun iki periyotludur. İlk periyotta A ülkesinin hükümeti birim başına bir ihracat vergisi/teşviği belirliyor ve ikinci periyotta hükümetin seçimini gözlemleyen firmalar aynı anda üretecekleri miktarlara karar veriyorlar. Cournot tepki eğrilerinin aşağı eğimli olduklarını ve A ülkesindeki firmanın tepki eğrisinin daha dik olduğu tek bir noktada ( $q_a, q_b$ ) kesiştiklerini kabul edelim. Buna göre optimal olanın ihracat teşviği olduğunu gösterin.

8. Boeing firması yeni bir ticari jet uçağı geliştirme sürecinde önde bulunuyor. Airbus ise bu alanda Boeing'le rekabete girip girmemeyi değerlendiriyor. Airbus bu özel piyasaya girmezse Boeing tekel olacak ve 1 milyar dolar kâr elde edecek. Eğer Airbus rakip bir uçak üretirse Boeing firması bunu sakince kabullenmekle bir fiyat savaşı başlatmak arasında kalıyor. Barışçı rekabet durumunda iki tarafın da kârı 300 milyon dolar olurken fiyat savaşı iki firmanın da 100'er milyon dolar zarar etmesine sebep oluyor; uçak fiyatı o kadar düşüyor ki iki firma da geliştirme maliyetini karşılayamaz hale geliyor. Bu oyunun genişleyen biçimini çizin. Geriye doğru çıkarsama dengesini bulun ve firmaların denge stratejilerini belirtin.

9. Statik ve iki kişilik  $G$  oyununda  $S_1$  ve  $S_2$  pür strateji kümelerini,  $u_1$  ve  $u_2$  ise fayda fonksiyonlarını veriyor.  $G$  oyununun tek bir Nash dengesinin ( $s'$ ) olduğunu ve  $s'$  profilinin bu dengede mutlak (strict) olduğunu varsayalım.  $G'$  oyununu ise  $G$  oyununun birinci oyuncunun daha önce hareket ettiği bir dinamik versiyonu olarak düşünelim.  $G'$  aşağıdaki adımlardan oluşuyor: (i) 1. oyuncu  $S_1$  içinde  $s_1$ 'i seçiyor. (ii) 2. oyuncu bu seçimi görüyor. (iii) 2. oyuncu  $S_2$  içinde  $s_2$ 'yi seçiyor. (iv) Fayda düzeyleri  $u_1(s_1, s_2)$  ve  $u_2(s_1, s_2)$  şeklinde gerçekleşiyor.

- a)  $G'$  oyununun geriye doğru çıkarsama yöntemiyle tek bir çözümü,  $s''$ , olduğu varsayımıyla aşağıdaki şekilde bir "ilk hareket eden avantajı"nın

var olduğunu gösterin.

$$u_1(s'') \geq u_1(s')$$

- b) Önceki kısımlara ek olarak  $G$  oyununda sürekli en iyi tepki fonksiyonları olduğunu kabul edersek, mutlak "ilk hareket eden avantajı" için gereken şartları bulun.

$$u_1(s'') > u_1(s')$$

10. Tam bilgili dinamik bir  $G$  oyununda  $s$ 'nin bir strateji profili olduğunu düşünelim; burada  $P(h) = i$ ,  $si(h) = a$ ,  $a' \in A(h)$  ve  $a' \neq a$  olsun.  $G$  oyunundan bazı hareket dizileri ( $h'$ ) için  $(h, a', h')$  biçimdeki tüm tarihlerin silinmesiyle oluşan  $G'$  oyununu düşünelim ve  $G'$  oyununda  $s$  tarafından tetiklenen profile de  $s'$  diyelim. Eğer  $s$  profili  $G$ 'nin altoyun mükemmel dengesiye  $s'$  profilinin de  $G'$  oyununun altoyun mükemmel dengesi olduğunu gösterin.
11. Bir piyasada tekel olan 1. firma ile potansiyel girişimci 2. firma arasında bir oyun düşünün. 2. firmanın piyasaya girmek için geri dönüşsüz bir şekilde katlanması gereken bir  $F > 0$  maliyeti bulunuyor. Piyasa talebi  $p(q_1, q_2) = 16 - (q_1 + q_2)$  şeklinde veriliyor. Oyunda karar süreci şöyle işliyor: Başlangıçta 1. firma üreteceği miktarı,  $q_1$ , seçiyor. 2. firma bu seçimi gözlemledikten sonra piyasaya girip girmemeye karar veriyor. Eğer girmeyi seçerse devamında üreteceği miktarı,  $q_2$ , belirliyor. Eğer dışarıda kalmayı seçerse  $q_2 = 0$  oluyor ve oyun sona eriyor. 1. oyuncu için kâr toplam gelire eşit, 2. oyuncu için eğer girmeyi seçerse buna ek olarak sabit maliyet olarak  $F$  var.
- a) Hesaplama yapmaksızın oyunun sonucunun nasıl belirlendiğini sözel olarak açıklayınız.
- b) Üretilen miktarlar bakımından  $F = 1/2$ ,  $F = 5$  ve  $F = 20$  değerlerine göre üç farklı çözüm oluşacağını gösteriniz.
- c) Oyunun değişik bir versiyonunu düşünelim: Bu sefer öncelikle 2. firma piyasaya girip girmemeye karar veriyor ve 1. firma bunu gözlemliyor. Daha sonra iki firma üretecekleri miktarı aynı anda seçiyor. Bu yeni versiyonda çözümün nasıl oluşacağını yine sözel olarak açıklayınız ve b şıkında verdiğiniz cevabın nasıl değişeceğini belirtiniz.
12. X projesini gerçekleştirmek için iki ortak tarafından çaba (emek) seviyelerini belirlemeye dayalı bir oyun oynandığını düşünelim. 1. ve 2. ortak çaba seviyesini eş anlı olarak seçmektedir. X projesinin toplam kazancı aşağıdaki gibidir,

$$\pi(e_1, e_2) = e_1 + e_2 + e_1 e_2$$

Kişilerin gösterdikleri çabaların maliyeti ise

$$c(e_i) = \frac{1}{2}e_i^2, i = 1, 2$$

1. ve 2. ortak çaba düzeylerini belirledikten sonra kazancı nasıl paylaşacaklarına karar vermek istiyorlar. Bunun için yazı-tura atıyorlar. Tura gelirse 1. ortak paylaşımın nasıl olacağına dair teklif veriyor. 2. ortak kabul ederse 1. ortağın belirlediği gibi paylaşılıyor, reddederse iki ortak sıfır kazanıyor. Yazı gelirse, 2. ortak paylaşımına dair teklif veriyor, birinci ortak kabul ederse 2. ortağın istediği gibi paylaşılıyor. Kabul etmezse iki ortak sıfır kazanıyor. Bu oyundaki tüm alt oyun Nash dengelerini hesaplayınız.
13. Bir firma çevreyi kirletme ya da temiz tutma kararını verecektir. Kirletme seçeneğinin ekstra  $g > 0$  kadar kazancı vardır. Kamusal çevre denetleme kurumu ise kontrol etme ya da kontrol etmeme kararını verecektir. Bu denetimin maliyeti  $c > 0$  kadardır. Eğer firma çevreyi kirletir ve yakalanırsa  $p > g$  kadar ceza ödemek zorundadır. Çevre biriminin kazancı ise  $s - c < 0$  kadardır.
- a) Çevre biriminin denetim kararını vermeden önce firmanın çevreyi kirletip kirletmediğini gözlemlediğini varsayınız. Bu oyunun ağacını çiziniz. Denge nasıl oluşur?
- b) Çevre birimi denetimden önce firmanın çevreyi kirletip kirletmediğini gözlemleyemediğini varsayınız. Oyun ağacını çiziniz. Bu oyunda pür-strateji dengesi var mıdır? Ceza denge durumunu nasıl etkiler?
14. Aşağıdaki gibi bir kazanç matrisine sahip bir oyun vardır:

|   |     |     |
|---|-----|-----|
|   | L   | R   |
| T | 2,2 | 3,1 |
| B | 1,3 | 4,4 |

- a) Tüm Nash dengelerini bulunuz.
- b) Karma strateji Nash dengesinde beklenen kazançlar nedir?
- c) 1. Oyuncunun ilk, 2.oyuncunun daha sonra hareket etmesi şeklinde ardışal (dinamik) oyunu çiziniz.
- d) c şıkkındaki ardışal oyunu normal formda gösteriniz ve c şıkkındaki oyunun pür-strateji dengelerini bulunuz.
- e) d şıkkında bulduğunuz dengelerden hangisi mükemmel dengedir?
15. Bir oyunda 2 oyuncu ve 1 oyun uzmanı vardır. Uzman bozuk parayı atar ve sonucunu 1.oyuncuya gösterir. Para hilelidir ve 80% ihtimalle tura gelmektedir. Bu bilgiyi her iki oyuncu da bilmektedir. 1.oyuncu sonucu gördükten

sonra 2.oyuncuya söyler . 1. oyuncu sadece yazı ya da tura der, başka bir şey söyleme hakkı yoktur. 2. oyuncu sonucu görmeden paranın yazıya da tura geldiğini tahmin etmeye çalışır, ve ardından oyun sonlanır. 2.oyuncu doğru tahmin yapmışsa 1 puan kazanır, aksi durumda kazancı 0 olur. 1.oyuncu , paranın ne geldiğinden bağımsız olarak, 2.oyuncu tura demişse 2 puan, yazı demişse 0 puan kazanır. Buna ek olarak, 1. oyuncu , 2. oyuncuya doğru sonucu söylemişse 1 puan daha kazanır. Oyun ağacını çiziniz. Nash dengesini bulunuz.

16. Aşağıdaki statik oyun iki defa oynanıyor ve birinci oyunun sonucu ikinci oyun başlamadan gözlemleniyor. İskontonun olmadığı bu oyunda birinci aşamada  $(B, R)$ 'nin seçildiği bir altoyun mükemmel dengenin bulunduğunu gösterin.

|   | L   | C   | R   |
|---|-----|-----|-----|
| T | 3,1 | 0,0 | 5,0 |
| M | 2,1 | 1,2 | 3,1 |
| B | 1,2 | 0,1 | 4,4 |

17. Üç firmanın olduğu bir piyasada ters talep fonksiyonu  $p(Q) = a - Q$  şeklindedir, burada  $Q = q_1 + q_2 + q_3$ 'dir. Herhangi bir  $i$  firmasının üretim düzeyini  $q_i$  ile gösterelim. Her firma  $c$  gibi sabit bir marjinal maliyete sahiptir. Firmaların üretim kararları şu şekildedir: (i) 1.firma  $q_1$  kararını veriyor (ii) 2. ve 3. firmalar  $q_1$ 'i gözlemliyorlar ve aynı anda  $q_2$  ve  $q_3$  üretim düzeylerini seçiyorlar. Bu oyunun altoyun mükemmel Nash dengesini bulunuz.
18. Dört firmanın olduğu bir Cournot oyunu düşünelim. Her firmanın miktarı  $q_i$  düzeyinde üretim yapmaktadır, burada  $i = 1, 2, 3, 4$ . Piyasanın talep fonksiyonu şöyledir:

$$P(Q) = a - Q, \text{ burada } Q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$$

Her firma  $c$  gibi sabit bir marjinal maliyete sahiptir. Yani herhangi bir  $i$  firmasının maliyeti  $C_i(q_i) = cq_i$ 'dir. Oyunun zamanlaması: (i) 1. ve 2. firma aynı anda ne kadar üreteceklerine karar veriyorlar (ii) 3. ve 4. firma bu  $q_1$  ve  $q_2$  üretim düzeylerini gördükten sonra  $q_3$  ve  $q_4$  üretim düzeylerini seçmektedirler. Bu durumda altoyun mükemmel Nash dengesini bulunuz.

---

### Eksik Bilgili Statik Oyunlar

---

#### 4.1 Giriş

Bu bölümde Bayesyen oyunlar diye nitelendirilen eksik bilgili oyunları inceleyeceğiz. Nash dengesi kavramının ardındaki temel varsayım, her oyuncunun diğer oyuncuların hareketleri konusunda doğru inançlara sahip olmasıdır. Bunun için de gerekli koşul oyuncuların oyun hakkında tam bilgiye sahip olmasıdır. Fakat oyuncular rakiplerinin tipleri ve fayda fonksiyonları konusunda tam bilgi sahibi olmayabilirler. Eksik bilgili bu tür oyunlarda en az bir oyuncu, diğer bir oyuncunun fayda fonksiyonu konusunda kesin bilgiye sahip değildir. Örneğin firmalar birbirlerinin maliyet ve teknoloji yapılarını bilmeyebilirler; ihaleye katılanlar birbirlerinin ihaleye konu olan mallara verdikleri değerleri bilmeyebilirler; pazarlığa tutuşan insanlar birbirlerinin kafalarındaki değerleri bilmeyebilirler. Bazı durumlarda da bir oyuncu diğer oyuncuların tipi hakkında iyi düzeyde bilgi sahibiyken, diğer oyuncuların kendisi hakkında sahip oldukları bilgiyi iyi derecede bilmeyebilir. Bu bölümde stratejik oyun kavramını oyuncuların birbirleri hakkında eksik bilgiye sahip olduğu Bayesyen oyunlara genelleştireceğiz.

Önce Bayesyen oyunları tanıtağız ve bu oyunların stratejik gösterimini formel olarak ifade edeceğiz. Daha sonra bu tür eksik bilgili statik oyunlarda kullanılan denge kavramı olan Bayesyen Nash dengesini inceleyeceğiz. İlerleyen alt bölümlerde ise Bayesyen oyun uygulamalarını vereceğiz.

#### 4.2 Bayesyen Oyunların Tanımı

Bayesyen oyunları ve bu oyunlarda kullanılan denge kavramı olan Bayesyen Nash dengesini formel olarak tanıtmadan önce, statik bir Bayesyen oyunun stratejik gösterimini ve böyle bir oyunda Bayesyen Nash dengesinden ne kastettiğimizi genel

olarak ifade edelim. Bunu da daha somut bir örnek üzerinden yapalım.

Bunun için de Giriş Oyununun, farklı bir versiyonuna bakalım. Bu oyunda bir firma, içinde tek bir firmanın olduğu bir piyasaya girmek istemektedir. Piyasaya girmek isteyen firmanın önünde iki hareket vardır: *gir* ( $g_1$ ) ve *girme* ( $g_2$ ). Mevcut firmanın önünde de iki hareket opsiyonu vardır: *genişle* ( $G_1$ ) ve *genişleme* ( $G_2$ ), yani mevcut firma ya üretim ölçeğini büyütecektir, ya da aynı düzeyde tutacaktır. Firmalar aynı anda karar veriyorlar, dolayısıyla statik bir oyunla karşı karşıyayız. Firmanın giriş kararı mevcut firmanın genişleyip genişlememesine ve mevcut firmanın genişleme kararı da maliyetlerinin düşük ve yüksek olmasına bağlıdır. Fakat piyasaya girmek isteyen firma mevcut firmanın maliyet yapısını bilmemektedir. Yani eksik bilgi söz konusudur. Dolayısıyla bu oyun eksik bilgili (maliyetler bilinmiyor) statik (aynı anda oynanan) bir oyundur. Farklı maliyetlere göre firmaların faydaları Tablo 4.1'de gösterilmektedir.

|       |  | düşük maliyet |       | yüksek maliyet |                 |
|-------|--|---------------|-------|----------------|-----------------|
|       |  | $G_1$         | $G_2$ | $G_1$          | $G_2$           |
| $g_1$ |  | -1, 2         | 1, 1  | $g_1$          | -1, -1     1, 1 |
| $g_2$ |  | 0, 4          | 0, 3  | $g_2$          | 0, 0     0, 3   |

**Tablo 4.1** Giriş oyununun başka bir versiyonu

Piyasaya girmek isteyen firmanın karar vermek için, mevcut firmanın maliyetine bağlı olarak nasıl oynayacağına dair inançları olmalıdır. Bu da piyasaya girmek isteyen firma açısından belirsizlik altında karar verme durumuna karşılık gelir. Belirsizlik altında karar verme Bayesyen oyunların anahtar kavramdır. Burada iki durumlu bir dünya söz konusudur,  $c_L$  veya  $c_H$  (sırasıyla düşük maliyet ve yüksek maliyet). Girmek isteyen firma  $p$  olasılıkla mevcut firmanın düşük maliyetli,  $c_L$ , ve  $1 - p$  olasılıkla yüksek maliyetli,  $c_H$ , olduğuna inanmaktadır. Yani firma,  $p$  olasılıkla Tablo 4.1'in solundaki tabloda belirtilen oyunu,  $1 - p$  olasılıkla da sağındaki tabloda belirtilen oyunu oynadığını düşünmektedir.

Bu durumu modellemenin bir yolu, oyunu üç oyunculu bir oyun gibi düşünmektir. Girmek isteyen firma ve mevcut firmanın yanında oyuna Doğa dediğimiz üçüncü bir oyuncuyu katarız. Mevcut firmanın tipini yani maliyet düzeyini Doğa'nın belirlediğini ve bunu sadece mevcut firmaya bildirdiğini varsayıyoruz. Mevcut firma kendi tipini gözlemler fakat girmek isteyen firma bunu gözlemleyememesine rağmen mevcut firmanın iki tipe sahip olduğunu ve hangi tipte olabileceği olasılıklarını bilir. Bu olasılıklara *önsel olasılık* diyoruz; bu piyasaya girmek isteyen firmanın henüz kendisine hiçbir bilgi ulaşmadan işin başında oluşturduğu olasılıktır. Yeni bilgi geldiğinde bu olasılıkları günceller, buna *koşullu olasılık* diyoruz. Bu olasılığı da *Bayes kuralı* ile bulduğunu varsayıyoruz. Bunu daha detaylı olarak ilerleyen bölümlerde tartışacağız.

Giren firma açısından, mevcut firma iki tipe sahiptir. Bunlardan birinde Tablo 4.1'in solundaki tablodaki tercihler söz konusuysen, diğerinde sağ tablodaki tercihler söz konusudur. Giren firma, mevcut firmanın tipini bilmediğinden karar

verirken her tip için bir inanç oluşturmalıdır, yani her tipin olma olasılıklarına sahip olmalıdır. Buradan da beklenen faydasını elde eder. Örneğin giren firma *gir* hareketini seçtiğinde, eğer mevcut firma  $p = 2/3$  olasılıkla düşük maliyet tipli ve *genişle* ( $G_1$ ) hareketini seçerse elde edeceği fayda  $-1$ ; fakat eğer mevcut firma  $p = 1/3$  olasılıkla yüksek maliyet tipli ve *genişle* ( $G_1$ ) hareketini seçerse elde edeceği fayda  $-1$  olacaktır. Bu durumda giren firmanın beklenen faydası,  $(2/3)(-1) + (1/3)(-1) = -1$  olur. Her durum için firmaların hesaplanan faydaları Tablo 4.2'de gösterilmektedir.

|       | $(G_1, G_1)$  | $(G_1, G_2)$   | $(G_2, G_1)$   | $(G_2, G_2)$ |
|-------|---------------|----------------|----------------|--------------|
| $g_1$ | $-1, (2, -1)$ | $-1/3, (2, 1)$ | $1/3, (1, -1)$ | $1, (1, 1)$  |
| $g_2$ | $0, (4, 0)$   | $0, (4, 3)$    | $0, (3, 0)$    | $0, (3, 3)$  |

**Tablo 4.2**

Mevcut firmanın strateji profillerinde ilk hareket, mevcut firmanın düşük maliyetliyen seçimini, ikinci hareket ise yüksek maliyetliyen seçimini gösterir. Örneğin,  $(G_1, G_2)$  strateji profili mevcut firma düşük maliyetliyen *genişle* hareketini ( $G_1$ ) ve yüksek maliyetliyen de *genişleme* ( $G_2$ ) hareketini oynadığını göstermektedir. Tablo 4.2'de verilen  $(g_1, (G_1, G_2)) = (-1/3, (2, 1))$  strateji profiline bakalım: Piyasaya giren firma  $g_1$  stratejisini seçtiğinde, mevcut firmanın düşük maliyetli tipte bir firma olması durumunda *genişle* stratejisini ( $G_1$ ) izlediğinde aldığı fayda 2 birim, fakat eğer yüksek maliyetli tipte bir firma ise izlediği stratejinin *genişleme* ( $G_2$ ) olması durumunda aldığı fayda 1 birimdir. Giren firmanın beklenen faydası ise  $-1/3 = (2/3)(-1) + (1/3)(1)$  birimdir. Kısaca firmaların faydaları  $(-1/3, (2, 1))$  şeklinde ifade edilir.

Acaba farklı tiplerdeki mevcut firmanın en iyi tepkisi nedir? Görünen o ki, yüksek maliyetli tipteki firma *genişleme* baskın stratejisine ve düşük maliyetli tipteki firma da *genişle* baskın stratejisine sahiptir. Bu yüzden eğer girmek isteyen firma *gir* tercihinde bulunursa, beklediği fayda  $-1/3$  olacaktır. Eğer dışarıda kalırsa, beklediği fayda 0'dır. Dolayısıyla dengede mevcut firma veri tipte baskın stratejisini seçerken aday firma dışarıda kalmayı seçer. Böylece Nash dengesi (*girme*, (*genişle*, *genişleme*))= $(g_2, (G_1, G_2))$  şeklindedir.

Nash dengesinin daha önce verdiğimiz tanımını kullanarak da aynı dengeyi bulabiliriz. Hiçbir firma bu strateji profilinden sapmayacaktır: Mevcut firmanın  $(G_1, G_2)$  stratejisi veri alındığında, giren firmanın optimal hareketi  $g_2$ 'dir ve giren firmanın hareketinin  $g_2$  olduğu veri alındığında, düşük maliyet tipli firma  $G_1$  hareketini, yüksek maliyetli firma ise  $G_2$  hareketini oynayacaktır. Bir örnek daha verelim.

#### Örnek 4.1



Cinsiyetler Savaşı oyununun farklı bir versiyonuna bakalım. Bu oyunda 1.oyuncu, 2.oyuncunun kendisiyle dışarı çıkmak isteyip istemediğini bilmemektedir. Fakat 2. oyuncu, 1. oyuncunun kendisiyle dışarı çıkmak istediğini bilmektedir.

Bu oyunda 2. oyuncu kendi durumunu bilir yani 1. oyuncuyla çıkmak isteyip istemediğini kendisi bilmektedir. Fakat 1.oyuncu bunu bilmediğinden her duruma olasılık atfeder. 1. oyuncu açısından, 2. oyuncu iki tipe sahiptir. Bunlardan birinde Tablo 4.3'ün solundaki tabloda belirtilen tercihler söz konusu iken, diğerinde sağdaki tabloda belirtilen tercihler söz konusudur. 1. oyuncu, 2. oyuncunun tipini bilmediğinden her tipin olasılıklarına sahip olmalıdır.

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|          | <i>B</i> | <i>S</i> |          | <i>B</i> | <i>S</i> |
| <i>B</i> | 2, 1     | 0, 0     | <i>B</i> | 2, 0     | 0, 2     |
| <i>S</i> | 0, 0     | 1, 2     | <i>S</i> | 0, 1     | 1, 0     |

**Tablo 4.3**

1.oyuncu buradan beklenen faydasını türetir. Tüm strateji profillerini gösteren Tablo 4.4'e bakalım. Örneğin  $(B, (B, S)) = (1, (1, 2))$  strateji profili şu anlama gelmektedir: 1. oyuncu *B* hareketini oynadığında, 2. oyuncunun dışarı çıkma tipinde olması durumunda tercihi *B* iken aldığı fayda 1, çıkmama tipinde olması durumundaki tercihi *S* iken aldığı fayda ise 2'dir. Yani 2. oyuncunun  $(B, S)$  profilinde birinci hareketi çıkma isteğindeki hareketi, ikinci hareketi ise çıkma isteğinde olmadığındaki hareketidir. Bu durumda 1. oyuncunun her iki tipe atfettiği olasılık eşitse beklenen faydası ise 1'dir,  $(1 = (1/2)(2) + (1/2)(0))$ .

|          |           |             |             |           |
|----------|-----------|-------------|-------------|-----------|
|          | $(B, B)$  | $(B, S)$    | $(S, B)$    | $(S, S)$  |
| <i>B</i> | 2, (1, 0) | 1, (1, 2)   | 1, (0, 0)   | 0, (0, 2) |
| <i>S</i> | 0, (0, 1) | 1/2, (0, 0) | 1/2, (2, 1) | 1, (2, 0) |

**Tablo 4.4**

Burada pür Nash dengesi üçlü bir hareket kombinasyonunu içerir; biri 1. oyuncu için ve her biri 2. oyuncu tipi için olmak üzere iki hareket söz konusudur. Bu hareketlerin özelliği: *i.* 2. oyuncunun iki tipinin hareketleri ve 1. oyuncunun bu tipler hakkındaki inancı veri alındığında, 1. oyuncunun hareketi optimal olmalıdır *ii.* 1. oyuncunun hareketi veri alındığında, 2. oyuncunun her tipinin hareketi optimal olmalıdır.

Diğer bir deyişle, 2. oyuncunun iki tipini ayrı oyuncular olarak düşünüyoruz. 2.oyuncunun her tipinin elde ettiği fayda diğer tipin hareketlerinden bağımsız ve 1. oyuncunun hareketine bağlıdır. Nash dengesinde, 1. oyuncunun hareketi 2. oyuncunun iki tipine de en iyi tepkidir. Burada sorulması gereken soru: 1. oyuncu ile çıkmak istediğini veya çıkmak istemediğini bilen 2. oyuncu her iki durumda da ne yapacağını neden düşünsün? Zaten bunu düşünmeyecektir. Bunu düşünen 1. oyuncudur fakat sadece her iki durumda da 1. oyuncunun nasıl hareket ettiğini görmek istiyoruz.

Bu oyunda Nash dengesi  $(B, (B, S))$  strateji profilidir. 2. oyuncunun  $(B, S)$  hareketleri veri alındığında, 1. oyuncunun optimal hareketi *B*'dir. 1. oyuncunun hareketinin *B* olduğu veri alındığında, çıkmak isteyen tipli 2. oyuncu *B* hareke-

tini, çıkmak istemeyen tipli 2. oyuncu ise  $S$  hareketini oynayacaktır (Tablo 4.4'e bakınız).

Yukarıda verilen örneklerde oyuncuların farklı tiplerde olmalarını mükemmel-olmayan bilgi bağlamında ve bu mükemmel-olmayan bilgiyi de olasılıklar kümesinde tanımlanan inançlarla ifade ettiğimizi gördük. Bunu aşağıda daha detaylı olarak göstereceğiz.

### 4.3 Bayesyen Oyunların Stratejik-Biçimli Gösterimi

Tam bilgili  $n$ -oyunculu bir oyunun stratejik-biçimli gösteriminin şu şekilde ifade edildiğini hatırlayalım:  $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$ , burada  $S_i$ ,  $i$  oyuncusunun strateji uzayı ve  $u_i(s_1, \dots, s_n)$  ise  $i$  oyuncusunun, oyuncular  $(s_1, \dots, s_n)$  stratejilerini seçtiğinde elde ettiği faydadır. Yine daha önce ifade ettiğimiz gibi eş anlı (statik) hareketli tam bilgili bir oyunda bir oyuncunun stratejisi basitçe onun hareketiydi; bu yüzden de şu şekilde ifade edilir,  $G = \{A_1, \dots, A_n; u_1, \dots, u_n\}$ , burada  $A_i$ ,  $i$  oyuncusunun hareket uzayıdır,  $u_i(a_1, \dots, a_n)$  ise  $i$  oyuncusunun, oyuncular  $(a_1, \dots, a_n)$  hareketlerini seçtiğinde elde ettiği faydadır. Eksik bilgili statik bir oyundaki zamanlama ile tam bilgili statik bir oyundaki zamanlama aynıdır. Çünkü hareketler eş anlıdır.

Statik Bayesyen olarak nitelendirilen eksik bilgili statik oyunların stratejik-biçimli gösterimini tanıtalım. Bunun için de ilk adım, her oyuncunun kendi fayda fonksiyonunu bildiği fakat diğer oyuncuların fayda fonksiyonları hakkında eksik bilgiye sahip olduğu yani belirsiz olduğu durumu göstermektir. Herhangi bir  $i$  oyuncusunun olası fayda fonksiyonu  $u_i(a_1, \dots, a_n; t_i)$  ile gösterilir, burada  $t_i$ ,  $i$  oyuncusunun tipi olarak nitelendirilir ve bu tip  $i$  oyuncusunun olası tipler kümesine aittir,  $t_i \in T_i$ . Dolayısıyla  $u_i(a_1, \dots, a_n; t_i)$ , her  $t_i$  tipi için  $i$  oyuncusunun sahip olabileceği farklı bir faydaya karşılık gelir.

Örneğin  $i$  oyuncusunun iki tipe sahip olduğunu düşünelim,  $t_{i1}$  ve  $t_{i2}$ , böylece  $i$  oyuncusunun tip uzayı  $T_i = \{t_{i1}, t_{i2}\}$  ve  $i$  oyuncusunun fayda fonksiyonları  $u_i(a_1, \dots, a_n; t_{i1})$  ve  $u_i(a_1, \dots, a_n; t_{i2})$  olur. Her farklı tip için farklı fayda düzeylerinin varlığı, aynı zamanda her farklı tipin farklı hareketlere sahip olabileceğini ima eder. Örneğin  $i$  oyuncusunun  $q$  olasılıkla (bu aynı zamanda oyuncunun 1. tipte olma olasılığıdır) olası hareketleri  $\{a, b\}$  ve  $(1 - q)$  olasılıkla (2. tipte olma olasılığıdır)  $\{a, b, c\}$  olabilir. Fakat daha genel bir gösterim için yani 1. tipteki  $i$  oyuncusunun önündeki hareketlerin de  $\{a, b, c\}$  olduğunu göstermek istiyorsak yani her iki tipin önündeki hareketleri aynı hareket kümesi ile göstermek istiyorsak, bu durumda 1. tipteki oyuncunun  $c$  hareketine karşılık gelen fayda düzeyinin eksi sonsuz olduğunu söyleyerek bunu yapabiliriz. Çünkü bu durumda fiili olarak  $c$  hareketinin seçilmeyeceğini garanti altına alabiliriz.

Herhangi bir  $i$  oyuncusu kendi faydasını bilir. Bu durum oyuncu kendi tipini bilir demekle eşdeğerdir. Yine benzer olarak  $i$  oyuncusunun diğer oyuncuların fayda düzeyleri hakkında kesin bilgiye sahip olmaması  $i$  oyuncusunun diğer oyuncuların tipleri hakkında kesin bilgiye sahip olmaması anlamına gelir. Diğer

oyuncuların tipleri ise  $t_{-i} = (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n)$  ile gösterilir. Tüm olası  $t_{-i}$  tipler kümesini  $T_{-i}$  ile ve herhangi bir  $i$  oyuncusunun kendi  $t_i$  tipini bildiği kabul edildiğinde, diğer oyuncuların  $t_{-i}$  tipleri hakkında oluşturduğu inançları ise  $p_i(t_{-i} | t_i)$  olasılığı ile gösteriyoruz.

Diğer yandan oyuncuların tiplerinin birbirinden bağımsız olduğunu varsayıyoruz. Yani  $p_i(t_{-i} | t_i)$  olasılığı  $i$  oyuncusunun tipine,  $t_i$ , bağlı değildir. Böylece  $i$  oyuncusunun inancını basitçe  $p_i(t_{-i})$  diye yazabiliriz. Fakat bazı durumlarda oyuncuların tipleri birbirine bağlı olabilir; buna imkan verebilmek için de  $p_i(t_{-i} | t_i)$  şeklinde yazmaya devam edeceğiz. Tüm bunları yani tipleri ve inançları tam bilgili statik bir oyunun stratejik-biçimli gösteriminin temel unsurlarıyla birleştirdiğimizde statik Bayesyen oyun gösterimini elde ederiz.

**Tanım 4.1** *Herhangi bir  $n$ -oyunculu statik Bayesyen oyunun stratejik-biçimli gösterimi, oyuncuların hareket uzayları,  $A_1, \dots, A_n$ , oyuncuların tip uzayları,  $T_1, \dots, T_n$ , oyuncuların inançları,  $p_1, \dots, p_n$ , ve fayda fonksiyonları,  $u_1, \dots, u_n$ , ile birlikte tanımlanır: Herhangi bir  $i$  oyuncusu kendi  $t_i$  tipini özel olarak bilir ve bu tip olası tipler kümesinin bir elemanıdır ( $t_i \in T_i$ ). Böylece  $i$  oyuncusunun fayda fonksiyonu  $u_i(a_1, \dots, a_n; t_i)$  şeklinde ifade edilir. Bu  $i$  oyuncusunun  $p_i(t_{-i} | t_i)$  inancı, kendi  $t_i$  tipi veri alındığında diğer  $n - 1$  oyuncunun  $t_{-i} \in T_{-i}$  olası tipleri hakkındaki belirsizliğini yansıtır. Kısaca bu oyunu  $G = \{A_1, \dots, A_n; T_1, \dots, T_n; p_1, \dots, p_n; u_1, \dots, u_n\}$  şeklinde yazarız.*

Harsanyi (1967) statik bir oyunun zamanlamasını şöyle tanımlar: (1) Doğa  $i$  oyuncusu için  $T_i$  olası tipler kümesinden bir  $t_i$  tipi çeker (2) Bu tip sadece  $i$  oyuncusuna gösterilir diğer oyuncular bu bilgiye sahip değildir (3) Oyuncular aynı anda hareketlerini seçerler, yani her  $i$  oyuncusu olası  $A_i$  kümesinden  $a_i$  hareketini seçer ve sonra (4) Fayda düzeyleri,  $u_i(a_1, \dots, a_n; t_i)$ , belirlenir. (1). ve (2). adımlardaki hareketlerin Doğa'nın yaptığı hayali hareketler olduğunu düşünürsek eksik bilgili oyun mükemmel-olmayan bilgili oyuna dönüştürülür. Mükemmel-olmayan bilgili oyunla kastedilenin de oyundaki herhangi bir harekette, sırası gelen oyuncunun o ana kadarki oyunun tarihini bilmemesi olduğunu hatırlayalım. Burada, Doğa  $i$  oyuncusunun tipini  $i$  oyuncusuna ifşa ederken bunu  $j$  bilmemektedir (2. adımda), bu yüzden  $j$  oyuncusu (3). adımdaki hareketlerin seçildiği sırada oyunun tam tarihini bilmemektedir.

Statik Bayesyen oyunların stratejik-biçimli gösterimi tartışmasını tamamlamak için iki teknik noktadan daha belirtilmesi gerekir. Bu noktalardan birincisi,  $i$  oyuncusunun sadece kendi fayda düzeyi hakkında değil diğer oyuncunun fayda düzeyi hakkında da özel bilgiye sahip olduğu oyunların varlığıdır. Örneğin Cournot modelinde firmaların maliyetleri simetrik ve ortak bilgiye tabidir, fakat bir firma piyasadaki talep düzeyini bilirken diğerinin bunu bilmemesi söz konusu olabilir. Talep düzeyi her iki oyuncunun da fayda düzeylerini etkiliyorsa, bunu bilen firmanın tipi bunu bilmeyen firmanın fayda fonksiyonuna girer.  $n$ -oyunculu bir oyunda bu durumu ifade etmek için,  $i$  oyuncusunun faydasının sadece  $(a_1, \dots, a_n)$  hareketlerine bağlı olmasına aynı zamanda tüm tiplere  $(t_1, \dots, t_n)$  bağlı olduğuna imkan

vererek gösteririz. Böylece fayda fonksiyonu  $u_i(a_1, \dots, a_n; t_1, \dots, t_n)$  şeklinde ifade edilir.

İkinci nokta ise oyuncuların  $p_i(t_{-i} | t_i)$  inançları ile ilgilidir. Statik Bayesyen oyunun zamanlamasındaki birinci adımda Doğa'nın bir  $t = (t_1, \dots, t_n)$  tip vektörünü seçtiğini söylemiştik. Bunun bir önsel olasılıkla belirlendiğini varsayıyoruz,  $p(t)$ . Fakat Doğa  $t_i$  tipini  $i$  oyuncusuna ifşa ettiği zaman,  $i$  oyuncusu  $p_i(t_{-i} | t_i)$  inancını Bayes kuralıyla hesaplayarak günceller.

Bunun için de Bayes kuralının veya Bayesyen güncellenmenin ne olduğunu kısaca açıklayalım. Bayesyen güncelleme, insanların bir oyunu oynarken sürekli bir öğrenme içinde olmalarıdır. İnsanlar genellikle zamanla ortaya çıkan olayların yardımıyla bazı olayların daha çok veya daha az olasılıkla gerçekleştiğini düşünürler. Bu olasılıktaki değişimi Bayes kuralıyla ifade ederiz.

Sezgisel olarak, Bayes kuralı birinin  $A$  olayının gerçekleşmesine dair inançlarının  $B$ 'yi gözlemledikten sonra güncellenmesini ifade eder. Daha formel olarak ifade edersek, Bayes kuralı  $A$  ve  $B$  gibi iki olayın koşullu ve marjinal olasılıklarını birbiri ile ilişkilendirir:

$$p(A | B) = \frac{p(B | A)p(A)}{p(B)} \quad (4.1)$$

Bayes kuralında her terimin geleneksel bir adı vardır. Yani  $p(A)$ ,  $A$  olayının önsel veya marjinal olasılığıdır. Önseldir çünkü  $B$  hakkındaki herhangi bir ön bilgiyi dikkate almaz;  $p(A | B)$ ,  $B$  veri iken (yani  $B$  olayının gerçekleştiğini öğrendikten sonra)  $A$  olayının koşullu olasılığıdır. Koşullu olasılık, *posteriori olasılık* olarak da bilinir çünkü  $B$ 'nin spesifik değerlerine bağlı olarak bulunur; ve  $p(B | A)$  da  $A$  veri iken  $B$ 'nin koşullu olasılığıdır;  $p(B)$  ise  $B$ 'nin önsel veya marjinal olasılığıdır.

(4.1)'de ifade edilen Bayes kuralını koşullu olasılık tanımından hareketle ispatlayabiliriz.  $B$  olayı veriyken  $A$ 'nın gerçekleşme olasılığı şöyledir:

$$p(A | B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

$A$  olayı veriyken  $B$ 'nin gerçekleşme olasılığı aşağıdaki gibidir:

$$p(B | A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Bu iki denklemdeki  $p(A \cap B)$  ortak terimden hareketle aşağıdaki eşitliği elde ederiz,

$$p(A | B)p(B) = p(A \cap B) = p(B | A)p(A).$$

Her iki tarafı  $p(B)$ 'ye bölersek:



$$p(A | B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B | A)p(A)}{p(B)}.$$

Sonuç olarak (4.1)'de verilen Bayes kuralını türetmiş oluruz.

Diğer yandan Bayes kuralını alternatif bir şekilde de ifade edebiliriz. Toplam olasılık kuralından hareketle  $B$  olayının önsel olasılığını,  $p(B)$ , şöyledir:

$$p(B) = p(A \cap B) + p(A^c \cap B) = p(B | A)p(A) + p(B | A^c)p(A^c),$$

burada  $A^c$ ,  $A$ 'nın tamamlayıcı olayıdır. Böylece Bayes kuralı tekrar aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$p(A | B) = \frac{p(B | A)p(A)}{p(B | A)p(A) + p(B | A^c)p(A^c)}.$$

Bu tanıımı daha genel ifade edebiliriz,

$$p(A_i | B) = \frac{p(B | A_i)p(A_i)}{\sum_j p(B | A_j)p(A_j)}, \quad (4.2)$$

burada  $\{A_i\}$  olay uzayının bölmeleridir ve herhangi bir  $A_i$  için geçerlidir. Dikkat edilirse (4.2) ifadesi, (4.1) ifadesinin aynısıdır.

Şimdi yukarıda tipler üzerinde yaptığımız tartışmaya tekrar dönelim. Bayes kuralını bunun için kullandığımızda şunu elde ederiz,

$$p_i(t_{-i} | t_i) = \frac{p_i(t_{-i}, t_i)}{p_i(t_i)} = \frac{p_i(t_{-i}, t_i)}{\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p_i(t_{-i}, t_i)}. \quad (4.3)$$

Bu matematiksel ifadenin bize söylediği temel düşünce  $i$  oyuncusunun, tipine bağlı olarak diğer oyuncuların tipleri hakkında sahip olduğu inançları (diğer oyuncuların hangi tipte oldukları olasılığına dair inançlar),  $p_i(t_{-i} | t_i)$ , bulabileceğimizdir. Bu durumda diğer oyuncular,  $i$  oyuncusunun kendileri hakkındaki inançlarını bilirler. Burada şunu unutmamak gerekir daha önce de ifade edildiği gibi oyuncuların tipleri genelde birbirinden bağımsızdırlar, yani  $p_i(t_{-i})$  inancı (olasılığı)  $i$  oyuncusunun  $t_i$  tipine bağlı değildir. Dolayısıyla  $p_i(t_{-i} | t_i) = p_i(t_{-i})$  diye yazabiliriz.

## 4.4 Bayesyen Nash Dengesi

Daha önce tanımladığımız gibi bir oyuncunun stratejisi tam bir hareket planıdır. Bu plan oyuncunun hareket sırası geldiğinde her olası durumdaki hareket imkanını tanımlar. Statik Bayesyen bir oyun, Doğa'nın oyuncuların tiplerini belirlemesiyle başlar ve  $i$  oyuncusunun pür stratejisi  $i$  oyuncusunun olası tüm tiplerin her biri için belirli bir hareket belirler.

Herhangi bir  $i$  oyuncusunun olası tiplerinin her biri için olası belirli bir hareketin tanımlanması gereksiz gözükebilir. Doğa bir kez belirli bir tip belirlediğinde ve bunu bu oyuncuya ifşa ettiğinde oyuncunun, Doğa'nın diğer bir tipi seçmesi durumunda hangi hareketi seçeceğiyle ilgilenmesine gerek yoktur. Diğer yandan,  $i$

oyuncusu diğer oyuncuların ne yapacağı ile ilgilenir ve diğer oyuncuların ne yapacağı  $i$  oyuncusunun ne yapacağını düşünmelerine bağlı olacağından bu durumla da ilgilenir. Yani bir tip çekildiğinde ne yapacağına karar vermek için  $i$  oyuncusunun  $T_i$  tip uzayındaki diğer tiplerin çekilmesi durumunda ne yapacağını düşünmesi gerekir.

Daha genel olarak ifade edersek, eğer bir oyuncunun diğer tiplerde de nasıl davranacağını belirlemesine imkan vermeseydik, Nash dengesi kavramını Bayesyen oyunlara uygulayamazdık. Bu argüman daha önce verdiğimiz tanımla uyumludur: Dinamik tam bilgili bir oyunda  $i$  oyuncusu için her olası durum için olası bir hareket belirleyen bir stratejiyi tanımlamak gereksiz görülebilirdi fakat eğer bir oyuncunun stratejisinin bazı durumlardaki hareketleri belirlemesine imkan vermeseydik, dinamik oyunlara Nash dengesini uygulayamazdık.

Bayesyen bir oyunda stratejinin tanımını verildiğinde, Bayesyen Nash tanımına geçebiliriz. Tanımın notasyon karmaşıklığına rağmen, merkezi düşünce hem basit hem de tanıdık: Her oyuncunun stratejisi diğer oyuncuların stratejilerine en iyi tepkidir. Yani Bayesyen Nash dengesi basit bir şekilde Bayesyen oyunda Nash dengesidir.

**Tanım 4.2**  $G = \{A_1, \dots, A_n; T_1, \dots, T_n; p_1, \dots, p_n; u_1, \dots, u_n\}$  gibi statik Bayesyen bir oyunda eğer her  $i$  oyuncusunun her  $t_i \in T_i$  tipi için aşağıdaki problemi çözen bir hareket profili,  $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ , varsa bu (pür strateji) Bayesyen Nash dengesidir:

$$\max_{a_i \in A_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} u_i(a_1^*(t_1), \dots, a_{i-1}^*(t_{i-1}), a_i, a_{i+1}^*(t_{i+1}), \dots, a_n^*(t_n)) p_i(t_{-i} | t_i).$$

Sınırlı statik Bayesyen bir oyunda, (yani  $n$  sayıda sınırlı oyuncunun olduğu ve  $(A_1, \dots, A_n)$  ve  $(T_1, \dots, T_n)$  kümelerinin sınırlı olduğu bir oyun) Nash dengesini göstermek mümkündür. Denge muhtemelen karma stratejiler şeklinde olacaktır. Bunun ispatı tam bilgili sınırlı oyunlardaki karma strateji dengesinin ispatına benzerdir. Çünkü tam bilgili bir oyundaki karma strateji Nash dengesi bir açıdan eksik bilgili bir oyundaki pür strateji Bayesyen Nash dengesi olarak yorumlanabilir. Karma stratejinin temel özelliği  $j$  oyuncusunun stratejilerini rassal seçmesi değil,  $i$  oyuncusunun  $j$ 'nin seçimi hakkında belirsiz olmasıdır. Bu belirsizlik rassallaştırmadan veya daha makul olarak (burada olduğu gibi) eksik bilgiden kaynaklanabilir.

## 4.5 Bayesyen Oyun Uygulamaları

### 4.5.1 Asimetrik Bilgi Altında Cournot Rekabeti

Cournot miktar rekabetinin olduğu iki firmalı bir piyasa düşünelim. Bu piyasanın ters talep fonksiyonu  $p(Q) = a - Q$  şeklindedir, burada  $Q = q_1 + q_2$ , iki firmanın piyasadaki toplam üretim düzeyidir ( $q_1$  ve  $q_2$  sırasıyla 1. ve 2. firmanın üretim

düzeyleridir). 1. firmanın maliyet fonksiyonu  $C_1(q) = cq_1$ 'dir. 1. firma kendi maliyet fonksiyonunu bilir. Fakat 2. firmanın maliyet fonksiyonunu tam olarak bilmemektedir. Yani 2. firmanın maliyet fonksiyonu  $\theta$  olasılıkla yüksek maliyetli  $C_2(q_2) = c_H q_2$ ,  $1 - \theta$  olasılıkla da  $C_2(q_2) = c_L q_2$  düşük maliyetlidir, burada  $c_L < c_H$ . Bu oyunda bilgi asimetriktir: 1.firma sadece kendi maliyet yapısını bilirken, 2.firma kendisinin ve 1.firmanın maliyet yapısını bilmektedir. Özetle 2. firmanın tip uzayı  $T_2 = \{c_L, c_H\}$  iken, 1.firmanın tip uzayı  $T_1 = \{c\}$  şeklindedir.

1. firmanın, 2. firmanın maliyet yapısını bilmemesinin gerekçesi, 2. firmanın piyasaya yeni giren bir firma olması veya yeni bir üretim teknolojisi geliştirmesi ile ilişkili olabilir. Tüm bu bilgiler ise ortak bilgidir: 1. firma 2. firmanın daha iyi bir bilgi düzeyine sahip olduğunu bilir ve 2. firma da bunun 1. firma tarafından bulunduğunu bilir, bu ortak bilgi bu şekilde ilerler.

Firmaların hareketleri seçtikleri  $q_1$  ve  $q_2$  üretim miktarlarıdır. İki tipe sahip olduğu için 2. firmanın iki olası maliyet fonksiyonu, yani iki olası kâr fonksiyonu vardır:

$$\begin{aligned}\pi_2(q_1, q_2; c_L) &= [(a - q_1 - q_2) - c_L] q_2, \\ \pi_2(q_1, q_2; c_H) &= [(a - q_1 - q_2) - c_H] q_2.\end{aligned}$$

1. firma ise sadece tek bir kâr fonksiyonuna sahiptir:

$$\pi_1(q_1, q_2; c) = [(a - q_1 - q_2) - c] q_1.$$

Beklenileceği gibi 2. firma marjinal maliyetine bağlı olarak üretim düzeyini seçer. Eğer marjinal maliyeti yüksekse daha düşük bir üretim düzeyinde (düşük marjinal maliyete göre) üretimde bulunur. Bu yüzden 1. firma da 2. firmanın marjinal maliyetine bağlı olarak üretim düzeyini belirleyeceğini düşünür. 2. firmanın üretim maliyetlerine göre üretim tercihlerini  $q_2^*(c_H)$  ve  $q_2^*(c_L)$  olarak gösterelim ve  $q_1^*$  ise 1. firmanın üretim düzeyi olsun. Eğer 2. firmanın üretim maliyeti yüksekse, aşağıdaki optimizasyon probleminin çözümünden,  $q_2^*(c_H)$  değerini buluruz:

$$\max_{q_2} [(a - q_1^* - q_2) - c_H] q_2. \quad (4.4)$$

Yine benzer olarak 2.firmanın üretim maliyeti düşükse,  $q_2^*(c_L)$  optimal üretim değeri aşağıdaki problemin çözümünden elde edilir,

$$\max_{q_2} [(a - q_1^* - q_2) - c_L] q_2. \quad (4.5)$$

Diğer yandan 1. firma ise daha önce belirtildiği gibi 2. firmanın  $\theta$  olasılıkla üretiminin  $q_2^*(c_H)$  olacağını,  $1 - \theta$  olasılıkla da  $q_2^*(c_L)$  olacağını beklemektedir. Yani 1. firmanın optimal üretim düzeyi,  $q_1^*$ , aşağıdaki problemi çözen değerdir:

$$\max_{q_1} \theta [(a - q_1 - q_2^*(c_H)) - c] q_1 + (1 - \theta) [(a - q_1 - q_2^*(c_L)) - c] q_1. \quad (4.6)$$

1. ve 2. firmanın optimizasyon problemlerinin, (4.4), (4.5) ve (4.6), birinci dereceden koşulları sırasıyla şöyledir:

$$q_2^*(c_H) = \frac{a - q_1^* - c_H}{2},$$

$$q_2^*(c_L) = \frac{a - q_1^* - c_L}{2},$$

$$q_1^* = \frac{\theta [(a - q_2^*(c_H)) - c] + (1 - \theta) [(a - q_2^*(c_L)) - c]}{2}.$$

Bu üç birinci dereceden koşul aynı anda çözüldüğünde aşağıdaki üretim düzeylerini buluruz (denge için gerekli koşulların olduğunu varsayıyoruz, yani üretim maliyetleri pozitif üretimi sağlayacak düzeydedir):

$$q_2^*(c_H) = \frac{a - 2c_H + c}{3} + \frac{1 - \theta}{6}(c_H - c_L), \quad (4.7)$$

$$q_2^*(c_L) = \frac{a - 2c_L + c}{3} - \frac{\theta}{6}(c_H - c_L), \quad (4.8)$$

$$q_1^* = \frac{a - 2c + \theta c_H + (1 - \theta)c_L}{3}. \quad (4.9)$$

Böylece eksik bilgili Cournot oyunun çözümü  $q_1^*$ ,  $q_2^*(c_L)$  ve  $q_2^*(c_H)$  şeklindedir. Strateji tanımı gereği, 2. firmanın stratejisi ( $q_2^*(c_L)$ ,  $q_2^*(c_H)$ ) iken, 1. firmanın stratejisi  $q_1^*$ 'dir. 2. firmanın maliyetine bağlı olarak farklı üretim düzeylerini seçeceğini düşünmek kolaydır. Fakat 1. firmanın tek bir miktar düzeyinde üretim yapması, 2. firmanın üretim miktarının maliyetine bağlı olduğunu dikkate almasını gerektirir. Yani eğer denge kavramımız 1. firmanın 2. firmanın stratejisine en iyi tepkisini gerektiriyorsa, bu durumda 2. firmanın stratejisi her bir maliyet tipine bağlı bir çift üretim düzeyi şeklinde olmalıdır; aksi takdirde 1. firma kendi stratejisinin 2. firmanın stratejisine en iyi tepki olduğunu hesaplayamaz.

Şimdi bu sonuçları tam bilgi altındaki, yani her iki firmanın birbirlerinin marjinal maliyetlerini bildiği durumdaki Cournot üretim değerleri ile karşılaştıralım. 1. ve 2. firmanın marjinal maliyetlerinin sırasıyla  $c_1$  ve  $c_2$  olduğunu ve bunun her iki firmanın pozitif üretim yapmasına imkan verdiğini düşünelim. Bu durumda  $i$  firmasının üretim düzeyi  $q_i^* = (a - 2c_i + c_j)/3$  olur. Fakat eksik bilgi altında, bunun tersine,  $q_2^*(c_H)$  düzeyi ((4.7)'de verilen değer)  $(a - 2c_H + c)/3$ 'den daha büyük ve  $q_2^*(c_L)$  düzeyi (4.8'de verilen değer)  $(a - 2c_L + c)/3$ 'ten daha düşüktür (burada 1. firmanın marjinal maliyetinin  $c$ , 2. firmanın marjinal maliyetinin de  $c_L$  ve  $c_H$  olduğuna dikkat ediniz). Bunun böyle olmasının temel sebebi, 2. firmanın sadece marjinal maliyetine göre üretim yapması ve 1.firmanın buna tepki veremeyecek olmasından istifade etmesidir. Çünkü örneğin 2. firmanın maliyeti yüksekse bu daha az üreteceği anlamına gelir fakat 1. firmanın bunu tam olarak bilmediğinden, 1. firma beklenen kârını maksimize eden miktarı seçer. Bu da 1. firmanın, 2. firmanın yüksek maliyette üretim yaptığını bilmesi durumundan daha

az üretimde bulunacağı anlamına gelir. Bu yüzden 2. firma, yüksek maliyetine rağmen daha fazla üretme imkanına sahip olur. Yani 2. firma, 1. firmanın kendisi hakkındaki eksik bilgi düzeyini kullanmış olmaktadır.

#### 4.5.2 Cinsiyetler Savaşı

Cinsiyetler Savaşı'nda hatırlarsak, iki Nash dengesi, (*opera*, *opera*), (*boks*, *boks*) ve bir karma strateji Nash dengesi vardı. Örneğin Tablo 4.5'te verilen oyunda erkeğin 2/3 olasılıkla boks, kadının da 2/3 olasılıkla operayı seçtiği karma strateji dengesi vardır.

|              | <i>opera</i> | <i>boks</i> |
|--------------|--------------|-------------|
| <i>opera</i> | 2, 1         | 0, 0        |
| <i>boks</i>  | 0, 0         | 1, 2        |

**Tablo 4.5**

Bu oyunda 1. oyuncu olan Seher ve 2. oyuncu olan Adem birbirini bir müddet tanısalar da birbirlerinin fayda fonksiyonları hakkında tam bir bilgiye sahip değildirler. Bu durumu şöyle ifade edebiliriz. Eğer her ikisi de operaya giderse Seher'in fayda düzeyi  $2 + h_s$  olsun, burada  $h_s$  değeri Seher tarafından özel olarak bilinen bir değerdir (Adem bilmiyor). Fakat eğer her ikisi de boksa giderse Adem'in fayda düzeyi  $2 + h_a$  olsun, burada  $h_a$  değeri ise Adem tarafından özel olarak bilinen bir değerdir (Seher bilmiyor). Bu arada  $h_s$  ve  $h_a$  değerlerinin basitlik olsun diye birbirinden bağımsız ve  $[0, \theta]$  aralığında homojen bir dağılımdan geldiğini varsayıyoruz. Bu oyunda  $h_s$  ve  $h_a$  değerlerini kullanmamızdaki temel gerekçe, oyunun fayda düzeylerinin asıl oyundaki fayda düzeylerinden az da olsa bir değişiklik gösterdiğini belirtmek içindir. Tablo 4.6'da gösterildiği gibi diğer fayda düzeylerinde bir değişiklik yoktur.

|              | <i>opera</i> | <i>boks</i>  |
|--------------|--------------|--------------|
| <i>opera</i> | $2 + h_s, 1$ | 0, 0         |
| <i>boks</i>  | 0, 0         | $1, 2 + h_a$ |

**Tablo 4.6**

Bu Bayesyen oyunda,  $G = \{A_s, A_a; T_s, T_a; p_s, p_a; u_s, u_a\}$ , hareket uzayları  $A_s = A_a = \{opera, boks\}$ , tip uzayları  $T_s = T_a = [0, \theta]$  ve inançları tüm  $h_s$  ve  $h_a$  için  $p_s(h_a) = p_a(h_s) = 1/\theta$  şeklinde ifade edilir.

Cinsiyetler Savaşı oyununun bu eksik bilgili versiyonunda pür strateji Bayesyen Nash dengesini bulalım. Bu oyunda Seher, eğer  $h_s$  belirli bir kritik değeri yani  $s$  değerini aşarsa operayı oynayacaktır ve benzer şekilde Adem, eğer  $h_a$  belirli kritik değer olan  $a$  değerini aşarsa boksu oynayacaktır. Bizim buradaki amacımız veri  $\theta$  değeri için, Bayesyen Nash değerleri olan  $s$  ve  $a$  değerlerini belirlemektir.

Adem'in stratejisi veri alındığında, Seher'in sırasıyla opera ve bokstan beklenen faydaları aşağıdaki gibidir:

$$\frac{a}{\theta} \cdot (2 + h_s) + (1 - \frac{a}{\theta}) \cdot 0 = \frac{a}{\theta} \cdot (2 + h_s)$$

ve

$$\frac{a}{\theta} \cdot 0 + (1 - \frac{a}{\theta}) \cdot 1 = (1 - \frac{a}{\theta})$$

Dikkat edilirse  $a/\theta$  değeri homojen dağılımdan dolayı  $a$  değerinin altında olma olasılığını verirken,  $(1 - a/\theta)$  de bunun üstünde olma olasılığını verir.

Kısaca Seher'in operayı oynaması ancak aşağıdaki koşul geçerliyse optimaldir:

$$t_s \geq \frac{\theta}{a} - 3 = s. \quad (4.10)$$

Benzer olarak Seher'in stratejisi veri alındığında, Adem'in sırasıyla bokstan ve operadan beklenen faydası ise şöyledir:

$$[1 - \frac{s}{\theta}] \cdot 0 + \frac{s}{\theta} \cdot [2 + h_a] = \frac{s}{\theta} \cdot [2 + h_a]$$

ve

$$[1 - \frac{s}{\theta}] \cdot 1 + \theta \cdot 0 = [1 - \frac{s}{\theta}]$$

Yani boksı oynamak ancak aşağıdaki koşul geçerli ise optimaldir:

$$t_a \geq \frac{\theta}{s} - 3 = a. \quad (4.11)$$

Eğer (4.10) ve (4.11) denklemlerini aynı anda çözersek bu bize  $a = s$  ve  $a^2 + 3a - \theta = 0$  denklemini verir. Karesel fonksiyonu çözdüğümüzde Seher'in operayı oynama olasılığının  $(\theta - s)/\theta$  ve Adem'in boksı oynamaya olasılığının  $(\theta - a)/\theta$  olduğunu görürüz. Yani her iki olasılık da şuna eşittir:

$$1 - \frac{-3 + \sqrt{9 + 4\theta}}{2\theta}. \quad (4.12)$$

Yukarıda (4.12) ifadesinde  $\theta$ , 0 değerine yaklaştığında, bu ifade  $2/3$  değerine yaklaşır ((4.12) ifadesinin,  $\theta$  sıfıra giderken limitine bakın, bunun için de L'Hospital kuralını kullanınız). Eksik bilgi ortadan kalktıkça, oyuncuların pür-strateji Bayesyen dengesindeki davranışlarının tam bilgili orijinal oyundaki karma stratejiye yaklaştığını görürüz.

### 4.5.3 Yatırım-Giriş Oyunu

Bu oyun daha önce verdiğimiz Giriş Oyununun başka bir versiyonudur. Yine iki firmanın olduğu tek bir piyasanın olduğunu düşünelim. 1. firma piyasaya giriş ya da dışarıda kalma kararı veren firmadır. 2. firma ise bu piyasada üretim ya-

pan mevcut firmadır. 2. firma bir yatırım kararıyla yüz yüzedir: üretim teknolojisini yenilemek (modernize etmek) için maliyetli bir yatırım mı yapmalı yoksa eski teknoloji ile üretime devam mı etmelidir? Eğer 2. firma üretim teknolojisini modernize ederse, 1. firma için rekabet etmek zorlaşacaktır ve girmemesi daha iyi bir karar olacaktır. Fakat eğer 2. firma yatırımdan kaçınırsa -yani eski teknolojiyi muhafaza ederse- 1. firma için girmek daha kârlı olabilir. Bu durumda 2. firma ile daha kolay rekabet edebilir. Basitlik olsun diye 2. firmanın yatırım maliyetinin sadece düşük veya yüksek düzeylerde olduğunu varsayalım. Fakat 1. firma bunu bilmemektedir. Sadece buna dair inançları vardır:  $p$  olasılıkla 2. firmanın yüksek maliyetli,  $1 - p$  olasılıkla da düşük maliyetli olduğuna inanmaktadır. Oyuncuların fayda düzeyleri ve olasılıklar Tablo 4.7'de gösterilmektedir. Tablo 4.7'de 1. firmanın *gir* ve *dışarıda kal* hareketleri sırasıyla  $G$  ve  $D$  ile gösterilirken, 2. firmanın *modern* ve *eski* hareketleri sırasıyla  $M$  ve  $E$  ile gösterilmektedir.

Tablo 4.7'nin sağındaki tablo 2.firmanın  $p$  olasılıkla yüksek maliyetli olması durumunda firmaların kâr düzeylerini gösterirken, soldaki tablo  $1 - p$  olasılıkla da düşük maliyetli olması durumundaki kâr düzeylerini göstermektedir.

|     | $M$   | $E$  |     | $M$   | $E$  |
|-----|-------|------|-----|-------|------|
| $G$ | -2, 0 | 2, 4 | $G$ | -2, 3 | 2, 4 |
| $D$ | 0, 4  | 0, 6 | $D$ | 0, 7  | 0, 6 |

**Tablo 4.7**

Böyle bir oyunda 1. firma özel bilgiye sahip değildir. Bu yüzden tip kümesi  $T_1$  tekil bilgi kümesidir. 2. firma maliyeti konusunda özel bilgiye sahiptir, dolayısıyla tip kümesi düşük maliyet ( $\underline{c}$ ) ve yüksek maliyetten ( $\bar{c}$ ) oluşan iki elemana sahiptir,  $T_2 = \{\underline{c}, \bar{c}\}$ . 1. firmanın stratejisi iki tipin her biri için bir hareket tanımlar, yani  $A_2 = \{Modern, Eski\} = \{M, E\}$ , burada  $c \in T_2 = \{\underline{c}, \bar{c}\}$ 'dir. 1. firmanın stratejisi ise sadece bir harekettir, yani  $a_1 \in A_1 = \{Gir, Dışarıda Kal\} = \{G, D\}$ .

Şunu hemen söyleyebiliriz: Yüksek maliyetli firma kesin baskın bir harekete sahiptir, yani  $E$  hareketini oynamak her zaman daha iyi sonuç verir. Fakat düşük maliyetli 2. firmanın en iyi tepki fonksiyonu 1.firmanın stratejisine bağlıdır. Eğer 1. firma girerse, 2. firma  $E$  hareketini tercih eder; eğer 1.firma dışarıda kalmayı tercih ederse  $M$  hareketini seçer. Bu arada, 1. firmanın piyasaya girme olasılığını  $y$  ile gösteriyoruz. Düşük maliyetli 2. firmanın *Modern* ( $M$ ) ve *Eski* ( $E$ ) oynamasına bağlı olarak oluşan beklenen faydası 1. firmanın karma stratejisinin,  $y$ , bir fonksiyonudur:

$$u_2(M; y, \underline{c}) = 3y + 7(1 - y) = 7 - 4y$$

$$u_2(E; y, \underline{c}) = 4y + 6(1 - y) = 6 - 2y.$$

Eğer  $y \leq 1/2$  ise düşük maliyetli firma zayıf baskın olan  $M$  hareketini tercih eder.

Düşük maliyetli 2. firmanın  $M$  hareketini tercih etme olasılığını  $x$  ile gösterelim. Bu durumda düşük maliyetli 2. firmanın karma strateji en iyi-tepki fonksiyonunu,  $x^*(y)$ , şöyle yazabiliriz:

$$x^*(y) = \begin{cases} \{1\}, & \text{eğer } y < \frac{1}{2} \\ [0, 1], & \text{eğer } y = \frac{1}{2} \\ \{0\}, & \text{eğer } y > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Şimdi de 1. firmanın en iyi tepki-fonksiyonunu bulalım. 1. firma  $p$  olasılıkla yüksek maliyet tipli 2. firma ile karşılaşır. Bu durumda 2. firma kesinlikle  $E$  hareketini seçer ve eğer piyasaya girerse 1. firmaya 2 kazandırır. Diğer yandan, 1. firma  $1 - p$  olasılıkla düşük-maliyet tipli 2. firma ile karşılaştığında, 2. firma  $x$  olasılıkla  $M$  hareketini seçer. Eğer 1. firma piyasaya girmeye karar verirse beklenen faydası şöyle ifade edilir:

$$u_1(gir; x) = 2p + (1 - p)[-2x + 2(1 - x)] = 2 - 4(1 - p)x.$$

Eğer 1. firma *dışarıda kal* kararını verirse  $u_1(dışarıda kal) = 0$  faydasını elde eder. Bu durumda eğer  $2 - 4(1 - p)x > 0$ , yani  $x \leq \frac{1}{2(1-p)} = \bar{x}$  ise 1.firma zayıf baskın hareket olan *gir* hareketini seçer. Burada  $p \in [0, 1]$  için  $\bar{x} \in [\frac{1}{2}, \infty)$  olduğuna dikkat edin. 1. firmanın karma strateji en iyi-tepki fonksiyonu ise şöyle yazılabilir:

$$y^*(x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{eğer } x < \bar{x} \\ [0, 1], & \text{eğer } x = \bar{x} \\ \{0\}, & \text{eğer } x > \bar{x} \end{cases}$$

Düşük maliyetli 2. firmanın en iyi-tepki fonksiyonunun,  $x^*$ , tersine, 1. firmanın en iyi tepki fonksiyonu,  $y^*$ ,  $p$ 'e bağlıdır. Bu da  $y^*$ 'nin  $\bar{x}$ 'e bağımlılığı üzerinden gerçekleşir.

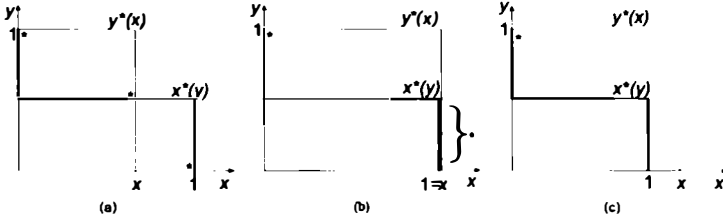
Şimdi oyuncuların karma-strateji en iyi-tepki fonksiyon grafiklerinin kesişimini bularak, yüksek-maliyetli olma olasılığı,  $p$ , ile belirlenen oyunun Bayesyen Nash dengelerini kolayca bulabiliriz. Şekil 4.1 üç durum için  $x^*$  ve  $y^*$  grafiklerini göstermektedir: (a) durumu söz konusu eğer  $p \in [0, \frac{1}{2})$ , (b) durumu söz konusu eğer  $p = \frac{1}{2}$  ve son olarak (c) durumu söz konusu eğer  $p \in (\frac{1}{2}, 1]$ . Bayesyen Nash dengeleri \* işareti ile gösterilmektedir.

Bayesyen Nash dengelerini aşağıdaki üçlü yapıda gösterebiliriz:

$$(y.G + (1 - y).D; E; x.M + (1 - x).E),$$

burada birinci terim 1. firmanın karma stratejisidir, noktalı virgülden sonraki ikinci terim yüksek maliyetli 2. firmanın baskın stratejisi  $E$ 'dir ve üçüncü terim düşük maliyetli 2. firmanın karma stratejisidir

2. firma muhtemelen düşük yatırım maliyetli olduğunda, yani  $p < 1/2$  ise, denge karakteri Tablo 4.7' nin sağ tarafındaki düşük yatırım maliyetli oyun tarafından belirlenir. Bu durumda iki pür-Nash dengesi vardır:  $(D; E, M)$  ve  $(G; E, E)$ . Bir-



**Şekil 4.1** İkinci firmanın maliyetinin yüksek olma olasılığının farklı üç değeri için birinci ve ikinci firmanın en iyi tepki fonksiyonları

inci dengede düşük maliyetli 2. firmanın modernizasyon stratejisini izlemesi ve 1. firmanın dışarıda kalması, ve ikinci dengede ise 2. firmanın düşük-maliyetli eski teknolojiye devam etmesi ve 1. firmanın girmesi durumu söz konusudur. Aynı zamanda düşük-maliyetli 1. firmanın  $1/2$  olasılıkla modernizasyon yaptığı ve 1. firmanın  $\bar{x}$  olasılıkla piyasaya girdiği bir karma strateji vardır.

2. firmanın eşit olasılıkla yüksek ve düşük yatırım maliyetli olması durumunda, yani  $p = 1/2$  olduğu zaman, her iki tipteki 2. firmanın da eski teknolojiye,  $E$ , devam ettiği ve 1. firmanın piyasaya girdiği,  $G$ , bir pür-strateji dengesi vardır. Kalan pür-strateji ve karma-strateji dengeleri birleşerek bir dengeler kümesine (çok sayıda denge) dönüşür: Düşük-maliyetli 2. firma modernizasyon yapar, ki bu durum 1. firmayı girme konusunda kayıtsız yapar. 1. firma yüksek bir olasılıkla girmedeği müddetçe, düşük-maliyetli 2. firma kesin bir şekilde modernizasyonu seçer.

Eğer 2. firmanın yüksek maliyetli olma ihtimali daha yüksekse, yani  $p > 1/2$  olduğu zaman, Bayesyen oyun Tablo 4.7'nin solundaki yüksek-maliyetli durumla belirlenir. Bu da tek bir pür-strateji dengesine sahiptir. Burada 2. firmanın her iki tipi eski teknolojide kalır, ve 1. firma piyasaya girer.

#### 4.5.4 Bayesyen Bertrand Oyunu

İki taraflı eksik bilgi altında iki firmanın Bertrand rekabeti gösterdiği bir model kuralım. Bu oyunda her iki firma da birbirinin maliyetleri konusunda tam bilgiye sahip değildir. Dolayısıyla yukarıda verilen Cournot modelindeki tek taraflı eksik bilgi yerine, iki taraflı eksik bilgi söz konusudur.

Firmaları  $F_1$  ve  $F_2$  diye gösterelim. Her bir firma farklılaştırılmış malların üreticileri konumundalar. Firmalar aynı anda  $p_1 \geq 0$  ve  $p_2 \geq 0$  fiyatlarını seçiyorlar. Doğrudan talep fonksiyonunun lineer olduğunu varsayalım:

$$q_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j,$$

burada  $q_i \geq 0$ ,  $F_i$  firması tarafından üretilen miktarı göstermektedir,  $a > 0$  talep parametresidir,  $b \in [0, 2)$  ise  $F_j$  firmasının ürettiği malın,  $F_i$  firması tarafından üretilen mal tarafından ne kadar ikame edildiğini göstermektedir,  $i, j = \{1, 2\}, i \neq j$ . Her iki firmanın da farklı üretim teknolojilerine sahip olduğunu

varsayıyoruz. Farklı üretim teknolojileri farklı birim maliyetler demektir. 2. firma, 1. firmanın birim üretim maliyetinin  $\phi$  olasılıkla  $c_A$ ,  $1 - \phi$  olasılıkla da  $c_B$  olduğunu düşünmektedir; 1. firma da 2. firmanın birim üretim maliyetinin  $\theta$  olasılıkla  $c_H$ ,  $1 - \theta$  olasılıkla da  $c_L$  olduğunu düşünmektedir. Aşağıda birim üretim maliyetlerinin olasılık dağılımları verilmektedir:

$$c_1 = \begin{cases} c_A, & \phi \text{ olasılıkla} \\ c_B, & 1 - \phi \text{ olasılıkla} \end{cases} \quad \text{ve} \quad c_2 = \begin{cases} c_H, & \theta \text{ olasılıkla} \\ c_L, & 1 - \theta \text{ olasılıkla} \end{cases}$$

Ayrıca burada şunu varsayıyoruz:  $c_A > c_B, c_H > c_L$  ve  $c_A, c_B, c_H, c_L < a$ .

Böylece  $F_i$  firmasının kâr fonksiyonu şöyledir:

$$\pi_i(p_i(c_i), p_j(c_j)) = [a - p_i(c_i) + bp_j(c_j)](p_i(c_i) - c_i), \quad (4.13)$$

burada  $c_i$ ,  $F_i$  firmasının birim maliyetidir,  $i, j = \{1, 2\}$ ,  $i \neq j$ .

$F_i$  firması birim maliyetine bağlı olarak bir fiyat belirleyecektir, bu  $p_1^*(c_A)$  fiyatı veya  $p_1^*(c_B)$  fiyatı olacaktır;  $F_j$  firması da benzer olarak birim üretim maliyetine bağlı olarak  $p_2^*(c_H)$  fiyatını veya  $p_2^*(c_L)$  fiyatını belirleyecektir. Bu fiyatları belirlemek için, Bayesyen Nash dengesi kavramını kullanacağız.

Eğer  $F_1$  firmasının birim maliyeti yüksekse,  $p_1^*(c_A)$  aşağıdaki gibi belirlenir,

$$\arg \max_{p_1 \geq 0} \{ \theta(a - p_1 + bp_2^*(c_H)(p_1 - c_A) + (1 - \theta)(a - p_1 + bp_2^*(c_L)(p_1 - c_A)) \}, \quad (4.14)$$

ve eğer üretim maliyeti düşükse,  $p_1^*(c_B)$  ise aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$\arg \max_{p_1 \geq 0} \{ \theta(a - p_1 + bp_2^*(c_H)(p_1 - c_B) + (1 - \theta)(a - p_1 + bp_2^*(c_L)(p_1 - c_B)) \}. \quad (4.15)$$

Benzer olarak  $F_2$  firmasının birim maliyeti yüksekse,  $p_2^*(c_H)$  değerini aşağıdaki optimizasyondan elde eder:

$$\arg \max_{p_2 \geq 0} \{ \phi(a - p_2 + bp_1^*(c_A)(p_2 - c_H) + (1 - \phi)(a - p_2 + bp_1^*(c_B)(p_2 - c_H)) \}. \quad (4.16)$$

Fakat birim maliyeti düşükse,  $p_2^*(c_L)$  aşağıdaki optimizasyondan elde edilir,

$$\arg \max_{p_2 \geq 0} \{ \phi(a - p_2 + bp_1^*(c_A)(p_2 - c_L) + (1 - \phi)(a - p_2 + bp_1^*(c_B)(p_2 - c_L)) \}. \quad (4.17)$$

Böylece (4.14), (4.15), (4.16), ve (4.17)'den elde edilen birinci derece koşullarından elde edilen tepki fonksiyonlarından (4 bilinmeyenli dört denklem) oluşan denklemleri aynı anda çözersek aşağıdaki değerleri buluruz:

$$p_1^*(c_A) = \frac{2a(2 + b) + (4 - b^2)c_A + b^2E(c_1) + 2bE(c_2)}{2(4 - b^2)},$$

$$p_1^*(c_B) = \frac{2a(2+b) + (4-b^2)c_B + b^2E(c_1) + 2bE(c_2)}{2(4-b^2)},$$

$$p_2^*(c_H) = \frac{2a(2+b) + (4-b^2)c_H + b^2E(c_2) + 2bE(c_1)}{2(4-b^2)},$$

$$p_2^*(c_L) = \frac{2a(2+b) + (4-b^2)c_L + b^2E(c_2) + 2bE(c_1)}{2(4-b^2)},$$

burada  $E(c_1) = \phi c_A + (1-\phi)c_B$  ve  $E(c_2) = \theta c_H + (1-\theta)c_L$ . Firmaların beklenen fiyatları ise doğrudan talep fonksiyonundan elde edilebilir:

$$E(p_1^*) = \frac{a(2+b) + 2E(c_1) + bE(c_2)}{2(4-b^2)} \text{ ve } E(p_2^*) = \frac{a(2+b) + 2E(c_2) + bE(c_1)}{2(4-b^2)}.$$

Firmaların beklenen kâr düzeyleri ise fiyat ve miktar değerlerinin (4.13) denklemi ile ifade edilen firma kâr fonksiyonlarında yerine konulmasıyla basit bir şekilde elde edilebilir.

#### 4.5.5 Kamu Malı Sunumu

Herhangi bir grup insana sunulması gereken bir kamu malının maliyetinin kimler tarafından karşılanacağı sorusunu basit bir model üzerinden tartışalım. Bu model Osborne (2003)'den derlenmiştir.

En az bir kişinin malın maliyetini ödeyerek malı gruba sunmayı istemesi durumunda, herkes bu kamu malından faydalanmaktadır. Fakat insanların bu mala verdikleri değer herkese göre farklılık göstermektedir ve herkes sadece kendi değerini bilmektedir. Bu durumda kimin malın sunum maliyetine katılacağı sorusu ortaya çıkmaktadır.

Bu gruptaki insan sayısı  $n$  kadardır; malın maliyeti  $c > 0$ , ve  $i$  bireyinin faydası ise  $v_i$  ile ifade edilsin. Eğer mal sunulmazsa bu durumda herkesin faydası sıfır olmaktadır. Her  $i$  bireyi mala verdiği değeri ( $v_i$ ), sadece kendisi bilmektedir ve sadece kendisinin değerini bilmektedir. Fakat bildiği bir şey daha vardır, o da oyuncuların sahip olduğu tüm değerlerin aralığıdır. Bu değerlerin en az  $\underline{v}$  en çok da  $\bar{v}$  değerleri arasında olduğunu bilmektedir. Katılım maliyeti pozitifdir ve en yüksek ve en düşük değer arasında yer almaktadır,  $0 \leq \underline{v} < c < \bar{v}$ . Diğer yandan,  $i$  bireyi diğer herhangi bir bireyin en fazla  $v$  değerine sahip olma olasılığının  $F(v)$  olduğuna inanmaktadır, burada  $F$  sürekli artan dağılım fonksiyonudur. Bu inanç diğer oyuncuların inançlarından bağımsızdır. Burada  $F$  fonksiyonu artan bir fonksiyondur çünkü  $v$  arttıkça bunun altında kalan değerlerin gelme olasılığı da artmaktadır ve yine  $F$  fonksiyonu sürekli olduğu için bu aralıktaki tek bir  $v$  değerinin gelme olasılığı sıfırdır.

Tüm  $n$  bireyleri aynı anda katılım değerlerini zarf içinde sunmaktadırlar, yani eş anlı hareket etmektedirler. Herkesin sunduğu değer ya pozitif bir  $c$  değeri ya

da hiçbir şey yani 0 olabilir. Eğer tüm bireyler 0 katılım teklifini sunarsa, mal sunulmayacak ve her bireyin faydası 0 olacaktır. Eğer en azından bir birey  $c$  kadar teklifte bulunursa, mal sunulmaktadır. Bu durumda bu teklifi yapan bireyin faydası  $v_i - c$ , fakat 0 teklifinde bulunan her  $i$  bireyin faydası ise  $v_i$  olmaktadır.

Durumu özetlersek  $n$  sayıda oyuncunun olduğu oyunda, tüm değerlerin profil kümesi  $(v_1, \dots, v_n)$  şeklindedir, burada tüm  $i$ 'ler için değerler  $0 \leq v_i \leq \bar{v}$  aralığındadır ve her oyuncunun hareket kümesi  $\{0, c\}$  şeklindedir. Herhangi bir  $i$  oyuncusunun her tipi, her diğer  $j$  oyuncusunun en fazla  $v_j$  değerine sahip olma olasılığının  $F(v_1)F(v_2)\dots F(v_{i-1})F(v_{i+1})\dots F(v_n)$  olduğuna inanmaktadır.

Kısaca  $i$  oyuncusunun  $(v_1, \dots, v_n)$  durumunda faydası:

$$u_i = \begin{cases} 0, & \text{eğer hiç kimse katkıda bulunmazsa} \\ v_i, & \text{eğer } i \text{ katkıda bulunmazken bazıları katkıda bulunursa} \\ v_i - c, & \text{eğer } i \text{ katkıda bulunursa} \end{cases}$$

Bu oyunun Bayesyen dengesini bulmak için işe önce  $i$  oyuncusunun nasıl davrandığını düşünerek başlayalım. Her oyuncunun mala verdiği değer ancak en az  $v^*$  ise katkıda bulunacağını varsayalım. Bu durumda oyunculardan en az birinin katkıda bulunma olasılığı yani en az birinin en az  $v^*$  kadar değere sahip olma olasılığı  $1 - (F(v^*))^{n-1}$ 'dir (dikkat edilirse  $F(v^*)^{n-1}$  olasılığı tüm diğer oyuncuların en fazla  $v^*$  değerine sahip olma olasılığıdır). Dolayısıyla eğer  $i$  oyuncusunun değeri  $v_i$  ise, katkıda bulunmaması durumunda beklenen faydası  $(1 - (F(v^*))^{n-1})v_i$  kadardır. Katkıda bulunması durumunda faydası  $v_i - c$  olur. Bu yüzden  $i$  oyuncusunun  $v_i < v^*$  durumunda katkıda bulunmama koşulu  $(1 - (F(v^*))^{n-1})v_i \geq v_i - c$  iken,  $i$  oyuncusunun  $v_i > v^*$  durumunda katkıda bulunma koşulu  $(1 - (F(v^*))^{n-1})v_i \leq v_i - c$ 'dir. Bu koşulları daha derli toplu yazarsak:

$$\text{Eğer } v_i < v^* \text{ ise } (F(v^*))^{n-1}v_i \leq c \text{ ve Eğer } v_i \geq v^* \text{ ise } (F(v^*))^{n-1}v_i \geq c. \quad (4.18)$$

Bu eşitsizlikler sağlanırsa şu sonucu elde ederiz:

$$(F(v^*))^{n-1}v^* = c. \quad (4.19)$$

Eğer  $v^*$  değeri (4.19) denklemini çözen değerse, bu (4.18)'deki iki eşitsizliğin de sağlandığı anlamına gelir. Bu da oyunda her oyuncunun en az  $v^*$  değerinde katkıda bulunduğu bir Bayesyen Nash dengesi var demektir.

Eğer  $v \geq \bar{v}$  ve  $\bar{v} > c$  ise olasılık fonksiyonu  $F(v) = 1$  olduğundan,  $v^* > c$  olur. Yani her oyuncunun eşik katkı değeri kamu malının maliyetini aşar. En azından bir oyuncunun değeri  $c$ 'yi aştığı zaman, tüm oyuncuların refahı daha iyi hale gelir. Kamu malı sunulursa en yüksek değere sahip olan birey de malın sunulmaması durumundan çok daha iyi durumda olacaktır. Fakat dengede malın arz edilmesi ancak en azından bir oyuncunun değerinin  $v^*$  değerini aşması, bunun da  $c$  maliyetini

aşması durumunda söz konusudur.

Şimdi de bireylerin sayısı arttıkça bu malın dengede daha yüksek veya düşük bir olasılıkla mı sağlandığına bakalım. Malın sağlanma olasılığı en azından bir oyuncunun değerinin en az  $v^*$  olma olasılığıdır, ki bu da  $1 - (F(v^*))^n$ 'dir. (4.19)'dan bu olasılığın  $1 - cF(v^*)/v^*$  olduğu görülür. Buna göre  $v^*$  birey sayısına göre nasıl değişir? Veri herhangi bir  $v^*$  değeri için,  $n$  arttıkça  $(F(v^*))^{n-1}$  olasılığı azalır ve dolayısıyla  $v^*(F(v^*))^{n-1}$  'nin değeri azalır. Yani (4.19) eşitliğini sürdürmek için,  $v^*$  değeri  $n$  arttıkça artmak zorundadır. Sonuç olarak,  $n$  artarken bu da  $v^*$ 'yi artırırken, malın sunulma olasılığındaki değişim,  $F(v^*)/v^*$  'deki değişime bağlıdır: Eğer  $F(v^*)/v^*$  fonksiyonu  $v^*$  değerinin azalan bir fonksiyonu ise, olasılık artar fakat eğer  $F(v^*)/v^*$  fonksiyonu  $v^*$  değerinin artan bir fonksiyonu ise olasılık azalır. Eğer  $F$  homojen dağılım gösteriyorsa ve  $\underline{v} > 0$  ise,  $F(v^*)/v^*$ ,  $v^*$  'nin azalan bir fonksiyonudur böylece malın sunulma olasılığı nüfus arttıkça artar.

## Sorular

1. Bir kamu malı sunumu oyunundaki iki oyuncu aynı anda maliyeti  $c \in (0, 1)$  olan bir kamu malını sunup sunmamaya karar veriyorlar. Her oyuncu için  $\theta_i$  değişkeni  $[0, 1]$  aralığında homojen dağılıyor ve kamu malının faydası  $\theta_i^2$  olarak veriliyor. Bu oyunun Bayesyen dengesini bulun.
2. Zamanın 0'dan 1'e kadar sürekli olduğu bir yıpratma savaşında iki taraf var. Oyun herhangi bir oyuncu teslim olunca bitiyor. İki oyuncu da güçlü (1. oyuncu için  $p$  ve 2. oyuncu için  $q$  olasılıklarıyla) veya zayıf olabilirler. Güçlü bir oyuncu savaştan zevk alıyor ve asla teslim olmuyor. Zayıf bir oyuncu ise savaştığı bir birimlik zaman için 1 kaybederken, rakibinin teslim olduğu bir birimlik zaman için 1. oyuncu  $a > 0$  ve 2. oyuncu  $b > 0$  kazanıyor. Buna göre zayıf olan bir 1. oyuncunun  $t$  zamanında savaşı kazanırsa elde edeceği fayda  $a(1 - t) - t$  olurken, yine  $t$  zamanında teslim olursa  $-t$  elde ediyor. Oyunda iskonto yoktur.
  - a)  $0^+$  zamanından itibaren her oyuncunun diğerine dair sahip olduğu  $p_t$  ve  $q_t$  inançlarının  $q = p^{b/a}$  eğrisi üzerinde olacağını gösterin.
  - b) Zayıf türlerden birinin pozitif olasılıkla tam olarak 0 zamanında çekildiğini (yani oyuncuların çekilme zamanının kümülatif (birikimli) olasılık dağılımının  $t = 0$  zamanında pozitif olduğunu) gösterin. Zayıf türlerin faydası  $a, b, p$  ve  $q$  değişkenlerinden nasıl etkilenir?
3. İki rakip ordu bir adayı ele geçirmek için konumlanıyor. Her iki ordunun kumandanı da saldırıp saldırmama kararını veriyor. Buna ek olarak ordular eşit olasılıklarla ve birbirlerinden bağımsız olarak güçlü veya zayıf olabiliyor ve bir ordunun türü sadece o ordunun kumandanı tarafından biliniyor. Adaya eğer tek bir ordu saldırırsa ada onun oluyor; ikisi birden saldırırsa güçlü olan zayıfı yeniyor ve saldıran iki ordunun türü aynıysa adayı kimse alamıyor. Adaya saldırmanın kendi başına bir maliyeti yok ama savaşmanın güçlü bir orduya maliyeti  $g$ , zayıf olana maliyeti  $z$  olarak veriliyor ( $z > g$ ). Bu oyunun tüm pür-strateji Bayesyen dengelerini bulun.
4. Kitabın bu bölümünde gördüğümüz Cournot modelini düşünün. Bu sefer iki firmanın da birim başına üretim maliyetinin  $\theta$  olasılığıyla  $c_L$  ve  $1 - \theta$  olasılığıyla  $c_H$  olduğunu kabul edin ( $c_L < c_H$ ). Bayesyen Nash dengesini bulun.
5. Kitabın bu bölümünde gördüğümüz Cinsiyetler Savaşı oyununun farklı bir versiyonunda Seher (1.oyuncu) ve Adem (2.oyuncu) buluşmak istiyorlar ama nerede buluşacaklarını kararlaştırmak için iletişim kuramıyorlar. Park ve Kafe seçenekleri arasında karar vermeleri gereken ikili için fayda tablosu

şu şekilde veriliyor.

|      | Park                         | Kafe                         |
|------|------------------------------|------------------------------|
| Park | $1 - \theta_S, 1 - \theta_A$ | 0,0                          |
| Kafe | 0,0                          | $1 + \theta_S, 1 + \theta_A$ |

İkilinin birbiriyle buluşmak istemelerinin yanında buluşma yerleriyle ilgili kişisel tercihleri de vardır. Bu tablodaki  $\theta_S$  ve  $\theta_A$  değerleri  $T > 0$   $[-T, T]$  aralığında homojen dağılan bağımsız değişkenler. Buradaki  $\theta_i$  değişkenlerinin kümülatif (birikimli) olasılık fonksiyonu  $[-T, T]$  aralığı için  $\frac{\theta_i + T}{2T}$  olarak veriliyor. Oyun başlamadan önce Seher sadece  $\theta_S$ 'yi ve Adem sadece  $\theta_A$ 'yı biliyor ve aynı anda buluşma yerine karar veriyorlar.

- $T < 1$  durumunda 3 farklı Bayesyen denge bulun.
  - $T > 1$  durumunda bu oyunun tek bir Bayesyen dengesinin olacağını kanıtlayın.
  - Eğer iki taraf da  $\theta_S$  ve  $\theta_A$  değerlerini gözlemleyebilseydi, b ve c şıklarında verdiğiniz cevaplar nasıl değişirdi?
6. Cinsiyetler Savaşı oyunun başka bir versiyonunu düşünelim. Murat Özlem'i seviyor. Farklı iş yerlerinde, iletişim imkanından mahrum haldeyken bir futbol maçına (F) veya bir tiyatro oyununa (T) gitmek arasında karar veriyorlar. Ama Murat Özlem'i pek tanımadığından onun kendisiyle zaman geçirmeyi isteyip istemediğinden emin değil. Eğer Özlem de Murat'dan hoşlanıyorsa sol tablodaki oyunu ve eğer Özlem Murat'tan pek hazzetmiyorsa oynuyorlar (Özlem sütun oyuncusu)

|   | F    | T    |
|---|------|------|
| F | 3, 1 | 0,0  |
| T | 0,0  | 1, 3 |

|   | F    | T    |
|---|------|------|
| F | 3, 0 | 0, 1 |
| T | 0, 3 | 1, 0 |

Murat Özlem'in kendisinden hoşlanma olasılığının  $\mu = 1/3$  olduğunu düşünüyor.

- Bu stratejik karar durumunu normal-biçimli bir Bayesyen oyun olarak formüle edin ve Bayesyen oyunun genişleyen-biçimli halini çiziniz.
  - İki oyuncu için de (pür strateji Bayesyen) en iyi tepki fonksiyonunu bulunuz ve oyunun tüm pür strateji Bayesyen dengelerini bulun.
7. Bir enerji şirketi  $p = 1/2$  olasılığıyla verimli bir petrol rezervi içeren bir sahaya yatırım yapabilir. Şirketin test sondajı yaparak daha fazla bilgiye sahip olma imkanı vardır. Sondaj başarılı sonuç verirse sahada petrol rezervi bulunması muhtemel hale gelirken başarısız olursa değersiz kayalar bulunma

olasılığı artmaktadır. Fakat test sondajı şirkete kesin sonuçlar vermiyor; sahada petrol varsa sondajın başarı olasılığı 0.6 iken değersiz kayalarla dolu bir sahada dahi sondajın 0.2 başarı olasılığı bulunuyor.

- a) Sondaj başarılı olursa sahanın petrol rezervi içermeye olasılığı ne olur?
- b) Sondaj başarısız olursa sahanın petrol rezervi içermeye olasılığı ne olur?

8. Farklılaştırılmış ürün ve eksik bilgi içeren bir Bertrand düopolü olduğunu varsayınız.  $i$  firması için talep  $q_i(p_i, p_j) = 10 - p_i - b_i p_j$  şeklindedir. Firmaların üretim maliyeti yoktur. 2.firmanın fiyatı 1.firmaya olan talebi yüksek ya da düşük şekilde etkileyebilir. Yani  $b_i$  2/3 ihtimal ile 0, 1/3 ihtimal ile 1 değerini alır. Her 2 firmada kendi  $b_i$  'sini bilmektedir. Buna ek olarak 1.firma  $b_2$  'yi bilmektedir, fakat 2.firmanın  $b_1$  hakkında bilgisi yoktur.

- a) Her bir firma için stratejiler ne olur?
- b) Bayesyen dengesi bulunuz.

9. İki düşman ordu bir adayı ele geçirmek için pozisyon almışlardır. Orduların komutanları “saldır” ya da “saldırma” seçeneklerine sahiptir. Her iki ordu eşit olasılıkla “güçlü” ya da “zayıf” tır ve bu bilgiyi sadece her komutan kendi ordusu için bilmektedir. Ada eğer ele geçirilirse  $M = 12$  değerindedir. Ada bir ordu saldırdığında diğer ordu saldırmazsa ele geçirilmektedir ya da her iki ordu saldırdığında güçlü olan ordu tarafından ele geçirilmektedir. Her iki ordu eşit güce sahipse, ada iki ordu tarafından da ele geçirilemez. Her iki ordu için de savaş seçeneğinin bir maliyeti vardır. Bu maliyet eğer ordu güçlü ise  $s = 8$ , zayıf ise  $w = 10$  ' dir. Bir ordu saldırırken diğer ordu saldırmazsa, bu durumda maliyet söz konusu değildir. Bu oyunu Bayesyen oyun olarak modelleyiniz ve tüm pür-strateji Bayesyen Nash dengelerini belirleyiniz.

10. İki firma, ürün farklılaştırmasının olduğu bir oyunda Bertrand rekabeti içindir. İki firma da  $C(q_i) = cq_i$ ,  $c > 0$  şeklinde verilen aynı maliyet fonksiyonuna sahip. Firmaların karşılaşacağı talep fonksiyonu aşağıdaki gibi veriliyor:

$$F_i(p_1, p_2) = \max\{K - p_i + vp_j, 0\}, \quad i, j = 1, 2, \quad j = 3 - i.$$

Burada  $v > 0$  herkesçe bilinirken  $K$  iki farklı değer alabiliyor:  $q$  olasılığıyla  $K^a$  ve  $1 - q$  olasılığıyla  $K^b$ .  $K$  değişkeninin aldığı değeri sadece 1. oyuncu gözlemliyor. Bu durumu Bayesyen bir oyun olarak modelleyin. Bayesyen Nash dengesini bulun ve dengenin  $q$  olasılığına bağlılığını tartışın.

11. İki oyuncu sonlu  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  kümesinden bir adet bilet almaktadır, ayrıca  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Bilet üzerindeki sayı o oyuncunun alacağı ödülü göstermektedir. Her iki ödülde  $F$  dağılım fonksiyonu ile birbirinden bağımsız

ve özdeş şekilde dağılmıştır. Oyuncular sadece kendi biletindeki sayıyı bilmektelerdir. Daha sonra her iki oyuncuda eşanlı ve birbirinden bağımsız olarak birbirlerine ödülleri takas edip edemeyeceklerini sorarlar. Eğer her iki oyuncu da takası kabul ederse, takas gerçekleşir ve birbirlerinin ödülünü alırlar. Oyuncular hedefi beklenen kazançlarını maksimize etmektir. Bu oyunu Bayesyen oyun olarak modelleyiniz. Ve herhangi bir Bayesyen Nash dengesinde en yüksek ödülün herhangi bir oyuncunun olabilecek en küçük  $x_1$  ödülünü takas etmek istemesi olduğunu gösteriniz.

12. İki firma piyasaya girip girmeyeceğine karar veriyorlar. İkiisi birlikte piyasaya girerse duopol oluşacak, elde edecekleri kazanç azalacak ya da negatif kârlar elde edeceklerdir. Ancak iki firmadan sadece biri piyasaya girerse monopolcü olacak ve aşırı kâr elde edecektir. İki firma da piyasaya girme konusunda başarısız olursa sıfır alacaklardır. Ancak piyasaya girişin maliyeti özel bir bilgidir.  $c_s$  satır oyuncusunun piyasaya giriş maliyeti iken  $c_k$  sütun oyuncusunun piyasaya giriş maliyetidir.

|       | Gir                | Girme        |
|-------|--------------------|--------------|
| Gir   | $1 - c_s, 1 - c_k$ | $2 - c_s, 0$ |
| Girme | $0, 2 - c_k$       | $0, 0$       |

Firmanın piyasaya giriş maliyetinin özel bilgi olduğu başka bir deyişle sadece kendisinin bildiği durum söz konusudur. Firma  $p$  olasılıkla yüksek maliyete sahiptir, maliyeti 1,5 birimdir.  $1-p$  olasılıkla düşük maliyete sahiptir, maliyeti 1 birimdir. Bu oyundaki Bayesyen Nash dengeleğini bulunuz

13. Eksik bilgi altında oynanan bir mahkumlar çıkmazı oyununda 2. oyuncunun bencil ve iyi niyetli olmak üzere iki tipi var. 1. oyuncu hangi tiple karşı karşıya olduğunu bilmiyor.

|   | C   | D   |
|---|-----|-----|
| C | 4,4 | 0,6 |
| D | 6,0 | 2,2 |

|   | C   | D   |
|---|-----|-----|
| C | 6,6 | 2,4 |
| D | 4,0 | 0,2 |

- a) Bencil bir 2. oyuncu her zaman  $D$  oynarken iyi niyetli tipin hem  $C$  hem  $D$  oynayabilmesinin sebebi nedir?
- b) 1. oyuncunun bencil bir 2. oyuncu ile karşılaşma olasılığı  $p$  olsun. Bu eksik bilgili oyunun genişleyen-biçimli versiyonunu çizin.
- c) 1. oyuncunun  $D$  oynamasını bekleyen iyi niyetli bir 2. oyuncunun en iyi tepkisi ne olur?
- d)  $p$  olasılığının hangi değerleri için (eğer varsa) Bayesyen Nash dengesinde 2. oyuncunun her iki tipinin de  $D$  oynamasına 1. oyuncunun tepkisi  $D$  oynamak olur?

14. Aşağıdaki tabloda eksik bilgili statik bir oyun verilmektedir.

|         |     |     |         |     |     |
|---------|-----|-----|---------|-----|-----|
|         | M   | N   |         | M   | N   |
| A       | 1,1 | 0,0 | A       | 0,0 | 0,0 |
| B       | 0,0 | 0,0 | B       | 0,0 | 2,2 |
| 1. oyun |     |     | 2. oyun |     |     |

- a) Doğa oyunun hangi tabloda oynandığını eşit olasılıkla oynandığını belirlediğini varsaydığımız durumda pür strateji Bayesyen Nash dengesini bulunuz.
- b) 1.oyuncunun oyunun birinci veya ikinci tabloda olduğunu biliyorken 2.oyuncunun bunun bilmediği durumda pür strateji Bayesyen Nash dengesini bulunuz.
15.  $v$  kalitesinde bir ürünü satan satıcı,  $[a, b]$  aralığında tekdüze dağılıma sahip olan bu ürünün kalitesini bilmektedir. Satıcının üretim maliyeti yoktur. Müşteriler heterojendir, ve ürüne ödemeye gönüllü oldukları fiyatlar farklıdır, ve bu gönüllülük  $\theta$  ile gösterilmektedir.  $\theta \in [0, 1]$  aralığında tekdüze dağılıma sahiptir.  $\theta$  tipindeki bir müşterinin  $v$  kalitesindeki bir ürünü  $p$  fiyatından aldığıda oluşan faydası işe şöyle tanımlanmıştır:

$$U(\theta, v) = \theta v - p$$

Müşteriler ürünü almak istemezse faydası 0 olacaktır. Ayrıca  $k$  ürünün sertifikalandırılma bedelidir. Sertifikalı bir ürünün  $v$  değerinin arttığı bilinmektedir.

- a) Tam bilgi altında  $v$  kalitesindeki bir ürünü  $p$  fiyatından satıldığında oluşan toplam talebi hesaplayınız.
- b) Tam bilgi altında  $v$  kalitesindeki bir ürünün satıcısı için kâr fonksiyonunu hesaplayınız.
- c) Sertifikalandırma ile ilgili Bayesyen oyundaki Nash dengesini bulunuz. (ürünün  $v$  kalitesi hakkında eksik bilgi vardır). Bu durumda eğer  $v$  tipli ürün sertifikalı ise herhangi bir  $v' > v$  de sertifikalıdır; eğer  $v$  tipli ürün sertifikasız ise herhangi bir  $v' < v$  de sertifikasızdır.
16. Aşağıdaki tabloda Cinsiyetler Savaşı oyunun başka bir versiyonu verilmektedir. Eksik bilgili statik bir oyunu şeklinde tasarlanmıştır. Bu oyunda Yusuf ile Feride aynı anda operaya gitmek veya evde kalmak gibi iki harekete sahiptir. Fakat oyunun nasıl geliştiği Feride'nin morali ile de ilgilidir. Çünkü Feride kendini iyi hissediyorsa (moralli) başka bir oyun (tablo 1'de gösterilen) fakat eğer moralsiz ise başka bir oyun oynanacaktır (tablo 2). Feride kendisinin moralli veya moralsiz olduğunu bilirken Yusuf bunu bilmemektedir. Yusuf,  $p$

olasılıkla Feride'nin moralli,  $1-p$  olasılıkla da moralsiz olduğunu düşünmektedir. Bu durumda sizden istenen (Opera, (Opera eğer moralliye, evde kal eğer moralsizse)) Bayesyen Nash dengesinin olmasını sağlayacak olasılık aralığını bulunuz (satır oyuncusu Yusuf, sütun oyuncusu Feride'dir).

|          | opera | evde kal |
|----------|-------|----------|
| opera    | 2,1   | 0,0      |
| evde kal | 0,0   | 1,2      |

1. durum (moralli)

|          | opera | evde kal |
|----------|-------|----------|
| opera    | 2,0   | 0,2      |
| evde kal | 0,1   | 1,0      |

2.durum (moralsiz)

17. Emre ile Barış bir tartışmaya giriyorlar. Emre, Barış'ın zayıf mı güçlü mü olduğunu bilmemektedir. Fakat  $p$  olasılıkla güçlü,  $1-p$  olasılıkla da zayıf olduğunu düşünmektedir. Emre ise kendi durumunu bilmektedir. Her ikisi de ya uzlaşacaklar ya da kavga edeceklerdir. Oyunun faydaları aşağıda her iki durum için ayrı ayrı verilmektedir (satır oyuncusu Emre, sütun oyuncusu Barış'dır).

|         | kavga | uzlaşma |
|---------|-------|---------|
| kavga   | -1,1  | 1,0     |
| uzlaşma | 0,1   | 0,0     |

1. durum (güçlü)

|         | kavga | uzlaşma |
|---------|-------|---------|
| kavga   | 1,-1  | 1,0     |
| uzlaşma | 0,1   | 0,0     |

2.durum (zayıf)

- a) Eğer  $p < 1/2$  ise tek bir pür mükemmel Bayesyen Nash dengesi olduğunu gösteriniz.
- b) Eğer  $p > 1/2$  ise tek bir pür mükemmel Bayesyen Nash dengesi olduğunu gösteriniz.
- c) Eğer  $p = 1/2$  olursa ne olur?
18. İki düşman ordu bir adayı ele geçirmek için pozisyon almışlardır. Orduların komutanları "saldır" ya da "saldırma" seçeneklerine sahiptir. Her iki ordu eşit olasılıkla "güçlü" ya da "zayıf" tır ve bu bilgiyi sadece her komutan kendi ordusu için bilmektedir. Ada eğer ele geçirilirse  $M = 10$  değerindedir. Ada bir ordu saldırdığında diğer ordu saldırmazsa ele geçirilmektedir ya da her iki ordu saldırdığında güçlü olan ordu tarafından ele geçirilmektedir. Her iki ordu eşit güce sahipse, ada iki ordu tarafından da ele geçirilemez. Her iki ordu için de savaş seçeneğinin bir maliyeti vardır, bu maliyet eğer ordu güçlü ise  $s = 6$ , zayıf ise  $w = 8$  'dir. Bir ordu saldırırken diğer ordu saldırmazsa, bu durumda maliyet söz konusu değildir. Bu oyunu Bayesyen oyun olarak modelleyiniz ve tüm pür-strateji Bayesyen Nash dengelerini belirleyiniz.
19. İki firma aynı anda yeni bir piyasaya girip girmemeye karar veriyor. Tek bir firma girerse tekel kârı,  $\pi^m$ , elde edilecektir. İki firma birden girerse duopol oluşacak ve iki firma da  $\pi^d$  miktarında kâr elde edecek ( $\pi^m > \pi^d > 0$ ). Piyasaya giriş maliyeti,  $\theta_i$ , iki firma için de  $[0, \theta_{\max}]$  arasındaki homojen

dağılımdan bağımsız olarak çekiliyor ve maliyetler firmaların özel bilgisi olarak kalıyor. Bu oyunun normal-biçimli temsilini yazın ve pür stratejileri gösterin. Bayesyen Nash dengesini bulun

20. Farklı mallar üreten ve Bertrand rekabetinde bulunan iki firmalı bir piyasa düşünelim.  $i$  firmasının talebi  $q_i(p_i, p_j) = a - p_i - b_i \cdot p_j$  şeklindedir. Her iki firma için de üretim maliyetinin olmadığını varsayalım.  $i$  firmasının  $j$  firmasının fiyatına verdiği tepki ikame derecesine bağlı olarak düşük veya yüksek olabilir. Yani  $b_i$ 'nin düzeyini  $b_H$  (yüksek tepki) veya  $b_L$  (düşük tepki) ile ifade edelim, burada  $b_H > b_L > 0$  şeklindedir. Her firma için  $\alpha$  olasılıkla  $b_i = b_H$  iken,  $1 - \alpha$  olasılıkla  $b_i = b_L$  şeklindedir. Her firma kendi  $b_i$  düzeyini bilirken diğer firmanınkini bilmemektedir. Bu durum herkesin ortak bilgisidir. Oyuncuların hareketlerini, tiplerini, inançlarını ve fayda fonksiyonlarını tanımlayınız. Bu oyunun Bayesyen Nash dengesini bulunuz.



---

### Eksik Bilgili Dinamik Oyunlar

---

#### 5.1 Giriş

Daha önce gördüğümüz tüm oyunlarda, oyuncular karar verirken bir anlamda mükemmel bilgiye sahip değillerdi. Örneğin stratejik-biçimli bir oyunda, bir oyuncu hareket ederken diğer oyuncuların hangi hareketi seçtiğini bilmez; mükemmel bilgili genişleyen-biçimli bir oyunda bir oyuncu, diğer oyuncuların gelecekte planladığı hareketleri bilmez; Bayesyen bir oyunda bir oyuncu diğer oyuncuların ne özel bilgisini ne de yapacağı hareketleri bilir.

Eksik bilgili dinamik oyunlarda da benzer bir durum söz konusudur. Bu oyunlarda oyuncular diğer oyuncuların (tamamının veya bazılarının) daha önce seçmiş oldukları hareketleri tam olarak bilmedikleri gibi özel bilgilerini de bilmezler. Bu yüzden bu tür oyunlarda, daha önce gördüğümüz gibi, oyuncular hareketlerini seçerken bilinmeyen parametreler hakkında beklentiler oluştururlar. Fakat bu oyunlardaki beklenti oluşturma biçimi daha önce gördüklerimizden biraz farklıdır. Stratejik-biçimli oyunlardakinden farklı olarak, beklentiler sadece oyuncuların denge stratejilerinden türetilmez, çünkü oyuncular bazen denge davranışı ile tutarlı olmayan durumlarla da karşılaşabilirler. Yani Bayesyen oyunlardakinin tersine beklentiler sadece denge davranışı ve şans hareketleri (Doğa'nın hareketleri) hakkındaki bilgiden türetilmez. Bu oyunlarda mükemmel bilgili genişleyen-biçimli oyunlardakinin tersine, beklentiler sadece gelecekteki davranışlar üzerine kurulmaz aynı zamanda geçmiş olaylarla da ilişkilendirilir.

Eksik bilgili dinamik oyunlardaki mantığın en iyi görüldüğü oyunlar sinyalleme oyunlarıdır. Bu oyunlarda lider-takipçi ilişkisi içinde, lider özel bilgiye sahip ve ilk hareket eden kişidir. Takipçi hareketini seçmeden önce liderin hareketini gözlemler fakat hangi tipte olduğunu bilemez. Örneğin Spence (1974)'ün iş piyasası modelinde olduğu gibi, lider işçidir ve kendi verimliliğini bilir ve eğitim kararını ver-

mek zorundadır; takipçi oyuncu ise firmadır ve işçinin eğitim düzeyini gözlemler fakat verimliliğini gözlemleyemez. Bu durumda ne kadar ücret teklifinde bulunması gerektiği konusunda kararını vermek zorundadır. Dolayısıyla işçi eğitim düzeyini belirledikten sonra, firmanın önereceği ücret, işçinin verimliliği hakkındaki inançlarına, o da gözlemlediği eğitim düzeyine göre belirlenecektir.

Bu bölümde ilk önce bu tür oyunlar için geliştirilen bir denge kavramı olan mükemmel Bayesyen dengeyi tanıtacağız. Böylece daha önce gördüğümüz denge kavramlarının -yani tam bilgili statik oyunlardaki Nash dengesi, tam bilgili dinamik oyunlardaki altoyun mükemmel Nash dengesi ve eksik bilgili statik oyunlardaki Bayesyen Nash dengesi- yanına, yeni bir denge kavramı olan mükemmel Bayesyen dengeyi ekleyeceğiz. Bu denge kavramları ayrı oyun kategorileri için geliştirilmiş olsa da birbiriyle yakından ilişkilidir. Oyun yapıları daha kompleks hale geldikçe makul olmayan dengeleri elemine etmek için daha güçlü denge kavramlarına ihtiyaç duyulur. Fakat daha güçlü denge kavramı daha basit oyunlar için de geçerlidir. Yani örneğin mükemmel Bayesyen denge, statik eksik bilgili oyunlardaki Bayesyen Nash dengesine, tam bilgili dinamik oyunlardaki altoyun mükemmel Nash dengesine ve tam bilgili statik oyunlardaki Nash dengesine denk bir denge kavramıdır.

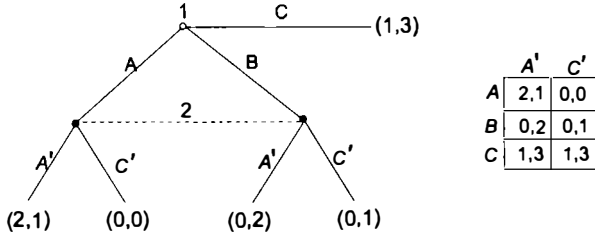
Mükemmel Bayesyen denge, Bayesyen Nash dengesini rafine etmek için (yani dengenin gerekli koşullarını güçlendirmek için) geliştirildi. Bu durum altoyun mükemmel Nash dengesinin, Nash dengesini rafine etmesindeki mantıklı aynıdır. Yani Nash dengesi tehditlerin ve söz vermelerin inandırıcılığını dikkate almadığından dinamik oyunlarda altoyun mükemmellik kavramı geliştirildi. Benzer bir problem Bayesyen Nash dengesi için de geçerlidir. Eğer oyuncuların stratejileri altoyun mükemmel Nash dengesi ise bu onların sadece Nash dengesi değil aynı zamanda her altoyunda Nash dengesi olması gerektiğini zorunlu kılar. Fakat burada altoyun kavramı yerine *sürek oyunu* (continuation game) kavramını kullanıyoruz. Sürek oyunu herhangi bir oyuncunun bilgi kümesidir ve bundan sonraki bilgi kümeleri, hareketler ve fayda fonksiyonlarından oluşur. Benzerlik katarsak, eğer oyuncular mükemmel Bayesyen denge stratejilerini takip ediyorlarsa, bu stratejiler sadece tüm oyun için Bayesyen Nash olmakla kalmayacak aynı zamanda her sürek oyunda da Bayesyen Nash dengesi olacaktır.

Mükemmel Bayesyen Nash dengesini tanıttıktan sonra, bu denge kavramının en fazla uygulandığı oyunlar olan sinyalleme oyunlarına bakacağız. Daha sonra Kreps ve Wilson (1982) tarafından geliştirilen *ardısal denge* kavramını inceleyeceğiz. Ardısal denge kavramı mükemmel Bayesyen denge kavramı ile benzer bir kavramdır fakat oyuncuların inançları konusunda daha fazla kısıtlama koyar. Bu da denge konusunda daha kısıtlayıcı bir tanımlama demektir.

Daha sonra Selten (1975)'nin geliştirdiği titreyen-el mükemmel denge ve Myerson (1978)'in geliştirdiği *öz denge* (proper equilibrium) kavramlarına bakacağız. Daha çok statik oyunların rafine edilmesi bağlamında düşünülen bu denge kavramları, daha makul bir denge elde edebilmek adına oyuncuların küçük bir olasılıkla da olsa hata yaptıklarını dikkate alırlar.

## 5.2 Mükemmel Bayesyen Nash Dengesi

Mükemmel Bayesyen Nash dengesinin ne olduğunu ilk önce somut bir örnek üzerinden tartışalım. Şekil 5.1’te verilen mükemmel olmayan bilgili oyunu düşünelim. İlk olarak 1. oyuncu  $A$ ,  $B$  ve  $C$  hareketleri arasında bir seçim yapsın. Eğer 1. oyuncu  $C$  hareketini seçerse 2. oyuncuya hareket sırası gelmeden oyun biter. Fakat eğer 1. oyuncu  $A$  veya  $B$  hareketini seçerse, 2. oyuncu  $C$  hareketinin seçilmediğini düşünecek (fakat  $A$  veya  $B$ ’den hangisinin seçildiğini bilemeyecek) ve sonra  $A'$  veya  $C'$  hareketini seçecektir. Bundan sonra da oyun biter ve her oyuncunun oluşan strateji profiline göre fayda düzeyi belirlenir.



Şekil 5.1

Bu oyunun Şekil 5.1’deki tabloda verilen stratejik-biçimli gösteriminde, iki Nash dengesinin olduğunu görürüz:  $(A, A')$  ve  $(C, C')$ . Bu Nash dengelerinin altoyun mükemmel olduğunu göstermek ve oyunun altoyunlarını tanımlamak için genişleyen-biçimli gösterimini kullanmalıyız. Dikkat edileceği gibi, oyunun kendisi dışında tek bir altoyun yoktur. Eğer bir oyun kendisi dışında bir altoyuna sahip değilse, altoyun-mükemmeliğin gerektiği koşul (yani oyuncuların stratejilerinin her altoyunda Nash dengesi olması) basitçe bütün oyun için sağlanır. Dolayısıyla altoyunu olmayan oyunlarda altoyun mükemmel Nash dengesi, Nash dengesinin tanımına denk bir tanımdır. Bu durumda  $(A, A')$  ve  $(C, C')$  Nash dengeleri aynı zamanda altoyun mükemmel Nash dengeleridir. Fakat açıkça  $(C, C')$  inandırıcı olmayan bir tehdide bağlıdır: 2. oyuncu kendisine hareket sırası geldiğinde,  $A'$  hareketini oynamanın  $C'$  hareketine baskın olduğunu görecektir. Böylece 1. oyuncu, 2. oyuncunun kendisini  $C'$  hareketini oynamakla tehdit etmesine inanıp  $C$  hareketini oynamaya yönlendirilemeyecektir.

Dolayısıyla denge kavramını güçlendirmemiz gerekir, yani oynanması makul gözükmeyen altoyun mükemmel Nash dengesi olan  $(C, C')$  strateji profilini devre dışı bırakacak koşullar tanımlamalıyız. Aşağıdaki iki koşulu empoze etmekle buna başlayabiliriz:

**1. Koşul.** Her bilgi kümesinde, hareket sırası gelen oyuncu varılan bilgi kümesinde hangi noktada olduğuna dair bir inanç oluşturmak zorundadır. Tekil olmayan bilgi kümesi için oluşturulan inanç, bu bilgi kümesindeki noktalar için tanımlanan bir olasılık dağılımıdır. Tekil bilgi kümesi içinde tek bir karar noktası olduğundan oyuncunun bu noktada olma olasılığı birdir, dolayısıyla oyuncu kesin

olarak hangi noktada olduğunu bilir.

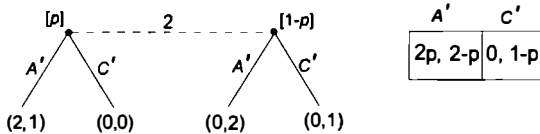
Daha formel ifade edersek, herhangi bir  $s$  strateji profili için, her  $i \in N$  oyuncusunun her  $h_i \in H_i$  bilgi kümesinde,  $i$  oyuncusu  $h_i$  bilgi kümesine vardığını öğrendiğinde bu bilgi kümesi içindeki karar noktaları için inançlar oluşturur; bunları  $p_i(h_i) \in \Delta(h_i)$  şeklinde ifade ederiz. Burada oluşturulan  $p_i(h_i) \in \Delta(h_i)$  inançları bilgi kümesindeki karar noktaları üzerine tanımlanan olasılık dağılımıdır. Her oyuncunun inançlarından oluşan inanç profili ise  $p = (p_1, \dots, p_n)$  şeklinde ifade edilir.

2. *Koşul.* Oyuncuların inançları verildiğinde, oyuncuların stratejileri *ardısal rasyonel* olmalıdır, yani hareket sırası gelen oyuncunun her bilgi kümesindeki hareketi (ve takip eden stratejisi) bu bilgi kümesinde oyuncunun inançları ve diğer oyuncuların takip eden stratejileri verildiğinde optimal olmalıdır, yani Nash denge stratejisi izlenmelidir.

Herhangi bir  $i$  oyuncusunun,  $h_i \in H_i$  bilgi kümesi ile tanımlanan süre oyununu düşünelim ve bu bilgi kümesinde inançların  $p_i(h_i)$  olduğunu varsayalım. Bu süre oyununda oynanan  $(s, p)$  strateji-inanç profili Nash dengesi olmalıdır.

Süre oyununun ne olduğunu burada biraz daha açalım. Daha önce bir altoyunun tekil bir bilgi kümesi ile oluştuğunu ve bundan sonraki tüm karar noktalarını içerdiğini belirtmiştik. Yani altoyunun bilgi kümeleri, hareketleri ve fayda düzeyleri başlangıçta verilen oyunun bir tür küçültülmesiyle oluşur. Şimdi altoyun kavramını genelleştirip, süre oyun kavramını kullanabiliriz. Süre oyunu herhangi bir oyunun bilgi kümesidir ve bu bilgi kümesi yine bir tür sınırlamayla bundan sonraki bilgi kümeleri, hareketleri ve fayda fonksiyonlarından oluşur. Eğer ilk bilgi kümesi tekil değilse, bu süre oyun altoyun değildir çünkü ilk karar noktası olmadığından bu süre oyunu kendi içinde bir oyun olarak oynanamaz. Bu yüzden süre oyununu tarif ederken, ilk bilgi kümesindeki karar noktaları üzerine olasılık tanımlamalıyız.

Şekil 5.1'de 1. koşul şunu ima eder: Eğer oyunda 2. oyuncu tekil olmayan bilgi kümesine vardysa (yani bu bilgi kümesi ile tanımlanan süre oyununda isek; bu Şekil 5.2'de gösterilmektedir), 2.oyuncu hangi karar noktasına varıldığı hakkında bir inanç oluşturacaktır, yani 1. oyuncunun  $A$  veya  $B$  hareketini mi oynadığı konusunda bir inanç oluşturacaktır. Örneğin 2. oyuncu süre oyununda sol karar noktasında olma olasılığının  $p$  ve sağ karar noktasında olma olasılığının ise  $1 - p$  olduğuna inansın.



Şekil 5.2 İkinci oyuncu için süre oyunu

Şekil 5.2'de gösterilen süre oyununda  $A'$  tek Nash dengedir çünkü  $C'$  hareketi

2. koşuldan hareketle mahkum strateji olmasından dolayı elenir. Bunu biraz açalım. 2. oyuncunun  $(p, 1 - p)$  inancı veri alındığında,  $C'$  hareketini oynamaktan dolayı beklenen faydası  $p.0 + (1 - p).1 = 1 - p$  iken,  $A'$  hareketini oynamaktan dolayı beklenen faydası ise  $p.1 + (1 - p).2 = 2 - p$ 'dir. Herhangi bir  $p$  değeri için  $2 - p > 1 - p$  olduğundan, 2. koşul 2. oyuncunun  $C'$  hareketini oynamaması gerektiğini söyler. Bu yüzden basit bir şekilde oyundaki her oyuncunun bir inançla sahip olduğu ve bu inanç veri alındığında optimal hareket ettiği düşünüldüğünde,  $(C, C')$  dengesinin mahkum strateji profili olduğu için elenmesi gerekir (Şekil 5.2'deki stratejik-biçimli gösterime bakın).

Burada unutulmaması gereken önemli noktalardan biri şudur: 1. ve 2. koşullar oyuncuların inançlara sahip olduğunu ve veri inançlarına uygun olarak optimal hareket ettiklerini belirtir. İnançların makullüğü ile ilgilenmez.

Bu arada oyuncuların inançları üzerinde daha fazla koşul empoze etmek için denge patikası üzerindeki bilgi kümeleri ve denge patikası dışındaki bilgi kümeleri ayrımını yapmamız gerekir.

**Tanım 5.1** *Oyunun denge stratejilerine göre oynanması durumunda pozitif olasılıkla bir bilgi kümesine varlıyorsa, bu bilgi kümesi denge patikasıdır denir. Fakat denge stratejilerinin takip edilmesi durumunda bir bilgi kümesine kesinlikle varılamayacaksa, bu bilgi kümesine de denge-dışı patikadadır denir.*

Şimdi mükemmel Bayesyen dengenin daha da güçlendirilmesi için gerekli diğer bir koşulu daha empoze edebiliriz.

3. *Koşul.* Denge patikasıdaki bilgi kümelerinde, inançlar Bayes kuralı ve oyuncuların denge stratejileri tarafından belirlenir.

Şekil 5.1'deki  $(A, A')$  altoyun mükemmel Nash dengesinde 2.oyuncunun inancı  $p = 1$  olmak zorunda olduğunu gösterdik. Yani 1.oyuncunun denge stratejisi veri alındığında (yani  $A$ ), 2.oyuncu bilgi kümesindeki hangi noktaya varıldığını bilir.

Diğer yandan, 2. oyuncunun 1. oyuncu hakkında farklı bir inanç oluşturduğunu da düşünebiliriz. Örneğin 2. oyuncu, 1. oyuncunun  $q_1$  olasılıkla  $A$  hareketini,  $q_2$  olasılıkla  $B$  hareketini ve  $1 - q_1 - q_2$  olasılıkla da  $C$  hareketini oynadığı bir karma stratejiyi takip ettiğini düşünebilir. 3 .Koşul (yani inançların Bayes kuralı ve buna uygun denge stratejilerin takip edilmesine göre) 2. oyuncunun, 1. oyuncunun  $A$  hareketini oynama olasılığına dair inancının  $p = q_1 / (q_1 + q_2)$  olmasını gerektirir. Bu olasılık 1. oyuncunun  $C'$ 'yi oynamaması veriyken  $A'$ 'yı oynama olasılığının Bayes kuralı (4.1)'den türetilmesiyle elde edilen inançtır.

1-3 koşulları, mükemmel Bayesyen dengenin özünü ifade eder. Bu koşullarla, denge tanımlanırken inançlar stratejiler düzeyine yükseltilir. Bir denge artık sadece her oyuncunun bir stratejiye sahip olmasını değil, bunun yanında oyuncunun her hareketi sırasında bilgi kümesindeki inançlarını da içerir. Oyuncuların inançlarını bu şekilde açıkça ifade etmenin avantajı, oyuncuların daha önce de söylendiği gibi, inandırıcı stratejilerini seçtiklerini ifade etmektir.

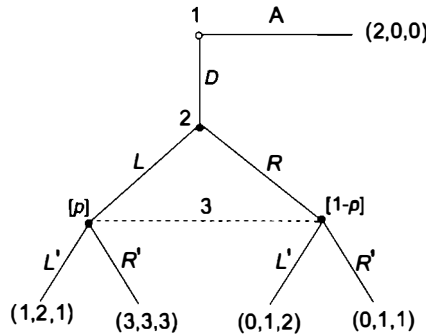
Diğer yandan, oyuncular 3. koşulda belirtildiği gibi sadece denge patikasında

değil, aynı zamanda denge-dışı patikada da makul inançlara sahip olmalıdır. Denge-dışı patikadaki makul inançların varlığını aşağıdaki 4. Koşulla ifade edelim.

4. *Koşul.* Denge-dışı patikalardaki bilgi kümelerinde, mümkün olduğu yerlerde, inançlar Bayes kuralı ve oyuncuların denge stratejileri ile belirlenir.

4.koşuldan tam olarak ne anladığımızı belirtelim ve ayrıca bu koşuldaki "mümkün olduğu yerlerde" sözünün ne olduğunu açıklığa kavuşturalım. Bunun için ilk önce aşağıda verilen oyun örneklerine bakalım.

Şekil 5.3'te verilen oyun, bir altoyuna sahiptir. Bu altoyun 2. oyuncunun tekil bilgi kümesinde başlar (yani 1. oyuncu D hareketini oynadıktan sonra başlayan altoyun). Burada oyun 2. ve 3. oyuncu arasında oynanır ve tek bir Nash dengesi vardır, o da  $(L, R')$  strateji profilidir. Böylece tüm oyunun tek altoyun mükemmel Nash dengesi  $(D, L, R')$  olur. 3. oyuncunun stratejileri ve  $p = 1$  inancı 1-3 koşullarını sağlar (siz de kontrol ediniz). Bunlar aynı zamanda 4. koşulu da sağlar. Çünkü bu denge patikasının dışında bir bilgi kümesi olmadığı için 4. koşul direkt sağlanır.

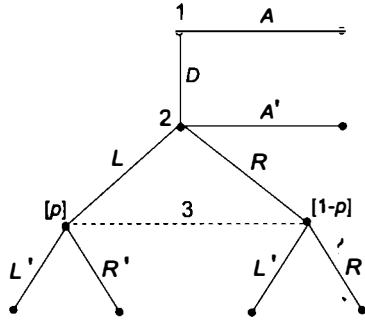


Şekil 5.3

Şimdi de 3. oyuncunun inancının  $p = 0$  olduğu durumda,  $(A, L, L')$  strateji profiline bakalım. Bu strateji profili Nash dengesidir, dolayısıyla hiçbir oyuncu tek taraflı bir sapma göstermeyecektir. Bu strateji profili ve inanç aynı zamanda 1-3 koşullarını sağlar. 3. oyuncu bu inanç doğrultusunda optimal davranır ve 1. ve 2. oyuncular diğer oyuncuların takip eden stratejileri veri alındığında optimal davranırlar. Fakat bu Nash dengesi altoyun mükemmel değildir, çünkü oyundaki tek altoyunun tek Nash dengesi  $(L, R')$ 'dir. Dolayısıyla 1-3 koşulları oyuncunun stratejilerinin bir altoyun mükemmel Nash dengesi olmasını garanti etmez. Burada problem, 3. oyuncunun inancının  $(p = 0)$ , 2. oyuncunun  $L$  stratejisi ile tutarsız olmasıdır. Fakat 1-3 koşulları 3. oyuncunun inancı konusunda herhangi bir kısıtlama empoze etmez çünkü eğer oyun belirlenen stratejilere göre oynansaydı 3.oyuncunun bilgi kümesine varılmazdı. Fakat 4. koşul, 3. oyuncunun inancının, 2. oyuncunun stratejisi tarafından belirlenmesini empoze eder: Eğer 2. oyuncunun stratejisi  $L$  ise 3. oyuncunun inancı  $p = 1$  olmak zorundadır; eğer 2. oyuncunun stratejisi  $R$  ise 3.oyuncunun inancı  $p = 0$  olmak zorundadır. Fakat eğer 3. oyun-

cunun inancı  $p = 1$  ise bu durumda 2. koşul (sırası geldiğinde optimal davranma koşulu) 3. oyuncunun stratejisinin  $R'$  olmasını gerektirir, böylece  $(A, L, L')$  strateji profili ve  $p = 0$  inancı 1-4 koşullarını sağlamaz.

4. koşulu anlamak için kullanacağımız diğer bir örnek de Şekil 5.4'te gösterilmektedir. Bu örnekte 2. oyuncu oyunun bitmesine neden olan  $A'$  gibi üçüncü bir olası harekete sahip olsun. Basit olması için oyundaki fayda düzeylerini ihmal edelim. Daha önce olduğu gibi, eğer 1. oyuncunun denge stratejisi  $A$  ise, 3. oyuncunun bilgi kümesi denge-dışı patikadadır. Dolayısıyla şimdi 4. koşul 2. oyuncunun stratejisinden 3. oyuncunun inancını belirleyemeyebilir. Eğer 2. oyuncunun stratejisi  $A'$  ise, 4. koşul 3. oyuncunun inançları konusunda bir sınırlama koyamaz. Fakat eğer 2. oyuncunun stratejisi  $L$  hareketini  $q_1$  olasılıkla,  $R$  hareketini  $q_2$  olasılıkla ve  $A'$  hareketini  $1 - q_1 - q_2$  olasılıkla oynamak şeklinde olursa, 4. koşul 3. oyuncunun inancının  $p = q_1/(q_1 + q_2)$  olması gerektiğini zorunlu kılar. Yani 3. oyuncunun bilgi kümesinde başlayan sürekin sol karar noktasında olma olasılığı, yani 3. oyuncunun inancı, 2. oyuncunun  $A'$  hareketini oynamaması veriyken  $L$  hareketini oynama olasılığı,  $p = q_1/(q_1 + q_2)$  olduğu şeklindedir.



Şekil 5.4

Bu dört koşuldaki hareketle artık mükemmel Bayesyen dengeyi tanımlayabiliriz.

**Tanım 5.2** *Mükemmel Bayesyen denge 1-4 koşullarını sağlayan stratejiler ve inançlardan oluşur.*

Mükemmel Bayesyen denge kavramı basitçe bir stratejiler ve inançlar kümesidir; buna *strateji-inanç profili* de denir. Buna göre oyunun herhangi bir aşamasında stratejiler inançlara göre optimaldir ve inançlar da denge stratejilerinden ve Bayes kuralından türetilir.

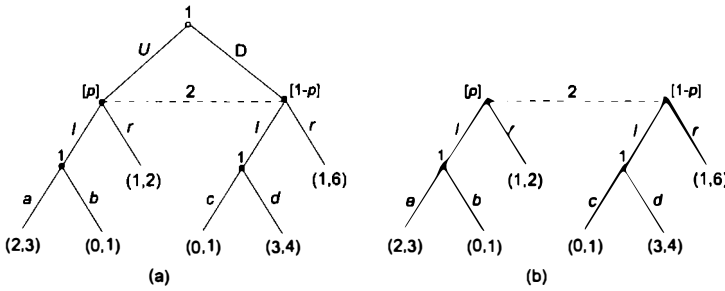
Mükemmel Bayesyen dengeyi diğer denge kavramlarıyla ilişkilendirirsek şunu söyleyebiliriz: Bir Nash dengesinde, her oyuncunun stratejisi diğer oyuncuların stratejilerine en iyi tepki olmak zorundadır; böylece hiçbir oyuncu baskın mahkum bir stratejiyi seçmez. Mükemmel Bayesyen dengede, 1. ve 2. koşullar herhangi bir bilgi kümesinde hiçbir oyuncunun stratejisinin kesin mahkum strateji

olamayacağını ifade eder. Nash ve Bayesyen Nash dengeleri denge-dışı patikadaki bilgi kümelerinde bu özelliği taşımaz. Dahası altoyun mükemmel Nash dengesi bile denge-dışı patikada bu özelliği taşımaz. Mükemmel Bayesyen denge bu tür boşlukları kapatır. Kısaca oyuncular denge-dışı patikadaki herhangi bir bilgi kümesindeki kesin mahkum stratejileri oynamakla tehdit edilemez.

Mükemmel Bayesyen denge kavramının önemli özelliklerinden biri, oyuncuların inançlarını açık hale getirmesidir. Böylece sadece 3. ve 4. koşulları empoze etmekle kalmaz, denge-dışı patikadaki koşulları da empoze eder. Mükemmel Bayesyen denge,  $i$  oyuncusunun denge-dışı bilgi kümesindeki kesin mahkum bir stratejiyi oynamasını engellediğinden,  $j$  oyuncusunun,  $i$  oyuncusunun böyle bir stratejiyi oynayacağına inanması makul değildir. Şimdi bu dört koşul üzerinden mükemmel Bayesyen dengesini bulabileceğimiz bir örneğe bakalım.

### Örnek 5.1

Şekil 5.5(a)'da verilen genişleyen-biçimli oyunda, belirli bir  $p \in [0, 1]$  için strateji-inanç profilinin  $s = (U, a, d; l; p)$  olduğunu düşünelim.



**Şekil 5.5** (a) Genişleyen biçimli bir oyun ve (b) İkinci oyuncunun bu oyunda karşılaştığı süreklilik oyunu

2. oyuncunun bilgi kümesinde başlayan süreklilik oyununu düşünelim (Şekil 5.5(b)). 2. oyuncunun bilgi kümesinde başlayan süreklilik oyununa göre,  $s$  strateji profilinin 2. koşul testini geçip geçmediğine bakalım. Bunun için süreklilik oyunu için stratejik-biçim oluşturabiliriz. Örneğin,  $(a, c; l)$  sınırlandırılmış strateji profiline göre beklenen fayda vektörü  $p \cdot (2, 3) + (1 - p) \cdot (0, 1) = (2p, 2p + 1)$  şeklindedir. Benzer hesaplamalar diğer tüm strateji profilleri için de yapılabilir. Bunlar Tablo 5.1'de gösterilmektedir.

Bu süreklilik oyununda  $s$  strateji profilinin 2. koşulu geçmesi için,  $(a, d; l; p)$  strateji profilinin Bayesyen Nash dengesi olması gerekir. Bu da 2. oyuncunun  $(a, d)$  strateji profilinin 1. oyuncunun  $l$  stratejisine en iyi tepkisi olmasını gerektirir, yani

$$3 - p > \max\{2p, 0, 3 - 3p\}.$$

|          | $l$              | $r$         |
|----------|------------------|-------------|
| $(a, c)$ | $2p, 1 + 2p$     | $1, 6 - 4p$ |
| $(a, d)$ | $3 - p, 4 - p$   | $1, 6 - 4p$ |
| $(b, c)$ | $0, 1$           | $1, 6 - 4p$ |
| $(b, d)$ | $3 - 3p, 4 - 3p$ | $1, 6 - 4p$ |

**Tablo 5.1**

Bu her  $p \in [0, 1]$  için doğrudur. 2.oyuncunun  $(a, d)$  stratejisine en iyi tepkisinin  $l$  olması için de şu koşul sağlanmalıdır:

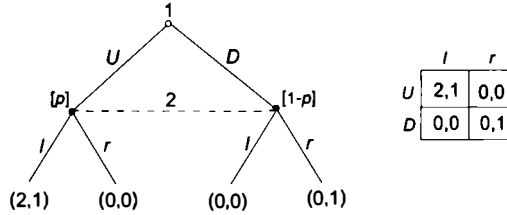
$$4 - p > 6 - 4p.$$

Bu da ancak  $p \in [2/3, 1]$  ise geçerlidir. Bu yüzden,  $(a, d; l; p)$  eğer  $p \in [2/3, 1]$  ise bu sürekle oyunun Bayesyen Nash dengesidir.

Acaba 2. oyuncunun bilgi kümesinde başlayan sürekle oyunda  $l$  kesin mahkum strateji midir? Bu durum ancak aşağıdaki durum sağlanırsa mümkündür:

$$6 - 4p > \max\{1 + 2p, 4 - p, 1, 4 - 3p\} = 4 - p, \text{ dolayısıyla } p < 2/3.$$

Fakat dikkat edilirse, 1. ve 2. koşullar Nash dengesini dahi elde etmek için güçlü koşullar değildir. Şekil 5.6'da verilen oyuna bakalım. Bu oyunda örneğin  $(U, r; p = 0)$  strateji-inanç profili, 1.ve 2.koşulları sağlasalar bile oyunun Nash dengesi değildir. Bunun için de 3.koşul devreye girer. Yani dengede oyuncuların inançlarının doğruluğunu garanti altına alan koşula ihtiyacımız vardır.

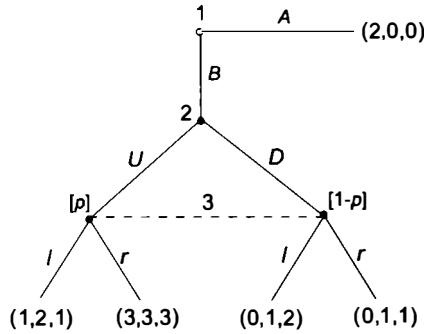


**Şekil 5.6** 1-2 Koşulları Nash dengesini bile garanti altına almaz

Bu koşul Nash dengesi olmayan  $(U, r; p = 0)$  strateji profilini devre dışı bırakır. 1. oyuncunun  $U$  stratejisini seçtiğini veri aldığımızda, 2. oyuncunun kendi bilgi kümesindeki inancı,  $U$  stratejisi üzerinde yoğunlaşmasını (tüm ağırlığını bu stratejiye vermesini) gerektirir, yani  $p = 0$  yerine  $p = 1$  olmalıdır.

Fakat 3. koşul da, geriye kalan strateji-inanç profillerinin altoyun mükemmel olmasını sağlayamaz. Şekil 5.7'deki oyunu düşünelim. 2. oyuncunun tekil bilgi kümesinde başlayan altoyunu düşünün. Bu altoyun tek bir Nash dengesine,  $(U, r)$ , sahiptir. Bu yüzden tüm oyunun tek bir altoyun mükemmel dengesi vardır, o da  $(B, U, r)$ 'dir. Her bilgi kümesi patika üzerindedir ve Bayes kuralı  $p = 1$  olmasını

ima eder. Böylece  $(B, U, r : p = 1)$  strateji-inanç profili 1-3 koşullarını sağlar.



**Şekil 5.7** 1-3 Koşulları oyunaltı mükemmelliği garanti altına almaz

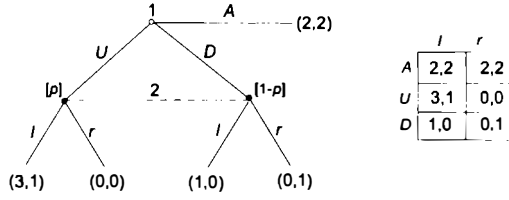
Şimdi de  $(A, U, l : p = 0)$  strateji-inanç profilini düşünelim. Bu strateji-inanç profili Nash dengesidir ve 1-3 koşullarını sağlar. Dikkat edilirse, 3. oyuncunun bilgisi patika-dışıdır ve bu yüzden 3. koşul  $p$  olasılığı üzerine herhangi bir kısıt koymaz. Fakat bu profil altoyun mükemmel değildir çünkü daha önce altoyun mükemmelliğin 2. ve 3. oyuncuların  $(U, r)$  stratejisini oynamalarını gerektirdiğini görmüştük. 3. oyuncunun bilgi kümesine varmanın tek yolu 1. oyuncunun  $B$  hareketini seçmesidir. Bu durumda, strateji profiline göre, 2. oyuncu  $U$  hareketini seçerdi. Bu yüzden 3. oyuncu, kendi bilgi kümesine varma koşuluna bağlı olarak, kendisinin soldaki karar noktasında olacağını çıkarsamalı ve bu yüzden  $p = 0$ 'dan ziyade  $p = 1$  olduğuna inanmalıdır. Bu yüzden 4. koşul altoyun mükemmel olmayan dengeleri elemine eder (hatırlanacak olursa, 4. koşul, herhangi bir dengedışı patikadaki inançların, mümkün olduğu yerde Bayes kuralına göre ortaya çıkan strateji profili tarafından belirlenmesini di).

Diğer yandan, bazen mükemmel Bayesyen dengenin bulunduğu sonuçlara da itiraz edilebilir çünkü bu dengeler şüpheli patika-dışı inançlara dayanabilir. Buna bir örnek verelim.

## Örnek 5.2

Şekil 5.8'de verilen oyunu düşünelim. Bu oyunda Alper (1. oyuncu) ve Dilek (2. oyuncu) birlikte oynamaktadır. Oyunun iki pür strateji mükemmel Bayesyen dengesi olduğu görülmektedir:  $(U, l : p = 1)$  ve  $\{(A, r; p); p \in [0, 1/2]\}$ .

Bu dengelerden ikincisinde, Dilek'in bilgi kümesi patika-dışıdır. Bu bilgi kümesine varıldığı veri alındığında, bu bilgi kümesine Alper'in  $D$  hareketi yoluyla varılma olasılığı pozitifdir. Fakat stratejik-biçimli gösterime bakılırsa,  $D$  hareketinin, Alper'in  $A$  hareketi ile mahkum edildiği görülür. Diğer yandan,  $U$  mahkum edilemez. Eğer Dilek, beklenilenin tersine Alper'in  $A$  hareketini seçmediğini gözlemlerse Dilek, Alper'in gerçek seçiminin ne olduğuna inanmalı? Alper acaba  $U$  hareketini mi yoksas  $D$  hareketini mi seçti?



Şekil 5.8 Mükemmel Bayesyen denge rafine edilebilir

Alper  $A$  baskın stratejisi yerine  $D$  hareketini oynayarak asla daha kârlı bir davranışta bulunmuş olmazdı. Fakat Alper eğer Dilek'in  $l$  hareketini oynayacağını düşünseydi  $U$  hareketini oynayabilirdi, bu da Alper'e 2 yerine 3 birimlik fayda sağlardı. Bu yüzden Alper'in  $U$  yerine  $D$  hareketini oynamasına sıfır ağırlık verilmelidir. Yani Dilek'in bilgi kümesi patika dışıdır, dolayısıyla,  $p = 1$  olmalıdır. Kısaca her oyuncu diğer bir oyuncunun belirli bir bilgi kümesindeki kesin mahkum bir stratejiyi oynamasıyla varılan karar noktalarına sıfır ağırlık vermemelidir.

### 5.3 Sinyalleme Oyunları

Mükemmel Bayesyen denge kavramı, sinyalleme oyunları diye adlandırılan oyunlarda çok sık kullanılır. Şimdi bu oyunların ne olduğuna bir bakalım.

Bayesyen oyunlarda genellikle bilginin oyuncular arasında eşit dağıldığı varsayımı yapılır. Buna göre oyunun bilinmeyen parametreleri üzerindeki olasılık dağılımının herkesçe bilindiği varsayılır. Fakat gerçek hayatta sıklıkla karşılaştığımız gibi oyuncular oyunun bilinmeyen parametreleri hakkında farklı (asimetrik) bilgiye sahiptirler.

Bu tür asimetrik bilgili oyunlarda genelde bir oyuncu bilinmeyen bir parametre hakkında tam bilgiye sahipken, diğer oyuncular sadece bunu belirli bir olasılıkla tahmin edebilmektedir. Örneğin, işe başvuran biri yeteneklerinin yüksek veya düşük olduğunu sadece kendisi bilirken işveren firma bunu bilmeyebilir veya bir araba satıcısı sattığı arabaların kalitesini bilirken, alıcılar bunu bilmeyebilir. Bu gibi durumlarda bilgi tek taraftır.

Tek-taraflı bilgi asimetrisinin olduğu oyunlarda, bilgisi olmayan ya da az bilgisi olan oyuncunun oyuna katılması beklenmeyebilir. Fakat tam tersi, hayatta böyle pek çok durum söz konusudur ve az bilgili oyuncular bu tür oyunlara katılırlar ya da katılmak zorunda kalabilirler. Genelde bu tür oyunlara katılım için bilgisi olan taraf daha az bilgisi olan tarafın karar vermesi adına sinyal yollar (örneğin işe başvuran kişi üniversite diplomasını gösterir, araba satıcısı arabalarının kalitesine dair sertifikalar gösterir). Bu sinyaller, bilgili oyuncunun hareketi olarak düşünülebilir ve daha az bilgili oyuncu hareketini bu tür sinyallere dayandırır. Bu, sinyalleme oyunlarının temelidir.

Daha fazla bilgisi olan oyuncu, sinyalini yolladıktan sonra bile, daha az bil-

gisi olan oyuncu bu sinyallerin inandırıcılığı konusunda şüphelere sahip olabilir. Gerçekte tüm sinyalleme oyunları hangi sinyallerin gönderilmesi gerektiği ve gönderilen sinyallere nasıl tepki verileceğiyle ilgilenir. Bu yüzden de yanlış sinyallerin gönderilmesi söz konusu olabilir.

Bir sinyalleme oyununda, özel bilgiye sahip oyuncuya *Gönderici* denir, çünkü tipi hakkında mesaj yollar. Daha az bilgisi olan ve mesajı alan oyuncuya *Alıcı* denir. Gönderici tarafından seçilen strateji (yani mesaj) alıcının gönderici hakkındaki inançlarını güncellemesine imkan verir. Lider-takipçi oyunlar bağlamında da düşünebilecek bu tür oyunlarda lider özel bilgisiyle göndericidir, alıcı ise takipçi oyuncu olarak kendi hareketinden önce liderin mesajını (hareketini) gözlemler fakat göndericinin tipini gözlemleyemez.

Ekonomide sinyalleme oyunları ilk olarak Spence (1974) tarafından emek piyasası için kullanılmıştır. Bu modelde gönderici (lider) işçi, alıcı (takipçi) ise işverendir. Sinyalleme oyun uygulamaları ekonominin birçok alanında kullanılır; makroekonomi, finans, endüstriyel ekonomi gibi. Biz burada, bu bölümde, tek-aşamalı sinyalleme oyunlarına (oyuncuların sadece bir kez oynadıkları sinyalleme oyunlarına) bakacağız. Fakat literatürde çok yaygın olmasa da çok-aşamalı, tekrarlı ve stokastik sinyalleme oyunları kullanılmaktadır.

Sinyalleme oyunlarında daha-fazla bilgiye sahip olan oyuncu daha-az bilgiye sahip oyuncudan daha önce hareket eder, yani sinyal yollar. Fakat bazen daha-az bilgili oyuncunun daha-fazla bilgili oyuncudan önce hareket ettiği durumlar söz konusu olabilir. Bu da daha çok, daha-az bilgili olanların daha-fazla bilgili olanlara bir kontrat sundukları ve kendisine kontrat sunulan daha-fazla bilgili tarafın da buna göre tepki verdiği durumları tanımlar. Örneğin, işveren (işçinin yetenekleri konusunda daha-az bilgili taraf) ilk önce ücret teklifinde bulunabilir, daha sonra işçi (kendi yetenekleri konusunda daha-fazla bilgili) bu tekliflere göre eğitim düzeyini veya yeteneklerini geliştirme konusunda karar verebilir. Bu tür oyunlara, *tarama oyunları* (*screening games*) denir. İşveren, işçinin yeteneklerine göre yaptığı ücret teklifleri ile işçiyi sınar, taramadan geçirir, bu tekliflere uygun olmayalar ya elenir ya da ona göre eğitim almaya karar verirler. Bu bölümde tarama oyunlarından ziyade sinyalleme oyunlarını inceleyeceğiz.

### 5.3.1 Pür Stratejilerde Dengenin Gösterimi

Bir sinyalleme oyununda iki oyuncumuz olsun: Gönderici (G) ve Alıcı (R). Oyunun zamanlaması aşağıdaki gibidir:

1. Doğru  $T = \{t_1, \dots, t_n\}$  tipler kümesinden,  $p(t_i)$  gibi bir olasılık dağılımına göre Gönderici için bir tip çeker, burada her  $i$  için  $p(t_i) > 0$  ve  $p(t_1) + \dots + p(t_n) = 1$ 'dir.

2. Gönderici  $t_i$  tipini gözlemler ve  $M = \{m_1, \dots, m_n\}$  olası mesajlar kümesinden bir  $m_j$  mesajı seçer. Yani göndericinin stratejisi, tip kümesinden mesaj kümesine tanımlanan bir fonksiyondur:

$$m : T \rightarrow M,$$

$$t_i \rightarrow m(t_i).$$

3. Alıcı  $m_j$  mesajını gözlemler ( $t_i$  tipini değil) ve  $A = \{a_1, \dots, a_K\}$  olası hareketler kümesinden  $a_k$  gibi bir hareket seçer. Yani alıcının stratejisi, mesaj kümesinden hareket kümesine tanımlanan bir fonksiyondur:

$$a : M \rightarrow A,$$

$$m_j \rightarrow a(m_j).$$

4. Oyuncuların fayda düzeyleri ise  $u_G(t_i, m_j, a_k)$  ve  $u_R(t_i, m_j, a_k)$  şeklinde ifade edilir.

Birçok uygulamada,  $T$ ,  $M$  ve  $A$  kümeleri reel sayılar kümesinde tanımlıdır ve sınırlı kümelerden oluşur. Burada olası mesajlar kümesi Doğa'nın seçtiği tiplere bağlıdır,  $m(t_i)$ , ve olası hareketler kümesi Göndericinin seçtiği mesajlara bağlıdır,  $a(m_j)$ .

Şimdi bu kavramları somutlaştırmak için basit bir örnek verelim. Şekil 5.9 böyle bir oyunun, bir sinyalleme oyunun genişleyen-biçimli gösterimini vermektedir:  $T = \{t_1, t_2\}$ ,  $M = \{m_1, m_2\}$ ,  $A = \{a_1, a_2\}$  ve  $\Pr\{t_1\} = p$ . Oyun ağacının ilk karar noktasından akıp alt terminal noktalarına uzanmadığına dikkat ediniz. Fakat oyun daha çok ağacın ortasından bir hareketle sağa ve soldaki terminal noktalara giden bir yapı gösterir.

Stratejinin tanımını tekrar hatırlarsak: Strateji bütüncül bir hareket planıdır yani strateji, oyuncuya hareket sırası geldiğinde her olası durum için bir hareket tanımlayan bir plandır. Bu yüzden sinyalleme oyununda, Göndericinin pür stratejisi, Doğa'nın ( $N$  ile gösterilmektedir) seçtiği herhangi bir tip için hangi mesajın seçileceğini belirler, Alıcının pür stratejisi ise Göndericinin seçtiği her mesajı için bir hareket belirleyen bir fonksiyondur,  $a(m_j)$ .

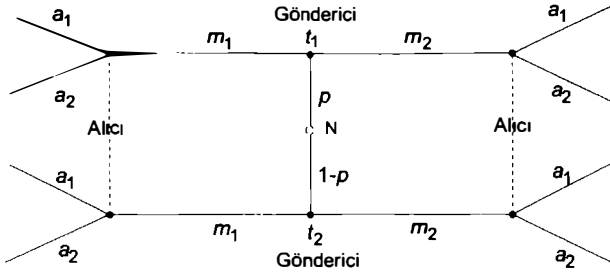
Böyle bir oyunda Göndericinin ve Alıcının her ikisinin de dört stratejisi vardır Gönderici için:

1. strateji: Doğa  $t_1$  çekerse,  $m_1$ 'i oyna ve Doğa  $t_2$  seçerse  $m_1$ 'i oyna.
2. strateji: Doğa  $t_1$  çekerse  $m_1$ 'i oyna ve Doğa  $t_2$  seçerse  $m_2$ 'i oyna.
3. strateji: Doğa  $t_1$  çekerse  $m_2$ 'i oyna ve Doğa  $t_2$  seçerse  $m_1$ 'i oyna.
4. strateji: Doğa  $t_1$  çekerse  $m_2$ 'i oyna ve Doğa  $t_2$  seçerse  $m_2$ 'i oyna.

Alıcı için:

1. strateji: Gönderici  $m_1$  seçerse,  $a_1$ 'i oyna ve Gönderici  $m_2$  seçerse  $a_1$ 'i oyna.
2. strateji: Gönderici  $m_1$  seçerse  $a_1$ 'i oyna ve Gönderici  $m_2$  seçerse  $a_2$ 'i oyna.
3. strateji: Gönderici  $m_1$  seçerse  $a_2$ 'i oyna ve Gönderici  $m_2$  seçerse  $a_1$ 'i oyna.
4. strateji: Gönderici  $m_1$  seçerse  $a_2$ 'i oyna ve Gönderici  $m_2$  seçerse  $a_2$ 'i oyna.

Göndericinin birinci ve dördüncü stratejilerine *birleştirici* (*pooling*) stratejiler denir çünkü her tip aynı mesajı verir. İkinci ve üçüncü stratejilerine ise *ayırıştırıcı*



Şekil 5.9 Sinyalleme oyunu

(*separating*) stratejiler denir çünkü her tip farklı bir mesaj gönderir. Diğer yandan, bu örnekte olduğu gibi iki-tip oyunculu bir oyunda benzer karma stratejiler de olabilir; buna *karma* veya *hibrid* stratejiler denir, yani örneğin  $t_1$  tipi  $m_1$  mesajını oynar fakat  $t_2$  tipi  $m_1$  ve  $m_2$  arasında rassal seçimde bulunur. İki tipten daha fazla tipin olduğu oyunlarda, kısmi birleştirici (veya kısmi-ayrıştırıcı) stratejiler söz konusu olabilir, burada veri tipler kümesindeki tüm tipler aynı mesajı yollar fakat farklı tipler kümesi farklı mesajlar yollar.

Şimdi bir sinyalleme oyununda mükemmel Bayesyen dengeyi ifade etmeye çalışalım. Bunun için de daha önce verdiğimiz 1-3 koşullarının tanımlarını, sinyalleme oyunlarında pür strateji mükemmel Bayesyen dengesinin tanımına taşıyalım (dikkat edilirse, 4. koşul sinyalleme oyununda anlamlı değildir çünkü sinyalleme oyunlarında tüm mesajlar patika üzerindedir).

Gönderici bir mesaj seçtiğinde oyunun tüm tarihini bildiğinden dolayı, bu seçim tekil bir bilgi kümesinde gerçekleşir. Yani 1.koşul Göndericiye uygulandığında sadece tek bir karar noktası verir. Fakat tersine Alıcı, Göndericinin mesajını gözlemledikten sonra Göndericinin tipini bilmeden bir hareket seçer. Bu yüzden Alıcının seçimi tekil olmayan bir bilgi kümesidir. Alıcıya 1.koşulu uygularsak aşağıdaki durumu elde ederiz:

**1. Sinyalleme Koşulu.** Alıcı,  $M$  mesaj kümesinden bir  $m_j$  mesajını gözlemledikten sonra, hangi tiplerin  $m_j$  mesajını gönderdiğine ait bir inanca sahip olmak zorundadır. Bu inancı  $\mu(t_i | m_j)$  olasılığı ile gösteriyoruz, burada her  $t_i \in T_i$  için,  $\mu(t_i | m_j) \geq 0$  ve  $\sum_{t_i \in T} \mu(t_i | m_j) = 1$  olmalıdır.

Göndericinin mesajı ve Alıcının inancı veri alındığında, Alıcının optimal hareketini ifade edebiliriz. Mükemmel Bayesyen denge için tanımladığımız 2. koşulu Alıcıya uygularsak şunu elde ederiz:

**2. Sinyalleme Koşulu-2A.** Her  $m_j \in M$  mesajı için, Alıcı  $a^*(m_j)$  hareketini tipler hakkındaki  $\mu(t_i | m_j)$  inançları doğrultusunda beklenen faydasını maksimize edecek şekilde seçer. Dolayısıyla  $a^*(m_j)$  aşağıdaki problemi çözen değerdir:

$$\max_{a_k \in A} \sum_{t_i \in T} \mu(t_i | m_j) u_R(t_i, m_j, a_k).$$

2. koşul Göndericiye de uygulanır fakat Gönderici tam bilgiye sahip olduğundan inancının ifade edilmesi çok da önemli değildir. Gönderici oyunun başında hareket ettiğinden dolayı 2. koşul aynı zamanda basitçe Alıcının stratejisi verildiğinde, Göndericinin izlediği stratejinin optimal olmasını ifade eder.

2. *Sinyalleme Koşulu-2B*. Tip uzayındaki her  $t_i \in T$  tipi için Gönderici  $m^*(t_i)$  mesajını, Alıcının  $a^*(m_j)$  stratejisi verildiğinde, faydasını maksimize edecek şekilde seçer. Dolayısıyla  $m^*(t_i)$  aşağıdaki problemi çözen değerdir:

$$\max_{m_j \in M} u_G(t_i, m_j, a^*(m_j)).$$

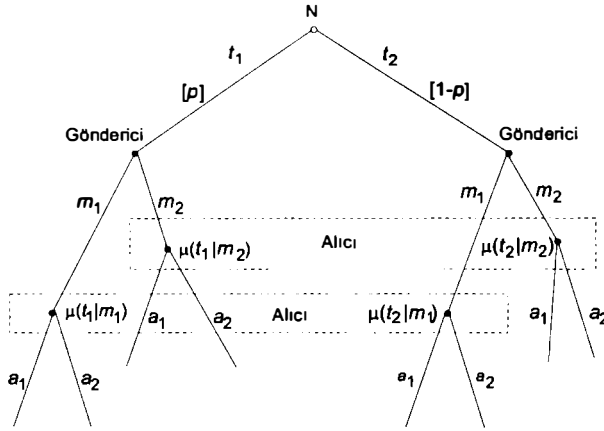
Göndericinin  $m^*(t_i)$  stratejisi verildiğinde,  $T_j$  kümesi  $m_j$  mesajının gönderildiği tipler kümesini gösterebilir. Yani eğer  $m^*(t_i) = m_j$  ise,  $t_i$  tipi  $T_j$  kümesinin bir elemanıdır. Eğer  $T_j$  boş küme değilse,  $m_j$  mesajına karşılık gelen bilgi kümesi denge patikası üzerindedir demektir, aksi takdirde  $m_j$  herhangi bir tip tarafından gönderilmez ve bu yüzden buna karşılık gelen bilgi kümesi denge-dışı patika üzerindedir. Denge patikası üzerindeki mesajlar için, Mükemmel Bayesyen denge için tanımladığımız 3.koşulu Alıcının inançlarına uygularsak aşağıdaki koşulu elde ederiz:

3. *Sinyalleme Koşulu*. Her  $m_i \in M$  mesajı için,  $m^*(t_i) = m_j$  durumunu sağlayacak bir  $t_i \in T$  tipinin olması durumunda  $m_j$  mesajına karşılık gelen bilgi kümesinde Alıcının inancı, Göndericinin mesajı ve Bayes kuralından türetilmelidir:

$$\mu(t_i | m_j) = \frac{p(t_i, m_j)}{p(m_j)} = \frac{p(t_i)p(m_j | t_i)}{\sum_{t_i \in T_i} p(t_i)p(m_j | t_i)}, \quad (5.1a)$$

Burada  $p(m_j | t_i)$ , Göndericinin tipi  $t_i$  iken mesajının  $m_j$  olma olasılığını göstermektedir.

Bu oyunu zihnimizde iyice somutlaştırmak için Şekil 5.10'da verilen gösterim de oldukça aydınlatıcı olabilir. Burada da tiplerine göre gönderilen mesajlar, mesajlara bağlı hareketlerin seçimi ve oluşturulan inançlar daha net olarak gösterilmektedir. Şekil 5.10'da verilen  $\mu(t_i | m_j)$  ifadesi genel anlamda Alıcının  $m_j$  mesajını aldığı anda Göndericinin  $t_i$  tipinde olma olasılığına dair inancını göstermektedir.



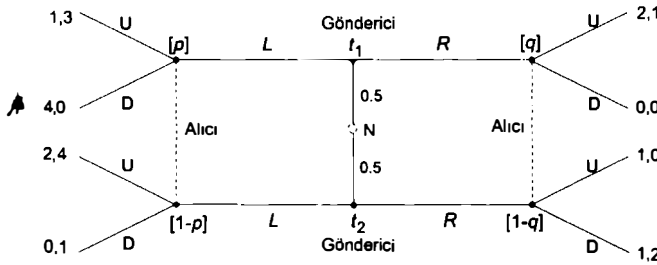
Şekil 5.10 Sinyalleme oyununun diğer bir gösterimi

**Tanım 5.3** Bir sinyalleme oyununda *pür strateji mükemmel Bayesyen dengesi*,  $(m^*(t_i), a^*(m_j))$  gibi bir strateji çiftinden ve (1), (2A), (2B) ve (3) sinyalleme koşullarını sağlayan  $\mu(t_i | m_j)$  gibi bir inançtan oluşur.

Şimdi aşağıda verdiğimiz sinyalleme oyun örneklerinde *pür-strateji mükemmel Bayesyen dengelerini* hesaplayalım.

### Örnek 5.3

Şekil 5.11’de verilen iki-tipli bir Göndericinin olduğu bir oyun düşünelim (Gibbons (1992)). Her tip, Doğa tarafından eşit olasılıkla belirlenmektedir. Alıcının iki bilgi kümesindeki inançlarını göstermek için  $(p, 1 - p)$  ve  $(q, 1 - q)$  olasılıklarını kullanalım.



Şekil 5.11

Bu iki tipli, iki mesajlı oyunda dört olası *pür-strateji mükemmel Bayesyen* denge vardır: (i) L üzerine birleştirici strateji; (ii) R üzerine birleştirici strateji;

(iii) ayrıştırıcı strateji:  $t_1$  tipi  $L$  stratejisini,  $t_2$  tipi ise  $R$  stratejisini oynar ve (iv) ayrıştırıcı strateji:  $t_1$  tipi  $R$  stratejisini,  $t_2$  tipi ise  $L$  stratejisini oynar. Bu durumların her birine ayrı ayrı bakalım.

1. *L üzerine birleştirici strateji*: Göndericinin stratejisinin  $(L, L)$  olduğu bir denge olduğunu varsayalım, burada  $(m', m'')$ ,  $t_1$  tipinin  $m'$  stratejisini seçtiğini ve  $t_2$  tipinin ise  $m''$  stratejisini seçtiği anlamına gelmektedir. Göndericinin  $L$  hareketine karşılık gelen bilgi kümesi denge patikasıdır. Böylece bu bilgi kümesinde Alıcının  $(p, 1 - p)$  inancı, Bayes kuralı ve Göndericinin stratejisi ile belirlenir. Önsel olasılık  $p = 0.5$  şeklindedir (iki tipten herhangi birinin olma olasılığı). Bu inanç veri alındığında,  $L$  sonrası Alıcının en iyi tepkisi  $U$  stratejisini oynamaktır. Bu durumda  $t_1$  ve  $t_2$  tipleri sırasıyla 1 ve 2 birim getiri elde ederler. Her iki tip Göndericinin de  $L$  hareketini seçmek isteyip istemediklerini belirlemek için, Alıcının  $R$  hareketine nasıl tepki verdiğini belirlememiz gerekir. Eğer Alıcının  $R$  hareketine tepkisi  $U$  ise,  $t_1$  tipinin  $R$  hareketini oynamasından dolayı elde ettiği getiri 2'dir, ki bu değer  $t_1$ 'in  $L$ 'yi oynaması durumunda elde edeceği 1 değerinden daha fazladır. Fakat eğer Alıcının  $R$  hareketine tepkisi  $D$  ise, bu durumda  $t_1$  ve  $t_2$ 'nin kazancı sırasıyla 0 ve 1 olur. Halbuki  $L$  oynasaydı kazancı sırasıyla 1 ve 2 olurdu. Yani eğer Göndericinin stratejisinin  $(L, L)$  olduğu bir denge varsa, Alıcının  $R$ 'ye tepkisi  $D$  olmak zorundadır. Dolayısıyla Alıcının stratejisi  $(U, D)$  olur. Alıcının  $q \leq 2/3$  olduğunda  $D$  hareketini oynaması optimal olduğundan,  $[(L, L), (U, D), p = 0.5, q]$  birleştirici mükemmel Bayesyen dengedir.

2. *R üzerinde birleştirici strateji*: Şimdi de Göndericinin  $(R, R)$  stratejisini izlediğini varsayalım. Öyleyse  $q = 0.5$ 'dir. Alıcının  $R$ 'ye en iyi tepkisi  $D$ 'dir, bu hareket  $t_1$  tipi için 0,  $t_2$  için de 1 getiri sağlar. Fakat  $t_1$ ,  $L$ 'yi oynayarak 1 kazanabilir çünkü herhangi bir  $p$  değeri için Alıcının  $L$ 'ye en iyi tepkisi  $U$  şeklindedir. Bu yüzden Göndericinin  $(R, R)$  strateji profilini oynadığı bir denge yoktur.

3. *Ayrıştırıcı strateji,  $t_1$ 'nin  $L$  hareketini oynaması*: Eğer Gönderici  $(L, R)$  ayrıştırıcı stratejisini oynarsa, Alıcının bilgi kümelerinin her ikisi de denge patikası üzerindedir; böylece inançların her ikisi de Bayes kuralı tarafından belirlenir ve Göndericinin stratejisi  $p = 1$  ve  $q = 0$  şeklindedir. Alıcının bu inançlara en iyi tepkileri sırasıyla  $U$  ve  $D$ 'dir, böylece her iki Gönderici tipi 1 birimlik getiri kazanır. Alıcının  $(U, D)$  stratejisi veri alındığında, Göndericinin stratejisinin optimal olup olmadığını kontrol etmemiz gerekir. Fakat optimal olmadığını görürüz. Eğer  $t_2$  tipi  $L$ 'yi oynayarak sapma gösterirse, Alıcı  $D$  yerine  $U$  ile tepki verecektir, bu da  $t_2$  tipine 2 birim getiri kazandırır; dolayısıyla  $t_2$  tipinin  $R$  oynaması durumunda elde edeceği 1 değerinden daha fazladır.

4. *Ayrıştırıcı strateji,  $t_1$ 'nin  $R$  hareketini oynaması*: Eğer Gönderici  $(R, L)$  ayrıştırıcı stratejisini oynarsa, Alıcının inançları  $p = 0$  ve  $q = 1$  olmak zorundadır; böylece Alıcının en iyi tepkisi ise  $(U, U)$  olur ve her iki tip 2 birimlik getiri elde eder. Eğer  $t_1$ ,  $L$  oynayarak sapma gösterseydi, Alıcı  $U$  ile tepki gösterecekti,  $t_1$ 'nin bu durumda elde edeceği getiri 1 birim olacaktı, dolayısıyla  $t_1$ 'nin  $R$ 'yi oynamaktan caymasının bir motivasyonu olmayacaktı. Buna benzer olarak, eğer  $t_2$ ,  $R$ 'yi oynayarak sapma gösterseydi, Alıcı  $U$  ile tepki verecekti,  $t_2$ 'nin bu durumda

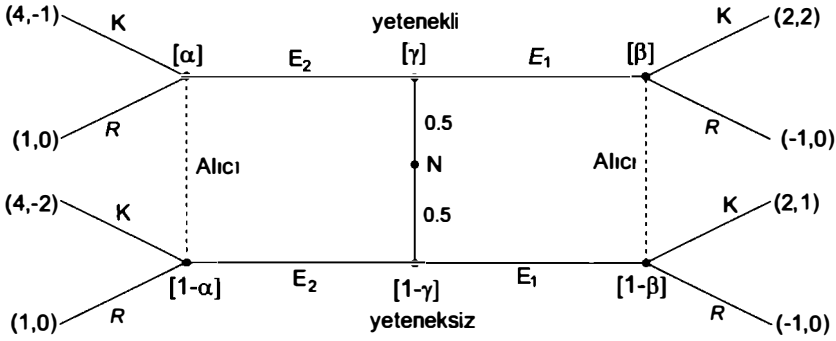
elde edeceği getiri 1 birim olacaktı; dolayısıyla  $t_2$ 'nin L hareketini oynamaktan vazgeçmesi için herhangi bir motivasyon olmayacaktır.

Yani  $[(R, L), (u, u), p = 0, q = 1]$  ayrıştırıcı mükemmel Bayesyen dengedir.

#### Örnek 5.4

İş piyasasında iş başvurusu yapan biri ve bu iş başvurusunun yapıldığı bir işveren olsun. İş başvurusu yapan işçi iki seçeneğe sahiptir: eğitim almak veya eğitim almamak. Bu seçim, işçinin gönderdiği mesajlardır. İşveren bu mesajı gözlemleyecek ve buna göre onu işe alıp almayacağına karar verecektir. Yani işçinin (Gönderici) mesaj uzayı  $M = \{\text{eğitilmiş}, \text{eğitimsiz}\} = \{E_1, E_2\}$  ve işverenin (Alıcının) hareket uzayı,  $A = \{\text{kabul}, \text{red}\} = \{K, R\}$  şeklindedir.

İşçinin özel bilgisi kendisinin yetenekli olup olmadığıdır, yani işçinin tip uzayı,  $T = \{\text{yetenekli}, \text{yeteneksiz}\} = \{Y_1, Y_2\}$ 'dir. İşverenin, işçinin tipi hakkındaki önsel inançlarını,  $\gamma \in [0, 1]$  ile ifade edelim. Yani işveren işçinin  $\gamma$  olasılıkla yetenekli,  $1 - \gamma$  olasılıkla da yetenekli olmadığını düşünmektedir. Bunu şöyle de ifade edebiliriz: İşverenin önsel inançları,  $p(Y_1) = \gamma$  ve  $p(Y_2) = 1 - \gamma$  şeklinde tanımlanır. İşçi, iki tipine karşılık gelen iki bilgi kümesine sahipken, işveren de iki bilgi kümesine sahiptir fakat bunlar işçinin iki olası tipine değil iki olası mesajına karşılık gelir (eğitim almak ve eğitim almamak). Şekil 5.12'de sol taraf işverenin bilgi kümesi onun eğitim-almamak bilgi kümesi iken, sağ taraf bilgi kümesi ise onun eğitim-alma bilgi kümesidir.



Şekil 5.12

Şekil 5.12'de her tip/mesaj/hareket profilleri için gösterilen sıralı ikililer sırasıyla işçi ve işverenin fayda düzeyleridir. Fayda düzeylerine dikkatlice bakılırsa işçinin eğitim-almamayı, eğitim-almaya tercih ettiğini fakat çalışmayı da çalışmama tercih ettiğini; işverenin ise eğitim almış işçinin her iki tipini istihdam etmeyi, istihdam etmemeye tercih ettiğini görürüz.

Genişleyen-biçimli gösterimde işverenin inançlarını daha net olarak gösterebiliriz. Şekil 5.12'de işverenin her karar noktasındaki inançları parantez içindeki

olasılıklarla gösterilmektedir. Örneğin, eğer işveren işçinin eğitim almadığını gözlemlerse, işçinin  $\alpha$  olasılıkla yetenekli olduğunu düşünmektedir. Eğer işveren işçinin eğitim aldığını gözlemlerse, işçinin  $\beta$  olasılıkla yetenekli olduğunu düşünmektedir.

Oyundaki strateji profilini  $(x, y, z, w; \alpha, \beta)$  sıralı-altılısı ile gösterebiliriz; burada  $x$  = işçinin hareketi eğer yetenekli ise,  $y$  = işçinin hareketi eğer yetenekli değilse,  $z$  = işverenin hareketi eğer işçinin eğitim-almadığı gözlemlenmişse,  $w$  = işverenin hareketi eğer işçinin eğitim-aldığı gözlemlenmişse,  $\alpha$  = işçinin eğitim almadığı gözlemlendiğinde yetenekli olma olasılığı (işverenin inancı),  $\beta$  = işçinin eğitim-aldığı gözlemlendiğinde yetenekli olma olasılığıdır (işverenin inancı).

Şimdi örneğin  $(E_1, E_1; R, K; *, \gamma)$  strateji profiline bakalım. Bu strateji profilini Şekil 5.12 üzerinden takip ediniz. Dikkat edilirse bu strateji profiline göre, eğitim-almamak mesajı hiçbir işçi tipi tarafından yollanmamış, bu yüzden patikadışıdır. Dolayısıyla bu strateji profilinin Bayesyen denge olup olmadığını değerlendirmek için bu bilgi kümesinde işverenin koşullu olasılıklarını belirtmeye gerek yoktur, bu yüzden bu durum \* işareti ile gösterildi.

Bu strateji profilinin, oyunun Bayesyen dengesi olduğunu düşünelim. Bunu kontrol etmek için, ilk önce, işverenin kabul hareketinde (işe almak) bulunduğunu veri aldığımızda herhangi bir işçi tipinin eğitim-almak yerine eğitim-almamak hareketini seçmesinin daha iyi olup olmadığına bakalım. Her işçi tipi eğitim-almak hareketi karşılığında 2 elde eder, fakat eğer eğitim-almamak hareketinde bulunsaydı daha düşük bir getiri olan 1 alacaktı. Bu yüzden hiçbir işçi tipi kendi hareketinden bir sapma göstermeyecektir.

İşverenin, işçinin tipi verildiğinde, işe almaktan (yani kabul hareketinden) vazgeçip geçmeyeceğini kontrol edelim. Bunu görmenin en kolay yolu, kabul hareketinin eğitim-almak bilgi kümesinde optimal olup olmadığına bakmaktır. Bunun için de işverenin kabul hareketinin her tip için red hareketinden (işe almak) daha iyi olduğuna dikkat ediniz. Bu yüzden, işverenin  $\beta$  inancından bağımsız olarak, kabul hareketinden elde edilen getirilerin konveks bileşimi (ağırlıklandırılmış değeri) red hareketinden alacağı getiri olan 0'dan daha fazla olacaktır. Daha formel ifade edersek, eğitim-almak hareketi gözlemlendiğinde işçinin yetenekli olmasına dair herhangi bir  $\gamma \in [0, 1]$  inancı için işverenin eğitim-almak bilgi kümesinde kabul hareketinden beklenen faydası  $2\gamma + (1 - \gamma) > 0$  olur. Bu yüzden, herhangi bir  $\gamma \in [0, 1]$  için tanımlanan strateji profili bir Bayesyen dengedir.

Eğitim-almak bilgi kümesinde koşullu inançların  $\beta = \gamma$  olması şu anlama gelir: İşçinin mesajı gözlemlendikten sonra bile, işverenin işçinin tipi hakkındaki inançları önsel inançlarından farklılık göstermez, yani önsel inançları değişmez. Dolayısıyla inançlarını güncellememesi durumunda oluşan denge, birleştirici strateji profilidir, yani işçinin tüm tipleri aynı mesajı yollar. Bunun,  $\beta = \gamma$  inancının,

Bayes kuralıyla da uyumlu olduğunu gösterebiliriz:

$$\begin{aligned} p(Y_2 | E_1) &= \frac{p(Y_1)\sigma(E_1 | Y_1)}{p(Y_1)\sigma(E_1 | Y_1) + p(Y_2)\sigma(E_1 | Y_1)} \\ &= \frac{\gamma \cdot 1}{\gamma \cdot 1 + (1 - \gamma) \cdot 1} = \gamma. \end{aligned}$$

Diğer bir strateji profiline bakalım:  $(E_2, E_2; R, R; \gamma, *)$ . Bu strateji profilini Şekil 5.12 üzerinden takip ediniz. İşverenin kabul hareketi veri alındığında, her işçi tipinin optimal mesajı eğitim-almamaktır ( $E_2$ ). Çünkü her işçi tipi hangi mesajı yollarsa yollasın reddedileceğinden ( $R$ ), her işçi tipinin en çok hoşuna gidecek hareket eğitim-almamaktır ( $E_2$ ). İşverenin izleyeceği politikanın optimalliğini kontrol etmek için patika bilgi kümesi üzerindeki eğitim-almamak noktasını kontrol etmek yeterlidir. İşveren açısından, eğitimsiz işçiler çalıştırılmayı hak etmedikleri için bu bilgi kümesinde red kararı ( $R$ ) işveren için optimaldir. Diğer yandan, benzer şekilde bu strateji profilinde  $\alpha = \gamma$  inancının Bayes kuralıyla uyumlu olduğunu gösterilebilir.

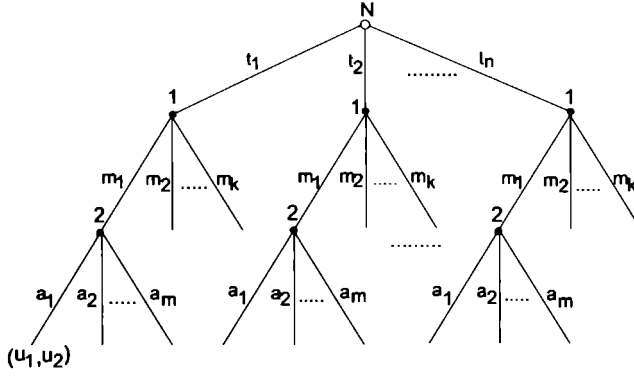
Bu strateji profilinde işçi için tanımlanan hareketin neden işverenin istihdam politikasına en iyi tepki olduğuna dikkat ediniz: Her işçi tipi eğitim-almak hareketinden kaçınır çünkü işveren eğitilmiş işçi başvurularını reddetmeyi planlamaktadır. İşçinin tipinden bağımsız olarak, işveren eğitilmiş işçileri reddetmek yerine, kabul etmekle daha yüksek fayda elde edecektir. Patika-dışı koşullu inanç,  $\beta \in [0, 1]$ , nasıl belirtilirse belirtilsin, işveren açısından işe almak, eğitim-almak bilgi kümesindeki tek en iyi tepkidir. Bu denge istenilmeyen bir dengedir çünkü bu işverenin patika-dışı inandırıcı olmayan davranışına dayanır.

Şekil 5.12'de strateji profilinin,  $\alpha \in [0, 1]$  inancından bağımsız, mükemmel Bayesyen denge olamayacağı görülür çünkü daha önce gördüğümüz gibi, herhangi bir inanç için eğitim-almak bilgi kümesinde işveren açısından reddetmek yerine işe almak en iyi tepkidir.

### 5.3.2 Karma Stratejilerde Dengenin Gösterimi

Sinyalleme oyunlarını karma stratejileri de dahil ederek daha genel bir yapıda tanımlayalım. Şekil 5.13 bir-aşamalı bir sinyalleme oyununu göstermektedir.

1. Oyuncu kendi tipi,  $t \in T$ , hakkında özel bilgiye sahiptir ve  $m \in M$  stratejisini yani mesajını seçmektedir. 2. oyuncu  $m$ 'yi gözlemler ve  $a \in A$  hareketini seçer. Oyun başlamadan, 2. oyuncunun, 1. oyuncunun tipi hakkındaki  $p(\cdot)$  önsel inancı ortak bilgidir. 1. oyuncunun  $m$  stratejisini gözlemledikten sonra, 2. oyuncu  $t$  hakkındaki inançlarını Bayes kuralına göre günceller ve hareketini  $T$  üzerine tanımlı  $\mu(\cdot | m)$  koşullu olasılığına göre seçer. 1. oyuncunun stratejisi her  $t$  tipi için  $m$  hareketleri üzerine tanımlı  $\sigma_1(\cdot | t)$  gibi bir olasılık dağılımı bulmaktır. 2. oyuncunun stratejisi ise her  $m$  hareketi için  $a$  hareketleri üzerine tanımlı  $\sigma_2(\cdot)$  gibi bir olasılık dağılımı bulmaktır. Yani 2. oyuncunun  $\sigma_2(\cdot | m)$  stratejisini oynaması durumunda,  $t$  tipli ve  $\sigma_1(\cdot | t)$  stratejili 1. oyuncunun beklenen faydası şöyle ifade



**Şekil 5.13** Tek aşamalı bir sinyal oyununun genel gösterimi

edilir:

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2, t) = \sum_s \sum_a \sigma_1(m | t) \sigma_2(a | m) u_1(m, a, t).$$

1. oyuncunun  $m$  stratejisi veri alındığında, 2. oyuncunun  $\sigma_2(\cdot | t)$  stratejisini takip etmesi ve  $\mu(\cdot | m)$  inancına sahip olması durumunda beklenen faydası ise şöyle ifade edilir:

$$\begin{aligned} u_2(m, \sigma_2, \mu) &= \sum_t \mu(t | m) u_2(m, \sigma_2(\cdot | m), t) \\ &= \sum_t \sum_a \mu(t | m) \sigma_2(a | m) u_2(m, a, t). \end{aligned}$$

**Tanım 5.4** *Altoyun mükemmellik kavramı, Bayesyen Nash dengesi ve Bayes kuralı ile birleştiğinde, mükemmel Bayesyen denge strateji profili,  $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ , ortaya çıkar :*

$$\forall t, \sigma_1^* \in \arg \max_{\sigma_1} u_1(\sigma_1, \sigma_2^*, t), \quad (5.2)$$

$$\forall m, \sigma_2^* \in \arg \max_{\sigma_2} \sum \mu(t | m) u_2(m, \sigma_2, t) \quad (5.3)$$

ve

$$\mu(t | m) = \frac{p(t) \sigma_1^*(m | t)}{\sum_{t \in T} p(t) \sigma_1^*(m | t)}. \quad (5.4)$$

Yukarıdaki tanımlamada (5.3) denklemi 2. oyuncunun  $\sigma_2^*$  stratejisinin altoyunlarda Bayesyen Nash dengesi olmasını garanti eder; (5.2) denklemi ise  $\sigma^*$  stratejisinin 1. oyuncunun her tipi için oluşan altoyunlarda Nash dengesi olmasını garanti eder; (5.4) denklemi ise inançların nasıl oluştuğunu gösterir.

## 5.4 Sinyalleme Oyun Uygulamaları

### 5.4.1 Firma Yatırımı ve Sermaye Yapısı

Bir firma bir proje için dış finansmana ihtiyaç duymaktadır. Firma kendi kâr düzeyini bilse bile finansmanı sağlayacak finansal yatırımcı (banka olabilir), firmanın kârlılığını hakkında tam bir bilgiye sahip değildir. Firma gerekli finansman karşılığında yatırımcıya firmada hisse vermeyi teklif etmektedir. Soru şudur: Hangi koşullar altında yeni projeye girilmelidir ve hisse payı ne olmalıdır?

Bu durumu bir sinyalleme oyunu olarak düşünebiliriz. Firmanın kârının düşük veya yüksek olabileceğini varsayıyoruz:  $\pi_L$  veya  $\pi_H$ , burada  $\pi_H > \pi_L > 0$ . Yeni proje için gerekli yatırımın,  $I$  olduğunu varsayalım. Bu projeden gelen kazanç  $R$  ve yatırımcının alternatif getiri oranı (parasını başka bir alana yatırırsaydı) ise  $r$ 'dir. Aynı zamanda  $R > (1+r)I$  olduğunu varsayalım, yani yatırımcı açısından firmaya finansman sağlamak daha iyi bir tercihtir. Oyunun zamanlaması ve kâr düzeyleri şöyledir:

i. Doğa mevcut firmanın kârını belirliyor. Firmanın kârı  $p$  olasılıkla  $\pi_L$ ,  $1 - p$  olasılıkla da  $\pi_H$  şeklindedir.

ii. Firma kârını,  $\pi$ , öğrenir ve sonra yatırımcıya belirli bir hisse oranı,  $s$ , önerir,  $0 \leq s \leq 1$ .

iii. Yatırımcı  $s$ 'yi gözlemler (fakat  $\pi$ 'i gözlemleyemiyor) ve önerilen hisse payı teklifini,  $s$ , kabul etmek ve reddetmek gibi iki harekete sahiptir.

iv. Eğer yatırımcı teklifi ret ederse yatırımcının getirisi  $(1+r)I$  ve firmanın kârı ise  $\pi$  kadardır. Eğer yatırımcı teklifi kabul ederse, yatırımcının getirisi  $s(\pi+R)$  ve firmanın kârı ise  $(1-s)(\pi+R)$ 'dir.

Yatırımcı  $s$  teklifini aldıktan sonra, kârın  $\pi_L$  olma olasılığının  $q$  olduğuna inanmaktadır. Böylece yatırımcı  $s$  teklifini aldığı anda eğer aşağıdaki koşul geçerliyse bu teklifi kabul eder:

$$s[q\pi_L + (1-q)\pi_H + R] \geq (1+r)I. \quad (5.5)$$

Firmanın kârının  $\pi$  olduğunu varsayalım. Firma  $s$  hisse payı gibi bir maliyetle projeyi finanse etmek veya projeden vazgeçmek gibi iki seçeneğe sahiptir. Projeyi  $s$  maliyetle üstlenmek, ancak aşağıdaki koşulda geçerlidir:

$$s(\pi + R) \leq R. \quad (5.6)$$

Birleştirici mükemmel Bayesyen dengede (yani farklı kâr düzeylerine sahip firma tiplerinin aynı  $s$  teklifinde bulunması), denge teklifini aldıktan sonra yatırımcının inancı  $q = p$  olmak zorundadır. Yukarıdaki (5.6) katılım kısıtının,  $\pi_H$ 'yi sağlaması  $\pi_L$ 'yi sağlamasından daha zor olduğundan, (5.5) ve (5.6) kısıtlarını birlikte düşündüğümüzde, birleştirici strateji dengesi ancak aşağıdaki durum geçerliyse mümkündür:

$$\frac{(1+r)I}{p\pi_L + (1-p)\pi_H + R} \leq \frac{R}{\pi_H + R}. \quad (5.7)$$

Eğer  $p$  sıfıra yeterince yakınsa,  $R > (1 + r)I$  olur ve (5.7) koşulu geçerlidir. Fakat  $p$  bire yeterince yakın olduğunda (5.7)'de tanımlanan durum ancak aşağıdaki koşul geçerli ise sağlanır (5.7 denkleminde  $p = 1$  eşitliğini kullanarak cebirsel işlemi sürdürün aşağıdaki ifadeyi elde edeceksiniz):

$$R - (1 + r)I \geq \frac{I(1 + r)\pi_H}{R} - \pi_L. \quad (5.8)$$

Sezgisel olarak, birleştirici stratejide karşılaşılan zorluk yüksek-kâr tipli firmanın düşük-kâr tipli firmayı sübvansye etmesidir: (5.5) denkleminde  $q = p$  inancı dikkate alındığında,  $s \geq (1 + r)I / [p\pi_L + (1 - p)\pi_H + R]$  durumu ortaya çıkar. Halbuki eğer yatırımcı  $\pi_H$  kesin bilgisine sahip olsaydı (yani  $q = 0$ ), daha küçük bir hisse almayı kabul ederdi,  $s \geq I(1 + r) / (\pi_H + R)$ , çünkü  $\pi_H + R > [p\pi_L + (1 - p)\pi_H + R]$ 'dir. Birleştirici strateji dengesinde daha büyük bir hisse payı yüksek kârlı firma için pahalıdır. Analizimiz birleştirici strateji dengesinin iki durumda mümkün olacağını gösterir: Eğer  $p$  sıfıra yakınsa sübvansiyonun maliyeti küçüktür ve eğer (5.8) koşulu geçerliyse; çünkü bu durumda yeni projeden gelen kâr sübvansiyon maliyetini aşar.

Eğer (5.7) koşulu sağlanmazsa birleştirici denge olmayacaktır. Fakat ayrıştırıcı denge her zaman mevcuttur. Düşük-kâr tipli firma  $s = I(1 + r) / (\pi_L + R)$  teklifinde bulunur ve bunu yatırımcı kabul eder. Yüksek-kâr tipli firma  $s < I(1 + r) / (\pi_H + R)$  teklifinde bulunur fakat yatırımcı bunu reddeder. Böyle bir dengede, yatırım etkinsiz bir şekilde düşük düzeydedir çünkü yeni proje kesin bir şekilde kârlı olmasına rağmen yüksek-kâr tipli firma yatırımdan vazgeçer. Bu denge durumu göndericinin (firmanın) sinyaller kümesinin etkili olmamasından kaynaklanır. Bundan kastettiğimiz şey yüksek-kâr tipli firmanın kendisini ayrıştırmak için kullanacağı bir yönteminin olmamasıdır. Yüksek-kâr tipli firma için çekici olan finansman koşulları düşük-kâr tipli firmaya daha fazla çekici gelir.

## 5.4.2 Emek Piyasasında Sinyalleme

Burada tanıtacağımız model Spence (1973) çalışmasına dayanır; daha önce eğitimle ilgili verdiğimiz örneğin başka bir versiyonudur ve büyük oranda Aliprantis ve Chakrabarti (2000)'den derlenmiştir.

Bu oyunda, Doğa işçiye yüksek,  $H$ , veya düşük yetenekli,  $L$ , olduğunu bildirir. Firma (1. oyuncu),  $F$ , işçinin (2. oyuncu) yeteneğini gözlemleyememektedir, gözlemlediği tek şey işçinin eğitim düzeyidir. Bu durumda işçiye ne kadar ücret teklifinde bulunacağına karar verir. Yani firma, işçinin eğitim düzeyinden hareketle vereceği ücreti seçmek gibi bir durumla karşı karşıyadır. 2. oyuncu olarak işçi ise eğitim düzeyini,  $e$ , seçmekte ve emek piyasasına girmektedir. Ayrıca emek piyasasındaki işçilerin yarısının  $H$ -tipli yarısının da  $L$ -tipli olduğu, herkesin ortak bilgisidir. Kısaca bu sinyalleme oyununda, işçi gönderici, firma ise alıcı durumundadır.

Bu analizde kendimizi lineer ücret kontratlarıyla sınırlandıralım. Yani firmanın

ücret teklifinin  $w(e) = 0.1 + \beta e$  şeklinde belirlendiğini varsayalım; burada  $\beta$  negatif-olmayan reel bir sayıdır, 0.1 ise işçinin eğitim düzeyi sıfırken aldığı ücrettir. Kısaca firma ücreti işçinin eğitim düzeyine göre bu lineer yapıya göre belirlemektedir.

Herhangi bir eğitim düzeyi,  $e$ , için  $H$ -tipli oyuncunun,  $L$ -tipli oyuncudan daha verimli olduğunu varsayıyoruz. Daha spesifik olarak, yüksek-yetenekli işçinin firmaya katkısı  $2e$  ve düşük-yetenekli işçinin katkısı ise  $e$  kadardır. Firmanın kârı ise eğer işçi yüksek-yetenekli ise  $2e - w(e)$ , fakat eğer düşük-yetenekli ise  $e - w(e)$  şeklindedir.

İşçinin fayda fonksiyonu hem aldığı ücrete hem de aldığı eğitimin maliyetine bağlıdır. Yüksek-yetenekli işçinin,  $e$  eğitim düzeyinde fayda fonksiyonu şöyledir:

$$u_H(e) = w(e) - \frac{1}{2}e^2.$$

Düşük-yetenekli işçinin  $e$  eğitim düzeyinde fayda fonksiyonu ise şöyledir:

$$u_L(e) = w(e) - \frac{3}{4}e^2.$$

Bu fayda fonksiyonları açıkça şunu göstermektedir: Düşük-yetenekli işçi eğitimi daha yüksek maliyetle elde etmektedir.

Bu eksik bilgili dinamik oyunun zamanlaması şöyledir:

i. Firma, 1. oyuncu olarak,  $w(\cdot)$  ücret teklifinde bulunmaktadır. Ücret teklifi, eğitimin bir fonksiyonudur. Yukarıda da ifade ettiğimiz gibi, ücret fonksiyonu,  $w(e) = 0.1 + \beta e$  şeklindedir.

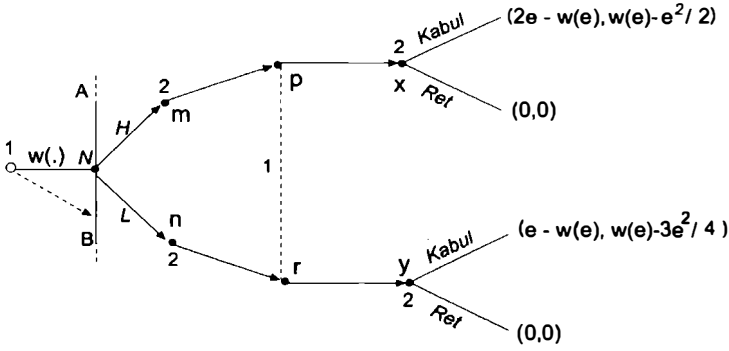
ii. Doğa işçinin tipini (yüksek veya düşük yetenekli olduğunu) işçiye açıklar, dolayısıyla tipini sadece işçinin kendisi bilir.

iii. İşçi (2. oyuncu), kendi tipi hakkında seçtiği eğitim düzeyini,  $e$ , sinyal olarak yollar. Bu sinyal işçinin gerçek tipini yansıtabilir de yansıtmayabilir de (yani yüksek eğitim düzeyi yüksek yetenekli olduğu anlamına gelmeyebilir)

iv. Firma işçiye  $w(e)$  ücret teklifinde bulunur.

iv. İşçi bu teklifi kabul edilebilir veya reddedebilir. Böylece oyunun sonunda fayda düzeyleri belirlenir.

Şekil 5.14 hem oyundaki fayda düzeylerini hem de oyunun aşamalarını göstermektedir. Şekil 5.14'te de görülebileceği gibi,  $\beta$  için sonsuz sayıda değer alabilir, ( $\beta \geq 0$ ), yani Doğa'yı temsil eden  $N$  noktası için sonsuz sayıda imkan söz konusudur. Doğa'nın  $\beta$  ücret parametresini belirlediğini düşünüyoruz. Doğa'nın varacağı noktalar  $AB$  doğrusu üzerindedir. Fakat  $N$  noktasına bir kez varıldı mı Doğa işçiye tipini açıklamaktadır; yani işçi  $m$  ve  $n$  noktasına varıp varmadığını öğrenir.  $m$  veya  $n$  noktasına vardıktan sonra, işçi eğitim düzeyini,  $e$ , seçerek sinyalini yollar, yani  $p$  veya  $r$  noktasına varır. Burada  $c$  sonsuz sayıda olabileceği için ( $c \geq 0$ ),  $p$  ve  $r$  için sonsuz sayıda nokta vardır. Açıkça  $\{p, r\}$  işçinin bilgi kümesidir. Bu bilgi kümesinde 1.oyuncu olarak firma  $w(e)$  ücret teklifinde bulunur. Bu da oyunu  $x$  veya  $y$  karar noktasına getirir. Buradan itibaren de, işçi son



Şekil 5.14

kararı olan kabul ( $K$ ) veya red ( $R$ ) ile oyunu bitirir.

Şimdi oyuncuların stratejilerini ve fayda düzeylerini daha net olarak tanımlayalım. Açıkça, 1.oyuncunun stratejisi,  $w(\cdot)$  fonksiyonudur ve tamamen  $\beta$  sayısı ile belirlenir. Dolayısıyla firmanın stratejisi basitçe bir reel sayıdır,  $\beta \geq 0$ . İşçinin stratejisi ise basitçe  $(\{e_L, e_H\}, \chi)$  şeklindedir, burada  $\chi = \{K, R\}$ .

i.  $\chi$ , sırasıyla işçinin  $K$  ve  $R$  seçimlerini belirleyen fonksiyondur.

ii.  $e_H$  eğitim düzeyi,  $m$ 'deki karar noktasından  $X$  karar noktasına tanımlanan bir fonksiyondur.  $m$  karar noktası tamamen  $N$  karar noktası (yani  $\beta$  sayısı) tarafından belirlendiği için,  $e_H$  eğitim düzeyi reel-değerli bir fonksiyondur,  $e_H = e_H(\beta)$  veya  $e_H : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ .

iii. Benzer olarak  $e_L$  de  $n$  karar noktasından,  $r$  karar noktasına tanımlanan bir fonksiyondur,  $e_L = e_L(\beta)$  veya  $e_L : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ .

Bu notasyonlarla firmanın fayda fonksiyonu şöyle ifade edilir:

$$u_1 = \begin{cases} \frac{1}{2}[2e_H(\beta) - \beta e_H(\beta) - 0.1] + \frac{1}{2}[2e_L(\beta) - \beta e_L(\beta) - 0.1], & \text{eğer } \chi(x) = \chi(y) = K \\ \frac{1}{2}[2e_H(\beta) - \beta e_H(\beta) - 0.1], & \text{eğer } \chi(x) = K, \chi(y) = R \\ \frac{1}{2}[2e_L(\beta) - \beta e_L(\beta) - 0.1], & \text{eğer } \chi(x) = R, \chi(y) = K \\ 0, & \text{eğer } \chi(x) = R, \chi(y) = R \end{cases}$$

ve işçinin iki farklı tipine göre fayda fonksiyonu ise şöyle ifade edilir:

$$u_2^L(\beta, (\{e_L, e_H\}, s) = \begin{cases} \beta e_L - \frac{3}{4}e_L(\beta)^2 + 0.1, & \text{eğer } s(y) = K \\ 0, & \text{eğer } s(y) = R \end{cases}$$

$$u_2^H(\beta, (\{e_L, e_H\}, s) = \begin{cases} \beta e_H - \frac{1}{2}e_H(\beta)^2 + 0.1, & \text{eğer } s(y) = K \\ 0, & \text{eğer } s(y) = R \end{cases}$$

Daha önce ifade edildiği gibi, oyun firmanın  $w(e) = 0.1 + \beta e$  ücret fonksiyonunu (veya ücret sözleşmesini) önermesiyle başlar. İşçi ise faydasını maksimize edecek eğitim düzeyini seçer. Eğer işçi yüksek-yetenekli ise, aşağıdaki fayda fonksiyonunu maksimize edecek eğitim düzeyini ( $e$ ) seçer:

$$u_H(e) = w(e) - \frac{1}{2}e^2 = \beta e - \frac{e^2}{2} + 0.1.$$

Bu fayda fonksiyonunun,  $e$  değişkenine göre birinci derece koşulundan  $u'_H(e) = \beta - e = 0$  sonucunu elde ederiz. Bu da bize yüksek-yetenekli işçinin optimal stratejisini verir:

$$e_H^*(\beta) = \beta.$$

İşçinin faydasını maksimize ettiği noktada fayda düzeyi  $u_H(\beta) = \frac{\beta^2}{2} + 0.1 > 0$  şeklindedir. Bu yüzden işçinin  $x$  noktasındaki  $\chi^*$  optimal stratejisi,  $K$  olmalıdır; yani  $\chi^*(x) = K$ . İşçinin düşük-yetenekli olması durumunda maksimize etmeye çalıştığı fayda fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_L(e) = w(e) - \frac{3}{4}e^2 = \beta e - \frac{3}{4}e^2 + 0.1.$$

Yine birinci dereceden koşul,  $u'_L(e) = \beta - \frac{3}{2}e = 0$ , işçinin düşük-yetenekli olması durumundaki optimal stratejisinin,

$$e_L^*(\beta) = \frac{2}{3}\beta$$

olması gerektiğini söyler. Bu noktadaki fayda düzeyi  $u_L(\frac{2}{3}\beta) = \frac{\beta^2}{3} + 0.1 > 0$  şeklindedir. Bu da işçinin  $y$  noktasındaki optimal stratejisinin  $K$  olması gerektiğini belirtir; yani  $\chi^*(y) = K$ .

Diğer yandan firma kendi fayda fonksiyonunu oluşturmak için işçinin eğitim düzeyi hakkında inanç oluşturmalıdır. Firma, işçinin tipi hakkında belirsiz olduğundan beklenen faydasını maksimize edecek  $\beta$  düzeyini seçecektir. İşçilerin yarısı,  $H$ -tipinde, diğer yarısı da  $L$ -tipinde olduğundan, firma  $1/2$  olasılıkla  $p$  noktasında,  $1/2$  olasılıkla da  $r$  noktasında olduğuna inanmaktadır. Yani  $\{p, r\}$  bilgi

kümesinde firmanın beklenen faydası şöyledir:

$$E(\beta) = \frac{1}{2}[2e_H^*(\beta) - \beta e_H^*(\beta) - 0.1] + \frac{1}{2}[e_L^*(\beta) - \beta e_L^*(\beta) - 0.1].$$

Firma farklı yeteneklerdeki işçilerin tepki fonksiyonlarını bildiğinden,  $e_H^*(\beta) = \beta$  ve  $e_L^*(\beta) = \frac{2}{3}\beta$ , beklenen faydası şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned} E(\beta) &= \frac{1}{2}(2\beta - \beta^2 - 0.1) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\beta - \frac{2}{3}\beta^2 - 0.1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}\beta - \frac{5}{3}\beta^2 - 0.2\right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Açıkça bu fonksiyon, birinci dereceden koşuldan elde edilen  $E'(\beta) = \frac{8}{3} - \frac{10}{3}\beta = 0$  denklemini sağlayan noktada maksimize edilir, dolayısıyla  $\beta^* = \frac{4}{5} = 0.8$  olur.

Oyunun çözümü böylece  $(\beta^*, (\{e_L^*(\beta), e_H^*(\beta)\}, \chi^*))$  şeklinde ifade edilir, burada  $\beta^* = 0.8$ ,  $e_L^*(\beta) = \frac{2}{3}\beta$ ,  $e_H^*(\beta) = \beta$  ve

$$\chi^*(x) = \begin{cases} K, & \text{eğer } w(e) - \frac{1}{2}e^2 \geq 0 \\ R, & \text{eğer } w(e) - \frac{1}{2}e^2 < 0 \end{cases} \quad \text{ve } \chi^*(y) = \begin{cases} K, & \text{eğer } w(e) - \frac{3}{4}e^2 \geq 0 \\ R, & \text{eğer } w(e) - \frac{3}{4}e^2 < 0 \end{cases}$$

Bu strateji profili şu anlama gelir: Firma  $w(e) = 0.8e + 0.1$  ücret fonksiyonunu teklif eder ve işçi teklifi kabul eder; eğer  $H$ -tipindeyse  $e_H = 0.8$  eğitim düzeyini seçer, ve eğer  $L$ -tipindeyse  $e_L = \frac{2}{3} \times 0.8 = \frac{1.6}{3} = 0.533$  eğitim düzeyini seçer. Dahası,

1. Firmanın beklenen faydasını (5.9)'dan bulabiliriz:  $E(0.8) = 0.433$  ve 2. İşçinin faydası eğer tipi  $H$  ise  $u_H(0.8) = 0.42$  fakat eğer tipi  $L$  ise  $u_L(\frac{1.6}{3}) = 0.313$  olur.

Açıkça  $(\beta^*, (\{e_L^*(\beta), e_H^*(\beta)\}, s^*))$  strateji profili bir mükemmel Bayesyen Nash dengesidir. Bu örnekte dikkat edilirse iki ayrı tipteki işçi farklı eğitim düzeylerini seçmektedir, yani  $e_L = 0.533 < e_H = 0.8$ . Yani işçi farklı tiplerde farklı sinyaller yollar bu yüzden de bu oyundaki denge ayrıştırıcı dengenir.

## 5.5 Ardısal Denge

Daha önce altoyun mükemmellik kavramını eksik bilgili dinamik oyunlara genişletirken kullandığımız denge kavramlarından biri olan mükemmel Bayesyen denge kavramını incelemiştik. Şimdi yine aynı tür oyunlara uygulanan daha rafine bir denge kavramı olan Kreps ve Wilson (1982)'nin geliştirdiği ardısal denge kavramına bakalım. Hatırlayacak olursak, mükemmel Bayesyen denge altoyun mükemmelliği, Bayesyen denge ve Bayes kuralı kavramlarının birleşiminden elde ediliyordu. Stratejiler her süre oyununda Bayesyen dengeyi sağlar ve oyuncuların inançları mümkün olduğu durumlarda Bayes kuralı ile güncellenir. Ardısal denge kavramı da buna benzer bir denge kavramıdır. Fakat oyuncuların inançlarını güncelleme biçimlerine daha fazla sınırlama getirir. Olasılığı sıfır olan olayları takiben oluşan inançlar

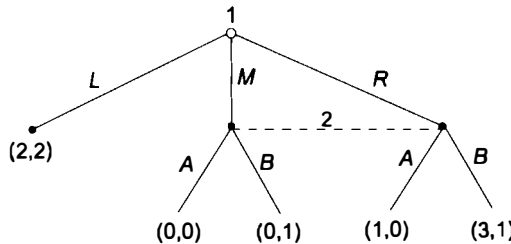
üzerine daha zayıf sınırlamalar koyar. Fakat daha kompleks oyunlarda inançlar üzerine konan kısıtlamalar mükemmel Bayesyen denge kavramının belirttiği dengelerden daha makul dengelerin oluşmasına imkan verir.

Ekonomistler eksik bilgili dinamik oyunların çoğunda ardısal denge kavramı yerine daha zayıf bir denge kavramı olan mükemmel Bayesyen denge kavramını kullanırlar. Osborne ve Rubinstein (1994) bunun gerekçesini şöyle açıklar: "mükemmel Bayesyen denge kavramı ile çalışmak ardısal denge kavramı ile çalışmaktan daha kolaydır. Çünkü ardısal denge kavramı mükemmel Bayesyen denge kavramındaki optimal olma koşuluna inançlar üzerine tutarlılık koşulunu da ekler". Bunu aşağıda daha detaylı tartışacağız.

Eksik bilgi, mükemmel bilginin bir çeşidi olarak modellendiğinden (Harsanyi dönüşümü) bilginin tam fakat mükemmel olmadığı oyunlarda da denge-dışı inançlar hakkında benzer problemlerin ortaya çıkması sürpriz değildir. Burada önemli olan oyuncuların hareketlerinin diğer oyunculara bilgi taşımasıdır; bu bilgi bir oyuncunun gözlemlediği diğerlerinin gözlemleyemediği herhangi bir şey olabilir. Buna bir oyuncunun kendi geçmiş hareketleri de dahildir.

### Örnek 5.5

Şekil 5.15'te verilen oyunda, 1. oyuncu üç harekete sahiptir:  $L$ ,  $M$  ve  $R$ . Eğer 1. oyuncu  $L$ 'yi oynarsa oyun sona erer. Bu durumda oyuncuların fayda düzeyleri  $(2, 2)$  olur. Eğer  $M$  veya  $R$ 'yi oynarsa, 2. oyuncu  $A$  ile  $B$  arasında seçim yapmak zorundadır. Fakat 2. oyuncu bu seçimi yaparken, 1. oyuncunun  $M$  veya  $R$ 'yi seçtiğini bilmemektedir. Eğer 1. oyuncu  $M$  hareketini seçerse ve 2. oyuncu  $A$  hareketini seçerse, oyuncuların fayda düzeyleri  $(0, 0)$  şeklinde gerçekleşir; ve oyuncuların  $(M, B)$ ,  $(R, A)$  ve  $(R, B)$  stratejilerine karşılık gelen fayda düzeyleri sırasıyla  $(0, 1)$ ,  $(0, 1)$  ve  $(3, 1)$  şeklindedir.

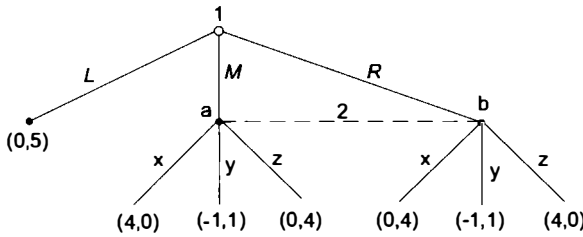


Şekil 5.15

Bu oyunun iki pür-strateji Nash dengesi vardır:  $(L, A)$  ve  $(R, B)$  (bunu görmek için oyunun stratejik-biçimli gösterimini düşününüz). Bunların her ikisi de altoyun mükemmeldir. Burada  $(L, A)$  altoyun mükemmeldir çünkü 2. oyuncu  $A$  ve  $B$  hareketlerini seçerken 1. oyuncunun hareketini bilmediğinden dolayı,  $A$  hareketini oynamanın Nash dengesinin bir parçası olup olmadığını test edemeyiz. Dikkat

edilirse, 1. oyuncu sapma gösterdiğinde ve  $L$  hareketini oynamadığında 2. oyuncunun,  $M$  ve  $R$  hareketlerinin oynama olasılıkları üzerine sahip olduğu inançları  $B$  hareketini oynamasını optimal kılabilir. Bu yüzden bu oyunda  $A$  hareketini oynamak, işçinin verimliliği hakkında oluşan herhangi bir inanç için makul olmayan ücret teklifinde bulunmaya benzer. Ardisal denge  $(L, A)$  sonucunu devre dışı bırakır. Yani  $(L, A)$  sonucu altoyun mükemmel olsa da makul bir sonuç olmayabilir, çünkü 2. oyuncunun, 1. oyuncunun  $M$  ve  $R$ 'den hangisini oynayacağı hakkındaki inançları ne olursa olsun kendisine hareket sırası geldiğinde  $B$  hareketini oynaması rasyonedir.

Şimdi de başka bir örnek üzerinden ardisal dengeyi tartışmaya devam edelim. Şekil 5.16'da gösterilen oyunda çok sayıda Nash dengesi vardır. Oyunun kendisi bir altoyun olduğundan, oyundaki Nash dengelerinin her biri altoyun mükemmeldir. Fakat bu altoyun mükemmel dengelerin her biri makul müdür?



1. oyuncunun  $L$  hareketini, 2. oyuncunun ise  $y$  hareketini seçmesi durumunda ortaya çıkan pür strateji altoyun mükemmel dengesini düşünelim. Açıkça bu bir Nash dengesidir (yani dolayısıyla altoyun-mükemmel) çünkü hiçbir oyuncu stratejisini tek taraflı değiştirerek faydasını artıramaz. Özellikle 1.oyuncu  $M$  veya  $R$ 'yi oynamaz çünkü bu dengeye göre, 2. oyuncu  $y$  hareketini oynayarak tepki verir ve bu da 1. oyuncuya  $-1$  sağlar (oysa  $L$ 'yi oynasaydı,  $0$  alırdı). Yani 2. oyuncunun  $y$  hareketini oynayacağı tehdidi, 1. oyuncuyu  $L$ 'yi oynamaya ikna etmeyi amaçlar. Fakat 2. oyuncunun tehdidi inandırıcı mıdır? Yani eğer 2. oyuncuya oynama fırsatı gelirse, 1. oyuncu  $y$  hareketini oynayacağına inanır mı? Şimdi bu sorunun cevabına bakalım.

Oynama sırası 2. oyuncunun olsun. Bu durumda 2. oyuncu hangi kararı verir? Burada önemli olan, 2. oyuncunun en iyi hareketinin 1. oyuncu tarafından seçilen harekete bağlı olmasıdır. Eğer 1. oyuncu  $M$  hareketini seçerse, 2. oyuncunun en iyi hareketi  $z$  olmalıdır. Fakat 1. oyuncu  $R$  hareketini seçerse, en iyi hareketi  $x$ 'dir.

2. oyuncu, 1. oyuncunun hareketi konusunda bilgiye sahip olmadığından, 1.oyuncunun hangi hareketi seçeceğine dair inançlarını oluşturmak zorundadır. 2. oyuncunun  $x$  ve  $y$  karar noktaları üzerinde tanımladığı olasılıklar  $p(a)$  ve  $p(b)$ 'dir. 2. oyuncunun, inançları veri alındığında,  $x, y$  ve  $z$  hareketlerini seçmesi durumunda beklenen faydalarını tanımlayalım; sırasıyla beklenen faydalar,  $x : 0.p(a) +$

$4p(b) = 4p(b)$ ;  $y : p(a).1 + p(b).1 = 1$  (çünkü  $p(a) + p(b) = 1$ ); ve  $z : 4.p(a) + 0.p(b) = 4p(a)$ 'dır. Tabii şunu unutmadan belirtelim, 2.oyuncu beklenen faydasını maksimize etmeyi amaçlamaktadır.

Bu aşamada 2. oyuncunun inançlarını bilmediğimizden yapacağı seçimi bilemeyiz. Fakat  $y$  hareketini asla seçmeyeceğini söyleyebiliriz. Bunu görmek için basitçe,  $x$  ve  $z$  hareketlerinin her birinin  $1/2$  olasılıkla seçilmesi durumunda oluşan karma stratejinin beklenen faydasına bakmak yeterlidir:

$$p(a)(\frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(4)) + p(b)(\frac{1}{2}(4) + \frac{1}{2}(0)) = 2(p(a) + p(b)) = 2,$$

burada  $p(a) + p(b) = 1$ . Dikkat edilirse bu karma stratejinin beklenen faydası  $y$  hareketinden gelecek 1 değerinden her zaman daha fazladır. Yani 2. oyuncunun sahip olduğu inançlardan bağımsız  $x$  veya  $z$  hareketlerini oynamak 2. oyuncuya her zaman  $y$  hareketinden daha fazla fayda sağlar.

Sonuç olarak, verilen altoyun mükemmel dengenin tersine 2. oyuncu bu noktaya vardığında  $y$  hareketini oynamayacaktır. Bu yüzden altoyun mükemmel denge makul bir denge değildir. Bu dengenin makul olmaması altoyun mükemmelliğinin 2. oyuncunun varılmayan bilgi kümesindeki davranışını disipline edememesinden kaynaklanır. Altoyun mükemmelliği kavramı 2. oyuncunun davranışını disipline edemez çünkü varılmayan bilgi kümesi tekil değildir ve bu yüzden de bir altoyun değildir. Fakat gördüğümüz gibi, 2. oyuncunun varılan bilgi kümesindeki noktalar üzerindeki inançlarını devreye soktuğumuzda, oradaki davranışını makul bir şekilde disipline edebiliyoruz. Bu durum denge sonuçları üzerinde önemli bir etki yaratır.

### 5.5.1 İnanç ve Strateji İlişkisi

Yukarıda yapılan tartışmanın devamı olarak ilk önce oyuncuların karar noktaları üzerindeki inançlarının altoyun mükemmel denge kümelerinin rafine edilmesindeki etkisini daha formel tanımlayacağız. Daha sonra örnekler üzerinden inanç ve strateji ilişkisini daha ayrıntılı tartışacağız.

Genişleyen-biçimli bir oyunda  $x$  karar noktası verildiğinde,  $\iota(x)$  oyuncusunun ( $\iota(x)$ 'in  $x$  karar noktasında hareket sırası gelen oyuncuyu tanımlayan fonksiyon olduğunu unutmayınız) vardığı  $H(x)$  bilgi kümesine bağlı olarak  $x$  noktasına atfedilen olasılığı  $\mu(x)$ 'dir. Yani her karar noktası  $y$  için  $\sum_{x \in H(y)} p(x) = 1$ 'dir. Burada  $\mu(x)$  fonksiyonuna inançlar sistemi diyoruz çünkü oyuncuların bu noktaya kadarki tarihiyle ilgili her bilgi kümesindeki inançlarını temsil eder. İnanç sistemini özetle şöyle tanımlayabiliriz:

(i) Herhangi bir  $i$  oyuncusunun  $\mu$  inançlar sistemi bu oyuncunun bilgi kümelerindeki karar noktalarına olasılık atfeden bir fonksiyondur. Yani örneğin  $i$  oyuncusunun bilgi kümesi  $H = \{x_1, \dots, x_k\}$  ise  $\mu_H : H \rightarrow [0, 1]$  olasılık fonksiyonudur (yani  $\sum_{i=1}^k \mu_i(x_i) = 1$ ). Burada  $\mu_H(x_i)$ , oyuncunun  $x_i$  karar noktasına varıldığındaki inancı olarak yorumlanır.

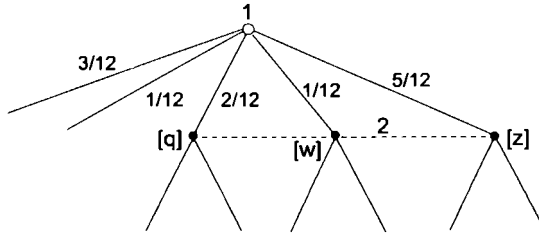
(ii)  $n$ -oyunculu mükemmel bilgili olmayan ardısal bir oyunun inanç sistemi ise  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ 'dir. Burada  $\mu_i$ ,  $i$  oyuncusunun inançlar sistemidir.

(iii) Daha önceki bölümlerde anlattığımız davranış stratejisini burada biraz hatırlamakta yarar var. Herhangi bir  $i$  oyuncusunun davranış stratejisi  $b$ , bu oyuncunun vardığı her karar noktasındaki dallara (hareketlere) atfettiği bir olasılık dağılım fonksiyonudur. Yani eğer  $H = \{x_1, \dots, x_k\}$ ,  $i$  oyuncusunun bilgi kümesi ise ve her  $x_i \in H$  karar noktasındaki hareketler kümesi  $A$  ise, bu durumda davranış stratejisi  $b_A : A \rightarrow [0, 1]$  olasılık fonksiyonudur.  $n$ -oyunculu bir oyundaki davranış strateji profili ise,  $b = (b_1, \dots, b_n)$  ile gösterilir, burada  $b_i$  stratejisi  $i$  oyuncusunun davranış stratejisidir. Eğer her karar noktasındaki her harekete pozitif olasılıkla varılırsa buna da daha önce belirttiğimiz gibi davranış stratejisinin tamamen karma olması denir.

Bir oyuncunun, oyunun tarihi hakkındaki inançları şu anki davranışı üzerinde önemli bir etkiye sahip olduğundan, bu inançların makul şekilde oluşturulması oldukça önemlidir. Bu yüzden bizi burada ilgilendiren soru şudur: Veri herhangi bir  $b$  davranış stratejisi için, hangi inançlar sistemi,  $\mu$ , makuldür? İnançlar ( $\mu$ ) ve davranış stratejisinden ( $b$ ) oluşan  $(\mu, b)$  çiftine *değerlendirme* diyoruz. Böyle bir sıralı ikili,  $(\mu, b)$ , verildiğinde, burada  $\mu$  parametresi oyuncuların  $b$  davranış stratejisini oynadıkları veri alındığında sahip oldukları inançlar olarak yorumlanır. Şimdi sorumuzu şöyle değiştirebiliriz: Hangi değerlendirmeler makuldür?

Şekil 5.17'de verilen oyunu düşünelim. Bu oyunda 1. oyuncunun davranış stratejisi ve 2. oyuncunun inançları verilmektedir (bunlar  $q, w$  ve  $z$ 'dir). 1. oyuncunun stratejisi verildiğinde, 2. oyuncu her varılan karar noktasının olasılığını Bayes kuralı ile hesaplar. Bu oyunda Bayes kuralının nasıl uygulandığını daha somutlaştırmak için şöyle düşünülebiliriz: Bu oyunun 1200 kere oynandığını varsayalım. Ortalama olarak en soldaki iki hareket sırasıyla, 300 ve 100, yani toplamda 400 kere oynanır. Diğer üç hareket ise yine soldan itibaren 200, 100 ve 500 kere, yani toplamda 800 kere oynanır. Bu yüzden 2. oyuncunun bilgi kümesine 800 kere ulaşılır. Bu bakış açısıyla, 2. oyuncunun bilgi kümesine varılmasını veri aldığımızda, en soldakinin oynanma olasılığı,  $q = 200/800 = 1/4$ , ortadaki noktanın oynanma olasılığı,  $w = 100/800 = 1/8$  ve sağdakinin oynanma olasılığı ise  $z = 500/800 = 5/8$  olur (Şekil 5.17'de inançlar sistemi her ilgili noktanın yanında ve kare parantezleri içinde, her bilgi kümesinin her karar noktasına atfedilen olasılığı olarak gösterilmektedir).

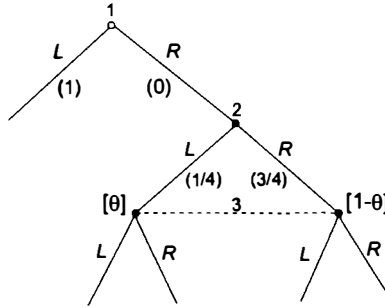
$(\mu, b)$  değerlendirmesinin makul olabilmesi için  $\mu$  inançlar sistemi,  $b$  davranış stratejisinden hareketle Bayes kuralını kullanarak, mümkün olduğu yerde, çıkarılmalıdır. Burada "mümkün olduğunda" sözü daha önce söylendiği gibi herhangi bir davranış stratejisine bağlı oluşan pozitif olasılıklı "tüm bilgi kümeleri" anlamında kullanılmaktadır. Çünkü Bayes kuralını her bilgi kümesinde uygulamak her zaman mümkün olmayabilir. Örneğin Şekil 5.18'de 1. ve 2. oyuncuların davranış stratejileri veri alındığında, 3. oyuncunun bilgi kümesine varılamaz (yani sıfır olasılıkla varılır). Bu şartlar altında 3. oyuncunun inançlarını oluşturmak için Bayes kuralını kullanamayız. Fakat buna rağmen 2. oyuncunun stratejisi ver-



**Şekil 5.17** İnançların elde edilmesinde Bayes kuralının kullanılması

ildiğinde, 3. oyuncu için tek bir makul inanç vardır, o da  $\theta = 1/4$ 'tür.

Bu inancın, tek makul inanç olma gerekçesi, 2. oyuncunun davranış stratejisinin şu anlama gelmesinden kaynaklanır: 1. oyuncu solu 1 olasılıkla oynamak zorunda oynamasına rağmen, 2. oyuncu, eğer 1. oyuncu sağ oynarsa, solu  $1/4$  olasılıkla oynayacaktır. Yani 2. oyuncunun karma stratejisi zaten 1. oyuncunun 2. oyuncuyu devreye sokacak stratejiden sapma göstereceğini dikkate alır. Sonuç olarak, 3. oyuncuya varıldığında, onun tek inancı 2. oyuncunun  $1/4$  olasılıkla solu oynayacağı şeklindedir.



**Şekil 5.18** Bayes kuralı dışındaki inançlar üzerine getirilen kısıtlama

Diğer yandan davranış stratejisi verildiğinde, inançlar üzerinde empoze edilebilecek başka kısıtlar da vardır. Şekil 5.19'de verilen oyunu düşünelim burada her iki oyunda da 1. ve 2. oyuncular için davranış stratejileri tanımlanır. Oyunda, 0 ve 1 değerleri arasında seçilen herhangi bir  $\theta$  ve  $\phi$  değeri, Bayes kuralı ile uyumlu bir değerlendirme elde etmek için yeterlidir.

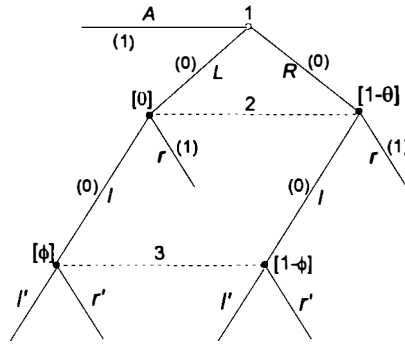
Bu oyunda  $\theta = \phi$  eşitliğinin geçerli olduğunu iddia edelim. Gerçekte bu eşitlik iki ilave kısıttan kaynaklanır:

(i) *Bağımsızlık*: İnançlar, stratejilerinin bağımsız seçildiğini yansıtmak zorundadır.

(ii) *Ortak İnançlar*: Aynı bilgiye sahip oyuncular aynı inançlara sahiptir.

Bu prensiplerin nasıl  $\theta = \phi$  eşitliğine yol açtığına bakalım. Şekil 5.19'deki

oyuna bakalım. 2. oyuncunun bilgi kümesine varıldığı zaman,  $\theta$  değeri 2. oyuncunun, 1. oyuncunun  $L$  hareketini oynamasına atfettiği olasılıktır. Şekilde gösterilmemesine rağmen, ortak inançlar prensibi 3. oyuncunun da 1. oyuncunun  $L$ 'yi seçme olasılığına  $\theta$  değerini atfettiğini ima eder (yani 2. oyuncu ile aynı bilgiye sahiptir). Fakat oyuncuların inançlarının bağımsızlığı prensibi ile 2. oyuncunun strateji seçimini bulmak 3. oyuncuya 1. oyuncunun seçtiği strateji hakkında hiçbir bilgi sağlamaz. Sonuç olarak, 3. oyuncunun 1.oyuncu hakkındaki inançları aynı kalmak zorundadır (yani 1. oyuncunun  $L$  hareketini oynama olasılığı  $\theta$ 'e eşittir), bu olasılık 2. oyuncunun  $L$  hareketini seçtiğini gördükten sonra bile aynıdır ve  $\phi = \theta$  anlamına gelir.



**Şekil 5.19** Ortak inançlar ve inançların bağımsızlığı varsayımları

Böylece Bayes kuralı, bağımsızlık ve ortak inançlar kavramları, inançlar üzerine konan olası tüm kısıtları tanımlayan kavramlardır. Bir değerlendirmenin tutarlı olması ancak bu koşullar geçerli ise mümkündür. Dolayısıyla bu koşullardan biri ihlal edilirse değerlendirme tutarlı olmaktan çıkar. Tutarlılık kavramını daha iyi tanımlamak için *tamamen karma* dediğimiz bir kavramı tanımlamamız gerekir. Sınırlı genişleyen-biçimli bir oyunda bir davranış stratejisi eğer her bilgi kümesindeki her harekete pozitif olasılık atfederse, bu davranış stratejisine *tamamen karma* denir. Tutarlılık kavramı Bayes kuralından daha kısıtlayıcıdır, hatta her altoyundaki Bayes kuralından daha kısıtlayıcıdır. Şimdi tutarlılık kavramının formel tanımını verelim.

**Tanım 5.5** Sınırlı genişleyen-biçimli bir oyunda eğer  $b^n$  gibi *tamamen karma* bir davranış stratejiler dizisi,  $b$  davranış stratejisine yakınsıyorsa ve  $\mu^n$  inanç sistemleri dizisi de Bayes kuralı ile  $\mu$  değerine yakınsıyorsa  $(\mu, b)$  değerlendirmesine tutarlıdır denir.

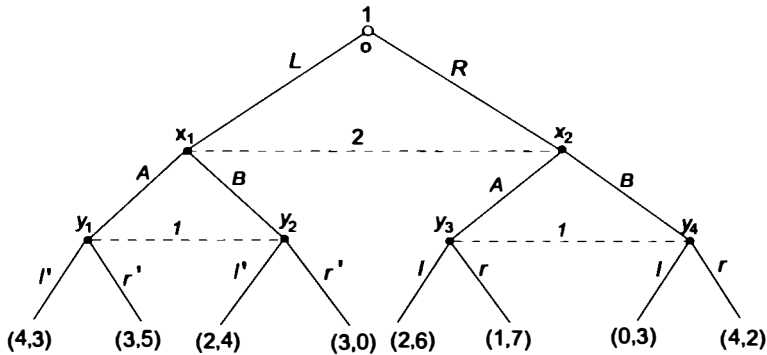
Tutarlılık kavramını daha iyi anlamak için yukarıda verilen tanımı daha önce verdiğimiz örneklerle uygulayalım. Şekil 5.17'de verilen örnekte,  $b$ , davranış stratejisini temsil etsin (burada 2. oyuncunun davranış stratejisi ile ilgili bir durum söz konusu değildir) ve  $\mu = (q, w, z)$  de inançlar sistemini göstermektedir. Değerlendirmenin,  $(\mu, b)$ , tutarlı olması için,  $(\mu^n, b^n) \rightarrow (\mu, b)$  şeklinde bir

değerlendirmeler dizisi olmak zorundadır. Burada her  $n$  için  $b^n$  tamamen karma,  $p^n$  de Bayes kuralı kullanılarak  $b^n$  den türetilmiştir. Bu şu anlama gelir: Davranış stratejiler dizisiyle birlikte 1. oyuncunun sağ taraftaki üç seçimine varma olasılıkları sırasıyla  $2/12$ ,  $1/12$  ve  $5/12$ 'e yakınsar. Bu yüzden inançlar dizisi Bayes kuralı ile türetilir,  $q^n/w^n \rightarrow 2$ ,  $w^n/z^n \rightarrow 1/5$  ve  $z^n/q^n \rightarrow 5/2$ , böylece  $q^n \rightarrow 1/4$ ,  $w^n \rightarrow 1/8$  ve  $z^n \rightarrow 5/8$ . Dolayısıyla daha önce ifade ettiğimiz gibi, değerlendirmenin tutarlılığı şunu gerektirir:  $\mu = (q, w, z) = (1/4, 1/8, 5/8)$ .

Şekil 5.18'de tanımlanan davranış stratejisi veri alındığında, tutarlılık  $\theta = 1/4$  inancının olmasını gerektirir. Çünkü tamamen karma stratejilerinin herhangi bir dizisi şekildeki değerlere yakınsar. Yani 1. oyuncunun sağ seçme olasılığı ve 2. oyuncunun solu seçme olasılığı, 1. oyuncunun sağ ve 2. oyuncunun solu seçme olasılığının limite üç katı kadardır. Bu sonuç, inançların Bayes kuralını kullanarak elde edilen dizilerin limit değerinden türetilir.

Şekil 5.20'de verilen oyuna bakalım. Bu oyunda tamamen karma davranış strateji profili (b) şöyle tanımlanır:

1. oyuncu  $R$  hareketini 0.1 olasılıkla,  $L$  hareketini ise 0.9 olasılıkla oynar.
2. oyuncu kendi bilgi kümesinde şu seçimleri yapar:  $B$  hareketini 0.1 olasılıkla ve  $A$  hareketini de 0.9 olasılıkla oynar.
1. oyuncu bilgi kümesine vardıktan sonra  $l$  ve  $l'$  hareketlerini 0.1 olasılıkla,  $r$  ve  $r'$  hareketlerini de 0.9 olasılıkla oynar.



Şekil 5.20

Yukarıda verdiğimiz olasılık yapısı bir davranış strateji profilidir. Rasyonel oyuncular kendi bilgi kümelerine vardıklarında hangi karar noktalarında olduklarına dair inançlar oluştururlar. Açıkça, 2. oyuncu, kendi bilgi kümesinde  $x_2$  noktasında olma olasılığının 0.1 olduğuna inanmaktadır. Fakat 2.oyuncu oynadıktan sonra 1. oyuncunun inancı ne olmalıdır? Yani daha spesifik söylersek, 1. oyuncunun  $h_1 = \{y_3, y_4\}$  ve  $h_2 = \{y_1, y_2\}$  bilgi kümelerindeki inançları ne olmalıdır?

Eğer 1. oyuncu  $h_1$  bilgi kümesine vardıysa, kendisi daha önce  $R$  hareketini seçti demektir. Dolayısıyla 1. oyuncu  $h_1$  bilgi kümesinde sahip olduğu bilgiyi hangi karar noktalarına varıldığına dair inançlarını oluşturmak için kullanmalıdır.

Bunu yapmanın bir yolu Bayes kuralını kullanmaktır.

Bu yüzden, eğer  $b(y_1)$ , oyun ağacındaki kök noktasından başlayarak  $y_4$  karar noktasına varılma olasılığını gösteriyorsa,  $b(y_4 | h_1)$  bize  $h_1$  bilgi kümesine varıldığında  $y_4$  karar noktasında olma olasılığını verir. Bu olasılığı Bayes kuralı ile bulalım:

$$b(y_4 | h_1) = \frac{b(h_1 | y_4)b(y_4)}{b(h_1 | y_4)b(y_4) + b(h_1 | y_3)b(y_3)} = \frac{b(y_4)}{b(E) + b(y_3)}.$$

Bu durumda,

$$b(y_4 | h_1) = \frac{1 \times 0.01}{1 \times 0.01 + 1 \times 0.09} = 0.1.$$

Bu sonuç şu anlama gelir: 1. oyuncu  $L$  davranış stratejisiyle varılan bilgi kümesindeki inançlarını güncelledikten sonra,  $y_4$  karar noktasında olma olasılığını 0.1 olduğunu görür. Halbuki oyunun başında  $h_1$  bilgi kümesinde  $y_4$  karar noktasına varma olasılığı 0.01'di. Özetle 1. oyuncu oyunda olan biten hakkında elde ettiği bilgiyi kullanarak olasılığını revize etti. Buna 1. oyuncunun inançlarını ardısal rasyonel olarak güncellemek diyoruz. Eğer 1. oyuncu bunu her karar noktası için yapsaydı, bu durumda inançları şöyle olurdu:

$$\begin{aligned} b(y_4 | h_1) &= 0.1, \quad b(y_3 | h_1) = 0.9 \\ b(y_2 | h_2) &= 0.1 \quad \text{ve} \quad b(y_1 | h_2) = 0.1. \end{aligned}$$

Açıkça bu inançlar,  $b$  davranış strateji profiliyle uyumlu inançlardır. Dolayısıyla  $b$  davranış strateji profili verildiğinde makul olan tek inançlar sistemidir.

Daha önce ifade ettiğimiz gibi bir inançlar sisteminin limit değerinin olması onu tutarlı yapar. Bu örnekte tamamen karma davranış stratejisinin ardısal bir şekilde değiştirildiğini varsayalım; örneğin 0.1 olasılığı git gide küçültülsün. Dolayısıyla 0.9 olasılıkla yapılan hareketler de daha büyük olasılıkla oynanır hale gelir, yani olasılık 1'e yaklaşır. Tamamen karma strateji profillerinden oluşturduğumuz bu inançlar dizisi de her adımda aynı zamanda değişecektir. Peki o zaman sorumuz, limitte bu inançlara ne olur?

Bu oyunda her oyuncu için bu inanç sisteminin limitte bir değeri olduğunu görebiliriz:

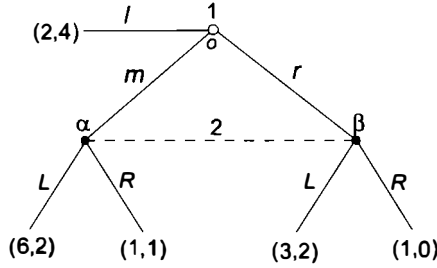
i. 1. oyuncunun bilgi kümesinde:  $b(y_4 | h_1) = b(y_2 | h_2) = 0$  ve  $\mu(y_3 | h_1) = \mu(y_1 | h_2) = 1$

ii. 2. oyuncunun bilgi kümesinde  $b(x_2) = 0$  ve  $b(x_1) = 1$ .

Bu inançlar sistemi bize  $o \rightarrow x_1 \rightarrow y_1 \rightarrow (4, 3)$  patikasını verir; bu da  $(\{L, L'\}, A)$  strateji profilidir. İnançlar sistemini ve strateji profilini tutarlı yapan şey Bayesyen-tutarlı inançlar sisteminin ve strateji profiller dizisinin bir limiti olmasıdır. Bunu daha iyi anlamak için bir örnek daha verelim.

## Örnek 5.6

Şekil 5.21'de verilen oyuna bakalım: Burada iki Nash dengesi vardır:  $(l, R)$  ve  $(m, L)$ . Soru, bu dengelerden hangisinin makul olduğudur. Açıkça, bir dengeyi veya diğerini silmek için altoyun mükemmelliği kullanamayız çünkü oyun tek başına bir altoyuna sahip değildir. Bu durumda şu beklenebilir: 1. oyuncu ilk hareket eden oyuncu olduğu için oyunu yönlendirebilir ve dolayısıyla kendisinin daha yüksek fayda sağlayacağı bir dengein oluşmasına imkan verebilir.



Şekil 5.21

Burada  $(l, R)$  Nash dengesini silmenin daha makul gerekçesi şu olabilir: Eğer 2.oyuncunun bilgi kümesine bir kez varıldı mı, 2.oyuncunun  $R$ 'yi seçmesinin bir mantığı yoktur. Onun için en iyi hareket  $L$ 'dir. Dahası,  $(m, L)$  strateji profilinin  $\mu$  inanç sistemiyle tutarlı olduğunu da kontrol ederek bu karara varmak mümkündür. Dolayısıyla  $\mu(\beta) = 0$  ve  $\mu(\alpha) = 1$  inançları tutarlıdır.

Diğer yandan,  $(l, R)$  Nash dengesi için de herhangi bir inanç sisteminin,  $(l, R)$  strateji profiliyle tutarlı olup olmadığını kontrol edebiliriz. 2. oyuncu  $\{\alpha, \beta\}$  bilgi kümesinde hangi inançlara sahip olursa olsun, eğer bu bilgi kümesine varılmışsa kendisinin hiçbir zaman  $R$  hareketini seçmemesi gerekir. Çünkü  $L$  hareketini seçmek her zaman daha yüksek fayda sağlar; bu durum hangi karar noktasına varıldığından bağımsız olarak geçerlidir. Dolayısıyla bu Nash dengesinin makul bir denge olduğunu savunmak zordur. Sonuç olarak oyunun tek makul dengesi  $(m, L)$ 'dir.

Bu örnek bize şunu göstermektedir: (i) Tutarlı inançlar sistemi bir ardısal oyunun makul dengelerini bulmak için ilk adımdır ve (ii) Nash dengesi strateji profili her bilgi kümesinde optimal hareketi seçmeyi sağlamaz. Dolayısıyla  $\{\alpha, \beta\}$  bilgi kümesinde  $R$  seçimi açıkça optimal değildir.

### 5.5.2 Ardısal Rasyonellik

Şu ana kadar inançlar ve stratejiler arasındaki ilişkiye baktık. Şimdi tekrar genel olarak genişleyen-biçimli bir oyun için geriye doğru çıkarsama yaklaşımının daha makul bir karşılığını geliştirmeye çalışalım.

Mükemmel bilgili oyunlar için geriye doğru çıkarsama, temelde tüm oyuncuların kendilerine sıra geldiğinde faydalarını maksimize edecek şekilde davranmalarına karşılık gelir. Altoyun mükemmelliği bu düşüncüyü mükemmel bilgili oyunların ötesine taşımayı amaçlar. Fakat daha önce gördüğümüz Şekil 5.16'da olduğu gibi, altoyun mükemmelliği her bilgi kümesindeki optimal olmayan davranışları dışarıda bırakacak kadar güçlü olmayabilir.

Her oyuncu oyun sırası geldiğinde oyunun tarihi hakkında inançlara sahiptir. Bu inançlara bağlı olarak her oyuncunun bilgi kümesindeki seçimleri ilgili karar noktasında optimal olmalıdır. Bu bir kez yapıldı mı, geriye doğru çıkarsama kavramını daha genel olarak tüm genişleyen-biçimli oyunlara genişletebiliriz.

Sınırlı genişleyen-biçimli bir oyun düşünelim. Bu oyunda  $i$  oyuncusuna ait bilgi kümesi  $H$  ile gösterilsin.  $i$  oyuncusunun  $b_i$  davranış stratejisinin,  $H$  bilgi kümesine bir kez varıldıktan sonra, optimal olup olmadığını kontrol etmek için, bu oyuncunun  $H$  bilgi kümesine bir kez varıldı mı herhangi bir stratejisinden elde edeceği faydayı hesaplamamız gerekir.

Şimdi  $i$  oyuncusunun,  $H$  bilgi kümesine varıldığında,  $(\mu, b)$  değerlendirmesine göre faydasını hesaplayalım. Her  $x \in H$  karar noktası için  $i$  oyuncusunun  $x$  karar noktasından başlayan faydasını  $b$  davranış stratejisini kullanarak hesaplayabiliriz. Bunu yapmak için de basitçe  $x$ 'e bir altoyunmuş gibi davranalım. Böylece her  $x$  için  $u_i(b \mid x)$  fayda düzeyini verir. Yani  $u_i(b \mid x)$ ,  $i$  oyuncusunun  $x \in H$  noktasına varıldığında elde ettiği faydadır. Burada tabii ki,  $i$  oyuncusu,  $H$  bilgi kümesinde hangi noktaya vardığını bilmemektedir. Fakat  $\mu$  inançlar sistemi,  $i$  oyuncusunun  $H$  bilgi kümesindeki hangi noktaya varıldığına dair olasılıklardan oluşur. Sonuç olarak,  $i$  oyuncusunun  $(\mu, b)$  değerlendirmesine göre  $H$  bilgi kümesinde beklenen faydasını,  $v_i(\mu, b \mid H)$ , şöyle ifade edebiliriz:

$$v_i(\mu, b \mid H) = \sum_{x \in I} \mu(x) u_i(b \mid x). \quad (5.10)$$

Kısaca (5.10) denkleminde hareketle genişleyen-biçimli bir oyundaki herhangi bir  $i$  oyuncusunun beklenen faydası hesaplanabilir. Burada yapmak istediğimiz şey, herhangi bir bilgi kümesine varıldığında  $i$  oyuncusunun stratejisini değiştirdiğinde faydasının nasıl değiştiğini yani daha iyi sonuç verecek bir strateji olup olmadığını incelemektir. Bu da bizi ardısal rasyonel kavramına götürür.

**Tanım 5.6** *Sınırlı genişleyen-biçimli bir oyunda her  $i$  oyuncusuna ait her  $H$  bilgi kümesi için ve  $i$  oyuncusunun her diğer  $b'_i$  davranış stratejisi için aşağıdaki koşul geçerliyse,  $(\mu, b)$  değerlendirmesine ardısal rasyonel denir:*

$$v_i(\mu, b \mid I) \geq v_i(\mu, (b'_i, b_{-i}) \mid I).$$

Buradan hareketle ardısal rasyonellikten ne anladığımızı daha açık bir şekilde ifade edelim. Eğer hiçbir oyuncu, oyunun herhangi bir aşamasında, stratejisini değiştirecek bir motivasyona sahip değilse, değerlendirme ardısal rasyoneldir. Oyunun herhangi bir aşaması demekle kastettiğimiz şey,  $b$  davranış stratejisiyle

sadece pozitif olasılıkla varılan noktaları içeren tüm bilgi kümeleridir. Bu ayrımın önemi Şekil 5.16'dan da açık bir şekilde görülebilir. Hatırlayacağımız gibi, 1. oyuncunun  $L$  hareketini ve 2. oyuncunun da  $m$  hareketini oynadığı altoyun mükemmel denge makul değildi çünkü 2. oyuncu eğer gerçekten kendi bilgi kümesine varsaydı  $m$  hareketini oynamaktan vazgeçecekti. Eğer tüm bilgi kümelerindeki optimal davranışın ne olduğunu kontrol etmede ısrarcı olmasaydık, bu makul olmayan denge elemine edilemeyecekti. Yani sadece verilen stratejilere göre pozitif olasılıkla varılan bilgi kümelerini kontrol etseydik, makul olmayan bu dengeyi elemine edemeyecektik. Fakat oyuncuların davranışlarının varılan ya da varılmayan her bilgi kümesinde optimal olması gerektiğini zorunlu tutarsak makul olmayan altoyun mükemmel denge elemine edilir.

Kısacası ardısal rasyonalite kavramını daha önce tanıttığımız stratejileriyle inançları birbirine bağlayan üç prensibi - Bayes kuralı, bağımsızlık ve ortak inançlar-birleştirdiğimizde önemli bir denge kavramı olan ardısal dengeyi elde ederiz.

**Tanım 5.7** *Eğer sınırlı genişleyen-biçimli bir oyundaki  $(\mu, b)$  değerlendirmesi hem tutarlı hem de ardısal rasyonalse, bu değerlendirme ardısal dengedir.*

Her sınırlı ve mükemmel hatırlamalı genişleyen-biçimli oyunda en az bir ardısal denge vardır. Bu denge kavramını daha iyi anlamak için bir örnek verelim.

### Örnek 5.7

Şekil 5.20'de verilen mükemmel-olmayan bilgili ardısal oyuna tekrar dönelim. Bu oyunda dikkat edilirse pür Nash dengesi yoktur. Bu yüzden bulacağımız karma strateji Nash dengesinin, aynı zamanda ardısal denge de olduğunu göstereceğiz.

Oyunun davranış strateji profili,  $b = (b_1, b_2)$ , şu şekilde verilmektedir:  $b_1(L) = 1, b_1(R) = 0, b_1(r) = 1, b_1(l) = 0, b_1(r') = 1/6, b_1(l') = 5/6$  ve  $b_2(B) = b_2(A) = 1/2$ .

Burada şunu iddia ediyoruz;  $b$  strateji profiliyle tutarlı  $\mu$  inanç sistemi şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} \text{ bilgi kümesinde } \mu_2(x_2) &= 0, \quad \mu_2(x_1) = 1, \\ \{y_1, y_2\} \text{ bilgi kümesinde } \mu_1(y_2) &= 1/2, \quad \mu_2(y_1) = 1/2, \\ \{y_3, y_4\} \text{ bilgi kümesinde } \mu_1(y_4) &= 1/2, \quad \mu_2(y_3) = 1/2. \end{aligned}$$

Bu durumun doğruluğunu kontrol edelim. Tamamen-karma davranış strateji profiller dizisi,  $\{b_n\} = \{(b_1^n, b_2^n)\}$ , şöyle tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned} b_1^n(L) &= 1 - \frac{1}{2n}, \quad b_1^n(R) = \frac{1}{2n}, \quad b_1^n(r') = \frac{1}{6}, \quad b_1^n(l') = \frac{5}{6} \\ b_1^n(r) &= 1 - \frac{1}{2n}, \quad b_1^n(l) = \frac{1}{2n}, \quad b_2^n(B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \text{ ve } b_2^n(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Dikkat edilirse bu diziler  $b = (b_1, b_2)$  strateji profiline yakınsar. Dahası doğrudan

hesaplırsak,  $\{\mu^{b_n}\}$  inançlarının  $b_n$  davranış stratejisiyle tutarlı olduğunu görürüz:

$$\begin{aligned}\mu_2^{b_n}(x_1) &= 1 - \frac{1}{2n}, \quad \mu_2^{b_n}(x_2) = \frac{1}{2n}, \\ \mu_1^{b_n}(y_2) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \quad \mu_1^{b_n}(y_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \\ \mu_1^{b_n}(y_4) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \text{ ve } \mu_1^{b_n}(y_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

Yukarıdaki ilk satırı Bayes kuralını kullanarak elde edebiliriz (diğerleri de benzer şekilde hesaplanabilir):

$$\mu_2^{b_n}(x_1) = \frac{b_2(x_1)}{b_2(x_1) + b_2(x_2)} = 1 - \frac{1}{2n}.$$

Şimdi de  $(b, \mu)$  değerlendirmesinin oyunun ardışal dengesi olduğunu gösterelim. Bunu da  $\mu$  inanç sistemi verildiğinde, her bilgi kümesinde oyuncuların beklenen faydalarını maksimize eden davranış stratejilerini kontrol ederek yaparız.

*Birinci adım:*  $H = \{y_1, y_2\}$  bilgi kümesini düşünelim. Açıkça bu küme 1. oyuncuya aittir. Bu oyuncu  $\mu_1(y_2) = \mu_2(y_1) = 1/2$  inançlarına sahiptir. Bu bilgi kümesinde herhangi bir davranış stratejisi şu biçimde olsun,  $b(r') = p$  ve  $b(l') = 1 - p$ . Bu davranış stratejisi için 1.oyuncunun beklenen faydası aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$v_1(p, H) = \frac{1}{2}[3p + 2(1 - p)] + \frac{1}{2}[3p + 4(1 - p)] = 3.$$

Dikkat edilirse sonuç  $p$ 'den bağımsızdır. Bu da şu demektir: 1. oyuncunun  $b_1(r') = 1/6$  ve  $b_2(l') = 5/6$  davranış stratejisinden başka bir stratejiyi oynamasında herhangi bir kazancı yoktur.

*İkinci adım:*  $H_1 = \{y_4, y_3\}$  bilgi kümesini düşünelim. Bu bilgi kümesinde,  $\mu_1(y_4) = \mu_2(y_3) = 1/2$  inançlarına sahibiz. Bu yüzden 1.oyuncunun herhangi bir davranış stratejisini,  $b(r) = p$  ve  $b(l) = 1 - p$ , seçmesi sonucu beklenen faydası şöyledir:

$$v_1(p, H_1) = \frac{1}{2}[4p + 0 \times (1 - p)] + \frac{1}{2}[p + 2(1 - p)] = 1 + \frac{3}{2}p \leq 2.5.$$

Buradan hareketle, 1. oyuncunun beklenen faydasını maksimize eden davranış stratejisinin,  $r$  hareketini 1 olasılıkla,  $l$  hareketini de 0 olasılıkla oynayan strateji olduğunu görürüz. Bu da bize en yüksek fayda olan 2.5 değerini verir.

*Üçüncü adım:*  $H_2 = \{x_1, x_2\}$  bilgi kümesini düşünelim. Burada  $H_2$ , 2. oyuncunun bilgi kümesidir.  $\mu_2(x_1) = 1$  olduğundan, 2. oyuncunun beklenen faydası oyunun  $x_1$  karar noktasından başlayarak nasıl oynandığıyla belirlenir. 2. oyuncunun  $x_1$  karar noktasında herhangi bir davranış stratejisi,  $b(B) = p$  ve  $b(A) = 1 - p$

olsun. Dolayısıyla 2. oyuncunun  $H_2$  karar noktasında beklenen faydası şöyledir:

$$v_2(p, H_2) = \frac{1}{2} \left[ p \times \frac{1}{6} \times 0 + p \times \frac{5}{6} \times 4 + (1-p) \frac{1}{6} \times 5 + (1-p) \frac{5}{6} \times 3 \right] = \frac{5}{3}.$$

Yine beklenen faydanın  $p$ 'den bağımsız olduğu görülür. Bu da 2. oyuncunun  $b_2(B) = b_2(A) = 1/2$  stratejisinden sapmasının daha yüksek fayda sağlamadığı anlamına gelir.

*Dördüncü adım:* Oyunun  $o$  başlangıç noktasından başlayarak bilgi kümesini düşünelim. Bu durumda eğer 1.oyuncu  $R$  hareketini  $p$  olasılıkla,  $L$  hareketini de  $1-p$  olasılıkla oynarsa beklenen faydası şöyledir:

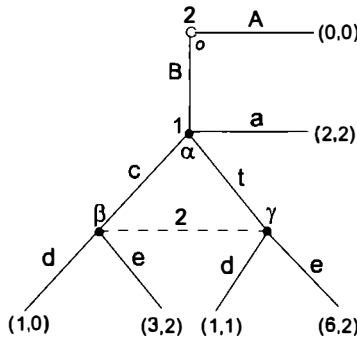
$$v_1(p, o) = \frac{5}{2}p + 3(1-p) = 3 - \frac{p}{2}. \quad (5.11)$$

Açıkça (5.11) denklemi  $p = 0$  iken maksimum bir değere sahiptir. Yani 1.oyuncu oyunun başında  $R$  hareketini sıfır olasılıkla,  $L$  hareketini de 1 olasılıkla oynamalıdır.

Sonuç olarak herhangi bir bilgi kümesinde  $b$  davranış stratejilerinden sapma göstermeleri durumunda hiçbir oyuncu daha kazançlı hale gelemez. Bu yüzden  $(b, \mu)$  çifti ardışıl dengedir.

### Örnek 5.8

Şekil 5.22'de verilen oyuna bakalım. Dikkat edilirse, bu oyunda  $\alpha$  karar noktasıyla başlayan tek bir altoyun vardır. Bu oyunun iki tane altoyun mükemmel dengesi vardır:  $(\{t\}, \{B, e\})$  ve  $(\{a\}, \{B, t\})$ .



Şekil 5.22

Sırasıyla şunları iddia edelim:

i.  $(\{t\}, \{B, e\})$  altoyun mükemmel dengesi aşağıdaki  $b = (b_1, b_2)$  strateji profiliyle uyumludur:

$$b_1(t) = 1 \text{ ve } b_1(a) = b_1(c) = 0$$

ve

$$b_2(B) = 1, b_1(A) = 0, b_2(d) = 0 \text{ ve } b_2(c) = 1.$$

Ayrıca  $\{\beta, \gamma\}$  bilgi kümesinde  $\mu = (\mu_1, \mu_2)$  inanç sistemi ise şöyledir:  $\mu_1(\beta) = 0$  ve  $\mu_2(\gamma) = 1$ . Bu inanç sistemi  $b$  strateji profili ile uyumludur ve  $(b, \mu)$  ardısal dengedir.

ii. Altouyn mükemmel denge olan  $(\{a\}, \{T, R\})$  strateji profili ardısal denge değildir.

Bu iddiaları tek tek kontrol edelim. İlk önce yukarıda tanımlanan  $(b, \mu)$  çiftinin ardısal denge olduğunu gösterelim. Tamamen karma bir strateji profiller dizisini düşünelim,  $\{b^n = (b_1^n, b_2^n)\}$ , ve bu diziyi şöyle tanımlayalım:

$$b_1^n(t) = 1 - \frac{1}{n} \text{ ve } b_1^n(a) = b_1^n(c) = \frac{1}{2n}$$

ve

$$b_2^n(B) = 1 - \frac{1}{n}, b_2^n(A) = \frac{1}{n}, b_2^n(d) = \frac{1}{n} \text{ ve } b_2^n(e) = 1 - \frac{1}{n}$$

Açıkça görüldüğü gibi  $b^n \rightarrow b$ .

Burada  $b^n$  ile Bayesyen tutarlı  $\mu^{b^n} = (\mu_1^{b^n}, \mu_2^{b^n})$  inançlar sistemini doğrudan hesaplırsak,  $\{\beta, \gamma\}$  bilgi kümesinde şuna sahip oluruz:

$$\mu_2^{b^n}(\beta) = \frac{b_1^n(t)}{b_1^n(c) + b_1^n(t)} = \frac{1/2n}{1 - 1/2n} \rightarrow 0 = \mu_2(\beta)$$

ve

$$\mu_2^{b^n}(\gamma) = \frac{b_1^n(t)}{b_1^n(c) + b_1^n(t)} = \frac{1 - 1/n}{1 - 1/2n} \rightarrow 1 = \mu_2(\gamma).$$

Tüm bunlar  $\mu$  inanç sisteminin  $b$  strateji profili ile tutarlı olduğunu göstermektedir. Şimdi de  $(b, \mu)$  çiftinin en yüksek beklenen faydayı sağlayıp sağlamadığına bakalım.

Eğer 2. oyuncu  $d$  hareketini  $p$  olasılıkla ve  $e$  hareketini de  $1 - p$  olasılıkla oynarsa  $\{\beta, \gamma\}$  bilgi kümesinde beklenen faydası şudur:

$$v_2(\beta, \gamma) = p \times 1 + (1 - p) \times 2 = 2 - p. \quad (5.12)$$

(5.12) denklemi  $p = 0$  iken maksimum değerine ulaşır. Yani 2. oyuncu  $\{\beta, \gamma\}$  bilgi kümesindeki  $b_2$  stratejisinden sapma göstererek daha fazla kazanç sağlayamaz.

Şimdi de  $\alpha$  karar noktasında 1. oyuncunun  $c$  hareketini  $p_1$  olasılıkla,  $t$  hareketini de  $p_2$  olasılıkla ve  $a$  hareketini de  $1 - p_1 - p_2$  olasılıkla seçtiğini varsayalım. Bu durumda  $\alpha$  karar noktasından başlayan 1.oyuncunun beklenen faydası şöyle ifade edilir:

$$v_1(\alpha) = p_1 \times 3 + p_2 \times 6 + (1 - p_1 - p_2) \times 2 = 2 + p_1 + 4p_2. \quad (5.13)$$

Burada  $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0$  ve  $p_1 + p_2 \leq 1$  durumlarını dikkate alırsak, (5.13) denklemi

$p_1 = 0$  ve  $p_2 = 1$  noktalarında maksimum değerini alır. Yani 1. oyuncu  $\alpha$  karar noktasındaki davranış stratejisini değiştirerek bir kazanç elde edemez.

2. oyuncu,  $o$  karar noktasında,  $B$  hareketini  $q$  olasılıkla ve  $A$  hareketini de  $1 - q$  olasılıkla oynasın. Bu durumda  $o$  karar noktasında başlayan oyunda beklenen fayda şöyledir:

$$v_2(o) = q \times 1 + 1 \times 2 = 2q. \quad (5.14)$$

Açıkça (5.14),  $q = 1$  olduğunda beklenen fayda maksimum değerini alır. Yani 2.oyuncunun  $o$  karar noktasında stratejisini değiştirmesi rasyonel değildir. Dolayısıyla  $(\{t\}, \{B, e\})$  dengesinin ardısal dengedir.

Şimdi de  $(\{a\}, \{B, d\})$  altoyun mükemmel dengesinin ardısal denge olmadığını gösterelim. Bunun için de 1. oyuncunun  $\{\beta, \gamma\}$  bilgi kümesi üzerine tanımlanmış rastgele bir olasılık dağılımı olduğunu varsayalım:  $\beta$  karar noktasında olma olasılığının  $s$ ,  $\gamma$  karar noktasında olma olasılığının ise  $1 - s$  olsun. Aynı zamanda 2. oyuncunun  $d$  hareketini  $p$  olasılıkla  $e$  hareketini de  $1 - p$  olasılıkla oynadığını varsayalım. Bu durumda  $\{\beta, \gamma\}$  bilgi kümesinde 2. oyuncunun beklenen faydası şöyle ifade edilir:

$$v_2(\beta, \gamma) = s[p \times 0 + (1 - p) \times 2] + (1 - s)[p \times 1 + (1 - p)2] = 2 - (1 - s)p$$

Kolayca görülebileceği gibi  $v_2(\beta, \gamma)$  değeri,  $p = 0$  iken maksimumdur. Dolayısıyla 2.oyuncu ( $b_2(d) = 1$  ve  $b_2(e) = 0$ ) stratejisinden saparak faydasını artırabilir. Bu da  $(\{a\}, \{B, d\})$  strateji profilinin ardısal denge olmadığını gösterir.

## 5.6 Titreyen-El Mükemmel Denge

Altoyun mükemmel denge ve ardısal denge kavramları, ardısal rasyonelliğe oyuncuların stratejik muhakemesinin bir unsuru olarak bakar. Bu kavramlar, oyuncuların sadece denge patikasındaki hareketlerini seçerken rasyonel olduklarını değil, dengede gerçekleşmeyecek hareketler konusunda da diğer oyuncuların planları hakkında inançlar oluşturduklarını belirtirler. Fakat şimdi tanıtmayı amaçladığımız *titreyen-el mükemmel denge* kavramı farklı bir yaklaşım gösterir. Bu denge çözümü oyuncuların rasyonelliğine farklı bakar. Buna göre oyuncular denge-dışı olayları da dikkate alırlar çünkü diğer oyuncuların birbirinden bağımsız hatalar yapabileceklerini (elleri titreyebilir) düşünürler. Yani buradaki temel fikir, her oyuncu hareketini sadece denge inançlarına göre optimal olarak seçmez, hata yapma olasılığını dikkate alarak da seçim de bulunur. Bu hatalar oyunun bir parçası olarak modellenmezler. Daha ziyade, her bir strateji profili hataların gerçekleşme olasılığını dikkate alan bazı inançlarla birlikte ardısal rasyonaliteyi sağlıyorsa, bu strateji profili istikrarlı diye tanımlanır.

Kısacası titreyen el yaklaşımına göre, bir oyuncunun stratejisinin optimal olması demek, sadece diğer oyuncuların denge stratejilerine karşı optimal olması değil, aynı zamanda bu stratejilerde olabilecek düzensizliği ya da salınımı da dikkate alması yani hatalara karşı da optimal olması demektir. Burada hatadan kastettiğimiz

şey, unutkanlık, şaşırma ve küçük mantıksal hatalardır. Bu hatalara literatürde *el titremeleri* denir. Böyle küçük hataların yapılmasına imkan verilen oyunlara *salınım oyunları* (*perturbed games*) denir. Sonuç olarak titreyen-el dengesi küçük hata olasılıklarına ya da salınımlara imkan verilen durumlarda oluşan Nash dengesidir. Bu aslında mahkum stratejiler dahil, tüm stratejilerin pozitif bir olasılıkla oynanabileceğini kabul eden bir yaklaşımdır.

Gerçek dünyadaki oyuncuların yaptıkları hataları yazım hatalarına benzetebiliriz. Bireyler her zaman rasyonel davranmayı amaçlarlar. Fakat kontrolü dışındaki şans faktörleri devreye girer. Örneğin basmayı amaçladıkları tuş yerine, "elleri titrer" yanlış tuşa basarlar. Eğer bir olayda istemeden yaptığımız hata yapma olasılığı ( $\epsilon$ ) çok küçükse, bu oyunun çok sayıda tekrarlı oynanması durumunda yapılan hatanın ihmal edilebilir (yani hata yapma olasılığı sıfıra yaklaşır,  $\epsilon \rightarrow 0$ ) olduğunu söyleyebiliriz.

**Tanım 5.8** *Titreyen-el mükemmel denge, salınım oyunlarında hata yapma olasılığının,  $\epsilon > 0$ , sıfıra yaklaştığı durumda (yani  $\epsilon \rightarrow 0$ ) Nash dengelerinden oluşan dizinin limiti değeridir.*

Titreyen-el mükemmel dengenin en önemli işlevi, zayıf mahkum stratejileri dışarıda bırakmasıdır. Çünkü altoyun mükemmel dengeler zayıf mahkum stratejileri içerebilir. Pozitif bir hata yapma (el titreme) imkanı eklendiğinde oyuncuların hiçbir zaman oynamayacağı zayıf mahkum stratejiler devreden çıkar.

Tablo 5.2'de verilen stratejik-biçimli oyunda iki Nash dengesi vardır:  $(U, L)$  ve  $(D, R)$ . Fakat sadece  $(U, L)$  titreyen-el mükemmeldir. Varsayalım ki, 1. oyuncu  $(1 - \epsilon, \epsilon)$  karma stratejisini oynasın. 2. oyuncunun bu durumda  $L'$  yi oynamasından dolayı beklenen faydası basitçe  $1 \cdot (1 - \epsilon) + 2 \cdot \epsilon = 1 + \epsilon$  iken,  $R$  stratejisini oynamasından dolayı beklediği fayda  $0 \cdot (1 - \epsilon) + 2 \cdot \epsilon = 2\epsilon$ 'dir.

|     | $L$  | $R$  |
|-----|------|------|
| $U$ | 1, 1 | 2, 0 |
| $D$ | 0, 2 | 2, 2 |

**Tablo 5.2**

Burada dikkat edilirse  $\epsilon$  değerinin küçük değerleri için, 2. oyuncu  $R$  üzerine minimum ağırlık vererek beklenen faydasını maksimize edebilir. Simetrik bir şekilde, eğer 2. oyuncu  $(1 - \epsilon, \epsilon)$  karma stratejisini oynarsa 1.oyuncu  $D$  hareketine minimum ağırlık vermelidir. Bu yüzden  $(U, L)$  titreyen-el mükemmeldir.

Fakat benzer bir analiz  $(D, R)$  strateji profili için geçerli değildir. 1. oyuncunun  $(\epsilon, 1 - \epsilon)$  karma stratejisini oynadığını varsayalım. 2. oyuncunun  $L$  hareketini oynamaktan dolayı beklenen faydası  $1 \cdot \epsilon + 2 \cdot (1 - \epsilon) = 2 - \epsilon$  iken,  $R$  hareketini oynamaktan dolayı elde ettiği fayda ise  $0 \cdot \epsilon + 2 \cdot (1 - \epsilon) = 2 - 2\epsilon$ 'dir. Tüm pozitif  $\epsilon$  değerleri için, 2. oyuncu  $R$  üzerine minimum bir ağırlık vererek beklenen faydasını maksimize eder. Bu yüzden  $(D, R)$  titreyen-el mükemmel değildir çünkü

2. oyuncu (1. oyuncunun simetriği) küçük bir hata yapma olasılığında saparak beklenen faydasını maksimize eder.

Kısaca her Nash dengesi titreyen-el mükemmel denge değildir. Fakat her titreyen-el mükemmel denge Nash dengesidir. Bunu Tablo 5.3'de verilen oyunda da görmek mümkündür. Tablo 5.3 bize tüm Nash dengelerinin titreyen-el mükemmel olmadığını gösterir. Oyunda  $(B, B)$  strateji profili oyunun tek titreyen-el mükemmel dengesidir. Fakat  $(A, A)$  ve  $(C, C)$  Nash dengeleri titreyen-el mükemmel değildir (bunu siz de kontrol ediniz).

|   | A    | B    | C    |
|---|------|------|------|
| A | 0, 0 | 0, 0 | 0, 0 |
| B | 0, 0 | 1, 1 | 2, 0 |
| C | 0, 0 | 0, 2 | 2, 2 |

**Tablo 5.3**

Daha önce stratejik bir oyunda zayıf mahkum hareket kavramını tanımlamıştık. Bir oyuncunun böyle bir hareketi (zayıf mahkum) oynaması için bir sebebi yoktur. Fakat gerçekte kullanmaması için de bir sebep yoktur. Nash dengesi kavramı böyle hareketleri devre dışı bırakmaz (Tablo 5.3'te verilen oyunda 1.oyuncunun A ve C hareketleri gibi). Fakat titreyen-el mükemmel denge kavramı bunu dikkate alır, yani bu hareketleri devre dışı bırakır çünkü zayıf mahkum strateji, tamamen karma stratejiler profiline en iyi tepki olamaz.

### Örnek 5.9

Tablo 5.4'te verilen oyuna bakalım. Bu oyunda iki pür strateji Nash dengesi vardır:  $(A1, B2)$  ve  $(A2, B1)$ . Burada B3 stratejisi denge stratejisi olamaz çünkü B2 tarafından mahkum edilir. Yani B3 elendikten sonra 1. oyuncu için A2 ve A1 aynı fayda düzeylerini sağlar. Bu yüzden 1. oyuncunun tam olarak hangi stratejiyi izleyeceğini öngörmek zorlaşır.

|    | B1     | B2   | B3    |
|----|--------|------|-------|
| A1 | 50, 0  | 5, 5 | 1, 1  |
| A2 | 50, 50 | 5, 0 | 0, -1 |

**Tablo 5.4** Titreyen-el dengesi

1. oyuncunun yerinde olan çoğu insan 2. oyuncunun bir hata sonucu B3 hareketini oyanayabileceğini düşüneceği için A1 oynamayı seçer. Çünkü A1 hareketi, B1 ve B2 hareketlerine karşı oynandığında aynı fayda düzeylerini sağlasa da insanların hata yapabileceği düşünüldüğünde yani 2. oyuncunun B3 hareketini bir hata sonucu oynaması durumunu da dikkate aldığı anda, A1 hareketini oynamak her şeye rağmen rasyoneldir. Bu hata ne kadar küçük olursa olsun, A1 hareketini oynamak her zaman daha rasyoneldir. Bu yüzden diğer bir strateji olan A2

silinebilir. Böylece hangi hareketlerin Nash dengesi olacağı konusundaki belirsizlik ortadan kalkar, yani daha rafine bir Nash dengesi ortaya çıkar.

Başka bir deyişle, 2. oyuncunun hata yapma olasılığı sıfırdan farklı yeterince küçük bir değerde ( $\epsilon > 0$ ) ise 1. oyuncu için A1 her zaman daha iyi bir stratejidir. Eğer 2. oyuncu bunu biliyorsa en iyi hareketi B2'dir. Böylece (A1, B2) dengesi hata yapma olasılığını dikkate alan tek Nash dengesi olacaktır.

Tablo 5.4'te verilen oyuna tekrar dönelim. Bu oyunda da gördüğümüz gibi, hata yapma olasılığı sıfıra yaklaşırsa bile pür Nash dengelerinden yalnız biri daha rafine bir dengedir. Bunu görmek için 2. oyuncunun B1 ve B2' hareketlerini amaçlı bir şekilde seçme olasılıklarının sırasıyla  $p$  ve  $q$  olduğunu varsayalım, dolayısıyla B3 hareketini seçme olasılığı  $1 - p - q$  olacaktır. Burada "amaçlı seçer" ifadesiyle kastettiğimiz şey, hareketlerini bu olasılıklarla seçmeyi amaçlasa bile her şeye rağmen hata yapılabileceğini ifade etmektir. Herhangi bir hata olmaması durumunda, 1. oyuncunun A1 ve A2 hareketlerinden beklenen faydası sırasıyla şöyledir:

$$\begin{aligned}u_1(A1) &= 50p + 5q + (1 - p - q)1, \\u_1(A2) &= 50p + 5q.\end{aligned}$$

Eğer A1 hareketinin oynanmasından beklenen faydadan, A2 hareketinin oynanmasından beklenen faydayı çıkarırsak iki hareket arasındaki beklenen fayda farkını bulabiliriz:

$$d = u_1(A1) - u_1(A2) = 1 - p - q.$$

Şimdi oyuncuların amaçladıkları hareketleri gerçekleştirirken hata yaptıklarını varsayalım. Bu durumu iki aşamada düşünebiliriz. Birinci aşamada oyuncu karma stratejisini seçsin. Bu yolla stratejilerinden herhangi birini oynamayı amaçlar. Örneğin 2. oyuncu (B1, B2, B3) stratejileri üzerine  $(p, q, 1 - p - q)$  karma stratejisini seçsin. Bu rassallaştırma sonunda diyelim ki B1 hareketi çıktı. Yani 2. oyuncu B1 hareketini oynamaya karar verdi diyelim. İkinci aşamada oyuncu bu seçimi gerçekleştirir. Fakat ikinci aşamada yani kararını gerçekleştirirken hata yapabilir. 2. oyuncu B1 hareketini seçmeyi amaçlar fakat kazara B2 hareketini ( $\epsilon$  olasılıkla) oynayabilir veya B3 hareketini (yine  $\epsilon$  olasılıkla) oynayabilir. Bu durumda rasyonel olarak seçmeyi düşündüğü B1 pür stratejisinin gerçekleşme olasılığı  $1 - 2\epsilon$  olacaktır.

Bu durum herhangi bir diğer hareket için de geçerlidir. Örneğin B1 hareketini gerçekte oynama olasılığı şudur: (a) Birinci aşamada 2. oyuncu B1 hareketini amaçlı bir şekilde  $p$  olasılıkla seçer ve aynı zamanda B1 hareketini hata yapmadan oynama olasılığı  $1 - 2\epsilon$  olduğundan B1 hareketini oynama olasılığı bu iki olasılığın çarpımıdır, yani  $p(1 - 2\epsilon)$ 'dir (b) Birinci aşamada B2 hareketini seçme ve ikinci aşamada yanlışlıkla B1 hareketini seçme olasılığı  $q\epsilon$ 'dir (c) Birinci aşamada B3 hareketini seçme ve ikinci aşamada yanlışlıkla B1 hareketini seçme olasılığı ise  $(1 - p - q)\epsilon$ 'dir. Dolayısıyla toplamda B1 hareketini oynama olasılığı şöyle ifade edilir:

$$\Pr(B1) = p(1 - 2\epsilon) + q\epsilon + (1 - p - q)\epsilon = p + \epsilon(1 - 3p).$$

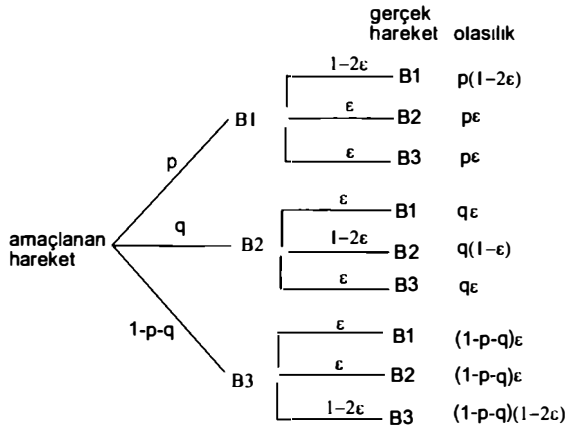
Benzer olarak B2'nin oynanma olasılığı şudur

$$\Pr(B2) = p\epsilon + q(1 - 2\epsilon) + (1 - p - q)\epsilon = q + \epsilon(1 - 3q).$$

ve B3'in oynanma olasılığı ise şudur:

$$\Pr(B3) = p\epsilon + q\epsilon + (1 - p - q)(1 - 2\epsilon) = (1 - p - q) + \epsilon(3(p + q) - 2).$$

Burada  $\Pr(\cdot)$  olasılığı göstermektedir. Tüm bu olasılık değerleri Şekil 5.23'de gösterilmektedir.



Şekil 5.23

1.oyuncu beklenen faydasını hesaplarlarken olası hataları dikkate alacaktır. 1.oyuncunun, 2.oyuncunun hata yapmasını dikkate aldığıında A1 ve A2 hareketlerinden beklenen faydası şöyledir:

$$u_1(A1) = 50[p + \epsilon(1 - 3p)] + 5[q + \epsilon(1 - 3q)] + 1[(1 - p - q) + \epsilon(3(p + q) - 2)],$$

$$u_1(A2) = 50[p + \epsilon(1 - 3p)] + 5[q + \epsilon(1 - 3q)].$$

Eğer  $d = u_1(A1) - u_1(A2) > 0$  ise 1. oyuncu A1 hareketini seçecektir. İki hareket arasındaki beklenen fayda farkı, yani  $d$  ise şudur:

$$d = (1 - p - q) + \epsilon[3(p + q) - 2]. \quad (5.15)$$

Burada  $d > 0$  olması için hata yapma olasılığının ne kadar küçük olduğundan

bağımsız bir şekilde pozitif olması yeterlidir: (a) 2. oyuncu  $1 - p - q = 0$  eşitliğini sağlayacak şekilde hareket eder (çünkü amacı mahkum strateji olan B3'i oynamamaktır) ve (b) 1. oyuncu rasyonelliğin ortak bilgi olması varsayımı altında bunu bilir ve bu değeri, yani  $(1 - p - q) = 0$  durumunu, yukarıdaki (5.15) denkleminde yerine koyar. Eğer  $d = \epsilon[3(p + q) - 2] = \epsilon > 0$  ise A1 hareketini oynar. Böylece eğer 1. oyuncu pozitif olasılıkla bir hata,  $\epsilon > 0$ , beklerse A1 oynamayı A2'ye tercih eder. Son olarak, hata olasılığı sıfıra yaklaşırsa ( $\epsilon \rightarrow 0$ ), (A1, B2) dengesi oyunun titreyen-el mükemmel Nash dengesi olur.

Burada önemli olan nokta, titreyen-el mükemmel denge kavramının, zayıf mahkum stratejiyle oluşan Nash dengesinin (A2, B1) elenmesini sağlayıp daha sağlam bir dengenin oluşmasına imkan vermesidir.

Buradan hareketle iki oyunculu bir oyunda daha güçlü bir sonucu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

**Önerme 5.1** *İki oyunculu sınırlı bir oyunda eğer bir strateji profili karma strateji Nash dengesi ise ve hiç bir oyuncunun stratejisi zayıf mahkum değilse bu strateji profili titreyen-el mükemmel dengedir.*

**İspat.** Bunun için her oyuncunun hareketinin zayıf mahkum olmadığı bir karma strateji Nash dengesinin titreyen-el mükemmel olduğunu göstermek yeterlidir. Hiç bir oyuncunun  $\sigma_i^*$  stratejisinin zayıf mahkum olmadığı  $\sigma^*$  gibi bir karma strateji Nash dengesi olsun. Bu durumda her  $i$  oyuncusunun  $\sigma_i^*$  stratejisi  $j$  oyuncusunun ( $j \neq i$ ) tamamen karma stratejisine,  $\sigma_j'$ , verilen en iyi tepkidir. Herhangi bir  $\epsilon > 0$  için,  $\sigma_j(\epsilon) = (1 - \epsilon)\sigma_j^* + \epsilon\sigma_j'$  olsun, bu strateji tamamen karmadır ve  $\sigma_j^*$  değerine yakınsar; dahası  $\sigma_i^*$  stratejisi  $\sigma_j^*$  stratejisine en iyi tepkidir. Yani  $\sigma^*$  titreyen-el mükemmel dengedir. ■

Fakat bu durum ikiden fazla oyuncu için geçerli değildir. Tablo 5.5'de verilen üç-kişilik bir oyunda ( $B, L, l$ ) strateji profili mahkum olmamasına rağmen, titreyen-el mükemmel denge olmadığı görülür. Çünkü 2. ve 3. oyuncular sırasıyla  $R$  ve  $r$ 'ye yeterince küçük olasılıklar atfettiğinde 1.oyuncunun  $T$  hareketini oynaması durumunda elde ettiği fayda,  $B$  hareketini oynamasından elde ettiği faydadan daha fazladır.

|     |         |         |     |         |         |
|-----|---------|---------|-----|---------|---------|
|     | $L$     | $R$     |     | $L$     | $R$     |
| $T$ | 1, 1, 1 | 1, 0, 1 | $T$ | 1, 1, 0 | 0, 0, 0 |
| $B$ | 1, 1, 1 | 0, 0, 1 | $B$ | 0, 1, 0 | 1, 0, 0 |
|     | $l$     |         |     | $r$     |         |

**Tablo 5.5**

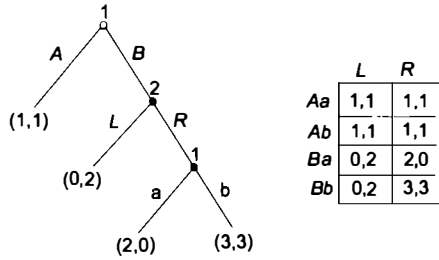
**Önerme 5.2** *Her sınırlı stratejik oyun bir titreyen-el mükemmel dengeye sahiptir.*

**İspat.** Herhangi bir  $i$  oyuncusunun hareketler kümesini, bu oyuncunun her  $a$  hareketine atfettiği olasılığın,  $\epsilon_i(a) > 0$ , bu oyuncunun karma stratejiler kümesi olduğu

bir "salınım" oyunu (hata yapma ihtimalinin olduğu oyunlar) olarak tanımlayalım. Her stratejik oyunun bir karma strateji Nash dengesine sahip olduğunu zaten biliyoruz. Bu yüzden salınım oyunları da bir Nash dengesine sahiptir. Örneğin, her  $i$  oyuncusunun her  $a$  hareketi için,  $\epsilon_i(a) \rightarrow 0$  olduğu durumda salınım oyunları dizisini düşünelim (yani her oyuncuyu, her olası hareketini minimum olasılıkla seçmekle sınırlandıralım). Strateji profilleri kümesinin kompakt küme olmasından dolayı Nash dengeleri kümelerinden seçilmiş bazı dengelerin dizisi,  $\sigma^*$  dengesine yakınsar. Kısacası  $\sigma^*$  titreyen-el mükemmel dentedir. ■

#### *Genişleyen-biçimli oyunlarda titreyen-el mükemmel denge*

Şimdi de titreyen-el mükemmellik kavramını genişleyen-biçimli oyunlara genişletelim. Şekil 5.24 daha önce verdiğimiz tanımlamanın yeterince tatminkâr olmayan bir özelliği olduğunu göstermektedir. Bu oyun tek bir altoyun mükemmel dengeye sahiptir:  $((B, b), R)$ . Fakat burada  $((A, a), L)$  strateji profili, stratejik-biçimli oyunun titreyen-el mükemmel dengesidir çünkü 2. oyuncu  $L$  hareketini bire yakın olasılıkla oynadığında 1.oyuncunun en iyi tepkisi  $(A, a)$  stratejisidir ve 2. oyuncunun  $L$  stratejisi de, 1. oyuncunun  $(A, a)$  stratejisini bire yakın olasılıkla oynadığı ve  $(B, a)$ 'i oynama olasılığının da  $(B, b)$ 'i oynama olasılığı ile kıyaslandığında yeterince yüksek olduğu durumda en iyi tepkidir. Burada temel nokta, 1. oyuncunun stratejisini uygularken bir hata yapma olasılığını dikkate almasıdır. Eğer hata yapabileceğini düşünürse, oyunun başında  $A$  yerine  $B$  hareketini seçebilir, dolayısıyla ikinci bilgi kümesinde  $a$  hareketini seçmek optimal olmayacaktır.



**Şekil 5.24**

Bu tür düşünceleri dikkate almak, titreyen-el mükemmel dengenin stratejik biçimden ziyade, *aktör-stratejik biçimde* incelemesini gerektirir. Bu yeni oyun biçiminde, genişleyen-biçimli oyundaki her bilgi kümesi için bir oyuncu vardır: genişleyen-biçimdeki oyunda her oyuncu her bilgi kümesi için çok sayıda aktöre ayrılır. Bilgi kümelerinin her biri için bir aktör, aynı oyuncunun tüm aktörleri aynı faydalara sahip şeklinde tanımlanır. Aslında bu, davranış stratejisine karşılık gelen bir tanımlamadır. Her oyuncu vardığı bilgi kümesinde karma strateji uygular. Buradan şu tanımlı yapabiliriz.

**Tanım 5.9** *Sınırlı genişleyen-biçimli bir oyunun titreyen-el mükemmel dengesi, oyunun aktör-stratejik biçiminin titreyen-el mükemmel dengesine karşılık gelen bir davranış strateji profilidir.*

Şekil 5.24'te gösterilen genişleyen-biçimli oyunda  $((A, a), L)$  davranış strateji profili titreyen-el mükemmel dengesi değildir, çünkü 1. oyuncunun birinci aktörünün ve ikinci oyuncunun tamamen-karma stratejileri için 1. oyuncunun ikinci aktörünün en iyi tepkisi  $b$  pür stratejisidir.

**Önerme 5.3** *Mükemmel-hatırlamalı ve sınırlı bir oyunun her  $b$  titreyen-el mükemmel dengesi için, oyunda  $(b, \mu)$  ardısal dengesini sağlayacak bir  $\mu$  inanç sistemi vardır.*

**İspat.**  $b$  dengesi ile ilişkili oyunun aktör-stratejik biçiminde karma strateji profilleri dizisine karşılık gelen tamamen-karma bir davranış strateji profilleri dizisi  $(b^k)$  olsun. Oyundaki her  $i$  oyuncusunun  $H_i$  bilgi kümesindeki  $\mu(H_i)$  inancını, Bayes kuralı kullanılarak elde edilen  $b^k$  dizisindeki inançların limiti olarak tanımlayalım; dolayısıyla  $(b, \mu)$  tutarlı bir değerlendirmedir. Her aktörün bilgi kümesine pozitif olasılıkla varıldığında ve her aktörün stratejisi  $b^k$  dizisine en iyi tepki olduğundan,  $(b, \mu)$  ardısal dengedir. ■

Bu sonucun tersi geçerli değildir. Çünkü eş anlı hareketlerin olduğu bir oyunda her Nash dengesi bir ardısal dengenin strateji profilidir. Fakat hiçbir oyuncunun stratejisinin zayıf mahkum olmadığı Nash dengeleri titreyen-el mükemmel olabilir. Örneğin Tablo 5.6'da verilen eş anlı hareketlerin olduğu oyunda  $(A, A)$  ve  $(C, C)$  ardısal denge strateji profilleriyken, titreyen-el mükemmel değildir. Fakat tersi hemen hemen doğrudur: Hemen hemen her oyunun ardısal strateji profili titreyen-el mükemmel dengedir.

|   | A    | B    | C    |
|---|------|------|------|
| A | 0, 0 | 0, 0 | 0, 0 |
| B | 0, 0 | 1, 1 | 2, 0 |
| C | 0, 0 | 0, 2 | 2, 2 |

**Tablo 5.6**

## 5.7 Öz Denge

Öz denge (proper equilibrium), Roger Myerson (1978)'in Selten'in titreyen-el denge kavramını rafine etmek için ileri sürdüğü bir denge kavramıdır. Buna göre, maliyeti yüksek hataların yapılma olasılığının, maliyeti düşük hataların yapılma olasılığından daha düşük olduğu varsayılır.

**Tanım 5.10** *Herhangi bir stratejik-biçimli bir oyun ve  $\epsilon > 0$  olasılığı verildiğinde eğer şu koşul geçerliyse, oyunun tamamen karma strateji profiline öz denge denir: Bir oyuncunun  $s$  ve  $s'$  gibi iki pür stratejisi için, eğer  $s$  stratejisini oynamaktan*

*beklenen faydası  $s'$  stratejisini oynamaktan beklenen faydasından küçükse (diğer oyuncuların karma stratejilerine karşı),  $s$  stratejisine atfedilen olasılık en fazla  $\epsilon$  çarpi  $s'$  stratejisine atfedilen olasılık kadardır.*

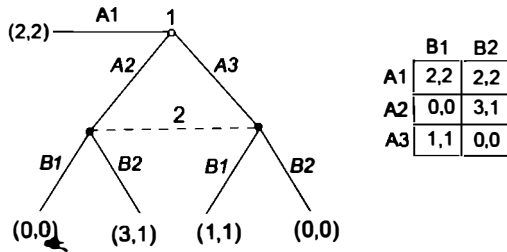
Başka bir değişle  $\epsilon$  sıfıra yaklaşırken tamamen karma strateji profilleri dizisinin bir limit noktası varsa, bu oyunun strateji profiline öz denge denir. Öz denge oyuncuların daha iyi stratejilerine, daha kötü stratejilerine nispeten daha fazla olasılık verdikleri durumda oluşan dengedir. Altoyun mükemmellik ve ardısal denge bazı tür belirsizlikleri gidermeye yardımcı olabilir. Fakat bu tür rafine denge yaklaşımları Nash denge kümesini daraltmak mümkün için olmayabilir. Aşağıdaki örneğe bakalım.

Şekil 5.25'te verilen oyunun stratejik-biçimli gösterimi iki Nash dengesi olduğunu göstermektedir: (A1, B1) ve (A2, B2). Her iki denge de ardısal dengedir. Bunu gösterelim. 2. oyuncu kendisine oynama sırası geldiğinde 1. oyuncunun A2 hareketini oynama olasılığının  $p$ , A3 hareketini oynama olasılığının ise  $1 - p$  olduğunu düşünsün. Bu bilgi kümesinde, 2. oyuncunun B1 ve B2 hareketlerinden beklenen faydaları sırasıyla şöyledir:

$$u_2(B1) = 0 \times p + 1 \times (1 - p) = 1 - p$$

$$u_2(B2) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$$

Açıkça görüldüğü gibi, eğer  $p > 1/2$  ise,  $u_2(B2) > u_2(B1)$ 'dir. Dolayısıyla ardısal denge şöyle bulunur: 1. oyuncu kendisine oynama sırası geldiğinde 2. oyuncu B2 hareketini seçer ve dolayısıyla 1.oyuncu da A2 hareketini oynar. Yani  $p > 1/2$  olduğu müddetçe, (A2, B2) oyunun ardısal dengesidir, dolayısıyla fayda düzeyi (3,1) şeklindedir. Diğer yandan, eğer  $p < 1/2$  ise, farklı bir ardısal dengeye sahibiz. Yani 1. oyuncu, 2. oyuncunun B1 hareketini oynayacağını bekler, bu düşünceye en iyi tepki de A1 hareketini oynamaktır. Sonuç olarak bu oyunda ardısal denge, denge sayısını azaltıp rafine edememektedir.



**Şekil 5.25**

Burada problem ardısal denge kavramının, 2. oyuncunun subjektif inancı olan  $p$  olasılığının kaynağı konusunda bir şey söyleyememesidir. Fakat eğer iki Nash dengesinden, (A1, B1) ve (A2, B2), hangisinin daha makul bir strateji dengesi

olduğunu söylemek istiyorsak,  $p$  değerinin ne olduğuna dair bir açıklama yapmamız gerekir. Fakat ardısal denge kavramı, denge-dışı inançları çok dikkate almaz; dolayısıyla 2. oyuncunun, 1. oyuncu çok az bir ihtimalle de olsa A1'den ziyade A3 hareketini oynayabilir şeklinde bir düşüncesi yoktur.

Şimdi denge-dışı inançlar konusuna bakalım, yani oyuncuların yapabileceği hataların tipleri konusunda birtakım durumları dikkate alalım. Örneğin, 1. oyuncu daha az ihtimalle A1'den ziyade A3 hareketini oynar çünkü A3 hareketi A1 tarafından mahkum edilir (Şekil 5.25'deki matrise bakın). Tersine A2 ise A1 ve A3 tarafından kesin olarak mahkum edilmezler. Yani 2. oyuncu  $p > 1/2$  olabileceğini bekleyebilir. Bu durumda, (A2, B2) dengesi (A1, B1) dengesine göre daha makul bir denge olarak ortaya çıkar. Dolayısıyla A3 hareketine dönük bir hatanın olma ihtimali A2'ye göre daha düşüktür.

Fakat hataların gerçekleşme olasılıklarının nasıl belirlendiği önemli bir konuya dönüşür. Myerson (1978), hataların maliyetinin onların gerçekleşme olasılıklarını belirlediğini iddia eder. Yani insanlar maliyeti yüksek hataları yapmamak konusunda daha dikkatli davranırlar. Bu da bu tür hataların maliyeti daha düşük olan diğer hatalara göre daha düşük olasılıkla gerçekleşmeleri anlamına gelir.

Bu örnekte daha önce ifade edildiği gibi iki denge vardır. Fakat 1. oyuncunun bir dengeye göre oynarken yapacağı hatanın maliyeti diğerine göre oynarken yapacağı hatanın maliyetinden daha fazladır. Bu yüzden (A2, B2) dengesi diğer dengeden daha yüksek ihtimalle gerçekleşir. Bunu görmek için Şekil 5.26'ya bakalım.

| 1.oyuncunun<br>beklentisi | 1.oyuncunun<br>en iyi tepkisi | 1.oyuncunun A3 mahkum<br>stratejisini oynamasından<br>dolayı kaybı |
|---------------------------|-------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| B1                        | A1                            | 2-1=1                                                              |
| B2                        | A2                            | 3-0=0                                                              |

**Şekil 5.26**

1. oyuncu, 2. oyuncunun B1 hareketini oynayacağını beklerse (eğer kendisine oynama fırsatı gelirse) en iyi tepkisi A1'dir. Eğer kazara 1. oyuncu A3 hareketini seçerse bunun fayda kaybı 1 birim olur (2-1=1). Fakat eğer 2. oyuncunun B2 oynayacağını beklerse, bu durumda en iyi tepkisi A2'dir. Fakat kazara A3 hareketini oynasaydı kaybı 3 birim (3-0=0) olurdu. Burada söylenmek istenen şey şudur: 1. oyuncu için 2. oyuncunun B2 hareketini oynayacağını beklerken oluşacak hatanın maliyeti, B1 hareketini beklemekten dolayı yapılacak hatadan doğacak maliyetten daha büyüktür. Bu yüzden B2 hareketini beklerken yapılacak hatanın gerçekleşme olasılığı da daha düşük olacaktır. Diğer bir değişle, (A2, B2) dengesinden sapmanın olasılığı (A1, B1) dengesinden daha küçüktür. Bu durumda oluşan (A2, B2) dengesi Myerson'ın deyimi ile öz dengedir.

## Sorular

1. 1 birimlik bir pasta üzerinden oynanan ultiatom oyununda 1. oyuncu 2. oyuncuya pastadan bir pay,  $y$ , öneriyor. 2. oyuncu teklifi kabul ederse pastayı  $x = 1 - y$  ve  $y$  olarak paylaşıyorlar, reddederse ikisi de pastadan pay alamıyor. Oyuncuların fayda fonksiyonları  $u_1 = x^p$  ve  $u_2 = y^p - sx^p$  olarak veriliyor ( $p \in (0, 1)$ ,  $s \in [0, 1]$ )

- a) Verili bir  $s$  değeri için 2. oyuncunun optimal stratejisi nedir?  
b) Oyunun altoyun mükemmel dengesi ne olur?

Şimdi  $s$  parametresinin 2. oyuncunun özel bilgisi olduğunu kabul edelim. 1. oyuncunun bildiği kadarıyla  $s$ 'nin kümülatif (bilrikimli) olasılık fonksiyonu  $F(s) = s^2$ ,  $s \in [0, 1]$

- c)  $y \leq 1/2$  şeklinde pozitif bir teklifin kabul edilme olasılığı nedir? Eğer teklif edilen miktar  $y \geq 1/2$  olursa kabul edilme olasılığı ne olur?  
d)  $y < 1/2$  olarak kabul edin. 1. oyuncunun böyle bir teklife göre beklenen faydasını bulun.  
e) 1. oyuncunun  $y \geq 1/2$  teklifine göre beklenen faydasını bulun. Bu eksik bilgili oyunun altoyun mükemmel dengesi ne olur?  
f) Dengede 2. oyuncunun teklifi reddetme olasılığı nedir?

2. Satıcı için değersiz olan bir malın alıcı için değeri  $v > 0$  olarak veriliyor. Bu değerlendirme alıcının özel bilgisi ama  $v$ 'nin olasılık dağılımı herkes tarafından biliniyor. 2 periyotlu bu oyunda her periyotta satıcı alıcıya kabul ya da reddedeceği bir fiyat teklif ediyor. İki oyuncu da 2. periyottaki faydalarını  $\delta$  ile iskonto ediyor. Oyun boyunca alıcının kayıtsız kaldığı durumda teklifi kabul ettiğini varsayın.

- a)  $v$ 'nin alabileceği değerler  $v_H > v_L > 0$ ,  $\Pr(v = v_H) = \lambda$  olarak verilirse oyunun pür-stratejilerde zayıf mükemmel Bayesyen dengeleri nelerdir?  
b) Aynı soruyu  $v$ 'nin  $[v_{\min}, v_{\max}]$  aralığında homojen dağıldığı durum için cevaplayın.

3. Önemli bir araştırma üzerinde çalışmakta olan bir şirkete yatırım yapma fırsatınız var. Yatırım yaparsanız 1 milyon lira koymanız gerekiyor. Proje başarılı olursa 5 milyon dolarlık net bir kazancınız olacakken başarısızlık durumunda başta yatırdığınız 1 milyon lirayı kaybedeceksiniz. Projenin başarılı olma olasılığı  $1/5$ 'dir.

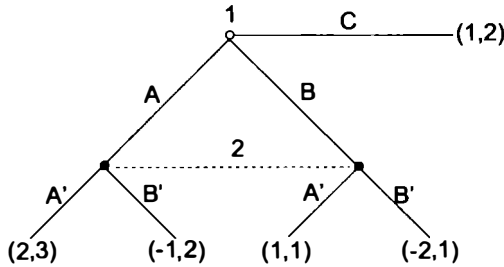
- a) Oyunun genişleyen-biçimli versiyonunu çizin.

- b) Eğer yatırım yaparsanız elde edeceğiniz beklenen faydayı hesaplayın. Riske kayıtsız olduğunuzu varsayarak projeye yatırım yapar mısınız?
- c)  $X$  değişkeninin yatırımdan elde edeceğiniz net kazancı gösterdiği fayda fonksiyonunuzun aşağıdaki gibi verildiği durum için b şıkkını yeniden cevaplayın.

$$U(X) = \sqrt{X - 1,000,000}$$

Bu durumda yatırım yapar mısınız?

4. Aşağıdaki dinamik oyunun stratejik gösterimini belirtiniz. Ve oyunun alt-oyun mükemmel dengesini bulunuz.

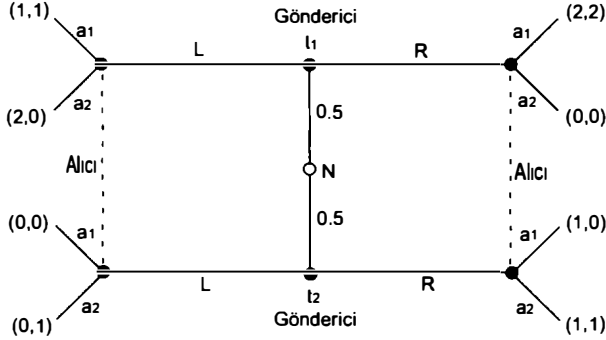


5. Eksik bilgili, 2 oyunculu ve 3 periyotlu bir oyun düşünün. 1. oyuncunun 3 seçeneği var: Geyik avlamak ( $G$ ), tavşan avlamak ( $T$ ) ve evde kalmak ( $E$ ). 2. oyuncunun ise sadece  $G$  ve  $T$  seçenekleri var. 1. oyuncunun 3 eşit olasılıklı tipi var:  $g$ ,  $t$  ve  $e$ . Herhangi bir periyotta  $g$  tipli bir 1. oyuncu iki oyuncu beraber  $G$  seçerse 1, aksi halde 0 alıyor. Aynı şekilde  $t$  tipli bir 1. oyuncu iki oyuncu beraber  $T$  seçerse 1, aksi halde 0 alıyor. Son olarak  $e$  tipli bir 1. oyuncu 2. oyuncu ne yaparsa yapsın kendisi  $E$  seçerse 1, aksi halde 0 alıyor. 2. oyuncunun herhangi bir özel bilgisi yok. Herhangi bir periyotta iki oyuncu da beraber  $G$  veya  $T$  oynarsa 1, aksi halde 0 alıyor. Bu oyunda; 1. periyotta 1. oyuncunun  $E$  oynadığı, 2. periyotta iki oyuncunun da  $G$  oynadığı ve 3. periyotta 2. oyuncunun  $T$  oynadığı bir ardışıl denge var mıdır?
6. Bir işveren işçi almak istemektedir. İşçinin üretkenliği  $Q \in \{Q_h, Q_l\}$ ,  $Q_h > Q_l > 0$  şeklinde tanımlanmıştır. İşçinin yüksek üretkenlikte ( $Q_h$ ) olma olasılığı  $\pi$  kadardır, İşçinin düşük üretkenlikte ( $Q_l$ ) olma olasılığı ise  $1 - \pi$  kadardır. İşçi kendi üretkenlik tipini bilmektedir, fakat işveren bu bilgiye sahip değildir. İşçinin fırsat maliyeti  $\frac{3}{4}Q$  kadardır. İşveren işçiye  $w$  kadar maaş ödeyecek, ve işverenin kazancı  $Q - w$  kadar olacaktır. İşçinin kazancı ise  $w - \frac{3}{4}Q$  kadar olacaktır. Sinyalleme oyununa göre, doğa ilk olarak hareket edecek ve işçinin üretkenlik tipini  $Q$  seçecektir. Daha sonra işçi bunu gözlemleyecek çalışmayıp  $\frac{3}{4}Q$  kazanacak ya da çalışmaya karar verip  $w$  kazanacaktır. İşçi çalışmaya karar verirse işveren işçiye işe alıp-almama

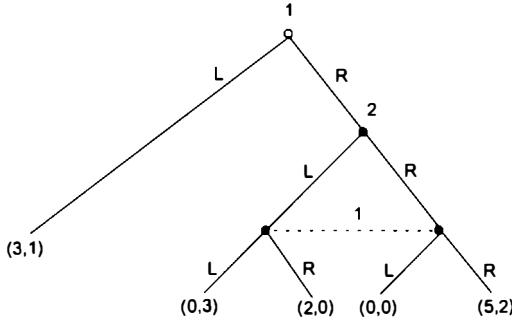
kararını verecektir. Eğer işçiyi işe alırsa, işveren  $Q - w$  kadar kazanacak, işçiyi işe almazsa kazancı 0 olacaktır.

- Oyun ağacını çiziniz.
- Oyunda ayrıştırıcı mükemmel Bayesyen denge var mıdır?
- Oyunda birleştirici mükemmel Bayesyen denge var mıdır?

7. Aşağıdaki sinyalleme oyunundaki ayrıştırıcı ve birleştirici mükemmel Bayesyen Nash dengesini bulunuz.



8. Aşağıda verilen genişleyen-biçimli oyunu düşünün.



- Oyunun kaç tane altoyunu vardır?
- Oyunun pür-strateji normal-biçimli halini yazın.
- Pür-strateji Nash dengeleri kümesini bulun.
- Altoyun mükemmel dengeler kümesini bulun.
- Ardısal dengeler kümesini bulun.

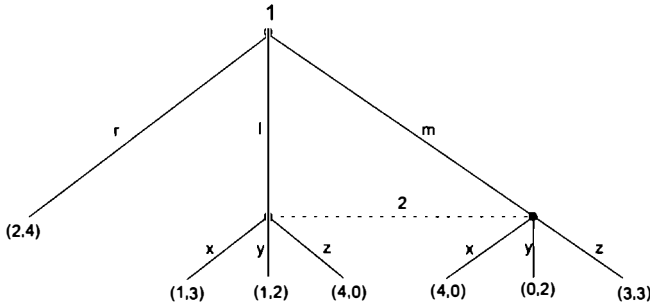
9. İki aşamalı bir oyunda, 2 oyuncu 100 tane altını paylaşacaklardır. 1. Oyuncunun strateji kümesi  $S_1 = \{0, 1, \dots, 100\}$  şeklindedir, yani 2.oyuncuya bu aralıkta bir sayı,  $x$ , kadar altını kendisinin almak istediğini söyler. 2.oyuncu ise bu teklifi kabul eder ya da reddeder. Eğer iki oyuncu anlaşırsa kazançları  $(x, 100 - x)$  olur, anlaşamazlarsa kazançları  $(0,0)$  olur.

- Oyunu genişleyen-biçimli olarak gösteriniz.
- Oyunu normal biçimde gösteriniz.
- Genişleyen biçimli oyunda alt oyun mükemmel Nash dengesini bulunuz.
- Normal biçimli oyunda titreyen-el pür-strateji mükemmel dengesini bulunuz.

10. İki oyuncunun beraberce bir kamu malı üretmesi gereken bir oyunda ikisinin de ortaya belli bir emek ( $\eta_i \in [0, 1]$ ) koyması gerekiyor. İkinci oyuncunun verimliliği bilinirken 1. oyuncunun verimliliği kendi özel bilgisidir. 2. oyuncunun perspektifinden 1.oyuncunun verimlilik düzeyi  $p$  olasılığıyla yüksek,  $1-p$  olasılığıyla düşük olacaktır. İki oyuncu da kamu malı için ne kadar emek sarfedeceklerine karar veriyor. Kararlar verildikten sonra üretim fonksiyonu  $y(\eta_1, \eta_2)$  şöyledir: eğer 1. oyuncu yüksek verimlilikle sahipse  $\sqrt{2\eta_1 + \eta_2}$  iken, aksi halde  $\sqrt{\eta_1 + \eta_2}$  'dir. Her iki oyuncunun da fayda fonksiyonu  $(1 - \eta_i)y^2$  olduğuna göre:

- Bu durumu Bayesyen bir oyun olarak kurgulayın
- Bayesyen Nash dengesini tanımlayın ve hesaplayın.
- $p$  olasılığındaki değişimin dengedeki emek katkıları üzerindeki etkisini belirleyin.

11. Aşağıdaki genişleyen-biçimli oyunu göz önünde bulundurunuz.



- Oyunu normal-biçimli olarak gösteriniz ve bütün Nash dengelerini bulunuz.

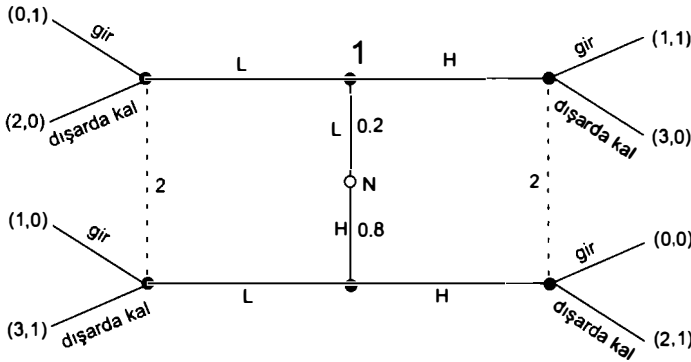
b) Bütün mükemmel Bayesyen dengeleri bulunuz. Sadece pür-stratejilerilerdeki dengeleri göz önünde bulundurunuz.

12. A firması yerel bilgisayar piyasasında tekeldir. Piyasa doğal tekeldir ve yalnızca bir firma piyasa da kalabilir. A firmasının operasyonel maliyeti 0.75 olasılıkla 20 TL, 0.25 olasılıkla 30 TL'dir. A firması kendi maliyetlerini bilmektedir, fakat piyasaya girmek isteyen B firması bu bilgiye sahip değildir. A firması düşük fiyat belirlerse kârından 40 TL kaybedecektir, yüksek fiyat belirlerse kaybı olmayacaktır. B firması piyasaya girip-girmeme kararını vermeden önce A firmasını belirlediği fiyatı gözlemleyecektir. B firması piyasaya 100 TL sabit maliyet, ve 25 TL operasyon maliyetiyle girebilecektir. Yüksek operasyonel maliyete sahip olan firma piyasadan silinecektir ve diğer firma 150 tekel kârına sahip olacaktır.

a) Bu oyunda neden ayrıştırıcı denge yoktur açıklayınız?

b) Oyundaki tane birleştirici dengeleri gösteriniz.

13. Bir tekel (1.oyuncu) ile piyasaya yeni girmek isteyen bir firma arasındaki sinyalleme oyununda, tekel yüksek ( $H$ ) veya düşük ( $L$ ) maliyetlere sahip olabilir. Bu durum tekelin özel bilgisidir ve buna bağlı olarak tekel yüksek ( $H$ ) veya düşük ( $L$ ) fiyat belirliyor. Tekelin fiyatı piyasaya girip veya dışarıda kalma kararı vermesi gereken firma tarafından gözlemleniyor. Bu firmanın önsel inancı tekelin maliyetlerinin düşük olma olasılığının 0.2 olduğunu düşünüyor. Oyunda fayda düzeyleri şu şeklide veriliyor:



a) Eğer oyun tam bilgili olsaydı, yani girişimci tekelin maliyetini biliyor olsaydı, denge nasıl olurdu?

b) Bu oyunda ayrıştırıcı mükemmel Bayesyen denge bulunmadığını gösterin.

c) Tüm birleştirici mükemmel Bayesyen dengeleri bulun.

14. Aşağıdaki oyunda  $(U, L)$  'nin titreyen el dengesi olduğunu gösteriniz.

|   |     |     |
|---|-----|-----|
|   | L   | M   |
| U | 1,1 | 0,0 |
| M | 0,0 | 0,0 |

15. Evli bir çift sinemaya gitmek üzere sözleşmişken kocanın eve geç gelmesi yüzünden filmi kaçırmış durumda. Kadın bunun sebebini soruyor. Bu durumda iki muhtemel sebeb olduğunu düşünün:  $y$  (adamin iş arkadaşlarıyla önemli bir akşma yemeği vardı) veya  $f$  (arkadaşlarıyla dışarıda bir futbol maçını izledi). Sebebin gerçekten  $y$  olmasının önsel olasılığın  $p$  olduğunu ve bunun iki tarafça da bilindiğini varsayın. Evde kadın soruyu sorduğunda ise gerçek cevabı sadece adam biliyor. Soru karşısında adamın iki seçeneği var:  $Y$  (gerçek ne olursa olsun önemli bir yemekte olduğunu söylemek) veya  $F$  (maçı izlediğini söylemek). Adam eğer  $Y$  seçerse kadının iki seçeneği var:  $T$  (tartışmak) ve  $H$  (hoşgörü göstermek). Kadın  $T$  seçerse adamın iş arkadaşlarından birini arayacak ve gerçeği öğrenecek. Gerçek  $y$  ise  $(-2, 2)$  fayda çiftini-ilk sayı kadının faydası- elde edecekler, gerçek  $f$  çıkarsa elde edecekleri faydalar  $(-2, 2)$  olacak. Kadın  $T$  seçerse  $(-1, 1)$  faydalarını alacaklar. Adam baştaki soruya karşılık  $F$  seçerse oyun  $(1, -1)$  faydalarıyla sona erecek.

- Bu durumu genişleyen-biçimli bir oyun olarak çizin.
- Oyunun (pür-strateji) normal biçimini yazın.
- $p = 1/2$  kabul edin.Oyunda kesin olarak baskılanan bir pür strateji var mı? Tüm ardısal dengeleri bulun. Bu dengelerdeki beklenen faydaları hesaplayın.
- Ardısal dengelerde adamın beklenen faydalarını  $p$  olasılığına bağlı olarak hesaplayın.

#### 6.1 Giriş

Dinamik oyunlar içinde diğer bir önemli oyun grubu tekrarlı oyunlardır. Bu oyunlarda hareketler, zaman içinde oyuncuların karşılıklı olarak oyunu tekrar tekrar oynamalarıyla gerçekleşir. Oyunun kuralları genelde her aşamada muhafaza edilir ve tek değişen şey, zaman ilerledikçe artan tarihtir. Yani tekrarlı oyunlar bir seferlik oyunun tekrarlarından (buna aşama oyunu da denir) oluşan bir dizi şeklindedir.

Gerçek hayatta oynadığımız oyunların çoğu bir kez oynanan oyunlar değildir. Aynı oyun tekrar tekrar oynanabilir. Fakat bir oyunun çok sayıda oynanması, art arda oynanan oyunun birbirinden kopuk oyunlar dizisi olduğu anlamına gelmez. Gerçek hayat özünde, bir oyuncunun başlangıçta yaptığı bir hareketin zaman içinde de tekrarlanarak diğerlerinin ve kendisinin seçimini etkilediğini bildiğimiz daha büyük bir oyundur. Tekrarlı oyunlar bu anlamda statik oyunların dikkate almadığı bu durumu -oyunun tekrarlı oynandığı durumunu- dikkate alır. Bu oyunlar aynı zamanda sosyal hayattaki işbirlikçi davranışların nasıl zamanla rasyonel davranışların bir sonucu olarak da ortaya çıktığını açıklamaktadır.

Bu bölümde önce, tekrarlı oyunların genişleyen-biçimli gösteriminin hantallığı dolayısıyla bu oyunlarda kullanılan matematiksel notasyonu tanıtacağız. Bu bize ilerleyen bölümleri takip etmede yardımcı olacaktır. Sonraki bölümlerde tekrarlı oyunlarda önemli bir ayrım olan, sınırlı ve sınırsız tekrarlı oyunları tanıtacağız. Özellikle sınırsız tekrarlı oyunlar için verdiğimiz örnekler konunun anlaşılması açısından oldukça önemlidir. Tekrarlı oyunlarda cezalandırmanın limitlerini görmek için minmax ve maxmin fayda kavramlarını inceledikten sonra tekrarlı oyunlar için önemli bir teorem olan Folk teoremini açıklayacağız.

## 6.2 Tekrarlı Oyunların Gösterimi

Öncelikle tekrarlı oyunları formel olarak analiz etmek için bu tür oyunlarda kullanılacağımız notasyonları tanıtalım. Tekrarlı oyunları, tek-seferlik oyunların, yani aşama oyunlarının tekrarı olarak düşünmek bu formel dili anlamada kolaylık sunar. Tekrarlı oyun stratejileri, tarih-bağımlı aşama-oyun stratejilerinin bir dizisi olarak tanımlanır. Elde edilen faydalar da her aşama oyununda elde edilen faydaların toplamıdır.

İlk önce bir  $G$  oyunu düşünelim. Oyuncu kümesi  $N = \{1, \dots, n\}$  olsun. Her oyuncunun pür-hareket uzayı  $A_i$  ile gösterilirken, oyundaki hareket profilleri uzayı ise  $A = \prod_{i \in N} A_i$  şeklinde ifade edilir. Her oyuncu için  $G$  oyunun sonuçları üzerinde bir vNM fayda fonksiyonu tanımlanır:  $g_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Burada  $g_i$  herhangi bir  $i$  oyuncusunun her aşama oyununda ortaya çıkan fayda fonksiyonudur. Bütün bir tekrarlı oyunun faydasını göstermek için  $u_i$  notasyonunu kullanacağız.

Eğer  $G$  aşama oyunu çok sayıda (sonsuz kez de olabilir) oynanırsa, her oyuncunun faydası  $G$  oyununu oynamaktan dolayı her periyotta elde ettiği faydaların (indirgenmiş değerlerinin) toplamıdır. Bu aşama-oyun dizisine *tekrarlı oyun* veya *siiperoyun (supergame)* denir.

Tekrarlı oyunların ortamı durağandır veya başka bir ifadeyle zaman ve tarihten bağımsızdır. Yani oyuncuların önlerindeki hareketler her periyotta aynıdır (fakat hangisini seçimleri her periyotta farklı olabilir) veya fayda fonksiyonları her periyotta aynıdır. Fakat durağanlık varsayımları ekonomik açıdan önemli bazı durumları devre dışı bırakmaktadır. Örneğin yatırımın veya zaman içinde öğrenmenin olabileceğini dikkate almaz. Bu durumları modellemek daha genel bir dinamik oyun çatısı kurmayı gerektirir.

Diğer yandan tekrarlı oyunlarda aşama-oyunun her tekrarındaki sonuç sonraki aşamadan önce herkesçe gözlemlenir hale gelmektedir. Bu yüzden aşama-oyunu mükemmel olmayan bilgili bir oyun olsa da (her eş anlı hareketli oyun gibi)- yani aşama boyunca hiçbir oyuncu diğerinin ne yaptığını bilmez- her oyuncu diğerinin hareketini diğer aşama oyunu başlamadan öğrenir. Bu da oyuncuların sonraki seçimlerini geçmiş davranışlarına dayandırmasına imkan verir.

Tekrarlı bir oyunun, başka bir deyişle her periyotta eş anlı oynanan bir oyunun, genişleyen-biçimli gösterimi oldukça karmaşık ve hantaldır. Bu yüzden tekrarlı bir oyunun her periyotta eş anlı oynandığını fakat bir zaman boyutunun da olduğu unutulmadan ifade edilmelidir. Bunun için cebirsel notasyonun kullanılması daha işlevseldir.

Tekrarlı oyunlarda ilk periyot genel olarak  $t = 0$  ile belirtilir. Yani oyun 0.periyottan itibaren başlar. Eğer oyunun son periyodu varsa, bu  $T$ 'dir böylece toplam  $T + 1$  periyot vardır; bu oyunlara *sonlu tekrarlı oyunlar* denir. Fakat eğer oyun sonsuz tekrarlı oynanırsa,  $T = \infty$ , bu oyunlara da *sonsuz tekrarlı oyunlar* denir.

$G$  aşama-oyununda  $i$  oyuncusunun  $t$  periyodunda yaptığı hareket  $a_i^t$  ile ifade edilir;  $t$  periyodunda oynanan hareket profili ise  $n$  oyuncunun aşama-oyun hareket-

lerinden oluşur:

$$a^t = (a_1^t, \dots, a_n^t).$$

Oyuncuların sonraki periyotlarda yapacakları aşama-oyun hareket seçimlerini, oyuncuların daha önce alınmış kararlarına dayandırmak istiyoruz. Bunu yapmak için *tarih* kavramına ihtiyacımız var. Bu bağlamda tarih kısaca, bir önceki periyoda kadar alınan tüm hareketler olarak tanımlanır. Örneğin  $t$  periyodundaki tarih şöyle ifade edilir:

$$h^t = (a^0, a^1, \dots, a^{t-1}).$$

Diğer bir deyişle,  $t$  periyodundaki tarih, her önceki periyotta oynanan tüm aşama-oyun hareket profillerini (yani oyuncuların aşama-oyun hareketlerinin kombinasyonunu) verir.  $h^t$  tüm önceki tarihler olarak tanımlanır:  $h^0, h^1, h^2, \dots, h^{t-1}$ . Örneğin,  $h^t$  tarihi,  $h^{t-1}$  tarihi ve  $a^{t-1}$  hareket profili ile birlikte ifade edilebilir, yani  $h^t = (h^{t-1}; a^{t-1})$ . Tüm oyunun tarihi ise  $h^{T+1} = (a^0, a^1, \dots, a^T)$  şeklinde ifade edilir. Bu arada  $t$  periyodunda tüm olası  $h^t$  tarihler kümesini ise şöyle ifade edebiliriz:

$$A^t = \prod_{j=0}^{t-1} A_j.$$

Bu ifade kısaca  $A$  aşama-oyunu hareket profilleri uzayının  $t$ -katlı Kartezyen çarpımıdır.

Stratejilerimizi geçmiş hareketlere dayandırmak onları tarihin bir fonksiyonu yapmaktır. Böylece  $i$  oyuncusunun  $t$  periyodundaki aşama-oyunu stratejisini  $s_i^t$  fonksiyonu olarak yazabiliriz. Bunu  $a_i^t = s_i^t(h^t)$  şeklinde ifade ederiz: Eğer önceki oyun  $h^t$  tarihini takip etseydi,  $i$  oyuncusunun  $t$  periyodunda oynadığı  $a_i^t$  aşama-oyun hareketini gösterecektir. Bir oyuncunun herhangi bir periyottaki aşama-oyun hareketi, bu periyot için hareket uzayından çekilmelidir. Fakat oyun durağan kabul edildiğinden, oyuncunun  $A_i$  aşama-oyun hareket uzayı zamanla değişmez ve bunu şöyle yazabiliriz:

$$(\forall i \in N), (\forall t), (\forall h^t \in A^t), s_i^t(h^t) \in A_i.$$

Veya alternatif bir şekilde aşama-oyun hareket uzayını şöyle yazabiliriz:  $(\forall i \in N), (\forall t), s_i^t : A^t \rightarrow A_i$ . Bu arada  $t$ -periyot aşama-oyun strateji profili,  $s^t$  şöyle ifade edilir:

$$s^t = (s_1^t, \dots, s_n^t). \quad (6.1)$$

Bu profil de alternatif bir şekilde şöyle tanımlanabilir:

$$s^t : A^t \rightarrow A, \text{ yani } \forall h^t \in A^t, s^t(h^t) = (s_1^t(h^t), \dots, s_n^t(h^t)).$$

### *Tekrarlı Oyunlarda Stratejiler*

Şimdiye kadar belirli bir periyot için aşama-oyun stratejilerini ifade ettik. Şimdi ard arda gelen bu aşama oyun bloklarını kullanarak tekrarlı bir oyundaki herhangi bir oyuncunun stratejisini yazabiliriz. Tekrarlı bir oyun için  $i$  oyuncusunun strate-

jisi şöyledir:

$$s_i = (s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^T). \quad (6.2)$$

Bu strateji profili,  $i$  oyuncusunun  $(T + 1)$ -katlı aşama-oyun tarihine bağlı olan stratejilerinden oluşur. Her  $s_i^t$  strateji fonksiyonunun değişkeni  $h_t \in A_t$  tarihidir. Herhangi bir  $i$  oyuncusunun tekrarlı-oyun stratejilerinin uzayı,  $S_i$ .  $i$  oyuncusunun tüm  $(T + 1)$ -katlı aşama oyun stratejilerinin kümesidir, dolayısıyla  $s_i^t : A^t \rightarrow A_i$ .

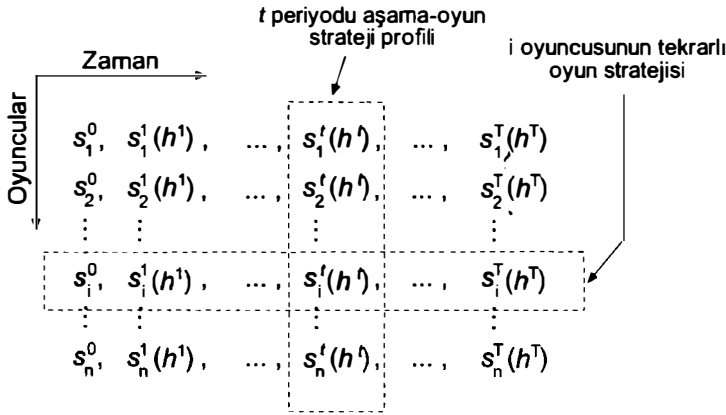
Tekrarlı bir oyunun  $s$  strateji profilini iki şekilde yazabiliriz. Bunlardan biri  $s$  strateji profilini oyuncuların tekrarlı-oyun stratejilerinin  $n$ -katlı profili şeklinde yazmaktır ((6.2) ifadesinde tanımlandığı gibi). Dolayısıyla aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$s = (s_1, \dots, s_n). \quad (6.3)$$

Alternatif olarak  $s$  tekrarlı-oyun strateji profilini her periyot için bir tane olmak üzere aşama-oyun strateji profillerinin bir koleksiyonu şeklinde yazabiliriz ((6.1)'de tanımlandığı gibi):

$$s = (s^0, s^1, \dots, s^T). \quad (6.4)$$

Bu iki tanım da Şekil 6.1'deki şemada gösterilmektedir.



**Şekil 6.1** Tekrarlı-oyun strateji profili, oyuncuların tekrarlı oyun stratejileri olarak görülebileceği gibi, aşama-oyun strateji profillerinin bir dizisi olarak da görülebilir.

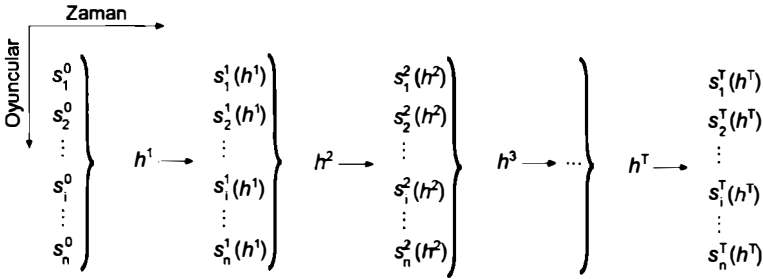
### Tekrarlı Oyunu Oynamak

Yukarıda verilen (6.3 ve 6.4) ifadelerinde tekrarlı-oyun strateji profilini, tarihlerin fonksiyonlarının bir kümesi olarak yazdık. Şuna dikkat ediniz: Tekrarlı-oyun strateji profilinin kendisi bir tarihler fonksiyonu değildir. Çünkü her bir oyuncunun tekrarlı-oyun stratejileri,  $s_i$ , bir kez tanımlandı mı (veya alternatif olarak her periyodun tarihe bağımlı aşama-oyun stratejileri,  $s^t$ , bir kez tanımlandı mı) hareketler zinciri ve dolayısıyla tüm oyunun tarihi belirlenir. Bu durum aşağıda

oyunun nasıl oynandığını gördüğümüzde daha açık hale gelecektir.

Şimdi tekrarlı bir oyunun, her oyuncu kendi tekrarlı-oyun stratejisini belirledikten sonra nasıl oynandığına bakalım. Bu noktada bu tekrarlı oyun strateji profilinin (6.4) ifadesinde tanımlandığı gibi görmek daha uygundur, yani  $T + 1$  tarih-bağımlı aşama-oyun strateji profillerinin bir dizisi olarak görmek. Oyun başladığında, geçmiş bir oyun olmadığı için  $h^0$  tarihinin önemli bir niteliği yoktur. Her oyuncu (6.2)'deki  $a_i^0 = s_i^0$  aşama-oyun stratejisini oynar. Bu 0. periyot oyunu  $h^1 = (a^0)$  tarihini oluşturur, ki burada  $a^0 = (a_1^0, \dots, a_n^0)$ 'dir. Bu tarih daha sonra oyunculara sunulur; böylece oyuncular kendi 1. periyot oyununu 0. periyot oyununa dayandırır. Sonra her oyuncu kendi  $t = 1$  aşama-oyun stratejisini,  $s_i^1(h^1)$ , seçer. Sonuç olarak,  $t = 1$  periyodundaki aşama-oyununda, aşama-oyun strateji profili ise  $a^1 = s^1(h^1) = (s_1^1(h^1), \dots, s_n^1(h^1))$ 'dir.

Güncelleştirilmiş tarihi oluşturmak için, bu aşama-oyun strateji profili önceki tarihle birleştirilir:  $h^2 = (a^0, a^1)$ . Bu yeni tarih tüm oyunculara açıklanır ve her biri kendi 2. periyot aşama-oyunu stratejisini,  $s_i^2(h^2)$ , seçer ve bu böyle devam eder gider. Bu süreç Şekil 6.2'deki şemada gösterilmektedir. Burada  $h^{T+1}$  tarihi,  $s$  tekrarlı oyun strateji profilinin meydana getirdiği patika olarak nitelendirilir.



Şekil 6.2 Tekrarlı bir oyunun aşamalar halinde gösterimi

### Tekrarlı Oyunda Fayda Fonksiyonu

Tekrarlı bir oyunun formel tanımını tamamlamak için, bu tekrarlı oyunun fayda fonksiyonlarını tanımlamamız gerekir. Bunun için belirli bir tekrarlı oyun strateji profilini,  $s$ , ve belirli bir zaman periyodunu,  $t$ , düşünelim. Oyun bu tekrarlı oyun strateji profiline göre oynandığında, bu periyoda kadar ki hareketlerin tarihi ( $h^t$ ) ortaya çıkar. Bu periyotta oynanan tarih-bağımlı aşama-oyun strateji profili ise  $s^t(h^t)$ 'dir.

Herhangi bir  $i$  oyuncusu  $s(h^t)$  aşama-oyun strateji profilinde kendi stratejisini belirlediğinde,  $t$  periyodundaki aşama-oyununda elde ettiği fayda belirlenir. Bu da  $g_i(s^t(h^t))$  ile gösterilir. Bu tekrarlı oyunda  $i$  oyuncusunun toplam faydası, tekrarlı-oyun strateji profili ( $s$ ) oynandığında şöyle tanımlanır:

$$u_i(s) = \sum_{t=0}^T \delta^t g_i(s^t(h^t)),$$

burada  $\delta$  ortak iskonto oranıdır. Dikkat edilirse,  $g_i$  üzerinde  $t$  zaman indisi yoktur çünkü oyun durağan bir oyundur. Yani oyuncuların aşama-oyunu fayda fonksiyonları zamanla değişmemektedir.

İskonto oranı, tekrarlı oyunlar için önemli bir kavramdır. Bu yüzden bu kavramı biraz daha tanıtmak lazım. Ardışal bir oyunda, eğer bir oyuncu pastadan alacağı payı şimdi değil de sonra almayı tercih ederse, yani beklemeyi tercih ederse, bunun bir maliyeti vardır. Bu durum pozitif zaman tercihiyle ifade edilir. Zaman tercihi oranı bir bireyin gelecek periyotta tüketmek yerine bugün vazgeçmek zorunda olduğu tüketimdir. Yani eğer zaman tercihi  $r$  (bu faiz oranı olabilir) ise birey bugün  $x$  birim tüketmekle yarın  $(1+r)x$  birim tüketmek arasında kayıtsızdır. Ya da benzer olarak yarın  $x$  birim tüketmekle bugün  $\frac{1}{1+r}x$  tüketmek arasında kayıtsızdır. Genel olarak  $\delta = \frac{1}{1+r}$  değerini iskonto oranı olarak ifade ediyoruz ve  $0 < \delta < 1$ 'dir. İskonto oranının  $\delta$  sıfıra yaklaşması, bireyin bugünü önemseydiğini yani sabırsız birey olduğunu gösterirken, iskonto oranının 1'e yaklaşması bugün ile yarın arasında ayrım yapmayan, sabırlı bir bireyin zaman tercihini gösterir. Kısaca, iskonto oranı oyuncuların tekrarlı oyunlarda ortaya çıkan sonuçlar dizisi üzerinde tercihte bulunmasına yardımcı olan bir kavramdır.

#### *Tekrarlı Oyunlarda Denge*

Tekrarlı oyunlarda strateji ve fayda fonksiyonunun ne olduğunu biliyoruz. Buradan hareketle tekrarlı bir oyunda dengenin nasıl tanımlanacağıyla ilgilenelim. Yukarıda (6.3)'te tanımlandığı gibi tekrarlı oyun strateji profilinin oyuncuların tekrarlı oyun stratejilerinin bir koleksiyonu olduğu düşüncesini kullanacağız. Tekrarlı bir oyunda her oyuncunun  $\bar{s}$  strateji profilindeki  $\bar{s}_i$  stratejisi ((6.2)'de ifade edildiği gibi) diğer oyuncuların bu strateji profilindeki stratejilerine verdiği en iyi tepkiyse  $\bar{s}$  strateji profili Nash dengesidir. Daha formel olarak ifade edersek, eğer her  $i$  oyuncusu için aşağıdaki koşul sağlanırsa tekrarlı-oyun strateji profili,  $\bar{s}$ , Nash dengesidir:

$$\bar{s}_i \in \arg \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, \bar{s}_{-i}).$$

Tekrarlı oyunun  $\bar{s}$  strateji profili ile oluşan tarihi  $\bar{h}^{T+1}$  ile göstereyim, yani  $\bar{h}^{T+1}$  tarihi  $\bar{s}$  ile ilgili patikadır. Eğer  $\bar{s}$  Nash dengesi strateji profili ise,  $\bar{h}^{T+1}$  de ilgili denge patikasıdır.

Diğer yandan, eğer  $\bar{s}$  strateji profili her altoyunda Nash dengesi ise, altoyun mükemmel denge strateji profilidir. Fakat tekrarlı oyunlarda altoyundan neyi kastettiğimizi burada açıklamamız gerekir. Daha önce de tanımladığımız gibi, oyunun herhangi bir noktasına varıldıktan sonra herkes bilir ki, oynanmayı bekleyen daha küçük bir oyun vardır, bu da altoyundur. Açıkça bu tanımdan hareketle tekrarlı bir oyunda altoyun, herhangi bir periyoda varıldıktan sonra bu periyottan sonraki daha küçük oyunu belirtir demek gerekir. Fakat çekici gözüken bu tanımlama tekrarlı oyunlardaki altoyun kavramını net olarak tanımlamaz. Tekrarlı oyunlarda altoyun, bir başlangıç periyodu artı bu periyoda kadar ki hareketlerin tarihi ile birlikte tanımlanır. Dolayısıyla normal altoyun tanımına fazladan bir de tarihin dahil

edilmesi gerekir. Çünkü belirli bir altoyunu belirlemek için hareketlerin tarihini bilmek zorundayız. Diğer bir deyişle, bir altoyuna varıldığında, oyuncular oyunun tarihini bilirler. Bu yüzden karşılaştığı altoyunda, başlangıçta verilen oyundaki tüm bilgiye sahip olurlar.

Tekrarlı oyunlarda, örneğin  $k$  periyoduyla başlayan bir altoyun ile ilgileniyoruz diyemiyoruz. Çünkü  $k$  periyoduyla başlayan tekrarlı oyuna karşılık gelen çok sayıda altoyun vardır. O zaman belirli tekrarlı-oyun strateji profilinin  $\bar{s}$  altoyun mükemmel denge olduğuna nasıl karar vereceğiz. İlkın şunu yapmalıyız: Tekrarlı oyunu altoyunlara ayırma sürecini başlatarak periyot periyot ilerlemeliyiz. Sonra her  $t$  periyodu için, her olası tarihi,  $h^t$ , düşünmeliyiz çünkü bu tarihe ait tek bir altoyun vardır. Böylece  $t$  periyodu ile başlayan  $h^t$  tarihli bir altoyun tanımlamış oluruz. Şimdi sormamız gereken şey, tekrarlı-oyun strateji profili olan  $\bar{s}$  strateji profilinin bu altoyunda bir Nash dengesi oluşturup oluşturmadığıdır.

Bu arada tekrarlı-oyun stratejilerini basit bir sınıflandırmayla ayırmak yararlı olacaktır. Bir oyuncunun stratejisi  $h^t$  tarihine bağlı olduğu zaman, buna *kapalı döngü* (closed-loop) stratejileri denir. Fakat her  $t$  için sadece  $t$  periyodundaki aşama-oyun stratejisine bağlı ise yani daha önce alınmış kararlara bağlı değilse, bu stratejiye *açık döngü* (open-loop) stratejisi denir. Yani eğer aşağıdaki durum geçerli ise,  $i$  oyuncusu için  $s_i^t : A^t \rightarrow A_i$  tekrarlı-oyun stratejisi açık döngü stratejisidir:

$$(\forall t), (\exists a_i^t \in A_i), (\forall h^t \in A^t), s_i^t(h^t) = a_i^t.$$

Bu durumda  $i$  oyuncusunun tekrarlı-oyun stratejisini,  $(T + 1)$ -katlı aşama-oyun hareketleri olarak yazabiliriz,  $s_i = (a_i^0, a_i^1, \dots, a_i^T)$ . Eğer  $i$  oyuncusu bir açık döngü stratejisi oynuyorsa,  $j$ 'nin hiçbir hareketi  $i$  oyuncusunun sonraki hareketleri üzerinde etkili olmayacaktır. Bu stratejiler tarih-bağımsız aşama oyunları olarak da nitelendirilebilir, yani periyot periyot düşünülen stratejilerdir. Bu yüzden de tarihten bağımsız (yani açık döngülü) aşama-oyunun Nash denge strateji profiller dizisi bir altoyun mükemmel dengedir. Dolayısıyla her aşama-oyununda belirli bir hareket Nash dengesi ise bu tüm tekrarlı oyunun Nash dengelerini oluşturur; bu da zaten altoyun mükemmel Nash dengesidir.

## 6.3 Sınırlı Tekrarlı Oyunlar

Tekrarlı oyunların temel mantığı aslında kısa ve uzun dönem faydaların karşılaştırılmasına dayanır. Kısa dönemli bir avantajdan vazgeçmenin koşulu, bu davranışın size uzun dönemde daha fazla fayda sağlayacağını beklemek olabilir.

Daha önce ifade ettiğimiz gibi, tekrarlı bir oyunun sonucu bir stratejik oyunun sonuçlarından oluşan bir dizidir. Dolayısıyla tekrarlı bir oyundaki her stratejik oyunun (aşama-oyunu) sonucunu bir fayda düzeyiyle ilişkilendirmek ve her sonuçlar dizisinde elde edilen faydaları iskonto ederek (bugüne indirgeyerek) değerlendirmek gerekir. Daha açık bir ifadeyle, her  $i$  oyuncusu bir stratejik aşama oyununun  $u_i$  gibi bir fayda fonksiyonuna sahiptir ve iskonto oranı da  $\delta \in [0, 1]$ 'dir. Böylece aşama-

oyunun sonuçlarını veren hareket kümelerinin  $(a^1, a^2, \dots, a^T)$  fayda değerlerini bugüne indirgeyerek bulmaya çalışınız:

$$u_i(a^1) + \delta u_i(a^2) + \delta^2 u_i(a^3) + \dots + \delta^{T-1} u_i(a^T) = \sum_{t=1}^T \delta^{T-1} u_i(a^t),$$

burada  $a^t$ ,  $t$  periyodundaki hareket profilini vermektedir,  $\delta^t$  ise  $t$ -periyodunda elde edilen 1 birimlik faydanın bugünkü değerini vermektedir. Toplam periyot  $T < \infty$  olduğunda, oyun sınırlı bir zaman ufku içerir demektir.

Tekrarlı oyunlar oyunculara rakiplerinin geçmiş periyotlarda nasıl oynadıklarına bağlı olarak hareketlerini belirleme imkanı verir. Bu durumu daha iyi anlamak için bu tür oyunların en fazla bilineni olan tekrarlı Mahkumlar Çıkmazı örneği ile başlayalım. Tablo 6.1'de verilen  $G(\cdot)$  aşama oyununu düşünelim.

|   | C    | D    |
|---|------|------|
| C | 2, 2 | 0, 3 |
| D | 3, 0 | 1, 1 |

**Tablo 6.1** Bir Mahkumlar Çıkmazı örneği

Bu oyun tek seferlik oynandığında bildiğimiz gibi tek bir Nash dengesi vardır:  $(D, D)$ . Fakat burada ilgilendiğimiz konu,  $G(\cdot)$  oyunun çok sayıda oynanması durumunda dengenin değişip değişmediğidir.

Bu oyun sınırlı bir ufka sahip olduğu için geriye doğru çıkarsama metodunu kullanmak mümkündür. Geriye doğru çıkarsama metoduyla, oyunun son aşamasında, yani  $T$  periyodunda, her iki oyuncu da oyunun geçmiş tarihinden,  $h^T$ , bağımsız olarak (sapmanın her zaman baskın bir strateji olduğunu unutmayınız) sapma hareketinde bulunacaklardır. Yine son aşamadan önceki periyotta,  $T - 1$ , her iki oyuncu, yine geçmişte oyunun nasıl oynandığından bağımsız bir şekilde sapma stratejisini takip edecektir (çünkü bu durumda da baskın strateji olan sapmayı oynamak rasyoneldir). Bu durum geriye doğru izlendiğinde her aşama için dengenin  $(D, D)$  olduğu görülür. Yani her aşamada her oyuncu sapma stratejisini izleyecektir. Bu sonucun ardındaki temel mantık ilk periyottaki davranışın ikinci periyotta ödüllendirilmemesidir. Çünkü oyuncuların işbirliği stratejisine bağlı kalmaları rasyonel değildir. Bu tek bir Nash dengesinin olduğu her sınırlı tekrarlı oyun için geçerlidir. Özetle, oyunun her periyodundaki sonuç  $(D, D)$  olacaktır; her oyuncunun her periyotta alacağı fayda ise 1 olur. Yani sınırlı tekrarlı bir biçimde oynanan Mahkumlar Çıkmazı oyunu çok sayıda Nash dengesine sahip değildir. Her oyuncunun sapma stratejisini izlediği bir tek alt oyun mükemmel Nash dengesi vardır.

Diğer yandan benzer bir sonucu iki firmanın sınırlı bir periyotta birbiriyle Cournot rekabeti içinde oldukları bir oyunda da görebiliriz. Geriye doğru çıkarsama metodunu kullanarak sonucun ne olabileceğine bakalım; yine son periyottan başlayalım. Son periyotta,  $T$ , işbirlikçi sonuçtan sapmanın bir cezası olmayacaktır çünkü oyun bitmiş olacaktır. Bu yüzden bu periyottaki inandırıcı tek sonuç Cournot-Nash

dengevidir. Şimdi de sondan bir önceki döneme,  $T - 1$ , bakalım. Burada her iki firma da Cournot-Nash dengesinin etkili bir cezalandırmanın olmadığı sonraki periyotta (son periyot) oynanacağını bilirler. Bu yüzden sondan bir önceki periyotta da Cournot-Nash dengesi oynanacaktır. Bu oyunun başlangıcına doğru sürekli bir ardıcılık geriyeye geldikçe, tüm periyotlar için Cournot-Nash dengesinin geçerli olduğu ortaya çıkar. Yani bu sınırlı tekrarlı oyun için tek altoyun mükemmel Nash dengesi her periyotta Cournot-Nash dengesinin oynanmasıdır. Geriyeye doğru çıkarsama mantığı, bu örnekte olduğu gibi firmalar arasında işbirlikçi bir sonuca imkan vermemektedir.

Sınırlı tekrarlı oyunlara verilen bir diğer örnek de Zincir-mağaza Oyunudur. Giriş Oyunun 20 kere oynandığını varsayalım. Yani 20 farklı yerde mağazası olan bir firmanın (yani zincir-mağaza) bu pazarlara girişi engellemeye çalıştığını varsayalım. Daha önce bir seferlik oyunda girişin engellenemeyeceğini görmüştük. Fakat bu sefer durum biraz farklı çünkü zincir-mağaza ilk giren firma ile savaşılabılır çünkü sonraki 19 girişi etkilemek isteyebilir.

Piyasaya yeni girecek firmanın hareketi girmek veya dışarıda kalmak ve zincir-mağazanın stratejisi ise mücadele etmek veya sessiz kalmak şeklindedir. Fakat bu strateji sınırlı tekrarlı oyun yapısında daha kompleks bir hale dönüşür çünkü oyuncular tek-seferlik oyundan farklı olarak oyuncuların geçmişte her periyotta nasıl hareket ettiklerini dikkate alacaktır. Benzer olarak piyasaya giren firmaya da geriyeye doğru çıkarsama ile nasıl hareket edeceğini belirlemeye çalışacaktır. Bu yüzden de çok-periyotlu oyunun sonundan başlayarak nasıl hareket etmesi gerektiğini düşünür.

Bu oyunda 20. piyasaya, 19 piyasada nasıl davranıldığından bağımsız olarak geldiğimizde, iki oyuncu da kendisini tek-seferlik oyunlardaki durumla karşı karşıya bulacaktır. Böylece oyunun geçmiş tarihinden bağımsız olarak yeni firma piyasaya girecektir ve zincir-mağaza sessiz kalıp işbirliğinde bulunacaktır. Şimdi bir önceki piyasayı (yani 19. piyasayı) düşünelim. Zincir-mağaza sertlik konusunda yaydığı ünden bir şey elde edemez çünkü son giren firmayla her nasılsa anlaşmak zorundadır. Bu yüzden 19. piyasada da işbirliği yapacaktır. Bu 18.inci piyasa için de geçerlidir. Böyle devam edersek her piyasa için birinci piyasa dahil aynı stratejiler geçerli olacaktır. Yani kısaca sınırlı tekrarlı oyun, oyuncular arasında işbirlikçi hareketi teşvik etmeyecektir. Bu sonuca *zincir-mağaza paradoksu* da denir.

Bu oyunda geriyeye doğru çıkarsama yaklaşımı strateji profilinin altoyun mükemmel denge olduğunu garanti eder. Diğer Nash dengeleri söz konusu olsa da, örneğin (her zaman, mücadele et, asla girme) gibi, bunlar mükemmel denge değildir.

Fakat bazen bazı oyunlarda, oyun sınırlı sayıda da oynansa işbirliği söz konusu olabilir. Bunun sebepleri genel olarak çoklu Nash dengelerinin varlığı veya belirsizlik olabilir:

#### *i. Çoklu Nash Dengeleri*

Bir  $G$  oyunun birden fazla Nash dengesi olsaydı ne olurdu? Aşağıda bu duruma uygun bir örnek verilmektedir. Periyot uzunluğu  $T$  olan sınırlı bir tekrarlı oyun,  $G(T)$ , verilsin. Açıkça  $G$  oyununun  $T$  periyot boyunca ortaya çıkan Nash dengeleri dizisi  $G(T)$  oyununun altoyun- mükemmel dengesidir. Acaba  $G(T)$ 'nin altoyun

mükemmel dengesinde Nash dengesi olmayan hareketleri destekleyebilir miyiz? Tablo 6.2’de verilen oyuna bakalım.

|       | $x_2$ | $y_2$ | $z_2$ |
|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | 1, 1  | 5, 0  | 0, 0  |
| $y_1$ | 0, 5  | 4, 4  | 0, 0  |
| $z_1$ | 0, 0  | 0, 0  | 3, 3  |

**Tablo 6.2**

$G$  oyunu iki pür strateji dengesine sahiptir:  $(x_1, x_2)$  ve  $(z_1, z_2)$ . Fakat her iki dengeye de pareto-baskın olan  $(y_1, y_2)$  strateji profili bir Nash dengesi değildir. Eğer oyun iki kere oynanırsa ( $G(2)$ ) 1. oyuncu, 2. oyuncunun  $(y_1, y_2)$  dengesini oynamaması durumunda  $(x_1, x_2)$ ’e sapacağını belirterek (4, 4) sonucunun gerçekleşmesine imkan verebilir. Bu durumu daha formel ifade edelim:

$$s_i^1 = y_i \text{ ve } s_i^1(h^1) = \begin{cases} z_i, & \text{eğer } h^1 = (y_1, y_2) \\ x_i, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

Bu öneriyle oluşan denge bir altoyun mükemmel dentedir çünkü her iki oyuncunun sapma durumunda elde edecekleri  $(5 + 1)/2$  fayda düzeyi, anlaşmaları durumundaki  $(4 + 3)/2$  denge fayda düzeyinden daha kötüdür.

#### ii. Oyunun ne zaman biteceğine dair belirsizlik

Diğer yandan sınırlı tekrarlı bir oyunda geriye doğru çıkarsamanın vardığı sonucun (yani her periyotta sapma hareketinin) gerçekleşmeyebileceğini göstermenin diğer bir yolu da, oyunun ne zaman biteceğinin belirsiz olduğu bir durum tasarlamaktır. Çünkü eğer oyunun ne zaman biteceği bilinmiyorsa o zaman geriye doğru çıkarsama metodu da kullanılamaz. Bu durumda örneğin, sınırlı tekrarlı Cournot oyununda, firmalar inandırıcı bir şekilde gelecekte işbirliğinden sapma olursa birbirlerini cezalandırma ile tehdit edebilirler. Oyunun her an bitebileceği düşünüldüğü için cezalandırmanın uygulanmayacağı ve dolayısıyla cezalandırma tehdidinin sınırsız oyundaki gibi daha güçlü bir etkide bulunmayacağı düşünülebilir. Fakat oyunun ne zaman biteceği belirsizse bu durumda firmalar gelecekteki getirilerini de aşırı bir şekilde iskonto etmeyeceklerdir. Dolayısıyla işbirlikçi sonuç sürdürülebilir hale gelebilir. Diğer yandan, benzer bir mantık dahilinde bazı diğer belirsizlikler de (örneğin firmaların maliyet fonksiyonlarını veya daha genel olarak amaç fonksiyonlarını bilmemek gibi) aynı sonucu verebilir, yani oyuncular arasında işbirliğini sürdürme olasılığını artırabilir.

## 6.4 Sınırsız Tekrarlı Oyunlar

Sınırsız tekrarlı oyunlar, zaman ufkunun sınırsız olduğu,  $T = \infty$ , ve dolayısıyla oyuncuların aşama oyununu sonsuz kez oynadıkları oyunlardır. Sınırsız tekrarlı oyunların denge kümesi, bu oyunlara karşılık gelen sınırlı tekrarlı oyunlardan

oldukça farklıdır. Bunun nedeni ise bu tür oyunlar sınırlı bir zaman ufkuna sahip olmadıklarından dolayı, sınırsız zamanın ödüllendirme ve cezalandırma politikalarına imkan vermesidir. Örneğin tekrarlı bir Mahkumlar Çıkmazı oyunu eğer sürekli oynanacak şekilde modellenirse, bu oyuncuların cezalandırma stratejisinin oyunda işbirliğini sağlayacak ve sürdürecektir bir tehdit olarak kullanılmasına imkan verir.

Sınırlı tekrarlı oyunlarda strateji,  $T$  periyodun her birinde neyi yapacağını tanımlarken, sınırsız tekrarlı oyunların stratejilerini belirlemek daha güçtür çünkü tüm olası tarihler sonrası hareketleri belirlemek zorundadır. Fakat bu hareketlerden sonsuz tane vardır. Bunlardan bazılarını aşağıda verelim:

i. *Her zaman sapma gösterme stratejisi.* Bu strateji her tarihten sonra diğer oyuncunun ne yaptığından bağımsız olarak sapma hareketinde bulunmayı tavsiye eder. Dolayısıyla tüm  $t = 0, 1, \dots$  için  $s_i^t = D$  olur. Her iki oyuncunun da her periyotta sapma göstermesi, yani (her periyot  $D$ , her periyot  $D$ ), Nash dengesidir çünkü her periyotta  $D$  hareketine karşı en iyi hareket  $D$  hareketidir.

ii. *Her zaman işbirliğinde bulunma stratejisi.* Bu strateji her tarih sonrasında diğer oyuncunun ne yaptığından bağımsız olarak işbirliğinde bulunmayı tavsiye eder. Dolayısıyla tüm  $t = 0, 1, \dots$  için  $s_i^t = C$  olur. Fakat her iki oyuncunun (her periyot  $C$ , her periyot  $C$ ) strateji profili Nash dengesi değildir. Çünkü diğer oyuncu her periyot işbirliği stratejisinde kaldığında sapma göstermek daha rasyoneldir.

iii. *Naif Yavuz strateji.* Bu strateji, diğer oyuncu işbirliğinde bulunurken işbirliğini fakat diğer oyuncu bir kez sapma gösterdi mi bundan sonra hep sapmayı tavsiye eder:

$$s_i(h^t) = \begin{cases} C, & \text{eğer } t = 0 \\ C, & \text{eğer } a_j^\tau = C, j \neq i, \tau = 0, 1, \dots, t-1 \\ D, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

Bu strateji içinde affetmeyi barındırmayan bir stratejidir, tek bir sapmayı bile sonsuza kadar cezalandırır. Fakat sadece diğer oyuncunun sapmalarını cezalandırır.

iv. *Yavuz strateji.* Bu strateji ilk periyotta işbirliğini ve sonraki her periyotta her iki oyuncu da önceki periyotta işbirliğinde bulunduğu müddetçe işbirliğine devam etmeyi tavsiye eder:

$$s_i(h^t) = \begin{cases} C, & \text{eğer } t = 0 \\ C, & \text{eğer } a_j^\tau = (C, C), j \neq i, \tau = 0, 1, \dots, t-1 \\ D, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

Yukarıdaki naif yavuz stratejinin tersine, bu strateji oyuncuyu sadece diğer oyuncunun sapmalarından dolayı değil, kendi sapmalarından dolayı da cezalandırır.

Yavuz stratejiye, Tablo 6.1'de verilen Mahkumlar çıkmazı oyunu üzerinden daha detaylı bakalım. 1. oyuncunun yavuz stratejiyi oynamayı amaçladığını varsayalım. Eğer 2. oyuncu da böyle oynarsa, sonuç her periyotta  $(C, C)$  dengesi gerçekleşir ve  $(2, 2, \dots)$  fayda akımı elde edilir. Oyun sonundaki indirgenmiş fay-

dası aşağıdaki gibi olacaktır:

$$2 + 2\delta + 2\delta^2 + \dots = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t 2 = \frac{2}{1-\delta}. \quad (6.5)$$

Eğer 2. oyuncu herhangi bir periyotta  $D$  hareketini oynarsa bu durumda takip eden tüm periyotlarda 1. oyuncu da  $D$  hareketini oynar (çünkü yavuz strateji 1. oyuncunun, 2. oyuncunun  $D$  seçimini sert cezalandırmasını tetikler) böylece 2. oyuncu için de sapmayı takip eden her periyotta en iyi hareket  $D$ 'i oynamaktır. Dahası eğer birinci periyotta  $D$  hareketine saparak faydasını artırmayı amaçlıyorsa bunu da yapabilir. Eğer bunu yaparsa, oyun  $((D, C), (D, D), (D, D), \dots)$  şeklinde oynanır ve dolayısıyla 1. oyuncu  $(3, 1, 1, \dots)$  fayda akımını elde eder. Yani birinci periyotta 1 birim fazladan kazanır fakat sonraki periyotlarda ise hep 1 birim kaybetmeye devam eder. Böyle oynandığında oyun sonundaki toplam faydanın indirgenmiş değeri şöyle ifade edilir:

$$3 + 1\delta + 1\delta^2 + \dots = 3 + \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t = 3 + \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{3(1-\delta) + \delta}{1-\delta}. \quad (6.6)$$

Dolayısıyla 1. oyuncu ancak aşağıdaki koşul geçerli ise yani işbirliğinin faydası sapmanın faydasından fazla ise sapma hareketinde bulunmayacaktır (yani (6.5) ve (6.6)'da ifade edilen faydalar karşılaştırılır):

$$2 \geq 3(1-\delta) + \delta$$

veya  $\delta \geq 1/2$  ise yavuz strateji Nash dengesi olacaktır.

Bu örneğe devam edelim; 1. oyuncu ilk periyotta değil de herhangi bir periyotta sapma gösterirse, yani herhangi  $\tau \in \{0, 1, 2, \dots\}$  periyodu için ne olduğuna bakalım. 2. oyuncu yavuz stratejiyi izlediği için  $\tau + 1$  periyodundan itibaren  $D$  hareketinde bulunur. Bu yüzden, 1. oyuncunun en iyi tepkisi bundan sonra sapma göstermektir, yani bundan sonraki her periyotta  $D$  hareketini oynamaktır:

$$(C, C), (C, C), \dots (C, C), (D, C), (D, D), (D, D), (D, D), \dots$$

Dolayısıyla 1. oyuncunun fayda akımı  $2, 2, \dots, 2, 3, 1, 1, \dots$  şeklindedir.

Bu durumda 1. oyuncunun elde edeceği indirgenmiş fayda değeri şöyledir:

$$\begin{aligned} & 2 + 2\delta + 2\delta^2 + \dots + 2\delta^{\tau-1} + 3\delta^{\tau} + 3\delta^{\tau+1} + \dots \\ &= \sum_{t=0}^{\tau-1} \delta^t \cdot 2 + 3\delta^{\tau} + \sum_{t=\tau+1}^{\infty} \delta^t \cdot 1 \\ &= 2 \cdot \frac{1-\delta^{\tau}}{1-\delta} + 3\delta^{\tau} + 1 \cdot \frac{\delta^{\tau+1}}{1-\delta} = \frac{2 + \delta^{\tau} - 2\delta^{\tau+1}}{1-\delta}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

İşbirliğini sürdürecektir iskonto oranını bulalım. Bunun için de (6.5) ve (6.7)'de ifade

edilen faydalar karşılaştırılır:

$$2 \geq 2 + \delta^\tau - 2\delta^{\tau+1}.$$

Başka bir deyişle iskonto oranının  $\delta \geq 1/2$  değerleri için sapma kârlı değildir. Bu şu anlama gelir: Eğer oyuncular yeterince sabırlıysa (yani eğer  $\delta \geq 1/2$  ise), her iki oyuncu için (yavuz, yavuz) strateji profili Nash dengesidir, dolayısıyla sonuç tüm periyotlarda işbirliği yapmaktır.

v. *Sınırlı Cezalandırma*. Bu strateji bağışlayıcı strateji olarak da bilinir. Bu strateji, birinci periyotta işbirliğini ve herhangi bir oyuncunun sapmasına karşılık  $k$  periyot kadar sapmayı (yani  $k$  periyot kadar cezalandırma) fakat daha sonra işbirliğine dönüşü tavsiye eder; cezalandırma periyodu süresince ne olduğu ile ilgilenmez. Eğer  $k = \infty$  ise bu yavuz stratejidir fakat eğer, örneğin  $k = 3$  ise, sınırlı cezalandırma söz konusudur. Bu oyunu basit bir şekilde aşamalar halinde de ifade edebiliriz:

1. aşama: İşbirliği yap ve 2. aşamaya geç

2. aşama: Eğer önceki periyotta sapma olmadıysa, işbirliğine devam et ; eğer sapma olursa 3. aşamaya geç ve periyodu  $\tau = 0$  'a ayarla.

3. aşama: Eğer  $\tau \leq k$  ise, sapma göster, aksi takdirde 1. aşamaya geri dön.

Kısaca bu misilleme stratejisi, diğer oyuncunun davranışından bağımsız olarak cezalandırma periyodunu sabitler, dolayısıyla bu periyodun uzunluğunu veri alıyoruz (gerçekte periyodun uzunluğu diğer oyuncunun davranışına da bağlı olabilir fakat bunu dikkate almıyoruz).

Bu durumda dengenin nasıl oluştuğuna yine aynı örnek üzerinden bakalım. Burada  $D$  hareketini seçen oyuncunun  $k$  kadar periyotla cezalandırıldığı yani sınırlı bir şekilde cezalandırıldığı bir durum söz konusudur. Eğer bir oyuncu bu stratejiyi adapte ederse, diğerinin de benzer bir stratejiyi adapte etmesi rasyonel midir?

1. oyuncunun sınırlı cezalandırma stratejisini takip ettiğini varsayalım. Yavuz stratejide olduğu gibi, eğer 2. oyuncu saparak faydasını artırmak istiyorsa bunu ilk periyotta sapaarak yapabilir. Böylece birinci periyotta  $D$  hareketini seçtiğini farz edelim. Daha sonra 1. oyuncu gelecek  $k$  periyodun her birinde, bu periyot boyunca 2. oyuncunun ne yaptığından bağımsız olarak  $D$  hareketini seçer. Bu durumda 2. oyuncu da her periyotta  $D$  hareketini oynar. Sapma sonrası  $(k + 1)$ . periyotta 1. oyuncu tekrar  $C$  hareketine kayar ve 2. oyuncu oyunun başındaki durumla tamamen aynı durumla karşılaşır.

Eğer 2. oyuncu stratejisine bağlı kalırsa (yani  $C$  oynamaya devam ederse) indirgenmiş faydası aşağıdaki gibidir:

$$2 + 2\delta + 2\delta^2 + \dots + 2\delta^k = \sum_{t=0}^k \delta^t 2 = \frac{2(1 - \delta^{k+1})}{1 - \delta}. \quad (6.8)$$

Halbuki yukarıda tanımlandığı gibi sapsa, bu periyot boyunca indirgenmiş fay-

dası ise şöyledir:

$$3 + \delta + \delta^2 + \dots + \delta^k = 3 + \sum_{t=1}^k \delta^t = \frac{3(1 - \delta) + \delta(1 - \delta^k)}{1 - \delta}. \quad (6.9)$$

Eğer aşağıdaki koşul geçerliyse 2. oyuncu faydasını sapma hareketiyle artıramaz ((6.8) ve (6.9)'de ifade edilen fayda düzeyleri karşılaştırılır):

$$2(1 - \delta^{k+1}) \geq 3(1 - \delta) + \delta(1 - \delta^k).$$

Başka bir ifade ile  $\delta^{k+1} - 2\delta + 1 \leq 0$  durumunda 2. oyuncu için sapma hareketi rasyonel değildir. Eğer  $k = 1$  ise,  $\delta$ 'nın 1'den küçük hiç bir değeri bu eşitsizliği sağlayamaz. Bu yüzden oyuncular ne kadar sabırsız olurlarsa olsunlar bir-seferlik cezalandırma sapmayı vazgeçirecek kadar şiddetli değil demektir. Eğer  $k = 2$  ise eşitsizlik  $\delta \geq 0.62$  için sağlanır. Eğer  $k = 3$  ise, eşitsizlik  $\delta = 0.55$  için sağlanır. Dikkat edileceği gibi,  $k$  arttıkça,  $\delta$  üzerindeki alt sınır azalmaktadır ve 0.5'e yaklaşmaktadır, yani yavuz stratejideki duruma yakınlaşmaktadır.

Böylece şunu söyleyebiliriz. Her oyuncunun diğer oyuncuyu  $k$  periyot kadar cezalandırdığı bir strateji çifti, iskonto oranının ( $\delta$ ) yeterince yüksek olduğu ve  $k \geq 2$  kadar periyodun olduğu sınırsız tekrarlı bir oyunun bir Nash dengesi vardır. Daha uzun  $k$  periyodu iskonto oranı üzerinde daha küçük bir alt sınır sağlar. Kısacası, kısa dönemli cezalandırmalar eğer oyuncular çok sabırlıysa, karşılıklı istenilir sonuç olan  $(C, C)$  dengesini sağlamada etkilidir.

v. *Kısasa kısas (tit-for-tat)*. Bu strateji, birinci periyotta işbirliğini ve daha sonra diğer oyuncunun bir önceki periyotta yaptığını aynen yapmayı tavsiye eder, yani sapma hareketinde bulun eğer diğeri saparsa, işbirliği yap eğer diğeri işbirliğinde bulunursa. Bunu da şöyle ifade ederiz:

$$s_i(h^t) = \begin{cases} C, & \text{eğer } t = 0 \\ C, & \text{eğer } a_j^{t-1} = C, j \neq i \\ D, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

Bu strateji en bağışlayıcı stratejidir çünkü sapma hareketini sadece bir sapma hareketi ile cezalandırır ve diğer oyuncu işbirliğine döndüğünde hemen işbirliğine geri döner.

Kısasa kısas ( $KK$ ) stratejisini kullanan bir oyuncunun altoyundaki davranışı altoyunu önceleyen tarihteki son duruma bağlıdır. Yani her iki oyuncunun da  $KK$  stratejisini kullandığı strateji çiftinin bir altoyun mükemmel dengesi olduğunu incelemek için, son sonucun  $(C, C)$ ,  $(C, D)$ ,  $(D, C)$ , ve  $(D, D)$  olduğu tarihleri takip eden dört altoyun durumunu düşünmemizi gerektirir.

İlk önce  $(C, D)$  sonucu ile oluşan tarihi takip eden altoyunu düşünelim. 2. oyuncunun  $KK$  stratejisine bağlı kaldığını varsayalım. Eğer 1. oyuncu da bu stratejiye bağlı kalırsa, sonuç  $(D, C)$  ve  $(C, D)$  arasında gidip gelir ve fayda akımı  $(3, 0, 3, 0, \dots)$  şeklindedir. Dolayısıyla 1. oyuncunun bu altoyundaki indirgenmiş faydası şöyle ifade edilir:

$$3 + 3\delta^2 + \dots = \frac{3}{(1 - \delta)(1 + \delta)}. \quad (6.10)$$

Fakat eğer 1. oyuncu altoyunun birinci periyodunda  $D$  yerine  $C$  hareketini seçseydi ve bundan sonra  $KK$  stratejisine bağlı kalsaydı, bu durumda altoyunun her periyodunda sonuç  $(C, C)$  olurdu. Böylece 1. oyuncunun indirgenmiş faydası şöyledir:

$$2 + 2\delta + \dots = \frac{2}{(1 - \delta)}. \quad (6.11)$$

Böyle bir altoyunda  $KK$  stratejisinin optimal olması için gerekli koşul şu şekilde ifade edilir ((6.10) ve (6.11)'de ifade edilen fayda düzeyleri karşılaştırılır):

$$\frac{3}{(1 + \delta)} \geq 2 \text{ veya } \delta \leq \frac{1}{2}.$$

Diğer yandan,  $(D, C)$  sonucu ile biten tarihi takip eden altoyunda, eğer her iki oyuncu da  $KK$  stratejisine sadık kalırsa sonuç  $(C, D)$  ve  $(D, C)$  arasında değişerek ilerler. Bu 1. oyuncuya  $3/(1 - \delta)(1 + \delta)$  indirgenmiş fayda düzeyini sağlar (önceki durumdaki  $(D, C)$  yerine ilk sonucun  $(C, D)$  olduğuna dikkat ediniz). Eğer 1. oyuncu altoyunun birinci periyodunda  $D$  hareketine saparsa ve bundan sonra  $KK$  stratejisine sadık kalırsa, bu durumda her periyottaki sonuç  $(D, D)$  olur; bu da 1. oyuncuya  $1/(1 - \delta)$  indirgenmiş faydayı sağlar. Yani  $KK$  stratejisinin 1. oyuncu için optimal olması için ihtiyaç duyduğumuz koşul şöyledir:

$$\frac{3\delta}{(1 + \delta)} \geq 1 \text{ veya } \delta \geq 1/2.$$

Son olarak,  $(D, D)$  sonucuyla biten tarihi takiben altoyunda, eğer oyuncular  $KK$  stratejisini takip ederlerse sonuç  $(D, D)$  olur; bu 1. oyuncuya  $1/(1 - \delta)$  indirgenmiş faydayı sağlar. Eğer 1. oyuncu altoyunun birinci periyodunda  $C$  hareketine kayarsa ve sonra  $KK$  stratejisine devam ederse, sonuç  $(C, D)$  ve  $(D, C)$  arasında sürekli değişir; bu da 1. oyuncuya  $3\delta/(1 - \delta)(1 + \delta)$  indirgenmiş faydayı sağlar. 1. oyuncu için  $KK$  stratejisinin optimal olması ancak  $\delta \leq 1/2$  ise mümkündür. Özetlersek şunu söyleyebiliriz: Sınırsız oynanan Mahkumlar Çıkması oyununda  $(KK, KK)$  strateji çifti ancak  $\delta = 1/2$  ise bir altoyun mükemmel dengedir. Fakat herhangi bir iskonto oranında,  $(KK, KK)$  strateji çiftinin altoyun mükemmel denge olması oyuncuların fayda düzeylerine bağlıdır.

## 6.5 Sınırsız Tekrarlı Oyun Uygulamaları

### 6.5.1 Tekrarlı Cournot Oyunu

Daha önce üç klasik oligopol modeline bakmıştık (Cournot, Bertrand ve Stackelberg). Her modelin tahmin edilen sonucu ya Nash dengesi ya da altoyun

mükemmel Nash dengesidir. Bu üç modelde de denge pareto etkin değildir. Oysa firmalar arasında etkin bir işbirliğiyle tüm firmalar daha fazla kâr edebilirler. Fakat problem, her firma için bu işbirliğini sürdürecektir inandırıcı ve bağlayıcı anlaşmaları bulmanın güç olmasıdır. Çünkü en azından işbirliği içindeki firmaların bir altkütmesi bu işbirliğinden sapma motivasyonuna sahip olacaktır. Bu yüzden oligopol yapıların analizini yaparken sürekli etkileşim içinde olan firmaların birlikte hareket etme yani işbirliği yapma olasılığına bakmak gerekir. Bunun için de oligopol piyasaların tekrarlı oyunlar olarak düşünülmesine ihtiyaç vardır.

Daha önce de ifade ettiğimiz gibi, sınırsız tekrarlı oyunlarda firmalar diğer firmaları belirli hareketlere yönlendirmek için cezalandırma stratejileri uygulayabilirler. Çünkü tekrarlı oyunlarda firmalar, eğer açık veya örtülü bir anlaşmayı ihlal ederlerse, birbirlerini cezalandırabilirler. Örneğin eğer bir firma çıktı düzeyini artırırsa, diğer firmalar da misillemeye giderek, yani kendi çıktı düzeylerini artırarak, tüm firmaların daha kötü bir duruma düşmelerine neden olabilirler. Firmaların izleyeceği bu cezalandırma stratejisi yeterince sertse, firmalar gönüllü olarak anlaşmayı sürdürecektir.

Firmaların cezalandırma stratejilerinden biri, daha önce gördüğümüz yavuz stratejidir. Hatırlarsanız yavuz strateji herhangi bir oyuncunun belirli bir hareketi sonrası, oyundaki diğer tüm oyuncuların hareketlerini tamamen değiştirmelerine neden olmasını tanımlayan bir stratejidir. Yani yavuz strateji ile birlikte bir oyuncu eğer anlaşılan sonuçtan saparsa, sonsuz bir cezalandırma ile karşı karşıya kalacaktır. Dolayısıyla işbirliği ancak firmalar sürekli etkileşim içindeyseler ve yavuz strateji izlerlerse sürdürülebilir.

Yavuz stratejinin firmaları işbirliğine nasıl yönlendirdiğini anlamak için Cournot modeline spesifik bir yavuz stratejisi uygulayalım. Her firmanın en yüksek kârı her firmanın birlikte tekel gibi davranmalarıyla ortaya çıkar. Bu aynı zamanda pareto etkin durumdur. Her firmanın aralarında monopol kârı paylaşmak üzere anlaşmalarını varsayalım. Eğer firmalar kârlarını maksimize edecek bir çıktı kombinasyonu üzerinde anlaşmayı istiyorlarsa, aşağıdaki yavuz stratejiyi uygulayacaklardır:

*Birinci periyottaki tekel çıktı düzeyinde üretim yap ve eğer diğer firma da geçmişte bu şekilde üretmeye devam ederse böyle üretmeye devam et. Aksi takdirde Cournot-Nash çıktı düzeyinde üretim yap.*

Yani firmalar tekel düzeyinde üretim yapacaklar fakat buna uyulmaması durumunda, tehdit olarak bundan sonra sürekli her periyotta Cournot-Nash düzeyinde üretimlerini sürdürecektir. Bu işbirliği sonucunun altoyun mükemmel Nash dengesi olabilmesi için hem söz vermenin hem de cezalandırmanın inandırıcı olması gerekir. Tehdit olarak sunulan cezalandırmanın inandırıcı olması için sapmadan sonra oyuncunun Nash dengesinde üretim yapmasının rasyonel olması gerekir. Sözün inandırıcı olması için de işbirliğini sürdürme durumunda elde edilen kârın şimdiki değeri, ondan sapılması durumunda elde edilen kârın şimdiki değerinden daha fazla olmalıdır.

Eğer firmalar işbirliğine devam ediyorsa her firmanın kârı, her periyotta

tekel kârının yarısıdır,  $\pi^m/2$ . Firmanın sürekli işbirliği yapması durumunda kârının şimdiki değeri şöyle ifade edilir:

$$V^m = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \frac{\pi^m}{2} = \frac{1}{1-\delta} \frac{\pi^m}{2}.$$

Fakat eğer bir firmaya işbirlikçi sonuçtan sapma gösterirse, ilk periyottaki (0 periyodu) kârı  $\pi^d$  düzeyine eşit olacaktır. Sonraki periyotlarda ise kazancı Cournot-Nash kâr düzeyi,  $\pi^c$ , olacaktır. Bu yüzden sapma sonrası indirgenmiş toplam kâr düzeyi, birinci periyotta saptmadan dolayı elde ettiği kâr,  $\pi^d$ , ve bundan sonra saptmadan dolayı cezalandırılması ile her periyotta oluşan Cournot-Nash kâr düzeylerinin,  $\pi^c$ , şimdiki değerlerinin toplamından oluşur:

$$V^d = \pi^d + \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t \pi^c = \pi^d + \frac{\delta}{1-\delta} \pi^c.$$

Yavuz stratejisinin Nash dengesi olması için  $V^m > V^d$  koşulunun gerçekleşmesi gerekir. Yani işbirliğini sürdürmek için bu gerekli koşulu daha açık bir şekilde yazalım:

$$\frac{1}{1-\delta} \frac{\pi^m}{2} \geq \pi^d + \frac{\delta}{1-\delta} \pi^c.$$

Başka bir değişle iskonto oranı aşağıdaki koşulu sağlarsa işbirliğini sürdürmek rasyoneldir:

$$\delta \geq \frac{\pi^d - \pi^m/2}{\pi^d - \pi^c}. \quad (6.12)$$

Bu eşitsizlik 0 ile 1 arasındadır, çünkü  $\pi^d > \frac{\pi^m}{2} > \pi^c$ . Sonuç olarak eğer iskonto oranı ( $\delta$ ), (6.12)'deki ifadenin sağındaki değerden daha büyükse işbirliğinde bulunmak yani tekel gibi davranmak rasyoneldir, dolayısıyla yavuz strateji Nash dengesidir.

Bu örneği daha somut bir piyasa yapısı üzerinden tartışalım. Örneğin, ters talep fonksiyonu  $p = a - (q_1 + q_2)$  ve marjinal maliyet  $c = 0$  şeklinde olsun. Bu durumda basitçe tekel üretim düzeyinin  $q_1^m = q_2^m = a/4$ , tekel fiyat düzeyinin  $p^m = a/2$ , ve her firmanın tekel kâr düzeylerinin  $\pi_1^m = \pi_2^m = a^2/8$  olduğunu görebiliriz.

Şimdi de sapma durumuna bakalım. Bunun içinde ilk sapma sırasındaki kâr düzeyi ile Cournot-Nash dengesindeki kâr düzeylerini bulalım. Cournot-Nash dengesinde firmaların üretim, fiyat ve kâr düzeyleri sırasıyla şöyledir:  $q_1^c = q_2^c = a/3$ ;  $p^c = a/3$  ve  $\pi_1^c = \pi_2^c = a^2/9$ .

Burada problem, sapma durumunda elde edilen ilk kâr düzeyinin nasıl bulunacağıdır. Bunun için 1. firmanın saptamada bulunduğu, 2. firmanın ise işbirliğine devam ettiğini varsayıyoruz. Yani 1. firma, 2. firmanın işbirliğinde olduğunu düşünüp (yani 2. firmanın tekel durumundaki  $q^m = a/4$  düzeyinde üretim yapacağını düşünür ve bunu veri alır) kârını maksimize eden miktar düzeyini seçer.

Bu durumda 1. firmanın kârı şöyledir:

$$\pi_1^d = p \cdot q_1^d = (a - (q_1^d + q_2^m))q_1^d = (a - (q_1^d + \frac{a}{4}))q_1^d.$$

Kârı maksimize eden çıktı düzeyi, yukarıdaki kâr fonksiyonunun birinci dereceden koşulunu sağlayan çıktı düzeyidir:

$$\frac{\partial \pi_1^d}{\partial q_1^d} = \frac{3a}{4} - 2q_1^d = 0 \Rightarrow q_1^d = \frac{3a}{8}.$$

Böylece ilk sapma durumunda 1. firmanın kârı,  $\pi_1^d = 9a^2/64$  olarak bulunur. Dolayısıyla sapma sonrası indirgenmiş toplam kâr düzeyi şöyledir:

$$V^d = \pi_1^d + \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t \pi_1^c = \frac{9a^2}{64} + \frac{a^2}{9} \frac{\delta}{1-\delta}.$$

Diğer yandan her firmanın tekel durumunda her periyotta elde ettiği kâr  $\pi_1^m = \pi_2^m = a^2/8$  olduğundan indirgenmiş kâr düzeyi de aşağıdaki gibidir:

$$V^m = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \pi_1^m = \frac{a^2}{8} \frac{1}{1-\delta}.$$

Yavuz stratejinin Nash dengesi olabilmesi için her firma için  $V^m > V^d$  koşulunun sağlanması gerekir, yani

$$\frac{a^2}{8} \frac{1}{1-\delta} > \frac{9a^2}{64} + \frac{a^2}{9} \frac{\delta}{1-\delta}.$$

Buradan çıkan sonuç  $\delta > 9/17$ 'dir. Yani yavuz strateji Nash dengesi için gerekli iskonto oranının düzeyi yaklaşık olarak 1/2'den büyük olmalıdır. Bu da kısaca firmalar arasındaki işbirliğinin ancak iskonto oranı yeterince büyükse geçerli olacağı anlamına gelir. Bu koşul sağlandığında, sonuç kendisini gerçekleştiren bir sonuçtur. Her firma, diğer firmanın yavuz stratejiyi adapte edeceğini düşüneneğinden işbirlikçi durumu sürdürecektir.

Şimdi buradaki tartışmayı iskonto oranı etrafında sürdürelim. Eğer iskonto oranı,  $\delta$ , işbirlikçi durumu sürdürecektir durumdan daha küçükse iki olasılık ortaya çıkmaktadır:

(i) Birinci durum, firmaların daha önceki yavuz stratejisindeki cezalandırmanın karşılığı olan Cournot-Nash dengesini sonsuza kadar devam ettirmeleridir. Fakat firmaların iskonto oranı sıfır olmadığı müddetçe, Cournot-Nash sonucundan daha yüksek kârlar verecek sürdürebilir işbirlikçi sonuçlar her zaman mümkündür. Bu olası sonuçlardan birinde, firmaların en yüksek kârı alacakları simetrik bir sonuç üzerinde anlaşmaları mümkündür. Fakat eğer iskonto oranı sıfırsa, firmalar sadece şimdiki kârla ilgilenirler ve bu yüzden oyun bir seferlik oyuna dönüşür. Dolayısıyla tek alt oyun mükemmel denge her periyotta oynanan Cournot-Nash dengesidir.

(ii) Diğer alternatif durum, cezalandırmanın tehdidini daha da sert hale

getirmektir. Önerilen yavuz strateji ile sürdürülebilir alternatif bir işbirlikçi çıktı üzerinden anlaşmak yerine firmalar, alternatif bir yavuz stratejisi önerisinde bulunabilirler. Bu alternatif yavuz strateji, istenilen sonucu sürdürmek için sapmayı daha fazla cezalandırabilir. Bu öneriyle ilgili problem ise bu modelde daha sert ve sürekli cezalandırmayı kabul eden yavuz stratejinin inandırıcılığının azalmasıdır. Yani bir yavuz stratejinin inandırıcı olması için, dayatılan cezanın cezalandıran firmanın tepki fonksiyonu içinde yer almasıdır. Fakat diğer firma her zaman kendi kâr düzeyini maksimize etmeye çalıştığından, ceza aynı zamanda bu firmanın da tepki fonksiyonunda yer alacaktır. Diğer firmanın yavuz stratejisi veriyken tek inandırıcı ceza, aşama oyununda Nash dengesidir.

Örneğin, bir cezalandırma stratejisi şöyle olabilir: Her firma sapma hareketinde bulunan firmaları tanımlanan cezalarla cezalandıracaktır. Tüm firmalar cezalandırma stratejisini izlediklerinde, firmalar işbirlikçi duruma tekrar dönerler. Bu, havuçtur. Fakat firmalar tanımlanan cezaları uygulamadıklarında (bu kuraldan sapma gösterirlerse) kendileri de cezalandırılacaklardır. Bu da sopadır. Yani anlaşmaya uymayan firmayı cezalandırmayan firmalar cezalandırılır. Bu strateji bu yüzden firmalara, diğer firmaları daha fazla cezalandırma motivasyonu verir. Sonuç olarak cezalandırmanın kendisi artık Cournot-Nash olmak zorunda değildir. Böylece daha katı cezalandırma inandırıcı hale gelir çünkü tüm firmalar kendilerinin cezalandırılmaması için cezalandırma yoluna gideceklerdir. Daha sert bir cezalandırmanın inandırıcı olması ile istenilen işbirlikçi sonuç daha küçük iskonto faktörleri için dahi sürdürülebilir hale gelir.

Bu sonuca göre firmalar geleceği büyük oranda bugüne indirgemiyorlarsa (iskonto etmiyorlarsa) ve uygun cezalandırma stratejileri adapte ediyorlarsa her zaman bir altoyun mükemmel Nash dengesi vardır. Bu özü itibarıyla Folk teoremidir. Bu teoremi aşağıda daha detaylı tartışacağız.

## 6.5.2 Tekrarlı Bertrand Oyunu

İki firmalı sınırsız tekrarlı bir Bertrand rekabetinde, firmalar  $p^m$  tekel fiyatında anlaşılırlarsa oluşacak tekel kârın,  $\pi^m$ , eşit şekilde paylaşıldığını varsayalım. Bu durumda toplam tekel kârı aşağıdaki kâr fonksiyonunu maksimize eden  $p^m$  fiyatı ile elde edilir:

$$\pi^m = \max_{p \geq 0} (p - c)Q(p),$$

burada  $c$  marjinal maliyet,  $Q(\cdot)$  talep fonksiyonudur.

Bu oyunda da yavuz strateji:  $t = 0$  periyondundan itibaren eğer hiç sapma olmazsa işbirliğine devam, yani  $p^m$  fiyatını uygulamaya devam, fakat bundan bir kez sapıldı mı sonrasında herkesin Bertrand rekabetine geri dönmesidir. Sapmadan sonra her firma fiyatını marjinal maliyete eşitler,  $p = c$ .

İşbirliğine uyulması durumunda her firmanın her periyotta elde edebileceği kâr,

$\pi^m/2$  olur. Dolayısıyla indirgenmiş toplam kâr şu şekildedir:

$$\frac{1}{1-\delta} \frac{\pi^m}{2}.$$

Fakat işbirliğinden sapıldığında (diğer firmanın anlaşmaya sadık kaldığını düşünüyörüz), fiyatını çok az indirerek bunu yapabilir, elde edilen kâr ise sadece sapma periyodundaki toplam kârdır,  $\pi^m$ . Bu durumda yavuz stratejinin işbirliğini teşvik etmesi için şu koşul gereklidir:

$$\pi^m \leq \frac{1}{1-\delta} \frac{\pi^m}{2}.$$

Bu da  $\delta \geq 1/2$  ise geçerlidir.

Rotemberg ve Saloner (1986) tekrarlı Bertrand modelini biraz değiştirip ekonomideki dalgalanmaları da (yüksek ve düşük talep) dahil ettikleri bir model geliştirdiler. Bu modelin kurgusu basitçe aşağıdaki gibidir:

i. Her periyotta talep yüksek veya düşük olabilir. Firmalar ilk periyotta talebin yüksek veya düşük olduğunu bilirlerken sonraki periyotlarda talep düzeyini bilmemektedirler. Bildikleri tek şey; sonraki her periyotta  $p$  olasılıkla yüksek talep,  $1-p$  olasılıkla da düşük talep olacağıdır. Her iki durumda da kârı maksimize eden fiyatlar  $p_h^m$  ve  $p_l^m$  şeklindedir ve buna karşılık gelen kâr düzeyleri ise  $\pi_l^m < \pi_h^m$ 'dir.

ii. En iyi denge yine firmaların birlikte hareket etmeleri, yani her periyotta tekel gibi davranıp, buna uygun tekel fiyatı uygulamalarıdır. Şimdi denge patikasındaki iki tip tarihi kontrol edebiliriz, yani talebin yüksek olduğu ve talebin düşük olduğu tarihler.

iii. Yüksek-talep bilgi kümesinde aşağıdaki durum geçerli olmak zorundadır:

$$\pi_h^m \leq \frac{\pi_h^m}{2} + \frac{\delta}{1-\delta} \left[ p \frac{\pi_h^m}{2} + (1-p) \frac{\pi_l^m}{2} \right]. \quad (6.13)$$

(6.13) ifadesinin sağ tarafı işbirliği sürecinde beklenen kârı göstermektedir. Burada ilk periyotta talebin yüksek talep olduğu biliniyorken, daha sonraki periyotların ise yüksek ve düşük talepli oldukları bilinmemektedir. Bu durumda sağ taraftaki ikinci terim (köşeli parantez içindeki değer), 1. periyot sonrası periyot başına düşen beklenen kârı göstermektedir.

Benzer olarak düşük-talep bilgi kümesinde ise aşağıdaki koşul geçerli olmalıdır:

$$\pi_l^m \leq \frac{\pi_l^m}{2} + \frac{\delta}{1-\delta} \left[ p \frac{\pi_h^m}{2} + (1-p) \frac{\pi_l^m}{2} \right]. \quad (6.14)$$

Buradan ilk koşulun ((6.13)), ikinci koşulu ((6.14)) ima ettiğini görebiliriz. Çünkü sapma motivasyonu ve rakip firmanın altında fiyat uygulamak yüksek talep durumunda daha fazladır. Dolayısıyla sadece (6.13) koşulundan eşik iskonto oranını,

$\delta^*$ , bulabiliriz:

$$\pi_h^m = \frac{\delta^*}{1 - \delta^*} [p\pi_h^m + (1 - p)\pi_l^m].$$

Cebirsel işlemler sonucunda şunu elde ederiz:

$$\delta^* = \frac{\pi_h^m}{(\pi_h^m + \pi_l^m) + p(\pi_h^m - \pi_l^m)}. \quad (6.15)$$

Yukarıda (6.15)'te ifade edilen denklemde eşik iskonto oranının,  $\delta^* > 1/2$  olduğu görülür (dikkat edilirse  $\pi_h^m = \pi_l^m$  iken  $\delta^* = 1/2$  olur, dolayısıyla  $\pi_h^m > \pi_l^m$  iken  $\delta^* > 1/2$  olur). Bu eşik iskonto oranından daha büyük iskonto oranlarında,  $\delta > \delta^* > 1/2$ , işbirliğini sürdürmek rasyoneldir. Kısaca işbirliğini sürdürmek ekonominin genişleme dönemlerinde daha zordur ve ancak  $\delta > \delta^* > 1/2$  durumunda korunabilir. Fakat iskonto oranının ara değerlerinde de,  $\delta^* > \delta > 1/2$ , eğer firmalar yüksek talep durumunda tekel fiyatının altında bir fiyat uygulayabilirlerse yine de bir tür işbirliği sürdürülebilir. Sezgisel olarak, bu durumda yüksek talebin olduğu bir konjonktürde sapma motivasyonu bir ölçüde azalabilir.

### 6.5.3 Etkin Ücret

Shapiro ve Stiglitz (1984), firmaların çalıştırdıkları işçilerin verimliliğini artırmak için onlara yüksek ücret teklifinde bulundukları, fakat işten kaytarmaları durumunda da onları işten attıkları dinamik bir model kurdular. Biz de bu modelin tekrarlı oyun versiyonunu Gibbons (1992)'den derledik.

$G(\cdot)$  gibi bir aşama oyununa sahip olduğumuzu düşünelim. Bu  $G(\cdot)$  aşama oyununda, ilk olarak, firma işçiye bir ücret teklifinde bulunmaktadır. Eğer işçi bu ücret teklifini kabul ederse  $w$  kadar ücret almaktadır, fakat redderse işçinin dışarıdaki opsiyonu  $\underline{w}$  kadardır. Eğer işçi teklifi kabul ederse, ya emeğini arz edecek, ki bu bir maliyettir işçi açısından çünkü  $e$  kadar çaba göstermesi gerekecek, ya da işten kaytaracaktır (işçi için bu, çaba göstermekten daha iyidir). Firma işçinin bu kararını (çalışma ve kaytarma) gözlemleyemiyor fakat üretim düzeyi hem işçi hem de firma tarafından gözlemlenebilir. Basit olması açısından çıktı düzeyini yüksek ve düşük gibi iki duruma indirelim. Düşük çıktı düzeyini sıfırla normalize edelim ve yüksek çıktı düzeyini ise  $y > 0$  ile ifade edelim. Eğer işçi çaba gösterirse, çıktı düzeyi kesinlikle yüksek olmaktadır, fakat eğer işçi kaytarırsa çıktı düzeyi  $p$  olasılıkla yüksek,  $1 - p$  olasılıkla düşük olmaktadır. Yani bu modelde düşük çıktı düzeyi tam olarak kaytarıldığı anlamına gelmemektedir.

Firmanın kazancı, ürettiği çıktı düzeyinden yaptığı ödemenin yani ücretin çıkarılmasıyla elde edilirken,  $y - w$ , işçinin kazancını ise aldığı ücretten harcadığı çabayı çıkararak bulabiliriz,  $w - c$ . Eğer işçi kaytarırsa, bu  $e = 0$  demektir ve eğer çıktı düzeyi düşükse bu da  $y = 0$  demektir. Diğer yandan, ilave olarak şu varsayımlarda bulunuyoruz: firmanın işçiyi çalıştırması ve işçinin emek arz etmesi etkin bir durum yaratır; ve işçinin dışarıdaki opsiyonu istihdam edilmesi ve kaytarmasından daha iyidir, kısaca  $y - c > \underline{w} > py$ .

Bu sonsuz tekrarlı oyundaki temel mantık, işçiye dışarıdaki ücretten,  $\underline{w}$ , daha fazlasını vererek çaba göstermesini teşvik etmek ve eğer çıktı düzeyi düşükse işçiyi işten atarak kaybedeceği getiriyle tehdit etmekten ibarettir. Biz de aşağıda bazı parametre değerleri için, işçinin çaba göstermesini sağlayacak daha yüksek bir ücret olduğunu (ücret primi) göstermeye çalışacağız.

Sınırsız tekrarlı oyunda aşağıdaki stratejileri düşünelim. Bunun için de şöyle bir senaryo yazabiliriz. İşçinin dışarıdaki opsiyonundan daha yüksek bir ücret belirlediğimizi varsayalım,  $w^* > \underline{w}$ . Oyunun tarihi yüksek çıktı olduğu müddetçe, yani bir önceki çıktı düzeyi yüksek olduğu müddetçe,  $w = w^*$  ücret düzeyi teklif edilecektir aksi takdirde, yani düşük çıktı düzeyi gerçekleşirse bu durumda  $w = 0$  (işten atılıyor) teklifinde bulunacaktır. İşçinin stratejisi ise : Eğer  $w > \underline{w}$  ise teklifi kabul et (aksi takdirde dışarıdaki opsiyonu seç, yani  $\underline{w}$ ) ve çaba göster eğer oyunun tarihi yüksek çıktı ise, aksi takdirde kaytar.

Firmanın stratejisi daha önce ifade ettiğimiz yavuz stratejisine benzemektedir: Önceki durum işbirliği ise işbirliğine devam edilir fakat eğer işbirliğinden bir kez sapılırsa bundan sonra işbirliğinden tamamen sapılır. İşçinin de stratejisi yavuz stratejisine benzemektedir. Fakat durum burada biraz farklıdır çünkü bu ardısal oyunda ikinci olarak hareket eden işçidir. Eş-anlı aşama oyununa dayanan tekrarlı bir oyunda sapmalar ancak aşamanın sonunda belirlenir. Fakat aşamanın ardısal hareketli olduğu tekrarlı bir oyunda, birinci oyuncunun sapması aşama sırasında belli olur. Eğer tüm önceki tarih işbirlikçi ise, işçinin stratejisi işbirlikçi oynamaktır fakat firmanın sapmasına da optimal olarak tepki verir, yani eğer  $w \neq w^*$  fakat  $w \geq \underline{w}$  ise, işçi firmanın teklifini kabul eder fakat kaytarır. Bu stratejiler altında, şimdi alt oyun mükemmel Nash dengesini bulalım.

Firmanın birinci periyotta  $w^*$  teklif ettiğini varsayalım. Firmanın bu stratejisini veri aldığımızda, işçi için bunu kabul etmek rasyoneldir. Eğer işçi çaba gösterirse, bu durumda kesin olarak şunu biliyoruz: Üretim düzeyi yüksek olacaktır. Böylece firma tekrar  $w^*$  teklifinde bulunacak ve gelecek periyotta işçi yine aynı emek arzı problemiyle karşılaşacaktır. Yani eğer işçinin emeğini arz etmesi optimal ise, işçinin getirisinin şimdiki değeri şudur:

$$V_e = (w^* - e) + \delta V_e$$

veya

$$V_e = \frac{(w^* - e)}{1 - \delta},$$

burada  $V_e$  değer fonksiyonudur (dinamik programlamadan hatırlayınız).

Şimdi de işçinin kaydardığı duruma bakalım. İşçi  $p$  olasılıkla yüksek çıktı düzeyini üretirse, gelecek dönem de aynı emek-arzı problemiyle karşılaşır. Fakat eğer  $1 - p$  olasılıkla düşük çıktı düzeyinde üretim yaparsa, firma bundan sonra hep  $w = 0$  teklifinde bulunur. Bu yüzden de işçi bundan sonra dışarıdaki opsiyonunu kullanır, yani  $\underline{w}$  alır. İşçi için kaytarmak optimal ise, elde edeceği getirinin bekle-

nen değeri,  $V_s$ , (yani kaytarması durumunda değer fonksiyonu) şudur:

$$V_s = w^* + \delta \left\{ pV_s + (1 - p) \frac{\underline{w}}{1 - \delta} \right\}$$

veya

$$V_s = [(1 - \delta)w^* + \delta(1 - p)\underline{w}] / (1 - \delta p)(1 - \delta).$$

Eğer  $V_e \geq V_s$  ise işçinin çaba göstermesi optimaldir. Bu koşulu daha açık şekilde ifade edelim:

$$w^* \geq \underline{w} + \frac{1 - p\delta}{\delta(1 - p)}e = \underline{w} + \left(1 + \frac{1 - \delta}{\delta(1 - p)}\right)e. \quad (6.16)$$

Buna göre, (6.16) denkleminde de görüleceği gibi, firma işçiyi çaba göstermeye teşvik etmek için fazladan vereceği miktar (ücret primi)  $(1 - p\delta)e/\delta(1 - p)$  olmalıdır. Doğal olarak, eğer  $p$  bire yakın olursa yani işçinin kaytarması iyi gözlemlenemiyorsa, ücret primi son derece yüksek olacaktır. Fakat  $p = 0$  ise bu durumda işçinin çaba göstermesi ancak  $w^* \geq \underline{w} + (1/\delta)e$  ise geçerli olur.

Eğer (6.16) geçerliyse, işçinin stratejisi firmanın stratejisine en iyi tepkidir. İşçinin bu stratejisi veri alındığında, firmanın birinci periyottaki problemi şu iki durum arasında seçim yapmaktır: (i)  $w = w^*$  ücretini ödeyerek işçinin çalışmasını motive etmek ve düşük çıktı üretmesi durumunda da işten çıkararak çaba göstermesine motivasyon kazandırmak ve böylece her periyotta  $y - w^*$  getirisini elde etmek ve (ii)  $w = 0$  ücretini ödemek, böylece işçiyi dışarıdaki opsiyonuna yönlendirmek ve her periyotta sıfır getiri elde etmek. Kısaca firmanın stratejisi aşağıdaki koşul sağlandığında işçiye verdiği en iyi-tepkidir:

$$y - w^* \geq 0. \quad (6.17)$$

Hatırlanırsa  $y - e > \underline{w}$  olduğunu varsaymıştık (yani işçi için istihdam edilmek ve çaba göstermek etkin bir durumdur). Eğer bu stratejiler altoyun mükemmel Nash dengesi ise daha fazlasına ihtiyacımız var; (6.16) ve (6.17) şu sonucu ima eder:

$$y - e \geq \underline{w} + \frac{1 - \delta}{\delta(1 - p)}e.$$

Eğer (6.16) ve (6.17) sağlanırsa, tanımlanan stratejiler Nash dengesidir. Bu stratejilerin altoyun mükemmel Nash dengesi olduğunu göstermek için, bu oyundaki altoyunların ne olduğuna bakmalıyız. Hatırlanacağı gibi, bir aşama-oyunu eş anlı hareketlere sahiptir ve tekrarlı oyunun altoyunları tekrarlı oyunun aşamaları arasında gerçekleşir. Fakat buradaki ardışal hareket aşama oyununu düşünürsek, altoyunlar sadece aşamalar arasında başlamaz, aynı zamanda aşama içinde de başlar, yani işçi firmanın ücret teklifini gözlemledikten sonra başlar. Oyuncuların stratejileri veri alındığında, altoyunları iki sınıfa ayırabiliriz: Yüksek-ücret, yüksek-çıkartarihinden sonra başlayanlar ve diğer tüm tarihlerden sonra başlayanlar. Daha

önce gösterildiği gibi, oyuncuların stratejilerinin ilk tarihi verildiğinde (yüksek-ücret, yüksek çıktı tarihi) Nash dengesinin olduğu gösterildi. Bunun diğer tarih için de yapılması gerekir: işçi hiç çaba göstermediğinde, firma işçiyi dışarıdaki opsiyonunu kullanması yönünde teşvik etmelidir; firma sonraki her aşamada  $w = 0$  teklif edeceğinden, işçi bu aşamada çaba göstermeyecektir ve şu anki teklifi ancak  $w > \underline{w}$  ise kabul etmelidir.

Bu dengede işçinin dışarıdaki opsiyonunu kullanması artık kalıcıdır: Eğer işçi kaytarırken yakalanırsa, firma bundan sonra hep  $w = 0$  teklifinde bulunacaktır. Eğer firma  $w = w^*$  teklifinden bir kez saparsa, işçi asla tekrar çaba göstermeyecektir ve dolayısıyla firma işçiyi istihdam etmeyi başaramayacaktır.

### 6.5.4 Ürün Kalitesi Oyunu

Bir satıcı iki durum arasında bir seçim yapmak zorundadır: Yüksek kaliteli fakat yüksek maliyetli bir mal üretmek veya düşük kaliteli fakat düşük maliyetli bir mal üretmek. Tekrarlı bir oyun olarak düşünülen bu oyunda alıcı ve satıcı sürekli etkileşim halindedir. Satıcı her periyotta satacağı malın kalitesini belirler. Eğer sınırlı bir oyun olsaydı Zincir-mağaza ve Mahkumlar Çıkmazı oyunlarında olduğu gibi, alıcı ile her karşılaşmasında satıcı tek seferlik bir oyunda olduğu gibi firmanın zayıf baskın stratejisi olan kalitesiz mal üretecektir. Yani son periyodun sonucu öncekilerden bağımsız olacaktır. Böylece firma düşük kalitede üretmeyi seçecektir. Bu durum ilk periyoda kadar taşınacaktır.

Eğer oyun sınırsız bir şekilde oynansaydı, zincir-mağaza paradoksu dediğimiz durum uygulanamaz hale gelir ve Folk teoreminin söylediği gibi dengede geniş bir sonuç kümesi gözlemlenebilir hale gelirdi.

Bu modelde sonsuz sayıda potansiyel firma ve alıcı söz konusudur. Endojen sayıda  $n$  tane firma piyasaya  $Z$  sabit maliyetiyle girme kararı verir. Girmeye karar veren firma ya yüksek ya da düşük kalitede üretim yapar. Fakat bu seçim alıcılar tarafından gözlemlenemez. Firma yüksek kaliteli mal üretmeye karar verdiğinde, bunun marjinal maliyeti sabittir,  $c$ , fakat düşük kalitede mal ürettiğinde bunun marjinal maliyeti ise 0'dır (normalize ediyoruz, dolayısıyla fazladan bir başka parametre ile ilgilenmekten kurtuluruz). Son olarak firma ürettiği mal için bir fiyat,  $p$ , belirler.

Tüketiciler hangi firmadan malı alacaklarına karar verir. Eğer tüketiciler firmalar arasında kayıtsızlarsa, firmalar arasında rassal seçim yaparlar. Burada  $i$  firmasından alınan miktarı  $q_i$  ile gösteriyoruz. Tüketiciler malın kalitesini ancak satın aldıkları periyotta gözlemleyebiliyorlar.

Tüketicinin düşük kaliteli maldan elde ettiği fayda sıfırdır. Tüketicilerin yüksek kaliteli olduğuna inandıkları maldan almayı istedikleri miktar ise  $q = \sum_{i=1}^n q_i$ 'dir. Talep fonksiyonu azalan bir fonksiyondur, yani  $dq/dp < 0$  şeklindedir. Eğer bir firma piyasa dışında kalırsa, kârı sıfırdır. Eğer  $i$  firması piyasaya girerse sabit maliyetle karşılaşmaktadır, bu da  $-Z$  kadardır. Eğer düşük kaliteli mal üretirse periyot sonunda firmanın kârı  $q_i p$ , fakat yüksek kaliteli mal üretirse kârı  $q_i(p - c)$  olur. İskonto oranı ise  $\delta \geq 0$  ile gösterilir.

Eğer ilgimizi pür stratejilerle sınırlandırırsak, piyasada iki sonuç söz konusudur: Düşük kaliteli ve yüksek kaliteli mal üretmek. Eğer iskonto oranı çok düşükse düşük kalitede üretim yapmak her zaman bir denge olabilir (yani sadece bugün önemliyse). Fakat eğer iskonto oranı yüksekse, yüksek kalitede üretim yapmak da bir denge olabilir. Asıl ilgilendiğimiz nokta da bu son noktadır. Şimdi buna bakalım.

Bir firmanın yüksek kalitede mal üretmesinin koşulu, yüksek kalitede mal üretmesi durumunda elde edeceği indirgenmiş kâr düzeyinin düşük kaliteli mal üretmesi durumunda elde edeceği indirgenmiş kâr düzeyinden fazla olmasıdır. Düşük kaliteli mal üretmesi durumunda firma bir sefere mahsus olarak bir kâr elde edecek fakat sonraki periyotlarda gelecek tüm kârlardan mahrum kalacaktır (düşük kaliteli mal ürettiği için kimse artık kendisinden mal almayacaktır). Bu durum aşağıdaki ilişkide gösterilmektedir:

$$\delta q_i p \leq \frac{\delta}{1 - \delta} q_i (p - c). \quad (6.18)$$

(6.18) denkleminde verilen eşitsizliğin sağ tarafı yüksek kaliteli mal üretilmesinden elde edilen kârın indirgenmiş değeri iken, sol tarafı düşük kaliteli mal üretilmesinden elde edilen kârın indirgenmiş değeridir. Firma, (6.18) eşitsizliğini kullanarak uygulaması gereken fiyatın alt limitini bulur:

$$p \geq \frac{c}{\delta}. \quad (6.19)$$

Burada yani (6.19)'de belirtilen koşul bir eşitlik haline gelir çünkü kalite-garantileyen  $\bar{p}$  fiyatından daha yüksek bir fiyat uygulamak, müşterilerinin tamamını kaybetmesine neden olur.

İkinci kısıt ise kârları sıfıra yaklaştıran rekabet baskısıdır, böylece firmalar piyasaya girmekle dışarıda kalmak arasında kayıtsız kalırlar. Bu koşul da şöyle ifade edilir:

$$\frac{q_i(p - c)\delta}{1 - \delta} = Z. \quad (6.20)$$

Daha sonra (6.18) denkleminde elde ettiğimiz  $p$  değerini (6.20) denkleminde yerine koyduğumuzda şu sonucu elde ederiz:

$$q_i = \frac{Z}{c}. \quad (6.21)$$

Böylece  $p$  ve  $q_i$  düzeylerini belirlemiş olduk. Şimdi sıra endojen olarak belirlenen firma sayısını ( $n$ ) bulalım. Bu da basitçe arz ve talep eşitliği ile belirlenir. Modelde her firma, denge fiyat düzeyinde denge miktardan daha fazlasını satmayı ister, fakat piyasa çıktı düzeyi talep edilen miktara eşit olmalıdır. Piyasa denkliği bu anlamda aşağıdaki gibidir:

$$nq_i = q(p). \quad (6.22)$$

Yukarıda verilen (6.18),(6.21) ve (6.22) denklemleri birlikte düşünüldüğünde optimal firma sayısı şudur:

$$n^* = \frac{cq(c/\delta)}{Z}. \quad (6.23)$$

Denge fiyatı sabittir çünkü sabit maliyet  $Z$  ekzojendir ve talep elastiktir. Bu durum firmaların sayısını belirleyecektir. Eğer giriş maliyeti olmasaydı,  $Z = 0$ , fakat talep hala elastik olsaydı bu durumda denge fiyatı hala (6.18) kısıtını sağlayacak tek fiyat olacaktı.

Alıcılar  $\bar{p}$  fiyatını uygulayan firmalar arasında rassal seçim yaparlar. Eğer bu firmalar fiyatlarını ya da kalitelerini değiştirmezlerse alıcılar ilk aldıkları firma ile alışverişe devam ederler. Böyle bir durumda ise yine fiyatını veya kalitesini değiştirmeyen diğer bir firmaya rassal olarak geçerler. Böylece dengede  $n$  sayıda firmanın olduğu ve her firmanın yüksek kalitede üretim yaptığı ve  $\bar{p}$  fiyat düzeyinde üretimde bulunduğu bir durum söz konusudur. Bu strateji profili altoyun mükemmel dengedir. Her firma yüksek kalitede üretim yapar ve fiyat indiriminden kaçınır. Aksi takdirde tüm müşterilerini kaybederler çünkü fiyat indirimi, düşük kaliteli olma sinyali olarak algılanır.

## 6.6 Minmax ve Maxmin Fayda Düzeyleri

İşbirliğini teşvik eden stratejileri düşündüğümüzde, maksimum cezalandırma stratejilerinin ne olduğu gündeme gelir. Minmax strateji fikri, bu anlamda faydalıdır çünkü minmax stratejisi eğer diğer oyuncu işbirliğine girmiyorsa (sapma hareketinde bulunuyorsa) mümkün olan en ağır cezalandırmayı öngörür. Bunun işbirliği yapmayan açıdan karşılığı ise kendisini cezadan korumaktır. Bu da maxmin stratejidir. Minmax ve maxmin stratejilerinin önemi direkt olarak oyuncuların en iyi tepkilerini tahmin etmekten ziyade, stratejilerin oyuncuların fayda düzeylerini nasıl etkilediğinin sınırlarını görmektedir.

Mahkumlar Çıkamazında,  $i$  oyuncusunun bir Nash dengesi ile desteklenen minimum fayda düzeyi  $u_i(D, D)$ 'dir. Bu fayda düzeyinin önemi,  $j$  oyuncusunun  $D$  hareketini seçerek  $i$  oyuncusunun faydasının,  $u_i(D, D)$  düzeyini aşmamasını garanti etmesidir. Nash dengesi ile desteklenen bu fayda düzeyinden daha küçük bir fayda düzeyi yoktur. Yani  $u_i(D, D)$  fayda düzeyi  $j$  oyuncusunun  $i$  oyuncusunu almaya zorlayabileceği en düşük faydadır.

Herhangi bir stratejik oyunda bu minimum fayda dengesini bulabiliriz. Sapma hareketinde bulunan  $i$  oyuncusu olsun. Diğer oyuncuların herhangi bir  $a_{-i}$  hareketi için  $i$  oyuncusunun en yüksek fayda düzeyi aşağıdaki problemi çözen en iyi tepki hareketinden elde ettiği fayda düzeyidir:

$$\max_{a_i \in A_i} u_i(a_i, a_{-i}).$$

Diğer yandan  $a_{-i}$  değiştikçe, maksimum fayda da değişir. Eğer diğer oyuncular  $(-i)$ ,  $i$  oyuncusunun alacağı maksimum değeri mümkün olduğunca daha

küçültmeyi amaçlıyorlarsa, yani  $i$  oyuncusunu cezalandıran hareketleri,  $a_{-i}$ , arıyorlarsa, bu durum aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\min_{a_{-i} \in A_{-i}} \max_{a_i \in A_i} u_i(a_i, a_{-i}).$$

Bu problemin çözümünde elde edilen  $u_i$  fayda düzeyi,  $i$  oyuncusunun, rakiplerinin  $a_{-i}$  stratejisine en iyi tepkide bulunduğu veri alındığında, rakiplerinin  $a_{-i}$  seçimi ile  $i$  oyuncusunun faydasını minimumda tuttuğunu gösteren fayda düzeyidir. Bu fayda düzeyi  $i$  oyuncusunun *minmax fayda düzeyi* (güvenlik fayda düzeyi de denir) olarak bilinir.

Yani diğer oyuncuların stratejileri ne olursa olsun, herhangi bir oyuncu her periyotta en azından minmax fayda düzeyi kadar kazanır ve bu yüzden de indirgenmiş fayda düzeyi en az minmax fayda düzeyine eşittir. Bunu da her periyotta diğer oyuncuların hareketlerine en iyi tepkiyi seçerek elde eder. Daha formel olarak ifade edersek,  $i$  oyuncusu her periyottaki faydasının en az kendi minmax fayda düzeyinde olacağını garanti altına almak için, her  $h$  tarihi sonrası  $s_{-i}(h)$ 'e en iyi tepkisini seçerek gerçekleştirir. Yani sınırsız tekrarlı bir oyunun hiçbir Nash dengesinde,  $i$  oyuncusunun indirgenmiş ortalama fayda düzeyi, kendi minmax fayda düzeyinden daha küçük olamaz.

Diğer yandan, herhangi bir  $G$  oyununda  $i$  oyuncusunun maxmin stratejisi, diğer oyuncuların  $i$  oyuncusunun faydasını mümkün mertebe düşük tutmaya çalıştığını veri aldığımızda, kendisine olası en yüksek faydayı sağlayan harekettir.  $G$  aşama oyununda  $i$  oyuncusunun maxmin fayda düzeyi, her oyuncunun hareket kümesi,  $A_i$ , ve fayda fonksiyonu,  $u_i$ , verildiğinde şöyle tanımlanır:

$$\max_{a_i \in A_i} \min_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i, a_{-i}).$$

Maxmin altında, 1. oyuncu, 2. oyuncunun dışarıda kendisine zarar vermeyi beklediğini düşünmektedir. Minmax altında ise, 2. oyuncu tamamen kötü niyetlidir ve 1.oyuncuya maksimum zarar vermek istemektedir. Değişken-toplamlı oyunlarda, minmax sadistlerin stratejisiyken, maxmin paranoyakların stratejisidir. Sıfır toplamlı oyunlarda ise, minmax iyimserlerin, maxmin kötümserlerin stratejisidir.

### Örnek 6.1

Maxmin stratejisine göre her oyuncu olası en kötü sonuçların en iyisini seçmelidir. Tablo 6.3'te verilen oyunda eğer 1. oyuncu  $A1$  hareketini seçerse, karşılaşacağı en kötü sonuç  $-2$ 'dir. Bu 2. oyuncunun  $B1$ 'i seçtiğinde ortaya çıkan fayda düzeyidir. Eğer  $A2$  hareketini seçseydi, bu durumda en kötü sonuç  $-1$  olurdu. Bu da 2. oyuncunun  $C1$  hareketini seçmesi durumunda ortaya çıkar. Son olarak eğer 1. oyuncu  $A3$  hareketini seçseydi en kötü sonuç  $-15$  olurdu. Bu da 2. oyuncunun  $C3$  hareketini seçmesiyle ortaya çıkan durumdur. Bu kötü sonuçlardan,  $\{-2, -1, -15\}$ , en iyisi  $-1$ 'dir. Bu sonuç 1. oyuncu  $A2$  hareketini seçtiğinde ortaya çıkar. Bu strateji 1. oyuncunun maxmin stratejisidir, yani "minimumu maksimize" eden stratejisidir.

2. oyuncu için de benzer olarak maxmin stratejisi  $B1$ 'dir, ki bu strateji ona +1 fayda düzeyi sağlar.

|      | $B1$  | $B2$  | $B3$    |
|------|-------|-------|---------|
| $A1$ | -2, 2 | 1, -1 | 10, -10 |
| $A2$ | -1, 1 | 2, -2 | 0, 0    |
| $A3$ | -8, 8 | 0, 0  | -15, 15 |

**Tablo 6.3**

Dikkat edilirse, her iki oyuncunun da maxmin stratejilerinden elde ettikleri fayda düzeylerinin (sırasıyla -1 ve 1) toplamı sıfırdır. John von Neumann (1944) bu durumun tüm sıfır toplamlı oyunlarda geçerli olduğunu belirtir. Yani iki oyunculu sıfır-toplamlı bir oyunda maxmin stratejilerinden elde edilen faydaların toplamı sıfırdır. Bu örnekte, neden iki oyuncu maxmin stratejilerini seçiyorlar diye sorarsak bunun tek bir açıklaması var, o da iki oyuncunun da kötümser olduğudur. Fakat sıfır-toplamlı oyunlarda kötümserliğin kaynağı korku değil realizmdir. Çünkü sizin kaybınız diğerinin kazancıdır. Yani kötümserliğin kaynağı yersiz bir korkudan çok rasyonel olmaktan kaynaklanır. Rakibiniz kazanmak için sizin kaybetmenizi isteyecektir. Bunun farkında olan oyuncular kendilerini korumak isterler. Bu da onları maxmin strateji oynamaya teşvik eder.

Bu örnekte dikkat edilmesi gereken başka bir nokta ise maxmin strateji dengesinin aynı zamanda Nash dengesi oluşudur. Bu durum da tüm sıfır-toplamlı oyunlar için geçerlidir. Fakat sıfır-toplamlı olmayan oyunlar için geçerli olmayabilir.

## Örnek 6.2

Tablo 6.4'te verilen oyuna bakalım. Her oyuncunun minmax faydası 1'dir. Her oyuncu  $C$  hareketini seçerek diğer oyuncunun 1 birim fayda düzeyinden daha fazla almamasını sağlar. Dikkat edilirse oyuncuların aynı zamanda diğer oyuncunun faydasının 1'den daha az almasını sağlayacak bir hareketi de yoktur.

|     | $A$  | $B$  | $C$  |
|-----|------|------|------|
| $A$ | 4, 4 | 3, 0 | 1, 0 |
| $B$ | 0, 3 | 2, 2 | 1, 0 |
| $C$ | 0, 1 | 0, 1 | 1, 1 |

**Tablo 6.4**

Maxmin stratejileri bir denge kavramının temeli olarak kullanılabilir. Her oyuncu için maxmin stratejisinin izlenmesiyle maxmin denge bulunur. Böyle bir strateji makul görülebilir çünkü her oyuncu kendisini olası en kötü durumdan korumaya çalışır. Fakat maxmin stratejilerinin sıfırlı toplamlı oyunlar dışında rasyonel bir oyuncu tarafından oynanmasının aslında çok da makul bir gerekçesi yoktur.

Çünkü bu tür stratejiler basit bir şekilde riskten kaçınan bireyler için optimal stratejiler değildir. Bu oyuncuların riskten kaçınma davranışları zaten fayda fonksiyonlarında ifade edilmektedir. Ayrıca oyuncuların maxmin stratejilerini izlemeleri, rasyonel hareket edip şahsi çıkârlarını korumak yerine direkt rakiplerine duydukları nefretle zarar vermek istemelerinden kaynaklanır.

Diğer yandan minmax ve maxmin stratejileri her zaman pür stratejilerden değil karma stratejilerden de oluşabilir. Bunu bir örnek üzerinden görelim.

Tablo 6.5'te verilen oyunda karma stratejilerde minmax fayda düzeyini nasıl hesaplayacağımıza bakalım. İlk önce 1. oyuncunun minmax fayda düzeyini, 2. oyuncunun karma stratejilerine göre hesaplayalım. 2. oyuncunun  $L$  hareketini seçme olasılığı  $q$  olsun. Bu durumda 1. oyuncunun her hareketinden beklediği fayda düzeyleri sırasıyla  $u_U(q) = -3q + 1$ ,  $u_M(q) = 3q - 2$  ve  $u_D(q) = 0$  şeklindedir. 1. oyuncu  $D$  hareketini oynayarak her zaman 0 faydasını garanti altına alacağından, soru, 2. oyuncunun belirli bir karma strateji ile 1. oyuncuyu bu fayda düzeyinde tutup tutamayacağıdır. Burada  $D$  stratejisi  $q$  değerine bağlı olmadığı için  $u_U$  ve  $u_M$ 'nin maksimum değerlerini minimize edecek bir değer bulabiliriz. Bunu da her iki değeri de birbirine eşitleyerek yapabiliriz, yani  $-3q + 1 = 3q - 2 \Rightarrow q = 1/2$ . Böylece  $u_U(1/2) = u_M(1/2) = -1/2$  olduğundan, 1. oyuncunun minmax fayda düzeyi 0 olur.

|     | $L$   | $R$   |
|-----|-------|-------|
| $U$ | -2, 2 | 1, -2 |
| $M$ | 1, -2 | -2, 2 |
| $D$ | 0, 1  | 0, 1  |

**Tablo 6.5**

Şimdi 2. oyuncunun minmax fayda düzeyini bulalım. Bu biraz daha karmaşıktır. Çünkü 2. oyuncu daha fazla pür stratejiyi (1. oyuncunun sahip olduğu üç tane pür strateji vardır:  $U$ ,  $M$ ,  $D$ ) dikkate almak zorundadır. Sırasıyla  $U$  ve  $M$  stratejilerinin oynanma olasılıkları  $p_U$  ve  $p_M$  olsun. Böylece 2. oyuncunun her hareketinden beklediği fayda düzeyleri şöyledir:

$$u_L(p_U, p_M) = 2p_U - 2p_M + (1)(1 - p_U - p_M)$$

ve

$$u_R(p_U, p_M) = -2p_U + 2p_M + (1)(1 - p_U - p_M).$$

2. oyuncunun minmax fayda düzeyi aşağıdaki problemi çözerek elde edilebilir:

$$\min_{p_U, p_M} \max[u_L(p_U, p_M), u_R(p_U, p_M)].$$

Dikkat edilirse, 2. oyuncunun minmax fayda düzeyi 0'dır. Bu da  $(p_U, p_M, p_D) = (1/2, 1/2, 0)$  strateji profili ile elde edilir. Yani eğer  $p_U > p_M$  ise,

$L$  stratejisinden sağlanan fayda pozitiftir;  $p_U < p_M$  ise  $R$  stratejisinden sağlanan fayda pozitiftir ve  $p_U = p_M < 1/2$  ise hem  $L$  hem de  $R$  stratejisinden sağlanan fayda pozitiftir.

## 6.7 Folk Teoremi

Tekrarlı oyunlar için Folk teoremleri olarak bilinen birtakım yararlı sonuçlar söz konusudur. İlk olarak Fudenberg ve Maskin (1986) tarafından ileri sürülen bu teoremler özü itibariyle şunu söylerler: Eğer oyuncular yeterince sabırlıysa, herhangi bir *olası* bireysel rasyonel *fayda düzeyi* bir denge sonucu olabilir. Yani iskonto oranı ( $\delta$ ) bire yaklaştıkça, tekrarlı oyunlar herhangi bir fayda düzeyinin denge sonucu olmasına imkan verir. Bu sonuçları göstermek için birtakım tanımlara ihtiyacımız var.

Bunun için önce yukarıda ismi geçen *olası fayda* ve *bireysel rasyonel fayda düzeyleri* kavramlarının ne olduğunu açıklayalım. Olası fayda kavramını açıklamakla başlayalım. Eğer her periyottaki sonuç  $(x, y)$  ise bu durumda herhangi bir  $x$  ve  $y$  için indirgenmiş ortalama fayda düzeyleri  $(u_1(x, y), u_2(x, y))$  olur. Yani Mahkumlar Çıkmazı oyununda (Tablo 6.1'e bakınız),  $(2, 2)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(0, 3)$  ve  $(1, 1)$  sonuçlarının hepsi indirgenmiş ortalama fayda düzey çiftleri olarak elde edilebilir.

Şimdi art arda gelen  $(C, C)$  ve  $(C, D)$  sonuçlarına bakalım. Bu patika boyunca, 1. oyuncunun faydası 2 ve 0 arasında değişir, 2. oyuncunun faydası ise 2 ve 3 arasında değişir. Yani patika boyunca 1. ve 2. oyuncunun sırasıyla indirgenmiş ortalama faydaları 1 ve  $(5/2)$ 'dir. 1. oyuncu her iki-periyotluk döngünün ilk periyodundaki faydası ikinci periyoda göre daha fazla olduğu için (gerçekte ikinci periyotta hiçbir şey elde edemiyor) iskonto oranı ne olursa olsun indirgenmiş ortalama faydası 1'i aşar. Fakat eğer iskonto oranı bire yaklaşırsa bu durumda indirgenmiş ortalama faydası da 1'e yaklaşıyor. Her iki-periyotluk döngünün ilk periyodunun daha fazla fayda alması eğer iskonto faktörü bire yaklaşırsa önemsizleşir. Benzer olarak, 2. oyuncu her iki periyotluk döngünün ikinci periyodunda faydasının çoğunu aldığından, iskonto oranı ne olursa olsun indirgenmiş ortalama faydası  $5/2$ 'den daha azdır. Fakat iskonto faktörü bire yaklaşıırken bu değer de  $5/2$ 'ye yaklaşır. Yani iskonto faktörü bire yaklaşıırken  $(1, 5/2)$  fayda düzeyleri yaklaşık indirgenmiş ortalama fayda düzeyleridir.

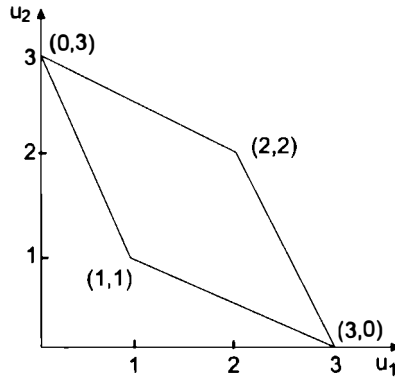
Bu argüman, sonuçlar dizisinin tekrarlandığı herhangi bir sonuç patikasına uzatılabilir. Eğer iskonto oranı bire yaklaşırsa, bir oyuncunun böyle bir patikadaki indirgenmiş ortalama faydası dizideki faydaya yaklaşır. Örneğin,  $(C, C)$ ,  $(D, C)$ ,  $(D, C)$  dizisini içeren sonuç patikası 1. oyuncuya  $(1/3)(2 + 3 + 3) = 8/3$ 'e yakın bir indirgenmiş ortalama sağlarken, 2. oyuncuya da  $(1/3)(2 + 0 + 0) = 2/3$ 'e yakın bir indirgenmiş fayda sağlar. Yani sonuç olarak iskonto oranı bire yaklaştıkça herhangi bir sonuçlar dizisinin faydalarının ortalaması, yaklaşık olarak indirgenmiş ortalama faydaya yaklaşır. Eğer iskonto oranı bire yaklaşırsa, sınırsız tekrarlı oyundaki *olası* indirgenmiş ortalama fayda çiftleri yaklaşık olarak oyuncuların faydalarının ağırlıklandırılmış ortalamasıdır. Şimdi olası fayda tanımını vere-

biliriz.

**Tanım 6.1** Eğer  $G$  aşama oyunundaki  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  fayda düzeyleri oyundaki pür-strateji faydalarının konveks bileşimi (ağırlıklandırılmış ortalaması) ise bu faydalara olası faydalar denir.

Diğer bir deyişle, eğer fayda düzeyleri, pür stratejilerin sağladığı fayda düzeylerinin ağırlıklandırılmış ortalaması (ağırlıklar negatif değildir ve toplamı birdir) ise bu faydalar olasıdır. Bu tanımda "olası" kelimesi yanlış anlaşılmaya neden olabilir çünkü bundan daha çok, oyunda gerçekleşmesi olası tüm faydalar anlamı çıkabilir. Fakat burada olası fayda, sınırsız tekrarlı oyunda indirgenmiş ortalama fayda (yaklaşık olarak) anlamında kullanılır.

Bu kavramı daha iyi anlamak için olası faydalar kümesini Mahkumlar Çıkmazı oyunu üzerinden göstereyim. Bunun için  $b$  ve  $c$  gibi tam sayılar seçelim ve  $c > b$  olsun. Bu oyunun  $b$  kere tekrarında  $(x_1, x_2)$ ,  $c - b$  kere tekrarında ise  $(y_1, y_2)$  sonucunun elde edildiğini varsayalım ve tüm bu tekrarların sonsuza kadar bu şekilde devam ettiğini varsayalım. Bu sonuç patikasında ortalama fayda çifti  $(b/c)(x_1, x_2) + (1 - b/c)(y_1, y_2)$  olur. Burada bulduğumuz bu nokta  $(x_1, x_2)$  ve  $(y_1, y_2)$  noktalarını birleştiren doğru üzerindedir. Eğer  $b$  ve  $c$  değerlerini değiştirsek bu doğru üzerindeki tüm noktaları elde edebiliriz (çünkü ağırlıklandırma yapıyoruz). Bu ağırlıklandırma mantığını Tablo 6.1'de verilen Mahkumlar Çıkmazı oyununda uyguladığımızda olası fayda düzeyleri Şekil 6.3'te gösterildiği gibi bir paralelkenarı oluşturur. Dolayısıyla farklı ağırlıklar vererek bu paralelkenar içindeki tüm fayda düzeylerine ulaşabiliriz.



**Şekil 6.3** Mahkumlar Çıkmazı oyununda olası faydalar düzeyi

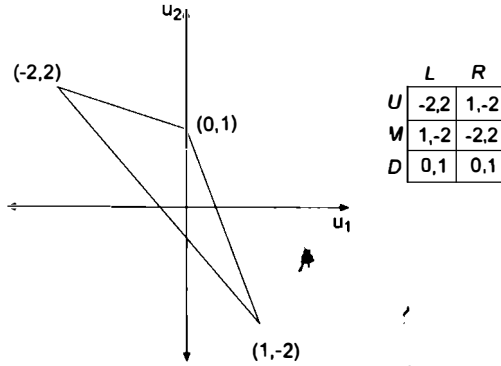
Olası faydalar kavramını daha iyi anlamak için daha farklı bir şekilde de anlatabiliriz: Olası faydalar kümesi,  $u(\cdot)$  fayda profilinin konveks (dışbükey) zarfıdır (convex hull). Bir noktalar kümesinin konveks zarfı basitçe, tüm noktaları içeren en küçük konveks kümesi anlamına gelir. Örneğin Mahkumlar Çıkmazı oyununda dört tane pür strateji fayda düzeyi vardır:  $(2, 2)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(3, 0)$  ve  $(1, 1)$ . Tüm bu

foydarar d zeyei olasıdır. Diğer olası foydalar ise  $(u_1, u_2)$  çiftleridir; burada  $u_1 = \alpha(0) + (1 - \alpha)(3)$ ,  $u_1 + u_2 = 3$  ve  $\alpha \in (0, 1)$ 'dir. Bu da  $(0, 3)$  ve  $(3, 0)$  foydalarının ortalamasını verir. P r-strateji foydalarının ağırlıklandırılmış ortalamasını elde etmek için oyuncular herhangi bir tür rassallaştırma (para atmak gibi) kullanabilirler. Örneğin,  $(1.5, 1.5)$  foydalarını elde etmek için, oyuncular yazı-tura atabilirler ve tura gelirse  $(C, D)$ , yazı gelirse  $(D, C)$  oynayabilirler.

Olası tüm foydalar kümesini daha iyi tanıtabilmek için başka bir örnek verelim.

###  rnek 6.3

şekil 6.4' n sağ tarafındaki tabloda verilen  $G$  aşama oyununda  tane p r-strateji foydası vardır:  $(-2, 2)$ ,  $(1, -2)$  ve  $(0, 1)$ . Bu foyda düzeylerinin konveks zarfını (konveks bileşimini) düşünmemiz gerekir. Bu da şekil 6.4' n sol tarafında gösterilmektedir. Yani   en içinde gösterilen noktalar olası foydalardır (  enin kendisi bir konveks zarftır).

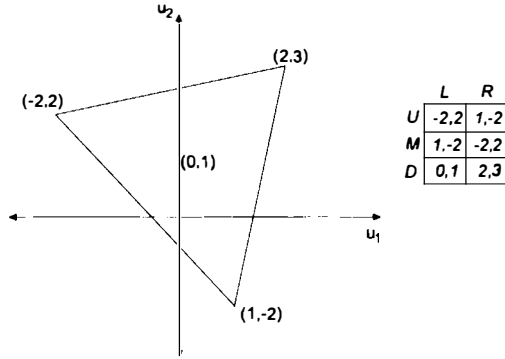


**şekil 6.4**  $G$  aşama oyunu ve p r strateji foydalarının konveks bileşimi olan olası foyda düzeyleri

Bu aşama oyununun basit bir şekilde dönüştürülmüş haline bakalım. Basitçe oyuna, diğer bir p r strateji profili ekleyelim. Örneğin  $(2, 3)$  strateji profili ekleyelim (şekil 6.4'de verilen matrisin en son hücresine  $(0, 1)$  yerine  $(2, 3)$  yazdık). Bu foydaların konveks zarfı nedir? şekil 6.5'in sağ tarafındaki grafik açıkça tüm noktaları içeren en küçük konveks zarftır. Dikkat edilirse,  $(0, 1)$  noktası şimdi kümenin içindedir.   endeki tüm foydalar olası foydalardır.

Olası foydalar kavramını tanıtıttıktan sonra şimdi de "bireysel rasyonel foydalardan" neyi anladığımızı belirtelim. Bunu yapmak için sıfır-toplamlı oyunlar bağlamında minmax foydaları tanıtmamız gerekir.

Sınırsız tekrarlı Mahkumlar  ıkmaızı oyununun ardındaki mantık, diğer herhangi bir sınırsız tekrarlı oyuna uygulanabilir: Her oyuncunun foydasının belirli bir minimum değeri aştığı her olası foyda profili, her oyuncunun sapma hareketinde bulunanı sınırsız cezalandırması ile ortaya çıkan Nash dengesinin indirgenmiş ortalama foydasına yakındır (veya daha b y  k). Dikkat edilirse, bu minmax foydaları



**Şekil 6.5** Dönüştürülmüş  $G$  oyunu ve pür strateji faydalarının konveks bileşimi olan olası fayda düzeyleri

ile aynı tanımdır. Bu yüzden minmax faydaları özel bir öneme sahiptir çünkü oyuncunun rezervasyon fayda düzeyini belirler, yani oyuncuların herhangi bir dengede garanti edebilecekleri minimum faydaları verir.

Şimdiye kadar söylediklerimizi özetlersek,  $i$  oyuncusunun herhangi bir statik oyunda ve iskonto oranından bağımsız tekrarlı bir oyunun herhangi bir Nash dengesinde elde edeceği minimum fayda minmax düzeyidir, yani  $\underline{u}_i$ . Buradan hareketle, minmax faydalarına pareto baskın olan faydalara bireysel rasyonel faydalar diyoruz.  $G$  aşama oyununda (Şekil 6.4) minmax faydaları  $(0, 0)$  düzeyidir (karma stratejiler kullanıldığında bu sonucun ortaya çıktığına dikkat ediniz). Burada bireysel rasyonel faydalar  $u_1 > 0$  ve  $u_2 > 0$  iken olası tüm  $(u_1, u_2)$  fayda çiftlerinden oluşur. Bunu daha formel ifade edelim.

**Tanım 6.2** Olası kesin bireysel rasyonel faydalar kümesi şöyle ifade edilir:

$$\{u \in U \mid u_i > \underline{u}_i, \forall i\}.$$

Kesin bireysel rasyonel faydalar kümesi Şekil 6.4'te gösterildiği gibi  $(0, 0)$  ve  $(0, 1)$  noktalarında köşeleri olan sağdaki küçük üçgendir.

Şimdi sınırsız tekrarlı oyunlarla ilgili olarak iki önemli sonucu ifade edebiliriz. Her ikisine de Folk teoremleri denir (Folk denmesinin nedeni, ki folk daha çok "ahali" anlamında kullanılır, bu teoremlerin herhangi bir oyun teorisini tarafından formalize edilmeden önce yaygın bir şekilde (ahalice) bilinmesidir).

Birinci Folk teoremi şunu ifade eder: Herhangi bir olası güçlü bireysel rasyonel fayda vektörü, tekrarlı oyunun Nash dengesi tarafından desteklenebilir. İkinci Folk teoremi ise daha zayıf bir sonucu ifade eder. Aşama oyununun herhangi bir statik dengesine pareto baskın olan herhangi bir olası fayda vektörü, tekrarlı oyunun alt-oyun mükemmel dengesi tarafından desteklenebilir.

**Teorem 6.1** (Birinci Folk Teoremi) Belirli bir  $G(\delta)$  aşama-oyununda herhangi bir olası kesin bireysel rasyonel fayda vektörünü ( $u$ ), Nash dengesi yapan bir iskonto oranı  $0 < \underline{\delta} < 1$  vardır.

Bu teoremin ardındaki mantık basitçe şudur: Oyuncular sabırlı olduklarında, herhangi sınırlı periyotluk bir sapmanın kendilerine sağladığı kazanç, gelecekteki her periyotta oluşacak çok küçük bir kayıptan bile daha az olabilir. Bu teoremin ispatı da sapma gösteren bir oyuncunun bundan sonraki her periyotta minmax faydasını alması üzerine kurulur.

**İspat.** Her  $i$  oyuncusunun şöyle bir stratejiyi takip ettiğini varsayalım: "0. periyotta  $a_i$  hareketini oynamaya devam et ve eğer bir önceki periyotta gerçekleşen hareket profili  $a$  ise  $a_i$  oynamaya devam et, aksi takdirde her  $j$  oyuncusu minmax stratejisini oynayacaktır." Acaba  $i$  oyuncusu bu profilden sapma gösterirse kazançlı çıkar mı? Kendisi sapmayı izlediği periyotta en fazla  $\max_a u_i(a)$  kadar kazanır ve rakipleri bundan sonra minmax stratejileri oynayacakları için bundan sonraki tüm periyotlarda  $\underline{u}_i$  minmax faydasını elde eder. Yani eğer  $i$  oyuncusu  $t$  periyodunda sapma gösterirse, elde edeceği en fazla fayda şudur:

$$\frac{1 - \delta^t}{1 - \delta} u_i + \delta^t \max_a u_i(a) + \frac{\delta^{t+1}}{1 - \delta} \underline{u}_i.$$

Bu sapmayı kazançlı olmaktan çıkmamak için, sapma durumunda elde edeceği faydayı, stratejisini takip etmesi durumunda elde edeceği faydadan,  $u_i$ , daha küçük hale getirecek bir iskonto,  $\delta$ , oranı bulmaktır. Yani,

$$\begin{aligned} \frac{1 - \delta^t}{1 - \delta} u_i + \delta^t \max_a u_i(a) + \frac{\delta^{t+1}}{1 - \delta} \underline{u}_i &< \frac{1}{1 - \delta} u_i \\ (1 - \delta^t) u_i + \delta^t (1 - \delta) \max_a u_i(a) + \delta^{t+1} \underline{u}_i &< \delta^t u_i \\ (1 - \delta) \max_a u_i(a) + \delta \underline{u}_i &< u_i. \end{aligned}$$

Yukarıdaki problemi çözerek her  $i$  oyuncusu için bir eşik  $\underline{\delta}_i$  değeri bulabiliriz:

$$(1 - \underline{\delta}_i) \max_a u_i(a) + \underline{\delta}_i \underline{u}_i = u_i,$$

burada  $\underline{u}_i < u_i$  olduğundan, bu denklemin her zaman  $\underline{\delta}_i < 1$  değerini sağlayacak bir çözümü vardır. Eğer  $\underline{\delta} = \max_i \underline{\delta}_i$  kabul edersek ispat tamamlanmış olur. Dikkat edilirse,  $i$  oyuncusu rakibinin aynı periyotta sapma hareketinde bulunmasına sıfır olasılık atfediyor. Bu durum Nash dengesi ile uyumludur çünkü Nash dengesini kontrol ederken tek taraflı sapmaların kazançlı olup olmadıklarına bakmaktayız. ■

Bu sonuç oldukça mantıksal gözükse de, Nash Folk teoremini kanıtlamak için kullanılan stratejiler alt oyun mükemmel değildir. Dolayısıyla şimdiki sorun, Folk teoreminin mükemmel dengeye uygulanıp uygulanmayacağıdır. Cevap, evet uygulanabilir. Bu durum çok sayıda mükemmel Folk teoremi sonuçları ile gösterilmektedir. Biz burada sadece Friedman (1971) tarafından iddia edilen argümanı kısaca ifade

edeceğiz.

**Teorem 6.2** (İkinci Folk Teoremi) *Bir oyunda fayda düzeyleri  $c$  olan  $\alpha^*$  gibi bir statik denge olsun. Herhangi bir  $u \in U$  fayda düzeyi için ve her  $i$  oyuncusu için  $u_i > c_i$  durumunu sağlayan bir iskonto oranı,  $\underline{\delta}$ , vardır. Bu durumda her  $\delta > \underline{\delta}$  iskonto değeri için  $u$  fayda düzeyi  $G(\delta)$  aşama-oyunun bir altoyun mükemmel dengesidir.*

**İspat.**  $\hat{a}$  gibi bir strateji profili olduğunu varsayalım ve bu strateji profilindeki fayda düzeyi  $u$  olsun. Şimdi de şu strateji profilini düşünelim: "0. periyotta her  $i$  oyuncusu  $\hat{a}_i$  stratejisini oynar ve eğer geçmiş tüm strateji profilleri  $\hat{a}$  ise,  $i$  oyuncusu  $\hat{a}_i$  oynamaya devam eder. Fakat eğer en azından bir oyuncu  $\hat{a}$  profiline göre oynamazsa, her oyuncu, oyunun kalanında  $\alpha^*$  stratejisini oynayacaktır". Bu strateji profilinin yeterince büyük bir iskonto oranı ( $\delta$ ) için Nash dengesi olması şu koşula bağlıdır:

$$(1 - \delta) \max_a u_i(a) + \delta c_i < u_i$$

Bu eşitsizlik  $\delta = 1$  değerinde güçlü bir şekilde geçerlidir. Bu da bu eşitsizliğin  $\delta < 1$  aralığında sağlandığı anlamına gelir. Yani strateji profili altoyun mükemmeldir çünkü denge-dışı patikadaki her altoyunda oyuncular sürekli  $\alpha^*$  stratejisini oynarlar, ki bu, herhangi bir statik denge için tekrarlı oyunun Nash dengesidir. ■

Özetle, Folk teoremlerinden çıkan genel sonuç, yeterince sabırlı oyuncuların yer aldığı tekrarlı oyunlarda hemen hemen her şeyin olabileceğidir. Fakat oyun teorisyenleri hangi dengelerin seçileceği konusunda bir mekanizma sunmakta zorlanırlar. Genellikle etkin dengeler üzerinde ve özellikle bu dengelerin de simetrik olanları üzerinde dururlar. Bu da daha çok insanların etkin dengeler üzerinde uzlaşacakları ve işbirliğinin tekrarlı oyunlarda çok daha muhtemel olduğu argümanlarına dayanmaktadır. Fakat bu argümanlar basitçe bir gerekçelendirme, oyun teorisinin bir unsuru olarak ortaya çıkmaz.

## Sorular

1. Aşağıdaki Cinsiyetler Savaşı oyunu sonsuza dek tekrar tekrar oynanırsa, oyuncuların dengede oluşacak olası faydalar kümesi ne olur? En yüksek olası simetrik fayda düzeyi nedir?  $\delta = 9/10$  kabul edin ve bu sınırsız tekrarlı oyun için fayda düzeyi  $(3/2, 3/2)$  olan bir strateji profili bulun.

|            | Bach | Stravinsky |
|------------|------|------------|
| Bach       | 2, 1 | 0, 0       |
| Stravinsky | 0, 0 | 1, 2       |

2. Oyuncuların tercihlerinin iskonto kriteriyle gösterildiği sonsuz tekrarlı bir oyun düşünün, ortak iskonto düzeyi  $\delta = 1/2$  olarak veriliyor. Her seferinde oynanan oyun,  $G(\cdot)$ , aşağıda gösteriliyor.  $((A, A), (A, A), \dots)$  patikasının bir altoyun mükemmel denge patikası olmadığını gösterin.

|   | A    | D    |
|---|------|------|
| A | 2, 3 | 1, 5 |
| D | 0, 1 | 1, 0 |

3. Stratejik  $G$  oyununun 1. oyuncu ile sonsuz bir oyuncular serisi (bu seride her bir oyuncu sadece bir periyot yaşıyor ve önceki periyotlardaki tüm hareketlerden haberdar) arasında oynandığı sonsuz ufuklu bir oyun düşünelim. 1. oyuncu elde edeceği sonsuz fayda düzeyi serisini dikkate alırken karşısındaki oyuncular ise sadece yaşadıkları tek periyotta ulaşacakları fayda düzeyini önemsiyor.

- a) Stratejik  $G$  oyunu aşağıda verilen Mahkumlar Çıkmazı oyunu olursa altoyun mükemmel dengeler kümesini bulun.

|   | C    | D    |
|---|------|------|
| C | 3, 3 | 0, 4 |
| D | 4, 0 | 1, 1 |

- b) Yukarıdaki oyunda 2. oyuncunun  $(C, D)$ 'den elde edeceği fayda düzeyi 0 olarak değiştirilirse her bir  $x \in [1, 3]$  rasyonel sayısı için 1. oyuncunun ortalama fayda düzeyinin  $x$  olduğu bir altoyun mükemmel dengesinin varolduğunu gösterin.
4. Üç oyunculu, simetrik ve sınırsız tekrarlı bir oyunda oyuncuların tercihleri iskonto kriteriyle belirleniyor ve her periyotta oynanan oyun  $\langle \{1, 2, 3\}, (A_i), (u_i) \rangle$ ,  $i = 1, 2, 3$  olarak veriliyor. Oyunda  $A_i$  ve  $u_i$  şu şekilde veriliyor:

$$A_i = [0, 1],$$

$$u_i(a_1, a_2, a_3) = a_1 a_2 a_3 + (1-a_1)(1-a_2)(1-a_3), \quad \forall (a_1, a_2, a_3) \in A_1 \times A_2 \times A_3$$

- a) Her periyotta oynanan statik oyununun fayda düzeyleri kümesini bulun.
- b) Herhangi bir iskonto faktörü  $\delta \in (0, 1)$  için, herhangi bir oyuncunun, sınırsız tekrarlı oyunun herhangi bir altoyun mükemmel dengesinde elde edeceği fayda düzeyinin en az  $1/4$  olduğunu gösterin.
5. Her oyuncu için iskonto oranının  $\delta = 0.99$  olduğu sonsuz tekrarlı bir oyun aşağıdaki tabloda verilmektedir. Aşağıdaki belirtilen her durum için altoyun mükemmel Nash dengesinin olup olmadığını kontrol ediniz.

|   |     |     |
|---|-----|-----|
|   | C   | D   |
| C | 5,5 | 0,6 |
| D | 6,0 | 1,1 |

- a) Her iki oyuncu hep C stratejisini oynuyor.
- b) Her iki oyuncu D stratejisini oynuyor.
- c) 1. oyuncu stratejilerini C ve D şeklinde değiştirerek oynarken, 2.oyuncu her zaman C'yi oynuyor. Fakat eğer herhangi bir oyuncu bu senaryodan saparsa, herkes D'yi oynuyor.
6. “Eğer mahkumlar çıkmazı 100 kere tekrarlanırsa, oyuncular mutlaka işbirliği dengesine ulaşırlar.” Bu önerme doğru mudur? Cevabınızı açıklayıp bir örnekle destekleyin.
7. Bir firma değişken kaliteli,  $q \in \{q_L, q_H\}$ , bir mal üretiyor. Tüketiciler malı satın alırken kalitesini gözlemleyemiyorlar. Tüketicilerin birim mal başına ödedikleri fiyat  $p$  ve yüksek kaliteli malın bir biriminin tüketiciye sağladığı fayda  $U_H - p$  olarak veriliyor. Eğer mal düşük kaliteli çıkarsa tüketicilerin elde ettiği fayda  $-p$  oluyor. Yüksek kaliteli mal üretmenin firmaya maliyeti  $c$  iken düşük kaliteli mal maliyetsiz olarak üretilebiliyor. Firma üretim aşamasında yüksek çaba sarfederse mal kesinlikle yüksek kaliteli oluyor. Ama çaba düşük olursa malın yüksek kaliteli olma olasılığı  $\epsilon$  olarak veriliyor. Bunlara ek olarak eğer oyun tek seferlik olursa firmanın düşük kalite mal üreteceği ve tüketicilerin de satın almayacağı bilgisine sahibiz. Eğer oyun sonsuz tekrarlı oynanırsa firmanın fiyat yeterince yüksek olursa yüksek kalite mal üreteceği ve tüketicilerin geçmişte düşük kaliteli mal üretilmedikçe ürünü satın almaya devam edeceği bir denge olduğunu gösterin ve bu durumda gereken fiyat düzeyini belirtin. İskonto faktörü iki taraf için de eşit ve  $\delta$  olarak veriliyor.

8. Aşağıda sonsuz sayıda tekrarlı bir oyun söz konusudur:

|   |       |       |
|---|-------|-------|
|   | M     | N     |
| M | 0, 0  | 4, -1 |
| N | -1, 4 | 3, 3  |

Bu oyunda şu yavuz stratejiyi izlenmektedir: “İlk periyotta her  $i$  oyuncusu  $N_i$ 'yi oynayacaktır fakat eğer biri bu stratejiden bir periyot saparsa bundan sonra hep  $M$  oynanacaktır”. Bu durumda Nash dengesini sağlayacak iskonto oranının aralığını bulunuz.

9. Cournot oligopol piyasasında  $n$  sayıda bir firma vardır. Ters talep fonksiyonu  $P = a - Q$  şeklindedir, burada  $Q = q_1 + \dots + q_n$ 'dir. Bu oyunu sonsuz tekrarlı bir oyun olarak düşünelim. Böyle bir oyunda altoyun mükemmel Nash dengesinde tekil üretim düzeyini sağlayacak yavuz stratejileri sağlayacak en düşük  $\delta$  iskonto oranı ( $\delta$ ) nedir?
10. Aşağıda gösterilen oyunda oyuncular ilk olarak soldaki matris için aynı anda seçim yapıyorlar. İlk periyot sonunda bu matriste yaptıkları tercihler ve bu tercihlere tekabül eden fayda düzeyleri açığa çıkıyor. İkinci periyotta 1. oyuncu U2 veya D2'yi seçerken 2. oyuncu da aynı anda L2 veya R2'yi seçiyor. Sonuçta sağdaki matriste seçimlerine tekabül eden faydaları elde ediyorlar. Her iki oyuncunun da amacı ortalama faydayı maksimize etmek

|    |       |       |    |      |      |
|----|-------|-------|----|------|------|
|    | L1    | R1    |    | L2   | R2   |
| U1 | 2, 2  | -1, 3 | U2 | 6, 4 | 3, 3 |
| D1 | 3, -1 | 0, 0  | D2 | 3, 3 | 4, 6 |

- a) Bu oyundaki tüm altoyun mükemmel dengelerini bulun ve ilgili fayda düzeylerinin konveks bileşimini hesaplayın.
- b) Bu sefer her iki oyuncunun da  $y_1$  değerini ilk periyotta seçim yapmadan önce gözlemlediğini varsayın.  $y_1$  birim aralıkta homojen dağılıma sahip. Bu duruma göre altoyun mükemmel dengeler kümesini bulun, ilgili fayda düzeylerinin konveks bileşimini hesaplayın ve ve a şıkında bulduğunuz sonuçla karşılaştırın.
- c) Bu sefer oyuncular ilk periyottan önce  $y_1$  değerini, ikinci periyottan önce de  $y_2$  değerini gözlemliyor.  $y_1$  ve  $y_2$  birim aralıktaki homojen dağılımdan çekilen iki bağımsız değer olsun. Yine altoyun mükemmel dengeler kümesini bulun, ilgili fayda düzeylerinin konveks bileşimini hesaplayın ve önceki şıklarda bulduğunuz sonuçlarla karşılaştırın.
11. Bir yatırım oyununda yatırımcı önce hareket ediyor ve birikmiş 4 lirasıyla güvendiği bir simsar aracılığıyla yatırım yapıp yapmama kararını veriyor. Kararı olumsuz olursa kendisi 4 lira alırken simsar hiçbir şey almıyor. Yatırım

gerçekleşirse para üçe katlanıp 12 lira oluyor. Bu durumda ise simsar paranın 6 lirasını yatırımcıya geri vermekle hepsini kendine saklamak arasında bir karar veriyor.

- a) Oyun tek bir sefer oynanırsa geriye doğru çıkarsama metoduyla dengeyi bulun.
- b) Şimdi bu oyunun sınırsız tekrarlı olarak oynandığını kabul edin. İskonto faktörü  $\delta$ 'nın hangi değerleri için yatırımın yapıp elde edilen gelirin paylaşıldığı durum yavuz strateji yöntemiyle sürdürülebilir bir denge olur?

12. Aşağıdaki matriste verilen oyun sınırsız tekrarlı olarak oynanıyor.

|   | A     | B      |
|---|-------|--------|
| A | 0, 0  | -1, k  |
| B | k, -1 | -2, -2 |

Bu oyunda  $k < 1$  ise oyuncular işbirliği yapıp beraberce  $A$  oynayarak faydalarını maksimize ediyorlar. Eğer  $k > 1$  ise faydalarını maksimize etmek için yine işbirliği yapıp birinin  $A$ , diğerinin  $B$  oynaması ve  $A$  seçeneğini sırayla (yani biri  $A$  oynarken diğeri  $B$  oynuyor veya tersi) oynamaları gerekiyor. Bu iki tür işbirliği sürdürülebilir mi? Eğer öyleyse hangi şartlar altında?

13.  $A$  ve  $B$  şirketleri evler için kalorifer yakıtı üreten iki firmadır. Her iki firmanın da TL başına marjinal maliyeti 1 TL'dir. Her iki firmanın satış fiyatları sırasıyla  $p_A$  ve  $p_B$  olsun. Tüketiciler ise daima ucuz fiyatlı firmayı tercih etmektedir. Toplam yakıt talebi ise şu şekildedir.

$$Q(p_i) = 200000 - 100000p_i$$

$p_i$  ise  $p_A$  ve  $p_B$  arasından düşük fiyatlı olanı tanımlamaktadır.

- a) Oyun tek seferlik oynandığı durumda, firmaların fiyatlarını eşanlı olarak belirlediğini varsayınız. Hangi fiyatlar kesin mahkum strateji olur, hangi fiyatlar zayıf mahkum strateji olur? Bu oyundaki tüm Nash dengelerini bulunuz.
- b) Oyun sürekli tekrar eden ve  $\delta$  iskonto oranıyla oynandığını varsayınız. Altoyun dengesinde firmaların monopol fiyatını sürdürebilmesi için gerekli olan en düşük  $\delta$  iskonto oranı nedir?
- c) Yeni talebin  $Q(p_i) = a - bp_i$  şeklinde olduğunu varsayınız. Altoyun dengesinde firmaların monopol fiyatını sürdürebilmesi için gerekli olan en düşük  $\delta$  iskonto oranı nedir?

14. Aşağıdaki oyunda, hükümet yüksek vergi  $T$  ya da düşük vergi  $t$  almaya karar verecektir. Hane halkı ise yüksek tasarruf  $S$  ya da düşük tasarruf  $s$  kararını verecektir.

|     | $S$  | $s$  |
|-----|------|------|
| $T$ | 6, 6 | 3, 3 |
| $t$ | 8, 3 | 4, 4 |

- a) Hükümetin görev süresi 4 yıldır ve vergi ve tasarruf kararları yılda bir kez veriliyor ise alt oyun mükemmel Nash dengesi ne olur?
- b) Hükümet ve hane halkının sonsuza kadar var olduğunu varsayınız. Bu durumda  $(T, S)$  strateji profilinin alt oyun mükemmel Nash dengesi olabilmesi için en düşük iskonto oranı ne olmalıdır?

15. Aşağıda verilen statik oyun sınırsız tekrarlı olarak oynanıyor.

|   | L    | M        | R    |
|---|------|----------|------|
| U | 6, 0 | -1, -100 | 0, 1 |
| D | 2, 2 | 0, 3     | 1, 1 |

Her iki taraf da uzun vadeli oyuncular ise 1. oyuncu için en yüksek mükemmel denge ne olur?

16. Aşağıdaki normal biçimli oyun verilmektedir

|   | A    | B    | C    |
|---|------|------|------|
| A | 5, 5 | 0, 6 | 0, 0 |
| B | 6, 0 | 3, 3 | 0, 0 |
| C | 0, 0 | 0, 0 | 1, 1 |

Bu oyunun tüm alt oyun mükemmel dengeleri oyunun  $T$  sayıda tekrarlanmasından oluşmaktadır. Oyuncuların kazançları her tekrar sonrası oluşan kazançlarının toplamıdır (İskonto yoktur).  $\bar{u}(T)$  bu dengelerin herhangi biri için 1.oyuncunun maksimum ortalama kazancı olsun,  $\underline{u}(T)$  ise minimumu olsun.  $\bar{u}(T)$  ve  $\underline{u}(T)$  'yi bulunuz

17.  $n$  firmadan oluşan bir Cournot oligopolü olduğunu varsayınız. Ters talep fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$P(q_1, \dots, q_n) = a - (q_1 + \dots + q_n)$$

Üretim maliyeti yoktur ve oyun sonsuz tekrarlı oynanmaktadır. Firmaların alt oyun dengesinde tekil üretim seviyelerini devam ettirebilmeleri için kulanabilecekleri yavuz stratejileri için en düşük  $\delta$  değeri nedir? Bu cevap  $n$  ile birlikte değişir mi, neden?

18. Statik Bertrand duopol modelinde- firmalar ( $i$  ve  $j$  firmaları) aynı anda fiyatlarını  $p_i$  ve  $p_j$ 'i belirliyorlar.  $i$  firmasının karşılaştığı talep fonksiyonu şöyledir:

$$\begin{aligned} a - p_i & \text{ eğer } p_i < p_j \\ 0 & \text{ eğer } p_i > p_j \\ (a - p_i)/2 & \text{ eğer } p_i = p_j \end{aligned}$$

Sınırsız tekrarlı oyun şeklinde oynandığını düşünerek yavuz strateji Nash dengesini bulun. (ipucu: firmaların belli bir fiyatta yani  $\hat{p}$  gibi bir fiyatta anlaştıklarını varsayın. Bunu işbirliği durumu olarak kabul edin).

19. Aşağıdaki oyun sonsuz tekrarlı bir  $G(\infty, \delta)$  oyunudur:

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
|       | $A_2$ | $B_2$ |
| $A_1$ | 4, 4  | 1, 6  |
| $B_1$ | 6, 1  | 0, 0  |

- a) Oyuncu  $i = 1, 2$  için min-max değerlerini bulunuz.
- b)  $s$  stratejisi profili şu şekildedir: (i)  $t=0$  zamanında  $i$  oyuncusu  $A_i$  oynar, (ii) herhangi bir  $t > 0$  zamanında,  $i$  oyuncusu bir önceki aşamada eğer  $(A_1, A_2)$  ya da  $(B_1, B_2)$  oynandıysa  $A_i$  oynar. (iii) herhangi bir  $t > 0$  zamanında,  $i$  oyuncusu bir önceki aşamada eğer  $(A_1, B_2)$  ya da  $(B_1, A_2)$  oynandıysa  $B_i$  oynar.  $s$  stratejisinin altoyun mükemmel dengesi olabilmesi için  $\delta$  değeri nedir?
20. Aşağıdaki  $G$  oyunun sonsuz tekrarlı oynandığını varsayınız ve iskonto değeri  $\delta = \frac{1}{2}$  olsun.  $((A, A), (A, A), (A, A), \dots)$  stratejisi profilinin altoyun mükemmel dengesi olamayacağını gösteriniz.

|     |      |      |
|-----|------|------|
|     | $A$  | $B$  |
| $A$ | 2, 3 | 1, 5 |
| $B$ | 0, 1 | 0, 1 |

21.  $\delta = 0.99$  iskonto oranı ile aşağıdaki oyunun sonsuz kere tekrarlandığını varsayınız. Aşağıda verilen her durumda strateji profillerinin altoyun mükemmel Nash dengesi olup olmadığını belirleyiniz.

|     |      |      |
|-----|------|------|
|     | $C$  | $D$  |
| $C$ | 5, 5 | 0, 6 |
| $D$ | 6, 0 | 1, 1 |

- a) Herbir oyuncu sürekli C oynar
- b) Herbir oyuncu sürekli D oynar.
- c) 1.oyuncu oynar sırayla C ve D oynarken, 2.oyuncu sürekli C oynar. Herhangi bir oyuncu stratejisinden saparsa daha sonra ikisi de D oynamaya başlar.
- d) Her oyuncu C oynar, bir oyuncu stratejiden saptığında,kendisi C oynamaya devam eder, diğer oyuncu D oynamaya başlar.

22. Telekomünikasyon piyasasında 2 firma vardır ve piyasa talebi şu şekildedir:

$$P(q_a + q_b) = 160 - q_a - q_b$$

Firmaların maliyetleri ise  $C(q) = 40q$  şeklindedir.

- a) Oyun tek sefer oynandığında ve firmalar üretim miktarlarını eşanlı olarak belirlediklerinde Nash dengesi ne olur?
- b) Oyun sonsuz kere tekrarlandığında, firmalar gizlice anlaşırsa altoyun mükemmel Nash dengesi ve iskonto oranı ne olur?

23. Aşağıdaki statik oyunu düşünün.

|   | A    | B    | C    |
|---|------|------|------|
| A | 1, 1 | 0, 0 | 0, 0 |
| B | 0, 0 | 3, 3 | 0, 0 |
| C | 0, 0 | 0, 0 | 5, 5 |

- a) Bu oyunun iskontosuz olarak 2 kere oynandığını varsayın. İki oyuncunun da elde ettiği faydanın en az 8 olduğu bir altoyun mükemmel dengesi bulun.
  - c) Bu sefer oyun sınırsız tekrarlı olarak oynanıyor. Folk teoremi bu oyun için size ne söylüyor. Bunu fayda uzayında bir grafikte gösterin. İskonto değeri  $\delta$ 'nın hangi değerleri için her oyuncuya sürekli 5, 5, 5.....fayda akışı sağlayan stratejilerin, sapmalar sonucu her iki oyuncunun da son-suza kadar A seçeneğini oynamaya başlamasıyla cezalandırıldığı stratejiden daha iyidir?
24. 3 oyunculu statik bir oyunda ilk iki oyuncu U ve D arasında ve H ile T arasında ikiyeşer seçim yapıyor. 3. oyuncu ise sol (L) veya sağ (R) seçiyor. İlk iki oyuncu ne olursa olsun 0 alıyor. 3. oyuncu ise kendisi R seçmişken ilk iki oyuncu U seçerse veya kendisi L seçmişken diğer ikisi D seçerse 1 alıyor, aksi halde elde ettiği fayda 0 oluyor. Burada H veya T seçiminin faydaları etkilemediğine dikkat edin. Diğer tüm seçimler herkes tarafından

gözlenirken ilk iki oyuncunun H veya T seçtiğine dair herkese açık olan bilgi,  $y^t$  'dir yani sadece bu iki oyuncu tarafından yapılan toplam H seçimi sayısının bilgisidir.

- a) 3. oyuncunun minmax faydasının  $1/4$  olduğunu gösterin.
- b) Bu oyunun tekrarlı versiyonunu düşünün. İlk iki oyuncunun aşağıdaki stratejiyi oynadığı bir Nash dengesi kurun: "1. oyuncu için; her periyotta  $1/2$  olasılıkla H oyna.  $y^{t-1} = 1$  ise ve 2. oyuncu H oynamışsa D oyna.  $y^{t-1} = 1$  ise ve 2. oyuncu T oynamışsa U oyna.  $y^{t-1} = 0$  veya 2 ise  $1/2$  olasılıkla U oyna". 2. oyuncu da bu stratejinin simetrisini oynasın. Bu durumda 3. oyuncunun denge faydasının kendi minmax değerinden düşük olduğunu gösterin ve açıklayın.

25. Uzun -dönemli firmaların kısa-dönem firmalarına karşı rekabete olduğu tekrarlı bir Stackelberg düopolünün olduğunu varsayınız. Kısa-dönem firmaları sadece tek bir tarihte piyasa da yer alacaklardır, uzun dönem firmaları ise oyun boyunca piyasada yer alacaklardır. Her  $t$  zamanında kısa-dönem firması miktarlarını uzun-dönemli firmaların kısa-dönem firmalarına karşı rekabete olduğu tekrarlı bir Stackelberg düopolünün olduğunu varsayınız. Kısa-dönem firmaları sadece tek bir tarihte piyasa da yer alacaklardır, uzun dönem firmaları ise oyun boyunca piyasada yer alacaklardır. Her  $t$  zamanında kısa-dönem firması miktarlarını belirler, daha sonra bu miktarı gözlemleyen uzun-dönem firması kendi miktarını  $y_t$  belirler. Her firma ürününü

$$p_t = 1 - (x_t - y_t)$$

fiyatından satar ve marjinal maliyetleri yoktur. Kısa-dönem firması  $t$  zamanı içinde kârını maksimize eder. Uzun-dönem firması ise kârlarının  $\delta = 0.99$  iskonto oranı ile bugünkü değerini maksimize eder.

- a) Oyun süresi  $t \in \{0, 1, \dots, t\}$  sonlu olduğunda altoyun mükemmel dengesi ne olur?
- b) Oyun sonsuz kere tekrar edildiğinde, ve  $x_t = 1/4$  ve  $y_t = 1/2$  olduğunda altoyun mükemmel dengesi ne olur?
- c) Her  $t$  zamanında  $x_t = y_t = 1/4$  olduğunda altoyun mükemmel dengesi ne olur?

### 7.1 Giriş

Son yıllarda iktisatçılar ihale teorisiyle daha fazla ilgilenmeye başladılar. Bu ilgi, ihale teorisinin pratikte de uygulama alanı bulması ile birlikte daha da artarak devam etmektedir. İhale teorisi artık iktisadi analizin ayrılmaz bir parçası haline gelmiştir.

İhale teorisinin uygulanma imkanı bulması ya da deneysel olarak yapılan ihaleler oyun teorisinin temel varsayımlarının test edilmesine imkan verdiği gibi, daha kompleks ticaret ortamlarının anlaşılmasını kolaylaştıracak önemli kavramların gelişmesine de yardımcı olmaktadır. Diğer yandan, son yıllarda oyun teorisyenleri ihalelerdeki teklif verme davranışını gözlemlemek yerine daha etkin ihaleler tasarlamaya başladılar. Bu konudaki çalışmalar aynı zamanda, sosyal ve iktisadi kurumların daha etkin ve adil bir şekilde tasarlanmasının mümkün olduğunu göstermektedir.

İhale teorisinin, iktisadi analiz özelindeki bu önemine rağmen, bazı araştırmacılar ihaleleri hala daha dar kapsamlı teknik bir uzmanlık alanı olarak görürler. Dolayısıyla da ihale teorisinin, iktisat teorisinden ayrı bir alan olduğunu düşünürler. Bu görüş kısmen, ihale teorisinin yöneylem araştırmacıları tarafından geliştirilmesi ve ihale ile ilgili yapılan çalışmaların yöneylem araştırmaları dergilerinde yayımlanmasından kaynaklanmaktadır. Bu çalışmalarda ihaleleri yönlendiren mekanizmalar incelenirken iktisadi bir mantıktan ziyade, daha çok teknik matematiksel argümanlar kullanılır. Standart iktisat teorisi ile ihale teorisi arasındaki çok güçlü bağlantı ihmal edilir. Halbuki ihale teorisini iktisat mantığı içinde düşünmek, kurumların gelişimini anlamada ve temel iktisat sorularının cevaplandırılmasında oldukça önemlidir. Örneğin ihale teorisindeki gelir-denklikli teoremi ihale dışındaki alanlarda da kullanılmaktadır; özellikle hukuk davalarında (kaybedenin kazanana

ne kadar ödeyeceğinin belirlemede), finansal krizlerde (piyasaları daha istikrarlı hale getirmede), mal veya hizmet kuyruklarında (kuyrukların giderilmesinde). Yine ihale teorisini kullanarak özellikle oligopol ve tekeller piyasalarında fiyatlandırma mekanizmalarını daha iyi anlamak mümkündür.

İhale özünde, fiyat rekabeti üzerine kurulmuş bir mal tahsisi sistemidir. Alıcılar ve/veya satıcılar bir malı almak ve/veya satmak için fiyat tekliflerinde bulunurlar. İhalelerdeki fiyatlandırma mekanizmasına temel alternatif fiyatlandırma ise al-veya-bırak fiyatlandırmasıdır. Bu da daha çok etiketlenirilmiş veya fiyatı belirlenmiş mallar için geçerlidir.

İhale metodu tarihin en eski dönemlerinden günümüze birçok alanda uygulanmıştır. Örneğin eski Babil’de (M.Ö. 5.yüzyıl) kadınların yüksek fiyat teklifleri veren erkeklerin eşleri olarak seçildiğini biliyoruz. Yine Roma İmparatorluğunda vergi toplama hakları, ele geçirilmiş malların dağıtılması, toprak veya maden ocaklarının kiralanması gibi konularda ihale yöntemine başvurulmuştur. En yüksek teklifi verenlere bu tür hakların verildiği bilinmektedir. Eski dönemlere ilişkin bu tür örnekler ve tarihsel dönemler çoğaltılabilir.

Günümüzde de ihale türü fiyatlandırma mekanizmasının kullanıldığı çok sayıda alan vardır. Birçok ülkede bütün yaprakları, canlı hayvan, kullanılmış arabalar, sanat eserleri ve tahviller bu tür mekanizmalarla fiyatlandırılmaktadır. Örneğin Chicago Ticaret Borsası’nın zemininde işaret ve sözlerle yapılan ihaleler (open cry) tüm finansal ve emtia futures ve opsiyon fiyatlandırmalarının temelidir. Hollanda’da lalelerin satılması ihalelerle gerçekleşir. Bu ihalelerde fiyat aşağı doğru hareket eder ve ilk en yüksek fiyat teklifi veren (genelde elektronik ortamda) ihaleyi kazanır. Diğer yandan, dünyada birçok devlet kurumu hizmet veya mal alımlarını ihalelerle gerçekleştirir. Kapalı zarf biçiminde yapılan bu ihalelerde teklifler satış fiyatıdır, alış fiyatı değildir. Bu yüzden de düşük teklifi veren kazanır.

Ayrıca giderek yaygınlık kazanan bir şekilde, internet üzerinden neredeyse her türlü mal için online-ihaleler yapılmaktadır. Bunun için kurulmuş online-ihale şirketleri vardır; örneğin Sotheby ve Christie Müzayede Evleri. Çok sayıda alıcı internet üzerinden aynı mal için teklifler sunmaktadır. En yüksek teklifi veren bu malı almaktadır. Bu tür ihalelerde yapılan işlemlerin milyarlarca dolar büyüklükte olduğu görülmektedir. Yine son yıllarda birçok ülkede telsiz iletişim için kullanılan radyo spektrum hakları ihale ile dağıtılmıştır.

İhaleleri teknik olarak tartışmadan önce ihalelerin genel özelliklerini ve temel ayrımlarını yapalım. Bunun için önce *ihale kuralları* ile *ihale ortamının* birbirinden ayrı şeyler olduğunu belirtelim. İhale kuralları, kimlerin teklifte bulunabileceğini, hangi tekliflerin kabul edileceğini, tekliflerin nasıl verileceğini, ihale sırasında ne tür bilginin ifşa edileceğini, ihale sona erdiğinde kazananın nasıl belirleneceğini ve kazananın hangi fiyatı ödeyeceğini belirler. İhale ortamı ise potansiyel teklif verenlerin nüfusu (ihaleye katılanların sayısı), ihaleye konu olan mala atfedilen değerler, risk davranışları ve her bir katılımcının diğerinin ihaleye konu olan objeye verdiği değerler hakkında sahip olduğu bilgiler gibi unsurlardan oluşur.

İhalelerde teklifler sözlü (açık) veya kapalı zarf şeklinde yapılır. *Kapalı-zarf*

## ihalesinde teklif

*unlimited* tekırı verenler tekliflerini ihaleyi düzenleyene, diğér katılımcıların göremeyeceğı bir şekilde yazılı halde verirler. Teklifler ancak ihale bittikten sonra açıklanır ve kazanan ilan edilir. *Sözlü ihalelerde* ise, teklifler sözlü ve herkesin duyabileceğı şekilde ihale boyunca açıklanır. Yani sözlü ve kapalı-zarf ihaleler arasındaki en önemli fark tekliflerin görünürlüğüdür.

İhalelerde teklifler yukarı doğru, aşağıya doğru ve eş anlı olarak verilebilir. Fiyatın aşağı doğru hareket ettiğı ihalelerde, ilk en yüksek teklifi veren kazanır. Hollanda'daki lale piyasaları böyledir. Tekliflerin yukarıya doğru olduğı ihalelerde fiyatların yönü yukarıdır. Eş anlı ihalelerde ise fiyatlar aynı anda verilir, örneğın Japonya'daki balık piyasaları böyledir; fiyatları temsil eden el işaretleriyle balıklar saniyeler içinde hemen alınır ve satılır.

İhaleler kazananın hangi fiyattan ödeme yapacağı açısından ikiye ayrılır. Eğer ödenen fiyat kazananın ödediğı fiyat ise buna *birinci-fiyat ihalesi* denir. Bu tür ihaleler en yaygın olanıdır. Fakat eğer kazananın ödediğı fiyat ikinci en yüksek fiyatsa buna da *ikinci-fiyat ihalesi* denir. Yani ödenen fiyat, kaybeden teklifler arasındaki en yüksek tekliftir. İkinci-fiyat ihalelerinin oyun teorisyenleri açısından büyük bir önemi vardır. Çünkü bu tür ihalelerin en önemli özelliğı gerçeğı söyletme özellikleridir. Buna *Vickrey ihaleleri* de denir. Vickrey'in geliştirdiğı bu ihale biçimi kendisine 1996 yılında Nobel Ödülü'nü kazandırmıştır.

Genel olarak yukarı doğru, birinci-fiyat ve sözlü olan ihaleler *İngiliz ihalesi* olarak adlandırılırken, aşağı doğru, birinci fiyat ve sözlü olan ihaleler *Hollanda ihalesi* olarak adlandırılır.

İhaleleri, ihaleye konu olan mala verilen değerle ilgili bilginin niteliğine göre de ikiye ayırabiliriz: *Bağımsız-özel bilgili ihaleler* ve *ortak-değerli ihaleler*. Birinci ihale türünde yani bağımsız, özel bilgili ihalelerde, *bağımsızdan* kastettiğimiz şey her alıcının mala verdiğı değerın kendi özel bilgisi olduğı ve her diğér alıcının özel bilgisinden bağımsız olduğudur. *Özel değer*'den kastımız ise şudur: Bir alıcı malın değerini kendi bilgisini kullanarak değerlendirdiğinde, bu değerlendirme diğér herhangi bir oyuncunun değerini öğrendikten sonra da değişmeyecektir. Yani her alıcının özel bilgisi bu değeri belirlemek için yeterlidir.

Ortak-değerli ihalelerde ise teklif verenler arasındaki temel fark objeye farklı değerler vermeleri değildir, malın değeri hakkında farklı bilgiye sahip olmalarıdır. Yani örneğın, petrol sahasının değeri yerin altında ne kadar petrol olduğuna bağlıdır. Teklif verenler ne kadar petrol olduğuna dair farklı bilgilere sahip olabilirler (çünkü farklı jeolojik sinyallere sahip olabilirler). Bu durumda eğer teklif verenlerden biri diğérinin sinyalini öğrenirse teklifini değiştirecektir. Dolayısıyla diğérlerinin bilgilerinden etkileniecektir. Herkesin özel bilgisi olmasına rağmen teklif verenin teklifi, diğér oyuncuların sinyallerinin yani bilgilerinin toplamının bir fonksiyonudur. Özel bilgili ihalelerde diğérlerinin sahip oldukları bilgiyi öğrenmek o mala verdiğınız değeri değiştirmez. Fakat ortak-değerli ihalelerde, örneğın bir tablonun sizin için değeri diğérlerinin ona verdiğı değere de bağlıdır. Çünkü bu tabloya sahip olmanın prestiji yeniden satış değerini belirler.

Diğér yandan, ihaleler herkese açık olabileceğı gibi, sadece belli kişilerin davet

edildiği ihaleler de olabilir. Birçok ihalede rezervasyon fiyatı vardır. Eğer en yüksek teklif değeri rezervasyon değerinden düşükse, bu obje geri çekilir ve satılmaz. Satıcının (ihaleyi düzenleyenin) rezervasyon fiyatları koyması, alıcılar arasındaki herhangi bir işbirliğine karşı korunma amaçlıdır.

Son olarak, bazı ihaleler *çok parçalı-ihaleler* olarak bilinir. Bu tür ihalelerde bir objenin farklı parçaları (birimleri) için her alıcı birden fazla birim için teklif verebilir. Yani her alıcı malın her birimi için ayrı bir teklifte bulunur. Bir hareket bir teklifler listesidir; burada ilk teklif malın birinci birimi için yapılan tekliftir, ikinci teklif ikinci birimi için yapılan tekliftir ve böyle gider. Veri birim için en yüksek teklifi veren malı elde eder.

Bu bölümde ilk önce tam bilgi ve özel bilgi (eksik bilgi) altında ihalelerdeki fiyat davranışlarını inceleyeceğiz. Daha sonra farklı ihalelerde, ihaleye konu olan malın satışından elde edilen gelirlerin karşılaştırmalarına bakacağız. Bunun ardından çifte ihale dediğimiz, hem alıcı hem de satıcının aynı anda teklifte bulunduğu ihaleleri inceleyeceğiz. Son olarak da ortak-değer ihalelerine bakacağız.

## 7.2 Tam Bilgi Altında İhaleler

### 7.2.1 Kesikli Teklif Değerli İhaleler

Tam bilgili ihalelerde her alıcı (teklif veren) diğer tüm alıcıların mala ne kadar değer verdiğini bilir. Ya da başka bir deyişle  $n$  sayıda oyuncunun olduğu bir ihalede değer vektörü  $v = (v_1, \dots, v_n)$  herkes tarafından bilinir. Bu bölümde bu bilgi yapısı altındaki ihalelerde denge nasıl oluştuğuna bakacağız.

Çok basit formatta bir ihale oyun örneği düşünelim. Bu örnekte, ihaleye katılanların ihaleye konu olan mala verdikleri değerleri bilmeleri durumunda teklif verenlerin nasıl davrandığına bakacağız. Basit bir kapalı zarf ve birinci fiyat ihalesi örneği verelim.

İhaleyi en yüksek teklifi veren kazanır ve ödemeyi teklif değeri üzerinden yapar; teklif değerleri eşit olduğunda kazanan yazı-tura ile belirlenir. Bu ihale oyununa katılan iki kişi var: Herdem ve Ayşe. Herdem için ihaleye konu olan malın değeri 54 lira iken, Ayşe için bu değer 34 liradır. Birinci fiyat ihalesi olduğunu düşündüğümüz bu ihalede eğer Herdem ihaleyi  $b_H$  teklifi ile kazanırsa, faydası  $54 - b_H$  olur. Eğer kaybederse bu durumda faydası sıfırdır. Benzer olarak, eğer Ayşe ihaleyi kazanırsa, faydası  $34 - b_A$  olur ve kaybederse sıfırdır. Oyuncuların tekliflerine karşılık gelen fayda düzeyleri Tablo 7.1'de gösterilmektedir (Herdem sütun oyuncusu, Ayşe satır oyuncusudur).

|    | 10       | 20      | 30      | 40      | 50     |
|----|----------|---------|---------|---------|--------|
| 10 | (12, 22) | (0, 34) | (0, 24) | (0, 14) | (0, 4) |
| 20 | (14, 0)  | (7, 17) | (0, 24) | (0, 14) | (0, 4) |
| 30 | (4, 0)   | (4, 0)  | (2, 12) | (0, 14) | (0, 4) |

**Tablo 7.1** Birinci fiyat ihalesinde Nash dengesi

Teklif değerlerinin 10 aralıklarıyla ifade edildiğini varsayalım (yani teklif değerleri kesikli değişken olsun). Dikkat edilirse oyunun Nash dengesi Herdem'in 40, Ayşe'nin de 30 teklifinde bulunduğu teklif değerler kümesidir. Dolayısıyla ihaleyi mala en yüksek değeri veren Herdem kazanır.

Yine bu örnek üzerinden, şimdi de ihalenin kapalı-zarf ve ikinci-fiyat ihalesi olarak düzenlendiğini varsayalım. Bu ihalede, ihaleye konu olan mal en yüksek fiyatı verene gider fakat ödemeyi en yüksek ikinci tekliften yapar. Bu durumda ortaya çıkan fayda düzeylerini gösteren Tablo 7.2'ye baktığımıza çok sayıda Nash dengesi olduğunu görürüz: (20, 40), (20, 50), (30, 40), (30, 50).

|    | 10       | 20      | 30      | 40      | 50      |
|----|----------|---------|---------|---------|---------|
| 10 | (12, 22) | (0, 44) | (0, 44) | (0, 44) | (0, 44) |
| 20 | (24, 0)  | (7, 17) | (0, 34) | (0, 34) | (0, 34) |
| 30 | (24, 0)  | (14, 0) | (2, 12) | (0, 24) | (0, 24) |

**Tablo 7.2** İkinci fiyat ihalesinde Nash dengeleri

Tablo 7.2'ye dikkatlice bakıldığında, dürüstlüğün zayıf baskın strateji olduğu durumun, yani (30, 50) strateji profiline Nash dengesi olduğu görülür. Bu sonuca göre Herdem'in, ödemeyi Ayşe'nin, yani kaybedenin yaptığı teklif üzerinden yapması durumunda, kafasındaki değeri (mala verdiği gerçek değer) teklif etmesi rasyoneldir. Bu dengenin varlığı bu tür ihale formatının önemli bir özelliğini ortaya çıkarmaktadır: Dürüst bir şekilde teklifte bulunmak, yani teklif verenin mala verdiği gerçek değeri söylemek zayıf baskın bir stratejidir.

Şimdi de ihaleye konu olan objenin Herdem ve Ayşe'ye İngiliz ihalesi formatında sunulduğunu varsayalım. Bu ihalede ihaleyi düzenleyen artan bir şekilde fiyat tekliflerinde bulunmaktadır. Her yeni fiyat için ikisi de aynı anda kabul veya geç (pas geçmek) şeklinde karar vermektedir. Bu durum normal İngiliz ihalesinden biraz farklı çünkü normal İngiliz ihalesinde, bir oyuncu bir fiyatı geçip diğerini kabul edebilir. Buradaki analizi basitleştirmek için, bir oyuncu bir kez geç dedi mi bir daha teklifte bulunamadığını varsayıyoruz. Yani bir oyuncu geç derse ve diğeri kabul ederse, ihale biter, kabul eden ihaleyi kazanır ve o anki (cari) ihale fiyatını öder. Eğer her ikisi de kabul ederse, ihale devam eder. Bu durum, biri geç diyene kadar devam eder.

Bu ihale her yeni fiyat teklifiyle başlayan yeni altoyunun olduğu bir dinamik oyundur. Pür strateji kabul ve geç şeklindedir. İhale 10 lira fiyatı ile başlar. Her iki oyuncu da bunu kabul eder, daha sonra 20 lira teklif edilir yine kabul edilir, 30 lira da kabul edilir. Fakat 40 liraya geçildiğinde Ayşe çekilir çünkü aksi takdirde negatif fayda elde edecektir. Böylece denge sonucu, Herdem'in 40 fiyatını kabul etmesi ve ihaleyi kazanmasıdır. Bunu Tablo 7.3'ten de görmek mümkündür.

Son olarak Hollanda ihalesi formatında bu oyunun nasıl oynandığına bakalım. Hollanda ihalesinde ihaleyi düzenleyen yüksek bir fiyatla ihaleyi başlatır. Sonra da her periyotta fiyatı 10'ar indirerek devam eder. İhaleye katılanlar yine aynı anda kabul ve geç hareketlerine sahiptirler. İlk olarak kabul diyen ihaleyi kazanır ve

| <i>Cari fiyat</i> | <i>Herdem'in stratejisi</i> | <i>Ayşe'nin Stratejisi</i> |
|-------------------|-----------------------------|----------------------------|
| 10                | <i>kabul</i>                | <i>kabul</i>               |
| 20                | <i>kabul</i>                | <i>kabul</i>               |
| 30                | <i>kabul</i>                | <i>kabul</i>               |
| 40                | <b>kabul</b>                | <b>geç</b>                 |
| 50                | <i>kabul</i>                | <i>geç</i>                 |
| 60                | <i>geç</i>                  | <i>geç</i>                 |

**Tablo 7.3** İngiliz ihalesinde Nash dengesi

ihale biter. Her ikisinin de kabul etmesi durumunda kazanan yazı-tura ile belirlenir.

İhalenin 100 fiyatı ile başladığını düşünelim. Fiyat 50'ye geldiğinde Herdem geç diyecek- ki bu fiyat mala verdiği değerın altında- çünkü fiyatın 40'a düşmesini beklemektedir. Fiyat 40 olduğunda Herdem kabul diyecektir. Fakat bu fiyat Ayşe için mala verdiği değerın üstünde olduğundan kendisi geç diyecektir. Yani böylece malı Herdem 40 liraya alacak ve ihale bitecektir. Eğer Herdem 40 fiyatı geldiğinde geç deseydi, 30 fiyatında her ikisi de kabul diyeceğinden ve kazanan yazı-tura ile belirleneceğinden beklenen kazancı  $\frac{1}{2}(54 - 30) = 12$  olurdu. Bu değer 40 fiyatını kabul etmesinde elde ettiği kazançtan, yani  $(54 - 40) = 14$  değerinden daha azdır (bu arada bu ihale için de bir tablo oluşturabilirsiniz).

Kısaca tam bilgi altında dört farklı ihale formatında, mal ona en fazla değeri verene gider ve ödenen miktar da tüm bu ihalelerde aynıdır. Bu sonuç aslında daha sonra göreceğimiz gelir denkliği teoremidir.

Şimdi de yine mala verilen değerlerin ortak bilgi olduğu fakat teklif değerlerinin sürekli olduğu ihalelerde dengenin nasıl bulunabileceğine bakalım.

## 7.2.2 Sürekli Teklif Değerli İhaleler

### *i. Kapalı-zarf birinci fiyat ihalesi*

Tek ve bölünmez bir obje için yapılan kapalı-zarf ve birinci fiyat ihalesine bakalım. Bu ihalede  $n$  sayıda alıcının olduğu,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , ve alıcıların tekliflerinin sürekli bir değişken olduğu birinci fiyat ihalesinde denge teklif değerlerini bulmaya çalışalım. Her oyuncunun teklifi  $b_i$  olup,  $A_i$  hareket kümesinin bir elemanıdır,  $b_i \in A_i \subset R_+$ . Bu oyun açıkça stratejik bir oyundur,

$$G = (N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}).$$

Herhangi bir  $i$  alıcısının faydası şöyle ifade edilebilir:

$$u_i(b) = \begin{cases} v_i - b_i, & \text{eğer } i = \min \{j \in N : b_j \in \max \{b_1, \dots, b_n\}\} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

Burada  $v_i$ ,  $i$  oyuncusunun değerini göstermektedir ve min operatörünü, ihaleye konu olan objenin en yüksek teklif verenler arasında en küçük indekse sahip olana

gittiğini göstermek için kullanıyoruz. Bu ihalede  $v_1 > v_2 > \dots > v_n > 0$  olduğunu varsayalım. Bu yüzden de en yüksek değere,  $v_1$ , sahip birinci oyuncunun bu objeyi alacağını gösterelim. Bu da en yüksek teklifin birinci oyuncu tarafından gelmesi demektir,  $b_1 \in \max \{b_1, \dots, b_n\}$ .

Bu ispatı ihaleyi 1. oyuncu dışında bir oyuncunun almasının söz konusu olmayacağını göstererek yapabiliriz. Varsayalım ki, ihaleyi birinci oyuncu dışında bir oyuncu,  $j \neq 1$ , kazansın:

$$j = \min \{k \in N : b_k \in \max \{b_1, \dots, b_n\}\}.$$

a. Eğer  $b_j > v_2$  ise,  $b_j > v_j$  olur, böylece  $j$  oyuncusu sıfır teklifinde bulunur, yani ihaleden çekilir, aksi takdirde negatif fayda alır,  $v_j - b_j < 0$ .

b. Eğer  $b_j \leq v_2$  ise,  $b_j < v_1$  olur, böylece 1. oyuncu  $b_j$  teklifinde bulunabilir, ihaleyi kazanır ve  $v_1 - b_j > 0$  kadar fayda elde eder.

1. oyuncunun objeyi aldığını gösterdik. Bu durumda  $b_1$  teklifinin alacağı değerlere bakalım. Açıkça  $b_1 \leq v_1$  ve aynı zamanda  $b_1 \geq v_2$  olmak zorundadır, aksi takdirde 2. oyuncu  $b_2 \in (b_1, v_2)$  teklifinde bulunabilir ve faydasını artırabilir. Yani kısaca 1. oyuncunun teklif aralığı  $b_1 \in [v_2, v_1]$  olur.

Sonuç olarak herhangi  $j \neq 1$  için  $b_j = b_1$  olduğunu göstermeliyiz. Eğer bu durum söz konusu değilse, 1. oyuncu teklifini azaltarak faydasını artırabilir. Dolayısıyla denge için tek aday  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  olur; ki burada  $b_1 \in [v_2, v_1]$ , tüm  $j$ 'ler için  $b_j \leq b_1$  ve herhangi  $j \neq 1$  için  $b_j = b_1$ . Böylece bu durumdaki tüm  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  değerleri Nash dengesidir.

#### ii. Kapalı Zarf İkinci Fiyat İhalesi

Şimdi de yine tam bilgi altında tek ve bölünmez bir obje için yapılan kapalı zarf ve ikinci fiyat ihalesi örneğine bakalım. Bu ihale türü daha çok bilinen adı ile *Vickrey* ihalesidir. Yine  $n$  sayıda alıcı olduğunu varsayıyoruz,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ . Her bir oyuncu kapalı zarf içinde tekliflerini sunar. Teklif verenlerin bu mala atfettikleri değerler sırasıyla  $v_1, v_2, \dots, v_n$  şeklindedir. Bu arada ihaleye katılanların teklif değerleri ise yine sırayla  $b_1, b_2, \dots, b_n$  ve teklif vektörünü  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  şeklinde ifade ediyoruz; tabii burada  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $v_i, b_i \in (0, \infty)$ . Yine ihaleye konu olan obje en yüksek teklifte bulunanın olacaktır. Fakat ödemeyi, en yüksek ikinci tekliften yapar.

İhaleyi kazanan alıcıya, malı tahsis eden fonksiyonu formel olarak şöyle ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned} x_i(b_1, b_2, \dots, b_n) &= 1, \text{ eğer } b_i > b_j, j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n \\ x_i(b_1, b_2, \dots, b_n) &= 0, \text{ aksi takdirde} \end{aligned}$$

Bu durumda her teklif verenin faydası şöyledir:

$$u_i(b_1, b_2, \dots, b_n) = x_i(b_1, b_2, \dots, b_n)(v_i - p_i((b_1, b_2, \dots, b_n))).$$

Burada  $p_i((b_1, b_2, \dots, b_n))$  kazananın ödediği miktarı göstermektedir. Bu ikinci fiyat ihalesi olduğu için ihaleyi kazanan en yüksek ikinci fiyattan ödeme yapar.

**Önerme 7.1** *Kapalı zarf ikinci-fiyat ihalesinde her alıcının mala verdiği değeri teklif etmesi, yani her alıcının dürüstçe kafasındaki değeri teklif etmesi,  $(b_1, b_2, \dots, b_n) = (v_1, \dots, v_n)$ , bu oyunun zayıf baskın strateji dengesidir.*

**İspat.** Birinci alıcıyı düşünelim. Mala verdiği değer  $v_1$  iken teklif değeri  $b_1$ 'dir. Diğer alıcılar ise  $b_2, \dots, b_n$  tekliflerinde bulunurlar ve mala verdikleri değerler ise sırasıyla  $v_2, \dots, v_n$ 'dir. Aşağıdaki durumlara tek tek bakalım:

*Durum 1:*  $v_1 \geq \bar{b}_{-i} = \max(b_2, \dots, b_n)$  durumunda aşağıdaki senaryolara bakalım:

i. Eğer  $v_1 \geq b_1 \geq \bar{b}_{-i}$  ise, bu şu anlama gelir 1. oyuncu ihaleyi kazanan oyuncudur; bu da faydasının  $u_1 = v_1 - \bar{b}_{-i} \geq 0$  olacağı anlamına gelir. Bu yüzden kafasındaki gerçek değeri teklif etmesi durumunda da,  $b_1 = v_1$ , aynı faydayı elde eder.

ii. Eğer  $v_1 \geq \bar{b}_{-i} > b_1$  ise, 1.oyuncunun ihaleyi kazanamadığı, dolayısıyla faydasının da  $u_1 = 0$  olduğu anlamına gelir. Fakat eğer kafasındaki değeri teklif etseydi,  $b_1 = v_1$ , ihaleyi kazanabilirdi ve faydası pozitif olabilirdi.

iii. Eğer  $b_1 > v_1 \geq \bar{b}_{-i}$  ise, bu durumda teklifte bulunmak zaten rasyonel değildir, çünkü teklifini  $b_1 = v_1$  düzeyinde tutması durumunda da ihaleyi kazanır. Kısaca eğer  $b_1 = v_1$  ise  $b_1 = v_1 \geq \bar{b}_{-i}$  olduğundan  $u_1 = v_1 - \bar{b}_{-i} \geq 0$  olur. Bu yüzden eğer  $b_1 = v_1$  fiyatı teklif edildiğinde  $u_1$  faydası elde edilen maksimum faydadır. Dolayısıyla  $b_1 = v_1$  stratejisi 1. oyuncu için zayıf baskın bir stratejidir. Başka bir deyişle, kafasındaki değerle aynı teklif teklifte bulunmak en az diğer tüm stratejiler kadar iyi bir stratejidir.

*Durum 2:*  $v_1 < \bar{b}_{-i} = \max(b_2, \dots, b_n)$ .

i. Eğer  $b_1 \geq \bar{b}_{-i} > v_1$  ise, bu şu anlama gelir 1. oyuncu ihaleyi kazanan oyuncudur, fakat elde ettiği fayda negatif olur,  $u_1 = v_1 - \bar{b}_{-i} \leq 0$ . Bu yüzden teklifini kafasındaki gerçek değere çekmelidir,  $b_1 = v_1$ , bu durumda faydası en azından sıfır olur,

ii. Eğer  $\bar{b}_{-i} > b_1 > v_1$  ise, 1. oyuncunun ihaleyi kazanamadığı, dolayısıyla faydasının da  $u_1 = 0$  olduğu anlamına gelir. Fakat kafasındaki gerçek değeri teklif etseydi,  $b_1 = v_1$ , faydası yine sıfır olurdu.

iii. Eğer  $\bar{b}_{-i} > v_1 > b_1$  ise, yine 1. oyuncu ihaleyi kaybedecektir, bu yüzden  $b_1 = v_1$  teklifinde bulunması rasyoneldir.

Sonuç olarak her durumda  $b_1 = v_1$  teklifi rasyoneldir. Yukarıdaki analizden hareketle şuunu elde ederiz:

$$u_1(v_1, b_2, \dots, b_n) \geq u_1(\hat{b}_1, \dots, b_n), \forall \hat{b}_1 \in S_1, \forall b_2 \in S_2, \dots, \forall b_n \in S_n.$$

Kısaca  $b_1 = v_1$  stratejisi 1. oyuncu için zayıf baskın stratejidir. Aynı argümanları kullanarak  $b_i = v_i$  durumunun diğer tüm oyuncular için de geçerli olduğu görülebilir.

Bu yüzden  $(v_1, \dots, v_n)$  zayıf baskın strateji dengesidir. Yani tam bilgi altında ikinci-fiyat kapalı zarf ihalesinde bir oyuncunun mala verdiği değere eşit olan teklifi, diğer tüm tekliflerine zayıf baskındır. ■

Bu durum, Tablo 7.4'te daha net görülebilir (tablo içindeki değerler  $i$  oyuncusunun her durum için fayda düzeyini göstermektedir). Her durumda  $v_i$  teklifinde bulunmak zayıf baskın stratejidir.

|                  |             | Durum 1              |                            |                      |
|------------------|-------------|----------------------|----------------------------|----------------------|
|                  |             | $\bar{b}_{-i} < b_i$ | $b_i < \bar{b}_{-i} < v_i$ | $\bar{b}_{-i} > v_i$ |
| $i$ 'nin teklifi | $b_i < v_i$ | $v_i - \bar{b}_{-i}$ | 0                          | 0                    |
|                  | $b_i = v_i$ | $v_i - \bar{b}_{-i}$ | $v_i - \bar{b}_{-i}$       | 0                    |

|                  |             | Durum 2                 |                            |                      |
|------------------|-------------|-------------------------|----------------------------|----------------------|
|                  |             | $\bar{b}_{-i} \leq b_i$ | $v_i < \bar{b}_{-i} < b_i$ | $\bar{b}_{-i} > b_i$ |
| $i$ 'nin teklifi | $b_i < v_i$ | $v_i - \bar{b}_{-i}$    | $v_i - \bar{b}_{-i} (< 0)$ | 0                    |
|                  | $b_i = v_i$ | $v_i - \bar{b}_{-i}$    | 0                          | 0                    |

**Tablo 7.4** İkinci fiyat ihalesinin soyut gösterimi

## 7.3 Bağımsız Özel Değerli İhaleler

Daha önceki bölümde herhangi bir  $i$  oyuncusunun kendi değeri ve diğer oyuncuların değerleri hakkında tam bilgiye sahip olduğunu varsaymıştık. Gerçekte bilgi biçimleri bu kadar mükemmel değildir. Çünkü genelde her oyuncunun kendi değeri hakkında diğerlerinin bilmediği, bağımsız özel bir bilgisi söz konusudur. Bağımsız özel değerli ihalelerin iki önemli özelliği vardır: (i) Teklif veren herhangi bir  $i$  kişinin bilgisi (sinyalinden) teklif veren diğer herhangi bir  $j$  kişinin bilgisinden (sinyal) bağımsızdır ve (ii) Teklif veren herhangi bir  $i$  kişinin mala verdiği değer, teklif veren diğer herhangi bir  $j$  kişinin verdiği değerden bağımsızdır. Şimdi bağımsız özel bilgi altında farklı ihale formatlarındaki davranışlara bakalım.

### 7.3.1 Birinci-Fiyat, Kapalı Zarf İhalesinde Fiyat Teklif Verme Davranışı

Bir risk-nötr satıcı (yani lineer fayda fonksiyonuna sahip) bölünmez bir malı yine kendisi gibi risk-nötr olan  $n$  sayıda alıcıya ihale yoluyla satmayı amaçlamaktadır. Herhangi bir  $i$  alıcısının mala verdiği  $v_i$  değeri  $[0, 1]$  aralığında değerler almaktadır. Bu değerler, yoğunluk fonksiyonu  $f_i(v_i)$  olan bir  $F_i(v_i)$  dağılım fonksiyonuna sahiptir. Alıcıların mala verdikleri değerlerin birbirinden bağımsız olduğunu varsayıyoruz. Yani her alıcı kendi değerini bilmekte fakat diğer oyuncu-

ların değerlerini tam olarak bilmemektedir. Sadece  $f_1, \dots, f_n$  yoğunluk fonksiyonları, satıcının ve alıcıların ortak bilgisi dahilindedir. Bir alıcı diğerlerinin tekliflerini kapalı zarf içinde iletmelerinden dolayı göremez. Bunun yerine optimal teklifini, diğerlerinin nasıl teklifte bulunacağını olasılık dağılımından hareketle belirlemeye çalışır. Böylece her oyuncu stratejik bir zeminde hareket etmek zorunda kalır. Yani her bir alıcının fiyat teklifi diğerlerinin fiyat tekliflerine bağlıdır ve her alıcı aynı anda teklifte bulunmaktadır.

Şimdi bu durumda herhangi bir  $i$  alıcısının nasıl teklifte bulunduğu bakalım. Alıcının ihaleye konu olan mala verdiği değer  $v_i$  olsun ve  $v_i$  veriyken, alıcının verdiği teklif değeri de  $b_i$  olsun. Teklif değeri genel olarak  $i$  alıcısının mala verdiği değere ( $v_i$ ) bağlı olduğundan  $b_i(v_i)$  diye ifade edebiliriz. Herhangi bir  $i$  alıcısının  $v_i \in [0, 1] \subset R_+$  aralığında değerlere sahip olabileceğini kabul edelim. Dolayısıyla  $i$  alıcısının teklif verme stratejisi bir teklif verme fonksiyonu olarak ifade edilebilir,  $b_i : [0, 1] \rightarrow R_+$ . Yani alıcı mala verdiği olası her değer için negatif-olmayan bir teklif vermektedir.

Oyuncuların teklif stratejilerini biraz tanıtalım. Örneğin, mala yüksek değer vermek teklifin de yüksek olacağı anlamına gelir. Bu yüzden ilgimizi kesin monoton artan teklif-verme fonksiyonlarıyla,  $b_i(v_i)$ , sınırlandıracağız. Diğer yandan, alıcıların ex-ante simetrik oldukları varsayıldığından aynı değere sahip alıcılar aynı teklifte bulunurlar. Bu varsayımlar, kesin artan teklif-verme fonksiyonlarında simetrik Nash dengesi sonucunu bulmamıza imkan verir.

İhalede teklif veren iki kişi olsun ve bunları  $i = 1, 2$  ile gösterelim. Teklif veren  $i$  kişisi için ihaleye konu olan malın değeri  $v_i$ 'dir. Eğer  $i$  oyuncusu malı alırsa ve  $p$  fiyatını öderse, elde ettiği fayda  $v_i - p$ 'dir. Teklif veren iki kişinin mala verdikleri değerlerin birbirinden bağımsız olduğunu ve  $[0, 1]$  aralığında homojen dağılım gösterdiğini kabul ediyoruz. Teklif değerleri negatif-olmayan değerler alır. Teklif verenler tekliflerini zarf içinde aynı anda sunar. Daha yüksek teklif veren malı alır ve teklif fiyatını öder. Kaybeden ise ne ödemedede bulunur ne de herhangi bir şey alır. Eşitlik halinde ise, kazanan yazı-tura ile belirlenir. Tüm bunlar oyuncuların ortak bilgisidir.

Bu problemi statik Bayesyen bir oyun olarak formüle etmek için, oyuncuların hareket kümelerini, tip kümelerini, inançlarını ve fayda fonksiyonlarını tanımlamamız gerekir. Herhangi bir  $i$  oyuncusunun hareketi negatif-olmayan teklif değerleridir,  $b_i$ . Bu oyuncunun tipi ise mala verdiği değerdir,  $v_i$ . Bu ihale oyununda,  $G = \{A_1, A_2; T_1, T_2; p_1, p_2; u_1, u_2\}$ , hareket kümesi  $A_i = [0, \infty]$  ve tip kümesi  $T_i = [0, 1]$  olarak tanımlanır. Mala verilen değerler birbirinden bağımsız olduğundan,  $i$  oyuncusu diğer oyuncunun değerinin  $[0, 1]$  aralığında homojen dağıldığına inanmaktadır. Son olarak  $i$  oyuncusunun fayda fonksiyonu şöyledir:

$$u_i(b_1, b_2; v_1, v_2) = \begin{cases} v_i - b_i, & \text{eğer } b_i > b_j \\ (v_i - b_i)/2, & \text{eğer } b_i = b_j \\ 0, & \text{eğer } b_i < b_j \end{cases}$$

Bu oyunun Bayesyen Nash dengesini bulmak için ise, oyuncuların strateji kümelerini elde etmekle başlayalım. Statik Bayesyen bir oyunda, daha önce belirtildiği gibi bir strateji, tiplerden hareketlere tanımlanan bir fonksiyondur. Yani  $i$  oyuncusunun stratejisi  $i$  oyuncusunun her tipine karşılık gelen teklif değerini tanımlayan bir fonksiyondur,  $b_i(v_i)$ . Bayesyen Nash dengesinde, 1.oyuncunun  $b_1(v_1)$  stratejisi, 2.oyuncunun  $b_2(v_2)$  stratejisine verdiği en iyi tepkiyken, 2.oyuncunun  $b_2(v_2)$  stratejisi, 1.oyuncunun  $b_1(v_1)$  stratejisine verdiği en iyi tepkidir. Formel olarak ifade edersek  $(b(v_1), b(v_2))$  strateji çifti Bayesyen dengedir ve her  $v_i$  değeri için,  $b_i$  teklif değeri aşağıdaki problemi çözen değerdir:

$$\max_{b_i} (v_i - b_i)F_i(b_i > b_j(v_j)) + \frac{1}{2}(v_i - b_i)F_i(b_i = b_j(v_j)) + 0.F_i(b_i < b_j(v_j)). \quad (7.1)$$

Bu problemi açık bir şekilde çözmek için, her iki oyuncu için de teklif değerleri  $(b_i)$  ile mala verilen değerler  $(v_i)$  arasındaki ilişkiyi tanımlamamız gerekir. Kolaylık olsun diye bu ilişkinin (yani stratejinin) lineer olduğunu kabul edelim. Varsayalım ki,  $j$  oyuncusu  $b_j(v_j) = a_j + c_j v_j$  stratejisine sahip. O zaman herhangi bir veri  $v_i$  için  $i$  oyuncusunun en iyi tepkisi aşağıdaki problemi çözen değerdir (bu yeni problem (7.1) probleminin yeni durumudur):

$$\max_{b_i} (v_i - b_i)F_i(b_i > a_j + c_j v_j). \quad (7.2)$$

Yukarıda (7.2)'de ifade edilen optimizasyon problemi, (7.1)'de verilen ifadede  $F_i(b_i = b_j(v_j)) = 0$  durumunun kullanılmasıyla elde edilmiştir. Çünkü  $b_j(v_j) = a_j + c_j v_j$  lineer ve  $v_j$  homojen dağılım gösterdiğinden dolayı,  $b_j$  de homojen dağılım gösterir. Bu yüzden bu eşitliğin gerçekleşme ihtimali sürekli bir dağılımda sıfırdır.  $i$  oyuncusunun  $j$ 'nin minimum teklif değerinin altında teklifte bulunması mantıklı değildir ve  $i$  oyuncusunun  $j$ 'nin maksimum değeri üstünde bir teklifte bulunması yine mantıklı değildir, dolayısıyla  $a_j \leq b_i \leq a_j + c_j$ .

Diğer yandan homojen dağılımdan hareketle  $i$  alıcısının verdiği teklifin  $j$  alıcısından büyük olma olasılığı şöyle ifade edilir:

$$F_i(b_i > a_j + c_j v_j) = F_i(v_j < \frac{b_i - a_j}{c_j}) = \frac{b_i - a_j}{c_j}. \quad (7.3)$$

Bu yüzden  $i$  oyuncusunun en iyi tepkisi, (7.3)'teki durum da dikkate alınarak (7.2)'den türetilir:

$$b_i(v_i) = \begin{cases} (v_i + a_j)/2, & \text{eğer } v_i \geq a_j \\ a_j, & \text{eğer } v_i < a_j \end{cases}$$

Eğer  $0 < a_j < 1$  ise,  $v_i$ 'nin bazı değerleri için  $v_i < a_j$  olur. Bu da  $b_i(v_i)$ 'nin lineer olmadığı anlamına gelir (gerçekte önce yatay sonra pozitif eğimlidir). Lineer bir denge aradığımız için  $0 < a_j < 1$  durumunu devre dışı bırakınız ve sadece  $a_j \geq 1$  ve  $a_j \leq 0$  durumları ile ilgileniriz. Fakat ilk durum (yani  $a_j \geq 1$ ) dengede gerçekleşemez çünkü yüksek değerli tipin, en az düşük değerli tip kadar teklifte

bulunmasının optimal olması için  $c_j > 0$  olması gerekir. Fakat  $a_j \geq 1$  durumu,  $b_j(v_j) \geq v_i$  olduğu anlamına gelir ki, bu optimal değildir (bunu anlamak için  $a_j \leq b_i \leq a_j + c_j$  koşulunu hatırlayınız). Dolayısıyla eğer  $b_i(v_i)$  lineerse,  $a_j \leq 0$  durumuna sahibiz demektir. Bu durumda  $b_i(v_i) = (v_i + a_j)/2$  olur, dolayısıyla  $a_i = a_j/2$  ve  $c_j = 1/2$ 'dir.

Aynı analizi  $i$  oyuncusunun  $b_i(v_i) = a_i + c_i v_i$  lineer stratejisine sahip olduğunu varsaydığımızda,  $j$  oyuncusu için de tekrarlayabiliriz. Benzer olarak şu sonuçları elde ederiz:  $a_i \leq 0$ ,  $a_j = a_i/2$  ve  $c_j = 1/2$ . Bu iki sonucu birleştirdiğimizde şunu elde ederiz:  $a_i = a_j = 0$  ve  $c_i = c_j = 1/2$ , yani  $b_i(v_i) = v_i/2$ . Böylece Bayesyen Nash dengesini bulmuş oluruz.

Bu durumu daha açık ve spesifik bir örnek üzerinden incelemeye devam edelim.

### Örnek 7.1

Oyuncuların ihaleye konu olan objenin değerinin  $\underline{v} \geq 0$  alt limiti ile  $\bar{v}$  üst limiti arasında olduğunu bildiklerini varsayalım. Aynı zamanda her alıcının bu objeye verdiği değer  $[\underline{v}, \bar{v}]$  aralığında homojen dağıldığını varsayalım. Yani kısaca  $i$  alıcısı,  $j$  alıcısının sahip olduğu  $v_j$  gerçekte değerinin, yoğunluk fonksiyonunun aşağıda verilen bir rassal değişken olduğunu biliyor:

$$f_i(v) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{v}-\underline{v}}, & \text{eğer } \underline{v} < v < \bar{v} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

Diğer bir değişle,  $i$  alıcısı  $v_j$  değerinin en fazla  $v$  kadar olma olasılığını şöyle hesaplamaktadır:

$$F_i(v_j \leq v) = \int_{-\infty}^v f(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{eğer } v < \underline{v} \\ \frac{v-\underline{v}}{\bar{v}-\underline{v}}, & \text{eğer } \underline{v} \leq v \leq \bar{v} \\ 1, & \text{eğer } v > \bar{v} \end{cases}$$

Alıcıların tekliflerinin aşağıda verilen optimal koşulu sağlaması gerektiği açıktır (her iki alıcının minimum teklif değerleri malın minimum ve maksimum değerleri arasında olmalıdır):

$$\underline{v} < b_2(\underline{v}) \leq \bar{v} \text{ ve } \underline{v} < b_1(\underline{v}) \leq \bar{v}.$$

Her iki alıcı da birbirinin değeri hakkında simetrik bilgiye sahip olduğundan, optimal stratejilerini seçerken aynı mantığı kullanırlar. Buna göre ihalede dengenin aşağıdaki gibi lineer ve simetrik olduğunu iddia edelim:

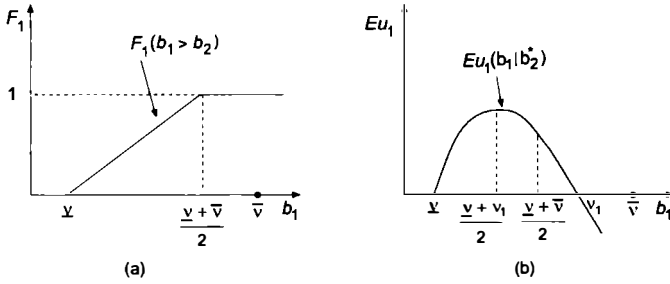
$$\begin{aligned} b_1^* &= \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}v_1, \\ b_2^* &= \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}v_2. \end{aligned}$$

Şimdi ihaledeki denge tekliflerinin yukarıda iddia ettiğimiz gibi olduğunu gösterelim. Oyun simetrik olduğundan, sadece bir alıcının problemiyle ilgilenmek yeterlidir. Bunun için de ilk önce 1. alıcının kazanma olasılığını bulmakla başlayalım. 1. alıcı için  $v_2$  değeri,  $[\underline{v}, \bar{v}]$  aralığında homojen dağılan rassal bir değişkendir. Bu yüzden 1. alıcının kazanma olasılığını şöyle ifade ederiz:

$$F_1(b_1 > b_2^*) = F_1(b_1 > \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}v_2)$$

$$F_1(v_2 < 2b_1 - \underline{v}) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } b_1 < \underline{v} \\ \frac{2(b_1 - \underline{v})}{\bar{v} - \underline{v}}, & \text{eğer } \underline{v} \leq b_1 < \frac{1}{2}(\underline{v} + \bar{v}) \\ 1, & \text{eğer } b_1 > \frac{1}{2}(\underline{v} + \bar{v}) \end{cases}$$

Bu fonksiyonun grafiği Şekil 7.1(a)'da gösterilmektedir.



Şekil 7.1

Diğer yandan  $v_2$  değeri homojen dağılıma sahip olduğundan her iki alıcının da aynı teklifi verme olasılığı sıfırdır:

$$F_1(b_1 = b_2) = F_1(b_1 = \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}v_2) = F_1(v_2 = 2b_1 - \underline{v}) = 0.$$

Bu da şunu ima eder:

$$Eu_1(b_1 | b_2^*) = (v_1 - b_1)F_1(b_1 > b_2^*) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } b_1 < \underline{v} \\ \frac{2(b_1 - \underline{v})(v_1 - b_1)}{\bar{v} - \underline{v}}, & \text{eğer } \underline{v} \leq b_1 < \frac{1}{2}(\underline{v} + \bar{v}) \\ v_1 - b_1, & \text{eğer } b_1 > \frac{1}{2}(\underline{v} + \bar{v}) \end{cases}$$

Bu fonksiyonunun grafiği ise Şekil 7.1(b)'de gösterilmektedir. Beklenen fayda fonksiyonu,  $Eu_1(b_1 | b_2^*)$ ,  $[\underline{v}, \frac{1}{2}(\underline{v} + \bar{v})]$  kapalı aralığında maksimum bir değer alır. Bu da fayda fonksiyonun  $b_1$  değerine göre birinci değer koşulundan bulunur:

$$Eu_1'(b_1 | b_2^*) = \frac{2}{\bar{v} - \underline{v}}(v_1 - 2b_1 + \underline{v}) = 0 \Rightarrow b_1^* = \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}v_1.$$

Simetrik yapıdan dolayı 2.oyuncunun teklif fonksiyonu da benzer yapıdadır,  $b_2^* = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}v_2$ . Sonuç olarak  $(b_1^*(v_2), b_2^*(v_1))$  lineer teklif verme çifti yukarıda iddia edildiği gibi bu ihalenin Nash dengesidir.

#### *Birinci-fiyat İhalelerinin Genel Modeli*

Yukarıda verilen lineer teklif verme stratejileri yerine daha genel bir teklif verme fonksiyonu ile önce iki kişilik bir ihaleye, sonra da  $n$  sayıda alıcının olduğu bir ihalede dengenin nasıl bulunacağına bakalım. Elde edeceğimiz sonucu şimdiden bir önerme olarak ifade edelim.

**Önerme 7.2** *Eğer  $n$  tane alıcı  $F$  gibi bir ortak dağılım fonksiyonundan çekilen bağımsız özel değerlere sahiplerse, birinci-fiyat kapalı zarf ihalesinde, ihale teklif denge fiyatı aşağıdaki gibidir:*

$$b^*(v) = \frac{1}{(F(v))^{n-1}} \int_v^v x(dF(x))^{n-1}.$$

**İspat.** Şimdi bu önermeyi ispatlayalım. Önce iki alıcının daha genel bir teklif fonksiyonuna sahip olduğu duruma bakalım. Oyuncuların teklif fonksiyonları,  $b(\cdot)$ , sürekli artan ve türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Veri  $v_i$  değeri için,  $i$  oyuncusunun optimal teklifi,  $b_i$ , aşağıdaki problemi çözen değerdir:

$$\max_{b_i} (v_i - b_i) F_i(b_i > b(v_j)) \quad (7.4)$$

Teklifi  $b_j$  olan  $j$  oyuncusunun mala verdiği değeri  $b^{-1}(b_j)$  şeklinde ifade edebiliriz. Yani eğer teklif fonksiyonu  $b_j = b(v_j)$  ise, ters fonksiyondan hareketle  $b_j$  teklifine karşılık gelen değeri,  $b^{-1}(b_j) = v_j$  şeklinde yazarsınız. Burada  $v_j$  değeri  $[0, 1]$  aralığında homojen dağılıma sahip olduğundan,  $i$  oyuncusunun  $j$  oyuncusundan daha yüksek bir teklif verme olasılığı şöyle ifade edilir:

$$F_i\{b_i > b(v_j)\} = F_i\{b^{-1}(b_i) > v_j\} = b^{-1}(b_i).$$

Dolayısıyla  $i$  oyuncusunun (7.4)'te ifade edilen optimizasyon probleminden şunu elde ederiz:

$$-b^{-1}(b_i) + (v_i - b_i) \frac{d}{db_i} b^{-1}(b_i) = 0.$$

Bu birinci dereceden koşul,  $i$  oyuncusunun veri  $v_i$  değeri için  $j$  oyuncusunun  $b(\cdot)$  stratejisine verdiği en iyi tepki fonksiyonunun örtük halidir. Eğer  $b(\cdot)$  stratejisi simetrik Bayesyen Nash dengesi ise birinci dereceden koşulun verdiği çözüm  $b(v_i)$  olmalıdır. Yani  $i$  oyuncusunun mala verdiği olası her değer için,  $i$  oyuncusu  $j$  oyuncusunun bu stratejiyi oynadığını veri aldığı anda  $b(\cdot)$  stratejisinden sapmayacaktır. Bu gerekliliği empoze ettiğimizde yani  $b_i = b(v_i)$ 'yi birinci dereceden koşulda yerine koyduğumuzda, şunu elde ederiz:

$$-b^{-1}(b_i(v_i)) + (v_i - b_i(v_i)) \frac{d}{db_i} b^{-1}(b_i(v_i)) = 0.$$

Dikkat edilirse,  $b^{-1}(b(v_i))$  basitçe  $v_i$ 'dir. Dahası  $d\{b^{-1}(b(v_i))\}/db_i = 1/b'(v_i)$ 'dir. Yani  $d\{b^{-1}(b_i)\}/db_i$  ifadesi bize  $i$  oyuncusunun bir birim teklif artışında bulunmak için değerinden ne kadar değişiklik yapması gerektiğini göstermektedir.  $b'(v_i)$  ise verilen teklifin, değerdeki bir birim değişime göre nasıl değiştiğini gösterir. Yani  $b(\cdot)$  değeri aşağıda verilen birinci dereceden diferansiyel denklemi sağlamalıdır:

$$-v_i + (v_i - b(v_i)) \frac{1}{b'(v_i)} = 0.$$

Bu denklemi yeniden düzenleyerek ifade edelim:

$$b'(v_i)v_i + b(v_i) = v_i. \quad (7.5)$$

(7.5) diferansiyel denkleminin sol-tarafı kolayca görülebileceği gibi  $d\{b(v_i)v_i\}/dv_i$  ifadesidir. Bu yüzden denklemin her iki tarafının integralini alırsak şunu elde ederiz:

$$b(v_i)v_i = \frac{1}{2}v_i^2 + C.$$

Burada  $C$  integral katsayısıdır.  $C$  değerini elemine etmek için bir sınır koşulu tanımlamalıyız. Bunun için de şunu kullanabiliriz: Hiçbir oyuncu değerinden daha fazla bir teklifte bulunmasın. Yani her  $v_i$  için  $b(v_i) \leq v_i$  olmasını istiyoruz ve özellikle  $b(0) \leq 0$  olmasını istiyoruz; teklifler negatif olamayacağından,  $b(0) = 0$  olur. Dolayısıyla  $b(v_i) = v_i/2$  olur.

Şimdi yine genel bir teklif verme fonksiyonu için oyuncu sayısının  $n$  olduğu bir ihalede alıcıların davranışlarına bakalım. Daha önce olduğu gibi,  $i$  oyuncusunun  $v_i$  değeri için teklifi  $b_i = b_i(v_i)$  olsun. Simetrik bir dengede, her  $i$  oyuncusu için  $b_i = b$  durumuna sahip oluruz. Yine teklif verme fonksiyonunun,  $b(\cdot)$ , monoton artan bir fonksiyon olduğunu varsayalım (daha yüksek değerlere sahip olanlar daha yüksek teklifte bulunurlar).

Her oyuncu diğer oyuncuların değerleri hakkında kesin bilgiye sahip olmadığından, teklif verme fonksiyonunu ( $b(\cdot)$ ) bilse bile sunacağı teklif konusunda belirsizdir. Olasılık fonksiyonu,  $G(b)$ , veri  $b$  için her oyuncunun teklifinin en fazla  $b$  olma olasılığını göstermektedir. Teklif fonksiyonu  $b$ 'nin artan bir fonksiyon olduğu varsayımı altında, bir oyuncunun verdiği teklifin en fazla  $b$  olması, bu oyuncunun değerinin en fazla  $b^{-1}(b)$  olduğu anlamına gelir. Buna göre  $G(b)$  olasılık fonksiyonunu şöyle ifade edebiliriz:

$$G(b) = F\{v \leq b^{-1}(b)\} = F(b^{-1}(b)).$$

Teklifi  $b$  olan ve  $v$  değerine sahip bir oyuncunun beklenen faydası, diğer tüm oyuncular  $b(\cdot)$  teklif verme fonksiyonuna göre davrandıkları zaman şöyledir:

$$(v - b)F\{b \text{ en yüksek teklif}\}. \quad (7.6)$$

Yukarıda (7.6)'da ifade edilen  $F\{b \text{ en yüksek teklif}\}$  olasılığı, diğer  $(n-1)$  alıcının

tüm değerlerinin  $b^*$ 'den az olma olasılığına eşittir, bu da  $(G(b))^{n-1}$  demektir. Dolayısıyla (7.6) ifadesinde belirtilen beklenen fayda şöyle yazılabilir:

$$(v - b)(G(b))^{n-1}. \quad (7.7)$$

Herhangi bir oyuncunun her tipi için en iyi tepki fonksiyonunu düşünelim. Diğer tüm oyuncuların  $b(\cdot)$  teklif verme fonksiyonu veri alındığında, değeri  $v$  olan bir oyuncunun optimal teklifi  $b^*(v)$  ile gösterilsin. Bu teklif de (7.7) ifadesindeki beklenen faydayı maksimize eden değerdir (yani (7.7)'de ifade edilen beklenen faydanın  $b^*$ 'ye göre türevinin sıfır olmasını sağlayan değerdir):

$$-G(b^*)^{n-1} + (v - b^*)(n - 1)G(b^*)^{n-2}G'(b^*) = 0. \quad (7.8)$$

Bu ihalede  $(b^*, \dots, b^*)$  teklif profilinin Nash dengesi olması için, her oyuncu  $b^*(v)$  tepki fonksiyonuna göre hareket ettiği zaman, her  $v$  değerine sahip bir oyuncunun en iyi tepkisi tam anlamıyla  $b^*(v)$  olmak zorundadır.

Şimdi  $G(b)$  tanımından hareketle,

$$G(b^*(v)) = F(b^{*-1}(b^*(v))) = F(v)$$

ilişkisini türetebiliriz ve herhangi bir  $b$  için şunu yazabiliriz:

$$G'(b) = F'(b^{-1}(b))(b^{-1})'(b) = \frac{F'(b^{-1}(b))}{b'(b^{-1}(b))}.$$

Dolayısıyla  $G'(b^*(v)) = F'(v)/b^{*'}(v)$ 'dir. Yani (7.8) denkleminde  $b^*$  denge teklif verme fonksiyonunun aşağıdaki denklemi sağlaması gerektiğini elde ederiz:

$$-(F(v))^{n-1} + (v - b^*(v))(n - 1)(F(v))^{n-2}F'(v)/b^{*'}(v) = 0$$

veya

$$b^*(v)(F(v))^{n-1} + (n - 1)b^*(v)(F(v))^{n-2}F'(v) = (n - 1)v(F(v))^{n-2}F'(v).$$

Bu diferansiyel denklemin sol tarafı, dikkat edilirse  $b^*(v)(F(v))^{n-1}$  ifadesinin  $v$ 'ye göre türevidir. Yani her iki tarafın da integralini alırsak şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} b^*(v)(F(v))^{n-1} &= \int_v^v (n - 1)x(F(x))^{n-2}F'(x)dx \\ &= v(F(v))^{n-1} - \int_v^v (F(x))^{n-1}dx. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Dikkat edilirse, ikinci satır kısmi integral metodunu kullanarak elde ettik. Dolayısıyla

(7.9) denklemini düzenlersek şunu elde ederiz:

$$b^*(v) = v - \frac{\int_v^v (F(x))^{n-1} dx}{(F(v))^{n-1}}.$$

Bu ifadeyi de daha derli toplu ifade edersek:

$$b^*(v) = \frac{1}{(F(v))^{n-1}} \int_v^v x (dF(x))^{n-1}. \quad (7.10)$$

■

### 7.3.2 Hollanda İhalesinde Teklif Verme Davranışı

Hatırlanacağı gibi Hollanda ihalesi aşağı doğru, birinci fiyat ve sözlü bir ihaledir. Bu yüzden Hollanda ihalesinde, her alıcının vereceği tek bir karar vardır: Malı almak için hangi fiyatta elimi kaldırmalıyım? En yüksek fiyatı veren ihaleyi kazanır ve bu fiyatı öder. Sonuç olarak, teklif verme yerine fiyatı koyarsak görürüz ki bu ihale birinci-fiyat ihalesine denk bir ihaledir. Sonuç olarak:

**Önerme 7.3** *Eğer  $n$  sayıda alıcı ortak bir  $F$  dağılım fonksiyonundan çekilen bağımsız özel değerlere sahipse, Hollanda ihalesindeki denge birinci-fiyat ihalesindeki fiyatla aynıdır:*

$$b^*(v) = \frac{1}{(F(v))^{n-1}} \int_v^v (F(x))^{n-1} dx.$$

Yani bir alıcının değeri  $v$  ise, bu Hollanda ihalesinin simetrik Nash dengesi  $b^*(v)$  demektir. Dahası bu, tek simetrik Nash dengesidir. Buradan hareketle birinci-fiyat ve Hollanda ihaleleri satıcı için ex-post (yani gerçekleşen  $v_1, \dots, v_n$  değerleri için ) aynı geliri sağlar.

### 7.3.3 İkinci-Fiyat Kapalı Zarflı İhalesinde Teklif Verme Davranışı

Şimdi de bağımsız özel değerlerin olduğu bir ihale ortamında ikinci-fiyat teklif-verme davranışını inceleyelim. Alıcıların değerleri belirli bir yoğunluk fonksiyonundan gelmektedir.

Herhangi  $v_i$  değerli bir  $i$  alıcısı düşünelim.  $\bar{b}_{-i}$  diğer alıcılar tarafından sunulan en yüksek teklif değeri olsun.  $\bar{b}_{-i}$  değeri  $i$  alıcısı tarafından bilinmez çünkü teklif zarfı içinde sunulmaktadır. Eğer  $i$  alıcısı ihaleyi kazanan kişi olsaydı, bu onun en yüksek teklifi verdiği anlamına gelirdi. Dolayısıyla  $\bar{b}_{-i}$  teklifi de en yüksek-ikinci teklif olurdu. Sonuç olarak  $i$  alıcısı ihaleye konu olan mal için  $\bar{b}_{-i}$  kadar ödemede bulunacaktır. Yani aslında  $i$  alıcısının ödeyebileceği maksimum fiyat, diğer alıcıların sunduğu maksimum tekliftir,  $\bar{b}_{-i}$ .

Burada  $i$  alıcısının mala verdiği değer  $v_i$  olduğundan, eğer bu değer diğerlerinin en yüksek tekliflerinden yüksek ise ihaleyi kesin kazanır, yani  $v_i > \bar{b}_{-i}$ ; fakat eğer

$v_i < \bar{b}_{-i}$  ise kesin kaybeder; ve eğer  $v_i = \bar{b}_{-i}$  ise kazanmakla kaybetmek arasında kayıtsız kalır. Burada sorun,  $i$  alıcısının  $\bar{b}_{-i}$  değerini bilmemesi durumunda,  $v_i > \bar{b}_{-i}$  olduğunda kazanmayı,  $v_i < \bar{b}_{-i}$  olduğunda ise kaybetmeyi garanti altına alacak şekilde teklifte bulunup bulunmayacağıdır? Bunu da ancak kafasındaki  $v_i$  değerini teklif etmekle yapabilir.

Dolayısıyla eğer  $v_i$  teklifi en yüksek teklifse  $i$  alıcısı kazanır ve elde ettiği fayda pozitifdir,  $v_i - \bar{b}_{-i} > 0$ . Fakat eğer kaybederse, yani  $v_i < \bar{b}_{-i}$  ise, alacağı fayda sıfır olur. Sonuç olarak, diğer alıcıların tekliflerinden bağımsız olarak kendi değerini teklif etmesi ona en yüksek faydayı sağlar. Çünkü kendi değerinin altında teklifte bulunmas, ihaleyi kazanabileceksen kaybetmesine ve kendi değerinin üstünde bir teklifte bulunması ise ihaleyi kazanma riskinin (bu durumda fayda negatif) doğmasına neden olacaktır. Kısaca şu önermede bulunabiliriz.

**Önerme 7.4** *Eğer  $n$  sayıda alıcı ortak bir  $F$  dağılım fonksiyonundan çekilen bağımsız özel değerlere sahipse, her alıcının kendi değerini teklif etmesi, ikinci-fiyat ve kapalı-zarf ihalesindeki tek zayıf baskın strateji dengesidir.*

### 7.3.4 İngiliz İhalesinde Teklif Verme Biçimi

Daha önce gördüğümüz ihalelerin tersine, İngiliz ihalesinde bir alıcının vereceği çok sayıda karar mevcuttur. Örneğin fiyat düşük olduğunda, diğer tüm oyuncular henüz ihaleden çekilmemişken, hangi fiyattan çekilmek gerektiğine karar vermek zorundadır. Diğer bir alıcı ihaleden çekildiğinde hangi fiyattan çekileceğine karar vermek zorundadır ve bu böyle devam eder gider. Buna rağmen, İngiliz ve ikinci-fiyat ihaleleri arasında yakın bir ilişki vardır.

İngiliz ihalesinde, ikinci-fiyat ihalesinde olduğu gibi, bir alıcının baskın stratejisi fiyatın mala verilen değer ile aynı olması durumunda ihaleden çekilmesidir. Bu durum ihalede kalan diğer alıcılardan bağımsız olarak ortaya çıkar. Bunun sebebi açıktır: Herhangi bir  $i$  alıcısı sahip olduğu  $v_i$  değeri ile, oyunun tarihi ve mevcut fiyatın  $p < v_i$  olduğu veri aldığı anda, ihalede biraz daha kalmanın yani ihale fiyatının  $v_i$  değerini yakalamasını beklemenin çekilmekten daha iyi olduğunu düşünür. Böyle yapmakla en kötü ihtimalle olacak şey, fiyat gerçekten kendi değerine ulaştığında çekilmektir. Bu durumda da faydası sıfır olacaktır. Yani  $i$  alıcısı ihalede kalarak daha iyi bir durumda olabilecektir çünkü  $v_i$  değerinden daha düşük bir fiyatla malı alma imkanına sahip olacak ve pozitif bir fayda elde edecektir. Kısaca şu önermede bulunabiliriz.

**Önerme 7.5** *İngiliz ihalesinde  $n$  tane alıcının sahip olduğu bağımsız özel değerler,  $F$  gibi ortak bir dağılımdan geliyorsa, herhangi bir  $i$  alıcısının teklifi, ihale konusu olan objeye verdiği değer ( $v_i$ ) ile aynı olduğunda alıcının ihaleden çekilmesi zayıf baskın teklif verme stratejisidir.*

Açıkça bu tanımdan hareketle, mala en yüksek değeri veren alıcı ihaleyi kazanır. Bu alıcının ödeyeceği fiyat ise ihalede en son kalan diğer rakibin ödeyeceği fiyattır.

Kalan son kişi de mala ikinci en yüksek değeri veren alıcıdır. Bu alıcı da diğer tüm alıcılar gibi, fiyat malın değerine vardığında ihaleden çekilenlerden biridir. Sonuç olarak, ihaleyi mala en yüksek değeri veren alıcı kazanır ve ödediği fiyat ise ikinci en yüksek değerdir. Bu yüzden İngiliz ihalesinin sonucu ikinci fiyat ihalesi ile aynıdır. Dolayısıyla özellikle İngiliz ve ikinci-fiyat ihaleleri bir satıcı için aynı geliri kazandırır.

## 7.4 İhalelerde Gelir Karşılaştırmaları

Bu bölümde yukarıda verdiğimiz ihale türlerinde ortaya çıkan satıcı gelirlerini karşılaştıralım. Daha önce belirttiğimiz gibi ikinci-fiyat ihalesinde satıcıya en yüksek ikinci fiyat ödendiğinden, bu ihalenin satıcı için birinci-fiyat ihalesine göre daha düşük bir gelir yaratacağı beklenebilir. Fakat gerçekte böyle midir? Buna bir bakalım.

İkinci-fiyat ihalesinde satıcı için daha düşük bir gelir beklentisi aslında önemli bir konunun ihmal edilmesinden kaynaklanmaktadır: Her iki ihalede alıcılar farklı davranır. Birinci-fiyat ihalesinde alıcı ihaleyi kazanma olasılığını artırmak için fiyatını yukarı taşımak ve kazandığında ise daha düşük bir ödemede bulunmak için de teklif fiyatını aşağı çekmek gibi bir motivasyona sahiptir. İkinci-fiyat ihalesinde ise bu ikinci etki yoktur. Çünkü alıcı ihaleyi kazandığı zaman, kendi teklifinden bağımsız bir ödemede bulunur. Böylece alıcılar ikinci-fiyat ihalelerinde birinci-fiyat ihalelerine göre daha agresif teklifte bulunurlar. Bu yüzden, ikinci-fiyat ihalesi satıcı için, birinci-fiyat ihalesine göre daha fazla kazanç sağlama şansına bile sahiptir. Bu yüzden alıcı teklif verme davranışının ihale formatıyla değiştiğini kabul ettiğimizde, hangi ihalenin satıcıya daha fazla gelir sağlayacağı sorusunun cevabı açık değildir.

Birinci-fiyat ve Hollanda ihaleleri ve ikinci-fiyat ve İngiliz ihaleleri de aynı ex-post gelir (ihale sonrası gelir) sağladıklarından dolayı, geriye birinci ve ikinci-fiyat ihalelerinin karşılaştırılması kalır. Açıkça, bu iki ihale türü ex-post anlamda aynı geliri üretmek zorunda değildirler. Örneğin, en yüksek değer çok yüksekse ve ikinci-en yüksek değer de oldukça düşükse, birinci-fiyat ihalesi ikinci fiyat ihalesinden daha fazla gelir sağlayacaktır. Diğer yandan, birinci ve ikinci en yüksek değerler birbirine yakın olduklarında, ikinci-fiyat ihalesi birinci-fiyat ihalesinden daha fazla gelir sağlar.

Tabii buradaki problem satıcının, alıcıların mala verdikleri değerleri bilmemesi ve dolayısıyla kendisine en yüksek geliri sağlayacak ihalenin hangisi olacağını bilememesidir. Fakat alıcıların tekliflerinin mala verdikleri değerlerin bir fonksiyonu olduğunu ve alıcıların değerlerinin dağılımını bilmek, satıcının her ihaleden beklenen geliri hesaplamasına imkan verir. Yani soru hangi ihalenin en yüksek beklenen geliri sağladığıdır; birinci veya ikinci-fiyat ihalesi mi?

Birinci ve ikinci fiyat ihalelerini karşılaştırmak için burada alıcıların simetrik olduğu varsayımında bulunuyoruz. Daha önce ifade ettiğimiz gibi, her alıcının ortak yoğunluk fonksiyonu  $f(\cdot)$  ve ilgili dağılım fonksiyonu  $F(\cdot)$ 'dir. İlk önce

birinci-fiyat ihalesinden ortaya çıkan beklenen geliri  $R_1$  ile gösterelim. Bu ihalede en yüksek teklifi veren ihaleyi kazanacağından ve en yüksek değere sahip alıcı en yüksek teklifi sunacağından dolayı, eğer  $v$  değeri  $n$  sayıda alıcı arasında en yüksek değer ise, satıcının geliri  $b(v)$  olacaktır. Eğer en yüksek  $v$  değeri,  $g(v)$  yoğunluk fonksiyonuna göre dağılım gösteriyorsa, satıcının beklenen geliri şöyle yazılabilir:

$$R_1 = \int_0^1 b(v)g(v)dv.$$

Alıcı sayısının  $n$  olduğu bir ihalede en yüksek değerin  $v$  olma olasılığı  $F^n(v)$ 'dir. Dağılım fonksiyonunun türevi bize yoğunluk fonksiyonunu verdiğiinden,  $[F^n(v)]' = n f F^{n-1}$ 'dir. Bu yüzden yoğunluk fonksiyonu  $f$  ve dağılım fonksiyonu  $F$  olan  $n$  tane bağımsız rassal değişkenin maksimum değerlerinin yoğunluk fonksiyonu  $g = n f F^{n-1}$  olduğundan, yukarıdaki beklenen gelir şöyle yazılabilir:

$$R_1 = n \int_0^1 b(v)f(v)F^{n-1}(v)dv. \quad (7.11)$$

Daha önce gördüğümüz gibi, ikinci-fiyat ihalesinde, her teklif veren kişi kafasındaki değeri teklif ettiğinden, satıcı  $n$  sayıdaki alıcı arasında ikinci-en yüksek değeri alır. Böylece eğer  $h(v)$  ikinci-en yüksek değerlerin yoğunluk fonksiyonu ise satıcının ikinci-fiyat ihalesinde beklenen geliri,  $R_2$  ise şöyle yazılabilir:

$$R_2 = \int_0^1 v h(v). \quad (7.12)$$

Burada eğer  $f(v)$  yoğunluk fonksiyonuna olasılık gibi davranırsak, belirli bir alıcının,  $v$  değerine sahip olma olasılığını  $f(v)$  diye düşünebiliriz. Diğer yandan, kalan diğer  $n-1$  alıcıdan sadece birinin değerinin bu değerden,  $v$ , büyük olma olasılığının  $(n-1)F^{n-2}(v)(1-F(v))$  olduğuna dikkat ediniz. Sonuç olarak bu belirli değerin  $v$  olma ve bunun da ikinci-en-yüksek değer olma olasılığı  $(n-1)f(v)F^{n-2}(v)(1-F(v))$ 'dir. Bu arada  $n$  tane alıcı olduğundan ikinci en yüksek değerin  $v$  olma olasılığı  $n(n-1)f(v)F^{n-2}(v)(1-F(v))$  olur. Bu yüzden ortak yoğunluk fonksiyonu  $f$  ve dağılım fonksiyonu  $F$  olan  $n$  tane bağımsız rassal değişkenin ikinci en yüksek değerlerinin yoğunluk fonksiyonu,  $h = n(n-1)F^{n-2}f(1-F)$  olduğundan yukarıdaki beklenen gelir fonksiyonu (7.12) şöyle yazılabilir:

$$R_2 = n(n-1) \int_0^1 v F^{n-2}(v)f(v)(1-F(v))dv. \quad (7.13)$$

Şimdi de bu iki ihaledeki beklenen gelirleri karşılaştıralım. (7.11) ve (7.13) den-

klemlerinden hareketle ve (7.10) ifadesini de kullanarak, aşağıdaki ilişkileri türetiriz:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= n \int_0^1 \left[ \frac{1}{F^{n-1}(v)} \int_0^v x dF^{n-1}(x) \right] f(v) F^{n-1}(v) dv \\
 &= n(n-1) \int_0^1 \left[ \int_0^v x F^{n-2}(x) f(x) dx \right] f(v) dv \\
 &= n(n-1) \int_0^1 \int_0^v [x F^{n-2}(x) f(x) f(v)] dx dv \\
 &= n(n-1) \int_0^1 \int_x^1 [x F^{n-2}(x) f(x) f(v)] dv dx \\
 &= n(n-1) \int_0^1 x F^{n-2}(x) f(x) (1 - F(x)) dx = R_2.
 \end{aligned}$$

Burada dördüncü eşitlik integral almada sıranın değiştirilmesinden (yani  $dx dv$ 'den  $dv dx$ 'e yapılan değişiklikten) türetilmiştir. Son eşitlik de (7.13) denkleminde türetilmiştir.

Bu durumu somutlaştırmak için her alıcının değerinin  $[0, 1]$  aralığında homojen (uniform) dağıldığı, bu yüzden de  $F(v) = v$  ve  $f(v) = 1$  olduğu bir durum düşünelim. Bu durumda birinci-fiyat ihalesinde beklenen gelir şudur:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= n \int_0^1 b(v) f(v) F^{n-1}(v) dv = n \int_0^1 \left[ v - \frac{v}{n} \right] v^{n-1}(v) dv \\
 &= n(n-1) \int_0^1 v^n(v) dv = \frac{n-1}{n+1}.
 \end{aligned}$$

İkinci-fiyat ihalesinde ortaya çıkan beklenen değer ise şöyle ifade edilir:

$$\begin{aligned}
 R_2 &= n(n-1) \int_0^1 v F^{n-2}(v) f(v) (1 - F(v)) dv \\
 &= n(n-1) \int_0^1 v^{n-1} (1 - v) dv \\
 &= n(n-1) \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] = \frac{n-1}{n+1}.
 \end{aligned}$$

Kısaca görüldüğü gibi, birinci ve ikinci-fiyat ihaleleri aynı düzeyde beklenen gelir yaratırlar. Bu durum, alıcıların mala verdikleri değerlerin ortak dağılımından bağımsızdır. Yani dağılım ne olursa olsun her iki ihale de aynı geliri üretir. Sonuç olarak: Eğer  $n$  sayıda alıcının bağımsız özel değerleri ortak bir dağılımdan ( $F$ ) çekilirse, dört ihale türü de (birinci-fiyat, ikinci-fiyat, Hollanda ve İngiliz ihaleleri) satıcı için aynı düzeyde beklenen gelir üretir.

## 7.5 Çifte İhale

Şu ana kadar gördüğümüz bağımsız özel değerli ihalelerde sadece alıcılar birbirlerinin değerleri hakkında eksik bilgiye sahipti. Şimdi hem alıcının hem de satıcının kendi değerleri hakkında özel bilgiye sahip olduğu bir durumla ilgileneceğiz.

Çifte ihale denen bu ihalede hem alıcı hem de satıcı karşılıklı olarak aynı anda teklifte bulunurlar. Satıcı ve alıcı eş anlı olarak sırasıyla  $p_s$  ve  $p_b$  fiyatlarını sunar. Eğer alıcının sunduğu fiyat satıcınınkinden yüksek ise,  $p_b \geq p_s$ , ticaret gerçekleşir ve uygulanan fiyat iki fiyatın ortalaması şeklindedir yani  $p = (p_b + p_s)/2$ ; eğer  $p_b < p_s$  ise ticaret gerçekleşmez.

Alıcının, satıcının malı için biçtiği değer  $v_b$  iken satıcının kendi malına verdiği değer ise  $v_s$ 'dir.  $v_b$  ve  $v_s$  değerleri özel bilgidir ve  $[0, 1]$  aralığında bağımsız ve homojen (uniform) dağılımlardan geldikleri varsayılmaktadır. Eğer alıcı malı  $p$  fiyatına alırsa, alıcının faydası  $v_b - p$ ; eğer ticaret gerçekleşmezse alıcının faydası sıfırdır. Eğer satıcı malını  $p$  fiyatına satarsa, satıcının faydası  $p - v_s$ 'dir. Fakat ticaret gerçekleşmezse satıcının bu durumdaki faydası sıfırdır.

Bu statik Bayesyen oyunda, alıcının  $p_b(v_b)$  stratejisi alıcının mala verdiği her değer için teklif edeceği fiyatı belirler. Benzer şekilde, satıcının stratejisi  $p_s(v_s)$ , satıcının mala verdiği her değer için talep ettiği fiyatı belirler. Şimdi  $\{p_b(v_b), p_s(v_s)\}$  strateji çiftinin bir Bayesyen Nash dengesi olduğunu gösterelim.

Her  $v_b \in [0, 1]$  için  $p_b(v_b)$  aşağıdaki problemi çözen değerdir:

$$\max_{p_b} \left[ v_b - \frac{p_b + E(p_s(v_s) \mid p_b \geq p_s(v_s))}{2} \right] \Pr\{(p_b \geq p_s(v_s))\}, \quad (7.14)$$

burada  $E(p_s(v_s) \mid p_b \geq p_s(v_s))$  satıcının fiyat talebinin alıcının teklif fiyatından ( $p_b$ ) daha az olma koşulu altında, satıcının talep edeceği beklenen fiyatı gösterirken,  $\Pr\{(p_b \geq p_s(v_s))\}$  ifadesi ise satıcının fiyat talebinin alıcının teklif fiyatından ( $p_b$ ) daha az olma olasılığını gösterir.

Her  $v_s \in [0, 1]$  için  $p_s(v_s)$  ise aşağıdaki problemi çözen değerdir:

$$\max_{p_s} \left[ \frac{p_s + E(p_b(v_b) \mid p_b(v_b) \geq p_s)}{2} - v_s \right] \Pr\{p_b(v_b) \geq p_s\}, \quad (7.15)$$

burada  $E(p_b(v_b) \mid p_b(v_b) \geq p_s)$ , alıcının yapacağı teklifin satıcının talep ettiği fiyattan ( $p_s$ ) büyük olduğu bilindiğinde, alıcının beklenen fiyat teklifini gösterirken,  $\Pr\{p_b(v_b) \geq p_s\}$  ifadesi alıcının yapacağı teklifin satıcının talep ettiği

fiyattan ( $p_s$ ) büyük olma olasılığını gösterir.

Bu oyunun çok sayıda Bayesyen Nash dengesi vardır. Fakat ticaretin tek bir fiyatta gerçekleştiğini (eğer gerçekleşirse) yani ihalenin tek-fiyat dengesinin olduğunu düşünelim. Herhangi  $x \in [0, 1]$  için alıcının stratejisi, eğer  $v_b \geq x$  ise  $x$  teklifinde bulunmak, aksi takdirde sıfır teklifinde bulunmak olsun. Satıcının stratejisi ise eğer  $v_s < x$  ise  $x$  talep etmek, aksi takdirde 1 talebinde bulunmak olsun. Alıcının stratejisi veri alındığında, satıcının seçimi  $x$  değerinde ticaret yapmayı tercih etmek veya etmemek şeklinde olacaktır. Böylece satıcının stratejisi alıcıya verilmiş en iyi tepkidir çünkü  $x$ 'de ticaret yapmayı yapmamaya tercih eden satıcılar böyle davranırlar. Benzer olarak alıcının stratejisi satıcıya verilen en iyi tepkidir. Böylece bu stratejiler gerçekten bir Bayesyen Nash dengesidir.

Şimdi de çifte ihalenin lineer Bayesyen Nash dengesini türetilim. Fakat şunu unutmayalım: Lineer Bayesyen Nash dengesinin olması için oyuncuların stratejilerinin lineer olması gerekmez. Lineer dengenin ilginç bazı özelliklerinden dolayı dengenin lineer olması yeterlidir.

Satıcının stratejisi  $p_s(v_s) = a_s + c_s v_s$  olsun ve  $p_s$  değeri  $[a_s, a_s + c_s]$  aralığında homojen dağılsın. Dolayısıyla (7.14) aşağıdaki gibi olur:

$$\max_{p_b} \left[ v_b - \frac{1}{2} \left\{ p_b + \frac{a_s + p_b}{2} \right\} \right] \frac{p_b - a_s}{c_s}.$$

Bu ifadenin birinci dereceden koşulu ise aşağıdaki ilişkiyi verir:

$$p_b = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{3}a_s. \quad (7.16)$$

Eğer satıcı lineer bir strateji izlerse alıcının en iyi tepki fonksiyonu da lineer olacaktır. Benzer olarak, alıcının stratejisi  $p_b(v_b) = a_b + c_b v_b$  olsun ve  $p_b$  değeri de  $[a_b, a_b + c_b]$  aralığında homojen dağılsın. Böylece (7.15) şuna dönüşür:

$$\max_{p_s} \left[ \frac{1}{2} \left\{ p_s + \frac{p_s + a_b + c_b}{2} \right\} - v_s \right] \left( \frac{a_b + c_b - p_s}{c_b} \right).$$

Bu ifadenin de birinci dereceden koşulu şu ilişkiyi verir:

$$p_s = \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{3}(a_b + c_b). \quad (7.17)$$

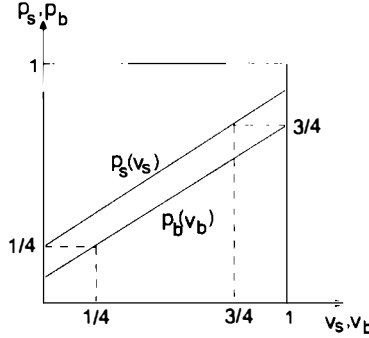
Dolayısıyla eğer alıcı lineer bir strateji izlerse, satıcının da en iyi tepkisi lineer olacaktır. Eğer oyuncuların lineer stratejileri birbirine en iyi tepkilerse, (7.16) denkleminde görüleceği gibi  $c_b = 2/3$  ve  $a_b = a_s/3$ , ve (7.17) denkleminde görüleceği gibi  $c_s = 2/3$  ve  $a_s = (a_b + c_b)/3$ 'tür. Bu yüzden lineer denklem

stratejileri şöyledir:

$$p_b(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12}, \quad (7.18)$$

$$p_s(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{4}. \quad (7.19)$$

Bu lineer denklem stratejileri Şekil 7.2'de gösterilmektedir.



Şekil 7.2

Çifte ihalede ticaret ancak  $p_b \geq p_s$  durumunda gerçekleştiğinden dolayı, yukarıdaki iki lineer denge stratejisini ((7.18) ve (7.19)) kullanırsak, ticaretin lineer dengede ancak  $v_b \geq v_s + 1/4$  ise gerçekleştiğini görürüz.

## 7.6 Ortak-Değer İhaleleri

Ortak-değer ihalelerinde: (i) ihaleye konu olan objenin gerçek değeri tüm oyuncular için aynıdır (bu yüzden ortak-değer denir) ve (ii) alıcılar objenin değerine ait bilgiyi sinyaller yoluyla alırlar. Bu ihalelerde alıcılar arasındaki temel fark, ihaleye konu olan mala farklı değerler vermeleri değil, malın değeri hakkında farklı bilgiye sahip olmalarıdır; bir petrol arazisindeki toplam petrolün miktarı konusunda farklı bilgilere ve tahminlere sahip olunması gibi.

Bir ortak-değer ihalesinde, teklif verenler belirli bir oranda bilgiye sahiptir. Oyuncular diğer oyuncuların objeye ne kadar değer verdiklerini bilmedikleri gibi kendilerinin değerleri konusunda da emin değildirler. Böyle ihalelerde, her alıcı (teklif veren) malın gerçek değeri konusunda "gürültülü" bir sinyal alır ve bu sinyale dayanarak malın değeri hakkında bir değer oluşturur. Sonuç olarak, bir ortak-değer ihalesinde,  $i$  alıcısının objeye verdiği değer sadece diğer alıcılar açısından değil aynı zamanda kendisi açısından da rassal bir değişkendir.

Malın rassal değerini  $v$  ile ve  $i$  alıcısı açısından alınan sinyali ise  $\omega_i$  ile gösterelim. Malın değeri  $v$ , rassal bir sinyal olan  $\omega$  ile ilişkilidir. Bu durum her alıcının bildiği  $f(v, \omega)$  ortak yoğunluk fonksiyonuyla ifade edilir. Yani  $f(v, \omega)$  fonksiyonu,  $v$  ve

$\omega$  durumlarını aynı anda gözlemleme olasılığıdır. Burada basit bir örnek üzerinden, ortak yoğunluk fonksiyonunun ne olduğundan bahsedelim. Mala verilen değerin iki olası düzeyi olsun,  $v_1$  ve  $v_2$  gibi, ve aynı zamanda alıcının malın değerine ait  $\omega_1, \omega_2$  ve  $\omega_3$  gibi olası sinyallerinden birini alabildiğini düşünelim. Tablo 7.5,  $(v, \omega)$  noktalarındaki ortak yoğunluk fonksiyonunun,  $f(v, \omega)$ , değerlerini vermektedir:

| $v/\omega$ | $v_1$ | $v_2$ |
|------------|-------|-------|
| $\omega_1$ | 0.1   | 0.2   |
| $\omega_2$ | 0.2   | 0.2   |
| $\omega_3$ | 0.2   | 0.1   |

**Tablo 7.5** Ortak yoğunluk fonksiyon değerleri

Tablo 7.5'te verilen değerler bize her sinyal ve değerin aynı anda gerçekleşme olasılıklarını vermektedir. Örneğin sinyalin  $\omega_1$ , değerin ise  $v_1$  olma olasılığı 0.1'dir. Alıcı  $\omega_2$  sinyalini gözlemlese, malın değeri hakkında ne gibi bir sonuca varır? Alıcı gözlemlediği bu bilgiyle malın olası değerleri hakkında bilgisini yenileyecektir. Bu yeni olasılıklar koşullu olasılıktır ve aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$p(v_1 | \omega_2) = \Pr((v_1 | \omega_2) = \frac{p(v = v_1, \omega = \omega_2)}{p(\omega = \omega_2)} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5,$$

burada  $p(\omega = \omega_2) = p(v = v_1, \omega = \omega_2) + p(v = v_2, \omega = \omega_2) = 0.2 + 0.2 = 0.4$ . Benzer olarak  $p(v_2 | \omega_2) = 0.5$  elde edilebilir. Buradan  $\omega_2$  sinyalini aldıktan sonra malın beklenen değerini bulabiliriz:

$$E(v | \omega_2) = v_1 p(v_1 | \omega_2) + v_2 p(v_2 | \omega_2) = 0.5v_1 + 0.5v_2.$$

Şimdi ortak-değerli ihaleye geri dönelim. Daha önce söylediğimiz gibi, her alıcı teklifini malın değeri hakkında bilgi kümesine dahil olan sinyali gözlemledikten sonra verir. Sinyali ( $\omega$ ) gözlemledikten sonra sinyal değerine bağlı olarak, alıcı objenin değerini yeniden değerlendirir. Bu revize edilen beklenen değer,  $E(v | \omega)$  koşullu beklenen değer şeklinde ifade edilir. Eğer  $v$  sınırlı sayıda değere sahipse, örneğin  $v_1, \dots, v_k$  gibi, bu durumda beklenen değer şöyle ifade edilir:

$$E(v | \omega_j) = \sum_{i=1}^k v_i p(v_i | \omega_j),$$

burada

$$p(v_i | \omega_j) = \frac{p(v = v_i, \omega = \omega_j)}{p(\omega = \omega_j)} \text{ ve } p(\omega = \omega_j) = \sum_{i=1}^k p(v = v_i, \omega = \omega_j).$$

Eğer  $v$  sürekli bir değişkense bu durumda sigma toplama işareti integral işaretiyle

yer değiştirir.

Böylece örneğin  $i$  alıcısı  $\omega_i$  sinyalinin aldığı ve teklif vektörü de  $(b_1, \dots, b_n)$  ise,  $i$  alıcısının beklenen faydası şöyle ifade edilir:

$$E_i(b_1, \dots, b_n) = \begin{cases} \frac{1}{m} [E(v \mid \omega_i) - b_i], & \text{eğer tüm } j \neq i \text{ ler için } b_j \leq b_i \\ 0, & \text{eğer tüm } j \neq i \text{ ler için } b_j > b_i \end{cases}$$

Burada  $m$ ,  $i$  oyuncusu ile aynı teklifte bulunan (kendisi dahil) alıcıların sayısını göstermektedir

Herhangi bir  $i$  alıcısı diğer alıcıların sinyallerini gözlemleyemediğinden, teklifini sadece kendi aldığı  $\omega_i$  sinyaline dayandıracaktır. Yani genelde, bir oyuncunun teklifi gözlemlediği sinyalinin fonksiyonudur, yani  $b_i(\omega_i)$ .

## Örnek 7.2

Şimdi iki alıcının olduğu bir durumda alıcıların teklif verme davranışlarına bakalım. Önce basitlik olsun diye basit bir kaç varsayımda bulunalım:

(i) Teklif verenler,  $[0, 1]$  aralığında homojen (uniform) dağılım gösteren birbirinden bağımsız rassal değişken olan sinyalleri gözlemler.

(ii) İhaleye konu olan obje sadece iki değer alabilir: Yüksek değer  $v_h$  ve düşük değer  $v_l$ .

(iii) Malın rassal değerinin  $v$  ve sinyalin  $\omega$  olması durumunda ortak yoğunluk fonksiyonunun aşağıdaki gibi olduğu varsayılmaktadır:

$$f(v, \omega) = \begin{cases} \omega, & \text{eğer } v = v_h \\ 1 - \omega, & \text{eğer } v = v_l \end{cases}$$

Sinyaller  $(\omega)$ ,  $[0, 1]$  aralığında homojen dağılım gösterdiğinden, alıcılar sinyallerini almadan önce malın değeri konusunda bir önsel olasılığa sahiplerdir. Örneğin, sinyal bilgisi olmadan malın yüksek değerde olma olasılığı şudur:

$$p(v = v_h) = \int_0^1 f(v, \omega) d\omega = \int_0^1 \omega d\omega = \frac{1}{2}.$$

Fakat  $\omega = k$  sinyalini aldıktan sonra,  $v = v_h$  olma olasılığı ise şudur:

$$p(v_h \mid k) = \frac{p(v_h, k)}{p(v_h, k) + p(v_l, k)} = \frac{k}{k + (1 - k)} = k.$$

Dolayısıyla alıcı  $\omega = k$  sinyalini gözlemledikten sonra malın koşullu beklenen değeri şöyledir:

$$\begin{aligned} E(v \mid \omega = k) &= v_h p(v_h \mid k) + v_l (1 - p(v_h \mid k)) \\ &= kv_h + (1 - k)v_l. \end{aligned}$$

Şimdi her alıcının optimal stratejisini bulmaya çalışalım. Genel olarak alıcıların teklif fonksiyonları  $b_1 = b_1(\omega_1)$  ve  $b_2 = b_2(\omega_2)$ 'dir. 2. oyuncunun teklif verme fonksiyonunun  $b_2 = b_2(\omega_2)$  olduğunu veri alalım ve 1. oyuncunun amacının ne olduğuna bakalım. Eğer  $b_1 > b_2$  ise ihaleyi 1. oyuncu kazanır; eğer  $b_1 < b_2$  ise kaybeder ve eğer teklif birbirine eşitse,  $b_1 = b_2$ , 1/2 olasılıkla kazanma şansı vardır. 1. oyuncunun kazanma olasılığı şöyle ifade edilebilir:

$$p_1(b_1 \geq b_2) = p_1(b_1 \geq b_2(\omega_2)).$$

Bu yüzden, 1. alıcı  $\omega_1$  sinyali gözlemlediğinde ve 2. alıcı  $b_2(\omega_2)$  teklif verme kuralını kullandığında, 1. oyuncunun  $b_1$  teklifinden dolayı beklenen faydası şudur:

$$\begin{aligned} Eu_1(b_1 | b_2(\omega_2)) &= p_1(b_1 > b_2)[E(v | \omega_1) - b] + p_1(b_1 < b_2) \times 0 \\ &= p_1(b_1 \geq b_2(\omega_2))[\omega_1 v_h + (1 - \omega_1)v_l - b_1]. \end{aligned}$$

Benzer olarak, 2. alıcı  $\omega_2$  sinyali gözlemlediğinde ve 1. alıcı  $b_1(\omega_1)$  teklif verme kuralını kullandığında, 2 alıcının  $b_2$  teklifinde bulunmasından elde edeceği beklenen fayda ise şöyledir:

$$Eu_2(b_2 | b_1(\omega_1)) = p_2(b_2 \geq b_1(\omega_1))[\omega_2 v_h + (1 - \omega_2)v_l - b_2].$$

Bu ortak-değer ihalesinin  $(b_1^*(\omega_1), b_2^*(\omega_2))$  teklif çifti eğer aşağıdaki koşullar geçerliyse Nash dengesidir:

(i) 1. oyuncunun her  $b_1(\omega_1)$  teklif verme kuralı için şu koşul geçerli olmalıdır:

$$Eu_1(b_1 | b_2^*(\omega_2)) \leq Eu_1(b_1^* | b_2^*(\omega_2)).$$

(ii) 2. oyuncunun her  $b_2(\omega_2)$  teklif verme kuralı için şu koşul geçerli olmalıdır:

$$Eu_2(b_2 | b_1^*(\omega_1)) \leq Eu_2(b_2^* | b_1^*(\omega_1)).$$

Şimdi  $(b_1^*(\omega_1), b_2^*(\omega_2))$  teklif çiftinin Nash dengesi olduğunu gösterelim. Bunun için de daha önce ifade ettiğimiz gibi, simetrik yapıdan dolayı şunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir teklif kuralı  $b_1(\omega_1)$  için,  $Eu_1(b_1 | b_2^*(\omega_2)) \leq Eu_1(b_1^* | b_2^*(\omega_2))$  olmalıdır. Bunun için ilk önce 1. alıcının malı satın alma (ihaleyi kazanma) olasılığını bulalım:

$$\begin{aligned}
p_1(b_1 \geq b_2^*(\omega)) &= p_1(b_1 \geq v_l + \frac{1}{2}(v_h - v_l)\omega_2)) \\
&= p_1(\omega_2 \leq \frac{2(b_1 - v_l)}{v_h - v_l}) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{eğer } b_1 < v_l \\ \frac{2(b_1 - v_l)}{v_h - v_l}, & \text{eğer } v_l \leq b_1 \leq \frac{1}{2}(v_h + v_l) \\ 1, & \text{eğer } b_1 > \frac{1}{2}(v_h + v_l) \end{cases}
\end{aligned}$$

Bu ifadedeki ikinci satır,  $\omega_2$  rassal değişkenin  $[0, 1]$  aralığında homojen dağılmasından dolayı elde ettiğimiz değerdir.

Bu yüzden 1. alıcının beklenen faydası şöyle ifade edilir:

$$\begin{aligned}
E_1(b_1) &= Eu_1(b_1 \geq b_2^*(\omega)) \\
&= p_1(b_1 \geq b_2^*(\omega))(a - b_1) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{eğer } b_1 < v_l \\ \frac{2(b_1 - v_l)}{v_h - v_l}(a - b_1), & \text{eğer } v_l \leq b_1 \leq \frac{1}{2}(v_h + v_l) \\ a - b_1, & \text{eğer } b_1 > \frac{1}{2}(v_h + v_l) \end{cases}
\end{aligned}$$

burada  $a = \omega_1 v_h + (1 - \omega_1)v_l$ .

Birinci oyuncunun beklenen faydası, açıkça görülebileceği gibi  $[v_l, (v_l + v_h)/2]$  aralığında olacaktır. Beklenen fayda fonksiyonunu ( $E_1(\cdot)$ ) maksimize edecek teklif değerini bulmak için bu fonksiyonun birinci dereceden koşulunu sağlayan teklif değerini bulmak gerekir:

$$\frac{\partial E_1(b_1)}{\partial b_1} = \frac{2(a - b_1 - v_l + v_l)}{v_h - v_l} = \frac{2[2v_l + (v_h - v_l)\omega_1 - 2b_1]}{v_h - v_l} = 0.$$

Buradan da 1. alıcının en iyi teklif verme fonksiyonunu elde ederiz:

$$b_1^*(\omega_1) = v_l + \frac{1}{2}(v_h - v_l)\omega_1. \quad (7.20)$$

Benzer olarak 2. alıcının en iyi teklif verme fonksiyonu şöyledir:

$$b_2^*(\omega_2) = v_l + \frac{1}{2}(v_h - v_l)\omega_2. \quad (7.21)$$

Böylece (7.20) ve (7.21) denklemleri bize ortak-değerli ihalenin simetrik Nash den-gesini verir.

### Örnek 7.3

Ortak değerli bir ihalede  $n$  sayıda alıcı olsun. Oyuncuların alabileceği sinyallerin tüm profiller kümesi  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  iken, her oyuncunun hareket kümesi negatif-

olmayan  $b \in [0, \infty)$  tekliflerinden oluşur. Her  $i$  oyuncusunun  $\tau_i$  sinyal fonksiyonu  $\tau_i(\omega_1, \dots, \omega_n) = \omega_i$  şeklinde ifade edilir, yani her oyuncu kendi sinyalini gözlemler. Her oyuncunun her tipi, her diğer oyuncunun her tipinin sinyalinin diğer tüm oyuncuların sinyallerinden bağımsız olduğuna inanmaktadır.

Fayda fonksiyonlarına baktığımızda ise, eğer herhangi bir  $i$  oyuncusunun  $b_i$  teklifi ihaledeki en yüksek teklif değilse,  $i$  oyuncusunun faydası 0 ve eğer diğer hiçbir teklif,  $i$  alıcısının  $b_i$  teklifinden daha yüksek değilse faydası  $(v_i(\omega_1, \dots, \omega_n) - \bar{b}_{-i})/m$  olur. Burada  $v_i$ ,  $i$  oyuncusunun  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  sinyal kümesi veriyken mala verdiği değeri veren fonksiyonu;  $m$ ,  $i$  oyuncusu ile aynı teklifte bulunan (kendisi dahil) tekliflerin sayısını; ve  $\bar{b}_{-i}$  ise ikinci fiyat ihalesi olmasından dolayı ödemenin yapıldığı en yüksek ikinci fiyatı göstermektedir. Yani  $i$  oyuncusunun faydası aşağıda özetlendiği gibidir:

$$u_i(b, (\omega_1, \dots, \omega_n)) = \begin{cases} (v_i(\omega_1, \dots, \omega_n) - \bar{b}_{-i})/m, & \text{eğer } b_j \leq b_i \forall j \neq i \\ 0, & \text{eğer } b_j > b_i \forall j \neq i \end{cases}$$

Ortak değerli, kapalı zarf ihalelerinde temel fikir şöyle daha iyi anlatılabilir. Teklif veren iki alıcı olsun. Her teklif verenin sinyalinin  $[0, 1]$  aralığında homojen dağıldığını varsayalım ve her teklifte bulunan  $i$  alıcısının değeri  $v_i = \alpha\omega_i + \gamma\omega_j$  olsun (burada  $j$  diğer oyuncudur ve  $\alpha \geq \gamma \geq 0$ ). Dikkat edilirse  $\alpha = 1$  ve  $\gamma = 0$  durumu, daha önce çalıştığımız oyuncuların özel bilgiye sahip olduğu durumu göstermektedir. Eğer  $\alpha = \gamma$  ise veri sinyaller için her teklif verenin değeri aynı olur, bu da *pür ortak değer* durumudur. Örneğin, eğer  $\omega_i$  sinyali bir arazideki petrol miktarı ise,  $\omega_i$  ve  $\omega_j$  sinyallerini bilen  $i$  bireyi için petrolün beklenen değeri  $M \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_j)$  olur, burada  $M$  petrol miktarının parasal karşılığıdır. Tabii burada temel varsayımımız herhangi bir oyuncunun diğer oyuncuların sinyalini (yani bilgisini) bilmediği şeklindedir. Fakat ortak-değer ihalelerinde temel nokta, oyuncuların tekliflerinin diğer oyuncuların sinyalleri hakkındaki kısmi bilgisine dayanmasıdır.

Bu varsayımlar altında, bu ortak-değerli ve ikinci-fiyat kapalı zarf ihalesinin her  $i$  oyuncunun her  $\omega_i$  tipinin,  $(\alpha + \gamma)\omega_i$  kadar teklifte bulunduğu bir Nash dengesine sahip olduğunu iddia ediyoruz.

Bu iddiayı doğrulamak için ihtiyaç duyduğumuz bazı değerleri bulmamız gerekmektedir. Bunun için 2. oyuncunun her tipinin bu şekilde teklifte bulunduğunu ve 1. oyuncunun  $\omega_1$  tipinin  $b_1$  teklifinde bulunduğunu varsayalım. 1. oyuncunun  $\omega_1$  tipinin beklenen faydasını belirlemek için, hem ihaleyi kazanma olasılığını ve ödeyeceği beklenen fiyatı; hem de eğer kazanırsa 2. oyuncunun sinyalinin beklenen değerini bilmemiz gerekir.

*1.oyuncunun kazanma olasılığı:* 2.oyuncunun teklif fonksiyonu,  $(\alpha + \gamma)\omega_2$ , verildiğinde, 1.oyuncunun teklifi ancak  $b_1 \geq (\alpha + \gamma)\omega_2$  veya eğer  $\omega_2 \leq b_1/(\alpha + \gamma)$  ise kazanır. Eğer  $\omega_2$ ,  $[0, 1]$  aralığında homojen dağılım gösteriyorsa, en fazla  $b_1/(\alpha + \gamma)$  değerini alma olasılığı  $b_1/(\alpha + \gamma)$ 'dir. Yani 1.oyuncu  $b_1$  teklifi ile ihaleyi  $b_1/(\alpha + \gamma)$  olasılıkla kazanabilir.

1.oyuncunun kazanması durumunda ödemesi beklenen fiyat: 1. oyuncunun ödeyeceği fiyat 2.oyuncunun teklifine eşittir. 2. oyuncunun teklifi ise  $[0, 1]$  aralığında homojen dağılım gösterdiğinden, 2. oyuncunun teklifinin beklenen değeri,  $b_1$ 'den az olduğu bilindiğinde,  $\frac{1}{2}b_1$  olur.

1. oyuncunun kazanması durumunda 2. oyuncunun beklenen sinyal değeri:  $\omega_2$  sinyali verildiğinde 2. oyuncunun teklifi  $(\alpha + \gamma)\omega_2$ 'dir. Böylece  $b_1$ 'den daha az teklif veren sinyallerin beklenen değeri  $\frac{1}{2}b_1/(\alpha + \gamma)$  olur ( $\omega_2$  dağılımının homojen dağılım göstermesinden dolayı).

1.oyuncunun  $\omega_1$  sinyali veri iken  $b_1$  teklifi ile kazanması durumunda beklenen faydası, beklediği değer ile ödemeyi beklediği fiyat arasındaki farkın kazanma olasılığı ile çarpılması ile elde edilir:

$$E(u_1(b_1 | \omega_1)) = (\alpha\omega_1 + \frac{1}{2}\gamma\frac{b_1}{(\alpha + \gamma)} - \frac{1}{2}b_1)\frac{b_1}{(\alpha + \gamma)}$$

veya

$$E(u_1(b_1 | \omega_1)) = \frac{\alpha}{2(\alpha + \gamma)^2}(2(\alpha + \gamma)\omega_1 - b_1)b_1. \quad (7.22)$$

Yukarıda (7.22)'de verilen fonksiyon  $b_1 = (\alpha + \gamma)\omega_1$  değerinde maksimum değerini alır ( $b_1$ 'e göre birinci derece koşulundan türetilir). Yani eğer 2. oyuncunun her  $\omega_2$  tipi,  $(\alpha + \gamma)\omega_2$  teklifinde bulunursa, 1. oyuncunun herhangi bir  $\omega_1$  tipi, optimal olarak  $(\alpha + \gamma)\omega_1$  teklifinde bulunur. Simetrik olarak, eğer 1. oyuncunun her bir  $\omega_1$  tipi  $(\alpha + \gamma)\omega_1$  teklifinde bulunursa, 2. oyuncunun herhangi bir  $\omega_2$  tipi,  $(\alpha + \gamma)\omega_2$  teklifinde bulunur. Bu yüzden daha önce iddia edildiği gibi, oyunda her  $i$  oyuncusunun her  $\omega_i$  tipinde  $(\alpha + \gamma)\omega_i$  teklifinde bulunduğu bir Nash dengesi vardır.

Burada bir noktayı ifade etmek yararlıdır. Dikkat edilirse, 1.oyuncu objenin beklenen değerini hesapladığı zaman, 2.oyuncunun sinyalinin beklenen değerini bulur. Eğer 1. oyuncunun teklifi düşükse, muhtemelen kazanamayacaktır. Fakat eğer kazanırsa, 2. oyuncunun sinyali düşük olmak zorundadır ve bu yüzden de objeye düşük bir değer atfetmelidir. Dolayısıyla teklif değerini basit bir şekilde kendi sinyalinden ve diğer oyuncunun sinyalinin beklentisine dayandırarak türetmemelidir. Eğer böyle yaparsa, kazandığı çoğu durumda, verdiği teklif muhtemelen objenin değerini aşar. Bu şekilde doğru davranmayan kişi *kazananın laneti* dediğimiz bir durumdan ötürü zarar görüyor demektir.

Şimdi de başka bir örnek üzerinden ortak ve bağımsız değerli bir ihalede ortaya çıkan teklif değerlerini karşılaştıralım.

## Örnek 7.4

Bir kapalı zarf, tek fiyat ve ortak değer ihalesinde malın değeri  $v = t_1 + t_2$  olsun, burada  $v$  ortak değerdir ve  $i$  alıcısı sadece  $t_i$  sinyalini gözlemleyebilir. Sinyallerin,  $t_i$ ,  $[0, 1]$  aralığında bağımsız ve homojen dağılım gösterdiğini varsayalım. Bu ihale, örneğin bir firmanın satın alınmasıyla ilgili bir ihale olsun. Her alıcı için firmanın değeri aynıdır ve her alıcı firmanın değeri hakkında bağımsız bir sinyal

elde eder. Alıcıların teklif stratejileri lineer olsun, yani  $b_i(t_i) = at_i$ . 2. oyuncunun teklifi  $b_2(t_2) = at_2$  veri iken, 1. oyuncunun beklenen faydası şöyledir:

$$\begin{aligned}
 u_1(b_1, t_1) &= E[v - b_1 | b_1 > b_2] \Pr(b_1 > b_2) \\
 &= E(t_1 + t_2 - b_1 | t_2 < b_1/a) \Pr(b_1 > at_2) \\
 &= E(t_1 + t_2 - b_1 | t_2 < b_1/a) \Pr(t_2 < b_1/a) \\
 &= (t_1 + E[t_2 | t_2 < b_1/a] - b_1) \frac{b_1}{a} \\
 &= \left( t_1 + \frac{b_1}{2a} - b_1 \right) \frac{b_1}{a}.
 \end{aligned}$$

Yukarıdaki beklenen fayda fonksiyonun  $b_1$ 'e göre birinci dereceden koşulu şöyledir:

$$\frac{\partial u_1(b_1, t_1)}{\partial b_1} = \left( t_1 + \frac{b_1}{2a} - b_1 \right) \frac{1}{a} + \frac{b_1}{a} \left( \frac{1}{2a} - 1 \right) = 0.$$

Bu da şunu ima eder:

$$2 \left( 1 - \frac{1}{2a} \right) b_1 = t_1.$$

$b_1 = at_1$  teklif değerinin optimal olması için birinci dereceden koşuldan gelen değere eşit olmalıdır,

$$2 \left( 1 - \frac{1}{2a} \right) at_1 = t_1$$

Buradan  $a = 1$  elde ederiz. Dolayısıyla  $b_i(t_i) = t_i$  Nash dengesidir.

Şimdi ihaleyi bağımsız değerli bir ihale olarak düşünelim. Örneğin bağımsız değerleri  $v_i = t_i + 0.5$  şeklinde ifade edelim. Yani  $i$  alıcısı kendi tipini gözlemledikten sonra mala verdiği değer  $v_i$ 'dir. Teklifin lineer bir yapıda olduğunu düşündüğümüzde, yani teklif değeri  $b_i(t_i) = at_i + c$  biçiminde olduğunda, optimal teklif değerinin ne olduğuna bakalım. 2. oyuncunun  $at_2 + c$  stratejisini kullandığını veri aldığımızda 1.oyuncunun  $b_1$  teklifinden dolayı beklenen faydası şudur:

$$\begin{aligned}
 u_1(b_1, t_1) &= E[v - b_1] \Pr(b_1 > b_2) \\
 &= E[t_1 + 0.5 - b_1] \Pr(b_1 > at_2 + c) \\
 &= (t_1 + 0.5 - b_1) \Pr(t_2 < \frac{b_1 - c}{a}) \\
 &= (t_1 + 0.5 - b_1) \frac{b_1 - c}{a}.
 \end{aligned}$$

Yukarıdaki beklenen fayda fonksiyonun  $b_1$ 'e göre birinci dereceden koşulu şöyledir:

$$\frac{\partial u_1(b_1, t_1)}{\partial b_1} = -\frac{b_1 - c}{a} + (t_1 + 0.5 - b_1) \frac{1}{a} = 0,$$

buradan da  $b_1 = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}t_1 + 0.25$  elde edilir.

$b_1(t_1) = at_1 + c$  teklif değerinin optimal olması için birinci dereceden koşulundan gelen teklif değerine eşit olmalıdır, yani

$$\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}t_1 + 0.25 = at_1 + c.$$

Buradan da  $a = 0.5$  ve  $c = 0.5$  olur. Bu yüzden bu ihalenin Bayesyen Nash dengesi aşığıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} b_1(t_1) &= \frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}, \\ b_2(t_2) &= \frac{t_2}{2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Bu sonuçlardan hareketle şunu elde ederiz:

$$\frac{t_1}{2} + \frac{1}{2} > t_1,$$

yani ortak değer ihalesindeki denge teklif değeri, bağımsız değerli ihaledeki denge teklif değerinden her zaman daha düşüktür.

## Sorular

1. Bir satıcı malını satmak için ihaleye çıkarıyor. Potansiyel iki alıcı vardır. Bunların mala verdikleri değerler, sırasıyla  $v_1$  ve  $v_2$ 'dir. Alıcıların değerleri birbirinden bağımsız ve  $[0, 1]$  homojen dağılmaktadır.
  - a) Satıcı birinci-fiyat kapalı zarf ihalesi düzenliyor. Alıcıların teklif değerleri  $b_i(v_i) = a_i v_i$ , ( $i = 1, 2$ ) şeklinde lineer stratejiler şeklindedir. Bu durumda alıcıların denge teklif stratejilerini bulunuz.
  - b) Yukarıdan aşağı inen bir ihale formatı (Holanda tarzı) olsaydı denge teklif stratejileri ne olurdu?
2. Bir malı almak isteyen (riske karşı kayıtsız) 3 kişi var. 1'den 3'e doğru numaralandırılan bu kişilerin mala biçtikleri değerler sırasıyla 12, 14 ve 16 lira olarak veriliyor. Teklifler 5 ile 25 lira arasında 1 liralık artırımlarla veriliyor.
  - a) İngiliz usulü açık artıma ihalesinde kim kazanır? Ödenen fiyat ve kazananın kârı ne kadar olur?
  - b) Kapalı zarf usulü ikinci-fiyat ihalesinde kim kazanır? Ödenen fiyat ve kazananın kârı ne kadar olur? Cevabınızı a şıkkı ile karşılaştırın. Kâr miktarları arasındaki farkın sebebi nedir?
  - c) Kapalı zarf usulü birinci-fiyat ihalesinde herkes kendi değerlemesinin altında (en az 1 lira) teklif veriyor. Bu ihalede muhtemel netice nedir? Cevabınızı önceki şıklarla karşılaştırın. Satıcının bu meknaizmalardan birini diğerlerine tercih etmek için açık bir nedeni var mıdır?
3. Bir ihalede kazanan 10 lira alıyor. Kurallar şu fark dışında İngiliz ihalesiyle aynı: En yüksek ikinci teklifi veren de parayı almasa bile verdiği teklif miktarını ödüyor.
  - a) İki oyuncu bağdaşık olarak  $k$  ve  $k + \delta$  (burada  $\delta$ 'yı varolan en düşük para birimi olarak alın) tekliflerini yapmaya karar veriyorlar. Herhangi bir  $k$  değeri için bu teklifler bir Nash dengesi olur mu?
  - b) Bu oyunun pür-strateji Nash dengesi var mıdır?
  - c) Bu oyunun karma-strateji Nash dengesi var mıdır?
4. Bir öğrenci kendisine miras kalan değerli bir sanat koleksiyonunu satmaya karar veriyor. Cournot tekeliyle ilgili bir derse katıldıktan sonra koleksiyonunu Cournot noktasına tekabül eden sabit bir fiyattan satmaya karar veriyor. Ama  $N$  tane potansiyel alıcının koleksiyona ne kadar değer biçtiğini bilmiyor. Müşterilerin değerlerinin dağılımı  $F$  gibi bir kümülatif dağılım fonksiyonundan gelmektedir. Bu özel talep durumuna bağlı olarak sabit satış fiyatı  $p$ 'yi

beklenen kârını maksimize edecek şekilde seçiyor.

$$\max_{p \in [0,1]} \theta(p)p$$

Burada

$$\theta(p) = 1 - \prod_{i=1}^N F(v_i \leq p)$$

şeklindedir.

- a) Satış olasılığını veren  $\theta(p)$ 'yi hesaplayın.
  - b) Optimal fiyatı, bu fiyata tekabül eden satış olasılığını ve beklenen kâr miktarını bulun.
  - c) Hem optimal fiyatın hem de beklenen kârın, potansiyel alıcı sayısı  $N$ 'in monoton olarak artan fonksiyonları olduğunu gösterin.
5. İkinci-fiyat kapalı zarf ihalesinde, teklif verenlerin değerlemeleri  $[6,15]$  aralığında tekdüze (homojen) olarak dağılmaktadır.
- a) Bu ihalede nasıl teklif verirdiniz?
  - b) Eğer 2 tane teklif veren varsa, satıcının beklenen geliri ne olur?
  - c) Eğer  $n$  tane teklif veren varsa, satıcının beklenen geliri ne olur?
6. Erdem evini İkinci-fiyat kapalı zarf ihalesi yoluyla satmaya karar verir. Ayşe ve Güler isimli 2 adet alıcı vardır ve değerlemeleri sırasıyla 1 milyon TL ve 1.2 milyon TL'dir.
- (a) Her iki oyuncuda kendi değerlemelerini teklif ederse sadece bir denge oluştuğunuz gösteriniz.
  - (b) Evi almaya kim hak kazanır?
  - (c) Ev kaç TL'ye satılır?
7. İkinci el araba pazarında sahibinin fiyat koymayıp teklifleri beklediği bir arabayı inceliyorsunuz. Fiyatı tam kestirmesiniz de bin ile 5 bin lira aralığındaki tüm fiyatların eşit derecede muhtemel olduğunu düşünüyorsunuz, yani ortalama değer 3 bin lira. Arabanın sahibi gerçek değeri biliyor ve ancak teklifiniz bu değeri aşarsa satışa onay verecek. Siz arabanın gerçek değerini satın aldıktan sonra öğrenebileceksiniz. Öte yandan sizin de özel tamir beceriniz var ve eğer satın alırsanız arabayı elden geçirerek değerini  $1/3$  oranında arttırabileceksiniz.
- a) 3000 lira teklif ederseniz beklenen kârınız ne olur? Bu miktarda bir teklif sunar mısınız?

- b) Anlaşma sonunda beklenen kârınızı negatif olmaksızın sunabileceğiniz en yüksek teklif nedir?
8. Özdemir antikasını satmak için açık arttırma düzenlemektedir. Potansiyel üç alıcı vardır. Bunların antika için değerlemeleri sırasıyla 2,5, 6 ve 8'dir. Bu üç kişi de kendi değerlemelerini bilmekte, fakat diğerlerinin değerlemeleri hakkında bilgileri yoktur. Emrah ise değerlemelerin  $[0, 10]$  arasında tekdüze dağılıma sahip olduğunu bilmektedir.
- a) Emrah İngiliz usulü açık arttırma yolunu kullanırsa geliri ne olur? Açık arttırmayı kim kazanır?
- b) Emrah eğer ihale ikinci-fiyat kapalızarf ihalesi yolunu kullanırsa geliri ne olur? Açık arttırmayı kim kazanır?
- c) İlk-fiyat kapalızarf ihalesinde alıcıların denge stratejileri ne olur? Emrah bu usulü kullanırsa geliri ne olur?
9. Özel değerlemelerin  $[0, 1]$  aralığında homojen olarak dağıldığı ve iki potansiyel alıcının olduğu bir ihalede kurallar şu şekilde veriliyor: (i) sadece  $b \in (0, 1)$  miktarının üstündeki teklifler kabul ediliyor (ii) 1. alıcı teklif yapma veya çekilme arasında karar veriyor ve (iii) 1. alıcı teklif yaparsa 2. alıcı eğer ilgiliyse bu teklifi karşılayarak malı bu fiyattan alabilir ve 1. alıcı teklif sunmamışsa 2. alıcı malı en düşük fiyattan,  $b$ , alabilir.
- a)  $b = 1/2$  olarak verili iken denge stratejilerini bulun.
- b) Bu ihale prosedürü satıcı için optimal olur mu?
10. Bir kaç hafta sonra 1. sorudaki öğrencimiz bu sefer ihaleler ile ilgili bir derse katılıyor. Orada dinlediklerinden yola çıkarak elindeki koleksiyonu Hollanda veya İngiliz ihalesinde satmanın daha iyi olduğuna karar veriyor.
- a)  $N = 1$ ,  $N = 2$  ve  $N \geq 3$  durumları için öğrencinin vardığı sonucun doğru olup olmadığını kontrol edin.
- b) Bu örnek neden İngiliz ve Hollanda ihalelerinin optimal olmadığını gösteriyor?
- c) İngiliz ihalesinde, Cournot noktasından daha yüksek bir beklenen kâr düzeyi sağlaması için, nasıl bir değişiklik yapmak gerekiyor?
11. Vickrey ihalesinin insanları neden doğru söylemeye teşvik ettiğini ispatlayınız ve açıklayınız.
12. İlk-fiyat kapalı zarf ihalesinde Erhan ve Ayşe teklif veren kişilerdir, ve değerlemeleri  $v_1$  ve  $v_2$   $[0, 1]$  aralığında tekdüze dağılıma sahiptir. Ayşe'nin stratejisinin  $b_2 = v_2^{1/2}$  olduğunu varsayınız. Emrah'ın bu stratejiye karşı optimal cevabının  $b_1 = 2/3v_1$  olduğunu gösteriniz. Bu stratejiler Nash dengesi midir?

13.  $n$  kişinin katıldığı bir birinci fiyat kapalı zarflı ihalesi gerçekleştiğini varsayalım. Bu ihalenin değerlemesi bağımsız ve homojen olarak  $[0, 10]$  arasında dağılmaktadır. Simerik Bayesyen Nash dengesini türetiniz. Ve satıcının beklenen kazancını bulunuz.
14. Bir açık arttırma da  $v > 0$  ödülü için  $n > 1$  tane teklif veren kişi vardır.  $i$  oyuncusunun açık arttırmadaki nesne için belirlediği değer  $v_i$  şeklindedir ve  $v_1 > v_2 > \dots > v_n > 0$ . Teklifler eşanlı şekilde yapılmaktadır. En yüksek teklifi veren ödülü kazanmaktadır ve verdiği teklif miktarı kadar ödeme yapmaktadır. Teklif verenler kazanmadığı takdirde ödeme yapılmamaktadır. Bu açık arttırmayı strateji kümeleri ve kazanç fonksiyonlarıyla birlikte oyun olarak tanımlayınız. Oyunun tüm pür-strateji Nash dengelerini bulunuz.
15. Dört tane risk-yansız teklif veren kişi olduğunu varsayınız (fayda fonksiyonları lineer). Her birinin değerlemesi özel bilgi olup  $[0, 1]$  aralığında tekdüze (homojen dağılım) dağılıma sahiptir. İngiliz ihalesine göre beklenen fiyat ne olur? İlk-fiyat kapalı zarf ihalesinde beklenen fiyat ne olur?
16. Bir ihalede 2 tane teklif verenin olduğu ilk-fiyat kapalı zarf ihalesi olduğunu varsayınız. Her iki kişinin de değerlemesi özel bilgi olup  $[0, 1]$  aralığında tekdüze dağılıma sahiptir.
- Her iki kişi de değerlemelerinin  $1/3$  'ü kadar teklif verirse denge oluşmayacağını gösteriniz.
  - Her iki kişi de değerlemelerinin  $1/2$  'si kadar teklif verirse denge oluşacağını gösteriniz?
  - Birinci oyuncunun değerlemesi 0.8, ikincisinin değerlemesinin 0.2 olduğunu varsayınız. Satıcının beklenen geliri ne olur?
  - Eğer ihale ikinci-fiyat kapalı zarf ihalesi yoluyla yapılsaydı c şıkkındaki sonuç nasıl değişirdi?
17. İlk-fiyat kapalı zarf ihalesinde özel bilgiye sahip 3 tane teklif veren kişi vardır. Teklif veren kişilerin değerlemeleri  $[\underline{v}, \bar{v}]$  aralığında birbirinden bağımsız ve rassal olarak tekdüze dağılıma sahiptir. Lineer teklif verme kuralının şu şekilde olacağını gösteriniz:

$$b_i(v_i) = \frac{1}{3}\bar{v} + \frac{2}{3}v_i$$

18. Değerlerin  $[0, 1]$  aralığında homojen olarak dağıldığı “simetrik bağımsız özel/gizli değerler” modeli çerçevesinde herkesin teklifini ödediği bir ihale düşünelim.
- Bu tarz ihalelerde alıcıların fayda fonksiyonunu bulun.

- b) Aşağıdaki teklif fonksiyonunun bir denge çözümü olduğunu gösterin ve satıcının denge kârını bulunuz.

$$b^*(v) = \frac{n-1}{n} v^n$$

19. Değerlemelerin  $[0, 1]$  aralığında homojen olarak dağıldığı simetrik bağımsız özel/gizli değerler modeli çerçevesindeki bir üçüncü-fiyat ihalesini (En yüksek teklif kazanır ve teklifin sahibi en yüksek üçüncü teklif miktarını öder) düşünün.

- a) Bu tarz ihalelerde alıcıların fayda fonksiyonunu bulun.  
b) Aşağıdaki teklif fonksiyonunun bir denge çözümü olduğunu gösterin.

$$b^*(v) = \frac{n-1}{n-2} v$$

- c) Neden tüm alıcıların kendi değerlemelerinin üstünde teklifler verdiğine dair mantıksal/sezgisel bir açıklama yapın. Ve satıcının denge kârını bulunuz.
20. Bir firma satışa çıkarılıyor. Gizli bir bilgi olan satıcının değerlemesi  $[0, 1]$  aralığında homojen olarak dağılmaktadır. Siz firmayla ilgilenen tek kişisiniz ve üstün idare yeteneğiniz sayesinde firmanın değeri sizin için satıcının verdiği değerin 1,5 katı olacaktır. Bu bilgiler ışığında satıcının red veya kabul edeceği bir  $b \in [0, 1]$  teklifi sunmanız gerekiyor.
- a) Pozitif bir teklif sunmak yanlış mı olur? Eğer öyleyse, pozitif bir teklife değmesi için firmaya sizin verdiğiniz değerin satıcının değerlemesinin kaç katı olması gerekir?
- b) Firmaya sizin verdiğiniz değer satıcının değerlemesinin 3 katı olursa ve-receğiniz teklif ne olmalıdır?
21. Bir açık arttırmada satıcı tek bir ürüne sahiptir. Satıcı herhangi bir satış mekanizmasına katılım gösterebilir. Satıcı için ürün değeri sıfırdır. İki tane potansiyel teklif veren vardır ( $i = 1, 2$ ). Teklif verenler için ürün değeri  $v_i$  ile gösterilir. Bu değer birim aralıklarla tekdüze dağılıma sahiptir. Bu değerlemeler teklif verenler açısından birbirinden bağımsızdır. Ayrıca 1.kişi kendi değerlemesini bilmekte, fakat 2.kişi kendi değerlemesini bilmemektedir. Teklif verenler satıcıya  $t_i$  kadar ödeme yapar ve kazançları ürünü alırsa  $v_i - t_i$  kadar olur, diğer durumda ise  $-t_i$  kadar olur. Satıcının beklenen gelirini maksimize eden kişiye özgü makul mekanizmayı bulunuz. Satıcının gelirini hesaplayınız.

22. Aşağıdaki durumları açıklayınız.

- a) Hollanda ihalesi ile birinci-fiyat, kapalı zarf ihalesi neden stratejik olarak eşdeğerdir?
- b) Simetrik bağımsız özel/gizli değerler modeli çerçevesinde, İngiliz ihalesi ile ikinci-fiyat, kapalı zarf ihalesi neden stratejik olarak eşdeğerdir?

23. Değerlemlerin  $[0, 1]$  aralığında homojen olarak dağıldığı “simetrik bağımsız özel/gizli değerler” modeli çerçevesinde her zamanki gibi en yüksek teklif verenin kazandığı ama sadece kaybedenlerin teklif ettikleri miktarları ödediği sıra dışı bir ihale düşünün. Teklif stratejileri dengesini bulun ve bu ihaleyi önceden gördüğünüz ihalelerle karşılaştırın.

24. Özel değerlemlerin  $[0, 1]$  aralığında homojen olarak dağıldığı ve iki potansiyel alıcının olduğu bir ihalede kurallar şu şekilde veriliyor: i. teklif vermek isteyen herkes sabit bir  $c$  ücreti ödemek zorunda ve ii. en yüksek teklif kazanıyor ve sadece kaybeden teklif ettiği miktarı ödüyor.

- a) Teklif verenlerin beklenen faydalarını bulun.
- b) Aşağıdaki strateji bir denge olur mu?

$$v \geq 1/2 \text{ ise teklif } b^*(v) = \frac{v^2 - 1/4}{2(1 - v)} \text{ şeklindedir}$$

aksi halde alıcı teklif vermiyor

25. Özel değerlemlerin  $[0, 1]$  aralığında homojen olarak dağıldığı ve iki potansiyel alıcının olduğu bir ihalede kurallar şu şekilde veriliyor: (i) sadece  $\underline{b} \in (0, 1)$  miktarının üstündeki teklifler kabul ediliyor. (ii) 1. alıcı teklif yapma veya çekilme arasında karar veriyor. (iii) 1. alıcı teklif yaparsa 2. alıcı eğer ilgiliyse bu teklifi karşılayarak malı bu fiyattan alabilir. 1. alıcı teklif sunmamışsa 2. alıcı malı en düşük fiyattan,  $\underline{b}$ , alabilir. Eğer  $\underline{b} = 1/2$  ise denge stratejileri bulun. Bu ihale prosedürü satıcı için optimal olur mu?

26. Bir ihalede kazanan 10 lira alıyor. Kurallar şu fark dışında İngiliz ihalesiyle aynı: En yüksek ikinci teklifi veren de parayı almasa bile verdiği teklif miktarını ödüyor.

- a) İki oyuncu bağdaşık olarak  $k$  ve  $k + \delta$  (burada  $\delta$ 'yı varolan en düşük para birimi olarak alın) tekliflerini yapmaya karar veriyor. Herhangi bir  $k$  değeri için bu teklifler bir Nash dengesi olur mu?
- b) Bu oyunun pür-strateji Nash dengesi var mıdır? Ve bu oyunun karma-strateji Nash dengesi var mıdır?

### 8.1 Giriş

Daha önceki bölümde ihaleleri tartışırken, alıcıların malı almak için teklifte bulunduklarını ifade etmiştik. Fakat bazı piyasalarda ihalelerde olduğu gibi bir mal için teklif vermek yerine, alıcıların ve satıcıların tekliflerde ve karşı-tekliflerde bulunduklarını görürüz, yani ilgili mal üzerine pazarlık yaparlar. Örneğin emlak veya otomobil piyasalarında (bu durum fiyatı yüksek olan mallarda daha fazla gözlenen bir olgudur) ticaret, alıcı ve satıcının karşılıklı teklifleri sonucunda oluşan anlaşma ile gerçekleşir. Dolayısıyla bu piyasaları analiz etmek ve anlamak için daha önceki bölümde ihaleler için kullanılan yöntemden farklı bir yöntem kullanmamız gerekir. Pazarlıkta daha şahsi bir iletişim söz konusuyken ihalelerde bu söz konusu değildir.

Tabii pazarlık teorileri sadece alıcı ve satıcıların karşı tekliflerde bulunduğu bu tür piyasaları anlamak için değil, bir pastanın paylaşımından tutun, bir basketbolcunun kontratının düzenlemesine, iki şirketin birlikte yatırım kararı vermesine (AR-GE yatırımları gibi) veya kamu kaynaklarının paylaşımına kadar başka birçok alanda kullanılabilir. Bu bölümde bu tür fiyatlandırma davranışını incelemek için kullanılan pazarlık teorilerini inceleyeceğiz.

Bu bölümde ilk önce pazarlığın aksiyomatik teorilerini tartışacağız. Bu teoriler pazarlık sonucunun belirli makul sonuçları sağlaması gerektiği düşüncesine dayanır. Yani örneğin bazı kaynakların paylaşımı ya da maliyetlerin dağıtılması sırasında, dağıtım mekanizmalarının *eşitlik* ve *etkinlik* kavramlarına uygun olması gerektiği düşünülür. Daha sonra ilerleyen altbölümlerde bazı aksiyomatik pazarlık çözümlerini anlatacağız. Bunlar sırasıyla Nash Pazarlık çözümü, pazarlıkta monotonluk ve Kalai-Smorodinsky çözümüdür. Daha sonra ikiden fazla oyuncunun dahil olduğu pazarlık oyunlarına yani koalisyon oyunlarına bakacağız. Bu bölümde, özellikle bu tür pazarlık oyunlarını incelemek için geliştirilen çekirdek

(core) kavramını tanıtaçağız. Son olarak stratejik unsurların önemli olduğu ardısal pazarlık oyunlarını inceleyeceğız.

## 8.2 Nash Pazarlık Çözümü

Herhangi bir pazarlık durumunda pazarlığa dahil olanların üzerinde anlaşabilecekleri çok sayıda olası durum ve dolayısıyla alternatif sonuçlar kümesi vardır. Bu kümeyi  $S$  ile gösterelim. Her iki taraf da bu kümenin unsurları üzerinde anlaşmak istemektedir. Anlaşmaya varıldıktan sonra pazarlık sona erer ve iki tarafın fayda düzeyi belirlenir. Anlaşamadıkları durumda mevcut durumlarına devam ederler. İki tarafın da pazarlığa girmesi ancak bu pazarlığın  $S$  kümesindeki sonuçlarının, her iki tarafa da anlaşmamaları durumundan daha fazla fayda vermesi ile mümkündür. Bir pazarlık oyununda  $(d_1, d_2)$  sıralı ikilisindeki değerler sırasıyla 1. ve 2. oyuncunun mevcut durumunu yani anlaşmazlık durumundaki faydalarını gösterir. Pazarlık durumunda ise  $S$ 'deki sonuçlar oyunculara bundan daha yüksek fayda sağlar. Bunu daha formel ifade edelim.

**Tanım 8.1** İki oyunculu bir pazarlık oyununda olası sonuçlar kümesi  $S$  ve her  $i$  oyuncusu için bu küme üzerinden tanımlanan fayda fonksiyonu  $u_i$  olsun. Böylece, (i) Her  $s \in S$  için,  $u_1(s) \geq d_1$  ve  $u_2(s) \geq d_2$  ve (ii) En azından bir  $s \in S$  için,  $u_1(s) > d_1$  ve  $u_2(s) > d_2$ 'dir.

Dikkat edilirse burada (ii) koşulu her iki oyuncuyu da anlaşmazlık durumundan daha iyi bir duruma getirmeyi garanti altına almayı amaçlar.

Bir pazarlık oyununu üçlü bir yapı şeklinde ifade edebiliriz:

$$B = (S, (u_1, d_1), (u_2, d_2)),$$

burada  $S, u_1$  ve  $u_2$  yukarıda verilen tanımdaki (i) ve (ii) koşullarını sağlamalıdır.

Dikkat edilmesi gereken diğer bir nokta da her  $s \in S$  alternatif sonucun  $(u_1(s), u_2(s))$  fayda çiftlerine karşılık gelmesidir. Bu fayda çiftlerine *fayda dağılımı* denir. Dolayısıyla her pazarlık oyunu ile ilişkili olarak fayda dağılımı kümesini yazabiliriz:

$$U = \{(u_1(s), u_2(s)) : s \in S\}.$$

Herhangi bir oyunda olduğu gibi bir pazarlık oyununda da amaç yeterince tatminkâr bir sonuç elde etmektir. Bir pazarlık oyununun sonucu, her  $B$  pazarlık oyununa  $S$  sonuçlar kümesinin bir altkümesini,  $s(B)$ , bulmak için belirli bir kuralın tanımlanması ile belirlenir (burada  $s(B)$  kümesi  $B$  pazarlık oyununun tüm karşılıklı tatmin edici anlaşmalarının kümesidir veya daha basitçe pazarlık oyununun çözümleri olarak düşünebiliriz). Yeterince iyi sonuçlar verecek böyle bir kuralı belirlemek de ancak bazı makul koşulların gerçekleşmesi ile mümkün olabilir. Şimdi bu koşulları tanıtalım.

i. Bu koşullardan biri pareto etkinliktir. Eğer aşağıdaki durumları sağlayacak diğer bir  $s \in S$  sonucu yoksa,  $s^* \in S$  sonucu pareto etkindir:

(a)  $u_1(s) \geq u_1(s^*)$  ve  $u_2(s) \geq u_2(s^*)$  ve (b) En az bir  $i$  oyuncusu için  $u_i(s) > u_i(s^*)$ .

Kısaca bir pazarlık sonucu pareto etkinse diğer oyuncuların refahı aynı kalırken oyuncuların en az birinin faydasını kesin bir şekilde iyileştirmenin imkanı yoktur. Diğer bir deyişle, eğer pazarlık sonucu pareto etkinse bir oyuncuya daha fazla vermek demek, diğer oyuncuya daha az vermek demektir.

ii. Pazarlık çözümünün sahip olması gereken diğer bir özellik de ilgisiz alternatif sonuçların bağımsız olmasıdır. Eğer her  $B = (S, (u_1, d_1), (u_2, d_2))$  pazarlık oyunu için,  $(d_1, d_2) \in U_T$  ve  $s(B) \subseteq T$  durumunu sağlayan  $S$ 'nin her altkümesi için

$$s(B_T) = s(B)$$

durumuna sahipsek,  $s(\cdot)$  çözüm kuralının ilgisiz alternatiflerden bağımsız olduğu söylenir. Bu koşul, başka bir deyişle, herhangi bir kabul edilebilir pazarlık çözüm kuralının, oyuncuların daha az tercih ettikleri alternatiflerin atılması durumunda dahi kabul edilebilir kalmaya devam etmesini sağlar.

iii. Diğer bir özellik de, pazarlık çözümünün fayda fonksiyonlarının ölçeğindeki değişikliklerden bağımsız olmasıdır. Başka bir deyişle pazarlık sonucu, lineer dönüşümlerden bağımsız olmalıdır. Herhangi bir  $B = (S, (u_1, d_1), (u_2, d_2))$  pazarlık problemi ve  $v_i = a_i + b_i u_i$  gibi herhangi bir lineer fayda fonksiyonu için (burada  $b_i > 0$ ), eğer  $B^* = (S, (v_1, a_1 + b_1 d_1), (v_2, a_2 + b_2 d_2))$  pazarlık oyunu  $s(B^*) = s(B)$  durumunu sağlarsa,  $s(\cdot)$  pazarlık çözümünün lineer dönüşümlerden bağımsız olduğu söylenir.

Bu özellik, pazarlık çözüm kuralının faydayı ölçerken kullanılan birim veya ölçekten etkilenmediğini garanti altına almak için kullanılır. Diğer bir deyişle, pazarlık oyununun çözümü fayda fonksiyonlarının lineer dönüşümlerine duyarlı olmamalıdır.

Şimdi yukarıda verilen bütün bu özellikleri sağlayan bir çözüm kuralı tanımlayabiliriz. Bunun için her  $B = (S, (u_1, d_1), (u_2, d_2))$  pazarlık oyununa aşağıda verilen  $f_B = S \rightarrow R$  gibi bir fonksiyonu ilişkilendirerek başlayalım:

$$f_B = [u_1(s) - d_1] [u_2(s) - d_2]. \quad (8.1)$$

Bu fonksiyonu maksimize eden değerlerin kümesini  $\sigma(B)$  ile gösterelim:

$$\sigma(B) = \{s \in S : f_B(s) = \max_{x \in S} f_B(x)\}$$

Herhangi bir  $B$  pazarlık oyunu için  $\sigma(B)$  kümesine ait elemanları (eğer varsa)  $B$  pazarlık oyununun Nash dengeleri olarak tanımlarız. Burada  $\sigma(B)$ 'nin boş küme olmaması için  $U$  kümesinin önemli bir matematiksel özelliğe sahip olması, yani kompakt olması gerekir. Eğer fayda dağılımı kümesi ( $U$ ) sınırlı ve kapalıysa, bu kümenin kompakt olduğu söylenir. Kompakt varsayımı,  $U$  kümesi üzerinde tanımlanan sürekli fonksiyonların maksimum ve minimum değerler almasını garanti altına alır. Dolayısıyla eğer  $B$  gibi bir pazarlık oyununun fayda dağılımı kümesi,

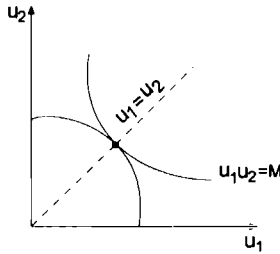
$U = \{u_1(s), u_2(s) : s \in S\}$ , kompakt ise,  $f : U \rightarrow R$  sürekli fonksiyonu (yani  $f_B(u_1, u_2) = (u_1 - d_1)(u_2 - d_2)$ ) en azından bir maksimum değere sahiptir. Böylece  $f(u_1, u_2) \leq f(u_1^*, u_2^*)$  durumunu sağlayan bazı  $(u_1^*, u_2^*) \in U$  değerleri var demektir. Başka bir ifade ile, herhangi  $s^* \in \sigma(B)$  için  $u_1^*(s^*) = u_1^*$  ve  $u_2^*(s^*) = u_2^*$  durumuna sahip oluruz. Yani bu  $\sigma(B)$ 'nin boş küme olmadığı anlamına gelir. Bu yüzden, kompakt fayda dağılım kümesine sahip herhangi bir  $B$  pazarlık oyununda en azından bir Nash dengesi vardır.

Şimdi ilk defa Nash (1950b) tarafından formalize edilen pazarlık teoremin ilk kısmını yukarıda kullanılan tanımların yardımıyla ifade edebiliriz.

**Teorem 8.1** *Kompakt fayda dağılım kümeleri üzerinde tanımlanan pazarlık oyunlarında, Nash kuralı,  $\sigma(\cdot)$ , pareto etkin, ilgisiz alternatiflerden bağımsız ve lineer dönüşümlerden bağımsızdır.*

Nash çözüm kuralının yukarıda verilen özelliklerinin yanında diğer bazı özellikleri de vardır. Bu özellikler çözüm kuralının simetrik ve konveks olmasıdır.

iv. Bir pazarlık çözüm kuralının simetrik olduğunu söylemek için her şeyden önce fayda dağılım kümesinin konveks ve simetrik olması gerekir. Bir pazarlık oyununun fayda dağılım kümesi, eğer küme içinde seçilen herhangi iki noktayı birleştiren doğru üzerindeki her nokta küme içinde kalırsa konvektir ve eğer  $(u_1, u_2) \in U$  durumu, aynı zamanda  $(u_2, u_1) \in U$  anlamına geliyorsa simetriktir. Geometrik olarak simetriklik,  $U$  kümesinin kendisini iki-sektöre ayıran  $u_1 = u_2$  doğrusuna göre simetrik olması anlamına gelir (Şekil 8.1).



**Şekil 8.1** Fayda dağılım kümesi simetrik, kompakt ve konveks bir kümedir

Çözüm kuralı ile ilgili dördüncü koşulu tanımlamak için şu tanıma ihtiyacımız var: Eğer bir  $B$  pazarlık oyununun fayda dağılım kümesi konveks ve kompakt ise, buna konveks pazarlık oyunu denir. Eğer  $d_1 = d_2$  ve fayda dağılım kümesi simetrik ve kompakt ise bu pazarlık oyununa simetrik pazarlık oyunu denir.

Şimdi dördüncü koşulu ifade edebiliriz. Eğer  $B$  simetrik pazarlık oyununun her  $s \in s(B)$  alternatif çözümü için  $u_1(s) = u_2(s)$  durumuna sahipsek  $s(\cdot)$  çözüm kuralına simetrik denir. Yani bir pazarlık çözüm kuralı simetrikse bu her simetrik pazarlık oyununda oyunculara eşit davranıldığı anlamına gelir. Eşit davranmak-taki kasıt, oyuncular aynı düzeyde anlaşmazlık faydaları alıyorsa, herhangi bir anlaşma noktasında da eşit faydalar almaları demektir.

Şimdi de Nash pazarlık teoreminin ikinci kısmını ifade edebiliriz.

**Teorem 8.2** *Eğer  $B$  konveks bir pazarlık oyunu ise, aşağıdaki durumu sağlayacak  $(u_1^*, u_2^*)$  gibi bir fayda dağılımı vardır:*

$$\sigma(B) = \{s \in S : u_1(s) = u_1^* \text{ ve } u_2(s) = u_2^*\}$$

*ve eğer  $B$  aynı zamanda simetrik ise bu durumda  $u_1^* = u_2^*$  olur.*

Özellikle konveks ve simetrik pazarlık oyunları üzerindeki  $\sigma(\cdot)$  Nash çözüm kuralı pareto optimal, ilgisiz alternatiflerden ve lineer dönüşümlerden bağımsız ve simetriktir. Nash çözüm kuralının doğasını anlamak için aşağıda basit bir örneği kullanalım.

### Örnek 8.1

İki bireyin toplam 200 lira gibi bir para miktarı üzerinde bir pazarlığa giriştiklerini varsayalım. Eğer paranın nasıl bölündüğü konusunda anlaşamazlarsa ikisi de herhangi bir para alamayacaktır. Bu durumda  $S$  pazarlık kümesi, tüm  $(x_1, x_2)$  negatif-olmayan reel sayılar kümesinden oluşur:

$$S = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ ve } x_1 + x_2 \leq 200\},$$

burada  $x_i$ ,  $i$  oyuncusunun aldığı parayı gösterir.

Herhangi bir bireyin elde ettiği fayda aldığı para ile ölçülür. Bu yüzden, oyuncuların fayda fonksiyonları şöyledir:

$$u_1(x_1, x_2) = x_1 \text{ ve } u_2(x_1, x_2) = x_2.$$

Eğer anlaşmazlık varsa, oyuncular  $d_1 = d_2 = 0$  elde ederler. Kolayca görülebileceği gibi, bu pazarlık oyunu konveks ve simetriktir.

Aynı zamanda, bu pazarlık oyunu için (8.1)'de ifade edilen  $f_B = S \rightarrow R$  fonksiyonu aşağıdaki gibi olur:

$$f(x_1, x_2) = u_1(x_1, x_2)u_2(x_1, x_2) = x_1x_2.$$

Yukarıda verilen Nash pazarlığın ikinci teoreminden hareketle,  $f$  fonksiyonunun maksimum değerinin, aynı zamanda bu pazarlık oyununun tek Nash dengesi olduğunu söyleyebiliriz. Bu çözüm pareto etkin, ilgisiz alternatiflerden bağımsız, lineer dönüşümlerden bağımsız ve simetriktir. Cebirsel işlemler sonucunda  $f$  fonksiyonunun tek maksimum değerinin  $x_1^* = x_2^* = 100$  olduğu görülür. Yani pazarlık oyununun Nash çözümü her oyuncuya 100 lira vermektir.

Bu teoremin gücü, her simetrik konveks pazarlık oyununun tüm istenilir koşulları sağlayan bir çözüme sahip olmasıdır. Bu yukarıdaki örnekte de açıkça görülmektedir. Bu örnekte  $x_1 + x_2 = 200$  eşitliğini sağlayan herhangi bir  $(x_1, x_2)$  paylaşımı, pareto etkin, ilgisiz alternatiflerden bağımsız ve lineer dönüşümlere karşı

değişmezdir. Simetriyi sağlayan tek bir çözüm çifti vardır:  $x_1^* = x_2^* = 100$ . Burada Nash teoreminin bize verdiği mesaj şudur: Her konveks ve simetrik pazarlık oyununun Nash çözüm kuralı tek bir simetrik çözüm verir.

#### *Simetri Aksiyomu Geçerli Değilse*

Şu ana kadar tartıştığımız Nash pazarlık çözümü simetri varsayımı altında işleyen bir çözüm biçimidir. Fakat pek çok pazarlık oyunu aslında simetrik değildir. Bu durum genelde oyuncuların kendi aralarındaki riske karşı davranışlarındaki veya fayda dağılım kümelerindeki asimetriden kaynaklanmaktadır. Bu durumlarda da Nash çözüm kuralı hala iyi çalışan bir yöntemdir.

Yani daha önce tanımlandığı gibi herhangi bir  $B$  pazarlık oyununun  $\sigma(B)$  Nash çözüm kümesi,  $f_B(s) = (u_1(s) - d_1)(u_2(s) - d_2)$  fonksiyonunu maksimize eden tüm değerleri içerir:

$$\sigma(B) = \{s \in S : f_B(s) = \max_{x \in S} f_B(x)\}.$$

Böylece riskten kaçınma düzeyindeki bir değişiklik fayda fonksiyonlarında ifade edilir ve buna göre Nash dengesi de değişecektir. Benzer olarak anlaşmazlık fayda düzeylerindeki bir farklılık,  $d_i$  değerini ve dolayısıyla da  $f_B$  fonksiyonunu değiştirecektir, bu da Nash çözümünü etkileyecektir. Gerçekte,  $d_1$  arttığında (dışarıdaki opsiyondaki iyileşmeden dolayı), Nash çözümü 1. oyuncunun aldığı miktar artırır. Her iki asimetrisinin olduğu durumda, Nash çözümü makul ve sezgisel çözüm üretmeye devam etmektedir çünkü bu durumlar ya fayda fonksiyonlarını değiştirir ya da anlaşmazlık fayda düzeylerini değiştirir.

Bu tür durumlarda simetri aksiyomunun geçerli olmadığı daha genel bir fonksiyonel form şöyle yazılabilir:

$$f_B = [u_1(s) - d_1]^\theta [u_2(s) - d_2]^{1-\theta}, \quad (8.2)$$

burada  $\theta \in (0, 1)$  1. oyuncunun pazarlık gücünü gösterir.

Eğer oyuncuların fayda fonksiyonlarını basitçe diye  $u_1(s) = s_1$  ve  $u_2(s) = s_2$  diye tanımlanırsak:

$$f_B = [s_1 - d_1]^\theta [s_2 - d_2]^{1-\theta},$$

burada  $s_j \geq d_j$ ,  $j = 1, 2$ . Dikkat edilirse,  $\theta = 1/2$  olduğu varsayılırsa, (8.1) problemine geri döneriz. Limitte eğer  $\theta \rightarrow 1$  ise, pazarlık oyunu 1. oyuncunun  $s_2 \geq d_2$  kısıtı altında  $s_1$ 'nin maksimize edilmesi anlamına gelir veya limitte  $\theta \rightarrow 0$  ise bu durumda da pazarlık oyunu 2. oyuncunun  $s_1 \geq d_1$  kısıtı altında  $s_2$ 'nin maksimize edilmesi anlamına gelir.

Şimdi (8.2) fonksiyonuna tekrardan geri dönelim. Bu fonksiyonun  $s$ 'ye göre 1.dereceden koşulu şudur:

$$\theta [u_2(s) - d_2] u_1'(s) + (1 - \theta) [u_1(s) - d_1] u_2'(s) = 0 \quad (8.3)$$

Basit olması için fayda düzeylerini  $u_1 = s$  ve  $u_2 = 1 - s$  şeklinde ifade edelim.

Buradan hareketle (8.3) şunu verir:

$$\begin{aligned} s &= d_1 + \theta(1 - d_1 - d_2), \\ 1 - s &= d_2 + (1 - \theta)(1 - d_1 - d_2). \end{aligned}$$

Burada  $1 - d_1 - d_2$ , anlaşmazlık sonrası kalan fazlalıktır. Yani her oyuncu kendi tehdit noktası artı pazarlık gücüyle orantılı fazlalıktan pay alır. Bu yüzden de Nash çözümü, fazlalığı paylaşmak olarak da nitelendirilebilir.

Tabii burada dikkat edilmesi gereken diğer bir nokta fayda fonksiyonlarını tek değişkenle ifade etmek gibi bir zorunluluğun olmamasıdır. Örneğin, 1. oyuncunun işçi, 2. oyuncunun firma olduğu bir pazarlık oyununda, ücretler ve çalışma saatleri üzerinden pazarlık yaptıklarını varsayalım ve oyuncuların faydalarını  $u_i = u_i(w, h)$  ile gösterelim, burada  $w$  ücreti ve  $h$  çalışma saatini göstermektedir. Konkavlık varsayımı altında (8.2) Nash probleminin birinci dereceden koşulu şudur:

$$\begin{aligned} \theta [u_2(c, h) - d_2] \frac{\partial u_1}{\partial c} + (1 - \theta) [u_1(c, h) - d_1] \frac{\partial u_2}{\partial c} &= 0, \\ \theta [u_2(c, h) - d_2] \frac{\partial u_1}{\partial h} + (1 - \theta) [u_1(c, h) - d_1] \frac{\partial u_2}{\partial h} &= 0. \end{aligned}$$

Bu iki denklemin aynı anda çözümünden oyundaki denge ücreti ( $w^*$ ) ve denge çalışma saatini ( $h^*$ ) buluruz.

Diğer yandan, Nash çözümü, pazarlık oyununun fayda dağılım kümesinin asimetrik olduğu durumlarda yeterince iyi sonuçlar vermez. Bu yüzden bu tür pazarlık oyunları için alternatif çözüm metodları gereklidir. Şimdi bunlardan biri olan Kalai-Smorodinsky çözüm kuralına bakalım.

### 8.3 Kalai-Smorodinsky Çözüm Kuralı

Daha önce belirttiğimiz gibi, Nash çözüm kuralı hem simetrik pazarlık oyunları için hem de riskten kaçınma ve anlaşmazlık noktalarındaki asimetrik durumlara sahip pazarlık oyunları için iyi bir çözüm metodudur. Fakat Nash çözüm kuralı, fayda dağılım kümesinin asimetrik olduğu durumlarda yeterince anlamlı çözümler üretmekte başarılı değildir. Örneğin fayda dağılım kümesini asimetrik yapacak şekilde pastanın büyüdüğü ya da küçüldüğü durumlarda, Nash çözüm kuralı anlamlı çözümler vermez. Bu duruma verilen klasik örnek, iflas durumunda farklı miktarlarda borç verenlerin geri alacağı miktardır. Bu gibi durumlarda, herhangi bir iflas olmadığı müddetçe, borç verenler verdikleri kredilerin büyüklüğü oranında geri ödeme beklerler. Fakat borç alanlar iflas ettiğinde Nash çözümü, kalan aktiflerin borç verenler arasında eşit paylaşılmasını önerir. Eğer verilen krediler eşit miktarda değilse, bu paylaşım kuralı çok anlamlı değildir. Mantıklı çözüm, aktiflerin verilen kredilerle orantılı bir şekilde paylaşılmasıdır.

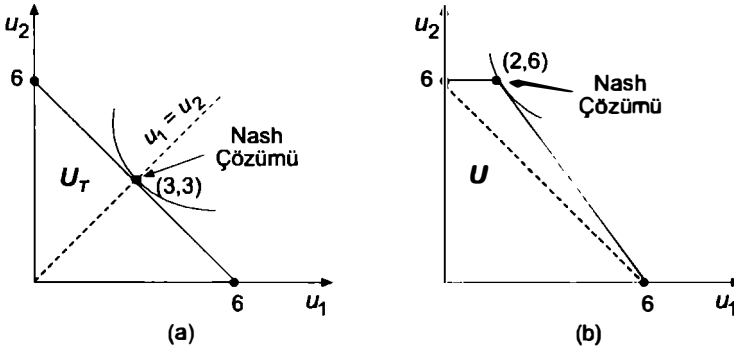
Bu bölümde simetri koşulunun sağlanmadığı böyle durumlarda Nash çözümü

yerine, *monotonluk* koşulunu sağlayan alternatif bir çözüm metodunu tartışacağız. Monotonluk koşulu, pazarlık çözümünün pazarlık alternatifler kümesinin genişlemesi durumunda, bir oyuncuya buna paralel olarak fayda vermeyi sağlar. Şimdi bunu formel olarak tanımlayalım.

**Tanım 8.2** Herhangi bir  $B = (S, (u_1, d_1), (u_2, d_2))$  pazarlık oyunu ve  $S'$  nin herhangi bir  $T$  altkümesi için,  $B$  pazarlık oyununun  $s(B)$  çözüm kümesi,  $B_T = (T, (u_1, d_1), (u_2, d_2))$  pazarlık oyununun  $s(B_T)$  çözüm kümesine baskınsa,  $s(\cdot)$  çözüm kuralı monotonudur. Başka bir deyişle her  $s \in T$  için aşağıdaki koşulu sağlayan bir  $s' \in S'$  sonucu varsa bu  $s(\cdot)$  çözüm kuralına monoton denir:

$$u_1(s') \geq u_1(s) \text{ ve } u_2(s') \geq u_2(s).$$

Nash çözüm kuralı monotonluk koşulunu sağlamaz. Şekil 8.2'de verilen pazarlık oyunlarına bakalım. Şekil 8.2(a)'da pazarlık oyunu simetrik ve Nash çözümü (2, 2) fayda sonucunu verir. Fakat Şekil 8.2(b)'de oyun simetrik değildir. Nash çözüm kuralı (1, 4) fayda çiftini çözüm olarak verir. Bu durum, Şekil 8.2(a)'daki oyunda verilen  $U_T$  fayda dağılım kümesinin, Şekil 8.2(b)'deki oyunda verilen  $U$  fayda dağılım kümesinin bir altkümesi olmasına rağmen, 1. oyuncunun bu oyundaki Nash kuralına göre daha az aldığını gösterir. Yani asimetri durumlarında, Şekil 8.2(b)'de gösterilen tipteki pazarlık oyunlarında olduğu gibi, biraz daha farklı bir kritere ihtiyacımız var. Fayda dağılım kümesinin asimetrik olduğu durumlar için pazarlık çözüm kuralı E. Kalai ve M. Smorodinsky (1975) tarafından geliştirilmiştir. Şimdi bu çözüm kuralına bakalım.



Şekil 8.2

Herhangi bir pazarlık oyunu,  $B = (S, (u_1, d_1), (u_2, d_2))$ , verildiğinde her oyuncunun faydasını maksimize eden sonucu bulabiliriz.

$$\eta_1 = \max_{s \in S} u_1(s) \text{ ve } \eta_2 = \max_{s \in S} u_2(s).$$

$B$  pazarlık oyununun fayda dağılım kümesi kompakt ise,  $\eta_1$  ve  $\eta_2$  değerleri bulunabilir.  $B$  pazarlık oyununda, *Kalai-Smorodinsky doğrusu* ( $KS$  doğrusu), dediğimiz,  $u_1 u_2$ -düzleminde orijinden geçen ve  $k = \frac{\eta_1}{\eta_2}$  eğimine sahip bir doğru vardır. Bu yüzden  $KS$  doğrusunun denklemi  $u_2 = k u_1$  şeklinde ifade edilir.

Eğer  $(d_1, d_2) \neq (0, 0)$  ise,  $KS$  doğrusu  $u_1 u_2$ -düzleminde  $(d_1, d_2)$  ve  $(\eta_1, \eta_2)$  doğruları arasından geçer. Bu durumda  $KS$  doğrusu  $k = \frac{\eta_1 - d_2}{\eta_2 - d_1}$  eğimine sahiptir ve dolayısıyla denklemi şöyle yazılabilir:

$$u_2 - d_2 = k(u_1 - d_1).$$

Pazarlık oyununun *Kalai-Smorodinsky fayda dağılımı* (veya kısaca  $KS$  fayda dağılımı)  $U$  fayda dağılım kümesinde tanımlanan  $KS$  doğrusu üzerindeki en uzak kuzeydoğu noktasıdır  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ 'dir. Bunu formel olarak ifade edelim.  $K = \{s \in S : (u_1(s), k u_2(s)) \in U\}$  kümesi düşünüldüğünde,  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$  noktası aşağıdaki değerlerdir:

$$\bar{u}_1 = \max u_1(s) \text{ ve } \bar{u}_2 = k \bar{u}_1.$$

Eğer  $K = \emptyset$  ise, pazarlık oyunu bir  $KS$  fayda dağılımına sahip değildir. Bir pazarlık problemi en fazla bir  $KS$  fayda dağılımına sahip olabilir, yani bir pazarlık oyunu ya bir  $KS$  fayda dağılımına sahiptir ya da hiçbir  $KS$  fayda dağılımına sahip değildir. Eğer bir pazarlık oyunu  $U$  gibi kompakt fayda dağılım kümesine sahipse,  $((d_1, d_2) \in U$  veri alındığında), bu pazarlık oyunu bir  $KS$  fayda dağılımına sahiptir demektir.

Şimdi de Kalai-Smorodinsky çözüm kuralını,  $k(\cdot)$ , tanımlayalım:

**Tanım 8.3** *Herhangi bir pazarlık oyununun,  $B = (S; (u_1, d_1), (u_2, d_2))$ , Kalai-Smorodinsky çözüm kuralı basitçe aşağıdaki gibidir:*

$$k(B) = \{s \in S : u_1(s) = \bar{u}_1 \text{ ve } u_2(s) = \bar{u}_2\}.$$

*Eğer  $\beta$  pazarlık oyunu bir  $KS$  fayda dağılımına sahip değilse, bu durumda  $k(B) = \emptyset$  olur.*

Kalai-Smorodinsky çözüm kuralının temel özelliklerini şöyle sıralayabiliriz:

- i. Kalai-Smorodinsky çözüm kuralı lineer dönüşümlerden bağımsızdır fakat ilgisiz alternatiflerden bağımsızlığı sağlayamaz.
- ii. Her konveks pazarlık oyunu bir  $KS$  fayda dağılımına sahiptir ve Kalai-Smorodinsky çözüm kümesi  $k(B)$  boş olmayan ve pareto etkin pazarlık sonuçlarını dahil eder.

iii. Eğer  $B$  konveks bir simetrik pazarlık oyunu ise  $B$ 'nin Kalai-Smorodinsky çözümü, Nash çözümü ile örtüşür, yani  $k(B) = \sigma(B)$ .

Herhangi bir pazarlık oyununda  $KS$  çözüm kuralını daha iyi anlamak için klasik bir örnek olan ücret pazarlık oyununa bakalım.

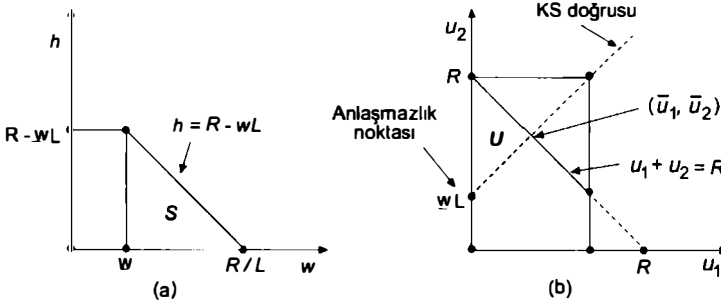
### Örnek 8.2 Ücret pazarlığı

Bir sendika ile bir firmanın sık sık ücret üzerine pazarlık yaptıklarını düşünelim. Bu durumu anlamak için basit bir pazarlık oyunu tasarlayalım. Sendikanın üye sayısı  $L$  kadardır. Firma malını rekabetçi bir ortamda sabit bir fiyatla,  $p$ , satmaktadır. Firmanın üretim fonksiyonunu  $f(L)$  ile gösterelim. Bu durumda firmanın geliri  $R = pf(L)$  olarak ifade edilir. Eğer firma  $w$  ücretini öderse, firmanın kârı  $\pi = pf(L) - wL = R - wL$ 'dir. Firma bu kârdan hissedarlarına belirli bir kâr payı,  $h$ , dağıtmaktadır.

Firma (1. oyuncu) ve sendika (2. oyuncu) arasında  $w$  ücreti üzerine yapılan pazarlık anlaşmazlıkla sonuçlanırsa firmanın kârı sıfır ve işçilerin aldığı ücret ise  $\underline{w}$  (dışarıdaki opsiyon) olmaktadır, dolayısıyla  $d_1 = 0$  ve  $d_2 = \underline{w}L$ . Aksi durumda (yani anlaşılırsa) sendikanın geliri  $wL$  ve firmanın kârı  $R - wL - h$  kadardır, yani

$$u_1(w, h) = R - wL - h \text{ ve } u_2(w) = wL,$$

burada  $\underline{w} \leq w \leq \frac{R}{L}$  ve  $0 \leq h \leq R - wL$ . Şekil 8.3(a)'da pazarlık sonuçları kümesi  $S$  ile gösterilmektedir. Şekil 8.3(b)'de ise bu pazarlık oyununun fayda dağılım kümesinin konveks ve kompakt olduğu görülmektedir (taralı üçgen alan). Fakat dikkat edilirse bu pazarlık oyunu konveks olmasına rağmen simetrik değildir.



Şekil 8.3 Ücret pazarlık oyununda Kalai-Smorodinsky çözümü

KS doğrusunun eğimi açık bir şekilde şöyle ifade edilir:

$$k = \frac{R - \underline{w}L}{R - \underline{w}L} = 1.$$

Bu yüzden KS doğrusu,

$$u_2 = u_1 + \underline{w}L$$

tarafından belirlenir.  $u_2 = R - u_1$  diye tanımlarsak,  $R - u_1 = u_1 + \underline{w}L$  sonucunu elde ederiz. Burada  $u_1$  değerini çözerek aşağıdaki fayda düzeylerini buluruz:

$$\bar{u}_1 = \frac{R - \underline{w}L}{2} \text{ ve } \bar{u}_2 = \frac{R + \underline{w}L}{2}.$$

$\bar{u}_2 = w^*L$  olduğundan dolayı,  $KS$  çözümünden çıkan ve üzerinde anlaşılan ücret düzeyi şudur:

$$w^* = \frac{R + wL}{2}.$$

Sonuç olarak, bu örnek üzerinden  $KS$  çözümünün, asimetrik fayda dağılım kümelerinin olduğu pazarlık oyunlarında daha mantıklı sonuçlar verdiğini göstermeye çalıştık.

## 8.4 Koalisyon Oyunları

Şimdiye kadar incelediğimiz pazarlık oyunlarında, sadece iki birey arasındaki pazarlık durumlarını dikkate aldık. Fakat pazarlık problemleri ikiden fazla bireyi kapsayabilir. Çok sayıda bireyin olduğu durumlarda grupların verdiği kararlar önemli hale gelir. Genellikle bir grubun üyeleri birbiriyle çatışan çıkarlara sahiptir. Böyle durumlarda grup tüm üyelerin kabul edeceği önerilerde bulunmak zorundadır.

Çok sayıda insanın olduğu bir pazarlık problemindeki mantık, genel bir pazarlık problemindeki mantıkla aynı olsa da aralarında önemli bir fark vardır. Bu da bazı oyuncuların birlikte hareket ederek *koalisyon* kurmalarıdır. Burada önemli olan, koalisyon üyelerinin gerçekleştirebilecekleri alternatif sonuçlar üzerinde anlaşmaları ve bunun, tüm  $n$  tane oyuncunun olduğu durumda kurulan *büyük koalisyon*dan daha fazla fayda sağlayabileceğidir. Bu yüzden büyük koalisyon, her üyesine diğer bir koalisyonunun sağladığı faydadan daha fazlasını verecek bir öneride bulunmalıdır, aksi takdirde farklı koalisyonlar ortaya çıkabilir. Sonuç olarak, bir pazarlık probleminde herhangi bir makul alternatifi tartışırken, oyuncuların herhangi bir koalisyondan alacakları faydaları tanımlamamız gerekir.

Bir koalisyon oyununun sonucu, oyuncuların oluşturduğu gruplar kümesinin bölmelerinden (farklı üyelerden oluşan olası koalisyonlar kümesi) oluşur ve bölmedeki her grubun hareketi ile birlikte tanımlanır. Koalisyon bölmesinde, en uç durumda, her grupta kendi başına hareket eden bir birey vardır. Diğer uç durumda ise tüm oyuncuları içeren bir tek grup vardır, yani büyük koalisyon. Her oyuncu sadece ait olduğu bölmenin üyesi tarafından seçilen hareketleri dikkate alır. Böyle oyunlarda her oyuncunun tercihi basitçe onu dahil eden tüm olası grupların hareketlerini sıralamaya tabi tutması ve en yüksek faydayı veren hareketi seçmesidir. Burada diğer bir önemli nokta şudur: Koalisyon oyunu tanımında, bir koalisyonun hareketleri ile koalisyon üyelerinin hareketleri arasında bir ilişki kurulmaz. Koalisyonun hareketleri veri alınır, yani üyelerinin davranışlarından türetilmez.

Kısaca bir koalisyon oyunu, bir oyuncular kümesine; her koalisyon için bir hareket kümesine ve her oyuncu için, üyesi olduğu tüm olası koalisyonların hareketleri üzerinde bir tercih sıralamasına sahiptir.

Burada büyük koalisyonu (tüm oyuncular kümesinin oluşturduğu koalisyon)  $N$  ile, herhangi bir koalisyonu ise  $C$  ile göstereceğiz. Böyle bir oyunda herhangi bir  $C$  koalisyonunun her hareketi, ilgili varlığın (mal veya para olabilir)  $C$ 'nin üyeleri

arasında nasıl dağıldığını tanımlar. Biz buna malın  $C$ -dağılımı diyelim.

Her  $C$  koalisyonu için, bu koalisyonla ilişkilendirilen boş olmayan bir sonuçlar kümesi,  $S_C \in S$ . vardır. Yani  $n$ -oyunculu bir pazarlık oyunu verildiğinde, her  $C$  koalisyonunu  $S_C$  gibi bir sonuçlar kümesine yollayan bir fonksiyon vardır. Bu sonuçlar kümesi, sadece  $C$  koalisyonunun üyeleri tarafından gerçekleştirilen alternatif sonuçlar kümesidir. Büyük koalisyon ( $N$ ), sonuçlar kümesindeki ( $S$ ) her alternatif sonucu gerçekleştirebildiğinden, açıkça  $S_N = S$  'dir. Bir  $C$  koalisyonunun olası pazarlık sonuçlar kümesi, bu koalisyon üyelerinin  $S_C$  kümesindeki alternatif sonuçlardan elde edebileceği tüm faydalar kümesi olan  $v(C)$ 'yi verir. Genel olarak,  $v(C)$  kümesi tüm  $(v_1, \dots, v_n) \in R^n$  vektörlerini içerir. Tüm  $i \in C$  için  $v_i = u_i(s)$  durumunu sağlayacak belirli bir  $s \in S_C$  vardır. Dolayısıyla  $v(\cdot)$  fonksiyonunu şöyle tanımlarız:

$$v : Z \rightarrow R^n,$$

burada  $Z$  kümesi,  $N$  kümesinin tüm altkümelerinin (boş küme hariç) kümesidir. Yani her  $C$  koalisyonu için  $v(C)$  kümesi, koalisyonun üyeleri için elde ettiği fayda dağılım kümesini tanımlar. Buna *koalisyon fonksiyonu* denir. Başka bir deyişle  $v(C)$  fonksiyonu,  $C$  koalisyonu için kendi üyelerinin tüm fayda dağılımını veren bir fonksiyondur. Aşağıdaki örnek bu notasyonları daha iyi anlamamıza yardımcı olacaktır.

### Örnek 8.3

Üç enerji firması birbirine yakın mekanlarda bulunmaktadır. Herbiri yasayla belirlenen bölgenin tek enerji dağıtıcısı konumundadır. Fakat üretim tesislerinin lokasyonu, enerji şirketlerine, kendi yasama alanları içindeki enerji imkanlarını birbiriyle anlaşarak değiştirmeleri durumunda, daha ucuza enerji arz etme imkanı vermektedir.

Bu durumda koalisyon büyüklüğü 1 (yani koalisyondaki eleman sayısı) iken oluşan faydaları şöyle yazabiliriz:

$$v(\{1\}) = \{(1, x_2, x_3) : x_2, x_3 \in R\},$$

$$v(\{2\}) = \{(x_1, 1, x_3) : x_1, x_3 \in R\}.$$

$$v(\{3\}) = \{(x_1, x_2, 1) : x_1, x_2 \in R\}.$$

Yukarıdaki ifadede örneğin  $v(\{1\})$  kümesi birinci şirketin herhangi bir ortaklığa girmeden önceki kâr düzeyini göstermektedir (1 değeri, normalize edilen değerdir). Diğer iki firmanın kârlarını ise koalisyonda olmadıkları için sadece  $x_2$  ve  $x_3$  diye yazdık. Büyüklüğü iki olan koalisyonlar ise şöyle ifade edilir:

$$v(\{1, 2\}) = \{(0.5, 0.5, x_3) : x_3 \in R\},$$

$$v(\{2, 3\}) = \{(x_1, 0.5, 0.5) : x_1 \in R\}$$

ve

$$v(\{1, 3\}) = \{(0.6, x_2, 0.4) : x_2 \in R\}.$$

Bu ifadeler de bize ikili koalisyonlar ve onların faydalarını verir. Son olarak büyük koalisyonu şöyle ifade ederiz:

$$v(\{1, 2, 3\}) = \{(0, 9, 1, 0.6)\}.$$

#### 8.4.1 Bağlayıcı Koalisyon Oyunu

Daha önce de ifade ettiğimiz gibi, bir koalisyon oyunu, oyuncuların bireysel olarak değil grup olarak rasyonel davrandıkları durumları modellemeye çalışır. Bu konudaki teoremin büyük bir kısmı, bir araya gelme motivasyonunun yüksek olduğu durumlarla ilgilendir. Dolayısıyla tüm oyuncuları içeren tek bir koalisyon oluşturmanın bir dezavantaj yaratmadığı durumları inceler. Tüm oyuncuların bir araya geldiği bir büyük koalisyon söz konusu olabilir. Bu da daha küçük gruplardan oluşan koalisyonların dağılma ihtimali olduğu anlamına gelir. Böyle durumlarda büyük koalisyonun ürettiği sonuçlar en az altgruplardan oluşan koalisyonlar kadar iyidir. Bu tür oyunlara *bağlayıcı koalisyon oyunları (cohesive coalition games)* denir.

**Tanım 8.4** Eğer tüm oyuncular kümesinin her  $\{C_1, \dots, C_k\}$  koalisyon bölmesi ve her koalisyon bölmesinden oluşan  $(a_{C_1}, \dots, a_{C_k})$  hareketler kombinasyonu için, bölmedeki her  $C_j$  koalisyonunda her  $i$  oyuncusunun  $a_{C_j}$  hareketine eşit veya ondan daha fazla fayda sağlayan büyük koalisyonunun  $(N)$  bir hareketi varsa, bu koalisyon oyunu bağlayıcıdır.

Bağlayıcı koalisyon kavramını daha iyi anlamak için aşağıdaki örneklere bakalım.

#### Örnek 8.4

İki oyunculu bir oyun düşünelim. Bu oyunda iki kişi bir birim malı ancak birlikte hareket ettiklerinde üretebiliyorlar, yani malı tek başlarına üretmeleri mümkün değildir. Üretilen malı da istedikleri şekilde paylaşıyorlar (bu tür oyunlara ittifak oyunu da denir). Oyuncuların malı tek başlarına üretmeleri mümkün değildir. Her biri aldığı malın miktarını önemser ve çoğu aza tercih eder. Bu durumu şöyle modelleyebiliriz: (i) iki oyuncu var (ii) hareketler: Her oyuncu bağımsız hareket edebilir (yani bir koalisyon yok) fakat bu onlara herhangi bir mal üretme imkanı vermez ve her iki oyuncunun,  $\{1, 2\}$ , oluşturduğu koalisyonunun hareketler kümesi  $(x_1, x_2)$ , burada  $x_1$  ve  $x_2$  negatif olmayan reel sayılar kümesinde tanımlıdır ve  $x_1 + x_2 = 1$  eşitliğini sağlar, (yani iki birey arasında bir birimlik malın paylaşım kümesini veren hareketler) (iii) faydaları: Her oyuncunun tercihi elde ettiği mal ile ifade edilir.

Oyuncular kümesinin olası bölmeleri iki tanedir: Her iki oyuncunun tek bir koalisyon olarak davranmaları, yani  $\{\{1, 2\}\}$ , ve her oyuncunun tek başına hareket ettiği durum, yani  $\{\{1\}, \{2\}\}$ . İkinci durumda, yani herkesin tek başına davrandığı durumda tek bir hareketler kombinasyonu söz konusudur, o da hiçbir mal üretmemektir. Dolayısıyla bu koalisyon oyununda ilk durum (büyük koalisyon) her zaman daha iyi bir sonuç verir. Bu da oyunun bağlayıcı olduğunu gösterir.

Oyuncuların simetrik olmadığı ve malı üretme fırsatlarının daha fazla olduğu başka bir örneğe bakalım.

### Örnek 8.5

Bir toprak sahibinin arazisinde optimal olarak  $k$  tane işçi çalışabilmektedir ve ürettikleri tahıl miktarı kendisi dahil işçi sayısının bir fonksiyonudur, yani  $f(k+1)$  kadardır; burada  $f$  üretim fonksiyonudur ve  $f(0) = 0$ 'dır. Toprak sahibi toprağında çalıştıracığı işçileri toplam işçi sayısı olan  $m$  kümesinden seçmektedir. Toprak sahibi ve her işçi sadece kendi aldığı malla ilgilenmektedir ve çoğu aza tercih etmektedir. Yani kısaca toprak sahibi ve  $m$  tane işçinin olduğu bir koalisyon oyunuyla karşı karşıyayız. Eğer sadece işçilerden oluşan bir koalisyon söz konusu ise bu koalisyonun tek bir hareketi vardır, o da hiçbir üyesinin maldan bir şey almadığı durumdur (yani toprak sahibi olmadığından yani toprak olmadığından üretim de yoktur). Diğer yandan toprak sahibinin ve  $k$  tane işçinin oluşturacağı bir koalisyonda ise  $C$  hareketler kümesi ( $C$  koalisyon üyelerinin ürettiği  $f(k+1)$  değeri) koalisyondaki üyelerin tüm  $C$ -dağılım kümesini verir. Bu oyun da bağlayıcı bir oyundur çünkü büyük koalisyon herhangi bir koalisyondan daha fazla çıktı üretir ( $k$  işçi düzeyi optimal düzeydir ve diğer tüm koalisyonlardan daha iyidir).

Çoğu pazarlık oyununda, bir bireyin faydası basitçe bu bireyin aldığı para miktarıdır. Bu gibi durumlarda, bir koalisyondaki tüm oyuncuların faydalarını toplayabilir ve bir vektörler kümesinden ziyade, toplam faydayı  $v(C)$  gibi bir sayıyla ifade edebiliriz. Bu fonksiyon daha önce ifade ettiğimiz gibi *koalisyon fonksiyonudur* (veya *karakteristik fonksiyon*). Burada  $v(C)$  sayısı aynı zamanda *koalisyonun değeri* olarak da adlandırılır.  $v(C)$ ,  $C$  koalisyonun üyelerinin faydalarının toplamını gösteren bir sayı olduğundan,  $v(C)$  değeri koalisyon içinde istenildiği gibi dağıtılabilir. Böylece eğer  $u_i$ ,  $i$  oyuncusunun aldığı fayda ise,  $\sum_{i \in C} u_i = v(C)$  bize  $C$  koalisyonun değerini verir.

Bir koalisyon üyesinin faydası daha az veya daha fazla para verilerek artırabilir ya da azaltılabilir. Yani yan ödemeler yapılabilir. Bu yüzden bu pazarlık oyunlarına *yan-ödeme oyunları* veya *transfer-edilebilir fayda oyunları* da denir. Yan ödemelere imkan vermeyen oyunlara *yan-ödemeli olmayan* veya *transfer-edilemeyen fayda oyunları* denir.

### Örnek 8.6

İki oyunculu ittifak oyununda,  $N = \{1, 2\}$ , olası koalisyon değerleri  $v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0$  ve  $v(\{1, 2\}) = 1$  şeklindedir. Toprak sahibi-işçi örneğinde,  $N = \{1, 2, \dots, m+1\}$ , burada 1 toprak sahibini, 2, ...,  $m$  ise işçileri göstermektedir. Oyunun değeri şu şekilde ifade edilir:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{eğer 1 (toprak sahibi) } C \text{'nin bir üyesi değilse} \\ f(k), & \text{eğer } C, 1 \text{ ve } k \text{ tane işçiyi içeriyorsa} \end{cases}$$

Bu oyun açıkça, transfer-edilebilir bir fayda oyunudur çünkü koalisyon üyeleri arasında fayda transferi yapmak mümkündür. Aşağıdaki örnek ise fayda transfer-edilebilir bir oyun değildir.

### Örnek 8.7

Ev tahsisi diye nitelendirdiğimiz bir oyunda  $n$  sayıda insandan oluşan bir grubun her üyesi tek bir eve sahiptir. Ev sahiplerinden oluşan herhangi bir altgrupta üyeler evlerini istediği şekilde yeniden biribiri ile değiştirebilmektedir. İnsanlar evlerine farklı değerler atfetmektedir ve yalnızca kendi evlerinin değeri ile ilgilenmektedirler. Bir altgrubun yani bir koalisyonunun ( $C$ ) hareketler kümesi başlangıçta koalisyon üyelerine ait evlerin, koalisyon üyelerine yapılan tüm dağılımlarının kümesidir. Her oyuncu, tahsis edilen eve göre bir sonucu diğerine tercih eder.

Bu oyun bağlayıcı bir oyundur çünkü oyuncular kümesinin herhangi bir altkümesindeki koalisyonlarla elde edilen ev tahsisleri aynı zamanda tüm oyuncular kümesiyle de elde edilebilir. Fakat bu oyunda transfer-edilebilir fayda söz konusu değildir. Örneğin, 1. ve 2. oyuncularından oluşan koalisyonda sadece iki fayda dağılımı olabilir:  $(z_1, w_2)$  ve  $(z_2, w_1)$ , burada  $z_i, i (= 1, 2)$  evinin 1. oyuncuya sağladığı fayda iken,  $w_i, i (= 1, 2)$  evinin 2. oyuncuya sağladığı faydayı göstermektedir. Açıkça transfer-edilebilir faydalar mümkün değildir.

### 8.4.2 Çekirdek

Büyük koalisyonun hangi hareketi yani hangi sonucu seçeceği önemli bir konudur. Büyük koalisyonda aradığımız hareket, basitçe stratejik ve genişleyen-biçimli oyunlardaki bireysel oyuncuların hareketlerinden ziyade, her koalisyonun imkanlarının baskısıyla oluşan ve buna uyumlu bir hareket olmalıdır. Bu durumu analiz etmek için de ihtiyaç duyduğumuz kavram *çekirdek* (*core*) kavramıdır.

**Tanım 8.5** *Bir koalisyon oyunun çekirdeği, kendisinden daha iyi bir hareketler kümesi veren bir koalisyonun bulunmadığı büyük koalisyonun ( $N$ ) hareketler kümesidir;  $a_N$ .*

Eğer  $C$  gibi herhangi bir koalisyonun tüm üyelerinin büyük koalisyonun  $a_N$  hareketine tercih edeceği bir hareketi varsa buna  $C$ 'nin  $a_N$  üzerine *pareto iyileştirilebilir* olduğu söylenir (yani daha iyi bir tercih olduğu). Dolayısıyla çekirdeği alternatif olarak şöyle de tanımlayabiliriz: Çekirdek hiç bir koalisyonun iyileştirme yapamayacağı büyük koalisyonunun hareketler kümesidir.

Çekirdek kavramını, *bloklama* kavramını kullanarak da tanımlayabiliriz. Bir pazarlık oyununda koalisyonlar üyelerine büyük koalisyondan daha fazla fayda sağlayan öneriler bulunabilir. Bu gibi durumlarda, üyelerine daha fazla fayda garanti eden bir koalisyon, büyük koalisyonun oluşmasını engelleyebilir. Bunu koalisyonun büyük koalisyonu *blokladığı* şeklinde ifade ederiz. Formel olarak, bir  $s \in S$

sonucunun bir koalisyon tarafından bloklanması aşağıdaki durumu sağlayan belirli  $(v_1, \dots, v_n) \in v(C)$  değeri varsa mümkündür:

$$v_i(C) > u_i(s), \forall i \in C.$$

Büyük koalisyondan gelen bazı öneriler diğer bazı koalisyonlar tarafından bloklanabilir. Dolayısıyla büyük koalisyondan gelen sadece belirli tekliflere hiç bir koalisyonun itirazı olamaz. Yani  $n$ -kişili bir pazarlık oyunun sonucu eğer herhangi bir koalisyon tarafından bloklanamıyorsa buna çekirdek sonuç denir. Tüm çekirdek sonuçlara da *çekirdek* denir. Açıkça ifade edersek, herhangi  $n$ -kişili bir pazarlık oyunun çözümü çekirdeğe ait olmalıdır. Aksi takdirde buna belirli bir koalisyon itiraz eder. Diğer yandan,  $n$ -kişili bir pazarlık oyun için ifade edilmesi gereken önemli diğer bir konu ise oyunun boş olmayan bir çekirdeğe sahip olmasıdır. Açıkça, boş çekirdekli bir oyunun her bir koalisyonunun kabul edebileceği bir alternatif sunması mümkün değildir. Bir koalisyon oyununun çekirdeğini bulmak için hiçbir koalisyonun daha iyi sonuç üretemeyeceği büyük koalisyonunun tüm hareketler kümesini bulmamız gerekir. Şimdi bazı örneklerde çekirdeği bulalım.

### Örnek 8.8

Daha önce gördüğümüz bu örnekte (ittifak oyununda) çekirdeği tanımlayalım. Büyük koalisyonun hareketi  $(x_1, x_2)$  çiftidir; ki  $x_1 + x_2 = 1$  ve  $x_i \geq 0, i = 1, 2$  koşullarını sağlar. Çekirdek iki oyuncu arasındaki tüm paylaşımlar kümesidir:

$$\{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 1 \text{ ve } x_i \geq 0\}, i = 1, 2.$$

Herhangi bir paylaşım çekirdekte yer alır çünkü bir tek oyuncu saparsa, hem toprak sahibi hem de işçi hiçbir çıktı alamayacaktır (çünkü bağımsız hareket ettiklerinde üretim olmayacaktır) ve eğer büyük koalisyon farklı bir paylaşımı seçerse her oyuncu daha kötü durumda olacaktır.

Bu örnekte hiçbir koalisyon, büyük koalisyonun hareketi üzerinde herhangi bir kısıt empoze eden bir harekete sahip değildir. Fakat diğer oyunların çoğunda koalisyonların imkanları büyük koalisyonun hareketlerini sınırlandırabilir.

İki oyunculu ittifak oyununun bir diğer versiyonunu düşünelim. Bu oyunda 1. oyuncu tek başına çıktının  $p$  kadarını ve 2. oyuncu tek başına çıktının  $q$  kadarını elde edebilsin. 1. oyuncuyu içeren koalisyonun, büyük koalisyonun  $(x_1, x_2)$  hareketinden daha iyi bir harekete sahip olmamasının koşulu  $x_1 \geq p$  iken, 2. oyuncuyu içeren koalisyonun, büyük koalisyonun  $(x_1, x_2)$  hareketinden daha iyi bir harekete sahip olmamasının koşulu ise  $x_2 \geq q$ 'dir. Yukarıdaki orijinal oyunda olduğu gibi, her iki oyuncudan oluşan koalisyonunun herhangi bir hareketi,  $(x_1, x_2)$ 'den daha iyi bir sonuç üretemez. Dolayısıyla çekirdek şöyle tanımlanabilir:

$$\{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 1, x_1 \geq p \text{ ve } x_2 \geq q\}$$

Daha önce gördüğümüz toprak sahibi-işçiler oyununu toprak sahibi ve iki işçinin ( $k = 2$ ) olduğu bir durumla sınırlandıralım. Büyük koalisyonun hareketini  $(x_1, x_2, x_3)$  ile ifade edelim. Yani  $(x_1, x_2, x_3)$  üç oyuncu arasında  $f(3)$  çıktı düzeyinin bir dağılımı

olsun. Pozitif çıktı düzeyi sağlayan koalisyonlar: Toprak sahibini (1. oyuncu) dahil eden koalisyon ki bu durumda çıktı düzeyi  $f(1)$ 'dir; toprak sahibi ve bir çiftçiyi dahil eden koalisyon, bu durumda çıktı düzeyi  $f(2)$ 'dir ve büyük koalisyon, bu durumda da çıktı düzeyi ise  $f(3)$ 'dir.

Eğer aşağıdaki koşullar geçerliyse, büyük koalisyon,  $(x_1, x_2, x_3)$ , çekirdektedir:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq f(1), x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \\ x_1 + x_2 &\geq f(2), x_1 + x_3 \geq f(2), \\ x_1 + x_2 + x_3 &= f(3). \end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadede son koşul,  $(x_1, x_2, x_3)$  hareketinin katılımcılar arasında  $f(3)$  çıktı düzeyinin üç oyuncu arasında tahsis edildiğini garantiye alır.

Son koşuldan hareketle,  $x_1 = f(3) - x_2 - x_3$  düzeyini elde ederiz, böylece koşulları yeniden şöyle yazabiliriz:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_2 \leq f(3) - f(2), \\ 0 &\leq x_3 \leq f(3) - f(2), \\ x_2 + x_3 &\leq f(3) - f(1), \\ x_1 + x_2 + x_3 &= f(3). \end{aligned}$$

Dolayısıyla çekirdekteki bir harekette, her çiftçi en fazla ekstradan  $f(3) - f(2)$  faydayı elde eder, ki bu 3. oyuncunun üretime katkısıdır. Ayrıca çiftçiler birlikte en fazla ekstradan  $f(3) - f(1)$  çıktısını alır, ki bu ikinci ve üçüncü oyuncunun üretime birlikte yaptıkları katkıdır.

## 8.5 Ardisal Pazarlık

Daha önceki bölümlerde, pazarlık oyununu daha çok bir paylaşım oyunu olarak (pastanın paylaşımı şeklinde) düşündük ve bu paylaşımda belirli normatif kuralları yerine getiren bazı dağılım kurallarını (Nash pazarlık çözümü ve KS çözümü gibi) inceledik.

Bu bölümde pazarlık problemini daha pozitif bir yaklaşımla tartışacağız. Yani bir pazarlık çözümünün hangi koşulları sağladığına dönük kaygılanmak yerine, pazarlık sürecinin ardışallığından hareketle sonucun direkt ne olacağını tahmin etmeye çalışacağız. Pazarlık süreci belirli bir ardışallık içinde teklif ve karşı-teklifler serisi halinde ilerlediğinden, stratejik davranış önem kazanır. Dolayısıyla bu tür oyunlar *stratejik pazarlık oyunları* olarak da bilinir.

Örneğin evini satan biri ile evin alıcısı bir araya geldiklerinde evin fiyatı için teklif ve karşı-tekliflerde bulunurlar. Süreç genelde, satıcının bir fiyat ilan etmesiyle

başlar. Alıcı da genelde bu fiyatın altında bir fiyat teklifinde bulunur. Satıcı bunu kabul eder veya reddeder. Eğer kabul ederse pazarlık biter fakat redderse teklif sırası tekrar satıcıya geçer. Bu sefer alıcı bunu kabul eder veya reddeder. Pazarlık süreci bu şekilde devam eder. Sonuçta her iki tarafın anlaştığı bir fiyat olursa, ticaret gerçekleşir. Aksi takdirde pazarlık biter ve ticaret gerçekleşmez. Şimdi ardısal pazarlık oyunlarının nasıl modellendiğini anlamamızı kolaylaştıran örnekler vererek devam edelim.

İki oyuncu bir pasta üzerinde pazarlık yapsınlar. Oyuncular pastanın paylaşımı için  $(s_1, s_2)$  gibi önerilerde bulunsunlar. İki oyuncunun faydası aldıkları pay kadardır. Bu pazarlık oyununun alternatif sonuçlar kümesi şöyledir:

$$S = \{(s_1, s_2) : s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, \text{ ve } s_1 + s_2 = 1\}.$$

Fayda fonksiyonları da şu şekilde ifade edilir:

$$u_1(s_1, s_2) = s_1 \text{ ve } u_2(s_1, s_2) = s_2.$$

Bu yüzden de oyunun fayda-dağılım kümesi  $U = \{(s_1, s_2) : (s_1, s_2) \in S\}$  olur.

Bu oyunun en basit versiyonunda, 1.oyuncu pastanın  $s$  kadar kısmını önerir (kendisinde kalacak kısmı önerdiğini düşünelim) ve 2. oyuncu bunu kabul edebilir veya reddedebilir. Eğer kabul ederse, 2.oyuncu  $1 - s$ , alır ve 1.oyuncu ise  $s$  alır. Eğer redderse, her ikisi de 0 alır. Bu oyun tek bir altoyun mükemmel dengeye sahiptir. Bu dengede 2.oyuncu herhangi bir teklifi kabul eder ve 1.oyuncu  $s = 1$  önerir. Açıkça 2.oyuncu her  $s < 1$  teklifini kabul eder. Her  $s = 1$  için, 2. oyuncu kabul ve red arasında kayıtsızdır. Bu oyuna ultimatoyu denir. Bu oyunda sonuç orantısızdır çünkü 2.oyuncunun bu oyunda hiç bir gücü yoktur. Sahip olduğu tek tehdit, reddetmek bunun karşılığında da hiçbir şey almamaktır. 1.oyuncu bunu bilir.

Fakat şimdi 2. oyuncuya karşı-teklif sunma imkanı verelim. Eğer 2. oyuncu teklifi redderse, ikinci seferde kendisi teklifte bulunsun ve dolayısıyla 1. oyuncu buna tepki veren kişi olsun. Bu oyunda ardısal ve mükemmel bilgili bir oyunda olduğu gibi geriye doğru çıkarsama metodunu kullanabiliriz. Yani oyunun sonundan başlayarak, 2. oyuncu  $s_2 = 1$  önerisinde bulunur ve 1. oyuncu bunu kabul eder. Çünkü 2.oyuncu ilk periyotta kendisine yapılan teklifi kabul etmeyecektir (1'den küçük tüm teklifleri reddedecektir) ve 2. periyotta 1 teklifinde bulunacaktır. Bu da 2. aşamadaki altoyunun tek Nash dengesidir. Geriye doğru çıkarsamayla herhangi bir altoyun mükemmel dengede 2. oyuncu 1 alacaktır çünkü şimdi 1. oyuncu güçsüzdür. Gerçekte eğer bu oyun  $T$  kadar sınırlı şekilde tekrarlanırsa, 1. oyuncu ya 1 ya da 0 alır, ki bu  $T$ 'nin tek veya çift olmasına bağlıdır.

### 8.5.1 Pozitif Zaman Tercihi Altında Pazarlık

Gerçek hayatta yukarıdaki oyun örneklerinde dikkate almadığımız bir durum söz konusudur. Bu da  $T$  sayıda oynanan bir pazarlık oyununda son teklifte bulunanın

etkisinin, oyuncuların pazarlık süresine verdiği öneme bağlı olmasıdır. Örneğin, son hareket eden oyuncu son periyoda kadar bekleyebilir ve bu da onun gücünden veya zamana kayıtsızlığından kaynaklanabilir. Fakat daha realist bir model, zamanın değerini de modele katar. Yani her oyuncu pazarlığı ertelemenin bir maliyeti olduğunu görebilir çünkü paylaşılacak pasta her periyotta küçülür. Eğer bir oyuncu pastadan alacağı payı şimdi değil de sonra almayı tercih ederse, yani beklemeyi tercih ederse bunun bir maliyeti vardır. Bu durum pozitif zaman tercihi ile ifade edilir. Zaman tercihi oranı, bir bireyin gelecek periyotta tüketmek yerine bugün vazgeçmek zorunda olduğu tüketimdir. Bu durumu da daha önce ifade ettiğimiz gibi  $\delta \in (0, 1)$  iskonto oranı ile ifade edeceğiz.

Böyle bir yapıda oyuncular, birbirlerine yine pastanın paylaşımına yönelik teklif ve karşı tekliflerde bulunarak pazarlık oyununu zaman üzerinden,  $t = 1, 2, \dots$ , oynarlar. Pastanın  $i$  oyuncusu tarafından  $t$  periyodunda alınacak kısmını  $s_{t,i}$  ile göstereyim; bu durumda  $i$  oyuncusunun faydası  $u_i(s_{t,1}, s_{t,2}) = s_{t,i}$  olur. Oyun 1. oyuncunun  $t = 1$  periyodunda  $s_{1,1}$  almayı teklif etmesiyle başlar. Eğer teklif kabul edilirse oyun biter ve 1. oyuncu  $s_{1,1}$  ve 2. oyuncu da  $s_{1,2} = 1 - s_{1,1}$  kısmını alır. Eğer 2.oyuncu teklifi reddederse, oyun ikinci periyoda geçer. Şimdi teklif sırası 2. oyuncunundur. 2. oyuncu, 1. oyuncuya pastadan  $s_{2,1}$  kadar almasını teklif eder ve dolayısıyla 2. oyuncunun aldığı pay  $s_{2,2} = 1 - s_{2,1}$  olur. Şimdi de 1. oyuncu bu teklifi red veya kabul edebilir. Eğer 1. oyuncu kabul ederse, oyun sona erer; aksi takdirde oyun 3. periyoda geçer. Burada teklif sırası yine 1. oyuncunundur. Bu durum anlaşma sağlanana kadar devam eder.

Eğer pazarlık süresi  $t$  periyot sonra anlaşma ile bitmiş olsaydı, yani  $(s_{t,1}, 1 - s_{t,1})$  ile bitseydi, oyuncuların faydaları sırasıyla şöyle olurdu:

$$u_1(s_{t,1}, 1 - s_{t,1}) = \delta_1^{t-1} s_{t,1} \text{ ve } u_2(s_{t,1}, 1 - s_{t,1}) = \delta_2^{t-1} s_{t,2},$$

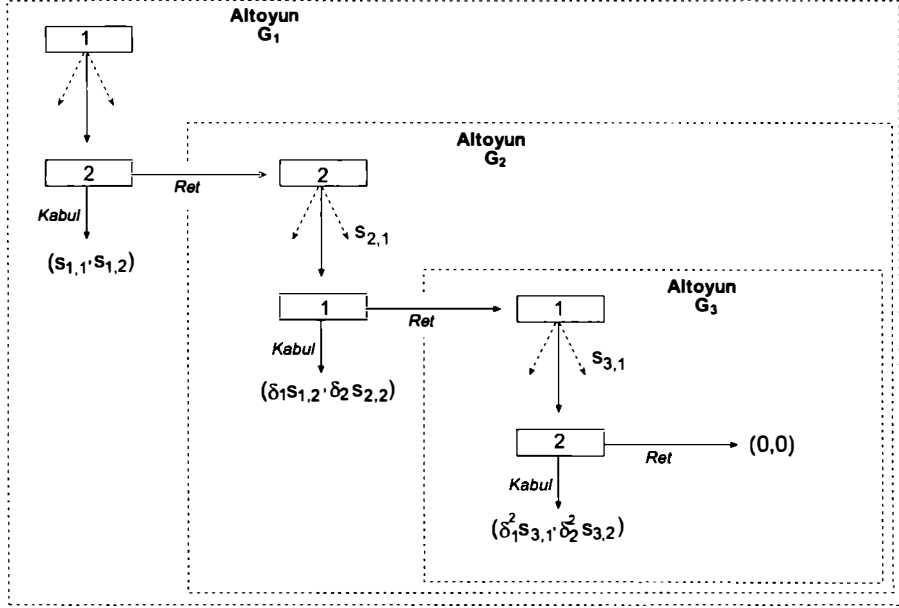
burada  $\delta_1$  ve  $\delta_2$  sırasıyla 1. ve 2. oyuncunun iskonto oranlarıdır. Bu iskonto edilmiş faydalarla pazarlıkta karşılaşılan gecikme maliyetini hesaplayabiliriz. Bu basit bir şekilde gelecek periyoda kadar beklemenin maliyetidir. 1. oyuncunun  $s$  payı için  $t$  periyodundan  $t + 1$  periyoduna kadar beklemenin maliyeti basitçe  $\delta_1^t s - \delta_1^{t-1} s = \delta_1^{t-1} (1 - \delta_1) s$  şeklindedir. Burada dikkat edilirse beklemenin maliyeti sabit değildir. Kendisinin alacağı pasta payına bağlıdır.

Bu oyun mükemmel bilgili ardışıl bir oyun olduğu için kullanacağımız denge kavramı, altoyun mükemmel dengedir. Bunun için de üç periyotluk bir oyun örneği ile başlayalım.

### Örnek 8.9

Şekil 8.4'te verilen üç periyotluk oyunun dengesini bulmak için oyunun sonundan başlamalıyız. Mükemmel bilgili bir oyun olduğu için geriye doğru çıkarsama yaklaşımını kullanabiliriz. Birinci periyottaki ilk teklif 1. oyuncu tarafından geldiği için oyunun son periyodun da yani 3. periyodunda yine 1. oyuncu teklifte bulunur. Eğer üçüncü periyottaki teklif  $0 \leq s_{3,1} < 1$  ise, 2. oyuncu teklifi kabul eder ve

eğer  $s_{3,1} = 1$  ise kayıtsız kalır ( $s_{3,1}$  burada 1. oyuncunun 3. periyotta kendisine alacağı kısmın teklifidir). Yani 1. oyuncu, 3. periyodun başında, 2. oyuncunun 1'e çok yakın  $s_{3,1} < 1$  değerleri (yaklaşık olarak  $s_{3,1} \approx 1$ ) kabul edeceğini bilir. Bu durumda da 2. oyuncu yaklaşık olarak sıfır elde eder. Dolayısıyla 1. oyuncu yaklaşık  $\delta_1^2$  kadar alır ( $\delta_1^2 \cdot 1$ ).



Şekil 8.4 Üç periyotluk bir pazarlık oyunu

Bu yüzden 2. oyuncunun 2. periyodun başında sunacağı  $s_{2,1}$  teklifi  $\delta_1 s_{2,1} \geq \delta_1^2$  veya  $s_{2,1} \geq \delta_1$  şeklinde olmak zorundadır, aksi takdirde 1. oyuncu ret eder ve 3. periyoda geçer ki burada 2. oyuncu sıfır fayda elde eder. Yani  $s_{2,1} \geq \delta_1$  kısıtı altında,  $s_{2,1}^* = \delta_1$  değeri, 2. oyuncunun 2. periyotta faydasını ( $\delta_2 s_{2,2} = \delta_2(1 - s_{2,1})$ ) maksimize eden değer olduğundan, 2. oyuncu 2. periyodun başında 1. oyuncuya  $s_{2,1}^* = \delta_1$  teklifinde bulunmak zorundadır. Eğer 2. oyuncu 2. periyodun başında  $s_{2,1}^* = \delta_1$  teklifinde bulunursa ve 1. oyuncu bunu kabul ederse  $\delta_1^2$  ve 2. oyuncu da  $\delta_2(1 - \delta_1)$  faydasını elde eder.

Şimdi 1. periyoda geldik. 1. periyodun başında 1. oyuncu, eğer oyun 2. periyoda geçerse 2. oyuncunun  $s_{2,1}^* = \delta_1$  teklifinde bulunacağını bilir. Bu da 2. oyuncunun 1. periyotta alacağı  $s_{1,1}$  teklifinin,  $1 - s_{1,1} \geq \delta_2(1 - \delta_1)$  veya  $s_{1,1} \leq 1 - \delta_2(1 - \delta_1)$  olmaması durumunda reddedeceği anlamına gelir. Bu da 1. oyuncunun faydasını maksimize edecek teklif değerinin,

$$s_{1,1}^* = 1 - \delta_2(1 - \delta_1)$$

olması gerektiği anlamına gelir. 1. oyuncu bu teklifi yaptığı zaman, kendisinin

elde edeceği  $1 - \delta_2(1 - \delta_1)$  fayda düzeyini, 2. periyoda kalması durumunda elde edeceği faydayla kıyaslar. Bu durumda beklediği teklif  $s_{2,1}^* = \delta_1$ 'dir. Açıkça  $1 - \delta_2(1 - \delta_1) \geq \delta_1^2$  olduğundan, 1. oyuncu optimal olarak  $s_{1,1}^* = 1 - \delta_2(1 - \delta_1)$  teklifinde bulunmalıdır.

Kısaca üç periyotluk pazarlık oyununda elde ettiklerimizi özetleyelim. Elde ettiğimiz altoyun mükemmel denge strateji profili aşağıdaki gibidir:

i. 1. oyuncunun stratejisi: 1. *periyot*: teklif:  $s_{1,1}^* = 1 - \delta_2(1 - \delta_1)$ ; 2. *periyot*: kabul eğer  $s_{2,1}^* \geq \delta_1$  aksi takdirde ret eder; 3. *periyot*: teklif:  $s_{3,1} = 1$  (veya  $s_{3,1}$  değeri 1'e çok yakındır)

ii. 2. oyuncunun stratejisi: 1. periyot kabul eder eğer  $s_{1,1}^* \leq 1 - \delta_2(1 - \delta_1)$ , aksi takdirde reddeder; 2. *periyot*: kabul eder eğer  $s_{2,1}^* = \delta_1$ ; 3. *periyot*: kabul eder.

Sonuçlanan strateji profili  $s_{1,1}^* = 1 - \delta_2(1 - \delta_1)$  ve  $s_{1,2}^* \leq \delta_2(1 - \delta_1)$  pazarlık anlaşmasını veren altoyun mükemmel dengedir.

## 8.5.2 Sonsuz Ufuk Altında Pazarlık

Yukarıda verilen üç-periyotluk pazarlık oyununu sınırlı-ufuk oyunu diye nitelendirmek çok doğru olmayabilir. Çünkü böyle bir nitelendirme pazarlık oyunlarının sonsuz ufuklu olabileceği gibi bir çağrışım yaratır. Oysa hiçbir pazarlık oyunu sonsuza kadar süremez. Bir pazarlık oyununun anlaşmayla bitmesine imkan vermek için sonsuz bir zaman veya ufuk altında oynandığını varsayıyoruz. Bu şekilde pazarlık probleminin zamanın herhangi bir noktasında kesilmesi yerine, pazarlığın bir çözüm bulana kadar devam etmesini belirtmek isteriz. Eğer pazarlık süresi yeterince uzun olursa, pasta son derece küçülecektir. Oyuncular da bu yüzden, pasta daha da küçülmeden anlaşmak için daha istekli olacaklardır.

Bir sonsuz ufuk oyununu analiz etmek için, oyunun terminal periyodundaki faydaların sürekle faydalar olduğunu düşünmek, bu oyundaki dengeyi bulmak için yararlı olacaktır. Sürekli fayda, bir oyuncunun oyunun bitmesinden çok, devam etmesine müsaade edilmesi durumunda elde etmesini beklediğimiz faydadır. Yani pazarlığın kesilmesi durumundaki fayda düzeyi yerine, ki bu  $(0,0)$ 'dır, 2. oyuncunun 3. periyotta 1. oyuncunun teklifini reddetmesi durumunda oyuncuların elde ettikleri faydadır, yani  $(\delta_1^2 x, \delta_2^2(1 - x))$ , burada  $x$  değeri 1. oyuncunun eğer oyun devam ederse pastadan aldığı payı gösterir.

Diğer bir değişle,  $(x, 1 - x)$  fayda düzeyi pazarlığın devam etmesi durumunda beklenen anlaşmadır. Yani 1. oyuncu şunu bilir: Eğer aşağıdaki durum söz konusu ise 3. periyodun başında 2. oyuncu  $s_{3,1}$  teklifini kabul eder:

$$\delta_2^2(1 - s_{3,1}) \geq \delta_2^2(1 - x) \text{ veya } s_{3,1} \leq x.$$

Bu yüzden 1. oyuncu  $s_{3,1}^* = x$  teklifinde bulunur ve  $\delta_1^2 x$  elde eder. Dolayısıyla 2. periyodun başında, 2. oyuncunun teklifi  $(s_{2,1})$  şöyle olmalıdır:

$$\delta_1 s_{2,1} \geq \delta_1^2 x \text{ veya } s_{2,1} \geq \delta_1 x.$$

Aksi takdirde, 1.oyuncu reddeder ve oyun 3. periyoda geçer. Bu yüzden 2. periyodun başında, 2. oyuncu  $s_{2,1}^* = \delta_1 x$  teklifinde bulunur. Bu teklif 2. oyuncunun faydasını,  $\delta_2^2(1 - s_{2,1})$ , maksimum yapan değerdir ve sonuç olarak faydası  $\delta_2(1 - \delta_1 x)$  olur (ki bu değer  $\delta_2^2(1 - x)$  değerini aşar).

Eğer 1. oyuncu oyunun bu şekilde ilerleyeceğini beklerse, 1. periyotta yapacağı teklif  $s_{1,1}$  aşağıdaki koşulu sağlayacak şekilde olmalıdır:

$$1 - s_{1,1} \geq \delta_2(1 - \delta_1 x) \text{ veya } s_{1,1} \leq 1 - \delta_2(1 - \delta_1 x).$$

Yani  $s_{1,1}^* = 1 - \delta_2(1 - \delta_1 x)$  iken, 2. oyuncunun faydası  $\delta_2(1 - \delta_1 x)$  olur. Burada 1. oyuncunun faydası  $\delta_1 x$ 'den daha büyüktür. 2. oyuncu için de  $1 - \delta_1 x > \delta_2(1 - \delta_1 x)$  durumu söz konusudur.

Dikkat edilirse, denge anlaşması  $x$  fayda düzeyine bağlıdır. Burada şu önemli soruyu sormamız gerekir:  $x$ 'in en uygun değeri nedir? Açıkça şunu söyleyebiliriz ki,  $x$  oyundaki dengeyle uyumlu olacak bir değer almalıdır. Eğer böyleyse,  $x$  değeri aynı zamanda 1. periyodun başındaki teklif olmalıdır çünkü 3. periyodun başında yer alan pazarlık süreci 1. periyottan başlayarak gelişen pazarlık sürecinin bir tekrarıdır. Sonuç olarak,  $x^*$  denge değeri şu denklemi sağlamalıdır:

$$x^* = 1 - \delta_2(1 - \delta_1 x^*)$$

veya

$$x^* = \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1 \delta_2}.$$

Böylece oyuncuların çok sayıda teklifte bulundukları pazarlık oyununun sonsuz ufuklu bir oyun olarak düşünülmesi durumunda şu sonucu elde etmiş oluruz:

$$(x^*, 1 - x^*) = \left( \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1 \delta_2}, \frac{\delta_2(1 - \delta_1)}{1 - \delta_1 \delta_2} \right). \quad (8.4)$$

Dikkat edilirse, denge pazarlık anlaşmasının  $\delta_1$  ve  $\delta_2$  iskonto oranlarına bağlı olduğu görülür. Eğer  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$  ise, 1. oyuncu (ilk teklifi yapan oyuncu) (8.4)'ten de görüleceği gibi  $\frac{1}{1+\delta}$  faydasını elde ederken, 2. oyuncu  $\frac{\delta}{1+\delta}$  faydasını elde eder. Eğer  $\delta < 1$  ise,  $\frac{\delta}{1+\delta} < \frac{1}{1+\delta}$ 'dir. Yani eğer oyuncular tam olarak aynı zaman tercihine sahipse, 1. oyuncu 2. oyuncunun pastadan aldığından daha fazlasını alır. Bu noktada daha küçük bir iskonto oranı (yani oyuncuların daha sabırsız olması), 2. oyuncunun pastadan daha da az alması anlamına gelir.

İskonto oranları eşit olduğu zaman bir oyuncunun gecikmeden dolayı maliyeti, pasta payıyla orantılı olur. Eğer 1. oyuncu oldukça eşitsiz bir paylaşım önerirse, örneğin (0.7, 0.3), 2. oyuncu gecikmeden dolayı daha az kaybeder (1. oyuncu daha fazla kaybeder). Bu durumda teklifi ret eder. Bu yüzden de paylaşım pastanın eşit bir düzeyde olmasına yakın olacaktır.

İskonto oranının birden farklı olması oldukça önemli bir durumdur, aksi takdirde çok sayıda mükemmel denge söz konusu olacaktır. Çünkü zamanla birşey

değişmediği için, oyuncuların erkenden anlaşmalarını gerektirecek bir durum söz konusu değildir.

Daha önce gördüğümüz Folk teoreminde ifade edildiği gibi, sonsuz tekrarlı bir oyunda iskonto oranının yüksek olması, çok sayıda dengenin söz konusu olması demektir. Fakat bu yaklaşım pazarlık oyununa uygulanamaz çünkü pazarlık oyunu tekrarlı bir oyun değildir. Bir oyuncu teklifi kabul ettiğinde oyun biter ve sadece kabul edilen teklif fayda düzeyini belirler; bu fayda düzeyi daha önceki tekliflerle ilişkili değildir. Dahası Folk teoreminin empoze ettiği denge dışı cezalandırma mekanizmaları da söz konusu değildir.

Şimdi de aynı yapı içinde basit bir değişiklik yapalım: Eğer pazarlıkta gecikme maliyeti sabit olsaydı ne olurdu? Aşağıda verilen örnek, böyle bir durumu anlatmaktadır.

Her periyotta pazarlık maliyetlerini yani beklemenin maliyetlerini modellemenin iki yolu vardır: (i) pastanın kalan kısmı ile orantılı maliyet (yukarıda kullanılan yöntem buydu) veya (ii) her periyotta sabit bir pazarlık maliyeti. Farkı anlamak için şu örnek açıklayıcıdır. Bir inşaatın yapımında çalışan işçilerle yapılan görüşmeleri düşünelim. Eğer grev bu inşaatı geciktirirse, iki farklı kayıp söz konusudur. Birincisi yeni inşa edilen binanın kiralama veya satış değerlerindeki gecikmeden doğan kayıptır, bu projenin büyüklüğü ile orantılıdır. Diğeri ise kontrattaki işin geç bitirilmesinden doğan cezalardır (bu da örneğin her haftalık gecikmeden alınan sabit bir ceza olabilir). İki çeşit maliyetin pazarlık sürecindeki etkileri de farklı olacaktır.

Burada sadece ikinci maliyete bakalım. İskonto olmadığını varsayalım. 1. veya 2. oyuncu bir teklifte bulunduğunda sırasıyla  $c_1$  ve  $c_2$  gibi sabit maliyetlere katlanmaktadır. Maliyetlerle ilgili üç durum söz konusudur.

i. Gecikme maliyetleri eşit,  $c_1 = c_2 = c$ .

Bu durumda her oyuncunun en az  $c$  kadar fayda elde ettiği her durum, altoyun mükemmel denge tarafından desteklenir.

ii. Gecikme 2. oyuncuya daha fazla zarar verirse,  $c_1 < c_2$ .

Bu durumda 1. oyuncu (ilk teklifte bulunan) pastanın tamamını alır. 2. oyuncu gecikmeden dolayı 1. oyuncudan daha fazla kayba uğrar ve gecikme oyuncuların refahını azaltmak dışında başka bir şeyi değiştirmez. Oyun durağan bir oyundur, yani zaman ne kadar ilerlerse ilerlesin oyunun yapısı aynı kalmaya devam eder. Eğer herhangi bir  $t$  periyodunda, 2. oyuncu 1. oyuncuya  $x$  teklifinde bulunursa,  $(t - 1)$  periyodunda 1. oyuncu 2. oyuncuya  $(1 - x - c_2)$  teklifinde bulunabilir ve  $(x + c_2)$  kadarını da kendinde tutardı.  $(t - 2)$  periyodunda, 2. oyuncu 1. oyuncuya  $(x + c_2 - c_1)$  teklifinde bulunurdu,  $(1 - x - c_2 + c_1)$  kısmını da kendine ayırırdı, böylece devam edersek, 2. oyuncu  $(t - 4)$  ve  $(t - 6)$  periyotlarında  $(x + 2c_2 - 2c_1)$  ve  $(x + 3c_2 - 3c_1)$  tekliflerinde bulunurdu. Geriye doğru ilerledikçe 1. oyuncunun avantajının ortaya çıktığı görülür, yani  $\beta$  gibi bir büyük sayı için 1. oyuncunun avantajı  $\beta(c_2 - c_1)$  değerini alır. Bunu oyunun başından itibaren düşündüğümüzde ise 2. oyuncu pazarlığı bırakacak ve sıfırı kabul edecektir.

iii. Gecikme 1. oyuncuya daha fazla zarar verirse,  $c_1 > c_2$ .

Bu durumda 1. oyuncu  $c_2$  kadar ve 2. oyuncu da  $(1 - c_2)$  kadar pay alır. Burada  $c_2$  maliyeti 1. oyuncunun alacağı payın alt limitini oluşturur. Çünkü 1. oyuncu (ilk teklifte bulunan) 2. oyuncunun ikinci periyotta  $(0, 1)$  aralığında teklifte bulunacağını bildiğinden, 1. oyuncu birinci periyotta  $(c_2, 1 - c_2)$  teklifinde bulunur ve dolayısıyla 2. oyuncu bunu kabul eder.

### 8.5.3 Asimetrik Bilgi Altında Arısal Pazarlık

Pazarlık oyunları yukarıda tarif ettiğimiz basit durumlardan farklı olarak ve daha gerçekçi bir şekilde eksik bilgi altında gerçekleşebilir. Bilgi düzeyi, pazarlık oyunu boyunca değişebilir ve pazarlık, dengede bir periyottan daha uzun bir sürede gerçekleşebilir. Bu durum etkin bir durum olmamasına rağmen oldukça gerçekçidir. Tam bilgili pazarlık oyunları grevleri, kavgaları, çatışmaları ve anlaşmazlıkları açıklamakta güçlük çeker. Pazarlıklarda bilgisi az olan oyuncular ancak zamanla hangi tekliflerin reddildiğini ve kabul edildiğini gözlemleyerek bilgili oyuncuların tiplerini öğrenebilirler. Asimetrik bilgi yapısı zaman içinde pazarlığın tarafları arasında anlaşmazlıkların ve çatışmaların ortaya çıkmasına neden olabilmektedir. Eksik bilgili pazarlık oyunları literatürü oldukça geniş bir literatürdür. Birçok alanda farklı bilgi düzeyleri altında pazarlık süreçleri analiz edilmiştir. Biz bunlardan sadece bazılarına bakacağız. Sırasıyla şu iki durumu tartışacağız: Pazarlığa katılan oyuncular (i) birbirlerinin tipleri konusunda eksik bilgiye sahip olabilirler veya (ii) iskonto oranının düzeyi konusunda belirsiz olabilirler.

### Oyuncuların Tipleri Konusunda Belirsizlik

Bu bölüme pazarlığa katılan oyuncuların tipleri hakkında belirsizlik durumlarını tanımlayan örnekler vererek başlayalım.

#### Örnek 8.10

Bir pazarlık oyununda alıcı ve satıcı olmak üzere iki oyuncu olsun. Alıcının iki tipi vardır: Mala verdiği değer düşük ( $v_l$ ) olabilir veya yüksek ( $v_h$ ) olabilir. Pazarlık oyunu, Doğa'nın alıcının tipini belirlemesiyle başlar. Alıcının mala verdiği değer  $\phi$  olasılıkla  $v_l = 50$ ,  $(1 - \phi)$  olasılıkla da  $v_h = 75$ 'dir. Oyunun oynanma sırasına göre, ilk önce satıcı bir fiyat teklifinde bulunur,  $p$ ; alıcı bu fiyatı kabul eder veya reddeder.

Satıcının iki anlamlı stratejisi vardır:  $p = 50$  ve  $p = 75$ . Çünkü 50 teklifinin altındaki fiyatlar  $p = 50$  ile aynı satış olasılığına sahip olacaktır;  $(50, 75]$  aralığındaki fiyatlar da  $p = 75$  ile aynı satış olasılığına sahip olacaktır; ve 75'nin üstündeki fiyatlarla ise satış olasılığı sıfırdır. Satıcı eğer  $p = 50$  teklifinden daha fazla kazanç elde edeceğini umuyorsa  $p = 75$  teklifinde bulunur:

$$u(p = 50) = \phi(50) + (1 - \phi)(50) < \phi(0) + (1 - \phi)(75) = u(p = 75).$$

Buradan da  $\phi < 1/3$  sonucunu elde ederiz.

Eğer alıcıların üçte biri 50 fiyatını ödeyecek tiptelerse, satıcı  $p = 75$  fiyatını uygular. Bu teklifi de ancak 75-tipindeki alıcılar kabul eder. Aksi takdirde  $p = 50$  teklifinde bulunur. Bu da  $\phi < 1/3$  durumunda bazen hiç satışın olmayacağı anlamına gelir. Bu sonuç modelin en önemli özelliğidir. Yani modele eksik bilgiyi dahil ettiğimizde neden pazarlığın kesildiğini ve etkin olmayan sonuçların çıktığını görebiliyoruz.

### Örnek 8.11 Sendika-Firma İlişkisi

Bu oyun büyük oranda Gibbons (1992)'den faydalanılarak yazılmıştır. Bir firma ile bir sendikanın ücretler üzerine pazarlık yaptığını varsayalım. Basit olması açısından, istihdamı sabit kabul edelim. Sendikanın rezervasyon ücreti (yani sendika üyelerinin çalışmadıkları durumda aldıkları ücret)  $\underline{w}$ 'dir. Firma kârının gerçek değeri sadece firma tarafından bilinir. Bu özel bilgi, örneğin, firmanın planlama sürecindeki yeni ürünler hakkındaki bilgisini yansıtabilir. Sendika, firma kârının  $\pi$ ,  $[\pi_L, \pi_H]$  aralığında homojen dağıldığını düşünmektedir. Bu pazarlık oyununu basitleştirmek ve normalize etmek için  $\underline{w} = \pi_L = 0$  olduğunu varsayalım.

Pazarlık en fazla iki periyot sürmektedir. Birinci periyotta, sendika  $w_1$  gibi bir ücret teklifinde bulunur. Eğer firma bu teklifi kabul ederse, oyun sona erer ve böylece sendikanın faydası  $w_1$  ve firmanın faydası ise  $\pi - w_1$  olur (bu faydalar kontrat boyunca ücret ve kâr akımlarının şimdiki değerlerini gösterebilir). Eğer firma bu teklifi ret ederse, oyun ikinci periyoda ilerler. Sendika  $w_2$  gibi ikinci bir ücret teklifinde bulunur. Eğer firma bu teklifi kabul ederse, sendikanın ve firmanın sırasıyla faydalarının şimdiki değerleri,  $\delta w_2$  ve  $\delta(\pi - w_2)$  (birinci periyoda indirgenmiş şimdi değerleri) şeklindedir. Eğer firma sendikanın ikinci teklifini reddederse oyun biter ve faydalar her iki oyuncu için de sıfır olur.

Dikkat edilirse, bu pazarlık oyunu eksik bilgili ve dinamik bir oyun olduğundan dengesi mükemmel Bayesyen olmalıdır. Bunun için önce oyuncuların stratejilerini ve inançlarını tanımlayalım. Basitlik olsun diye firmanın sadece iki kâr düzeyi ( $\pi_L$  ve  $\pi_H$  gibi) ve sendikanın da sunduğu iki ücret teklifi olduğunu varsayıyoruz ( $w_L$  ve  $w_H$ ).

Bu oyunda sendika üç bilgi kümesinde hareket imkanına sahiptir ve bu yüzden sendikanın stratejisi üç teklifi içerir: Birinci-periyot ücret teklifi,  $w_1$ , ve iki ikinci-periyot ücret teklifleri (bunlardan biri  $w_1 = w_H$  ücret teklifi reddedildikten sonra, diğeri ise  $w_1 = w_L$  reddedildikten sonra). Bu üç hareket tekil-olmayan bilgi kümelerinde gerçekleşir. Bu bilgi kümelerinde sendikanın inançları sırasıyla  $(p, 1-p)$ ,  $(q, 1-q)$  ve  $(r, 1-r)$  olsun. Oyun boyunca sendikanın stratejisi: Birinci-periyot teklifi,  $w_1$ , ve ikinci-periyot teklif fonksiyonu  $w_2(w_1)$  şeklindedir ( $w_2(w_1)$  fonksiyonu, her olası  $w_1$  teklifinin reddedilme sonrasında yapılan  $w_2$  teklifini tanımlar). Bu hareketlerin her biri tekil olmayan bilgi kümesinde gerçekleşir. Sendikanın yapacağı her farklı birinci-periyot ücret teklifi için bir ikinci-periyot bilgi kümesi vardır. Ayrıca tek bir birinci-fiyat bilgi kümesi ve çok sayıda ikinci-periyot bilgi kümeleri içinde her olası  $\pi$  değeri için bir karar noktası mevcuttur (bu da çok sayıda karar noktası olacağı anlamına gelir). Her bilgi kümesinde, sendikanın inancı bu

karar noktaları üzerinde bir olasılık dağılımı tanımlar. Tüm oyunda, sendikanın birinci periyot inancını  $\mu_1(\pi)$  ile gösterelim (yani sendika kârın ne olduğuna dair bir inanç oluşturur) ve sendikanın ikinci-periyot inancını ise (birinci-periyot teklifi  $w_1$  reddedildikten sonra)  $\mu_2(\pi | w_1)$  ile gösterelim.

Firmanın stratejisi alacağı iki karardan oluşur: Firma, kârı  $\pi$  iken birinci-periyot teklifini ( $w_1$ ) kabul eder; bunu  $K_1(w_1|\pi) = 1$  ile gösteriyoruz aksi takdirde  $K_1(w_1|\pi) = 0$ 'dır; firma, kârı  $\pi$  ve birinci-periyot teklifi  $w_1$  iken ikinci-periyot teklifini ( $w_2$ ) kabul eder, bunu  $K_2(w_2|\pi, w_1) = 1$  ile gösteriyoruz aksi takdirde  $K_2(w_2|\pi, w_1) = 0$ 'dır. Yani firmanın stratejisi bir çift fonksiyondan oluşur,  $[K_1(w_1|\pi), K_2(w_2|\pi, w_1)]$ . Firma oyun boyunca tam bilgiye sahip olduğu için firmanın inançlarını ifade etmeye gerek yoktur.

Daha önce eksik bilgili dinamik oyunlarda belirttiğimiz 1-4 denge koşulları sağlanırsa,  $[w_1, w_2(w_1)]$  ve  $[K_1(w_1|\pi), K_2(w_2|\pi, w_1)]$  stratejileri ve  $[\mu_1(\pi), \mu_2(\pi | w_1)]$  inançları mükemmel Bayesyen denge olur. Şimdi oyunda tek bir mükemmel Bayesyen denge olduğunu göstereceğiz. Bunun için de önce, 2. koşulu (oyuncuların ardısal stratejileri veri alındığında optimal davranmalarını zorunlu kılar) firmanın ikinci-periyot kararına uygulayalım,  $K_2(w_2|\pi, w_1)$ . Bu oyunun en son hareketi olduğundan, eğer  $\pi \geq w_2$  ise firmanın optimal kararı  $w_2$  teklifini kabul etmektir. Firmanın stratejisinin bu kısmı verildiğinde, şimdi 2. koşulu sendikanın ikinci-periyot ücret teklif seçimine uygulayabiliriz. Buna göre  $w_2$  ücret düzeyi, sendikanın  $\mu_2(\pi | w_1)$  inancı ve firmanın takip eden stratejisinin  $K_2(w_2|\pi, w_1)$  olduğu veri alındığında, sendika beklenen faydasını maksimize etmelidir. Burada zorluk  $\mu_2(\pi | w_1)$  inancını belirlemektir.

Bu inancı şöyle belirlemeye çalışalım. Basit bir-periyotluk bir pazarlık problemi düşünelim (buradan elde ettiğimiz bilgiyi iki-periyotluk bir problemde kullanacağız). Varsayalım ki sendika, firmanın kârının  $[0, \pi_1]$  aralığında homojen dağıldığına inanmaktadır (şimdilik  $\pi_1$ 'nin rastgele belirlendiğini varsayalım). Sendika  $w$  teklifinde bulunursa firmanın en iyi tepkisi açıkça eğer  $\pi \geq w$  ise  $w$  teklifini kabul etmektir. Dolayısıyla sendikanın problemi şöyle tanımlanabilir:

$$\max_w w \cdot \Pr\{\text{firmanın } w\text{'yu kabul etmesi}\} + 0 \cdot \Pr\{\text{firmanın } w\text{'yu reddetmesi}\}. \quad (8.5)$$

Yukarıdaki optimizasyon probleminden (8.5) (homojen dağılımdan dolayı) şunu elde ederiz:

$$\Pr\{\text{firmanın } w\text{'yu kabul etmesi}\} = \frac{(\pi_1 - w)}{\pi_1}. \quad (8.6)$$

Bu yüzden optimal ücret teklifi  $w^*(\pi_1) = \pi_1/2$  olmalıdır.

Şimdi iki-periyotlu probleme geri dönelim. İlk olarak,  $w_1$  ve  $w_2$ 'nin rastgele değerleri için, eğer sendika  $w_1$  teklif ederse ve firmanın ikinci periyotta sendikadan beklediği teklif  $w_2$  ise, bu durumda yeterince yüksek kâr düzeyine sahip tüm firmalar  $w_1$  teklifini kabul ederler diğerleri ise reddederler. Firmanın  $w_1$  teklifini kabul etmesinden sonra olası faydaları  $\pi - w_1$  iken,  $w_1$  teklifini reddedip  $w_2$ 'i kabul etmesinden dolayı faydası ise  $\delta(\pi - w_2)$ 'dir. Fakat her iki teklifi de ret ederse

firmanın faydası sıfırdır. Eğer  $\pi - w_1 > \delta(\pi - w_2)$  veya

$$\pi > \frac{w_1 - \delta w_2}{1 - \delta} = \pi^*(w_1, w_2) \text{ ise} \quad (8.7)$$

firma  $w_1$ 'i  $w_2$ 'e tercih eder ve eğer  $\pi - w_1 > 0$  ise firma  $w_1$ 'i kabul etmeyi her iki teklifi de reddetmeye tercih eder. Yani  $w_1$  ve  $w_2$ 'nin rastgele değerleri için,  $\pi > \max\{\pi^*(w_1, w_2), w_1\}$  durumunda olan firmalar  $w_1$ 'i kabul eder ve  $\pi < \max\{\pi^*(w_1, w_2), w_1\}$  durumunda olan firmalar ise  $w_1$ 'i reddeder. 2.Koşul firmaya, oyuncuların ardısal stratejileri veri alındığında, optimal davranmasını dikte ettiğinden dolayı, rastgele  $w_1$  değerleri için  $K_1(w_1|\pi)$ 'i türetebiliriz:  $\pi > \max\{\pi^*(w_1, w_2), w_1\}$  durumundaki firmalar  $w_1$ 'i kabul eder ve  $\pi < \max\{\pi^*(w_1, w_2), w_1\}$  durumunda olan firmalar ise  $w_1$ 'i reddederler, burada  $w_2$  sendikanın ikinci-periyot ücret teklifidir,  $w_2(w_1)$ .

Daha önce söylediğimiz gibi  $\mu_2(\pi|w_1)$ 'i yani eğer birinci-periyot ücret teklifi  $w_1$  reddedildiğinde varılan bilgi kümesinde sendikanın ikinci-periyot inancını türetilim. 4. koşul (mümkün olduğu yerlerde inançların Bayes kuralı kullanılarak türetilmesi),  $\pi$  kâr düzeyinin  $[0, \pi(w_1)]$  aralığında homojen dağıldığını ima eder, burada  $\pi(w_1)$  firmanın  $w_1$ 'i kabul etmekle onu reddetmek arasında farksız olduğu kâr düzeyini gösterir. Bu inanç veri alındığında sendikanın optimal ikinci-periyot teklifini, yani  $w^*(\pi(w_1)) = \pi(w_1)/2$ , (bir periyotluk problemde hesaplandığı gibi) kabul eder. Bunu görmek için 4. koşulun sendikanın inancını Bayes kuralı ve firmanın davranışı ile belirlendiğini hatırlayalım. Yani firmanın ilk bölümdeki  $K_1(w_1 | \pi)$  stratejisi veri alındığında, firmanın inancı ikinci periyotta kalan tiplerin  $[0, \pi_1]$  aralığında homojen dağıldığı, şeklindedir, burada  $\pi = \max\{\pi^*(w_1, w_2), w_1\}$  ve  $w_2(w_1)$  sendikanın ikinci-periyot teklifidir. Bu inanç yapısı veri alındığında, sendikanın optimal ikinci-periyot teklifi  $w^*(\pi_1) = \pi_1/2$  olacaktır, bu da  $\pi_1$  için birinci periyot ücretinin,  $w_1$ , örtük bir fonksiyonu verir:

$$\pi_1 = \max\{\pi^*(w_1, \pi_1/2), w_1\}. \quad (8.8)$$

(8.8)'de ifade edilen örtük fonksiyonu çözmek için,  $w_1 \geq \pi^*(w_1, \pi_1/2)$  olduğunu varsayalım. Böylece  $\pi_1 = w_1$  olur. Fakat bu,  $w_1 \geq \pi^*(w_1, \pi_1/2)$  durumunu olmayacağını gösterir. Bu yüzden  $w_1 < \pi^*(w_1, \pi_1/2)$  olur. Böylece  $\pi_1 = \pi^*(w_1, \pi_1/2)$  veya (8.7)'dan aşağıdaki sonucu türetiriz:

$$\pi_1(w_1) = \frac{2w_1}{2 - \delta} \text{ ve } w_2(w_1) = \frac{w_1}{2 - \delta}. \quad (8.9)$$

Tüm oyunu sendika için tek-periyotluk bir optimizasyon problemine indirgemiş olduk: Sendikanın birinci-periyot tepkisi veri alındığında, firmanın optimal birinci-periyot tepkisini, sendikanın ikinci periyoda girme inancını, sendikanın optimal ikinci-periyot teklifini ve firmanın optimal ikinci-periyot tepkisini belirlemiş olduk.

Yani sendikanın birinci-periyot ücret teklifi aşağıdaki probleminden türetilmeli:

$$\begin{aligned} \max_{w_1} w_1 \cdot \Pr\{\text{firmanın } w_1 \text{'i kabul etmesi}\} \\ + \delta w_2(w_1) \cdot \Pr\{w_1 \text{'i reddetmesi fakat } w_2 \text{'i kabul etmesi}\} \\ + \delta \cdot 0 \cdot \Pr\{\text{hem } w_1 \text{ hem de } w_2 \text{'i reddetmesi}\}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Dikkat edilirse ,  $\Pr\{\text{firmanın } w_1 \text{'i kabul etmesi}\}$  sadece  $\pi$  değerinin  $w_1$  değerini aşma olasılığı olmayıp  $\pi$  değerinin  $\pi_1(w_1)$  değerini aşma olasılığıdır:

$$\Pr\{\text{firmanın } w_1 \text{'i kabul etmesi}\} = \frac{\pi_H - \pi_1(w_1)}{\pi_H}. \quad (8.11)$$

Yukarıda (8.10)'de ifade edilen optimizasyon probleminin çözümü bize mükemmel Bayesyen dengesini verir (bunu (8.6), (8.9) ve (8.10) değerlerini (8.10) ifadesinde yerine koyup  $w_1$  'e göre optimizasyon yaptığımızda elde ederiz) :

Sendikanın birinci-periyot ücret teklifi şöyledir:

$$w_1^* = \frac{(2 - \delta)^2}{2(4 - 3\delta)} \pi_H.$$

Eğer firmanın kârı ( $\pi$ ) aşağıdaki değeri aşarsa

$$\pi_1^* = \frac{2w_1}{2 - \delta} = \frac{2 - \delta}{4 - 3\delta} \pi_H,$$

firma  $w_1^*$  teklifini kabul eder, aksi takdirde  $w_1^*$  'i reddeder.

Sendikanın ikinci-periyot ücret teklifi ( $w_1^*$  'nin reddedilmesi üzerine) de şöyledir:

$$w_2^* = \frac{\pi_1^*}{2} = \frac{2 - \delta}{2(4 - 3\delta)} \pi_H < w_1^*.$$

## İstonto Oranlarında Belirsizlik Durumu

Daha önce belirtildiği gibi, stratejik pazarlık durumunda, bireylerin zaman tercihleri anlaşmanın sonucunu belirlemede oldukça önemlidir. Zaman tercihleri üzerine dair bu önemli gözlem, başka bir soruyu öne çıkarmaktadır: Oyuncular birbirlerinin zaman tercihlerini bilmiyorlarsa ne olacaktır? Bu durumu anlamak için basit bir örnek verelim.

İki oyunculu bir oyunda, 1. oyuncunun iskonto oranının  $\delta_1$  iken, 2. oyuncunun iskonto oranı iki değerden birini alabileceğini varsayalım:  $p_h$  olasılıkla  $\delta_h$  (daha sabırlı) ve  $1 - p_h$  olasılıkla da  $\delta_l$  (daha az sabırlı) değerlerini alsın. Ayrıca  $0 < \delta_l < \delta_1 < \delta_h < 1$  olduğunu varsayalım. Yani bu pazarlık oyununu ardışıl ve eksik bilgili bir oyun olarak düşünüyoruz. Oyun üç dönemden oluşur ve 3. dönem sonunda taraflar arasında bir anlaşma olmazsa her oyuncu 0 almaktadır.

Şimdi oyunun dengesini bulmaya çalışalım. Daha önce olduğu gibi oyununun

sonundan başlıyoruz: 3. periyotta 2. oyuncu,  $h$  veya  $l$  tipinde olabilir,  $s_{3,1}^* < 1$  teklifini kabul edecektir (hatırlanacak olursa, bu değer 1'e çok yakındır yani,  $s_{3,1}^* = 1$  sayılır), reddetmesi durumunda faydası sıfır olacaktır. Dolayısıyla 3. periyotta, 1. oyuncu yaklaşık olarak 1 teklifinde bulunur,  $s_{3,1}^* = 1$ , ve her iki tip de bunu kabul eder. Bu durumda, 1. oyuncu  $\delta^2$  ve 2. oyuncu 0 alır.

3. periyotta yapılacak bu teklif veri alındığında, 2. periyotta 2. oyuncu ( $h$  veya  $l$ )  $s_{2,1}^* = \delta_1$  teklifinde bulunacaktır (mükemmel bilgide olduğu gibi) ve 2. oyuncu bunu kabul eder; aşağıdaki koşullu getirileri sağlar:

- eğer 2. oyuncunun tipi  $h$  ise,  $\delta_h(1 - \delta_1)$
- eğer 2. oyuncunun tipi  $l$  ise,  $\delta_l(1 - \delta_1)$

Eğer 1.oyuncu 1.periyotta 2.oyuncunun  $h$  tipinde olduğunu bilseydi,  $s_{1,1} = 1 - \delta_h(1 - \delta_1)$  teklifinde, aksi takdirde  $s_{1,1} = 1 - \delta_l(1 - \delta_1)$  teklifinde bulunurdu. Bu iki durumu ayrı ayrı inceleyelim.

*Durum 1:*  $s_{1,1} = 1 - \delta_l(1 - \delta_1)$

Bu durumda şunu iddia ediyoruz: Eğer 2. oyuncunun tipi  $l$  ise, 2. oyuncu bu teklifi kabul eder.

Eğer 2. oyuncu teklifi ret eder ve 2. periyotta  $s_{2,1}^* = \delta_1$  karşı teklifinde bulunursa, 1. oyuncu bunu kabul eder. Bu durumda 2. oyuncunun elde ettiği fayda  $\delta_l(1 - \delta_1)$  olur, ki bu değer 1. periyotta aldığı  $s_{1,1}$  teklifi ile aynıdır. Yani eğer 2. oyuncu  $l$  tipinde ise, 1. periyotta kendisine yapılan teklifi reddetmekle bir şey kazanmaz.

Bir diğer iddiamız, eğer 2.oyuncu  $h$  tipinde ise, 2.oyuncunun teklifi reddedeceğidir. Gerçekte eğer 2.oyuncu teklifi reddederse, daha önce olduğu gibi, 2.periyottaki teklif  $\delta_1$  olacaktır. Böylece 2.oyuncunun elde ettiği fayda  $\delta_h(1 - \delta_1) > \delta_l(1 - \delta_1)$  olur, bu da 2.oyuncunun eğer tipi  $h$  ise teklifi reddetmesinin daha iyi olabileceği anlamına gelir.

*Durum 2:*  $s_{1,1} = 1 - \delta_h(1 - \delta_1)$

Bu durumda,

$$\delta_h s_{1,2} = \delta_h(1 - s_{1,1}) = \delta_h^2(1 - \delta_1) > 0 \text{ ve } \delta_l s_{1,2} = \delta_l \delta_h(1 - \delta_1) > 0.$$

olduğundan dolayı, 2. oyuncu kendi tipinden bağımsız olarak bu teklifi kabul eder.

1. oyuncu 1. periyotta hangi teklifte bulunacağına karar vermek zorundadır. Kararı şu argümanlara dayanır: Her şeyden önce *Durum 2* 'den hareketle eğer  $s_{1,1} = 1 - \delta_h(1 - \delta_1)$  teklifinde bulunursa 2. oyuncunun bu teklifi kabul edeceğini bilir. Aynı zamanda *Durum 1*'den, eğer 2. oyuncunun tipinin  $l$  olması durumunda  $s_{1,1} = 1 - \delta_l(1 - \delta_1)$  teklifini kabul edeceğini fakat tipi  $h$  ise bu teklifi reddedeceği bilgisine sahiptir. Eğer bu teklif reddedilirse, 2 periyotta 2. oyuncudan gelen teklif  $\delta_1$  olur. Yani 2. oyuncunun 2. periyotta teklifi reddetmesi durumunda 1. oyuncunun faydası  $\delta_1^2$ 'dir. Bu 1. oyuncunun  $s_{1,1} = 1 - \delta_l(1 - \delta_1)$  teklifinde bulunacağı an-

lamına gelir. Bu da ancak bu teklifi yapmasından elde edeceği beklenen faydanın,

$$p_h \delta_1^2 + (1 - p_h) [1 - \delta_l(1 - \delta_1)],$$

$s_{1,1} = 1 - \delta_h(1 - \delta_1)$  teklifinden elde edeceği faydayı aşması durumunda söz konusudur.

Elde ettiğimiz sonuçları aşağıda özetleyelim:

i. Eğer

$$p_h \delta_1^2 + (1 - p_h) [1 - \delta_l(1 - \delta_1)] > 1 - \delta_h(1 - \delta_1)$$

ise 1.oyuncu 1. periyotta  $s_{1,1}^* = 1 - \delta_l(1 - \delta_1)$  teklifinde bulunur, aksi takdirde  $1 - \delta_h(1 - \delta_1)$  teklifinde bulunur. 2. oyuncu eğer  $h$  tipinde ise  $s_{1,1}^*$  teklifini red, aksi takdirde kabul eder.

ii. İkinci periyotta, 2. oyuncu kendi tipinden bağımsız  $s_{2,1}^* = \delta_1$  teklifinde bulunur ve 1. oyuncu bu teklifi kabul eder.

iii. 3. periyotta, eğer 1. oyuncu 1. periyottaki  $s_{1,1}^* = 1 - \delta_l(1 - \delta_1)$  teklifinin reddedildiğini görürse 2. oyuncunun tipinin  $h$  olduğuna inanır, aksi takdirde inançları 1. periyottan itibaren değişmez.

## Sorular

1. Bilgisayar şirketi ICARUS ile internet adresi [www.icarus.com](http://www.icarus.com)'un sahibi olan bir iş adamı arasındaki pazarlığı düşünelim. Şirket iş adamının elindeki adresi yeni satın aldığı bir arama motoru için kullanmak istiyordu. İki taraf 1998 yazı boyunca bu adres için uzun süre pazarlık ettiler. Bu oyunda iş adamı "küçük" oyuncu olsa da o yılın ağustos ayında iki taraf anlaşmaya vardı ve internet adresi 3.35 milyon dolar bedelle el değiştirdi. ICARUS adresi eylül ayından itibaren kullanmaya başladı ve anlaşma ile ilgili finansal detayları açıklamadı. Bu bilgiye göre iki tarafın pazarlık anlaşmasına en iyi alternatiflerini -yani bu anlaşma olmasaydı elde edebilecekleri en iyi sonuçları-, pazarlık güçlerini ve göreceli sabır düzeylerini yorumlayınız.
2. Ece ve Derya 100 lira tutarındaki bir parayı paylaşmak için pazarlığa girişiyorlar. İlk olarak Ece bir oran teklif ediyor. Derya kabul ederse oyun sona eriyor, etmezse para 1 lira azaltılarak 99 liraya düşüyor. Sonra ikinci turda Derya teklifte bulunuyor. Her turda bu şekilde teklifi veren değişiyor ve anlaşma sağlanamazsa para 1 lira eksiliyor. Bu pazarlık dışında Ece'nin elde edebileceği en yüksek miktar 2.25 lira, Derya'nınki ise 3.50 lira olarak veriliyor. Bu oyunun geriye doğru çıkarsama dengesi ne olur?
3. Bir anlaşmazlığı çözmek için müzakere eden iki hayali ülke, A ve B, Ocak ayından başlamak üzere ayda bir kere görüşüyorlar ve sırayla teklif sunuyorlar. Müzakere edilen değer 100 birim olduğunu kabul edin. A hükümeti Kasım ayındaki seçimde yeniden hükümet olmak istiyor. Ekim ayına kadar anlaşma sağlanamazsa hükümet seçimi kaybedeceği için müzakerelerin sonuçsuz kalmasını anlaşımdan 0 almak kadar kötü görüyor. B hükümeti ise anlaşmaya varmayı pek umursamıyor, hatta müzakerelerin sonuçsuz kalıp savaş çıkmasını bile göze alıyor çünkü 100'den çok daha azına bile razı (Ama yine de anlamadan olabildiğince fazlasını almak istiyor). Müzakere sonucu ne olur? İlk teklifi sunanın kimliği sonucu nasıl etkiler?
4. 10 liralık bir pastanın iki oyuncu arasında paylaşıldığı bir pazarlık oyununda 1. oyuncu 2. oyuncuya pastayı paylaşmak için (kendine 0 ve 10 ayrıma durumları hariç) 1 liranin katları cinsinden bir teklif yapıyor. 2. oyuncu kabul ederse pastayı teklifteki gibi bölüşüyorlar, redderse ikisi de hiçbir şey almıyor. Oyuncuların fayda fonksiyonları şu şekilde veriliyor:

$$u_i = m_i - cm_j, \quad 0 \leq c \leq 1.$$

- a) Oyunun genişleyen-biçimli versiyonunun bir taslağını çizin.
- b)  $c$ 'nin farklı değerleri için (örneğin 0.2, 0.5 ve 0.9) oyunun altoyun mükemmel dengesini bulun
- c) Dengedeki bölüşüm oranları  $c$ 'ye göre nasıl değişiyor?

5. Sırayla teklif yapılan bir pazarlık oyununda 1. oyuncunun ilk sıra kendisindeyse isteyeceği tutar  $x$ , 2. oyuncunun isteyeceği tutar da  $y$  olarak veriliyor. İki oyuncunun da sabırsız olduğu oyunda iskonto faktörleri sırayla  $r$  ve  $s$  olarak veriliyor. Yani 1. oyuncu için bu dönem alacağı 1 lira ire gelecek dönem alacağı  $1 + r$  liranın değeri aynı. Aynı durum 2. oyuncu için de geçerlidir.

a)  $x = s/(r + s)$  ve  $y = r/(r + s)$  şeklinde verilen yaklaşık formüllere göre eğer 2. oyuncu 1. oyuncunun 2 katı sabırsız ise aralarındaki artık değerın üçte ikisini 1. oyuncu, üçte birini 2. oyuncu alıyor. Bu sonucunun doğruluğunu kanıtlayın. (Bu formüle göre ilk teklifi kimin yaptığının önemli olmadığına dikkat edin).

b)  $r = 0.01$  ve  $s = 0.02$  olduğuna göre  $x$  ve  $y$  değerlerinin üstteki yaklaşık olarak bulma yöntemiyle ve daha kesin sonuç veren  $x = (s + rs)/(s + r + rs)$  ve  $y = (r + rs)/(s + r + rs)$  formülleriyle hesaplayın ve karşılaştırın. (kesin sonuç veren formüle göre ilk teklifi kimin yaptığı küçük de olsa bir fark yaratıyor)

6. İki turlu bir pazarlık oyununda satıcı evini en az 188, 000 liraya satarken alıcı en fazla 200, 000 ödemeye razı. Bu iki fiyat herkesçe biliniyor ve pazarlık aradaki fark  $M = 12, 000$  için yapılıyor. Anlaşma sağlanamazsa iki tarafın da 0 alacağını kabul edin. İlk turda alıcı satıcının red veya kabul edeceği bir teklif yapıyor. Satıcı teklifi redderse 2. turda bir karşı teklif yapıyor ve alıcının red veya kabul cevabıyla oyun bitiyor. İki oyuncu da gelecekteki geliri  $\delta = 0.2$  katsayısıyla iskonto ediyor.

a) Oyunun geriye doğru çıkarsama dengesini bulun. Evin satış fiyatı ne kadar olur? Aradaki fark miktarı  $M$ 'den hangi oyuncu daha fazla pay alır?

b) Satıcının iskonto faktörü aynı kalırken alıcınının  $\delta_a = 0.8$  olduğuna kabul ederek önceki şıktaki soruya yeniden cevap verin.

c) İskonto faktörlerinin  $\delta = 0.2$  olduğu baştaki duruma dönelim. Bu sefer oyunda bir zaman sınırı yok ve ilk teklifi alıcı yapmak üzere oyun sürekli devam ediyor. Sınırsız sayıda turun olduğu durumda alıcının aldığı payı, 2 turlu oyunla karşılaştırın (veya 3 turlu oyunla).

7. Bir sendika bir firmayla tüm işçiler,  $n$ , için günlük çalışma saati,  $x \in [0, 10]$  için pazarlık yapıyor. İşçilerin hepsi  $u = (wx)^a(10 - x)^{1-a}$  şeklinde verilen fayda fonksiyonuna sahip. Firmanın kârı ise  $\pi = (p - w)nx$  olarak veriliyor. Fiyat ve maaş miktarları iki tarafın tasarrufu dışında sabit olarak veriliyor;  $p > w > 0$ . Anlaşma sağlanamazsa  $u = \pi = 0$ .

a)  $a = 1/2$ ,  $w = 1$ ,  $p = 2$  ve  $n = 1$  olsun. Senika ile firma ilk teklifi firmanın  $x_1 \in [0, 10]$  şeklinde sunduğu sırayla teklif yapılan bir

pazarlık oyunu oynuyorlar. İskonto faktörü iki taraf için de aynı olsun;  $\delta \in (0, 1)$ . Verilen herhangi bir  $\delta$  değeri için oyunun altoyun mükemmel dengesini bulun. Dengedeki çalışma süresinin  $\delta$  değerine bağlılığını tartışın ve grafiğini çizin.

- b) Bir önceki şıktaki soruyu  $\alpha \in (0, 1)$  parametresinin belirsiz değerleri için çözün. Sonucun bu parametreye göre nasıl değiştiğini ekonomik bir akıl yürütmeyle açıklayın.

8. Mehmet ve Kadir, 9 liranın bölüşümü için pazarlık yapıyorlar. Elllerine geçecek paranın sağlayacağı fayda ikisi için şu şekilde veriliyor.

$$u_M(x_M) = x_M \text{ ve } u_Y(x_Y) = \sqrt{x_Y}$$

Aralarında anlaşamazlarsa kimse para alamayacak.

- a) Bu vaziyeti bir pazarlık problemi olarak kurgulayın. Mümkün olan fayda dağılımını çizin.

Şimdi oyunun 3 tur oynandığını ve oyuncuların sırayla teklif sunduğunu kabul edin. İlk teklifi Mecnun yapıyor. İki oyuncu da geleceği  $\delta$  oranında iskonto ediyor

- b) Bu oyunun altoyun mükemmel dengesini bulun, her oyuncunun aldığı parayı ve elde ettiği faydayı hesaplayın.
- c) Oyun sonuna bağımlılığı (ende game dependence) açıklayın. Pazarlık sonzua kadar devam edebilecek olsaydı altoyun mükemmel denge ve oyuncuların alacağı para miktarı ne olurdu?

9. Ücret pazarlığı oyununun oynandığını varsayalım. İşverenin fayda fonksiyonu  $U_e(w) = (1-w)^{\frac{1}{2}}$ , işçinin fayda fonksiyonu ise  $U_w(w) = w^{\frac{1}{2}}$  şeklindedir. Ücret ise  $0 \leq w \leq 1$  aralığında yer almaktadır. Nash pazarlığı çözümünü bulunuz.

10. Zeynep, Ayşe ve Elif bir miktar parayı bölüşmek istiyorlar. İlk olarak Zeynep teklif yapar, sırasıyla Ayşe ve Elif'e B ve C kadar para teklif eder, kendisine ise A kadar para ayırır. Her ikisi de teklifi kabul ederse oyun tamamlanır. Aksi durumda diğer gün teklif sırası Ayşe'ye geçer. Ayşe diğer ikisine bir teklif yapar, teklif reddedilirse 3.güne geçilir ve bu sefer Elif diğerlerine teklif yapar. Teklif yine reddedilirse oyun 4.güne geçer ve süreç herhangi bir teklif kabul edilene kadar tekrarlanır. 3.oyuncunun da iskonto değerleri  $\delta$  kadardır. Bu oyunun altoyun mükemmel dengesini bulunuz.

11. Ardısal bir pazarlık oyununda bir alıcı ve satıcı bölünemez bir malın fiyatı üzerinde pazarlık yapmaktadır. Ürünün satıcı için maliyeti sıfırdır, alıcı için ise ürünün değeri  $v$  kadardır. Her periyotta teklif verecek kişi rassal olarak seçilmektedir.  $q$  olasılıkla 1.oyuncu,  $1 - q$  olasılıkla 2.oyuncu teklif verecek

kişi olarak seçilecektir. Teklif verecek kişi  $p$  fiyatı üzerinden teklif verir, ve diğer oyuncu da bu teklifi kabul ederse, kazançlar  $(p, v - p)$  olur ve oyun tamamlanır, aksi takdirde oyun bir sonraki aşamaya geçer. Oyuncular risk-yansızdır ve iskonto değerleri  $\delta$  kadardır. Oyunun altoyun mükemmel dengesini ve oyuncuların beklenen denge kazançlarını bulunuz.

12. Ardisal bir pazarlık oyununda 2 tane alıcı vardır. Her periyotta rassal olarak bir alıcı seçilmektedir. Seçilen kişi ( $q = 1/2$ ) teklifini yapar, satıcı bu teklifi kabul edebilir ya da reddedebilir. Teklif kabul edilirse oyun tamamlanır, aksi takdirde rassal olarak yeniden bir alıcı seçilir ve süreç tekrarlanır. Oyuncular risk-yansızdır (fayda fonksiyonları lineer) ve iskonto değerleri  $\delta$  kadardır. Oyunun altoyun mükemmel dengesini ve oyuncuların beklenen denge kazançlarını bulunuz.  $\delta$  değeri 1 'e yaklaştığında durum ne olur?

13. 100 TL'yi paylaşmak için alternatif teklifli bir pazarlık oyunu olduğunu varsayınız. Ecem ilk teklifi yapar ve ardından eğer isterse Selin karşı teklif yapar. Her ikisi için de iskonto oranı  $\delta$  şeklindedir. Ecem'in oyunun herhangi bir anında 50 TL'lik çıkış opsiyonuna sahip olduğunu varsayınız. Oyundan çıktığında elde ettiği değer iskonto edilecektir, eğer ilk tur sonunda çıkarsa 50 TL alıcaktır. Ecem çıkış opsiyonunu kullanırsa Selin para alamayacaktır. Bu durum kazançları ve denge stratejilerini nasıl etkiler? Eğer Selin, Ecem, Selin ( Ecem'in hala çıkış opsiyonu vardır) şeklinde ardışık teklifler olursa kazançları ve denge stratejileri nasıl etkilenir?

14. Belli miktarda bir paranın A ve B bireyleri arasında bölüşüldüğü bir oyunda A bireyi  $x \in (0, 1)$  oranını öneriyor. B teklifi kabul etmezse iki taraf da 0 alıyor, kabul ederse parayı sırayla  $1 - x$  ve  $x$  oranlarıyla paylaşıyorlar. Oyuncuların fayda fonksiyonları şu şekilde veriliyor:

$$u_A = 1 - x \text{ ve } u_B = x - \beta|x - 1/2|, \quad \beta \in \mathbb{R}_+$$

Sözle ifadesiyle A ve B'nin fayda fonsiyonları paraya göre doğrusaldır. Buna ek olarak B'nin önemi  $\beta$  parametresine bağlı olan bir adil paylaşım kaygısı vardır.

- a) Bu durumu tam bilgili dinamik bir oyun olarak kurgulayın. Strateji uzaylarını tanımlayın ve altoyun mükemmel dengeleri kümesini bulun. Dikey eksen  $x$ , yatay eksen  $\beta$  olan bir grafik çizin.
- b) Bu sefer A  $\beta$ 'nin değerini bilmiyor ve  $p$  olasılığıyla  $\beta = 1$  ve  $1 - p$  olasılığıyla  $\beta = 0$  şeklinde öznel bir inancı var. Bu eksik bilgili oyunu modelleyin ve ardisal dengeleri bulun. Bu versiyonda  $p = 1/2$  olduğunda ortaya çıkan dengeyi tam bilgili versiyonda  $\beta = 1/2$  olduğunda ortaya çıkan denge ile karşılaştırın ve bulduğunuz sonucu açıklayın.
15. Yiğit'in hizmet veren, Mert'in hizmet talep eden olduğu bir pazarlık varsayınız. Mert'in bu hizmet için verebileceği maksimum rakam 300 TL'dir. Yiğit'in

hizmet verebileceği minimum rakam ise 200 TL'dir. Pazarlık şu şekilde gerçekleşir: Mert Yiğit'e bu hizmet için bir ücret teklif eder, Yiğit bu teklifi kabul eder ya da reddeder. Yiğit teklifi kabul ederse söz konusu bedelden anlaşma sağlanır ve oyun tamamlanır. Yiğit teklifi reddederse, Mert yeni bir teklif yapar. Yiğit yeni teklifi kabul eder ya da reddeder, ve oyun bu şekilde devam eder. Her iki oyuncunun da gelecek gelirleri %50 ile iskonto edilmektedir. Yiğit teklifi kabul etmek ile reddetmek arasında farksız olduğunda teklifi kabul edecektir.

- a) Oyunun 2 periyot sürdüğümü varsayalım. Yiğit'in 2 .teklifi de reddettiğini ve her ikisinin de kazancının 0 olduğunu varsayınız. Bu oyunun ağacını çiziniz.
  - b) a şıkkındaki oyunun mükemmel denge stratejilerini bulunuz.
  - c) Oyun sonsuz kere tekrarlanırsa oyunun mükemmel denge stratejilerini bulunuz.
  - d) Oyuncuların gelecek geliri artık iskonto edilmediğini varsayalım. Oyunda şu şekilde değişikliğe gidildiğini varsayınız: Her periyotta kimin teklif vereceğinin belirlenmesi için yazı-tura atılacaktır. Eğer tura gelirse Mert teklif yapacaktır, Yiğit bu teklifi kabul eder ya da reddeder. Eğer yazı gelirse Yiğit teklif yapacaktır. Mert bu teklifi kabul eder ya da reddeder. Pazarlığın 2 periyot sürdüğünü varsaydığınızda oyun ağacı nasıl olur?
  - e) Her 2 oyuncunun kazançları için fayda fonksiyonu  $U(x) = x^{1/2}$  ise d şıkkındaki oyunun mükemmel denge stratejilerini bulunuz.
16. Bir birimlik bir mal için yapılan pazarlıkta alıcının değerlemesi satıcının maliyeti ile tamamen ilişkili.  $c$  maliyeti eşit olasılıklarla iki farklı değer alıyor:  $c_L (= 0)$  ve  $c_H$ . Alıcının değerlemesi  $c_L$  için  $v(c_L) = 0$  ve  $c_H$  için  $v(c_H) = v_H$  olarak veriliyor ( $2c_H > v_H > c_H > 0$ ). Maliyetin cari miktarını satıcı biliyor ama alıcının bu maliyetten ve doayısıyla kendi değerlemesinden haberi yok. Bu durum satıcının maliyetinin ürünün kalitesiyle ilgili olduğu şeklinde yorumlanabilir. Bu durumda oyuncuların iskonto faktörleri aynı iken alış verişin gerçekleştiği bir denge olup olmadığını tartışın.

- [1] Akerlof, George A. (1974), “The market for lemons”, *Quarterly Journal of Economics*, 488–500.
- [2] Aliprantis, Charalambos ve Subir Chakrabarti (2000), *Games and Decision making*, Oxford: Oxford University Press.
- [3] Arrow, Kenneth J. (1951), *Social choice and individual values*. New York: Wiley.
- [4] Arrow, Kenneth J. (1979), “The property rights doctrine and demand revelation under incomplete information”, *Economics and Human Welfare* (Boskin, M., ed.). Academic Press, New York.
- [5] Aumann, Robert J. (1976), “Agreeing to disagree” , *Annals of Statistics* 4, 1236–1239.
- [6] Aumann, Robert J. (1985), “What is game theory trying to accomplish?”, *Frontiers of economics* (Arrow, K. ve Honkapohja, S., ed.), s. 28-76, Oxford: Basil Blackwell.
- [7] Aumann, Robert J. (1997), “Rationality and bounded rationality”, *Games and Economic Behavior* 21, 2–14.
- [8] Aumann, Robert J. ve Bezalel Peleg (1960), “Von Neumann–Morgenstern solutions to cooperative games without side payments”, *Bulletin of the American Mathematical Society* 66, 173–179.
- [9] Aumann, Robert J. ve Sergiu Hart (ed.) (1992), *Handbook of game theory*. Amsterdam: North-Holland.
- [10] Aumann, Robert J. ve Lloyd S. Shapley (1994), “Long-term competition—a game theoretic analysis”, *Essays in game theory* (Megiddo, N., ed.), s.1-15, New York: Springer-Verlag.

- [11] Axelrod, Robert (1980), "Effective choice in the Prisoner's Dilemma", *Journal of Conflict Resolution* 24, 3–25.
- [12] Axelrod, Robert (1980), "More effective choice in the Prisoner's Dilemma", *Journal of Conflict Resolution* 24, 379–403.
- [13] Axelrod, Robert (1984), *The evolution of cooperation*. New York: Basic Books.
- [14] Becker, Gary S. (1974), "A theory of social interactions", *Journal of Political Economy* 82, 1063–1091.
- [15] Bergstrom, Theodore C., Lawrence E. Blume ve Hal R. Varian (1986), "On the private provision of public goods", *Journal of Public Economics* 29, 25–49.
- [16] Bernheim, B. Douglas (1984), "Rationalizable strategic behavior", *Econometrica* 52, 1007–1028.
- [17] Besanko, David, David Dranove ve Mark Shanley (1996), *Economics of strategy*, New York: John Wiley ve Sons.
- [18] Bierman, H. Scott ve Luis Fernandez (1998), *Game theory with economic applications*. Reading, Massachusetts: Addison Wesley.
- [19] Bolton, Gary E. ve Axel Ockenfels (2000), "ERC: a theory of equity, reciprocity, and competition", *American Economic Review* 90, 166–193.
- [20] Bolton, Gary E. ve Rami Zwick (1995), "Anonymity versus punishment in ultimatum bargaining", *Games and Economic Behavior* 10, 95–121.
- [21] Bryant, John (1994), "Coordination theory, the stag hunt and macroeconomics", *Problems of coordination in economic activity* (Friedman, J., ed.), s. 207–225, Boston: Kluwer.
- [22] Clarke, Edward H. (1971), "Multi-part pricing of public goods", *Public Choice* 11, 17–23.
- [23] Cooper, Russell, Douglas V. DeJong, Robert Forsythe ve Thomas W. Ross (1996), "Cooperation without reputation: experimental evidence from Prisoner's Dilemma games", *Games and Economic Behavior* 12, 187–218.
- [24] Cramton, Peter C. (1998), "The efficiency of the FCC spectrum auctions", *Journal of Law and Economics* 41, 727–736.
- [25] d'Aspremont, C. ve L.A. Gérard-Varet (1979), "Incentives and incomplete information", *Journal of Public Economics* 11, 25–45.

- [26] Dixit, Avinash ve Barry Nalebuff (1991), *Thinking strategically*. New York: Norton.
- [27] Dubey, Pradeep ve Mamoru Kaneko (1984), "Information patterns and Nash equilibria in extensive games: I", *Mathematical Social Sciences* 8, 111–139.
- [28] Dutta, Prajit (1999), *Strategies and games: Theory and practice*, Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- [29] Edgeworth, Francis Y. (1881), *Mathematical psychics*. London: Kegan Paul.
- [30] Eichberger, Jurgen (1993), *Game theory for economists*, San Diego: Academic Press.
- [31] Elster, Jon (1982), "Marxism, functionalism and game theory", *Theory and Society* 11, 453–82.
- [32] Forsythe, Robert, Joel L. Horowitz, N. E. Savin ve Martin Sefton (1994), "Fairness in simple bargaining experiments", *Games and Economic Behavior* 6, 347–369.
- [33] Frank, Robert H., Thomas Gilovich ve Dennis T. Regan (1993), "Does studying economics inhibit cooperation?", *Journal of Economic Perspectives* 7 (2), 159–171.
- [34] Friedman, James W. (1971), "A non-cooperative equilibrium for supergames", *Review of Economic Studies* 38, 1–12.
- [35] Friedman, James (1990), *Game theory with applications to economics*, Oxford: Oxford University Press.
- [36] Fudenberg, Drew ve David K. Levine (1998), *The theory of learning in games*, Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- [37] Fudenberg, Drew ve Eric S. Maskin (1986), "The folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information", *Econometrica* 54, 533–554.
- [38] Fudenberg, Drew ve Jean Tirole (1991), *Game theory*, Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- [39] Gardner, Roy (1994), *Games for business and economics*, New York: John Wiley ve Sons.
- [40] Gates, Scott ve Brian Humes (1997), *Games, information, and Politics: Applying game theoretic models to political science*, Ann Arbor: University of Michigan Press.

- [41] Gibbard, Allan (1973), "Manipulation of voting schemes", *Econometrica*, 41, 587–601.
- [42] Gibbons, Robert (1992), *Game theory for applied economists*, Princeton: Princeton University Press.
- [43] Gintis, Herbert (2009) *Game theory evolving: A problem-centered introduction to evolutionary game theory*, Princeton: Princeton University Press.
- [44] Grout, Paul A. (1984), "Investment and wages in the absence of binding contracts: a Nash bargaining approach", *Econometrica* 52, 449–460.
- [45] Groves, Theodore (1973), "Incentives in teams", *Econometrica* 41, 617–631.
- [46] Guth, Werner, Rolf Schmittberger ve Bernd Schwarze (1982), "An experimental analysis of ultimatum bargaining", *Journal of Economic Behavior and Organization* 3, 367–388.
- [47] Hardin, Garrett (1968), "The tragedy of the commons", *Science* 162, 1243–1248.
- [48] Harsanyi, John C. (1967), "Games with incomplete information played by 'Bayesian' players, Parts I, II, and III", *Management Science* 14, 159–182, 320–334, ve 486–502.
- [49] Hirshleifer, Jack ve John Riley (1999) *The Economics of uncertainty and information*, Cambridge: Cambridge University Press.
- [50] Hoffman, Elizabeth, Kevin A. McCabe ve Vernon L. Smith (1996), "On expectations and the monetary stakes in ultimatum games", *International Journal of Game Theory* 25, 289–301.
- [51] Hotelling, Harold (1929), "Stability in competition", *Economic Journal* 39, 41–57.
- [52] Hurwicz, Leonid (1960), "Optimality and informational efficiency in resource allocation processes", *Mathematical Methods in the Social Sciences* (Arrow, K., Karlin, S., ve Suppes, P., ed.), Stanford University Press.
- [53] Hurwicz, Leonid (1972), "On informationally decentralized systems", *Decision and Organization* (Radner, R. ve McGuire, C., ed.) North-Holland, Amsterdam.
- [54] Kakutani, Shizuo (1941), "A generalization of Brouwer's fixed point theorem", *Duke Mathematical Journal* 8, 457–459.
- [55] Kalai, Ehud ve Meir Smorodinsky (1975), "Other solutions to Nash's bargaining problem", *Econometrica* 43, 513–518.

- [56] Klemperer, Paul (1999), "Auction theory: A guide to the literature", *Journal of Economic Surveys* 13, 227–286.
- [57] Kohlberg, Elon ve Jean–Francois Mertens (1986) "On the strategic stability of equilibria", *Econometrica* 54, 1003–37.
- [58] Kohler, David A. ve R. Chandrasekaran (1971), "A class of sequential games", *Operations Research* 19, 270–277.
- [59] Kreps, David (1990) *A course in microeconomic theory*. Princeton: Princeton University Press.
- [60] Kreps, David (1990), *Game theory and economic modeling*, Oxford: Oxford University Press.
- [61] Kreps, David ve Robert Wilson (1982), "Sequential equilibria", *Econometrica* 50, 863–894.
- [62] Kuhn, Harold W. (1950), "Extensive games", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 36, 570–576.
- [63] Kuhn, Harold W. (1953), "Extensive games and the problem of information", *Contributions to the theory of games, Volume II (Annals of Mathematics Studies, 28)* (Harold W. Kuhn ve A. W. Tucker, eds.), s. 193–216, Princeton: Princeton University Press.
- [64] Laffont, Jean-Jacques ve Jean Tirole (1993), *A theory of incentives in procurement and regulation*, Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- [65] Langdon, Merle (1994), "Public auctions in ancient Athens", *Ritual, finance, politics* (Osborne, R. ve Hornblower, S., ed.), s. 253–265, Oxford: Clarendon Press.
- [66] Leonard, Robert J. (1994), "Reading Cournot, reading Nash: the creation and stabilisation of the Nash equilibrium", *Economic Journal* 104, 492–511.
- [67] Leonard, Robert J. (1995), "From parlor games to social science: von Neumann, Morgenstern, and the creation of game theory 1928–1944", *Journal of Economic Literature* 33, 730–761.
- [68] Luce, R. Duncan ve Howard Raiffa (1957), *Games and decisions*. New York: John Wiley ve Sons.
- [69] Macho-Stadler, Ines ve J. David Perez-Castillo (1997), *An introduction to the economics of information: Incentives and contracts*, Oxford: Oxford University Press.
- [70] Magnan de Bornier, Jean (1992), "The "Cournot-Bertrand debate": A historical perspective", *History of Political Economy* 24, 623–656.

- [71] Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston ve Jerry R. Green (1995), *Microeconomic theory*, Oxford: Oxford University Press.
- [72] Maskin, Eric (1999), "Nash equilibrium and welfare optimality", *Review of Economic Studies* 66, 23–38.
- [73] Maynard Smith, John (1982), *Evolution and the theory of games*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [74] McMillan, John (1994), "Selling spectrum rights", *Journal of Economic Perspectives* 8 (3), 145–162.
- [75] Milgrom, Paul R. (1981), "Rational expectations, information acquisition, and competitive bidding", *Econometrica* 49, 921–943.
- [76] Morris, Peter (1994), *Introduction to game theory*, Berlin: Springer Verlag.
- [77] Moulin, Hervé (1986), *Game theory for the social sciences*, New York: New York University Press.
- [78] Moulin, Hervé (1995), *Cooperative microeconomics*, Princeton: Princeton University Press.
- [79] Myerson, Roger (1979): "Incentive compatibility and the bargaining problem", *Econometrica* 47, 61–73.
- [80] Myerson, Roger (1981), "Optimal auction design", *Mathematics of Operations Research* 6, 58–73.
- [81] Myerson, Roger (1991), *Game theory: Analysis of conflict*, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- [82] Myerson, Roger (1996), "John Nash's contribution to economics", *Games and Economic Behavior* 14, 287–295.
- [83] Nash, John F. (1950a), "Equilibrium points in N-person games", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 36, 48–49.
- [84] Nash, John F. (1950b), "The bargaining problem", *Econometrica* 18, 155–162.
- [85] Nash, John F. (1951), "Non-cooperative games", *Annals of Mathematics* 54, 286–295.
- [86] Novshek, William ve Hugo Sonnenschein (1978), "Cournot and Walras equilibrium", *Journal of Economic Theory* 19, 223–266.
- [87] Nowak, Martin A. ve Karl Sigmund (1992), "Tit for tat in heterogeneous populations", *Nature* 355, 250–253.

- [88] Nowak, Martin A. ve Karl Sigmund (1993), "A strategy of win-stay, lose-shift that outperforms tit-for-tat in the Prisoner's Dilemma", *Nature* 364, 56–58.
- [89] Olson, Mancur (1965), *The logic of collective action*, Cambridge: Harvard University Press.
- [90] Osborne, Martin (2003), *An introduction to game theory*, Oxford: Oxford University Press.
- [91] Osborne, Martin ve Ariel Rubinstein (1994), *A course in game theory*, Cambridge: MIT Press.
- [92] Ostrom, Elinor (1990), *Governing the commons*, Cambridge: Cambridge University Press.
- [93] Owen, Guillermo (1995), *Game theory*, New York: Academic Press.
- [94] Palfrey, Thomas R. ve Richard D. McKelvey (1992), "An experimental study of the centipede game", *Econometrica* 60, 830–836.
- [95] Pearce, David G. (1984), "Rationalizable strategic behavior and the problem of perfection", *Econometrica* 51, 1029–1050.
- [96] Peters, Michael (1984), "Bertrand equilibrium with capacity constraints and restricted mobility", *Econometrica* 52, 1117–1127.
- [97] Rabin, Matthew (1998), "Psychology and economics", *Journal of Economic Literature* 36, 11–46.
- [98] Rapoport, Amnon ve Richard B. Boebel (1992), "Mixed strategies in strictly competitive games: a further test of the minimax hypothesis", *Games and Economic Behavior* 4, 261–283.
- [99] Rasmusen, Eric (2005) *Games and Information*. Oxford: Blackwell Publishers.
- [100] Rosenthal, Robert W. (1981), "Games of perfect information, predatory pricing and the chain-store paradox", *Journal of Economic Theory* 25, 92–100.
- [101] Rotemberg, J. ve G. Saloner (1986), "A supergame-theoretic model of business cycle and price wars during booms", *American Economic Review* 76, 390–407.
- [102] Roth, Alvin E. (1982), "The economics of matching: stability and incentives", *Mathematics of Operations Research* 7, 617–628.
- [103] Roth, Alvin E. (1995), "Bargaining experiments", *The handbook of experimental economics* (Kagel, J. ve Roth, A., ed.), s. 253–348, Princeton: Princeton University Press.

- [104] Rubinstein, Ariel (1979), "Equilibrium in supergames with the overtaking criterion", *Journal of Economic Theory* 21, 1–9.
- [105] Rubinstein, Ariel (1991), "Comments on the interpretation of game theory", *Econometrica* 59, 909–924.
- [106] Rubinstein, Ariel (1994), "Equilibrium in supergames", *Essays in game theory* (Megiddo, N., ed.), s. 7–27, New York: Springer-Verlag.
- [107] Salanie, Bernard (1997), *The Economics of contracts: A primer*, Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- [108] Schelling, Thomas C. (1960), *The strategy of conflict*, Cambridge, Massachusetts: Harvard University.
- [109] Selten, Reinhard (1975), "Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games", *International Journal of Game Theory* 4, 25–55.
- [110] Selten, Reinhard (1978), "The chain store paradox", *Theory and Decision* 9, 127–159.
- [111] Shapley, Lloyd S. ve Herbert Scarf (1974), "On cores and indivisibility", *Journal of Mathematical Economics* 1, 23–37.
- [112] Shapley, Lloyd S. ve Martin Shubik (1953), "Solutions of N-person games with ordinal utilities", *Econometrica* 21, 348–349.
- [113] Shapley, Lloyd S. ve Martin Shubik (1971/72), "The assignment game I: The core", *International Journal of Game Theory* 1, 111–130.
- [114] Shubik, Martin (1959b), *Strategy and market structure*. New York: Wiley.
- [115] Shubik, Martin (1982), *Game theory in the social sciences*, Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- [116] Stahl, Saul (1999), *A gentle introduction to game theory*, Providence, RI: American Mathematical Society.
- [117] Tirole, Jean (1988), *The theory of industrial organization*, Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- [118] Van Huyck, John B., Raymond C. Battalio ve Richard O. Beil (1990), "Tacit coordination games, strategic uncertainty, and coordination failure", *American Economic Review* 80, 234–248.
- [119] Varian, Hal (1992), *Microeconomic Analysis*, New York: Norton.
- [120] Vickrey, William (1961), "Counter speculation, auctions, and competitive sealed tenders", *Journal of Finance* 16, 8–37.

- [121] von Neumann, John ve Oskar Morgenstern (1944), *Theory of games and economic behavior*, New York: John Wiley ve Sons.
- [122] Wilson, Robert B. (1992), "Strategic analysis of auctions", *Handbook of game theory with economic applications*, Volume 1 (Robert J. Aumann ve Sergiu Hart, eds.), s. 227–279, Amsterdam: North-Holland.

- ülmatom oyunu, 170
- İngiliz ihalesi, 333, 346
- çatışma oyunları, 24
- çekirdek, 381
- çifte ihale, 350
  
- açık döngü stratejisi, 291
- aşamalı oyunlar, 181
- ağaç oyunu , 130
- aktör-stratejik biçim, 276
- altoyun, 159, 163
- altoyun mükemmel denge, 159, 163
- ardısal denge, 255
- artık oyun, 13
- asimetrik bilgili oyun, 141
- aynıştırıcı strateji, 242
  
- bağdaşık denge, 119
- bağlayıcı koalisyon, 379
- basit lotari, 85
- baskın strateji, 10, 12, 34
- beklenen fayda, 88, 91
- beklenen fayda hipotezi, 85
- Bertrand oyunu, 47, 50, 218, 303
- Bertrand paradoksu, 51
- bileşik lotari, 85
- bilgi bölmesi, 135
- bilgi kümesi, 134, 136, 143
- birinci-fiyat ihalesi, 332, 342, 345
- birleştirci strateji, 242
  
- cinsiyetler savaşı, 22, 103, 172, 214
- Cournot oyunu, 42, 62, 213, 299
- Cournot uyarlanma süreci, 72
  
- davranış stratejisi, 167
- denge patikası, 165, 233
- diktator oyunu, 171
- dinamik istikrarlı, 73
  
- eşleşen paralar, 23, 100, 143
- eksik bilgi, 141, 207
- en iyi tepki fonksiyonu, 35, 101
  
- fayda dağılımı, 368
- Folk teoremi, 314
  
- gelir denkleği teoremi, 329, 334
- genişleyen biçimli gösterim, 130
- geriye doğru çıkarsama, 155, 159, 163, 190
  
- Harsanyi dönüşümü, 141
- hibrid strateji, 242
- Hollanda ihalesi, 333, 345
- Hotelling fiyatlandırma, 56
  
- ihale, 329
- ikinci-fiyat ihalesi, 333, 336
- ileriye doğru çıkarsama, 194
- inandırıcı tehdit, 157
  
- kırkayak oyunu, 190

kısasa kısas, 298  
Kakutani sabit nokta teoremi, 64, 116  
Kalai-Smorodinsky, 373, 375  
kapalı döngü stratejisi, 291  
kapalı zarf ihalesi, 334, 335  
karma strateji, 10, 83, 90  
kazananın laneti, 358  
kesin baskın strateji , 10  
kesin bilgili oyun, 140  
kesin mahkum strateji , 11  
kesin Nash dengesi, 67  
koalisyon fonksiyonu, 378  
koordinasyon oyunları, 25, 108  
  
lotari, 85  
  
mükemmel bilgi, 140  
mükemmel hatırlama, 139  
mahkumlar çıkmazı, 8, 28, 29, 292  
makul stratejiler, 18, 32, 100  
maxmin fayda, 311  
minmax fayda, 311  
  
normal-biçim, 8  
  
objektif bağdaşık denge, 122  
ortak değerli ihale, 337, 353, 356  
  
pür strateji, 10, 20, 115, 147, 167  
pareto etkin, 23  
pareto mahkum, 26  
proper altoyun, 161  
proper denge, 277  
  
rasyonelliğin ortak bilgisi, 15  
risk baskınlık, 26  
risk-nötr, 89  
risk-seven, 89  
riskten-kaçınan, 89  
  
sözlü ihale, 331  
süperoyun, 286  
sürek oyunu, 232  
sürekli baskın strateji dengesi, 13  
sıfır-toplamlı oyun, 24  
sıralı-pareto koordinasyon oyunu, 25

sabit nokta teoremleri, 64  
salınım oyunları, 270  
Schelling noktası, 59  
simetrik bilgi, 141  
simetrik bilgili oyun, 141  
simetrik oyun, 31  
sinyalleme oyunları, 239  
Stackelberg oyunu, 173, 181  
strateji profili , 7  
stratejik ikamecilik, 52  
stratejik pazarlık oyunları, 383  
stratejik tamamlayıcılık, 37  
stratejik-biçim, 7, 9, 155  
subjektif bağdaşık denge, 122  
  
tam bilgi, 7, 141, 332  
tamamen karma, 259, 261  
tarama oyunları, 240  
tarih, 134, 287  
tavuk oyunu, 28  
tehlikeli koordinasyon, 26  
tekrarlı oyun, 285  
terminal noktalar, 131  
titreyen el mükemmel denge, 270  
transfer-edilebilir fayda oyunları, 380  
  
Vickrey ihalesi, 335  
  
yan-ödeme oyunları, 380  
yavuz strateji, 295  
yerel nokta, 58  
  
zayıf baskın strateji, 14, 336  
zincir-mağaza paradoksu, 293

© **LİTERATÜR** EKİM 2009



Oyun Teorisi, iktisadın hemen her alanına nüfuz eden bir yöntem haline gelmiştir. Endüstriyel organizasyondan uluslararası ticarete, emek piyasalarından politik ekonomiye uzanan geniş bir yelpaze içinde uygulama alanı bulunmaktadır. Dahası sosyal hayatın her alanı, özü itibarıyla strateji ve etkileşim kavramlarının uygulama alanı olduğundan, sosyoloji, psikoloji ve siyaset gibi sosyal bilimlerin pek çok alanında oyun teorisinin analitik araçları yaygın bir şekilde kullanılmaya başlanmıştır. Bu yüzden oyun teorisinin en önemli işlevlerinden biri, sosyal bilimler arasında interdisipliner çalışmaların ortaya çıkışına aracı olma potansiyeli taşımasıdır. Oyun teorik modelleme, bir ortak yöntem olarak sosyal olanı anlamayı daha sağlıklı hale getirebilir. Aumann ve Hart'e (1992) göre oyun teorisi sosyal bilimlerin rasyonel tarafının analizi için bir tür şemsiye ya da "birleşik alan teorisi" olarak görülebilir. Etkileşim içeren sosyal hayatın tüm durumlarına bir prensip olarak uygulanabilecek bir metodoloji sunar.

Bu kitap da oyun teorisinin sosyal bilimler için bu analitik ve birleştirici gücünü mümkün mertebe pedagojik bir dille tanıtmayı amaçlamaktadır. Soyutlama, analitik derinlik ve istenilen teknik formasyon açısından kitaplarda karşılaşılan genel bir problem, öğrencilerin tek aşamada her şeyi anlamalarının istenmesidir. Bu tehlikenin farkında olduğumdan, kitapta orta ve ileri düzey anlatımı birleştirmeyi, seçilen bolca örnek ve uygulamayla bu düzey geçişkenliğini sağlamayı amaçladım. Bu, aynı zamanda teori ile reel olan arasındaki bağı kopmamasına yardımcı olmaktadır.

ISBN 978-975-04-0740-6



9 789750 407406



**LİTERATÜR®**

[www.literatur.com.tr](http://www.literatur.com.tr)