

Olasılık ve
Tümevarım Mantığına
Giriş



IAN HACKING

Olasılık ve Tümevarım Mantığına Giriş

© 2012, ALFA Basım Yayım Dağıtım San. ve Tic. Ltd. Şti.

An Introduction To Probability and Inductive Logic

© 2001, Ian Hacking, Cambridge University Press

Kitabın Türkçe yayın hakları Akcalı Telif Hakları Ajans aracılığıyla Alfa Basım Yayım Dağıtım San. ve Tic. Ltd. Şti.'ne aittir. Tanıtım amacıyla, kaynak göstermek şartıyla yapılacak kısa alıntılar dışında hiçbir yöntemle çoğaltılamaz.

Yayıncı ve Genel Yayın Yönetmeni M. Faruk Bayrak

Genel Müdür Vedat Bayrak

Yayın Yönetmeni Mustafa Küpüşoğlu

Dizi Editörü Kerem Cankocak

Redaksiyon Serhat Atay-Mehmet Ata Arslan

Kapak Tasarımı Aslı Sezer

Sayfa Tasarımı Mürüvet Durna

ISBN 978-605-106-981-4

1. Basım: Şubat 2015

Baskı ve Cilt

Melisa Matbaacılık

Çiftelhavuzlar Yolu Acar Sanayi Sitesi No: 8 Bayrampaşa-İstanbul

Tel: 0(212) 674 97 23 Faks: 0(212) 674 97 29

Sertifika no: 12088

Alfa Basım Yayım Dağıtım San. ve Tic. Ltd. Şti.

Alemdar Mahallesi Ticarethane Sokak No: 15 34110 Fatih-İstanbul

Tel: 0(212) 511 53 03 Faks: 0(212) 519 33 00

www.alfakitap.com - info@alfakitap.com

Sertifika no: 10905

IAN HACKING

Olasılık ve
Tümevarım
Mantığına
Giriş

Çeviri
İrfan Özdebak

ALFA | BİLİM

İÇİNDEKİLER

Olasılık ve Tümevarım Mantığına Giriş	7
Önsöz	9
Bahis Soruları	13

MANTIK

1 Mantık	17
2 Tümevarımsal Mantık Nedir?	30

OLASILIKLARIN HESAPLANMASI

3 Kumarbazın Yanılgısı	47
4 Temel Olasılık Fikirleri	67
5 Koşullu Olasılık	80
6 Olasılığın Temel Kuralları	94
7 Bayes Kuralı	108

OLASILIKLARIN VE FAYDALARIN BİRLEŞTİRİLMESİ

8 Beklenen Değer	122
9 Beklenen Değerin Maksimize Edilmesi	150
10 Belirsizlik Altında Karar Verme	174

OLASILIK TÜRLERİ

11 Ne Demek İstiyorsunuz?	192
12 Olasılık Hakkında Kuramlar	211

İNANCIN ÖLÇÜSÜ OLARAK OLASILIK

13 Kişisel Olasılıklar	227
14 Uyum	244
15 Tecrübeden Öğrenmek	255

FREKANS OLARAK OLASILIK

16 Kararlılık	281
17 Normal Yakınsamalar	297
18 Anlamlılık ve Güç	308
19 Güven ve Tümevarım Davranışı	337

OLASILIĞIN FELSEFEYE UYGULANMASI

20	Tümevarımın Felsefi Sorunları	362
21	Tümevarım Sorunundan Sakınmanın Bir Yolu Olarak Tecrübeden Öğrenme	375
22	Tümevarım Sorunundan Sakınmanın Bir Yolu Olarak Tümevarım Davranışı	381
	Alıştırmaların Cevapları	391
	Ek Okuma Listesi	438
	Dizin	451

Sam İçin

Kapak Resmi Hakkında Not

Talih Alegorisi, Dosso Dossi (1486–1542)

Sağdaki genç kadın bugün *Bayan Şans* olarak adlandırabileceğimiz klasik *Talih* Tanrıçasıdır.

Soldaki genç adamsa *Şans*'tır.

Talih, getirebileceği iyi şansı sembolize eden bir kucak dolusu meyveyle görülmektedir. Ama bir sandaletinin olduğuna dikkat ediniz. Bu kötü bir şans getirebileceği anlamına da gelir. Ve yine bir sabun köpüğünün üzerinde oturmaktadır! Bu da şanstın elde edilen şeyin uzun sürmeyeceğini gösterir.

Şans elinde piyango biletleri tutmaktadır. Dosso Dossi Venedik'in yakınlarında kuzey İtalyan şehri olan Ferrara'da bir mahkemenin boyacısıdır. Venedik son zamanlarında bağış toplamak için bir devlet piyangosu hazırlamıştı (*bkz.* Bölüm 8). Venedik, size bugün devletlerin sunduğu piyangolardan daha iyi ikramiye oranları sunmasının dışında bu modern-devletlerin sunduğu piyangolardan pek de farklı değildi. Sanat eleştirmenleri Dosso Dossi'nin yaşamın herkes için bir piyango olduğuna inandığını söylemektedirler.

Siz yaşamın herkes için bir piyango olduğuna inanıyor musunuz?

Tablo, Los Angeles'ta J. Paul Getty Müzesindedir ve yukarıdaki not 1999'daki Dossi sergisindeki notlardan uyarlanmıştır.

ÖNSÖZ

Tümevarım mantığı, tümdengelim ya da sembolik mantığa benzemez. Tümdengelim mantığında, doğru öncülleriniz ve geçerli bir argümanınız varsa sonucun da doğru olması gerekir. Geçerli tümdengelim argümanları risk almaz.

Tümevarım mantığı risk alır. Doğru öncülleriniz ve iyi bir argümanınız olabilir fakat yine de yanlış bir sonuca varabilirsiniz. Tümevarım mantığı bu tür riskli argümanları analiz etmek için olasılığı kullanır.

İyi Haber

Tümevarım mantığı yaşamda bir rehberdir. İnsanlar her zaman riskli kararlar verirler. Bu tümdengelime göre gündelik işlerde daha büyük bir rol oynar.

Kötü Haber

İnsanlar riskler hakkında akıl yürütmede çok kötüdürler. Olasılıkları kullanırken birçok hata yaparız.

Bu kitap yedi bahis sorusu listesiyle başlıyor. Bu sorular oldukça basit görünür. Fakat çoğu insan soruların bazılarına yanlış cevap verir. En son sınıdığım dokuz-yaşındakiler grubum bir profesörler grubundan daha başarılıydı. Bahis sorularını deneyiniz. Bunların her biri daha sonra kitapta tartışılmaktadır.

Pratik Amaçlar

Bu kitap olasılıkları, riskleri ve istatistiği anlamanıza ve onu faydalı bir şekilde kullanmanıza yardımcı olabilir. Hayatlarımızı şansımızı deneyerek, yeteri kadar bilgi sahibi olmadan hareket ederek yaşıyoruz. Her gün birçok belirsizlik yaşıyoruz. Bu kitap ne yapacağınızı kestiremediğinizde neler yapabileceğinizle ilgilidir. Bu kitap, elinizdeki kanıtlar neyin

doğru olduğu hakkında size yeterince bilgi vermediği zaman yapabileceğiniz çıkarımlar hakkındadır.

Olasılıklar ve İstatistik İçinde Boğuluyoruz

Bugünlerde olasılık, istatistik ve riski duymadığınız an yoktur. Her şey –iş, seks, savaş, sağlık, spor, notlar, çevre, politika, astronomi, genetik– olasılıklarla sarmalanmıştır.

Bu yeni bir şeydir. Büyükanneniz ve büyükbabanız Kuzey Amerika’da yaşadılarsa, “10 Hollywood yıldızından 9’u Lüks güzellik sabunu kullanır” tarzındaki (haftalık bir radyo şovuyla ilgili meşhur bir cümle) bir şeyden daha karmaşık bir şeyle nadiren karşı karşıya kalmışlardır. Şimdi durmadan yoklamalar, anketler ve fikir özetleri hazırlıyoruz. İstatistiksel analiz, risk analizi, çevre etki raporları olmadan hiçbir kamu kararı verilemez.

Bütün bu sayıların ne anlama geldiğini anlamak oldukça zor. Bu kitap onları anlamanıza yardımcı olmayı amaçlamaktadır. Onları nasıl kullanacaksınız? Bu sayılar nasıl kötüye kullanılmaktadır? Ne zaman tümevarım tarzı akıl yürütme yanlışdır ya da özensiz bir retorik kullanır? Rakamlarla insanlar nasıl kandırılır? Cehaleti gizlemek için sayılar sıkça nasıl kullanılır? Kandırılmaktan nasıl kurtuluruz?

Felsefe

Felsefede tümevarım sorunu denilen meşhur bir sorun vardır. Buna da kitabın sonunda değiniliyor.

Risk hakkında etik sorular var. Bazı filozoflar her zaman ortak çıkarı maksimize etmek üzere hareket etmemiz gerektiğini söylüyorlar. Diğerleriyse görev, doğru ve yanlışın maliyet-fayda hesaplaması yapan düşünceden önce geldiğini söylüyorlar. Bu sorunlar 9. bölümde ele alınmaktadır.

Hatta dini inancın lehinde ve aleyhinde bazı olasılık argümanları vardır. Bunlardan birine 10. bölümde değiniliyor.

Olasılığın kendisi hakkında felsefi argümanlar var. Şu anda tümevarımsal *çıkarımın** temel düşünceleri hakkında

* inference –çn.

önemli fikir ayrılıkları var. Farklı düşünce okulları pratik meselelere farklı şekillerde yaklaşmaktadırlar. Başlangıç seviyesindeki çoğu istatistik dersinde sanki hiçbir anlaşmazlık yokmuş gibi davranılmaktadır. Bu bir felsefe kitabıdır, onun için de birbiriyle yarışan fikirleri ortaya atmaktadır. Bütün taraflara karşı adil olma gayreti içindedir.

Hesaplama

Şansları, riskleri ya da olasılıkları kavramak için sayılara ihtiyacınız vardır. Fakat hesap yapmaktan nefret etseniz dâhi bu kitabı kullanabilirsiniz. Formüller gözünüzü korkutmasın. Bu kitap, sayılarla temsil edilen *fikirler* hakkındadır. Bir felsefe kitabı hesaplamaların arkasındaki düşüncelerle ilgilidir. Karmaşık sorunlara kesin çözümler sunan ve birbiriyle rekabet edenlerle ilgili değildir.

Alıştırmaların çoğu için bir cep hesap makinesine ihtiyacınız yoktur; çünkü kolay bir çözüm için sayılar çoğu zaman "birbirini götürür." Hesap makinesi kullanmamaları öğretilen öğrenciler, hesap makinesi kullananlara göre problemlerin çoğunu daha çabuk çözüyorlar.

Kumar

Birçok basit olasılık örneğinde şans oyunlarından bahsedilir. Belki bu pek hoşunuza gitmez ama para için kumar oynamaya karşı insanlar farklı tutum takınırlar. Bazıları bunun bir eğlence olduğunu düşünürler. Bazıları bağımlısıdır. Bazıları içinse sıkıcıdır. Çoğu kişi içinse gayri ahlaki bir şeydir. Dünyanın değişik yerlerinde hükümetler piyango gibi yasallaştırılmış kumar oyunları hizmeti sunmaya bayılırlar; çünkü bu fazladan gelir elde etmenin kolay bir yoludur. Bir grup olarak kumarbazlar her zaman kaybederler, hem de çok kaybederler. Bu kitap, kumar reklamı yapma amacıyla değildir. Hatta tam tersidir! Arkadaşlarla bir araya gelmenin dışında –bir maç hakkında iddiaya girmek ya da arkadaşlar arasında gecenin geç saatinde bir poker partisi yapmak– kumar bir tür zaman, para ve insan onuru kaybıdır.

Yine de riskli hayatlarımızda her zaman "kumar oynarız." Belirsizlik altında kararlar veririz. Kesin olmayan verilerden eğlence olsun diye değil de, yeteri kadar bilgi sahibi olmadığımızımızdan çıkarımlar yaparız. Oyunlara dayalı modeller, bu kararları ve çıkarımları anlamamıza yardımcı olurlar. Şans hakkındaki düşünce tarzlarımızı netleştirebilirler.

Bundan dolayı sık sık bahislerde kullanılan zar ve diğer rastgelelik oluşturan yollara başvururuz. Bunlar aniden bahis sorularında belirirler. Yine de mahkemede tanıklık (bahis sorusu 5) ve tıbbi teşhisler (bahis sorusu 6) gibi pratik hususlarda ortaya çıkarlar.

BAHİS SORULARI

Bu sorularda, hiç hesaplama yapmadan şansınızı deneyin. Her soru metin içerisinde tartışılacaktır. Hata yaparsanız şaşırmayın!

1. Hastanelerde neredeyse erkek bebek sayısı kadar kız bebek doğar. *City General*'da her hafta birçok bebek doğar. Bir ilçe kasabası olan Cornwall'da her hafta sadece birkaç bebeğin doğduğu küçük bir hastane vardır. Normal bir hafta, bebeklerin %45'i ile %55'inin kız olduğu bir haftadır. Olağandışı haftaysa %55'ten fazlasının kız ya da %55'ten fazlasının erkek olduğu bir haftadır. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur:
----(a) *City General* ve Cornwall'da olağandışı haftalar çoğu zaman aynı sıklıkla oluşur.
----(b) *City General*'da olağandışı haftalara Cornwall'dan daha fazla rastlanır.
----(c) Cornwall'da olağandışı haftalara *City General*'dan daha fazla rastlanır.

16. Bölümde tartışılıyor.

2. Pia 31 yaşında, bekâr, açık sözlü ve akıllı bir kadındır. Felsefe mezunudur. Öğrenciyken, Amerikalı Yerlilerin haklarının ateşli bir savunucusuydu ve emziren anneler için hiçbir tesisi olmayan büyük bir mağazanın grev gözcülüğünü yaptı. Aşağıdaki ifadeleri (olasılığı en yüksek olandan) 1'den (olasılığı en düşük olana) 6'ya kadar olasılıklarına göre sıralayın. (Eşit değerler de verebilirsiniz.)
----(a) Pia aktif bir feministtir.
----(b) Pia bir banka memurudur.
----(c) Pia küçük bir kitapçıda çalışmaktadır.
----(d) Pia bir banka memuru ve aktif bir feministtir.
----(e) Pia bir banka memuru ve yoga dersleri alan aktif bir feministtir.

----(f) Pia küçük bir kitapçıda çalışmaktadır ve yoga dersleri alan aktif bir feministtir.

6. Bölümde tartışılıyor.

3. Devletin işlettiği standart bir şans oyunu olan Loto 6/49'da (1'den 49'a kadar) 49 sayıdan 6'sını seçiyorsunuz. Bu 6 sayı çekilirse en büyük ikramiyeyi –belki de milyonlarca dolar– kazanıyorsunuz. (Para ödülü şanslı numaraları seçenler arasında paylaştırılıyor. Hiç kimse kazanmazsa, bu durumda para ödülü bir sonraki haftanın şans oyununa aktarılıyor.)

Diyelim ki teyzeniz sizden *bedava olarak* şans oyununda aşağıda numaraları verilen iki bilet arasında seçim yapmanızı istedi:

A. 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 çekildiğinde kazanıyorsunuz.

B. 39, 36, 32, 21, 14 ve 3 çekildiğinde kazanıyorsunuz.

A'yı mı B'yi mi tercih edersiniz, yoksa her ikisi de olur mu?

3. Bölümde tartışılıyor.

4. Bir çift zarla toplam 7 atmanız için 1 ve 6 veya 2 ve 5 veya 3 ve 4 atmanız gerekir.

İki adet hilesiz zarla, aşağıdakilerden hangisinin olmasını beklersiniz:

----(a) 7'yi 6'dan daha sıklıkla atmayı.

----(b) 6'yı 7'den daha sıklıkla atmayı.

----(c) 6 ve 7'yi aynı sıklıkla atmayı.

4. Bölümde tartışılıyor.

5. Size Green Cabs Ltd. ve Blue Taxi Inc. adında iki taksi şirketinin olduğu bir kasabada jüri görevi verildi. Blue Taxi maviye boyalı arabaları, Green Cabs ise yeşil arabaları kullanıyor.

Green Cabs trafikteki taksilerin %85'ine sahip olarak pazara hâkim.

Sisli bir kış gecesinde bir taksi başka bir arabaya yandan çarptı ve hızla kaçarak uzaklaştı. Bir görgü tanığı bunun mavi bir taksi olduğunu söylüyor.

Görgü tanığı kazanın olduğu gecedekine benzer koşul-

larda ifade verdi ve testlerin %80'inde görünen taksinin rengini doğru olarak bildirdi. Yani, sisli akşam ışığında kendisine mavi ya da yeşil bir taksi gösterilmesine rağmen testin %80'inde rengi doğru bildi.

Bu bilgi ışığında siz aşağıdakilerden hangi sonuca varırsınız:

- (a) Yandan çarpanın mavi olma olasılığı 0,8'dir.
- (b) Yandan çarpanın mavi olması daha muhtemeldir, fakat olasılığı 0,8'den azdır.
- (c) Yandan çarpanın yeşil olma olasılığı mavi olma olasılığı kadardır.
- (d) Yandan çarpanın yeşil olması, mavi olmasına göre daha muhtemeldir.

7. Bölümde tartışılıyor.

6. Siz bir doktorsunuz. Size göre hastalarınızdan birinin boğaz ağrısının olması kuvvetle muhtemel, fakat emin değilsiniz. Boğazdan birkaç örnek alıp incelenmesi için laboratuvara gönderiyorsunuz. Test (hemen hemen diğer bütün laboratuvar testleri gibi) mükemmel değildir.

Hastada boğaz ağrısı varsa, testlerin %70'inde laboratuvarından EVET sonucu çıkıyor. Fakat %30'undaysa HAYIR sonucu çıkıyor.

Hastada boğaz ağrısı yoksa testlerin %90'ında laboratuvarından HAYIR sonucu çıkıyor. Fakat %10'undaysa EVET sonucu çıkıyor.

Siz aynı hastadan laboratuvara arka arkaya beş örnek gönderiyorsunuz. Sonuçları sırasıyla aşağıdaki gibi alıyorsunuz:

EVET, HAYIR, EVET, HAYIR, EVET

Aşağıdakilerden hangi sonuca varırsınız:

- (a) Sonuçların bir değeri yok.
- (b) Muhtemelen hastanın boğazı ağrı mıyordur.
- (c) Hastanın boğazının ağrıma ihtimali ağrı mame ihtimaline göre birazcık daha fazladır.

----(d) Hastanın boğazının ağrıma ihtimali, ağrıyama ihtimaline göre çok daha fazladır.

7. Bölümde tartışılıyor.

7. Bir para atışını "taklit edin." Yani, parayı atmaksızın (yazı için) Y olarak ve (tura için) T olarak 100 atışlık bir dizi yazın; ancak bu öyle bir dizi olsun ki, bakanlar sanki gerçekten yazı-tura atılmış ve onun sonuçları yazılmış sansın.

3. Bölümde tartışılıyor

MANTIK

1. Mantık

Mantık iyi ve kötü akıl yürütmeyle ilgili bir şeydir. Akıl yürütme hakkında net bir şekilde konuşabilmek için mantıkçılar bazı sıradan kelimelere kesin anlamlar yüklemiştir. Bu bölümde onların geliştirdikleri bu dil gözden geçirilecektir.

ARGÜMANLAR

Argüman kelimesine mantıkçılar özel bir anlam yüklerler. Gündelik dilde argüman için çoğu zaman iki kişi yeterlidir. Bir sözlük argümanı aşağıdaki şekilde tarif eder:

- 1 Bir ağız dalaşı.
- 2 Belirli bir önerme, öneri ya da durumu desteklemek için ya da bunlara karşı öne sürülen nedenlerin olduğu bir tartışma.
- 3 Argümanın sonucu olan bir önermeyi desteklemek için sunulan bir fikir ya da bir dizi neden.

Mantıkçıların argümanla kastettikleri şey 3 numaralı tanımdır.

Akıl yürütme argümanlarla ifade edilir ya da yazılır. Onun için mantıkçılar (3'teki anlamıyla) argümanlar üzerinde çalışırlar.

Argümanlar,

Öncüller olarak adlandırılan bir fikir ya da nedenler dizisi ve *sonuç* olarak iki kısma ayrılır.

Öncüller ve sonuç, doğru ya da yanlış olabilecek olan ifadeler ya da *önergelerdir*. Önergeler “doğru ya da yanlıştır.”

YANLIŞ YAPMAK

Önermelerin, sonucun nedenleri olduğu varsayılır. Mantık iyi bir akıl yürütmenin nasıl olduğunu anlamaya çalışır.

Öncüllerin doğru olduğunu ve bunların sonuç için iyi bir akıl yürütmeye imkân verdiğini bildiğimizde argümanları ikna edici buluruz.

O halde bir argümanda iki şekilde yanlış yapılabilir:

- Öncüller yanlış olabilir.
- Öncüller sonuç için iyi bir akıl yürütme sunmayabilirler.

İşte size bir argüman:

(*J) James işe girmek istiyorsa, yarın saçını kestirecektir.
James yarın saçını kestirecektir.

O halde:

James işe girmek istiyor.

İlk iki önerme öncüdür. Üçüncü önerme sonuçtur.

Öncüllerin sonuç için kesin bir neden sunacağını düşünen biri, bu argümanı önerebilir. Ama öncüller kesin bir neden sunmazlar. Birçok nedenden dolayı, öncüller doğru ve sonuç yanlış olabilir. Örneğin:

James, iyi giyimli adamları seven bir kızla çıkıyor ve saçları berbat durumda.

Eve ailesinin yanına gitmesi gerekiyor, ama onlar onun bu görünüşünden iğrenecekler.

Ayın üçüncü pazartesi günüdür ve o her ayın üçüncü pazartesi gününde saçlarını kestirir.

Hiç işe girmek istediği de yok! Şüphesiz işe girmek isteseydi, yarın hemen saçlarını kestirirdi.

Kesin bir argüman olarak sunulursa (*J) argümanı, içinde bir hata –sıkça rastlanılan bir hata– barındırır. Bundan dolayı, kötü bir argüman olduğunu belirtip uyarmak amacıyla önüne bir “yıldız” işareti koyduk.

(*J) argümanında bir *yanılgı* vardır. Yanılgı, çok sık rastlanıldığı için mantıkçıların dikkat çektikleri bir akıl yürütme hatasıdır. Bazen buna bir ad bile verirler. (*J) argümanı “vargıyı onaylama” denilen yanılgıyı barındırır. Argümandaki birincil öncülün formu:

A ise, o halde C’dir.

A’ya bu “ise – o halde” önermesinin *önbileşeni* denir ve C’ye de *ardbileşeni* denir.

(*J)’nin ikinci öncülü “C” formundadır. Böylece bu öncülü belirterek “ardbileşeni onaylarız.”

Sonuç “A” formundadır. A önbileşenini, C ardbileşeninden çıkarmak bir yanılgıdır. Bu da “ardbileşeni onaylama” yanılgısıdır.

ELEŞTİRMENİN İKİ YOLU

İşte size (*J)’ye benzer kesin bir argüman:

(J) James bir işe girmek istiyorsa, yarın saçını kestirecektir.

James işe girmek istiyor.

O halde:

James yarın saçını kestirecektir.

Burada öncüller sonuç için kesin bir neden sunmaktadırlar. Öncüller doğruysa, sonucun da doğru olması gerekir.

Fakat öncülleri sorgulayabilirsiniz.

James’in bir rock müzisyeni olarak bir işe girmek istediğini biliyorsanız, birinci öncülü sorgulayabilirsiniz. İsteyeceği en son şey saçını kestirmektir.

İkinci öncülü de sorgulayabilirsiniz. James gerçekten işe girmek istiyor mu?

Bir argümanı eleştirmenin iki temel yolu vardır:

- Öncülleri sorgulayın; en azından birinin yanlış olduğunu gösterin.
- Akıl yürütmeyi sorgulayın; öncüllerin sonuç için iyi bir akıl yürütme olmadığını gösterin.

Bu iki temel eleştiri, her türlü argümana karşı yapılıır. Ancak mantık sadece akıl yürütmeyeyle ilgilidir. Genel olarak öncüllerin doğru mu yanlış mı olduklarını söyleyemez. Sadece akıl yürütmenin iyi mi kötü mü yapıldığını söyler.

GEÇERLİLİK

İşte size daha kesin bir argüman:

(K) Queen Street Motors tarafından satılan her otomobil paslanmaya karşı dayanıklıdır.

Barbara arabasını Queen Street Motors'tan satın aldı.

Bundan dolayı:

Barbara'nın arabası paslanmaya karşı dayanıklıdır.

(K)'nın iki öncülü doğruysa, sonucun da doğru olması gerekir. Aynı şey yukarıda (J) için de geçerlidir. Fakat (*J) için geçerli değildir!

Bu düşünce geçerli bir argüman tanımlar. Öncüller doğru olduğu müddetçe sonucun yanlış olması mantıken imkânsızdır.

Geçerlilik en iyi şekilde mantıksal formla izah edilir. (J) ve (K) argümanlarının mantıksal formu şu şekildedir:

1. A ise, o halde C 'dir.

2. A .

O halde:

3. C 'dir.

4. Her F , G 'dir.

5. b , F 'dir.

Bundan dolayı:

6. b , G 'dir.

Bu formlardan birinin olduğu bir argümanın doğru öncülleri varsa, sonuç da doğrudur. Bu geçerli bir argüman formunun tanımıdır.

Geçerli tündengelim mantığının teknik bir terimidir. *Geçerlinin* karşıtıysa *geçersizdir*. Gündelik hayatta, geçerli ehliyetten bahsederiz. Bir temeli varsa veya doğruysa geçerli bir şeyin anlatıldığını söyleriz. Ancak biz özel anlama, mantıkçıların kelimeye yüklediği anlama bağlı kalacağız. Argümanlar geçerli ya da geçersizdirler.

Yukarıdaki (*J) argümanı geçersizdi. İşte size geçersiz bir argüman daha:

(*K) Queen Street Motors tarafından satılan her otomobil paslanmaya karşı dayanıklıdır.

Barbara'nın arabası paslanmaya karşı dayanıklıdır.

Bundan dolayı:

Barbara arabasını Queen Street Motors'dan satın aldı.

Öncüller doğru olsa bile bu geçersizdir; çünkü sonuç yanlış olabilir. Çoğu şirket paslanmaya karşı dayanıklı araba satar; o halde Barbara'nın arabasını Queen Street Motors'tan satın almış olması gerekmez.

GERÇEĞE KARŞI GEÇERLİ

Gerçek ve geçerliye dikkat edin. Mantıkta:

Önermeler doğru ya da yanlıştır.

Argümanlar geçerli ya da geçersizdir.

Barbara'nın arabası hakkındaki (K) argümanını aşağıdaki şekilde "ise – o halde" yapısından ya da koşullu önermeden ayırt etmeniz gerekir:

Barbara arabayı Queen Street Motor firmasından satın almışsa ve Queen Street Motor tarafından satılan her araba paslanmaya karşı dayanıklıysa, o halde Barbara'nın arabası da paslanmaya karşı dayanıklıdır.

Bu

p ise ve q ise, o halde r 'dir

formunda doğru bir önermedir. Ya da, daha ince bir şekilde detaylandırılacak olursa,

b, F ise ve her F, G ise, o halde b de G 'dir.

Diğer taraftan, (K) argümanı şu formadır:

4. p . Ya da daha detaylı olarak, 4. Her F, G 'dir.

5. q . 5. b, F 'dir.

O halde:

6. r.

Bundan dolayı:

6. b, G'dir.

Her argümana karşılık gelen "ise – o halde" şeklinde koşullu bir önerme vardır. Bir argüman ancak ve ancak ona karşılık gelen koşullu önerme, mantıksal olarak doğruysa geçerlidir.

METAFORLAR

Geçerlilik fikrini önermenin birçok yolu vardır:

Sonuç, öncüllerden elde edilir.

Öncüller doğru olduğu zaman, sonucun da doğru olması *gerekir*.

Sonuç, öncüllerin mantıksal bir ardbileşenidir.

Sonuç, öncüller içinde dolaylı olarak mevcuttur.

Geçerli argüman formları doğruluk-barındırır.

"Doğruluk-barındırma," doğru öncüllerle başladığınız her zaman doğru bir sonuca ulaşacaksınız demektir.

Doğru öncüllerden geçerli bir argümanı kullanarak akıl yürüttüğünüzde, hiçbir zaman yanlış sonuç çıkarma riskini taşımazsınız. Öncülleriniz doğruyken, sonucun yanlış olma riski yoktur.

Tümdengelim mantığıyla ilgili ders kitapları bu metaforları kesin bir şekilde anlatır. Bu kitabın amaçları bakımından bir metafor, geçerlilik için neyin önemli olduğu hususunda en güzel şeyi söyler:

Geçerli argümanlar, risksiz argümanlardır.

AKLA YATKIN

Geçerli bir argüman hiçbir zaman sizi doğru bir öncülden yanlış bir sonuca götürmez.

Fakat şüphesiz argümanın yanlış bir öncülü olabilir.

- Bütün öncüller doğruyken ve

- Argüman geçerliyken

argüman *akla yatkındır* deriz. Bu nedenle

- Bir öncül yanlış olduğundan

▪ Argüman geçersiz olduğundan dolayı argüman akla yatkın olmayabilir.

Geçerliliğin öncüllerle sonuç arasındaki mantıksal bağlantıyla ilgisi vardır, öncüllerin doğruluğu ya da sonuçla *değil*.

Tümdengelim mantık için *akla yatkınlığın*, *hem geçerlilik hem de* öncüllerin doğruluğuyla ilgisi vardır.

BİR EV YAPAR GİBİ

Tümdengelim mantığı, ev yapmaya benzer.

- Kumdan yapılabilir ve yıkılabilir; çünkü temelleri sağlam değildir. Bu da aynı yanlış bir öncüle sahip olmak gibi bir şeydir.
- Ya da kötü yapılmış olabilir. Bu da geçersiz bir argümana sahip olmak gibi bir şeydir.
- Ve şüphesiz kötü bir tasarımı olsa bile kumdan yapılmış bir ev hâlâ yıkılmadan durabilir. Bu da aynı yanlış öncüllerden yola çıkıp doğru bir sonuca varan geçersiz argüman gibi bir şeydir.

Bir evi inşa eden taşeronu eleştirmenin iki yolu vardır. "Temelleri hiç de iyi değil!" Ya da "ev kötü inşa edildi!" Benzer şekilde, birisi size belirli bir tümdengelim gösterirse iki türlü eleştiri yapabilirsiniz. "Öncüllerinizden birisi yanlıştır." Ya da "argüman geçersizdir. Ya da şüphesiz her ikisi de.

GEÇERLİLİK DOĞRULUK DEMEK DEĞİLDİR!

Geçerli bir argümanın *yanlış bir öncülü* ve fakat *doğru bir sonucu* olabilir. Örnek:

(R) Doksan yıldan fazla yaşamış her meşhur filozof, bir matematik mantıkçısıydı.

Bertrand Russell doksan yıldan çok yaşamış meşhur bir filozoftu.

O halde:

Bertrand Russell bir matematik mantıkçısıydı.

Bu argüman geçerli bir argümandır. Sonucu doğrudur.

Fakat ilk öncülü yanlışdır. Meşhur politik filozof Thomas Hobbes doksan yıldan çok yaşadı, fakat bir matematik mantıkçısı değildi.

Aynı şekilde *yanlış öncülleri ve yanlış bir sonucu* olan bir argüman da geçerli olabilirdi. Geçerlilik öncüller ve sonuç arasındaki bağlantı hakkındadır, doğruluk ve yanlışlık hakkında değildir.

GEÇERSİZLİK YANLIŞLIK DEĞİLDİR!

Geçersiz bir argümanın *doğru öncülleri ve doğru bir sonucu* olabilir. Örnek:

(*R) Şimdi ölü olan bazı filozoflar nüktedandılar ve birçok kitap yazdılar.

Bertrand Russell şimdi ölü olan bir filozoftur.

Öyleyse:

Bertrand Russell nüktedandı ve birçok kitap yazdı.

Her iki öncül de doğrudur. Sonuç doğrudur. Fakat argüman geçersizdir.

BİR TÜMDENGELİMİ ELEŞTİRMENİN İKİ YOLU

Hem (R) hem de (*R) farklı nedenlerden dolayı akla yatkın değildir.

Geçersiz olduğu için (*R)'nin akla yatkın olmadığını söyleyebilirsiniz. Bertrand Russell hakkında *hiçbir şey* bilmeden onun geçersiz olduğunu söyleyebilirsiniz ("Bertrand Russell"ın birinin adı olması dışında).

Benzer bir şekilde, Bertrand Russell hakkında hiçbir şey bilmeden (R)'nin geçerli olduğunu söyleyebilirsiniz.

Fakat öncüllerin doğru olup olmadığını bilmek için dünya hakkında, tarih hakkında, filozoflar hakkında, Bertrand Russell ve diğerleri hakkında bir şeyler bilmeniz gerekir.

Belki de Bertrand Russell'in nüktedan olduğunu ya da Thomas Hobbes'un doksan yıldan fazla yaşamış meşhur bir politik filozof olduğunu bilmiyordunuz. Fakat şimdi biliyorsunuz.

Bir argümanın geçerli olup olmadığını bilmek için dünya hakkında hiç de özel bir şey bilmeniz gerekmiyor. Ancak bir

öncülün doğru mu yanlış mı olduğunu bilmek için bazı olguları bilmeniz gerekiyor.

Bir tündengelimi eleştirmenin iki yolu vardır:

- Bir öncül yanlıştır.
- Argüman geçersizdir.

Öyleyse *bir işbölümü* var.

Öncüllerin doğruluğu konusunda kim uzman?

Dedektifler, hemşireler, cerrahlar, anketörler, tarihçiler, astrologlar, zoologlar, araştırmacı gazeteciler, sen ve ben.

Geçerlilik konusunda kim uzman?

Bir mantıkçı.

Mantıkçılar, öncüllerle sonuçlar arasındaki ilişkiler üzerinde çalışırlar; fakat mantıkçılar olarak, öncüllerin doğru ya da yanlış olduklarını söyleyecek özel bir yeteneğe sahip değildirler.

ALIŞTIRMALAR

- 1 *Önermeler.* Bir argümanın öncülleri ve sonucu birer önermedir. Önermeler doğru ya da yanlış olan açıklamalarla ifade edilirler. Kısacası, önermeler doğru veya yanlıştır deriz.

Bir gazete haberinin başlığı şöyle:

**YAKALANAN YILANLAR TUHAF OFİS ÇALIŞANI OLUR
YANLIŞ YERE GÖNDERİLİNCE RESMİ GÖREVLİ PİTON-
LARLA BAŞBAŞA KALDI**

Tuhaf bir karıştırma oldu. Ontario, Windsor'da tropik bir balık mağazasını işleten bir adama California'daki bir satıcıdan bir sandık top pitonu gönderildi. Gazetenin bize dediğine göre:

Top pitonu küçük memelileri yiyerek yaşayan, boyu bir metreyi de geçebilen Orta Afrika arazilerinde yaşayan bir canlıdır.

- (a) Bu doğru mu yanlış mı?
- (b) Bunun doğru olup olmadığını biliyor musunuz?
- (c) Bu, mantıkçıların önerme dediği şey midir? [(c)'ye de (a)'ya verdiğiniz cevabın aynısını vermelisiniz.]
Gazete bize şöyle söylemeye devam eder:
Top pitonu kıvrılıp top haline geldiğinden bu adı almıştır.
- (d) Bu doğru mu yanlış mı?
- (e) Bunun doğru olup olmadığını biliyor musunuz?
Hikâye şöyle devam eder:
Windsor'a gönderilmek istenilen tropik balık Ohio'daki bir yılan satıcısına gider.
- (f) Bu bir önerme midir?
Mantıkta, önermeler ya doğru ya da yanlış olabilen olguları ifade eder. "Avokadolar lezzetli" gibi kişisel tatma yargıları kesin olgusal olaylar değildir. Bazı insanlar için avokadoların tadı iyidir, bazı insanlar içinse iğrenç ve mide bulandırıcıdır. Avokadoların lezzetli olduğu önermesinin kesin olarak doğru veya yanlış olduğu söylenemez. Fakat ben "avokadolar bana lezzetli geliyor" dersem, kendim hakkında doğru olan bir şeyi ifade etmiş olurum.
Balık dükkânının sahibi olan Joe'nun şöyle söylediği aktarılmaktadır:
Top pitonları çok çekici hayvanlardır.
- (g) Bu doğru veya yanlış mı? Bu bir önerme midir?
Dükkân sahibinin söyle demiş olduğunu farz edin:
Bence bütün top pitonları çok çekici hayvanlardır.
- (h) Bu doğru veya yanlış mı? Bu bir önerme midir?
Gazete hikâyeye şöyle başlıyor: "İki ay boyunca ofisini bir sandık dolusu yılanla paylaşmak o kadar da hoş bir şey değil." Sonra da, tam bir paragraf olarak şöyle diyor:
Özellikle de tamamen yufka-yürekli olunmasından dolayı.
- (i) Bu bir önerme midir?
Joe'nun yılanları bir sürü canlı fareyle beslemesi gerekti. Muhabire göre, Joe şöyle dedi:

Ben telefonda konuşurken arkamdaki yavru farelerin ciyaklama ve bağırıışlarını duymayı hiç de öyle sevinçle karşılamamıştım.

(j) Bu bir önerme midir?

Sonra Joe şöyle dedi:

Allah'tan her gün yemek yemiyorlar!

(k) Bu bir önerme midir?

O daha sonra şöyle bir soru sordu:

Bu yılanları almak isteyecek bir hayvanat bahçesi ya da okul biliyor musunuz?

(l) Bu bir önerme midir?

Joe gönderileri karıştıran gönderici Federal Express'e telefon etti ve şöyle dedi:

Masraflar, bana verdiğiniz zahmetler ve hatanız için bana ödeme yapmanız gerekiyor.

(m) Bu bir önerme midir?

Hikâye mutlu sonla bitti:

Çarşamba günü Federal Express pazarlık yaparak Joe'ya 1000 dolar ödeme sözü verdi.

(n) Bu bir önerme midir?

- 2 *Tamamen yanlış.* İçindeki öncüllerin ve sonucun da tamamen yanlış olduğu –aptalca da olabilir– iki argüman söyleyin, öyle ki argümanlardan biri (a) geçerli ve diğeri de (b) geçersiz olsun.
- 3 *Akla yatkın olmayan.* Soru 2'ye verdiğiniz cevaplardan herhangi birisi akla yatkın bir argüman mıdır?
- 4 *Kombinasyonlar.* Aşağıdaki sekiz kombinasyondan sadece biri imkânsızdır. Hangisi?
 - (a) Bütün öncüller doğru. Sonuç doğru. Geçerli.
 - (b) Bütün öncüller doğru. Sonuç yanlış. Geçerli.
 - (c) Bir öncül yanlış. Sonuç doğru. Geçerli.
 - (d) Bir öncül yanlış. Sonuç yanlış. Geçerli.
 - (e) Bütün öncüller doğru. Sonuç doğru. Geçersiz.
 - (f) Bütün öncüller doğru. Sonuç yanlış. Geçersiz.
 - (g) Bir öncül yanlış. Sonuç doğru. Geçersiz.
 - (h) Bir öncül yanlış. Sonuç yanlış. Geçersiz.

- 5 *Akla yatkınlık.* Biraz önce listelenen kombinasyonlardan hangileri akla yatkın argümanlardır?
- 6 *Koşullu önermeler.* Aşağıdakilerden hangisi doğru veya yanlıştır? Hangisi geçerli veya geçersizdir? Hangisi argümandır? Hangisi koşullu bir önermedir?
- (a) Tom, Dick ve Harry öldü.
O halde:
Bütün insanlar ölümlüdür.
- (b) Tom, Dick ve Harry öldüyse, bütün insanlar ölümlüdür.
- 7 *Tütün çiğnemek.* Aşağıdaki argümanlardan hangileri geçerlidir?
- (a) Üç büyük lig takımını takip ediyorum. En iyi vurucuların çoğu kale işaretinde damağına tütün koyup çiğner.
O halde:
Tütün çiğnemek vuruş ortalamasını artırır.
- (b) Ulusal Ligin en iyi altı vurucusu kale işaretinde damağına tütün koyup çiğner.
O halde:
Tütün çiğnemek vuruş ortalamasını artırır.
- (c) Amerikan Dış Hekimleri Birliği tarafından 1988 sezonunda önde gelen yedi lig takımının 158 oyuncusu üzerinde yapılan bir çalışma, çiğneme yapanların ortalama vuruş oranı 0,238 iken çiğneme yapmayanlarda bu oranın 0,248 olduğunu göstermiştir. Çekimser kalanların saha ortalamasının da daha yüksek olduğu saptanmıştır.
O halde:
Tütün çiğnemek vuruş ortalamasını arttırmaz.
- (d) 1921'de, ligdeki tütün çiğnemiş olan önde gelen her top atıcısının vuruş yaparkenki vuruş ortalaması çiğneme yapmayanlarınkinden daha yüksekti.
O halde:
Tütün çiğnemek vuruş ortalamasını artırır.

- 8 *Tümevarım beysbolu.* (7a) – (7d) arasındaki argümanların hiçbirisi geçerli değildir. Geçerli olmayan argümanlar sonuç vermez. Fakat sonuç vermeyen bazı argümanlar diğerlerinden daha iyidir. Bunlar riskli argümanlardır. (a) – (d) arasındaki her argüman risklidir. Henüz herhangi bir tümevarım mantığı yapmadık, fakat muhtemelen (7a) – (7d) arasındaki argümanların bazılarının diğerlerinden daha iyi olduğunu düşünüyorsunuz. En iyisi hangisidir? En kötüsü hangisidir?

GÖZDEN GEÇİRMENİZ İÇİN ANAHTAR KELİMELER

Argüman

Sonuç

Önerme

Geçerli

Doğru veya yanlış

Akla yatkın

Öncül

Koşullu

2. Tümevarımsal Mantık Nedir?

Tümevarım mantığı riskli argümanlar hakkındadır. Olasılığı kullanarak tümevarım argümanlarını analiz eder. Başka türde riskli argümanlar da vardır. En iyi açıklama için bir çıkarım vardır ve tanıklığa dayalı argümanlar vardır.

Geçerli argümanlar risksizdir. Tümevarım mantığı riskli argümanlar üzerinde çalışır. Riskli bir argüman iyi bir argüman olabilir; ancak öncülleri doğruyken bile, yine de sonucu yanlış olabilir. Argümanlarımızın çoğu risklidir.

Büyük resimle başlayalım. Evrenimizin başlangıcıyla ilgili Büyük Patlama kuramı mevcut kanıtlarla iyice desteklenmiştir, fakat yine de yanlış olabilir. Bu bir risktir. Şimdi sigara içmenin akciğer kanserine yol açtığına dair kuvvetli kanıtlara sahibiz. Fakat bütün bu kanıtlardan "sigara içmek akciğer kanserine neden olur" sonucuna varmak yine de risklidir. Nikotin bağımlılığına yatkın olan insanların aynı zamanda akciğer kanserine yatkın olduğu gibi bir durum ortaya çıkabilir. Bu durumda sigara içmenin akciğer kanserine neden olduğu şeklindeki çıkarımımız da sorgulanır hale gelir.

Birçok araştırmadan sonra, bir şirket kişisel bilgisayarlar için sol-elle kullanılan özel bir farenin pazarlamasıyla kar edeceği sonucuna varır. Risk alıyordur.

Arkadaşınız Jan'la aynı sınıfta olmak istiyorsunuz. Jan'ın matematiği sevdiğini ve böylece bir mantık dersi daha alacağı şeklinde akıl yürütüyorsunuz. Tümevarım mantığı dersine kaydoluyorsunuz. Riskli bir argüman yaptınız.

PORTAKALLAR

İşte size riskli argümanlara gündelik hayattan örnekler.

Küçük bir manav eski meyvelerini yarı fiyattan satıyor. Bir sandık ucuz portakal istiyorum. Fakat portakalların iyi, tatlı ve çürük olmamasını istiyorum. Manav sandığın üst tarafından bir portakal alır, keser ve bana gösterir. Argümanı şöyledir:

(A) Bu portakal iyidir.

O halde:

Sandıktaki portakalların hepsi (ya da hemen hemen hepsi) iyidir.

Öncül sonucun kanıtıdır: Fakat iyi bir kanıtı değil. Sandıktaki portakalların çoğu çürük olabilir.

(A) argümanı geçerli bir argüman değildir. Öncül doğru olsa bile, sonuç yanlış olabilir. Bu riskli bir argümandır.

Bu argümana dayanarak sandığı yarı fiyatına satın alırsam, büyük bir risk alırım. Bundan dolayı sandığa uzanarak rastgele bir portakalı seçip çıkarıyorum. O da iyi. Sandığı satın alıyorum. Mantık yürütmem şöyle:

(B) Rastgele seçtiğim bu portakal iyi.

O halde:

Sandıktaki portakalların hepsi (ya da hemen hemen hepsi) iyidir.

Bu argüman da risklidir. Fakat (A) kadar riskli değildir.

Julia rastgele altı portakal alıyor. Biri, sadece biri, yumuşaktır. Sandığı yarı fiyatına satın alıyor. Argümanı şöyle:

(C) Rastgele seçtiğim bu altı portakaldan beşi iyi biri kötüdür.

O halde:

Sandıktaki portakalların çoğu iyidir (fakat hepsi değil).

(C) argümanı (B) argümandan daha fazla veriye dayanır. Ancak geçerli bir argüman değildir. Her ne kadar Julia'nın rastgele seçtiği portakalların altısından beşi iyi olsa da, o sadece şanslı biri olabilir. Belki de geri kalan portakalların çoğu çürüktür.

ÖRNEKLEM VE POPÜLASYONLAR

Riskli argümanların birçok biçimi vardır. (A)–(C) argümanlarının hepsinde bu temel biçim vardır:

Verilen bir popülasyondan seçilen örneklem hakkında bir ifade.

O halde:

Bir bütün olarak popülasyon hakkında bir ifade.

Diğer türlü de yapabiliriz. Bu sandığın içindeki portakalların neredeyse hepsinin iyi olduğunu bilebilirim. Sıkarak büyük bir bardak portakal suyu yapmak için rastgele dört portakal alırım. Akıl yürütmem şöyle:

Bu sandıktaki portakalların hepsi ya da hemen hemen hepsi iyidir.

Bu dört portakal bu sandıktan rastgele alınmıştır.

O halde:

Bu dört portakal iyidir.

Bu da riskli bir argümandır. Sandıktaki portakalların çoğu iyi olduğu halde çürük bir portakal almış olabilirim. Argümanım şu şekilde:

Bir popülasyon hakkında ifade.

O halde:

Bir örneklem hakkında ifade.

Ayrıca bir örneklemden diğer bir örnekleme de gidebiliriz:

Rastgele seçtiğim bu dört portakal iyidir.

O halde:

Rastgele alacağım bir sonraki dört portakal da iyi olacaktır.

Bu argümanın temel biçimi şudur:

Bir popülasyon hakkında ifade.

O halde:

Yeni bir örneklem hakkında ifade.

ORANTILAR

Argümanlarımız hakkında daha kesin olmaya çalışabiliriz. Bunlar küçük sıkma portakallardır; her sandıkta 60 adet. Dikkatli biri "%90" ihtimalle "hemen hepsi" diye ifade edebilir, o zaman da bu argüman şöyle bir şeye benzer:

60 portakallık bir sandıktan rastgele seçtiğim bu dört portakal iyidir.

O halde:

Sandıktaki portakalların en az %90'ı (ya da 54'ü) iyidir.

Bu sandıktaki portakalların en az %90'ı (ya da 54'ü) iyidir.
Bu dört portakal, bu sandıktan rastgele seçildi.

O halde:

Bu dört portakal iyidir.

OLASILIK

Çoğumuz bu argümanları bir "olasılıkla" belirtmekten mutluluk duyarız:

60 portakallık bir sandıktan rastgele seçtiğim bu dört portakal iyidir.

O halde muhtemelen:

Sandıktaki portakalların en az %90'ı (ya da 54'ü) iyidir.

Bu sandıktaki portakalların en az %90'ı (ya da 54'ü) iyidir.
Bu dört portakal bu sandıktan rastgele seçildi.

O halde muhtemelen:

Bu dört portakal iyidir.

60 portakallık bir sandıktan rastgele seçtiğim bu dört portakal iyidir.

O halde muhtemelen:

Rastgele seçeceğim bir sonraki dört portakal da iyi olacaktır.

Sayısal olasılık değerleri verebilir miyiz? Hangi argümanların diğerlerinden daha riskli olduğunu söylemenin bir yolu da bu olacaktır. Riski incelemek için olasılık düşüncelerini kullanacağız.

Olasılık, tümevarım mantığı için temel bir araçtır.

Düşünceleri daha net hale getirmek için sadece yeteri kadar olasılık hesaplaması yapacağız. *Bu kitabın odak noktası fikirlerdir, sayılar değil.*

OLASILIKLARIN ÇIKARIMI

Tümevarım mantığı, olasılıkları kullanır. *Olasılıkların kullanıldığı argümanların hepsi de tümevarmaz.* "Olasılık" kelimesini gördüğünüz argümanların hepsi de riskli değildir. Olasılık, kesin bir matematiksel fikre dönüştürülebilir. Matematik bir tumdengelim bilimidir. Olasılık kullanarak çıkarımlar yaparız. 6. bölümde olasılığın temel kanunlarını ya da aksiyomlarını belirtiyoruz. Bu aksiyomlardan olasılık hakkındaki diğer olguları *çıkarsıyoruz*.

İşte size olasılıklar hakkında basit bir çıkarım.

Zarın altı yüzü vardır; bunlar 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Her yüzünün olasılığı eşittir. (Zar atıldığında her bir yüzün gelme olasılığı aynıdır.)

O halde,

4 atma olasılığı $1/6$ 'dır.

Bu argüman geçerlidir. Siz zaten bunu biliyorsunuz. Hiç olasılık çalışmamış olsanız bile, toplamı 1 olan olasılıklar oluşturabilirsiniz.

İçgüdüsel olarak bilirsiniz ki olaylar *karşılıklı olarak birbirini dışlayıcı* –her atışta zar sadece bir yüzü üste gelecek şekilde düşer– ve *kapsayıcıysa* –zar sadece bir yüzü üstte kalacak şekilde düşmelidir– o halde olasılıkların toplamı 1 olur.

Argüman neden geçerlidir? Olasılığın temel kanunlarına göre bu türde bir argümanın öncülleri doğruysa, sonucunun da doğru olması gerekir.

İşte size olasılık hakkında geçerli bir argüman daha.
Zarın altı yüzü vardır; bunlar 1, 2, 3, 4, 5, 6'dır.

Her yüzün olasılığı eşittir.

O halde:

3 ya da 4 atma olasılığı $1/3$ 'tür.

Her ne kadar olasılık üzerinde hiç çalışmamış olsanız da, olasılıkların toplandığını bilirsiniz.

İki olay *karşılıklı olarak birbirini dışlayıcıysa* –aynı anda biri ya da diğeri meydana gelir; fakat ikisi birden olmaz– o zaman bir olayın ya da diğeri olayın meydana gelme olasılığı onların olasılıklarının toplamı olur.

Olasılığın temel kanunlarına göre bu türde bir argümanın öncülleri doğruysa, sonucunun da o zaman doğru olması gerekir. O halde argüman geçerlidir.

Biraz önce belirttiğimiz iki argüman da geçerlidir. Onların aşağıdaki argümandan nasıl ayrıldığına bir bakın:

Bu zarın altı yüzü vardır, bunlar 1, 2, 3, 4, 5, 6'dır.

227 atışlık bir dizide sadece 38 kere 4 gelmiştir.

O halde:

Bu zarla 4 atmanın olasılığı yaklaşık olarak $1/6$ 'dır.

Bu riskli bir argümandır. Öncülleri doğru olsa bile sonuç yanlış olabilir. Zar 4'e karşı biraz hileli olabilir. 4 gelme olasılığı $1/8$ olabilirdi. Yine de, şans eseri olarak, son 227 atma da hemen hemen kesin olarak atışların $1/6$ 'sında 4 atmayı başardık.

BAŞKA TÜRDE RİSKLİ BİR ARGÜMAN

Tümevarım mantığı için olasılık temel bir araçtır. Fakat daha biraz önce gördük ki:

- Olasılık hakkında tümdengelen geçerli argümanlar da vardır.

Benzer bir şekilde:

- Çeşitli riskli argümanların da olasılığı içermesi gerekmez.

Riskli bir argümanla ilgili olarak tümevarım mantığının ötesinde de bir şeyler söylenebilir. Tümevarım mantığı şüphesiz riskli argümanlar üzerinde durur; fakat her türlü riskli argüman üzerinde durmayabilir. İşte size yeni bir riskli argüman türü. Bu argüman birisinin aşağıdaki ifadeyi fark etmesiyle başlıyor:

Üniversitemizde çok sayıda kişinin aldığı temel bir ders-ten öğrencilerin çoğunun A alması çok olağandışı bir durumdur. Fakat bir sınıfta bu gerçekleşti.

Bu gariptir. Açıklanması gereken bir şeydir. Açıklamamız, dersi veren hocanın çok rahat yüksek not vermesi şeklindedir.

O sınıftaki öğrencilerin hemen hepsi A aldı.

O halde:

Dersi veren hoca gerçekten çok kolayca yüksek not veren birisi olmalı.

Burada bir örneklemden bir popülasyona ya da bir popülasyondan bir örnekleme çıkarım *yapmıyoruz*.

Gözlemlenen olguları açıklamak üzere bir *hipotez* öneriyoruz. Başka açıklamalar olabilir. O sınıftaki öğrencilerin hemen hepsi A aldı,

O halde:

Çok özel bir sınıftır.

O halde:

Dersi veren eğitmen harika bir öğretmendir.

O halde:

İyi-hazırlanmış öğrenciler için o dersin materyali oldukça kolaydır.

Bu argümanların her birisi de sınıftaki hemen herkesin A notu aldığı şaşırtıcı olgusunun *mantıklı açıklamasıyla* biter.

1. bölümdeki (*J) argümanını hatırlayın:

(*J) James bir işe girmek istiyorsa, o zaman yarın saçını kestirecektir.

James yarın saçını kestirecektir.

O halde:

James işe girmek istiyor.

Bu geçersiz bir argümandır. Hâlâ bir argümandır, riskli bir argümandır. Şimdi biraz daha detaya girelim. James saçlarını ayda yılda bir kere kestirir. Parasız kaldı. Yarın berbere gideceğini duydunuz. Peki, ama neden? Çünkü işe girmek istiyor. Sonuç *mantıklı bir açıklama*.

EN İYİ AÇIKLAMA İÇİN BİR ÇIKARIM

Biraz önce baktığımız argümanların her ikisi de *mantıklı bir açıklama için bir çıkarımdır*.

Bir açıklama diğer her türlü açıklamadan daha mantıklıysa, *en iyi açıklama için çıkarım* olur.

Bilimdeki çoğu akıl yürütme buna benzer. Bazı filozoflar kuramsal bir sonuca vardığımız her zaman, en iyi açıklama için argüman ortaya koyduğumuzu düşünüyorlar. Örneğin 1967 civarlarında evrenin Büyük Patlama kuramı geniş bir çevre tarafından kabul edildiğinde kozmoloji radikal bir değişikliğe uğradı. Büyük Patlama kuramı evrenimizin geçmişte belirli bir tarihte devasa bir "patlama" ile ortaya çıktığını söyler. Peki, neden insanlar bu hayret verici sonuca vardılar? Çünkü iki radyo astronomu belirli düşük "ardalan ışıınımının" bir radyo teleskopuyla gözlemlenebilecek şekilde uzayda her yerde aynı oranda dağılmış olduğunu keşfettiler. O zaman da şimdi de, en iyi açıklama bu ardalan ışıınımının "Büyük Patlamanın" bir sonucu olduğu yönündedir.

"GERİ ÇIKARIM"

Olasılık konusunda derin düşünen felsefecilerden biri de Charles Sanders Peirce'di (1839–1914). PEirce olarak telaffuz edildiğine dikkat ediniz. İsmi "Pierce" değildir. Daha da kötüsü, ismi doğru bir şekilde "*purse*" olarak telaffuz edilmektedir. Eski *New England*'lı bir aileden gelmektedir ve aile adlarını "Pers" ya da "Perse" olarak telaffuz etmişlerdir.

* Abduction –yn.
* Cüzdan –çn.

Peirce şeylerin üçlü gruplar halinde olmasını severdi. Üç türlü iyi argüman olduğunu düşündü: Tümdengelim, tümevarım ve en iyi açıklama çıkarımı. Simetrileri beğendiğinden, en iyi açıklama çıkarımı için yeni bir isim icat etti. Buna *geri çıkarım* dedi. Buna göre onun mantık penceresi şöyleydi:

	Tümdengelim
Mantık	Tümevarım
	Geri çıkarım

Onun kuramında tümevarım ve geri çıkarım iki farklı türde riskli argümanlardı.

Bazı felsefeciler olasılığın en iyi açıklama argümanlarını analiz etmede çok faydalı bir araç olduğuna inanırlar. Peirce gibi diğer felsefecilerse böyle düşünmezler. Bununla ilgili olarak bir tartışma sürüp gitmektedir. Biz bu tartışmayı bilim felsefecilerine bırakalım. Konular çok ilginç, fakat en iyi açıklama çıkarımı bu kitapta tartışılmayacaktır.

TANIKLIK

İnandığınız çoğu şeye, başkaları size öyle olduğunu söylediği için inanırsınız.

Aileniz ne kadar güvenilirdir? Ya psikoloji öğretmeniniz? Ya gece haberleri? Onların söylediklerine inanırsanız riskli argümanlara müdahil olursunuz.

14 Şubatta doğduğumu biliyorum, çünkü annem bana böyle söyledi.

O halde:

14 Şubat'ta doğdum.

Psikoloji öğretmenim Freud'un bir hilebaz olduğunu ve insan psikolojisi için değersiz bir rehber olduğunu söylüyor.

O halde:

Freud insan psikolojisi için değersiz bir rehberdir.

Akşam haberlerine göre belediye başkanı sellerin etkisini tartışmak üzere kasaba dışındaki yetkililerle toplantı yapıyor.

O halde:

Belediye başkanı sellerin etkisini tartışmak üzere kasaba dışındaki yetkililerle toplantı yapıyor.

Bunlar riskli argümanlardır. Akşam haberleri yanlış olabilir. Psikoloji öğretmeniniz Freud'dan nefret ediyor olabilir ve çok önyargılı bir bilgi kaynağı olabilir.

Doğum gününüz hakkındaki argüman en az riskli olanıdır. Yine de risklidir. Ailenizin doğruyu söylediğini nereden biliyorsunuz?

Doğum kâğıdınıza bakarsınız. Ondan şüphe etmezsiniz! Belki de aileniz sizin doğduğunuz günden bir gün sonrasında yürürlüğe giren çocuk yardımlarıyla ilgili bir kandan faydalanmanız için yalan söyleyerek doğum gününüzün bir gün sonra olduğunu söyledi. Belki de cuma günü ayın on üçünde doğdunuz, fakat aileniz sizin sevgililer gününde doğmuş olduğunuzu düşünmeniz daha iyi olacağını düşündü. Ya da belki de taksiyle hastaneye gidip doğduğunuzda o heyecanla hiç kimse sizin gece yarısından önce mi, yoksa sonra mı doğduğunuza dikkat etmedi...

Verilen örneklerin hepsi de başka birisinin *tanıklığına* dayanıyor: Aileniz, öğretmeniniz, akşam haberleri.

Bazı tanıklık türleri olasılık kullanılarak analiz edilebilir, fakat birçok sorun ortaya çıkar. Tümevarım mantığı tanıklığa değinir, fakat tanıklık hakkında olasılık dışında söylenecek daha birçok şey var.

Bu kitapta en iyi açıklama çıkarımını *tartışmayacağız* ve tanıklığı da *tartışmayacağız*. Fakat riskli argümanları gerçekten anlamak istiyorsanız, tanıklık ve en iyi açıklama çıkarımı hakkında düşünmelisiniz. Bu kitapta olasılığın sadece bir yönü üzerinde duracağız.

TÜMEVARIM MANTIĞININ KABA TANIMI

Tümevarım mantığı olasılık fikirlerini kullanarak riskli argümanları analiz eder.

KARAR KURAMI

Akıl yürütmenin diğer önemli bir yönü daha var: *Karar verme*. Sadece neye inanacağımız konusunda akıl yürütmeyiz.

Ne yapacağımız hakkında da akıl yürütürüz.

Pratik akıl yürütmenin olasılık kuramına *karar verme kuramı* denir, bu da tümevarım mantığına çok yakındır.

İki bileşen temelinde ne yapacağımıza karar veririz:

- Muhtemelen neyin olacağını düşünmemiz (*inançlar*).
- Ne istediğimiz (*değerler*).

Karar verme kuramı hem olasılıkları hem de değerleri içerir. Değerleri *fayda* denilen şeylerle ölçeriz.

KARAR VERME KURAMININ KABA TANIMI

Karar verme kuramı olasılık ve fayda düşüncelerini kullanarak riskli karar-vermeleri analiz eder.

ALIŞTIRMALAR

- 1 *Harçlar*. Bir bütçe krizinden dolayı Memorial Üniversite-sinin yöneticileri, ya harçları %35 oranında arttırmaları gerektiğini ya da sınıftaki öğrenci sayısını arttırmaları ve ders sayılarını sınırlamaları gerektiğini belirtiyorlar. Öğrencilere bunlardan hangisini tercih edecekleri soru-luyor. Kesin düşünce farklılıkları var. Aşağıdaki riskli argümanlardan hangileri örneklemden popülasyona gider? Ya da popülasyondan örnekleme? Ya da örneklemden örnekleme?

(a) Bir bütün olarak öğrenci kitlesi büyük harç artışına şiddetle karşıdır.

65 öğrenciye harç artışı hakkında soru sorulacaktır.

O halde:

65 öğrencinin çoğu büyük harç artışına karşı olduğunu söyleyecektir.

(b) Bütün dallardan ve yıllardan 40 öğrenciye bir anket verildi.

32'si büyük harç artışlarına karşı olduğunu söyledi.

O halde:

Çoğu öğrenci büyük harç artışına karşıdır.

(c) Bir bütün olarak öğrenci kitlesi büyük harç artışına şiddetle karşıdır.

O halde (muhtemelen):

Soracağımız bir sonraki öğrenci büyük harç artışına karşı olacaktır.

(d) Bütün dallardan ve yıllardan 40 öğrenciye bir anket verildi.

32'si büyük harç artışlarına karşı olduğunu söyledi.

O halde (muhtemelen):

Soracağımız bir sonraki öğrenci büyük harç artışına karşı olacaktır.

2 *Daha fazla harç.* Aşağıdakilerden hangisi mantıklı açıklama çıkarımıdır? Hangisi tanıklığa dayalı bir çıkarımdır?

(a) Bir bütün olarak öğrenci kitlesi büyük harç artışına şiddetle karşıdır.

O halde:

Kaliteli bir eğitim almaktansa para tasarruf etmeyi tercih ediyorlar.

(b) Bir bütün olarak öğrenci kitlesi büyük harç artışına şiddetle karşıdır.

O halde:

Birçok öğrenci o kadar fakirdir ve öğrenci kredisi almak o kadar zordur ki, harçlar arttığında birçok öğrencinin okulu bırakması gerekecek.

- (c) Duodecimal Araştırma Şirketi öğrencilere anket yaptı ve ankette öğrencilerin %46'sının hükümetin resmi yoksulluk sınırının altında yaşadığı ortaya çıktı.

O halde:

Memorial'daki öğrenciler büyük bir harç artışını karşılayamazlar.

- 3 Geri dönüp kitabın başındaki bahis sorularına bakın. Her soru daha sonra tartışılacaktır. Fakat hangi cevabın doğru olduğundan bağımsız olarak verdiğiniz her cevabın bir argüman içerdiğini görürüz.

3.1 *Erkek çocuklar ve kız çocuklar*. Birisi şöyle bir argüman yapar:

Hastanelerde neredeyse erkek sayısı kadar kız çocuğu doğar.

City General'da her hafta birçok bebek doğar. Bir ilçe kasabası olan Cornwall'da her hafta sadece birkaç bebeğin doğduğu küçük bir hastane vardır.

Normal bir hafta, bebeklerin %45'i ile %55'inin kız olduğu bir haftadır.

Olağandışı bir haftaysa %55'ten fazlasının kız ya da %55'ten fazlasının erkek olduğu bir haftadır.

Geçen hafta ya Cornwall'da ya da City General Hastanesinde olağandışı bir hafta oldu.

O halde:

Olağandışı hafta Cornwall Hastanesinde oldu.

Bunun neden riskli bir argüman olduğunu açıklayınız.

3.2 *Pia*. Öncüller bahis sorusu 2'de belirtilmiştir.

O öncüller veri olarak alındığında hangisi daha riskli bir sonuçtur?

(a) Pia aktif bir feministtir.

(e) Pia bir banka memuru ve yoga dersleri alan aktif bir feministtir.

3.3 *Piyangolar*. Teyzeniz size önümüzdeki haftanın çekilişinde iki bedava Loto 6/49 biletinden birini teklif ediyor. Bunlar:

A. 1, 2, 3, 4, 5 ve 6.

B. 39, 36, 32, 21, 14 ve 3.

- (a) (A)'yı seçecek bir argüman oluşturunuz. (B) yerine (A)'yı seçmenin akılsızca bir iş olacağını düşünüyor-sanız, kötü ya da zayıf bir argüman oluşturabilirsiniz! Fakat mantıklı hale getirmeye çalışın.
- (b) (A)'yı almaya karar verdiniz. Bu riskli bir karar mıdır?

3.4 Zar.

İki zar da hilesizdir: Her bir yüzü diğer yüzleriyle aynı şekilde yere düşüyor ve zarın biri atıldığında üstte kalan yüzdeki sayı diğer zar atıldığında üstte kalan sayıyı hiçbir şekilde etkilemiyor.

O halde:

Bu iki zarın atılmasında toplamda 7 gelme ihtimali 6 gelme ihtimaline göre daha fazladır.

Bu riskli bir argüman mıdır?

3.5 *Taksiler.* Amos ve Daniel'in her ikisi de bir davada jüridir. Her ikisi de kanıt olarak aynı bilgiyi duyuyor, yani bahis sorusu 5'te belirtilen bilgiye sahipler. Sonunda, ne olduğuyla ilgili olarak yargıda bulunmaları gerekiyor.

Amos'un vardığı sonuç: O halde, yandan çarpan maviydi. Daniel'in vardığı sonuç: O halde, yandan çarpan yeşildi.

(a) Bunlar riskli argümanlar mıdır?

(b) Bunları riskli kararlar olarak düşünebilir misiniz?

3.6 *Boğaz ağrısı.* Doktor, bahis sorusu 6'da aktarılan bilgiye sahip. Sonuçların değersiz olduğu sonucuna varıyor ve daha fazla test yapılması için geri gönderiyor. Bunun neden daha riskli bir karar olduğunu açıklayın.

4 *Ludwig van Beethoven.*

(a) Bu nasıl bir argümandır? Ne kadar iyidir?

Beethoven en yaratıcı dönemlerinde acıdan kıvranıyordu; karaciğer sirozunun yaptığı ağrı, kronik böb-

rek taşları (taş düşmesi dayanılmaz bir ağrı verir) ve sürekli ishal nöbeti.

Yine de kompozisyonları çok derin ve çoğu zaman da neşelidir.

O halde:

Hem ağrı kesici hem de alkol aldı ve bu ilaçlar beste yaparken ona mutluluk dolu bir durum yarattı.

(b) Öncüllere eklendiğinde argümanı güçlendiren yeni bir bilgi örneği verin.

“Eleştirel düşünme” hakkındaki kitaplar size karmaşık gerçek hayat argümanlarını nasıl analiz edeceğinizi öğretir. Diğer şeyler yanında, bunlar size insanların gerçekten söyleyip yazdıkları şeyleri nasıl okuyup dinleyeceğiniz ve bu şeyler hakkında nasıl eleştirel olarak düşüneceğinizi öğretir. Bu kitap eleştirel düşünmeyle ilgili bir kitap değildir, fakat birkaç gerçek hayat argümanına bakmaya değer. Hepsi de günlük bir gazeteden alınmıştır.

5 *Narin kürek balığı.*

Nadir bulunur bir derin-deniz yarattığı olan narin kürek balığı, Japon bilim insanlarının büyük depremleri tahmin etmesine yardımcı oluyor. Japon geleneğine göre normal olarak 200 metrenin altındaki derinliklerde yaşayan bir kürek balığı ağlara takılırsa, büyük sarsıntılar pek de uzakta değil demektir.

Yakınlarda bir dizi deprem Japonya’yı sallamadan sadece birkaç gün önce iki narin kürek balığı kurulan ağlara takıldı. Bu da bize 1963’te Tokyo yakınlarında, Nijima Adasını vuran büyük bir depremden iki gün önce bu balıklardan birinin yakalanmasını hatırlatıyor. Bunun da ötesinde 1968’de şok dalgaları Uwajima Koyuna vurduğunda, aynı türde nadiren rastlanan bir balık yakalanmıştı.

Kürek balığının kendine has uzun bir şekli vardır, bu da onu sualtındaki şok dalgalarına karşı korunaksız yapar. Önce sersemlemiş ve sonra da yüzeye çıkmış olabilir. Ya da gerçek neden sismik bir hareketlilik es-

nasında yer kabuğundan zehirli gazlar çıkmış olması olabilir. Her halükarda, ne zaman bir kürek balığı ağa takılsa jeolojik bir kabarış meydana gelir ya da yakında meydana gelecektir.

Ve birkaç narin kürek balığı yakaladıktan sonra, Japon sismologlar yeni bir felaketin kaçınılmaz olduğu korkusuna kapıldılar.

- (a) Birinci paragrafta, tanıklığa dayalı bir ifade var. Bu nedir? Bu hangi tanıklığa dayalıdır?
- (b) Üçüncü paragrafta bütün tartışmanın bir sonucu belirtiliyor. Sonuç nedir?
- (c) İkinci paragrafta bu sonuç için bazı kanıtlar ortaya konuyor. (b) sonucuna götüren argümanın daha ziyade popülasyondan örnekleme mi ya da örneklemden popülasyona götüren bir argüman mı olduğunu söyleyebilir misiniz?
- (d) Üçüncü paragrafta ikinci paragrafta belirtilen olgular için iki mantıklı argüman önerilir. Bunlar nelerdir?
- (e) Dördüncü paragraftaysa nihai sonuca götüren çeşitli farklı argümanlar vardır. Bu argümanların birbirlerine nasıl uyduklarını tarif edin.

6 Kadın mühendisler.

1986'dan beri mühendislik okulu mezunlarının sadece %11'i kadındı. Daha önce erkeklerin hâkimiyetinde olan alanlarda gerçek ilerleme emareleri olduğu göz önüne alındığında bu gösterge özel olarak zayıf bir duruma işaret etmektedir. 1986'dan birkaç örnek: Hukuk, %48; ticaret, %44; tıp, %45 ve biyolojik bilimlerde mezunların yaklaşık olarak %50'si kadındı.

- (a) Sonuç nedir? (b) Bu nasıl bir argümandır? Geçerli midir? Tümevaran ve riskli midir? Mantıklı bir açıklama çıkarımı mıdır?

7 Plastik cerrahi.

Kadınlar için verdiği özel danışmanlık hizmetlerinde sosyal işler profesörü olan Martha Laurence, kadınların plastik cerrahi istemesinin arkasında yatan ne-

denleri anlamaya çalışıyor. "Genellikle kim oldukları ve varoluş biçimleri hususunda güvensizlik duymaları nedeniyle" diyor. "Basit bir cevabı yok, fakat gerçek sorun hakkaniyet ve kadınların kendileri üzerinde kontrol kurmaları."

Vardığı sonuç "gerçek sorun hakkaniyet ve kadınların kendileri üzerinde kontrol kurmalarıdır." Bu sonuca varmak için nasıl bir argümana başvurdu?

8 *Manitoba esrarı.*

Polisin dediğine göre Winnipeg pazarına suda yetiştirilen esrarı tedarik etmek için kırsal Manitoba'da merdiven altı operasyonları artmaktadır. Winnipeg'in kırsal Selkirk topluluğunun Emniyet Müdürü Duana Rhone'un yakınlarda yapılan bir mülakatta dediği gibi: "Ucuz, kurması kolay ve yatırımın getirisi yüksek. Küçük bir alanda daha iyi kalitede daha fazla esrar üretebilirsiniz." Gerekli ekipmanların da hâlihazırda mevcut olduğunu söylemeyi de ihmal etmedi. "Yapılacak bir iş haline geldi. Son zamanlarda bu suda yetiştirilen esrarla daha fazla karşılaşmaya başladık. Haklarında hiçbir şey bilmediğimiz bu operatörlerden çok sayıda olması lazım."

Sonuç: Kırsal Manitoba'da şimdiye kadar ortaya çıkarılmış çok sayıda esrar yetiştiricisi var.

Emniyet Müdürü Rhone'un önerdiği argüman nasıl bir argümandır?

GÖZDEN GEÇİRMENİZ İÇİN ANAHTAR KELİMELE

Popülasyon	Örneklem
En iyi açıklama çıkarımı	Tanıklık
Tümevarım mantığı	Karar Verme Kuramı

OLASILIKLARIN HESAPLANMASI

3. Kumarbazın Yanılgısı

Olasılık hakkındaki ana düşüncelerin çoğu ilk başta ortaya konabilir. Önde gelenleri **bağımsızlık** ve **rastgelelik**dir. Net düşünmek için daha da önemli olan nosyon **olasılık modelidir**.

RULET

Bir kumarbaz *hilesiz* bir rulet tekerleği olduğunu düşündüğü bir şey için iddiaya giriyor. Tekerler 38 dilime ayrılmış ve bunlardan:

- 18 dilimi siyahtır.
- 18 dilimi kırmızıdır.
- 2 dilimi yeşildir ve sıfırlarla işaretlenmiştir.

Kırmızı üstüne 10 dolar bahse girerseniz ve tekerlek de kırmızıda durursa, 20 dolar kazanırsınız. Benzer şekilde siyah üstüne 10 dolar bahse girerseniz ve tekerlek siyahta durursa, 20 dolar kazanırsınız. Aksi takdirde kaybedersiniz. Tekerlek sıfırda durduğunda kasa her zaman kazanır.

Şimdi dönmenin çok uzun sürdüğünü –12 kere döndüğünü– ve tekerleğin siyahta durduğunu hayal edin. Kumarbaz kırmızı için bahse girmeye karar verir, çünkü şöyle düşünür:

Yakında tekerleğin kırmızıya gelmesi gerekir.

Bu tekerlek hilesiz, onun için siyahta durduğu kadar kırmızıda da durur.

Yakınlarda kırmızıda durmadığından, yakında orda durmalı. Kırmızı üstüne bahse gireceğim.

Argüman riskli bir argümandır. Sonuç: “Önümüzdeki birkaç dönmede tekerlek kırmızıda durmalı.” Argüman riskli bir karara yol açıyor. Kumarbaz kırmızı üstüne bahse girmeye karar veriyor. İşte böyle, bir argüman ve bir karar verme. Siz kumarbazla hemfikir misiniz?

Bu bölümün adı “kumarbazın yanılgısı” olduğu için kumarbazın argümanında bir yanlışlık olmalı. Ne olduğunu söyleyebilir misiniz?

Argüman hakkında –ve genel olarak olasılık hakkında– konuşmanın bir yolunu izah etmek için biraz zaman harcayacağız. Henüz biçimsel tanımlar beklemeyin. Oldukça net birkaç fikir edinmeye çalışın.

ADİL

Argümanların öncülleri vardır. Kumarbazın ana öncülü rulet tekerleğinin adil olduğudur. Adil? Adil nedir? Kelimenin birçok anlamı var.

Bir hâkim adil olabilir.

Adil bir ücret.

Adil bir çözüm.

Dersten adil bir not.

Adil bir oyun.

Adil bir para.

Açgözlü bir çocuk bir keki ikiye kesiyor; diğer açgözlü çocuk hangi yarımını alacağını seçiyor. “Bu adildir.”

İşyerinde azınlıklar ya da kadınlara yardım etmek için “pozitif ayrımcılık”: Bu adil mi?

Adilin karşıtı ne? Bir şey başkasının aleyhine bir kişiyi kayırıp kolluyorsa o şey adil değildir. Adil olan bir hâkimin birisinin aleyhine diğer kişiyi kayırıp kollayacak şekilde bir önyargısı yoktur. Kumar aletleri için de benzer bir kelimeyi –*hileli*– kullanıyoruz. Hileliyse, bir para ya da rulet tekerleği gibi bir kumarın kurgusu da adil değildir.

HİLELİ

Para yazıdan çok tura gelme eğilimindeyse, hilelidir.

Rulet tekerleğinin dönüşleri siyahtan çok kırmızı gelmesi eğilimindeyse, tekerlek hilelidir.

Hileli bir paranın yazıdan çok tura ya da tersi gelme eğilimi vardır. "Eğilimi vardır" derken ne demek istiyoruz? Bu zor bir sorudur. Para, yazıdan çok tura geliyor. Her zaman mı? Bu kurguyla her türlü atış dizisinde de mi? Hayır, "ortalamada" olmalı ya da "uzun dönemde" olmalı. Peki, o ne demek? Uzun dönemde hepimiz öleceğiz.

Yine de uzun dönemdeki ortalamalar hakkında hepimizin kabaca sezgisel bir fikri vardır gibime geliyor. Bir yerden başlamak zorundayız. Bir şekilde bu kurguların "şansı" içerdiğini düşünürüz. Bunlara *şans kurguları* deyin. Bir şans kurgusunda prensipte kendini tekrar eden *denemeler* yapabiliriz: yazı-tura atmalar, döndürmeler, çekilişler, örnekler. Bir kurguyla ilgili denemelerin kesinleşmiş bir dizi olası *sonucu* vardır:

- Parayla: Tura, yazı.
- Zarla: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- Rulet tekerlekle: 38 bölümün her biri.

Tekrarlanan denemelerde farklı sonuçların ne kadar sıklıkla meydana geldiği hakkında bir fikrimiz var. Bir sonuç diğer her biriyle aynı sıklıkta meydana geliyorsa, bu kurgu hilesizdir deriz.

Bir şans kurgusu ancak ve ancak her bir sonucun uzun dönemdeki göreceli sıklığı diğer her bir sonucunkine eşitse hilesizdir.

Bu bir felsefe kitabı olduğundan dolayı "uzun dönem," "eğilimindedir" ve "göreceli frekans" ile ne kastettiğimizi anlatmak üzere konuya geri döneceğiz. Bu fikirlerin ne anlama geldiğiyle ilgili bazı sezgilerimiz var gibi ve bu sezgilerle yola koyulacağız. Daha sonra, felsefi analizle ne anlatmak istediğimizi daha net ortaya koymaya çalışacağız.

BAĞIMSIZLIK

Adil olmamanın birçok yolu vardır. Bir yazı-tura atma aleti sürekli yazıdan çok tura atıyorsa "adil değildir." Hilelidir. Ancak adil olmamanın tek yolu bu değil.

En son yazı attıysanız hemen her zaman tura gelecek ve en son tura geldiyse yazı olacak şekilde parayı başparmağınızla yazı/tura atarak ve avucunuzda yakalayarak çok kolayca atabilirsiniz. (İnanmayacaksınız ama beş dakika üzerinde çalışın bütün arkadaşlarınız şaşırıp kalacak. Artık yavaş yavaş sihirbazlığa hazırlanın.) İşin sırrını çözünce, çoğu zaman tura ve yazı aynı sıklıkla gelir.

T Y T Y T Y T Y T Y T Y

Sisteminiz hilesiz. Fakat buna "adil" yazı-tura atma denilebilir mi? Hayır. Bu türde bir yazı-tura atmada bir bit yeniği var. Kumarbaza gün doğacak. Arka arkaya 12 yazı geldiğini görmeyi beklemesi gerekmeyecek (hiç görmeyecek). Bir kere yazı geldiğini görür ve sonra tura için iddiaya girer. Kazanacağından emindir!

Dolayısıyla sistemde hile olmaması, bir şans kurgusunun adil olmasını garanti altına almıyor. Bunun da ötesinde bir şeye ihtiyacımız var. Hilesiz bir yazı-tura atma aleti fikri sonuçlarda *hiçbir düzenlilik* olmamasını içerir gibi görünüyor. Ya da *rastgele* olmalıdır. Rastgelelik çok zor bir düşüncedir. Bir şans kurgusunun sonuçları sadece sonuçlar önceki denemelerin sonuçlarından *etkilenmezse* rastgeledir (diye düşünürüz).

Kurgunun bir "*hafızası*" olmamalıdır. Adil bir kurgu, herhangi bir deneme anında, önceki denemelerde ne olduğunu bilmez.

Hatta bu konuda düşünmenin çok daha başka yolları da var. Örneğin bir kumarbaz arka arkaya iki atışta gelen iki tura'yı genellikle yazının takip ettiğini bilirse kâr etmek üzere iddiaya girebilir. Fakat o kurgudaki denemeler birbirinden bağımsız değildir. Rastgelelik bazen şu şekilde tanımlanır: *Başarılı hiçbir kumar sistemi mümkün değildir.*

Karmaşıklık fikri de kullanılır. Rastgele diziler o kadar karmaşıktır ki onları tahmin edemeyiz. Bir dizinin karmaşıklığı diziyi yaratmak için gerekli olan en kısa bilgisayar programının uzunluğuyla ölçülebilir. Diziyi yaratmak için gerekli olan en kısa programın uzunluğu dizinin uzunluğu kadarsa, bu durumda bazı hesaplama sistemlerine göre diziye rastgele dizi denir.

İşte size ilgili fikirlerden bir demet:

rastgele	önceki denemelerden hiçbir şekilde etkilenmiyor
düzenlilik yok	önceki denemelerden hafızada hiçbir şey yok
karmaşıklık	bir kumar sisteminin imkânsızlığı

Bazı öğrenciler “hiç hafıza yok” metaforunu severler. Diğerleri rastgeleliğe odaklanır. Bilgisayarla arası iyi olan insanlar karmaşıklıktan hoşlanırlar. Bu fikirlerin hepsi de bir merkezi nosyonda toplanır. Her denemenin sonucu, kurgudaki diğer denemelerin sonuçlarından *bağımsız* olmalı deriz. Bağımsızlığın daha kesin bir ifadesi 6. bölümde anlatılmaktadır. Şimdilik şu ifade yeterli olacaktır:

Bir şans kurgusundaki denemeler ancak ve ancak deneme sonuçlarının ihtimalleri önceki denemelerin sonuçlarından etkilenmiyorsa *bağımsızdır*.

Bu bir tanım değildir. Bir fikrin açıklanmasıdır. Bir şans kurgusu ancak ve ancak şu koşulda adildir:

- Tarafsızsa ve
- Sonuçlar birbirinden bağımsızsa.

ADİL OLMAMANIN İKİ YOLU

Yani bir şans kurgusu iki farklı şekilde “adil olmaz.” Hileli olabilir. Örneğin turaların yazılardan daha fazla gelme eğilimi olabilir. Fakat ayrıca sonuçlar dizisinde bazı düzenlilikler de olabilir. Denemeler birbirlerinden bağımsız olmayabilir. Adil olmamanın iki yolu olduğuna göre dört olası kombinasyon vardır:

Adil: Hilesiz, bağımsız.

Adil değil: Hilesiz, bağımsız değil.

Adil değil: Hileli, bağımsız.

Adil değil: Hileli, bağımsız değil.

Buyurun size her kombinasyona örnek.

HİLESİZ VE BAĞIMSIZ

Olasılığın beğenilen bir modeli de içinden topları “rastgele” çektiğimiz büyük bir top konteyneri, bir piyango *çekiliş kutusudur*. İçinde 1’den 50’ye kadar numaralandırılan, fakat aynı yuvarlaklıkta, düzgün ve olabildiğince birbirine benzeyen –aynı yüzey alanı, aynı ağırlıkta– 50 top olan bir çekiliş kutusu hayal edin. Yeteri kadar boş alan da var. Yapılan bir deneme, çekiliş kutusunu çok iyi sallamayı, bir top çekmeyi, numarasını not almayı ve geri koymayı içerir. Buna *yerine koyarak örnekleme* denir. Çekilecek her numaranın diğeriyle aynı sıklıkla çekileceğini bekleriz. Çekilişlerin *hilesiz ve bağımsız* olduğunu hayal ederiz.

HİLELİ KEMİKLER, BAĞIMSIZ SONUÇLAR

İnsanlar çok eskilerden beri kumar oynarlar. Önceleri zarları yoktu. Kemik kullanıyorlardı. Bir geyik ya da bir at gibi koşan bir hayvanın topuk kemiği sadece dört şekilde yere düşebilir. Bunlar doğal rastgeleleştiricilerdir. Bu kemiklere bazen “aşık kemiği” denir. Zarın atası bunlardır. Bazı kumarbazlar hâlâ “haydi kemik” diye zar atarlar.

Tabi her aşık kemiği farklıdır. Yaklaşık 6000 yıl önce Türkiye’de böyle bir aşık kemiği atışı yapılmış. Renkli noktalarla üç sonuç işaretlenmişti: Kırmızı, siyah, mavi. Dördüncü sonuçsa işaretsiz bırakılmıştı.

Kemik 300 defa atılmıştı. İşte size sonuçların özeti:

işaretsiz: 110

mavi: 88

kırmızı: 50

siyah: 52

Ya da yüzde olarak, yuvarlarsak:

işaretsiz: %37

mavi: %29

kırmızı: % 17

siyah: %17

Her ne kadar kırmızı ve siyah aynı sıklıkla geliyor gözükse de, işaretsiz olan sonuç kırmızı ve siyahın toplamından daha sık gelir. Net olarak bu zarlar *hilelidir*.

Fakat yuvarlanmalarda herhangi bir düzenlilik saptamadık. Sanki herhangi bir yuvarlanma önceki yuvarlanmalara bağıymış gibi durum gözlenmedi. Bu kemiğin yuvarlanmaları *bağımsız* görünür.

HİLESİZ ÇEKİLİŞLER, BAĞIMLI SONUÇLAR

Eşit sayıda kırmızı ve yeşil topları olan bir çekiliş kutusu hayal edin. İlk çekilişte, kırmızı ya da yeşile yönelik olarak hiçbir hilenin olmayacağını düşünebiliriz. Fakat *yerine koyma yapmadan* örneklem aldığımızı farz edin. Yani top bir kere çekildikten sonra, çekiliş kutusu boşalana kadar yerine koymadan birini daha çektiğimizi farz edin; sonra istersek, bütün topları çekiliş kutusuna geri koyup yeniden başlarız. İlk seferinde yeşil bir top çekersek, bir sonraki çekilişte kutunun içinde yeşil toplardan bir fazlası kadar kırmızı top kalır. Öyleyse bir sonraki çekilişte yeşil topa göre kırmızı bir top çekme şansımızın daha fazla olacağını bekleriz.

Böylece ikinci çekilişin sonucu birinci çekilişin sonucundan bağımsız *değildir*. Yine de toplamda yeşil ve kırmızı top çekilişlerinin sıklığı aynıdır. Kurgu *hilesizdir* (kırmızı ve yeşil aynı sıklıkla gelir), fakat çekiliş denemeleri önceki sonuçlar tarafından etkilenir. Bağımsız *değildirler*.

HİLE VE BAĞIMLILIK

Şimdi topların %90'ının kırmızı ve %10'unun da yeşil olduğunu hayal edin. Yerine koymadan örneklem alıyoruz. Bu durumda kırmızı lehine bir *hile* vardır. Ve çekiliş denemeleri bağımsız *değildir*.

KUMARBAZIN YANILGISI

Biraz önce bir şans kurgusunun iki şekilde adil olmayabileceğini gördük. Hileli olabilir. Ve denemeler birbirlerinden bağımsız olmayabilir. Fark önemlidir. *Yanılan Kumarbaz* şöyle diyor:

Bence bu adil bir rulet tekerleği.

Biraz önce art arda on iki siyah tur gördüm.

Tekerlek adil olduğundan, siyah ve kırmızı aynı sıklıkla geliyor.

Böylece:

Çok yakında kırmızı gelecek.

Hemen kırmızı için iddiaya girsem iyi olur.

Belki hemen bir sonrakinde kırmızı gelmeyecek, fakat yakında birçok kırmızı gelmesi gerekecek.

Buna “kumarbazın yanılgısı” denir. Tümevarım mantığında birçok kere yanılırız.

Kumarbazın yanılgısı nedir? Yanılgı *hile* içermez. *Bağımsızlık* içerir.

Art arda on iki siyah gelmesi kumarbazın bir sonraki seferde tekerleğin kırmızıda durma ihtimalinin daha fazla olacağını düşünmesine neden olur. *Böyleyse, geçmiş bir dizi gelecekteki sonuçları etkilemektedir.* Öyleyse cihazdaki denemeler birbirinden bağımsız olmayacaktır ve nihayetinde de cihaz adil olmayacaktır.

Bu nedenle de kumarbaz *tutarsızdır*. Öncülleri şunlardır:

- Kurgu adildir ve
- Art arda on iki defa siyah gelmiştir.

Şu sonucu çıkarır:

- Yakında birkaç kere kırmızı gelmesi lazım.

Kurgunun sonuçları birbirinden bağımsız olmasaydı böyle bir sonuç çıkardı. Bu kumarbazın ilk öncülüyle tutarlılık göstermez.

BAŞARILI BİR KUMAR SİSTEMİNİN İMKÂNSIZLIĞI

Rastgelelik ve bağımsızlık konusunda düşünmenin birçok yolu vardır. Bir tanıma göre *sonuçlar, ancak ve ancak başarılı bir kumar sisteminin imkânsız olması durumunda rastgele olur.* Bu, kazanamayacağınız anlamına gelmez. Birisinin kazanması gerekir. Bir iddia sisteminin kazanması garanti altına alınmazsa kumar sistemi imkânsızlaşır.

Örneğin bir yazı-tura atma kurgusunun bir "hafızası" olduğunu farz edin. Öyle bir şekilde yapılmış olsun ki yazıyı turaların takip ettiği her seferinde, para yazı olarak düşsün. Yazının turayı takip ettiği her seferinde, para tura gelsin. Hiçbir zaman TYT ya da YTY dizisi oluşturamaz. Bu diziyi şöyle görebilirsiniz.

T Y Y Y Y T T Y Y T T Y

Fakat şöyle değil:

T Y Y Y Y T Y Y Y T T Y

Kurgu hiçbir zaman YTY ya da TYT'ye müsaade etmiyorsa, çok karlı bir kumar sistemi mümkündür: TY görünce, bir sonrası için bahsinizi Y'ye oynayın; YT görünce, bir sonrası için bahsinizi T'ye oynayın; aksi takdirde bahse girmeyin. O halde yukarıdaki ilk dizi için şu şekilde bahse girin:

TY (Y için bahse girin) YYYT (T için bahse girin) TY (Y için bahse girin) YT (T için bahse girin) TY

Bütün bahislerinizi kazanırsınız.

Yanılan kumarbazımız kârlı bir kumar sisteminin mümkün olduğunu hayal eder. Onun sistemi, kısmen şu şekildedir: "Art arda 12 siyah görürseniz, kırmızıya bahse girin." Bu sistem ancak rulet tekerleğinin dönüşlerinin bağımsız olmadığı durumda işe yarar. Ve şüphesiz, bağımsız olmayabilir! Fakat kumarbazın öncülü rulet tekerleğinin hilesiz olduğu şeklindeyse, bu durumda dönüşlerin birbirinden bağımsız olduğunu düşünmelidir. Böylece yanılığı şudur: Hem rulet tekerleğinin hilesiz olduğunu ve hem de kumar sisteminin mümkün olduğunu düşünür.

BİRLEŞİK SONUÇLAR

Yine de hilesiz bir kurguyu düşünmenin başka bir yolu var. Ortalama olarak iki sonuç olan tura ve yazı aynı sıklıkla geliyorsa para hilesizdir. Fakat iki denemenin bütün sonuçlarını da düşünebiliriz, yani

TT TY YT YY

Denemeler bağımsızsa, bu durumda bu dört birleşik sonuç ortalama olarak aynı sıklıkla gelecektir. Benzer şekilde, sadece S ve K'dan oluşan, rulet tekerleğindeki 13 sonucun her dizisi aynı sıklıkla gelecektir. Böylece ortalama olarak,

S S S S S S S S S S S S K dizisi

S S S S S S S S S S S S dizisinden ne daha fazla ne de daha az gelir.

Dizinin yarısında 12 siyahı kırmızı takip eder. Dizinin diğer yarısında 12 siyahlık bir diziyi siyah takip ediyor.

BAHİS SORUSU 3

Devletin işlettiği standart bir şans oyunu olan Loto 6/49'da (1'den 49'a kadar) 49 sayıdan 6'sını seçiyorsunuz. Bu 6 sayı çekilirse en büyük ikramiyeyi –belki de milyonlarca dolar– kazanıyorsunuz. (Para ödülü şanslı numaraları seçenler arasında paylaştırılıyor. Hiç kimse kazanmazsa, bu durumda para ödülü bir sonraki haftanın şans oyununa aktarılıyor.)

Diyelim ki teyzeniz sizden *bedava olarak* şans oyununda aşağıda numaraları verilen iki bilet arasında seçim yapmanızı istedi:

- A. 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 çekildiğinde kazanıyorsunuz.
- B. 39, 36, 32, 21, 14 ve 3 çekildiğinde kazanıyorsunuz.

A'yı mı B'yi mi tercih edersiniz, yoksa her ikisi de olur mu?

Piyango adılse, her türlü sonuç dizisi diğer dizilerle aynı ihtimale sahip olacaktır. Çoğu kişi A biletini tercih edebilir, çünkü kazanıp kazanmadığınızı anlamak için bu bileti kontrol etmek daha kolaydır. Yani pratiktir.

14 yaşında bir erkek kardeşi ve 3 yaşında küçük bir kız kardeşi olan birisi B biletini tercih edebilir. Bu bir hurafedir.

Biletinizi *basitçe olasılık* temelinde seçerseniz, A ile B arasında tercih yapmamanız gerekir.

Fakat! B'ye nazaran A'yı seçmekte gerçek bir avantaj olabilir!

Çok büyük ikramiyeler kazanan şanslı numaraları seçen bütün insanlar arasında paylaştırılır. Çoğu insan B gibi düzensiz-görünen sonuçları beğenebilir. A'ya benzer düzenli bir dizinin oluşacağına inanmazlar. Bundan dolayı daha az insan B dizisine nazaran A dizisini seçer. Böylece, B dizisinin çekilmesine nazaran A dizisi çekilirse, her kazanan için ikramiye daha fazla olabilir.

Fakat! Belki yeteri kadar insan bunu bilebilir ve kurnazlıkla sürüyü alt etmek ve kendileri de küçük bir sürü haline gelmek isteyebilir. 21. yüzyılın sonunda İngiltere'de nihayet devlet piyangoları piyasaya sürüldüğünde, çok sayıda insan 1, 2, 3, 3, 4, 6'yı seçti, çünkü başkalarının seçmeyeceğini düşündü. Bu çekilseydi (ki çekilmedi) kazanç oldukça küçük olacaktı, çünkü ikramiye çok fazla sayıda oyunca arasında paylaştırılacaktı.

BAHİS SORUSU 7

Bir para atışını "taklit edin." Yani, parayı atmaksızın (yazı için) Y olarak ve (tura için) T olarak 100 atışlık bir dizi yazın; ancak bu öyle bir dizi olsun ki, bakanlar sanki gerçekten yazı-tura atılmış ve onun sonuçları yazılmış olsun.

Kolay değil mi, evet kolay. Fakat çoğu insan dizi rastgele görünsün diye *haddinden fazla* düzensizlik yaratmaya çalışır. Bu, çoğumuzun bir an için piyangoda A'ya göre B biletinin alınmasının daha iyi bir seçim olduğu yönündeki aynı içgüdüsel davranıştır.

Bir *deneme* aynı sonuçların -rulette 12 siyahın gelmesi gibi- bir dizisidir. Çoğu insan 100 para atışının tura ve yazı arasında oldukça fazla düzensizlik içerdiğini düşünür.

10 para atışı dizisinde neredeyse hiç kimse art arda yedi defa tura ya iddia koymaz. Adil bir parayla art arda

yedi defa tura gelme şansının $1/64$ olduğu doğrudur ($1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2$). Fakat 100 defa yazı-tura atıldığında, art arda 7 tura gelme şansınız en azından 93 olacaktır, çünkü ilk 93 atışın her biri 7'yle başlayan bir denemeyle başlayabilir.

100 yazı-tura atışında, art arda 7 tura gelme olasılığı daha fazladır. Art arda en az 6 tura gelme olasılığı kesinlikle daha fazladır. Yine de neredeyse hiç kimse art arda 6 turanın olduğu taklit bir dizi yazmaz.

Bu örnek kumarbazın yanılışıyla ilgili olarak bazı insanlara yardımcı olabilir. Şöyle bir hissiyatımız var: Art arda 12 siyah gelmişse, bu durumda rulet tekerleğinin acele edip kırmızıda durması gerekir! Ama öyle değil. Adeta doğada her şey hep birbirini dengeler.

DİKKATLİ ÖĞRENCİ

Yanılan Kumarbaz dediğimiz biriyle başladık. *Sıkıcı Mantıkla* karşılaşıyor. *Sıkıcı Mantık*, *Yanılan Kumarbaza* şöyle diyor:

Senin öncülün kurgunun adil olduğu yönündeydi. Fakat şimdi sanki kurgu adil değilmiş gibi mantık yürütüyorsun! Adil olmamayı meydana getiren tek şeyin hile olduğunu düşünüyorsun. Bağımsızlığı unutuyorsun. İşte senin yanılın bu.

Üçüncü bir kişiyle, *Dikkatli Öğrenciyle* karşılaşıyorlar. O da şöyle akıl yürütüyor:

Bu tekerlek döndürüldüğünde çok sık aralıkla siyah geliyor. Tekerleğin hilesiz olduğunu zannediyordum. Fakat yanlış düşünmüş olmalıyım. Tekerleğin siyahtan yana bir hilesi olmalı. Onun için siyah üzerine bahse girmeye başlayacağım.

O bir tümevarım argümanı geliştirdi: Tekerlek riskli sonuca karşı hilelidir. *Dikkatli Öğrenci* siyah üzerine bahse girdi. *Yanılan Kumarbaz* kırmızıya bahse girdi. *Sıkıcı Mantık*

herhangi biri üzerine bahse girmenin bir anlamı olmadığını söylüyor. Peki, kim haklı?

Dikkatli Öğrenci haklı olabilir. Belki de tekerlek *hilelidir*. Saf mantık size bunu söyleyemez. Bu kumarhane hakkında daha fazla bilgiye sahip olmanız gerekir; rulet tekerleklerini nereden alıyor, rulet tekerlekleri nasıl, vb. Gerçek hayattaki bir kumarhanede tekerleğin siyah için ayarlanmadığını tahmin ediyoruz. Ayarlanmasının hiçbir anlamı olmazdı. İnsanlar hemen fark eder, bu dünyadaki bütün dikkatli öğrenciler zengin olurdu.

Dikkatli Öğrencinin yanıldığını zannediyorum. Böyle düşünüyorum, çünkü ayaklarım yere basıyor. Onun yanıldığı yönündeki inancımın tümevarım mantığıyla hiçbir ilgisi yok. Kumarhaneler, tekerlekler ve kumarbazlar hakkında bildiklerime bağlı. Yanılıyor olabilirim. Bu da başka bir riskli argüman.

RİSKLİ UÇAKLAR

Vincent ve Gina büyükanne ve büyükbabalarını ziyaret ediyorlar ve uçakla eve gelmeleri gerekiyor. Onların bulunduğu rotada iki şirket uçuyor; Alpha Air ve Gamma Goways. Gamma'nın uçaklarından birisi daha yeni düştü.

VINCENT: Gel Gamma'ya binelim; onların uçakları sadece milyonda bir olasılıkla düşüyor ve bir uçakları daha yeni düştü!

GINA: Saçmalama. Bu kaza Gamma'nın ihmalkârlığını gösteriyor; Alpha'ya binsek daha iyi olur.

Kim haklı? Gina *Dikkatli Öğrenci* gibi düşünüyor. Fakat büyükannesi şöyle diyebilir: "Gamma sırf uçağın düşmesine neden olan kusurdan dolayı fazlasıyla dikkatli olacak ve bütün uçaklarını kontrol edecektir. Onun için Gamma'yla uçmalısınız." Gina'nın erkek arkadaşı şöyle diyor: "Asla! Gamma'nın güvenlik ihmalleri diz boyu. Bunun da ötesinde, pilotları kötü eğitilmiş. Uçakları eski, ucuz ve bakımları iyi yapılmamış. Kabin memurlarına az maaş veriyor. Bütün bunları bir haftada –ya da bir yılda– düzeltmeleri mümkün değil."

Vincent, Gina, büyükanne ve Gina'nın erkek arkadaşının hepsi de farklı argümanlar öne sürüyorlar. Her biri farklı öncüller ortaya koyuyor. Bir öncül yanlış olabilir. Mantık hangi öncüllerin doğru olduğunu söyleyemez. Mantık sadece öncüllerin ne zaman bir sonuç için iyi bir neden olacağını söyleyebilir. Mantığın bize söyleyebileceği tek şey şudur: Vincent yanılan kumarbaz gibi mantık yürütüyorsa, *bu durumda* hatalıdır. Ve hatalı gibi de görünüyor.

MODELLER

Olasılık kullanarak mantık yürütürken, çoğu zaman karmaşık durumların *basit ve yapay modellerine* döneriz. Gerçek hayat, –bir kumar durumunda olduğu gibi– bilinçli bir şekilde aparatlar yapıp kurallar koymamız dışında, neredeyse her zaman karmaşıktır. Rulet tekerleği biraz simetri olacak şekilde yapılmıştır, öyle ki her kısım diğer kısımlar kadar döner. Gerçek hayat böyle değildir. Ancak yapay oyunlar yine de bizim gerçek hayat hakkında düşünmemize yardımcı olacak faydalı *olasılık modelleri* olabilir.

Olasılık düşüncesinin temel stratejisi: Basit ve yapay modeller yapın. Modelleri gerçek hayat durumlarıyla karşılaştırın. Kesin ve çoğu zaman da matematiksel ya da mantıksal kavramları modellere uygulayabiliriz. Bunun için bunlar bizim net düşünmemize yardımcı olurlar. Fakat bunların gerçek hayat problemlerine ne kadar uygulanabileceğini de görmemiz gerekir.

Örneğin: Bizim sokakta park yeri bulmak çok zor. Park yasağına uymamanın cezası 20 dolar. Misafirim yasağa almadan park etmek istiyor. Bu akşam ona ceza kesilmesi ne kadar muhtemeldir? Park etmeyi kontrol eden görevli haftada sadece bir akşam gelip kontrol ediyor. Böylece piyangoyu kullanarak bir kırmızı kartın ve altı yeşil kartın bir şapkaya konduğu ve rastgele birinin çekildiği bir model yapıyorum. Kırmızı kartı ceza almakla, yeşil kartıysa ücretsiz park yeri bulmakla eşleştiriyorum.

Başka bir misafirse şöyle diyor: “Bu durumun doğru modeli *nedir*? Dün akşam dışarıda park cezası kesildi.” Kontrol

memurlarının neredeyse hemen hemen arka arkaya iki gün gelmediğine inanıyoruz. Denemelerin bağımsız olmadığı durumla ilgili yeni bir model yapıyoruz.

Vincent ve Gina için soru şu: Gamma Goways'in durumuyla ilgili doğru model hangisidir?

BİR MODELİN YANLIŞ OLACAĞI İKİ DURUM

Olasılık modelleri kullanan riskler hakkındaki ciddi düşünceler iki farklı şekilde yanlışlaşa düşebilir.

- Model gerçekliği iyi temsil etmeyebilir. Bu da gerçek dünya hakkında bir hata ifade eder.
- Modelden yanlış sonuç çıkarabiliriz. Bu da bir mantık hatasıdır.

Dikkatli Öğrenci "siyah üzerine bahse girin" diyor. Böyle demesinin nedeni bizim yanlış modeli kullandığımızı ve gerçek dünya hakkında bir yanlış yaptığımızı düşünmesidir.

Yanılan Kumarbaz "kırmızı üzerine bahse girin" diyor. Bir mantık hatası yapıyor. Bağımsızlığı unuttu.

Bu iki türlü hata bir argümanı eleştirmenin iki yolunu hatırlatıyor.

- Öncülleri sorgulayın; en azından birinin yanlış olduğunu gösterin.
- Akıl yürütmeyi sorgulayın; öncüllerin sonuç için iyi bir neden ortaya koymadığını gösterin.

Modeli eleştirmek öncülleri sorgulamaya benzer. Modelin analizini eleştirmekse akıl yürütmeyi sorgulamaya benzer.

ALIŞTIRMALAR

1 *Rulet tekerlekleri.* Kuzey Amerika'daki kumarhanelerde, rulet tekerleklerinin kasanın bütün parayı topladığı iki "sıfırı" vardır. Avrupa'da da benzer kurallar vardır, fakat orada sadece bir adet sıfır vardır.

(a) Bahis oynayacak olsaydınız, Avrupa'da mı yoksa Kuzey Amerika'da mı rulet oynamayı tercih ederdiniz?

(b) Bahis oranlarındaki farklılıklar kumarbazın yanılışı bakımından bir farklılık arz eder mi?

- 2 *Karıştırma.* Briç gibi kâğıt oyunlarında, her elde önce kartlar karıştırılır. Karıştırma mükemmel olmadığından elin, çoğu zaman önceki ellerden kalan bir "hafızası" olur. Elden sonra, kartlar hâlâ elden önceki dizilişi temsil eden bir dizilişi yansıtır. Profesyonel kumarbazlar bile mükemmel değildir. Deste önceki dizilişin izlerinin tamamen ortadan kalkması için bir profesyonel tarafından en az yedi kere karılmalıdır.

Farz edin ki birkaç iyi arkadaş birlikte kâğıt oynuyor ve her elden önce desteyi sadece iki kere karıyor.

(a) Art arda oynanan oyunlarda, ellerdeki kâğıtlar hileli midir?

(b) Bağımsız mıdır?

(c) Adil kurgu tanımımıza göre kurgu adil midir?

- 3 *Loto.* Stanford Üniversitesinden iki matematikçi Kanada'daki Loto 6/49'u analiz etti. İnsanların yaptığı tercihlerin bir modelini kullanarak en az popüler olan biletin 20, 30, 39, 40, 41, 48 olduğunu hesapladılar. Bir loto bileti alacak olsaydınız, bu numaralar seçilecek iyi numaralar olur muydu?

- 4 *Rakamlar.* Bir zar atarak rakamlar dizisi yaratabiliriz. *Denemeler* zar atışından oluşur. Olası *sonuçlar* 1'den 6'ya kadar olan rakamlardır. Sonraki kurgularda yaratılan rakamlar için ne söylenebilir? Bu kurgular hilesiz midir? Denemeler bağımsız mıdır?

(a) *Doğum ağırlıkları.* Büyük bir hastanede yeni doğan bebekler en yakın grama kadar hassas bir şekilde tartılır. O'dan 9'a kadar rakam dizisi yaratmak için gram olarak sadece doğum ağırlığındaki son basamağı alın. Bir deneme doğum, tartma ve kaydetmeden oluşur. Olası sonuçlar 0'dan 9'a kadardır. Peki, bebekler sadece en yakın kiloya kadar tartıldıysa ve son basamak kullanıldıysa?

(b) *Telefon direkleri.* Ovada uzun düz bir yol boyunca bir telefon hattı uzanmaktadır. Direkler sırayla numara-

landırılmıştır. Denemeler, sırayla arka arkaya gelen direklerdeki son basamağın kaydedilmesinden oluşur.

(c) *Kitaplar*. Bir kitap, 1-600 şeklinde numaralandırılmış olarak tam 600 sayfadan oluşur. Sayfaları rastgele açılıyorsunuz. Her defasında, soldaki sayfanın son rakamını yazıyorsunuz.

(d) *Kruvazör gemiler*. Her gün öğlen kruvazör gemisinin kaptanı son 24 saatte geminin gittiği deniz mili rakamını bildiriyor. Her gün yolcular gidilen mesafenin son basamağı hakkında bahse giriyorlar. Bahis paralarının %20'si yardım derneğine gidiyor. Geri kalan para doğru basamağı bilenler arasında dağıtılıyor. (Bir basamak yerine başka bir basamak üzerine bahse girmeniz için bir nedeniniz olabilir mi?)

5 *Yanılan Kumarbaz misilleme yapıyor*. "Meşhur ekonomist John Maynard Keynes tarafından yazılmış ve 1921 yılında yayımlanmış olan *A Treatise on Probability [Olasılık Üzerine Bir İnceleme]* adlı bu eski kitabı okuyordum. Bir Alman psikoloğu olan Dr. Marbe'nin Monte Carlo'da 80.000 rulet dönüşü üzerinde araştırma yaptığını ve uzun denemelerin kuramın tahmin ettiği kadar sıklıkla oluşmadığını bulduğunu söylüyor. 13 siyahın gelmesi herkesin inandığının da ötesinde ihtimal dışıdır, onun için arka arkaya 12 siyah gördüğümde kırmızı üstüne bahse gireceğim." (a) Arkadaşımız hâlâ yanılan bir kumarbaz mıdır? (b) Dr. Marbe'nin verilerini nasıl izah edersiniz?

6 *Sayma*. Blackjack, yani "21", vb olarak bilinen pokerin farklı türleri kumarhanede oynandığında, tek sayılar kasanın lehine olur. Fakat fazla değil. 21 oyununda deste, bitene kadar dağıtılırdı. Bu *yerine koymadan* örneklem almak gibi bir şeydir. Bir oyun bu kurallara göre oynandığında bir *kumar sisteminin* neden mümkün olabileceğini açıklayın.

7 *Amerika'da askere alma*. Vietnam Savaşında, genç Amerikalıların askere alınma biçimleri çok eleştiri konusu oldu. Ne kadar fakirseniz, askere alınma ihtimaliniz o ka-

dar yüksekti. Zenciler ve İspanyol kökenlilerin diğer Amerikalılara göre askere alınma ihtimalleri daha fazlaydı. Böylece eski sistem yerine piyango konuldu: Büyük dönen bir çekiliş kutusunun içerisine 365 top yerleştirildi. Yılın her günü için bir adet olmak üzere toplar işaretlendi (Artık yıllar için fazladan bir top konuldu).

Çekiliş televizyonda, kamuoyuna açık bir şekilde yapıldı. Hiçbir hile yapılmadığını ve her topun içeriye atıldığını kamuoyuna göstermek üzere toplar 365'ten başlayarak (o zaman artık bir yıl değildi) geriye doğru 1'e kadar sırayla çekiliş kutusunun içerisine konuldu. Güzel ve genç bir kadın çekiliş kutusuna uzanıp her seferinde bir top aldı. Askere alınacak ilk erkekler çekilişin en başlarında doğum günleri çekilmiş olanlardı. Ordu istediği asker sayısına ulaşana kadar doğum günü ilk çekileni, sonra ikinci çekileni ve benzeri şekilde diğerlerini sırayla askere aldı. Çekilen ilk birkaç top sanki yılın çok değişik zamanlarından geliyormuş gibiydi, fakat bir süre sonra, bariz bir şekilde topların ilk aylardan gelme eğilimi ortaya çıktı. Böylece Şubat ayında doğduysanız, askere alınma ihtimaliniz hayli yüksekti. Aralık ayında doğduysanız, askere alınma ihtimaliniz hayli düşüktü.

(a) Bu örnekleme yerine koyarak mı yoksa yerine koymadan alınan bir örneklemeydi?

(b) Sizce çekilişler hileli miydi?

(c) Öyleyse, bu bölümde anlatıldığı anlamıyla kurgu "adil" değildi. Askere alınma çağındakiler için bu adil olmayan bir şey miydi?

(d) Ne olduğuna dair en az iki açıklama önerin.

- 8 *X ışınları* potansiyel olarak zararlıdır. Hücreye zarar verebilirler, o hücre de sonra kansere dönüşebilir.

Sara diş hekimine şöyle diyor: "Lütfen X ışını (röntgen filmi) çekmeyin. Üç yıl önce çok berbat bir kayak kazası geçirdim ve birçok ayak kemiğimi kırdım ve bundan dolayı o zamanlar çok X ışını (röntgen filmi) çektirdim. Artık çektirmek istemiyorum, çünkü bu kanser olma ihtimalimi daha da arttıracaktır."

Diş hekimi: "Saçma. Geçmişte çektiirdiğiniz X ışınları (röntgen filmleri) gelecekteki X ışınları (röntgen filmleri) tehlikesi üzerinde farklı bir etkide bulunmaz. Diğer türlü düşünmek kumarbazın yanılıısına düşmek anlamına gelir!"

Argümana devam edin.

- 9 *Kuru bir Ağustos.* Bir adam kurak, fakat bereketli bir arazide bir çiftlik yapıyor. Hava raporu kayıtları marttan ağustosa kadar her ayda bütün bir mevsim sulama yapmasına yetecek kadar iyi bir yağmur yağma şansının yarı yarıya olduğunu gösteriyor. Tamamen kuru bir yetiştirme mevsimi 60 yılda bir kere oluşuyor.

Şu an ağustos ortası. Geçen yılın sonundaki büyük fırtınadan sonra hiç yağmur yağmamış. Çiftçinin suyu bitmiş. Ürünleri kuruyor. Ama iyimser, çünkü şöyle düşünüyor. Neredeyse kesinlikle yakında yağmur yağacak. İstatistikler bunu ispat ediyor!

Kumarbazın yanılıısına mı düşmüş oldu? Argümanda onu kumarbazın yanılıısından farklı kılacak herhangi bir hata var mı?

- 10 *Ters kumarbaz yanılıısı.* Albert zarla kumar oynamaktan hoşlanır.

- (a) Albert arka arkaya dört kere adil zar atsa, tek bir atışla 6, 6, 6, 6 gelme olasılığı nedir?
- (b) Trapper: "Dün akşam Albert dört kere zar attı, dördü de 6 geldi." Nelson: "Dört adet 6 gelmesi için zarı birçok kere attığına bahse girerim!" Nelson'ın çıkardığı sonuç akla yatkın mıdır?
- (c) Lucie, Albert'ı ziyaret ediyor. İçeri girerken Albert dört kere zar atıyor ve haykırıyor. "Yaşasın!" çünkü daha şimdi dört kere 6 attı. Lucie: "Bu sonucu almak için bu gece epeydir zar attığına bahse girerim!" Şimdi Lucie'nin bunu söylemesinin birçok sebebi olabilir; belki Albert hep zar atan sersemin tekidir. Fakat daha yeni dört kere 6 attığı basit olgusundan hareketle, Lucie'nin çıkardığı sonuç akla yatkın mıdır?

11 *Şanslı teyze.* (a) "Geçen yıl teyzenizin piyangodan orta boy ikramiye kazandığını biliyor muydunuz?" – "Ooo, zannedersem her hafta oynadı." Bu iyi bir çıkarım mıdır? (b) Piyango numaraları daha yeni televizyonda açıklandı. Telefon çalar, arayan teyzenizdir. "Daha şimdi ikramiye-yi kazandım!" – "Ooo, zannedersem haftalardır oynuyordun." Bu iyi bir çıkarım mıdır?

12 *Bir tasarım argümanı.* Bir Yaratıcının olduğuna dair meşhur bir argüman vardır. "Daha önce hiç kimsenin gitmediği" bir yerde, çölün ortasında bir saat buluyorsunuz, yine de bu iyi-tasarlanmış zamanı gösteren aletin bir zanaatkâr tarafından ya da bir fabrikada yapıldığı çıkarımını yapıyorsunuz. Burada nedenlerin ve amaca giden yolların muazzam bir şekilde ayarlandığı ve iyi-bir şekilde tasarlanmış bir evrenin ortasındayız. Bundan dolayı, bizim evrenimizin de bir Yaratıcısı olması gerekir.

Ortak bir itiraz: İyi-organize edilmiş bir evrenin sadece şans eseri ortaya çıkmış olması hayret verici bir şey olurdu. Fakat hareket halindeki maddenin sonsuzdan beri olmasa bile, en azından çok uzun bir süredir var olduğunu hayal edersek, o zaman er ya da geç sadece şans eseri olarak, iyi-organize edilmiş bir evrene ulaşmış olmaz mıyız? Böylece tasarım argümanı kusurlu bir argümandır. Bu kuvvetli bir itiraz mıdır?

GÖZDEN GEÇİRMENİZ İÇİN ANAHTAR KELİMELE

Görelî frekans
Şans kurgusu
Hileli/hilesiz
Rastgele

Kumar sistemi
Karmaşıklık
Bağımsızlık
Olasılık modeli

4. Temel Olasılık Fikirleri

Bu bölümde olasılık hakkında konuşurken kullanılan genel gösterim açıklanmakta, daha sonra olasılıkları nasıl toplayıp çarpacağınız hatırlatılmaktadır.

NEYİN OLASILIĞI VARDIR?

Arabanızı sigortalamak istediğinizi farz edin. Sigorta şirketi yaşınızı, cinsiyetinizi, araba sürme tecrübenizi, arabanızın yılını ve diğer şeyleri bilmek isteyecektir. Böyle yapmalarının nedeni akıllarında bazı soruların olmasıdır:

Acaba önümüzdeki yıl bir araba kazası yapmanızın ihtimali nedir?

Bu, *önerme* (ifade, iddia, varsayım, vb) hakkında bir sorudur:

“Önümüzdeki yıl bir araba kazası yapacaksınız.”

Şirket şunu bilmek ister: *Bu önermenin doğru olma ihtimali nedir?*

Sigortacılar aynı soruyu başka bir şekilde sorabilir:

Önümüzdeki yıl bir araba kazası yapma ihtimaliniz nedir?

Bu, *olay* (bir tür olan bir şey) hakkında bir sorudur.

“Gelecek yıl sizin de kaza yapan arabalardan birini sürmüş olacağınız bir otomobil kazası” olacak mı?

Şirket şunu bilmek ister: *Bu olayın olma olasılığı nedir?*

Açıkça görülüyor ki bunlar aynı soruyu sormanın iki farklı yoludur.

ÖNERMELER VE OLAYLAR

Mantıkçılar öncüllerden sonuçlara kadar argümanlarla ilgilinirler. Öncüller ve sonuçlar önermelerdir. Onun için tümevarım mantığı ders kitapları genellikle önermelerin olasılığından bahseder.

İstatistikçilerin ve olasılık ders kitaplarının çoğu olayların olasılığından bahseder.

O halde olasılığın iki dili vardır; önermeler ve olaylar.

Önermeler doğru ya da yanlıştır.

Olaylar meydana gelir ya da meydana gelmez.

Önermeler bakımından söylediğimiz şeylerin çoğu olay diline çevrilebilir ve olaylar bakımından söylediğimiz şeylerin çoğu da önerme diline çevrilebilir.

Başlangıç olarak bazen bir şekilde konuşacağız, bazen de diğer şekilde.

Önermelerle olayların ayırt edici özelliği şimdilik önemli değil. Sadece kitabın ikinci yarısında önemli olacaktır.

BİR DİL YETERKEN NEDEN İKİ DİL ÖĞRENELİM Kİ?

Çünkü bazı öğrenciler hâlihazırda olay dilini konuşurken diğerleri önerme dilini konuşacaktır.

Çünkü bazı öğrenciler daha fazla istatistik öğrenmeye başlayacak ve olay dilini konuşacaktır. Diğer öğrenciler mantığı takip edecek ve önerme dilini konuşacaktır.

Burada önemli olan faydalı bir şey söyleyecek olan herkesi anlayabilmektir.

Burada genel bir prensip vardır. Ne söylediğiniz hakkındaki çok dikkatli ve çok net olun. Fakat kendi diliniz hakkındaki dogmatik olmayın. Her türlü dikkatli düşünceyi dinleyici kitlenizin anlayacağı bir dilde ifade etmeye hazırlıklı olun. Ve aşina olmadığınız bir dille konuşan birinden öğrenmeye de hazırlıklı olun.

GÖSTERİM: MANTIK

Önermeler ya da olaylar büyük harflerle temsil edilirler: A, B, C...

Aklımızda ister önermeler isterse de olaylar olsun, mantıksal birleştirmeler aşağıdaki şekilde temsil edilecektir:

Ayrılma (veya): $A \vee B$ (A veya B veya her ikisi) için. Bunu "A veya B" olarak okuruz.

Birleşme (ve): $A \& B$ (A ve B) için.

Olumsuzlama (değil): $\sim A$ (A değil) için.

Önerme dilinde örnek:

Z, rulet tekerleğinin sıfırda durma önermesi olsun. B, tekerleğin siyahta durma önermesi olsun.

$Z \vee B$ tekerleğin sıfırda veya siyahta durma önermesidir.

Örnek:

Z: "Tekerlek sıfırda durur" olsun.

B: "Tekerlek siyahta durur" olsun.

Bu durumda $Z \vee B$ = olaylardan birinin veya diğerinin olma durumu = tekerlek siyahta veya sıfırda durur.

R: "Tekerlek kırmızıda durur" olsun.

Rulette, tekerlek ancak ve ancak kırmızıda durmazsa ($\sim R$) sıfırda veya siyahta ($Z \vee B$) durur. O halde,

$\sim R$, $(Z \vee B)$ 'e denktir.

R , $\sim(Z \vee B)$ 'e denktir.

GÖSTERİM: KÜMELER

İstatistikçiler genellikle önermeler hakkında konuşmazlar. Küme kuramı cinsinden olaylar hakkında konuşurlar. İşte size önerme dilinin olay diline çevrilmiş kaba bir hali.

İki önermenin ayrılması, $A \vee B$, iki olay kümesinin birleşimine, $A \cup B$, karşılık gelir.

İki önermenin birleşmesi, $A \& B$, iki olay kümesinin kesişimine, $A \cap B$, karşılık gelir.

Bir önermenin olumsuzlaması, $\sim A$, bir olaylar kümesinin tamlayanına karşılık gelir, genellikle A' olarak yazılır.

GÖSTERİM: OLASILIK

Olasılık ve istatistik derslerinde kitaplarda olasılık için genellikle $P()$ yazılır. Fakat bizim olasılık gösterimimiz şu şekilde olacaktır:

$Pr()$.

Rulet örneğinde (sıfır için Z, kırmızı için R, siyah için B), bütün bunların hepsi olasılıklardır:

$Pr(Z)$ $Pr(Z \vee B)$ $Pr(\sim(Z \vee B))$ $Pr(R)$

Daha önce $\sim R$ 'in $(Z \vee B)$ 'ye denk olduğunu söyledik. O halde:

$Pr(\sim R) = Pr(Z \vee B)$.

Yani, kırmızı bir bölgede durmama ihtimali sıfır ya da siyah bir bölgede durma ihtimaliyle aynıdır.

İKİ UZLAŞIM

Hepimizin –ister herhangi bir olasılık kuramı dersi almış olalım, ister olmayalım– olasılıkları yüzde ya da kesirlerle ifade etme alışkanlığımız vardır. Yani:

Olasılıklar 0 ile 1 arasındadır.

Sembollerle, herhangi bir A için,

$$0 \leq Pr(A) \leq 1$$

Sınırlarda 0 ve 1 olur.

Önergeler diliyle, kesinlikle doğru olan şeyin olasılığı 1'dir.

Olayların diliyle, olacak olan olayın olasılığı 1'dir.

Olasılık ders kitaplarında, olacağından emin olunan olay ya da kesinlikle doğru olan önerme, büyük harfle yazılan ve Yunan alfabesinin son harfi olan omega ile yazılır: Ω . O halde uzlaşımımız şu şekilde yazılır:

$$Pr(\Omega) = 1$$

Kesinlikle doğru olan bir önermenin ya da olacağından emin olunan olayın olasılığı 1'dir.

BİRBİRİNİ DIŞLAYAN

İki önerme aynı anda doğru olamazsa bu önermelere *dışlayan* önermeler denir. Sıradan bir rulet tekerleği aynı dönüşte, hem (kasanın kazandığı) sıfırda ve hem de kırmızıda duramaz. Böylece bu iki önerme aynı anda doğru olamaz. Bundan dolayı bu önermeler birbirlerini dışlarlar.

Bir sonraki dönüşte tekerlek sıfırda duracak.

Bir sonraki dönüşte tekerlek kırmızıda duracak.

Aynı şekilde, aynı anda meydana gelemeyen iki olaya *birbirini dışlayan* olaylar denir. Bunlara *ayrık* olaylar da denir.

OLASILIKLARI TOPLAMAK

Olasılık hakkında kolejdaki "herkesin" bildiğini düşündüğümüz bazı şeyler vardır. Şu an için sadece bu genel bilgiyi kullanacağız. "Herkes" olasılıkları nasıl toplayacağını biliyor.

Daha dikkatli bakıldığında: *Birbirini dışlayan önermeler ya da olaylar toplanır.*

A ve B birbirini dışlıyorsa, $\Pr(A \vee B) = \Pr(A) + \Pr(B)$.

Böylece rulette sıfırın olasılığı 1/19 ise ve kırmızının olasılığı 9/19 ise, bunlardan birinin ya da diğərinin olma olasılığı şu şekildedir:

$$\Pr(Z \vee R) = \Pr(Z) + \Pr(R) = 1/19 + 9/19 = 10/19.$$

Örnek: Adil bir zarı ele alın.

E: "Zar, üstte çift sayı gelecek şekilde düşer" diye düşünün.

E = (zar 2, 4 veya 6 gelir).

$$\Pr(E) = 1/2$$

Neden? Çünkü $\Pr(2) = 1/6$. $\Pr(4) = 1/6$. $\Pr(6) = 1/6$.

2, 4 ve 6 olayları karşılıklı olarak birbirini dışlar.
 $(1/6) + (1/6) + (1/6)$ 'yı toplayın. $1/2$ 'yi elde edersiniz.

Zar atan insanlar zardaki tek-noktaya *yek* derler.

M: "Zar, ya *yek* üste gelecek şekilde düşer ya da bir asal sayı üstte gelecek şekilde düşer" olsun.

$M = (\text{zar } 1, 2, 3 \text{ veya } 5 \text{ gelsin}).$

$\Pr(M) = 4/6 = 2/3$

Fakat $\Pr(E|M) = 7/6$ elde edecek şekilde $\Pr(E)$ ile $\Pr(M)$ 'yi toplayamazsınız. (YANLIŞ)

(Biz zaten olasılıkların 0 ile 1 arasında olduğunu biliyoruz, öyleyse $7/6$ imkânsızdır.)

Neden bunları toplayamayız? Çünkü E ve M üst üste çakışır: 2 hem E'nin hem de M'nin içindedir. E ve M birbirini dışlamazlar.

Aslında, $(E|M) = (\text{zar } 1, 2, 3, 4, 5 \text{ ya da } 6 \text{ gelir}),$ öyle ki,

$\Pr(E|M) = 1$

Olaylar ya da önermeler "üst üste birbiriyle çakışırsa" topla-
 ma yapamazsınız.

Olasılıkların toplanması birbirini dışlayan olaylar ya da önermeler için yapılır.

BAĞIMSIZLIK

Sezgisel olarak:

Bir olayın meydana gelmesi diğer bir olayın meydana gelme olasılığını etkilemiyorsa bu iki olay birbirinden bağımsızdır.

Bir olayın doğruluğu diğer her türlü başka olayın doğruluğunu daha fazla ya da daha az olası yapmıyorsa iki önerme birbirinden bağımsızdır.

Çoğu insan –*Yanılan Kumarbaz* gibi– bağımsızlığı çok iyi anlamıyor. Aynı zamanda, "herkes" olasılıkların çarpılabil-

leceğini biliyor gibi. Daha dikkatli bakıldığında: *Bağımsız olayların ya da önermelerin olasılıkları çarpılabilir.*

ÇARPMA

A ve B bağımsızsalar, $\Pr(A \& B) = \Pr(A) \times \Pr(B)$.

İki adet adil zar atıyoruz. Atılan bir zarın sonucu atılan diğer zarın sonucundan bağımsızdır, öyleyse

ilk atışta 5 gelmesinin (5_1)

ve ikinci atışta 6 gelmesinin (6_2)

olasılığı:

$$\Pr(5_1 \& 6_2) = \Pr(5_1) \times \Pr(6_2) = 1/6 \times 1/6 = 1/36$$

Bağımsızlık önemlidir! İşte bakın bir hata:

Adil bir zarla çift sayı (E) gelme olasılığı 1/2'dir.

M gelme, yani ya bir yek ya da bir asal sayı gelme olasılığının 2/3 olduğunu bulduk.

Peki, bir atışta zarın hem E hem de M gelme olasılığı nedir?

Şöyle bir mantık yürütemeyiz:

$$**\Pr(E \& M) = \Pr(E) \times \Pr(M) = 1/2 \times 2/3 = 1/3. \text{ (YANLIŞ)}$$

İki olay birbirinden bağımsız değildir. Aslında, sonuçlardan sadece birisi, yani 2, hem çift hem de asaldır. Böylece:

$$\Pr(E \& M) = \Pr(2) = 1/6.$$

Bazen yanlışlığı açıkça görünmez. Önümüzdeki *dünya serisinde* Toronto Blue Jays'in oynama olasılığının 0,3 [$\Pr(J)$] ve Los Angeles Dodgers'ın önümüzdeki dünya serisinde oynama olasılığının da 0,4 [$\Pr(D)$] olduğuna karar verdiğinizizi farz edin.

$$**\Pr(D \& J) = \Pr(D) \times \Pr(J) = 0,4 \times 0,3 = 0,12. \text{ (YANLIŞ)}$$

olduğu sonucuna varabilirsiniz. Çünkü iki olay birbirinden

* World Series: 1903'ten beri *American League (AL)* ve *National League (NL)* şampiyonları arasında oynanan Kuzey Amerika temelli *Major League Baseball*'un (*MLB*) her yıl oynanan yıllık beysbol şampiyonasıdır -çn.

bağımsız olmayabilir. Belki de bağımsızdır. Fakat çeşitli oyuncuların transfer edilmesi ve benzerinden dolayı Dodgers yalnızca Jays'ten bazı oyuncuları transfer edince iyi bir performans gösterecektir ve bu durumda da Jays iyi bir performans göstermeyecektir.

Bağımsız olaylarda ya da önermelerde olasılıklar çarpılır.

ALTILAR VE YEDİLER: BAHİS SORUSU 4

Bahis sorusu 4 şöyle bir şey:

Bir çift zarla toplam 7 atmanız için 1 ve 6 veya 2 ve 5 veya 3 ve 4 atmanız gerekir.

Bir çift zarla toplam 6 atmanız için 1 ve 5 veya 2 ve 4 veya 3 ve 3 atmanız gerekir.

İki adet hilesiz zarla, aşağıdakilerden hangisinin olmasını beklersiniz:

----(a) 7'yi 6'dan daha sıklıkla atmayı.

----(b) 6'yı 7'den daha sıklıkla atmayı.

----(c) 6 ve 7'yi aynı sıklıkla atmayı.

Çoğu insan 6 ve 7'nin gelme olasılığının aynı olduğunu düşünür. Aslında, 7 gelme olasılığı 6 gelme olasılığından fazladır.

İki zarı, X ve Y, bir arada bir kere attığımızda ne olduğuna bakın. Atılan iki zarın da birbirinden bağımsız olduğunu varsayalım. 36 adet olası sonuç vardır. Bu tabloda, örneğin (3,5) X, 3 geldiğinde, Y'nin 5 geldiğini gösterir.

(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

Sonuçların içinde toplamı 6 olanları yuvarlak içine alınız. Bunlar kaç adettir?

Toplamları 7 olanları kare içine alınız. Kaç adet çıktı?

7 toplamına altı şekilde ulaşırız: (1,6) ya da (2,5) ya da (3,4) ya da (4,3) ya da (5,2) ya da (6,1).

Bu sonuçlarının her birinin gelme olasılığı $1/36$ 'dır. (*Bağımsız atışla*) O halde,

$$\Pr(7; 2 \text{ zarla}) = 6/36 = 1/6. \text{ (Birbirini dışlayan sonuçlar)}$$

Fakat 6 toplamına sadece beş şekilde ulaşabiliriz: (1,5) ya da (2,4) ya da (3,3) ya da (4,2) ya da (5,1). O halde,

$$\Pr(6; 2 \text{ zarla}) = 5/36$$

BİRLEŞTİRME

Bir zarla 6 atmak tek bir olaydır. İki zarla toplamda yedi atmaksa birleşik bir olaydır ve "zarların toplamı 7'ye eşittir" olayında birleştirilen iki farklı sonucu içerir.

Birçok basit olasılık akıl yürütmesi birleşik olayları içerir. Adil bir para ve çekiliş kutusu 1 ve çekiliş kutusu 2 olarak iki çekiliş kutusunun aşağıdaki şekilde oluştuğunu hayal edin:

Çekiliş kutusu 1: 3 kırmızı top, 1 yeşil top.

Çekiliş kutusu 2: 1 kırmızı top, 3 yeşil top.

Çekiliş kutusu 1'den adil bir çekilişte, kırmızı bir top almanın olasılığı $\Pr(K_1) = 3/4$ 'tür.

Çekiliş kutusu 2'de bu olasılık $\Pr(K_2) = 1/4$ 'tür.

Şimdi adil bir parayla yazı-tura atarak bir çekiliş kutusu seçtiğimizi farz edin. Tura gelirse, çekiliş kutusu 1'den çekiyoruz; yazı gelirse, çekiliş kutusu 2'den çekiyoruz. Bağımsız olduklarını yani, parayla yazı-tura atmanın çekiliş kutuları üzerinde bir etkisinin olmadığını varsayın.

Parayla yazı-tura atıp sonra da çekiliş kutusu 1'den kırmızı bir top çekme olasılığımız nedir? Önce tura atmamız ve sonra da çekiliş kutusu 1'den kırmızı bir top çekmemiz gerekir (K_1).

$$\Pr(T \& K_1) = 1/2 \times 3/4 = 3/8$$

Parayla yazı-tura atıp sonra da çekiliş kutusu 2'den kırmızı bir top çekme olasılığımız (K_2):

$$\Pr(Y\&K_2) = 1/2 \times 1/4 = 1/8.$$

Bu kurguyu kullanarak kırmızı bir top alma olasılığı nedir? Bu birleşik bir olaydır. Parayla tura atıp sonra çekiliş kutusu 1'den kırmızı çekerek ($T\&K_1$) ya da yazı atıp sonra da çekiliş kutusu 2'den kırmızı çekerek ($Y\&K_2$) kırmızı bir top alabiliriz.

Bunlar karşılıklı olarak birbirini dışlayan olaylardır, bunun için de toplanabilirler.

$$\Pr(\text{Kırmızı}) = \Pr(T\&K_1) + \Pr(Y\&K_2) = 3/8 + 1/8 = 1/2.$$

O halde, bu kurguda, kırmızı çekme olasılığı $1/2$ 'dir.

ŞAŞIRTMACA BİR SORU

Yazı-tura atarak bu iki çekiliş kutusundan birisini seçtiğimizi ve sonra da yerine koyarak o çekiliş kutusundan iki çekiliş yaptığımızı farz edin. Bu kurguda art arda iki kırmızı çekme olasılığı nedir?

Bir kırmızı gelme olasılığının $1/2$ olduğunu biliyoruz.

İki kırmızının olasılığı $(1/2)(1/2) = 1/4$ müdür? HAYIR!

Nedeni; art arda iki kırmızıyı X ve Y diye adlandırdığımız iki farklı şekilde elde edebiliriz:

X: Tura atıp (olasılığı $1/2$ olan olay) ve sonra da çekiliş kutusu 1'den (K_1 , olasılığı $3/4$ olan bir olay) kırmızı alarak, daha sonra topu yerine koyup tekrardan çekiliş kutusu 1'den kırmızı çekerek (olasılığı $3/4$ olan başka bir olay).

Y: Yazı atıp (olasılığı $1/2$ olan olay) ve sonra da çekiliş kutusu 2'den (K_2) kırmızı alarak, daha sonra topu yerine koyup tekrardan çekiliş kutusu 2'den kırmızı çekerek (başka bir K_2).

Olasılıklar şu şekildedir:

- $\Pr(X) = (1/2)(3/4)(3/4) = 9/32$
- $\Pr(Y) = (1/2)(1/4)(1/4) = 1/32$

Böylece,

$$\Pr(\text{çekilen birinci top kırmızı \& çekilen ikinci top kırmızı}) \\ = \Pr(X) + \Pr(Y) = 10/32 = 5/16.$$

ŞAŞIRTMACA SORUYU ANLAMAK

İki kırmızının olasılığının $1/4$ olacağını düşündünüz mü? İşte size neden $1/4$ olmayacağını anlamanız için bir yol. İki farklı deneyi tekrar tekrar yaptığınızı düşünün.

Deney 1. Yazı-tura atarak bir çekiliş kutusu seçin ve sonra da top çekin.

Sonuçlar 1. Çekişlerinizin yaklaşık yarısında kırmızı bir top çekeceksiniz.

Deney 2. Yazı-tura atarak bir çekiliş kutusu seçin ve sonra da yerine koyarak iki top çekin. (Bir top çektikten sonra, tekrar çekiliş kutusunun içine koyun).

Sonuç 2. Çekilişlerin yaklaşık olarak $5/16$ 'sında iki kırmızı top, yaklaşık olarak $5/16$ 'sında iki yeşil top ve yaklaşık olarak $6/16 = 3/8$ 'inde bir kırmızı ve bir yeşil top karışımını çekeceksiniz.

Açıklaması. Belirli bir renge yönelik "hilesi" olan bir çekiliş kutusu seçtikten sonra, bir çoğunluk ve bir azınlık renk gelmesinden ziyade her iki topun da o renkte olması daha olasıdır.

LAPLACE

Bu örnek, olasılık kuramının gelişmesinde gerçekten önemli bir şahsiyet olan P. S. de Laplace'ın (1749–1827) gözdesiydi. Kolejler için olasılık hakkındaki ilk giriş kitabı, *A Philosophical Essay on Probabilities*'i [*Olasılıklar Hakkında Felsefi Bir Makale*] yazdı. Bu metni Fransız Devrimiyle Napolyon'un yönetimi arasındaki dönemde 1795'te, Paris'te ders verdiği politeknik okulundaki bir sınıf için yazdı.

Laplace, döneminin en iyi matematikçilerinden biriydi. Yazmış olduğu *Analytic Theory of Probabilities* [*Olasılıkların Analitik Kuramı*] hâlâ zengin bir fikir kaynağıdır. Yine yazmış olduğu *Gök Mekaniği* de –kütleçekim ve astronominin matematiği– bir o kadar önemliydi. Kendisi orduda çok popülerdi, çünkü Fransız topçu silahlarını matematik kullanılarak geliştirdi. Napolyon'un vejetaryen öğle yemeklerine gider, orada olasılık kuramı hakkında resmi olmayan konuşmalar yapardı.

ALİŞTIRMALAR

1 *Galileo.* Zar atmayla ilgili bahis sorusu 4'e yanlış bir cevap verdiyseniz üzülmeyin. Çok önceden birisi üç adet zar atmayla ilgili benzer bir soru sormuştu. Gelmiş geçmiş en büyük astronomlardan ve fizikçilerden birisi olan Galileo (1564–1642) doğru ve yanlış cevapları açıklamak için bu işe zaman ayırdı.

Neden (yanlış bir şekilde) üç adet adil zar atınca toplamı 9 olanların, toplamı 10 olanların geldiği sıklıkta geleceği beklentisi içinde olabileceğinizi açıklayın. 9'un 10 kadar olası olacağını düşünmek neden yanlıştır?

2 *Tek kart.* Yedi kere çok iyi karılmış elli-iki kartlık standart bir deste karttan tek bir kart çekildi. Kartın:
(a) Ya çerçeveli bir kart (vale, kız, papaz) ya da on gelme
(b) Ya bir maça ya da çerçeveli bir kart gelme olasılığı nedir?

3 *İki kart.* Standart bir deste karttan arka arkaya iki kart çekildiğinde:
(a) Yerine koyup çekerek (b) yerine koymadan çekip art arda iki kupa
(c) Yerine koyup çekerek ve (d) yerine koymadan çekip hiçbirisi de kupa olmayan iki kart gelme olasılığı nedir?

4 *Okçuluk.* Ok atıcısının hedefinde bir boğanın gözü etrafında dört eş merkezli daire vardır. Belirli bir ok atıcısı için atış yaptığı anda aldığı puanların olasılığı aşağıdaki şekildedir:

$\Pr(\text{boğanın gözüne vurma}) = 0,1$

$\Pr(\text{birinci daireye vurma, fakat boğanın gözüne değil}) = 0,3$

$\Pr(\text{ikinci daireye vurma, fakat daha iyisi değil}) = 0,2$

$\Pr(\text{üçüncü daireye vurma, fakat daha iyisi değil}) = 0,2$

$\Pr(\text{dördüncü daireye vurma, fakat daha iyisi değil}) = 0,1.$

Atışları birbirinden bağımsızdır.

(a) İki atışla, birinci atışta boğanın gözüne ve ikinci atışta üçüncü daireye vurma olasılığı nedir?

- (b) İki atışla, bir kere boğanın gözünden vurma ve bir kere de üçüncü daireyi vurma olasılığı nedir?
 (c) Herhangi bir atışta hedefi tamamen ıskalama olasılığı nedir?

- 5 *Bebek bezinden çocuk felci kapma* (yeni bir hikâye).
Southampton, İngiltere: Doktorlar dün bir adamın kuzeninin pislenmiş bebek bezinden çocuk felci kapıldığını, neyse ki adamın bu olaydan birkaç gün önce mikroba karşı aşı olduğunu söyledi. Danışman Martin Wale, "pislenmiş çocuk bezlerinden çocuk felci kapmanın olasılığı tam olarak üç milyonda birdir" dedi. Dr. Wale ne demek istedi?
- 6 *Diller.* Olasılık için bir "önerme dili" ile bir "olay dili" arasında ayrım yaparız. Aşağıdaki durumlarda hangi dil kullanılmıştır?
 (a) 2. soruda. (b) 3. soruda. (c) 4. soruda. (d) 5. soruda Dr. Wales'in ifadesi.

GÖZDEN GEÇİRMENİZ İÇİN ANAHTAR KELİMELE

Olaylar	Toplama
Önermeler	Bağımsızlık
Birbirini dışlayan	Çarpma

5. Koşullu Olasılık

Olasılık hakkındaki en önemli yeni düşünce bir şeyin, başka bir şeyin meydana gelmesi koşuluyla meydana gelmesi olasılığıdır. Buna koşullu olasılık denir.

KATEGORİK VE KOŞULLU

Olasılıkları sayılarla ifade ederiz. İşte size gazetede okuduğum bir hikâye. Eski bir profesyonel tenisçi olan Ivan, yükselen genç yıldız Stefan'ın yarı finallerde yerini koruyan oyuncu Boris'i yenme olasılığını tartışıyordu. Diğer yarı final maçında Ivan, Pete'le oynayacaktı. Şöyle dedi,

Stefan'ın Boris'i yenme olasılığı %40'tır.

Ya da şöyle demiş olabilir,

Stefan'ın kazanma şansı 0,4'tür.

Bunlar *kategorik* ifadelerdir, bunlar hakkında konuşurken eğer ve fakat gibi şeyler söylemeyiz. Ivan'ın şöyle bir fikri de olabilirdi:

Şüphesiz ben kendi yarı final maçımı kazanacağım; fakat kaybedecek olsaydım, bu durumda Stefan finalde benimle oynamayacağını düşünerek biraz daha rahatlardı ve daha iyi oynardı; bundan dolayı da Stefan'ın Boris'i yenme şansı yarı yarıya (50-50) olurdu.

İşte bu, Ivan'ın diğer yarı finali kaybetmesi *koşuluna* bağlı olarak, Stefan'ın yarı final maçını kazanma olasılığıdır. Buna *koşullu olasılık* diyoruz. Size başka birkaç örnek daha:

Kategorik: Bir önceki kış çok yoğun kar yağışı olduğundan, önümüzdeki yaz ovada bereketli buğday hasadı olma olasılığı.

Koşullu: Bir önceki kışta çok yoğun kar yağışı olduğu dikkate alındığında, önümüzdeki yaz ovada bereketli buğday hasadı olma olasılığı.

Kategorik: İyi karılmış standart bir deste kâğıttan (hangi kâğıdın önce çekildiğinden bağımsız olarak) ikinci kâğıdı as çekme olasılığı.

4 as ve 52 kâğıt vardır, bunlardan herhangi birisi ikinci kâğıt olarak gelebilir. O halde ikinci kâğıt olarak bir as çekme olasılığı $4/52 = 1/13$ olmalıdır.

Koşullu: Dağıtılan birinci kâğıdın papaz olması koşuluyla ikinci kâğıdın as olarak dağıtılması olasılığı.

Önce papaz dağıtılırsa, geriye 51 kâğıt kalır. Hâlâ destede 4 as var, o halde *koşullu olasılık* $4/51$ 'dir.

Koşullu: Dağıtılan birinci kâğıdın as olması koşuluyla ikinci kâğıdın as olarak dağıtılması olasılığı.

Önce as dağıtılırsa, geriye 51 kâğıt, fakat sadece 3 as kalır, o halde *koşullu olasılık* $3/51$ 'dir.

GÖSTERİM

Kategorik olasılık şu şekilde temsil edilir:

$\Pr()$

Koşullu olasılık şu şekilde temsil edilir:

$\Pr(/)$.

Kategorik olasılığa örnekler:

$\Pr(\text{S finali kazanır}) = 0,4$.

$\Pr(\text{dağıtılan ikinci kâğıt astır}) = 1/13$.

Koşullu olasılık örnekleri:

$\Pr(S \text{ yarı final kazanır} / I \text{ yarı finali kaybeder}) = 0,5$.

$\Pr(\text{dağıtılan ikinci kâğıt astır} / \text{dağıtılan birinci kâğıt bir pa-
pazdır}) = 4/51$.

BİNGO OYUNU*

Bingo oyuncularını koşullu olasılık hakkında bilgiye sahiptirler.

Bir bingo oyununda, 25 kareyle 5×5 kâğıdınız vardır. Her kare 1'den 99'a kadar farklı sayılarla işaretlenmiştir. Oyunu takdim eden kişi torbadan topları çekiyor. Sizin kâğıtta bulunan bir numaranın her çekilişinde, karenizdeki ilgili yeri dolduruyorsunuz. Bütün bir sütunu, satırı ya da köşegeni doldurduğunuzda siz kazanıyorsunuz (BINGO!).

Bingo oyuncularını oyuna başladıklarında oldukça rahatırlar. Bir sırayı yakında tamamlama olasılıkları küçüktür. Fakat satırı doldurmaya başladıkça heyecanları artar, çünkü kazanmalarının koşullu olasılığı o kadar küçük değildir.

PARK CEZALARI

Gece evimin yanında park ederseniz ve o blokta yaşamıyorsanız, gece park izniniz olmadığı için size ceza kesilebilir. Cezası 20 dolar olacaktır. Fakat o cadde ortalama olarak haftada bir defa kontrol ediliyor.

Ceza alma olasılığı nedir?

Görünen o ki o caddede hiçbir zaman arka arkaya iki gece kontrol yapılmamış. Bu caddede geçen akşam ceza almış olma *koşuluna bağlı olarak* bu gece ceza alma olasılığı nedir?

KOŞULLU OLASILIĞIN TANIMI

Koşullu olasılığın çok kullanışlı bir tanımı vardır. Önce ne olduğunu söyleyelim, sonra da nasıl işlediğini anlatalım.

$\Pr(B) > 0$ iken

* Tombala da bingo oyununun bir çeşididir. İnternetteki çeşitli bingo oyun sitelerinden detaylı açıklamalar edinebilirsiniz -çn.

$$\Pr(A/B) = \Pr(A \& B) / \Pr(B)$$

$\Pr(B)$ pozitif bir sayı olmalıdır, çünkü sıfıra bölemeyiz. Fakat bu tanımın geriye kalan kısmı neden akla yatkındır? Vereceğimiz birkaç örnek bunun nedenini ortaya çıkaracaktır.

KOŞULLU ZAR

Adil bir zar düşünün. Zarın üstte kalan yüzü 2, 4 ya da 6 gelirse attığımız zarın sonucu çift sayıdır deriz.

İşte size bir koşullu olasılık:

$$\Pr(6/\text{çift sayı})$$

İngilizcede günlük dilde söylendiği haliyle:

Çift sayı atmamız koşuluyla 6 atmamızın olasılığı.

Çift sayı gelmek koşuluyla, altı gelmesinin koşullu olasılığı.

Adil bir zarla, aynı sıklıkla 2, 4 ve 6 atarız. Öyleyse çift sayı geldiğinde 6 gelmesinin olasılığı üçte birdir.

$$\Pr(6/\text{çift sayı}) = 1/3.$$

Bu bizim tanımımıza uyar, çünkü

$$\Pr(6 \& \text{çift sayı}) = \Pr(6) = 1/6.$$

$$\Pr(\text{çift sayı}) = 1/2$$

$$\Pr(6/\text{çift sayı}) = (1/6)/(1/2) = 1/3.$$

ÇAKIŞMALAR

Şimdi de sonuçların *çakışmasını* içeren daha karmaşık bir soruyu soralım. M zarın 1 ya da (2, 3, 5) asal sayılarından birinin geldiği bir durumu ifade etsin. Böylece zar 1, 2, 3 ya da 5 geldiğinde M durumu oluşur.

$\Pr(\text{çift sayı} / M)$ nedir?

Tek çift sayı olan asal sayı 2'dir. $M(1, 2, 3, 5)$ atmanın 4 yolu vardır. Böylece zar adılse,

$$\Pr(\text{çift}/M) = 1/4 \text{ olur.}$$

Bu bizim tanımımıza uyar, çünkü

$$\Pr(\text{çift} \& M) = 1/6.$$

$$\Pr(M) = 4/6.$$

$$\Pr(\text{çift}/M) = (1/6)/(4/6) = 1/4.$$

İYİ KARILMIŞ KÂĞITLAR

Dağıtanın üstteki kâğıdı dağıttığı 52 kâğıtlık iyi karılmış standart bir desteyi düşünün. Yeni dağıttığı en üstteki kâğıdın *ya* kırmızı *ya da* sinek olduğunu söylüyor. Ama bunlardan hangisi olduğunu söylemiyor. Bu bilgiye $R \vee C$ diyelim.

Sinekler siyahtır. Destede 13 sinek var ve diğer 26 kart da kırmızı. Bize ilk kâğıdın $R \vee C$ olduğu söyleniyor. Bunun bir as olma olasılığı nedir? $\Pr(A/R \vee C)$ nedir? $A \& (R \vee C)$ sinek ası *ya da* karo veya kupa asına denktir. Bu da toplamda 3 eder. Yani 39 $R \vee C$ kâğıdının 3'ü astır.

Böylece koşullu olasılığı:

$$\Pr[A/(R \vee C)] = 1/13 \text{ olur.}$$

Bu da tanımımıza uyar:

$$\Pr[A \& (R \vee C)] = 3/52$$

$$\Pr(R \vee C) = 39/52$$

$$\Pr[(A/(R \vee C))] = \frac{\Pr[A \& (R \vee C)]}{\Pr(R \vee C)} = 3/39 = 1/13$$

ÇEKİLİŞ KUTULARI

Her birinin içerisinde kırmızı ve yeşil topların olduğu iki çekiliş kutusu hayal edin. A çekiliş kutusunun %80'i kırmızı top, %20'siyse yeşil toptur ve B çekiliş kutusunun %60'ı yeşil top, %40'ıysa kırmızı toptur. Rastgele bir çekiliş kutusu seçiyorsunuz. Bu A mı, yoksa B midir? Şimdi çekiliş kutusundan top çekelim ve bu bilgiyi bunun hangi çekiliş kutusu olduğunu tahmin etmek için kullanalım. Her çekilişten sonra, çekilen top *yerine geri konur*. Böylece her çekiliş için, A'daki çekiliş kutusundan kırmızı almanın olasılığı 0,8 ve B'deki çekiliş kutusundan kırmızı almanın olasılığıysa 0,4'tür.

$$\Pr(R/A) = 0,8$$

$$\Pr(R/B) = 0,4$$

$$\Pr(A) = \Pr(B) = 0,5$$

Kırmızı bir top çekiyorsunuz. *Dikkatli Öğrenci* gibiyseniz, bu durum sizin bunun A çekiliş kutusu olduğuna şüphe etmenize neden olabilir (A çekiliş kutusunda yeşil toplardan daha fazla kırmızı top vardır). Bu sadece bir önsezdır. Şimdi daha kesin konuşalım.

$\Pr(A/R)$ 'yi bulmak istiyoruz, bu da $[\Pr(A \& R)] / [\Pr(R)]$ 'dir.

Kırmızı bir topu ya A çekiliş kutusundan ya da B çekiliş kutusundan alabilirsiniz. Kırmızı topu ya $A \& R$ olayı olunca ya da $B \& R$ olayı olunca alabilirsiniz. R olayı böylece $(A \& R)$ v $(B \& R)$ ile özdeştir.

İki alternatif $(A \& R)$ ve $(B \& R)$, birbirlerini karşılıklı olarak dışlarlar, onun için de olasılıkları toplayabiliriz.

$$\Pr(R) = \Pr(A \& R) + \Pr(B \& R) [1]$$

B çekiliş kutusunu alma olasılığı 0,5'tir; oradan kırmızı bir top alma olasılığı 0,4'tür, öyleyse her ikisinin meydana gelme olasılığı

$$\Pr(B \& R) = \Pr(R \& B) = \Pr(R/B)\Pr(B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2.$$

Aynı şekilde,

$$\Pr(A \& R) = 0,8 \times 0,5 = 0,4.$$

Bunları yukarıdaki [1] formülünün içerisine yerleştirince

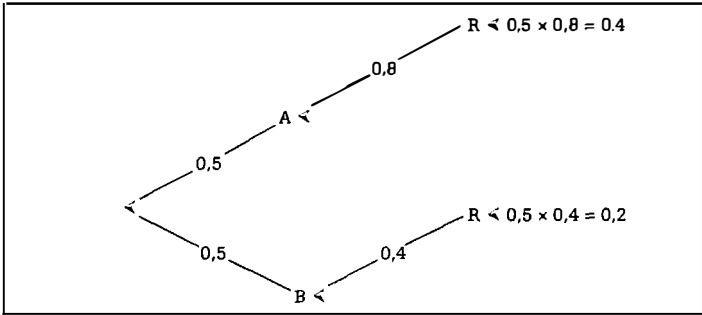
$$\Pr(R) = \Pr(A \& R) + \Pr(B \& R) = 0,4 + 0,2 = 0,6.$$

$$\text{Böylece } \Pr(A/R) = \Pr(A \& R)/\Pr(R) = (0,4)/(0,6) = 2/3.$$

SAĞLAMASINI YAPMAK İÇİN HESAPLAMALARIN ÇİZİMİ

Hesaplamayı dallara ayrılan bir ağaç olarak gözünüzün önüne getirmek faydalı olabilir. Paramız ve iki çekiliş kutusuyla başlıyoruz. Kırmızı bir topa nasıl ulaşabiliriz? İki yol var.

Tura atarız (olasılığı 0,5), bize A çekiliş kutusunu verir. Sonra kırmızı bir top çekebiliriz (olasılığı 0,8). Bu burada üstteki dalda gösterilen yoldur.



Yine yazı atıp, B çekiliş kutusuna giderek ve sonra da alttaki dalda gösterildiği gibi kırmızı bir top çekerek bir R alabiliriz.

İki dalın birinde R'ye ulaşırız. O halde R ile bitirmenin toplam olasılığı her dalın sonundaki olasılıkların toplamıdır. Bu da $0,4 + 0,2 = 0,6$ yapar.

A dalını takip ederek R'ye ulaşma olasılığı 0,4'tür.

Böylece A yoluyla sizi R'ye ulaştıran olasılığın o kısmı, yani $\Pr(A/R) = 0,4/0,6 = 2/3$ 'tür.

MODELLER

Şimdiye kadarki bütün örneklerimiz zarlar, iskambil kâğıtları, çekiliş kutularıydı. Şimdi daha ilginç vakalara, gerçek hayata daha çok benzeyen vakalara geçiyoruz. Her birinde durumun bir modelini yapacağız ve gerçek hayat hikâyesinin standart top ve çekiliş kutusu örneği tarafından modellendiğini söyleyeceğiz.

AMORTİSÖRLER

Bir otomobil fabrikası iki yerel tedarikçiden, Bolt & Co. ve Acme Inc'ten amortisör satın alınması için sözleşme yaptı. Bolt %40'ını ve Acme de %60'ını tedarik ediyor. Bütün amor-

tisörler kalite kontrolden geçiyor. Geçenlere güvenilir deniyor.

Acme amortisörlerinin %96'sı testte sağlam çıktı. Fakat Bolt'un hattında bazı sorunlar var ve son zamanlarda da Bolt'un amortisörlerinin yalnızca %72'si testte sağlam çıktı.

Rastgele seçilen bir amortisörün testte sağlam çıkma olasılığı nedir?

Sezgisel tahmin: Olasılık 0,96'dan düşük olacaktır, çünkü Acme'nin ürünü Bolt'tan gelen amortisörlerin belirli bir oranıyla etkisizleştirilecektir. Olasılık 0,96 ile 0,72 arasında olmalı ve 0,96'ya daha yakın olmalıdır. Fakat ne kadar?

Çözüm

A: Rastgele seçilen ve Acme tarafından yapılan amortisör

B: Rastgele seçilen ve Bolt tarafından yapılan amortisör

R: Rastgele seçilen ve sağlam olan amortisör olsun.

$$\Pr(A) = 0,6 \quad \Pr(R/A) = 0,96 \quad \text{O halde, } \Pr(R \& A) = 0,576.$$

$$\Pr(B) = 0,4 \quad \Pr(R/B) = 0,72 \quad \text{O halde, } \Pr(R \& B) = 0,288.$$

$$R = (R \& A) \vee (R \& B)$$

$$\text{Cevap: } \Pr(R) = (0,6 \times 0,96) + (0,4 \times 0,72) = 0,576 + 0,288 = 0,864.$$

Daha ilginç bir soru sorabiliriz.

Bolt tarafından yapılmış, test edilen ve sağlam olduğu anlaşılan, rastgele seçilmiş bir amortisörün koşullu olasılığı nedir?

Sezgisel tahmin: Sayılara bakınız. Otomobil fabrikası Bolt'tan satın aldığından daha fazla amortisörü Acme'den satın alıyor. Ve Bolt'un amortisörleri Acme'ninkilere göre daha az güvenilir. Bu iki kanıt parçası Bolt tarafından yapılan, rastgele seçilmiş, güvenilir bir amortisörün tersine bir kanıt sunmaktadır. Amortisörün Bolt'tan olma olasılığının 0,4'ten daha düşük olduğunu tahmin ediyoruz. Ama ne kadar düşük?

Çözüm

$\Pr(B/R)$ gerekli.

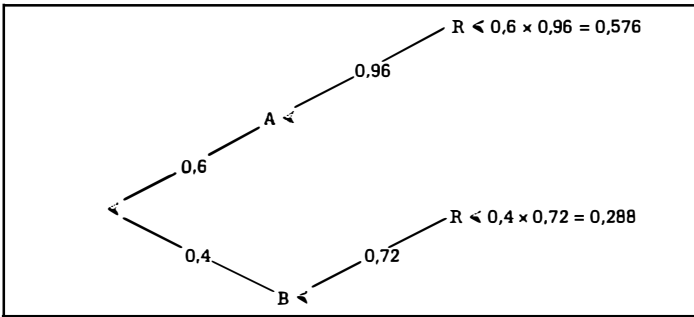
$$\text{Tanımla, } \Pr(B/R) = \Pr(B \& R) / \Pr(R) = 0,288 / 0,864 = 1/3.$$

Aslında, bunu herhangi bir çarpma işlemi yapmadan yapmak isteyebilirsiniz, çünkü neredeyse bütün sayılar birbirini götürüyor:

$$\frac{0,4 \times 0,72}{(0,4 \times 0,72) + (0,6 \times 0,96)} = 1/3$$

Cevaplar: $\Pr(B/R) = 1/3$.

SAĞLAMASINI YAPMAK İÇİN ÇİZELİM



$$\Pr(R) = 0,576 + 0,288 = 0,864. \Pr(B/R) = 1/3$$

HALTERCİLER

Belirli bir ülkenin iki halter takımı olduğunu ve bunlardan herhangi birisini uluslararası bir yarışmaya gönderebileceğini öğreniyorsunuz. Takımlardan birinin (Steroid takımı) elemanlarından %80'i düzenli olarak steroid kullanıyor, fakat diğer takımın (Daha Temiz takım) elemanlarının sadece %20'si düzenli olarak steroid kullanıyor. Baş antrenör hangi takımın gönderileceğine karar vermek için adil bir parayla yazı-tura atıyor.

Yarışmaya katılacak takımın bir elemanına rastgele bir test yapılıyor. Epeydir steroid kullanıyor.

İdrar testiyle steroid kullandığı tespit edilen bir üye verildiğinde, yarışmaya katılan takımın Steroid takımı olmasının koşullu olasılığı nedir? Yani, $\Pr(S/U)$ nedir?

Çözüm

S: Koç Steroid takımını gönderiyor

C: Koç Daha Temiz takımını gönderiyor

U: Rastgele seçilen bir eleman steroid kullanıyor olsun.

$$\Pr(S) = 0,5 \quad \Pr(U/S) = 0,8 \quad \Pr(U \& S) = 0,4$$

$$\Pr(C) = 0,5 \quad \Pr(U/C) = 0,2 \quad \Pr(U \& C) = 0,1$$

$$U = (U \& S) \vee (U \& C) \quad \Pr(U) = 0,4 + 0,1 = 0,5$$

$$\Pr(S/U) = [\Pr(S \& U)] / [\Pr(U)] = 0,4 / 0,5 = 0,8$$

Cevap: $\Pr(\text{Steroid takımı/seçilen eleman steroid kullanıyor}) = 0,8$.

Rastgele steroid kullanan bir takım elemanı seçmemiz olgusu bunun steroid takımı olduğuna dair oldukça iyi bir kanıt sunuyor.

ARKA ARKAYA İKİ KERE: YERİNE KOYARAK

Tekrar yukarıdaki çekiliş kutusuna dönelim. Rastgele bir çekiliş kutusu seçtiğinizi ve *yerine koyarak* iki çekiliş yaptığınızı farz edin. Kırmızı geliyor ve sonra tekrar kırmızı geliyor. $P(A/K_1 \& K_2)$ nedir?

K_1 çekilen birinci topun kırmızı olduğu olay ve K_2 de çekilen ikinci topun kırmızı olduğu olay olsun. Bu durumda $\Pr(A \& K_1 \& K_2)$ 'yi aşağıdaki şekilde çözebilirsiniz:

$$\frac{\Pr(A \& K_1 \& K_2)}{\Pr(K_1 \& K_2)}$$

Şimdi biliyoruz ki

$$\Pr(A \& K_1 \& K_2) = \Pr(K_2 / A \& K_1) \Pr(A \& K_1) = 0,8 \times 0,4 = 0,32$$

$$\text{Aynı şekilde, } \Pr(B \& K_1 \& K_2) = 0,08$$

$$\Pr(K_1 \& K_2) = \Pr(A \& K_1 \& K_2) + \Pr(B \& K_1 \& K_2) = 0,32 + 0,08 = 0,4$$

$$\Pr(A \& K_1 \& K_2) = 0,32 / 0,4 = 4/5 = 0,8$$

Bir adet kırmızı top çekmemiz verildiğinde

A çekiliş kutusunun koşullu olasılığı $2/3$ 'tür,

yerine koyup ikinci bir top çektiğimizde ve bu da kırmızı çıktığında

A çekiliş kutusunun koşullu olasılığı 0,8'dir.

Böylece ikinci kırmızı top, bunun A çekiliş kutusu olma "koşullu olasılığını arttırır." Fazladan gelen kırmızı top daha fazla *kanıt* olarak değerlendirilebilir.

Bu da daha fazla kanıt elde ederek *tecrübeyle nasıl öğrendiğimizi* anlatıyor.

TEKRARDAN KUMARBAZIN YANILGISI

Yanılan Kumarbaz adil (hilesiz, bağımsız denemeler) bir rulet tekerleğinin arka arkaya 12 defa siyah geldiğini gördüğünde "tecrübeden öğrenebileceğini" düşündü. Yani şöyle düşündü:

$$\Pr(13. \text{ denemede kırmızı/arka arkaya 12 siyah}) > 1/2.$$

Fakat denemeler bağımsızken, bu olasılık

$$\frac{\Pr(SSSSSSSSSSSSSK)}{\Pr(SSSSSSSSSSSSS)} = \frac{(\frac{1}{2})^{13}}{(\frac{1}{2})^{12}} = 1/2$$

Bu da kumarbazın yanılığını anlamanın yeni bir yoludur.

İKİ HALTERCİ: YERİNE KOYMADAN

Tekrar haltercilere dönelim. Koçun adil bir parayı yazı-tura atarak rastgele seçtiği bir takımdan rastgele iki halterciyi test ettiğimizi farz edin. Şöyle düşüyoruz: İki haltercinin testi de pozitif çıkarsa, bu durum bunun steroid takımı olduğuna dair oldukça iyi bir kanıttır. Olasılık bu önseziyi teyit ediyor.

Takımdan yerine koymadan örneklem alıyoruz. Böylece diyelim ki bir takımda 10 üye var. Rastgele 2 üyeyi test ediyoruz.

S: Koç Steroid takımını gönderiyor

C: Koç Daha Temiz takımını gönderiyor

U_1 : Rastgele seçilen birinci eleman steroid kullanıyor

U_2 : Rastgele seçilen ikinci eleman steroid kullanıyor

olsun.

Takım, steroid takımıysa, test edilen birinci kişinin steroid kullanma olasılığı 0,8'dir (yukarıda $\Pr(U/S) = 0,8$ idi). Steroid kullanan iki kişi seçme olasılığı nedir?

Tek bir kullanıcı seçmenin olasılığı $4/5$ 'tir. Birinci kişi seçildikten ve kullanıcı olduğu anlaşıldıktan sonra, geriye 9 takım üyesi kalıyor, bunların 7'si de steroid kullanıyor. O halde bir sonraki testte bir kullanıcı seçme olasılığı $7/9$ 'dur. Böylece Steroid takımından seçilen ilk iki kişinin steroid kullanma olasılığı $4/5 \times 7/9 = 28/45$ 'tir.

Aynı şekilde, daha temiz takımdan seçilen ilk iki kişinin steroid kullanma olasılığı $1/5 \times 1/9 = 1/45$ 'tir.

Rastgele seçilen iki takım üyesinin steroid kullanıcıları olduğu bir durumda koçun steroid takımını gönderme olasılığı

$$\Pr(S \& U_1 \& U_2) = 0,5(28/45) = 28/90$$

$$\text{Aynı şekilde, } \Pr(C \& U_1 \& U_2) = 0,5(1/45) = 1/90.$$

$$\Pr(U_1 \& U_2) = \Pr(S \& U_1 \& U_2) + \Pr(C \& U_1 \& U_2) = 29/90.$$

$$\Pr(S/U_1 \& U_2) = \frac{\Pr(S \& U_1 \& U_2)}{\Pr(U_1 \& U_2)} = 28/29 > 0,96$$

Steroid kullanıcısı olan bir halterciyi rastgele seçmemiz verildiğinde, bunun steroid takımından olma koşullu olasılığı 0,8; steroid kullanıcısı olan ikinci bir halterciyi de rastgele seçmemiz verildiğinde, bunun steroid takımından olma koşullu olasılığı $> 0,96$ 'dır.

Steroid kullanan iki elemanı seçmemiz koçun steroid takımını seçtiğinin güçlü bir *kanıtıdır*.

ALIŞTIRMALAR

- 1 *Tenis hakkında sahte kesinlik.* Gerçek hayatta, tenis hakkındaki gazete haberi Ivan'ın "%40" olasılığı belirtmesini değil de,

Yarı finallerde Stefan'ın Boris'i yenme olasılığının sadece %37,325 olduğunu belirttiğini alınıyor.

Bu kesin yüzdeden herhangi mantıklı bir şey çıkarabilir misiniz?

- 2 *Isı lambaları.* *Tropicana* ısı lambalarının bir parti üretiminin %3'ü kalite standartlarının altındadır. Bir parti *Florida* ısı lambası üretiminin %6'sı kalite standartlarının altındadır. Bir elektrikçi, ısı lambalarının %40'ını *Tropicana*'dan ve %60'ını *Florida*'dan satın alır.
 - (a) Mağazadan rastgele alınan bir lambanın *Tropicana* tarafından yapılmış ve kalite standartlarının altında olma olasılığı nedir?
 - (b) Mağazadan rastgele alınmış bir lambanın kalite standartlarının altında olma olasılığı nedir?
 - (c) Bu mağazadan alınan ve kalite standartlarının altında olan bir lambanın *Tropicana* tarafından yapılmış olma olasılığı nedir?
- 3 *Üçgen.* Eski bir sanayi şehrinin üçgen-şekilli hastalıklı bir bölgesinde bir zamanlar oldukça fazla miktarda kimyasal endüstri vardı. Şehirdeki çocukların %2'si üçgenin içinde yaşıyorlar. Yapılan testlerde bunların %14'ünün dokularında gereğinden fazla zehirli metal olduğu tespit edildi. Şehirde üçgen içinde yaşamayan çocuklarda bu oran sadece %1'dir.
 - (a) Şehirde yaşayan, rastgele seçilen bir çocuğun hem üçgen bölge içinde yaşaması, hem de testinin pozitif çıkma olasılığı nedir?
 - (b) Şehirde yaşayan, rastgele seçilen bir çocuğun testinin pozitif çıkma olasılığı nedir?
 - (c) Rastgele seçilen, testi pozitif çıkan bir çocuğun üçgen bölge içinde yaşama olasılığı nedir?
- 4 *Taksiler.* Taksiler sorusu için bir ağaç şeması çizin, bahis sorusu 5.

- 5 *Laplace'ın şaşırtma sorusu.* Geriye gidip Laplace'ın sorusuna tekrar bakın (*bkz.* 4. bölüm). Bir deney, bir çekiliş kutusu seçmek için parayla yazı-tura atma, sonra bir top çekme, topun rengini kaydetme, topu yerine geri koyma ve başka bir top çekme ve topun rengini kaydetmeden oluşur. Pr(çekilen ikinci top kırmızıdır/birinci çekilen top kırmızıdır) ifadesini bulun.
- 6 *Soruyu anlamak.* Laplace'ın şaşırtma sorusunu anlamak için bulduğumuz bir yolla 4. bölümü bitirdik. 6. soruya verdiğiniz cevap Laplace'ın sorusunun anlaşılmasına nasıl yardımcı olur?

GÖZDEN GEÇİRMENİZ İÇİN ANAHTAR KELİMELER

Kategorik	Koşullu olasılıkların hesaplanması
Koşullu	Modeller
Koşullu olasılığın tanımı	Tecrübeden öğrenmek

6. Olasılığın Temel Kuralları

Bu bölümde olasılıkları toplamak ve çarpmak üzere kullanmış olduğunuz kurallar ve koşullu olasılığı kullanmak üzere başvurduğunuz kurallar özetlenmektedir. Bu bölüm ayrıca size kuralları anlamanız için şekillerle bir yol sunmaktadır.

Aşağıdaki kurallar temel olasılık kuramının standart aksiyomlarının biçimsel olmayan versiyonudur.

VARSAYIMLAR

Burada belirtilen kurallar bazı hususları önceden doğru olarak kabul eder:

- Kurallar sonlu önerme grupları (ya da olaylar) içindir.
- A ve B önermeyse (ya da olaysa), bu durumda $A \vee B$, $A \& B$ ve $\sim A$ da öyledir.
- Temel tündengelim mantığı (ya da temel küme kuramı) önceden kabul edilmiştir.
- A ve B *mantıksal olarak denkse*, bu durumda $\Pr(A) = \Pr(B)$. [Ya da küme kuramında A ve B olayları ispat edilebilecek şekilde aynı olaylar dizisiyse, $\Pr(A) = \Pr(B)$.]

NORMALLİK

Herhangi bir A önermesi ya da olayının olasılığı 0 ile 1 arasındadır.

$$(1) \quad 0 \leq \Pr(A) \leq 1$$

Neden “normallik” adını veriyoruz? Bir ölçüm 0 ile 1 arasındaki bir ölçeğe konuyorsa bu ölçüm normalizedir denir.

KESİNLİK

Olmasından emin olunan olayın olasılığı 1’dir. Kesinlikle doğru olan bir önermenin olasılığı 1’dir.

$$(2) \quad \begin{aligned} \Pr(\text{kesin önerme}) &= 1 \\ \Pr(\text{emin olay}) &= 1 \end{aligned}$$

Kesinliği temsil etmek üzere çoğu zaman Yunan harfi Ω kullanılır: $\Pr(\Omega) = 1$.

TOPLANABİLİRLİK

İki olay ya da önerme A ve B birbirlerini dışarlarsa (ayrık, birbirine uyumsuz), birinin ya da diğerinin meydana gelme (ya da doğru olma) olasılığı bu iki olayın olasılıklarının toplamıdır.

$$(3) \quad \begin{aligned} &\text{A ve B birbirini dışlıyorsa, bu durumda} \\ &\Pr(A \vee B) = \Pr(A) + \Pr(B). \end{aligned}$$

ÇAKIŞMA

A ve B birbirini dışlamadıkları zaman, bu ikisinin çakışmasının olasılığını çıkarmamız gerekir. Birazdan bunu kural (1)-(3)'ten *elde edeceğiz*.

$$(4) \quad \Pr(A \vee B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \& B)$$

KOŞULLU OLASILIK

Tek temel kural (1)-(3)'tür. Şimdi *tanımı* verelim.

$$(5) \quad \Pr(B) > 0 \text{ ise, o halde } \Pr(A/B) = \frac{\Pr(A \& B)}{\Pr(B)}$$

ÇARPMA

Koşullu olasılık tanımı şunu ima eder:

$$(6) \quad \Pr(B) > 0 \text{ ise, } \Pr(A \& B) = \Pr(A/B) \Pr(B).$$

TOPLAM OLASILIK

Koşullu olasılığın tanımının başka bir sonucuysa şudur:

$$(7) \quad 0 < \Pr(B) < 1 \text{ ise, } \Pr(A) = \Pr(B) \Pr(A/B) + \Pr(\sim B) \Pr(A/\sim B).$$

Pratikte bu çok faydalı bir kuraldır. Bu dersten A notu alma olasılığınız nedir? Belki de sadece iki olasılık vardır: Çok sıkı çalışacaksınız ya da sıkı çalışmayacaksınız. O halde:

$$\Pr(A) = \Pr(\text{sıkı çalış})\Pr(A/\text{sıkı çalış}) + \Pr(\text{çalışma})\Pr(A/\text{çalışma}).$$

Kendinizi tarif edecek bazı sayılar koymaya çalışın.

MANTIKSAL SONUÇ

B mantıken A'yı gerektirdiğinde, bu durumda

$$\Pr(B) \leq \Pr(A) \text{ olur.}$$

Bu böyledir, çünkü B, A'yı içerdiğinde B mantıken A&B'ye denk olur. Çünkü

$$\Pr(A) = \Pr(A \& B) + \Pr(A \& \sim B) = \Pr(B) + \Pr(A \& \sim B),$$

$\Pr(A \& \sim B) = 0$ olması dışında $\Pr(A)$, $\Pr(B)$ 'den büyük olacaktır.

İSTATİSTİKSEL BAĞIMSIZLIK

Şimdiye kadar bağımsızlık hakkında konuşurken çok enformeldik. Şimdi çoğu zaman istatistiksel bağımsızlık denilen bir kavramın *tanımını* belirtelim.

(8) $0 < \Pr(A)$ ve $0 < \Pr(B)$ ise, bu durumda

A ve B ancak ve ancak

$\Pr(A/B) = \Pr(A)$ ise istatistiksel olarak bağımsızdırlar.

ÇAKIŞMA KURALININ İSPATI

$$(4) \quad \Pr(A \vee B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \& B).$$

Bu kural, mantıksal olarak eşdeğer olan önermelerin aynı olasılıkları olduğu (1)-(3) kurallarından ve 6. bölümün başındaki mantıksal varsayımdan çıkar.

$A \vee B$ mantıksal olarak şuna eşdeğerdir: $(A \& B) \vee (A \& \sim B) \vee (\sim A \& B)$ (*)

Neden? "Doğruluk tablolarına" aşına olanlar bunu kontrol edebilirler. Ama bunun böyle olduğunu doğrudan da görebilirsiniz. A mantıksal olarak $(A \& B)$ v $(A \& \sim B)$ 'ye eşdeğerdir. B mantıksal olarak $(A \& B)$ v $(\sim A \& B)$ 'ye eşdeğerdir.

Şimdi üç bileşen $(A \& B)$, $(A \& \sim B)$ ve $(\sim A \& B)$ karşılıklı olarak birbirlerini dışlarlar. (Neden?) Böylece (*) ifadesini kullanarak bunların olasılıklarını toplayabiliriz.

$$\Pr(A \vee B) = \Pr(A \& B) + \Pr(A \& \sim B) + \Pr(\sim A \& B) (**)$$

A mantıksal olarak $[(A \& B) \vee (A \& \sim B)]$ 'ye ve

B mantıksal olarak $[(A \& B) \vee (\sim A \& B)]$ 'ye eşdeğerdir.

O halde,

$$\Pr(A) = \Pr(A \& B) + \Pr(A \& \sim B).$$

$$\Pr(B) = \Pr(A \& B) + \Pr(\sim A \& B).$$

(**)'de bir şeyi toplamak ve sonra da çıkarmak bir şey fark ettirmeyeceğinden:

$$\Pr(A \vee B) = \Pr(A \& B) + \Pr(A \& \sim B) + \Pr(\sim A \& B) + \Pr(A \& B) - \Pr(A \& B)$$

Böylece

$$\Pr(A \vee B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \& B).$$

KURALLARIN KOŞULLANDIRILMASI

Koşullu formda temel kurallar (1)-(3) ve (5)'in yani koşullu olasılığın tanımının, hepsinin de geçerli olduğunu kontrol etmek kolaydır. Yani, $\Pr(A)$, $\Pr(B)$, $\Pr(A/B)$ ve bunun gibi ifadeleri $\Pr(A/E)$, $\Pr(B/E)$, $\Pr(A/B \& E)$ ve bunun gibi ifadelerle değiştirdiğimizde kurallar geçerli olmaktadır.

Normallik

$$(1C) \quad 0 \leq \Pr(A/E) \leq 1$$

Kesinlik

$\Pr(E) > 0$ iken, E için

(2C) $\Pr([emin \ olay]/E) = 1$ olduğunu kontrol etmemiz gerekir.

Şimdi E, mantıksal olarak gerçekleşmesinden emin olunan bir şeyle birlikte E'nin meydana gelmesine eşdeğerdir. Böylece,

$$\Pr(\text{emin olay} \& E) = \Pr(E).$$

$$\Pr(\text{emin olay}/E) = [\Pr(E)] / [\Pr(E)] = 1.$$

Toplanabilirlik

$\Pr(E) > 0$ olsun. A ve B karşılıklı olarak birbirini dışlıyorsa, bu durumda

$$\Pr[(A \vee B)/E] = \Pr[(A \vee B) \& E] / \Pr(E) = \Pr(A \& E) / \Pr(E) + \Pr(B \& E) / \Pr(E).$$

$$(3C) \Pr[(A \vee B)/E] = \Pr(A/E) + \Pr(B/E).$$

Koşullu olasılık

Bu dikkatlice incelemeniz gereken tek vakadır. (5)'in koşullu formu:

(5C) $\Pr(E) > 0$ ve $\Pr(B/E) > 0$ ise, bu durumda

$$\Pr[A/(B \& E)] = \frac{\Pr[(A \& B)/E]}{\Pr(B/E)}$$

(5)'ten başlayarak bunu ispatlarız,

$$\Pr[A/(B \& E)] = \frac{\Pr(A \& B \& E)}{\Pr(B \& E)}$$

Pay (kesrin üst tarafı) $\Pr(A \& B \& E) = \Pr[(A \& B)/E] \times \Pr(E)$

Payda (kesrin alt tarafı) $\Pr(B \& E) = \Pr(B/E) \times \Pr(E)$

Payı paydaya bölersek, (5C)'yi elde ederiz.

Çoğu filozof ve tümevarım mantıkçısı kategorik olasılıktan ziyade koşullu olasılığı ilkel olan düşünce olarak ele almaktadırlar. O halde onların temel kuralları (1C), (2C), (3C) ve (5C)'nin versiyonlarıdır. Formel olarak, nihai sonuçları bütün gerekli anlamlarıyla bizim kategorik olasılıkla başlayıp sonra koşullu olasılığı tanımladığımız yaklaşımla özdeştir. Fakat bu kuralların çeşitli anlamlarını sorgulamaya başladığımızda koşullu olasılık yaklaşımının bazen daha anlamlı geldiğini görüyoruz.

TEKRAR İSTATİSTİKSEL BAĞIMSIZLIK

Bağımsızlığı ilk sezgisel açıklayışımızda (*bkz.* 3. bölüm) bir şans kurgusundaki denemelerin ancak ve ancak bir denemenin sonuçlarının olasılıklarının önceki denemelerin sonuçlarından etkilenmedikleri zaman bağımsız olduğunu söylemiştik. Fakat bu durumda da "etkilenmenin" gerçekten ne anlama geldiği muallakta kalmaktadır. Ayrıca *rastgelelik*, denemelerin hiç *hafızasının* olmaması ve *bir kumar sisteminin imkânsızlığından* bahsettik. Bütün bunlar değerli metaforlardır.

Koşullu olasılık fikri bir kesin tanıımı mümkün kılar. A'nın olasılığı B verilmişken A'nın olasılığından, yani $\Pr(A/B)$ 'den, hiç farklı olmamalıdır.

Doğal olarak, bağımsızlık simetrik bir ilişki olmalıdır: A, B'den ancak ve ancak B, A'dan bağımsızsa bağımsızdır.

Başka bir deyişle, $0 < \Pr(A)$ ve $0 < \Pr(B)$ iken:

$\Pr(A/B) = \Pr(A)$ ise, bu durumda $\Pr(B/A) = \Pr(B)$ (ve tersi) olmasını bekleriz.

Bu yukarıdaki tanım (8)'den ispatlanır.

Farz edin ki $\Pr(A/B) = \Pr(A)$.

(5) ile $\Pr(A) = [\Pr(A \& B)] / [\Pr(B)]$.

Ve böylece $\Pr(B) = [\Pr(A \& B)] / [\Pr(A)]$.

O halde, $A \& B$ mantıken $B \& A$ 'ya denk olduğundan,

$\Pr(B) = \Pr(B \& A) / \Pr(A) = \Pr(B/A)$.

ÇOKLU BAĞIMSIZLIK

Tanım (8) bir çift önermenin istatistiksel bağımsızlığını tanımlar. Buna "ikili" bağımsızlık denir. Fakat bütün bir grup olay ya da önerme karşılıklı olarak bağımsız olabilir. Bu düşüncüyü kolayca tanımlayabiliriz.

(6) ve (8)'den A ve B istatistiksel olarak bağımsızken:

$\Pr(A \& B) = \Pr(A)\Pr(B)$ olduğu ortaya çıkar.

(*Bkz.* alıştırma 3.) Bu, herhangi bir sayıdaki olayın istatistiksel bağımsızlığı için genelleştirilebilir. Örneğin A, B ve C

ancak ve ancak A, B ve C ikili olarak bağımsızsa istatistiksel olarak bağımsızdır ve

$$\Pr(A \& B \& C) = \Pr(A)\Pr(B)\Pr(C)$$

VENN ŞEMALARI

John Venn (1824–1923) 1866'da görelî frekanslar cinsinden olasılıkların ilk sistematik kuramını yayımlayan bir İngiliz mantıkçısıydı. Çoğu insan onu sadece tûmdengelim mantığındaki "Venn şemalarıyla" hatırlar. Venn şemaları *bütün*, *bazı* ve *hiç* gibi niceleyicileri içeren *tûmdengelim* argümanlarını temsil etmek üzere kullanılmıştır.

Olasılık ilişkilerini temsil etmek için Venn şemalarını da kullanabilirsiniz. Bu çizimler bazı insanların uzaysal ya da resimsel olarak düşünmelerine yardımcı olur.

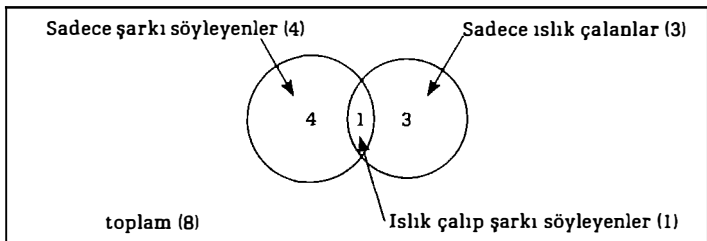
Sekiz müzisyeniniz olduğunu hayal edin:

Bunların dördü başka hiçbir müziksel yeteneği olmayan şarkıcıdır.

Üçü ıslık çalabilir fakat şarkı söyleyemez.

Biri hem ıslık çalar hem de şarkı söyler.

Bir Venn şeması daireler kümesi kullanarak bu grubu resmedebilir. Her sınıf için bir daire kullanılmıştır. Sınıflar çakıştığından daireler de çakışır. Şemamız aşağıdakine benzer:



Şekil 6.1

Şarkıcıları temsil eden dairede beş birim varken (dört şarkıcı artı bir şarkıcı & ıslık çalan), ıslık çalanları temsil eden dairede dört birim vardır (üç ıslık çalan artı bir şarkıcı & ıslık çalan). Çakışan bölgenin bir birimlik bir alanı vardır çünkü sekiz kişiden sadece birisi her iki kategoriye de girer. Her kısmın alanının o kısımdaki insan sayısına orantılı olduğunu düşünceğiz.

Şimdi, rastgele, sekiz kişilik gruptan bir şarkıcı seçmek olasılığıyla ilgilendiğimizi düşünelim. Sekiz kişilik grupta beş şarkıcı olduğundan, cevap $5/8$ 'dir.

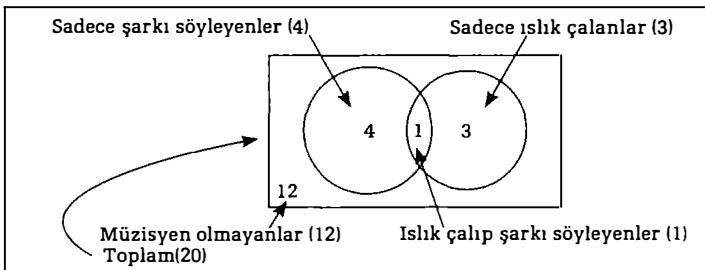
Seçilen kişinin aynı zamanda ıslık çalan birisi olması koşuluyla bir şarkıcı seçme olasılığı nedir? Seçilen kişinin ıslık çalan birisi olduğunu bildiğinizden, bu durum grubu ıslık çalanlar dairesiyle sınırlar. Orada dört kişi vardır. Dördün sadece biri, şarkıcılar dairesinin içindedir. Böylece sadece dört olası seçimden birisi şarkıcıdır. O halde, şarkıcının aynı zamanda ıslık çalan birisi olması koşuluyla bir şarkıcı seçilme olasılığı $1/4$ 'tür.

Şimdi örneği genelleştirelim. 20 kişi olacak şekilde bir odaya 12'si müzikle ilgisi olmayan insanla birlikte 8 müzisyenimizi koyalım. Aşağıdaki iki olayla ilgilendiğimizi hayal edin:

Olay A = bütün gruptan rastgele bir şarkıcı seçiliyor.

Olay B = bütün gruptan rastgele ıslık çalan birisi seçiliyor.

Bütün kutunun 20 kişiyle dolu odayı temsil ettiği durumu gösteren Venn şeması aşağıdadır.



Şekil 6.2

Önceki şemaya göre oluşan büyük değişikliğe dikkat edin: Şekil 6.2'de daireler dikdörtgenle çevrilmiştir. Uzlaşım ile dikdörtgenin alanı 1 olarak belirlenmiştir. Dairelerden her birinin alanı o dairenin temsil ettiği türde bir olayın oluşma olasılığına karşılık gelir: A dairesinin alanı $5/20$ ya da $0,25$ 'tir, çünkü 20 kişi arasında 5 şarkıcı vardır. Aynı şekilde, B dairesinin alanı $4/20$ ya da $0,2$ 'dir. $A \& B$ arasındaki çakışan bölgenin alanı $1/20$ ya da $0,05$ 'tir.

Bu çizimler olasılığın temel kurallarını göstermek üzere kullanılabilirler.

- (1) *Normallik*: $0 \leq \Pr(A) \leq 1$.

Bu 1 birimlik alanı olan bir dikdörtgene karşılık gelir; çünkü bütün dairelerin dikdörtgenin içerisinde olması gerekir, hiçbir dairenin dolayısıyla da hiçbir olayın olasılığı 1'den büyük olamaz.

- (2) *Kesinlik*: $\Pr(\text{emin olay}) = 1$. $\Pr(\text{kesin önerme}) = 1$.

Venn şemalarıyla, gerçekleşmesinden emin olunan olay ya da kesin olan bir önerme, bütün dikdörtgeni kaplayan bir "daireye" karşılık gelir ki bunun da alanı uzlaşım olarak 1 birimdir.

- (3) *Toplanabilirlik*: A ve B karşılıklı olarak birbirlerini dışlıyorsa, bu durumda:

$$\Pr(A \vee B) = \Pr(A) + \Pr(B).$$

İki grup karşılıklı olarak birbirlerini dışlıyorsa birbirleriyle çakışmazlar ve gruplardan herhangi birisinin elemanlarını kapsayan alan, tamı tamına her birinin alanının toplamıdır.

- (4) *Çakışma*:

$A \vee B$ 'nin olasılığını hesaplamak için dikdörtgenin ne kadarının A ve B daireleri tarafından kapsandığını belirleyin. Bu da A'daki bütün alan, artı *sadece* B'de olduğu görünen alan olacaktır. Sadece B'de olan alan, A'yla çakışan B'deki alanlardır.

$$\Pr(A \vee B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \& B)$$

(5) *Koşullu:*

B olayının meydana geldiği verildiğinde, A olayının da olma olasılığı nedir? Şekil 6.2'ye bakın. B meydana gelmişse, seçilen kişinin ısıklık çalan birisi olduğunu biliyorsunuz. O halde B'nin A'yı içeren kısmının oranını istiyoruz. Yani, $A \& B$ alanı bölü B alanı.

$Pr(B) > 0$ olduğu müddetçe, $Pr(A/B) = Pr(A \& B) \div Pr(B)$

O halde, sayısal örneğimizde, $Pr(A/B) = 1/4$.

Tersine, $Pr(B/A) = Pr(A \& B)/Pr(A) = 1/5 = 0,2$.

BAHİS SORUSU 2

Pia hakkındaki bahis sorusunu hatırlayın.

Pia 31 yaşında, bekâr, açık sözlü ve akıllı bir kadındır. Felsefe mezunudur. Öğrenciyken, Amerikalı Yerlilerin haklarının ateşli bir savunucusuydu ve emziren anneler için hiçbir tesisi olmayan büyük bir mağazanın grev gözcülüğünü yaptı. Aşağıdaki ifadeleri (olasılığı en yüksek olandan) 1'den (olasılığı en düşük olana) 6'ya kadar olasılıklarına göre sıralayın. (Eşit değerler de verebilirsiniz.)

----(a) Pia aktif bir feministtir.

----(b) Pia bir banka memurudur.

----(c) Pia küçük bir kitapçada çalışmaktadır.

----(d) Pia bir banka memuru ve aktif bir feministtir.

----(e) Pia bir banka memuru ve yoga dersleri alan aktif bir feministtir.

----(f) Pia küçük bir kitapçada çalışmaktadır ve yoga dersleri alan aktif bir feministtir.

Bu ilk olarak psikolog Amos Tversky ve psikolog Daniel Kahneman tarafından deneysel olarak incelenen meşhur bir örnektir. Bütün hikâye dikkate alındığında birçok insanın aşağıdaki şekilde düşündüğünü bulmuşlardır:

En olası tarif (f) Pia küçük bir kitapçada çalışmaktadır ve yoga dersleri alan aktif bir feministtir.

Aslında sıralamayı yapanlar, olasılığı en yüksek olandan en az olana doğru olasılıkları aşağıdakine benzer bir şekilde sıralamışlardır:

(f), (e), (d), (a), (c), (b).

Fakat yukarıdaki sonuç kuralına hemen bir bakın. Örneğin (f) mantıksal olarak (a) ve (b)'yi içerdiğinden dolayı (a) ve (b)'nin olasılığı (f)'den daha fazla olmalıdır.

Genel olarak:

$$\Pr(A \& B) \leq \Pr(B).$$

Buradan, olasılığı en yüksek olan (f) olarak, çoğu kişi tarafından verilen olasılık sıralamasının tamamen yanlış olduğu sonucu çıkıyor. (a) – (f)'yi sıralamanın birçok yolu vardır, fakat her türlü sıralamanın aşağıdaki eşitsizliklere uyması gerekir:

$$\Pr(a) \geq \Pr(d) \geq \Pr(e).$$

$$\Pr(b) \geq \Pr(d) \geq \Pr(e).$$

$$\Pr(a) \geq \Pr(f).$$

$$\Pr(c) \geq \Pr(f).$$

İNSANLAR APTAL MI?

Tversky ve Kahneman'ın okuyucularından bazıları insanların mantıksız olduğu, çünkü çoğumuzun yanlış olasılık sıralaması yaptığı sonucuna varıyor. Fakat belki de insanlar sadece *dikkatsizdir*!

Belki çoğumuz "(a) – (f) arasındaki hangi ifade daha olasıdır, yani hangisinin olasılığı en yüksektir" sorusunun ne demek istediğine yeterince dikkatimizi vermiyoruz:

Tersine şöyle düşünüyoruz: "Hangisi en faydalı, en öğretici ve muhtemelen Pia hakkında söylenmesi doğru olandır?"

Bize bir soru sorulduğunda, çoğumuz bilgi veren, faydalı ya da ilginç kişiler olmak isteriz. Bize göre basitçe en yüksek olasılığa sahip olanı, kesin anlamıyla olasılığı en yüksek olanı söylemek istememiz gerekmiyor.

Örneğin size gelecek yıl enflasyonun (a) %3'ten az, (b) %3 ile %4 arası ya da (c) %4'ten fazla mı olacağını düşündüğünüzü sorduğumu farz edin.

(a)-veya-(b)-veya-(c) cevabını verebilirdiniz. Kesinlikle doğru demiş olurdunuz! Bu en yüksek olasılığı olan cevap olurdu. Fakat hiçbir bilgi vermeyen bir cevap olurdu.

(b)-veya-(c) cevabını verebilirdiniz. Her ikisinin de (toplanabilirlik sayesinde) olası olduğunu varsayarsak bu cevap, basitçe (b) ya da basitçe (c) cevabına göre daha olasıdır. Fakat bu, tek başına (c) veya tek başına (b) cevabına göre daha az ilginç ve daha az faydalı bir cevaptır.

Belki de bahis sorusu 2'ye bakınca, çoğu insanın yaptığı şey Pia'nın bir karakter analizini yapmak ve sonra da bugünlerde ne işler yapıyor olabildiği hakkında ilginç bir tahminde bulunmaktır.

Yapılan buysa, bu durumda büyük bir ihtimalle Pia küçük bir kitapçıda çalışmaktadır ve yoga dersleri alan aktif bir feministtir demiş olan insanlar irrasyonel değildir.

Onlar sadece yanlış bir soruya cevap veriyorlar; ama sorulmuş olandan daha faydalı bir soruya cevap veriyor da olabilirler.

AKSİYOMLAR: HUYGENS

Olasılık birçok şekilde aksiyomlaştırılabilir. İlk aksiyomlar ya da temel kurallar, ortaya koyduğu ışığın dalga kuramıyla meşhur olan Hollandalı fizikçi Christiaan Huygens (1629–1695) tarafından 1657 yılında yayımlanmıştır. Açıkçası, Huygens olasılık fikrini pek kullanmamıştı. Tersine, bir piyango bileti gibi bir şeyin adil ücretini ya da bugün bir olayın ya da önermenin beklenen değeri diyeceğimiz bir şeyi kullandı. Bugün hâlâ öyle yapabiliriz. Aslında, hemen bütün yaklaşımlar olasılığı, aksiyomlaştırılacak bir fikir olarak ele alır. Fakat hâlâ az sayıda yazar, olasılık cinsinden tanımladıkları beklenen değeri ilkel bir fikir olarak ele almaktadır.

AKSİYOMLAR: KOLMOGOROV

Olasılık kuramının kesin aksiyomları oldukça etkili bir Rus matematikçi olan A. N. Kolmogorov (1903–1987) tarafından 1933 yılında yayımlanmıştır. Bu kuram bizim temel kurallarımızdan çok daha fazla gelişmiş bir kuramdır, çünkü sonsuz kümelerle uygulanır ve ölçüm kuramı denilen şeyin bir parçası olarak tam diferansiyel ve integral kalkülüs kullanır.

ALIŞTIRMALAR**1 Venn Şemaları.**

L: Birisi akciğer hastalığına yakalanıyor.

S: Bu kişi sigara içiyor olsun. Pr notasyonunu kullanarak aşağıdaki olasılıkların her birini yazın ve sonra da bir Venn şeması kullanarak açıklayın.

- (a) Bir kişinin sigara içme ya da akciğer hastalığına yakalanma (ya da her ikisi) olasılığı.
- (b) Sigara içtiği verildiğinde, bir kişinin akciğer hastalığına yakalanma olasılığı.
- (c) Kişinin akciğer hastalığına yakalandığı verildiğinde, sigara içme olasılığı.

2 Toplam olasılık. Temel kuralları kullanarak $\Pr(A) + \Pr(\sim A) = 1$ olduğunu ispat edin.**3 Çarpma.** İstatistiksel bağımsızlık tanımından $0 < \Pr(A)$ ve $0 < \Pr(B)$ ise ve A ve B istatistiksel olarak bağımsızsa $\Pr(A \& B) = \Pr(A)\Pr(B)$ olduğunu ispat edin.**4 Uzlaşımlar.** 4. bölümde normallik ve kesinlikle ilgili kuralların sadece uzlaşım olduğunu söyledik. Sizce, olasılığı sayılarla temsil eden mantıklı başka türlü uzlaşımlar var mıdır, örnek verir misiniz?**5 Teröristler.** Bu merhum felsefeci Max Black hakkında bir hikâyedir.

Black'ın öğrencilerinden biri Kant hakkında araştırma yapmak üzere deniz aşırı bir ülkeye gidiyor. Bir teröris-

tin uçağa bomba yerleştireceğinden korkuyor. Black onu riskin ihmal edilebilir olduğuna ikna edemiyor. Onun için şöyle bir argüman yapıyor:

BLACK: İyi o zaman, en azından *iki* kişinin uçağına bomba getirme ihtimalinin neredeyse imkânsız olduğuna mutabıksın.

ÖĞRENCİ: Şüphesiz.

BLACK: O halde sen uçağa bomba götürmelisin. Uçağında başka bir bomba olma riski ihmal edilebilir olacaktır.

Buradaki şaka nedir?

GÖZDEN GEÇİRMENİZ İÇİN ANAHTAR KELİMELE

Normallik	Koşullu olasılık	Toplam olasılık
Kesinlik	Venn şemaları	Mantıksal sonuç
Toplanabilirlik	Çarpma	İstatistiksel bağımsızlık

7. Bayes Kuralı

Temel kuralların en faydalı sonuçlarından biri, bize yeni kanıtı nasıl kullanacağımızı anlamamız hususunda yardımcı olmasıdır. Bayes kuralı “tecrübeden öğrenme” için bir anahtar sunmaktadır.

Beşinci bölüm aynı formda çeşitli örneklerle bitti: Çekiliş kutuları, amortisörler, halterciler. Sayılar birazcık değiştirildi, ancak her vakada sorular aynıydı.

Örneğin 5. bölümde A ve B olmak üzere iki çekiliş kutusu vardı, her birinde de bilinen oranda kırmızı ve yeşil toplar vardı. Rastgele bir çekiliş kutusu seçildi. Bildiğimiz:

$\Pr(A)$ ve $\Pr(B)$.

Sonra bir çekiliş kutusundan kırmızı bir top çekme gibi başka bir K olayı vardı. A çekiliş kutusundan kırmızı çekmenin olasılığı 0,8'di. B çekiliş kutusundan kırmızı çekmenin olasılığıysa 0,4 idi. O halde bildiğimiz:

$\Pr(R/A)$ ve $\Pr(R/B)$.

Sonra sorduk: Kırmızı bir top çekme *koşuluyla* içinden çekiliş yapılan kutunun A olma olasılığı nedir? Sorumuz şuydu:

$\Pr(A/R) = ?$ $\Pr(B/R) = ?$

5. bölümde bu sorular doğrudan koşullu olasılığın tanımıyla çözülmüştü. Buna benzer problemleri çözmenin kolay bir kuralı var. Buna *Bayes kuralı* deniyor.

Çekiliş kutusu probleminde iki *hipotezden* hangisinin doğru olduğunu sorduk: A çekiliş kutusu seçildi ya da B çekiliş kutusu seçildi. Genel olarak hipotezleri H harfiyle göstereceğiz.

Bir *deney* yapıyoruz ya da biraz *kanıt* topluyoruz: Rastgele çekiyoruz ve kırmızı bir top olduğunu görüyoruz. Genel olarak kanıtı E harfiyle gösteriyoruz.

H ve $\sim H$ olarak sadece iki hipotezin olduğu en basit durumla başlayalım. Tanımdan dolayı bunların ikisi de karşılıklı olarak birbirlerini dışlıyor ve geniş kapsamlıdır.

E, $\Pr(E) > 0$ olacak şekilde bir önerme olsun. Bu durumda:

$$\Pr(H/E) = \frac{\Pr(H)\Pr(E/H)}{\Pr(H)\Pr(E/H) + \Pr(\sim H)\Pr(E/\sim H)}$$

Buna iki hipotez durumu için *Bayes kuralı* denir.

BAYES KURALININ İSPATI

$$\Pr(H \& E) = \Pr(E \& H)$$

$$\frac{\Pr(H \& E)\Pr(E)}{\Pr(E)} = \frac{\Pr(E \& H)\Pr(H)}{\Pr(H)}$$

Koşullu olasılık tanımını kullanarak,

$$\Pr(H/E)\Pr(E) = \Pr(E/H)\Pr(H).$$

$$\Pr(H/E) = \frac{\Pr(H)\Pr(E/H)}{\Pr(E)}$$

H ve $\sim H$ karşılıklı olarak birbirlerini dışladığından ve geniş kapsamlı olduğundan dolayı bu durumda, 5. bölümdeki toplam olasılık kuralıyla

$$\Pr(E) = \Pr(H)\Pr(E/H) + \Pr(\sim H)\Pr(E/\sim H).$$

Bu da bize Bayes kuralını verir:

$$(1) \quad \Pr(H/E) = \frac{\Pr(H)\Pr(E/H)}{\Pr(H)\Pr(E/H) + \Pr(\sim H)\Pr(E/\sim H)}$$

GENELLEŞTİRME

Aynı formül her sayıdaki *karşılıklı olarak birbirlerini dışlayan* ve *ortak geniş kapsamlı* hipotezler için geçerlidir:

$$H_1, H_2, H_3, H_4, \dots, H_k, \text{ öyle ki her } i \text{ için, } \Pr(H_i) > 0.$$

Karşılıklı olarak birbirini dışlayan hipotezlerden sadece birinin doğru olduğu anlamına gelmektedir. *Ortak geniş kapsamlı* en azından birinin doğru olması gerektiği anlamına gelmektedir.

Yukarıdaki argümanı genişlettiğimizde, $Pr(E) > 0$ ve her i için $Pr(H_i) > 0$ ise herhangi bir hipotez H_k için aşağıdakini elde ederiz:

$$(2) \quad Pr(H_j/E) = \frac{Pr(H_j) Pr(E/H_j)}{\sum [Pr(H_i) Pr(E/H_i)]}$$

Burada Σ (Yunanca büyük harf sigma ya da Yunancada S) i alt indisıyla terimlerin toplamını anlatır. Bütün $[Pr(H_i)Pr(E/H_i)]$ terimlerini $i = 1, i = 2, i = k'$ 'ya kadar toplayın.

Formül (1) ve onun genelleştirmesi (2) **Bayes kuralı** olarak bilinir.

Kural, sadece birkaç temel kuralın, yani koşullu ve toplam olasılığın, birleştirilmesi için bir yol sunmaktadır. Bayes kuralı anlamsızdır, fakat bir o kadar da derli topludur. Tümevarım mantığıyla ilgili bazı kuramlarda önemli bir rol oynamaktadır. Bu da 13-15. ve 21. bölümde açıklanmıştır.

ÇEKİLİŞ KUTULARI

Şimdi 5. bölümdeki çekiliş kutusu problemine bakalım:

Her birinin içerisinde kırmızı ve yeşil topaların olduğu iki çekiliş kutusu hayal edin. A çekiliş kutusunun %80'i kırmızı top, %20'siyse yeşil toptur ve B çekiliş kutusunun %60'ı yeşil top, %40'ıysa kırmızı toptur. Rastgele bir çekiliş kutusu seçiyorsunuz ve daha sonra hangi çekiliş kutusu olduğunu tahmin etmek için kutudan top seçebilirsiniz. Her çekilişten sonra, çekilen top *yerine geri konur*. Böylece her çekiliş için, A'daki çekiliş kutusundan kırmızı almanın olasılığı 0,8 ve B'deki çekiliş kutusundan kırmızı almanın olasılığıysa 0,4'tür.

$$Pr(R/A) = 0,8 \quad Pr(R/B) = 0,4 \quad Pr(A) = Pr(B) = 0,5$$

Kırmızı bir top çekiyorsunuz. $Pr(A/R)$ nedir?

Bayes kuralıyla çözüm:

$$\begin{aligned} Pr(A/R) &= \frac{Pr(A)Pr(R/A)}{Pr(A)Pr(R/A) + Pr(B)Pr(R/B)} \\ &= (0,5 \times 0,8) / [(0,5 \times 0,8) + (0,5 \times 0,4)] = 2/3 \end{aligned}$$

Bu da 5. bölümde elde edilen cevapla aynıdır.

ÖRÜMCEKLER

Tarantula büyük, azgın-görünümlü, biraz zehirli tropik bir örümcektir.

Bir zamanlar, Honduras'tan gönderilen muzların %3'ünün üstünde tarantulalar bulunmuştu ve Guatemala'dan gönderilenlerin %6'sında da tarantulalar vardı.

Gönderilenlerin %40'ı Honduras'tan, %60'ı da Guatemala'dan geliyordu.

Rastgele seçilen bir muz öbeğinde bir tarantula bulundu. Bu öbeğin Guatemala'dan gelme olasılığı nedir?

Çözüm

G: Öbek Guatemala'dan geldi. $Pr(G) = 0,6$.

H: Öbek Honduras'tan geldi. $Pr(H) = 0,4$.

T: Öbeğin üstünde tarantula vardı.

$Pr(T/G) = 0,06$. $Pr(T/H) = 0,03$.

$$Pr(G/T) = \frac{Pr(G)Pr(T/G)}{Pr(G)Pr(T/G) + Pr(H)Pr(T/H)}$$

Cevap: $Pr(G/T) = (0,6 \times 0,06) / [(0,6 \times 0,06) + (0,4 \times 0,03)] = 3/4$

TAKSİLER: BAHİS SORUSU 5

İşte bahis sorusu 5.

Size Green Cabs Ltd. ve Blue Taxi Inc. adında iki taksi şirketinin olduğu bir kasabada jüri görevi verildi. Blue Taxi maviye boyalı arabaları, Green Cabs ise yeşil arabaları kullanıyor.

Green Cabs trafikteki taksilerin %85'ine sahip olarak pazara hâkim.

Sisli bir kış gecesinde bir taksi başka bir arabaya yandan çarptı ve hızla kaçarak uzaklaştı. Bir görgü tanığı bunun mavi bir taksi olduğunu söylüyor.

Görgü tanığı kazanın olduğu gecedekine benzer koşullarda ifade verdi ve testlerin %80'inde görünen taksinin rengini doğru olarak bildirdi. Yani, sisli akşam ışığında kendisine mavi ya da yeşil bir taksi gösterilmesine rağmen testin %80'inde rengi doğru bildi.

Bu bilgi ışığında siz aşağıdakilerden hangi sonuca varırsınız:

- (a) Yandan çarpanın mavi olma olasılığı 0,8'dir.
- (b) Yandan çarpanın mavi olması daha muhtemeldir, fakat olasılığı 0,8'den azdır.
- (c) Yandan çarpanın yeşil olma olasılığı mavi olma olasılığı kadardır.
- (d) Yandan çarpanın yeşil olması, mavi olmasına göre daha muhtemeldir

Bahis sorusu 2 gibi, bu soru da Amos Tversky ve Daniel Kahneman tarafından icat edilmiştir. Bu soru üzerinde çok kapsamlı psikolojik testler yapmışlar ve çoğu insanın (a) ya da (b)'nin doğru olduğunu düşündüklerini bulmuşlardır. Çok az sayıda insan (d)'nin doğru olduğunu düşünmektedir. Yine de (d), doğal olasılık modelinde doğru cevaptır! Bakın Bayes kuralı bu soruyu nasıl cevaplıyor.

Çözüm

G: Rastgele seçilen bir taksi yeşildir. $\Pr(G) = 0,85$.

B: Rastgele seçilen bir taksi mavidir. $\Pr(B) = 0,15$.

W_b : Görgü tanığının taksinin mavi olduğunu beyan etmesi olsun.

$\Pr(W_b/B) = 0,8$.

Bunun da ötesinde, $\Pr(W_b/G) = 0,2$ 'dir, çünkü görgü tanığı verdiği cevapların %20'sinde yanlış cevap vermektedir, onun için taksi yeşilken "mavi" deme olasılığı %20'dir.

Bize şimdi $Pr(B/W_b)$ ve $Pr(G/W_b)$ gerekiyor.

$$Pr(B/W_b) = \frac{Pr(B)Pr(W_b/B)}{Pr(B)Pr(W_b/B) + Pr(G)Pr(W_b/G)}$$

$$Pr(B/W_b) = (0,15 \times 0,8) / [(0,15 \times 0,8) + (0,85 \times 0,2)] = 12/29 \approx 0,41$$

Cevap:

$$Pr(B/W_b) \approx 0,41$$

$$Pr(G/W_b) \approx 1 - 0,41 = 0,59.$$

Daha büyük ihtimalle yandan çarpan araba yeşildi.

TEMEL ORANLAR

Neden çok az sayıda kişi, sezgisel olarak (d)'nin doğru cevap olduğunu hissediyor? Tversky ve Kahneman insanların *temel oranı* ya da arka plan bilgisini ihmal etme eğiliminde oldukları savını ileri sürüyorlar. Görgü tanığının %80 doğru söyleme olgusuna odaklanıyoruz. Kasabadaki taksilerin çoğunun yeşil olduğu olgusunu ihmal ediyoruz.

Taksileri rastgele seçerek ve görgü tanığına sisli bir gecede göstererek görgü tanığımızla çok sayıda deney yaptığımızı farz edin. Rastgele 100 taksi seçilseydi, bu durumda şöyle bir şey beklerdik:

Görgü tanığı yaklaşık olarak 85 yeşil taksi görüyor. Doğru bir şekilde bunların %80'ini yeşil olarak teşhis ediyor: Yaklaşık olarak 68 taksiyi.

%20'sini yanlış bir şekilde mavi olarak teşhis ediyor: Yaklaşık olarak 17 taksiyi.

Yaklaşık olarak 15 tane mavi taksi görüyor. Bunların %80'ini doğru bir şekilde mavi olarak teşhis ediyor: Yaklaşık olarak 12 taksiyi.

%20'sini yanlış bir şekilde yeşil olarak teşhis ediyor: Yaklaşık olarak 3 taksiyi.

Böylece görgü tanığı yaklaşık olarak 29 taksiyi mavi olarak teşhis ediyor, fakat bunların yalnızca 12 taksi mavi! Aslın-

da, problemi ne kadar frekanslar hakkında bir problem olarak görürsek, Bayesçi cevap da o kadar açık ve net hale gelir.

Bazı eleştirmenler taksi probleminin çok kolay hata yaptığımızı göstermediğini söylüyorlar. Soru yanlış bir şekilde soruluyor. Eleştirmenler, bize sadece frekanslar hakkında soru sorulmuş olsaydı, büyük ölçüde doğru cevabı hemen verirdik diyorlar.

GÜVENİLİRLİK

Görgü tanığımız büyük ölçüde güvenilir: Tahminlerinin %80'inde doğru. Peki, güvenilir bir görgü tanığı neden güven vermez? Temel oranlardan dolayı güven vermez. "Güvenilirlikle" ilgili olarak iki farklı düşünceyi karıştırma eğilimindeyiz.

Düşünce 1: $\Pr(W_b/B)$: Taksi aslında maviyken bir taksiyi mavi olarak teşhis etmede ne kadar güvenilir? Bu görgü tanığının bir özelliği ve kavrayış çabukluğudur.

Düşünce 2: $\Pr(B/W_b)$: Taksinin mavi olduğunu söylediği verildiğinde, görgü tanığının söylediği şeye ne kadar güvenilebilir? Bu görgü tanığının ve temel oranın bir özelliğidir.

YANLIŞ POZİTİFLER

Temel oranlar tıbbi teşhislerde oldukça dikkat çekicidir. Çok kötü bir hastalık için test yaptırdığımızı farz edin. Bana testin %99 oranında doğru olduğu söylendi. Bende hastalık varsa test, %99 olasılıkla EVET diyor. Bende hastalık yoksa test, %99 olasılıkla HAYIR diyor.

Hastalık testini yaptırdım. Test EVET diyor. Dehşete düşüm.

Fakat hastalığın çok nadir rastlanır bir hastalık olduğunu farz edin. Nüfusun genelinde, bu hastalığa sadece 10.000 kişide bir rastlanıyor.

Bu durumda bir milyon kişi içinde sadece 100 kişide bu hastalığa rastlanıyor.

Rastgele bir milyon kişi test edildiğinde, bizim harika testimiz nüfusun yaklaşık olarak %1'i için, yani 10.000 kişi için EVET diyecektir. Fakat bir sonraki bölümde basit bir he-

saplamayla göreceğimiz gibi, *bu insanlardan en fazla 100'ü gerçekten bu hastalığa yakalanmıştır!*

Özellikle riskli kategorisindeki nüfus içinde olmadığım müddetçe kendimi rahatlamış hissediyorum.

EVET sonucuyla ve testin "güvenilirliğiyle" dehşete düş-tüm (*Düşünce 1*):

$\Pr(\text{EVET}/\text{Ben hastayım})$.

Test sonucunun "güvenilir" olduğunu öğrenince rahatladım (*Düşünce 2*):

$\Pr(\text{Ben hastayım}/\text{EVET})$.

Doğru cevap HAYIR iken EVET diyen test sonucuna *yanlış pozitif* denir. Örneğimizde, EVET sonuçlarının yaklaşık olarak 9900'ü yanlış pozitifti.

Böylece, hastalık için belirlenen temel oran çok düşükse, çok "güvenilir" bir test bile oldukça yanıltıcı olabilir. Nüfusun bütünündeki HIV virüsü için yapılan evrensel teste karşı tam da bu argüman ileri sürülmüştü. Oldukça güvenilir bir test bile oldukça fazla yanlış pozitif verebilir. Güvenilir bir test bile sadece "riskli" bir nüfusa uygulandığında, yani hastalığın temel oranı kayda değer bir orandayken uygulandığında güvenilir olur.

YANLIŞ POZİTİF OLASILIĞI

D durumu için kişiye yapılan test sonucunda kişide D durumunun ortaya çıktığı test sonucuna *pozitif* denir.

Kişide D durumu yokken ve yine de test sonucu pozitifken, bir kişiye D gibi bir durumla ilgili olarak yapılan testin sonucuna *yanlış pozitif* denir.

Peki, bir test sonucuna ne kadar güvenebiliriz? Bu da güvenilirlik hakkındaki 2. *düşüncedir*. Yanlış pozitifin olasılığı bir testin sonucuna ne kadar güveneceğiniz (ya da güvenmeyeceğiniz) hakkında iyi bir göstergedir.

D bir kişide D durumunun olması hipotezi olsun.

E EVET, yani kişi için pozitif test sonucu olsun.

Her ne kadar test sonucu E ise de, kişide D koşulu yoksa yanlış pozitif durumu oluşur.

Yanlış pozitif olasılığı $Pr(\sim D/E)$ 'dir.

Nadiren görülen hastalıkla ilgili örneğimizde:

Temel oran $Pr(D) = 1/10000$ 'dir. Böylece $Pr(\sim D) = 9999 / 10000$ 'dir.

Testin "güvenilirliği" (*Düşünce 1*) $Pr(E/D) = 0,99$ 'dur.

Ve $Pr(\sim D/E) = 0,01$ 'dir.

Bayes kuralını uygularsak,

$$Pr(\sim D/E) = \frac{Pr(\sim D)Pr(E/\sim D)}{Pr(\sim D)Pr(E/\sim D) + Pr(D)Pr(E/D)} = 9999 / (9999 + 99) \approx 0,99$$

BOĞAZ AĞRISI: BAHİS SORUSU 6

Siz bir doktorsunuz. Size göre hastalarınızdan birinin boğaz ağrısının olması kuvvetle muhtemel, fakat emin değilsiniz. Boğazdan birkaç örnek alıp incelenmesi için laboratuvara gönderiyorsunuz. Test (hemen hemen diğer bütün laboratuvar testleri gibi) mükemmel değildir.

Hastada boğaz ağrısı varsa, testlerin %70'inde laboratuvaradan EVET sonucu çıkıyor. Fakat %30'undaysa HAYIR sonucu çıkıyor.

Hastada boğaz ağrısı yoksa testlerin %90'ında laboratuvaradan HAYIR sonucu çıkıyor. Fakat %10'undaysa EVET sonucu çıkıyor.

Siz aynı hastadan laboratuvara arka arkaya beş örnek gönderiyorsunuz. Sonuçları sırasıyla aşağıdaki gibi alıyorsunuz:

EVET, HAYIR, EVET, HAYIR, EVET

Aşağıdakilerden hangi sonuca varırsınız:

----(a) Sonuçların bir değeri yok.

----(b) Muhtemelen hastanın boğazı ağrı-mı-yordur.

----(c) Hastanın boğazının ağrıma ihtimali ağrı-mama ihtimaline göre birazcık daha fazladır.

----(d) Hastanın boğazının ağrıma ihtimali, ağrıyama ihtimaline göre çok daha fazladır.

Benim tecrübelerime göre neredeyse hiç kimsenin doğru cevabı bulamadığı çok açıktır. Evet-hayır-evet-hayır-evetin fazla bir faydası olmayacakmış gibi görünüyor. Aslında, hastanızın boğazının ağrması iyi bir kanıttır.

B: hastanın boğaz ağrısı var.

~B: hastanın boğaz ağrısı yok.

E: test sonucu pozitifdir.

H: test sonucu negatiftir.

Hastanın boğaz ağrısı olmasının olası olduğunu düşünüyorsunuz. Problemi biraz daha somutlaştırmak için buna bir yüzde verelim, %90 olsun. Yani hastanın boğaz ağrısı olmasının yüzdesi $Pr(B) = 0,9$ olsun.

Çözüm

Koşullu olasılıkları biliyoruz ve test sonuçlarının bağımsız olduğunu varsayıyoruz.

$$Pr(E/B) = 0,7$$

$$Pr(H/B) = 0,3$$

$$Pr(E/\sim B) = 0,1$$

$$Pr(H/\sim B) = 0,9$$

$Pr(E/EHEHE)$ 'yi bulmamız gerekiyor.

$$Pr(EHEHE/B) = 0,7 \times 0,3 \times 0,7 \times 0,3 \times 0,7 = 0,03087$$

$$Pr(EHEHE/\sim B) = 0,1 \times 0,9 \times 0,1 \times 0,9 \times 0,1 = 0,00081$$

$$Pr(B/EHEHE) = \frac{Pr(B)Pr(EHEHE/B)}{Pr(B)Pr(EHEHE/B) + Pr(\sim B)Pr(EHEHE/\sim B)}$$

$$Pr(B/EHEHE) = \frac{0,9 \times 0,03087}{(0,9 \times 0,03087) + (0,1 \times 0,00081)} = 0,997$$

Ya da $Pr(B/EHEHE) = 343/344$ 'ü verecek şekilde çoğu birbiri götürürken orijinal rakamlarla hesaplamayı yapabilirsiniz. $Pr(B) = 0,9$ ön varsayımıyla başlayarak $Pr(B/EHEHE)$ 'nin neredeyse 1 olduğunu bulduk!

Cevap: O halde (d) doğrudur. Hastanın boğazının *ağırma* ihtimali *ağrımama* ihtimalinden *çok daha* fazladır.

DÜPEDÜZ CEHALET

Fakat siz bir doktor değilsiniz. Emareleri iyi okuyamazsınız. Arkadaşınızın boğazının ağrıyıp ağrımadığına karar vermek için parayla yazı-tura bileatabilirsiniz. Cehaletinizi parayla yazı-tura atarak modellersiniz:

$$\Pr(B) = 0,5.$$

Sonra test sonuçlarını öğrenirsiniz. Sizi hayran mı bırakmalı, yoksa anlamsız mıdır? $\Pr(B/EHEHE)$ 'yi bulmanız gerekiyor.

Çözüm

Önceden olduğu gibi aynı formülü kullanarak, fakat

$$\Pr(B) = 0,5 \text{ olarak,}$$

$$\Pr(B/EHEHE) = (0,5 \times 0,03087) / [(0,5 \times 0,03087) + (0,5 \times 0,00081)] \approx 0,974$$

Ya da, tam olarak, 343/352.

Cevap: Bu sonuç bir kere daha göstermektedir ki EHEHE test sonuçları arkadaşınızın boğazının ağrıdığına *güçlü* bir kanıttır.

RAHİP THOMAS BAYES

Bayes kuralı adı, olasılık ve tümevarım konularına ilgi duyan bir İngiliz bakan olan Thomas Bayes'ten (1702–1761) sonra verilmiştir. Kendisi kanıtla ilgili olarak muhtemelen İskoçyalı felsefeci David Hume'la ciddi bir fikir ayrılığına düşmüştür. 21. bölümde Bayesçi fikirler kullanılarak tümevarım hakkında Hume'un felsefi sorunundan nasıl kaçınılabileceği anlatılmaktadır.

Bayes 1763'te (ölümünden sonra) yayınlanan bir makale yazdı. Makale yukarıda verilen örnekler gibi karmaşık bir problem için sunulan çözümü içermektedir. Bayes, bilardo masasına bir topun atıldığını hayal etmektedir. Bu masa

"öyle bir şekilde ve eğimde yapılmıştır ki" top masanın her yerine aynı şekilde düşebilir. Toptan masanın kenarlarına paralel bir çizgi çizildi. Bu çizgi masayı A, kenardan a cm mesafede olmak üzere, A ve B olarak iki kısma ayırıyor.

Şimdi a 'nın değerini bilmediğinizi farz edin. Top arkanızdan atılıyor ve başka bir oyuncu tarafından masadan alınıyor.

Sonra top n defa atılıyor. Size k kadar atışta topun masanın A kısmına ve $n-k$ defasında da B kısmına düştüğü söyleniyor. Bu bilgi temelinde a 'nın değeri hakkında bir tahminde bulunabilir misiniz? Belli ki, topların çoğu A'ya düşseydi, bu durumda masanın çoğunu a 'nın kaplaması gerekirdi; A ve B yaklaşık olarak 50'ye 50'ye, bu durumda a yaklaşık olarak masanın uzunluğunun yarısı olmalıdır.

Thomas Bayes, herhangi bir x mesafesi ve herhangi bir ϵ aralığı için, bilinmeyen a 'nın $(x-\epsilon)$ ile $(x+\epsilon)$ arasında olduğunu bularak, bu problemi kesin olarak nasıl çözeceğimizi gösteriyor.

Başvurduğu düşünce, örneklerimizdekiyle aynı; fakat matematiği zordur. Şimdi Bayes kuralı denilen şey (ya da, yanlış anlaşılma yol açacak şekilde Bayes kuramı) Bayes'in çalışmasının gayet açık bir basitleştirilmesidir. Aslında, 4. bölümde gördüğümüz gibi Bayes kuralıyla yaptığımız bütün çalışma, koşullu olasılığın tanımıyla başlayarak ilk prensiplerden yola çıkarak yapılabilir.

ALİŞTIRMALAR

1 *Lambalar ve üçgenler.* 5. bölümdeki alıştırmalardaki 2(c) ve 3(c)'yi çözmek için Bayes kuralını kullanın.

2 *Çifte çekiliş.*

A çekiliş kutusunun içindekiler: 60 kırmızı, 40 yeşil top.

B çekiliş kutusunun içindekiler: 10 kırmızı, 90 yeşil top.

Adil bir parayı yazı-tura atarak bir çekiliş kutusu seçildi.

(a) Geriye koyma yaparak bu çekiliş kutusundan iki top çekildi. Her ikisi de kırmızı. A çekiliş kutusu olma olasılığı nedir?

(b) Geriye koyma yapmaksızın bu çekiliş kutusundan iki top çekildi. Her ikisi de kırmızı. Çekiliş kutusunun A olma olasılığı nedir?

3 *Testler.* Bir profesör 30 adet D-Y sorusundan oluşan bir doğru-yanlış sınavı veriyor. Cevapları "doğru" olan sorular 30 soru içerisinde rastgele dağıtılmışlardır. Profesör, sınıfın dörtte üçünün ciddi olduğunu ve materyale doğru bir şekilde hâkim olduğunu düşünüyor ve de bu türdeki öğrencilerin herhangi bir soruya doğru cevap verme olasılığı %75'tir. Geriye kalan öğrenciler rastgele cevap vereceklerdir. Rastgele seçtiği bir testteki birkaç soruya göz atıyor. Her iki soruya da doğru cevap verilmiş. Bu test kâğıdının ciddi bir öğrencinin test kâğıdı olma olasılığı nedir?

4 *Halterciler.* İki takımdan birini yarışmaya gönderen koçu hatırlayın. Her takımın 10 üyesi vardır. Steroid takımının (S) 8 üyesi steroid kullanıyor (U). Daha temiz takımın (C) 2 üyesi steroid kullanıyor. Adil bir parayla yazı-tura atarak koç hangi takımı yarışmaya göndereceğini seçiyor.

Bir atletizm komitesi gönderilen takım üyelerinden rastgele seçilen sadece birinin idrarını test ediyor. Test %100 etkili bir test. Takımın bu üyesi kullanıcıysa, takım reddedilecektir.

(a) Bütün takımın yanlış pozitiflerle reddedilme olasılığı nedir?

(b) Yanlış pozitif olma olasılığı nedir?

(c) Diğer komite biraz daha ihtimamla yaklaşıyor. Rastgele iki farklı üye seçiyor. Yanlış pozitif olma olasılığı nedir?

5 *Üç hipotez.* (a) F, G, H olarak üç adet birbirini dışlayan ve geniş kapsamlı hipotezle birlikte koşullu olasılık $Pr(F/E)$ için Bayes kuralını ortaya koyun. (b) Bunu ispat edin.

6 *Bilgisayar çökmeleri.* Küçük bir şirket bir muhasebe sorununu çözmek için daha yeni üç yazılım paketi satın aldı. Bunlar: Fog, Golem ve Hotshot. İlk denemelerde Fog

bütün zamanın %10'unda, Golem %20'sinde ve Hotshot da %30'unda çöküyor.

On çalışandan altısı Fog'da, üçü Golem'de ve biri de Hotshot'ta görevlendiriliyor. Sophia'ya rastgele bu programlardan biri veriliyor. İlk denemede çöküyor. Hotshot'un verilmiş olma olasılığı nedir?

- 7 *Hırsızları caydırma*. Bu örnek bir sosyoloğun günlük gazeteye yazdığı bir mektuba dayanmaktadır. Sosyolog hırsızları caydırmak için insanların evlerinde tabanca bulundurmasının iyi bir fikir olduğunu söylemektedir. Şu (şaşırtıcı) bilgiyi veriyor:

Amerika'da bir eve yılda en az bir kere hırsız girme oranı %10'dur. Bu oran Kanada için %40 ve İngiltere için de %60'tır. Bu oranlar son on yılda sabitti.

Profesörün söylediği her şeye inanmayın, özellikle de gazeteye yazdığında! Ancak farz edin ki, belirtildiği gibi bu bilgi doğrudur ve:

Jenny Park, Larry Chen ve Ali Sami büyük bir uluslararası şirket için stajyer yatırım bankacısıdır. Son takvim yılında Jenny'nin Amerika'da, Larry'nin İngiltere'de ve Ali'nin de Kanada'da evi vardı.

Stajyerlerden biri rastgele seçildi. Geçen yıl bu kişinin evine hırsız girdi. Bu kişinin Ali olma olasılığı nedir?

GÖZDEN GEÇİRMENİZ İÇİN ANAHTAR KELİMELER

Bayes Kuralı

Temel oranlar

Yanlış pozitifler

OLASILIKLARIN VE FAYDALARIN BİRLEŞTİRİLMESİ

8. Beklenen Değer

Tümevarım mantığı risklidir. Emin olmadığımız zaman ona ihtiyaç duyarız. Sadece ne olacağını, ya da neyin doğru olduğunu bilmediğimiz zaman değil, aynı zamanda ne yapacağımızı bilmediğimiz zaman da ona ihtiyaç duyarız. Karar vermek için olasılığın ötesinde şeylere ihtiyaç vardır. Kararlar eylemlerimizin olası sonuçlarının değerine bağlıdır. Değerin teknik adı **faydadır**. Bu bölümde olasılık ve faydanın nasıl birleştirileceği gösterilmektedir. Ancak meşhur bir paradoksla sona ermektedir.

EYLEMLER

Küçük bir işyeri mi açmalısınız?

Yanınıza bir şemsiye mi almalısınız?

Bir piyango bileti mi almalısınız?

Sevdiğiniz birinin yanına mı yerleşmelisiniz?

Her durumda bir *eylemi* çözüme kavuşturuyorsunuz. Hiçbir şey yapmamak da bir eylem olarak kabul edilir.

Eylemlerin *sonuçları* vardır.

Beş parasız kaldınız (ya da belki de büyük bir şirket kurdunuz).

Diğer herkes sırlıslıkla ıslanırken siz kupkurusunuz (ya da şemsiyenizi nereye koyduğunuzu unuttunuz).

Bir doları boşa harcadınız (ya da belki bir servet kazandınız).

Evlendikten sonra hep mutlu yaşadınız (ya da bir hafta sonra ayrıldınız).

Mutlak olarak neredeyse hiç aktif bir şey yapmıyorsunuz:
Bu da bir eylem olarak kabul ediliyor.

Bazı sonuçlar arzu edilir. Bazılarıysa arzu edilmez. Olası bir sonucun maliyet ya da faydasını bir sayıyla temsil edebileceğinizi farz edin; mesela şu kadar lira gibi.

Bu sayıya sonucun *faydası* deyin.

Bir eylemin her olası sonucunun *olasılığını* bir sayıyla ortaya koyabileceğinizi farz edin.

Bir karar verirken, her olası eylemin göreceli yararlılığını değerlendirmek isteriz. Olası eylemleri değerlendirmek için olasılık ve faydaları birleştirmenin basit bir yolu var: Çarpma! Yani,

Olasılığı (bir eylemin her sonucunun faydasıyla) çarpın ve sonra da o eylemin olası her sonucu için sonuçları toplayın.

Bu hesaplamanın sonucuna eylemin beklenen değeri denir.

GÖSTERİM

Eylemler: **Koyu** büyük harflerle gösterilir (örneğin A).

Sonuçlar: Büyük harflerle gösterilir, (örneğin C).

Olası bir sonucun faydası: $C: U(C)$.

A eylemi seçilirse, C'nin meydana gelme olasılığı: $\Pr(C/A)$ (koşullu bir olasılık).

A'nın beklenen değeri: $\text{Bek}(A)$.

SADECE İKİ OLASI SONUÇ

Eylem: A

Sonuçlar: C_1, C_2 .

Faydalar: $U(C_1), U(C_2)$.

Olasılıklar: $\Pr(C_1/A), \Pr(C_2/A)$.

Tanım:

A'nın beklenen değeri: $\text{Bek}(A) = [\Pr(C_1/A)] [U(C_1)] + [\Pr(C_2/A)] [U(C_2)]$.

Belirgin bir A eyleminin sonuçları hakkında konuştuğumuz iyice belliyken, şöyle yazmak daha kolaydır:

$$\text{Bek}(A) = [\text{Pr}(C_1)] [U(C_1)] + [\text{Pr}(C_2)] [U(C_2)].$$

Bir eylemin beklenen değeri *çarpımlarının toplamıdır.*
(faydalar x olasılıklar).

BEDAVAYA

Teyzeniz size doğum gününüzde bedava bir piyango bileti teklif ediyor, fakat almanız gerekmiyor diyor. İki olası eylem: Kabul etmek ve kabul etmemek.

Kabul etmemenin beklenen değeri sadece 0'dır. Kabul etmenin beklenen değeri nedir? Çekilişte çıkan bir biletin ödülünün 90 dolar olduğu piyangonun 100 bileti olduğunu farz edin. Bileti kabul ederseniz, iki olası sonuç var:

Sonuç 1: Sizin biletiniz çekiliyor.

Sonucun faydası 1: 90 dolar.

Sonucun olasılığı 1: 0,01.

Sonuç 2: Sizin biletiniz çekilmiyor.

Sonucun faydası 2: 0.

Sonucun olasılığı 2: 0,99.

Bileti kabul etmenin beklenen değeri:

$$\text{Bek}(A) = (0,01)(90 \text{ dolar}) + (0,99)(0) = 90 \text{ sent}$$

Kabul etmemenin beklenen değeri: 0.

ADİL OLAN ADİLDİR

Şimdi teyzenizin cimri olduğunu farz edin. Size bileti satmayı teklif ediyor. "Ben bir dolara aldım," diyor. Teyzenize şirin görünmek istiyorsunuz ve ona bilet için 1 dolar ödemeyi düşünüyorsunuz. Bu bileti satın alma eylemine eylem B deyin. B'nin beklenen değeri nedir?

$$\text{Bek}(B) = [(0,01)(90 \text{ dolar} - 1 \text{ dolar})] + [(0,99)(-1 \text{ dolar})] = -10 \text{ sent}$$

Bu da bir şekilde bileti ondan 1 dolara aldığınızda dezavantajlı durumda olacağınızı söylemektedir. Her ikinizin de birbirinden faydalanmadığı adil bir fiyat ne olurdu?

Teyzenize 90 sent ödediğiniz üçüncü olası eylemi, C' 'yi ele alın.

Biletin üzerinde mutabık kalınan fiyatı 90 sent iken $Bek(C) = 0$ 'dır.

Bu da 90 senti adil bir fiyat gibi gösterir.

Olaya teyzenizin bakış açısından da bakmanız gerekir. Elinde bir malı var, bir piyango bileti. D eylemini yani size bileti 90 sente satmayı düşünüyor. Bu durumda malını kaybediyor, ancak 90 sent zenginleşiyor. Biletin adil fiyatı olduğunu düşündüğü fiyata x dersek, bu durumda bileti sattığı D eyleminin beklentisi şu şekilde olmalıdır:

$Bek(D) = 90 \text{ sent} - x = 0$.

O halde onun için de adil fiyat 90 sent olurdu. Diğer argümanlar da aynı sonuca götürür. İşte size bunlardan ikisi.

ADİL FİYAT ARGÜMANI 1

Piyangonun her gün çekildiğini ve her gün teyzenizin size günün oyunu için bilet teklif ettiğini farz edin. Her oyunda 100 bileten biri çekiliyor ve çekiliş sizin biletinize çıktığında 90 dolar alıyorsunuz. Yıllarca her gün oynayacak olsaydınız, oyun başına ortalama kazancınızın 90 sent olacağını bekleyebilirdiniz. Bilet başına 90 sentten az ödediyseniz, ucuza almış olurdunuz. Uzun dönemde, teyzenizden faydalanmış olurdunuz. Daha fazla ödediyseniz, teyzeniz sizden faydalanmış olurdu. O halde uzun dönemli oyunlar bakımından 90 sent bir kere daha adil bir fiyattır.

ADİL FİYAT ARGÜMANI 2

Piyangodaki bütün biletlerin hepsini ve her birini 90 sentten aldığınızı farz edin. Bu durumda 90 dolar ödeyeceksiniz. Kazanan bilete sahip olduğunuza emin olduğunuzdan 90 doları

da kazanacaksınız. Böylece ne kâr, ne de zarar durumunda olacaksınız. Bu adil bir durum gibi görünüyor ve bilet için 90 sentin adil bir fiyat olduğunu söylüyor.

Şimdi de 100 kişi olduğunu, her birinin bir bilet aldığını ve bütün biletlerin satıldığını hayal edin. Kendi aralarında toplam 90 dolar kazanacaklar. Piyango bütün oyuncular arasında tam bir simetri olacak şekilde hazırlanmıştır. Her kumarbaz diğeri kadar bilgi sahibidir. Belki de her biri piyango'nun kendisinin hilesiz olduğunu düşünmektedir; her hâlükârda, herhangi özel bir şekilde hileli olduğunu bilmiyorlar. Toplam olarak 90 dolardan fazla ödememeleri gerekir, yoksa piyango sahibi avantajlı duruma geçecek. Tek adil yol bir bilet için her birinin aynı miktarda para ödemesidir. Böylece her birinin de bilet başına 90 sent ödemesi gerekir.

GENELLEŞTİRME

Şimdi A eyleminin herhangi sonlu bir sayıdaki karşılıklı olarak birbirini dışlayan sonuçlarını ele alalım:

Sonuçlar: $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Faydalar: $U(C_1), U(C_2), \dots, U(C_n)$.

Olasılıklar: $\Pr(C_1), \Pr(C_2), \dots, \Pr(C_n)$.

Tanım:

$$\text{Bek}(A) = [\Pr(C_1)U(C_1)] + [\Pr(C_2)U(C_2)] + \dots + [\Pr(C_n)U(C_n)].$$

Başka bir deyişle, beklenen değer *olasılıkların faydalarla çarpımlarının toplamıdır*.

$$\text{Bek}(A) = \sum [\Pr(C_i)U(C_i)]$$

Beklenen değer *ağırlıklı ortalama* olarak düşünülebilir. a, b, c, d gibi dört varlığın sıradan ortalaması $(a + b + c + d)/4$ 'tür. Fakat bizim bu dört miktara farklı *ağırlıklar* verdiğimizizi, onlara $x:y:z:w$ oranlarında *ağırlıklar* verdiğimizizi farz edin. Bunu da x kere a , y kere b vb şekilde ortalamaları alarak yapabiliriz.

Böylece a, b, c, d 'nin ağırlıklı ortalaması $(xa + yb + zc + wd)/4$ olur.

İKİ BİLET

Bizim bu küçük piyangomuzda iki bilete sahip olmamızın beklenen değeri ne olurdu? Bunlardan sadece birisi 90 doları kazanabilir.

A her birinin $1/100$ olasılıkla 90 dolar kazanma şansı olduğu iki bedava bileti kabul etme eylemi olsun.

$$\text{Bek}(A) = 2[(0,01) \times (90 \text{ dolar})] = 1,80 \text{ dolar}$$

BİR ÇEKİLİŞ

Her bir biletin $1/100$ çıkma olasılığının olduğu 100 biletlik bir çekiliş düşünün. İlk çekilen bilet 90 dolarlık bir ödül verecektir. Çekilen ikinci biletse 9 dolarlık bir ödül verecektir. Geriye kalanların hiçbirisi size bir şey kazandırmayacak ya da kaybettirmeyecektir.

A'nın yani çekilişte bir bedava bilet kabul etmenin beklenen değeri nedir? Biletinizin $1/100$ olasılıkla çekilen ilk bilet olma şansı ve aynı şekilde $1/100$ olasılıkla çekilen ikinci bilet olma şansı vardır. (Biletinizin ikinci çekilen bilet olma şansı $1/99$ değildir. Neden? Daha basit bir durumu düşünün. Sadece iki biletin olduğunu farz edin. Bu durumda 90 doları alma şansınız $1/2$ olacaktır. 9 dolar alma şansınız da $1/2$ olacaktır; $1 / (2-1) = 1$ değil.)

$$\text{Bek}(A) = [(1/100) \times 90 \text{ dolar}] + [(1/100) \times 9 \text{ dolar}] = 99 \text{ sent}$$

B'nin, yani çekilişte 1 dolara bir bilet almanın beklenen değeri nedir?

$$\text{Bek}(B) = [(1/100)(89 \text{ dolar})] + [(1/100)(8 \text{ dolar}) + [(98/100)(-1 \text{ dolar})] = -1 \text{ sent}$$

Bu çekilişte bir biletin *adil fiyatı* 99 senttir. Bir dolar çok fazladır, ancak 99 sent tam da doğru fiyattır.

SOKAK HAYATI

Arkadaşım Martin şehrin önemli meydanlarından birinin köşesinde kaçak bir sokak satıcısıdır. Tipik bir gündeki sa-

tışları 300 dolara yaklaşmaktadır. Kaçak satış yapmanın cezasıysa 100 dolardır.

Martin salıdan cumartesiye kadar sokakta satış yapmaktadır. Kendisine haftada iki defa ceza kesildiğini tespit etmiştir (fakat düzenli olarak değil; bazen her gün ceza kesilirken, bazı zamanlardaysa kendisine hiç dokunulmamıştır). Herhangi bir günde kendisine ceza kesilme olasılığının %40 olduğunu ortaya koymuştur. Günde bir defadan fazla ceza kesilmemiştir ve polisin onu yıldırma gibi bir hareket tarzı da yoktur; yani ceza kesme rastgele yapılmaktadır.

Bir günlük çalışmanın beklenen değeri nedir?

W herhangi bir günde işe gitme eylemi olsun.

Varsayımlar:

- (1) 300 dolara sattığı malların maliyeti sadece 100 dolardır, o halde 200 dolar kâr etmektedir.
- (2) Ceza 100 dolardır.
- (3) Herhangi bir günde ceza kesilme olasılığı 0,4'tür. Herhangi bir günde iki defa ceza kesilme olasılığı 0'dır.

I SERBEST ÇALIŞAN

Martin her ne kadar satışa devam edecek olsa da kanuna saygı duymaya devam edecek, mahkemeye düşmemek için gelen her cezayı ödeyecektir. Bu durumda, bir günlük çalışmanın beklenen değeri

$$\text{Bek}(W) = (0,6)(200 \text{ dolar}) + (0,4)(200 \text{ dolar} - 100 \text{ dolar}) = 160 \text{ dolar}$$

Burada şöyle bir mantık yürüttük: %60 ihtimalle bütün 200 doları alma şansı var (ceza yok) ve %40 ihtimalle, cezayı ödedikten sonra net kar olarak 100 dolar alma şansı var. Bunu başka türlü de düşünebilirdik. Her hâlükârda 200 dolar olacak, fakat %40 ihtimalle 100 dolarlık ceza ödeme olasılığı olacak:

$$\text{Bek}(W) = (200 \text{ dolar}) - (0,4)(100 \text{ dolar}) = 160 \text{ dolar}.$$

Alıştırma 3'te Martin'in kanunun iyi uygulanmadığını ve mahkemeye gitmesi durumunda ona ceza kesen polisin muhtemelen mahkemeye gelmeyeceğinden davanın düşeceğini bildiği bir durumdaki beklenen değeri bulduk.

II ÇALIŞAN, DÜRÜST BİR PATRON

Farklı bir durum: Martin sokak satıcıları dünyasının büyük patronlarından birine çalışıyor. *Büyük Patron* Martin'in cezalarının hepsini ödeme sözü veriyor. Kendi tezgâhını kullandığı için Martin'den günde 50 dolar alıyor. Martin sadece *Büyük Patron*'dan satın aldığı malları satabilir. *Büyük Patron* sözünde durur, yasal işi takip edip cezaları da öderse bir günlük çalışmanın beklenen değeri ne olur? Bu kolay bir durum, çünkü Martin bir olasılığı kesin bir durumla değiştirdi.

$$\text{Bek}(C_1) = 150 \text{ dolar}$$

Bu durumda, Martin hiç riske girmiyor, fakat riskli durumla (I) kıyaslandığında, net geliri daha az.

BEKLENEN SEYAHAT SÜRESİ

Zaman para değildir, fakat bir değerdir. Beklenen değer tanımı olasılığın olduğu her türlü değerler dizisine uygulanabilir.

Kışın ortasında Ottawa, Kanada'da bir iş mülakatına gidiyorsunuz. Olası işvereniniz sizin seyahat masraflarınızı ödeyecek. İki şekilde gidebilirsiniz: Trenle ya da havaalanından uçakla.

0,2 olasılıkla kötü bir fırtına tahmini yapılıyor.

Fırtına evinizden kalkış noktasına kadar ya da varış noktasından mülakatın yapılacağı yere kadar gerekli olan zamanı etkilemeyecek. Bu zamanlar da şu şekilde:

Tren: tren istasyonuna, 30 dakika; planlanan kalkış 10 dakika sonra.

Tren: istasyondan mülakata, 20 dakika.

Uçak: havaalanına, 80 dakika; planlanan kalkış bir saat sonra.

Uçak: havaalanından mülakata, 40 dakika.

Hiç fırtına yoksa:

Trenle yolculuk süresi beş saat.

Uçakla yolculuk süresi bir saat.

Fırtına varsa:

Trenle yolculuk zamanı yedi saat.

Uçak kalkıştan önce yerde on saat bekliyor.

Tren ya da uçakla gidişin beklenen toplam saatleri nedir?

Çözüm

T ve U trene ya da uçağa binme eylemleri olsun.

$Bek(T) = 1 + (0,8) (5 \text{ saat}) + (0,2) (7 \text{ saat}) = 6,4 \text{ saat} = 6 \text{ saat}, 24 \text{ dakika}$

$Bek(U) = 3 + (0,8) (1 \text{ saat}) + (0,2) (11 \text{ saat}) = 6 \text{ saat}$

Beklenen seyahat süresi daha kısa olduğundan uçağa binmeye mi karar vermelisiniz? *Bu sizin değerlerinize, genel faydalarınıza bağlı.*

Fayda değeriniz mümkün olan en kısa süreyi seçmekse, bu durumda uçak seyahatini tercih edebilirsiniz. Fakat başka fayda değerleriniz de olabilir.

Uçağa bindiyseniz ve fırtına da olduysa, mülakatı kaçırabilirsiniz; *felaket*, iş gitti. Fakat mülakatı yapacak kişi sizi suçlamayacaksa ve fırtına olduğu için size yeni bir randevu verecekse, uçağı tercih edebilirsiniz.

Beklemek sizi gerginleştiriyorsa, bu durumda havaalanında on saat geçirmek sizi çılına döndürebilir ve mülakattan geçemeyebilirsiniz. Onun için her ne kadar beklenen seyahat süresi daha uzun olsa da, trene biniyorsunuz.

RULET

Las Vegas'ta ve Kuzey Amerika'daki çoğu kumarhanede, standart bir rulet tekerleğinde 18 kırmızı, 18 siyah ve 2 sıfır bölgesi vardır. Kırmızı üstüne 1 dolarlık basit bir bahis ancak ve ancak tekerlek kırmızı bölgede durursa 2 dolar kazanıyor. Kırmızı, K eylemi üzerine bahse girmenin beklenen değeri nedir? 18/38 ya da 9/19 olarak 2 dolar kazanma şansı ve 1 dolar ödeme kesinliği vardır:

$Bek(K) = (9/19)(2 \text{ dolar}) - 1 \text{ dolar} \approx -5 \text{ sent.}$

Monte Carlo'da ve Avrupa'daki çoğu kumarhanede, standart bir rulet tekerleğinde 18 kırmızı ve 18 siyah bölge ve sadece 1 sıfır bölgesi vardır. Kırmızı üstüne 1 dolarlık basit bir bahis ancak ve ancak tekerlek kırmızı bölgede durursa 2 dolar kazandırıyor. Böyle bir bahsin beklenen değeri nedir?

$Bek(K) = (18/37)(2 \text{ dolar}) - 1 \text{ dolar} \approx -3 \text{ sent.}$

LOTO

Dünyanın birçok yerinde Loto 6/49 devlet tarafından oynatılan en sık rastlanan kumarlardan biridir. 1 dolar ödüyorsunuz. 1'den 49'a kadar 6 farklı sayı seçiyorsunuz. Loto şirketi 1'den 49'a kadar rastgele 6 sayı çekiyor. Sizin 6 sayınız çekilen sayılarla eşleşirse, muazzam bir ödül kazanıyorsunuz. Sistemin ödediği miktarlar bir yerden başka bir yere küçük değişiklikler gösteriyor, ama en yaygın sistemlerden biri şu:

Piyango şirketi belirli bir gündeki yatırılan toplam paranın %55'ini alıyor.

Bu paranın bir kısmı yönetime gidiyor; %55'in kalan kısmı hayır kurumuna veriliyor ve %45'i de ikramiye olarak dağıtılıyor.

Üç numarası tamamen eşleşen her bilet tam 10 dolar alıyor.

Dört numarası tamamen eşleşen her bilet tam 100 dolar alıyor.

Geriye kalan ikramiye parasının %15'i eşit olarak beş numarası tamamen eşleşen biletler arasında dağıtılıyor.

Geriye kalan para da bütün numaraları eşleşen biletler arasında eşit olarak dağıtılıyor.

Hiç 6 eşleşen (ya da 5 eşleşen) bilet yoksa bunlara ayrılan toplam para bir sonraki çekilişin toplamına ekleniyor. Bunun için büyük ikramiye bir hafta 2 milyon dolar-ken, birkaç hafta sonra 17 milyon dolar olabiliyor.

Birçok piyangonun bonus denilen sistemleri vardır, fakat bu ikramiye olarak ödenen toplam para miktarını etkilemez. %55'lik haksız kâr payı belki de Kuzey Amerika'da kullanılanların en kötüsüdür, fakat genel olarak kamuya sunulan bu tür piyangolar geriye sadece brüt gelirlerin yaklaşık yarısını ödemektedir. Yani bir anlamda kamuya sunulan bu tür piyangoları bir tür gönüllü vergi ödeme gibi düşünebilirsiniz.

16. yüzyılın başlarında İtalyan şehir devletlerinde Loto 6/49 gibi piyangolar tam da bu amaç için sunulmuştur. (1535 civarındaki bir tabloda Şans'ın piyango biletlerini elinde tuttuğu kapak illüstrasyonuna bakın.) En uzun süreli oynanan piyango İspanya'dadır. Her ne kadar oyun Aralık 1763'ün sonlarında sunulduysa da, Napolyon tarafından kuşatılan şehrin savunmasına para sağlamak için piyangonun organize edildiği 4 Mart 1812 tarihinden beri düzenli bir Loto olarak oynanmaktadır. İspanya'da büyük Noel piyngosu ulusal bir olaydır ve her köy blok olarak bilet satın alır. Bu *Navidad* (İsa'nın doğuşu) piyngosu, dünyanın en büyük piyngosudur. Noel'den hemen önce yaklaşık olarak *bir milyar dolar* değerinde bilet satılmıştır ve bu da İspanya'da yıl içerisinde çekilişi yapılan piyangolardan sadece birisidir. (Karşılaştırma: Hükümetlerin yönettiği dünyadaki piyango bilet satışlarının toplamı yaklaşık olarak 80 milyar dolardır.) *Navidad* bilet fiyatlarının %70'ini kumarbazlara geri öder. Karşılaştırma yaparsak, Kuzey Amerika'da piyango biletlerinden en iyi geri ödeme oranı %53 ile Iowa'dadır. Rakam Ontario'da %45'e gelir.

LOTO 6/49'UN BEKLENEN DEĞERİ

Gelişigüzel bir Loto 6/49 biletini rastgele satın alma eyleminin beklenen değeri nedir? Uzun dönemde her doların 45 senti ikramiye olarak geri ödendiğinden, beklenen değer $(45 \text{ sent} - 1 \text{ dolar}) = -55 \text{ senttir}$. N verilen büyük ikramiyenin ödendiği bir piyangoyla bir sonraki piyango arasında satılan bilet sayısıysa, toplam ödeme $0,45 \times N$ dolardır.

Yapay rastgeleleştiriciye dayalı her standart kumarın Loto 6/49'dan (ve kumar oynayan halka açık olan benzer pi-

yangolara göre) ÇOK daha yüksek bir beklenen değeri vardır. Ve birazdan göreceğimiz gibi verdiğimiz bu haber Loto oyuncularını için kötü haberlerin sonu değildir.

Ontario'da geliş güzel bir Loto 6/49 biletini satın almanın beklenen değeri -55 senttir. Ya da: Rastgele seçilen tek bir biletin adil ücreti 45 senttir. Kumarhanenin uzun dönemde aldığı bu yüzdeye *kasa avantajı* denir. Belirtilen geri ödeme kuralı kullanıldığında Loto 6/49'daki avantaj %55'tir.

Ancak tek bir piyangodaki bir biletin beklenen değerini hesaplayamazsınız. Diyelim ki, birinci haftada ikramiye 1.800.000 dolar. Büyük ikramiyeyi dört hafta kimse kazanmazsa, beşinci haftada kazanılırsa, büyük ikramiye 17.000.000 dolar olabilir. Beşinci hafta yerine birinci haftada bir bilet almanın beklenen değerini önceden iyi bir şekilde hesaplayamazsınız, çünkü beklenen değer satılan bilet sayısına bağlıdır.

Öyle görünüyor ki neredeyse herkes beşinci haftanın piyango çekilişi için bilet almayı tercih edecektir. Büyük ikramiye duyurulunca satışlar kesinlikle dramatik bir şekilde artacaktır. Fakat belki de "neredeyse herkes" yanılıyordur.

Çekilişteki biletlerin sayısı duyurulan büyük ikramiyeye bağlıdır, çünkü daha çok kişi 1.800.000 dolar yerine 17.000.000 dolar için bahse girmek ister. Bu, düşük ikramiyeleri etkilemez (3 ya da 4 rakam tutturmalar), fakat birden çok kişinin büyük ikramiyenin numaralarını tutturma olasılığını arttırır. Büyük ikramiyeyi iki kişi kazanırsa, her biri sadece 8.500.000 dolar alacaktır. 17 kişi kazanırsa, her biri sadece 1.000.000 dolar alacaktır.

GERÇEK OLASILIKLAR

Loto 6/49'da gerçek kazanma olasılıkları şöyledir:

6 tutturmanın şansı: Yaklaşık olarak 14 milyonda 1 (13.983.816'da 1).

Tam olarak 5 tutturmanın şansı: Yaklaşık olarak 54.000'de 1 (13.983.816'da 258).

Tam olarak 4 tutturmanın şansı: Yaklaşık olarak 1032'de 1.

Tam olarak 3 tutturmanın şansı: Yaklaşık olarak 56'da 1.

Bu bahis oranları ne anlama gelmektedir? Haftada 100 bilet satın aldıysanız (hafta başına 100 dolar), gelecek 2700 yılda 50'ye 50 olasılıkla büyük ikramiyeyi kazanma şansınız vardır.

%55'lik kasa avantajıyla, Loto 6/49 kumarbaza dolar başına herhangi bir kumarhane bahsinden çok çok daha az beklenen değer sağlar.

Kumarhanelerin çoğunda yapay rastgeleleştiriciye dayalı birçok kumar vardır: Blackjack (21), bingo, çeşitli poker türleri, rulet, barbut. Eski kumarbazlar karmaşık kuralları severler. Örneğin *barbut* karmaşık bahis düzenlemesiyle zarif bir masada oynanan hareketli bir zar oyunudur. Barbutta kasa avantajı bahsin türüne göre değişir. Barbut oyunundaki bahislerin çoğunda kasa avantajı sadece %1,4'tür. Lotodaki kasa avantajıysa %55'tir. *Navidad*'da bile avantaj %30'dur. Yine de, Loto 6/49'da haftada sadece iki defa kumar oynayabilirsiniz ya da *Navidad*'da yılda bir kere. Barbut masasında bir saat geçirirseniz ve her gelen zar için bahse girerseniz, çok kaybedersiniz; çünkü oyun o kadar hızlı döner ki birçok bahse girersiniz ki bunlar da hep kasanın hanesine yazılır.

Kuzey Amerika'da hemen hemen her yerdeki kitlesel kumar oyunlarında kullanılan başlıca rastgeleleştirici, bir zamanlar dönen tekerlekleri olan mekanik bir aletken, şimdi bir video oyunu olan *kumar makinasıdır*.^{*} Kasa avantajı her zaman kasa tarafından ayarlanabilir. Önceden, Las Vegas'ta ya da Atlantic City'de, kasanın avantajı yaklaşık olarak %3'tü, hatta bazı kasalar %2'lik bir avantajı duyuruyorlardı. Her ne kadar barbuttaki avantaj kumarbaz için daha iyiye de kumar makinesiyle bir saatte daha fazla bahis yapabilirsiniz, onun için de kumar makinesine göre kayıplarınız daha çok olabilir.

GERÇEK KAZANÇLAR

Bir Loto 6/49'un adil fiyatının 45 sent olduğunu söyledik. Fakat bu her zaman bu kadar basit değildir. Bu nerede yaşadığınıza bağlıdır ve her ne kadar insanların oynadıkları

* Slot machine –çn.

iddia türü, piyangolar tamamen aynı kuralları kullansalar da para cinsinden beklenen değer farklı insanlar için farklılık arz edebilir.

Çünkü bu dünyada piyango kurallarından daha fazla kural vardır. Gelir vergisi diye bir şey var.

Kanada'da vatandaşlar piyango kazançlarından gelir vergisi ödemiyorlar. Böylece Kanadalılar ulusal piyangolarıyla kumar oynarlarsa, 1 dolarlık biletlerinin beklenen değeri aslında -55 sent olur. İspanyollar piyango kazançlarından gelir vergisi ödemiyorlar. Böylece 100 pesetalık bileti olan bir İspanyol için beklenen değer -30 pesetadır.

Ancak Amerika vergi mükellefleri piyango kazançlarından gelir vergisi ödüyorlar. 17 milyon dolar gibi gerçekten çok büyük ikramiyeler için kesilen vergi çok fazla olacaktır. Böylece elverişli piyango biletini -Iowa'dan- satın alan bir Amerikalı için piyangoonun gerçek net beklenen değeri -47 sentten de kötü görünmektedir. Ama işler daha da karmaşıktır. Amerika vergi kanunları kumarbazların bahislerini ve piyango biletlerini "yatırımlar" olarak vergiden düşmelerini mümkün kılmaktadır. (İspanya ya da Kanada'da buna müsaade edilmemektedir). Böylece sıfır gelir vergisi ödeyen fakir bir Amerikalının 1 dolarlık biletinin gerçek maliyeti 1 dolar-ken, bu rakam %28'lik (marjinal) vergi oranıyla vergi ödeyen zengin bir Amerikalı için sadece 72 senttir.

Problemi birleştirirsek, Amerikan piyangoları muazzam kazançları yıllık yirmi takside bölerler, öyle ki gelir vergisi yükümlülüğü azalsın. Bu da vergiden bile önce, muazzam ikramiyenizin tamamından daha azını almanız anlamına gelmektedir, çünkü para elinize şimdi geçmiyor ve enflasyon ödentisi almıyorsunuz ya da bağlı kalan paranız için azami faiz oranını almıyorsunuz. İki milyon dolar kazanırsanız, piyango yönetiminin size iki milyon doları yirmi yılda ödemek üzere sadece bir milyon doları, garantili getirilere yatırması gerekiyor.

Şimdiye kadar verilen getiri kuralları Ontario içindi. Orada kasanın kazancı %55'tir. Iowa eyalet piyangosunun getirisi %53'dir, o halde orada kasa Ontario'dan daha az gibi

görünüyor. Fakat aslında, büyük getirilerde Iowa piyango-su Ontario'daki benzer ikramiyelere göre çok daha az ödemektedir; birisi 2 milyon dolar "kazandığında" o sadece 1 milyon doları bir kenara ayırmaktadır. O halde Iowa'daki kasa aslında piyango için Ontario'daki kasadan çok daha avantajlıdır.

Bu gözlemlerdeki amaç sadece gerçek durumla ilgili bir kontrol yapmak ve gerçek durumu ortaya koymaktır. Her piyangoda tekrarlanan bilet satın almalarında beklenen değerin Ontario için -55 sent ve Iowa için -47 sent olduğunu söylemek net ve açık bir şeymiş gibi gelmektedir. Ancak gerçek hayat nadiren basit bir hesaplama kadar net ve düzenlidir.

İNANILMAZ BAHİS ORANI: SADECE 5500 BİLET SATILABİLİR!

Ulusal bir bale şirketi şatafatlı bir piyango düzenliyor. Sadece 5500 bilet var. Her biletin maliyeti 100 dolar. İkramiye çekilişleri sekiz aylık bir sürede yapılıyor, birinci çekiliş kasımda ve son çekiliş de haziranda yapılıyor. Biletler ekimle mayıs arasında satılıyor. İkramiyeler:

2500 dolar para ödülü. Çekiliş tarihi: 24 Kasım.

7500 dolar Bang & Olufsen lüks TV/VCR. Çekiliş tarihi: 7 Ocak.

10000 dolar Visa seyahat çeki olarak. Çekiliş tarihi: 4 Mart.

6600 dolar Tayland'a iki kişilik seyahat. Çekiliş tarihi: 18 Mayıs.

"Mercedes Benz 300SL - 100.000 dolar değerinde müthiş yeni model." Çekiliş tarihi: 1 Haziran.

Ve çekiliş yerine koyarak yapılıyor. Organizatörler çekilişten önce bütün biletlerin satılacağı beklentisi içerisinde değiller. Fakat 24 Kasımdan önce bir bilet satın aldığınızı ve 5500 biletin hepsinin o zamana kadar satıldığını farz edin. Bu eylemin beklenen değeri ne olurdu?

$$\text{Bek}(A) = [(1/5500)(2500 \text{ dolar} + 7500 \text{ dolar} + 10.000 \text{ dolar} + 6600 \text{ dolar} + 100.000 \text{ dolar})] - 100 \text{ dolar} = -77 \text{ dolar}$$

Ya da, durumu başka türlü ifade edersek, bir bale piyango biletinin adil fiyatının yaklaşık olarak 23 dolar olacağını düşünebilirsiniz.

HANGİ PİYANGOYU TERCİH EDERDİNİZ?

Vergi ve benzeri şeyleri dikkate almaksızın, Loto 6/49'da yüz adet 1 dolarlık biletin adil fiyatı 45 dolardır.

Bale piyangosundaki 100 dolarlık bir biletin adil fiyatı yaklaşık olarak 23 dolardır.

Loto 6/49 neredeyse bale piyangosundan iki kat daha iyi gibi görünüyor. Bale neden "inanılmaz bahis" diyor? Loto 6/49'un yanlış reklam nedeniyle dava açması gerekmez mi? Çünkü beklenen değeri daha iyi.

Hayır, çünkü piyangolar farklı şekillerde karşılaştırılabilir.

Bale piyangosundaki her 1100 biletten birisinde ciddi meblağda bir ikramiye verilmesi söz konusu. O halde, organizatörlerin belirttiği gibi "bahisler inanılmazdır" ya da her hâlükârda, büyük bir ikramiye kazanma şansı ihmal edilemez. Tersine, Loto 6/49'da en büyük ikramiye kazanma şansı ihmal edilebilir düzeydedir.

O halde istediğiniz şey "oldukça iyi" bir fiyata "makul bir şans" ise, size mutlak olarak muazzam bir ikramiye için bir dakikalık bir şans sunan ve hayatınızı değiştirecek bir eylem yerine daha düşük beklenen değeri olan bir eylemi seçebilirsiniz.

UCUZ MACERA

Fakir bir insanın piyango bileti satın alması aptalca bir şey midir? Belki de değildir. Sadece büyük bir ikramiye için bir şans satın almıyorsunuz. Bir macerayı, bir heyecanı, bir umudu ya da bir fanteziyi satın alıyorsunuz. Bir piyango bileti satın almanın sonuçlarından biri mutabık kaldığınız bir fantezi yaşamaktır. Fakirleştikçe sadece hayata tutunmak

için bu fantezilere daha çok ihtiyaç duyabilirsiniz. Bu tür fantezilerin rahat bir işi ve iyi beklentileri olan bir kişiye göre fakir birisi için “daha değerli” olabileceğini söyleyebilirsiniz. O halde az kazanma şansı olan bir piyango bileti satın almak o kadar da aptalca bir şey olmayabilir.

Çok fakir olduğunuzu ve üniversite öğrencilerinin tersine rahat bir hayat yaşama ihtimalinizin olmadığını farz edin. 2,50 dolara hayatınıza biraz ümit katarsınız. Bu durumda 1 dolarlık bir piyango bileti sudan ucuz olur. (Bu varsayımda) bir bilet satın almanın beklenen değeri +1,95 dolardır.

Böylece daha müreffeh çoğu insanın söylediğinin tersine, fakir insanların kolay kazanmadıkları paralarının bir kısmını bir tür gönüllü vergi için harcamalarının mantıklı olmadığı bariz bir durum değildir. Fakat sefil bir dünyada, bu çoğu fakir insanın hayatlarına biraz olsun ümit katacakları tek yoldur.

MARTINGALES*

Martin kumar oynamayı seviyor, fakat risk almayı sevmiyor. “Garantili bir kazanma stratejim var” diyor. “Dürüst bir ganyan bayii olan *Bay Gale* ve *Bay Gale*’in bütün bahislerini garanti edecek şekilde varlıklarını kontrol eden dürüst bir bankacı biliyorum.” Peki, stratejin nedir diye soruyoruz.

“*Bay Gale* adil bir parayla yazı-tura atıyor. Tura geldiğinde herhangi bir para miktarıyla, (diyelim ki) 10 dolarla başlayarak bahse girebilirsiniz. Tura üzerine N dolar bahse girdiyseniz ve kazandıysanız, o size $2N$ dolar verecek, böylece bu bahisten net karınız N dolar olacaktır. Aksi takdirde, o sizin N dolarınızı alıkoyacak, yani bu para onun kârı olacaktır.

* Olasılık kuramında *martingale* geçmiş olayların bilgisinin hiçbir zaman gelecekteki kazanmaların ortalamasını tahmin etmeye yardımcı olmadığı adil bir oyun modelidir. Tarihçesi: Köken olarak martingale 18. yüzyılda Fransa’da çok popüler olan bir dizi bahis stratejisine atıfta bulunmaktadır. Bu stratejilerin en basiti yazı-tura atılan bir oyunda kumarbazın ortaya konulan ödülü para tura gelince kazanıp yazı geldiğinde kaybetmesi üzerine tasarlandığı bir oyundur –çn.

"Başlangıçta 10 dolarla bahse giriyorum. Kaybedersem, 20 dolarla bahse giriyorum ki kazanabileyim ve kazandığımda da kayıplarımı (10 dolar) telafi edeceğim ve biraz kâr edeceğim (10 dolar). Tekrar kaybedersem, cebimden 30 dolar çıktığından, bir sonraki yazı-tura atışında 40 dolara bahse gireceğim. Bu şekilde devam edeceğim, n kayıplık bir seriden sonra, $2^n \times 10$ dolar bahse gireceğim. "Er ya da geç adil bir parayla tura gelecek, böylece sonunda 10 dolar kazanmış olacağım. İyi bir fikir, değil mi?"

"Fakat yakın bir zamanda bahse gireceğin para miktarı çok büyük olacak" diye dikkatini çekiyoruz. "Peki, *Bay Gale* bahsinizi garanti edemezse ne olacak?" *Martin*'in iyi bir cevabı var:

"Bankacı ganyan bayiinin ben oynamayı bırakana kadar kazandığı bütün parayı bankaya yatırdığını garanti altına alıyor. Sonunda kazandığımda, alacağım bütün para onun benden kazandığı para artı 10 dolar olacağından, benim kayıplarımı karşılayacağını biliyorum."

Bu durumda *Martin*'e daha zor bir soru soruyoruz: "Fakat er ya da geç paran bitecek! On defa arka arkaya yazı geldikten sonra, 10 dolar kazanmak için 10.240 dolar bahse girmen gerekecek. Ve o zamana kadar da zaten 10 dolar + 20 dolar + 40 dolar + 80 dolar + ... kaybetmiş olacaksın. Böylece para arka arkaya 10 defa yazı gelirse, toplam olarak 20.480 doları riske atman gerekecek. Ve işler daha da kötüye gidebilir! Para arka arkaya 15 defa yazı gelirse, bahse girdiğin para karşısında pek de değeri olmayan bir 10 dolar kâr elde etmek üzere oyuna devam edebilmek için 655.360 dolarlık bir sermayeyle başlamış olan gerekecek. Er ya da geç paran bitecek."

Doğru olan şu ki, *Martin*, parası bitene kadar ara ara küçük paralar kazanacaktır.

Martin'in *Bay Gale*'e karşı uyguladığı planın tarihi çok eskilere dayanmaktadır. Bu, "martingale" diye bilinen şeye bir örnektir. Bu isim 200 yıldır kullanılmakta, ancak nereden geldiğini hiç kimse bilmemektedir.

ST. PETERSBURG OYUNU

Yoksulluktan sınırsız zenginliğe geçerek bitiriyoruz. Sağlam bir şans kurgusunda yazı-tura atılan adil bir parayı hayal edin.

Para bir kere atıldı. Tura gelirse, 2 dolar ödül alıyorsunuz ve oyun bitiyor.

Tura gelmezse, bir kere daha atılıyor. İkinci atılışta tura gelirse, 4 dolar alıyorsunuz ve oyun bitiyor.

Tura gelmezse, tekrar atılıyor. Üçüncü atılışta tura gelirse, 8 dolar alıyorsunuz ve oyun bitiyor. Ve böylece gidiyor.

İlk tura atıldıktan sonra oyun bitiyor. İlk tura n . atılışta gelirse, ödül 2^n dolar oluyor.

GARİP BEKLENTİLER

Bu oyunu oynamanız için size bir fırsat tanındı, ancak sizden bir giriş ücreti alınacak. Adil fiyat nedir? Buna x deyin.

S , bu oyunu oynamak için x ödeme işlemi olsun.

N , oyunun n . atılışta bittiği olay olsun.

$$U(N) = 2^n$$

$$\Pr(N) = (1/2)^n$$

x adil fiyatıysa bu durumda

$Bek(S) - x = 0$ olmalıdır. Bu da $x = \sum [(1/2)^n (2^n)]$ anlamına gelmektedir.

$n = 1$ için, $1/2 \times (2 \text{ dolar}) = 1 \text{ dolar}$ olur.

$n = 2$ için, $1/4 \times (4 \text{ dolar}) = 1 \text{ dolar}$ olur.

Herhangi bir n için, $1/2^n \times (2^n \text{ dolar}) = 1 \text{ dolar}$ olur.

O halde adil fiyat $1 \text{ dolar} + 1 \text{ dolar} + 1 \text{ dolar} + 1 \text{ dolar} + \dots$ olur.

Bu da adil fiyatın sonsuz olması gerektiği ya da her hâlükârda, adil fiyat için bir üst sınır olmadığı anlamına gelmektedir.

Başka türlü söylemek gerekirse, oyuna girmek için ödeyeceğiniz para ne olursa olsun, girişin beklenen değeri sonsuzdur ya da en azından üst sınırı yoktur.

PARADOKS

"Paradoks" kelimesinin çeşitli anlamları vardır. Mantıkçılar kelimeyi aşağıdaki şekilde kullanırlar:

Görünürde kabul edilebilir olan öncüllerden mantık yürüterek görünürde birbiriyle çelişen ve anlamsız sonuçlar çıkaran bir argüman.

St. Petersburg oyununun garip beklenen değeri bir paradoksa yol açıyor gibi görünmektedir.

Saçma sonuç şudur ki, bu oyunu oynamanın adil fiyatı siz ne kadar istiyorsanız o kadardır. Bu saçmadır ve herkes de bunu bilir. Bu oyunu şu anda sahip olduğunuz ve hayatınız boyunca kazanacağınız gelirle oynama şansını kabul edermiydiniz? Şüphesiz hayır.

Bir dakika düşünün. Bu oyuna girmek için ne kadar ödersiniz?

Cevabınızı buraya yazın: _____

Oyunun bir zaman sonra sona ereceğini varsayarsak, öyle görünüyor ki oyuna girmek en azından 2 dolar etmeli, çünkü geriye en azından 2 dolar almalısınız.

Çok az sayıda insan 5 ya da 6 doların üzerine çıkar.

St. Petersburg paradoksuna yol açan argümandaki sorun nedir? İşte size olası bazı cevaplar.

ÇÖZÜM 1: HER TÜRLÜ SONLU ÜCRET DÜŞÜKTÜR!

Paradoks yoktur. Bu oyunda şansın beklenen faydası için gerçekten bir üst sınır yoktur. Şüphesiz, çoğu zaman oyun birkaç yazı-tura atışından sonra sona erer ve ödülü de küçüktür. Fakat ödülün ne kadar büyük olduğunu düşünürseniz düşünün, biraz kazanma şansı vardır. Fiyatı ne olursa olsun, bu Loto 6/49'dan daha iyi bir bahistir.

Hazır Cevap: Akli başında hiç kimse bu oyuna girmek için fazla para ödemez.

ÇÖZÜM 2: OYUN İMKÂNSIZDIR

Gerçek bir para zamanla aşınır: Daha da önemlisi, 40 ya da o civarda yazı-tura atışından sonra gerçekte var olan her banka iflas eder.

Hazır Cevap: Yeteri kadar doğru bir tespit, fakat biz burada ideal bir oyundan bahsediyoruz. Hayalimizde, en azından, bu oyuna girmek için gereken adil fiyat hakkında bir soru sormak mantıklıdır. Ve her ne kadar oyunun 40 yazı-tura atışından sonra –iflas ya da başka bir neden yüzünden– biteceğini düşünseniz de, para arka arkaya 41 defa yazı gelirse ödeme olmayacağından dolayı bu oyuna girmek için 50 dolar bile ödeyebilir misiniz? Neden olmasın? 50 dolarlık bir yatırımdan kâr etmek için yapmanız gereken tek şey 6 defa yazı-tura atmaksa, bu 6 atıştan sonra size ödeme yapacak hiçbir banka iflas etmez.

ÇÖZÜM 3: HİÇ BİR BEKLENEN DEĞER TANIMLANMAMIŞTIR

Beklenen değeri tanımlarken dikkatsizlik yaptık. Beklenen değer çarpımların bir toplamı olarak tanımlandı (olasılıklar çarpı faydalar). Toplam sadece bir üst sınırı varken tanımlandı. Bu yüzden St. Petersburg oyununu oynamanın beklenen değeri tanımlanmadı.

Hazır Cevap: Bu, huzursuz edici oyunu kapsamaz; fakat neden? Bu “canavar engellemedir.” Bir canavarla karşılaştığınız için tanımınızı kısalttınız, fakat tanımın neden bu şekilde sınırlanacağına dair hiçbir açıklama yapmadınız.

ÇÖZÜM 4: AZALAN MARJİNAL FAYDA

Fakir bir insan için 1 dolar çok değerlidir, fakat zengin bir insan için değil. Küçük paralarda her doların diğer dolar kadar değerli olduğu şeklindeki uygun bir masala inanabiliriz. Öyle ki bankadaki hesabında 14 doları olan birisi için fazladan 1 doların değeri, yastığının altında 35 doları olan birisi için olduğu kadar değerli olabilir. Ancak, bir milyoner için

fazladan 1 doların değeri, fakir bir öğrenci için olan değeriyle aynı değildir.

Hâlihazırda R'ye sahip olduklarında ve R miktarı verildiğinde Q miktarının **marjinal faydası**, kişinin zenginliğine Q ekleme faydasıdır. Ve R kazanmayı Q + R kazanmayla karşılaştırırsak, Q'yu kazanmanın ek değerinin Q değil de, R verildiğinde, Q kazanmanın marjinal faydası olduğunu görürüz.

Doğal logaritmaya aşına olanlar için teknik bir not: Paranın azalan marjinal faydası için çok bilinen basit eğri $U(x \text{ dolar}) = (\log x) \text{ dolardır}$.

St. Petersburg oyununda, $(n + 1)$. Yazı-tura atışında n . yazı-tura atışında kazandığınız paranın iki katını kazanırsınız. Fakat bu sizin iki kat değer ya da fayda elde ettiğiniz anlamına gelmez. 2^n doların iki katının marjinal faydası, 2^n dolar verildiğinde, (2^{n+1}) dolar – 2^n dolardan azdır. İşte bu da azalan marjinal fayda durumudur.

Hazır Cevap: Azalan fayda fikri ekonomide çok önemlidir, fakat St. Petersburg oyununda olduğu gibi başarılı bir şekilde uçlardaki paradoksun üstesinden gelmeyi sağlamaz. Detaylara girdiğinizde ve marjinal fayda için bir ihtiyat payı bıraktığınızda, giriş fiyatının hâlâ gerçek hayatta kimsenin riske etmeyeceği kadar yüksek olduğunu görürsünüz.

Sorunlardan birisi de şu ki oyunu bir kere oynayacaksanız muhtemelen 20 dolar bile harcamak istemeyeceksiniz; bu durumda faydaları gerçek duruma kıyasla çok çok hızlı azaltmanız gerekecek. Ve kazanmadan önce birçok kere oynayabilerseniz, bunun için çok büyük bir sermayeniz olması gerekecek ve bu durumda kazanmayı beklediğiniz fayda hiçbir şekilde buna değmeyecektir.

ÇÖZÜM 5: DÜŞÜK ŞANSLAR

Bale piyangosuyla Loto 6/49 arasındaki farkı hatırlayın. Refah içindeki bazı insanlar Loto 6/49 için yüz adet 1 dolarlık bilet almak yerine bale piyangosunda 100 dolarlık kumar oynamayı tercih ederler. Çünkü bale piyangosunda ciddi meb-

lağda bir ödül kazanmanın olasılığı daha fazladır ("5500'de 1"). Belki de St. Petersburg oyunundan bir pay elde etmenin imkânsızlığının besbelli oluşu, oyunun bu kadar cazibesiz oluşunun nedenlerinden biridir.

DANIEL BERNOULLI

St. Petersburg problemi uzun süredir olasılık kuramcılarının zihnini meşgul etmektedir. Bu problem meşhur İsviçreli matematikçiler ailesinin üyelerinden birisi olan Daniel Bernoulli (1700–1782) tarafından incelenmiştir (aslında problemi ona kardeşi Nicholas aktarmıştır). Bernoulli çalışmalarının çoğunu o zamanlar Rusya'nın başkenti olan St. Petersburg'da yapmıştır. Daniel, olasılığa katkı yapan daha da meşhur birinin, Jacques Bernoulli'nin (1654–1705) yeğeniydi. Bernoulli'nin teoremlerinden birisi 16. bölümün de konusudur.

Daniel Bernoulli, paradoksunu modern ekonomi için merkezi bir düşünce olan azalan marjinal fayda kavramını geliştirmek üzere kullandı. Para için çok büyük kazançların marjinal faydasının çok küçük olduğu bir fayda fonksiyonu önerdi. Böylece St. Petersburg oyunu için sonlu bir beklenen değer elde etti.

Bazı insanlar sadece eğlence olsun diye paradoks icat ederler. "Sadece sinir etmek için oynarlar, çünkü tahrik ettiğini bilirler." Fakat paradokslar faydalı olabilir. Bizi düşüncemizdeki bazı belirsizlikler üzerinde odaklanmaya zorlarlar. Paradoksa karşı verilecek en iyi reaksiyon gerçekten yeni ve derinliği olan bir düşünce ortaya koymaktır. Daniel Bernoulli azalan marjinal fayda fikrini geliştirdi.

MANTIK YA DA DÜŞÜNME SANATI

Modern olasılık fikirleri yaklaşık olarak 1660'larda başladı. İlk aksiyomlar, Christiaan Huygens sayesinde, 1657 yılında Felemenkçe olarak yayımlandı. Bugünlerde tümdengelim mantığıyla ilgili az sayıda kitabın son birkaç bölümü olasılık ve tümevarımla ilgilidir. Bunlar da 1662'de ortaya konan bir örneği, Fransızca olarak *Mantık ya da Düşünce Sanatı*

adıyla yayınlanan bir kitabı takip ederler. Bu bölümler Blaise Pascal'dan (1623–1662, bkz. 10. Bölüm) çok etkilenmiştir. Bölümler, kararların ve aslında ümit ve korkunun da iki şeye bağlı olduğunu açığa çıkarmıştır: Neye inandığınıza ve ne istediğinize (ya da istemediğinize). Bunlar *olasılık* ve *fayda*-ya bağlıdır.

Çoğu insan gök gürültüsünü duyunca haddinden fazla korkuya kapılır... Onların bu olağandışı evhamına neden olan şey yıldırım nedeniyle ölme tehlikesiyse, bunun mantık dışı bir şey olduğunu göstermek kolaydır. Çünkü iki milyon insan içinde en fazla bir kişi bu şekilde ölmektedir. Hatta şiddet içerikli bir ölümün olmadığını da söyleyebiliriz; bu daha az rastlanan bir şeydir. Ölüm korkumuzun sadece verilen zararın boyutuyla değil, aynı zamanda olayın olasılığıyla da orantılı olması gerekir. Tıpkı yıldırım çarpmasıyla meydana gelen ölümden daha az rastlanır başka bir ölüm türü olmadığı gibi, aynı şekilde yıldırım çarpmasından daha az korku yaratacak başka bir ölüm de yoktur.

Böylece olasılık kuramının ilk başlarından beri insanlar riskin iki faktörü olduğunun farkındaydı: Sonuçlarının vahameti ve bu sonuçların oluşma olasılığı ya da ihtimali.

Yıldırımdan korkarız. *Mantık ya da Düşünce Sanatı* umutlar hakkında da aynı gözlemi yapmaktadır. Loto 6/49'da sadece 17 milyon dolar olan büyük ikramiyeyi düşünmeyin! Unutmayın, biletinizin kazanma olasılığı yaklaşık olarak 14 milyonda birdir. Tam da olasılığı unuttuğumuzda piyango-nun cazibesine kapılırız.

İnsanlar 1 dolarla 20.000 dolar kazanmak oldukça avantajlı bir şey değil midir diye sormaktadır. Herkes büyük ikramiyeyi kazanan mutlu kişinin kendisi olacağını düşünür. Fakat hiç kimse, örneğin 20.000 dolar değerindeki bir büyük ikramiyeyi kaybetmenin her bir kişi için kazanmaya göre 30.000 kat daha olası olduğunu dile getirmez. Bu akıl yürütmedeki kusur şudur: Bazı iyi şeyleri elde et-

mek ya da bazı zararlardan kaçınmak için ne yapmamız gerektiğine karar verirken, sadece iyi şeyi ya da zararın kendisini değil, aynı zamanda onun meydana gelip gelmeme olasılığını da dikkate almamız gerekir.

1662 yılında yayınlanan karar verme kuramı bu cümlelerle başlar.

ALIŞTIRMALAR

- 1 *Kış seyahati.* Bir aralar şehrimizde kışın ortasında ciddi bir kar fırtınası olacağı tahmini yapılmıştı. Oğlum Oliver'in bir günlük bir iş için kenar mahallelerdeki uzak yerlere gitmesi gerekiyordu. Ona toplu taşıma araçlarını kullanmasını, çünkü iş yerine kadar bu araçların gittiği yolların çoğunun yeraltından geçtiğini ve kötü hava koşullarından etkilenmeyeceğini söyledim. Bana arabayı alsam daha iyi olacak dedi. Olasılıklar, faydalar ya da her ikisi konusunda ayrı fikirlerde olmamız olası mıdır?
- 2 *Reklam kampanyası.* Bir reklam kampanyası paketin arkasındaki kuponu yırtmanızı ve onu yarışma adresine postayla göndermenizi söylüyor. Şanslı kişi siz olursanız, 10.000 dolar değerinde bir ödül alacaksınız. Gönderilen her 40.000 kupondan biri çekilecek. Diyelim ki postayla gönderme maliyeti (posta masrafı, zarf, vb) 45 sent. M: Kuponu postayla gönder, eyleminin beklenen değeri nedir?
- 3 *Sokak satıcısı: Cezalar uygulanmıyor.* Koşullar sokak satıcısı Martin hakkındaki ilk hikâyemizdekiyle aynı, sadece Martin kanunların çok az uygulandığını biliyor. Sadece mahkemeye çağrılır ve ceza kesen polis de o gün mahkemeye gelirse cezayı ödeyeceğini biliyor. Kesilen ceza bileti için bu olayın olma şansı sadece %20'dir. Bir günlük işinin beklenen değeri nedir?
- 4 *Kötü bir patronu olan sokak satıcısı.* Sokak satıcısı hakkındaki ikinci hikâyeyeyle aynı, tek şartla: *Büyük Patron* güvenilir birisi ve kullanabileceği herkesi kullanmak için her şeyi yapacaktır. Martin *Patron'a* güvenmiyor ve

biliyor ki verilen bir ceza mahkemeye aksetmeden önce *Patron*'un bu cezayı ödeme olasılığı sadece %75'tir. O halde kesilen cezaların %25'inde ceza biletleri mahkemeye aksediyor. Fakat 3. soruda olduğu gibi mahkemeye akse-den ödenmemiş bir cezalarla ilgili olarak gerçekten ceza çıkma şansı %20'dir. Bir günlük işi beklenen değeri nedir?

- 5 *Mümkün olan dünyaların en iyisi.* Şimdiye kadar dört farklı sistem tarif ettik; ikisi metin içerisinde, (I) serbest çalışan ve (II) dürüst patron; iki de alıştırma, alıştırma (3) (cezalar uygulanmıyor) ve alıştırma (4) (kötü patron). Martin için en kötü durum hangisidir? En iyi durum hangisidir?
- 6 *Sigorta.* William'ın sahip olduğu değerli varlıkları sadece kullanılmış bir araba –değeri 5400 dolar– ve dedesinden kalma altın cep saati, onu da pansiyonunda kitlemeden saklıyor. Saatin değeriye 600 dolar. Bir yıllık bir süre zarfında arabasının çalınma olasılığı $1/900$ 'dür. Fakat pansiyona gelen o kadar çok sayıda güvenilmez yabancı insan var ki, bu saatin çalınma olasılığı $1/30$ 'dur.

Bu iki türdeki hırsızlığın istatistiksel olarak birbirinden bağımsız olduğunu varsayın.

- (a) Hem saatin hem de arabanın çalınma olasılığı nedir? Saatin çalınma ama arabanın çalınmama olasılığı nedir? Arabanın çalınma ama saatin çalınmama olasılığı nedir? Her ikisinin de çalınmama olasılığı nedir?

Bir sigorta şirketi William'a her iki mal için 60 dolar karşılığında %10 kesintiyle hırsızlık sigortası öneriyor (ona çalınan malın gerçek değerinin sadece %90'ını ödüyor).

I sigorta satın alma işlemi olsun. D ise sigorta satın almayı reddetme işlemi olsun.

- (b) D'nin olası sonuçları nelerdir? Bek(D)'yi bulun.
- (c) I'nın olası sonuçları nelerdir? Bek(I)'yi bulun.
- (d) William sigorta yaptırmalı mıdır, yaptırmamalı mıdır?

William'ın saatin nerede olduğunu söyleyen bir notu arabaya koyduğunu farz edin, öyle ki arabayı çalan kişinin saati de çalma olasılığının hayli yüksek olduğu beklentisi içindeyiz: $\Pr(\text{saat çalınıyor/araba çalınıyor}) > \Pr(\text{saat çalınıyor})$.

- (e) Bu iki çalma şekli hâlâ istatistiksel olarak bağımsız mıdır?
- (f) Şimdi kalitatif olarak, bu bağımlılık Bek(I) ifadesini nasıl etkiler.

7 *Katlanarak artmak.* Bazı kumarbazlar para kazanmanın zekice bir yolunu bulduklarını düşünürler. *Slick Jim* at yarışlarına gitmekten hoşlanır. Ortamı seviyor. Zengin olmak istemiyor, fakat en azından içeri kabul ücretini kazanmak istiyor; bu da bizim kasabada 10 dolar. Onun için de birinci yarışta 10 dolar kazanacak kadar bahse giriyor. Favoriye oynuyor, onun için 7 dolar koyması gerekiyor. Kaybederse, 17 dolar kazanacak kadar bahse giriyor. Bir sonraki yarışta az koyup çok almak üzere bahse giriyor ve 3 dolar koyuyor. O yarış kaybederse, 20 dolar kazanacak kadar bahse giriyor. Ve bu şekilde devam ediyor. Bu cumartesi her yarışta kaybederse, cebindeki bütün parayı, diyelim ki 164 doları kaybedecek. Onun için de bir sonraki cumartesi 164 dolar + 10 dolar kazanacak kadar bahse girmesi gerekir. Bu stratejide yanlış olan nedir?

8 *Moskova oyunu.* Moskova'da St. Petersburg'dakinden farklı bir oyun oynuyorlar. Kurallar tamamen aynı, fakat arka arkaya 40 defa yazı gelince oyun bitiyor. Bu noktada kasa bütün bahisleri alıyor.

- (a) Siz bu oyunu bahse koyduğunuz S miktarı için oynarsanız, herhangi bir şey kazanmadan bahse koyduğunuz bu parayı kaybetme olasılığınız nedir?
- (b) Moskova oyununda beklenen değer bir üst sınırı var mıdır?
- (c) Moskova oyununa girmek için adil fiyat nedir?
- (d) Adil fiyatı ödediyseniz, Moskova oyununun herhangi bir oyununda kâr etme olasılığınız nedir?

- (e) Esrarengiz bir şekilde MMM adı verilen biraz karanlık yeni bir Rus bankası, Moskova oyununu finanse ediyor. Vadeli petrol piyasasında yakın zamanlardaki bir spekülasyon sayesinde, bankanın bir milyar dolarlık (1000 milyon dolar) sermayesi var. Banka iflas etmeden önce kaç kere yazı gelmesi gerektiğini tahmin edin. (Bu pek de öyle hayali bir hikâye değil. MMM aslında bugüne kadar açıklığa kavuşturulamayan birçok al-sat işlemine adı karışan Sovyetler sonrası gerçek bir spekülatif ekipti.)

GÖZDEN GEÇİRMENİZ İÇİN ANAHTAR KELİMELELER

Eylemler	Adil fiyat	Azalan marjinal fayda
Sonuçlar	Beklenen süre	
Fayda	Piyango	
Beklenen değer	St. Petersburg paradoksu	

9. Beklenen Değerin Maksimize Edilmesi

Olası eylemler arasında nasıl seçim yapıyorsunuz? En çok bilenen karar verme kuralı aşikâr olan kuraldır. En yüksek beklenen değeri olan eylemi icra edin. Ancak, bu basit kuralla bağlantılı olarak birkaç paradoks daha var.

RİSKLİ KARARLAR

Mantık, nedenleri ve argümanları analiz eder. *İnançlarımız* için sebepler ileri sürebiliriz. *Eylem* ve *kararlarımız* için de sebepler ileri sürebiliriz. Belirli koşullar altında yapılacak en iyi şey nedir? Tümevarım mantığı riskli argümanları analiz eder. Ayrıca riskli kararlar vermenin kuramı olan karar verme kuramına da yardımcı olur.

Her ne kadar yıldırımdan korksam da bir kitabı alıp getirmek için fırtınada dışarı çıkmalı mıyım? Fırtınada dışarı çıkıyorum, çünkü bir kitabı dışarıda bıraktığım *inancındayım*. İslanacağı ve mahvolacağı *inancındayım*. Ayrıca beni yıldırım çarpmayacağı *inancındayım*. Fakat diğer şeyler yanında, dışarı çıkmamın başka bir nedeni de kitabı *istemem*. Şüphesiz, inançlarım kesinlik arz etmiyor; kitabı orada bıraktığımdan oldukça eminim. Oradaysa ıslanacağından oldukça eminim. Yıldırımın beni çarpma ihtimalinin olmadığını biliyorum.

Kararlar iki şeye bağlıdır:

- Neye inandığımız.
- Ne istediğimiz.

Bazen inanç ya da güven derecelerimizi *olasılıklar* yoluyla ortaya koyarız. Bazen ne istediğimizi dolar değeri yoluyla ya da en azından *faydalar* dediğimiz değer yargılarıyla ortaya koyarız.

Bir karar bir şeyi yapma (ya da hiçbir şey yapmama) kararıdır. Harekete geçme (ya da harekete geçmeme) kararıdır. Eylemlerin çoğu zaman bir dizi olası değer ve sonuçları vardır. Bir eylemin beklenen değerini nasıl hesapladığımızı gösterdik. Fakat bu sayıyı nasıl *kullanacağımızı* göstermedik.

KARAR VERME KURAMI

Elimizde sadece olasılıklar varken ne yapacağımıza nasıl karar vereceğiz? *Karar verme kuramının* konularından biri budur. Beklenen değer, kararların modellerini yapmada temel bir araçtır.

Bir eylemler kümesinin arasından birini seçmek zorunda olduğunuzu varsayın. Eylemlerin sonuçları ve bu sonuçların olasılıkları hakkında yeteri kadar bilginiz olduğundan dolayı her eylemin beklenen değerini hesaplayabilirsiniz. Bu durumda pratik bir kural *en yüksek beklenen değeri olan eylemi gerçekleştirmeniz* gerektiğini söyler. (Ya da, çeşitli eylemler azami beklenen değer bakımından aynı durumdaysa, bu eylemlerden herhangi birisini gerçekleştirin; onlar arasında seçim yapacak bir durum kalmamıştır.)

BEKLENEN DEĞER KURALI:

Beklenen değeri maksimize etmek üzere hareket edin.

ÇEKİNCELER

Bu kuralı dikkatle ele almak gerekir.

Loto 6/49'da yüz adet bilet satın alma eyleminin beklenen değeri bale piyangosunda 100 dolarlık bir bilet satın almanın beklenen değerinin iki katıdır; 45 dolara karşılık 23 dolar. (Bkz. 8. Bölüm). Fakat çoğu kişi bale piyangosunu lotoya tercih etmenin daha akla yatkın bir şey olduğunu düşünüyor. Çünkü lotoda bir servet kazanma şansı çok çok azken, bale piyangosunda ciddi bir ikramiye kazanmanın şansı hiç de az değildir.

Kâr etmek için satmamak koşuluyla birisinin size 45 dolarlık adil fiyattan yüz adet loto 6/49 bileti teklif ettiğini farz edin. İki türlü hareket edebilirsiniz:

Eylem B: Biletleri 45 dolara satın almak. Bek(B) = 0.
 Eylem D: Teklifi reddetmek. Bek(D) = 0.

B ve D eylemlerinin beklenen değeri 0'dır. Bundan dolayı beklenen değer kuralına göre ikisi arasında kayıtsız kalmanız gerekir.

Şimdi genç olan ve 8. Bölümde bahsettiğimiz bir piyango biletinden sizi tatmin eden "umut" fantezisi gibi bir fanteziye ihtiyacı olmayan Garvin ve Elena gibi birkaç öğrenciyi düşünün. Satmamaları koşuluyla her iki öğrenciye de 45 dolara yüz adet loto bileti teklif edilmiştir.

GARVIN: Bu, sudan ucuz! Buyurun 45 dolar!

ELENA: Ben istemiyorum. Cüzdanımdaki 45 dolar çok riskli bir kumara göre çok daha değerlidir.

Hem Garvin hem de Elena beklenen değer kuralını ihlal ediyor. Garvin riski seven birisidir. Elena ise riskten kaçınan birisidir.

Bunlar kişisel özellikler olabilir. İki öğrenciye aşağıdaki tercihi sunduğumuzu farz edin: Yüz adet loto 6/49 bileti ya da bir adet 100 dolarlık bale piyango bileti. Riskten kaçınan Elena bale biletini tercih ederken, Garvin'in lotoyu tercih edeceğini tahmin edebiliriz.

Beklenen değer kuralı genel kabul görmüş bir kuraldır. Bazı uzmanlar onun bir rasyonellik standardı olduğunu düşünmektedirler. Onlar *beklenen değer kuralı dogmatikleridir*.

Onlar bu kurala göre hareket etmeyen birinin *irrasyonel* olduğunu söyler.

Beklenen değer kuralı dogmatikleri oldukça kibirli görünürler. Çok azımız Garvin ya da Elena'nın "irrasyonel" olduğu hissine kapılırız.

FAYDALAR

Para değeri faydanın sadece kaba bir ölçümüdür. Para dışında başka değerler vardır. Faydayı dolar olarak değil de faydalar denilen daha genel birimlerle ölçmek isteriz. Küçük

para miktarlarını sanki fayda birimleriymiş gibi ele alabiliriz. 2 doları 2 birim fayda gibi düşünebiliriz; fakat 2 milyon doları, 2 milyon birim fayda gibi düşünmeyiz. Bu da Daniel Bernoulli'nin azalan marjinal fayda fikrine uyar (8. Bölüm). 30 dolar, 30 birim fayda ederse fayda birimi cinsinden 30 milyon doların bir milyon kere daha fazla fayda değeri ifade ettiği gibi bir sonuç çıkmaz. St. Petersburg paradoksunu çözmek için Daniel Bernoulli 30 milyon doların yaklaşık olarak sadece 600.000 birim fayda ettiğini düşündü.

Garvin yüz adet loto 6/49 biletime 45 dolar ödeme yapmaya can atarken, Elena parasını elinde tutmayı tercih etti. Onların davranışlarını fayda cinsinden açıklayabilir miyiz?

KURALI KORUMAK?

Aslında dolar değeri olmayan şeylere fayda değerleri verebiliriz. Örneğin belki de Elena için riskin olumsuz bir değeri vardır ve Garvin için de (risk almayı sever) olumlu bir değeri vardır.

45 dolara piyango bileti satın almakla Garvin, diyelim ki, 45 birim fayda artı risk zevki için de 7 birim fayda aldığını hesaplamaktadır. Öyleyse 52 birim fayda için 45 birim fayda ödemektedir. Sudan ucuz.

Elena risk almaktan nefret eder. Ona göre piyango biletlerinde parayı riske atmanın negatif bir faydası vardır, diyelim ki -19 birim fayda. Piyango bileti satın alırsa, 45 birim faydalık bir maliyete sadece 26 birim fayda alacaktır.

Beklenen değer kuralı dogmatigi: Tam da böyle! Hem Garvin hem de Elena, tam da kendileri için fayda birimi olarak beklenen değeri maksimize ettiklerinden rasyonel oldular. Garvin beklenen değeri net olarak +7 Garvin-fayda birimi olan bir eylemi seçiyor. Elena ise beklenen değeri -19 Elena-fayda birimi olan bir eyleme karşılık beklenen değeri 0 Elena-fayda birimi olan bir eylemi tercih ediyor.

OYNAKLIK

Riskten kaçınmayı faydanın içerisinde yerleştirme fikri bir bakıma beklenen değer kuralını korumaya yönelik bir harekettir. Ancak günlük hayatta biraz yapay duruyor. Çünkü riskten kaçınma faydadan farklı bir boyutmuş gibi görünüyor. Hisse ve tahvil alım-satımını düşünün.

Dürüst borsa aracıları tecrübesiz müşterilere yatırım tartarken şunu sorarlar:

- Yatırım amaçlarınız nelerdir? Bu müşterilerin fayda tercihleri hakkında bir sorudur.
- Ne kadar risk ve oynaklığı kabul edebilirsiniz? Bu soruya oldukça farklı bir sorudur.

Borsada, dışarıdan hiç kimse risksiz, getirisi yüksek yatırımlar satın alamaz. Böylece müşterinin iki farklı türde değerlendirme arasında, riskten kaçınma isteğiyle zengin olma isteği arasında bir denge kurması gerekir. Genç ve ihtiraslı olan Garvin, muhtemelen hiçbir değeri olmayan, değeri yüz kat artabilecek ve her gün bir şekilde yükselip düşecek üç kuruşluk elmas madeni hisseleri almak ister. Elena'nın büyükannesi ve büyükbabasıysa çalışıp biriktirdikleri emeklilik paralarını korumak isteyeceklerinden ve acil bir sağlık sorununda her an o birikmiş paralarına ihtiyaç duyabileceklerinden dolayı gelir getiren fakat değeri fazla dalgalanmayan güvenli hisseler ve tahvilleri isteyeceklerdir.

Bunlar (en azından) tercihlerin iki boyutudur. Bunlar tek bir soyut fayda kavramına indirgenmemelidir.

SİGORTA

Sigorta riskten kaçınmaya dayalıdır.

Bir önceki bölümün 6. sorusunu hatırlayın (bkz. 8. Bölüm). William'ın sadece iki değerli eşyası vardı; arabası ve büyükbabasından kalma altın kol saati. Bir sigorta şirketi ona bir teklif yaptı.

- Eylemin beklenen değeri, "sigorta satın al": -62,60 dolar.
- Eylemin beklenen değeri, "teklifi reddet": -26,00 dolar.

En yüksek beklenen değer veren eylem “reddetmektir.” Fakat William’ın pekâlâ riskten kaçınan birisi olduğu için sigorta satın aldığını da hayal edebiliriz. Sigorta şirketleri riskten kaçınma ihtiyacını karşılarlar. Aslında, gerçekten de adil prim alsalardı, William’dan sigorta için 26 dolar alırlardı. Fakat bu durumda kâr edemezlerdi. Neredeyse 300 yıldır sigorta şirketleri çok iyi paralar kazanıyorlar.

AKTÜERYAL SİGORTA

Çok kabaca iki türlü sigorta vardır:

- Sıradan “aktüeryal” sigorta.
- Olağanüstü sigorta.

“Aktüerya” artık kullanımda olmayan ve modası geçmiş bir kelimedir. Bir sözlüğe göre anlamı:

Ölüm oranları, yangın, hayat ve kaza sigortalarıyla ilgili diğer detayları araştıran uzman otorite.

“Aktüeryal” bilinen ya da tahmin edilen ölüm, yangın ve benzeri oranlara dayalı sigorta anlamına gelmektedir.

Hayat sigortası, araba sigortası ve ev sigortası sıradan sigortanın bilindik örneklerindendir. Sigorta şirketleri primlerini aktüeryal tecrübeye dayandırır. Yani, aslında, belirli yaşta ve belirli bir sağlık geçmişine sahip bir kişinin bir yıl daha yaşayacağı, belirli türde bir geçmiş performansı olan bir sürücünün bir yıl daha kaza yapmadan araba süreceği ve bunun gibi frekans tipi olasılıkları belirtirler.

Sigorta şirketleri, poliçe satın alan kişi için beklenen değer eksi olacak şekilde prim alırlar. Bu da ortalaması alındığında şirketin kar edeceği anlamına gelir. Her yıl aldığı primlerden daha az ödeyecektir.

Sıradan bir sigorta poliçesi alan herkes beklenen değer kuralına karşı hareket ediyormuş gibi görünür.

Beklenen değer kuralı dogmatigi: Dolarlardan ziyade gerçek faydayı düşünürsek değil! William’ın yeni bir araba alacak gücü yok, ancak işi için arabaya ihtiyacı var.

Onun için arabasının, sigortasızken çalınmasının gerçek olumsuz faydası arabanın dolar değerinin kaybının da ötesinde bir şeydir. Ve her ne kadar bir arabayı kaybetmekten dolayı kişinin işini kaybetmesi hususunda parasal bir değer belirleyebilsek de, bu durum yeni bir iş bulmaya çalışmanın zorluğunu bertaraf etmez. Büyükbabasının altın kol saatine gelince, o özel saatin yerini başka hiçbir saat tutmaz. Bu saatin özel duygusal bir anlamı var; o aile tarihinin son bir belirtisi, bir anlamda büyükbabasının hâlâ hayatta olduğunu gösteren son bir kalıntıdır. Sigorta gerçek maliyeti ödeyemez, fakat en azından acıları azaltabilir. Bütün bu şeylerin gerçek bir fayda ve tercih ölçütüne oturtulması gerekir. Bunu yapabilirsek, beklenen değeri maksimize edecek insanlar bulabiliriz.

Kişinin faydaları operasyonel bir şekilde nasıl tanımlayacağını açıklamadık. Burada önemli bir metotla önce kişinin:

- Olasılıkları gerçekten nasıl değerlendirdiği
- Deneyssel ya da gerçek hayattaki durumlarda gerçek tercihlerinin ne olduğu belirlenir.

Bu da beklenen değer kuralına yeni bir anlam kazandırır. O artık ne yapılacağına karar vermede pratik bir kural olmaktan çıkar. Bunun yerine, faydaları tanımlayacak bir yol halini alır. Yani, kişinin faydalarının ya da değer sisteminin ölçütü onun tercihleri ve inanç-tipi olasılıklarınca belirlenir. Onu bir tanıma dönüştürmekle beklenen değeri kurtarmış olduk.

OLAĞANÜSTÜ SİGORTA

Ayrıca daha ziyade kumara ya da bahis oynamaya benzeyen olağanüstü sigorta diye bir şey var.

Uzay roketleri fırlatan şirketler sigorta yaptırırlar. Pratik amaçlar bakımından uzaya fırlatmalar (TV uyduları, vb) gittikçe yaygınlaşıyor ve roketler de ticarileşiyor. Fakat yeteri kadar yaygın ve değişken olmadığından, roketler için çok aktüeryal tecrübe sahibi değiliz. Sadece insanları taşıyan roketlerle ilgili felaketleri duyuyorsunuz, ancak yük taşıyan

roketler de çoğu zaman düşüp parçalanıyor ya da bozuluyorlar.

Roket fırlatma primleri son zamanlarda sigortalanan değer %25'ine kadar çıktı. Bu da doğrudan roket şirketiyle sigorta yüklenicileri arasında bir kumardır.

PARK ETME

Gece arkadaşlarınızda kalacaksınız. Arkadaşlarınız, kaldırım yanına park etmenin arabalarında park etme pulu olan ve orada ikamet eden kişilerle sınırlanmış olan şehrin kalabalık bir caddesinde oturuyorlar. Arabayı sürdünüz ve geldiğinizde yakınlarda ödeme yapmaksızın yasal olarak park edebileceğiniz hiçbir yer yok. Yakında bir yer var ama onlar da geceliğine 3 dolar alıyorlar. Kışın ortasındasınız ve etraf dondurucu soğuk. En yakın ücretsiz yer, yarım saatlik yürüme mesafesinde.

Arkadaşınız şöyle diyor: Bırak caddeye park et. Yaklaşık olarak sadece her on günde bir kontrol ediliyor, onun için ceza bileti alma olasılığın sadece 0,1'dir.

Cezası 20 dolar ve ehliyetini yenilemek için park etme cezasını hep ödüyorsun. Yasadışı park etmenin beklenen değeri nedir? Eksi bir değer olacaktır.

I: Yasadışı park etme.

L: Park yerine park etme.

T = Ceza bileti alıyorsun.

P = 3 dolar ödüyorsun.

$\Pr(T/I) = 0,1$.

Sadece para kaybına değer biçtiyseniz (ve ceza bileti almanın uygunsuzluğunu saymadıysanız), yasadışı park etmenin faydası $U(T) = -20$ dolar olur. Yasadışı park etme eyleminin beklenen değeri de:

$Bek(I) = (0,1)(-20 \text{ dolar}) + (0,9)(0 \text{ dolar}) = -2 \text{ dolar}$.

Park yerine park etmeyle ilgili bir belirsizlik yok. Sadece parasal masrafa değer biçtiyseniz, park yerine park etmenin beklenen değeri, $Bek(L) = -3$ dolar olurdu.

NE YAPMALI?

Beklenen değer kuralı net bir tavsiye sunar. Beklenen faydayı maksimize etmek üzere hareket edin. Bekleyebileceğiniz en yüksek fayda -2 dolar. O halde: *Yasadışı park edin.*

Mesele burada bitmiyor. Bazı insanlar kanunlara –her türlü kanuna– uymamanın yanlış olduğunu düşünüyor. Bazılarıysa kanunun çok da önemli olmadığını, fakat diyelim ki, orada yaşayan birinin park yerini alarak diğer insanlara zarar vermenin yanlış olduğunu düşünebilir.

Şimdi beklenen değer kuralına bağlı olan birisine özel bir isim verelim: Faydacı. Faydacılık ince bir zekâyı yansıtan ve karmaşık bir ahlaki felsefedir. Beklenen değer kuralıysa bunun sadece basit düşünceli bir versiyonudur. En meşhur faydacı felsefeci, *On Liberty of Utilitarianism* [Özgürlük Faydacılığı Üzerine] ve önemli bir feminist makale olan *On the Subjection of Women*’ın [Kadınlara Boyun Eğdirilmesi Üzerine] yazarı olan John Stuart Mill’dir (1806–1873). Onun *System of Logic* [Mantık Sistemi] kitabı tümevarım akıl yürütmesine dair temel bir çalışmadır.

Faydacılığa karşı olan en önemli Batı ahlak felsefesiye Immanuel Kant’la (1724–1804) ilişkilidir. En meşhur kitabının adı *Saf Aklın Eleştirisi*’dir. Etik üzerine daha sonraki çalışmasında Kant, diğer şeylerin yanında getireceği faydadan neredeyse tamamen bağımsız olarak *vazifelerin*, yükümlülüklerin yerine getirilmesinin önemine vurgu yapmıştır.

PARTİDE SOHBET

Park ettikten sonra, partiye geliyorsunuz. *Uty, Duty ve Beauty* isimli üç misafir park sorununu tartışıyor.

Duty: Faydayı maksimize etmezdim, çünkü kanuna karşı gelmeyi ve diğer insanlara rahatsızlık vermeyi de sevmiyorum.

Uty: Bütün demek istediğin tek faktörün ceza kesilmesi ya da park için para ödemek olmadığı. Senin değerler yelpazende, kanunlara karşı gelme ve yabancı insanlara rahatsızlık vermenin olumsuz faydası var. Kanuna karşı gelmenin ve diğer insanlara sıkıntı vermenin faydası (senin için) diyelim ki -5 dolar gibi olabilir. Böylece yasadışı park etmenin beklenen faydası:

$$\text{Bek(I)} = (0,1)(-20 \text{ dolar} - 5 \text{ dolar}) + (0,9)(0 \text{ dolar} - 5 \text{ dolar}) = -7 \text{ dolar.}$$

Senin "görev bilinciyle" verdiği karar da beklenen değeri maksimize etmenin başka bir yoludur, çünkü -3 dolarlık bir faydayı (park yerinin maliyeti) -7 dolarlık beklenen bir değere (yaşa dışı park etme için) tercih ediyorsun.

Duty: Ama bu durum benim bu konularda ne hissettiğimi pek de ortaya koymuyor!

Uty: Peki, bu konuda biraz düşün. Gerçekten hiçbir zaman kanuna karşı gelmemeyi ilke edinmişsen, bu durumda senin için kanuna karşı gelmenin faydası -10.000 dolar olabilir. Yine de bir insanın hayatını kurtarmak için yasadışı park ederdin, değil mi?

Beauty: *Duty* kanuna karşı geliyor. Daha geçen yaz ağaç kesenleri içeri almamak için doğal koruma alanına giden yola barikat kurmaktan tutuklandı.

Duty: Öyle yaptım, çünkü doğal koruma alanını ağaçlı ağaç kesme şirketlerinden ve yolsuzluğa batmış politikacılara karşı korumak daha öncelikli bir görevimdir!

Uty: Öyleyse, buna ne kadar değer verdiğini bulalım...

Duty: Ciddi değerlerimi dolarla ölçmeyi sevmem.

Uty: Sadece laf olsun diye böyle konuşuyorsun. Para, şerefimiz de dâhil olmak üzere çeşitli şeyleri birbiriyle değiştirmek için sadece değer bir ölçüsüdür. Biz aslında fayda birimleri hakkında konuşuyoruz.

RİSKTEN KAÇINMA

Beauty: Benim *Duty*'ninki gibi ahlaki ve vicdani çekinçlerim yok. Ama beklentiği de maksimize etmem. Yasadışı park etmenin beklenen değeri sadece -2 dolarken, park yerini kullanmanın beklenen değerinin -3 dolar olduğunu söylemek çok isabetli. Ancak olgular öyle ki, %10 olasılıkla 20 dolarlık ceza kesilme riski var ve çok açık söyleyeyim ki ben bu 20 doları ödeyemem. Ceza kesilirse, Cumartesi akşamı dışarı çıkmak için biriktirdiğim para gitti demektir! Park yerine para ödesem daha iyi olur.

Uty: Öyleyse? 20 dolara 20 adet 1 dolardan daha fazla değer veriyorsun. Tek bir doların değeri 1 fayda birimiyse, bu durumda şu anda 20 doların sizin için değeri 20 fayda biriminden daha fazladır. Hayatınızın ileriki dönemlerinde, bayilik verilmiş güzellik salon zincirlerine sahip olduğunuzda durumlar değişecek ve siz de diğer bütün kalantorlar gibi yasadışı olarak park edeceksiniz. Fayda birimleri şu andaki gerçek değerinizi ölçüyor.

Beauty: Ama bu fayda birimleriyle hesaplayamazsınız!

Uty: Evet, hesaplayabilirsiniz. Bir an için fayda birimini toplayabileceğinizi ve sonra da cumartesi akşamı için 20 dolara sahip olmaya ne kadar değer verdiğinizi bulmak üzere kendi tercihlerinizi kullandığımızı farz edelim.

Arabayı caddedeki park yerine park etmeyi tercih ediyorsunuz. Bu da, 3 dolarlık park yeri ücreti ödemeye göre yasadışı park etmek için daha büyük negatif beklenen değere sahip olduğunuz anlamına gelir. -3 doların -3 fayda birimine denk olduğunu düşünelim. Bir ceza bileti almanızın sizin için fayda değeri ne olmalı?

$Bek(I) = (0,1)(U(T)) + (0,09)(0 \text{ dolar}) < -3 \text{ fayda birimi.}$

Böylece $U(T) < -30 \text{ fayda birimi.}$ Bu da ceza bileti almaktan ne kadar korktuğunuzu gösterir.

Beauty: Bu tamamen yapmacık bir şey!

Duty: Doğru. Sizin fayda birimi dediğiniz yapmacık sayısal değerlere karşı kanunu koruma ve başkalarına saygı duyma görevlerimizden vazgeçmeyiz.

Beauty: O senin sorunun, benim değil. Fakat 20 dolara 20 adet 1 dolardan daha fazla değer verdiğimi söylemek aptalca. Bildiğim kadarıyla, 20 doların değeri 20 adet 1 dolar kadardır. Basit gerçek şu ki, ben 20 dolara 20 adet 1 dolardan fazla bir değer biçmiyorum, fakat *risk almayı da sevmiyorum*.

Uty: Onu da ölçebiliriz.

Beauty: Hayır ölçemezsin; onun benim değerler ölçeğimle hiçbir ilgisi yok; o sadece benim sinirli karakterimin bir özelliğidir. Ben sadece riskten kaçınan birisiyim.

İDEAL MODELLER

(Onları faydalar olarak oluşturmadığımız müddetçe) beklenen değer kuralı riskten kaçınma gibi tutumlarda farklılık getirmez. Bu da kurala bir eleştiridir ya da kuralın sınırlanmasıdır. Bu türde bir eleştiriyi, kuralın yanlış bir şekilde uygulandığı bir durumla karıştırmayın.

Örneğin beklenen değerleri hesaplarken göz önüne alınan bir hareketin *karşılıklı olarak birbirini dışlayan ve geniş kapsamlı* bir dizi olası sonucuyla *başlarız*: $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Sonuçların bu şekilde her türlü bölünmesi bir idealleştirme ya da basitleştirmedir. Çoğu eylemin, geleceğe de uzanan sonsuz sayıda sonucu vardır. Sonuçları tamamen analiz etmemekle kişi felakete yol açan bir karar verebilir. İşte size gerçekten olmuş bir hikâye.

Albert bir piyango bileti satın aldı ve milyonlar kazandı. Bundan birkaç gün önce karısından kaçtı. Bütün parayı kendine saklamayı denedi, fakat göz kulak olması için parayı yeni kız arkadaşının ellerine teslim etti. Karısı paranın yarısını almak için dava açtı. Kız arkadaşı parayla Arjantin'e gitti ve bir daha da görülmedi. Albert gazetelelerin manşetlerine çıktığında, önceki kız arkadaşlarından bazıları muhabirlerle konuştu ve ona sıçan dediler. Ala-

caklıları hemen geldiler ve Albert'ten yeni kız arkadaşına vermediği paralara el koydular. Albert içip sarhoş oldu ve arabasını çarpıp parçaladı, kenarda duran masum bir yayı da yaraladı ve hapse girdi. Mahkemeyse kazandığının yarısını karısına verdi. Albert şimdi hapiste, karısına milyonlarca dolar borcu var, ödemeye dair hiç umudu da kalmadı; çünkü parasını eski kız arkadaşı aldı.

Albert kazanan bileti satın alınca dört sonucu olan bölümlere ayırma işlemini gözümüzün önüne getirebildik. C_1 (milyonları kazanma), C_2 (elle tutular bir ikramiye kazanma), C_3 (küçük bir ikramiye kazanma), C_4 (hiçbir şey kazanmama).

Gerçek hayatta, Albert'in C_1 'inin kocaman bir olası sonuçlar demetine bölündüğünü görürüz: (Kız arkadaşı sadık kaldı / gizlice Arjantin'e kaçtı), (pek basına yansımadı / basına çok yansıdı) vb.

Albert'in kendi eyleminin sonuçlarını görememesi beklenen değer kuralının bir eleştirisi değildir. Albert'in kendi eyleminin olası sonuçlarını daha yakından incelememesinin bir eleştirisidir.

ANLAŞMAZLIKLAR

Değişik nedenlerle ne yapılacağı konusunda anlaşmazlık içindeyiz. *Sonuçların olasılıkları* hakkında anlaşmazlığa düşebiliriz. *Sonuçların ne kadar tehlikeli ya da istenilir olduğu faydalar* hakkında da anlaşmazlığa düşebiliriz.

Çoğu zaman hem olasılık hem de fayda hakkında hep bir anlaşmazlık vardır. Karar kuramı bu tür anlaşmazlıkları çözüme kavuşturamaz. Fakat en azından anlaşmazlığı inceleyip tarafların ne hakkında tartıştıklarını görmelerini sağlayabilir. İşte size Galileo uzay aracı gönderilmeden önce basında çıkan bir haber hikâyesi:

NÜKLEER KARŞITI GRUPLAR GALİLEO'DA

PLÜTONYUM KULLANILMASINI PROTESTO EDİYOR

Galileo uzay aracında elektrik üretecek olan yaklaşık 23 kg ağırlığında plütonyum, bu uzay mekiğinin fırlatılmasını en

çok tartışılan konulardan biri haline getirdi.

Enerji bakanlığı, plütonyum birimlerinin güvenliği ni kontrol etmek üzere on yıl boyunca 100'e yakın deney yaptı ve bunları bir mekik kazasında karşılaşılabilecek çeşitli koşullara tabi tuttu.

Enerji bakanlığı, testlerin birimlerin hasara karşı oldukça dirençli olduğunu gösterdiğini söylüyor.

İhtilafın özüyse ne kadar dayanıklı olduğuyla ilgili. NASA uzay mekiği kazası nedeniyle fırlatma alanında en yüksek plütonyum salınım olasılığının 2500'de 1'den az olduğunu söyledi. Nükleer karşıtı gruplar aynı fikirde değiller ve olasılığın 430'da 1 kadar yüksek olduğunu söylüyorlar.

İki taraf ayrıca plütonyum salınımının tıbbi etkileri konusunda da anlaşamıyor. Gruplar bunun binlerce ölümcül kanser vakasına yol açabileceğini tahmin ediyor. Fakat uzay ajansıysa plütonyum salınımının kanser ölümlerine yol açmayacak kadar az olacağını söylüyor.

NASA'nın sağlık etkileri tahmini Galileo'yu değerlendiren federal ajanslar arası panelden çok daha iyimser. Fırlatma platformundaki bir kazanın nihayetinde 80 kanser ölümüne neden olacak kadar plütonyum salınımı yapabileceğini bildiriyor. Panel, aracın dünya tarafından sallanarak yeniden atmosfere girmesi durumunda plütonyum salınımının 2000 kadar kanser ölümüne neden olabileceğini söyledi.

Washington temelli Amerikan Bilim İnsanları Federasyonundaki kıdemli araştırmacı analist Steven Aftergood, gerçek mesele ne kadar riskin kabul edilebilir olduğudur, diyor. "Benim kanıma göre risk küçük, getirisiyse büyük" dedi.

OLASILIKLAR

Uzay aracı güneşten o kadar uzaklaşıyor ki güneş enerjisi ni kullanamıyor. Tek güvenilir uzun-sürelili enerji kaynağıysa küçük bir plütonyum nükleer reaktör. Risk, aracı fırlatacak mekikte bir kaza olması ya da dünyanın atmosferinde ya da

atmosferin yakınlarında başka bir felaket olması, bunun da evrendeki en öldürücü maddelerden biri olan plütonyum salınımına neden olmasıdır.

İlgili taraflar iki gruba ayrılıyor; bunlara *Gezginler* ve *Önce güvenlik* diyoruz. *Gezginler* arasında NASA ve Amerika enerji bakanlığı varken, *Önce güvenlik* grupları çevreciler ve nükleer-karşıtlarından oluşur. Bu iki grup olasılıklarda anlaşamıyorlar. *Gezginler* bir kazanın olasılığının 2500'de 1 olduğunu söylüyor. *Önce güvenlik* diyenlerse kaza olasılığının 430'da 1 olduğunu söylüyor.

Peki, bunlar ne türde olasılıklardır? Bir adet Galileo uzay aracı var. Ya büyük bir kaza olacak ya da olmayacak. Ancak, *Gezginler*, sadece "benim inandığım bu" demiyor. Daha ziyade şöyle bir şey diyor: "Elimizdeki en iyi mevcut bilginin ışığında biz ilgili bilimsel topluluk olarak böyle olduğu kanısındaız." Eldeki mevcut kanıta göre 2500'de 2499 oranında hiçbir kaza olmayacağına inanmak mantıklı. *Önce güvenlik* taraftarları sadece inançlarının *Gezginler*'den farklı olduğunu söylemiyor. *Gezginler*'in yanlış olduğunu ve yanlışmış inançlara sahip olduklarını söylüyor.

SONUÇLAR

Bir plütonyum parçacığını solursanız zehirlenirsiniz. Daha önce başka bir şeyden ölmezseniz, kanser olursunuz. Çoğu zehrin tersine plütonyumun, insanlarla karşılaştırıldığında, yarılanma ömrü daha uzundur. Atmosfere girdikten sonra kaybolmaz.

Gezginler kaza olsa bile kanser ölümlerinin sayısının artmayacağını, çünkü plütonyumu fırın tabletleri gibi seramik bloklar halinde pişirdiklerini, buharlaşmadığını ya da diğer türlü atmosfere karışmadığını söylüyorlar. Bir kaza olursa, basındaki saldırılar ve gelecekteki projelere ayrılacak fonlardaki azalmalar bir yana bunun kaybedilen zaman, çaba ve kaynaklar gibi sonuçları da ihtilaflara yol açabilir. Fakat yine de *Gezginler*, olabilecek en kötü şeyin bu olduğunu farz ediyorlar.

Önce güvenlik diyenlerse, tersine bir kaza olduğunda

2000 kişinin kanser olabileceğini söyleyen panelin ortaya koyduğu esasları takip ediyorlar.

Gezginler fırlatma başarılı olursa, evrenin coşkulu keşfinin başlayacağını, yeni bilgiler ve büyük heyecanlara vesile olacağını düşünüyor. *Önce güvenlik* grupları bilimsel araştırmaya da saygı duyuyorlar, fakat bir dizi sonuçları hususundaysa farklı değerlendirmeleri var.

Sonunda muhabirler aklı başında bir kişiye, Dr. Aftergood'a danışıyorlar. O bütün bu sonuçları tek bir terazide topluyor gibi ve şöyle diyor: "Riskler küçük ve bilimsel getirisiyse büyük." (Fakat *Dr Aftergood*'un kim olduğunu gerçekten biliyor muyuz? Acaba Amerikan Bilim İnsanları Federasyonu tarafsız değil de sadece *Gezginler*'den oluşan bir grup mu?)

TEHLİKE

Uzay aracı ne kadar tehlikelidir? Cevap iki şeye bağlı: Değişik olası sonuçların olasılıkları ve sonuçların maliyetleri. Bu iki farklı değerlendirmeyi aşağıdaki şekilde sunabiliriz:

Gezginler'in değerlendirmesi

	Olasılık	Sonucu
Kaza	1/2500	Rahatsız edici
Kaza yok	2499/2500	Keşfet!

Sonuçlara ne fayda değeri verirseniz verin, *Gezginler*'in neden Galileo uzay aracının olağanüstü bir fikir olduğunu düşündüğünü görebilirsiniz.

Önce güvenlik'in değerlendirmesi

	Olasılık	Sonucu
Kaza	1/430	> 2000 ölüm
Kaza yok	429/430	Küçük'

- *Önce güvenlik* diyen birisi için "küçük," "insanlara vereceği potansiyel tehlikeye göre görece olarak küçük" anlamına gelir.

Sonuçlara ne fayda değeri verirsiniz verin, *Önce güvenlik* diyen birisinin neden Galileo uzay aracının korkunç bir fikir olduğunu düşünebileceğini görebilirsiniz.

Peki, kim haklı? Tümevarım mantığı buna cevap veremez. Sadece şöyle diyebilir: *Gezginler*'in verdiği olasılık ve fayda değerleri verildiğinde, araştırmanın başlaması gerekir. *Önce güvenlik* grubunun verdiği olasılık ve fayda değerleri verildiğinde, araştırmanın sonlandırılması gerekir.

ALLAIS PARADOKSU'

Başka bir paradoksla bitiriyoruz. Birçok paradoks gibi bu da yapaydır. Vurgulanması gereken nokta beklenen değer hakkındaki fikirlerimizi netleştirmektir.

100 karta 1'den 100'e kadar sırayla numara verin. Kartlar karıştırılsın ve bir kart çekilsin. Olası sonuçlar üç adet birbirini dışlayan olasılık halinde gruplara ayrılınsın.

L: "Düşük" sayılı bir kart çekildi, sayısı 90'ın altında (olasılığı 0,89).

N: 90 numaralı kart çekildi (olasılığı 0,01).

H: "Yüksek" sayılı bir kart çekildi, numarası 91 ya da üstü (olasılığı 0,1).

ALLAIS'NİN İLK KUMARI

Size hiçbir maliyeti olmayacak şekilde, aşağıdaki seçeneklerden biri teklif edildi.

A: Yüksek sayılı bir kart (H) ya da N çekilirse 500.000 dolar (olasılığı 0,11). Aksi takdirde, hiçbir şey olmayacak (olasılığı 0,89).

B: Yüksek sayılı bir kart (H) çekilirse 2.500.000 dolar (olasılığı 0,1). Aksi takdirde, hiçbir şey olmayacak (olasılığı 0,9).

A eylemini mi, yoksa B eylemini mi ya yaparsınız (A'yı mı yoksa B'yi mi seçersiniz)?

* Allais paradoksu Maurice Allais tarafından gözlemlenen gerçek tercihlerin beklenen fayda kuramının tahminleriyle uyumsuz olduğunu göstermek üzere tasarlanmış bir tercih problemi -çn.

Cevabı buraya yazın: _____

Yapılan deneyler insanların çoğunun B'yi seçtiğini gösteriyor. %10 şansla 2.500.000 dolar kazanmak, %11 şansla 500.000 dolar kazanmaya tercih ediliyor. Bir şekilde insanların zihninde, büyük bir meblağı küçük bir şansla (%10) kazanmak, çok daha az bir parayı birazcık daha fazla bir şansla kazanmaktan biraz daha iyi gibi görünüyor.

ALLAIS'NİN İKİNCİ KUMARI

Şimdi başka iki seçeneği ele alın.

F: Doğrudan 500.000 dolarlık bir hediye alıyorsunuz (ücretsiz!).

G: Yüksek sayılı bir kart (H) çekilirse 2.500.000 dolar (olasılığı 0,1).

"Düşük" sayılı bir kart çekilirse (L) 500.000 dolar (olasılığı 0,89).

Aksi takdirde, hiçbir şey olmayacak (olasılığı 0,01).

F eylemini mi, yoksa G eylemini mi ya yaparsınız (F'yi mi yoksa G'yi mi seçersiniz)?

Cevabı buraya yazın: _____

Yapılan deneyler insanların çoğunun F'yi seçtiğini gösteriyor. Çoğumuz %10 şansla çok daha fazla bir para ama belli bir olasılıkla da gerçekten hiçbir şey kazanmama şansı yerine risksiz yarım milyon dolara sahip olmak isteriz. Hiçbir şey kazanmama riskinden ziyade garantili olarak çok zengin olmayı isteriz.

KURALIN UYGULANMASI

Beklenen değeri maksimize etme kuralı her iki kumar hakkında ne söyler? A'yla da B'yle de memnun olunur. Öyle görünüyor ki çoğu kişi B'yi tercih eder. Ve bu da en yüksek beklenen değerli kumardır.

Bek(A) = 55.000 dolar

Bek(B) = 250.000 dolar

Ancak, kural F hediyesi durumunda popüler fikirle mutabık değildir.

$Bek(F) = 500.000$ dolar

$Bek(G) = (0,89)(500.000 \text{ dolar}) + (0,1)(2.500.000 \text{ dolar}) = 695.000$ dolar

O halde, $Bek(G) > Bek(F)$.

Onuncu alıştırma göreceğimiz gibi bu argümandaki sayılar o kadar da önemli değil.

RİSKTEN KAÇINMA?

Allais paradoksu neyi gösteriyor? Birinci kumarda çoğu insanın B eylemini ve ikinci kumarda da F eylemini seçtiği yönünde deney yapanların bulgularının doğru olduğunu farz edin. Peki, bu ne anlama gelir? İstatistikçiler ve filozoflar çok farklı cevaplar vermişlerdir. İşte bunlardan ikisi.

- Allais paradoksu hemen hemen herkesin biraz da olsa riskten kaçındığını gösterir. Kumar oynayacak, risk alacak ve cezaya rağmen yasadışı park edecek insanlar bile nihayetinde risk almaktan vazgeçecekleri bir noktaya gelirler. Daha küçük ve hiçbir şey kazanmama şansı olan diyelim ki 1 milyon dolar yerine (%10) daha fazla şansla orta büyüklükte ikramiye kazanmaktan emin oldukları bir şeyin olmasını isterler.
- Allais paradoksu düşünmeniz gerektiğini gösterir. Her ne kadar önce F'yi tercih etmiş olsanız da, ikinci kumar hakkında bir defa düşününce ve beklenen değer üzerinde kafa yorunca, gerçekten G'yi tercih ettiğinizi keşfedeceksiniz.

L. J. SAVAGE VE MAURICE ALLAIS

Allais paradoksu yapay bir paradokstur. Fakat bunun bir hikâyesi var.

II. Dünya Savaşından sonra, kişisel olasılık ve kişisel beklenen değer maksimizasyonunun büyük savunucusu Amerikalı matematikçi ve istatistikçi L. J. Savage'dı (1917–1971). Bölüm 13-15'te tarif edilen tümevarım çıkarımında Bayesçi yaklaşıma herkesten fazla katkısı oldu (bkz. 15. Bölüm).

Savage düşüncelerini geliştirirken bazı istatistikçiler onun yaklaşımından hayli kuşku duydular. Hatta birazcık milli karşıtlık bile ortaya çıktı. Örneğin bir grup Fransız matematikçisine göre sizin hür seçiminizi hesaplayan bu kör kuralda mekanik, saygısız ve son derece "Amerikanca" olan bir şey vardı.

Fransız matematikçi Maurice Allais insanların beklenen değeri maksimize etmek üzere otomatik olarak hareket etmediğini tartışmak üzere paradoksunu oluşturdu. Umutlarımız ve korkularımız ve de beklentilerimiz düşüncesiz tek bir hesap makinesine konulamayacak kadar karmaşıktır.

SAVAGE'IN TEPKİSİ

Allais kendisine paradoksu sunduğunda Savage kendi tepkilerini şöyle kayda geçiriyor.

Her iki durum da ilk sunulduğunda, ben hemen tercihim G'ye karşı F'den yana ve A'ya karşı B'den yana kullandım ve hâlâ da sezgisel olarak kendimi o tercihlere yakın hissediyorum. Fakat olaylara aşağıdaki şekilde bakmayı uygun görüyorum.

A, B, F ve G'nin gerçekleştirilebileceği yollardan biri [aşağıdakini daha önceden yaptık zaten] aşağıdaki çizelgeye göre yüze kadar numaralandırılmış bir piyango biletidir:

Bir piyangoda 100.000 dolarlık birimlerle ödüller

	Bilet numarası		
	1-89	90	91-100
F seçeneği	5	5	5
G seçeneği	5	0	25
A seçeneği	0	5	5
B seçeneği	0	0	25

Bu tabloyu çizdikten sonra, Savage şöyle devam etti:

Şimdi, 1'den 89'a kadar olan biletlerden birisi çekilirse, [her iki tercih çiftinde de] hangi seçeneği seçtiğim önemli

olmayacaktır. Bundan dolayı 90'dan 100'e kadar olan bi-
letlerden birinin çekileceği olasılığı üzerinde yoğunlaşı-
yorum; bu durumda her iki kumar da (F ya da G'yi seç, A
ya da B'yi seç) tamamen paralel olacaktır.

O halde, olaylara bu şekilde bakarak, şüphesiz Savage F'ye
göre G eylemini ve A'ya göre B eylemini seçti ve şunu dedi:

Bana öyle görünüyor ki F ve G seçenekleri arasındaki ter-
cihlerimi tersine çevirerek bir hatayı düzeltmiş oldum.

ALIŞTIRMALAR

- 1 *Kilitleme.* 80 dolara eski bir bisiklet satın aldınız. Ya 20 dolara Kryptonite kırılmaz bir kilit ya da 8 dolara ucuz bir zincir ve kilit alabilirsiniz. Kryptonite kilitle kilitlenmişse kimsenin bisikletinizi çalma zahmetine girmeyeceğini hesaplıyorsunuz; çok fazla uğraşması gerekecek. Fakat ucuz zincirin makasla kesilme ve bisikletinizin çalınma ihtimali %10'dur. Bisiklet çalınırsa, yenisini almakla uğraşmayacaksınız. İlgili bütün değerleri listeleseydik ve beklentinizi maksimize etmek üzere harekete geçmiş olsaydınız, hangi kilidi satın alırdınız?
- 2 *Sıkıntılı durum.* "Benim eski külüstürü kaybetmek gibi sıkıntı verici bir duruma düşmek istemiyorum" diye izah ederek Kryptonite kilidi satın aldığınızı farz edin. Fayda değerini maksimize eden biriyseniz, bu sıkıntılı duruma biraz değer veriyorsunuz. Ama en azından ne kadar?
- 3 *Tekrarlanan kayıplar.* Beklenen dolar değerini maksimize ettiğinizi ve ucuz olan kilidi satın aldığınızı farz edin. Fakat bisikletiniz de çalınmış olsun. Yeni bir bisiklet satın almaya karar veriyorsunuz, fakat (1)'de verilen bütün bilginin hâlâ geçerli olduğunu kabul ediyorsunuz. Lanet olsun, neden bu ucuz kilidi aldım ki diyorsunuz. Şimdi sizin için Kryptonite kilidi satın almak rasyonel bir davranış mıdır?

- 4 *İleriye yönelik planlama.* 3. soruda ilk bisikletiniz çalındıktan sonra yeni bir bisiklet satın almaya karar verdiniz. İlk bisikletiniz çalındığında hâlihazırda 80 dolarlık başka bir bisiklet satın almayı planladıysanız, bu durum 1. sorudaki kararınızda herhangi bir değişikliğe yol açar mı? Bu durumu gerçekten hallettiğinizi ve ikinci bir bisiklet satın aldığınız takdirde hâlâ, 3. soruyla uyumlu olarak 20 dolara bir Kryptonite kilit değil de 8 dolara ucuz bir kilit satın alacağınızı fark ettiğinizi farz edin.
- 5 *İlk olarak bilgece davranmak?* Fakat ilk bisikletiniz çalınırsa, ikinci defa ucuz olan kilitten ziyade Kryptonite kilidi satın alacak kadar kendinizi iyi bildiğinizi farz edin. Şimdi davranışlardan hangisi beklenen değeri maksimize eder?
- 6 *Sigorta yok.* Parlak zekâlı, fakat bencil ve bekâr bir olasılık kuramcısı yıllarca hiçbir otomobil sigortası olmadan araba sürdü. (Bu hâlâ bazı Amerikan yargı mercilerinde yasal bir durumdur.) Evlenip çocuk çocuğa karışınca çok sayıda otomobil sigortası satın aldı. Davranışlarını açıklayınız.
- 7 *Uty ve Duty.* Uty'nin neden parlak zekâlı bekâr adamlara mutabık kalabilecekken Duty'nin onu eleştireceğini açıklayınız.
- 8 *Atomlar ve kömür.* Nükleer güç sanayii nükleer gücün oldukça güvenli olduğunda ısrar etmektedir; kömür çıkarılmasına göre çok daha az ölüme neden olmaktadır; elektrik elde etmek için kömür yakılmasının neden olduğu asit yağmurlarının yol açtığı çevre tahribatından daha az bir tahribata yol açmaktadır. (Ve benzeri.) Fosil yakıt taraftarları nükleer gücün uzun dönemde inanılmaz derecede maliyetli olduğunu iddia etmektedirler; korkunç kazaların riski bir yana, eski fabrikaların sökülmesine ve korkunç zehirlerin saklanması yer verir. (Ve benzeri.) Bu iki örneği iki şekilde tartışın.
(a) Olasılık ve fayda değerleri hususunda her iki tarafın nasıl farklı olduklarını göstererek.

(b) Riskten kaçınma hususunda her iki tarafın nasıl farklı davranışlara sahip olduklarını göstererek.

- 9 *En uzun köprü.* Okyanusun bir kısmı üzerinde en uzun köprü –13 kilometre uzunluğunda ve Atlantik üzerinde 20 katlı bir binanın yüksekliğinden daha fazla yükseklikte bir yay çizerek– New Brunswick’le Prens Edward Adası arasında yapılıyordu. Her ilkbaharda devasa yüzen buz kütleleri bu kanaldan geçerken kırılır ve herkes de bu köprünün güvenli olduğuna inanmıyordu. Bir gazete şöyle yazmıştı:

Ana endişe, kaynağı köprünün 44 ayağının –boğazın net bir şekilde aktığı gün– “buzun-çıkmasını” önleyerek adanın mikro-iklimini nasıl etkileyeceğidir. Suyu ve havayı soğutacak bir gecikme ciddi bir şekilde *deniztarafı* ve ıstakoz balıkçılığına ve ayrıca patates hasadına da ciddi bir şekilde engel olabilir [ada kıtaya yayılmış hazır yemek zincirlerinin bazılarının kızarmış patates ihtiyacının yaklaşık olarak %20’sini sağlamaktadır].

İnşaat başlamadan önce rapor veren 1990 çevre paneli, kendi alt limitini her 100 yılda bir sadece iki günlük buz çıkışı gecikmesi olarak belirledi. Çok daha vahim bir şekilde, yüzen buz kütlelerinin ayaklardan birini yıkabileceğine dair endişeler var. Ayaklar boğazın dibine demirle değil çimentoyla tutturulmuş. Eleştirmenler ve boğazları uzun süreler boyunca izleyen kişiler bilgisayar destekli olasılık çalışmalarının ihtimallerle aynı şey olmadığını söylüyorlar.

Ya “eleştirmenler ve boğazları uzun süreler boyunca izleyen kişilerin” düşüncelerini ya da köprünün güvenli olduğunu ve kayda değer hiçbir ekolojik zarar vermeyeceğini söyleyen danışmanların fikrini ifade eden kısa bir açıklama yazın.

Açıklamanız net –fakat sayısal olması da gerekmeyen– bir olasılıklar ve fayda değerleri tahminini ortaya koy-

maya çalışmalıdır. Eleştirmenseniz, diğer şeyler yanında, (böyle bir şey varsa) "bilgisayar destekli olasılık çalışmalarının ihtimallerle aynı şey olmadığı" ile ne kastedildiğini de izah etmeniz gerekir. Danışmansanız, diğer şeyler yanında, bu düşüncenin aksini ispat etmeniz gerekir.

- 10 *Allais*. Allais paradoksu parayı kullanır. Paradoksun üstesinden gelmek için Daniel Bernoulli'nin azalan marjinal faydası gibi bir şeyi kullanabilir miyiz? Ya da fayda değeri ve olasılıkları kurcalamak için başka bir yol kullanabilir miyiz?

GÖZDEN GEÇİRMENİZ İÇİN ANAHTAR KELİMELEER

Karar verme kuramı	Riskten kaçınma
Beklenen değer kuralı	Sigorta
Fayda birimleri	Riskleri değerlendirme
Faydacılık	Allais paradoksu

10. Belirsizlik Altında Karar Verme

Bazen bir karar verme sorunu olasılıkları ya da beklenen değeri kullanmadan da çözülebilir. Gerçek dünyada ne olursa olsun bu durumlar bir stratejinin diğer stratejilere egemen olduğu durumlardır. Buna **baskınlık** denir. Sanki Tanrı'ya inanırmışsınız gibi hareket etmek için çok meşhur bir argümanla gösterilir. O argümandaki değişiklikler başka karar verme kurallarına yol açar.

Beklenen değer kuralı sadece bazı olasılıklar mevcutken kullanılabilir. Bazen o kadar bihaber oluruz ki farklı alternatiflerin olasılıklarından bahsetme eğiliminde bile olmayız. Bu da belirsizliğin en uç noktasıdır. Yine de hâlâ az ya da çok mantıklı kararlar olabilir.

BASKINLIK

Peter, ailesinin anavatanı olan Hollanda'ya ilk seyahatini yaptığında gece karanlık ve sisliydi. Ailesi kendilerini görmek üzere araba kiralaması için ona yeteri kadar para vermişti, ancak o daha sonra sıfırı tüketmişti. Uzak akrabalarıyla kalmayı planlıyordu. Öyle ki bir yol tabelasına geldiğinde biraz kaybolmuş bir halde yol boyunca araba sürüyordu. Maalesef bir çöp torbası, tabelanın ön kısmında rüzgârdan sallanıyor ve her kasabanın ilk üç harfinin görünmesini engelliyordu. Gördüğü şeydu:

---AVENHAGE ↑

---TERDAM →

Peter en üstteki kasabanın " 's Gravenhage" (Uluslararası Mahkemenin olduğu İngiltere'deki "La Haye") olması gerektiğini anlamıştı. Fakat ikinci kasaba "Amsterdam" ya da "Rotterdam" olabilirdi. Peki, ne yapmalıydı? Dümdüz git ya da sağa dön.

Kolayı vardı. Peter'in La Hey'de bir ailesi yoktu ve hem Amsterdam'da hem de Rotterdam'da akrabaları vardı. Onun için sağa döndü.

Çok anlaşılır bir durum, fakat neden böyle olduğunu görmek için bir tablo çizelim.

Eylemler:

R: Sağa git (ve Amsterdam'a ya da Rotterdam'a var).

S: İleriye düz git (ve La Hey'e var).

Geldiği olası nokta,

A: TERDAM kelimesinin tamamı "Amsterdam."

T: TERDAM kelimesinin tamamı "Rotterdam."

"---TERDAM" kelimesinin Rotterdam'ı mı yoksa Amsterdam'ı mı gösterdiğini bilmiyordu; fakat hangisi olursa olsun, sağa dönmenin pozitif bir faydası vardı (Peter'e bakacak bazı uzak akrabaları bulma). Düz gitme stratejisinin negatif bir faydası vardı (kalacak hiçbir yerinin olmadığı garip bir kasabada karanlık ve fırtınalı bir gece). Faydalara kabaca ve hazır ölçütler belirlersek:

$$U(R, A) = 2$$

$$U(S, A) = -3$$

$$U(R, T) = 2$$

$$U(S, T) = -3$$

	A	T
R	+2	+2
S	-3	-3

Gelinen her iki noktada da R'nin S'den daha iyi olduğu çok bellidir. Buna R, S'ye *baskın* deriz.

ÜÇ KURAL

Belirsizlik durumunda karar verme konusundaki ilk inceleme denememiz biraz garip. Yine de bu bölümde incelenecek üç karar verme kuralı için elverişli bir giriş.

(1) Baskınlık kuralı.

- (2) Beklenen değer kuralı (9. bölümdeki gibi).
- (3) Baskın beklenen değer kuralı.

Aşağıdaki argümanlar (1)'i denemeye tabi tutuyor. Bu eleştirildiğinde, (2)'ye geçiyorlar. Bu da eleştirildiğinde, (3)'e geçiyorlar.

PASCAL'IN BAHSİ

Sekizinci bölümün sonunda Blaise Pascal'la karşılaştık. Pascal'ın tümevarım mantığının bir mantık ders kitabı haline gelmesinde ilk bölümlere katkısı çoktur.

Pascal belirsizlik altında karar verme uç durumu hakkında dikkatle düşündü. Bu dini bir argümandı. Pek de Tanrı'nın *var olup olmadığıyla* ilgili bir şey değil de, daha ziyade kişinin Tanrı'ya *inanacak hale gelmek için harekete* geçip geçmemesi gerektiğiyle ilgili bir durum.

Bu argüman tamamen Tanrı'nın varlığıyla ilgili bilindik argümanların harekete geçiremediği insanlara yönelik bir argüman. Bu insanlar İncil ya da Kuran'daki vahiy ve tanıklığın tamamen güvenilmez olduğunu düşünüyorlar. Doğal dindeki argümanların –dünyanın iyi organize edildiği, bundan dolayı da bunu yapan bir Tasarımcının olması gerektiği– bir yere götürmediğini ortaya koyuyorlar. Yine de böyle bazı insanlar için, mezheplerinin din ve kültürlerinin –herhangi bir din değil de onların çevresindeki din– belirli bir çekiciliği vardır. O dine yönelik herhangi uygun bir kanıt olmadığını düşünüyorlar, ama yine de endişeliler.

Bu tür insanlar uç belirsizlik durumundadırlar. Onlar için Tanrı'nın varlığı gerçek bir olasılıktır. Yine de öyle ya da böyle hiçbir kanıt bulamazlar.

Bu tür insanlar dini bir mezhebe katılmaya karar verebilir ve zaman içinde o mezhebin inançlarını edinmeyi isteyebilirler. Ya da dinle hiçbir bağlantıları olmayabilir.

Pascal'ın karar verme problemi: Kişi, Tanrı'ya *inanacak hale gelmek için harekete* geçmeli midir?

İkna edici bir argüman olduğu için değil de tümevarım mantığı ve karar verme kuramının bir örneği olduğu için

Pascal'ın düşüncesini burada kullanıyoruz. Örnek olarak iyidir, çünkü Pascal (1), (2) ve (3) olarak, üç kuralı birbirinden ayırıyor.

PSİKOLOJİK BİR KURAM

Pascal'ın temel inançlar hakkında psikolojik bir kuramı var. Belirli bir hayat tarzına kendini adanmış bir grup insanla birlikte yaşarsanız ve onların aktivitelerine canı gönülden katılırsanız, onların temel hayat ilkelerini ve önyargılarını da paylaşırsınız hale gelirsiniz.

Her ne kadar kendi aile geleneklerinizden kopmuş olsanız da çoğunuz bunu kendi öz tecrübelerinizden bilirsiniz. Ateist ya da gözlemci Budist, Musevi, Marksist, Müslüman, Protestan ve benzeri bir ailede yetiştirilen çocuklar, belki de, ergenlikle aileden ayrılana kadar aileyle aynı dini ya da politik tutumlara sahip olurlar.

Pascal dini bir mezhebin gerçekten gözlemci bir üyesi haline geldiğinizde, sinik bir ruh halinde katılmış olsanız bile, yavaş yavaş onun inancını edineceğinize inanıyordu. İnancın çekici olduğuna inanıyordu.

Bu konuda çok samimidir. Onun yaşadığı yerde ve zamanda, katılınacak mezhep Katolik mezhebiydi. Katoliklerle yaşarsanız ve dokunaklı bir şekilde ortaya koyduğu üzere, kutsanmış su, ekmek ve şarap ayini eşliğinde bir hayat yaşarsanız, bu durumda inançlı birisi haline geldiğinizi görürsünüz.

CANLI OLASILIKLAR

Bazı olasılıklar bizim için gerçek seçeneklerken, diğerlerini ciddiye almayız. Bazı insanlar astrolojiyi ciddi bir şekilde geleceği görmenin bir yöntemi olarak görebilir. Ben göremem. Amerikalı pragmatist felsefeci William James (1842-1910) sayesinde şu güzel tabiri kullanırsak, astroloji benim için *canlı* bir olasılık değildir. Fakat bugün dünyanın birçok yerinde birçok insan için canlı bir olasılıktır.

Pascal'ın zamanında, çoğu Fransızın dini Katolik diniydi. Pascal'ın kendisi çoğu bakımdan militan Protestanlığa

çok benzeyen püriten bir inanç şeklini benimsediğinde bile, onun grubu da Katolik Kilisesi içerisinde kaldı (ki ciddi anlamda karşı çıkıldı). Dine gelince, Katolik Hristiyanlığının bazı formları tek canlı ihtimaldi. Ateizm de canlı bir ihtimaldi: Pascal'ın kumarbaz arkadaşlarının çoğu ciddi ateizmlerle flört etti.

Ancak Pascal'ın argümanı sadece, ateizme ek olarak tek bir canlı dinin olası olduğunu hisseden birisi tarafından kullanılabilirdi. Budizm, İslam ve Musevilik, Pascal ve arkadaşları için canlı ihtimaller değildi.

Pascal'ın eleştirmenlerinden birisi şöyle dedi: "Bir imam da böyle bir mantık yürütebilir." (İmam, Müslüman ruhani lideridir.) Doğru, fakat Pascal'ın mantığının bir eleştirisi olarak değil. Bu, onun var olan sadece iki ihtimalin ateizm ve Katolik inancı olduğu yönündeki öncülünün bir eleştirisidir.

BÖLÜNTÜLEME

Pascal'ın kişisel karar verme sorunu aşağıdaki gibi değildi:

Tanrı'ya inanacak hale gelecek şekilde mi hareket etmeliyim?

Tersine onun sorunu daha da özgündü:

Şu anda var olan Katolik öğretilerinde tarif edildiği gibi Tanrı'ya inanacak hale gelecek şekilde mi hareket etmeliyim?

Pascal için iki adet birbirini dışlayan ve geniş kapsamlı ihtimal vardı:

(Katoliklerce tarif edildiği şekilde) Tanrı vardır.

Böyle bir Tanrı yoktur.

Bu ikisi, olası olayların bölüntülemesini oluşturur. Bölüntüleme bir olasılıklar kümesidir; öyle ki bu olasılıklardan birisinin doğru olması gerekir (geniş kapsamlı), fakat sadece biri doğru olabilir (karşılıklı olarak birbirini dışlayan).

Pascal kendi bölüntülemesini şu şekilde kısalttı: (*Tanrı vardır, Tanrı yoktur*).

KARAR VERME PROBLEMLERİ

Sekizinci bölümde eylemleri, sonuçlarını ve sonuçların faydalarını birbirinden ayırdık. Fakat hakikaten çok az şey biliyorsak, daha da geriye gidebilir ve sadece bizi ilgilendiren canlı olasılıkları ele alabiliriz.

Olası olayların bir *bölüntülemesi*, evrenin geniş kapsamlı ve birbirini dışlayan bir olası durumlar dizisidir. Durumları *bölüntülemenin* sayısız yolu vardır. Bir problem, problemle ilgili doğal bir *bölüntüleme* olacak şekilde *bölüntülenmelidir*.

Belirsizlik altındaki bir karar verme probleminin aşağıdaki içerik öğeleri vardır:

- Olası durumların *bölüntülemesi*
- Öznenin yüklenebileceği *olası eylemler*.
- *Bölüntülemenin* her olası durumunda, her olası eylemin *sonuçlarının faydaları*.

$U(A, X)$, durumlar X iken A eylemini yerine getirmenin faydası olsun. Bu durumda bir karar verme problemi, X ve Y şeklinde iki olası durum ve A ve B şeklinde iki olası eylem için doğal olarak aşağıdaki gibi bir tabloda sunulmuştur:

	X	Y
A	$U(A, X)$	$U(A, Y)$
B	$U(B, X)$	$U(B, Y)$

PASCAL BÖLÜNTÜLEMESİ

Pascal için değerlendirilecek eylemler:

- A:** Bir ateist olarak eylemler: Kumar oynamaya devam etmek, aşırı alkol almak, gelişigüzel seks, matematiksel fizik üzerinde çalışmak, yankesici çetesini yönetmek, bir bankayı yönetmek ya da en çok neyi seviyorsan onu yapmak.
- B:** İnançlı biri olarak eylemler: Tanrı olduğuna inanacak hale gelecek şekilde davranmak, Kiliseye gitmek,

inançlı insanlarla birlikte yaşamak, ayinlerle meşgul olmak, emirlere göre hareket etmek, dini davranışları amaç edinmek ve benzerleri.

Pascal için durumların bölüntülemesi (G,N) olarak kısaltılmıştı ve burada:

G: Tanrı vardır (ki burada bahsedilen Tanrı mevcut Katolik öğretisinde tarif edildiği gibidir).

N: Tanrı yoktur.

BİRİNCİ FAYDA BELİRLEMESİ

Bölüntülemede her durumdaki her eylemin sonuçlarının faydaları gerekir.

Pascal bölüntülemesinde, Tanrı varsa, bu durumda inançlı kişiler haline gelme fırsatına sahip olup da bunu reddeden ateistler sonunda cehenneme giderler. Böylece U (A,G) sonsuz oranda kötüdür, yani "eksi sonsuzdur." Bunu şu şekilde yazarız:

$$U(A, G) = -\infty$$

Sonsuz faydalarla karşılaştırıldığında, laik bir dünyada bir ateist olmanın faydası sıfır olarak da belirlenebilir.

$$U(A, N) = 0$$

Pascal bölüntülemesinde, Tanrı varsa, bu durumda Tanrı'ya inanan ve erdemli bir hayat sürenler cennette bahtiyar olacak ve sonsuz değerle ödüllendirilecektir.

$$U(B, G) = +\infty$$

Sonsuz bahtiyarlıkla karşılaştırıldığında, U(B,N) de sıfır olarak belirlenebilir.

$$U(B, N) = 0$$

BİRİNCİ KARAR VERME TABLOSU

Bu belirlenen faydalar en iyi şekilde karar verme tablosu denilen bir tabloda sunulmuştur:

	G	N
A	$-\infty$	0
B	$+\infty$	0

G durumunda, Tanrı varken, B eylemi kesinlikle (sonsuz olarak) A eyleminden iyidir. N durumunda, ikisi arasında seçilecek hiçbir şey yoktur. Eylemlerin, inançların ve faydaların bu yapısında:

- En azından bir olası durumda (yani G'de), B'nin faydası A'dan daha fazladır.
- Hiçbir olası durumda B'nin faydası A'dan az değildir.

Bilebildiğimiz kadarıyla, X doğru olabilecek "olası" bir durumdur. Şu anki bilgi düzeyimizde X'in yanlış olduğunu düşünmek için hiçbir ikna edici sebebimiz yok.

Bu koşullarda, B'nin *baskın* olduğu söylenir. Bir eylem başka bir eyleme baskınken, baskın olan eylemi yerine getireceğiniz "aşıkardır." Karar verme problemindeki başka hiçbir eylemin size baskın eylemden daha iyi sonuçlar verebileceği *hiçbir yol* yoktur.

BİRİNCİ BAHİS: BASKINLIK

En azından bir durumda bir eylemin faydası diğer her türlü eylemin faydasından daha fazlaysa ve hiçbir durumda faydası daha az değilse, bu durumda bu eylem diğer eylemlere baskındır.

Gerçekte baskınlık kuralı şunu der: Bir eylem diğer eylemlere baskınsa, onu yap.

Bir bölüntülemde iki eylemin sonuçları her durumda aynı faydaya sahipse, bu durumda bunların arasında seçim yapacak bir durum yoktur. İstiyorsanız, yazı-tura atarak hangisini yapacağınıza karar verebilirsiniz.

Pascal'ın *birinci* argümanı şu sonuca varır: B eylemini yap –Tanrı'ya inanacak hale gelmek için harekete geç– çünkü o baskın olan eylemdir.

BASKINLIK KURALI

Baskınlık kuralı, Pascal'ın birinci bahsinden bağımsız olarak, şimdi daha bariz bir kısıtlama olarak görünen bir şeyi gerektiriyor. Bir dakika için makarayı biraz ileri saralım. Tomer sigaraya aşırı bağımlı genç bir öğrencidir. Dini üzerinde düşünmüyor da sigarayı bırakıp bırakmamayı düşünüyor. B: Sigarayı bırakır. D: Sigara içmeye devam eder.

Karar verme problemini iki durum bölüntülemesi halinde basitleştiriyor:

G: 65 yaşından önce genç yaşta ölür.

Y: Geç yaşta, 65 yaşında ya da daha sonra ölür.

Tomer faydalarının kaba bir tahminini yapar:

$$U(D,G) = 0$$

$$U(D,Y) = 100$$

$$U(B,G) = -5$$

$$U(B,Y) = 95$$

Ya da, bir tablo halinde:

	G	Y
B	-5	95
D	0	100

Sigara içmek baskındır. O halde taslağı çizildiği şekilde baskınlık kuralına göre Tomer'ın sigaraya devam etmesi gerekir. Tomer ne kadar memnun olursa olsun bu da çoğu doktorun gözünde kötü bir kural.

Aslında Tomer'ın arkadaşı Peggy, sigarayı şimdi bırakmak yerine içmeye devam etmesi durumunda, Tomer'ın yaşında bir erkeğin genç yaşta ölmesinin çok daha olası olduğu bilgisini veren bir tıp istatistikçisine danışıyor. 147 adet yayımlanmış istatistiksel analizi bir araya getiren istatistikçimiz Peggy'ye şunu söylüyor:

$$\Pr(G/D) = 0,36$$

$$\Pr(Y/D) = 0,64$$

$$\Pr(G/B) = 0,15$$

$$\Pr(Y/B) = 0,85$$

Bu verilere göre baskınlık kuralı bize beklenen değer kuralı-

nın yaptığı tavsiyeyle uyumsuz bir tavsiye yapıyor. Çünkü B en büyük beklenen değer eylemidir.

$$\text{Bek}(D) = (0,36)(0) + (0,64)(100) = 64$$

$$\text{Bek}(B) = (0,15)(-5) + (0,85)(95) = 80$$

Böylece beklenen değer kuralı Tomer'a sigarayı bırakmasını tavsiye ediyor.

Çizilen baskınlık kuralındaki sorun şudur: Kişinin hayat beklentisi kişinin sigarayı bırakıp bırakmamasından *bağımsız değildir*.

Böyle olmasının nedeni G ve Y bölüntülemesinde kararın kendisinin olası durumlarda farklılık yaratmasıdır. Tomer sigarayı bırakırsa, uygun bir şekilde uzun bir ömür süreceği daha muhtemeldir. Şayet sigara içmeye devam ederse, böyle olma olasılığı çok daha azdır.

Bu zorluğu halletmek adına baskınlık kuralını makul bir hale getirmek için bir sınırlama koymamız gerekir.

BASKINLIK KURALI:

Eylemler dizisinde hiçbir eylemin bölüntülemedeki durumlar üzerinde nedensel bir etkisi yoksa bu durumda eylemlerden birisi baskınsa onu yapın.

Olasılıkların baskınlık düşüncesinin kendisine ilişmediğine dikkat ediniz. Ancak mantıklı bir karar vermek için baskınlığı kullanıp kullanamayacağınız hususunda önemlidirler. Şimdi olasılıklara –ve Pascal'a– geri dönelim.

İKİNCİ FAYDA BELİRLEMESİ

*Agnostik** Pascal'ın birinci argümanını dikkate almaz. Pascal, hatalısın (diye argüman yapar). Sizin tabloda gösterdiğiniz gibi Parisli bir boş gezen adam olarak hayatımın değeri

* Agnostisizm, bilinmezcilik ya da bilinemezcilik; Teolojik anlamda Tanrı'nın varlığının ya da yokluğunun bilimsel olarak da evrenin nereden türediğinin bilinmediğini veya bilinemeyeceğini ileri süren felsefi bir akımdır. Bu akımın takipçilerine *agnostik* veya *bilinemezci* denir –çn.

sıfır değildir. Onun için, buna rağmen belki de bazı şeyleri riske ediyorum.

$U(A,N)$, görünürlerde izleyip kontrol eden bir Tanrı olmadan partilerde keyif çatan bir ateist olmanın değeridir. Hep eğleniyor ve hiç suçu yok. Bundan dolayı $U(A,N)$ ifadesini "+" gibi sonlu pozitif bir değerle temsil etmeliyiz. (Ya da isteğiniz herhangi bir pozitif sonlu sayıyı kullanın.)

Benzer şekilde bir agnostik, inanan biri haline gelirse ve Tanrı da yoksa aldığı ödül bir sürü inananla birlikte aptalca pratikler ve yanlış düşüncelerle dolu budala bir hayattır. Bu da kesinlikle negatiftir. $U(B,N)$ ifadesini "-" ile temsil etmeliyiz. (Ya da isteğiniz herhangi bir negatif sonlu sayıyı kullanın.)

	G	N
A	$-\infty$	+
B	$+\infty$	-

Verilen bu yeni fayda değerinde, B artık baskın değildir. G durumunda A'dan daha fazla, N durumundaysa A'dan daha az getirisi olacaktır.

İKİNCİ BAHİS: BİR OLASILIK KULLANIN

Pascal işe olasılığı dâhil ederek ve *beklenen değer kuralını* kullanarak agnostiğin yeni fayda değerlerine cevap veriyor. Onun metaforik diliyle: "Sonsuz uzaklıktaki bir mesafede bir oyun oynanıyor. Sonucu tura mı yazı mı?" O halde parayı yazı-tura atarak sonucunu şimdiden bilemeyeceğimiz şekilde "Tanrı var mıdır?" diye soruyu modelliyor. Ya da basitçe agnostiğe "Tanrı'nın varlığı" için $1/2$ 'lik ve eşit bir şekilde "Tanrı yoktur" için $1/2$ 'lik bir kişisel olasılık sunuyor.

Bu durumda A ve B'nin beklenen değerlerini hesaplayabiliriz. "+" ve "-"nin büyüklükleri ne kadar istiyorsanız o kadar olsun. Sonlu oldukları müddetçe, yine de:

$$\text{Bek}(A) = -\infty$$

$$\text{Bek}(B) = +\infty$$

Pascal *ikinci* argümanıyla şu sonuca varır: B eylemini yap –Tanrı’ya inanacak hale gelme eylemi– çünkü en yüksek beklenen değerin olduğu eylem odur.

ÜÇÜNCÜ BAHİS: BİR DİZİ OLASILIK KULLANIN

Agnostik hâlâ mutsuz. Olasılıkların yarı yarıya olduğundan neden o kadar eminsin diye soruyor? Tanrı’nın var olma ihtimali çok az. Cennet ve cehennem hakkındaki bu şeylere fazla güvenim yok!

Pascal cevap veriyor: sen Tanrı’nın var olduğunun olasılık dâhilinde olduğunu kabul ediyorsun? “Evet.” Yani, Tanrı’nın var olma olasılığı sıfırdan büyük ve cennet ve cehennem hakkındaki hikâyeler doğru? “Evet.”

Peki, diyor Pascal, kabul edilebilir belirlenmiş bütün olasılıkları değerlendirelim. B’nin beklenen değeri aşağıdaki formülle veriliyor:

$$\text{Bek}(B) = \text{Pr}(G)U(B,G) + \text{Pr}(N)U(B,N).$$

$\text{Pr}(G) > 0$ olduğunda mutabıktınız. G’ye yani Tanrı’nın varlığına verdiğiniz olasılık ne kadar küçük olursa olsun, $U(B,G)$ sonsuzdur. Böylece $\text{Bek}(B)$ hâlâ sonsuzdur.

$$\text{Bek}(B) = \infty$$

$\text{Pr}(N) < 1$ olduğuna mutabık oldunuz. N’ye verdiğiniz olasılık ne kadar büyük olursa olsun, olayların N durumunda A eylemine verdiğiniz sonlu fayda değeri ne kadar büyük olursa olsun, $U(A,N)$ hâlâ sonludur. Çünkü:

$$\text{Bek}(A) = \text{Pr}(G)U(A,G) + \text{Pr}(N)U(A,N).$$

$$\text{Bek}(A) = -\infty.$$

Böylelikle G ve N’ye verdiğimiz olasılıklar ne olursa olsun, her iki olasılığı da tamamen bir kenara itmediğimiz müddetçe ve N olayında ne fayda değeri verirsek verelim, sonlu

olduğu müddetçe, B'nin beklenen değeri A'nınkini sonsuz olarak geçer. Bu, *baskın beklenen değerin* bir argümanıdır.

BASKIN BEKLENEN DEĞER KURALI

Bir karar verme problemi şunlardan oluşur:

- Öznenin yüklenebileceği eylemler
- Olası durumların bölüntülemesi.
- Bölüntülemedeki her olası durumda her olası eylemin sonuçlarının fayda değerleri.

Pascal karar verme problemine bir dördüncü ve daha ziyade olağandışı bir bileşen ekledi.

- Bölüntülemedeki durumlara verilen kabul edilebilir olasılık sınıfı.

Bu, çeşitli durumlardaki eylemlerin basit fayda değerlerini değil de harekete geçmenin beklenen değerlerini işin içine dâhil eder.

Baskınlık tanımı genişletilebilir:

Kabul edilebilir her olasılık dağılımında, bir eylemin beklenen değeri diğer her türlü eylemin beklenen değerinden fazlaysa bu durumda bu eylem diğer eylemlere beklenen değerler bakımından baskındır.

BASKIN BEKLENEN DEĞER KURALI

Bir eylem diğer eylemlere baskınsa ONU YAP!

Pascal'ın *üçüncü* argümanın sonucu: Tanrı'ya inanır hale gelmek için B eylemini yapın; çünkü o beklenen değer bakımından baskındır.

ELEŞTİRİLER

Bugün çok az sayıda insan Pascal'ın bahislerine hayranlık duymaktadır. Fakat karar verme kuramcıları uzun zamandır onun neredeyse 350 yıl önce keşfettiği argümanları kullanıyorlar.

Sonsuz fayda değerlerini kullanmakta endişe edebiliriz. St. Petersburg paradoksunda (bkz. 8. bölüm) durumun böyle olabileceğini anımsayın.

Aksi takdirde, Pascal'ın *mantığı* akla yatkın bir mantıktır. Sorun şuradadır: Onun çıkış noktaları çoğumuz için uygulanmaz. Onlar artık "canlı olasılıklar" değil."

Onun psikolojik kuramından şüphe edebilirsiniz (bu çekici bir inanç). Yine de Pascal'ın çoğu matematikçiye göre insan kalbine dair sezgileri daha fazla olabilir.

Pascal'dan yollarımızı ayırmamız gereken yer onun bölüntülemesidir. Katolik mezhebindekinden çok daha fazla olasılık vardır. Örneğin: (Niyetlerinden bağımsız olarak) kesin bir biçimde kimin cennete gideceğinin önceden belirlenmiş olduğu bazı kesin Kalvinizm türleri.

Tanrı'nın zalim olduğu ve bütün Katolikleri cehennem ateşine mahkûm ettiği hayali teolojiler icat etmeniz kolay bir şeydir. Bu sizin için canlı bir olasılıksa, bu durumda Pascal'ın bahsi kesinlikle işe yaramayacaktır!

REKOMBİNANT DNA

Moleküler biyolojiyi olduğu gibi kabul eder hale geldik. Fakat ilk rekombinant DNA deneyleri 1970'lerde başladığında, bazı bilim insanları artık hiçbir şekilde karşı koyamayacağımız organizmalar üretebileceğimiz endişesine kapıldılar.

Örneğin biz dünya sathındaki bütün çiftlik hayvanlarına yayılacak, onları silip yok edecek *antraks** gibi bir yapıyı üretebiliriz. Bütün buğdayları öldürecek bir enfeksiyon geliştirebiliriz. Kolayca bulaşabilen ve insan vücudunun hiçbir direnç gösteremediği yeni ve korkunç bir salgın yaratabiliriz.

1974'te Asilomar, California'da dünyanın önde gelen moleküler biyologlarının katıldığı bir konferans yapıldı ve burada rekombinant DNA araştırmalarının kontrol edilmesi ve bu araştırmalara ciddi sınırlamalar getirilmesi istendi. Hatta bazıları *bu araştırmalara dâhil olmamalıyız* diyeretti. Argümanın tarzı Pascal'ın bahsi gibiydi.

* Şarbon veya Antraks, *Bacillus anthracis* adlı bakteri tarafından meydana getirilen bulaşıcı olan, otlarla beslenen hayvanlarda özellikle sığır, koyun ve beygirlerde birden ortaya çıkan ve insanlara da geçebilen bir hastalık -çn.

Bilim insanları önümüzde hareket edecek iki yol var; araştırma yapmak ve araştırma yapmamak dediler. Ve aynı şekilde iki önemli olasılık var; biri hayatı yok edecek bir felaket ve diğeri de felaketsiz bir durum dediler.

Araştırma seçeneğinin araştırma yapmamak seçeneğine baskın olması sonucunu çıkarmak üzere bir tür Pascal bahsini kullandılar.

BLAISE PASCAL

Blaise Pascal (1623–1662) özel yeteneğe sahip bir Fransız matematikçisiydi. Diğer şeylerin yanında, dijital bilgisayarın öncülü olan hesap makinesini icat etti. Bundan dolayı ilk modern hesaplama dilinin adına PASCAL denildi. Pascal'ın Fermat'yla (Fermat'nın Son Teoremi üzerine) yazışmasının olasılık kuramını başlattığı sık sık söylenen bir şey oldu. Paris civarlarında genç bir adamken (söylendiğine göre) kötü zaaflarından biri de ciddi bir kumarbaz olmasıydı. Daha sonra Paris yaşantısından bıkip çilekeşliği seçerek dünya nimetlerinden elini ettiğini çekti ve ahlak, din ve inanç meseleleri üzerine ciddi ciddi kafa yormaya başladı. İlk büyük Hristiyan varoluşçu felsefecilerinden biri olarak değerlendirilir. Toplu eserleri olan *Pensées* [*Düşünceler*] ahlak ve inanç konularında birçok kısa yansımalarından oluşur. Şimdi Pascal'ın bahsi olarak bilinen argüman, onun insanın durumu, ahlak kuralları, maneviyat ve din hakkındaki kısa ve fakat çoğu zaman etkileyici düşüncelerinden sadece birisidir. Pascal'ın meşhur sözlerinden biri de şudur:

Kalbin, aklın bilemeyeceği kendi sebepleri vardır.

Peki, bu ne demektir? Belki de şu demek: Gerçek bir insanın, Pascal'ın kendisinin icat ettiği bir disiplin olan karar verme kuramıyla anlaşılamayacak sebepleri olabilir.

ALİŞTIRMALAR

Üç öğrenci iki kariyer seçeneğini değerlendiriyor:

B: Bilgisayar bilimlerinden diploma al.

F: Felsefeden diploma al.

Onlar gelecek hakkında sadece iki gerçek ihtimal olduğunu düşünüyor:

K: Önümüzde kötü günler var ve gittikçe daha da kötü olacak.

I: Önümüzde güzel günler var ve gittikçe daha da güzel olacak.

Hepsi de K durumunda bilgisayar bilimcilerin iş bulacaklarına, fakat felsefecilerin bulamayacaklarına inanıyorlar.

Ayrıca I durumunda bilgisayar bilimcilerin ve felsefecilerin iş bulacaklarına, fakat bilgisayar bilimcilerin çok daha fazla para kazanacaklarına inanıyorlar.

- 1 *Misyoner Sarah.* Sarah işi düşünürken sadece kazanacağı parayı düşünür.

Bir karar verme tablosunda Sarah için *mantıklı* fayda değerleri verin, öyle ki eylemlerden birisi baskın olsun. Ne yapmaya karar verir? Hangi karar verme kuralıyla?

- 2 *Hayalci Peony.* Mantıkta iyi olmasına ve bir bilgisayar bilimcisi olarak hayatını gayet iyi bir şekilde kazanabilecek olmasına rağmen Peony, bilgisayar biliminden nefret ediyor. Felsefeci olmayı istiyor. Fakat kendisini rahat bir şekilde geçindirmek de istiyor.

Bir karar verme tablosunda Peony için *mantıklı* fayda değerleri verin.

Fayda değerleri onun ne yapacağına karar vermesi için yeterli midir? Daha başka neye ihtiyacı olabilir? Daha fazla girdiye ihtiyacı olursa, ona bu girdileri verin.

Ne yapmaya karar veriyor? Hangi karar verme kuralıyla?

- 3 *İdealist Maria.* Bir bilgisayar bilimcisi olarak çalışmaktansa geçinme yardımı alıp felsefi sorunlar üzerinde düşünmek isteyen Maria için de aynı problem.

- 4 *Pascal'ı eleştirmek.* Baskınlıkla ilgili bir argüman üç nedenle eleştirilebilir:

(a) Bölüntüleme yanlışdır.

(b) Bazı eylemler bölüntülemeledeki durumları etkiler.

(c) Fayda değerleri yanlıştır.

Günümüz perspektifinden, Pascal'ın baskınlıkla ilgili argümanını nasıl eleştirirdiniz ve neden?

- 5 *Çalışma ya da çalışmama.* Bu argümanı tartışın. James bir sonraki test için sıkı bir şekilde çalışıp çalışmamayı değerlendiriyor. S: Sıkı çalış ve R: Notları üstünkörü gözden geçir şeklindeki iki eylemi ele alıyor. Kendisi için A, B ve C şeklinde üç notun mümkün olduğunu düşünüyor. Sıkı çalışmaktansa zamanını başka şeylere harcamayı tercih ettiğinden, karar verme tablosu matrisi aşağıdaki şekildedir:

	A	B	C
R	++++	++	0
S	+++	+	--

Üstünkörü gözden geçirmenin baskın olduğunu görüyor ve sıkı çalışmamaya karar veriyor. Bu iyi bir argüman mıdır?

- 6 *21. yüzyılın kasveti.* Yazılım teknolojisinde önemli bir mucit olan Bill Joy bir uyarı yayınlayarak yeni yüzyıl için üzerine düşeni yaptı:
- Yaşayan canlıları yeniden tasarımdaki büyük buluşlar "kelimenin tam anlamıyla doğal dünyayı haritadan silebilecek insan yapımı yeni salgınlar için zemin hazırlamaktadır" dedi.
 - Robotikteki gelişmeler "kendilerinin evirilmiş kopyalarını yaratabilecek zeki robotların robot türleri için zemini hazırlıyor."
 - Mikroskobik olarak küçük akıllı makineler yapmak için nanoteknoloji kullanılabilir.
 - "Üçü de, fiziki dünyanın içerisinde hızla yayılabilecek çağlayan etkisi yaratarak kendilerini kolayca çoğaltabilirler... Aşırı kötülüğün daha da tamam-

lanmasının eşiğinde olduğumuzu söylemekle pek de abartılı bir şey yapmış olmayız."

"Aşırı kötülüğün daha da tamamlanmasının eşiği"? Jill Kiljoy'un bunun ne anlama geldiğine dair hiçbir fikri yok, fakat çok, çok kötü bir habere benziyor. Onun için şimdi robotikle, genetik mühendisliğiyle ve nanoteknolojiyle ilgili işleri durdurmamız gerektiğine dair baskınlık üzerinden bir argüman oluşturmaya çalışıyor.

Jill K'nın argümanını fayda değerleri vererek ve olasılıkların basit bölüntülemesi yoluyla kısaca ve özlü bir şekilde sunun. Bir karar verme tablosu. Sonra da argümanla ilgili genel eleştirileri sunun.

GÖZDEN GEÇİRMENİZ İÇİN ANAHTAR KELİMELE

Belirsizlik altında karar verme	Baskınlık
Pascal bahsi	Nedensel etki
Bölüntüleme	Baskınlık kuralı
Canlı olasılıklar	Baskın beklenen değer kuralı

OLASILIK TÜRLERİ

11. Ne Demek İstiyorsunuz?

Olasılık fikri iki farklı yönde hareket eder: **İnanç** ve **frekans**. Ne bildiğimiz ya da neyi bulabileceğimiz verildiğinde olasılık bizim belirsiz bir şey hakkında ne dereceye kadar emin olabileceğimizi düşünmemizi sağlar. Olasılık, ayrıca bir şans kurgusunda tekrarlanan deneylerde bazı sonuçların hangi görelî frekansla oluştuğunu düşünmemizi sağlar.

Şimdiye kadar her iki düşünceyi de neredeyse alternatifli olarak kullandık, çünkü her ikisiyle de hesap yapmanın temel kuralları neredeyse aynı. Fakat şimdi bu ikisini birbirinden ayırt etmemiz gerekiyor, çünkü bu iki fikrin felsefi ve pratik kullanımları çok farklı. Kitabın geri kalan kısmı (ve olasılık hakkındaki bütün net düşünceler) için bu çok gerekli bir ayrımdır.

Hep olasılık hakkındaki bu hesaplamaları yaptık ama “olasılığın” kendisinin ne anlama geldiğini söylemedik. Şimdi işleri yoluna koyacağız. Şimdiye kadar bu kelimeyle ne demek istediğimiz çok önemli değildi. Bundan sonra çok fark edecek.

Bu bölüm çoğu zaman analitik felsefe denilen türde bir felsefeye örnektir. Olasılık fikriyle ilişkili farklı kavramların esaslarını ele almaya çalışacağız. Çoğu öğrenciye göre bu bölüm bütün bölümlerin en zoru. Evet, pek sürpriz olmadı! Yapmamız gereken ayrımlar 200 yılı aşkın bir süredir –en iyilerinden bazıları da dâhil olmak üzere– olasılık kuramcılarının aklını karıştırdı. Frekans yaklaşımını benimseyen uzmanlarla inanç yaklaşımını benimseyenler arasındaki tartışmalar sert geçmeye devam ediyor. *Bu bölümde ve bir*

sonraki bölümde, bu hususlardaki duruşunuzu kendinizin belirlemesi gerekir.

HİLELİ PARA

Gündelik dilde “olasılık” kelimesini farklı şekillerde kullanırız. Şöyle şeyler söyleriz:

- (1) Bu para turaya yatkın. Tura gelme olasılığı yaklaşık olarak 0,6’dır.

(1)’in para hakkında bir ifade olduğunu hemen kabul ederiz. Kesin bir şans kurgusunda üstü örtük bir şekilde bir tür yazı-tura atma yöntemine atıfta bulunur. İşte size (1) hakkında beş düşünce:

- a Para hakkında ne bildiğimizden bağımsız olarak (1) numaralı ifade ya doğrudur ya da yanlıştır. (1) doğruysa, dünya böyle olduğu için bu böyledir, özellikle de para ve yazı-tura atma cihazı böyle olduğu için böyledir.
- b (1) doğruysa, paranın asimetric olduğunu farz ederiz. (Ya da yazı-tura atma cihazı hakkında olağan olmayan bir şey olabilir.)
- c Birisinin paranın geometrisinden ya da fizik kanunlarından elde edilen olgularla (1)’i izah edebileceğini hayal ederiz.
- d (1)’i test etmek üzere deneyler yapabiliriz. Şans kurgusu üzerinde birçok deneme yapar ve turanın görece frekansını gözlemleriz. 100 yazı-tura atışında düzensiz bir şekilde dağılmış olarak 63 tura gelirse, (1)’i doğru olarak kabul etmeye hazırız. Fakat sadece 37 tura gelirse, (1)’den fazlasıyla şüphe ederiz.
- e Kısaca: (1) dünyanın nasıl olduğu hakkında bir olguyu ifade ediyor ve (1)’in doğru olup olmadığı hakkında kanıt toplayabiliriz.

Radyoaktif bozunma hakkında büyük oranda aynı şeyi söyleyebiliriz. Küçük bir parça radyumun yanına bir Geiger sayacı koyarsak, radyoaktif bozunmaya maruz kalan ürünün

detektörden her geçişinde tık sesi duyarsınız. Sayacı kaynaktan 120 santimetre uzakta tutarsanız rastgele tık sesi dizisi dikkatinizi çekecektir. Bu bir şans kurgusudur ve:

Her 3 saniyede bir tık sesi alma olasılığının 0,6 olduğunu bulabilirsiniz.

- a Radyum ve de detektör hakkında bildiklerimizden bağımsız olarak bu ifade doğru ya da yanlıştır.
- c Birisinin bu olayı sayacın yapılış şekline alinan olgularla, radyum numunesi hakkındaki olgularla ve fizik kanunlarıyla açıklayabileceğini hayal ederiz.
- d İfadeyi test etmek üzere deneyler yapabiliriz. Tıklamaların olduğu 3 saniyelik dönemlerdeki göreceli frekansları gözlemleriz.
- e Kısaca: İfade dünyanın nasıl olduğu hakkında bir olguyu belirtiyor ve onun doğru olup olmadığı hakkında kanıt toplayabiliriz.

Örneğin radyumun yarı-ömrü hakkındaki daha karmaşık ifadeleri de aynı şekilde anlamak gerekir.

SOYU TÜKENMİŞ DİNOZORLAR

Aşağıdaki gibi şeyler de söylüyoruz:

- (2) Dinozorların soyunun dünyaya çarpan devasa bir asteroid tarafından tüketildiği olasıdır.

“Dünün Bilimi” TV programındaki bu konuşmada olduğu gibi (2)’ye detay ve kesinlik katabiliriz:

Bilim gazetecisi *Betty Glossop*: Dünyanın çeşitli yerlerinde iridyum yatakları olduğuna dair birçok yeni kanıt var. Jeologlar bu yatakların dinozorların soyunun tükenmesiyle aynı döneme denk geldiğini buldular.

Muhabir *Joe Penchant*: Bunun onunla ne ilgisi var?

Betty: İridyum doğada en az bulunan korozyona karşı en dirençli elementtir. Muhtemelen iridyum bakımından zengin bir asteroid krateri belirledik. Asteroidin, dünyayı çevreleyen iridyum da dâhil olmak üzere devasa bir toz

bulutu oluşturduğunu düşünüyoruz. Basitçe ifade etmek gerekirse otçul dinazorların ihtiyacını duyduğu ve etçil olanlara yem olan bitkiler, iyi bir şekilde yetişmedi ve dinazorlar da açlıktan öldü.

Joe: O halde, bütün bu yeni bilgiler ışığında, dinazorları öldürenin bir asteroid olduğu ne kadar olasıdır?

(3) *Betty:* Bütün kanıtları dikkate alırsak, olasılık yaklaşık olarak %90'dır.

(1) ve (3)'te "olasılık" kelimesi farklı kullanılmış gibi görünüyor. (3)'te, *Betty Glossop* bir *önermenin* olasılığı hakkında konuşuyor, yani:

(4) Dinazorlar devasa bir meteorun dünyaya çarpmasıyla yok oldu.

Gelin öncelikle *Betty*'nin iridyum hakkındaki kanıtına atıfta bulunduğu (3)'e ve benzeri şeylere bakalım. (3) ve hileli parayla ilgili (1) hakkındaki a-e noktaları arasında madde madde bir karşılaştırma yapalım. Aşağıdaki ifadeleri ve önceki ifadeyi, çok dikkatli bir şekilde okuyun. Bakın bakalım tek tek her bir ifadeyle mutabık kalacak mısınız?

İlk olarak, (1), (2), (3) ve (4)'ün tam olarak ne olduğunu gözden geçirin. (4)'ün tam bir olasılık ifadesi olmadığına dikkat edin. Sadece (3)'ün kanıttan bahsettiğine dikkat edin.

DİNOZORLAR VE OLASILIK

- a (1) ve (4) numaralı [fakat (3) numaralı ifade değil] ifadeler bir bakıma benzerdirler. (4) numaralı ifade, (1) numaralı ifade gibi dinazorlar hakkında ne bildiğimizden bağımsız olarak, ya doğrudur ya da yanlıştır. (4) doğruysa bu dünya böyle olduğu için doğrudur, özellikle de dinazorlar çağının sonunda ne olduğu düşünüldüğünde. (3) doğruysa "dünya öyle olduğu için" doğru değildir, fakat kanıtlar (4)'ü ne kadar iyi desteklediğine bağlı olarak öyledir.
- b (3) doğruysa dünya öyle olduğu için değil, tümevarım mantığından dolayı doğrudur.

- c (3)'te *bahsedilen* kanıt fizik kanunlarına (iridyum), jeolojiye (asteroid), jeofiziğe, iklimbilimine ve biyolojiye kadar gider. Fakat bu özel bilimler, (3)'ün neden doğru olduğunu açıklamaz. (3) numaralı ifade, dinazorlar hakkında bu özel bilimler tarafından sunulan kanıtlarla (4) numaralı ifade arasındaki ilişkiyi ifade eder.
- d İridyum ve benzeri şeyler hakkındaki iddiaları test etmek üzere deneyler yapabiliriz. Fakat (3)'ü test etmek için deney yapamayız. (1)'in testlerinin paranın tekrar tekrar atılmasını içerebileceğine dikkat ediniz. Fakat (3)'ü devamlı test etmekten bahsetmek *pek de anlamlı değildir*.
- e Kısaca: (3) numaralı ifade, kanıtın (4) numaralı ifadeyi nasıl desteklediğine dair bir iddiada bulunuyor.

KANITTAN BAHSETMEMEK HAKKINDA

(3)'e benzeyen, fakat kanıttan bahsetmeyen (2)'yi atladık. (2)'yi, (1) ve (3)'e daha fazla benzetmek için onun üstüne "olası" numarasını koyacağız:

(2.1) Dinazorların sonunun devasa bir asteroidin dünyaya çarpmasıyla gelmesinin olasılığı çok yüksektir; yaklaşık olarak 0,9.

(2.1) ifadesi (3)'ten farklıdır, çünkü kanıttan bahsetmiyor. Fakat bazı bakımlardan (3)'e benziyor. Bunların benzer olduğu yollardan biri de d noktasıdır:

- d İridyum ve benzeri şeyler hakkındaki iddiaları test etmek üzere deneyler yapabiliriz, bu deneyler de kişinin (2.1)'i ileri sürmesine yol açabilir. Fakat (2.1)'i test etmek için deney yapamayız. (1)'in testlerinin paranın tekrar tekrar atılmasını içerebileceğine dikkat ediniz. Fakat (2.1)'i devamlı test etmekten bahsetmek *pek de anlamlı değildir*.

Maalesef, (2.1)'i anlamamanın en az iki yolu var. (2.1)'in "gerçekten" (3)'ün kısa hali olduğunu düşünebiliriz. İnsanlar şu ve bu olası dediklerinde, eldeki mevcut kanıta göre şu ve bu olasıdır demek istemektedirler. Buna (2.1)'i anlamamanın *kişi-*

lerarası/kanıtsal yolu diyeceğiz. (2.1)'i anlamının diğer yolu-naysa *kişisel* yol diyeceğiz.

KİŞİLERARASI/KANITSAL

(2.1)'i bu şekilde anlama yolunda, bu durum aşağıdakinin kısa halidir:

(2.2) Eldeki mevcut kanıtlara göre dinzorların sonunun devasa bir asteroidin dünyaya çarpmasıyla geldiğinin olasılığı çok yüksektir; yaklaşık olarak 0,9.

Birinin lafı uzatarak (2.2)'yi ifade ettiğini söyleyebiliriz:

- Kanıt hakkında düşünmüş olan *mantıklı* herhangi bir insanın bir asteroidin dinzorları yok ettiğini *düşünmesinin* çok *akla yatkın* bulunacağını doğal karşılamaktadır.
- Asteroidlerin dinzorların soyunun tükenmesine neden olduğu konusunda oldukça *emin* olmanın *rasyonel* bir şey olduğunu düşünüyor.
- (2.1) demenin (2.2) gibi bir şey demek olduğunu düşünüyor; ya da *Betty Glossop*'un lafı daha az uzattığı (3) gibi.
- (2.2)'nin *kişilerarası* olduğunu düşünüyor; çünkü herhangi mantıklı bir insanın inanması için neyin makul olduğu hakkındadır. Ve inanç derecesinin mevcut *kana**ta* bağlı olması gerektiğinden, buna *kişilerarası/kanıtsal* deriz.
- (2.2)'nin *kişilerarası* ve inancın rasyonel dereceleri hakkında olduğunu düşündüğünden, (2.2)'nin “nesnel” olduğunu düşünür.

ÖZNEL/NESNEL DEĞİL

Olasılık hakkında çok şey okuduysanız, çoğu zaman “nesnel” ve “öznel” olasılıklar hakkında okumuşsunuzdur. Bunlar ideoloji yüklü korkunç terimlerdir. “Ben nesnelim, sen öznelisin, o önyargılı.” Bu türde bir konuşmayı ne sıklıkta duymuştunuz?

JAMES: Bu sadece senin öznel düşüncen.

MARY: Saçmalama, bu nesnel bir olgu.

Ne kadar sıklıkla bu şekilde *konuştunuz*?

Olasılıkta ya da hayatınızın geri kalan kısmında böyle bir kızgınlık haline girmeyin. *James* ve *Mary* tartışmıyorlar, sadece birbirlerine çamur atıyorlar.

Fakat hem hile ve zar hakkındaki (1), hem de (2.2) ya da (3)'e –her ne kadar değişik nedenlerle olsa da– “nesnel” denilebileceğine dikkat edin. (1) numaralı ifadeye “nesnel” deniliyor, çünkü o dünyanın nasıl olduğuna dair bir ifadedir. İfade (2.2)'ye kanıt ve önerme arasında olduğu farz edilen mantıksal ilişki [yani, (4)] nedeniyle “nesnel” deniliyor.

KİŞİSEL İNANÇ DERECESİ

(2)'yi anlamamanın başka bir yolu daha var. Birisi (2) deyince, aşağıdaki gibi sadece kendileri hakkında bir şeyi demek istemiş olabilirler:

(2.3) Dinozorların sonunun devasa bir asteroidin dünyaya çarpmasıyla geldiğinden şahsen çok eminim.

Ya da hatta (2.1)'i anlamak üzere şu şekilde:

(2.4) Onun üzerine iddiaya girmem gerekseydi, dinozorların sonunun devasa bir asteroidin dünyaya çarpmasıyla getirildiği yönünde 9'a 1 bahse girerdim.

KENDİNİZ HAKKINDA DÜŞÜNME ZAMANI

(2) gibi şeyleri söylerken ne demek *istiyorsunuz*, “Dinozorların sonunun devasa bir asteroidin dünyaya çarpmasıyla geldiği olası mıdır acaba”?

Aşağıdaki gibi şeyler söylerken ne demek istenir:

Muhtemelen bugün yağmur yağacak.

Muhtemelen jeoloji sınavından kalacağım; o aptal kaya numunelerini birbirinden ayıramıyorum.

John F. Kennedy'nin suikastında ikinci silahlı bir adamın olma olasılığı ihmal edilebilirdir.

Bütün olasılıklarda, fosil yakıtların yakılması, aerosoller, öldürüp yiyelim diye yetiştirilen et sığırından elde edilen gübre nedeniyle aşırı bir küresel ısınma döneminden geçiyoruz ve benzeri.

Bütün propagandaya rağmen, küresel ısınma hipotezi pek de olası değildir; sadece rutin bir iklim döngüsünden geçiyoruz.

Babamın çalıştığı şirketin satın alma işleminden sonra küçültüleceği ve babamın da işini kaybedeceği çok olasıdır.

İNANÇ-TÜRÜ

(4) numaralı ifade dinazorların soyunun tükenmesi hakkında bir önermeydi; (2)-(2.2) ve (3), (4)'ün ne kadar *inandırıcı* (inanılabilir) olduğu hakkındadır. Bunlar, birilerinin (4)'e ne derece *inandığı* ya da *inanması gerektiği* hakkındadır. Bunlar, kişinin o kanıt ışığında ne kadar *emin* olacağı ya da olması gerektiği hakkındadır.

(2)-(2.2) ve (3)'teki "olası" ve "olasılık" kelimelerinin kullanımı aşağıdakiler gibi düşüncelerle ilişkilidir:

inanç	güven
inanılabilirlik	kanıt

Olasılık kelimelerinin kullanım ailesi için bir isme ihtiyacımız var. Felsefeciler birçok farklı isim kullandı. Ancak hatırlaması en kolay olanı şudur:

İNANÇ-TİPİ OLASILIK

İşin sonu bu değil. Biraz önce inanç-tipi olasılıkların en az iki şekilde düşünüleceğini gördük: *Kişilerarası/kanıtsal* ve *kişisel*.

FREKANS-TİPİ

Şimdi tekrar (1)'e bakın:

(1) Bu parayla tura gelme olasılığı 0,6'dır.

Bu ifadenin gerçekliğinin inandığımız şeyle hiçbir ilgisi yok gibi görünüyor. Maddi bir nesne, yani para (ve onu atan cihaz) hakkında tamamen olgusal bir ifadede bulunuyoruz gibi görünüyor. Farkında olalım ya da olmayalım, basitçe yanlış bir duruma düşmüş olabiliriz. Bu, adil bir para olabilir ve biz de az sayıda yazı-tura atmamız nedeniyle çok basit olarak yanılgıya düşebiliriz. Paranın deneyle incelenip ortaya konulabilecek olan fiziksel bir özelliğinden bahsediyoruz.

Peki, bu fiziksel özellik nedir? Şöyle bir şey diyor olabiliriz:

- Tekrarlanan para atmalarda, turanın *görelî frekansı* 6/10 gibi sabit bir oranda sabitlenir.
- Paranın tura gelme *eğilimi* yazı gelme eğiliminden daha fazladır.
- Turalara iltimas geçmek gibi bir *isteği* ya da *özellığı* var.
- Ya da paranın asimetrisi ve yazı-tura atma makinesi hakkında daha temel bir şey söylüyoruz. Paranın yazıdan ziyade daha fazla tura gelmesine neden olan *geometrisine* ya da *fiziğine* bir atıfta bulunuyor olabiliriz.

(1)'de "olasılık" kelimesinin kullanımı

frekans
eğilim
istek

özellik
simetri

gibi fikirlerle ilişkilidir. Olasılık kelimelerinin kullanım ailesi için bir isme ihtiyacımız var. Felsefeciler birçok farklı isim kullandılar. En kolay hatırlanacak olanı:

FREKANS-TİPİ OLASILIK

DİĞER İSİMLER

Felsefecilerin "olasılık" kelimesinin bu iki grup halindeki kullanım şekline kaç isim verdiğine inanmayacaksınız. Diğer kitaplara bakacak olursanız, işte size küçük bir sözlük.

- *Öznel/nesnel*. İnanç-türü ve frekans-türü ayrımı için en eski kelime çifti "öznel" (inanç-türü) ve "nesneldir" (frekans-türü). *İtiraz*: İridyum katmanı ve benzeri şeyler hakkındaki mevcut kanıtlara atıfta bulunan uzun ifade olan (3)'e "öznel" deniliyor? Çoğu bilim insanı bunun kanıtın "nesnel" bir değerlendirmesi olduğunu iddia ediyor.
- *Bana tamamen Yunanca gibi geliyor*. İnanç-tipi olasılıklara Yunancada bilgi anlamına gelen bir kelime olan *epistemen* yola çıkarak "epistemik" denir. Frekans-tipi olasılıklara da, frekans-tipi olasılıklar için net örnekler sunan ve şans oyunları için kullanılan Latince bir kelime olan *aleadan gelen* "aleatory" (tesadüfe bağlı) denir. *İtiraz*: Bu kelimeler hiçbir zaman tutulmadı. Çoğumuz için böyle şaşalı Yunanca ve Latince kelimelerden ziyade basit İngilizce kelimeleri hatırlamak çok daha kolaydır.
- *1 numara ve 2 numara*. Felsefeci ve mantıkçı Rudolf Carnap (1891-1970) inanç-tipi olasılığa "olasılık₁" ve frekans-tipi olasılığa da "olasılık₂" diyor. *İtiraz*: Carnap'ın önerisi hiçbir zaman tutulmadı. Ayrıca hangisinin 1 numara olduğunu, hangisinin 2 numara olduğunu hatırlamak da zor.

Bu iki olasılık grubu için başka birçok nitelendirme de yapıldı, fakat şimdilik bu kadar yeter. Gelin daha önce kitapta verdiğimiz kendi örneklerimizden bazılarına bakalım. Nereelerde üstü kapalı olarak frekans-türü olasılıkları düşündük? Nereelerde üstü kapalı olarak inanç-tipi olasılıkları düşündük?

AMORTİSÖRLER

Beşinci bölümde Bolt & Co. ve Acme Inc. olarak iki amortisör tedarikçisi hakkında biraz bilgi veriliyor. Şu bilgiyle başlamıştık:

Bir imalatçı için amortisörlerin %40'ını Bolt ve %60'ını da Acme tedarik ediyor. Bolt tarafından yapılan ve rastgele

seçilen bir amortisörün olasılığının 0,4 olduğunu kabul etmiştik.

Acme amortisörlerinin %96'sı testte sağlam çıktı. Fakat Bolt'un hattında bazı sorunlar var ve son zamanlarda da Bolt'un amortisörlerinin yalnızca %72'si testte sağlam çıktı.

Sonra şöyle sormuştuk:

Rastgele seçilen bir amortisörün testte sağlam çıkma olasılığı nedir? Olasılık 0,864 çıkmıştı.

Test edilen ve güvenilir olduğu anlaşılan rastgele seçilmiş bir amortisörün Bolt tarafından yapılmış olmanın koşullu olasılığı nedir? Cevap $1/3$ idi.

Şimdi burada bir frekans perspektifiyle bakmak doğaldır.

Bir montaj hattında toplu üretilen bir üründen bahsediyoruz. Biri Bolt'tan, biri de Acme'den olmak üzere iki hattan elde edilen defolu ve güvenilir ürünlerin göreceli frekansını gözlemliyoruz. Bu frekanslar iki şirket arasındaki farkı yansıtmalı.

BOĞAZ AĞRISI

Yedinci bölümde boğaz ağrısı hakkındaki bahis sorusu 6 tartışıldı. Bir hastayı muayene eden bir doktor olduğunuzu hayal etmeniz ve sürüntüleri test edilmesi için laboratuvara göndermeniz istenmişti. Şöyle demiştik:

Hastanın boğaz ağrısının olmasının olası olduğunu düşünüyorsunuz. Problemi biraz hissedebilmek için buna bir sayı verelim, hastanın boğaz ağrısı olma olasılığı %90'dır. $\Pr(S) = 0,9$.

Sizden, bir doktor olarak, laboratuvardan alınan görünürde tutarsız raporlar temelinde bir sonuca varmanız istenildi: 3 pozitif test ve 2 negatif test. Vardığınız sonuç,

Hastanın boğaz ağrısının olma olasılığı daha fazladır. Veriler temelinde, hastanın boğaz ağrısının olma olasılığı $343/344$ ya da 0,997'dir.

Sonra "düpedüz cehalet" denilen bir vakaya geçtik. Cahil birinin,

Bu hastanın boğaz ağrısının olup olmamasının olasılığı yarı yarıyadır.

Hastanın boğaz ağrısının olma olasılığı 0,5'tir.

Yani, $\Pr(S) = 0,5$ 'tir

diyebileceğini söyledik.

Sizse, laboratuvarından alınan haber ışığında, boğaz ağrısının olasılığını oldukça şaşırtıcı bir şekilde 343/352 ya da 0,974 olarak buldunuz.

Bu örnekte biraz frekans bilgisi var, yani laboratuvar testindeki yanlış pozitiflerin olasılığı var. Yine de, laboratuvar sonuçlarını almadan önce ve aldıktan sonra besbelli ki doktorun ya da cahil amatörün inançları hakkında konuşuyoruz.

Bu durumda inanç perspektifini benimsemek doğaldır.

Amortisörler hakkındaki problemin ve boğaz ağrısı probleminin Bayes Kuralı kullanılarak tamamen aynı şekilde çözülebileceğine dikkat ediniz. Biçimsel, mantıksal, matematiksel problem aynı, fakat anlam biraz farklıdır.

İFADE ETMEK VE SEBEPLERİ

Frekans-tipi olasılık ifadeleri *dünyanın nasıl olduğunu* ortaya koyar. Örneğin bir paranın ve yazı-tura atma cihazının fiziksel bir özelliğini ya da Acme ve Bolt'un üretim pratiklerini belirtir.

İnanç-tipi olasılık ifadeleri, bir kişinin inanca olan güvenini ya da kanıt ışığı altında bir varsayımın ya da önermenin güvenilirliğini ifade eder.

Birçok öğrenciyi zora sokan bir karmaşanın farkında olun.

Bir olguyu ifade ettiğimde, ifade ettiğim şeye inanmamı beklersiniz. İncancımın doğru olduğunu düşünmem için bazı sebeplerim olması gerektiğini beklersiniz. Size nedenlerimi söyleyebilmemi beklersiniz.

O halde bazı öğrenciler şöyle düşünür: Dünyanın nasıl olduğuna dair her ifade, nedenleri ve inançları ortaya koyar. HAYIR!

Dünyanın nasıl olduğuyla ilgili bir ifade, (umuyoruz ki) kişinin bu ifadeyi ortaya koymak için bazı inanç ve nedenleri olduğu için bir ifade olarak ortaya konmuştur. Fakat şunu söylemiyor: “*p* olduğuna inanmam için nedenlerim var.” Söylediği şu: “Dünya işte böyledir: *p*.”

Şu ikisini ayırt edin:

- Kişinin ne söylediği (bir önermenin neyi ifade ettiği).
- Bazı önermeleri ifade etmesi ya da bunlara inanması için kişinin sahip olabileceği nedenler.

Aslında, insanların çoğu zaman ortaya koyacakları ifadeler için nedenleri yoktur. Bazen söyledikleri şeye bile inanmazlar. Çoğu farklı durumda kişi “dünyanın nasıl olduğunu” söyleyebilir. Kişinin:

- Mükemmel nedenleri olabilir.
- Sadece ifadenin doğru olmasını ümit edebilir, fakat hiçbir sebep öne sürmez.
- Yalan söyleyebilir; önermenin yanlış olduğuna inandığı ve böyle düşünmesi için nedenleri olduğu halde, birisine yanlış bilgi vermek isteyebilir.

TEKİL VAKA

Frekans-türü olasılıklar genellikle bir dizi halinde oluşan bazı öğeler hakkındadır: Bir tekerleğin dönmesi, bir imalatçı tarafından üretilen amortisörler.

Tek bir vakanın “frekansı” hakkında konuşmak pek de anlamlı değildir. Bir hastanın boğaz ağrısı ya vardır ya da yoktur. Bahis sorusu 5’teki taksi probleminde, ya mavi bir taksi başka bir arabaya yandan çarptı ya da bunu yeşil bir taksi çarptı. Belirtildiği gibi bu problemler tek bir olayı, tek bir arabayı, tek bir hastayı ve tek bir vakayı içerir.

Bu tür olasılıklar kelimenin tam anlamıyla bir frekans olarak ele alınamaz. Eğilim ya da istek olarak da ele alınmazlar.

Taksi hikâyesinde, *tanığın* sisli bir gecede bir taksinin rengini doğru olarak tanımlama gibi bir eğilimi ya da isteği

ya da özelliği var. Olayların %80'inde durumları doğru biliyor. Bu bir frekanstır. Fakat *yandan çarpan araba* adına yeşil ya da mavi olmak gibi bir eğilim yoktur. O yeşildi. Ya da maviydi.

Birisi tek bir olayın olasılığından bahsederse, o zaman inanç perspektifine göre bakıyor olması gerekir.

Basit görünüyor ama farkında olunmalı. *Dean* parayla yazı-tura atıyor ve para önümde masanın üstüne düşüyor. *Dean* ya da başka herhangi birisi sonuca bakma şansını edinmeden ve para daha durmadan kitapla üstüne vuruyor.

DEAN: Kitabın altındaki paranın tura gelme olasılığı nedir?

BEANO: %60.

DEAN: Kitabın altındaki paranın tura gelme olasılığının 0,6 olduğunu mu demek istedin?

BEANO: Evet.

DEAN: Peki neden böyle söyledin?

BEANO: Bu bölümün başında tartıştığın (1)'deki hileli parayla yazı-tura attığını düşündüm. Bu paranın tura yönünde ayarlanmış olduğunu ve tura gelme olasılığının yaklaşık olarak 0,6 olduğunu düşündüm.

Bu durumda *Beano*, *bu paranın bu yazı-tura atılışı hakkında*, tek bir vakada, inanç-tipi bir ifade ortaya koyuyor. Aklında bu inanç-tipi ifadeyle ilgili bir *sebebi*, yani *para hakkında frekans-tipi bir ifade var*.

İLERİ GERİ GİDİP GELMEK

Hem frekans hem de inanç perspektifinden tek bir kelime kullandık, "olasılık." Bu tesadüfi olmuş bir şey değildi. İki perspektif arasında gidip geldik. Şöyle bir hesaplama yaptık:

Rastgele test edilip güvenilir olduğu anlaşılmışsa, bir amortisörün Bolt tarafından yapılmasının koşullu olasılığı $1/3$ 'tür.

Bu, otomobil imalatçıları tarafından satın alınan amortisörlerin üretim özellikleri hakkında bir ifadedir. Diyelim ki yarın, kalite kontrol mühendisi *Perçinci Rosie* bir yığın amortisör arasından rastgele bir amortisörü test ediyor. Güvenilir olduğunu buluyor.

Bu amortisörün Bolt tarafından yapılmış olma olasılığı nedir?

Rosie cevabı biliyor: Olasılık $1/3$.

Fakat bu olasılık tek bir vaka hakkındadır. Bu amortisörün ya da bu bir yığın amortisörün Bolt tarafından yapıldığıyla ilgili bir frekans yok. Yapılmış da olabilir, yapılmamış da.

Rosie inanç-tipi bir ifade ortaya koydu. Bunun nedeni, bu kurgudaki rastgele seçilmiş amortisörlerin göreceli frekanslarının güvenilir olduğuna dair bilgiydi.

O halde *Rosie* frekans perspektifinden inanç perspektifine döndü.

FREKANS PRENSİBİ

Perspektifleri, *frekans prensibi* denilen temel bir kuralla değiştiriyoruz. Bu kural inanç-tipi ve frekans-tipi olasılıkları birbirine bağlar.

Bilgi ve cahillik hakkında bir kuraldır. Farz edin ki:

- Belirli sayıda denemeden sonra bir olayın frekans-tipi olasılığını *biliyorsunuz*.
- O türde tek bir denemenin sonucu hakkındaki diğer her şeyden *bihabersiniz*.

Daha sonra frekans-tipi olasılığı tek vakanın inanç-tipi olasılığı olarak alıyorsunuz.

Buna *frekans-dışında-neredeyse-hiçbir-şey-bilmiyor* kuralı diyebiliriz. İşte size frekans prensibini ifade etmenin aşırı detaycı bir yolu:

S, E tipinde tek bir olaysa

ve belirli bir şans kurgusunda, belirli türde bir denemede E'nin meydana gelip gelmediği hakkındaki *tek* bilgi o kurguda o türdeki denemelerde frekans-tipi olasılık

$\Pr(E) = p$ ise

bu durumda S'nin inanç-tipi olasılığı da p olur.

İLGİLİ ALTKÜMELER

Frekans prensibi temel bir kuraldır. Frekans-tipi bir olasılık ne zaman bizim bir olay hakkında kesin olarak bildiğimiz “tek şeydir”? Adil bir parayla yazı-tura atıp sonucu sakladığımızda olduğu gibi sadece yapay durumlarda böyledir. Yine de, gerçek hayatta bu duruma “benzer” bir durumla sık sık karşılaşırız.

Genellikle çok net olarak belirli bilgiye sahip olmadığı-mız durumlar çoktur. Meteoroloji dairesi yeni biten haftadaki gibi haftaların en küçük alt kümesini aldı ve yağışların bu tür haftaları takip edilebilme eğilimini bulmaya çalıştı.

Üstü kapalı olarak frekans prensibini kullandığımızda, çoğu zaman bu türde bir ilişkili-olma yargısında bulunuruz. 10. bölümdeki sigara tiryakisi Tomer'ı hatırlayın. İstatistikçi, Tomer'ın arkadaşı Peggy'e şöyle demişti:

Yaklaşık olarak Tomer'ın yaşlarında olan bir erkeğin (Tomer gibi) sigara içtiği verildiğinde, 65 yaşından önce ölme olasılığı 0,36'dır.

İstatistikçi, esas olarak yaşa göre erkeklerin *ilgili bir altkümesini* seçti; fakat ayrıca frekans-tipi olasılıkların güvenilir bir ifadesini elde etmeye de dikkat etti. Frekans prensibinin gerçek hayata uygulanması için üzerinde çok muhakeme yapmak gerekir.

OLASILIKLARIN OLASILIKLARI

Kumarbazın yanılışına geri dönelim. *Dikkatli Öğrenci* (bkz. 3. bölüm) arka arkaya on iki çevirmede tekerleğin siyahta durduğunun farkına vardı. Hileden şüphelendi. Tekerlek üzerinde birkaç deney daha yaptıktan sonra, tekerleğin siyahı kayıracak şekilde fazlasıyla hileli olduğu sonucuna vardığını farz edelim:

$$0,91 \leq \Pr(B) \leq 0,93.$$

Niyeti bunun tekerleğin özellikleriyle ilgili bir ifade olarak anlaşılmasını istemesiydi. Yapılış ve döndürülüş tarzından dolayı tekerlek döndürmelerin yaklaşık olarak %92'sinde siyahta duruyor.

Bu riskli bir sonuç çıkarmadır. *Dikkatli Öğrenci* hâlâ şu şekilde bir şeyi söyleyecek kadar kendinden emin görünüyor:

Siyahın olasılığının 0,92'ye yakın olma ihtimali çok yüksektir.

Hatta daha kesin görünen bir şeyi söylemeyi de deneyebilir: "0,91 $\leq$ Pr(B) $\leq$ 0,93 olma olasılığı en azından %95'tir."

Görünürde *Dikkatli Öğrenci* frekans-tipi olasılığın inanç-tipi olasılığını ifade ediyor. Peki, nasıl olur da böyle bir şey yapar? Kolay. Siyah gelmesinin olasılığının 0,91 ile 0,93 arasında olup olmadığı ispat gerektiren bir husustur. Ve bunun doğru olma olasılığını tartışabiliriz. (Frekans-tipi) bir olasılığın (inanç-tipi) olasılığı.

ALIŞTIRMALAR

- 1 *Tekrar amortisörler.* (a) Amortisör örneğinde, Acme'nin güvenilirliği Bolt'unkinden daha fazla. Peki, bu farkın nedenleri neler olabilir? (b) Frekans-tipi ve inanç-tipi olasılıklar arasındaki ayrımın sebepleri neden ilgili ve önemlidir?

Aşağıda italik olarak yazılı ifadelerin her birini frekans-tipi ya da inanç-tipi diye sınıflayın. Birinin ya da birden çoğunun hem frekans-tipi hem de inanç-tipi olasılık olarak anlaşılabilirliğini düşünüyorsanız, neden böyle düşündüğünüzü açıklayın.

- 2 *Grip.* Aşağıdakilerin hepsi de gazetede hikâyelerden yapılan alıntılar.
 - (a) *Bir grip salgını başladığında, salgına maruz kalan bir kişinin hasta olma olasılığı %10 ile %15 arasındadır.*
 - (b) *Muhtemelen hastalık sağlıklı ve genç insanlarda etkisini 5 ile 7 gün içerisinde gösterecek.*

- (c) *Fakat hastalığın etkisini sağlıklı genç insanlardan ziyade yaşlı insanlarda haftalarca göstereceği ihtimali daha yüksek.*
- (d) *Aşı yapılması sanki bir tahmin yürütme oyunu gibidir; çünkü gribin hangi belirtilerinin kendisini göstereceğini tahmin etmenin hiçbir yolu yok. Fakat araştırmacılar hangi belirtilerin önceki yılın sonunda ortaya çıktığını tespit ederek iyi bir fikir sahibi olabilirler. Mevsimin sonunda bir belirti görünürse, onun bir sonraki yılda da ortaya çıkma olasılığı oldukça fazladır.*
- (e) *Dr. Gunn'ın söylediğine göre grip aşısının sağlıklı genç bir insanda gribi önleme olasılığı yüzde 70 ile 90 arasındadır. 65 yaşın üstündeki insanlarda olasılık sadece yüzde 50'dir. Fakat daha yaşlı bir insanda ölmü önleme olasılığı 0,85'tir diye de ekliyor.*

3

- (a) *31 Ocak 1996: (O günkü bir haberden): Çin yerel yasa-
ma organını lağvetmeye kararlı... Bu durumun sivil
özgürlükleri koruyan Hong Kong kanunlarını zayıf-
latması da muhtemel.*
- (b) *1 Şubat 2006: (Aynı gün gazetede çıkacak bir haber-
den): Son zamanlarda bildirilenlerin tersine, ayrılan
güney bölgesinin Hong Kong'u başkenti olarak seç-
mesi olası değil.*

4 *Fed [Amerikan Merkez Bankası]. Konuşan kişi Amerika para arzını ve temel faiz oranlarını belirleyen Amerikan Merkez Bankasının ("Fed") başkanıydı. Bir gazete haberi-
ne göre başkan şöyle dedi:*

- (a) *Ekonomik çöküşe dair bir yıl önceki artan endişelerin
tersine, durgunluk olasılığı %50'den azdır.*
- (b) *Fed'in son zamanlardaki önde gelen ekonomik göster-
geler üzerindeki analizleri önümüzdeki 6 ay içerisinde
durgunluk olma şansını daha da düşük göster-
mektedir, yüzde 10 ile 20 arasında.*
- (c) *Bu tür istatistiksel ölçümler için her şeyimi yatırıp
bahse girmem.*

- 5 *Klonlar* (önde gelen haftalık bilim dergilerinden biri olan *Nature*'dan): Araştırmacılar –çok çeşitli sorunları, görüş bozuklukları, kalp rahatsızlıkları ve uzun kol kemiği anormalliklerini içeren– Marfan sendromuyla ilişkili bir geni belirledi... Francesco Ramirez şimdi geni fibrillin için klonladı ve onu 15. kromozomun bir kısmıyla eşleştirdi. Bu tür bozukluğu olan aileler üzerinde çalıştıktan sonra *kusurlu gen verildiğinde, Marfan sendromu gösterme olasılığının 0,7'nin üzerinde olduğu* sonucuna vardı.

GÖZDEN GEÇİRMENİZ İÇİN ANAHTAR KELİMELEK

Frekans	Kişilerarası/kanıtsal
İnanç	Kişisel olasılık
Tek vaka	İstek
Frekans prensibi	İlişkili altküme

12. Olasılık Hakkında Kuramlar

Olasılıkla ilgili olarak temelde farklı iki yaklaşım var. Biri, frekans fikrine vurgu yapıyor. Diğeriyse inanç fikrine vurgu yapıyor.

Bazı kuramcılar bu fikirlerden sadece birinin önemli olduğunu söylüyorlar. Bunlara *dogmatikler* diyoruz. Bu kitapta biz *eklektik* olacağız. İşte size bir sözlükten alınma iki tanım:

- **Eklektik.** Sıfat. 1. (sanatta, felsefede, vb) Değişik stillerden, doktrinlerden, fikirlerden, yöntemlerden ve benzerinden en iyi görünen ne varsa onu seçme.
- **Dogmatik.** Sıfat. 1. Otoriter ya da kaba önermeler ya da fikirler ve benzeri yapmayla karakterize edilir.

FREKANS DOGMATİKLERİ

Bazı uzmanlar bütün tümevarım mantığının frekans-tipi olasılıklar cinsinden analiz edilmesi gerektiğine inanmaktadır. Bu, dogmatik bir felsefedir ve tümevarım mantığının kesinkes bir tür olasılığın kullanımına dayanması gerektiğini söylemektedir. Frekans dogmatikleri çoğu zaman inanç-tipi olasılıkların “bilimde yeri yoktur” demektedir.

İNANÇ DOGMATİKLERİ

Bazı uzmanlar bütün tümevarım mantığının inanç-tipi olasılıklar cinsinden analiz edilmesi gerektiğine inanmaktadır. Bu, dogmatik bir felsefedir ve tümevarım mantığının kesinkes bir tür olasılığın kullanımına dayanması gerektiğini söylemektedir. İnanç dogmatikleri çoğu zaman frekans-tipi olasılıkların “bir anlamının bile olmadığını” söylemektedir.

BİZİM EKLEKTİK YAKLAŞIMIMIZ

Kitaptaki 16-19. ve 22. bölümde frekans fikri işleniyor. 13-15. ve 21. bölümdeyse inanç fikri işleniyor.

Neyse ki, bir frekans dogmatığının analiz edebileceği verilerin ve argümanların (hepsini değil) çoğunu bir inanç dogmatığı de analiz edebilir. Tam tersi de geçerlidir. Sadece oldukça özel durumlarda bu iki düşünce okulu aynı verilerden gerçekten farklı çıkarımlar yapar. İlk başta daha ziyade verilerin nasıl elde edileceği hususunda farklılık gösterirler. En faydalı bilgiyi elde etmek için deneyleri nasıl tasarlayacakları konusunda fikir ayrılığına düşerler.

Bizim eklektik düşüncemizse her iki fikir ailesine de değer verir.

HAVA DURUMU

Hava durumu tahminleri olasılıklarla birlikte yapılır:

(a) Yarın yağış olma olasılığı %30'dur.

Peki, bu ne demektir? İfade *yarınki* yağmur (veya kar ya da dolu) hakkında olduğundan dolayı, tek bir vaka hakkındadır. Yağmur yağacaktır ya da yağmayacaktır. Sadece bir yarın var. O halde bunun bir inanç-türü olasılık olması gerekir.

Metoroloji dairesine bunun ne anlama geldiğini soracak olursanız, şuna benzer bir şey duyarsınız:

(b) Çok geniş bir veri bankasından geçen haftanın hava durumlarını karşılaştırdık ve benzer bakımlardan yeni bitmiş olan geçen haftaya benzeyen bütün haftaları seçtik. Bu haftalar içerisinde, %30'unun her birinden sonra yağmur yağdı. Geçen haftaya benzer bir haftayı takip eden haftanın ilk gününde yağmur yağma olasılığı %30'dur.

Bu da frekans-tipi bir olasılık olarak ifade edilir. Hava durumu dairesinin söylediğiyle anlatmak istediği şey aynıysa bu durumda (b)'den (a)'ya gitmek için frekans prensibini kullanılıyor olmalı. Bazı meteorologlar, dairelerinin (a) tahmini ni yaptığında, bunun tamamen (b) *demek olduğunu* –ya da

daha iyi ifade edersek, (b)'nin kısaltılmış şekli olduğunu söylüyorlar. Onlar her zaman frekans-tipi olasılıkları demek istediklerini söylüyorlar. Onlar *frekans dogmatikleridir*.

İnanç dogmatikleri hava durumu tahmini yapan insanların ne konuştuklarını bilmediklerini öne sürüyorlar. Meteorologların hiçbir zaman frekans anlamını ortaya koymaları gerekir. Çünkü sadece geçmiş yağış frekanslarına dayanmazlar. (b) de dâhil olmak üzere, her türlü bilgiyi kullanırlar ve bazı değer yargılarıyla çağrı yaparlar. Fakat (a) ifadesi tamamen ne görünüyorsa odur. Hava durumu tahmini yapan insanların ne ölçüde yağmur beklediğini ifade etmek için kullanılmaktadır.

Neyse ki, insanların çoğu bu tür dogmatik iç mücadelelerden haberdar değil. Hiç kimse, gündelik hayatta (a) tahminin ne anlama geldiğini merak etmez.

OLASILIK HAKKINDA DÖRT KURAM

Her iki türdeki dogmatik de düşüncelerini mümkün olduğunca net bir şekilde ortaya koymaya çalışıyor. Dolayısıyla çok sayıda felsefecinin "olasılık kuramları" dedikleri şeylerden var. Kısaca iki adet frekans-tipi kuramı ve iki adet de inanç-tipi kuramı tarif edeceğiz.

KİŞİSEL OLASILIK

Dinozorları hatırlayın. Birisi şöyle diyor: "Dinozorların egemenliği devasa bir asteroid dünyaya çarpınca sona erdi." Bu iddia hakkında oldukça kişisel olmayan bir şey diyebiliriz:

Dinozorların egemenliğinin devasa bir asteroidin dünyaya çarpmasıyla sona ermesi olasıdır.

Bu da bize, iyi bilgilendirilmiş olan "herkesin" aynı kaniya varması gerektiğini öneriyor. Bu *kişilerarası* nosyon aşağıdaki gibi anonim iddialara yol açar:

Dinozorların sonunun devasa bir asteroidin dünyaya çarpmasıyla tükendiğine çok emin olabilirsiniz.

Daha sonra *kişisel* ifadeler var ve bu ifadelerde konuşan kişinin kendi kişisel emin olma ya da inanç derecesi ortaya konuyor:

Dinozorların sonunun devasa bir asteroidin dünyaya çarpmasından sonra tükendiğine çok eminim.

Bu da bizi *kişisel* olasılık fikrine götürür. Bu, inanç-tipi bir olasılıktır. Kişisel olasılığın tamamen "öznel" olduğunu ve tümevarım mantığı açısından hiçbir faydasının olmadığını düşünebilirsiniz. Aslında bu çok güçlü bir fikirdir ve 13-15. bölümde geliştirilmiştir. Tutarlı olmak isteyen insanların olasılığın temel kurallarına uyan kişisel olasılıkları olmalıdır (bunu da gösteriyoruz).

MANTIKSAL OLASILIK

Kişisel olasılık daha ziyade inanç-tipi olasılıkların aşırı uç türlerinden biridir. Bunun tam karşı ucunda **mantıksal olasılık** vardır. İşte size dinozorlar hakkında uzun bir olasılık ifadesi:

Jeolojik olarak dinozorların soyunun tükenmesiyle aynı zamana geldiği belirlenen dünyanın birçok yerindeki iridyum katmanı hakkında son zamanlardaki kanıtlarla ilgili olarak, dinozorların egemenliğinin devasa bir asteroidin dünyaya çarpmasıyla sona ermesi olasılığı %90'dır.

İnsan şöyle de diyebilir:

Eldeki kanıtlara ilişkin olarak, dinozor/asteroid hipotezinde yüksek derecede bir inancın olması akla uygundur.

Bu koşullu olasılığa dair bir ifadedir. Buna *kişilerarası/kanıtsal* diyoruz.

H dinozorlar hakkında bir hipotez, K de kanıt olsun. Bu durumda bu ifadenin şekli

$$\Pr(H/K) = 0,9.$$

Mantıksal olasılık kuramı bunun gibi ifadelerin, mantıksal tmdengeli me benzer bir şekilde H ve K arasında *mantıksal* bir ilişkiyi ifade ettiğini söyler.

Mantıksal olasılıkların kanıt ve hipotez arasında mantıklı ilişkiler olduğu farz edilir. Bu kuramda, tek başına H'nin olasılığı hakkında konuşmanın hiçbir anlamı yoktur.

Mantıksal olasılık kuramına göre olasılık her zaman *kanıtla ilişkindir*. Gerçekten kanıttan bahsetmediğimiz zaman, üstü kapalı olarak bir kısım kanıtla atıfta bulunuyoruz.

Frekans dogmatikleri bu sonuca tahammül edemezler. Olasılık hakkındaki ilk belirgin frekans kuramlarından biri Venn şemalarının (*bkz.* 6. bölüm) yaratıcısı olarak bilinen John Venn'in (1834–1923) kuramıdır. John Venn şöyle demiştir:

Bir olayın olasılığı bir şeye, bir alanın başka bir şeye ilişkin olduğu kadar ilişkindir.

YETERSİZ NEDEN PRENSİBİ

Peki, hiç ilişkili kanıt yoksa ne olacak? Sayısal olasılıkların ilk günlerinden bu yana, insanların çeşitli alternatifler arasında bir seçim yapmak için nedenleri yoksa bu alternatifleri eşit olasılıklı olarak ele almaları gerektiğini söyleme eğilimleri vardır.

Örnek: Peter Hollanda'da yolda giderken (*bkz.* 10. bölüm) aşağıdaki levhanın Amsterdam'ın mı yoksa Rotterdam'ın mı yolunu gösterdiğini bilmiyor.

---TERDAM →

Alternatifler arasında seçim yapması için hiçbir nedeni yok. "Terdam" ile biten başka hiçbir büyük şehir bilmiyor, onun için her birinin olasılığının 0,5 olduğunu söylüyor.

Örnek: Mario Baguette, Metropolitan Havaalanında arkadaşları Sonia'yla buluşacak. Uçakla New York'tan geliyor. Mario'ya 15.00 ile 16.00 arasında oraya varacağını söylüyor. O saatte New York'tan gelen 5 farklı havayolu var; Alpha Havayolları, Beta Blaster, Gamma Goways, Delta ve Eatemup Havayolları. Mario birini diğerine tercih etmesi için hiçbir

sebeup görmüyor, onun için de her birinin olasılığının 0,2 olduğunu söylüyor. Alpha ve Beta 1. terminale, Gamma ve Delta 2. terminale ve Eatemapsa 3. terminale geliyor. Eatemup ve 3. Terminal için olan beklentisi en düşük olduğundan, terminal 1 ya da 2'den hangisine gideceğini görmek için yazıtura atıyor.

Mantıksal olasılığın savunucuları n adet karşılıklı olarak birbirini dışlayan ve ortak geniş kapsamlı hipotezlerin birine yakın duran hiçbir kanıt yokken, bu durumda bunların her birine $1/n$ olasılığı verilmesi gerektiğini söylemektedir. Buna *yetersiz neden prensibi ya da kayıtsızlık prensibi* denir.

YARI YARIYA İHTİMALİ ÇOK KOLAY

Yetersiz neden prensibi iyi görünüyor. Fakat gerçek sorunlar var. Bir arabanın kırmızı olup olmadığının olasılığının aynı olduğunu söyleyebilir misiniz? Ya da kırmızı ya da mavi ya da yeşil ya da başka bir renk? Prensip çabucak birçok paradoksa yol açıyor.

BAYESÇİLER

On beşinci bölümde hem kişisel hem de mantıksal olasılık kuramlarının Bayes kuralını fazlasıyla kullandığını göreceğiz. İnanç-tipi olasılıkları özel olarak kullanan ve Bayes kuralına büyük vurgu yapan inanç dogmatiklerine çoğu zaman Bayesçiler denir.

KEYNES VE RAMSEY

Mantıksal olasılık fikri –ki her zaman “kanıta ilişkindir”– en az 200 yıl öncesine dayanır, fakat mantıksal olasılığın ilk sistematik sunumu, mantıksal bir ilişki olarak John Maynard Keynes (1883–1946) tarafından yapılmıştır. Keynes, kuramları bazen 1929–1936 yılları arasındaki Büyük Buhranda kapitalizmi kurtarmasıyla puan toplamış olan meşhur bir ekonomisttir. *Treatise on Probability* [Olasılık Üzerine Tez] (1921), Cambridge Üniversitesinde (doktorası olmadan, doktora sonrası çalışması gibi bir şey) akademisyenlik ödülü için sunulan ilk büyük eseridir.

1926'da, Cambridge'de, ikinci ve genç bir adam Frank Plumpton Ramsey (1903-1930) ilk modern kişisel olasılık kuramını sundu. Ekonomiye, matematik mantığına, olasılık kuramına ve felsefeye temel katkılar yaptıktan sonra 26 yaşındayken bir operasyon esnasında öldü.

Mantıkçılar ve özellikle de Rudolf Carnap, Keynes'in mantıksal olasılığına çok bağlanmıştı. Yine de, Ramsey'nin şu birkaç basit sözü etkileyici.

"Bay Keynes'in görüşlerinin" en "temel eleştirisi şudur ki... onun tarif ettiği gibi olasılık ilişkileri diye bir şeyler gerçekten yok gibi görünüyor."

DE FINETTIVE SAVAGE

Kişisel olasılık tarihindeki iki önemli şahsiyet İtalyan matematikçi Bruno de Finetti ve Amerikalı L. J. Savage'dır. On beşinci bölümde Savage hakkında daha fazla bilgi bulabilirsiniz. Ramsey'nin İngilizce olarak kendi fikirlerini ortaya koyduğu dönemle hemen hemen aynı dönemde, de Finetti, İtalyanca olarak fikirleriyle öncülük yaptı. Fakat Ramsey zihninde, frekans-tipi olasılık kavramına, özellikle de kuantum mekaniğinde, yer olduğunu düşündü. De Finetti'ye sadece kişisel inanç-tipi bir kavramın bir anlam ifade ettiğine ikna olmuştu. Savage da aynı şekilde. Her ikisi de, şimdi Bayesçi istatistik denilen kişisel olasılık fikri hakkında bize çok şey öğreten inanç dogmatikleriydi.

FREKANSIN SINIRLANDIRILMASI

İnanç-tipi olasılıklar, bir uçta mantıksal olasılıklar ve diğer uçta da kişisel olasılıklar olmak üzere ikiye ayrılır. Frekans-tipi olasılıklarda da benzer bir durum vardır.

Şimdiye kadar bir fikir ailesinden bahsettik: Frekans, uzun dönem, geometrik simetri, fiziksel özellik, eğilim, istek. Bunlara nasıl bir kesinlik verebiliriz? Bir yolu uzun dönemde görel frekansı vurgulamaktır. Peki, "uzun dönem" ne demektir? Matematikçiler hemen bir idealleştirmeyi düşünürler: *Sonsuz sayıda* denemeler dizisi.

Matematikçinin aklına gelen bir sonraki fikir *yakınsama* ve *matematiksel limittir*. Bu da bizi bir sonucunun görelî frekansının bir *limite yakınsadığı* sonsuz denemeler dizisinin idealleştirilmesine götürür.

Fakat başka bir gereklilik daha var. Turayla yazının sürekli değiştiği bir parayla yazı-tura atarak oluşan diziyi düşünün:

TYTYTY....

Görelî frekans kesinlikle $1/2$ 'ye yakınsar, fakat bunu bir olasılık olarak düşünmüyoruz; çünkü dizi tamamen belirlidir. Bunun için olasılığın bu tanımına bir ibare daha ekliyoruz. Bu, daha önce 3. bölümde bahsedilmişti: *Kumar sisteminin imkânsızlığı*.

Olasılık hakkındaki bu kuram net bir şekilde ilk defa John Venn tarafından 1866'da anlatılmıştı. 1928'de, Avusturya-doğumlu uygulamalı matematikçi (aerodinamik) ve Harvard'da felsefe profesörü olan Richard von Mises (1883–1953) tarafından sistematik olarak geliştirildi.

"Kumar sisteminin imkânsızlığı" fikrinin çok faydalı olduğu ortaya çıktı. A. N. Kolmogorov'un (bkz. 6. bölüm) öncülüğünü yaptığı hesaplamaların karmaşıklığı hususunda temel yeni fikirlere yol açtı. Kabaca söylemek gerekirse, ideal bilgisayar programları sınıfına görelî olarak diziyi yaratacak herhangi bir program en az dizinin kendisi kadar uzunsa, bu dizinin rastgele olduğu söyleniyor.

İSTEK

Sınırlayan frekans fikri aşırı uç bir frekans-tipi olasılıktır. Bir şans kurgusundaki bir dizi gerçek deneme sonucunu idealleştirir. Altında yatan neden ya da yapılardan ziyade neyin olacağının görüldüğüne vurgu yapar.

Kararlı görelî frekanslar sadece bir kurgunun belli başlı fiziksel ya da geometrik özellikleri varsa mevcut olur. Gerçek hiçbir deneme yapılmamış olsa bile böyle temel bir yapıya sahip olabiliriz.

İkinci bir uç frekans-türü fikirse şans kurgusunun eğilimine, özelliğine ya da *isteğine* vurgu yapar. Radyoaktif

bozunma gibi doğada bulunan stokastik süreçleri düşündüğümüzde bu özellikle doğal görünmektedir. Temel fiziksel süreçlere göre Geiger sayacındaki tıklamaların dağılımıyla daha az ilgiliydik.

Olasılığın istek olarak ele alınışı, Londra Ekonomi Okulunda profesör olan, Avusturya-doğumlu felsefeci Karl Popper (1902–1994) tarafından geliştirilmiştir. Popper 20. yüzyılda bilim felsefesinde en etkili felsefeci olmuş olabilir. 20. bölümde onun tümevarım probleminden nasıl sakındığını tartışacağız. Popper istek yaklaşımının kuantum mekaniğinin temel hususlarını anlamada önemli olduğuna inanmıştı.

BEKLENEN DEĞERLER

Olasılık türlerine o kadar çok yer verdik ki, beklenen değerleri ve adil fiyatları ihmal etme tehlikesiyle karşı karşıya kalabiliriz.

Beklenen değerler olasılık cinsinden açıklandığında, "olasılık" kelimesindeki her belirsizlik "beklenen değerde" ortaya çıkıyor. Böylece kişisel beklenen değerler, mantıksal beklenen değerler (kanıt koşullu), istekli beklenen değerler vb var. Ve farklı kuramlar arasında olağan tartışmalar var. Şu anekdot anlatılmak isteneni ortaya koyacaktır.

ESKİ KOLA MAKİNESİ

Bir zamanlar bir şişe Coca-Cola sadece 5 sentti. Kola makinelerinden 5 sentlik madeni paraya bir şişe çıkıyordu. Sonra fiyatı 6 sente çıktı. *Mutsuz Denizci* öldüğü güne kadar hep bunu hatırladı. (Kendisini, baş istatistikçi olduğu Amerika Standartlar Bürosunda ziyaret ettiğimde bana hikâyeyi kendisi anlattı.)

Enflasyonu dikkate alarak ayarlanan makinelerin olduğu Pasifik'teki askeri bir üssü ziyaret etti. Her 5 sentlik para attığınızda altıda bir ihtimalle hiçbir şey alamıyordunuz. *Denizci* sadece bir günlüğüne karada oluyordu ve onun istediği şeyse sadece bir şişe kolaydı. İlkinde kaybettii, sonra içeceğini almak için 5 sentlik bir para daha atması gerekti. "Bu adil değil" dedi.

Makine aşağıdaki piyangoya denkti. Altı bilet var, bunların beşinde 6 sentlik bir şişe kola ödülü var, birindeyse hiçbir ödül yok. Yani bu durumda adil fiyat 5 sent.

Tekrar felsefecinin cennetine dönersek, tartışma hâlâ devam ediyor.

VENN HAYALETLERİ, VON MISES, POPPER VE DİĞER FREKANS DOGMATİKLERİ: Şüphesiz adil fiyat buydu, çünkü ortalama olarak üsteki askerler her kola şişesi için 6 sent ödüyordu.

Mutsuz Denizcinin HAYALETİ: Uzun dönemden bana ne. Sadece bir günlüğüne adadaydım ve 6 sentlik bir kutu kolar için 10 sentlik parayı atmak zorunda kaldım. Sürekli üste kalanlar için adil bir durum olabilir, ama benim için adil değildi.

KEYNES VE DİĞER İNANÇ DOGMATİKLERİNİN HAYALETİ: Tamamen öyle. Uzun dönemde ortalamalardan bahsetmek tamamen alakasız bir şey. Makine adildi. Makineye 10 sentlik para konulması altı biletli sıfır-toplamlı simetrik bir piyangoya denkti. Beş bilet 6 sent değerinde bir ödül vermekte, bir bileteyse bir şey çıkmamaktadır. O halde toplam ödüller 30 sente çıkıyor. Altı oyuncu var ve her birinin 5 sent koyması gerekiyor. Adaletsizlik piyangoda değil. Adaletsizlik, *Mutsuz Denizci*'nin bu piyangoyu oynamaya zorlanmasındadır. Çok farklı türde adaletsizlikler vardır ve bunlardan biri de kola için kumar oynamaya zorlanmaktır.

NEDEN FARKLI TÜRDE OLASILIKLARIMIZ VAR?

İşte size basit bir cevap. Sayısal olasılıklar çok zaman önce, yaklaşık olarak 1650'de ciddi olarak kullanılmaya başlandı. Doğal olarak, insanların basit örneklerle ihtiyacı vardı. Kumar oynamak çok sık rastlanır bir şeydi, aynı şekilde piyangolar da öyleydi. Kumarların çoğu zar, paralar ve kâğıt desteleri gibi yapay rastgeleleştiricilere dayanıyordu. Bunun da ötesinde, seçilen rastgeleleştiricilerin çoğunun simetrik olacağı farz ediliyordu. Dolayısıyla olasılıkla ne demek is-

tediğiniz pek de o kadar önemli değildi. Bir çekiliş kutusu içerisine 1000 adet numaralandırılmış topun yerleştirildiği bir piyangoyu ele alalım ve farkın neden pek de önemli olmadığını görelim.

Görelî frekans konuşuyor: Bu piyango kutusundan yerine koyarak yapılan tekrarlanan çekilişlerde her top diğerleriyle aynı sıklıkta çekiliyor. O halde 434 numaralı topun çekilme olasılığı o topu çekmenin görelî frekansıdır, yani $1/1000$ 'dir.

İstek konuşuyor: Çekiliş kutusu, toplar ve çekiliş prosedürü öyle bir ayarlanmıştır ki bir topun çekilme isteği diğer bütün toplarla aynıdır. O halde 434 numaralı topun çekilme olasılığı $1/1000$ 'dir.

Kişisel olasılık konuşuyor: Beni ilgilendirdiği kadarıyla, her topun gelme olasılığı aynıdır ve benim için 434 numaralı topun çekilme olasılığı $1/1000$ 'dir.

Kişilerarası olasılık konuşuyor: Mantıklı hiçbir insan bir topun olasılığını diğerinden büyük düşünmez, onun için de 434 numaralı topun çekilme olasılığı $1/1000$ 'dir.

Mantıksal olasılık konuşuyor: Herhangi bir h_j (j numaralı topunun çekilmesi hipotezi) ile eldeki kanıt arasındaki mantıksal ilişkiyle, diğer başka her türlü h_k ile eldeki kanıt arasındaki mantıksal ilişki birbiriyle tamamen aynıdır. O halde olasılıklar aynıdır ve 434 numaralı topun çekilme olasılığı $1/1000$ 'dir.

Yetersiz neden prensibi konuşuyor: 1000 adet tamamen birbirini dışlayan ve ortak geniş kapsamlı hipotezlerden birine yakın duran hiçbir kanıt yoktur. Bunun için her olasılığa $1/1000$ verilmelidir.

MODELLEME

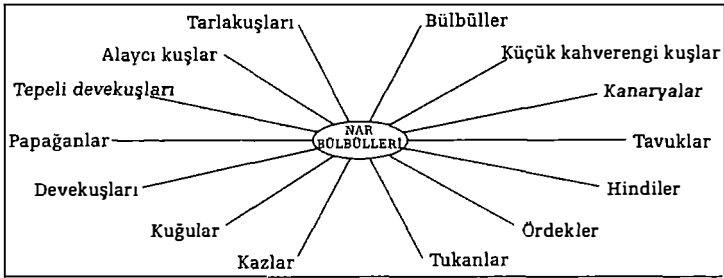
Olasılıkların geliştirilmesindeki bir sonraki aşama çekiliş kutuları, piyangolar, zarlar ve iskambil kâğıtları gibi esaslı örnekler üzerinden daha karmaşık durumların modellemesiydi. Esaslı örneklerin ne kadar anlaşıldığı da yine önemli değil. Önemli olan oldukça karmaşık modellemeler karşımıza çıktığında olasılıkları nasıl ele alıp düşündüğümüzdür. Evet, amortisör örneğimiz doğal olarak frekanslar cinsinden ele alınıp anlaşıldı ve boğaz ağrısı örneğimiz doğal olarak

inanç dereceleri cinsinden ele alınıp anlaşıldı. Fakat istatistiksel çıkarım üzerinde ciddi bir şekilde düşünmeye başlanana kadar sadece aşırı detaycı felsefeciler, olasılığın anlamı üzerine ciddiyetle eğilirler.

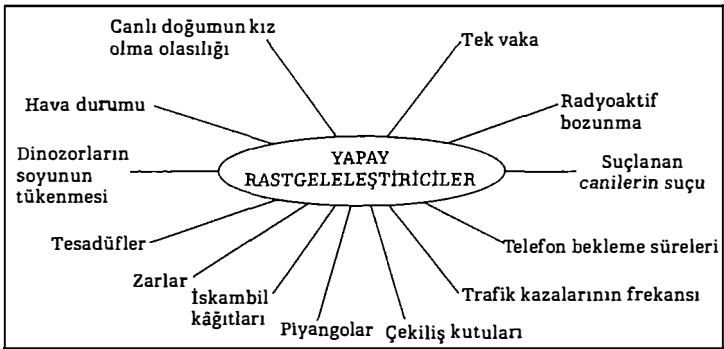
ANLAMLAR

"Terimlerinizi tanımlayın!" Bunu çok çeşitli defalar duymuşsunuzdur. Fakat çoğu zaman istediğimiz şey tanım değildir. Çoğu kelime en başında, en iyi örneklerle açıklanır. Farz edin ki bir uzaylıya "kuş" kelimesini açıklamak istiyorsunuz. Muhtemelen yaşadığınız yerde çok sık rastlanır küçük ya da orta büyüklükte kuşu işaret edersiniz. California'da yapılan meşhur deneyler öğrencilerin çoğunun nar bülbülünün prototip bir kuş olduğunu düşündüklerini göstermiştir. İngiltere'de de İngiliz nar bülbülünün (kızıl gerdan), Kuzey Amerika nar bülbülünden tamamen farklı türde bir kuş olması dışında aynı sonuca varabilirsiniz! Bense nar bülbülünü değil de pencere camımın dışında ağaçta toplaşıp ötüşen o küçük kahverengi kuşları seçebilirim. Bu deneyi bilen birkaç sivri akıllı dışında Kuzey Amerika'da hiç kimse, bırakın tepeli devekuşunu, devekuşunu bile bir kuş prototipi olarak seçmez. Çok az kişi ördekleri seçer, çok daha azı da kuğuları. Çok az kişi kartalları ya da baykuşları seçer.

Peki, kuşu kim tanımlayabilir? Belki bazı ornitologlar tanımlayabilir, fakat çoğumuz için "kuşun" ne olduğunu tanımlamadan kuşlar hakkında konuşmak oldukça normaldir. Kuşların aşağı yukarı kuş prototipimizle aynı olacağını düşünürüz. Devekuşları bazı bakımlardan benim küçük kahverengi kuşlarıma benziyor. Aynı şekilde kartallar da, fakat devekuşlarıyla kartallar birbirlerine pek benzemezler. Kuşları bir merkezden dağılıyor gibi düşünebiliriz; ortada kuş prototipimiz var ve çevredeki kuşların da merkezdeki kuşlarla bazı benzerlikleri var. Deneylere göre kuzey California'daki bu öğrencilerin kuşlara dair aşağıdaki gibi bir resmi var:



Olasılık için de neredeyse aynı şey. Prototip örneklerimiz yapay rastgeleleştiricilerdir. Fakat gerçek hayat örnekleri hakkında daha ciddi olarak düşünmeye başladığımızda merkezdeki temel örneklerden gittikçe uzaklaşmaya başlarız. Sonra da örneklerimiz inanç-tipi örnekler ve frekans-tipi örnekler olarak kümelere ayrılmaya başlar ve sonunda da iki farklı türde olasılık fikrini geliştiririz.



SON SÖZ

Bundan sonra olasılık türleri hakkında dikkatli olacağız. Önceki bölümlerde mümkün oldukça frekans-türü cinsinden konuşma eğilimindeydik. Kitabın birinci kısmını bir inanç dogmatığının son sözü söylemesine müsaade ederek bitirmek çok hakkaniyetli olacaktır.

İnanç-tipi olasılığın mantıksal kuramının taraftarı olan John Maynard Keynes frekans-tipi olasılıkları hiç kullan-

mazdı. Uzun dönemde görelî frekans fikriyle alay ederdi. "Uzun dönemle" ne demek istediğimizi sorardı.

"Uzun dönem" sadece bir metafordur. Sonsuz uzun dönemler iyi bir idealleştirme olabilir, fakat gerçek hayatla hiçbir ilişkisi yoktur. Başka bir bağlamda Keynes şöyle bir şeye dikkat çekmişti:

"Uzun dönemde hepimiz öleceğiz."

ALIŞTIRMALAR

- 1 *Kayıtsızlık*. Sonia'yla buluşma hakkındaki Mario Baguette'in problemine geriye dönüp bir bakın (bkz. 12. bölüm). Mario, Sonia'nın bütçeye uygun havayolu olan Eatemup'a bineceğinden şüphe ediyorsa, 5 tercih arasında kayıtsız kalmayabilir. Şimdi kişisel olasılıklarla ilgili bir sorunu var; Sonia'nın Alpha veya Beta ya da ucuz olan Eatemup'tan inme ihtimalinin daha fazla olacağını düşünüyor? Siz olsaydınız ne yapardınız?

Geri kalan egzersizler hayali bir sempozyuma dayanarak oluşturulmuştur. Bir zamanlar dört dogmatik sahneye çıkarılmış ve olasılık hakkındaki görüşlerini açıklamaları istenmiş. Bu insanlara şu adları verdik:

Venn, frekans kuramcısı.

Popper, istek kuramcısı.

De Finetti, kişisel olasılık kuramcısı.

Keynes, mantıksal olasılık kuramcısı.

Sunucu çeşitli ifadeler okuyor ve her dogmatiğe, bir anlamı varsa, bunun ne anlama geldiğini soruyor. Aşağıdaki italik olarak verilen ifadeler için bu dört insanın her biri acaba ne söyledi?

- 2 *Lisansüstü kayıt sınavı (GRE)* için Mutlu Harry'nin hazırlık seti.*

* Graduate Record Examinations (GRE), Amerika Birleşik Devletlerindeki çoğu üniversitenin lisansüstü bölümüne girmek için girilmesi gereken standart haline gelmiş bir testtir -çn.

"Mutlu Harry'nin hazırlık setini kullanan öğrencilerin GRE'deki başarı olasılıkları %90'dır!"

- 3 *Bilgi kaynağı.* Kim olduğunun açıklanmasını istemeyen bir bilgi kaynağına son zamanlardaki hızla devam eden bombalamalar ve misillemeler hakkındaki düşünceleri soruldu. *Önümüzdeki iki yılda Orta Doğuda kalıcı bir barış anlaşması ihtimalinin düşük olduğunu* söyledi.
- 4 *Koşullu Mutlu Harry.* "Mutlu Harry setini kullanmadan önce GRE'deki başarı olasılığınız sadece yarı yarıya idiyseniz, onu kullandıktan sonra %75 olacaktır." Sunucu dogmatiklere bunu iki olasılık ifadesini içeren birleşik bir ifade olarak ele almalarını söyledi: *"Harry'nin setini kullanmamanız kaydıyla başarı olasılığınız 0,5 ise, bu durumda Harry'nin setini kullanmanız koşuluyla başarı olasılığınız 0,75'tir."*
- 5 *Muazzam olan.* Buz hokeyi tarihinde herkesten daha fazla gol atan Wayne Gretzky'de 38 yaşında eklem iltihabı oluştu ve Tylenol için ücretli TV reklamlarına başladı. Sağlıklı bir adamda otuzlu yaşlarında nasıl eklem iltihabı oluşur? Bir hokey doktoru olan Dr. Clarfield, şöyle dedi. *"Üç kariyer yapacak kadar hokey oynadı, onun için eklemlerindeki travma muhtemelen çoğu oyuncularındakinden fazlaydı."*
- 6 *Marsa inmek.* Bir NASA sözcüsü *Marsa ayak basacak ilk insan tüm ihtimallere göre bir mühendis olacaktır.*
- 7 *Çılgın yazı-tura atıcılar.* Adil bir parayla yazı-tura atılıyor. N adet yazı-tura attıktan sonra, tura yazıdan daha fazla gelirse tura öndedir deriz. Tersine, yazı daha sık gelirse yazı öndedir. (N gibi çift bir sayıda eşit olabilirler.) Tura N-1 ile öndeyse ve yazı da N+1 ile öndeyse, N. yazı-tura atışında önde olan değişir deriz. *Adil parayla 10000 kere yazı-tura atışında, önde gelenin hiçbir zaman değişmeme olasılığı 0,0085'tir.*
- 8 *Hayrete düşüren cevap.* Burada size bir soruda olasılığın anlamı hakkında soru soruluyor. Bu soruya verilen cevap,

cevap bölümündedir, fakat cevabı burada bilmeniz beklenmiyor. Fakat bir tahmin yapın. *10000 kerelik bir yazı-tura atışında, 9930 atıştan fazlasında bir yüz gelirken, diğer yüzün 70'ten az gelme olasılığı nedir?*

GÖZDEN GEÇİRMENİZ İÇİN ANAHTAR KELİMELER

Frekans kuramı

Kişisel kuram

İstek kuramı

Mantıksal kuram

İNANCIN BİR ÖLÇÜSÜ OLARAK OLASILIK

13. Kişisel Olasılıklar

Hayali kumarlar kullanılarak kişisel inanç dereceleri nasıl sayısal olarak temsil edilebilir?

Farklı olasılık türleri hakkında 1–10. bölüm çoğu zaman *bilerek belirsiz* kaldı. Bunun nedeni temel fikirlerin genellikle, kapsamlı bir şekilde, çoğu olasılık türüne uygulanmasıydı.

Şimdi inanç-tipi olasılıklar için çok önemli olan fikirleri geliştireceğiz. Frekans bakış açısından bu fikirler çok önemli değildir.

PROGRAM

Argümanda üç ayrı aşama var ve her biri de ayrı bir bölümü hak ediyor.

- *Bu bölüm* inanç derecelerinizi temsil etmek üzere sayıları nasıl kullanabileceğinizi gösteriyor.
- *14. bölüm* neden bu sayıların olasılığın temel kurallarını yerine getirmesi gerektiğini gösteriyor. (Ve bundan dolayı da Bayes kuralına uyması gerektiğini.)
- *15. bölüm* yeni kanıtlar ışığında kişisel olasılıkları *gözden geçirmek* ya da *güncellemek* için Bayes kuralının nasıl kullanılacağını gösteriyor. Bu 13–15. bölümleri için temel motivasyondur.

Bu bölümlerde kişinin inanç derecesini ele alıyoruz. Fakat bu yaklaşım, Keynes ve Carnap'ın mantıksal perspektifleri gibi diğer inanç-tipi olasılık versiyonları için kullanılabilir.

Bayes kuralı o kadar temel olduğu için bu yaklaşıma çoğu zaman *Bayesçi* denir. "İnanç dogmatiklerine" çoğu zaman basitçe Bayesçi deniliyor; çünkü Bayes kuralının bir tecrübeden öğrenme modeli olarak kullanımı onların felsefesinde bu kadar büyük bir rol oynuyor. Bayesçi düşüncenin birçok çeşidi olduğuna dikkatinizi çekerim. Bu perspektif kişisel olasılıktan mantıksal olasılığa kadar değişiklik gösterir.

DÜŞÜNCE DENEYLERİ

İnancın dereceleriyle ilgileniyoruz. İnançla eylem arasında yakın bir ilişki vardır. Örneğin:

Taşrada bilmediğiniz bir yerde yürüyorsunuz. Evin yolunda işaretsiz bir yol ayrımına geldiniz. Sola mı sağa mı gideceğinizi bilmiyorsunuz. Sola gitmeyi seçiyorsunuz, fakat emin değilsiniz. Hesaplanmış bir risk almaya karar veriyorsunuz. İnancınızı eyleme dönüştürüyorsunuz. Seçiminizi ayaklarınızla yapıyorsunuz. Sağa gitmektense sola gidiyorsunuz.

Bunun iyi bir karar olduğuna ne kadar eminsiniz? Soldaki yolun eve gittiğine ne kadar inanıyorsunuz? Bir düşünce deneyi sayıları kullanarak inanç derecelerinin nasıl temsil edileceğine dair bir ipucu verir.

Örneğin:

Hangi yöne gideceğinize karar vermek üzere adil bir para ile yazı-tura atarsanız, evin solda olduğu kadar sağda da olma ihtimalinin olduğunu düşünmeniz gerekir. Ayrıldaki her yol için kişisel olasılığınız $1/2$ 'dir

Fakat zar atıp, yalnızca 6 gelince sağa gidecek olsaydınız, bu durumda, evin sağda olduğuna dair kişisel olasılığınızın $1/6$ olması gerekir.

Bu bölüm düşünce deneyleri hakkındadır. Size dersi anlatanlar veya komşularınız için değil de *sizin* için deneylerdir.

BİRİNCİ DÜŞÜNCE DENEYİ: HEDİYELELER

İlk yapacağınız düşünce deneyi “kumarlar” arasında bir seçim yapmakla ilgili. Kumarların size hiçbir maliyeti yok. Hiçbir risk almıyorsunuz.

Küçük, fakat arzu edilir bir ödül, bedava bir hediye teklifi aldığınızı düşünün.

Hediye ister 10 dolar olsun, isterse dersten iyi bir not ya da önümüzdeki sevgililer gününde sevdiğiniz biri tarafından size gül gönderilmesi olsun hiç fark etmez.

Kendi hediyenizi seçin.

Gerçekçi olun. Buraya istediğiniz küçük bir hediyeyi yazın:

RİSKSİZ KUMARLAR

Şimdi iki olası olayı düşünün. Burada bilinen bir örneği kullanacağız: İlkbaharın birinci gününde hava durumu.

Olay 1: Önümüzdeki 21 Martta Toronto’ya yoğun kar yağışı.

Olay 2: Önümüzdeki 21 Martta Toronto’da yumuşacık ve bahar gibi bir gün.

Kumar iki olasılık arasında yapılacak bir tercihtir. Diyelim ki 10 doları hediyeniz olarak seçtiniz. Seçiminizi yapın:

- Olay 1 meydana gelirse 10 dolar, aksi takdirde hiçbir şey yok ya da
- Olay 2 meydana gelirse 10 dolar, aksi takdirde hiçbir şey yok.

Olay 1’in meydana gelmesi üzerine mi “bahse girip kumar oynarsınız”? Yoksa olay 2’nin meydana gelmesine mi?

Gerçekçi olun. Cevabınızı yazın:

Bu iki seçenek arasında kararsızsanız, bu durumda 1 ve 2 olaylarının aynı olasılığa sahip olduğunu düşünmelisiniz.

Fakat olay 1 meydana geldiğinde hediyenizi alacaksanız, bu durumda olay 1’in meydana gelme olasılığının olay 2’den daha fazla olduğunu düşünüyor gibisiniz. Olay 2’ye göre olay 1’e daha yüksek bir kişisel olasılık atfediyorsunuz.

Tersine, olay 2 meydana geldiğinde hediyenizi alacaksınız, bu durumda olay 2'nin meydana gelme olasılığının olay 1'den daha fazla olduğunu düşünüyor gibisiniz. Olay 1'e göre olay 2'ye daha yüksek bir kişisel olasılık atfediyorsunuz.

OLAYLAR VE ÖNERMELER

Biraz önce olay dilini kullandık. Her zaman yaptığımız gibi önerme dilini de kullanabilirdik. Aşağıdakileri değerlendirin:

Önerme 3: Sağlıklı bir ıstakozun sağ kısıkcı hemen hemen her zaman sol kısıkcısından daha büyüktür.

Önerme 4: Sağlıklı bir ıstakozun sol kısıkcı hemen hemen her zaman sağ kısıkcısından daha büyüktür.

Peki, 10 dolarınızı önerme 3 doğruyken mi, yoksa önerme 4 doğruyken mi almak istersiniz? (3)'ü (4)'e tercih ederseniz, bu durumda (3)'e yönelik kişisel olasılığınız (4)'e yönelik olandan daha yüksektir.

GERÇEĞE UYGUNLUK KONTROLÜ: ÇABUK ÇÖZÜME KAVUŞTURUN

Kumarlar ancak çabuk çözümlenirse sıkıntıya girmeye değer. Bundan bir milyon yıl sonrası için 10 dolarlık bir hediye uğruna, hava durumu üzerine bahse girip kumar oynamak benim ilgimi çekmez. Şunu bir düşünün:

5: 1 Ocak 2075'te Toronto'ya yoğun kar yağışı.

6: Önümüzdeki 1 Ocakta Toronto'da yumuşacık ve bahar gibi bir gün.

Sera etkisi olsun ya da olmasın, ben şahsen (5)'in (6)'dan daha olası olduğunu düşünüyorum.

Buna karşın (5)'in meydana gelmesine göre (6) meydana gelirse hediyemi alırım. (5)'in ne olduğu belli olana kadar ben ölürüm, onun için ne olursa olsun, ben hiçbir şey kazanmayacağım ve 2075'e gelindiğinde nasıl olsa 10 doların

hiçbir kıymeti kalmayacak. Fakat (6)'yı seçersem 10 dolarlık hediye almam için küçük bir şansım var.

Bundan sonra bütün kumar ve bahislerin çabucak çözümlendiğini hayal edin.

Bunun için *bayağı bir* hayal gücü lazım. Istakozları düşünün. Önerme (3) ve (4) "hemen hemen her zaman" diyor. Peki, bu bahsi nasıl çözümleyebiliriz? Ya da Pascal'ın bahsini hatırlayın. Şu kumarı düşünün:

7: Tanrı bu evreni yarattı.

8: Bu evren sebebi olmayan Büyük Patlamadan sonra bir şans eseri evrilerek bugüne geldi.

Bazı insanlar –"yaradılışçılar"– (7) doğru olduğu zaman hediyelerini almak üzere kumar oynamayı tercih edebilirler. Diğer insanlar –ateistler– (8)'in doğru olması durumunda hediyelerini almak üzere kumar oynayabilirler. Fakat çok azımız sorunun kendi yaşam dilimimiz içerisinde çözümleneceğine inanırız.

GERÇEĞE UYGUNLUK KONTROLÜ: İLGİSİZ ÖDÜLLER

İki olayın karşılaştırılması için kullanılan ödülün değeri olayların meydana gelmesinden etkilenmemelidir.

Örneğin seçtiğiniz hediye yeni bir parkaysa, 21 Martta bahar gelmesinden ziyade kar yağarsa ödülünüze daha fazla değer biçersiniz. Onun için bu hediye olay 1 ve 2'yi düşünürken uygun bir hediye değildir.

Benzer bir şekilde, (7) ve (8)'i içeren hayali bir kumarın karşılaştırılması için "ebedi saadet" uygun bir hediye değildir. Çünkü (7)'nin ihtimalinin çok az olduğunu düşünürseniz, sonsuz hayat sizin için pek de gerçek bir ihtimal olmayacaktır.

İKİNCİ DÜŞÜNCE DENEYİ: ADİL PARALARI KULLANIN

Şimdiye kadar olaylara niteliksel baktık. Aynı prosedürü olaylara niceliksel bakmak için de kullanabiliriz.

Adil olduğuna inandığınız bir parayı seçin. Parayla önümüzdeki 21 Martta yazı-tura atılacağını farz ederek aşağıdaki kumarı düşünün:

(1): Önümüzdeki 21 Martta Toronto'ya yoğun kar yağışı olursa 10 dolar ya da

(9): Bu hilesiz parayla ilk olarak önümüzdeki 21 Martta yazı-tura atıldığında tura gelirse 10 dolar.

(1) numaralı seçeneği tercih ederseniz, bu durumda paranın tura gelmesine oranla kar yağmasının daha olası olduğunu düşünüyor olmalısınız. 21 Martta kar yağma olasılığının $1/2$ 'den fazla olduğu yönünde bir değerlendirme yapıyorsunuz.

Farz edin ki (1)'i tercih ettiniz. Bu durumda aşağıdaki hayali kumarı deneyin:

(1): Önümüzdeki 21 Martta Toronto'ya yoğun kar yağışı olursa 10 dolar ya da

(10): Bu adil parayla önümüzdeki 21 Marttaki iki yazı-tura atılışında en az bir kere tura gelirse 10 dolar.

(10)'un olasılığı $3/4$ 'tür. (10)'u (1)'e tercih ederseniz, bu durumda (1) için kişisel olasılığınız $1/2$ ile $3/4$ arasındadır.

(1)'i (10)'a tercih ederseniz, bu durumda 21 Martta kar yağmasıyla ilgili kişisel olasılığınız $3/4$ 'ten fazladır.

(1) ile (10) arasında kayıtsız kalmışsanız, bu durumda önümüzdeki 21 Martta Toronto'da kar yağmasına dair kişisel olasılığınız yaklaşık olarak $3/4$ 'tür.

Arka arkaya atılan üç parayı karşılaştırmayı seçerek aralığınızı daraltabilirsiniz. Ya da, inançlarınızı istediğiniz kadar ince bir şekilde *kalibre etmek* için, k adet yeşil topu ve $n-k$ adet kırmızı topu olan bir çekiliş kutusu düşünebilirsiniz.

Böylelikle bu deneyleri kişisel inanç derecelerinizi kalibre etmek üzere yapay bir rastgeleleştirici kullanıyormuş gibi düşünebilirsiniz.

Hatta kişisel düşüncenize göre bir paranın ne zaman adil olduğunu da açıklayabilirsiniz. Ortaya konan fayda ve getiriler aynı olduğu müddetçe tura ya da yazı arasında bahse girme konusunda kararsızsınız.

TEMSİL ETMEK, ÖLÇMEK DEĞİL

İkinci düşünce deneyinden sonra insanlar (1) ve (10) arasında kararsızsa, bu durumda kişisel olasılıklarının “yaklaşık olarak 3/4” olduğunu söylemiştik. Kesin bir şey diyemez miyiz?

Hayır. İnanç kesin bir şekilde ölçülebilecek tarzda bir şey değildir. Bu yöntemle ondalık kısımlar gibi küçük basamaklara kadar kişisel inanç dereceleriniz belirlenemez; fakat sizin için bir anlam ortaya koyuyorsa bu da iyidir. Örneğin bazı insanların,

(11): Bu adil para önümüzdeki 21 Martta arka arkaya atılacak yazı-turaların ilk yedisinde tura geldiğinde 10 dolar kazanmayı,

(12): Önümüzdeki 21 Martta Columbia, Güney Carolina’ya yoğun bir şekilde kar yağdığında 10 dolar kazanmaya tercih ettiğini farz edin.

Fakat

(12): Önümüzdeki 21 Martta Columbia, Güney Carolina’ya yoğun bir şekilde kar yağdığında 10 dolar kazanmayı

(13): Bu adil para önümüzdeki 21 Martta arka arkaya atılacak yazı-turaların ilk sekizinde tura geldiğinde 10 dolar kazanmaya tercih ediyorlar.

Bu durumda onların kişisel olasılığı olan önümüzdeki 21 Martta Columbia’da kar yağma olasılığı p ’yi, kalibre edebiliriz:

$$1/256 \leq p \leq 1/128. \text{ Veya } 0,0039 \leq p \leq 0,0078.$$

Şimdiye kadar sayılara dair hissiyatımızı kaybettik. Kişisel olasılığı bir sayıyla *temsil etmek* istiyorsak, belki de kişisel olasılık diyelim ki 0,006’dır diyebiliriz. Şüphesiz bunu kişinin inanç derecesini ölçtüğümüz için demiyoruz. Bunu kişinin inanç derecesini bir sayıyla temsil etmeyi uygun bulabileceğimiz için diyoruz.

BAHSE GİRMEK

Düşünce deneylerimiz hiçbir zaman risk almayı içermeyi. Bu deneylerin hiçbirinde hiçbir zaman kaybetmeyeceksiniz. Fakat şimdi daha riskli durumları düşünün. Kazanabileceğiniz ya da kaybedebileceğiniz bahislere girdiğinizi düşünün.

Bahsin yakında makul bir süre içinde sonuçlandırılacağını da hayal ettiğiniz müddetçe hemen hemen her şey üzerine bahse girebileceğinizi hayal edebilirsiniz.

Sizin ve benim bir olay ya da A önermesi üzerine bahse girdiğimizi hayal edin; yukarıda (1) ile (10) arasındaki her olasılık olur.

Para için bahse girdiğimizi farz edin (fakat başka her türlü fayda da olur).

Diyelim ki A *üstüne* X dolar bahse girdiniz ve ben de A'ya *karşı* Y dolar koydum.

Bu demektir ki A meydana gelirse ya da A'nın doğru olduğu ortaya çıkarsa, siz benim koyduğum Y doları alacaksınız.

Fakat A meydana gelmezse ya da A'nın yanlış olduğu ortaya çıkarsa, ben sizin X dolarınızı alacağım.

Bu tür bir bahiste, iki bahsin toplamı olan (X+Y) dolara ortaya konan para denir.

BAHİS ORANLARI

Farz edin ki siz ve ben bahse giriyoruz. Siz 21 Martta kar yağacağına dair bahse giriyorsunuz. Ben yağmayacak diye bahse giriyorum. Kar yağması *üstüne* 1 dolar bahse giriyorsunuz. Ben de kar *yağmaması üstüne* 3 dolar bahse giriyorum.

Kar yağarsa siz, 3 dolar kâr ederek, bütün 4 doları alıyorsunuz. Ben 3 dolar kaybediyorum.

Kar yağmazsa ben, kendim için 1 dolar kazanarak, siz de 1 dolar kaybederek, bütün 4 doları alıyorum.

Bu koşullar altında, kar yağmasıyla ilgili sizin bahis oranınız 1/4'tür. Benim kar yağmasına karşı bahis oranımsa 3/4'tür.

Sizin bahis oranınız = (Sizin bahsiniz) ÷ (Ortaya konan para)

GETİRİ

Bir bahsi bir tabloda göstermenin en kolay yoluna getiri matrisi denir. Bu tablo, ortaya konan para S dolar iken ve bahis oranınız da p iken getirileri gösterir.

A üstüne pS dolar bahsine giriyorsunuz.

Size karşı bahse giren birisiyse $S(1-p)$ dolar = $(S-pS)$ dolar olarak bahse giriyor.

Sol sütunda bahsin olası sonuçları listeleniyor. A meydana gelir, $\sim A$ meydana gelir.

	B verildiğinde, A üstüne bahse girmenin getirisi	B verildiğinde, A'ya karşı bahse girmenin getirisi
A	$(1-p)S$ dolar	$-(1-p)S$ dolar
$\sim A$	$-pS$ dolar	pS dolar

İleride, çoğu zaman dolar ifadesini kullanmayacağız.

ÜÇÜNCÜ DÜŞÜNCE DENEYİ

E olayının meydana gelip gelmeyeceğini ne sizin ne de arkadaşınızın bilmediğini farz edin. Hiçbir şeye mal olmaksızın aşağıdaki anlaşmayı teklif ediyorum. İki seçenekten herhangisi birini kabul edebilirsiniz.

(E) seçeneği: E'nin meydana gelmesi durumunda $(1-p)(10)$ dolar kazanma şansı,

ya da

($\sim E$) seçeneği: E'nin meydana gelmemesi durumunda $p(10)$ dolar kazanma şansı.

Şimdi pastayı kesmeniz gerekiyor; p 'yi seçin. Bu durumda arkadaşınız ya (E) seçeneğini ya da ($\sim E$) seçeneğini seçecektir. Sizin düşüncenize göre p adil bir bahis oranıysa bu durumda seçeneklerden hiçbirisinin avantajlı bir durumu yoktur.

p 'yi seçtikten sonra (E) seçeneğinin ($\sim E$) seçeneğine tercih edilebilir olduğunu düşünüyorsanız, bu durumda p 'yi artırmamız gerekir.

Bu argüman kişisel olasılıkları kalibre etme tekniğimizin sadece bir genelleştirmesidir.

ADİL BAHİS ORANLARI

Bu iki seçenek arasında seçim yaparken risk almadınız. Fakat bahse giren herkes için aynı argüman uygulanır. Ortaya konan paranın 10 dolar olduğunu farz edin. Sizin düşüncenize göre p , E üzerine bahse girmenin adil oranıysa bu durumda aşağıdakiler arasında kayıtsız kalmanız gerekir:

- p oranında E *üzerinde* bir bahis: Aynı yukarıdaki (E) seçeneğinde olduğu gibi E meydana gelirse $(1-p)(10)$ dolar kazanıyorsunuz.
- $(1-p)$ oranında E'ye karşı bir bahis: Aynı yukarıdaki ($\sim E$) seçeneğinde olduğu gibi E meydana gelmezse $p(10)$ dolar kazanıyorsunuz.

p bahis oranının adil olduğunu düşünüyorsanız, bir şekilde $-E$ üstüne p oranında- ya da diğer şekilde $-E$ 'ye karşı $(1-p)$ oranında- bahse girmenin sizin için bir avantajının olmadığını görüyorsunuz.

Bunu söylemenin hızlı bir yolu da şudur

E'ye karşı bahse girmenin adil oranı E üstüne bahse girmenin adil oranının *tersidir*.

GERÇEK HAYATTA OLMAYAN BAHİS

Bahse girenler bahislerinden para kazanmak isterler. Onlar E meydana gelirse 3 dolar kazanmak için 1 dolar teklif etmezler ya da E meydana gelmeyince 1 dolar kazanmak için 3 dolar teklif etmezler. Onlar *avantaj elde etmek* isterler.

Onun için $\sim E$ 'nin ihtimalinin E'nin ihtimalinin üç misli olduğunu düşünürlerse, E meydana geldiğinde 3 dolardan *daha fazla* kazanmak için 1 dolar teklif ederler. $(3+x)$ dolar kazanmak isterler, onun için E *üzerindeki* bahis oranları

$1/(1+3+x)$ 'tir. Çünkü bunun kendilerine avantaj sağladığını düşünürler. Onlar, kendi lehlerine olmak üzere bahsin "adil olmamasını" istiyorlar.

Diğer yandan, E'ye karşı bahse giriyorlarsa ve ortaya 3 dolar koymuşlarsa, 1 dolardan *fazla* kazanmak istiyorlar. Onun için E meydana gelmezse $(1+x)$ dolar kazanmak için 3 dolar teklif ediyorlar. Bundan dolayı E'ye *karşı* bahse girme oranları $3/(1+3+x)$ 'tir.

Bir ganyan bayiine gider ve büyük yatlar için bir sonraki Amerika Kupası yarışması üstüne bahse girmek istediğinizi söylerseniz, size:

Avustralya yatının bir sonraki Amerika Kupasını
kazanma
Avustralya yatının bir sonraki Amerika Kupasını
kazanmama

oranlarını verecektir. Size verilen iki oranın toplamının 1 etmediğinden emin olabilirsiniz!

ADİL DEMEK HİÇ AVANTAJ YOK DEMEKTİR

Yarışlara gitmiyoruz. *Kendi* öz inanç derecelerimizi nasıl temsil edeceğimizi bulmak üzere düşünce deneyleri yapıyoruz. Hiç "avantaj" yok. Adil bir kişisel bahis oranı p , kişinin her iki şekilde de bahse girdiğinde –yani ister E üzerine p oranıyla bahse girsin, isterse de E'ye karşı $(1-p)$ oranında bahse girsin– kişinin hiçbir şekilde avantaj durumu olmadığını düşündüğü orandır.

OLASILIK ORANLARI

Kumarbazlar bahis oranları hakkında konuşmazlar. (Bir şeyin meydana gelmesine karşı) olasılık oranları hakkında konuşurlar.

3 dolar kâr edeceğinizi ümit ederek, 1 dolarınızı riske atıyorsunuz. Kumarbazlar kazanmanıza karşı olasılık oranının 3'e 1 olduğunu söylerler.

Bahis oranı sizin ortaya koyduğunuz miktarın ortaya konan toplam miktara oranıdır, yani $1/4 = 1/(3 + 1)$. Böylelikle

E'ye karşı olasılık oranı $y:x$ ise E üzerine yapılan bahis oranı $x/(x + y)$ 'dir.

Bahis oranları ve olasılık oranları aynı temel düşünceyi ifade etmenin iki yoludur. Burada bahis oranlarını kullanıyoruz, çünkü olasılıklara daha çok benziyorlar.

Bunun da ötesinde, kumarbazlar çok süslü sözlerden bir fantezi dünyası yaratmaya bayılırlar. Örneğin (Amerikan) futbolunda bahse girenler nokta dağılımları (bunlar çift olasılık oranlarını kullanır) ya da *para hattı bahislerinden* herhangi birisini kullanabilirler. Para hattı bahislerinde ya olasılık oranlarını "verirsiniz" ya da olasılık oranlarını "alırsınız." Bu konuşmaya aşınaysanız, bu çok kolay bir şeydir. Ama bilmeyen çoğunluğun kafası karışıyor. Onun için kesin-kes tek bir fikre bağlıyız, o da bahis oranlarıdır.

KOŞULLU BAHİSLER

Bahis oranları kişisel olasılıklara karşılık gelir. Peki, koşullu olasılığa ne demeli? İşte bunun için *koşullu bahis* fikrine ihtiyacımız var.

Koşullu bahis, bir koşul üzerine yapılan bahistir ve koşul yerine gelmezse bütün bahisler iptal edilir.

Örnekler:

Finale kalmaları koşuluyla Toronto Maple Leafs'in Stanley Kupasını kazanacağına dair bahis.

Önümüzdeki 21 Mart gecesi Toronto havaalanında hava sıcaklığının 0°C'ye düşmesi koşuluyla o gece Toronto'da kar yağacağına dair bahis.

Belirli bir dinin gereklerini yerine getirmeniz koşuluyla cennete gideceğinize dair bir bahis.

İnsan genom projesinin başarılı olması sayesinde on yıl içerisinde kalıtsal hastalıklarda radikal atılımların olacağına dair bahis.

* Para hattı bahisleri (Money-line bets) tek bahislerin Amerikan tarzıdır. Burada (çoğu zaman beysbol ya da basketbol olmak üzere) maç sonunda hangi takımın kazanacağı üzerine bahse girilir -çn.

Hava durumuna bağlı kalarak hava sıcaklığının sıfırın altında olması koşuluyla, diyelim ki, 1 dolarla kar yağıacak diye bahse girdiniz ve ben de 2 dolara kar yağmayacak diye bahse girdim. Ortaya konan para 3 dolardır.

Hava sıcaklığı sıfırın üstünde seyrederse, *bahis iptal olur*. Kazanma ya da kaybetme yoktur.

Hava sıcaklığı sıfırın altına düşerse, *bahis geçerlidir* ve ya siz net olarak 2 dolar kazanırsınız (kar yağar) ya da ben net olarak 1 dolar kazanırım (kar yağmaz).

KOŞULLU BAHİS ORANLARI

Koşullu bahis oranları sıradan bahis oranları gibidir.

B koşuluna bağlı olarak, A üzerindeki bahis oranınız:
(Sizin koşullu bahsiniz) ÷ Ortaya konan miktar.

Yukarıdaki örnekte:

Sizin koşullu bahsiniz 1 dolardı.
Benim koşullu bahsim 2 dolardı.

Ortaya konan para 3 dolardı.

Sizin koşullu bahis oranınız $1/3$ 'tü.
Benim koşullu bahis oranım $2/3$ 'tü.

Genelleme yaparsak:

Bahis toplamı S dolarsa ve B koşuluna bağlı olarak A üzerine p oranında bahse giriyorsanız, bu durumda pS doları bahis olarak ortaya koyuyorsunuz demektir ve:

B meydana gelmezse, bahis iptal olur.
B ve A meydana gelirse, siz $(1-p)S$ dolar kazanıyorsunuz.
B meydana gelir, fakat A meydana gelmezse, siz pS dolar kaybediyorsunuz.

Benzer bir şekilde, B veriliyken A üzerindeki bahis oranı p iken, B koşuluna bağlı olarak, A'ya *karşı* bir bahse giriyorsa-

nız, bu durumda $(1-p)S$ dolar kadar bahse giriyorsunuz ve:

B meydana gelmezse, bahis iptal olur.

B ve A meydana gelirse, siz $(1-p)S$ dolar kaybediyorsunuz.

B meydana gelir, fakat A meydana gelmezse, siz pS dolar kazanıyorsunuz.

KOŞULLU GETİRİ MATRİSİ

Dolar ifadelerini çıkarırsak, B verildiğinde ve bahis için ortaya konulan toplam miktar S iken, A üzerindeki bahis oranı da p iken koşullu bahisler için getiri matrisi aşağıdaki gibidir:

	B verildiğinde, A üstüne bahse girmenin getirisi	B verildiğinde, A'ya karşı bahse girmenin getirisi
$A \& B$	$(1-p)S$	$-(1-p)S$
$(\sim A) \& B$	$-pS$	pS
$\sim B$	0	0

ARGÜMAN

Bayesçi programın üç aşaması vardır. Bu bölümde ilk aşama üzerinden geçildi. 14. ve 15. bölümlerde ikinci ve üçüncü aşamalar izah edilecektir.

Birinci aşama –bu bölüm– bahis oranları yoluyla kişisel inanç derecelerinizi temsil etmenizi sağlıyor. Çok basit görünüyor.

İkinci aşamanın –14. bölüm– sıkı bir argümanı var.

Üçüncü aşamada –15. bölüm– ilk iki aşamanın basit ve mantıksal bir sonucuna varacağız gibi görünüyor.

Bir anlamda, 15. bölüm en zor bölüm; çünkü oldukça kesin bir argümanı var. Fakat başka bir anlamda da, şimdiki bölüm en zor bölüm. Çünkü bütün aşamalar mantığa çok dayalı olmayan, oldukça kaygan aşamalar. Bütün bu şeylerin hepsinin bir güven oyunu olduğu hissine kapılabiliyorsunuz! Onun için argümanı gerçekten ilgi çekici kılan şeyin o argümanın çok farklı versiyonlarının olduğunu, bu kitaptaki her

şeyden çok daha zekice ortaya konmuş ve hepsinin de aynı sonuçlara götürüyor olduğunu söylememiz gerekir.

ALİŞTIRMALAR

- 1 *Nükleer güç.* Size hiçbir maliyeti olmayan aşağıdaki kumar teklif edildi:
 - (a) 21. yüzyılın sonuna doğru ticari nükleer füzyondan elde edilen enerji kullanıma hazır olursa 100 dolar
 - Ya da
 - Tura olasılığı p olan bir para bir sonraki yazı-tura atışında tura gelirse 100 dolar.
 - (a) için kişisel olasılıkları kalibre etmek üzere bu kumarı gerçekçi bir şekilde kullanabilir miydiniz?
 - (b) için kalibre etmek üzere benzer bir kumarı kullanabilir miydiniz?
 - (b) İki yıl içerisinde Kuzey Amerika'da nükleer enerjiye son verilirse 100 dolar.
- 2 *Çikolatakolik.* Alice çikolataya bayılır ve onun için bir kutu iyi kaliteli çikolata büyük bir hediyedir. Doktorunun bekleme odasında oturuyor. Aşağıdaki olasılıklarda inançlarını kalibre etmek için bu ödülü gerçekçi bir şekilde kullanabilir mi?
 - (a) Doktoru, ona hemen bir kilo verme programına başlamasını söyleyecek.
 - (b) Doktoru, ona istediği her şeyi yiyebileceğini ve metabolizmasının bir sorun çıkarmayacağını söyleyecek.
- 3 *Zeki uzaylılar.* 1996 yazında, marstaki bir göktaşında "hayat" bulunduğuna dair bir kanıtın keşfedilmesinin açıklanmasından sonra, Ladbroke's isimli büyük bir bahis şirketi "gelecek yıl içerisinde zeki uzaylılar bulmanın olasılık oranlarını 250'ye 1'den 50'ye 1'e düşürdü. Bahisçilerin paraları alması için Birleşmiş Milletlerin dünyayla iletişime geçebilme yeteneği olan dünya dışı hayat formlarının mevcudiyetini teyit etmesi gerekir."
 - (a) Bu koşullarla bir bahis "çabuk çözümleme" gerekliliğini yerine getirir mi?

(b) Zeki uzaylıların varlığının bir yıl içerisinde teyit edilmesinin 50'ye 1 olasılık oranı $1/51$ 'lik bahis oranıyla aynıdır: Ladbroke'a 1 dolar vereceksiniz ve kazanırsanız onlar da size geriye 51 dolar verecekler (50 dolarlık net kâr). Ladbroke'un aynı olasılık oranlarıyla sizin diğer türlü bahse girmenize müsaade ettiğini farz edin: 50 dolara zeki uzaylıların varlığının teyit edilmeyeceğine bahse girebilirsiniz, kazanırsanız net 1 dolar kâr edeceksiniz. Gerçek bir uzaylı tutkununun dışında hiç kimse 12 ay içerisinde Birleşmiş Milletlerin zeki uzaylıların varlığını teyit etmesini pek ihtimal dâhilinde görmez. Çoğu kişi şüpheli Skuli'yle aynı fikirde olur ve Birleşmiş Milletlerin zeki uzaylıların varlığını teyit etmeyeceğinden dolayı kişisel bahis oranlarının 999/1000'e kadar çıkabileceğini söyler. Skuli, getiriler hemen verilecekse hemen şimdi 1 dolar kazanmak üzere 999 dolarla bahse girmek istediğini söyleyecektir. Rasyonel birisi olarak neden Skuli'nin 1 dolar kazanmak için sadece 50 dolarla bahse girmediğini açıklayın.

- 4 *Bahisler.* Bu dersten A alacağına 9 dolara bahse girerim. Siz de tersine bahse giriyorsunuz. Ortaya konan bahis parası 12 dolardır. Siz ne kadarla bahse girdiniz? A almaya karşı bahis oranınız nedir?
- 5 *Ortaya konan parayı arttırmak.* Şimdi aynı bahis oranlarıyla, bahse konulan toplam paranın 100 dolar olduğunu farz edin. A almanıza karşı bahse giriyorsunuz. A alırsanız "getiriniz" ne olur?
- 6 *Adil bahis.* A almanıza dair bahse girmenizin adil oranın $1/4$ olduğunu göz önüne alırsanız, A almanıza karşı bahse girmenizin adil oranının ne olduğunu düşünürsünüz?
- 7 *Mazeret sınavları.* Sık sık test yapılan kalabalık bir sınıfta, hastalığınızdan dolayı sınavı kaçırdıysanız "mazeret sınavına" girmenize müsaade ediliyor. Mazeret sınavlarının orijinal sınavlardan daha zor olduğunu duyuyorsunuz.

Bir sonraki testte en az bir B alacağınıza dair kendi kişisel bahis oranınız ne olabilir?

Hasta olmanız ve mazeret sınavına girmeniz koşuluyla bahis oranınız ne olabilir.

Bahis için ortaya konan toplam para 10 dolarsa koşullu bahis için getiri matrisini çizin.

- 8 “Değil” tercihleri tersine çevirir. E üzerine bahse girmek için adil kişisel bahis oranınız p ise, bu durumda $\sim E$ üzerine bahse girme oranınızın $1-p$ olması gerektiğini tartışmıştık. Genel olarak E’den $\sim E$ ifadesine geçerken bahsinizi de “tersine çevirirsiniz.” Bu düşüncüyü iyice oturtmak için işte size birkaç alıştıрма. (1) ve (2) herhangi iki olay (ya da önerme) olsun. Farz edin ki
- (1) meydana gelirse 10 dolar almanın yerine,
- (2) meydana gelirse 10 dolar almayı tercih ediyorsunuz.

Peki

(2)’nin meydana gelmemesi durumunda 10 dolar almanın yerine,

(1)’in meydana gelmemesi durumunda 10 dolar almayı tercih eder misiniz?

GÖZDEN GEÇİRMENİZ İÇİN ANAHTAR KELİMELE

Düşünce deneyleri

Bahis oranları

İnanç dereceleri

Koşullu bahisler

Ortaya konan toplam miktar

Koşullu bahis oranı

Sayılarla temsil etmek

“Adil” bahis oranı

14. Uyum

İstikrarlı kişisel bahis oranları olasılığın temel kurallarını yerine getiriyor.

Bu anlamdaki tutarlılığa uyum denir.

Kişisel olasılıklar ve bahis oranlarının hepsi de çok iyi. Fakat şimdiye kadar bunların hiçbir yapısı, hiçbir kuralı yoktu; aslında, fazla anlamı da yoktu. Şimdi size bahis oranlarının, olasılığın temel kurallarını karşılaması gerektiğini belirten bir argüman veriyoruz. 13. bölümde zaten üç düşünce deneyi yaptık. İşte size iki adet daha.

DÖRDÜNCÜ DÜŞÜNCE DENEYİ: BAHİS ORANLARI DİZİSİ

Bir inançlar grubu bir dizi bahis oranlarıyla temsil edilebilir.

Kendinizi bir dizi bahis oranının **reklamını yaparken** hayal edin. Dizideki A, B, ...K önermelerinden her birisi için $p_a, p_b, p_c, \dots, p_k$ bahis oranı teklif ediyorsunuz.

Bu hayali oyunda diyelim ki,

A üstüne p_a oranında ya da

A'ya karşı $(1-p_a)$ oranında bahse girmeye hazırlandınız.

BEŞİNCİ DÜŞÜNCE DENEYİ: BASİT TUTARSIZLIK

Bunlar *kişisel* bahis oranlarıdır. İstedığınız kesri seçemez misiniz?

Şüphesiz seçersiniz. Fakat tutarsız duruma düşebilirsiniz.

Örneğin B ("sıfırın altı" için) ve $\sim B$ olmak üzere, sadece iki olasılıkla ilgilendiğinizi farz edin.

B: Önümüzdeki 21 Mart gecesinde, Toronto Uluslararası Havalimanının meteoroloji istasyonunda sıcaklık 0°C 'nin altına düşecek.

~B: Önümüzdeki 21 Mart gecesinde, Toronto Uluslararası Havalimanının meteoroloji istasyonunda sıcaklık 0°C 'nin altına düşmeyecek.

Bir düşünce deneyinden geçiyorsunuz. Sıkılıyorsunuz. B sizin aklınıza kışı getiriyor. Kış hiç bitmeyecek mi? Sıcak olmasının daha olası olduğunu düşünüyorsunuz.

Bir bahis oranı reklamı yapıyorsunuz:

(1) B üstüne yaptığınız bahsin oranı: $5/8$.

Başka bir düşünce deneyinden geçiyorsunuz. ~B hakkında düşünmek sizi ferahlatıyor. İlkbahar çoktan bitmiş olmaz mı? Bir bahis oranı reklamı yapıyorsunuz:

(2) ~B üstüne yaptığınız bahsin oranı: $3/4$. Bu yüzden ~B'ye karşı bahis oranınız $(1-3/4) = 1/4$ 'tür.

Bu iki değerlendirme tutarlı değil.

Şimdi bu tutarsız bahis oranları fikrini genelleştirelim.

KAYBETMESİ KESİN OLAN SÖZLEŞMELER

Bir *bahis sözleşmesi* üzerinde mutabık kalınan belirli bahis oranlarında bir bahsi ya da bahis grubunu çözüme kavuşturan bir sözleşmedir.

Bir *ganyan bayii* bahis sözleşmeleri yapan bir kişidir. Bahsi kazanırsanız sizin ödülünüzü öder. Bahsi kaybederseniz paranızı alır.

Sly adında akıllı ve sinsi bir ganyan bayii hava durumu hakkında reklamını yaptığınız (1) ve (2) numaralı bahis oranlarınızı görüyor. Sizin oranlarınızda size sözleşme teklif ediyor. Bu adil bir şey! Fakat ne şekilde bahse gireceğinizi o seçiyor. Bu da adil bir şey! Fakat oranlarınız sizin için kötü haber.

"Reklamını yaptığınız (1) olasılık oranınızla B üstüne

5 dolar bahse giriyorsunuz" diyor Sly.

O halde ortaya 5 dolar koyuyorsunuz. Sly ise 3 dolar koyuyor. 21 Martta hava sıcaklığı sıfırın altında olursa 3 dolar kazanıyorsunuz. Aksi takdirde 5 dolar kaybediyorsunuz.

"Ve reklamını yaptığınız (2) numaralı olasılık oranınızla ~B üstüne 6 dolar bahse giriyorsunuz" diyor Sly. O halde ortaya 6 dolar koyuyorsunuz. Sly ise 2 dolar koyuyor. 21 Martta hava sıcaklığı sıfırın altında olmazsa 2 dolar kazanıyorsunuz. Aksi takdirde 6 dolar kaybediyorsunuz.

Başınız belada. Tabloya bakın. Kazançlarınız ve kayıplarınız artı ve eksi olarak işaretlendi:

	B üstüne bahse gir	B'ye karşı bahse gir	Getirisi
Sıfırın altında	+3 dolar	-6 dolar	-3 dolar
Sıfırın altında değil	-5 dolar	+2 dolar	-3 dolar

Önümüzdeki 21 Martta ne olursa olsun 3 dolar kaybedeceksiniz.

İşte bu kaybetmesi kesin olan bir sözleşmedir.

Bir X şahsı için kaybetmesi kesin olan bir sözleşme, X'in bahis oranlarında X'le yapılan ve ne olursa olsun X'in kaybedeceği bir sözleşmedir.

Kaybetmesi kesin olan bir sözleşmenin bahis oranlarının reklamını yapmak aptalca bir şey olurdu. Bu mantıksal bir hatadır. Bahis oranlarınız kendi içinde tutarlı değildir. "Tutarlı" kelimesinin tümevarım mantığında standart bir anlamı olduğundan, tümevarım mantığındaki bu tarzda bir hataya **uyumsuzluk** denir.

Bir bahis oranları dizisi ancak ve ancak kaybetmesi kesin olan bir sözleşmeye açık değilse **uyumludur**.

Birazdan dikkate değer bir olguyu saptayacağız:

Bir bahis oranları dizisi ancak ve ancak olasılığın temel kurallarının gereklerini yerine getiriyorsa uyumludur.

ÜÇ KADEMELİ ARGÜMAN

- 1 Kişisel inanç dereceleri bahis oranlarıyla temsil edilebilir. (Bkz. 13. bölüm.)
- 2 Kişisel bahis oranları uyumlu olmalıdır.
- 3 Bir bahis oranları dizisi ancak ve ancak olasılığın temel kurallarının gereklerini yerine getiriyorsa uyumludur.

Bundan dolayı:

Kişisel inanç dereceleri olasılığın temel kurallarının gereklerini yerine getirmelidir.

Şimdi bunu her temel kural için kontrol edelim.

NORMALLİK

$0 \leq (A \text{ üstüne bahis oranı}) \leq 1$ olması gerekmektedir.

Bu geçerlidir, çünkü bahis oranları 0 ile 1 arasındaki kesirler olarak tanımlanmıştır.

KESİNLİK

$\Pr(\Omega) = 1$ olması gerekir. Bu da kesin olan bir şeyin olasılığının 1 olması gerekir demektir.

A'nın kesinlikle doğru olduğunu ya da meydana gelmesinin zorunlu olduğunu, fakat sizin A üstüne yaptığınız bahsin oranının $p < 1$ olduğunu hayal edin. Bu durumda Sly size A'ya karşı $1-p$ oranında bahse girmenizi istiyor. Bahis için ortaya konan toplam para 1 dolarsa siz $(1-p)$ dolar kaybediyorsunuz.

TOPLANABİLİRLİK

Toplanabilirlik kuralının birbirini karşılıklı olarak dışlayan olaylara uygulandığını hatırlayın. A ve B karşılıklı olarak birbirini dışlasın. Toplanabilirlik şunu gerektirir:

AvB üstündeki bahis oranı = A üstündeki bahis oranı + B üstündeki bahis oranı.

Belirli bir kişinin, diyelim ki *Hilary'nin*, kuralın gereklerini yerine getirmeyen bahis oranları teklif ettiğini farz edin. *Hilary* bu bahis oranlarının reklamını yapıyor olsun.

A üstüne: p .

B üstüne: q .

AvB üstüne: r .

Örneğin $r < p + q$ olduğunu, öyle ki toplanabilirlik kuralının ihlal edilmiş olduğunu farz edin.

Sly, *Hilary*'den reklamı yapılan oranlardan üç adet bahse girmesini ister. Yapacağı numara, sözleşmeleri *Hilary*'nin bahis oranlarını içerecek şekilde düzenleyerek ayarlamaktır. Bu bahislerin her birinde ortaya konan toplam bahis miktarı 1 dolar olacaktır.

Bahis (i). A doğruysa, $(1-p)$ dolar kazanmak üzere A üstüne p dolar bahse gir. A doğru değilse *Hilary* p dolar kaybeder.

Bahis (ii). B doğruysa, $(1-q)$ dolar kazanmak üzere B üstüne q dolar bahse gir. B doğru değilse *Hilary* q dolar kaybeder.

Bahis (iii). AvB yanlışsa –ne A ne de B doğruysa– r dolar kazanmak üzere, AvB ifadesine karşı $(1-r)$ dolar bahse gir. Fakat biri ya da diğeri doğruysa bu durumda *Hilary* $(1-r)$ dolar kaybeder.

Bunlar “birim” bahisleridir. Bahisleri daha gerçekçi yapmak için bahis için ortaya konan toplam parayı, diyelim ki 100 dolar yapın, öyle ki, örneğin $p = 0,3$ ise, *Hilary* 70 dolar kazanmak için ortaya 30 dolar koymuş olsun.

A ve B karşılıklı olarak birbirlerini dışladıklarından, biri ya da diğeri doğru olabilir, fakat ikisi birden doğru olamaz. Dolar ifadesini kaldırırsak, *Hilary*'nin getiri tablosunun aşağı şekilde olacağına dikkat edin.

	(i) durumunda getiri	(ii) durumunda getiri	(iii) durumunda getiri	Getiri
$A \& (\sim B)$	$1-p$	$\sim q$	$\sim(1-r)$	$r-p-q$
$(\sim A) \& (B)$	$-p$	$1-q$	$\sim(1-r)$	$r-p-q$
$(\sim A) \& (\sim B)$	$-p$	$-q$	r	$r-p-q$

$r < p + q$ ise $r - (p + q)$ negatiftir. Böylece ne olursa olsun *Hilary* $[r - (p + q)]$ dolar kaybeder.

$r > p + q$ ise *Sly*, *Hilary*'den reklamını yaptığı aynı oranlardan, fakat tersine bahse girmesini ister. *Hilary*'den, bu oranlarda A'ya karşı $1-p$, B'ye karşı $1-q$ ve $A \vee B$ üstüne r kadar bahse girmesi istenmektedir. Ne olursa olsun, onun kârı $\sim$ *Hilary*'nin kaybı $-[r - (p + q)]$ dolar olacaktır.

Bundan dolayı, mevcut bahis oranları toplanabilir olmalıdır. Toplanabilir iseler $\sim$ yani $r = p + q$ ise $\sim$ bu durumda A, B ve $A \vee B$ 'yi içeren kaybetmesi kesin olan sözleşmeler yapmanın bir yolunun olmadığına işaret etmek üzere ayrıca yukarıdaki tabloyu kullanabiliriz.

Şimdi artık normallik, kesinlik ve toplanabilirlik kurallarını kontrol etmiş olduk.

Bir dizi bahis oranının uyumlu olduğuna dair gerek ve yeter şart onun temel olasılık kurallarının gereklerini yerine getirmesidir.

KOŞULLU KAYBETMESİ KESİN OLAN SÖZLEŞMELER

Peki, *koşullu* bahislere ne diyeceğiz?

B koşuluna bağlı olarak A üstüne yapılan bir bahis, B meydana gelmezse iptal olur. Böylece koşullu bahisler için kaybetmesi kesin sözleşme olamaz. B meydana gelmezse, hiç kimse bir şey kazanmayacak ya da kaybetmeyecektir.

Tersine *koşullu kaybetmesi kesin olan bir sözleşmemiz* olabilir. Bir sözleşme, B koşuluna bağlı olarak ancak ve ancak B meydana geldiğinde kaybedecekseniz kaybetmesi kesin olan bir sözleşmedir.

Uyum fikrini genişletiyoruz. Bir dizi bahis oranı ancak ve ancak koşullu kaybetmesi kesin olan bir sözleşmeye açık değilse *B üstüne uyumlu koşulludur*.

KOŞULLU UYUM

Şimdi koşullu bahislerin koşullu kaybetmesi kesin olan sözleşmelerden ancak ve ancak temel kuralları ve koşullu olasılığın tanımını yerine getirmeleri kaydıyla kaçınacağını göstermemiz gerekecek. Yani, *B üstüne bahis oranı sıfır değilken aşağıdakinin gerçekleşmesi gerekir*:

B koşuluna bağlı olarak, *A üstüne bahse girme oranı* = $[A \& B \text{ üstüne bahis oranı}] \div [B \text{ üstüne bahis oranı}]$.

İlk üç temel kurala gelince bu o kadar da kolay değil. Hilary'nin aşağıdaki bahis oranlarının reklamını yaptığını farz edin:

A & B üstüne: q.

B üstüne: r > 0.

B koşuluna bağlı olarak *A üstüne: p.*

Ganyan bayii *Sly*, burada bahis için ortaya konan toplam parayı 1 dolar olarak seçmiyor, tersine bahis oranlarının kendi fonksiyonlarını kullanıyor.

Sly, Hillary'den reklamını yaptığı bahis oranlarını kullanarak üç bahis yapmasını istiyor:

- (i) $[(1-q)r \text{ dolar kazanmak için}] A \& B \text{ üstüne } qr \text{ dolar bahse gir. Ortaya konulan miktar } r \text{ dolar.}$
- (ii) $[qr \text{ dolar kazanmak için}] B' \text{ ye karşı } (1-r)q \text{ dolar bahse gir. Ortaya konulan miktar } q \text{ dolar.}$
- (iii) $[pr \text{ dolar kazanmak için}] B \text{ koşuluna bağlı olarak, } A' \text{ ya karşı } (1-p)r \text{ dolar bahse gir. Ortaya konulan miktar, (i)'deki gibi } r \text{ dolardır.}$

Hilary'nin getiri tablosu:

	(i) durumunda getiri	(ii) durumunda getiri	(iii) durumunda getiri	Getiri
A&B	$(1-q)r$	$-(1-r)q$	$-(1-p)r$	$pr-q$
(~A)&B	$-qr$	$-(1-r)q$	pr	$pr-q$
~B	$-qr$	rq	0	0

Böylece, $p < q/r$ ise, *Hilary*'nin kaybedeceği kesindir.

Örneğin *Hilary*'nin bahis oranlarının aşağıdaki gibi olduğunu farz edin.

A&B üstüne: 0,6.

B üstüne: 0,8.

B koşuluna bağlı olarak A üstüne: 0,5.

Sly, *Hilary*'den aşağıdakileri yapmasını ister:

- (i) A&B meydana gelirse 32 dolar kazanmak için A&B üstüne 48 dolar bahse gir.
- (ii) B meydana gelmezse 48 dolar kazanmak için B'ye karşı 12 dolar bahse gir.
- (iii) B meydana gelir, fakat A meydana gelmezse, B koşuluna bağlı olarak 40 dolar kazanmak için A'ya karşı 40 dolar bahse gir.

Hem A hem de B meydana gelirse *Hilary* 20 dolar kaybeder.

B meydana gelir, fakat A meydana gelmezse, *Hilary* 20 dolar kaybeder.

B meydana gelmezse, koşullu bahis iptal edilir ve 0 dolarlık net bir getiri için diğer iki bahis üstünde *Hilary* 48 dolar kazanır ve kaybeder.

Diğer yandan, $p > q/r$ ise ganyan bayii *Sly*, *Hilary*'den bütün bu bahislerin diğer tarafını tutmasını ister (öyle ki yukarıdaki tablo onun elde ettiği getirilerin tablosu olsun) ve ne olursa olsun kâr eder.

Bahis oranları ($p = q/r$) koşullu olasılığın tanımını takip ederse, koşullu kaybetmesi kesin olan sözleşme yapmak imkânsız olur.

Koşullu bahis oranları da dâhil olmak üzere, bir dizi bahis oranının uyumlu olduğuna dair gerek ve yeter şart onun temel olasılık kurallarının gereklerini yerine getirmesidir.

FRANK RAMSEY VE BRUNO DE FINETTI

Kişisel olasılığa dair ilk sistematik kuram F. P. Ramsey'in (bkz. 12. bölüm), 1926'da Cambridge'deki bir felsefe kulübüne yaptığı bir konuşmada sunulmuştur. Bahis oranlarınız olasılığın temel kurallarının gereğini yerine getirmiyorsa, bu durumda sizin kaybetmesi kesin olan bir sözleşmeye açık olduğunuzdan bahsetmiştir. Fakat kişisel inanç derecelerinin olasılığın kurallarının gereklerini yerine getirmesine dair daha bir derin ve zor bir argümanı vardı. Bu kitap boyunca fayda düşüncesini doğru kabul etmişken, Ramsey'in yaklaşımı olasılık ve fayda düşüncelerini birbirine bağımlı bir şekilde geliştirdi. Bunun da ötesinde, tanımında paranın azalan marjinal faydası için yer ayırdı.

1930'da, başka bir genç adam, İtalyan matematikçi Bruno de Finetti (bkz. 12. bölüm), bağımsız bir şekilde kişisel olasılığın öncülüğünü yaptı. "Uyum" kelimesini icat etti ve kaybetmesi kesin argümanını fazlasıyla kullandı.

Ramsey tesadüfen argümana değinirken, kaybetmesi kesin olan sözleşmeye bir *Hollandalı Kitabı* dedi. Bir "kitap" ganyan bayii tarafından yapılan bir bahis sözleşmesidir. Fakat neden "Hollandalı"? Zannedersem bu o günlerin bazı İngiliz üniversite öğrencilerinin bahis için kullandığı bir argüydü, fakat yine de bilmiyorum. Benim iki Hollandalı öğrencim bir aralar bu etnik karalamanın kökenini bulmaya çalıştı, ama maalesef başarısız oldular. Yine de, "Hollandalı Kitabı" adı şimdi tümevarım mantığında standart olarak yer olmaktadır. Bizse *kaybetmesi kesin olan sözleşmeyi* kullanmayı tercih ediyoruz.

ALİŞTIRMALAR

- 1 *Diyojen* bir kötümserdir. Maple Leafs'in önümüzdeki yılda liglerinde sonuncu olacağını düşünüyor. Onların sonuncu olacağına dair bahis oranı (önerme B) 0,9'dur. Sonuncu olmayacağına dair bahis oranıysa (önerme ~B) 0,2'dir. Diyojen'e karşı kaybetmesi kesin olan bir sözleşme yapın.
- 2 *Epikür* bir iyimserdir. Leafs'in önümüzdeki yılda liglerinde birinci olacağını düşünüyor (T). Onun T bahis oranı 0,7'dir. ~T üstüne bahis oranıysa 0,2'dir. Epikür'e karşı kaybetmesi kesin olan bir sözleşme yapın.
- 3 *İyimser Külkedisi* dans ediyor. Kendisine gece yarısından sonra dansta kalırsa Cadillac'ının bir balkabağına dönüşeceği söyleniyor, fakat o bunun doğruluğundan şüphe ediyor. Ancak ve ancak gece 11.59'da atacağı adil bir zarın 3 ya da 4 gelmesi koşuluyla dansta kalacağına karar veriyor.

Bu durumda, şu olasılıkları değerlendiriyor:

S: Dansta kalacak.

P: Cadillac'ı balkabağına dönüşecek.

Bahis oranları olarak temsil edilen kişisel inançları aşağıdaki gibidir:

P&S üstüne: 0,2

S üstüne: 1/3

S koşuluna bağlı olarak P üstüne: 1/2

Sizin için 1 dolarlık garanti bir kâr elde edilmesiyle birlikte Külkedisine karşı koşullu kaybetmesi kesin olan bir sözleşme yapın.

- 4 *Karamsar Külkedisi*. (3) gibi, fakat P&S üstüne yaptığı kişisel bahis oranı 0,1.
- 5 *Gizemli bir hediye*. Uzaktan bir akrabanız size bir hediye vereceğini söylüyor. Para vereceğini ümit ediyorsunuz;

aslında, en azından 100 dolar olacağını ümit ediyorsunuz. Sizi ilgilendiren olasılıklar şu şekilde:

C: Size hediye olarak para veriyor.

H: Hediye en az 100 dolar para.

Bahis oranlarıyla temsil edilmiş olarak kişisel inanç derecelerinizi aşağıdaki şekilde:

C&H üstüne bahis oranı: 0,3.

C üstüne bahis oranı: 0,8.

C verili olarak, H üstüne bahis oranı: 0,5.

100 dolar kaybetmenizin kesin olduğu kaybetmesi kesin olan sözleşmeyi sinsi ganyan bayinin nasıl düzenleyebileceğini gösterin (akrabanızın o hediyesine ihtiyacınız olacak!).

GÖZDEN GEÇİRMENİZ İÇİN ANAHTAR KELİMELE

Kaybetmesi kesin olan sözleşme
Uyum

Koşullu kesin kaybetme
Koşullu uyum

15. Tecrübeden Öğrenme

Bayes kuralı kişisel olasılık uygulamalarında merkezi öneme sahiptir. Yeni kanıtların ışığında, inancımızdaki rasyonel değişimleri temsil etmede yol gösterir.

BAYES KURALI

Bayes kuralı frekans tipi olasılıkları düşündüğünüzde sizi fazla ilgilendirmez. O sadece bir kuraldır. Biz onu 7. bölümde birkaç satır içinde koşullu olasılığın tarifinden türetmiştik.

Birçok problem için –amortisörler, tarantulalar, toksik metalle zehirlenmiş çocuklar, taksiler– bu kural bazı hesaplamaları kısaltır. Sadece bu kadar.

Fakat kişisel olasılıklar veya başka inanç-tipi olasılıklar söz konusu olunca Bayes kuralı gerçekten fark eder.

Günümüzde inanç-tipi yaklaşımlar genellikle “Bayesçi” olarak adlandırılır. Şayet bir istatistikçinin herhangi bir problemin Bayesçi analizinden bahsettiğini duyarsanız, bu bölümde tartıştığımız fikirlerin bir versiyonundan bahsediyor demektir. Fakat öznel olandan mantıksal olana kadar değişen birçok versiyon vardır. I. J. Good adında bağımsız düşünebilen bir Bayesçi (bkz. 15. bölüm), Bayesçi olabilmemenin 46.656 yolu olduğunu buldu!

HİPOTEZLER

“Hipotez” süslü bir kelimedir, fakat günlük hayat hipotezlerle doludur. Kararların büyük bölümü kanıtların değişik hipotezlerle karşılaştırılmasına bağlıdır.

Albert bu dersi bırakmalı mı? Ders bırakmanın son günü yarın. Sınırdaki olan ve şimdiye kadar başarısız olmuş bir öğrencidir. Aldığı ders, genelde derslerin zamanla zorlaşması

gibi, zorlaşacak mı? (1. hipotez) Veya zorluğu şimdiki gibi kalacak ve dersi geçebilecek mi? (2. hipotez)

Hatalı park yapmalı mıyım? (Bkz. 9. bölüm). Oradaki hipotezler neydi? Olasılıklar nelerdi?

Nükleer enerjiye mi, yoksa kömürlü enerji santralleri için daha iyi gaz temizleyicilerine mi yatırım yapmalıyız? Hipotezler nelerdir? Bu daha karmaşıktır, çünkü şimdi bu durumda söz konusu olanın hangi hipotezler olduğunu düşünmelisiniz. Bunlar için hipotezler ve olasılıklar üretebilir misiniz?

Louise eczacılık okumalı mı? Bir yandan, o bu işlerden hoşlanıyor, biyokimyası iyi ve amcası kendine ait eczanesi olan başarılı bir eczacı. Diğer yandan ortada birçok yeni mezun var ve bu alan doymuş olabilir. Hipotezler nelerdir? Hipotezleri ve onlara karşılık gelen olasılıkları formül halinde ifade edebilir misiniz?

Çoğu zaman hipotezleri ifade edemezsiniz, fakat ne kadar açıklıkla ifade edebilirsiniz onlar hakkında o kadar net bir şekilde akıl yürütebilirsiniz. Hipotezleri düşünmenin bir yolu, her birinin ne kadar olası olmasını düşündüğünüzü sormaktır. Hatta bazen kendi öznel olasılıklarınızı sunmak için sayıları kullanabilirsiniz.

YENİ KANIT

Hipotez için kişisel olasılığınız hakkında düşündüğünüz zaman onu, arka plandaki bilgilerinize, inançlarınıza, önyargılarınıza ve benzerlerine göreli olarak yaparsınız.

Fakat orada durmazsınız. Her zaman yeni bir şeyler öğreniriz. Şayet tamamen önyargılı değilseniz, yeni kanıtların inançlarınızın ve kişisel olasılıklarınızın üzerinde biraz etki etmesi gerekir.

Bunu biraz önce verdiğimiz bütün örneklerde görebiliriz. Ne zaman o dersi şu anki öğretmen verse, o zaman dersin sonuna doğru zorlaşacağı Albert'e söylenmiş olabilir.

Park denetçisinin geçen gece sokakları dolaştığını ve hemen hemen hiçbir zaman iki gece üst üste gelmediğini öğrendiniz.

Çevre ve enerji alanında araştırma yapanlar ve nükleer enerjiye karşı kömür enerjisiyle ilgilenenler her gün yeni bil-

giler edinirler. Onlar, bu bilgileri olasılıklarına dâhil etmek zorundadırlar.

Louise eczacılık okumak istiyordu. Bütçe kısıtlamalarından ötürü devletin ilaca az para ayıracağını ve doktorların çok fazla pahalı ilaç yazmalarından dolayı cezalandırılacaklarını öğrendi. Öyleyse satışlar aşağı düşebilir ve ticaret daralabilir.

Olasılıklar hakkındaki kararların günün her anında değiştirilmesi veya güncellenmesi gerekebilir. Bunu nasıl yapacağımız hakkında kurallar var mıdır? Bayesçiler *evet* der.

BAYESÇİ DÜŞÜNCE

Bayes kuralını hatırlayın. Bu kural karşılıklı olarak birbirlerini dışlayan ve geniş kapsamlı hipotezlere (H_i) tatbik edilir. Bu gibi birbirlerini dışlayan geniş kapsamlı hipotezler **bölüntüleme** olarak adlandırılır.

Her ($H_1, H_2, \dots, H_n$) bölüntülemesindeki H_j için Bayes kuralına göre:

$$Pr(H_j/E) = \frac{Pr(H_j)Pr(E/H_j)}{\sum [Pr(H_i)Pr(E/H_i)]}$$

Bayesçi düşünceye göre biz E'yi yeni kanıt olarak ve H_j 'leri de birbiriyle rekabet eden hipotezler olarak düşünürüz. Böyle olunca her H_j için

$Pr(H_j)$, bizim yeni kanıt elde etmeden önceki ilk olasılığımız,

E yeni kanıtımız ve

$Pr(H_j/E)$ bu yeni kanıtın ışığı altında bizim kişisel olasılığımız olmalıdır.

Bu bir *tecrübeden öğrenme* fikridir. Şimdi neden uyumluluğun çok önemli olduğunu görelim. Bizim argümanımız:

- (1) Kişisel olasılıklar uyumlu olmalıdırlar.
- (2) Uyumlu kişisel olasılıklar ana olasılık kurallarına uyarlar.

- (3) Bundan dolayı Bayes kuralına uyarlar.
 (4) Dolayısıyla onlar bizim tecrübeden öğrenmeyi temsil etmemize olanak sağlarlar.

ÖNSEL OLASILIK

Dersini bırakmayı düşünen tembel Albert'tan eczacılığı düşünen enerjik Louise'e kadarki bütün örneklerimizde birbirleriyle yarışan hipotezler var. Sizin onlar hakkında açıkça düşündüğünüzü ve onları sizin şu anki bilginize ve inançlarınıza göre birbirlerini dışlayan ve kapsamlı bir şekilde düzenlediğinizi farz edin. Bunlara:

$H_1, H_2, \dots, H_n$ diyelim.

Şimdi farz edelim ki siz bu hipotezler hakkındaki inancınızın derecesini öncel olasılıkla ifade ediyorsunuz. Bunlara *önsel* olasılıklarınız –hipotezlerin ilk düşüncelerinize ve eldeki bilgilere göre olan olasılığı– denir. Önceki sorular için cevap olarak önerdiğiniz her olasılık öncel olasılıklara örnek olacaktır.

Önsel olasılıklarınızın var olduğunu farz edin:

$\Pr(H_1), \Pr(H_2), \dots, \Pr(H_n)$.

ÖRNEK: AMORTİSÖRLER (1)

İşte size 5. bölümdeki örneğin bir tekrarı. Bir otomobil fabrikası amortisör almak için yakındaki Bolt & Co. ve Acme Inc. adlı parça satan iki firmayla anlaşmıştır. İhtiyacın %40'ını Bolt ve %60'ını Acme sağlamaktadır. Bütün amortisörler kalite kontrolünden geçmektedir. Kontrolde başarıyla geçenler güvenilir olarak adlandırılır.

Acme'nin amortisörlerinin %96'sı güvenilir olarak testten geçmiştir. Fakat Bolt üretimde bazı problemler yaşamaktadır ve son zamanlarda amortisörlerin sadece %72'si güvenilir olarak testten geçmiştir. Bir kamyon dolusu amortisör gelir. Biz bunların hangi firmadan geldiğini bilmek istiyoruz. Hipotezlerimiz:

$H_1 = A = \text{Teslimat Acme'den gelir.}$

$H_2 = B = \text{Teslimat Bolt'tan gelir.}$

Önsel olasılıklar:

$$\Pr(H_1) = \Pr(A) = 0,6. \quad \Pr(H_2) = \Pr(B) = 0,4.$$

OLABİLİRLİK*

Bazı önsel olasılıklara sahipsiniz. Sonra yeni bir şey, E kanıtının yeni bir parçasını öğreniyorsunuz. E'yi hesaba katmak için inancınızın derecesini tekrar gözden geçirip düzeltmek istiyorsunuz. Bunu nasıl yapmalısınız?

Şayet bu birbirleriyle yarışan hipotezler doğru olmuş *olsaydı* E'nin ne kadar olası olduğunu düşünebilirdiniz.

Yani, kişisel koşullu olasılıklarınızı aşağıdaki gibi düşünebilirsiniz:

$$\Pr(E/H_1), \Pr(E/H_2), \dots, \Pr(E/H_n).$$

Bu değerler çok önemlidir. Bunlara bir isim vermek kullanışlı olur. Belki de 20. yüzyılın en yenilikçi istatistikçilerinden biri olan R. A. Fisher (*bkz.* 18. bölüm) bunlar için bir isim seçmişti. Ne yazık ki seçtiği isim çok kafa karıştırıcıdır.

O, bu değerlere E kanıtı ışığı altında, $H_1, H_2, \dots, H_n$ hipotezlerinin olabilirlikleri ismini verdi.

Verilmiş herhangi bir hipotezler kümesinin olabilirliğini veren fonksiyona olabilirlik fonksiyonu denir.

Bu çok kafa karıştırıcıdır, çünkü günlük dilde “olasılık” ve “olabilirlik” birçok durumlarda eşanlamlıdır. Birçok söyleşide neredeyse aynı anlama gelir. Ve şimdi Fisher “olabilirlik” ismini kullanmayı teknik bir şekilde seçerek “olasılık” ile tam da aynı anlama gelmeyecek bir şekilde kullanıyor.

Şüphesiz her $\Pr(E/H_i)$ gibi bireysel olabilirlik sadece bir olasılıktır. Fakat bölüntülemenin hipotezlere ayrılması olasılığı dizisinin toplanabilirlik kuralına *uymadığını* gözden kaçırmayın. Bir bölüntüleme boyunca var olan olabilirlikler

* Likelihood -çn.

yeni bir olabilirlik oluşturmak üzere *toplanmazlar*. Fakat bir önermenin elemanlarının olasılıkları toplanabilir. Öyleyse, bir bölüntüleme için olabilirlik kümesi, bu bölüntülemenin elemanlarının olasılıklar kümesi değildir. Bu kafa karıştıran "olabilirlik" kelimesine bir örnek verelim.

AMORTİSÖRLER (2)

Kanıt: Bir amortisör teslim edileceklerin içinden rastgele seçilmiş ve testten güvenilir olarak geçmiştir. 5. bölümde biz bu yeni kanıtı güvenilir olması anlamında R demiştik.

$$\Pr(E/H_1) = \Pr(R/A) = 0,96$$

$$\Pr(E/H_2) = \Pr(R/B) = 0,72$$

Bunlar, E kanıtının ışığı altında, iki hipotezin olabilirlikleridir. Bu olabilirliklerin toplamı 1,68 eder. Bunların toplamı 1 etmez. (1,68 hiçbir şey belirtmez.)

Bazı kanıtlar verildiği zaman, bir bölüntüleme için olabilirlikler kümesi çok iyi tanımlanmıştır. Fakat bu, kanıtla ilgili olarak bölüntülemeler içindeki hipotezlerin bir olasılık kümesi *değildir*.

Neden bu kafa karıştıran terminolojiyi kullanıyoruz? Çünkü bu, 75 yıl önce Fisher tarafından sunulduğundan beri bütün istatistikçiler için mutlak olarak sabitlenmiştir.

SONSAL OLASILIK

Önsel olasılıklarınızı yeni kanıtın ışığı altında tekrar gözden geçirip düzeltmek istiyorsunuz. Bu düzeltilmiş olasılıklara sonsal olasılıklar denir. *Önsel* önceki demektir; yani yeni kanıttan önce. *Sonsal* yeni kanıttan sonraki demektir. Bir bölüntülemenin sonsal olasılıkları:

$$\Pr(H_1/E), \Pr(H_2/E), \dots, \Pr(H_n/E).$$

Şimdi Bayes kuralı sonsal olasılıkları, önsel olasılıkları ve olabilirlikleri birbirine bağlar:

$$\Pr(H_j/E) = \frac{\Pr(H_j)\Pr(E/H_j)}{\sum[\Pr(H_i)\Pr(E/H_i)]}$$

AMORTİSÖRLER (3)

Sonsal olasılıklar:

$$\Pr(H_1/E) = \Pr(A/R).$$

$$\Pr(H_2/E) = \Pr(B/R).$$

Bayes kuralını kullanarak teslimatın Acme'den mi yoksa Bolt'tan mı geldiğinin sonsal olasılıklarını hesaplarız:

$$\Pr(H_1/E) = \Pr(A/R) = 2/3.$$

$$\Pr(H_2/E) = \Pr(B/R) = 1/3.$$

BAYES KURALININ ÖZET FORMU

Geri dönüp Bayes kuralına bakalım. Payda kısmı:

$$\sum[\Pr(H_i)\Pr(E/H_i)].$$

Bu bölüntüleme tarafından belirlenmiş sabit bir sayıdır. Aslında o sadece $\Pr(E)$ 'dir. Bundan dolayı her H_j için

$$\Pr(H_j/E) \text{ ile } \Pr(H_j) \times \Pr(E/H_j) \text{ orantılıdır}$$

Veya $\propto$ 'yı kısaca "orantılı olmanın" kısaltılmışı olarak kullanırsak:

$$\text{Sonsal olasılık} \propto \text{önsel olasılık} \times \text{olabilirlik}$$

BAYES KURALININ TEKRAR TEKRAR UYGULANMASI

Bölüntülenmiş hipotezler üzerine tanımlanmış önsel olasılıklardan başlarız.

Sonra biraz yeni E kanıtı ediniriz. Bayes kuralını kullanarak sonsal olasılıkları türetiriz. Biz bunları bölüntülemenin yeni kişisel olasılıkları olarak alırız.

Sonra bir miktar F kanıtı daha ediniriz. Yeni kişisel olasılıklarımızı Bayes kuralında önsel olarak kullanabiliriz ve ikinci grup sonsal olasılıkları hesaplayabiliriz.

Özetlersek:

H'nin birinci sonsalı $\propto [(H'nin \text{önseli}) \times (E'nin ışığı altında H'nin olabilirliği)]$

H' 'nin ikinci sonsalı $\propto [(H'$ 'nin birinci sonsalı) $\times$ (F' 'nin ışığı altında $H\&E'$ 'nin olabilirliği)]

Böylece bir bölüntüleme n sayıda hipoteze ayrılmış olsun, $(H_1, H_2, \dots, H_n)$.

Biz önsel olasılıklar olan $\Pr(H_j)$ ile başlarız.

Yeni bir E kanıtı öğrendiğimiz zaman, biz birinci sonsal olasılık olan $\Pr(H_j/E)$ ile ilgileniriz. Bunlar Bayes kuralıyla hesaplanabilir.

Daha başka F kanıtı edindiğimiz zaman, biz ikinci sonsal olasılık olan $\Pr(H_j/E\&F)$ ile ilgileniriz. Esasında biz bu olasılıkları, birinci sonsal olasılıkları yeni kanıt F' 'ye göre önsel olasılıklar olarak ve Bayes kuralını kullanarak hesaplayabiliriz. Bayes kuralının koşullu bir şeklini elde ederiz:

$$\Pr(H_j/E\&F) = \frac{\Pr(H_j/E)\Pr(F/H_j\&E)}{\sum[\Pr(H_j/E)\Pr(F/H_j\&E)]}$$

AMORTİSÖRLER (4)

Teslimattan aldığımız bir amortisörü test ettik. Testten güvenilir çıktı. Bu E kanıtıydı. Şimdi rastgele ikinci bir amortisörü alıp test ediyoruz. Bu sefer *güvenilmez* çıktı. Bu yeni kanıt F 'dir.

Örneklerimiz rastgele alındığı ve sonuçları bağımsız olduğu için

$$\Pr(F/A\&E) = \Pr(-R/A) = 0,04.$$

$$\Pr(F/B\&E) = \Pr(-R/B) = 0,28.$$

E verildiği zaman kişisel olasılıklarımız aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Pr(A/E) = 2/3.$$

$$\Pr(B/E) = 1/3.$$

Bayes kuralını uygulayarak:

$$\Pr(A/E\&F) = \frac{\Pr(A/E)\Pr(F/A\&E)}{\Pr(A/E)\Pr(F/A\&E) + \Pr(B/E)\Pr(F/B\&E)}$$

Böylece $\Pr(A/E\&F) = 2/9$.

AMORTİSÖRLER (5)

Kanıtların hangi sırayla geldikleri fark eder mi? Şayet ikinci amortisör güvenliyken birincisinin güvenilmez olması fark edecek miydi? Bayes kuralına göre fark etmezdi.

Şayet rastgele seçtiğimiz birinci amortisör F güvenli olmamış olsaydı, aşağıdaki gibi hesaplardık:

$$\Pr(A/F) = 3/17.$$

$$\Pr(B/F) = 14/17.$$

Ve bundan sonra da, Bayes kuralını tekrar kullanarak

$$\Pr(A/E\&F) = 2/9.$$

SIRAYI TERSİNE ÇEVİRMEK

Bu Bayes kuralı hakkında genel ve düzenli bir gerçeği gösterir. Bir dizi kanıt parçasını hangi sırayla elde ettiğiniz nihai sonsal olasılığı etkilemez.

ÖRNEK: APANDİSİT

Amortisörler örneğinde, önsel olasılıklar ve olabilirlikler amortisör getiren iki şirketin nesnel frekans-tipi gerçekleştiriyle verilmişti. Bu kitaptaki aynı bilgilerin verildiği herkes aynı sonuçları çıkarır. Şimdi biz daha çok kişisel olasılıklara geçeceğiz.

Bir insanın apandisit olmasının olasılığı hakkında soracağız.

Aşama 1: İlkel Bir Önsel

Büyük bir şehir nüfusu içeren bir telefon rehberinden rastgele belirleyici bir isim seçtim. İlk önce bir telefon rehberi sonra da soyadı "Waukey" olan birisini seçtim. Bu isim bana tamamen yabancıydı; böyle bir isim olduğunu bile bilmiyordum. Bu numarayı aradım; sesi genç olan bir erkek cevap verdi ve isminin Richard Waukey olduğunu söyledi. Şimdi ben bu şahıs hakkında, büyük ihtimalle genç, erkek, belli bir bölgede yaşıyor olması ve telefona cevap veren (bel-

ki de ismi hakkında yalan söyleyen) bir kişi olması dışında gerçekte hiçbir şey bilmiyorum.

Şu anda Richard'ın apandisit olma olasılığı nedir? Şayet bir olasılık seçmem gerekseydi çok küçük, mesela 1 milyon-da 8 derdim. A, Richard'ın apandisit olma durumu olsun.

Ben oldukça gelişigüzel –fakat tamamen gelişigüzel olmayan– küçük bir sayıyı benim fikrimi temsil etmesi için önerebilirim:

$$\Pr(A) = 0,000008.$$

Aşama 2: Daha Kullanışlı Önsel

Ben çok küçük bir sayı seçtim; çünkü bu zamanda apandisit, rehberlerde de çoğunlukta olan yetişkin insanlar arasında hiç de sık görülmez. Fakat ben şimdi bir E kanıtı öğrendim. Richard 14 yaşında. Bana bu bölgede herhangi bir zaman dilimi içinde sadece 100.000 erkek çocuğun 6'sının apandisit olduğunu söylediler. Şimdi önemli bir karar verebilirim:

$$\Pr(A/E) = 0,00006.$$

Aşama 3: Bir Olabilirlik

Ben, Richard'ın titreme nöbetleri geçirdiğini, kendinde olmadığını ve sinirli olduğunu, başının hafif ağrıdığını ve son yemeğinden sonra kustuğunu öğrendim. Bu kusma belirtilerine V diyelim. Apandisit olanların büyük bir çoğunluğu bu belirtileri gösterirler, arka plan bilgilerine ve apandisit olması durumuna göre kusmanın olabilirliğinin aşağıda olduğu gibi olmasına karar veririm:

$$\Pr(V/A \& E) = 0,8.$$

Aşama 4: Bir Bölümleme

Fakat çocukta başka bir sorun olabilir miydi? Ben iki değişik hipotez düşünürüm.

H: Richard genelde sağlıklıdır. Sadece yediği bir şey dokunmuştur.

F: Yemek zehirlenmesi olmuştur.

Basitlik adına sadece bu 3 hipotezin var olduğunu var sayalım

Benim kararım: $\Pr(F/E) = 0,00009$.

Öyleyse $\Pr(H/E) = 1 - 0,00009 - 0,00006 = 0,99985$.

Aşama 5: Daha Fazla Olabilirlik

Benim kararıma göre Richard'ın belirtileri apandisitten daha ziyade yemek zehirlenmesine benziyor. Diğer taraftan, makul olarak sağlıklı çocukların bugün kusmaları pek olası değil. Böylece benim kararım:

$\Pr(V/F \& E) = 0,9$.

$\Pr(V/H \& E) = 0,00001$.

Aşama 6: Hastalık Başlar

Rahatsızlık çabuk ilerler. Çocuk sağ kasığının hemen üzerinde karnında keskin acıdan şikâyet eder. Bu nazik bölgedeki basıncı azaltmak için sağ kalçası hafif bükülmüş olarak yatar. Ağrılı bölgeye parmakla dokunulmasını istemez. Şimdi bu belirtiler her kusma ve apandisit durumunda olmaz, fakat yemek zehirlenmesi ve kusma durumunda bu belirtiler çok daha azdır ve makul olarak sağlıklı çocukların şiddetli hazımsızlık durumlarındaysa hemen hemen hiç görülmez. Bu detaylandırılmış ağrı belirtilerine P dersek ben aşağıdaki değerlendirmeyi yaparım:

$\Pr(P/A \& V \& E) = 0,6$.

$\Pr(P/F \& V \& E) = 0,02$.

$\Pr(P/H \& V \& E) = 0,00001$.

MEVCUT BİLGİLERİ BİR ARAYA GETİRMEK

Sezilerime dayanarak 1. aşamada Richard'ın apandisit olma olasılığının olmadığını söyledim.

Belki 2. aşamada çok az bir olasılık var, fakat bu hâlâ büyük oranda ihmal edilebilir.

4. aşamaya geldiğimizde gerçek bir olasılık var, fakat bunun yemek zehirlenmesi olmadığını söyleyemeyiz. Yemekten zehirlenmiş ama apandisit olmayan birisinin apandisitini

almak *çok* kötü olur: Vazifede ihmal! Fakat ameliyatsız ciddi bir apandisit de *çok* kötü bir şeydir.

Böylece 5. aşamaya geldiğimizde ciddi bir ikilem içinde olursunuz. En sonunda, 6. aşamada Richard'ın apandisit olduğundan *çok* emin olursunuz.

Ne kadar emin olursunuz? Bayes kuralı bu hesaplamayı mümkün kılar.

BAYES KURALININ 4. AŞAMADA UYGULANMASI

Biz $\Pr(A/V\&E)$ 'nin değerini bilmek isteriz.

$$\Pr(A/V\&E) = [\Pr(A/E) \times \Pr(V/A\&E)] \div K$$

burada, orantı sabiti K aşağıdaki gibidir:

$$[\Pr(A/E) \times \Pr(V/A\&E)] + [\Pr(F/E) \times \Pr(V/F\&E)] + [\Pr(H/E) \times \Pr(V/H\&E)]$$

Bu formüle yerleştirebileceğimiz değerlere sahibiz. Aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

$$\Pr(A/V\&E) \approx 48/139 \approx 0,35.$$

$$\Pr(F/V\&E) \approx 81/139 \approx 0,58.$$

$$\Pr(H/V\&E) \approx 10/139 \approx 0,07.$$

Yeni bir kanıt olan çocuğun kusuyor olmasından ne öğrendik? İlk önce onun hasta olduğunu öğrendik. Çocuğun "iyi" olması en azından apandisit veya yemek zehirlenmesi olmasının önsel olasılığı zorunlu olarak 1'di. Fakat bu durumda %7'ye düştü.

Bu biraz yüksek gözükebilir. Elbette o kusuyorsa *muhakkak* ciddi bir problemi vardır?

Hayır. Bu yüksek değer *temel oranlarından* gelir: Ne apandisit ne de yemek zehirlenmesi bölgemizde yaygındır. Mide bozuklukları yaygındır. Bu genç çocuklar nüfusu içinde iyi ve sağlıklı olmak o kadar yaygındır ki, örneğin bu belirtiler *çok* fazla vişne turtası yemekten olmuş olabilir.

Bu %7, Bayes kuralının sizi nasıl dürüst tuttuğuna bir örnektir. Birçoğumuz birden niteliksiz sonuca geçeriz: Richard

Waukey hastadır! Bu, bizim önceki değerlendirmemize ve olabilirliklere göre doğru değildir.

Peki ya yemek zehirlenmesiyle apandisit karşılaştırıldığında durum nedir? Yemek zehirlenmesinin sonsal olasılığı apandisit olmasına göre yükselmiştir. Fakat bu yükselme çok fazla değildir. Doktor henüz daha kesin ve güvenli bir teşhis koyamaz.

BAYES KURALININ 5. AŞAMADA UYGULANMASI

Öğrenmek (ideal olarak) birikimli bir süreçtir. Bir şey öğrenirsiniz ve onun üzerine inşa edersiniz. Şimdi siz her zaman Bayes kuralını olasılığın ana kurallarını ve ilk prensiplerini kullanarak doğrudan hesaplayabilirsiniz. Ben 5. aşamadaki sonsal olasılığı hesaplayıp yeni kanıtı –ağrıyı– analiz ettikten sonra, 5. aşamadaki sonsal olasılığı 6. aşamadaki önsel olasılık olarak kullanabilirim:

$$\Pr(P/A\&V\&E) = \Pr(A/V\&E) \times \Pr(P/A\&V\&E) \div K^*.$$

K^* orantı sabiti aşağıdaki şekildedir:

$$\Pr(A/V\&E) \times \Pr(P/A\&V\&E) + [\Pr(F/V\&E) \times \Pr(P/F\&V\&E)] + [\Pr(H/V\&E) \times \Pr(P/H\&V\&E)].$$

Sayıları yerine koyarak, kabaca aşağıdaki değerleri elde ederiz:

$$\Pr(A/P\&V\&E) \approx 160/169 \approx 0,947.$$

$$\Pr(F/P\&V\&E) \approx 9/169 \approx 0,053.$$

$$\Pr(H/P\&V\&E) \text{ ihmal edilebilecek kadar küçük.}$$

Belirli bir karın ağrısı hakkındaki yeni bilgi bütün oranları bastırdı. Hazımsızlıktan çok daha önemli bir sorun olduğundan hemen hemen eminim. Ve benim dikkatlice düşünülmüş fikrime göre tamamen emin olmasam da –her ne kadar tamamen kesin olmasa da– Richard Waukey apandisit olmuş.

DÜŞÜNMEYİ BIRAKMAYIN!

Zamanımızda, esas olarak Bayes kuralını kullanan, teşhis edici bilgisayar programları mevcut. Bilgisayar programıyla doktor aynı fikirde olmadığı zaman, hasta hakkında aynı veya benzer bilgiler verildiğinde bu vakayı inceleyen diğer doktorların, ilk doktordan ziyade bilgisayar programıyla aynı fikirde oldukları bulunmuştur. *Fakat mekanik hesaplamayı düşünmemek için bir mazeret olarak kullanmayın!*

Uyumluluk bir çeşit tümevarımsal tutarlılıktır. Bir doktor, 6. aşamaya gelindiğinde kişisel olasılıklar ve olabirlikler hakkında vermiş olduğu kararları gözden geçirebilir. Bayes kuralının yapabileceği tek şey sadece bütün inanç sistemimizin derecelerinin tutarlı olmasını sağlamaktır. İhtiyatlı bir doktor, 6. aşamaya gelindiği zaman “biliyor musun belki de Richard’ın ağrısının yemek zehirlenmesinden olma ihtimalini küçümsedim, ben bunu bir daha düşünsem iyi olur” diyebilir. Doktor önceki olasılıkları ve olabirliklerin bazılarını tekrar gözden geçirip değiştirebilir ve 6. aşamada farklı bir sonsal olasılık değerine varabilir.

OLABİLİRLİK ORANLARI

Kanıtlar aslında size ne söyler? Bayes kuralı, inançlarının derecelerini uyumlu kişisel olasılıklarla belirtebilen kişilere bir çözüm önerir. Değişik kişilerin değişik önsel olasılıkları vardır. Fakat yeni bir E kanıtı verildiği zaman herkes olasılıklarını –olabirliklerle çarparak– aynı şekilde günceller. E’nin ışığı altında, görelilik olarak büyük bir olabirliğe sahip olan bir hipotez herkesin inanç ölçeğinde yukarı çıkar, ancak bunun yanında görelilik olarak düşük olabirliği olan da aşağı iner. Olabirliklerin birbirine oranı bir parça yeni kanıtın inançlarımızı nasıl etkilediğini gösterir.

Bu, Fisher’in birtakım kanıtlara göre hipotezlerin olabirliklerinin ne kadar önemli olduğunu düşünmesinin sebeplerinden biridir. Ne acıdır ki, o böyle önemli bir fikir için kafa karıştıran bir isim seçmiş!

Bunların önemli olmasının diğer bir sebebiyse insanların, bir takım kanıtların ışığı altında, hipotezlerin görelilik

olabilirliklerine olasılıklardan çok daha kolay mutabık olma eğiliminde olmasıdır.

Apandisit teşhisi örneği olabilirlikler oranının değerini gösterir. Richard Waukey'nin muayenesindeki her aşama için olabilirlikleri yazdık. Göreli olabilirlikler verildiği zaman sonraki hesap aşamaları mekanikti.

Genel olarak, Bayes kuralını kullandığımız zaman olan şudur:

- Önsel olasılıklardan başlarız.
- Yeni kanıt elde ederiz ve birtakım sonsal olasılıklarla ilgileniriz.
- Biz bunları (Bayes kuralının özet formunun bize gösterdiği gibi) *olabilirliklerle çarparak elde ederiz*.

Olabilirlik oranları, yeni kanıtlarla verilen (düşündüğümüz hipotezlerle ilişkili) bütün bilgileri taşır.

Bayesçi bakış açısından birbirileriyle yarışan hipotezlerin olabilirlik oranı yeni bilginin kanıtsal anlamını özetler.

Bir matematikçi bu fikri *olabilirlik fonksiyonuyla* ifade ederdi. Olabilirlik fonksiyonu, verilmiş bir E kanıtı için E'nin ışığı altındaki hipotezlerin olabilirliklerini hesaplayan bir fonksiyondur.

BİR ÖĞRENME MODELİ Mİ?

Bazı felsefecilerin dediğine göre: Sizin Richard'ın apandisit olduğu hakkındaki kişisel olasılığınız onun 14 yaşında olduğunu, kusuyor olmasını ve tarif edildiği gibi bir acısı olduğunu öğrendiğinizden sonra %94,5 olmalı. Böylelikle sizin yeni bilgiyi doğru olarak nasıl değerlendirmeniz gerektiğini göstermiş olduk. Bunun da ötesinde, birbiriyle yarışan hipotezlerin göreli olabilirlikleri, yeni kanıtların önemi hakkında iyi bir göstergedir.

Bazı filozoflar bu dersin tamamen genel bir ders olduğunu söylerler. Biz makul bir şekilde tecrübeden öğrenmenin

anahtarını bulduk. Tekrarlarsak, fikir üç ayrı fikir birleştirilerek bulunur:

Fikir 1: Kişisel inançlarımızın derecesini kişisel bahis oranlarımızla birleştirmek mantıklı bir durumdur.

Fikir 2: Ortada, bahis oranlarının olasılığın ana kuralına (ve böylece Bayes kuralına) uyması gerektiğini savunan makul bir görüş var.

Fikir 3: Bayes kuralı önsel olasılık kararlarımızı, yeni kanıtların ışığı altında değiştirmek için kullanılabilir.

Bazı felsefeciler Bayes kuralını tecrübeden öğrenmenin anahtarı olarak kabul ederler. Bunun David Hume'un tümevarım problemine bile yardımcı olduğu görülür. Biz bu kullanımını kitabın sonunda, 21. bölümde tartışıyoruz. Bu felsefi bir bölümdür. Orada Bayes kuralının tecrübeden öğrenmenin katı bir modeli olarak kullanılmasını da *sorgulayacağız*.

JEFFREY KURALI

Bir sorun var. Bayes kuralının cömertçe kullanılması bile tecrübeden öğrenmemizi analiz etmemize yetmeyebilir. Neden?

Çünkü Bayes kuralı öğrenmenin düzenli adımlarla ilerlediğini varsayar:

Biz kesin bir yeni gerçeği, E'yi öğreniriz.

Biz Bayes kuralını uygularız.

Sonra başka bir yeni gerçeği, F'yi öğreniriz.

Bayes kuralını uygularız.

Ve böylece devamlı olarak sonsal olasılığımızı güncelleriz. Bazı öğrenmeler böyle olur, özellikle bir laboratuvarı veya kesin gözlem yaparak topladığımız araştırma örneklerinde olduğu gibi. Fakat gerçek hayatta, gözlemlerimizin veya tecrübelerimizin kesinliğinin az olması temeline dayanarak çoğu zaman fikrimizi değiştiririz.

Örneğin eczacılık okumayı düşünen Louise'i hatırlayın.

Louise, bütçe kısıtlamalarından ötürü devletin ilaca az

para ayıracağını ve doktorların çok fazla pahalı ilaç yazmalarından dolayı cezalandırılacakları hakkında bir söylenti duyar. Bu durumda satışlar aşağı düşebilir ve ticaret daralabilir.

Bu kullanışlı bir söylentidir, fakat onun güvenilebileceği ne tamamen kesin bir kanıt, ne de belirlenmiş bir gerçek ve kesinleşmiş bir olgu var. Ortada sadece bir söylenti var.

Tümevarım mantıkçısı Richard Jeffrey, Bayes kuralını bu gibi durumları kapsayacak şekilde genişletti.

İşte size bu fikrin bir taslağı. Louise'in hipotezlerin bölüntülenmesine G ve $\sim G$ diyelim, burada:

G : Eczacıların 4 sene içindeki iyi iş bulma imkânları.

Diyelim ki C (para kısıntısını göstermek için) = bütçe kısıtlamalarından ötürü devlet ilaca az para ayıracak ve doktorlar çok fazla pahalı ilaç yazmalarından dolayı cezalandırılacaklar.

Louise, C 'nin doğru olması durumunda bunun genç eczacılar için kötü bir haber olduğunu anlıyor.

$$\Pr(G/C) = 0,1.$$

Aksi takdirde, her ne kadar iş imkânının az olması için bütçe kısıntısından başka sebepler olsa bile iyi bir iş bulmanın ihtimali oldukça fazla:

$$\Pr(G/\sim C) = 0,8.$$

Louise söylentiyi duyar. Fakat C 'nin doğru olduğunu öğrenmez. O sadece muhtemelen doğru olduğunu öğrenir.

Bu söylentinin ışığı altında G 'nin olasılığını $\Pr'$ ile gösterelim, öyle ki

Bu söylentinin ışığı altında, $\Pr'(G)$ değeri G 'nin olasılığı olsun.

Biz $\Pr'(G)$ 'yi bilmek istiyoruz.

Louise, bu söylentiyi duyduktan sonra C 'nin olasılığını $3/4$ olarak hesaplar.

$$\text{Pr}'(C) = 0,75.$$

$$\text{Pr}'(\sim C) = 0,25.$$

Bayes kuralını uygulayamayız, çünkü söylenti bize Bayes kuralında kullanabileceğimiz kesin bir E bilgisi vermemiştir.

Jeffrey'nin düzeltilmiş Bayes kuralı toplam olasılık kuramını anımsatır. İki hipotezli bir bölüntüleme, G ve $\sim G$ için, Jeffrey kuralına göre:

$$\text{Pr}'(G) = \text{Pr}(G/C)\text{Pr}'(C) + \text{Pr}(G/\sim C)\text{Pr}'(\sim C).$$

Böylece Jeffrey Louise'e $\text{Pr}'(G) = 0,275$ olduğu sonucuna varmasını tavsiye eder.

Louise bu söylentiye duymadan önce, eczacılık derecesinin büyük bir ihtimalle iyi bir iş bulmasına yardım edeceğine inanıyordu. Şayet Jeffrey kuralına göre düşünürse iş bulma durumu pek de parlak gözüküyor.

MANTIK-BAYESÇİLER

Bütün bu bölüm boyunca tamamen olasılıklar hakkındaki kişisel yargılarımızı düşünüyorduk. Ortada inanç-tipi olasılıkların bütün bir spektrumu var. Bir ucunda saf kişisel olasılıklar öbür ucundaysa mantıksal olasılıklar fikri var.

Mantıksal olasılık, bir hipotezle onun kanıtı arasındaki mantıksal ilişki olarak düşünülür. Ekonomist J. M. Keynes'in ve çok sonraları, felsefeci Rudolf Carnap'ın mantıksal olasılık kuramını tercih ettiklerinden bahsetmiştik. İkisi de bu fikir için aksiyomlar ortaya koymuştu. Onların mantıksal olasılıkları, olasılıkların ana kurallarına uyar. Böylece bunlar da Bayes kuralına uyar. Bunun sonucu olarak mantıksal olasılıklar aynı zamanda Bayes kuralıyla tecrübeden öğrenmeyi temsil edebilirler.

Mantık-Bayesçiliği olarak adlandırabileceğimiz Bayesçiliğe en büyük katkıyı yapan kişi çalışan bir bilim insanı olan İngiliz jeofizikçi Harold Jeffrey'dir. Onun *Theory of Probability* [Olasılık Kuramı] (1939) bilimdeki pratik problemlere uygulanabilir çok sayıda uygulamayı içerir ve hâlâ da gerçek bilim Bayesçi düşüncenin kaynağıdır.

TOPLAM KANIT GEREKLİLİĞİ

Kişisel olasılık sadece şudur: Bir insanın inanç derecesinin ifadesi. Bizim kategorik olasılık gösterimimiz $Pr(A)$, kişisel olasılıklara çok güzel uyar. Fakat mantıksal olasılık, önermeyle kanıt arasındaki bir ilişki olarak düşünülür ve sonuç olarak bizim ihtiyacımız olan şey koşullu olasılık gösterimi $Pr(H/E)$ 'dir.

Kişisel olasılıklar inanç derecelerini temsil ederler ve biz bunları faydayla birleştirerek beklenen faydaları hesaplamak ve karar kuramını kullanmak üzere iyi bir fikre sahibiz. Kişisel olasılıkların doğrudan pratik bir uygulaması vardır.

Mantıksal olasılığın pratik yorumu nedir? Temel fikir, rasyonel insanların koşullu beklentilerini *eldeki bütün kanıtlarla* koşullandırılmış mantıksal olasılıkları kullanarak, maksimize etmeleri gerektiğidir. Carnap bunu *toplam kanıt gerekliliği* olarak adlandırır.

MANTIĞA KARŞI FİKİR

Kişisel olasılık kuramına göre bir insanın kişisel olasılık kararları kişiye özel bir meseledir. Bunlar kişiye kalmıştır. Fakat her şey mümkün değildir. Birtakım rasyonel kısıtlamalar vardır. Kişisel olasılıklar tümevarımsal olarak tutarlı olmalıdırlar. Yani onlar uyumlu olmalıdır. Şayet onlar uyumluysa olasılığın temel kurallarına uyarlar.

Aksi takdirde kişisel olasılıklara dair hiçbir kısıtlama yoktur. 11. bölümdeki *frekans prensibi* buna aday olarak gösterilebilir: Şayet bir hipotez hakkındaki tek bilgi frekans-tipi bir olasılıksa, bu durumda kişisel olasılıklarınızı frekanslara eşitlemelisiniz.

Mantıksal olasılık kuramı sadece uyumluluğun ötesinde çok daha kuvvetli kısıtlamalar olduğunu savunur. Bu kuram, kanıtların ışığı altında hipotezlerin olasılık kararlarının benzersiz bir şekilde rasyonel ve doğru olduğunu söyler. Rudolf Carnap, her biri bir dizi önsel mantıksal olasılığa karşılık gelen *tümevarımsal metotlar* olarak adlandırdığı bir sürekliliğin olması düşüncesiyle, bu fikri zayıflattı. Bununla beraber *Logical Foundations of Probability* [Olasılığın

Mantıksal Temelleri] (1950) ve *The Continuum of Inductive Methods* [Tümevarımsal Metotların Sürekliliği] (1952) kitaplarında yayımladığı sistemi fazlasıyla basittir. Ne bilimsel ne de günlük hayatta pratik uygulamaları olduğu görülmektedir.

L. J. SAVAGE

Kişisel olasılık kuramı birbirinden bağımsız olarak Frank Ramsey ve Bruno De Finetti tarafından icat edildi. Fakat bizzat “kişisel olasılık” ismi dâhil olmak üzere bu fikir başarısını Amerikalı istatistikçi L. J. Savage’a borçludur (1917–1971). Bu fikrin Bayes kuralıyla birlikte önemini açıkça belirtti. *The Foundations of Statistical Inference* [İstatistiksel Çıkarımın Temelleri] (1954) kitabı en önemli katkısıdır.

İşte size garip bir gerçek, Bayesçi felsefenin ilk günleriyle bilgisayar biliminin ilk günleri arasındaki tesadüfi (?) bağlantı.

İkinci Dünya Savaşı sırasında Savage, ilk bilgisayarı yapan büyük matematikçi, modern bilgisayar ve bilgi çağını açan John Von Neumann’ın baş “istatistiksel” asistanıydı.

İkinci Dünya Savaşından sonra Bayesçi fikrini savunan başka bir büyük İngiliz olasılık kuramcısı vardı: I. J. Good. I. J. Good, A. M. Turing’in asistanıydı. Turing ideal bilgisayar fikrini tanımladı ve ideal hesaplama hakkındaki temel teoremi ispatladı. İşte bu yüzden biz bugün Turing makinalarından bahsediyoruz.

Sanki modern Bayesçi fikri, bilgisayar çağının bir yan ürünü gibidir.

ALIŞTIRMALAR

- 1 *Olabilirlikler*. Aşağıdaki durumlarda önsel olasılığı, sonsal olasılığı ve olabilirliği ifade edin:
 - (a) Örümcek problemi, 7. bölüm. G ve H olabilirliklerinin (T’ye göreli olarak) toplamı 1 midir?
 - (b) Taksiler, 7. bölüm. G ve B olabilirliklerinin (W_b ’ye göreli olarak) toplamı 1’i veriyor mu?

- 2 *Kaybolmuş notlar.* Tümevarımsal mantık dersinin notlarını kaybettiğinizi varsayın. Sizin iki hipoteziniz var ve hangisinin doğru olduğundan emin değilsiniz.

L: Notlarınızı kütüphanede bıraktınız.

C: Tümevarım mantığının öğretildiği sınıfta bıraktınız.

- (a) L ve C'ye uygun gördüğünüz önsel olasılıklar verin. Kolay sayılar kullanın, fakat bu soruda kullandığınızı sayıların oldukça gerçekçi olduğundan emin olun.

Bazı kanıtlar elde ediyorsunuz:

E: Bir arkadaşınız, kütüphanede birisinin notlarını gördüğünü, fakat bunların sizin olduğunu düşünmesi için bir sebebi olmadığını söyler.

- (b) E kanıtı ışığı altında L ve C'ye kişisel olabilirlik değerlerini verin.

- (c) E'nin ışığı altında L ve C'nin sonsal olasılığını hesaplayın.

Sonra yeni kanıtlar elde ediyorsunuz:

F: Başka bir arkadaşınız, kütüphanede üstünde sizin isminizin yazdığı bir şeyi gördüğünü söyler.

- (d) F'nin ışığı altında L&E ve C&E'ye değerler verin.

- (e) L ve C'nin yeni sonsal olasılıklarını bir önceki sonsal olasılık ve olabilirliklerden hesaplayın.

- 3 *Mantarlar.* Jack Waukey gece yarısı kamp yerinden hastaneye getirildi. Kusuyordu, titremesi ve karın ağrısı vardı. Sizin değerlendirmenize göre apandisit olma olasılığı $Pr(A) = 0,8$ 'dir.

Sonra kardeşi Richard size, Jack'in gün batımında yabancı mantar topladığını ve akşam yemek için yarı karanlıkta pişirdiğini söyledi. Siz ona bu mantarları sorun. Mantarların görüntüsünü iyi bir şekilde tarif edebilir. *Amanite mantarı*^{*} olduğu hemen hemen kesindir. Ne

* İsmi Latince amanita muscaria, Türkçesi sinek mantarı başka bir ismiyle gelin mantarı, Fransızca sinek öldüren amanit anlamına gelen Amanite tue-mouches, İngilizce adı fly agaric, Almancası ise Fliegenpilz. İsmi, üzerine konan sinekleri öldürdüğünden sinekle ilişkilendirilmiştir. Bugün birçok yerde halen sütte mantarı bekleterek sinek öldürücü olarak kullanılmaktadır. Asitli toprakları seven bu mantarı özellikle huş ağacı ve kozalaklı ağaçların düşmüş yapraklarının altında bulabilirsiniz –çn.

renk? Açık portakal renkli *Sezar'ın Amanitesi* tatlı bir lokmadır, ama beyaz renkli *Amanita Phalloides* mantarı çok zehirlidir. Onun popüler ismi *ölüm kapsülüdür*.

Mantarlar alacakaranlıkta toplandı. Ne Richard ne de Jack mantarların ne renk olduğundan emin değil. Körpe *ölüm kapsülü* mantarlarının içi beyazdır ve içi sarımsı olmasının dışında taze *Sezar'ın Amanitesine* çok benzerdir. Ama buna dair kesin bir kanıt yoktur. Richard, "yani, muhtemelen sarımsı" der. Tahmin yapmaya zorlandığınızda, $Pr(Y) = 0,7$ diyeceksiniz.

Jeffrey kuralını kullanarak Jack'in apandisit olmasının yeni olasılığı $Pr'(A)$ ifadesini hesaplayın.

Bu kararın ne kadar kritik olduğunun farkına varın. Zehirlenme teşhisinde mide yıkanması elzemdir, bu durumda apandisit ameliyatıysa öldürücü olur. Apandisit olma durumundaysa ameliyat şarttır ve mide yıkanması çok tehlikeli olacaktır.

- 4 *Söylentiler, söylentiler.* Final sınavından hemen önce bu sınıfta öğrenci olan Joy, öğretmenin final sınavında kumarbazın yanılışı hakkında soru sormayacağını birisine söylediği söylentisini duydu. Diyelim ki:

G = Kumarbazın yanılışı hakkında bir soru olacak.

I = Öğretmen bir öğrenciye böyle bir soru olmayacağını söyledi.

Bu söylentiye iştmeden önce öğretmenin hiçbir ipucu vermediğini kabul ederek, Joy kumarbazın yanılışı hakkında bir soru olması ihtimalinin yüksek olduğunu düşündü: 0,3.

Öğretmenin oldukça güvenilir olduğunu düşünür: $Pr(\sim G/I) = 0,9$.

Bu söylentinin gerçek olmasının oldukça olası olduğunu düşünür, böylece söylentiye duyduktan sonra onun için $Pr(I) = 0,8$ olur.

(a) Onun bu söylentiye duyduktan sonra G'ye verdiği ola-

* Köygöçüren mantarı (*Amanita phalloides*), Amanitaceae familyasından zehirli bir mantar türü. Türkiye'deki ölümcül zehirlenmelerin neredeyse %95'inden sorumlu, son derece zehirli ve tehlikeli bir mantardır -çn.

sılık değerini bulun. Olasılıkları güncellemek için kullandığınız kuralları ve isimleri söyleyin.

- (b) Şayet bir konu sınavda sorulacaksa, bu konuyu çalışmanın yararı Joy için 20'dir. Sınavda olmayacak bir soruyu çalışmanın yararıysa -5'tir. Joy'un bu söylentiye duymadan önceki kumarbazın yanılışına çalışma kararının beklenen faydasını hesaplayın. Ve söylentiye duyduktan sonra tekrar hesaplayın. Bir soruya sadece beklenen faydası pozitifse çalışır. Söylentiye duyduktan sonra kumarbazın yanılışına çalışır mı?

- 5 *Otobüsler.* Yabancı bir ülkede size yeni ve büyük bir şehir olarak görünen Gotterdam'ı ziyaret ediyorsunuz. Bu ülkedeki diğer tek büyük şehirse Shamsterdam'dır. Bu iki şehrin otobüs servisleri çok iyidir, fakat sizin bu şehirler hakkında bildiğiniz şeyler sadece bunlar.

Havaalanında iki şehrin otobüs tarifelerini görüyorsunuz. Fakat her iki tarifede de şehir isimlerinin bulunduğu kısmın bir tarafı yırtılmış. Sadece altı harflik "...terdam" kısmı kalmış. Bu "dam" şehirlerinden birisinin 20 diğerinin de 200 otobüs hattı olduğunu görüyorsunuz. Gotterdam, Shamsterdam'dan daha büyük olduğu için Gotterdam'ın 200 ve Shamsterdam'ın 20 otobüs hattı olduğunu tahmin ediyorsunuz. Diyelim ki:

[200] = Gotterdam'ın 200 otobüs hattı olduğu önermesi.

[20] = Gotterdam'ın sadece 20 otobüs hattı olduğu önermesi.

- (a) $\Pr([200])$ ve $\Pr([20])$ için kişisel olasılık tahminlerinizi kararlaştırın.
- (b) Siz gece geç bir saatte geldiniz ve bir arkadaşınızın evine götürüldünüz. Erken bir sabah yürüyüşü yapmak üzeresiniz. Bildiğiniz kadarıyla, kasabanın "tipik" bir kısmındasınız. İlk gördüğünüz otobüsün numarasının n olmasının kişisel önsel olasılığı olan $\Pr(n)$ 'yi söyleyin.
- (c) $\Pr(1 \leq n \leq 20)$ ve $\Pr(21 \leq n \leq 200)$ için kişisel önsel olasılığınız nedir?
- (d) Sabah erkenden yürüyüşe çıkıyorsunuz. İlk gördüğünüz

nüz otobüsün numarası 19'dur. Düşünürsünüz: "Şayet ortada sadece küçük numaralı otobüsler varsa küçük numaralı otobüs görme ihtimalim 200 hat olması durumuna göre çok daha fazladır."

Bu yeni kanıt parçasının ışığı altında [200]'ün olabilirliği –sizin kişisel olasılığınız– nedir?

[20]'in olabilirliği nedir?

[20] olabilirliğinin [200] olabilirliğine oranı nedir?

(e) Sizin $\Pr([200]/19)$ ve $\Pr([20]/19)$ koşullu kişisel olasılıklarınız nedir?

(f) Gotterdam'ın her tarafına uzun bir tur atmaya çıkıyorsunuz. 1. hattan 20. hatta kadar 100 otobüsle karşılaşıyorsunuz. Gotterdam'ın 200 otobüs hattına sahip olmasının kişisel koşullu olasılığı nedir?

(g) Bu hikâye "tecrübeden öğrenme" fikrini nasıl gösterir?

- 6 *Kör talih.* Profesör John Leslie görünüşte benzer bir akıl yürütmeye şaşırtıcı bir sonuca vardı. Bayes kuralını kullanarak kısa bir zaman sonra insanlığın sonunun geleceğini ispatladı! İlk önce bir çekiliş kutusu problemi düşünür, şöyle ki:

İçinde benim ismim olan vazonun içinde sadece 10 isim olmasının olasılığı %2 ve 1000 isim olmasının olasılığıysa %98'dir. Hiçbir isim çekilmeden önce, bu "önsel" olasılıklar, benim kişisel tahminimdir. Şayet benim ismin ilk çekilen 3 isimden biriye, Bayes kuralı bana orada sadece 10 isim olduğunun "sonsal" olasılığının _____ olduğunu söyler.

(a) Boşluğu doldurun. Bu durumda sonsal olasılık nedir? Aşağıdaki gibi devam eden Leslie'yle aynı fikirde olacaksınız:

Sadece %2 olarak tahmin edilen olasılık yaklaşık üçte iki olarak değiştirilmiştir.

O şimdi şöyle önerir:

Benzer bir hesaplama kişinin zamansal pozisyonuna uygulanır. Çok basitleştirerek yegane alternatifler, (i) insan soyu MS 2150'den önce sona erecek ve (ii) yüz-

binlerce sene daha hayatta kalmaya devam edecek olsun. Tekrar basitleştirerek, 21. yüzyılın ilk on yılında bir insanın var olma ihtimali, kısa süreli nesil durumunda onda bir ve uzun süreli nesil durumunda sadece binde birdir.

Bu onda bir sayısı nereden gelir? Leslie, 2150 yılına kadar hayatta olan insanların, bu yazıyı yazdığı 1990'lı yıllarda da hayatta olmasını yaklaşık %10 olarak hesaplar. Buna karşılık, şayet insanlık yaşamaya devam edip çoğalıyorsa, uzun süreli neslin en fazla binde biri 1990'lı yıllarda hayattaydı. Devam ediyor,

İnsanlık soyunun 2150 yılında sona ereceği ihtimalinin sadece %1 olduğunu düşünmeye başladığınızı farz edin.

Buraya kadar, Profesör Leslie'nin varsayımlarını kabul edelim. Sonra *sizin* 21. yüzyılda hayatta *olduğunu*-*zu* bildiğinizi savunuyor. Bunu bir kanıt olarak alın (19 numaralı otobüs veya piyangodan isminizin çıkmasıyla karşılaştırın). Bayes kuralını kullanarak felaketin yakın olmasının güncelleştirilmiş olasılık tahmininin _____ olduğunu iddia eder.

(b) Leslie'nin hesaplamasını, Bayes kuralını otobüs probleminde veya loto örneğinde olduğu gibi makul bir şekilde kullanabilirmişsiniz gibi tamamlayın.

Argüman güçlüdür. Kişisel olasılık değerleri verilmesine ciddi bir şekilde bağımlı değildir; onda bir, binde bir ve %1 ihtimallerini biraz değiştirin. Leslie'nin olağanüstü sonucu yine geçerlidir. Bunun ihtimali, insan neslinin çok kısa bir zaman sonra yok olacağı ihtimali kadardır. Esasında bu iddia dünyanın sonunun önümüzdeki birkaç dakika içinde geleceği hipotezi için çok daha iyi çalışır!

(c) Niye olduğunu izah edin.

Leslie bu sonucun sürpriz olmadığını, büyük nükleer silah stokları, yolda olan yeni öldürücü virüsler, küresel kirlenme, küresel ısınma, nükleer kış, başıboş asteroitler vb ile iddia eder. Bu kasvetli düşünceler *sonucun* (2150'den önce kıyamet gününün) ilk düşündüğümüze

göre daha olası olduğunu göstermeye yardım eder.

(d) Fakat bunlar Leslie'nin *iddiasını* Bayes kuralını kullanarak güçlendirir mi?

Şimdi Gotterdam otobüslerine geri dönelim. Karşılaştığımız bütün otobüslerin 20 veya daha küçük hatlardan olmasından dolayı biz hemen hemen kesinlikle Gotterdam'da sadece 20 hat olduğuna emin olduk. Profesör Leslie önümüzdeki yıl içinde doğan milyonlarca insanla karşılaştı veya bunların varlığından haberdar oldu!

(e) Leslie'nin kıyamet günü iddiasını kullanarak bütün bu kanıtlarla insanlığın sonunun bir sene içinde geleceğinin sonsal olasılığı nedir?

- 7 *Yanılgı*. Sizin (e)'de verdiğiniz cevap *saçma olana indirgeme* formunda bir iddiadır; biz bunu saçma bir sonuca varmak için kullandık. İnsan soyunun tükenmek üzere olduğu hemen hemen hiç de kesin değildir. Bununla birlikte, bu düşünce tarzındaki yanlışlık nedir?

Otobüs argümanı iyi bir argümandır. Leslie'nin argümanları birçoğumuzu deli eder. Leslie'nin argümanında en az bir yanılgı bulun.

- 8 *Toplam kanıtlar*. Leslie'nin argümanını mantıksal olasılık ve toplam kanıt perspektifinden kısaca tartışınız.

GÖZDEN GEÇİRMENİZ İÇİN ANAHTAR KELİMELE

Önsel olasılık	Tecrübeden öğrenme
Sonsal olasılık	Olabilirlik oranı
Olabilirlik	Jeffrey kuralı
Bayesçi	Mantık-Bayesçileri

FREKANS OLARAK OLASILIK

16. Kararlılık

Olasılık, frekans-tipi olasılık ve istatistiksel kararlılığın temel kuralları arasındaki öz bağlantılar. Bu olgular frekansla ilgili akıl yürütmenin temellerini sunar. Bu bölüm, olasılık hakkındaki en temel olgulardan birisi olan Bernoulli teoremini belirterek biter.

Şimdi inanç perspektifini kullanan üç bölümden frekans perspektifini kullanan dört bölüme geçeceğiz. 13. ve 14. bölüm inanç-tipi olasılıkların neden olasılığın temel kurallarını yerine getirmesi gerektiğinin bir sebebini sunmaktadır. 15. bölüm bu sonucun “tecrübeden öğrenmeye” nasıl uygulanacağını gösterdi. 16–19. bölüm frekans perspektifinden benzer bir şeyi yapmaktadır.

PROGRAM

- *Bu bölümde* olasılık kurallarıyla kararlı frekanslar hakkındaki sezgilerimiz arasındaki bağlantılar tarif edilmektedir.
- *17. bölümde* bu bağlantılar genişletilmektedir.
- *18. bölümde* frekans-tipi tümevarımsal çıkarım üzerine bir öz fikir sunulmaktadır; önem fikri.
- *19. bölümde* frekans-tipi tümevarımsal çıkarım üzerine ikinci bir öz fikir sunulmaktadır; güven fikri. Bu fikir kamuoyu yoklamalarının günümüzdeki sunuluş şeklini açıklamaktadır. Ayrıca istatistiğin nasıl *tümevarım davranışı* olarak kullanıldığını düşünebileceğimizi açıklar.

Bu bölümde tarif edilen bütün sonuçlar olasılığın temel kurallarından elde edilen *çıkarımlardır*. Sonuçlar sadece ifade edilmiştir, fakat ispatlanmamıştır; çünkü ispatlar bu kitap-taki diğer materyallerden daha zordur.

İNANCIN VE FREKANSIN KARŞILAŞTIRILMASI

Temel kurallar her türlü olasılık içindir. İnanç-tipi ve frekans-tipi olasılıklar temel kuralların temel olarak iki farklı türdeki sonuçlarına vurgu yapar.

İnanç-tipi olasılık için en önemli fikir Bayes kuralıdır. Bu, bütün olasılık türleri için geçerli olan olasılığın temel kurallarından çıkarılabilir. Fakat Bayes kuralı, frekans-tipi olasılıklar için çok ilgi çekici değildir.

Frekans-tipi olasılık için en önemli tek düşünce, deneme sayısı arttıkça frekansların nasıl kararlı hâle geldiğidir. Bu düşünceyi anlamamıza yardım eden temel bir sonuç Bernoulli teoremi olarak bilinir. Bayes kuralı gibi, her ne kadar ispatı Bayes kuralının ispatından çok daha zor olsa da, olasılığın temel kuralından çıkarılabilir. Dolayısıyla bütün olasılık türleri için geçerlidir. Fakat inanç-tipi olasılıklar için Bernoulli teoremi çok ilgi çekici değildir.

Bernoulli teoremi, matematikçiler kuşağı tarafından geliştirilmiş olan *büyük sayıların ve merkezi limit teoremlerinin* çok önemli *kanunlarının* sadece birincisidir, fakat biz Bernoulli'nin orijinal teoreminin çok çeşitli şekillerde çok faydalı olan öz fikri içerdiğini düşünürüz.

Onun hakkında şöyle düşünün: İnanç perspektifi olasılık kurallarının temel mantıksal özelliği –Bayes kuralı– üzerinde karar kılar. Frekans perspektifi, olasılık kurallarının diğer bir temel mantıksal özelliği –büyük sayılar kuralı– üzerinde karar kılar. Bu mantıksal özelliklerin her ikisi de, hem felsefi hem de matematiksel olarak, öneri ve sonuçlar bağlamında gerçekten de çok zengindir.

ESKİ ŞİŞELERDE YENİ ŞARAP

Bernoulli teoremi 300 yıllık bir teoremdir. Bayes kuralıysa 250 yıllıktır. Bunların zamanı geçmemiştir. Her ikisi de bu-

gün serpilip gelişen tümevarımsal çıkarımın iki temel yaklaşımının birinin ya da diğ erinin tam ortasında durmaktadır. Birçok dogmatik bu iki yaklaşımdan sadece birisinin doğru olduğunu söylüyor. Bizim yaklaşımımız her ikisinin de sadece pratikte değil, ayrıca, 21. ve 22. bölümlerde göreceğimiz gibi tümevarımın felsefi problemine taze perspektifler getirmek için de kullanışlı olduğunu söylüyor. Bu problem Bernoulli teoremini ispat ettikten yaklaşık olarak otuz yıl sonra ve Bayes'in katkısının yayınlamasından yaklaşık olarak otuz yıl önce David Hume tarafından kesin bir şekilde ifade edilmişti. Hume'un probleminin zamanı geçmiş değildir. Analitik felsefeciler, bunun üzerinde ciddi bir şekilde düşündüklerinde hâlâ (kibar bir şekilde söylersek) çileden çıkmaktadırlar.

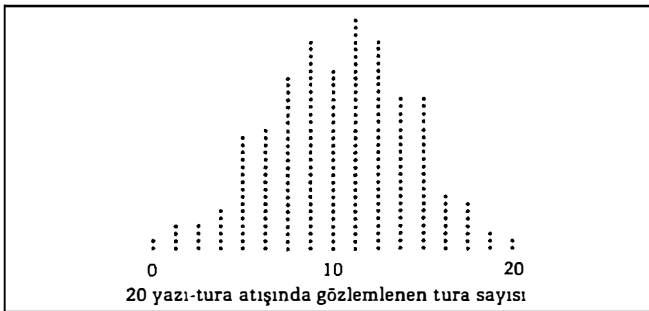
İSTATİSTİKSEL KARARLILIK

Tekrar iş imize dönelim. Olasılık hakkındaki temel fikirlerimizden biri de uzun dönemdeki kararlı görel i frekanstır. Uzun dönemleri bir kenara bıraksak bile, temel kurallar frekansların kararlı olması hakkında hiçbir şey söylemiyor gibi görünüyor. Biz zaten uzun dönemde frekansın oldukça muğ lak bir fikir olduğ una vurgu yapmış tık. "Uzun dönemde hepimiz öleceğ iz." Yine de çoğ umuzun bazı kurgu türlerinde daha fazla deneme yapıldıkça görel i frekansın daha kararlı hâle geleceğ i şeklinde bir düş üncesi vardır. Ş imdi bu düş ünçenin gerçekten de temel kurallar açısından açıklanabileceğ ini göstermemiz gerekiyor.

BİR DENEY

Fakat önce kararlılık elde edip etmeyeceğ imize bakalım. Adil bir parayı 20 kere atın ve tura gelenleri kaydedin. Turanın yaklaşık olarak 10 defa geleceğ ini bekliyorsunuz, fakat ş üpheş iz bazen daha az tura ve bazen de 10'dan daha çok tura olacaktır. Temel olasılık üzerinde çalışan büyük bir sınıfın her üyesine bir 5 sent verilmiş ve parayı 20 kere yazı-tura atması istenmiş ti. Aslında, daha sonra elde edilen 250 sonucun çizimi yapıldı. Hiç kimseye 0, 1, 19 ya da 20 tura gelmedi. Aslında, sadece 25 öğrenc iye tam 10 tura gelirken, 32'sine 11

tura ve 29'una da 9 ya da 12 tura geldi.



Düzensizliğe rağmen bu sütunların etrafına pürüzsüz bir eğri çizersek, kabaca bir "çana" benzeyecektir. İşte bu, deneysel olarak elde edilen bir "çan eğrisidir."

Üniversitedeki her öğrenci parayı 20 defa atmış olsaydı, çizimin daha bir düzgün görüneceğini beklerdik: "Çana" yakınsama çıplak gözü kandırırdı. Hep adil paralar kullanmış olsaydık ve adil bir şekilde yazı-tura atmış olsaydık (olmayacak bir iş!), 10. atışta eğrinin zirvesine gelinirdi.

ÖRNEKLEM ORTALAMASI

Deneyimiz, paranın tura geldiği her birinin sonucu k olan, 250 küçük deneyden oluşmaktadır. 250 denemede k 'nın "ortalama" değeri nedir diye sorabiliriz? Bu birçok toplama gerektirir. İsterseniz ortalamanın 9,76 olduğunu ve 10'a çok yakın olduğunu kontrol edebilirsiniz.

Her öğrenci bir parayı 20 defa atarak küçük bir deney yaptı. Bu türde 250 küçük deneyden oluşan büyük deneyimizin, bu tür çok daha büyük ya da sonsuz büyüklükte deneyler dizisinden alınan bir *örneklem* olduğunu düşünebiliriz. k 'nın ortalama değerine tura sayısının *deneysel* ya da *örneklem ortalaması* denir.

Öğrenciler k/n 'yi, paranın tura geldiği göreceli frekansını (ya da kaç kere geldiğinin oranı) kaydetmiş olsalardı, bu durumda örneklem ortalaması $9,76/20 = 0,49$ olurdu. Bu da $1/2$ 'ye çok yakındır.

ÖRNEKLEMİN STANDART SAPMASI

Örneklem ortalaması sadece bir ortalamadır. Ortalamalar hikâyenin tamamını anlatmaz. Sınıftaki her öğrenci parayı 50 defa yazı-tura atmış olsaydı, ortalama etrafındaki kümelenemenin çok daha dikkat çekici olacağını beklerdik. Böylece eğrisi daha "dar" görünürdü. Sonuçlarda daha az yayılma ya da dağılma olurdu.

X ortalaması etrafındaki dağılma ölçüsünü bilmek isteriz. Bu, sonuçların çoğunun kabaca $X-d$ ile $X+d$ arasında olduğu, d gibi bir sayı olurdu.

Dağılmayı ölçmenin doğal bir yolu X ortalamasıyla her gözlemlenen X_i arasındaki farkları kaydetmektir. Bizim durumumuzda, 250 adet gözlemlenen orantı k/n vardır ve ortalama $X = 0,49$ 'dur.

Şimdi basitçe $(X_i - X)$ farklarını alırsak ve bunları toplarsak, bazıları pozitif bazıları da negatif olacaktır ve bunlar birbirlerini götürülecektir. Tersine, yayılmayı ölçmenin genel olarak kullanılan yolu bu farkların karelerinin toplanması –ki bunların hepsi de pozitifdir– ve sonra da bu toplamın karekökünün alınmasıdır. Buna, *örneklem standart sapması* denir ve SS kısaltmasıyla gösterilir.

$$SS = \sqrt{[\sum (X_i - X)^2 / n]}$$

Örneğimizde, örneklem standart sapması yaklaşık olarak 2,9'dur.

Şimdi geriye dönüp grafiğinize bakın. Sonuçların 162'sinin ya da %65'inin, $(10 - 3)$ ile $(10 + 3)$ arasında olduğunu göreceksiniz.

10.000 üniversite öğrencisinin kullanıldığı saçma bir deneyde, daha küçük bir standart sapma bulmayı beklerdik. Yakında 2,3'ten daha az olması gerektiğini göreceğiz.

BAHİS SORUSU 1

Fikrimiz, uzun bir dizide çoğu frekansın kararlı olma eğiliminde olduğudur. Dizi uzadıkça, kararlılık artar. Denemelerin sayısı arttıkça, ortalamadan büyük sapmalar daha az

olası hale gelir. Bahis sorusu 1'in (bkz. Bahis soruları) altında yatan fikir buydu. Soru şöyleydi:

Hastanelerde neredeyse erkek bebek sayısı kadar kız bebek doğar. *City General*'da her hafta birçok bebek doğar. Bir ilçe kasabası olan Cornwall'da her hafta sadece birkaç bebeğin doğduğu küçük bir hastane vardır.

Normal bir hafta bebeklerin %45'i ile %55'inin kız olduğu bir haftadır.

Olağandışı haftaysa %55'ten fazlasının kız ya da %55'ten fazlasının erkek olduğu bir haftadır.

Aşağıdakilerden hangisi doğrudur:

- (a) *City General* ve Cornwall'da olağandışı haftalar çoğu zaman aynı sıklıkla oluşur.
- (b) *City General*'da olağandışı haftalara Cornwall'dan daha fazla rastlanır.
- (c) Cornwall'da olağandışı haftalara *City General*'dan daha fazla rastlanır.

Büyük sapmalar, yani bu durumdaki olağandışı haftalar, şehirdeki büyük nüfusun olduğu yerlerden ziyade Cornwall gibi küçük bir nüfusun olduğu yerlerde olur. Bunun için doğru cevap (c) şıkkıdır. Cevap, üstü örtük bir şekilde doğumda cinsiyetin bir şans meselesi olduğunu farz eder; bu da doğru görünmektedir. Son zamanlara kadar hemen hemen bütün popülasyonlarda, canlı erkek doğum olasılığı yaklaşık olarak 0,51'dir ve canlı kız doğum olasılığı da yaklaşık olarak 0,49'dur. Doğumun hafif hileli para gibi kuramsal bir modeli takip ettiğini farz edersek, bu durumda kesinlikle doğru cevap (c)'dir.

Şüphesiz model yanlış olabilir. Şimdilerde çocuğun cinsiyetini hamileliğin erken dönemlerinde tespit etmek oldukça kolaydır. Bazı popülasyonlarda, erkek çocuklar kız çocuklardan daha çok istenilir ve bundan dolayı da hamileliğin ilk üç ayında cenin kürtaajla alınır. Böylece canlı erkek doğumlarının canlı kız doğumlarına oranı arttırılır.

BERNOULLI DENEMELERİ

Bu bölümde bazı E olayları için sabit p olasılığıyla birlikte tekrarlanan bağımsız denemelerle ilgileniyoruz. Bunlara çoğu zaman *Bernoulli denemeleri* denir. Parayla yazı-tura atmayı, bir rulet tekerleğinin çevrilmesini ve bir çekiliş kutusundan (tekrar yerine koyarak) çekiliş yapmayı Bernoulli denemeleri olarak düşünmekteyiz.

Şimdi, formüller olmadan bu bölümün ileriki kısımlarında tarif edilen temel teoremleri özetleyeceğiz.

Şöyle sorabiliriz:

E olayının olasılığı p ise, uzun bir Bernoulli denemeleri dizisinde E'nin meydana gelmesinin görelî frekansı nedir?

Bu bölümde tarif edilen bütün teoremler, öyle ya da böyle, bu türde bir soruya cevaptır.

LİMİTLER

Olasılığın temel kuralları görelî frekansın neredeyse her zaman p civarında olmasını gerektirir.

Uzun Bernoulli deneme dizilerinin çoğunda E'lerin görelî frekansı p 'ye yakın olacaktır.

Bunun da ötesinde:

Deneme dizileri uzadıkça E'nin görelî frekansının p 'ye yakın olma olasılığı da artacaktır.

Bundan daha kuvvetli ifadeler de kullanabiliriz. ϵ gibi her türlü küçük *hata payı* için deneme sayısı sınır olmaksızın arttıkça, E'nin görelî frekansının p 'nin ϵ kadar uzağında salınması gittikçe daha olası hale gelir.

E'nin görelî frekansının p 'nin ϵ hata payı civarında olma olasılığına kesinlik olasılığı adını verelim.

Verilen her ϵ hata payı için deneme sayısı arttıkça kesinlik olasılığı da 1'e yaklaşır.

Bu, *Bernoulli teoreminin* etkisidir. Deneme sayısı arttıkça görelî frekansın p 'den büyük sapmalarının azaldığını net bir şekilde ima eder.

Bunlar nitelikli ifadelerdir, fakat bazı kesinlik olasılıkları için nicel yakınsamalar kullanacağız.

Artık bu bölümde tartışılacak olan bütün sonuçları ifade ettik. Şimdi bunları daha dikkatli bir şekilde ifade etmemiz ve pratikte ne anlama geldiğine dair birkaç örnek vermemiz gerekir.

BİR ÇEKİLİŞ KUTUSU MODELİ

Yerine geri koyarak örneklem alınması için bir cihazla birlikte ideal bir çekiliş kutusu hayal edin. Bağımsız denemeler: Hiç önyargı yok; kutudan yapılacak herhangi bir çekilişte herhangi bir topun olasılığı diğer toplarla aynıdır. Kutudan yapılan çekilişler Bernoulli çekilişleridir.

Çekiliş kutusu kesin bir p oranında yeşil ve kırmızı topları içerir. Yeşil bir top çekmenin olasılığı p 'dir.

ARKA ARKAYA YAPILAN ÇEKİLİŞLER

Şimdi yeni türde bir denemeyi, birleşik denemeyi ele alalım:

Yerine koyarak arka arkaya n adet bağımsız çekiliş –Bernoulli çekilişleri– yapıyoruz. Çekilen yeşil topların sayısı olan k sayısını not ediyoruz. Bu türdeki denemelerin olası sonuçları $0, 1, 2, \dots, n$ 'dir.

Şimdi tekrarlanan ve birleşik denemeler hakkında bazı basit sonuçları sunuyoruz.

EN OLASI SAYI

Yerine koyarak n adet topu çektiğimizde “elde edilecek en muhtemel” yeşil top sayısı nedir?

Cevabı çok açıktır. p küçükse, çok fazla yeşil top elde etmeyi beklemeyiz, ancak p büyükse, çok sayıda elde etmeyi bekleriz. Fakat soruyu kesin bir şekilde cevaplayabiliriz.

0 yeşil top, 1 yeşil top, 2 yeşil top, ..., n yeşil top elde etme olasılığını hesaplayabiliriz.

O'dan n 'ye kadar hangi sayıların olasılığı en yüksektir? Burada gelmesi en olası olan yeşil top sayısından bahsediyoruz.

Gelmesi en olası yeşil top sayısı kabaca pn 'dir.

n denemede elde edilecek en olası yeşil top *sayısına* ek olarak, yeşil topların gelmesinin en olası *oranını* ya da *görelî frekansını* ele alıyoruz.

Yeşil topların gelmesi en olası görelî frekansı kabaca p 'dir.

Peki, neden "kabaca"? İki nedenle. Birincisi, pn genellikle bir tam sayı değildir. $p = 1/2$ ve $n = 5$ iken, $np = 2,5$ bir tam sayı değildir. Bir çekiliş kutusundan beş kere çekiliş yaparken, hiçbir zaman tam olarak 2,5 top çekmezsiniz. İkinci olarak, bazen iki eşit derecede en olası olan sayı vardır. $p = 1/2$ ve $n = 5$ iken, çekilecek yeşil toplardan en olası olanları 2'dir ve 3'tür.

7 ve 8 numaralı alıştırmalarda en olası sayının aslında pn 'ye "en yakın" bir tam sayı ya da tam sayı çifti olduğunu gösteriyoruz. Her iki miktar da tam sayı olmadıkça, bu $pn - (1 - p)$ ve $pn + p$ arasındaki tam sayıdır.

EN OLASI GÖRELİ FREKANS

k_0 , n denemede elde edilecek en olası sayıyı temsil etsin. Bu durumda yeşil topların en olası görelî frekansı k_0/n 'dir. Kesir p 'ye yakındır. Aslında alıştırmalarda teyit edildiği gibi:

$$(p - (1 - p)/n) \leq k_0/n \leq (p + p/n).$$

Deneme sayısı n arttıkça, hem p/n hem de $(1 - p)/n$ sıfıra yakınsar. Böylece bu formülde sol taraftaki ve sağ taraftaki sayılar çok hızlı bir şekilde p 'ye yakınsar. Böylece büyük bir n için en olası görelî frekans esas olarak p 'dir.

Teorem: Büyük sayıdaki denemeler için yeşil topların en olası görelî frekansı k_0/n , esas olarak p 'dir.

Bu, uzun dönemde olasılıkla frekans arasındaki birinci bağlantıdır.

Deneyimizle karşılaştırma. 250 öğrencinin bir parayla 20 defa yazı-tura attığı deneyimizde en sık gözlemlenen görelî frekans $1/2$ değildi. 20 yazı-tura atışında 32 öğrenciye 11 defa tura geldi; o halde en sık rastlanan görelî frekans $10/20 = 0,5$ değil, $11/20$ ya da $0,55$ idi.

n ÇEKİLİŞTE ÇEKİLMESİ BEKLENİLEN YEŞİL TOP SAYISI

Yerine geri koyarak yapılan n çekilişte çekilen *ortalama* yeşil top sayısı hakkında da konuşabiliriz. Burada tekrar tekrar n top çekmeyi düşünüyoruz, bazen hiç yeşil top gelmez, bazen bir yeşil top gelir, çoğu zaman da k_0 yeşil top gelir ve böyle devam eder. n çekilişteki ortalama ya da beklenen yeşil top sayısını elde etmek için bütün bu sonuçların ortalamasını alabiliriz. Olasılığın temel kurallarından kolayca hesaplanabildiği üzere *beklenen değer* pn 'dir.

n ÇEKİLİŞTEKİ YEŞİL TOP SAYISININ BEKLENEN GÖRELİ FREKANSI

Beklenen görelî frekans tam da beklenen sayı bölü n 'dir. Böylece:

Teorem: Yeşil topların beklenen görelî frekansı p 'dir.

Bu, uzun dönemde olasılıkla frekans arasındaki ikinci bağlantıdır.

Deneyimizle karşılaştırma. 250 öğrencinin bir parayla 20 defa yazı-tura attığı deneyimizde, turaların gerçek görelî frekansı $1/2$ 'ye çok yakındı, yani $0,49$ idi.

YAKINSAMA VE KARARLILIK

$Pr(\text{yeşil}) = p$ olarak verildiğinde, bir örnekleme pn kadar yeşil top elde edeceğimizi bekleriz.

Fakat gözlemlenen oran k/n 'nin, çok olası olarak, p 'ye yakın olabilmesi için ne kadar büyük bir örnekleme ihtiyacı vardır?

Daha kesin olarak: Küçük bir "hata payı" ϵ için n denemede yeşillerin göreceli frekansının p 'nin ϵ civarında olma olasılığı nedir?

Jacques Bernoulli n arttıkça, bu olasılığın 1'ye yakınsadığını ispat etti.

HATA PAYI VE KESİNLİK OLASILIĞI

Formüller kullanarak, bazı ϵ hata payları için n denemede k sayısı kadar yeşil top elde etmenin olasılığıyla ilgileniriz, öyle ki:

$$p - \epsilon \leq k/n \leq p + \epsilon.$$

Bu aşırı derecede karmaşık bir "olaydır"! p ve n sayıları soruda verilmiştir. k sayısı n sayıdaki deneme gözleminin sonucudur.

Örneğin $p = 0,3$ olduğunu farz edin. $n = 100$ çekiliş yapmışsak ve hata payımız olarak $\epsilon = 0,01$ almışsak

$$p - \epsilon \leq k/n \leq p + \epsilon$$

olayı

$$(0,3 - 0,01) \leq k/100 \leq (0,3 + 0,01)$$

şeklinde bir k elde etme olayıdır. O halde, bu olay $k = 29, 30$ ya da 31 yeşil top çektiğimizde meydana gelir.

Biz bunun gibi olayların olasılığıyla ilgileniyoruz. Verilen bir hata payı için buna *kesinlik olasılığı* diyoruz.

Verilen bir ϵ hata payı için

kesinlik olasılığı k 'nın np 'nin ϵn civarında olma olasılığıdır.

Ya da sembollerle kesinlik olasılığı:

$$\Pr[(np - \epsilon n) \leq k \leq (np + \epsilon n)] \text{ 'dir.}$$

Kesinlik olasılığı aynı zamanda k/n 'nin, p 'nin ϵ civarında olma olasılığıdır ya da sembollerle

$$\Pr[(p - \epsilon) \leq k/n \leq (p + \epsilon)].$$

TEOREM:

Deneme sayısı arttıkça, kesinlik olasılığı 1'e yaklaşır. Göreli frekansların olasılıklara yakınsama eğilimi vardır.

Bu, uzun dönemde olasılıkla frekans arasındaki üçüncü bağlantıdır.

BERNOULLİ TEOREMİ

Bernoulli teoremi çoğu zaman birazcık farklı bir şekilde ifade edilir: Limitte, k/n gittikçe artan bir şekilde 1'e yaklaşan bir olasılıkla p' 'ye yakınsar.

Bu sonucu kesin bir şekilde ifade etmek için p ile göreli frekans arasındaki farkın istediğimiz kadar küçük olmasını isteriz. Yani, tam da biraz önce tartışıldığı gibi k/n 'nin p 'nin küçük bir *hata payı* ϵ civarında olmasını isteriz.

İkinci olarak *kesinlik olasılığının* yani k/n 'nin p 'nin ϵ civarında olma olasılığının, 1'e istediğimiz kadar yakın olmasını isteriz. Yani, bu olasılıkla 1 arasındaki x farkının, yeteri kadar deneme yaptığımız müddetçe, seçeceğimiz kadar küçük olmasını isteriz. Bu fikirler Bernoulli teoremini oluşturmak üzere bir araya getirildi.

Herhangi küçük bir ϵ hatası için ve
herhangi küçük bir x farkı için,
 N sayıda deneme vardır,
öyle ki
herhangi bir $n > N$ için,
olasılık $1-x$ ifadesinden büyüktür ve aynı zamanda
yeşil topların oranı k/n , p 'nin ϵ civarındadır.

Bunun çerçevesini çizmeye değer.

BERNOULLİ TEOREMİ

*Herhangi bir küçük ϵ hatası için,
ve herhangi bir küçük x farkı için,
 N sayıda deneme vardır,*

*öyle ki, herhangi bir $n > N$ için,
 $\Pr[(p - \epsilon) \leq k/n \leq (p + \epsilon)] > (1 - x)$ 'tir.*

Bu, uzun dönemde olasılıkla frekans arasındaki dördüncü ve en temel bağlantıdır. Bir sonraki bölümde bir temel bağlantıdan daha bahsedilecektir.

JACQUES BERNOULLI

Daniel'in amcası olan (bkz. 8. bölüm) İsviçreli matematikçi Jacques Bernoulli'den (1654–1705) sonra Bernoulli teoremi adı verildi. Olasılık üzerine olan esas eseri *The Art of Conjecturing* [*Tahmin Etme Sanatı*] 1690'ların başlarında yazılmış, fakat 1713'teki ölümüne kadar yayımlanmamıştı. Bu kitap, olasılık matematiği için önemlidir. Fakat felsefe için de önemlidir. 4. ve son kısmında Bernoulli, 19. bölümde sunulacak olan tecrübeden öğrenmede "güvenin" özü yaklaşımını vermektedir.

ALIŞTIRMALAR

- 1 *Aç Clara.* Biberonla beslenen Clara bebek, 24 saatlik dönemde 7 kere beslenir. Her beslenmede "aldığı" sıvı litre cinsinden şöyledir:

1,8 lt, 1,2 lt, 2,1 lt, 1,2 lt, 0,6 lt, 2,1 lt, 1,5 lt.

(a) Her beslemede Clara'nın aldığı ortalama yiyecek miktarı neydi? (b) Standart sapma nedir?

- 2 *Hasta Sam.* Sam hasta ve düzensiz olarak yemek yiyor. Ailesi onu 7 kere beslemeye çalışıyor, fakat sadece bir kere fazlasıyla yiyor ve 24 saat boyunca aldığı yemek sadece şu:

0,9 lt, 0,3 lt, 0,6 lt, 0,6 lt, 2,4 lt, 0,3 lt, 1,2 lt.

(a) Her beslemede Sam'in aldığı yiyecek miktarının ortalaması neydi?

(b) Standart sapma nedir?

(c) Standart sapma daha büyükken Sam için olan ortalama, neden Clara'nın ortalamasından küçüktür?

- 3 *Medyan gelir.* Bir grubun aritmetik ya da ortalama geliri, bütün gelirlerin toplamının grubun büyüklüğüne bölünmesine eşittir. Bu, "orta" türlerinden biridir. Popülasyonu ikiye ayıran gelire, ikiye ayıran noktanın üzerinde ve altında olan eşit sayıdaki insanlar olarak da bakabiliriz. Buna medyan denir. Medyan üst yarı grubun en alt geliri olanla alt yarı grubun en üst geliri olanı arasındaki yarı yoldur.

Yeni başlayan küçük bir şirketin, yarı zamanlı olarak geceleri temizlik ve derleyip toparlama işlerini yapan kişi de dâhil olmak üzere A, B, C, D, E, F şeklinde altı çalışanı vardır. Bunların geliri aşağıdaki gibidir:

A: 31.000 dolar B: 16.000 dolar

C: 85.000 dolar D: 38.000 dolar

E: 122.000 dolar F: 74.000 dolar

(a) Ortalama gelir, (b) medyan gelir nedir?

- 4 *Gelirler.* Alistırma (3)'te ortalamayla medyan farklıdır. Peki, bunun nedeni küçük bir popülasyonumuzun olması mıdır? Hayır. Mevcut olan en son rakamları kullanarak Kanada için ortalama ve medyan gelirleri veriyoruz.

Hane tipi	Ortalama gelir	Medyan gelir
Aile	57.146 dolar	50.316 dolar
Bağlı olmayan kişi	25.005	18.856
Bütün haneler	46.556	37.979

Medyanla ortalama arasındaki fark bize gelirlerin dağılımı konusunda herhangi bir şey söylüyor mu?

- 5 *Yoksulluk sınırı.* "Yoksulluk sınırının" çeşitli tanımları vardır. Amerika'da yoksulluk sınırından bahsederken insanlar genellikle *yoksulluk eşiğinden* bahsetmektedirler. Kanada'da *düşük gelir kesmelerinden* bahsederler. Kanada'da, dört kişilik bir ailenin yoksulluk sınırı 34.000 Kanada doları ya da yaklaşık olarak 23.000 Amerikan do-

larıdır ki bu dört kişilik bir aile için Amerika'daki yoksulluk eşiği olan 17.029 dolardan 6000 Amerikan doları daha fazladır.

Uluslararası karşılaştırmalar için genel "yoksulluk sınırları" (i) popülasyonun medyan gelirinin %50'si ya da (ii) ortalama gelirin %50'si kadardır. Bu iki ölçütü kullanarak bir ailenin Kanada yoksulluk sınırını hesaplayınız.

- 6 *Çabuk düzeltme.* İngiliz başbakanı bir sonraki seçimlerden önce, hükümetinin şimdi yoksulluk içinde yaşayan insanların %30'unu yoksulluk sınırının üstüne çekeceğini açıkladı. (a) Yoksulluk sınırının ortalama gelir cinsinden tanımlandığını varsayarsanız bunu yapmanın kolay yolu sizce nedir? Basit bir şekilde şimdi yoksulluk sınırının üstünde olan insanları yoksulluk sınırının altına çekmeye zorlamayın! (b) Yoksulluk sınırı medyan gelir cinsinden tanımlanmış olsaydı sizin metodunuz işe yarar mıydı?

- 7 *En olası sayılar.* En olası sayı nadiren pn 'dir, çünkü en olası sayı 5 ya da 1097 gibi bütün bir sayı, bir tam sayıdır. Fakat pn bir kesir ya da ondalık bir sayı olabilir. Örneğin $p = 0,3$ ve $n = 13$ ise, $pn = 3,9$ ki bu bütün bir sayı değildir. Bunun da ötesinde, iki eşit derecede olası sayı da olabilir.

Eşit sayıda yeşil ve kırmızı topları olan bir çekiliş kutusundan tekrar yerine koyma yaparak $p = 1/2$ olacak şekilde 5 çekiliş yapıldığını düşünün. $\text{Pr}(0)$, hiçbir yeşil topun çekilmediği olasılık; $\text{Pr}(1)$, 1 yeşil topun çekildiği olasılık anlamına gelir ve böylece devam eder.

- (a) Eşit derecede birbirinden ayırt edilebilmesi olası olan kaç yolla çekiliş kutusundan 5 top çekebiliriz?
 (b) $\text{Pr}(0)$ ve $\text{Pr}(5)$ nedir?
 (c) $\text{Pr}(1)$ ve $\text{Pr}(4)$ nedir?
 (d) $\text{Pr}(2)$ ve $\text{Pr}(3)$ nedir?
 (e) En olası sayılar hangileridir?
 (f) k_0 , olasılığı p olan n Bernoulli denemesindeki en olası yeşil top sayısını belirtsin. k_0 ifadesini

$$np - (1 - p) \leq k_0 \leq np + p.$$

olacak şekilde tam sayı ya da tam sayı çifti olarak tanımlayın.

$p = 1/2$, $n = 5$ olan örneğimizde 2 ve 3 sayılarının en olası sayılar olduğunu teyit edin.

8 *En olası sayı.* $p = 0,3$, $n = 13$ olduğunda en olası sayı nedir?

9 *Başarı.*

(a) $\Pr(S) = 0,3$ olduğu 11 Bernoulli denemesinde en olası başarı sayısı olan (S) 'yi bulun.

(b) Beklenen başarı sayısı nedir?

10 *Kıyıda yağmur.* 1843 yılından beri alınan gözlemlerin sonucu olarak Victoria, British Columbia'da, 1 Temmuzda yağmur yağma olasılığı $4/17$ olarak bulunmuştur. Önümüzdeki 50 yıl için en olası yağmurlu 1 Temmuz günü sayısını bulun.

11 *Parçacık hızlandırıcılar.* Bir fizik deneyinde belirli türde parçacıklar üzerinde araştırma yapılıyor. A deneysel koşulları altında, ortalama olarak saniyede 60 parçacık görünüyor ve $0,7$ olasılıkla her birinin hızı v 'den fazladır. Koşullar B'ye değiştirildiğinde, ortalama olarak 50 parçacık görünüyor; fakat bunlar daha hızlı olma eğilimindedirler: Hızın v 'yi geçme olasılığı $0,8$ 'dir.

(a) Sırasıyla A ve B koşulları altında, saniyede v 'den hızlı giden en olası parçacık sayısı kaçtır?

(b) Saniyedeki hızlı giden (hızı $> v$) ortalama parçacık sayısı en olası sayılardan farklı mıdır? Bu normal midir yoksa anormal midir?

(c) Hızlı giden parçacıklar üzerinde araştırma yapmak isteseydiniz, A koşulları altında mı yoksa B koşulları altında mı çalışmayı tercih ederdiniz?

GÖZDEN GEÇİRMENİZ İÇİN ANAHTAR KELİMELEER

Örneklem ortalaması

En olası sayı

Örneklem standart sapması

Bernoulli teoremi

Bernoulli denemeleri

Beklenen sayı

17. Normal Yakınsamalar

Görelî frekansların kuramsal olasılıklara yakınsadığını görmüştük. Fakat ne kadar hızlı? Ne zaman gözlemlenen bir görelî frekansı, olasılığın güvenilir bir tahmini olarak kullanmaya başlayabiliriz? Bu bölümde bazı cevaplar verilecektir. Bu cevaplar kitabın çoğunda olanlardan biraz daha tekniktir. Pratik amaçlar bakımından, bilmeniz gereken bütün her şey aşağıdaki üç kutulu **normal olguları** nasıl kullanacağınızdır.

DENEYSEL ÇAN EĞRİLERİ

On altıncı bölümde yazı-tura atma deneyinin sonuçları vardı. Grafik kabaca çan eğrisi biçimindeydi. Gözlemlenen çoğu dağılımın bu özelliği vardır.

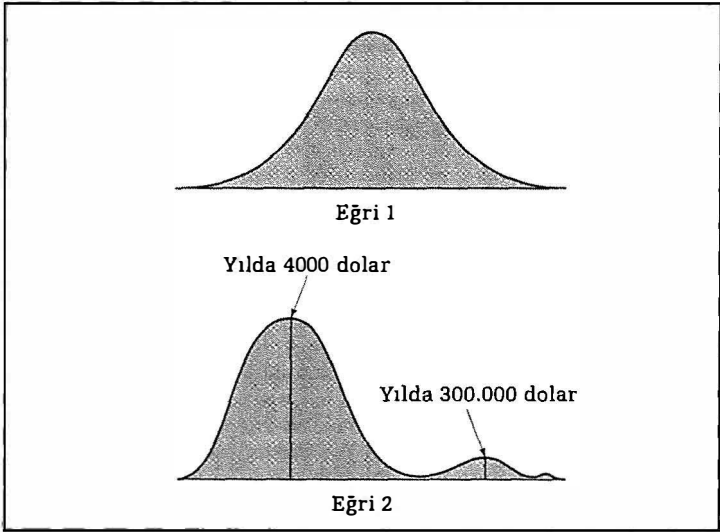
Örnek: Gelirler. Endüstrileşmiş modern ülkelerde gelir dağılımlarını, az sayıda aşırı zengin insanın grafiğın sağ kenarında olduğu halde, bir sonraki sayfadaki 1. eğriye benzer bir şey olmasını beklerdik. Fakat feodal dönemlerde hiç orta sınıf yoktu, onun için 2. eğrideki gelir dağılımını beklerdik. O "çift modludur," yani iki tepesi vardır.

Örnek: Hatalar. Hiçbir zaman tam bir kesinlikle ölçemeyiz. Aynı miktarın "kesin" ölçümlerinin her türlü dizisi bazı değişiklikler gösterecektir. Çoğu zaman sonuçların ortalamasını alırız. Bunu bir örneklem ortalaması olarak düşünebiliriz. İyi bir ölçüm cihazı, küçük bir örneklem standart sapmasıyla birlikte, ortalamanın etrafında kümelenen sonuçlar oluşturur. Kötü bir ölçüm cihazıysa büyük bir standart sapma vererek, birbirinden çok fazla değişiklik gösteren sonuçlar verir.

İDEAL BİR ÇAN EĞRİSİ

Mükemmel bir şekilde simetrik olan bir çan eğrisi ailesi için matematiksel bir formül vardır. Ama matematiğine girmeye-

ceğiz. *Normal* (çünkü insanlar onların olayların normal akışı esnasında deneysel olarak oluştuğunu düşündüler) ya da *Gaussyen* (çünkü Alman matematikçi C. F. Gauss (1777-1855) bu eğriler üzerine derin çalışmalar yürüttü) denilen bu eğrilerin sadece bazı faydalı özelliklerini belirteceğiz.



Bu ailedeki her eğri, iki sayı tarafından tanımlanmıştır. Birisine (kuramsal) ortalama denir ya da Yunancadaki μ (bir Yunan harfi, *mü* olarak telaffuz edilir) harfiyle temsil edilir. Bu, eğrinin tepesindeki değerdir.

İkinci parametre eğrinin eninin, yani kuramsal standart sapma σ 'nın (Yunanca küçük *sigma* harfi) bir ölçüsüdür.

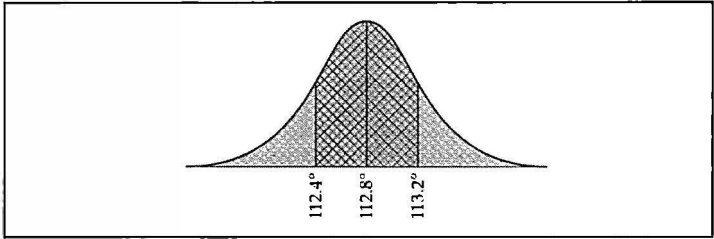
Normal bir dağılımı olan bir popülasyondan örneklem alırken, örneklemin ortalaması olan X kuramsal ortalama olan μ 'ya doğru eğilim gösterir ve örneklemin standart sapması SS , kuramsal standart sapma olan σ 'ya yakın olma eğilimi gösterir.

EĞRİNİN ANLAMI

Parayla yazı-tura atma deneyimizin grafiğinde 20 sütunumuz vardı. n sütunu 20 yazı-tura atışta n adet tura atan öğ-

rencinin sayısını temsil ediyordu. Normal dağılım süreklidir, onun için de matematiği daha zordur. Fakat anlamı oldukça basittir. Bir ya da daha fazla sütundan ziyade, bir eğrinin altındaki *alanı* düşünün.

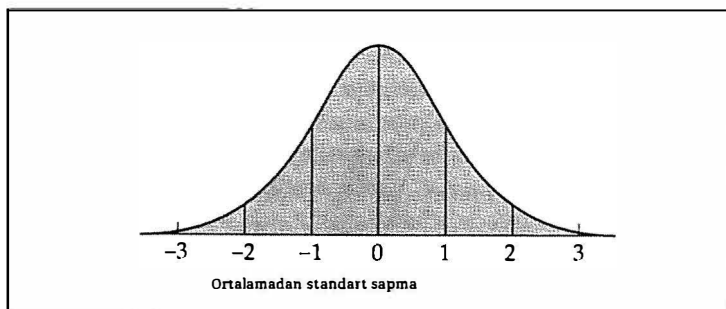
Örnek: Kükürdün kaynama noktasını ölçüyoruz; 112,8 °C'dir. İşimizi iyi yapıyorsak ölçümlerimiz bu sayı etrafında, dağılımın ortalamasının etrafında normal olarak dağılacaktır. Ölçümlerimizin kaçısı gerçek erime noktasının 0,4 °C içerisinde olacaktır? 112,4 °C ve 113,2 °C arasındaki ölçümlerin oranı eğrinin taralı alanının toplam alana oranı olarak temsil edilecektir:



UYGULAMA: NORMAL OLGU I

Bazı değişkenlerin μ ortalama ve σ standart sapmayla normal dağılımı olduğunu farz edin. Bu bir ölçümün hatası veya gelir veya boy olabilir. Bu değişkenin bir E değerini gözlemliyoruz. Sonra:

- E'nin, pn 'nin σ aralığında olma olasılığı 0,68'dir.
- E'nin, pn 'nin 2σ aralığında olma olasılığı 0,95'tir.
- E'nin, pn 'nin 3σ aralığında olma olasılığı 0,99'dur.



UYGULAMA: NORMAL OLGU II

Bernoulli, teoremini 1690'da ispat etti. Birkaç yıl sonra –ve Bernoulli sonuçlarını yayınlamadan önce– Abraham De Moivre daha da güçlü bir buluş yaptı: Normal dağılım Bernoulli denemeleri için çok iyi bir yaklaşıklık. E'nin olasılığı olan $\Pr(E)$ 'nin p 'de sabitlendiği n Bernoulli denemesinde E olayının k oluşlarını elde etme olasılığını düşünün.

$\Pr(E) = p$ iken, $b(k;n,p) = n$ denemede E olayının k oluşlarını elde etme olasılığı olsun.

Buna *binom dağılımı* denir; çünkü tura ve yazı gibi iki (*bi*) terimle (*nom*) ilgilidir. n büyükken b fonksiyonunu bulmak fena halde karmaşık bir şeydir; fakat basit bir yaklaşıklık vardır: $b(k;n,p)$ (p , 0 ya da 1 uç noktalara çok yakın olmadığı müddetçe; orada başka bir yakınlaştırmaya ihtiyacımız var) normal bir dağılıma yaklaştırılır.

Bir binom dağılımı $b(k;n,p)$, $\mu = pn$ ve $\sigma = \sqrt{((1-p)pn)}$ olan normal bir dağılıma yaklaştırılır.

NE KADAR İYİ BİR YAKINSAMA?

Az sayıdaki 10 adet yazı-tura atışı ve hatta $\Pr(\text{tura})$ 'nın diye-
lim ki 0,2 gibi oldukça küçük olduğu bir durum için bu grafik normal yakınlaştırmamanın ne kadar iyi olduğunu gösteriyor. Tura olasılığı sadece 1/5 iken, 5 ya da 6'dan fazla tura gelmesinin pek olası olmadığına dikkat edin.

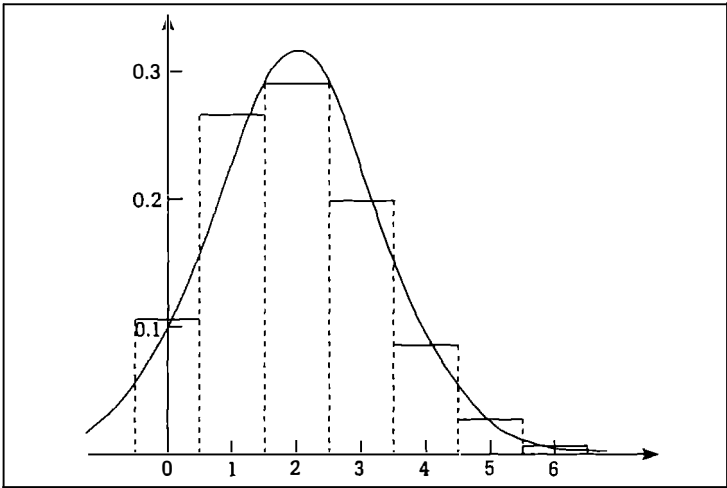
Y ekseninde çubukların boyları tam olarak k sayıda tura gelmesinin olasılığını gösteriyor.

Eğri, normal eğridir; burada

$$\mu = np = 10 \times 0,2 = 2.$$

$$\sigma = \sqrt{((1 - p)pn)) = \sqrt{((1 - 0,2)(0,2 \times 10))} = 1,6.$$

Eğrinin sütunlarla ne kadar düzenli bir şekilde eşleştiğine dikkat edin.



GÖRELİ FREKANS, OLASILIĞA NE KADAR HIZLI YAKINSAR?

Cevabı, normal olgular I ve II'yi bir araya getirerek veriyoruz. Normal olgu II bize binom dağılımının normal bir dağılım tarafından yaklaşıldığını söyler.

NORMAL OLGU III

p tura olasılığıyla Bernoulli denemelerinin dizisini ele alıyoruz. n kere yazı-tura atılmasında gelen tura sayısı k 'dır. k 'nın pn 'ye yakın olma olasılığını bilmek istiyoruz. Cevabı doğrudan normal olgular I ve II'den kaynaklanan üç özel durum için veriyoruz.

k 'nın, pn 'nin σ aralığında olma olasılığı
0,68'dir.

k 'nın, pn 'nin 2σ aralığında olma olasılığı
0,95'tir.

k 'nın, pn 'nin 3σ aralığında olma olasılığı
0,99'dur.

Örneğin k , %99 olasılıkla $pn - 3\sigma$ ile $pn + 3\sigma$ arasında bulunur.

Bu, uzun dönemde olasılıkla frekans arasındaki beşinci ve en pratik bağlantıdır.

BÜYÜK SAYILAR KANUNU

Uzun dönemde olasılıkla frekans arasındaki 5 bağlantı dizimiz en basit durum için açıklandı. Bu aynı zamanda da en bilinen durumdur; çünkü genel örnekler parayla yazı-tura atma ya da bir çekiliş kutusundan top çekmedir. Ancak evet/hayır cevabını içeren birçok pratik durum Bernoulli denemeleri üzerinden modellenmiştir. En basit yoklamalar bu şekilde modellenebilir. Anketör sorar, "siz bu yeni kürtaj yasasına taraftar mısınız?" ve cevap verenleri "evet" diyenler ve geriye kalanlar olarak sınıflar. Biz üretim bandından alınan amortisörleri "tamam" ya da "standart altı" olarak sınıflarız. Çekiliş kutusu modelleri gerçek hayattan çok fazla uzak değildir.

Bernoulli ve De Moivre'un çalışmalarından sonra daha derin, daha zekice ve daha karmaşık birçok sınırlandırıcı sonuç ispatlandı. Bu tür sonuçlara çoğu zaman *büyük sayılar kanunu* denir. Bernoulli teoreminin kendisine de çoğu zaman *büyük sayıların zayıf kanunu* denir. Daha genel ve hepsini kapsayan sonuçlara çoğu zaman *merkezi limit teoremleri* denir. Fakat ne olduğu hakkında makul bir hissiyat sahibi olmak için Bernoulli teoremi artı biraz önce belirtilen normal olgular yeterlidir.

AMPULLER

Bir ampul imalatçısı olan VisioPerfect'in uzun bir ampul üretim hattı vardır. Üretilen ampullerin %96'sının "uzun

ömrü" vardır -8000 saatten fazla aydınlatıyor- ve %4'üye daha kısa ömürlüdür. Ampuller altılı kutularda pazarlandığından dolayı en kısa üretim süresi 400 adet altılı paket ya da 2400 ampuldür.

Bu işlemten elde edilen uzun ömürlü ve kısa ömürlü ampullerin dağılımı rastgele bir dağılım gibi görünüyor, onun için onu Bernoulli denemeleriyle modelliyoruz.

2400 ampullük bir üretimde, uzun ömürlü ampullerin beklenen sayısı $0,96 \times 2400 = 2304$ 'tür.

Her ne kadar 2304 adet uzun ömürlü ampul hem en olası sayı ve hem de uzun ömürlü ampullerin en beklenen sayısı olsa da, çoğu zaman tam da bu kadar sayıda uzun ömürlü ampul elde etmeyiz. Bu sayıya yakın bir sayıya ulaşmamız ne kadar olasıdır? d miktarı:

$$\sigma = \sqrt{([p(1 - p)n])} = \sqrt{([0,96 \times 0,04 \times 2400])} = 9,6\text{'dir.}$$

Böylece 2400 adetlik ampul üretiminde uzun ömürlü ampullerin olasılığı:

2294 ile 2314 arasındadır ve 2/3'ten daha iyidir.

2284 ile 2324 arasındadır ve 0,95'ten çok daha iyidir.

2275 ile 2333 arasındadır ve 0,99'dan daha iyidir.

İlk satırda "daha iyidir" dedik; çünkü beklenen sayı etrafındaki 10 sınırları $\sigma = 9,6$ 'dan daha geniştir. İkinci satırda "çok daha iyidir" dedik; çünkü beklenen sayı etrafındaki 20 sınırları $2\sigma = 19,2$ 'den çok daha geniştir.

CANI SIKILAN MAHKÛM

Bir borsa aracısı olan James, şirketini dolandırırken yakalanıyor ve pek yapacak bir şeyi olmadan yıllarını demir parmaklıklar arkasında geçiriyor.

Görünürde adil olan bir parayla 10.000 defa yazı-tura atmaya karar veriyor. Paranın ve yazı-tura atma düzenlemelelerinin adil olduğu hipotezi temelinde

Turaların beklenen sayısı 5000'dir.

$$\sigma = \sqrt{([p(1 - p)n])} = \sqrt{([1/2 \times 1/2 \times 10.000])} = 50.$$

Böylece 10.000 defalık yazı-tura atmada gözlemlediği tura sayısının olasılığı:

4950 ile 5050 arasındadır ve yaklaşık olarak $2/3$ 'tür.

4900 ile 5100 arasındadır ve yaklaşık olarak $0,95$ 'tir.

4850 ile 5150 arasındadır ve yaklaşık olarak $0,99$ 'dur.

YARISI EN KÖTÜ SENARYODUR

Borsa aracısı parasını 10.000 defa yazı-tura attı. Bu uzun yazı-tura atmalar VisioPerfect'in 2400 ampul üretiminin dört katından da fazladır. Yine de aynı kesinlik olasılıkları için hata payları daha fazladır.

Bu da imalatçının üretim hattına nazaran borsacının yazı-tura atmasında çok daha fazla bir potansiyel değişkenliğin olduğu anlamına gelmektedir. Hatta bunu daha da net görebilmek için James'in parasını tam olarak 2400 defa yazı-tura attığını farz. Bu durumda beklenen tura sayısı 1200 olur ve:

$$\sigma = \sqrt{[p(1 - p)n]} = \sqrt{[(1/2 \times 1/2 \times 2400)]} = 24,5.$$

VisioPerfect'in 9,6'sıyla karşılaştırın. Bu da, örneğin %95'lik kesinlik olasılığıyla yazı-tura atanın hata payı yaklaşık olarak 50 iken, VisioPerfect için bunun yaklaşık olarak 20 olduğu anlamına gelmektedir.

Tersine, 10.000 adetlik ampul üretiminde uzun ömürlü ampullerin beklenen sayısı 9600'dür ve:

$$\sigma = \sqrt{[p(1 - p)n]} = \sqrt{[(0,96 \times 0,04 \times 10.000)]} = 19,6'dır.$$

James için bu 50'dir. Bu da, örneğin %99'luk kesinlik olasılığıyla, James'in hata payı 150 iken, VisioPerfect için bunun yaklaşık olarak 60 olduğu anlamına gelmektedir.

O halde, aynı kesinlik olasılığı için hapisanede parayla yazı-tura atan James'in hata payı ampul imalatçısının hata payına göre yaklaşık olarak 2,5 kat daha fazladır.

Ampullerle borsa aracısı arasındaki tek sayısal fark, olasılıktı.

Ampuller: $p = 0,96$ (uzun ömürlü ampulün olasılığı).

Parayla yazı-tura atma: $p = 0,5$ (tura gelme olasılığı).

$p = 1/2$ iken hata payı en büyüktür.

Bu beklenen bir durumdur. Hata payı $\sigma = \sqrt{[p(1 - p)n]}$ 'e bağlıdır.

Sabit n için, $p(1 - p)$ 'nin en büyük değeri $1/2 \times 1/2 = 1/4$ 'tür.

Bunu örneklerle kontrol edebilirsiniz. $p = 0,3$ ise, bu durumda $p(1 - p) = 0,21 < 0,25$ 'tir.

Alıştırma 6'da sizden $1/2$ olasılığının "en kötü senaryo" olduğunu ispatlamanız isteniliyor; şöyle ki, 0,95 ya da 0,99 gibi kesinlik olasılıklarında, $p = 1/2$ için hata payı en büyüktür.

ABRAHAM DE MOIVRE

Bernoulli denemeleri için normal yaklaştırmayı oluşturan Abraham de Moivre (1667–1754), İngiltere'ye kaçan Fransız dini mülteci ailelerinin birindendi. Geçimini yıllarca Isaac Newton'ın kendisine yönlendirdiği öğrencilere ders vererek kazandı. *The Doctrine of Chances* [*Şanslar Doktrini*] kitabı 50 yılı aşkın bir süredir olasılık kuramı konusunda İngilizce yayımlanmış ders kitaplarının en önemlisiydi. Daha sonra *aniüteler** kuramı hakkında ilk temel kitabını yazdı.

ALIŞTIRMALAR

- 1 *Çift modlu*. Çift modlu dağılımlara birkaç örnek daha veriniz.
- 2 *Normal*. Aşağıdakilerden hangisinin kabaca normal, hangisinin kabaca çift modlu ya da hiçbiri olmasını beklersiniz?
 - (a) Etnik olarak homojen erkekler grubundaki boyların dağılımı.
 - (b) Benzer bir şekilde homojen olan insan grubundaki boyların dağılımı.

* Belirli bir zaman süreci içinde eşit aralıklarla verilen ya da alınan eşit ödemeler dizisine aniüte adı verilir.

- (c) Yılda haftalık olarak kasabanızdaki yağmur dağılımı.
 (d) Jersey inekleri sürüsü içinde inek başına üretilen süt hacmi.

3 *Düşük kalite ürünler.* VisioPerfect'in üretim hattındaki ampullerin sadece dörtte üçünün uzun ömürlü olduğunu farz edin. İşlemin metindeki gibi Bernoulli denemeleriyle modellenebileceğini farz edin.

- (a) 4800'lük bir seri üretimdeki uzun ömürlü ampullerin beklenen sayısı nedir?
 (b) Bu üretimdeki uzun ömürlü ampullerin sayısının 3540 ile 3660 arasında olma olasılığı nedir?

4 *Spordan sonra duş.* Liseli erkek öğrenciler okulda spor yaptıktan sonra okulun duşlarını kullanıyorlar mı? Bir zamanlar neredeyse hepsi duş alıyordu. Fakat şimdi öyle görünüyor ki bunların sadece yaklaşık olarak yarısı duş alıyor. Sonuç mu, kötü bir koku.

Okulda spor yapan, şehirdeki liseli erkek öğrencilerden 3136'sını rastgele seçtiğimizi farz edin. Bunların yaklaşık olarak 1568'sini spordan sonra okulda duş alacaklarını bekleriz. Spordan sonra duş almayan $1568 + x$ 'ten fazla ya da $1568 - x$ 'ten az sayıda erkek öğrenci bulma ihtimalimizin sadece %1 olduğu x gibi bir sayı bulunuz.

5 *Diğer bölgeler.* Farklı bölgelerdeki duş alma gelenekleri farklılık gösterebilir. Oldukça çeşitli ve farklı bölgelerden, kırsal ve kentsel, kuzey ve güney, batı, merkez, doğu ve benzeri bölgeden 3136 öğrenci örnekleme alındığını farz edin.

Okulda spor yaptıktan sonra duş alan öğrencilerin oranının aşağıdaki şekilde olduğu bölgelerdeki 4. sorunun x 'ini bulun:

- (a) 0,3. (b) 0,7. (c) 0,1. (d) 0,9.

Her durumda x bir tam sayı olacak, öyle ki örneklemin beklenen sayıdan x 'ten daha fazla sapmasının olasılığı %1'i geçmesin.

- 6 *En kötü senaryo.* 0,95'lik bir kesinlik olasılığı için Bernoulli denemelerindeki en büyük hata payının $p = 1/2$ iken olduğunu ispat edin.

GÖZDEN GEÇİRMENİZ İÇİN ANAHTAR KELİMELE

Normal dağılım

Kuramsal ortalama

Binom dağılımı

Kuramsal standart sapma

Normal yakınsama

18. Anlamlılık ve Güç

İstatistiksel hipotezler, çoğu zaman dikkatli bir şekilde tasarlanan deneylerle toplanan verilerle karşılaştırılır. Kanıt bizi geçici olarak hipotezleri kabul ya da reddetmeye götürebilir. Kanıt iyi ya da kötü olabilir; çok ya da az ikna edici olabilir. Ne zaman önemlidir? Hipotezleri kabul ya da reddetmenin altında yatan fikirler nelerdir? Bu bölüm, her ikisi de derin bir şekilde istatistiksel pratikle sağlamlaştırılan bu iki husus hakkında temel olarak iki farklı düşünce tarzını sunmaktadır. Düşüncelerden birisi **anlamlılık testleridir**. Diğeriyse yanlış hipotezleri ayırmak için yapılan testin gücüdür.

ASTROLOJİ

Bu sınıfın dört üyesi ilk toplantıdan sonra kahve içmeye gitti. İkisinin aynı astrolojik işareti vardı (zodyaktanlar). Zodyağın 12 işareti vardır. Bu anlamlı mıdır? Toplanmak kaderleri miydi?

Mantıklı modelleri değerlendirmemiz ve bu olgunun sadece şans eseri olarak oluşmasının ne kadar olası olduğunu sormamız gerekir.

Kuramsal olasılık modeli: Her bir kişiye, her bir işaretin eşit olasılığının olduğu bir şans kurgusuyla bir işaret verilir; sanki on iki farklı kartın oluşturduğu bir desteden işaretinizi çekmiş gibi, diyelim ki as dışında bütün sineklerin olduğu bir desteden.

Asların çıkarıldığı bir deste iskambil kâğıdını düşünün, geriye her biri 4 tipten 12 farklı kart kalır (12 işaret ve 4 insana benzer bir durum). Her tipten rastgele bir kart seçersek, sayı değeri olarak birbiriyle eşleşen en az iki kart gelme olasılığı nedir?

“En az” problemleri en kolay şekilde genellikle bu soruları tersine çevirerek çözülür. Hiçbir iki kartın birbiriyle eşleşmeme olasılığı:

1 – (en az 2 (iki) kartın birbiriyle eşleşme olasılığı).

İki tiple başlayın, diyelim ki maça ve karoyla. Hiçbir şekilde birbiriyle eşleşmeme olasılığı $11/12$ 'dir, çünkü bir maçayla bir karonun aynı değerde olma şansı sadece $1/12$ 'dir. Sineğin diğer iki karttan farklı olma olasılığı $10/12$ ve kupanın da diğer üçünden farklı olma olasılığı $9/12$ 'dir. O halde dört kartın hiçbirinin birbiriyle eşleşmeme olasılığı

$$\frac{11 \times 10 \times 9}{12 \times 12 \times 12} = \frac{55}{96}$$

Böylece en az bir eşleşmenin olasılığı –yani en az iki insanın aynı işarete sahip olma olasılığı– $41/96$ ya da $4/10$ 'dan biraz daha iyidir.

Onun için sıkça rastgele dördü arasından çekilen en az iki insanın aynı burca sahip olmasını bekleriz. İçgüdüsel olarak aynı burca sahip olan iki insanın, dört kişilik bir kahve masasında bir araya gelmesinin önemli olmadığı sonucuna varırız.

DİKKATLİ ÖĞRENCİ

Üçüncü bölümde, *Dikkatli Öğrenci* bir ruletin siyahta arka arkaya 12 kere durduğunu gördü.

12 dönmeyle ilgili bu bilginin önemli olduğunu düşündü. Tekerleğin siyahtan yana hileli olabileceğini düşündü; fakat ispat ettiğini değil.

Peki, neden arka arkaya 12 siyahın önemli olduğunu düşündü? Tekerleğin adil olduğu varsayımı bakımından bunlar önemlidir.

Adil bir tekerleğin arka arkaya 12 defa siyahta durması oldukça beklenmeyen bir durumdur. Rulette hiç sıfır olmamış olsa bile siyahın olasılığı $1/2$ olur; 4096 defadaki 12 dönmede sadece bir dizi, ortalama olarak arka arkaya 12 kere siyah olur. Bunun olasılığıysa yaklaşık olarak 0,00024'tür.

Dikkatli Öğrenci şunu görebilir:

Ya tekerlek siyahtan yana hileli *ya da* tekerlek hilesiz ve normal olmayan şekilde arka arkaya siyahlar gözlemlendi.

Bu basit “*ya-ya da*” yapısı, anlamlılık testinin temelidir.

İSTATİSTİKSEL HİPOTEZLER: RULET

Kumarmazın yanılışı bölümünde, *Yanılan Kumarmaz, Sıkıcı Mantık ve Dikkatli Öğrenci* rulet tekerleği hakkında bir varsayım ile başladı. “Tekerlek adildir.”

Bu varsayımı analiz ettik: Tekerlek siyah ve kırmızı sonuçların eşit derecede olası olduğu bir şans kurgusudur ve sonuçlar da birbirinden bağımsızdır.

Bu varsayım tekerlek hakkında bir *hipotez* olarak düşünülebilir. Buna *istatistiksel hipotez* diyoruz.

İSTATİSTİKSEL HİPOTEZLER: VISIOPERFECT

On yedinci bölümdeki örneğimizde, VisioPerfect’in 2400 ampullük bir üretimi vardır. Şirketin kamuoyuna açıkladığına göre şirketin üretim sürecinde imal edilen ampullerin %96’sı uzun ömürlüdür.

Bunu uzun ömürlü ampulün olasılığının 0,96 olduğu Bernoulli denemeleri hakkındaki bir iddiayla modelledik.

Bu, VisioPerfect’in ampulleri imal ettiği süreç hakkında bir *istatistiksel hipotezdir*. Bu hipoteze *H* deyin.

Yaptığımız hesaplamaya göre *H* doğruysa bu durumda:

- 2400 adet üretimden 2275 ile 2333 arasında uzun ömürlü ampul elde etme olasılığı %99’dan fazladır.
- Tersine, 125’ten fazla *ya da* 67’den az kısa ömürlü ampul elde etme olasılığı %1’den azdır.

HİPOTEZ DOĞRU MUDUR?

İstatistiksel hipotezler frekans-tipi olasılıkları içerir. Onlar dünyanın nasıl olduğu hakkında kesin iddialardır. Kumarmazın hipotezi rulet tekerleğinin adil olduğu yönündeydi. Bu *ya* doğrudur *ya da* yanlıştır. Bunun hakkında hiçbir “frekans” yoktur.

Benzer şekilde, ampul hipotezi H frekans-tipi olasılık içerir. Ya doğrudur ya da yanlıştır.

H doğru mudur? H'nin yanlış olabileceği birçok durum vardır:

- VisioPerfect, üretim süreci hakkında yanlışmış olabilir ve bunu bilmeyebilir.
- VisioPerfect için çalışıp tanıtımı yapan insanlar bizi yanlış yönlendiriyor olabilir. Hatta yalan bile söylüyor olabilirler.
- Ya da belki de biz mantıkçılar hemen sonuç çıkarıyor olabiliriz; belki de üretim süreci basit Bernoulli deneyleri gibi davranmıyordur (süreçte bir dizi az ömürlü ampul üretilirken küçük teknik problemler olabilir).

H'nin doğru olup olmadığını sorabiliriz. Fakat frekans perspektifinden H'nin olasılığından ya da H'nin doğru olma olasılığından bahsedemeyiz.

Bunun nedeni H'nin olayların tek bir şekilde gidişatı – VisioPerfect'in ampul yaptığı süreç– hakkındaki kesin iddiasıdır. H doğrudur ya da H yanlıştır. Bunun hakkında bir “frekans” yoktur.

İKİ FREKANS-TİPİ FİKİR

Frekans-tipi istatistikçiler bize H'nin olasılığı hakkında bir şey diyemezse bazı kanıtlar ışığında, bunlar bize tümevarım çıkarımıyla ilgili olarak nasıl yardımcı olabilir? Birçok şekilde. Bunlardan ikisine vurgu yapacağız:

- Anlamlılık fikri.
- Güven fikri.

Her ne kadar insanlar çoğu zaman kötüye kullansa da, anlamlılık fikrini anlamak kolaydır. Güven fikrinin anlaşılmasıysa daha zordur. İnsanlar çoğu zaman bunu da kötüye kullanıyor. Bu bölümde, anlamlılık fikrini işleyeceğiz. Bir sonraki bölümdeyse güven fikrini işleyeceğiz.

KÖTÜ AMPULLER

Aylık *Consumers' Advocate* [Tüketicilerin Avukatı] dergisi VisioPerfect'in 2400'lük seri üretimi ampulleri –400 adet altılı paket– test ettiğini ileri sürdü. 133 adet kısa ömürlü ampul buldu.

H, %96'lık uzun ömürlü ampul olasılığıyla Bernoulli deneylerinin istatistiksel hipotezidir. Frekans perspektifinden, şu çıkarımı yapabilirsiniz:

- H hipotezi doğruysa *bu durumda* olasılığı %1'den az olan bir olay meydana gelmiştir (125'ten fazla ya da 67'den az sayıda kısa ömürlü ampul).

Bunun nedeni H'den aşağıdaki çıkarımı yapmamızdır:

- 125'ten fazla ya da 67'den az sayıda kısa ömürlü ampul elde etme olasılığı en fazla %1'dir.

Fakat şöyle bir çıkarım yapamayız:

"H'nin doğru olma olasılığı %1'den azdır."

Frekans perspektifinden, böyle bir ifadenin bir anlamı olmaz!

KOMİK PARALAR

Hapse atılan borsacı James (*bkz.* 17. bölüm) adil olduğunu düşündüğü bir parayla yazı-tura atıyordu. Parayı 2400 defa attı ve 1279'unda tura geldiğini gördü.

Elde ettiği sonuç 1200'den 79 tura fazla olarak sapma gösterdi. 2400 defa yazı-tura atışında, atışların %1'inden az bir kısmında 75 fazla ya da daha az tura geleceğini buldu.

Kendinde şunu deme hakkını buldu:

- Adil bir para olduğu hipotezi doğruysa *bu durumda* %1'den az bir olasılığı olan bir olay meydana geldi (1275'ten fazla tura ya da 1125'ten az tura).

Fakat şöyle bir çıkarım yapamaz:

"Paranın adil olma olasılığı %1'den azdır."

Frekans perspektifinden, böyle bir ifadenin bir anlamı olmaz. Ya adil bir parayla ya da adil olmayan bir parayla yazıtura atıyordur.

ANLAMLILIK

Frekans perspektifinden, H'nin olasılığından bahsedemeyiz. Aynı şekilde, *Consumers' Advocate* önemli bir olguya dikkat çekti. Çok fazla sayıda kısa ömürlü ampul vardı.

Şüphesiz, şans eseri 133 adet kısa ömürlü ampul olmuş olabilir. Bu şans eseri olmuş olabilir. Fakat H'nin yanlış olduğunu tahmin ederdik.

İşte burada istatistikçiler bir kelime haznesi geliştirdiler. *Consumers' Advocate* verisinin %1 seviyesinde anlamlı olduğunu söylüyorlar.

DENEYSEL ÇİFTLİKLER

Bazı istatistiksel metotlar ilk olarak tarımda geliştirildi. Deneysel çiftlikler yeni tohumları, yeni suni gübre, yeni böcek ve tarım ilaçları denediler.

İlk olarak, alacakları hasadı düşündüler; ya daha bol olmasından ya da haşerelere, kuraklığa, fırtınaya ya da diğer birçok şeye karşı daha dayanıklı olmasından dolayı yeni ürünün daha fazla yiyecek üretmesi gerekiyordu.

Metot yeteri kadar basitti. Yeni tohum ya da suni gübre, bazı iyi organize edilmiş deneylerde denenmişti. Günümüzde elimizde işleyecek büyük arazi parçaları olduğundan dolayı bunların bir kısmına yeni yöntemi rastgele uygularken, diğer arazi parçalarını da kontrol amacıyla boş bırakabiliriz.

Yeni suni gübrenin ya da yeni tohumun ya da yeni böcek ve tarım ilacının uygulandığı arazilere *işlenen* araziler diyoruz. *İşlenen* ve *işlenmeyen* araziler arasındaki fark küçükse, bu durumda uygulama anlamsız görünür. Fakat fark önemli bir büyüklükteyse, bu durumda uygulama mantıklı bir şey olur. Bu, çok açıktır. Soru şudur:

- Hasattaki anlamlı ve anlamsız farklar nasıl ayırt edilmeli?

DENEYSEL TASARIM

Soru, iyileştirmenin mahsulün verimi üzerinde kayda değer hiçbir etkisinin olmadığını öne süren hipotezin *test edilmesi* yönünden düşünülmüştü. "Hiç kayda değer etkisi yok" hipotezine sıfır hipotezi denir.

Soruya cevap verme prosedürü açık ve bellidir:

- Deneyin istatistiksel modelini yapın. Bazı parsellerin işlendiği bazılarının da işlenmediği bir yöntemi içerecektir; örneğin belirleme tamamen rastgele olabilir.
- İşleme çalışmasının hiçbir fark yaratmadığını ifade eden bir sıfır hipotezini bu model cinsinden net bir şekilde tanımlayın.
- İşlenmiş ve işlenmemiş parsellerden alınan mahsullerin nasıl ölçüleceğine karar verin.
- İki türdeki parselden elde edilen mahsullerin arasındaki olası farklılıkları birbirini dışlayan ve geniş kapsamlı sınıflara bölün, *küçük* ve *büyük*. Deneysel sonuçlar *büyük* sınıfına girerse, mahsulde büyük bir fark vardır.
- *Büyük* ve *küçük* öyle bir şekilde seçin ki, *modele ve sıfır hipotezine göre büyük* bir fark elde etme olasılığı düşük olsun; diyelim ki %1 olsun.
- Sezgisel olarak, *büyük* sınıfındaki bir sonucun anlamlı olduğunu düşünüyoruz.

Bir kere deneysel bir tasarım olduktan sonra, işlenmiş ve işlenmemiş parsellerden elde edilen mahsuller ölçülür ve karşılaştırılır. İki mahsul arasındaki fark *büyükse*, bu durumda bu sonuca *%1 seviyesinde önemli* denir. *%1 anlamlı* gibi başka ifadeler de kullanılır.

ÖRNEK: TARIM İLACI

Özellikle iğrenç bir böcek, arpa mahsullerine saldırıyor. Tohumu belirli bir kimyasalla kaplamanın hasarı azaltacağı öneriliyor. Onun için kontrollü bir deney tasarlanıyor. Çok kabaca bir kısmı işlenmiş, bir kısmıysa işlenmemiş bir dizi arazi parçasında arpa yetiştiriyoruz ve hasat zamanı alınan hasadı karşılaştırıyoruz. Sonra da elimizde şunlar var:

- Sıfır hipotezi. İşlemenin bir faydası olmuyor.
- Tarım ilacının mahsulü arttırdığı varsayımı.
- Veriler: İşlenmiş ve işlenmemiş parsellerin göreceli mahsulleri.
- Sıfır hipotezinin doğru olduğu farz edilerek verileri ya da hatta daha az olası verileri elde etme olasılığı.
- Bu olasılık, p olarak bulunuyor.

p olasılığına sonucun anlamlılık düzeyi denir.

ANLAMLILIK BÖLGELERİ

Hesaplarda şimdiye kadar bir şeyler eksik. Sıfır hipotezinin belirli bir paranın adil olması olduğunu farz edin. Para 12 defa atılmıştır. Elde ettiğimiz sonuçlar:

T, T, Y, T, Y, Y, Y, T, Y, Y, T, T.

6 tura ve 6 yazı: Paranın adil olduğuna dair sıfır hipotezine karşı bir kanıt yok.

Fakat tura ve yazının tam da bu şekilde bir dizisini elde etme olasılığı $1/4096$ ya da yaklaşık olarak $0,00024$ 'tür. Peki, bu sonucun anlamlı olduğunu mu gösteriyor?

Hayır. Çoğu anlamlılık testi aşağıdaki şekilde tasarlanır.

Olası veriyi, (anlamlı olana) S dediğimiz ve (anlamlı olmaya-na) N dediğimiz iki gruba ayırırız. Grupların iki özelliği vardır.

1. Sıfır hipotezi doğruysa, bu durumda herhangi tek bir test sonucunun S'ye girme olasılığı herhangi tek bir test sonucunun N'ye girme olasılığından düşüktür.
2. Sıfır hipotezi doğruysa, bu durumda S'de bir sonuç ya da başka bir sonuç elde etme olasılığı p 'dir; burada p testin anlamlılık düzeyidir.

Birinci özellik, üstü kapalı olarak 15. bölümde tanımlandığı gibi olabilirliği içerir. E'nin ışığı altında H'nin olabilirliği, H doğruysa E'yi elde etme olasılığıdır. Birinci özellik, S'deki her türlü sonucun ışığı altında sıfır hipotezinin olabilirliği, S'de olmayan her türlü sonucun ışığı altında sıfır hipotezinin olabilirliğinden azdır demektir.

TEST TASARIMI

Birinci ve ikinci özellikler çok serbestlik payı bırakır. Anlamlılık testlerini tasarlayanın birçok yolu vardır. Testleri tasarlayan insanlar tipik olarak verilerin belirli bir istatistiksel özetini, bir *istatistiği* seçerler.

Test, deneyi yapma ve istatistikle verileri özetlemeden oluşur. Deneyisel istatistik "%1'lik bölge" içinde bulunuyorsa bu durumda sonuçların %1 seviyesinde anlamlı olduğu ilan edilir.

Yukarıda (1) ve (2)'deki gibi %1'lik bölge:

1. Sıfır hipotezine göre en düşük olasılığa sahip bütün sonuçları içerir.
2. Öyle bir şekildedir ki, sıfır hipotezine göre istatistiği o bölgede elde etme olasılığı %1'dir.

Bir istatistiği nasıl seçersiniz? Anlamlılık testlerine dair doğrudan ve pratik soru budur. Önemli bir kuramsal nosyon da *yeterli istatistiktir*. Belirli bir anlamda, yeterli bir istatistik ham verilerin içindeki ilgili bütün enformasyonu taşıyan ham verilerin özetidir. Bir istatistik dersi için bu teknik bir fikirdir, ancak olabilirlik oranlarının bir enformasyon parçasının kanıtsal anlamını toplayıp özetleyen Bayesçi fikirle (bkz. 15. bölüm) bağlantılıdır. Biz burada test tasarımına dair bu tür soruları ele almıyoruz, daha ziyade anlamlılık testlerinin temel mantığıyla ilgileniyoruz.

ANLAMLILIK TESTLERİNİN TÜMEVARIM MANTIĞI

Bir anlamlılık testinin neticesi hiçbir zaman şunlar değildir:

"Sıfır hipotezinin doğru olma şansı en fazla %1'dir."

"Sıfır hipotezinin yanlış olma olasılığı 0,99'dur."

"İşlemenin mahsulü arttırma olasılığı %99'dur."

Bir anlamlılık testinin neticesi tipik olarak şudur:

Tasarlanmış bir sıfır hipotezi doğruysa bu durumda, bizimki gibi bir deneyden elde edilen verileri özetleyen belirli bir istatistiği kullanarak elde etmiş olduğumuz verileri ya da daha az olası verileri elde etme olasılığı 0,01'dir.

Bu ifadeyi çoğu zaman aşağıdaki şekilde kısaltırız:

Sıfır hipotezine göre verilerin olasılığı 0,01'dir.

Fakat yukarıda gördüğümüz gibi, gözlemlediğimiz gerçek verilerin olasılığı genellikle çok küçüktür. Düşük olasılığı olan şey, bizim gerçek verilerimizi içeren olası sonuçların belirli bir bölgesidir.

Verilerimiz ışığında sıfır hipotezinin doğruluğu hakkında ne diyebiliriz? Sadece şunu diyebiliriz:

Ya sıfır hipotezi doğrudur –bu durumda şans eseri olarak olağan olmayan bir şey olmuştur– (olasılığı %1) ya da sıfır hipotezi yanlıştır.

EVDE ÇİFTÇİLERLE

Anlamlılık testleri çiftçiler için keşfedilmiştir. Burada alınacak önemli bir ders var. Çiftçiler bitkileri, hayvanları, hava durumu, tarım ilaçları gübreleri ve arazileri hakkında çok fazla bilgiye sahipler. Fakat fizik ya da moleküler biyolojinin oluşturduğu derin kuramlarla karşılaştırıldığında tarımsal bilginin çok küçük bir kısmı "kuramsaldır." Gübre veya böcek ya da tarım ilacı yapmak için karmaşık bir kimyaya ihtiyaç duyulur. Fakat bazı koşullarda işe yarayıp yaramadığını sadece deneyle anlayabiliriz. Nihayetinde, kuramın bir faydası yoktur. Sonucu söyleyen pratiktir. Meseleyi daha kuvvetli kelimelerle ifade edecek olursak:

Anlamlılık testleri her türlü kuramsal anlamda neyin meydana geldiğini anlamadığımız durumlar içindir.

TIP

Anlamlılık testleri çok yaygın hale geldi. İlk bariz açılımı tıpta görüldü. Tıp ve çiftçilik birbirine çok benzerdir. Çeşitli ilaç ve tedavilerin neden etkili olmadığını genellikle çok iyi anlamıyoruz. Gerçekten ne olduğuna dair sadece küçücük bir kuramsal fikrimiz var. Anladığını düşünen araştırmacıların bile şüphecileri ikna etmesi gerekiyor.

Yine de deneysel olarak bazı ilaçların diğerlerinden daha etkili olduğunu söyleyebiliriz. Anlamlılık testleri yeni ilaçların ve tedavilerin test edilmesinde bize yardımcı olur. Farklı sağlık faktörlerinin ne zaman birbirleriyle *ilişkili* ya da *korelasyon içinde* olduğunu bulmamıza yardımcı olurlar.

DENEYSEL PSİKOLOJİ

Deneysel psikoloji, anlamlılık testinin kalbinin attığı yer haline geldi. Bu da bizim paradigmamıza uyar. İnsan psikolojisini derinden ve kuramsal olarak hemen hemen hiç anlamıyoruz. Bunun için de tamamen deneysel onlarca deneyler yapıyoruz. Deneyleri tasarlıyor, sonuçları alıyor ve sonra da anlamlılık düzeylerine atıfta bulunuyoruz.

Deneysel psikolojiyi yayınlayan birçok araştırma dergisi anlamlılık düzeyleri ya da diğer başkaca daha karmaşık istatistiksel göstergeler üzerinde ısrar etmektedirler. Bugün bir araştırma dergisini açıp bakarsanız, hemen sonuçların olduğu tablolar görürsünüz. Bu tabloların son sütunları iki değişkenin birbiriyle ne kadar ilişkili olduğunu gösterir.

Örneğin bir hafıza testinde, bir uyarıcıya maruz kalma süresinin uzunluğuyla onun fark edilmesinin test edilmesi arasındaki sürenin uzunluğu, uyarıcıyı fark etme yeteneğini etkileyebilir. Sonuçlar tablosunda zamanla fark etmenin ilişki derecesini gösteren sayılar sütunu olabilir. Bu sayılardan bazıları tek bir asteriks işaretiyle (*) işaretlenecektir. Diğerleriye (**) ile işaretlenecektir. Tablonun altında şunu göreceksiniz:

* $p < 0,05$.

** $p < 0,01$.

Bu da (*) olarak işaretlenen ilişkilerin 0,05 seviyesinde anlamlı olduğu ve (**) olarak işaretlenenlerinse 0,01 seviyesinde anlamlı olduğu anlamına gelmektedir.

SOSYAL BİLİMLER

Çoğu sosyal bilimde çoğu zaman aynı uygulama yaygındır. Tam da ben bu bölümü bitirirken ana akım araştırma dergilerinin çeşitli sayılarında çıkan konularla ilgili birkaç örnek:

Sosyoloji: (a) çocukluklarında aileleri ülkenin bir yanından başka bir yanına giden çocukların eğitim başarısı ve mesleki statüleriyle (b) aileleri aynı bölge ya da kasabada kalan aynı yaştaki çocukların aynı başarılarını karşılaştıran bir makale.

Ekonomik coğrafya: Yapay ekonomik anlaşmalara rağmen son 20 yılda önde gelen üç ana güç (Almanya, Japonya ve Amerika) arasında gerçek farklı ticaret bloğu oluşturma eğiliminin olmadığını tartışan bir makale.

Siyasal bilimler: Dünyada sadece dört ülkede eğitim seviyesiyle kişilerin mümkün oldukça kendi başlarının çarelerine bakmalarını tercih etmeleriyle, bütün bireylerin genel olarak refahından hükümetlerin sorumlu olması arasında önemli bir ilişki olduğunu tartışan (Sovyetler Birliğinin çöküşünün nedenleri hakkında) bir makale.

Tarih: Neden 1914'ten önce Amerika, Kanada, Avustralya, İtalya ve Arjantin gibi sermaye ithal eden ülkelerin muazzam zorluklara rağmen, -para birimlerinin külçe altınla değiştirilebilmesini temin etmek üzere- "altın standardında" kalmak için elinden gelen her şeyi yaptığını inceleyen bir makale. (Nedeni: Fransa, Almanya ve İngiltere gibi Avrupa'nın sermaye ihraç eden ülkeleri, her ne kadar yaptıklarının bir fark yaratmadığını söyleseler de, altın standardını kullanan ülkelere daha düşük faiz oranları uyguluyorlardı.)

Psikiyatri: Kişilik bölünmesi rahatsızlığını (çoklu kişilik) perdelemek için kullanılan bir anketin bu teşhise inanan psikiyatristlerin tercih ettiği diğer testlerle iyi bir şekilde korelasyon gösterdiğini tartışan bir makale.

Alıştırma olarak, bir kolej kütüphanesine gidebilir ve kaç farklı türde derginin aynı 0,01 ve 0,05 anlamlılık düzeyi alınması uygulaması yaptığını görebilirsiniz.

İSTATİSTİKSEL PAKETLER

0,01 ve 0,05'in (ya da onların bütünleyeni olan, %99 ve %95) popüler olmasının nedenlerinden biri bir tür matematiksel

kazaydı. Normal bir dağılım ya da çan eğrisi şeklinde bir eğriye yaklaştırılan ya da modellenen her türlü olgunun 17. bölümdeki normal olgumuz için kullandığımız özelliği vardır: Bazı olgular için %99 ve %95 kesinlik olasılıklarını hesaplamak genellikle kolaydır.

Cepte taşınabilen hesap makinalarının bazı hesaplamaları çok bariz hale getirmesinden çok önce bu rakamlar karşılaştırma için kolay standartlar haline gelmişti; basitçe bunun nedeni de artık hesaplamaları haftalarca yorucu bir çalışmaya gerek kalmadan hesaplayabilmenizdi. Bugün birçok analizci ne yaptığını gerçekten anlamadan bir istatistiksel yazılım paketi kullanıyor. Sadece verileri girip, bir program seçmek üzere bir düğmeye basmanız yeterli.

Sonuç olarak, bazı araştırmalar oldukça düşüncesiz görünüyor. Zihninde pek de herhangi bir kuramsal model yokken ilişkiler arar. Bu (*) ve (**) yıldızlarıyla anlamlılık düzeyini gösteren tablolar oluşturulur. Hatırlayın, (**) ifadesinin bütün anlamı şudur:

Ya sıfır hipotezi doğrudur –bu durumda şans eseri pek rastlanılmayan bir şey olmuştur– (olasılığı %1) ya da sıfır hipotezi yanlıştır.

Hatta durum, kullanımı kolay yazılım paketlerindeki daha karmaşık istatistiksel tekniklerde daha da kötüdür. Bunları kullanan insanların çoğu zaman bu paketlerin neye yaradığına dair fikirleri de yoktur.

p-DEĞERİ

Anlamlılık düzeyi için %1'lik değer tamamen rastgele seçilmiştir. Herhangi düşük bir olasılık için, diyelim 0,05 ya da 0,001 için, bir deney tasarlanabilir. Anlamlılık düzeyine çoğu zaman *p*-değeri denir. Makalelerde bazı çalışmalar rapor edilir, bazı hesaplamalar yapılır ve "*p*-değeri şöyle şöyledir" şeklinde bir sonuç çıkarılır. Bu da anlamlılık düzeyinin şöyle olduğu anlamına gelir.

Prosedür ilk tarımsal alan denemelerinden sadece birazcık farklıdır. Orada en başta, iyileştirme farklılıklarını

büyük ve *küçük* şeklinde ayırmıştık. Burada *büyük* öyle bir şekilde seçilmişti ki *büyük* sınıf içinde mahsul farklılığı elde etme olasılığı diyelim ki 0,01 idi.

Tersine aşağıdaki şekilde ilerleyebiliriz:

- x mahsulünde bir farklılık gözlemliyoruz.
- Sıfır hipotezine ve deneyin istatistiksel modeline göre en az x kadarlık bir mahsul farklılığı elde etme olasılığının ne olduğunu bulmaya çalışırız.
- Bu olasılığın q olduğunu buluruz.
- q 'dan birazcık büyük ve şöyle düzgünce en küçük sayıyı alalım; 0,1 veya 0,001 ya da 0,03 veya 0,006 ya da öyle bir şey olabilir. Bu sayıya p -değeri diyoruz.
- Deneyin sonucunu bildirir ve " p -değeri 0,00006'dır" (ya da her neyse) kelimeleriyle sonuca varırız.

YAĞ VE FASULYELER

Çoğu zaman p -değerleri farklı bulguların göreceli önemini çabucak gösterilmesinde faydalı olur. İlişkileri tespit etmek üzere sadece deneylerde değil, fakat aynı zamanda örneğin araştırmalarda da kullanılır. Sigara içmenin akciğer kanserinin oluşumunda etkin bir işlem olup olmadığının görülmesi için insanlar üzerinde deney yapmanın etik bir yolu yoktur. Fakat sigara içenlerle içmeyenlerdeki akciğer kanseri vakalarını karşılaştırabiliriz. Anlamlı olduğu görülüyor. Bu gözlem nikotin bağımlılığın tehlikeleri hakkındaki mevcut bilginin *başlangıcıydı*. Nedensel bir ilişki olduğunu göstermek için araştırmanın da ötesinde şeyler yapmak gerekti.

Sigara içen erkeklerdeki akciğer kanseri vakaları hakkında birçok çalışmadan haberdar olmuş olabilirsiniz. Şimdi tamamen başka bir şeye bakalım: Sigara içmeyen kadınlardaki akciğer kanseri vakaları. *Journal of the National Cancer Institute*'teki [*Ulusal Kanseri Enstitüsü Dergisi*] istatistiksel olarak karmaşık bir makalede Missouri'deki sigara içmeyen kadınlarda diyetle akciğer kanseri arasındaki bazı ilişkiler incelendi. Bu makalenin sadece bir yönünden bir alıntı yapacağız.

Akciğer kanseri olan Missourili kadınlar yaş, gelir, ırk, evlilik geçmişi ve benzeri faktörler bakımından rastgele seçilen Missourili kadınlarla eşleştirilmişlerdir. Bütün kadınlara (ya da ölmeye çok yaklaşanların durumunda yakın akrabalarına) bezelye ya da fasulyeleri hangi sıklıkla yedikleri gibi diyetlerindeki çeşitli faktörler hakkında sorular soruldu. O ya da bu nedenle (güvenilmez diyet bilgisi, diğer sağlık sorunları vb) kadınların çoğunu eledikten sonra akciğer kanseri olan ve sigara içmeyen 429 kadın, kontrol grubunda olan ve akciğer kanseri olmayan 1021 kadınla karşılaştırıldı. Alınan yağ arttıkça akciğer kanseri olan kadınların oranının akciğer kanseri olmayan kadınlara göre arttığı bulundu. Yenilen bezelye ve fasulye arttıkça oranlar da azaldı. Peki, bu ve diğer sonuçlar anlamlı mıydı?

Aşağıdaki alıntıda, "tek değişkenli" denmesi yazarların her vakada sadece bir değişkeni (diyelim ki, bezelye ya da fasulye yeme sıklığını) akciğer kanseri olayıyla karşılaştırması anlamına gelmektedir.

Makro-besleyiciler arasında karbonhidratlardaki kalori yüzdesi ($p = 0,09$) azalan bir riskle ilişkiliyken, günlük toplam yağ alımı ($p = 0,02$), doymuş yağ ($p = 0,004$), oleik asit ($p = 0,07$) ve yağdaki kalori yüzdesinin ($p = 0,02$) hepsi de tek değişkenli olarak artan akciğer kanseri riskiyle ilişkiliydi. Yiyecek lifinin rolünü değerlendirirken, bezelye ve fasulyelerden lif alınması ($p = 0,002$) anlamlı bir seviyede azalan riskle ilişkiliydi.

Her durumda, sıfır hipotezi tüketilen oleik asidi gibi bir faktörün akciğer kanseriyle hiçbir ilişkisinin olmadığı şeklindeydi. Verilmiş belirli bir yiyecek maddesi için test istatistiği, artan akciğer kanseri eğilimine dayalıydı. Standart bir eğilim ölçüsü kullanarak sonuçlar önceden *büyük eğilim* ve *küçük eğilim* şeklinde iki sınıfa bölünmemişti. Tersine, p -değeri her durumda (standart olarak kullanılan istatistikle ölçülen) gözlemlenen eğilimi ya da daha fazlasını elde etme olasılığının derecesini gösterir.

Biraz önce alıntılanan sayılar sizin bir bakışta hangi eğilimin en anlamlı görüldüğünü görmenize yardımcı olur; aslında alıntı yapılan son cümlede yazarlar “anlamlı bir şekilde” kelimesini bile kullanıyor.

Son sayı $-p = 0,002$ – bezelye ve fasulye yemenin akciğer kanseri riskini azaltma olasılığının (tekrar edersek!) 0,998 olduğu anlamına gelmez. Bezelye ve fasulye yemek düzenli bir şekilde düşük orandaki akciğer kanseri olayıyla ilişkili değilse, bezelye ve fasulye yiyenler arasında gözlemlenen azalan akciğer kanseri eğiliminin nadiren gözlemleneceği anlamına gelir.

NEDENLER

Peki, yüksek oranda doymuş yağlı yemekler yemek daha büyük oranda akciğer kanserine ve bezelye ve fasulye yemek daha düşük oranda akciğer kanserine mi *neden olur*?

Bu kitapta nedenselliği tartışmıyoruz. Bunun için ayrı bir ders kitabı yazmak gerekir. Fakat çok bariz bir olaya dikkatinizi çekerim. Rapor, doymuş yağların uzun yaşamaya zarar verdiğini ve lifinse uzun yaşam için iyi olduğunu öneren birçok başka çalışmayı anlatarak devam ediyor. Ama bildirilen olgular bazı daha-iyi-bilinen olgulardan farklı.

Örneğin neden doymuş yağın *kalp* problemleriyle ilişkili olabileceğini tahmin etmekle başlayabiliriz; günümüzün geleneksel tıbbına göre arterler tıkanıyor. Lifin neden *kolon* kanseri gibi sorunları azalttığını tahmin etmeye başlayabiliriz; günümüzün geleneksel tıbbına göre daha düzenli dışkı çıkarma, kolon kanserini azaltır. Fakat Tanrı aşkına lif ya da yağın *akciğer* kanserine nasıl etkisi olur?

Gözlemlenen tutarsız risk düzeninin ışığı altında şu aşamada diyet yağıyla akciğer kanseri arasında gözlemlenen ilişki için [yazarların araştırdığı literatürde] biyolojik bir mekanizma önermek spekülatif bir şey olurdu.

Anlamlılık düzeyleri daha da fazla araştırma yapmak için bize bir temel sağlar. Makale bize nedenlere bakmamız gerektiğini söyler, ama nedenlerin olup olmadığını ya da bu

nedenlerin neler olabileceğini söylemez. Belirli türdeki bir yağ molekülünün epey bir kısmının farelerde belirli türdeki kanser hücrelerini üretebileceğine dair bir parça kanıt var. Şimdiye kadar alabildiğimiz mesafe budur.

Yağla akciğer kanseri arasındaki bağlantılar için büyük bir araştırmayı başlatmaya tek başına bu çalışma yeterli olmaz. Bu türde çalışmalar başka araştırmalarla birleşirse momentum kazanır. Yazarlar şöyle yazmaktadır:

Toronto'da yapılan büyük bir vaka kontrolü çalışması hem erkeklerde hem kadınlarda ve hem de sigara içenlerle içmeyenlerde akciğer kanseri riskiyle diyet olarak tam yağ, doymuş yağ ve kolesterol alımı arasında bir ilişki olduğunu ortaya koydu.

ORTAK NEDEN

Akciğer kanser oranlarındaki değişimin nedeni yine de diyet olmayabilir. Örneğin yağın nereden geldiğine bakın ve hazır yemek zincirlerine giden çocuklar hakkında değil de yaşlı kadınlar hakkında konuştuğumuzu hatırlayın:

Bu çalışmada, doymuş diyet yağına katkı yapanların arasında hamburgerler, çizburgerler ve köfteler geliyordu.

Nüfusun göreceli olarak daha fakir bir kısmına bakıyor olabiliriz (yani köfteye, bifteğe değil). Belki de bezelye ve fasulye yiyen insanların çizburger yiyenlere göre daha iyi akciğerleri olmasına katkı yapan daha aktif hayatları vardır. Her ne kadar yüksek düzeyde çizburger tüketimi ve yüksek düzeyde akciğer kanser oranının *ortak nedenleri* olsa da (fakirlik ya da aktif olmayan bir hayat tarzı), belki de bezelye ve fasulyelerin akciğer kanseriyle hiçbir nedensel bağı yok. Belki de az miktarda meydana gelen akciğer kanseri vakasıyla bezelye ve fasulye yemek arasında (aktif, sağlığın bilincinde bir hayat) *ortak bir neden* vardır. Aslında, bu sigara içmenin akciğer kanserine neden olduğu iddiasına karşı ilk savunmaydı. Belki de, ister genetik isterse stres olsun, bazı faktörler insanların nikotini sevmesine ve akciğer kanserine yakalanmasına neden oluyor.

“Aktif hayat tarzının” ve çizburger yememenin sağlığa iyi geldiğini tahmin ederken çoğumuzun kullandığı tek şey toplumsal gözlemdir. Bunun hakkında o kadar emin olmayın. *Sleeper* [Uyuyan] adlı eski bir Woody Allen filmi vardır. Burada insanlar gelecek yüzyılın sonunda uyanır ve sağlık ocaklarında hapur hupur çizburger yer ve şurupla karıştırılmış çalkalanmış süt içerler. Bezelye ve fasulyenin sizin için iyi olduğu, yağınsa kötü olduğu şeklindeki toplumsal *gözlemimize* gülüp geçerler.

Bunun için anlamlılık testlerine ya da daha güçlü türde istatistiksel çıkarımlara ihtiyacımız var. Anlamadığımız zaman istatistiğe ihtiyaç duyarız. Bunun için aslında tarım tarafından geliştirilmiş olan teknikleri kullanırız.

Tıbbi araştırma makaleleri çoğu zaman şatafatlı kelimeler kullanırlar. *Etiyolojik* kelimesi Yunancadaki “neden” kelimesinden gelir. Doktorlar bu kelimeyi “nedensel” anlamında kullanırlar. Baktığımız makale aşağıdaki şekilde sona eriyor:

Özet olarak makalemizde sigara içmeyen yaşlı kadınlar arasındaki akciğer kanser riskiyle, artan oranda doymuş yağ tüketimi arasında kuvvetli ve artan eğilimde bir ilişki olduğu bulunmuştur... Bezelye ve fasulye tüketimiyle birlikte daha küçük koruyucu bir etki de gözlemlenmiştir. Sonuçlarımız kamu sağlığı ikazının yağ ve doymuş yağ tüketimini azaltma uyarısını desteklerken, *bu ilişkinin doğasını tamamen anlayabilmemiz için ek etiyolojik araştırmalara ihtiyacımız vardır.*

Sonuca vurgu yaptık. Belki de biraz hafife alarak ifade edilmiştir!

STANDARTLAR

Deneylerde ve diğer türdeki çalışmalarda kullanılan anlamlılık testleri çok karmaşık olabilir. Ancak mantık hemen hemen aynıdır. Ya bir hipotez yanlıştır ya da olağandışı bir şey olmuştur.

O küçük numaralar, %1 ya da *p*-değerleri ne anlatmak istiyor?

Anlatmak istenen şey deneysel ve anket araştırmalarını standardize etmektir. Deneyler ve anket araştırmaları bazı standart deneysel tasarımları, bazı standart anlamlılık testlerini kullanıyorsa ve anlamlılık düzeylerini bildiriyorsa, farklı raporları karşılaştırmak için bir yolumuz vardır.

Maalesef birçok rutin iş, özellikle de sosyal bilimlerde, şimdi deneysel bir sonucun anlamlılığını bildirme ve meseleleri o noktada bırakma eğilimindedir. Fakat anlamlılık sadece bir başlangıç olmalıdır.

"Anlamlılık" kelimesinin kendisi hakkında bir düşünün. Bir sonuç *bir şey* anlamına gelirse anlamlıdır. Fakat ne? Anlamlı bir sonuç bir başlangıçtır, bir sonuç değildir. Bezelye ve fasulye yemek akciğer kanserine yakalanma olasılığını "anlamlı" oranda azaltır. Peki, bu ne demektir Tanrı aşkına?

Bir kere bazı kanıtların anlamlılığı hakkında sabit bir şey elde ettiğimiz zaman, sadece çalışmaya ya da düşünmeye başlamışız demektir. Gerçekten bir yapay gübre, bir ilaç, bir diyetle önem veriyorsak ve bize bir anlamlılık düzeyi veriliyorsa sonucu değerlendirme ve onun hakkında bilgi sahibi olduğumuz diğer alanlardaki başka sonuçlarla öznelere arasında olarak bir şekilde karşılaştırma durumumuz olur. Fakat bir anlamlılık testini tamamen entelektüel bir olay olarak düşünmemelisiniz: "Sıfır hipotezi H'nin testinin anlamlılık düzeyi %1'dir. Onun için H yanlıştır!"

Testin amacı, örneğin bir tedavinin etkili olup olmadığını ya da bir türdeki diyetin akciğer kanseriyle ilişkili olup olmadığını görmektir. Anlamlı sonuçlar elde edersek, tedaviyi uygulamaya olan ilgimiz ya da diyetle daha detaylı bakma ilgimiz artar. Bir *p*-değeri ya da anlamlılık düzeyi testi faydalı bilgi ve tekniklerin geliştirilmesindeki adımlardan sadece birisidir.

RAKİP HİPOTEZLER

Anlamlılık testleri sıfır hipotezi testleridir. Tekrar çiftliğe dönecek olursak, sıfır hipotezi belirli bir deneysel iyileştirmenin hiçbir maddi etkisinin olmadığını belirtmektedir. Doğal olarak, rakip bir hipotez vardır: İyileştirmenin fark

edilebilir ölçüde iyi etkileri vardır. Şimdiye kadar, bunu olduğu gibi kabul ettik. Fakat anlamlılık testleri tıp ve tarımsal denemelerden psikolojiye, sosyolojiye, siyasal bilimlere ve benzerlerine genelleştirildikçe alternatif hipotezleri daha dikkatli bir şekilde belirlemek gerekli oldu. Hatta bunu iki örneğimizle birlikte görebiliriz: Mahkûm yazı-tura atarken ve VisioPerfect ampul üretirken.

Mahkûm parasıyla yazı-tura atar ve çok sayıda tura geldiğini görür. Fakat çok sayıda yazı gelseydi yine aynı derecede olası hileden şüphe edecekti. *Consumers' Advocate*'ta durum farklıdır. Editörler sadece bir yönde şüpheleniyorlar: VisioPerfect'in ampulleri yeteri kadar iyi değil. Aşağıdaki iki durumda kan, şüphe damarlarından farklı bir şekilde akıyor:

- *Para*. Sıfır hipotezi: Adil para.
- Deney: 2400 deneme.
- Anlamlılık sonucu: Çok sayıda tura veya çok sayıda yazı.
- *Ampuller*. Sıfır hipotezi: %96 uzun ömürlü ampuller.
- Deney: 2400 deneme.
- Anlamlılık sonucu: Çok sayıda kısa ömürlü ampuller.

Her ne kadar şimdiye kadar iki adet sıfır hipotezindeki anlamlılık testlerini kesin bir şekilde birbirine paralel olarak tarif etmiş olsak da, öyle olmalarının gerekmediği açık bir şekilde belli gibi görünüyor.

Para durumunda, anlamlılık bölgesi "çift kuyruklu" denilen şey olmalıdır. Anlamlılık bölgesi, sıfır hipotezine göre çok sayıda tura ve çok sayıda yazı denilen şeyleri içermelidir.

Ampul durumundaysa anlamlılık bölgesi "tek kuyruklu" denilen şey olmalıdır. Sıfır hipotezine göre sadece çok fazla sayıda kısa ömürlü ampulü içermelidir.

Her iki durumda da, sadece bütün zamanların %1'inde meydana gelen sonuçlar sınıfı içinde bir sonuç elde ettiğimiz zaman bir deneysel sonucu %1 seviyesinde anlamlı olarak alacağız. Fakat bizi ilgilendiren *rakip hipotezlere* bağlı olarak sınıfları farklı bir şekilde seçeceğiz.

Bazı araştırmacılar bunun bir vakadan diğerine doğaçlama bir şekilde ve amaca yönelik olarak yapılması gerektiğini düşünüyorlar. Gerçek hayatta, durumlar büyük oranda değişiklik arz eder ve bir anlamlılık testinin tasarımı, durumların ustaca idrak edilmesini gerektirir. Diğer incelemelerse Jerzy Neyman ve E. S. Pearson'ın eserlerinden türetilen daha sistematik bir yaklaşımı uygun görmektedirler. Bir *anlamlılık* çerçevesinin tersine, onlar istatistiksel hipotezin *kabul etme ve reddetme* çerçevesini kullanırlar.

KABUL ETME VE REDDETME

Bir araştırmacının sıfır hipotezini test ettiğini ve %1 seviyesinde anlamlı sonuçlar aldığını farz edin. Bu da ona belirli iyileştirme ya da müdahalelerin bazı etkilerinin olduğunu gösterebilir. Araştırmacının sıfır hipotezini "reddettiği" söylenebilir, fakat bu da, orijinal anlamlılık testleri çerçevesinde yanlış anlaşılabilir. Önce sıfır hipotezine inandığını ve sonra da onu reddettiğini önerir. Olayların olağan akışı bunun tam tersidir. Araştırmacı iyileştirmenin etkili olduğunu ümit ediyor; sıfır hipotezinin yanlış olduğunu ümit ediyor. Anlamlı bir sonuç cesaretlendirici olur.

Benzer şekilde test sonuçları anlamlı değilse bir araştırmacının sıfır hipotezini "kabul ettiği" söylenebilir. Fakat bu sıfır hipotezinin onun kabul ettiği inançlar kümesinin bir kısmı haline geldiği anlamına gelmez. Daha ziyade, onu tamamen unuttur!

Bütün bunların anlamlılık çerçevesinde bir anlamı vardır. Fakat şimdi yeni bir çerçeveyi ele alacağız. Frekans dogmatikleri ve inanç dogmatikleri olduğu kadar, aynı şekilde frekans perspektifinden, anlamlılık dogmatikleri ve kabul dogmatikleri vardır. Her zaman olduğu gibi bizim yaklaşımımız eklektik olandır. Her iki yaklaşımın da önemli kullanımları vardır.

NEYMAN-PEARSON ÇERÇEVESİ

Neyman ve Pearson yeni bir çerçeve oluşturdu. Hipotezleri deneysel sonuçlar ışığında seçip ayırarak sınıflandırmak

için belirli bir politikası olan bir araştırmacıyı düşündüler. Bazı hipotezler reddediliyor, bazılarıysa kabul ediliyor. Bazen bu, hipotezin değil de, kelimesi kelimesine üretilen nesnelerin reddedilmesi olabilir. Böylelikle VisioPerfect üretilen belirli bir partinin %96'ya kadar uzun ömürlü olduğu şeklindeki bir hipotezi reddetmek için kalite kontrolü kullanabilir. Bu da o üretilen partiyi reddetmek, onları meşhur VisioPerfect markası adı altında satışa sunmamak anlamına gelir.

Neyman ve Pearson aşağıdaki iki karardan biriyle biten bir analiz yöntemini ele aldılar:

- Değerlendirilen hipotezi reddet.
- Hipotezi kabul et.

Deneysel sonuçları birbirini dışlayan iki bölgeye ayıran test tasarımı yaptılar.

- R: Sonuç R'nin içindeyse H hipotezini reddet.
- K: Sonuç K'nın içindeyse H hipotezini kabul et.

İlk bakışta bu anlamlılık testine çok benziyor. Ret bölgesi bizim daha önceleri anlamlılık sonuçlarının S sınıfı dediğimiz şeydi. Fakat S, rakip hipotezlerden açıkca bahsedilmeden seçilmişti. Yeni çerçevede, ret ve kabul bölgelerini bizi ilgilendiren bütün hipotezleri kullanarak seçiyoruz.

İKİ HATA TÜRÜ

Neyman-Pearson çerçevesi içinde, iki farklı türde hata yaparız:

- ♦ 1. tip hata: Doğruyken H'yi reddet.
- ♦ 2. tip hata: Yanlışken H'yi kabul et.

Neyman ve Pearson her iki türdeki hatayı da mümkün olduğunca düşük tutacak testler tasarlamalıyız diyor.

Bu da bir dengelemeyi içerir. 1. tip hataları küçük tutmak kolaydır. Hiçbir zaman H'yi reddetme. (Ya da H'yi reddetme olasılığını yok denecek kadar düşük tut.) 2. tip hataları düşük tutmak kolaydır. H'yi hiçbir zaman kabul etme. (Ya da

H'yi kabul etme olasılığını yok denecek kadar düşük tut.)

Dengeleme işlemini basitleştirmek için, öncelikle 1. tip hatanın olasılığını uygun bir şekilde küçük tutmayı düşünebiliriz, diyelim ki 0,01 olsun.

O halde

$$\Pr(R/H) = 0,01.$$

olacak şekilde bir test tasarlayabiliriz. Şimdiye kadar, işin bu kısmı anlamlılık testlerinden pek de farklı değildi. (Neyman ve Pearson anlamlılık düzeyini testin "boyutu" olarak yeniden adlandırdı, fakat biz eski dile bağlı kalacağız.)

GÜÇ

Önemli olan bir sonraki adımdır.

1. tip hatanın olasılığının küçük olduğu verildiğinde, 2. tip hatanın olasılığını minimum seviyeye indirmek istiyoruz. Yani

$$\Pr(K/H \text{ yanlıştır})$$

ifadesini *minimum seviyeye indirmek* istiyoruz. Ya da, aynı şeyi başka türlü söylersek bir hipotezin yanlışken reddedilme olasılığını *maksimum seviyeye* çıkarmak istiyoruz:

$$\Pr(R/H \text{ yanlıştır})$$

Neyman ve Pearson buna testin gücü dediler. Gücü maksimum seviyeye çıkarmak istiyoruz dediler.

Gücün anlamlılık analizi o kadar kolay değildir. Çünkü H istatistiksel bir hipotezken bile "H yanlıştır" savı genellikle pek de doğrudan doğruya istatistiksel bir hipotez değildir.

Örneğin yazı-tura atarken James'in basit bir istatistiksel H hipotezi vardı: Para adildir. Bunun alternatifiyse hileli, bağımsız olmama ya da her ikisini içeren herhangi bir sayıda hipotezdir. Paranın adil olduğu hipotezi ya da $\Pr(\text{tura}) = 0,33$ ya da diğer herhangi belirli bir hipoteze bağlı olarak paradaki herhangi bir sonuç dizisi ya da sonuçlar kümesinin olasılığını hesaplayabiliriz. Fakat "paranın adil olmadığı"

varsayımına dayanarak bir paranın tura olasılığını hesaplayamayız.

Test edilen hipotezin *rakibi* olan hipotez sınıflarını belirtmemiz gerekir. Bazı sorularda, bilimsel bilgi seviyesinde anlamlı bir şekilde bunu yapmak imkânsız olabilir.

Burada Neyman ve Pearson'ın testleri nasıl tasarladığını göstermeyeceğiz. Her ne kadar çok az sayıda genel olarak uygulanabilir teknikler var olsa da, bu rakip hipotezler hakkında oldukça belirgin varsayımların yapılmasını gerektirir. Kesin Neyman-Pearson testlerinin tasarlanmasıyla ilgili sorunlar, zorlu sorunlardır. Önemli olan mantıksal nokta şudur:

Neyman-Pearson testleri yanlış bir hipotezin reddedilme olasılığını maksimum seviyeye çıkarmaya ve doğru bir hipotezin reddedilmesini minimum seviyeye indirmeye çalışır.

Bunu yapmanın çokça uygulanan yolu, bir taraftan yanlış bir hipotezi reddetme olasılığı olan gücü maksimum seviyeye çıkarmaya çalışırken, diğer taraftan da anlamlılık testinde olduğu gibi doğru bir hipotezi reddetmek için küçük bir olasılık seçmektir.

FAYDALAR

Her test tasarımında hep sabit bir anlamlılık düzeyi ve sabit bir güç elde etmeye çalışarak yaşamının hiçbir sebebi yoktur.

Bazen insan güç konusunda endişelenir. Bazen insan, hipotezi sadece yanlışken reddettiğinden çok emin olmak ister. Örneğin H belirli bir şizofreni ilacının, o bozukluk için kullanılan diğer ilaçların beceremediği şekilde hiçbir yan etkisinin olmadığı şeklinde bir hipotez olsun.

Bazen insan anlamlılıktan endişe eder. Bazen insan doğru bir hipotezi reddetmediğinden emin olmak ister. Örneğin H belirli bir ucuz, lezzetli ve bağıışıklık yetmezliği hastalığından muzdarip olan büyük sayılardaki Doğu Afrikalının yaşam kalitesini iyileştiren bir diyet olsun.

R. A. FISHER

Anlamlılık testi çerçevesi İngiliz istatistikçisi R. A. Fisher'ın (1890–1962) çizdiği bir çerçeveydi. Fisher uygulamalı istatistiğe diğer başka herkesten daha fazla katkı yaparak temel fikirleri oluşturdu. Yine istatistiksel genetiğe katkı yapanlar arasında, kuşağındaki en orijinal katkıları yapan ve biyometri, Mendel ve Darwin de dâhil olmak üzere evrimsel biyolojiye en büyük sentezi yapan kişidir.

Anlamlılık testleri onun çalışmalarının sadece küçük bir kısmını oluşturur. Kendisinden sonra çeşitli testlere adı verildi. Anlamlılık, olabilirlik oranları ve maksimum olabilirlik gibi merkezi kavramları ilk oluşturan odur. Tıbbi ve biyolojik araştırmada standart uygulamalar haline gelen varyansın analizini keşfetmiştir. Deney tasarımının genel kuramını yaratmış ve yeterli istatistik fikri gibi istatistiksel enformasyon kavramlarını geliştirmiştir. Şimdi artık bir iyileştirmenin etkili olup olmadığına dair yapılan deneylerin rastgele prosedürleri kullanması gerektiğini kanıksamış durumdayız. Bu Fisher'ın şaşırtıcı ölçüde sıkı bir çalışma yapmasını gerektiren bir keşifti.

Fisher her zaman istatistiksel çıkarımın *evrensel* kuramına kuvvetli bir şekilde karşı çıktı. Her ne kadar çoğu "hazır ve nazır" istatistiksel düşünceler Fisher'dan kaynaklanmış olsa da, o bu hazır ve nazır reçetelerle her zaman mücadele etti. Çok sayıda tümevarım tekniğimizin olduğunu ve hangisinin uygun olduğunu görebilmemiz için pratik durumları dikkatli bir şekilde ele alıp değerlendirmemiz gerektiğini düşündü. Kişinin elinde önsel olasılık için iyi ve bilimsel bir temel varsa, Bayesçi akıl yürütmenin yerli yerine oturacağını düşündü. Kalite kontrolü için Neyman-Pearson çerçevesinin işe yarar olduğunu, fakat tek ve önemli bilimsel niceliklerin belirlenmesinde işe yaramadığını düşündü. Hepsinden öte doğa hakkında çok iyi kuramların olmadığını, ancak anlaşılması gereken çok sayıda verinin olduğu alanlarda çalışan bilim insanları arasındaki enformasyon iletişiminde istatistiğin ve frekans-tipi olasılıkların gerekli bir araç olduğunu düşündü.

ALİŞTIRMALAR

- 1 *Doğum günleri.* Bu bölümün başında verdiğimiz astroloji örneğinde, 2 kişinin de aynı zodyak işaretine sahip olduğu 4 kişiyi ele almıştık. Bu şaşırtıcı bir şey miydi? Hayır, rastgele seçilen 4 kişiden en az 2'sinin aynı zodyak işaretine sahip olacağının sıkça beklendiğini bulmuştuk.

Şu soruyu sorarak astroloji örneğini tartışabilirsiniz: 2 kişinin aynı zodyak işaretine sahip olma şansının yaklaşık olarak yarı yarıya olması için hangi büyüklükte bir gruba ihtiyacınız vardır? Cevap, 4. O halde 4 arkadaş arasında 2 kişinin aynı zodyak işaretine sahip olması şaşırtıcı bir durum değildir.

İşte size meşhur bir örnek. 2 kişinin aynı doğum gününe sahip olması şansının yarı yarıya olması için hangi büyüklükte bir gruba ihtiyacınız vardır? Cevabı bilmiyorsanız, bunun hakkında biraz düşünün. Örneğin 4 kişilik bir grupta, 2 kişinin doğum günü aynıysa şaşırtır mısınız? 8 kişilik bir grupta? 128 kişilik bir grupta?

Doğum günü sorusunu cevaplamak için astroloji örneğinin metodunu nasıl kullanabileceğinizi tartışın. Cevabı hesaplamanız gerekmiyor.

- 2 *Hukukta istatistik.* 1980'deki bir davadan:

[Bir katsayının sıfır olduğuna dair hipotezi test ederken] %5'lik bir anlamlılık düzeyi kullanılırsa bu durumda doğru katsayının aslında sıfır olmasının şansı yirmide birden azdır.

Bu ifadede yanlış olan nedir?

- 3 *E vitamini ve kalp yetmezliği.* 1996 yılındaki bir gazete kupüründen:

Londra'da Dr. Nigel Brown'ın öncülüğünde İngiliz araştırmacılarının raporuna göre kalbi iyi çalışmayan insanlar tarafından günlük olarak alındığında on sentlik E vitamininin kalp krizlerini %75 oranında azalttığı görülmüştür. İngiliz ekibi ciddi şekilde kalp rahatsızlığı olan 2002 kişiyi alarak bunlara her gün

rastgele ya plasebolar ya da 400 ya da 800 uluslararası E vitamini birimi verdi. 17 ay sonra, 50 kişi kalp hastalığından öldü ve 55'i de ölümcül olmayan kalp krizi yaşadı. Ölümcül olmayan kalp krizlerinin 14'ü vitamin alan kişilerde, 41'iye plasebo grubunda görüldü. Kalp hastalığından ölümler iki grup arasında eşit olarak dağılmıştı.

- (a) Burada belki iki ayrı sıfır hipotezi test edildi. Bunlar neler olabilir?
- (b) Sıfır hipotezlerinden biri için veri anlamlı, diğeri içinse anlamlı değildi. Açıklayınız.
- (c) Paragrafın tamamını okuduktan sonra, giriş cümlesi yanıltıcı gibi geliyor. Neden?

4 *Vitaminler: İki test.* Bu örnekte, iki adet sıfır hipotezi test ediliyormuş gibi. Anlamlılık testlerinin kullanıldığını ve 14'e karşı 41 ölümcül olmayan kalp krizinin karşılaştırılmasının %1 düzeyinde anlamlı olduğunu farz edin. Gerçek ölümlerin karşılaştırılması %1 düzeyinde anlamlı değildi.

- (a) *Bir kere* %1'lik test yapıldığında, sıfır hipotezi doğruyken bile şans eseri anlamlı bir sonuç elde etme olasılığı nedir?
- (b) *İki kere* %1'lik test yapıldığında, her iki sıfır hipotezi de doğruyken bile şans eseri en azından bir adet anlamlı sonuç alma olasılığınız nedir?

5 *Yağ ve fasulyeler.* 18. bölümdeki örnekte, yağ tüketimiyle ilişkili eğilimler için beş farklı p -değeri verilmiştir. Bezelye ve fasulye yemeye ilişkili bir eğilim için bir p -değeri daha verilmiştir. Çok sayıda faktör incelendiğinden, inceleyenlerin 0,05'ten düşük p -değerleriyle bazı ilişkiler bulmaları zorunlu mudur?

6 *Psikoloji: 100 test.* Jerry psikoloji mezunu bir öğrencidir. 100 kadar deney yaptı. Her birinin de ayrı ayrı sıfır hipotezi var. İki vakada, %1 düzeyinde anlamlı olan sonuçlar bulundu. Diğer deneylerin sonuçları %5 düzeyinde bile anlamlı değildi. O sadece bu iki deneyi yayımladı. *Yorumlayın!*

- 7 *Bölüm işbaşında.* Jerry, her biri de tam kendisi gibi başarılı 100 lisansüstü öğrencisi olan büyük bir psikoloji bölümünde öğrencidir. Her öğrenci iki deney yayımlıyor ve her ikisi de doktorasını alıyor. Jerry'nin arkadaşı Bobby "ne muazzam bir bölüm" diyor. "Bu öğrenciler amma da çok keşif yapıyorlar!" *Yorumlayın.*
- 8 *Güç.* Aslında deneysel psikologlar, anlamlılık testi çerçevesini kullanarak, genellikle p -değerlerini yayımlarlar. Fakat bir tedavinin etkisizliği hususundaki sıfır hipotezini test etmezler. Bu pratiğin eleştirmenleri deneysel psikolojinin Neyman-Pearson çerçevesini kullanması gerektiğini söylüyorlar. Özel olarak da psikoloji dergilerinin, yazarların sadece p -değerlerini değil, fakat ayrıca kullandıkları testin gücünü de yayımlamaları gerektiği hususunda ısrarcılar. Katılıyor musunuz?
- 9 *Tekrar vitaminler.* 3. soruda H_E 'nin oldukça büyük dozda E vitamini almanın ölümcül olmayan kalp krizlerini azalttığı hipotezi olsun. Rakip hipotez K_E ise E vitamini almanın ölümcül olmayan kalp krizi olayı ya da başka bir şey üzerinde pek de bir etkisinin olmadığını belirtiyor.
- H_A büyük dozlarda A vitamini (beta-karoten) almanın her ne kadar akciğer kanserini azalttığı düşünülse de, aşırı ölçüde sigara içenlerdeki kalp krizleri üzerinde hiçbir yan etkisinin olmadığı hipotezi olsun. Bir rakip hipotez olan K_A ise A vitamini almanın aşırı derecede sigara içen kişilerdeki kalp krizi olayını arttırdığını söylüyor.
- Bu H 'nin rakipleri olan K 'ya karşı Neyman-Pearson testleri oluşturuyorsanız, aynı güçte testleri mi kullanırsınız?
- 10 *Hukuk alanından daha fazla istatistik.* Bu alıntı, olasılık ve hukuk içtihatları hakkındaki bir ders kitabından.
- Büyük örneklemelerde yaklaşık olarak 2 değerinde bir t istatistiği gerçek katsayının aslında sıfır olma şansının yirmide birden az olduğu ve de daha büyük bir katsayıyı sadece şans eseri olarak gözlemlediğimiz anlamına gelir... Yaklaşık olarak 2,5 olan bir t istatis-

tiği gerçek katsayının sıfır olma sansının sadece %1 olduğu anlamına gelir.

Burada yanlış olan nedir?

- 11 *Bayesçi hukukçular*. OK: O halde 2. ve 10. sorudaki yazarlar tümevarım mantığında iyi değiller. Fakat biraz cömert olamaz mıyız? Onlar gerçekten de Bayesçi bir şey demek istemiyorlar mı? Örneğin 10. soruyu alın. İfadenin Bayesçi formunda herhangi bir zorluk var mı?

Büyük örneklemelerde yaklaşık olarak 2 değerinde bir t istatistiği gerçek katsayının aslında sıfır olduğu şeklindeki kişisel olasılık, gerçek katsayının aslında sıfır olmasının yirmide birinden azdır... Yaklaşık olarak 2,5 olan bir t istatistiği gerçek katsayının sıfır olma kişisel olasılığının sadece 0,01 olması anlamına gelir.

- 12 *Aşırı güvenli fizik*. Hukukçulara karşı olduğumuzu düşünmeyin. Aşağıdaki ifade yakınlarda yayınlanan *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments, A How to Approach* [Nükleer ve Parçacık Fizik Deneyleri için Teknikler, Nasıl Yaklaşılmalı] başlıklı ileri seviye fizik ders kitabından alınmıştır. Güven aralıklarının pratik kullanımını açıklıyor. Deneysel fizikte bir ölçümün sonucunu kesin bir x sayısı olarak değil de σ standart sapmasıyla gösterilen bir hata payıyla birlikte bir sayı olarak göstermemiz gerektiğini ileri sürmektedir. Yazar şöyle söylemektedir:

Bir sonucu x artı ya da eksi σ olarak sunmak, aslında [ölçtüğümüz şeyin] gerçek değerinin (yaklaşık olarak) %68 ihtimalle $x - \sigma$ ile $x + \sigma$ arasında olduğunu ya da %95 ihtimalle $x - 2\sigma$ ile $x + 2\sigma$ arasında olduğunu gösterir.

Bu iddiada yanlış olan ne?

GÖZDEN GEÇİRMENİZ İÇİN ANAHTAR KELİMELEER

İstatistiksel hipotez	Kabul ve reddetme
Anlamlılık düzeyi	1. ve 2. tip hatalar
Anlamlılık testi	Güç
p -değeri	

19. Güven ve Tümevarım Davranışı

Tümevarım mantığına dair son örneğimiz bizim aslında çıkarımlar yaptığımızı reddeder. Tersine, tüme varacak şekilde davranıyoruz, öyle ki karar verme sistemimizin de genel olarak bizim için sonuçları var. İşte bu da güven aralığı kuramıdır.

ÖRNEKLEMLER VE POPÜLASYONLAR

İkinci bölümde 60 portakallık bir kutu vardı; portakallar popülasyonu. Rastgele 4 portakal seçtik; bir örneklem. 2. bölümde iki argüman biçimini ayırdık:

Popülasyon hakkında bir ifade.

O halde

Örneklem hakkında ifade.

Örneklem hakkında ifade.

O halde

Popülasyon hakkında ifade.

Bernoulli teoremi, bir çekiliş kutusundan yerine koyarak alınan örnekleme uygulandığında, çekiliş kutusunun popülasyonu hakkındaki bilgi temelinde örneklem ve örnek alma yöntemi hakkında bir açıklamada bulunur. Bu birinci türdeki argüman hakkında bir örnektir.

Şimdi diğer yöne doğru gitmek istiyoruz. Bir örneklem alıyoruz. Bir popülasyon hakkında bir sonuç çıkarmak istiyoruz. Bir anlamlılık testi bir türde akıl yürütmeyi içerir, fakat daha fazlasını içermez. Çoğu zaman bir popülasyon hakkında bir şey *tahmin etmek* için bir örneklem kullanmak isteriz. Örnekleme dayalı olan en bilinen türde tahmin kamuoyu yoklamasıdır.

KAMUOYU YOKLAMALARI

Tümevarım mantığını kullanmadan önce biraz durup araştırma örnekleme hakkında gerçekçi bir şekilde düşünmeliyiz. İhtilaflı bir araştırma konusunu ele alın.

Popülasyon: Üniversite öğrencilerinden oluşan bir popülasyona önerilen yeni kürtaj kanunu hakkında soru soruldu. Öğrencilerin cevapları aşağıdaki şekilde sınıflandı:

lehinde/aleyhinde/kararsız/bilmiyor.

Örneklem: Geri koyma yapılmaksızın bu popülasyondan 1000 öğrencilik gerçek bir örneklem alındı (hiçbir öğrenciyi aynı soru iki kere sorulmadı). Sonuç cevaplarla birlikte çok sayıda araştırma formu oldu; ayrıca anketörlerce öğrencilerin nerede okudukları, soruların ne zaman sorulduğu ve benzeri soruların sorulduğu formlar kodlandı.

İstatistiksel özet: Soruya verilen dört cevabın oranları.

Kuramsal olasılık modeli: Örneklem o şekilde uygulanmıştı ki her öğrenciyi diğer herhangi bir öğrenci gibi örnekleme dâhil etme olasılığı eşitti.

Bu araştırma hakkında iki farklı türde endişe var.

ENDİŞE 1: MODEL

Çekiliş kutularıyla bile çekilişlerin tamamen hilesiz ve birbirinden bağımsız olduğu adil bir çekiliş cihazı yapmak zordur. Fakat gerçek dünyayı düşünün!

Araştırma örnekleminin kuramsal modeli kelimenin tam anlamıyla doğru olamaz. Rastgele hareket etmek istediğimizi farz edin. Her sıralı ikiliyi yazıyoruz (üniversite, öğrenci numarası) ve bu listeden örneklem almak için bir bilgisayar rastgeleleştiricisi kullanıyoruz.

Pratik sorunlar: Bazı öğrenciler okulu bıraktı. Bazı öğrenciler iki üniversiteye birden kayıtlı. Bazı öğrencilerin dersi alan taklitçileri var. Ölmüş bazı insanlar bir yana, geçen yıl birkaç köpek, dört kedi, bir at ve bir de muhabbet kuşu kaydolmuştu.

Daha kötü sorunlar: Öğrencilerle temas kurmak zor. Ne kadar rastgele bir örneklem seçmeye gayret etsek de, araş-

tırma esnasında evde olan öğrenciler ya da derslere giren öğrenciler ya da telefonu olup cevap veren öğrenciler hastanede olan ya da kasaba dışına çıkmış olan öğrencilere göre daha çok boy göstereceklerdir.

Aslında, kuramsal olasılık modeli *yanlıştır*. Bu popülasyonun ve örneklem yönteminin kelimenin tam anlamıyla doğru bir tarifi değildir.

Kullanıyoruz, çünkü gerçekten pek de uzakta değildir. Sadece bir *modeldir*, ne bir fazla ne de bir eksik.

Modeller kesin değildir, fakat kullanışlıdır.

ENDİŞE 2: VERİLER

Öğrenciler sevdikleri TV şovları hakkındaki bir araştırmada dürüst bir şekilde cevap verebilir veya gerçekten de hiç televizyon seyretmediklerini söyleyebilirler. Fakat öğrencilerden biri gerçek bir televizyon bağımlısı ve kendini suçlu hissettiğinden dolayı hiç seyretmiyorum diyor. Bir diğeri sadece pornografi seyrediyor; fakat bunu inkâr ediyor. Bir üçüncüsü, her ne kadar kendisi gerçekten sadece opera seyretse de Oprah gibi popüler bir programı seyretmenin daha iyi olduğunu düşünerek yalan söylüyor. Diğer birisiyse sadece opera seyrettiğini söylüyor, fakat aslında sadece Oprah seyrediyor.

Bütün bu örnekler yeteri kadar kötü; fakat kürtaj gibi gerçekten ihtilaflı konuya dair bir ankette, çok sayıda öğrencinin gerçek tutumlarını saklamalarını bekleyebiliriz.

TÜMEVARIM MANTIĞI NEYLE İLGİLİ DEĞİLDİR

Her iki sorunda *model* ve *veriler* önemlidir. Fakat tümevarım mantığı, tümdengelim mantığı gibidir. Tümdengelim mantığı argümanların geçerliliğiyle ilgilidir. 1. bölümde dediğimiz gibi mantıkçılar öncüllerle sonuçlar arasındaki ilişkiler üzerinde çalışır. Mantıkçılar olarak, öncüllerin doğru olup olmadıkları konusunda yorum yapmazlar. Bu, hem tümdengelim hem de tümevarım mantığı için böyledir.

- Tümevarım mantığı argümanlar hakkındadır. Öncüllerin doğruluğu ya da yanlışlığı hakkında değildir.

- Öncüllerin sonuçlar için iyi nedenler sunup sunmaması hakkındadır.

Frekans-tipi olasılıkları kullanarak, tümevarım mantığı iki türlü öncülü ortaya koyar: Örneklem verileri ve kuramsal model. Sonra da bu öncüllerden hangi çıkarımlar yapacağımızı veya hangi kararları vereceğimizi ele alıp değerlendiririz.

Verilerin ve modelin nasıl kontrol edileceğine dair birçok derin fikir mevcuttur. Örneğin kuramsal bir olasılık modelinin kendisi istatistiksel bir hipotezdir. Modeli kontrol etmek için istatistik yöntemler kullanabiliriz. Fakat bu derste, kuramsal bir modelden ve bazı verilerden hangi sonuçları çıkaracağımız hakkında en basit sorulara bağlı kalıyoruz.

TAHMİN

En iyi bilinen tahmin türü orantılara dayalıdır. Çıkarım şöyle:

Popülasyon: Bir çekiliş kutusundaki toplar.

Örneklem: Bir çekiliş kutusundan sırayla renk bakımından yeşil ve kırmızı olarak sınıflanmış olarak 60 çekimlik bir seri.

İstatistiksel özet: Örneklemden çekilen yeşil topların oranı (diyelim ki) $18/60$ ya da $3/10$ 'dur.

Kuramsal olasılık modeli: Örneklem yeniden koyarak yapıldı, çekilişler birbirinden bağımsızdı ve herhangi bir topun çekiliş olasılığı diğer topların çekiliş şansına eşitti.

Çıkarım: O halde, popülasyondaki yeşil topların oranı yaklaşık olarak $0,3$ 'tür.

Bu popülasyondaki yeşil topların oranının bir tahminidir. Peki, bu ne kadar güvenilirdir?

GÜVENİLİRLİK

Hepimiz tahminleri ortamlar temelinde yaparız. Bu, insan psikolojisiyle ilgili bir olgu mudur? Kültürel koşullanma mıdır? Bu şekilde tahminde bulunmanın iyi kuramsal bir sebebi var mıdır?

Daha pratik bir başka soru daha var. 300 yıl önce, Jacques Bernoulli şuna benzer bir şey söyledi: "Bu şekilde akıl yürütmeyi her köylü bilir." İlginç olan soruysa, bir tahminin ne kadar güvenilir olduğudur?

Belki de herkes bilir ki örneklem büyüdükçe tahminin güvenilirliği de artar. Fakat ne kadar daha fazla güvenilir olur? Bir tahmin ne zaman güvenilir olur?

NOKTA TAHMİNLERİ

Nokta tahmini tek bir sayıyı belirten bir miktarın ya da parametrenin tahminidir.

Tahta bir kulübenin bir parçasını tamir ediyorum. İş bitirmek için ne kadar keresteye ihtiyacım olacak? 29,3 metreye ihtiyacım olacak. Keresteciye "15,2 cm enindeki çamlardan 28 ile 29,8 metre arasında" istiyorum dersem, bana "peki tamam da sen gerçekten ne kadar istiyorsun" diye soracaktır.

Benim genellikle nokta tahminlere göre hareket etmem gerekiyor.

Fakat nokta tahminler genellikle kesin bir doğruluğa sahip değildirler. Aslında, marangozluk yaparken bir *hata payı* bırakıyorum. Bir metre civarında yedek payı bırakıyorum. Geriye bir şey kalırsa, bir sonraki işte kullanılıyor ya da ateşte yakmak için odun oluyor. Peki, bu bir savurganlık değil mi? Olmayabilir; aldığım kereste biter ve biraz daha keresteye ihtiyacım olup keresteciye bir kere daha gitme ihtiyacım doğarsa bu daha büyük bir israf olabilir.

İstatistikçiler nokta tahmini yaparlar, fakat *aralık tahminleri* de yaparlar.

ARALIK TAHMİNLERİ

q ilgilendiğimiz belirli bir miktarsa –bir mango ağacındaki yaprakların sayısı, kutudaki iyi portakalların oranı– miktarın belirli bir aralıkta olduğunu belirtebilirim.

Ağaçtaki yaprak sayısı 236.000 ile 237.000 arasındadır. Kutudaki iyi portakalların oranı 0,9 ile 0,96 arasındadır. Bu çekiliş kutusundan yeşil çekme olasılığı 0,37 ile 0,43 arasındadır.

Bu tür tahminler ne kadar güvenilirdir? İnanç-tipi ya da Bayesçi analiz, ilke olarak bize çabuk bir cevap verebilir. Örnekleme verisi dikkate alındığında, q miktarının gerçek değerinin aralık içinde olduğu sonsal olasılığını buluruz.

Frekans-tipi olasılık buna imkân vermez. q ya aralığın içindedir, ya da değildir. Onun hakkında bir frekans yoktur.

Ağaçtaki yaprak sayısı 236.000 ile 237.000 arasındadır. Ya da değildir. Fakat bu ağacın bu kadar sayıda yaprağı olduğuna dair bir frekans yoktur.

Kutudaki iyi portakalların oranı 0,9 ile 0,96 arasındadır; ya da değildir. Bunun hakkında bir frekans yoktur.

Frekans-tipi olasılığın aralık tahminleri yapmak ve bu aralıkların ne kadar güvenilir olduğunu göstermek için bir yol bulması gerekir. Peki, bunu yapabilir miyiz? Şüphesiz yapabiliriz. Kamuoyu araştırmalarına aşinayız.

SİGARA İÇME

Şehir konseyi restoranlarda, barlarda ve kafelerde sigara içmeyi yasaklayıp yasaklamamayı tartışıyor. Çeşitli ihtimaller var: Tamamen yasaklanması, sadece havalandırma sistemleri olan ayrı odalarda sigara içilmesine müsaade edilmesi ya da sigara içilen ve sigara içilmeyen alanlar olarak ayrılması.

Geçen hafta açıklanan bir yoklama anketinde şehirde yaşayan ve 18 yaşın üzerinde olan insanlar üzerinde uygulanan araştırmada bu kişilerin %78'inin en azından ayrı alanları desteklediklerini ve %57'sinin de sigara içmeyi kendi havalandırmaları olan ayrı odalarla sınırlandırma taraftarı olduğunu ortaya koydu. Sadece %38'i tamamen yasaklanması taraftarıydı. Bu sonuçlar 5 Temmuz ile 9 Temmuz arasında 1026 şehir sakini üzerinde yapılan bir yoklama anketine dayandırılmıştır ve %3 puanlık bir aralıkta 20 defanın 19'unda kesin olduğu değerlendirilmiştir.

RAPOR NEYİ SÖYLEMEZ

20'de 19, %95 eder.

%57'nin civarındaki %3 puanlık bir hata payı $57 \pm \%3$ 'tür. Bir oran %57'nin %3'ü içerisinde demektir, %54 ile %60 arasındadır demektir.

Bu iki açıklamada bir sorun yok, fakat henüz iş bitmedi. Rapor şunu *söylemiyor*:

"Sigara içmeyi kendi havalandırmaları olan ayrı odalarla sınırlandırma taraftarı olan şehirdeki yetişkinlerin oranının %54 ile %60 arasında olma olasılığı %95'tir."

Frekans perspektifinden böyle bir ifadenin anlamı yoktur.

Şehirde oturan yetişkinlerden ayrı sigara odası taraftarı olanların oranı ya %54 ile %60 arasındadır ya da değildir. Bunun hakkında bir frekans yoktur.

Peki, o zaman bu rapor ne anlama gelir?

BERNOULLI DENEMELERİ

Bir çekiliş kutusu üzerinde yoklama anketlerini Bernoulli denemeleri olarak modellemek kolaydır. Yeşil bir top elde etme p sabit olasılığıyla yerine koyma yaparak bir örneklem almayı –yani bir soruya "evet" cevabı veren bir kişiyi rastgele seçmeyi– düşünüyoruz.

Yoklama anketleri yerine koyma yapmadan örneklem alır. Fakat büyük popülasyonlarda –diyelim ki tek bir sandıktaki 60 portakalda değil de, bir şehirde oturan 655.000 yetişkin kişide– yerine koyarak ve yerine koymadan yapılan örneklem alma olasılıklarının birbirleriyle oldukça aynı olduğunu gördük. Gerçek hayat örnekleme hakkında başka birçok zorluk da vardır, fakat biz burada sadece temel fikre dikkat edeceğiz.

TÜMDENGELİM

Bernoulli teoremi bize çok şey söyler. G 'ler ve G olmayanlar olarak iki gruba ayrılan herhangi bir popülasyonu alın. Popülasyon şehrin yetişkin mukimleri olabilir, G 'ler sigaranın tamamen yasaklanmasını isteyen yetişkinler olabilir ve G ol-

mayanlar da geriye kalan yetişkinler olabilir. Popülasyon bir arada yaşayan evli çiftler olabilirdi ve G 'ler de her iki çiftin de sadık olduğu çiftler olabilirdi. Ya da popülasyon çekiliş kutusundaki toplar ve G 'ler de yeşil toplar olabilirdi.

Popülasyondaki p oranı *bilindiğinde* aşağıdaki çıkarım yapılabilir:

Herhangi bir küçük hata payıyla,
popülasyondan alınan büyük bir örneklemin
 p 'ye yakın G 'lerin oranına sahip olması
yüksek bir olasılıktır (kesinlik olasılığı).

On yedinci bölümde, normal olgu 3 (bkz. 17. bölüm), kesinlik olasılığının yaklaşık olarak $2/3$, $0,95$ ve $0,99$ olduğu durumlarda bazı özel vakalar için formüller ifade etmiştik. Formüller hata payını belirleyen normal yakınsamadaki standart sapmaya, $\sigma = \sqrt{(p(1-p)n)}$ bağlıdır.

p *bilindiğinde* bunu hesaplamak için 17. bölümdeki tabloyu kullanabiliriz, örneğin:

Örnekleminizdeki G 'lerin oranının p 'nin $2\sqrt{(p(1-p)n)}/n$ içerisinde olma olasılığı –kesinlik olasılığı– $0,95$ 'tir.

Bu bir tümdengelim çıkarımıdır. Bizse tersini, bir tümevarım çıkarımını istiyoruz. n büyüklüğünde bir örneklem yapıyoruz. Örneklemdaki G 'lerin oranının s olduğunu farz edin.

s *bilindiğinde*, p hakkında bir ifade ortaya koymak istiyoruz. Frekans perspektifi bizim p hakkında bir olasılık ifadesi ortaya koymamıza müsaade etmediği zaman bunu nasıl yapabiliriz? 17. bölümden aldığımız başka bir terimi “en kötü senaryoyu” kullanırız.

EN KÖTÜ SENARYO

Kesinlik olasılığı p 'ye bağlıdır.

Fakat $-p = 1/2$ iken– en kötü senaryoyu da bulmuştuk.

Bu durumda mümkün olan en büyük hata payı $1/2\sqrt{n}$ 'dir.

Şimdi şunu biliyoruz: p 'nin herhangi bir değeri için örneğin örneklemdaki G 'lerin s oranının $2\sigma/n$ içerisinde olma kesinlik olasılığı $\%95$ 'tir.

Fakat p 'nin herhangi bir değeri için, σ 'nın mümkün olan en büyük değeri –en kötü senaryo– $1/2\sqrt{n}$ 'dir.

Böylece:

p 'nin herhangi bir değeri için örneklemdeki G 'lerin s oranının p 'nin $1/(2\sqrt{n})$ içerisinde olma olasılığı **en az $2/3$ 'tür.**

p 'nin herhangi bir değeri için örneklemdeki G 'lerin s oranının p 'nin $1/\sqrt{n}$ içerisinde olma olasılığı **en az %95'tir.**

p 'nin herhangi bir değeri için örneklemdeki G 'lerin s oranının p 'nin $3/(2\sqrt{n})$ içerisinde olma olasılığı **en az %99'dur.**

Örneğin $n = 10.000$ ise p 'nin *değerinden bağımsız olarak*, örneklemdeki G 'lerin s oranının p 'nin $1/\sqrt{10.000} = 1/100 = \%1$ 'i olma olasılığı **en az %95'tir.**

Ve örneklemdeki G 'lerin s oranının p 'nin $3/[2\sqrt{10.000}] = 3/200 = \%1,5$ olma olasılığı **en az %99'dur.**

GÜVEN FİKRİ

Şimdi popülasyondan bir örneklem alalım ve popülasyon hakkında nasıl bir çıkarım yapabileceğimize bakalım.

s , 10.000 büyüklüğündeki bir örneklem içindeki G 'lerin oranı olsun.

Bu durumda s 'nin p 'nin $\%1$ 'i içerisinde olacağı bir örneklemi elde etme olasılığı **en azından %95'tir.**

Böylelikle –*ve işte size mantıksal püf noktası*– p 'nin s 'nin $\%1$ 'i içerisinde olacağı bir örneklemi elde etme olasılığı **en azından %95'tir.**

Güven aralıklarının temeli budur.

Fakat dikkat edin! p 'nin sabit olduğunu hatırlayın ve örneklemden örnekleme değişen şey s 'dir.

10.000 kişilik bir örneklem yaptığımızı ve bunun 3000'inin ya da %30'unun G olduğunu farz edin. Yukarıdakine bakıp şöyle bir sonuç çıkarabilirsiniz:

“Popülasyondaki G 'lerin oranının, %30'un $\%1$ 'i içerisinde olma olasılığı 0,95'tir.”

"G'lerin oranının 0,29 ile 0,31 arasında olma olasılığı 0,95'tir."

Frekans perspektifinden *bu ifadeler kesinlikle yanlıştır.*

Popülasyondaki G'lerin oranı ya 0,29 ile 0,31 arasındadır ya da değildir. Bunun hakkında bir frekans yoktur.

Peki, o halde ne dememiz *gerekiyor*?

GÜVEN ARALIKLARI

0,29 ile 0,31 aralığına *güven aralığı* denir. G'lerin oranının bir *tahmini* –bir *aralık tahmini*–olarak kullanılır.

Rastgele seçilen 10.000'lik bir örneklemeye dayalı olarak bizim tahmin yapma *yöntemimiz* şöyledir:

- Rastgele 10.000 kişi seçmek.
- Bu 10.000 kişinin G olduğu s oranını belirlemek.
- Popülasyonun bütünü içindeki G'lerin p oranının ($s - 0,01$) ve ($s + 0,01$) arasında olduğunu tahmin etmek.

Tabi örneklemdeki G'lerin s oranı örneklemden örneklem değişiklik gösterecektir. Fakat bir s oranı almak için yapılacak her türlü denemenin olasılığı %95'tir; öyle ki bilinmeyen p , ($s - 0,01$) ve ($s + 0,01$) arasında olsun.

Özel olarak da, 10.000 kişilik örneklemimiz bize $s = 0,30$ vermişse, p 'nin 0,29 ile 0,31 arasında olacağını tahmin edebiliriz. Bu aralıktaki "güvenimizin" %95 olduğunu söyleyebiliriz.

Bu da tahminlerin %95'inde doğru bir tahmin veren bir prosedürle bu tahmini yaptığımız anlamına gelmektedir.

Bir güven ifadesi şu şekildedir:

Elimizdeki veriler temelinde, bilinmeyen bir miktarın bir aralık içinde bulunduğunu tahmin ediyoruz. Tahmin en azından %95 olasılıkla doğru olan bir yöntemle yapılmıştır.

Aşağıdaki şekilde bir şeyi ileri sürmek tamamen yanlıştır:

" q miktarının %95'lik aralık tahmini I 'dir. O halde q 'nın I aralığında olma olasılığı 0,95'tir."

KESİN ARALIKLAR

Amacımız güven aralıklarının mantığını açıklamaktır. Dolayısıyla da kolay sayıları kullanıyoruz. 17. bölümdeki tablomuz %99'luk güven aralığının nasıl elde edileceğini anlatıyor. G 'lerin oranının %30 olduğu 10.000'lik bir örneklem için %99'luk bir güven aralığının $3/(2\sqrt{n})$ 'yi geçmeyen bir hata payı olacaktır. Böylelikle de p 'nin 0,285 ile 0,315 arasında olduğunu tahmin edebiliriz. Bu aralıktaki "güvenimizin" %99 olduğunu söyleyebiliriz.

Bu da tahminlerin en az %99'unda doğru tahmini veren bir prosedürle tahmin yaptığımız anlamına gelir.

Fakat tablomuz %95 ya da %99 (veya 2/3) dışındaki bir güven seviyesiyle nasıl bir hesaplama yapacağımızı anlatmıyor. Bunun da ötesinde, "en kötü senaryoyu" kullanmamız aralıklarımızın çok etkili olmayabileceği anlamına gelir. Bir matematikçi, aralıklarımızla hiç de tatmin olmazdı. Bir istatistikçi, kısmen zarafetinden, kısmen de genellikle daha bilgi verici olmaları nedeniyle *kesin güven aralıklarını* severler. İşte size kısa bir açıklama.

Bir q niceliğini (bir orantı ya da lise basketbol yıldızlarının ortalama boyu ya da Kansas'taki ortalama aile geliri gibi) tahmin ettiğimizi farz edin. q niceliği için bir veri toplamak ve bir I aralık tahmini yapmak için bazı yöntemlerimiz var. Şimdi tahmin yapma yöntemimizin şu büyük özelliğinin olduğunu farz edin: q değerinden bağımsız olarak, q 'yu içeren bir I aralığına götüren bir veri elde etme olasılığı *tamü tamına* %95'tir (%95'e eşit ya da ondan büyük değil). Bu durumda I , *kesin güven aralığıdır*. Bu kitapta anlamaya çalıştığımız güven aralıklarının tersine, gerçek hayatta belirtildiğini gördüğünüz çoğu güven aralıkları kesin güven aralıkları olacaklardır. Fakat her durumda, bir güven ifadesinin mantığı tam da yukarıdaki kutuda açıklandığı gibidir.

DAHA ÇOK SİGARA İÇME

Kamu yerlerinde sigara içilmesi hakkındaki kamuoyu yoklamamızı hatırlayın:

Geçen hafta açıklanan bir yoklama anketinde şehirde yaşayan ve 18 yaşın üzerinde olan insanlar üzerinde uygulanan araştırmada bu kişilerin %78'inin en azından ayrı alanları desteklediklerini.... ortaya koydu. Bu sonuçlar 5 Temmuz ile 9 Temmuz arasında 1026 şehir sakini üzerinde yapılan bir yoklama anketine dayandırılmıştır ve %3 puanlık bir aralıkta 20 defanın 19'unda kesin olduğu sonucuna varılmıştır.

"20'de 19" sadece güven aralıklarını belirten standart bir olasılıktır; 0,95.

"%3 puana kadar kesinlik" bir hata payı ifadesidir.

Alıntı şu anlama gelir:

Ayrılmış sigara içme alanlarını destekleyen şehir sakinleri için (kamuoyu yoklaması verisine dayalı) %95'lik güven aralığı (0,75, 0,81)'dir.

Bu da şu anlama gelir:

Verilerimiz temelinde, şehirde yerleşik kişilerden ayrılmış alanlarda sigara içilmesini desteklediği bilinmeyenlerin oranının 0,75 ile 0,81 arasında olduğunu tahmin ediyoruz. Bu tahmin en az 0,95 olasılıkla doğru olan bir yöntemle göre yapılmıştır.

%3'LÜK ÇÖZÜM

Sigara içmeyle ilgili kamuoyu yoklaması raporundaki "%3 puan" nereden geliyor?

Biraz önce açıklanan kurama göre %95'lik güven aralığı $1/\sqrt{n} = 1/\sqrt{1026} = 0,031 \approx \%3$.

İşte %3 buradan geliyor.

Şüphesiz, kamuoyu yoklamasını yapanlar örneklemi yapıp sonra da hata payını bulmadılar. %95'lik kesinlik olasılığı ve %3'lük hata payı olan bir kamuoyu yoklaması tasarladılar.

DAHA FAZLA GÜVEN, DAHA FAZLA HATA

Aynı kamuoyu yoklaması %99'luk güven aralıkları türetmemizi sağlarlar. %99'luk bir olasılıkla, hata payı şu aralık içerisinde:

$$3/(2\sqrt{n}) = 0,047 < 0,05.$$

Böylece aynı veriyle ve aynı mantıkla kamuoyu yoklamasını yapanlar şöyle diyebilirlerdi.

5 Temmuz ile 9 Temmuz arasında şehirde yerleşik 1026 kişi üzerinde yapılan bir kamuoyu yoklaması temelinde bu sonuçların %5 puanlık bir kesinlik içerisinde 100 defanın 99'unda doğru olduğu değerlendirilmesi yapılmıştır.

HER ZAMAN DÜZGÜN DEĞİL: DAHA FAZLA YAĞ

Kamuoyu yoklama örnekleri %79'un her iki yönünde de %3 gibi oldukça dar aralıkları elde etmeye çalışıyorlar. Fakat güven aralıkları çok çeşitli uygulamalarda kullanılırlar. Çoğu zaman sadece bir tahminin güvenilirliğinin bir göstergesi olarak kullanılırlar.

On sekizinci bölümdeki *Journal of the National Cancer Institute*'te [*Ulusal Kanser Enstitüsü Dergisi*] yayınlanan yağ, fasulyeler ve akciğer kanseri hakkındaki makaleyi hatırlayın. Sadece "tek değişkenli" ilişkilennmeleri, örneğin doymuş yağ tüketiminin akciğer kanser oranlarıyla karşılaştırılmasını bildirdik. İncelemeyi yapanlar doymuş yağın ve doymuş yağla ilişkili olan diğer bütün değişkenlerin etkisinin tahmin edilmesini de istediler. Bu oldukça beceri isteyen bir durum, fakat bunu yapmanın standart yolları var. Elde ettikleri sonuç şuydu:

Çok miktarda doymuş yağ (ve diğer ilişkili maddeler) yiyen kadınlar sınıfının çok az doymuş yağ yiyen Missouri kadınları sınıfıyla karşılaştırılması:

Bir gruptaki akciğer kanseri vakası diğer gruptaki vakaların 6,14 katıydı.

Ancak bu çok sayıda değişkenin birleştirilmesi ve çeşitli istatistiksel yan etkileri hesaba katma temelinde yapılmış bir tahmindir. Güven aralığı için CI yazarak, araştırmacılar bu tahmin için böylece bir güven aralığı ifade etmişlerdir:

$$\%95 \text{ CI} = (2,63, 14,40).$$

Bu hesaplamanın ne kadar değerli olduğuna dikkat ediniz.

Şu şekilde okumak oldukça ürkütücü bir durumdur:

Sigara içmeyen kadınlardaki yüksek oranda yağ tüketimiyle ilişkili olan akciğer kanseri riski çok az oranda yağ tüketiminin getirdiği riskten altı kat daha fazladır.

Çizburgerleri çok seven sigara içmeyen iyimser kadınlar aşağıdaki hususu okuduklarında daha az ürkebilirler:

Yüksek oranda yağ tüketimiyle ilişkilendirilmiş olan akciğer kanseri riski, çok düşük oranda yağ tüketimi riskinden 2,6 kat daha fazla olmak gibi düşük bir oranda olabilir. Ayrıca 14,4 defa daha yüksek de olabilir.

BU İFADELER NE ANLAMA GELİR

Sigara içme çalışmasında 1026 kişiden oluşan şehirde yaşayan yetişkinler örnekleminde kamuoyu yoklaması yapanlar sigara içmenin tamamen yasaklanmasını destekleyenlerin %38 olduğunu buldular. Bu bilgi temelinde aşağıdakini söyleme imkânları doğmuştur:

Tamamen sigara yasağı konmasını destekleyen şehirde yerleşik yaşayanların oranının %38 $\pm$ %3 aralığında olduğunu tahmin ediyoruz.

Tahminimiz 20 defanın 19'unda (kuramsal popülasyon modelini ve örneklem yönteminin özelliklerini varsaydığımızda) doğru aralık tahminini veren bir yöntemle göre yapılmıştır.

Benzer bir şekilde, diyet üzerinde çalışmalar yapan araştırmacıların aşağıdakini söyleme imkânı doğmuştur:

Yüksek oranda yağ tüketen sigara içmeyen kadınların akciğer kanseri riskinin, çok düşük oranda yağ tüketen sigara içmeyen kadınlarındaki riskten 2,63 ile 14,4 kat arasında daha fazla olduğunu tahmin ediyoruz.

Tahminimiz 20 defanın 19'unda (kuramsal popülasyon modelini ve örneklem yönteminin özelliklerini varsaydığımızda) doğru aralık tahminini veren bir yöntemle göre yapılmıştır.

İDEALLEŞTİRİLMİŞ RESİM

Bu önermelerin ikinci kısmı, kamuoyu yoklamaları için bile tamamen idealize edilmiştir.

Şehirde yerleşik olarak yaşayan yetişkinlerden tekrar tekrar örneklem alacak olsaydık, insanlar düşüncelerini değiştirmeye başlardı. Her biri yaklaşık olarak 1000 kişiden oluşan 10.000 örneklem yapsaydık, birçok kişiyi birçok kez örnekleme dâhil etmiş olurduk. Cevap vermemeye başlardı, çünkü endişelenmeye başlardı. Çok büyük süper örneklem alınıyor diye bir söylenti çıkar ve bazı insanlar da işi, kandırmaya kadar vardırırlardı. (Ben öyle yapardım.)

Hiç kimsenin güven aralıklarının gerekçesini gerçekten olduğu gibi ciddiye almamasında bir anlam vardır. Onu bir argümanın temelinde yatan yapının mantıksal resmi olarak düşünmeniz gerekir.

KATMANLI ÖRNEKLEME

Kamuoyu yoklaması yapanların bir popülasyonun rastgele örneklemesinden daha karmaşık yöntemleri vardır. En aşına olunan kamuoyu yoklamaları politik kamuoyu yoklamalarıdır. Yaklaşık olarak 1000 kişiye soru sorularak bir ülkenin bütün oy veren nüfusu hakkında nasıl bir şeyler söylenebilir?

Temsili bir örneklem istiyoruz, fakat sadece gelişigüzel 1000 kişiyi örneklem olarak alırsak, muhtemelen nüfusun önemli bir katmanını göz ardı etmiş oluruz. Tek bir mavi yakalı sendika işçisini örnekleme dâhil etmemiş olabiliriz. Tek bir oy verme yaşındaki üniversite öğrencisini örnekleme

dâhil etmemiş olabiliriz. Herhangi zengin bir insanı örnekleme dâhil etmemiş olabiliriz. Koyu dindar insanların tamamını göz ardı etmiş olabiliriz; gerçek ateistleri göz ardı etmiş olabiliriz; boşanmış bütün ebeveynleri göz ardı etmiş olabiliriz ya da 35 yıldır evli olup da hâlâ iyi bir evliliği olan bütün eşleri göz ardı etmiş olabiliriz.

O halde kamuoyu yoklaması yapanlar *katmanlı* örneklemeler kullanırlar. Yaptıkları kamuoyu yoklamaları daha önce yapılmış arka planda çok sayıda bulunan kamuoyu yoklamaları üzerinde inşa edilir. Çeşitli alt popülasyonların birçok konudaki fikirlerinin ve deodorantlar ya da televizyon şovları beğenilerinin oldukça homojen olduğunu bilirler. Bu türdeki her alt popülasyon, popülasyon içindeki birçok katmandan birisi olarak düşünülür. Kamuoyu yoklaması ilk olarak rastgele katmanı seçecek şekilde tasarlanır (farklı katmanların farklı büyüklüklerine de gereken payı bırakır). Daha sonra da rastgele seçilmiş olan bu katmanlardan rastgele insanları seçer.

Oldukça karmaşık görünüyor. Amerika'da ticari kamuoyu yoklamalarının birçoğu, Beverly Hills 90210 gibi sadece posta kodlarını kullanırlar. Her ne kadar 90210'daki insanlar kadar oldukça yeknesak değilseler de, Amerikalıların muazzam çeşitliliği göz önüne alındığında, herhangi bir posta kodundaki insanlar gelir, ırk, davranışlar, beğenileri bakımından oldukça birbirlerine benzeme eğilimindedirler. Amerika'daki tüm posta kodlarının her birinden bir insan çiftini rastgele seçerseniz pek de kötü bir temsili örneklem seçmemiş olursunuz. Fakat sadece üstün kaliteli ticari ürünler satıyorsanız, zengin tüketicilerin ürününüzü nasıl karşılayacağını anlamak için sadece müreffeh insanların oturduğu yerlerin posta kodunun örneklemini alacaksınız.

Doğal olarak, katmanlı örneklemin matematiği, basit rastgele örneklemeden daha karmaşıktır. Fakat elde edilen güven ifadelerinin *anlamı* her zaman aynıdır:

Bir parametrenin belirli bir aralıkta bulunduğunu tahmin ediyoruz. Kuramsal popülasyon modelimiz doğruysa

bu durumda bu tahmin prosedürü çoğu zaman doğru bir aralık verir.

TEKNİK DETAYLAR

Biz burada sadece güven aralığı tahminin gerekçesiyle ilgilendik. Matematikçilerin çözmesi gereken birçok teknik sorun var. Örneğin tarif ettiğimiz şekildeki güven aralığı tahmin edicileri tek değildir. Yani, aynı veriler için %95 güven aralığı veren çeşitli prosedürler oluşturabiliriz; yine de aralıkların aynı olması gerekmez.

Bunun Neyman'a zorluk çıkarması gerekmiyor. Çeşitli prosedürler %95 güven aralığını veriyorsa istediğinizi seçin. Daha çok bilgi verdiği için ya da başka nedenlerle bunlardan birini diğerlerine tercih edebilirsiniz. Fakat bir prosedürde karar kılınca artık olayların %95'inde doğru olursunuz (kuramsal modelinizin doğru olduğunu farz edersek). Ancak çeşitli ihtimaller varken "en iyi" güven aralığının nasıl bulunacağına dair azımsanamayacak miktarda literatür vardır. İdeal olanıysa en dar aralığı veren "kesin" tahmin edicidir.

GÜVEN ARALIKLARI VE NEYMAN-PEARSON TESTLERİ

Neyman'ın güven aralığı kuramıyla Neyman-Pearson'ın istatistiksel hipotezi test etme çerçevesi arasında yakın bir bağlantı vardır. Neyman ilk olarak 18. bölümde tarif edilen test etme kuramının ortak keşfedenlerinden biriydi ve sonra da bu güven aralığı fikrini geliştirdi. İşte size bir bağlantı.

Farz edin ki bir bilim insanı belirli bir böcek ilacının domates mahsulünden elde edilen hasat üzerinde hiçbir etkisinin olmadığı şeklindeki sıfır hipotezini test ediyor olsun. Domates arazilerinin çoğu işlenmiş ve tarlaların yarısına rastgele böcek ilacı yapılmıştır. Sıfır hipotezi arsa başına düşen ortalama mahsuller arasındaki farkın 0 olduğuna işaret etmektedir. Fakat farklılık olumlu (işlenen arazilerden daha fazla kiloda domates alınması) ya da olumsuz (işlenen arazilerden daha az kiloda domates alınması) olabilir.

Domates hasadı alınıyor. Mahsuller değerlendirilmeye tabi tutuluyor. İstatistiksel bir test kullanmak yerine bilim insanları, diyelim ki, %95'lik bir güven aralığını kullanabilir. 0 güven aralığı içerisindeyse bu durumda böcek ilacının etkili olduğunu düşünmemizi gerektirecek hiçbir nedenin olmadığı sonucuna varabiliriz. Hiçbir etkinin olmadığını belirten sıfır hipotezini reddetmeyiz.

Deneyssel durumların birçok ortak modelinde güven aralığına dair buna benzer mantık yürütmeler Neyman-Pearson çerçevesi kullanılarak yapılan test etmeye eşdeğerdir. Birçok araştırmacı güven aralığı yaklaşımını kullanmayı tercih eder, çünkü güç fikriyle insanların kafalarının karıştığını ortaya çıkarmışlardır. Fakat güven aralığı tahmin edicilerinin tek olmadıklarını da hatırlayın. Çoğu zaman bir güven aralığı tahmin edicisi seçimi, en güçlü testin seçimine eşdeğerdir.

ÇOCUK ÖLÜMLERİ KONUSUNDA KAVGAYA TUTUŞAN ARAŞTIRMACILAR

Tümevarım mantığının sizin için fazlasıyla soyut ve dağınık bir şey haline geldiğini düşünebilirsiniz! Tümevarım mantığı önemlidir. Biraz önce bir gazete başlığı alıntısı yaptık, "Kavgaya Tutuşan Araştırmacılar." Hikâye şöyle başlıyor:

Nükleer santrallerimizin etrafındaki çocuklardan lösemi nedeniyle ölenlerin sayısı aşırı sayıda mı?

Bir sıfır hipotezi şu şekilde olurdu: Çocuğun bir nükleer istasyonun yakınında büyüüp büyümemesi onun lösemiye yakalanma riskini etkilemez.

Cevap kimin istatistiğe baktığına bağlı olarak değişir. Aynı veriler temelinde bir hükümet kuruluşuyla bir çevre araştırma grubu birbiriyle çelişen çalışmalar yayımladılar.

Federal nükleer gözlemci olan Atom Enerjisi Kontrol Kurulu (AEKK) fabrikaların yanında çocukların lösemi-den ölme olaylarının beklenenden yüksek olduğunu ortaya çıkardı, fakat şans eseri böyle bir sonucun ortaya çıkmış olabileceğini de söyledi.

Bir çevre araştırma grubu olan Enerji Sondası hükümetin tutumu için saçmalık diyor.

Hikâye birçok öfke ve kızgınlığı alıntılarla devam ediyor. Atom Enerjisinden bir adam Enerji Sondasındaki adama, "mankafanın teki" diyor. Mesele neydi?

Enerji Sondası 0,0001'lik bir p değerini alarak basit bir katmanlı test kullanıyordu. Bunun tersine,

AEKK, Pickering jeneratör istasyonunun yanındaki lösemi ölümlerinin bölge ortalamasının %34 üstünde olduğunu, Douglas Point bölgesinin yakınındaysa %173 daha fazla olduğunu buldu. Oranların muhtemelen bilim insanlarının hastalığın oluşumunda doğal değişimlerin olduğunu bulmaları nedeniyle ortaya çıktığı sonucuna vardılar.

İstatistik diliyle konuşursak, sonuçlar bir araştırmanın herhangi bir büyük örnekleme 20 vakanın 19'unda bulmayı beklediği şekilde normal bir yelpaze içerisindeydi ve böylece muhtemelen de şans eseri idi.

Enerji Sondası anlamlılık testleri kullanıyor. Bu "20'de 19" bize Atom Enerjisinin güven aralığını kullandığını söylüyor. Argüman aynı bir önceki kısımdaki gibidir. Aslında, Atom Enerjisi "hiçbir etki yok" ifadesini söyleyen miktarın %95'lik bir güven aralığı içinde olduğunu gösteriyor. AEKK istatistikçisinin şöyle söylediği alıntılanıyor,

"Güven aralıkları bize Enerji Sondası tarafından alıntılanan p değerlerinde bulunmayan faydalı bilgiler veriyor."

Argümanı farklı bir şekilde ifade edebiliriz. Enerji Sondasının anlamlılık testi, gücü göz ardı ediyor.

Bu karşı karşıya geliş hikâyesinin sadece başı. Bu yol, bu tip sorunların nasıl çözümleneceğini söylemiyor. İki grubun verileri ne şekilde kullandığını anlamamız için daha fazla analiz yapmamız gerekir. Ancak, deneysel bir kural olarak en güçlü testi ya da güven aralığını kullanan kişi *genellikle* sadece basit bir anlamlılık testini kullanan birine göre verilerin daha derin analizini yapıyordu.

Çocukların lösemiden ölmesini –ya da kelimenin tam anlamıyla *binlerce* başka acil ve belki de korkunç sorunları– önemseyen herkes, tümevarım mantığının kavramsal temelleri hakkında net olmalıdır.

ÇIKARIMA KARŞI

Şimdi daha soyut bir konuya geçiyoruz.

Bildiğimiz gibi güven aralığı yöntemi Jerzy Neyman sayesindedir. O bir frekans dogmatığıydı. Ona göre tek bir olasılık türü vardı: Frekans-tipi.

Hatta daha da ileri giderek şöyle dedi: *Tümevarım çıkarımı diye bir şey yoktur.* Bununla demek istediği şeydu: Belirli herhangi bir olgu ya da bilinmeyen bir nicelik hakkında hiçbir zaman tümevarım olasılık ifadesi ortaya koyamayız.

Yapabileceğimiz tek şey bir parametreyi tahmin ederken kullandığımız yöntem hakkında (frekans-tipi) olasılık ifadeleri ortaya koymaktır. (Neyman'ın, Neyman-Pearson çerçevesi içinde (*bkz.* 18. bölüm) "anlamlılık" kelimesini "büyüklük" kelimesiyle değiştirmek istemesinin nedeni "anlamlılığın" "çıkarmı" çağrıştırmasıydı!) O halde Neyman bizim ne dememizi istiyor?

TÜMEVARIM DAVRANIŞI

Tekrar tekrar bu prosedürü kullanırsak çoğu zaman doğruya erişeceğimizi *söyleyebiliriz*. Prosedürün güvenilir "işletim özellikleri" vardır. Fakat prosedürün belirli bir uygulaması hakkında hiçbir zaman bir olasılık ifadesi kullanamayız.

Neyman güven aralıklarını kullandığımızda *tümevarım çıkarımları* yapmadığımızı söyledi. Tersine, *tümevarım davranışı* pratiği yapıyoruz. %95'lik güven aralığını kullanırsak davranışımız, vakaların %95'inde istenilen sonucu verecektir. %99'luk aralıkları kullanırsak davranışımız, vakaların %99'unda istenilen sonucu verecektir.

ANLAMLILIK TESTLERİ

Tümevarım davranışı fikri, istatistiksel hipotez testlerine aktarılır. Bir istatistikçi olan Bosco'nun 18. bölümün sonun-

da sunulan Neyman-Pearson'ın test kuramını öğrendiğini hayal edin. Güçlü bir test seçme ve sonra da bir hipotezi sadece ve sadece %1 seviyesinde anlamlı olan deneysel verileri elde ettiğinde *reddetme* politikası var.

Bosco bütün vakaların en fazla %1'inde yanlış bir şekilde doğru hipotezi reddetmiş olacaktır. Çünkü test edilen bir hipotez doğruyken (kuramsal modeli doğruysa), %1 seviyesinde anlamlı olan deneysel bir sonucu elde etme olasılığı sadece %1'dir.

Bosco hiçbir zaman belirli bir H hipotezi hakkında şu şekilde saçma bir şeyi söyleme hatasını yapmaz:

Sıfır hipotezinin doğru olma olasılığı sadece %1'dir.

Bosco anlamlılık çerçevesini kullanıp şunu söyleyen bir insanın ötesine de geçer:

Ya H sıfır hipotezi doğrudur ki bu durumda şans eseri normal olmayan bir şey olmuştur (olasılığı %1) ya da H sıfır hipotezi yanlıştır.

Bosco şöyle der:

Ben H hipotezini reddediyorum. Ben vakaların en fazla %1'inde bir hipotezi yanlış bir şekilde reddeden bir reddetme yöntemi kullanıyorum.

Neyman buna tümevarım davranışı derdi.

NEYMAN'IN DÜŞMANLARI

Neyman bizim hiçbir zaman *tümevarım çıkarımı* yapmadığımızı söyledi. Bizim sadece *tümevarım davranışı* içinde olduğumuzu söyledi.

Neyman'ın çıkarımıyla aynı fikirde olmamız gerekmiyor.

Öncelikle neden tümevarım çıkarımı fikrini reddettiğini hatırlamamız gerekiyor. Bu tarihsel bir noktadır. 1930'larda yazıyordu. Bir çıkarıma, olasılık yüklemek isteyen insanlarla savaşıyordu. Türlü türlü düşmanları vardı ki biz bunlardan sadece ikisinden bahsedeceğiz.

(a) Basitçe karıştırmış insanlar.

(b) Karıştırmış olmayıp da felsefesi frekans dogmatiklerine karşı olan Bayeşçiler. Neyman 1930'larda felsefesini formüle ederken Bayeşçi felsefe etkili değildi. Onun için ana hedefi (a) idi.

(a) *Karıştırma*. Karıştıranlar bir anlamlılık testi ya da güven aralığı hakkında bilgi edindiklerinde şöyle demek isterler:

"H hipotezinin doğru olma olasılığı sadece %1'dir."

"q'nun I güven aralığında bulunma olasılığı %95'tir."

Şüphe yok ki, karıştıranlar "H hipotezinin doğru olma olasılığı sadece %1'dir" ya da "q'nun I güven aralığında bulunma olasılığı %95'tir" dediklerinde verilerden bir "tümevarım çıkarımı" yaptıklarını düşünüyorlar. Fakat basitçe karıştırmış oluyorlar. Neyman tümevarım davranışı cinsinden konuşmamızı sağlayabilmiş olabilseydi, bu durumda bizim karıştırmaya daha az meyilli olacağımızı düşünmüş olabilirdi.

(b) *Bayeşçi*. Neyman, Bayeşçi analize bazı önemli katkılarda bulundu. Fakat tecrübeden öğrenme hakkındaki kuramlarının tümevarım çıkarımı için tek doğru kuram olduğuna inanan genel inanç dogmatiklerine karşı çıktı.

TÜMEVARIM ÇIKARIMI İÇİN

Bu ders kitabında (a) ve (b) konusunda Neyman'la aynı fikirdeyiz. Fakat bu kadar yıldan sonra, tümevarım çıkarımı diye bir şeyin olmadığı söylemiyle aynı fikirde olmamız gerekmiyor. Daha rahat olabiliriz. Güven aralığını kullanan kişinin bir *çıkartım yaptığı* kesinlikle söyleyebiliriz. O böyle yapıyor, çünkü çıkartım yapmak için güven aralıklarını kullanma pratiği (diyelim ki) vakaların %95'inde doğrudur.

Benzer bir şekilde Bosco bir hipotezi reddederken, elinde %1 seviyesinde anlamlı olan bir veri olduğundan dolayı bir *çıkartım yapıyor* diyebiliriz. Elindeki veriden H hipotezinin yanlış olduğu çıkarımını yapıyor.

Tümevarım çıkarımı kuramının bir kısmı da bu türdeki istatistiksel çıkarımlar hakkındadır.

Yirmi ikinci bölümde tümevarım davranışı hakkındaki felsefi fikre geri döneceğiz. Tümevarım sorunu hakkında düşünmek için oldukça etkili ve derinliği olan bir yol öneriyor. Fakat küçük çocukların hayatı ve ölümü gibi pratik hususları da unutmayalım.

JERZY NEYMAN

Jerzy Neyman (1894–1981) korelasyon, ki-kare testi ve başka birçok şeyi keşfeden Francis Galton ve Karl Pearson tarafından kurulan bölümde çalışmak üzere Londra'ya giden Polonyalı bir matematikçiydi. Orada Karl'ın oğlu olan E. S. Pearson'la işbirliği yaparak onunla 18. bölümde tartışılan Neyman-Pearson'ın istatistiksel hipotezlerin test edilmesi kuramını keşfetti. Ayrıca güven aralığı kuramı ve birkaç başka temel katkılardan da sorumludur. Neyman Berkeley'deki California Üniversitesine geçti. Orada uzun bir süre için matematiksel istatistiğin en önemli güç kaynağı olan şeyi yarattı.

Berkeley'de bir istatistik profesörü olan David Freedman, "Fisher ve Neyman 20. yüzyılın en büyük iki istatistikçisiydi" diye yazıyor. Bu iki adam birbirleriyle hemfikir değildi. Neyman Londra'da çalışmaya başladığında Fisher dünyadaki o anda çalışan en etkili istatistikçiydi. Her iki adam da iyi argümanları severdi ve polemikleri de oldukça ateşliydi. Aslında Neyman'ın tümevarım çıkarımı fikrine bu kadar düşmanca tavır almasının bir nedeni de istatistiksel hipotezler hakkında çıkarım yapılmasında Fisher'ın hâlâ başka tarzda frekans-temelli bir kavramının olmasıydı. (O buna "güvenme olasılığı" dedi, ama kuram genel kabul görmedi.) Neyman ise anlamlı olan tek kuramın güven aralığı kuramı olduğunda ısrar etti. Kendisini Fisher'ın istatistiksel *çıkartım* fikrinden uzak tutmak için buna tümevarım *davranışı* adını verdi.

ALIŞTIRMALAR

- 1 *Kaçırılan testler.* Üniversite lisans öğrencilerinden rastgele alınan 625 kişilik bir örneklem temelinde yapılan bir kamuoyu yoklamasında 125 kişi hasta oldukları için en az bir kısa sınavı ya da ara sınavı kaçırdıklarını bildirdiler. (a) %95'lik güven aralığı için hata payını bulun. (b) %99'luk güven aralığı için hata payını bulun. Her iki durum için de gerçek güven aralığını belirtin.
- 2 *Daha küçük örneklem.* 16'sının hasta olduğunu bildirdiği 81 öğrencilik bir örneklem temelinde aynı problemi düşünün. Burada hastalık nedeniyle bir sınavı kaçıran öğrencilerin oranı yaklaşık olarak 1. sorudaki kadardır, yani neredeyse %20. Daha büyük olan örneklem (625) ve daha küçük olan örneklem (81) temelinde yapılan tahminlerin kesinliğini karşılaştırın.
- 3 *Parapsikoloji* telepati gibi normal fiziksel açıklama alanının ötesine geçen zihinsel olgular üzerine yapılan çalışmalar olarak tanımlanır.

Telepati: Düşüncelerin, hislerin, görüntülerin, istek ve ihtirasların vb şeylerin mevcut bilimsel kanunlarla anlaşılamayacak yollarla kişiler arasında iletilmesi.

Afacan periler: Çok gürültü yapan, tabakları etrafa atan, perili köşklerde rahatsız edecek şekilde davranarak başa bela olan fesat ruhlar.

Medyum: Genellikle trans halindeyken, ölümlerle yaşayanlar arasında temas kuran kişi.

Kehanet: Geleceği okuma yeteneği.

Parapsikoloji hayaletler, ailedeki ölümlerin üstü kapalı bir şekilde söylenmesi, sadece düşünceyle uzak mesafedeki nesnelerin hareket ettirilmesi vb kadar bu olgular üzerinde de çalışma yapar.

Siz herhangi bir parapsikolojik olguya inanıyor musunuz? Farklı kültürlerden birçok insan inanıyor. İşte size yakında yapılmış bir kamuoyu yoklaması.

Dünya açıklanan bir kamuoyu yoklaması San Francisco'da

yaşayan insanların %58'inin telepatiye, %31'inin medyumların ölümlerle iletişim kurma yeteneklerinin olduğuna, %43'ünün hayaletler gibi görüntülere, %26'sının *afacan perilere* ve %37'sinin de nesnelere değmeden ya da onları fiziksel olarak etkilemeden hareket ettirdiğine inandıklarını bildirdi. Toplamda da %63'ü bu olgulardan en az birine inanmaktadır.

Bu sonuç 15 Şubat ile 18 Şubat arasında 1041 kişi üzerinde yapılan bir ankete dayanmaktadır ve %3'lük hata payı içerisinde, yani 20 vakadan 19'unda, kesinlik içerir.

- (a) Bu raporda ifade edilen bütün güven aralıklarını belirtin ve bunların ne anlama geldiğini söyleyin.
- (b) Bir gazeteye yazı yazıyor olsaydınız, yayıncınız size bu aralığı özetlemeniz gerektiğini nasıl söylerdi?

GÖZDEN GEÇİRMENİZ İÇİN ANAHTAR KELİMELER

Nokta tahmini

Güven aralığı

Aralık tahmini

Tümevarım davranışı

Hata payı

Tümevarım çıkarımı

OLASILIĞIN FELSEFEYE UYGULANMASI

20. Tümevarımın Felsefi Sorunları

Filozoflar için tümevarım hakkındaki en önemli sorun budur. Bu tümevarım mantığı içerisindeki bir sorun değildir. Bu tümevarım akıl yürütmesinin bizzat kendisinin mümkün olup olmadığını sorguluyor.

DAVID HUME

1739'da İskoç felsefeci, David Hume (1711–1776), Batı felsefesinin en etkili 12 kitabından biri olan *A Treatise of Human Nature* [*İnsan Doğası Üzerine Bir İnceleme*] adlı eserini 18 yaşındayken yayımladı. 1748'de *An Enquiry Concerning Human Understanding* [*İnsanın Anlama Yetisi Üzerine Bir Soruşturma*] adlı eserini yayınladı.

Bu kitaplar, özellikle de ikincisi, daha sonraları tümevarım sorunu olarak adlandırılacak olan klasik ifadeyi içermektedir.

Hume'un tümevarım hakkındaki sorunu çok daha genel bilgi kuramının sadece küçük bir parçasıdır. Burada sadece Hume'un felsefesinin bu yönüne bakacağız.

ŞÜPHECİLİK

Sıradan İngilizcede, bir *şüpheli*:

- Kabul edilen inançlardan alışkanlık gereği şüphelenen birisidir.
- Diğer insanlara ya da onların düşüncelerine güvenmeyen birisidir.
- Dini inançlar gibi geleneksel inançları reddeden birisidir.

FELSEFİ ŞÜPHECİLİK

Felsefeciler şüphecilik düşüncesine çok daha büyük bir anlam yüklerler. Felsefi bir şüphecî:

- Herhangi bir şey hakkında herhangi gerçek bir bilgi ya da muteber bir inancın mümkün olduğundan şüphe ettiğini iddia eden bir kişidir.

Hangi türde bilgiden şüphelenildiğine bağlı olarak daha özel türde felsefi şüphecilikler vardır. X'in dini veya bilimsel ya da ahlaki olabileceği herhangi bir X bilgi ya da inanç sahasını düşünün. X diğer insanlar veya etrafımızdaki dünya gerçeği ya da hatta kendiniz hakkındaki bilgi olabilir.

X hakkında felsefi şüphecî:

- X ya da X türündeki bir şey hakkında herhangi gerçek bir bilgi ya da muteber bir inancın mümkün olduğundan şüphe ettiğini iddia eden bir kişidir.

Şüphe hususi bir şüphedir. Felsefi bir şüphecî, ilke olarak, yapılan hiçbir şeyin fayda etmeyeceği argümanını yapar.

Kuşkucu şüphe, sıradan bir şüphecilik değildir. Birisi dinzorların soyunun neden tükendiğini hiçbir zaman bulamayacağımız şüphesini taşıyabilir ve yine de, kuramsal anlayışımızdaki yeni bazı kanıtların, yeni bazı gelişme ve ilerlemelerin gizemi çözmeye yardımcı olabileceğini kabul edebilir. Felsefi bir şüphecî, hiçbir şeyin kuşkucu şüpheyi ortadan kaldıramayacağı argümanını yapar.

David Hume öyle görünüyor ki tümevarım hakkında felsefi bir kuşkucudur.

KUŞKUCU BİR PROBLEM

Hume'un sorunu tümevarım mantığının bazı yönlerine dair değildir. Bu ya da şu argüman hakkında kuşkucu değildir. Frekans dogmatikleri tümevarım mantığına Bayesçi yaklaşımlara karşı kuşku duyarlar. İnanç dogmatikleri tümevarım mantığına frekans yaklaşımlarına karşı kuşku duyarlar.

Hume, ne türde olursa olsun, her türlü tümevarım mantığına karşı kuşkuluymuş gibi görünmektedir.

Fakat peki insanlar tümevarımla akıl yürütmüyorlar mı?

Hume, evet ama bu sadece bir alışkanlıktır dermiş gibi görünüyor.

GEÇMİŞ VE GELECEK

Tümevarım mantığı bizi geriye geçmişe götürebilir: Dinozorların soyu neden tükendi? Dün neden benimle konuşmadın? Başka bir yerdeyse bizi bugüne getirebilir: Şu anda kiminle konuşuyor? Fakat çoğu zaman insanlar tümevarımı düşünürken, bugün bildiğimiz şeylerden yarın hakkında bir şey çıkarımı düşünürler.

İnsanlar çoğu zaman bugün bildiğimiz şeylerden yarın hakkında bir şeylerin çıkarımını yapabileceğimizi, çünkü geleceğin de geçmişe benzediğini bildiğimiz argümanını yaparlar.

İşte size Hume'un problemine yaklaşmak için güzel ve etkili bir yol:

Geleceğin geçmiş gibi olacağını nereden biliyorsunuz?

NEDEN OLMAK

Bu sorunun bariz bir cevabı şudur ki biz mevcut olguların gelecekteki bazı olaylara *neden olduğunu* biliyoruz.

Hume bizzat neden olma fikrinin kendisi hakkında şüphe duyan bir felsefecidir.

"Peki, biz bu fikri nereden alıyoruz" diye sorar Hume. (Çok eski ifadelerinin birkaçını modern eşdeğerleriyle değiştirerek) onun kelimelerini alıntılایacağız. Alıntılar Hume'un kendi kitabı için yazdığı bir tanıtımdan alınmadır.

Aşağıda girintili satırdan başlayarak yazılan her şey Hume tarafından yazılmıştır. Meşhur neden ve etki örneği iki bilardo topuyla ilgilidir:

Bir bilardo topu burada masanın üstünde duruyor ve diğer bir top da hızlı bir şekilde ona doğru geliyor. Çarpı-

şıyorlar ve daha önce duran top şimdi harekete geçiyor. Bu, neden ve etki ilişkisinin duyumsayarak veya yansımayla bildiğimiz herhangi bir olaydaki kadar mükemmel bir anıdır.

Duyumsama veya yansıma: Bu Hume'un, bilginizin tamamının duyularımız yoluyla (duyumsama) ya da akıl yürütmeyle (yansıma) geldiğini söyleyen genel bilgi kuramının bir parçasıdır. Hume şöyle devam eder:

İki topun hareket iletilmeden önce birbirine değdiği ve sokla hareket arasında hiçbir ara olmadığı çok açıktır.

Peki, burada durum nedir? İki top birbirine *değdi*. Bunun da ötesinde,

neden olan hareket, etki olan hareketten öncedir. Bundan dolayı zamandaki *öncelik*, her neden için başka bir gereklilik durumudur. Fakat hepsi bu değil. Benzer bir durum için aynı türdeki başka topları denersek her zaman birindeki bir itmenin diğerinde bir hareket yarattığını buluruz.

Benzer nedenler her zaman benzer etkiler oluşturur. Hume buna *sabit birleşim* der. Fakat:

Temas, öncelik ve sabit birleşim şeklindeki bu üç durumun ötesinde bu nedende başka hiçbir şey keşfedemem. Birinci top hareket halindedir, ikinciye değer, hemen ikinci top harekete geçer ve deneyi aynı ya da benzer toplarla, aynı ya da benzer koşullarda yapmaya çalıştığımda, topun birinin hareketi ve değmesiyle diğer topta her zaman hareket başlar.

Ve neden ve etki fikrine karşılık gelen tecrübemizde Hume'un bulabileceklerinin *hepsi* budur.

TECRÜBE

Hume sonra da içkin bir neden olma duyumsamasına sahip olup olamayabileceğimizi merak eder. Henüz herhangi bir tecrübeye sahip olmamış, olup da "tam anlayış yetisi ve zindeliğiyle yaratılmış olan Âdem gibi bir adamı" hayal eder. Bir bilardo topunun diğerine vurmasıyla nelerin olacağına dair Âdem'in hiçbir fikri olamazdı.

Fakat bilardo toplarıyla oynar oynamaz ve bu türdeki olaylara dair yeterli sayıda edime sahip olur olmaz, ne zaman bir topun diğer bir topa doğru hareket ettiğini görse, hiç tereddüt etmeden hep ikinci topun hareket edeceği sonucuna varırdı. Anlayışı görüşü üzerinde bir beklenti yaratır ve tecrübesine uygun bir sonucu oluştururdu.

O halde neden ve etkiye dair bütün akıl yürütmelerin tecrübeye dayalı olduğu ve tecrübeden kaynaklanan bütün akıl yürütmelerin doğal gidişatının aynı şekilde devam edeceği varsayımına dayalı olduğu sonucu çıkar. Benzer nedenlerin, benzer durumlarda her zaman benzer etkiler doğuracağı sonucuna varırız.

Böylece neden ve etki, geleceğin geçmiş gibi olacağı şeklindeki inancımızı doğrulayamaz; çünkü bizzat neden ve etki tekdüzelik varsayımı üzerine kuruludur. Yine de neden ve etki gelecek hakkındaki akıl yürütmenin temeli olarak önerilir! Hume'u tekrar edersek: *Neden ve etkiyle ilgili bütün akıl yürütmeler tecrübeye dayalıdır ve tecrübeden kaynaklanan bütün akıl yürütmeler doğal gidişatın tekdüze ve aynı şekilde devam edeceği varsayımına dayalıdır.*

"Doğal gidişat tekdüze ve aynı şekilde devam edecek" demek, kabaca geleceğin geçmiş gibi olacağını söylemek anlamına gelir. Geleceğin geçmiş gibi olacağı fikrini nereden alıyoruz?

Bu sonsuz derecede önemli olan [geleceğin geçmiş gibi olacağı] sonucu oluşturmamızı belirleyen şeyin ne olduğunu ele almak artık zahmete değer bir şeydir.

OLASILIK DEĞİL

Hume, Âdem'in tümdengelim yoluyla "doğal akışın tekdüze ve aynı şekilde devam etmesi ve geleceğin geçmiş gibi olacağını ispat edemeyeceğinin aşikâr olduğunu söylüyor. (Hume, "geçmiş gibi" yerine, modası geçmiş *geçmişe uyumlu* ifadesini kullandı.)

Yok, ben daha da ileri gidip Âdem'in herhangi olası bir argümanla geleceğin geçmişe uyumlu olması gerektiğini ispat edecek kadar ileri gidemeyeceğini iddia edeceğim. Bütün olası argümanlar gelecekle geçmiş arasında bu uyumun olduğu varsayımı üzerine kurulmuştur...

Olası kelimesi üzerine yapılan vurgu bizzat Hume tarafından yapılmıştır. Ancak belki de tam da bizim 250 yıl sonra, o kelimeyle demek istediğimiz şeyi demek istememiş olabilir.

MEŞHUR BİR DÖNGÜ

Önceki deneyimize dayanarak, geleceğin geçmiş gibi olacağı beklentimizi doğrulayamaz mıydık? Hayır, bu kısır döngü şeklinde bir akıl yürütme olurdu.

Bu uyum bir *vakadır* ve ispat edilmesi gerekiyorsa tecrübe dışında bir ispatı da kabul etmeyecektir. Fakat geçmişteki tecrübemiz, gelecekle geçmiş arasında bir benzeşme olması varsayımı dışında gelecekle ilgili hiçbir şeyin ispatı olamaz. Bundan dolayı bu, herhangi bir ispat olmaksızın kanıksadığımız ve hiçbir ispat kabul edemeyen bir noktadır.

Geçmiş geleceklerin, geçmiş geçmişler gibi olduğu gerekçesiyle geleceğin geçmiş gibi olacağı argümanını yapmaya çalışan herkes argümanını kısır döngüde yapıyor demektir.

GELENEK

O halde neden geleceğin geçmiş gibi olmasını bekliyoruz? Çünkü böyleyiz. Bazı tümevarım alışkanlıklarımız var. Fakat bu alışkanlıkları doğrulayamayız. Akıl bir doğrulama suna-

maz. Akıl yürütmenin kendisi de alışkanlık ve geleneklerimize dayalıdır.

Geleceğin geçmişe uyacağını farz etmekle sadece *gelenek* tarafından belirlenmiş oluruz. Bir bilardo topunun diğer bir bilardo topuna doğru hareket ettiğini gördüğümde, zihnim hemen ve alışkanlıkla genel etkiye taşınır ve ikinci topu hareket halinde tasavvur eden görüşümü öngörür. Bu nesnelerde –soyut olarak değerlendirildiğinde– bu türde herhangi bir sonuç oluşturmama neden olacak hiçbir şey yoktur: Ve bu türde tekrar edilmiş birçok etkiyi tecrübe etmiş olmamadan sonra bile etkinin geçmiş tecrübeye uyacağını farz etmemi belirleyecek hiçbir argüman yoktur.

Bundan dolayı hayata rehberlik eden akıl değil de gelenektir. Sadece bu bütün anlarda zihnin geleceğin geçmişe uyacağını farz etmesini belirler. Ancak bu adım ne kadar kolay görünse de, akıl hiçbir zaman sonsuza kadar böyle bir varsayımda bulunabilecek güçte değildir.

HUME GERÇEKTEN DE FELSEFİ BİR ŞÜPHECİ MİYDİ?

Öyle görünüyor ki Hume geçmişin gelecek hakkındaki inançlar için bir akıl ya da meşruiyet sunmadığını düşünüyordu. “Her şey olur” ya da hiçbir şey olmaz diye mi düşünüyordu? Gelecek hakkındaki beklentileri için hiçbir “aklı” olmayıp herhangi bir eylem kapasitesinden yoksun muydu?

Pek de öyle sayılmaz. Hume’un genel sonucu, bir gelenek ya da alışkanlık nedeniyle (belki de bir tür psikolojik gereklilik ya da “sabitleme” nedeniyle) sonuç çıkarma ve tümevarım yaptığımızdı. Geleceğin geçmiş gibi olmasını bekleriz. Fakat bunun için akıl olarak bir doğrulama yoktur. Sadece yaptığımız şey budur.

OLASILIKTAN SAKINMALAR

Hume’un kendisi olasılığın bu tümevarım sorununa yardımcı olmayacağını düşünüyordu. “Herhangi *olası* bir argümanla geleceğin geçmişe uyması gerektiğini pek de ispat” edemeyiz diye yazdı.

Hume'un yanıldığı argümanı tartışmayacağız. Fakat olasılıkla ilgili olarak Hume'un hayal etmiş olduğundan daha fazlasını ele alabiliriz. Hume'un zamanında olasılık kuramı daha başlangıç evresindeydi. Hume da her şeyi oldukça güncel bir şekilde takip ediyordu. Abraham de Moivre'un *The Doctrine of Chances* [*Şans Doktrini*] kitabını (birinci basım 1718, bkz. s. 207) okumuş olduğunu düşünüyorum. Fakat Hume tümevarım sorununu önerdiğinde olasılık kuramı daha yeni yeni ortaya çıkıyordu.

Olasılık düşüncelerinin Hume'un problemini *çözümleyeceğine* önermeyeceğiz. Fakat belki Hume'un probleminden bir ölçüde *sakınılabilecek* bazı yolları sunacağız.

Sakınmak, etraftan dolanmak ya da kaçınmak demektir; insanlar kanundan ya da hapse girmekten sakınırlar. Sorulardan da sakınırız. Sakınan kişi doğrudan cevap vermez. Bu anlamda Hume'un tümevarım probleminden sakınmaya çalışacağız. Ona doğrudan cevap vermeyeceğiz ve böyle bir cevap vermenin gerekli olmayabileceğini iddia edeceğiz.

Tümevarım probleminden *sakınmanın* şöyle bir şekli var:

Hume, sen haklısın!

Tümevarım çıkarımı hiçbir şekilde doğrulanamaz.

Fakat o kadar da önemli değil.

Hiç önemli değil, tümevarım çıkarımlarıyla da iyi geçinebiliriz!

Yirmi birinci bölümde tartışılacak olan bir "sakınma" inanç-tipi olasılık ve tecrübeden öğrenmenin Bayesçi kuramını kullanır. 22. bölümde sunulan diğeryse frekans-tipi olasılığı ve Neyman'ın tümevarım davranışı nosyonunu kullanır. Olasılıktan sakınmanın bu iki yolu şöyledir:

BAYESÇİ SAKINMA:

Bayes kuralının bize *tecrübeden öğrenmenin* rasyonel yolunu gösterdiğini tartışır.

DAVRANIŞ SAKINMASI:

Her ne kadar tek tek *tümevarım çıkarımının* hiçbir meşruiyeti olmasa da yine de *tümevarım davranışının* bir meşruiyeti vardır.

TÜMEVARIM-KARŞITLIĞINDAN SAKINMA

Fakat önce Hume'la aynı fikirde olduğunu söyleyip Hume'un probleminde olasılıksızlık yoluyla sakınan bir felsefeciye bakalım.

20. yüzyıldaki önde gelen bilim felsefecisi olan Karl Popper makalelerinden birisine şu sözlerle başlar: "Zannedersem önemli bir felsefi sorunu, tümevarım sorununu çözdüm."

Popper, Hume'un haklı olduğunu söylüyor. Tümevarım çıkarımları hiçbir şekilde doğrulanamaz.

Fakat tümevarım hakkında iki soru var. Birisi *psikolojik* ve diğeri de *mantıksal*.

Psikolojik: Neden insan psikolojisi gereği tümevarım yaparız? Popper çevremize ve bize ne olduğuna dair tepkiler veririz diyor. Fakat bu, Hume'un dediği gibi sadece bir gelenek ve alışkanlıktır. Bu anlamda kedilerden ya da böylelikle, bakterilerden hiç de farklı değiliz. Popper mikroorganizmaların etrafta dolaştığını, yaşananlara tepki verdiğini ve çevrelerinden "öğrendiklerini" söyler. Bizimki de buna oldukça benziyor, tek farkla ki biz biraz daha karmaşığız.

Psikolojik sorular ilginç deneysel meseleleri ortaya çıkarır. Fakat felsefeci Popper ve Hume mantıksal sorularla ilgilendirir.

Mantıksal: Peki acaba bizim beklentilerimiz için kediler ve bakterilerde olmayan nedenlerimiz yok mu? Hume yok demiştir. Popper aynı fikirdedir.

Fakat bu hiç de önemli değil! Popper tümevarım mantığının geçersiz olduğunu, fakat çok şükür ki insanların tümevarım yapmadıklarını söylüyor. Ya da her nasılsa, buna ihtiyaç duymuyorlar.

Popper'in tezi: Tek iyi akıl yürütme tündengelim şeklinde olup geçerli olan akıl yürütmedir. *Ve dünyada başarılı bir şekilde hareket edebilmek için ihtiyacımız olan tek şey de budur.*

Böylelikle Popper tümevarımın felsefi (mantıksal) probleminen “sakınmaktadır,” çünkü tümevarımın geçersiz olduğunu, ancak çok şükür ki hiçbir zaman tümevarım çıkarımları yapmadığımızı (yapmamamız gerektiğini) söylemektedir. Peki, bunun yerine ne yapıyoruz? Tahminlerde bulunup bu tahminleri test ediyoruz. Bilimde, “tahmin” çok gelişigüzel bir şey gibi gelmektedir. “Tahmin” yerine kullanılan daha hoş bir kelimeyse *kestirim*dir. Popper’ın kitaplarından birisinin adı *Conjectures and Refutations*’tır [*Kestirimler ve Çürütme*ler]. Bu iki kelime onun bilim felsefesindeki kilit kelimeleridir. Popper, bilim mantığını şöyle resmeder:

- Bir C kestiriminde bulunun.
- C’nin bir *olası test sonuç* çıkarımını yapın: C doğruysa ve T testi de yapılmışsa, bu durumda deneysel R sonucu elde edilecektir.
- Testi yapın.
- R elde edilirse, bu durumda C desteklenir. Bu da sadece testi geçtiği anlamına gelir. Bırakın “ispatlanmış” olmayı, “onaylanmış” ya da “kanıtlanmış” da değildir. Bütün inançlarımız yanılabilir. Şimdiye kadar dünya hakkındaki hiçbir kuram ya da inanç ispatlanmadı. Eleştirel bir tutum takınmalı ve bunu muhafaza etmeliyiz; sürekli yeni olası test sonuçları çıkarımı yapmalı ve daha sonra da inançlarımızı deneysel olarak test etmeliyiz.

Sıradan İngilizcede “desteklemek” fiili tam da taptaze kanıtlar sunarak teyit etmek ya da desteklemek demektir. Popper tümevarım onaylaması ya da desteğine inanmaz. Bilinçli bir şekilde “desteklemek” kelimesine bir testi geçmekle ilgili olan teknik bir anlam verdi.

- R elde edilmezse, C çürütülür. Bu olunca da, deneye ve çıkarımla biliyoruz ki C yanlıştır. *Tümevararak* değil, *tümdengelerek* bir şey öğrendik.
- C çürütüldüğünde, onu düzeltip değiştirin ya da T testi yapıldığında R’nin meydana gelmediği olgusu da dâhil olmak üzere şimdi bildiğimiz şeye uyan yeni bir kestirim düzenlemeyi deneyin.

Bu Popper'ın bilimsel metodoloji fikrinin çok basit bir versiyonudur. Kendisini bir tümdengelimci olarak adlandırmak onun hoşuna gidiyordu. Tümevarım problemini, özellikle de olasılık fikirlerini kullanarak çözmeye çalışan diğer herkesin bir tümevarımcı olduğunu söylüyordu.

Popper her zaman insan bilgisinin *yanılabilirliğine* vurgu yaptı. "Yanılabilir" demek, "yanlış olabilir, yanılabilir, hatalı olabilir" demektir. Ahlaki derslerinden birisi de bütün bilimlerin yanılabilir olduğuydu.

DAVID HUME

Çoğu kişiye göre David Hume (1711–1776) şimdiye kadar eserlerini İngilizce olarak yazmış en önemli felsefeciydi. Hayatının çoğunu Edinburgh, İskoçya'da geçirdi. Sizi, onun yaşadığı apartmana götüren yolu tarif eden şehir rehber kitaplarında şöyle yazar; "tarihçi David Hume." Çünkü Hume yıllarca en çok satan kitaplar listesinde olan 6 ciltlik *History of England* [İngiltere Tarihi] kitabını yazdı. Hume'un dünyada sadece telif ücretleriyle oldukça zengin olan ilk kişi olduğu söylenir.

Hume, Fransa'da yaşarken yazdığı ve başlarda gençliğinin başyapıtı olan *A Treatise of Human Nature* [İnsan Doğası Üzerine Bir İnceleme] adlı kitabından pek memnun kalmadı. Bir keresinde bu kitabın basılırken "ölü olarak doğduğunu" söyledi; çocuğu canlı doğmamıştı, doğduğunda ölüydü, çünkü kimse onu okumadı. İşte bunun için tümevarım hakkındaki fikirlerini özetlemek için kullanmış olduğumuz o kendi kendinin anonim reklamını yapan yazıyı yazdı.

Hume'un *Dialogues Concerning Natural Religion* [Doğal Din Üzerine Diyaloglar], Yüce Varlığın, Yaratıcının ya da Tanrının varlığı yönündeki bazı argümanlarının canlı, güçlü ve kuşkucu bir incelemesini sunmaktadır. Bu diyaloglar onun zamanında yayımlanamayacak kadar tartışmalı yazılar olarak değerlendirildiler. Aslında, kanserden ölmek üzereyken evinin etrafında toplanan bir kalabalık yuhalayıp alay ederek "ateistin" ne zaman pişmanlık duyacağını soruyordu.

Hume'un bir felsefeci olarak okunmayacağı endişesi yersiz bir endişeydi. Kısa bir süre içerisinde bütün Avrupa ve kolonyal Amerika'daki entelektüellerin çok iyi bildiği birisi oldu. *İncelemesi* bir taraftan metafizik ve epistemolojinin sorunlarının çoğunu ele alırken, diğer yandan onun kadar güçlü bir tartışma alanı olan ahlak tartışmalarına eğilir. Bugün İngilizcede felsefi sorunların çoğunun, hem de kalıcı olarak, nasıl tartışıldığının çerçevesi David Hume tarafından çizilmiştir.

Tümevarımın felsefi sorunu, yaptığı katkılardan sadece birisidir. Yine de bir şekilde zihninin nasıl çalıştığının tipik bir göstergesidir. Hume her zaman temkinli, şüpheci, sorgulayıcı ve kuşkucuydu. Her ne kadar Kant (1724–1804) felsefi sahneyi 18. yüzyılın sonunda kalıcı olarak değiştirmiş olsa da kendisini "dogmatik uyuklamalarından" uyandıranın Hume olduğunu söylerdi.

KARL POPPER

1935 yılında Avusturyalı felsefeci Karl Popper (1902–1994) *The Logic of Scientific Discovery* [*Bilimsel Araştırmanın Mantığı*] (Almanca olarak) kitabını yayımladı. Bu onun bilim felsefesine yaptığı temel bir katkıdır. Daha da geliştirilmiş İngilizce versiyonu 1959'da yayımlandı. Nazi rejimi esnasında göç etti ve *London School of Economics*'te [*Londra Ekonomi Okulu*] ders verdi. Kuantum mekaniğinden Sokratik-öncüllerine kadar hemen her konuyu kapsayan bilim felsefesi hakkında birçok başka kitap yazdı.

Ayrıca liberal, fakat temkinli politik felsefeyle ilgili etkili kitaplar da yazdı: *The Poverty of Historicism* [*Tarihçiliğin Sefaleti*] ve *The Open Society and Its Enemies* [*Açık Toplum ve Düşmanları*]. Özellikle Platon ve Hegel'i sevmezdi, çünkü onun düşüncesine göre onlar açık toplumdaki düşüncelerin eleştirel olarak tartışılmasından ve politik inançlar da dâhil olmak üzere bütün inançlarımızın yanılabilir olabileceğini kabul etmekten korkuyorlardı. Son yıllarda Popper'ın Çin ve İran gibi otoriter rejimlerle yönetilen ülkeler üzerinde inanılmaz bir etkisi olmuştur: Çünkü o bir bilim felsefecisidir,

çok geniş çevrelerde okunmasına müsaade edilmektedir, ama liberal düşünceleri de müesses nizam-karşıtı düşünürler gözünde onu bir kahraman yapmaktadır.

GÖZDEN GEÇİRMENİZ İÇİN ANAHTAR KELİMELER

David Hume	Döngüsel bir argüman
Kuşkuculuk	Gelenek hayatın rehberidir
Felsefi kuşkuculuk	Tümevarım probleminden sakınma
Gelecek geçmiş gibi mi olacak?	Karl Popper
Neden ve etki	Popper'ın sakınması: Hiçbir zaman tümevarımla akıl yürütmüyoruz
Sabit birleşim	Kestirim ve çürütme
Olasılık değil	Yanılabilirlik

21. Tümevarım Sorunundan Sakınmanın Bir Yolu Olarak Tecrübeden Öğrenme

Bayes kuralıyla tecrübeden öğrenme fikri kullanılarak inanç-tipi olasılık tümevarım sorununa nasıl uygulanabilir.

Fikir zaten 13–15. bölümde sunulmuştu.

- İnanç dereceleri 0 ile 1 arasındaki sayılarla temsil edilebilir.
- Bu sayılarla temsil edilen inanç dereceleri, yerine getirmedeği takdirde “uyumsuz” olma sonucuna katlanması pahasına olasılığın temel kurallarını yerine getirmelidir.
- Bu kuralları yerine getirirlerse, bu durumda Bayes kuralı işler.
- Böylelikle de uyumlu, “rasyonel” bir yolla yeni kanıtlarla daha önceki inanç derecelerini güncelleyebiliriz.

Tümevarım sorunundan bu şekilde sakınılmasına Bayesçi denilir.

Bayesçi, verilen her türlü inanç derecesi dizisinin benzersiz bir şekilde rasyonel olduğunu doğrulayabileceği iddiasında değildir. İnançlarınızı tecrübe ışığında değiştirmenizin nasıl akla uygun bir şey olduğunu size söyleyebileceğini iddia eder.

Bayesçi, Hume’a şöyle der:

Hume, haklısın. Bir sonuca etkisi olan bütün nedenlerin bulunduğu farz edilen bir dizi öncül verildiğinde, istediğiniz her türlü düşünceyi oluşturabilirsiniz.

Fakat bizi ilgilendiren meseleye hitap etmiyorsunuz!

Yetişkinlerin hayatlarındaki herhangi bir anda (hay-

di burada bebekleri hariç tutalım), birçok düşüncemiz ve düşüncelerimiz hakkında da değişik derecelerde inançlarımız vardır. Soru bu düşüncelerin “rasyonel” olup olmadıkları değildir. Soru bizim bu düşünceleri yeni tecrübeler, yeni kanıtların ışığı altında uyarlarlarken akla uygun davranıp davranmadığımızdır.

İşte burada kişisel olasılık kuramı devreye girer.

Tutarsızlık pahasına, her zaman olasılık aksiyomlarının gereklerini yerine getiren bir inanç sistemine sahip olmamız gerekir. Bu da –Bayes kuralını kullanarak– tecrübeden öğrenmenin benzersiz ve akla uygun bir yolunun olduğu anlamına gelir.

Hume’un haklı olduğunu söyleyerek Bayesçi, Hume’un probleminde *sakınır*. Fakat ihtiyacımız olan tek şey inançta akla yatkın bir değişim modeli diye devam ediyor Bayesçi. Değişen bir dünyada rasyonel aktörler olmamız için bu da bize yeterlidir.

YAKINSAMA

Burada biraz endişelenmeniz gerekir.

Herkes kendi düşünce ve önyargı demetiyle başlar ve Bayesçi bir şekilde öğrenirse her biri de iç tutarlılığa sahip olur, ama herkesin de sonsuza kadar tamamen farklı düşünceleri olurdu.

Hiçbir zaman bir uzlaşmaya varamazdık. Ve de bir mutabakata varmak, bize göre akla uygun olan şeyin bir parçasıdır.

Bayesçinin bizi bekleyen bir teoremi var.

[Aslında aklında bir teorem olan Bayesçi diyor ki] iki kişi birbirinden ayrılan inanç dereceleriyle başlıyorsa ve sadece neyin mümkün olduğunda mutabıksalar, bu durumda önceki olasılıkları farklı olabilse de, artan kanıtlar birlikte “sonsal” yani kanıttan sonraki inanç dereceleri üzerinde yaklaşıp birleşme eğiliminde olacaklardır.

“Mümkün olan şey üzerinde mutabık kalarak,” Bayesçi iki insanın sıfır olmayan olasılık hipotezi üzerinde mutabık

kaldıklarını demek istiyor. Kişilerden birisi, sıfır olasılıkla bir hipotezin imkânsız olduğunu düşünmezken, diğeri pozitif bir olasılığının olduğunu düşünür. Koşullu olasılıktan dolayı bu ibare gereklidir. $Pr(B) > 0$ olduğu müddetçe $Pr(A/B) = Pr(A \& B)/Pr(B)$ 'dir. Kişilerden biri için $Pr(B) = 0$ iken diğeri için $Pr(B) > 0$ ise bu durumda birinci kişinin inanç dereceleri Bayeşçi bir tarzda yeni kanıttan etkilenmez.

Bayeşçi, yakınsama teoremindeki bu sınırlamayı düşünmez.

Liza bir hipotezin kesinlikle imkânsız olduğunu düşünerek başlarken (olasılık 0), Elaine bunun mümkün olduğunu düşünüyorsa, bu iki kişi –Elaine, Liza'yı kendi safına çekmedikçe– hiçbir zaman anlaşmaya varamazlar. Fakat kendi safına çekmek inançtaki yavaş ve akla yatkın bir değişmeden oldukça farklı bir şeydir.

KOŞULLU BAHİS ORANLARI NEDİR?

Tümevarım sorunundan bu Bayeşçi sakınmaya karşı çok farklı şekillerde itirazlar gelebilir. Burada bunlardan birini tartışacağız.

Koşullu olasılık ve koşullu bahis oranlarının anlamı nedir?

Bayeşçi, Bayes kuralını detaylı bir şekilde yazmadan da fikir sahibi olabileceğimizi söyler. Sadece önsel olasılık, sonsal olasılık ve olabilirliğe bakmamız yeterli olur.

Bir H hipotezi ve bazı olası E kanıtlarıyla ilgilendiğimi farz edin. Benim, önsel olasılık olan ve $Pr(H)$ ile temsil edilen H üzerinde kişisel bir bahis oranım var.

Benim kişisel inanç yapımda, aynı zamanda H 'nin doğru olma koşuluna bağlı olarak H doğruyken E 'nin olma olasılığı, $Pr(E/H)$ ya da H 'nin ışığı altında E 'nin olabilirliği tarafından temsil edilen, benim E 'nin meydana geleceğine dair koşullu bahis oranım da vardır.

Bu durumda, beni ilgilendiren çeşitli olası hipotezler için bu türde inanç derecelerine sahipsem, Bayes kuralı vasıtasıyla biliyorum ki H 'yi öğrendiğim zaman sonsal bahis ora-

nım –yani benim kişisel sonsal olasılığım $Pr(H/E)$ – (tutarsız olma sonucuna katlanmak pahasına) önsel olasılıkla olabilirliğin çarpımına orantılı olmalıdır: $Pr(H/E)$, $Pr(H) \times Pr(H/E)$ 'ye orantılıdır.

İTİRAZ

Bize itiraz edene Hume'un yeğenlerinden birinin torununun torununun ... torunu olan Hialeah Hume diyelim.

Hialeah şöyle diyor:

Kaçamak bir dil kullanıyorsun; iki anlama gelecek kelimeler kullanıyorsun.

İki farklı anlama gelecek " $Pr(H/E)$ " kullanıyorsun, yani

- (i) E'nin doğru olduğunu bilmeden *önce*, E koşuluna bağlı olarak H üstüne bahse girmenin kişisel oranı.
- (ii) E'nin doğru olduğunu bilince, H üstüne bahse girmenin kişisel oranı, yani E'nin doğru olduğunu bildikten *sonra*.

Bu bölümün başında sıralanan ve 13–15. bölümde sunulan üç fikir, koşullu bahis oranları da dâhil olmak üzere *belli bir anda teklif edilen* bahis oranlarının olasılığın temel kurallarını yerine getirmesi gerektiğini göstermektedir. İşte bu *statik* durum olarak adlandırılabilen olan şeydir.

Belli bir anda ya da inançlarınızı değiştirmedığınız bir süre zarfında, inançlarınızın toplam kümesinin uyumlu olması gerekir. Bir tür tümevarım tutarlılığı olarak uyum için yapılan bütün argümanların statik varsayımla ilgili olmaları gerekir. Argümanlar tamamen yukarıdaki (i) hakkındadır. Zaman içerisinde inançlarınızı değiştirdiğiniz *dinamik* bir durumu dikkate almazlar. Bu yapmak için yukarıdaki (ii) hakkında bir argümanımız olmalı. Hialeah Hume devam ediyor, Gösteriminle bizi kandırıyorsun!

Zaman içerisinde *dinamik* olarak tecrübeden öğrenmeden bahsedeceksek, H'nin olasılığı için "zamansız" kısaltma olan " $Pr(H)$ " ifadesini kullanmamamız gerekir.

Bir kişinin t zamanındaki kişisel olasılığını göstermek için " t " altındisi koymamız gerekir.

$Pr_t(H)$, t zamanında H 'ye olan inanç dereceniz anlamına gelir.

$Pr_t(H)$, t zamanında yapacağınız koşullu bahislerin bir göstergesidir.

Bölüm 13–15'te ispat edilen şudur ki, herhangi belirli bir t için,

$Pr_t(H/E)$, $Pr_t(H) \times Pr_t(E/H)$ 'ye orantılıdır.

Hialeah Hume şimdi çok kızdı.

İsterseniz sonsal ve önsel olasılıklardan bahsedebilirsiniz, fakat bu "önsel" ve "sonsal" kelimelerinin her zamanki zamansal anlamları olduğunu hayal etmeyin!

Siz Bayesçilerin zaman içinde öğrenmeniz gereken şey şunun gibi bir gösterimdir:

E kanıtını bildiğinizde, t zamanında, t 'den sonra gerçek bir sonsal olasılık için $Pr_{t'}(H)$ 'yi istiyorsunuz.

Aslında E 'yi bilmediğinizde, t zamanında gerçek bir önsel olasılık için $Pr_{t'}(H/E)$ 'yi istiyorsunuz.

Bir kere bunu açıklığı kavuşturduğunuzda, aşağıdaki postulata ihtiyacınız vardır:

$$Pr_{t'}(H) = Pr_t(H/E)$$

Fakat bu postulat için herhangi bir argüman sunmadınız!

(Hialeah oldukça haklı. 25 yılı aşkın bir süredir, bu itiraz ilk olarak dile getirildiğinden bu yana çok güçlü nedenler önerildi. Fakat zannederseniz, hiçbirisi ikna edici değil.)

DOGMATİK OLMAYAN CEVAP

Bu zorluk "Bayesçi" argümanın, ilk bakışta görünebileceğinin tersine, pek de inandırıcı olmadığını gösteriyor. Fakat Bayesçi, 13–15. bölümdekine benzer argümanlar temelinde birazcık daha mütevazı bir vaka oluşturabilir.

- Herhangi bir anda, inanç derecelerini uyumlu tutma yolu vardır.

- Kişi inançlarını kanıtlar ışığında uyarlayacaksa ortaya çıkacak inanç dizisinin de olasılık aksiyomlarını yerine getirmesi gerekir.
- Hiç kimse düzgün ve anlaşılır $Pr_t(H) = Pr_t(H/E)$ 'den daha çekici genel bir kural önermemiştir.

Bunu *koşullandırma kuralı*, Bayesçi yaklaşımın olasılığa dair ek bir nitelendirmesi olarak önerebiliriz. Onu –diyelim ki, Jeffrey kuralı (bkz. 15. bölüm) ile karşılaştırılabilir– ek bir düstur ya da Bayesçi kişisel yaklaşımın bir aksiyomu olarak ele almanın hiçbir yanlış tarafı yoktur. Sanki onunla yarışan daha iyi bir kuralımız varmış gibi bir durum yok.

Hatta koşullandırma kuralına ahlaki bir kural olarak da bakabiliriz. *Kişi* (hayatı ve düşüncesinde radikal bir dönüşüm geçirmediği) *önceki haline karşı dürüst olmalıdır*.

Olmak istediğiniz kişiye karşı belirli bir varoluşsal bağlılığınız olmalıdır. Önceki halinize karşı dürüst olduğunuzda, aslında Bayes kuralını takip ederek tecrübeden öğreneceksiniz.

Bu daha ziyade inanç perspektifindeki sürpriz bir gelişmedir. İnanç perspektifi bize Bayesçi düşünceyle tecrübeden öğrenmeyi buyurmaktadır. Bu şimdi ahlaki emire benzer bir şey gibi görünmektedir. Daha da şaşırtıcı olanıysa frekans perspektifinin benzer ve ahlaki bir şekilde gelişeceği olgusudur. Bu bir mantık kitabından bekleyeceğiniz bir şey değildir. Belki de bu tümevarım ve tümdengelim mantıklarının ayrıldığı son bir yoldur.

22. Tümevarım Sorunundan Sakınmanın Bir Yolu Olarak Tümevarım Davranışı

Frekansçı tümevarım çıkarımları için herhangi bir neden sunulamayacağında mutabıktır, fakat güven aralıkları fikri temelinde bazı prosedürler kullanılarak tümevarım davranışı için sebepler sunulabileceğini söylemektedir.

Bayesçi kişisel önermelere kişisel olasılıklar ya da inanç dereceleri atfedebilecek durumdadır. Katı tutumlu frekans dogmatığı olasılıkların sadece bir dizi olaya atfedilebileceğini düşünmektedir.

Bu dogmatik, olasılığın sadece bir şans kurgusu tarafından yaratılan bazı türdeki olayların görelî frekansı anlamına geldiğini söyler. Ya da şans kurgusunun belirli bir istikrarlı frekansla olayları yaratma eğilimine atıfta bulunur. Veya vurgu yapılan bazı simetri özelliklerine atıfta bulunur.

Her halükarda, tek bir olayın olasılığı hakkında akla yatkın bir şekilde konuşamayız, çünkü o olay ya meydana gelir ya da gelmez. Onun "olasılığı" 0 ya da 1'dir, hepsi bundan ibarettir.

O halde frekans dogmatığı hiçbir zaman belirli bir hipotezin doğruluğuna dair frekans-tipi bir olasılık hakkında konuşmayacaktır.

Hipotez ya doğrudur ya da yanlıştır ve bununla ilgili bir frekans yoktur. En fazla, belirli türde hipotezlerin doğru olmasının görelî frekansını tartışabiliriz.

Şimdiye kadar dogmatik frekansçı, Hume'la aynı fikirde olduğu için mutludur.

TÜMEVARIM DAVRANIŞI

Yine de, sonuçlar genellikle doğru olacak şekilde bazen çıkarımlar yapmak ya da sonuçlar çıkarmak için bir *sistem* uygulayabilecek durumda olabiliriz diye devam eder frekansçı.

Belirli bir yöntemle yapılan çıkarımların aslında doğru olduğu görelî frekans hakkında konuşabiliriz.

Sonuçsuz bir veri temelinde belirli bir miktarı bilmek istersek, miktarın aralık tahminini sunacak bir yöntemle sahip olabiliriz. Ve bu yöntemi takip ettiğimizde, miktarın bilinmeyen gerçek değerini içeren aralık tahminleri yapabilecek şekilde frekans-tipi olasılığı belirleyebilecek durumda olabiliriz. Şüphesiz bunlar sadece güven aralıklarıdır.

Hiçbir (akla yatkın) tümevarım çıkarımı yoktur, sadece tümevarım davranışı vardır. Bu da, Jerzy Neyman'ın istatistiksel çıkarım kuramlarını E. S. Pearson'la birlikte geliştirdikten sonra 1930'lardaki formülasyonudur. Neyman şöyle demişti:

Tecrübe temelinde disiplinsiz bir şekilde genelleme yapamayacağımız tamamen doğrudur. Fakat rastgele denemeleri ortaya sürdüğümüz dikkatli bir şekilde tasarlanmış deneylerde, sonuç çıkarmak için (diyelim ki, istenilen belirli bir miktar şu ve şu güven aralıkları içerisinde) bir sistemde ortaya çıkan kanıtı kullanabiliriz, öyle ki çoğu zaman haklı çıkalım (diyelim ki, bütün zamanların %95'inde).

Böylece Neyman aşağıdaki şekillerde Hume'un problemin-den sakınmaktadır:

- Rastgeleleştirilmiş deneysel bir tasarım kullanarak doğal gidişata aktif olarak müdahale etmek.
- Çoğu zaman –diyelim ki, bütün zamanların %95'inde– doğru olan bir çıkarım yöntemini kullanmak.

Hume haklıdır, der Neyman. Sonuçların herhangi birisine inanmam için herhangi bir nedenim yok. *Fakat çıkarım yöntemimi kullanmam için bir nedenim var, yani çoğu zaman doğrudur.*

SAKINMA

Bayesçi öncüllerin bir tümevarım sonucu için akla yatkın nedenler ortaya koyduğunu iddia etmemiştir. Tersine, yeni

kanıtlar ışığında kişinin düşüncelerini uyarlaması için akla yatkın nedenlerin olduğu iddia ediliyordu. Daha da ötesi, farklı düşüncelerle yola çıkan bir grup insan hepsi de zamanla koşullandırma kuralıyla düşüncelerini uyarlarsa bir uzlaşmaya varacaklardır. Bu tümevarım problemini çözmez, fakat (der Bayeşçi) rasyonel bir fikir için akla yatkın bir şekilde ümit edeceğimiz kadar iyi bir temel sağlar.

Benzer bir şekilde, Neyman gibi frekansçılar tümevarım sorununu çözdüklerini iddia etmezler. Hatta ne de hemen gündelik hayata ve Hume'un bir gelenek ya da alışkanlık meselesi dediği sıradan beklentilere uygulanabilecek bir yöntemleri olduğu önerisini yaparlar.

Fakat biz sadece alışkanlıkları olan yaratıklar değiliz. Sorgulamalarımızı sistematikleştirebiliriz ve çoğu zaman doğru olan yöntemleri kullanarak deneyler tasarlayabiliriz ve sonra da bunlara güven fikrini uygulayabiliriz.

Nesnel, rasyonel bir bilim için ihtiyacımız olan şey tam da budur!

Bu rasyonel bir fikir için akla yatkın bir şekilde ümit edeceğimiz kadar iyi bir temel sağlar.

MODELLEME İTİRAZI

Olasılık ve tümevarımda her zaman olduğu gibi zorluklar var.

Bunlardan birisi deney yapmaktan ve güven aralığı yöntemini dayatmaktan bahsederken frekansçının gereğinden fazla hızlı hareket etmesidir. Yöntem sadece deney modellerine ve bunların nasıl işlediğine uygulanabilir. Modeller, üstü örtük bir şekilde dünyanın özelliklerinin çoğunun olduğu gibi kalacağını varsayar. Modeli uygun bir şekilde muhafaza etmek için geleceğin her bakımdan geçmiş gibi olacağını varsayarlar.

Güven aralığına dair ileri sürülen bütün iddialar geleceğin geçmiş gibi olacağını kanıksamış olan arka plandaki çok geniş bir bilgiye göre vardır. O halde, diyor itiraz eden, tümevarım davranışı tümevarım probleminden sakınmıyor, sadece kanıtlanmış zannettiği soruya tekrar geri dönmüş oluyor.

CEVAP

İnançlardaki dinamik değişiklikler hakkında soru sorulduğunda cevap tuhaf bir şekilde Bayesçininkine benziyor.

Hume bize *herhangi bir* tümevarım çıkarımı için *hiçbir* neden ya da temelin olmadığını söylüyordu, değil mi? Sadece gelenek ve alışkanlığın olduğunu söylüyordu.

İyi de, biz frekansçılar bütün bilgi ve inançlarımız için bir temel sunmaya bile çabalamıyoruz. Fakat deneyleri tasarlamak için kullanılan modellerde sunduğumuz bazı inançlar verildiğinde, bazı gelenek ya da alışkanlıkların diğerlerinden daha iyi olduğunu ispat edebiliriz.

Hume'un "gelenek" ve "alışkanlık" kelimelerinin elle-
rimizi havaya kaldırmamızı sağlayacağı varsayılıyordu. Gelenek basitçe yaptığımız şey demektir ve Hume gelenek hakkında daha fazla bir şeyin söylenemeyeceğini ima etti.

Tersine! (diyor Neyman). Erdemli, çoğu zaman da bizi doğru sonuçlara götüren alışkanlıklar benimsemeyi seçebiliriz!

Geleneklerimizin bu özelliğe sahip olduklarını mutlak bir şekilde ispat edemeyiz, fakat dünyanın nasıl olduğu ve işlediği hakkındaki bazı inançlarımızı veri alarak, bu inançlar temelinde Neyman'ın methettiği alışkanlıkların diğer geleneklerden daha akla yatkın olduğunu ispat edebiliriz.

Ve akla uygun bir şekilde ümit edebileceğimiz tek şey de budur.

TEK VAKA İTİRAZI

Oldukça farklı ve daha ziyade felsefi olan bir zorluk var. Çok önceleri karşılaştığımız bir probleme benziyor. Güney Denizi adasındaki eski kola makinesini hatırladınız mı? (bkz. 12. bölüm).

Adada yaşayan insanlar için 5/6 şansla bir şişe kola almak için 5 sent ödemek kabul edilebilir bir şeydi (gerçek maliyeti 6 sent). Fakat bu neden bir günlüğüne adaya gelen ve sadece bir şişe kola isteyen bir denizciyi tatmin etsin?

Alkolsüz içkilerin kaynağı olarak düzenli bir şekilde kullanılırsa bunun harika ve eski bir kola makinası olduğunu söylemek hoş bir şeydir.

Benzer bir şekilde, uzun dönemli işletim özellikleri sayesinde –birçok kereler kullanılıyorlarsa– güven aralıklarının muazzam bir tümevarım yöntemini verdiğini söylemek hoş bir şeydir.

Fakat çok zorlayıcı, ölüm kalım meselesi olan bir şeyi ele alıyorsam? Yöntemin çoğu zaman doğru olmasından başka daha iyi bir gerekçe yok mu?

En basit türdeki “tümevarım davranışını” ele alalım. Bir kumar şeklinde sunulabilir.

Farz edin ki standart 52 kâğıtlık bir kâğıt destesini kırmızı ve siyah olarak iki bölüme ayırdık. Kırmızı bölümün içinde tek bir siyah kâğıt var, hepsi kırmızı sadece birisi siyah. Geri kalan kâğıtlar siyah bölümün içinde, bunlardan sadece biri kırmızı. Şimdi kırmızı bölümün içinden siyah bir kâğıdın çekilme şansı $1/26$ olacak şekilde kâğıtları karıp bir şans kurgusu düzenlemek istiyoruz. Şimdi P ödülü için şu kumarı ele alın:

(i) Kırmızı bölümden bir kırmızı kâğıt çekilirse P.

(ii) Siyah bölümden bir kırmızı kâğıt çekilirse P.

Hepimiz (i)'yi seçerdik. Peki neden? Neyman bunun sağgörümlü tümevarım olduğunu söylerdi. (i) seçeneğini seçerseniz çoğu zaman ödülünüzü alırsınız; (ii) seçeneğinde böyle bir şey yok.

Fakat bu kumarı adam kaçırان çılgın biriyle bir defaya mahsus olmak üzere oynama teklifi yapıldığını varsayın.

P ödülü serbest bırakılmanız; kazanmazsanız, sizi iğrenç bir şekilde öldürecek.

Hepimiz (i)'yi seçer ve ümitle beklerdik. Bu koşullar altında akla uygun şekilde yapılabilecek tek şey budur. *Fakat uzun dönemden dolayı değil.* Bir sonraki sefer, ya öleceksiniz ya da hayatta kalacaksınız.

Bu itiraz, bizim güven fikri olarak adlandırdığımız şeyi ilk olarak net bir şekilde formüle eden kişi olan Charles

Sanders Peirce tarafından yüz yıl önce yapılmıştı. Bu fikri mantık kuramının köşe taşlarından birisi yaptı. Fakat aynı zamanda felsefeciydi ve bunun tehlikelerinin de iyice farkındaydı. Bundan endişe ederek nihayetinde, mantığın temellerinde *inanç, ümit ve hayırseverlik* olduğu şeklindeki dikkate değer bir sonuca vardı. Her ne kadar İncil'den alıntı yapıyor olsa da dini bir noktaya vurgu *yapmıyordu*. Sıradan ve gündelik duruma bakıldığında Peirce hiçbir şekilde herhangi organize bir dinin taraftarı değildi. Tersine mantığın gereklerinin bizi geriye, genellikle mantıkla ilişkilendirmediğimiz çoktandır devam eden insan ideallerine götürdüğü argümanını savunuyordu. İşte size 1878'de *Popular Science Monthly*'de [Aylık Popüler Bilim] yazdığı bir yazı.

ÜÇ MANTIKSAL SEZGİ

Fakat şimdi de açıklığa kavuşturulması gereken önemli bir nokta var. Söylenilmiş olan şeylere göre olasılık fikri esas olarak sonsuz kere tekrarlanan bir tür çıkarıma aittir. Tek tek çıkarımların ya doğru ya da yanlış olması gerekir ve bunun da olasılık üzerinde hiçbir etkisi olmaz ve bundan dolayı da kendi başına değerlendirmeye tabi tutulan tek bir vakaya atıfla, olasılığın hiçbir anlamı olamaz. Yine de kişi 25 kırmızı kâğıt ve bir adet de siyah kâğıdı olan bir kâğıt destesinden bir kâğıt çekmekle 25 siyah kâğıt ve bir adet de kırmızı kâğıdı olan bir kâğıt destesinden bir kâğıt çekmek arasında bir seçim yapmak zorunda kalsaydı ve çekilen bir kırmızı kâğıt onu sonsuz mutluluğa götürecekse ve de çekilen bir siyah kâğıt onu sonsuz bir düşmana götürecekse ve her ne kadar riskin doğasından dolayı tekrarlanmayacaksa da, daha fazla kırmızı kâğıtların olduğu desteyi tercih etmesi gerektiğini inkâr etmesi budalalık olurdu. Bunu bizim şans kavramıyla uzlaştırmamız kolay değil. Fakat farz edin ki kırmızı desteyi ve de yanlış kâğıdı seçmesi gereksin, bu durumda kendisini nasıl teselli ederdi? Akla uygun hareket etmiş olduğunu söyleyebilirdi, fakat bu da sadece onun aklının kesinlikle yanlış olduğunu gösterirdi. Ve

doğru kâğıdı seçmiş olsaydı, bunu mutlu bir tesadüf olmanın dışında başka nasıl açıklayabilirdi. Diğer desteden seçmiş olsaydım yanlış olanı seçmiş olabilirdim, çünkü "A ise B" şeklinde hipotetik bir önerme tek bir vakaya referansla hiçbir anlam ifade etmez diyemezdik.

Bu durumda Peirce bir dizi çıkış yolu bulmayı düşünüyor. Sadece, çok zor koşullarda, kâğıt seçimimi yapmış olduğum birçok seçimden biri olduğunu düşünebilseydim, bu durumda hâlâ rasyonel tümevarım davranışına devam edebilirdim. Yine de yerine getirdiğim her eylem sınıfı sonludur, benim bütün hayatım da sonludur. Zorluk kendisini tekrar ediyor. Benim bütün kendi hayat seçimleri serimin kümesi kâğıt destesinden yapılan tek bir seçim gibidir ve bunu rasyonel tümevarım davranışı yapacak şey nedir? Peirce çok şaşırtıcı bir şekilde şu sonuca varıyor:

Bana öyle geliyor ki mantıksallığın merhametsiz bir şekilde ilgilerimizin *sınırlanamamasını* gerektirdiği gibi bir şeyin içine çekiliyoruz. Kendi kaderlerimizde durmamalı, fakat bütün topluluğu kucaklamalıdır. Bu topluluk da yine sınırlandırılmamalı, fakat doğrudan doğruya ya da aracılı entelektüel bir ilişkiye girebileceğimiz değişik ırklardan bütün varlıklara uzanmalıdır. Ne kadar belirsiz olursa olsun bu coğrafi çağın, bütün sınırların ötesine geçmelidir. Dünyanın bütününü kurtarmak için kendisini feda etmeyen herkes, bana öyle geliyor ki kolektif olarak çıkarımlarında mantıksızdır. Mantığın kökleri sosyal ilkedeyatar.

Peirce bu tartışmayı aşağıdaki gözlemi yaparak bitirdi:

Mantığın vazgeçilmez gerekliliği olarak üç sezgiyi, yani belirsiz bir topluluğa olan ilgi, bu ilginin ilahi bir ilgi olma ihtimalinin kabulü ve entelektüel aktivitenin sınırsız bir şekilde devam etmesi ümidini ortaya koymam gerektiği garip görünebilir. Yine de eylemde son bulan, duyguda başlaması gereken şüpheden kurtulmak için

mantığın sadece bir mücadeleye bağlı olduğunu ve bunun da ötesinde, kendimizi mantıkla yutturmamızın tek sebebinin diğer şüphe yöntemlerinin sosyal dürtülerden dolayı başarısız kalmaları olduğunu düşünürsek, sosyal sezginin akıl yürütme içinde varsayıldığını bulmak bizi neden hayrete düşürsün? Benim gerekli gördüğüm diğer iki sezgiye gelince, bunlar onun sadece destek ve aksesuarları olarak gereklidir. Bu üç sezginin, St. Paul'un tahmininde olduğu gibi ruha verilen hediyelerin en iyisi ve en büyüğü olan *hayırseverlik, inanç ve ümit* şeklindeki o meşhur üçlemeyle hemen hemen aynı olduğunun farkına varmak benim ilgimi çekiyor.

CHARLES SANDERS PEIRCE

C. S. Peirce (1839–1914), William James (1842–1910) ve John Dewey (1859–1952) tarafından geliştirilen bir okul olan ve bugünlerde büyük oranda canlanmaya başlayan *pragmatizm* denilen Amerikan felsefesini kurdu. Bu kitapta, hemen bölüm 2'de bahsedilen olasılık ve tümevarıma ilk katkırıyı yapan kişidir. Birtirmek için seçilmiş iyi bir insan. (Şayet ismini nasıl telaffuz edeceğinizi unuttuysanız 2. bölüme geri dönün ve kontrol edin.)

Peirce olasılığa dair temel ve orijinal bir anlayışa sahipti. Bu anlayışın bir kısmını da yakından pratik çalışma yoluyla edinmişti. Uzun bir süre hayatını Amerika Kıyı ve Jeodezik Etüd bölümünde kazandı, bu da ölçüme dair büyük tecrübeler edinme şansına sahip olduğu anlamına geliyordu. Daha sonra normal dağılım olarak adlandırılan "hatalar eğrisine" oldukça aşinaydı.

Peirce, tam da bizim 19. bölümde yaptığımız gibi normal yaklaşımla başlayarak, güven aralıkları kuramının gerekçesini çok açıkça ortaya koydu. Jacques Bernoulli, Laplace ve daha önceki yazarlar, çok önceleri temel fikirlere sahiplermiş gibi görünüyor. Teknik hassasiyeti de Jerzy Neyman'a borçluyuz. Fakat Peirce herkesten önce felsefi temeller oluşturdu ve bunu da büyük bir açıklıkla yaptı.

Tümevarım ve tündengelim mantığını yekpare bir şekilde özetledi:

- Bir argüman formunun öncülleri doğruyken sonucu da her zaman doğruysa bu argüman formu tümdengelimli olarak geçerlidir.
- Bir argüman formunun öncülleri doğruyken sonucu da genellikle doğruysa bu argüman formu tümevarımlı olarak iyidir.
- Bir argüman formunun öncülleri doğruyken sonucu da vakaların %95'inde doğruysa bu argüman formu tümevarımlı olarak %95 iyidir.

Bu da doğrudan doğruya bu bölümde tartışılan tümevarımdan "sakınma" problemine götürür. Ve Peirce'in kendisi de tek vakalık itirazın bu sakınmaya dair en ilginç problem olduğunu gördü.

Bütün bilimsel akıl yürütmelerin ya tümdengelimsel ya da tümevarımsal olduğunu düşünmedi. 2. bölümde gördüğümüz gibi onun üçüncü türdeki bilimsel akıl yürütmesi ki o buna "geri çıkarım" diyordu, kafa karıştırıcı ya da problemlili olan bir şey için en iyi açıklamayı bulmaya çalışmaktı.

Peirce felsefesinin birçok yerinde olasılık fikirlerinden faydalandı. Aynı ölçümleri yaparken olduğu gibi Bernoulli teoremine göre frekansların nasıl istikrara kavuşma eğiliminde olduklarına hayran kalmıştı. İnançları oluşturma şekillerimiz hakkında düşünmemiz için bunun iyi bir yol olduğunu düşündü. Bir deneyde gözlemlenen görelili bir frekans ilk olarak yanıltıcı olabilir, fakat sonunda istikrarlı bir olasılık halini alır. Tümevarımın da buna benzer bir şey olduğunu düşündü. *Kendi kendini düzelten* bir şey.

Bilimsel bir çalışan olarak, Peirce tek başına hiç kimse- nin istikrarlı hale gelen ölçümleri yapmadığını biliyordu. Dünyanın birçok yerinde birçok araştırmacı katkıda bulunmaktadır. Benzer bir şekilde, inançlar *kolektif sorgulamayla* yavaş yavaş istikrarlı hale gelir.

Peirce, gerçeğin kendisinin de soruşturmacılar topluluğunun, onun dediği gibi "kaderleri" haline gelecek olan inançlarından ayrı düşünülemediğini bile önerdi. Fakat topluluğumuzda gerçek bir inanca ve bunun gerçeği karak-

terize eden bir yol olduğunu düşünmeniz için bu inancın devam edeceğini ümit etmeye ihtiyacınız var.

Charles Sanders Peirce'in felsefesinin onu David Hume'un felsefesinden ayıran temel bir yönü vardır. Onunki tümevarımın çok ötesine geçiyor. Hume oldukça da bireysel bir şekilde *tecrübelerim, inançlarımı* nasıl şekillendiriyor diye düşündü. Peirce ise *sorgulamalarımız* temelinde *inançlarımızın* nasıl şekillendiğini kolektif ve toplumsal bir şekilde düşündü.

Alıştırımların Cevapları

BÖLÜM 1. MANTIK

1 Önermeler.

- (a) Evet.
- (b) Gazeteye güvenmediğim müddetçe ben de onun doğru olup olmadığını bilmiyorum.
- (c) Evet.
- (d) Evet.
- (e) Bir kere daha söylemek gerekirse, gazeteye güvenmediğim müddetçe ben de onun doğru olup olmadığını bilmiyorum. Yılanlarla ilgilenen bilim insanları arasında büyük bir tartışma olabilir. Bazıları bu adın, top pitonu yılanının kıvrılıp top haline gelme eğiliminden dolayı verilmediğini ifade ediyor. Buna karşın adı, meşhur kâşif ve yılan uzmanı Emily Ball'a atfen verilmiştir. Bu sorunun çözümü hiçbir zaman bulunmayabilir. Neden bu yılanı top pitonu dendiğinden hiçbir zaman emin olamayabiliriz. Gazetenin yazdığı şeyin doğru mu yanlış mı olduğunu bilemeyebiliriz. Fakat onun doğru ya da yanlış olduğunu biliyoruz.
- (f) Evet.
- (g) Hayır. Yılanlar Joe'ya çekici gelebilir, fakat muhtemelen diğer bazı insanlar yılanların itici ve ürkütücü olduğunu düşünüyorlar. Bu mantıkçıların önerme dediği bir ifade değildir, çünkü bir olgudan ziyade bir tutumu ifade ediyor.
- (h) Evet. Bu Joe'nun ne hissettiği ya da düşündüğü hakkında bir önermedir.
- (i) Hayır. Bu bir cümle bile değil. Dolayısıyla da bir önermeyi ifade etmiyor.
- (j) Hayır. Argodaki "pek de o kadar çılgına dönmüş değilim" ifadesi bir olguyu belirtmekten ziyade bir tutumu

ifade etme tarzıdır, onun için bunu bir önerme olarak saymayacağız.

(k) Hayır. Bir ünlemdir, bir önerme değil.

(l) Hayır. Bir sorudur, bir önerme değil.

(m) Bu biraz aldatıcı. Bir şeyin doğru ya da yanlış olması her zaman o kadar belirli değildir. Joe FedEx'in hatasından dolayı onun zararlarını karşılaması gerektiği gibi bir ifadeyi çok fazla söylemiyor.

(n) Evet.

2 *Tamamen yanlış.* Sonsuz sayıda saçma sapan örnekler vardır.

(a) *Geçerli:* Bütün atların başları tavukların başlarıdır. Bütün tavuklar balıktır. *Onun için*, bütün atların başları balıkların başlarıdır.

(b) *Geçersiz:* Bütün atların başları tavukların başlarıdır. Bütün balıklar tavuktur. *Onun için*, bütün atların başları balıkların başlarıdır.

(a) gibi bütün geçerli argümanlar geçerlilik için basit kıyasın yetmediğini gösterirler. (a)'nın geçerliliği ... *başı* ilişkisine bağlıdır. Hayvan kafaları hakkındaki bu örnek hem tumdengelim hem de tümevarım mantığına katkılar yapmış bir İngiliz mantıkçısı olan Augustus de Morgan (1806–1871) tarafından tam da bu hususu vurgulamak için kullanılmıştır.

3 *Akla yatkın olmayan.* (2a)'ya verilecek her doğru cevap sağlıksız olacaktır; çünkü öncüller yanlıştır. (2b)'ye verilecek her türlü doğru cevap sağlıksız olacaktır; çünkü hem geçersizdir, hem de yanlış öncülleri vardır.

4 *Kombinasyonlar.* Sadece (b) mümkün değildir. Bütün öncülleri doğru ve sonucu da yanlış olan bir argüman, tanımlı gereği geçersizdir.

5 *Akla yatkınlık.* Sadece (a) akla yatkındır. Akla yatkın argümanlar geçerlidir ve doğru öncülleri vardır.

6 *Koşullu önermeler.* (a) geçerli ya da geçersizdir. Bir argümandır. (b) doğru ya da yanlıştır. Koşullu, eğer–ise önermesidir.

- 7 *Tütün çiğnemek.* Dört argümanın hepsi de geçersizdir.
- 8 *Tümevarım beysbolu:* Dört argümanın hiçbirisi de değersiz değildir. 1988 yılındaki çiğneyenlerle, çiğnemeyenlerin sayılarının oldukça fazla olduğunu ve inceleyenler tarafından yedi takımın rastgele çekildiğini varsayarsak (7c) en kuvvetlisidir. (7a), (7b) ve (7d)'den hangisinin en zayıf olduğu konusunda farklı düşünebiliriz. Farklı nedenlerle eleştirilebilirler. Tümevarım mantığı tamamen bununla ilgili bir şeydir.

BÖLÜM 2. TÜMEVARIMSAL MANTIK NEDİR?

- 1 *Harçlar.*
- (a) Popülasyondan örnekleme.
 - (b) Örneklemden popülasyona.
 - (c) Popülasyondan örnekleme.
 - (d) Örneklemden örnekleme.
- 2 *Daha fazla harç.* (a) ve (b) mantıklı açıklama için çıkarımlardır. (c) tanıklığa dayalı bir çıkarımdır.
- 3.1. *Erkek çocukları ve kız çocukları.* (a) argümanı risklidir, çünkü sonuç yanlışken bütün öncüller doğru olabilir.
- 3.2. *Pia.* (e) daha riskli olan sonuçtur. (a) ile sadece bir kere risk alıyorsunuz; Pia aktif bir feminist olmayabilir. Fakat (e) ile üç risk alıyorsunuz; bir banka memuru olmayabilir, aktif bir feminist olmayabilir ve yoga dersleri almayabilir.
- 3.3. *Piyanolar.*
- (a) A'nın kazanma olasılığıyla B'nin kazanma olasılığı tamamen aynıdır. İki kişi aynı kombinasyondaki sayıyı seçerse ve büyük ödülü o kombinasyon kazanırsa, ikramiyeyi paylaşırlar. İnsanlar genelde düzenli görünen sayıları sevmezler, onun için başka birinin A'yı seçme olasılığı yine başka başka birinin B'yi seçme olasılığından azdır. Onun için A üstüne bahse girmiş ve kazanmışsam, B üstüne bahse girip kazanmama

göre ikramiye'nin daha büyük bir kısmını alırım. Dolayısıyla da A'yı seçerim.

- (b) Bunun riskli bir karar olduğu açık ve net değildir, çünkü ne olursa olsun hiçbir şey kaybetmiyorsunuz; piyango biletleri ücretsizdir. Ama pişman olma riskini taşıyorsunuz; A'yı seçerseniz ve B kazanırsa.

3.4. *Zar.* Hayır, bu riskli değildir. Geçerli bir argümandır.

3.5. *Taksiler.*

- (a) Evet.
- (b) Bunların riskli kararlar olduğunu düşünebilirsiniz, çünkü hem Amos'un hem de Daniel'in hâkime ya da jüri üyelerine ne diyeceklerine karar vermeleri gerekiyor.

3.6. *Boğaz ağrısı.* Risk hastanın boğazının ağrmasıdır ki tedaviye başlanmazsa durum hemen daha da kötüleşebilir.

4 *Ludwig van Beethoven.*

- (a) Mantıklı açıklama için çıkarım. Ne kadar mantıklı? Müzikologlar etkilenmiyorlar.
- (b) Birçok örnek açıklayıcı olabilir, örneğin Beethoven'ın yeni ortaya çıkan mektuplarında afyon aldığına beste yaptığını söylüyor. Daha da ilginç: Tuscon'da bir laboratuvar, Beethoven'ın saçının bir lülesindeki 582 telinde bestecinin yutmuş olduğu her türlü kimyasalın izlerini ortaya çıkaracak bir analiz yapıyor.

5 *Narin kürek balığı.*

- (a) "Normal olarak 200 metrenin altındaki derinliklerde yaşayan bir kürek balığı, ağlara takılırsa, büyük sarsıntılar pek de uzakta değil demektir." Bu Japon folklorünün tanıklık ettiği bir şeydir.
- (b) Sonuç: "Ne zaman bir kürek balığı ağa takılsa, jeolojik bir altüst oluş yaşanmaktadır ya da yaşanmaya başlayacaktır."
- (c) Örneklemeden popülasyona; tek bir kürek balığı yakalanmasından depremlere, kürek balığı ve depremler hakkındaki genel bir ifadeye.

(d) Mantıklı açıklama tarzı (i): Uzun şekliyle kürek balığı sersemlemiş ve sonra da yüzeye çıkmış olabilir.

Mantıklı açıklama tarzı (ii): Sismik aktivite esnasında yerkabuğundan zehirli gazlar çıkmıştır.

(e) İlk olarak, tanıklığa bağlı bir argüman yapılmıştır. İkinci olarak, örneklemden popülasyona bir tümevarım argümanı var. Üçüncü olarak, herhangi birisi doğruysa bunun sonucu tahmin edeceği mantıklı açıklama tarzı önerileri var. *Sonuç üç farklı türde riskli argümanla destekleniyor.*

6 *Kadın mühendisler.*

(a) "O gösterge özellikle zayıf."

(b) Geçerli (her ne kadar geçerlilik "özellikle zayıf" derken ne demek istediğimize bağlı olsa da).

7 *Plastik cerrahi.* En iyi açıklama tarzı için çıkarım.

8 *Manitoba esrarı.* Bu örneklemden popülasyona giden bir argümanı hatırlatıyor. Örneklem polisin hidroponik esrar kontrolü yaptığı evlerden oluşuyor. Popülasyon Manitoba'daki köy evlerinden oluşuyor.

BÖLÜM 3. KUMARBAZIN YANILGISI

1 *Rulet tekerlekleri.*

(a) Kuzey Amerika'da tekerleğin kırmızıda durma olasılığı 18/38'dir. Avrupa'da olasılık 18/37'dir. Dolayısıyla sadece kırmızıya bahis oynayacaksanız, Avrupa daha iyidir.

(b) Hayır.

2 *Karıştırma.*

(a) Evet. Birçok oyun boyunca, her kartın diğeri kadar ele alınması gerekir.

(b) Hayır.

(c) Hayır. FAKAT: Karıştırmadan sonra oyuncuların kartların sıralarını tahmin edebilmeleri pek ihtimal dâhilinde olmadığından dolayı elin bir hafızası olmasına rağmen hiçbirinin avantajlı bir durumu yoktur.

Böylece oyuncunun bakış açısından oyun, kelimenin diğer bir anlamıyla, "adildir."

- 3 *Loto*. Bu sanki karlı bir işmiş gibi görünüyor: Üstüne bahse girmek için daha az sayıda insan bu diziye seçiyorsa ve bu durumda bu çıkarsa, popüler bir bilet aldıklarında kazandıklarını paylaşacakları kişi sayısına göre bu şimdi daha az sayıda insanla paylaşacaklardır. FAKAT bunun gerçek bir olgu olduğunu nereden bilebilirim? Kumar hakkındaki popüler bir kitaptan aldıysam kitabın kendisinin de insanların davranışlarını değiştirdiğini hayal edebilirsiniz, onun için şimdi kitap bir süredir piyasada olduğundan dolayı bu en popüler bilettir.
- 4 *Rakamlar*.
 - (a) *Doğum ağırlıkları*. Gram olarak, son basamağın hilesiz ve önceki denemelerden bağımsız olmasını bekleriz. Fakat pound olarak 7 diğer bütün basamaklardan daha sıklıkla gelir, onun için de kurgu hilelidir. Ancak, denemeler hâlâ bağımsızdır (ikizler ya da daha kötüsü beşizler dışında).
 - (b) *Telefon direkleri*. Hilesiz ve bağımsız.
 - (c) *Kitaplar*. 1, 3, 7 ve 9'a karşı %100 hilesiz.
 - (d) *Kruvazör gemiler*. Hilesiz ve bağımsız.
- 5 Yanılan Kumarbaz *misilleme yapıyor*.
 - (a) Hayır. *Yanılan Kumarbaz* makul bir şekilde "13 siyahın, uzun dönem" olarak sayıldığını farz ediyor ve Dr. Marbe'in verisine göre 12 siyah dizisini takip eden kırımızın siyahın takip ettiği 12 siyahtan daha sık geldiği sonucuna varıyor. Şüphesiz kayıtlara girip baktığımızda, Marbe'in atıfta bulunduğu şeyin daha uzun dönemler olduğu ortaya çıkabilir, fakat yine de *Yanılan Kumarbaz* kumarbazın yanılışına düşmüyordu.
 - (b) Burada *bir* olası açıklama var: Rulet tekerleklerini döndüren kurpiyerler insanların tekerleğin hileli olduğunu hayal edeceklerini bundan dolayı da kasanın sahtekâr olduğunu düşüneceklerini düşünürler. Bunun için uzunca bir dönemden sonra, uzun dönemi

kırmak üzere tekerleği döndürmek için ellerinden geleni yaparlar. *Ya da* kasanın kendisi bilerek tekerleğin arkasına mekanik bir "düzeltici" koyar ki kurpiyer düğmeye bastığında, kırmızı birçok defa görüldüğünde tekerlekte siyaha doğru hile yapar veya tersi olur.

- 6 *Sayma.* Önceki ellerdeki hangi kâğıtların avantaj yarattığını hatırlayabilen birisi. Örneğin küçük sayılı kâğıtların zaten çıkmış olduğunu biliyorsanız, bu durumda yüksek sayılı bir kartın çıkma olasılığı, başlangıca göre daha fazlasıdır. Bu bilgiyi kullanarak olasılık oranlarını iyileştirmek mümkündür. Çok fazla sermayeye ihtiyac duyarsınız, çünkü büyük bahisler yapmanız ve bazen de kaybetmeniz gerekir. Thorpe adında bir matematikçi "sayma" olarak bilinen kusursuz bir kumar sistemi yaptı. Şimdi artık gazinoların çoğu kuralları değiştirdi ve her oyun için yeni bir deste kullanıyorlar.

7 *Amerika'da askere alma.*

- (a) Yerine koymadan örnekleme.
- (b) İstatistikçiler aslında veriyi analiz etti ve yılın önceki kısmına dair bir hile olduğunu gösterdi.
- (c) Kurgu adil değildi. Yılın ilk dönemlerinde doğduysanız, kurgunun "sizin için adil olduğunu" hissedersiniz. Fakat doğum tarihlerinin de bir şekilde rastgele belirlendiğini düşünürseniz, bu durumda sistemin yeterince adil olduğunu hissedebilirsiniz. En azından zengin olanların yerine fakir insanların seçilmesinde bir hile yoktu.
- (d) İşte size tamamen farklı iki açıklama tarzı. *Dikkatsizlik:* Toplar iyi sallanıp karıştırılmamış. Başlangıçta genç kadınlar iyice dipten tarama yapıp çekiliş kutusunun etrafında karıştırdılar ve böylece çekilişte ciddi bir hile yoktu. Fakat daha sonra sıkıldılar ve ellerine gelen ilk topu aldılar ve de düşük sayılar yüzeye yakındı. *Hile:* Genç kadınların kasım ve aralıkta doğan erkek kardeşleri vardı. Topların üzerlerinde bir, iki ya da üç basamaktan hangileri olduğunu görebiliyorlar-

d1. Güvenli bir şekilde alabilecekleri zamanlarda bir ya da iki basamaklı topları aldılar. Not: Birinci açıklama tarzını seçmek için elimizde çok neden var. Bilinçli hile yapıldığına dair hiçbir kanıt yoktu.

8 *X ışınları.* Örneğin *Sara* ısrar edebilirdi: "Hayır, hayır, *X* ışınlarının etkisi kümülatif değildir! Çünkü bir ışın bir hücreye zarar verdiğinde, kanser gelişmesi olasılığı düşüktür, fakat hasar gören iki hücre tehlikeyi iki katından fazla arttırır ve benzeri." *Diş hekimi:* "Bu saçma. *X* ışınlarının dozları bağımsızdır ..." *Sara* araya girer, "Hayır, benim dediğim şu, bağımsız değiller, çünkü vücudunuzun bir 'hafızası' vardır: Bir hücreye hasar verilirse, bunun sonucunda hasar verilen ikinci hücrenin yaptığı etki daha büyük olur ..."

9 *Kuru bir ağustos.* Bu kumarbazın yanılışına dair bir örnek değildir, çünkü bağımsız denemelerin bağımsız olduğunu farz etmemiz için bize bir neden sunulmuyor (verili bir ayda yeterince yağmur yağıp yağmadığı).

Fakat kumarbazın yanılışına düşmese bile argüman yanıltıcıdır. İşte bunun yanılgılı olduğunu gösteren durumlardan birisi. Bildiğimiz kadarıyla, 6 ay boyunca hiç yağmur yağmamışsa, bir sonraki ayda da yağmur yağmayacaktır. Örneğin ilk 7 ayda hiç yağmur yağmaması temelinde 8. ayda yağmur yağmasının koşullu olasılığı 0 olabilir. (Bu hikâye Marcel Pagnol'un yazdığı Fransızca bir romandan alınmıştır ve bundan da *Jean de Florette* filmi yapılmıştır.)

10 *Ters kumarbaz yanılışı.*

(a) $1/6 \times 1/6 \times 1/6 \times 1/6 = 1/1296$.

(b) Evet. İki hipotezi karşılaştırdığımızı farz edin; 900 kere zar attığını ve sadece bir kere zar attığını. 900 atmada en az bir kere art arda 4 defa 6 atma olasılığı neredeyse kesin olarak $1/2$ 'dir. 1 kere zar atınca art arda 4 defa 6 atma olasılığıysa $1/1300$ 'dür. Onun için Nelson haklıdır, Trapper'in sadece bir kere zar atmak-tan ziyade birçok kere, diyelim 900 kere zar attığı çok

muhtemeldir. (Bu $1/2$ rakamını nereden bulduk? Yani, 2 kere zar atmada art arda 4 defa 6 gelmeme olasılığı $[1295/1296 \times 1295/1296]$ 'dır. 900 kere zar atmada art arda 4 defa 6 gelmeme olasılığı $[1295/1296]^{900} \approx 0,499$, bundan dolayı da arka arkaya 4 kere 6 atma olasılığı 0,501'dir.)

- (c) Hayır. Örneğin farz edin ki Lucie Albert'in 899 defa zar attığını tahmin etti ve bu atışı da 900. atış 899 atışta ne olmuş olursa olsun, Albert'in 900. atışta art arda 4 defa 6 atma olasılığı yaklaşık olarak $1/300$ 'dür; akşamki ilk zar atışındakiyle tamamen aynı. Lucie'nin hatasına ters kumarbaz yanılıgısı diyoruz.

11 Şanslı teyze.

(a) Evet.

- (b) 10. sorudaki nedenlerle kesinlikle hayır. Fakat biraz daha fazla bilgi kullanabilir, birazcık insan psikolojisine bakabilirsiniz. Teyze basitçe şöyle bir karar vermiş olabilir, "şimdi 70 yaşımdayım, azıcık da olsa aşna fişne yapacak bir yaştayım." Fakat tipik olarak bir piyango bileti alan insanlar düzenli olarak bilet alırlar. Ve bir de "seçim etkisi" var. Kazanmadığında teyzeniz açıp size telefon etmiyor. Onun için teyzenizin haftalardır oynadığını tahmin etmek mantıklı olabilir; fakat şüphesiz *sadece* bu defa kazanmış olmasını kanıt göstererek değil.

- 12 *Bir tasarım argümanı.* Hayır. Ters kumarbaz yanılıgısına düşüyor. Bunun miadının artık dolduğunu, çünkü artık evrenimizin Büyük Patlamayla yaratıldığına inanıyoruz. Fakat seçkin kozmolog John Wheeler seri evrenleri, evrenlerin yaratıldığını ve son bulduklarını, bunları da Büyük Patlamanın takip ettiğini düşünmemizi teşvik etmektedir... Günümüzün "ayarlanmış" evrenini birçok evrenlerin var olmuş olduğu hipoteziyle anlayabileceğimiz argümanını yapmıştır, öyle ki sadece bir tesadüf eseri olarak bizimki gibi ayarlanmış bir evren elde edebiliriz.

BÖLÜM 4. TEMEL OLASILIK FİKİRLERİ

- 1 *Galileo*. Hem 9 hem de 10, 6 şekilde oluşabileceğinden dolayı her ikisinin olasılığının da eşit olduğunu düşünebilirsiniz:

[9] : {1,2,6} {1,3,5} {2,3,4} {1,4,4} {2,2,5} {3,3,3}

[10] : {1,3,6} {1,4,5} {2,3,5} {2,2,6} {2,4,4} {3,3,4}.

Aslında üç farklı rakamla oluşturulan ilk üç sonucun olasılıkları eşittir. Sadece iki farklı rakamlı sonraki iki sonucun olasılıkları eşittir. Fakat {3,3,3} sonucunun tek bir şekli vardır ve olasılığı da $1/216$ 'dır. {3,3,4} = { (3,3,4) ya da (3,4,3) ya da (4,3,3) } ve olasılığı da $(3/216 = 1/72)$. O halde 10'un olasılığı 9'unkinden fazladır.

- 2 *Tek kart.*

- (a) $4/13$.
(b) $11/26$.

- 3 *İki kart.*

- (a) $1/16$.
(b) $(1/4) \times (12/51) = 3/51$.
(c) $9/16$.
(d) $(3/4) \times (38/51) = 19/34$.

- 4 *Okçuluk.*

- (a) 0,02
(b) 0,04. Boğanın gözüne ve sonra da üçüncü daireye vurma olasılığı 0,02'dir ve üçüncü daireye sonra da boğanın gözüne vurma olasılığı 0,02'dir, ki bu da toplam olarak 0,04 yapar.
(c) 0,1.

- 5 *Bebek bezinden çocuk felci*. Buna *harfiyen* anlam yükleyeceğim tek şey bebek bezinden *çocuk felci* kapılmasının çok, çok nadir bir durum olmasıdır. Belki de Dr. Wale son üç milyonluk *çocuk felci* aşısında buna benzer sadece tek bir vakanın olduğunu söylemek istedi. Kuzenimize baktığınızda ve bir sigorta şirketine gittiğinizde ve burada

da onun bezinden çocuk felci kapmanıza karşı 3 milyon dolarlık sigorta poliçesi istediğinizde, sizden sadece 1 dolarlık bir prim kesmeleri gerektiğini demiş olabilirler. Bebek bezinden çocuk felci kapmanın göreceli frekansının sadece üç milyon iğnede bir olduğunu demek istemiş olabilir. Fakat tek bir nadir ögeye dayalı olan, bunun gibi ufaklık ihtimal dışlıklar, “çok nadirin” dışında hemen hemen hiçbir şey ifade etmezler. Siz de bunun gibi görüşleri çoğu zaman bir bilim değil de bir retorik olarak ele almalısınız.

- 6 *Diller*. Soru çok zekice değil. 2. soruda, “şöyle şöyle bir şeyin (doğru olma) ihtimali nedir” diye soruluyor: *Önerme* konuşması. 3. soruda şöyle şöyle bir şeyin (meydana gelme) ihtimali nedir diye soruluyor: *Olay* konuşması. Fakat 2. ve 3. sorunun benzer soruları sormanın farklı iki yolu olduğu bellidir. Benzer bir şekilde, 4. sorunun önerme dilini ve 5. sorunun da olay dilini kullandığını söyleyebilirsiniz.

BÖLÜM 5. KOŞULLU OLASILIK

- 1 *Tenis hakkında sahte kesinlik*. Bu kadar basamak sayısının fazla bir anlamı yok. Belki de Ivan $\%37,5 = 3/8$ ya da Stefan’a karşı olan 5’e 3 olasılığı demek istedi. Alınacak ders: Sayılara aldanmayın. Bazen sadece iyi görünürler. Ivan’ınki iyi bilinen bir gösteriştir. Bu arada, Stefan kazandı.
- 2 *Isı lambaları*. Mağazadan bir lampa alındığında, $T = \text{Tropicana}$ tarafından yapılan lampa olsun, $F = \text{Florida}$ tarafından yapılan şamba olsun, $B =$ standart altı olan lampa olsun.
- $\Pr(T) = 0,4$ $\Pr(F) = 0,6$ $\Pr(B/T) = 0,03$ $\Pr(B/F) = 0,06$
- (a) $\Pr(T \& B) = 0,012$.
- (b) $\Pr(B) = \Pr[(T \& B) \vee (F \& B)] = \Pr(T \& B) + \Pr(F \& B) = 0,012 + 0,036 = 0,048$.
- (c) $\Pr(T/B) = 1/4$.

- 3 *Üçgen.* T, çocuğun üçgende yaşadığı bir şehir olsun. $\sim T$, çocuğun üçgende yaşamadığı bir şehir olsun. P, testi pozitif olan bir çocuk olsun.

$$\Pr(T) = 0,02 \quad \Pr(P/T) = 0,14 \quad \Pr(P/\sim T) = 0,01$$

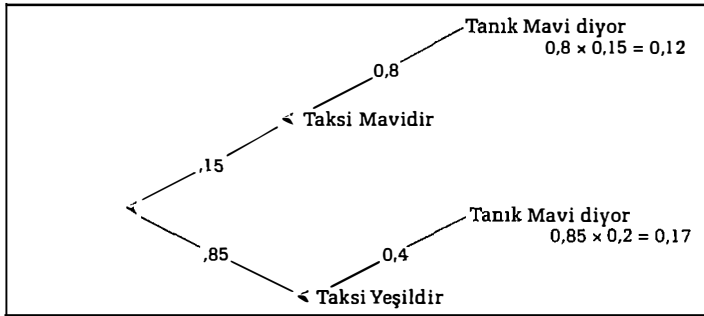
(a) $\Pr(T \& P) = 0,028$.

(b) $\Pr(P) = 0,0028 + 0,0098 = 0,0126$.

(c) $\Pr(T/P) = 2/9 (\approx 0,22)$. Kesirlerin nasıl birbirini götürdüğüne dikkat edin. $28/126 = 14/63 = 2/9$.

Bu egzersizlerin çoğunu hesap makinası yerine aklınızdan yaparsanız daha çabuk yapabilirsiniz.

4. Taksiler.



Olasılık (Taksi mavidir/Tanık mavi diyor) = $0,12 / (0,12 + 0,29) \approx 0,41$.

6. bölümde mavi taksiler için temel oran 0,15 olarak alınıyor. Şemaya göre kasabada 100 taksi varsa, 15'i mavi ve 85'i yeşil, bu durumda "%80 güvenilir" tanık, ortalama olarak 12 rastgele sunulan mavi taksiyi mavi olarak seçecek ve 29 adet rastgele sunulan yeşil taksiyi de mavi olarak seçecektir. Temel oran tanığın güvenilirliğini bastırır.

- 5 *Laplace'ın şaşırtma sorusu.* 4. bölümden biliyoruz ki:

$$\Pr(\text{Çekilen birinci top kırmızıdır}) = 1/2.$$

$$\Pr(\text{Çekilen birinci top kırmızıdır} \& \text{Çekilen ikinci top kırmızıdır}) = 5/16.$$

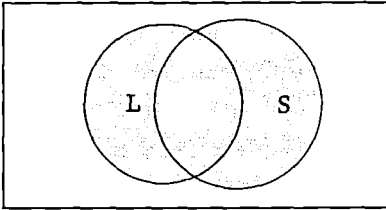
$$\text{Dolayısıyla } \Pr(\text{Çekilen ikinci top kırmızıdır} / \text{Çekilen birinci top kırmızıdır}) = 10 - 16 = 5/8.$$

- 6 *Soruyu anlamak.* Önce bir kırmızı çekmemiz koşuluyla,

ikinci bir kırmızı çekmemizin koşullu olasılığı $1/2$ 'den büyüktür. O halde her ne kadar önce bir kırmızı çekmenin olasılığı $1/2$ ise de, iki adet kırmızı çekmenin olasılığı $\frac{1}{2} \times 1/2$ DEĞİLDİR. Aslında, $(1/2) \cdot (5/8) = 5/16$ 'dır.

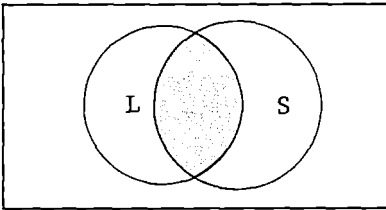
BÖLÜM 6. OLASILIĞIN TEMEL KURALLARI

1 Venn Şemaları. (a) $\Pr(L \vee S)$

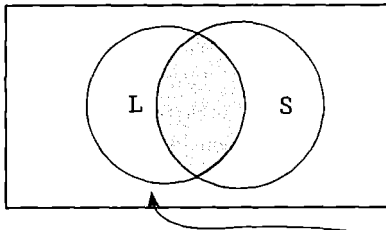


Diktörgeenin alanı 1; taralı bölgenin alanı kişinin sigara içmesi ya da akciğer hastalığı kapması ya da her ikisinin olasılığını temsil etmektedir.

(b) $\Pr(L/S)$



(c) $\Pr(S/L)$



Taralı kesişme alanının alanına oranı
koşullu olasılığı temsil eder.

2 *Toplam olasılık.*

$\Pr(A) + \Pr(\sim A) = \Pr(A \vee \sim A)$ toplanabilirlik kuralıyla.

$A \vee \sim A$ mantıksal olarak Ω 'ya eşdeğerdir.

$\Pr(\Omega) = 1$ normallik kuralıyla.

Böylece mantıksal eşdeğerlilik varsayımıyla (bkz. 6. bölüm)

$\Pr(A) + \Pr(\sim A) = 1$.

3 *Çarpım.* $0 < \Pr(A)$ iken ve $0 < \Pr(B)$ iken, bu durumda

$\Pr(A/B) = \Pr(A \& B) / \Pr(B)$ tanım yoluyla.

O halde $\Pr(A \& B) = \Pr(A/B) \Pr(B)$.

A ve B istatistiksel olarak bağımsızsalar $\Pr(A/B) = \Pr(A)$.

Böylece $\Pr(A \& B) = \Pr(A) \Pr(B)$ olur.

4 *Uzlaşımlar.* Çeşitli ihtimaller vardır. İşte size ikisi:

- (i) *Sonsuz olasılıklar.* Kesin bir önerme ya da olayın olasılığı $+\infty$ 'dur. İmkânsız bir önerme ya da olayın olasılığı $-\infty$ 'dur.

Bunun $\Pr(\Omega) = 1$ uzlaşımımızdan daha iyi olduğunu düşünebilirdiniz. Şöyle derdiniz: Gerçek dünya hakkındaki hiçbir önerme *aslında tamamen* kesin değildir. Onun için gerçek dünyaya dair herhangi bir önerme, istediğiniz kadar büyük ve sonlu bir sayı olabilir, fakat hiçbir zaman sonsuz olamaz.

Bu uzlaşımında, herhangi bir A olayı ya da önermesi için

- (i) A ve $\sim A$ eşit derecede olasıysa bu durumda $\Pr(A) = \Pr(\sim A) = 0$ olur.

- (ii) A, $\sim A$ 'dan daha olasıysa bu durumda $0 \leq \Pr(A)$ olur.

- (iii) $\sim A$, A'dan daha olasıysa bu durumda $\Pr(A) \leq 0$ olur.

Ancak bu bizi fazla ileriye götürmez. Olağan uzlaşımın güzel olan tarafı karşılıklı olarak birbirini dışlayan ya da bağımsız olan olayların toplama ve çarpmasının çok düzenli olmasıdır.

- (ii) *Üst ve alt olasılıklar.* Bir olayın olasılığı bir aralıkla temsil edilir (p, p^*). Bu inanç-tipi olasılıklar için özellikle akla yatkındır. İnançlarımızın çoğu pek de kesin gibi görünmüyor. Gerçekten kesin olan olayların hâlâ $p = p^* = 1$ olasılıkları olurdu ve elimizde de: $0 \leq p \leq p^* \leq 1$ olurdu.

Üst ve alt olasılıklara dair uygulanabilir bir kuram var, fakat anaakım olasılık kuramında kendisine sağlam bir yer bulamadı.

- 5 *Teröristler.* Bir şakayı, onu mahvetmeden açıklayamazsınız! Şaka koşullu olasılık ve istatistiksel bağımsızlığa dair bir oyundur.

Gözlem 1. Diyelim ki bir uçağa bomba yerleştirmek isteyen bir teröristin olasılığı dakik bir şey. İki teröristin aynı uçağa birbirinden bağımsız olarak bomba yerleştirmesi küçük ve anlamsız bir sayı olsun ve buna da trilyonda bir deyin. O halde Black haklıdır: "Uçağınızda birbirinden bağımsız iki bomba olması riski neredeyse sıfırdır."

Gözlem 2. Fakat öğrencinin uçağa bomba götürmesi verildiğinde, riski pratik olarak sıfıra indirmek için uçağa bomba götürmeyi düşünen öğrenci, bir teröristin uçağına bomba götürme olasılığını bilmek durumundadır. Bu iki olay istatistiksel olarak bağımsızsa öğrencinin bombası verildiğinde, terörist bir bombanın koşullu olasılığı sadece bir terörist bombasının olasılığı olur. Risk değişmemiştir.

BÖLÜM 7. BAYES KURALI

- 1 [2(c)]: *Isı lambaları.*

$$Pr(T/B) = \frac{Pr(T)Pr(B/T)}{Pr(T)Pr(B/T) + Pr(F)Pr(B/F)} = \frac{0,4 \times 0,03}{(0,4 \times 0,03) + (0,6 \times 0,06)} = \frac{1}{4}$$

[3(c)]: *Üçgenler.*

$$Pr(T/P) = \frac{Pr(T)Pr(P/T)}{Pr(T)Pr(P/T) + Pr(\sim T)Pr(P/\sim T)} = \frac{0,02 \times 0,14}{(0,02 \times 0,14) + (0,98 \times 0,01)} = \frac{2}{9}$$

- 2 *Çifte çekim.*

(a) Yerine koyarak:

$$Pr(A/RR) = \frac{Pr(A)Pr(RR/A)}{Pr(A)Pr(RR/A) + Pr(B)Pr(RR/B)} = \frac{0,5 \times (0,6 \times 0,6)}{0,5 \times (0,6 \times 0,6) + 0,5 \times (0,1 \times 0,1)} = 36/37 \approx 0,973$$

(b) Yerine koymadan:

$$Pr(A/RR) = \frac{0,5 \times (0,6 \times 59/99)}{0,5 \times (0,6 \times 59/99) + 0,5 \times (0,1 \times 9/99)} = 354/363 \approx 0,975$$

100'lük küçük bir popülasyonla bile yerine koyarak ve yerine koymadan alınan örneklemelerin arasında ne kadar küçük bir fark olduğuna dikkat ediniz.

- 3 *Testler.* S, öğrenci ciddidir olsun. $\sim S$, öğrenci ciddi değildir olsun.

C, soru doğru olarak cevaplandı. CC, iki soru doğru olarak cevaplandı. Öğretmen her iki soruya da rastgele baktığından dolayı bağımsızlık olduğunu varsayabiliriz.

$$Pr(S) = 3/4$$

$$Pr(\sim S) = 1/4$$

$$Pr(C/S) = 3/4$$

$$Pr(C/\sim S) = 1/2$$

$$Pr(S/CC) = \frac{Pr(S)Pr(CC/S)}{Pr(S)Pr(CC/S) + Pr(\sim S)Pr(CC/\sim S)} = \frac{(3/4) \times (3/4) \times (3/4)}{[3/4 \times 3/4 \times 3/4] + [1/4 \times 1/2 \times 1/2]} = 27/31$$

4 *Halterciler.*

(a) Koç, daha temiz olan takımı gönderdi, fakat komite rastgele bir kullanıcı seçti ve steroid takımının gönderilmesine karar verdi.

(b) Pr (daha temiz olan takım / bir kullanıcı tespit edildi):
 $Pr(C/U) = 0,2$.

(c) 5. bölümdeki sonuçları kullanarak $Pr(C/U_1 \& U_2) = 1/29 < 0,04$.

5 *Üç hipotez.*

$$(a) Pr(F/E) = \frac{Pr(F)Pr(E/F)}{Pr(F)Pr(E/F) + Pr(G)Pr(E/G) + Pr(H)Pr(E/H)}$$

(b) Tanımla $\Pr(F/E) = \Pr(F \& E)/\Pr(E)$.

Mantıksal eşitlilikle $\Pr(F \& E) = \Pr(E \& F)$, ki bu da $\Pr(F)$ $\Pr(E/F)$ 'ye eşittir.

Bu da gerekli olan paydır. Paydaya gelince,

E mantıksal olarak $(E \& F) \vee (E \& G) \vee (E \& H)$ 'ye eşdeğerdir.

Ayrık olanlar karşılıklı olarak birbirlerini dışladıklarından dolayı toplanabilirlik kuralıyla,

$$\Pr(E) = \Pr(F)\Pr(E/F) + \Pr(G)\Pr(E/G) + \Pr(H)\Pr(E/H).$$

- 6 *Bilgisayar çökmeleri.* C, Sophia'nın bilgisayarının çökmeleri olsun.

F, Sophia'nın bilgisayar çalışıyor. Sis. G, Golem çalışıyor. H, Hotshot çalışıyor.

$$\Pr(C/F) = 0,1 \quad \Pr(C/G) = 0,2 \quad \Pr(C/H) = 0,3$$

$$\Pr(F) = 0,6 \quad \Pr(G) = 0,3 \quad \Pr(H) = 0,1$$

$$\Pr(H/C) = (0,1 \times 0,3) / [(0,1 \times 0,3) + (0,3 \times 0,2) + (0,6 \times 0,1)] = 1/5 = 0,2$$

- 7 *Hırsızları caydırma.* A, rastgele Ali'nin seçilmesi; J, rastgele Jenny'nin seçilmesi ve L, rastgele Larry'nin seçilmesi olsun. B, rastgele seçilen birisi geçen yıl hırsızlığa maruz kalmış olsun.

$$\Pr(B/A) = 0,4 \quad \Pr(B/J) = 0,1 \quad \Pr(B/L) = 0,6$$

$$\Pr(A) = \Pr(J) = \Pr(L) = 1/3$$

$$\Pr(A/B) = \frac{\Pr(A)\Pr(B/A)}{\Pr(A)\Pr(B/A) + \Pr(J)\Pr(B/J) + \Pr(L)\Pr(B/L)} = 4/11$$

olması gerekir.

Bu olasılık sosyolog tarafından verilen muazzam bilgiye dayalıdır. Onun mektubunda ifade edilen şeye inanmadığımdan dolayı ona yazdım ve kafasında daha karmaşık bir istatistik olduğunu keşfettim. Demek ki olasılığa dair argüman *akla yatkın değildir*, çünkü hırsızlık oranları hakkındaki öncüllerden birisi tamamen yanlış.

BÖLÜM 8. BEKLENEN DEĞER

- 1 *Kış seyahati.* Şüphesiz her ikisi de olabilirdi, fakat en önemli olan şey fayda hakkındaki anlaşmazlıktır.

Olasılık üzerindeki anlaşmazlık: Ben bir kötümserim, kar yağmasının olası olduğunu düşünüyorum ve kötü bir fırtına olursa trafiğin tamamen arapsaçına döneceğini düşünüyorum. Oliver ise kötü bir fırtınanın pek ihtimal dâhilinde olmadığını ve trafikteki kaosun benim düşündüğüm kadar olmayacağını düşünüyor.

Fayda üzerindeki anlaşmazlık: Ben karda saplanıp kalmanın zahmetinin ve güçlüğünün –negatif fayda– çok fazla olduğunu düşünüyorum. Oliver bunu pek önemsemiyor. Fakat metroyla çok uzun süre seyahat etmenin olumsuz faydasının oldukça fazla olduğunu düşünüyor. Bense araba sürmeyi metroya tercih ederim.

- 2 *Reklam cazibesi.* –20 sent. Bedava kuponların değeri bile basılmış oldukları kâğıttan azdır.
- 3 *Sokak satıcısı: Cezalar uygulanmıyor.* $Bek(W) = 200 \text{ dolar} - [(0,4)(0,2)(100 \text{ dolar})] = 192 \text{ dolar}.$
- 4 *Kötü bir patronu olan sokak satıcısı.* $Bek(W) = 150 \text{ dolar} - [(0,4)(0,25)(0,2)(100 \text{ dolar})] = 148 \text{ dolar}.$
- 5 *Mümkün olan dünyaların en iyisi.* En iyi sistem (3)'tür, en kötüsüyse (4)'tür.
- 6 *Sigorta.*

(a) Hem saati hem de arabayı kaybetmenin olasılığı: $(1/900)(1/30) = 1 / 27.000.$

Sadece saati kaybetmenin olasılığı: $(1/30)(899/900) = 899/27.000.$

Sadece arabayı kaybetmenin olasılığı: $(1/900)(29/30) = 29/27.000.$

Hiç hırsızlık olmaması ihtimali: $(899/900)(29/30) = 26.071/27.000.$

- (b) D'nin dört olası sonucu: Hiçbir şey çalınmıyor, sadece saat çalınıyor, sadece araba çalınıyor, her ikisi de çalınıyor.

$Bek(D) = 0 - (1/27.000)(899)(600) + 29(5400) + 6000$ dolar
 $= -(234)/9$ dolar $\approx -26,00$ dolar

- (c) I'in sonuçları. Her türlü olayda William'ın 60 dolar ödemesi gerekiyor; çalınma durumunda kayıpları sadece daha önceki kaybın %10'u: $Bek(I) = -60$ dolar $- 2,60$ dolar $= -62,60$ dolar.
- (d) "Sigortalama" eyleminin beklenen değeri aslında çok daha kötüdür, sigorta yapmamaya göre iki kattan fazla kötüdür. Fakat William sigorta yaptırabilir, çünkü riskten kaçınan biridir. Ya da sahip olduğu ve el üstünde tuttuğu şeyleri kaybetmesinin fayda değeri parasal değerinden çok daha fazladır. Ya da hakikaten 60 doları verebilir, fakat arabasını kaybederse, başka bir araba da alamaz.
- (e) Hayır, tanım gereği istatistiksel olarak bağımsız değiller.
- (f) $Bek(D)$ kayda değer oranda daha negatif hale geliyor. Sigorta $Bek(I)$ üzerindeki etkinin daha az olması anlamına gelir ki bu da biraz daha negatif hale gelir. Yine de, $Bek(I) < Bek(D)$.

7 *Katlanarak artmak.* Bu martingale üzerinde bir varyasyondur. Eninde sonunda *Slick Jim* bütün sermayesini kaybedecektir.

8 *Moskova oyunu.*

(a) $(1/2)^{40} \approx 9 \times 10^{-13}$ ya da 10 milyon milyonda bir.

(b) Evet.

(c) 40 dolar.

(d) 40 dolardan fazla kazanmanız gerekir. Bundan dolayı birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü ya da beşinci atışlarda tura gelirse kaybedersiniz. (Altıncı atışta, yazı gelirse, 24 dolar kazanırsınız.) Arka arkaya 40 defa yazı gelirse de kaybedersiniz. Böylece biraz para kazanmanın olasılığı:

$[1 - (1, 2, 3, 4, 5 \text{ ya da } 40. \text{ atışlarda } T \text{ gelmemesinin olasılığı})] = 1/32 - 2^{-40}$

(e) Turayı takip eden 29 yazı. Fakat banka vadeli petrol

fiyatları üzerinde spekülasyon yapıyorsa, banka daha iflas etmeden arka arkaya 30 defa yazı gelmesini beklemeniz gerekmiyor.

BÖLÜM 9. BEKLENEN DEĞERİN MAKSİMİZE EDİLMESİ

- 1 *Kilitleme.* Eylem K: Bir Kryptonite kilit satın alın. Eylem L: Ucuz ve basit bir kilit alın. Sonuç S: Bisikletiniz çalındı. Sonuç N: Bisikletiniz çalınmadı.

$U(S) = -80$ dolar. Zaten paranızı harcadınız, onun için bisikletinizi kaybetmemenin bundan öteye vereceği fayda $U(N) = 0$ 'dır.

$$\text{Bek}(K) = [\text{Pr}(S/K)][U(S) - 20 \text{ dolar}] + [\text{Pr}(N/K)][U(N) - 20 \text{ dolar}] = 0 + (-20 \text{ dolar}) = -20 \text{ dolar}.$$

$$\text{Bek}(L) = [\text{Pr}(S/L)][U(S) - 8 \text{ dolar}] + [\text{Pr}(N/L)][U(N) - 8 \text{ dolar}] = 0,1(-88 \text{ dolar}) + 0,9(-8 \text{ dolar}) = -16 \text{ dolar}.$$

Onun için beklenen değeri maksimize etmek istiyorsanız, ucuz ve basit olan kilidi satın almalısınız.

- 2 *Sıkıntılı Durum.* 40 dolardan fazla.
- 3 *Tekrarlanan kayıplar.* Hayır. Beklenen değerler öncekiyle tamamen aynıdır. Kryptonite kilidi satın almanın tek rasyonelitesi:
- Bisikletinizin çalınması olgusunun sizin basit ve ucuz bir bağlama kilidiyle çalınma ihtimalinin %10'dan fazla olduğunun farkına varmanızı sağlaması olurdu. (Fakat nadir bir olayın bir kere yaşanması sizi nasıl böyle bir sonucu götürebilir?) Ya da,
 - Evden yaklaşık olarak 7 kilometre uzakta oturan bir arkadaşınızı ziyaret ederken bisikletinizi kaybettiğinizi fark etmenizin gerçek bir güçlük olduğunu sağlaması olurdu. Bunun bir kere daha başınıza gelmesini istemiyorsunuz. Uygunsuzluğu -40 dolardan daha kötü bir şey olarak değerlendiriyorsunuz.
- 4 *İleriye yönelik planlama.* Hayır, fakat hesaplama karmaşık hale geliyor. Bu durumda basit ve ucuz bir kilit almanın sonuçları:

N: Çalınmadı.

SN: Bisiklet çalındı, yeni bir bisiklet al, 88 dolara kilit al ve kilitle, fakat ikinci bisiklet çalınmıyor.

SS: Bisiklet çalınıyor, yeni bir bisiklet al, 88 dolara kilit al ve kilitle, fakat ikinci bisiklet de çalınıyor.

Bek(L) = -8 dolar - (0,1)[88 dolar + (0,1)(80 dolar)] = -17,60 dolar.

O halde basit ve ucuz bir kilit almakla *hâlâ* beklenen değeri maksimize ediyorsunuz.

- 5 *İlk olarak bilgece davranmak?* Basit ve ucuz kilit *hâlâ*, Bek(L) = -8 dolar - (0,1)[108 dolar] = -18,80 dolarla beklenen değeri maksimize ediyor.
- 6 *Sigorta yok.* Arkadaşımanın katastrofik duruma karşı sağlık sigortası var; yani, katastrofik bir hastalığa yakalanacak olsa ya da böyle bir kazayla karşı karşıya kalsa sigorta bunu fazlasıyla karşılıyor. Bekârken, en fazla bütün elindekileri kaybetme riskiyle karşı karşıyaydı ve o kadar şanslıydı ki her şeye yeni baştan başlayabilirdi. Yani onun için bir kazanın getirdiği faydasızlık oldukça küçüktü. Arkadaşım mükemmel derecede rasyonel davrandığını düşündü, çünkü çoğu durumda olduğu gibi sigorta satın almanın beklenen değeri sigorta yaptırmamanın beklenen değerinden daha düşüktü. Evlendiği zaman evini kaybetme, ailesine zarar verme riskini alıyordu, çünkü bu durumda yeniden başlaması biraz zaman alır. Onun için her ne kadar olasılıkları değerlendirmesi değişmiş olsa da, onun fayda yapısı değişti.
- 7 *Uty ve Duty.* Uty arkadaşımınla aynı fikirde olabilir. Duty ise ayrı fikirdedir. Arkadaşım çok bencildir, çünkü araba sürdüğü müddetçe sahip olduğu varlıkların dışında zarar verdiği hiç kimsenin sigortasını yaptıрма riskini almadı. Duty ise hareketlerimizle zarar verebileceğimiz herkese yardımcı olabilmek gibi bir yükümlülüğümüz olduğunu söylerdi.
- 8 *Atomlar ve kömür.* Yapacağınız tartışma, uzay aracı hakkında yapacağınız tartışmaya benzeyecektir.

- 9 *En uzun köprü.* Diğer şeyler yanında, eleştirmen, ister iklim nedeniyle isterse de köprünün ayakları nedeniyle olsun tam bir felaketin olma ihtimalini düzgün bir şekilde ölçemeyeceğinizi iddia edecektir. Danışmansa her uzak "ihtimalin" küçük bir olasılık olarak düzgün bir şekilde ölçüldüğü argümanını yapacaktır.

Her ne kadar olasılıklar hakkındaki anlaşmazlıklar kararı etkilese de, detayları bilmek için çok daha fazla bilgiye ihtiyacımız var. Örneğin

Köprünün adıyla New Brunswick arasındaki en dar noktada inşa edildiği olgusu tahminleri karmaşıktır. Eleştirmenler etkin boğaz genişliğinin yaklaşık olarak %20 daralacağı ve de buzun çözülmesinin nihai tarihinin fazlasıyla gecikeceği tahminini yapan bir rapora işaret etmektedirler.

Eleştirmenlerin öfkesinin altında çok derin bir mutsuzluğun yattığına dikkat edin; huzurlu bir ada, *Yeşilin Kızı Anne*'in kurgusal yeri, bir zamanlar sadece feribotla gidilen bu yerde şimdi turist alış-veriş merkezleri, mini-golf sahaları ve muazzam büyüklükte *Yeşilin Kızı Anne* tema parkları yapılacak. Bazıları için bu olumlu bir faydadır; bankada bol bol para demektir. Diğer başkaları içinse bu oldukça büyük ve negatif bir fayda, geri getirilemez değerlerin tahrip edilmesidir.

Bu arada, köprü artık işliyor. Hiç sorun yok. Yine de.

- 10 *Allais.* Hayır. Paradokstaki dolar faydaları 5 milyon dolar ve 1 milyon dolardı. Fakat aslında paradoks oldukça genel. 5 milyon dolar ve 1 milyon dolar yerine fayda cinsinden, faydalar x ve y olsun.

$x > (1 + [\text{Pr}(N)/\text{Pr}(H)])y$ olduğu müddetçe, bir taraftan G 'yi F 'ye tercih ederken, A 'yı B 'ye tercih ederek beklenen faydayı maksimize etmenin tutarlı bir yolu olmadığını gösterin. Neden? Görüyoruz ki

$$\text{Bek}(A) = \text{Pr}(L)0 + \text{Pr}(N)0 + \text{Pr}(H)x.$$

$$\text{Bek}(B) = \text{Pr}(L)0 + \text{Pr}(N)0 + \text{Pr}(H)y.$$

x, y 'yi $[\Pr(N)/\Pr(H)]y$ kadar geçmesi gerektiği için

$$\Pr(N)0 + \Pr(H)x > \Pr(N)0 + \Pr(H)y$$

ve böylece $\text{Bek}(A) > \text{Bek}(B)$. Fakat şimdi $\Pr(L)y$ 'yi yukarıdaki eşitsizliğe ekleyin:

$$\Pr(L)y + \Pr(N)0 + \Pr(H)x > \Pr(L)y + \Pr(N)0 + \Pr(H)y.$$

Sol tarafta elimizde $\text{Bek}(F)$ var ve sağ tarafta da elimizde $\text{Bek}(G)$ var, o halde $\text{Bek}(F) > \text{Bek}(G)$.

BÖLÜM 10. BELİRSİZLİK ALTINDA KARAR VERME

Bazı sorularda sizden *kendi* fayda ve olasılıklarınızı kullanmanız isteniliyor. Sonrakilerse *benim* yargılarım. Doğru ya da yanlış değildirler. Sayılarınız farklı olacaktır, fakat sonuçtaki argümanlar benzer olmalı.

- 1 *Misyoner Sarah*. Sarah'ın mezun olduktan beş yıl sonraki yıllık maaş tahmininin aşağıdaki tablodaki gibi olduğunu farz edin:

	K	I
B	80.000 dolar	120.000 dolar
F	8000 dolar	50.000 dolar

8000 doların yoksullara yardım durumunda alacağı para olduğunu düşünüyor. Ne B ne de F eyleminin ekonomi üzerinde nedensel bir etkisi yoktur, onun için baskınlık kuralı uygulanabilir. Sarah, baskınlık kuralını kullanarak bilgisayar mühendisliğinde diploma almaya karar veriyor.

- 2 *Hayalci Peony*. Peony'nin iki farklı fayda kaynağı var: Gelir ve işten hoşnut olmak. Faydalarını aşağıdaki şekilde sunabilir:

	K	I
B	4	6
F	1	10

Baskın olan bir eylem tarzı yoktur. Bu yüzden de ona iyi ve kötü zamanların olasılıkları lazım. O bir iyimserdir. Aşağıdaki şekilde bir yargıya varıyor:

$$\Pr(K) = 0,3. \quad \Pr(I) = 0,7.$$

$$\text{Bek}(B) = 5,4 \text{ fayda birimi.}$$

$$\text{Bek}(F) = 0,3(1) + 0,7(10) = 7,3 \text{ fayda birimi.}$$

Beklenen değer kuralını uyguluyor ve felsefede diploma almaya karar veriyor.

- 3 *İdealist Maria.* Maria faydalarını aşağıdaki şekilde sunabilir:

	K	I
B	50	50
F	100	1000

Açıktır ki P eylemi baskın çıkar. Eylemlerden hiçbirisi ekonomiyi etkilemediğinden dolayı baskınlık kuralını uygular ve felsefede diploma almaya karar verir.

- 4 *Pascal'ı Eleştirmek.*

- (a) Bölüntüleme yanlışdır. Daha birçok canlı ihtimallerin de olduğu aşikârdır, en azından bizim için. Çok daha başka dinler vardır. Budizm'in Pascal'ın Katolikliği'nin ödül değerlerine benzer hiçbir şeyi yoktur. Hatta birileri şunun mümkün olduğunu bile düşünebilir: Tanrı kötü niyetlidir ve aslında kendisine inananları cezalandırır. Ya da karar kuramının bir sonucu olarak içten bir şekilde ona inanmaya karar verenleri cezalandırır.
- (b) Bu eleştiri uygulanamaz, çünkü kişisel inanç eylemlerimizin Pascal'ın Tanrısının var olup olmamasını etkilediğini düşünmüyoruz.
- (c) Kumarbaz, inanmama faydalarının sıfır olduğunu iddia eden Pascal'a meydan okur ve böylelikle de beklenen değer anlayışlarını zorlar.

- 5 *Çalışma ya da çalışmama.* Hayır, çünkü karar sonucu etkiler.

$$\Pr(A/R) = 0,2. \Pr(B/R) = 0,6. \Pr(C/R) = 0,2.$$

$$\Pr(A/S) = 0,7. \Pr(B/S) = 0,3. \Pr(C/S) = 0.$$

olduğunu düşündüyse, bu durumda tablodaki artı ve eksileri 1, 2, 3, vb olarak tartarak beklediği değerler aşağıdaki şekilde olur:

$$\text{Bek}(R) = 0,2(4) + 0,6(2) = 2,0.$$

$$\text{Bek}(S) = 0,7(3) + 0,3(1) = 2,4.$$

Onun için çalışmaya karar vermelidir.

- 6 21. yüzyılın kasveti. S, robotik, genetik mühendisliği, nanoteknoloji, vb üzerindeki çalışmalarını şimdilik durduralım olsun.

C, bu işleri devam ettirelim olsun.

T, devam ettirmekle çok kötü sonuçlar ortaya çıkacak olsun.

~T, devam ettirmekle hiçbir kötü sonuç ortaya çıkmayacak olsun.

Baskınlık üzerinden bir argüman yaratacak şekilde çok farklı ve olası fayda belirleme yolları vardır. İşte size birisi:

	T	~T
C	$-\infty$	0
S	0	0

Yüksek bir $U(C, T)$, $-\infty$ kadar iyidir ve $U(C, \sim T)$ 'yi $U(S, \sim T)$ 'den daha düşük yapmayacak her türlü fayda iyidir.

En bariz eleştirisi şudur: Hiçbir şekilde çok kötü sonuçları olmayacaksa, bu durumda devam etmenin faydası hiçbir şey yapmamanın faydasından daha büyük olacaktır. $U(C, \sim T)$, $U(S, \sim T)$ 'den daha büyüktür ve bunun için baskınlıktan gelerek akla yatkın hiçbir argüman yapılamaz. Fakat başka eleştiriler de vardır, örneğin daha başka birçok alternatif vardır; aklınızda ne tür alternatiflerin olduğunu söyleyip ortaya dökmeniz gerekir.

BÖLÜM 11. NE DEMEK İSTİYORSUNUZ?

1 *Tekrar amortisörler.*

- (a) Belki Acme'nin harika yan ödemeler ve sosyal yardımlarla birlikte iyi ücret alan sendikalı işçileri varken, Bolt sendikası işçileri kullanmakta, onlara daha kötü ücret ödemekte ve de hiç sosyal yardım ve yan ödeme yapmamaktadır. Belki de tersidir. Bolt'ta işçiler sendikalıdır ve teşvik edilme güçlerini kaybetmişlerdir. Diğer yandan Acme'de en ufak bir hatada işten atılıyorsunuzdur. Belki de Acme'deki makinalar daha yenidir (ya da daha eski!) ve bundan dolayı da daha güvenilirdir. Belki de Acme'nin çok becerikli bir kalite kontrol mühendisi vardır.
- (b) Nedeni ne olursa olsun, Acme'nin Bolt'a göre kesinlikle daha güvenilir amortisör üretme eğilimi olduğunu düşünüyoruz. Birilerinin neye inandığıyla ilgilenmiyoruz, daha ziyade her iki imalatçıya dair dünyada var olan bazı olgularla ilgileniyoruz.

2 *Grip.*

- (a) Frekans-tipi. Bu "dünya" hakkında, mevcut koşullarda gribin doğal gidişatı hakkında bir ifadedir.
- (b) "Muhtemelen" burada hastalığa yakalanan çoğu genç insan için doğal gidişatına bir hafta ya da daha kısa bir sürede ulaşıyor anlamına geliyor gibi görünmektedir. Frekans-tipi bir olasılık (>%75?) ima ediliyor gibi görünüyor.
- (c) Frekans-tipi.
- (d) Bu ifade mevcut koşullarda düzenli olarak neyin olacağını beklenildiğine dair bir iddia gibi görünüyor. Onun için frekans-tipi gibi görünüyor, belki de bir istek yorumuyla birlikte öyle görünüyor.
- (e) Üç ifadenin hepsi de açıkça frekans-tipi.

3 (a) *31 Ocak 1996. İnanç-tipi. İfade edilen olasılık 1996'da mevcut olan kanıta göredir.*

Şimdi artık çok daha fazla kanıtımız var.

(b) *1 Şubat 2006. İnanç-tipi, 2006'da mevcut olan kanıta göredir.*

4 Fed [Amerikan Merkez Bankası]

- (a) Açık bir şekilde tek bir vaka. İnanç-tipi. Gayri-şahsi ve belki de mevcut kanıta göre olması niyet edilmiştir.
 (b) İnanç-tipi.
 (c) Bahse girmek burada tamamen kişisel inanç-tipi bir olasılığı önermektedir.

5 Klonlar. Frekans-tipi.

BÖLÜM 12. OLASILIK HAKKINDA KURAMLAR

1 Kayıtsızlık. Hiçbir "doğru" cevap yoktur, çünkü bu Mario'nun kişisel olasılıklarıyla ilgili bir durumdur. Terminal 3'te Eatemup'a giderse, Sonia'nın o havayoluyla gelmesine dair kişisel olasılıkları, onun Alpha artı Beta için olan kişisel olasılıklarının toplamından fazladır. Fakat Eatemup için olan kişisel olasılığı o kadar yüksek değilse, terminal 3'ten ziyade terminal 1'e gitmelidir (ya da Gamma ve Delta hakkındaki inançlarına bağlı olarak 2'ye).

Değişiklik olsun diye, Alıştırma 2-4'ün cevapları kuramcılarımızın yaptığı yorumlardan birazcık farklı sözel ifadeleri ortaya koymaktadır.

2 Mutlu Harry.

Venn: Kiti kullanan öğrenciler arasındaki göreceli frekans başarısı, %90'dır.

Popper: Kiti kullanarak başarı yaratma eğilimi ya da isteği %90'dır.

De Finetti: Mutlu Harry (ya da onun reklamını yapanlar) başarı için kişisel olasılıklarının 0,9 olduğunu söylüyorlar; kiti kullanan ve rastgele seçilen her öğrencinin başarılı olacağına dair 9'a 1 bahse girebilirlerdi.

Keynes: Öğrencinin kiti kullandığı kanıtı verildiğinde, başarılı olma mantıksal olasılığı 0,9'dur.

3 Bilgi kaynağı.

Venn: Burada pek de olasılıktan bahsetmeniz gerektiğini düşünmüyorum. Israr ederseniz, önümüzdeki gibi iki yıllık dönemlerle, Orta Doğu'daki nihai çözümlerin göreceli frekansının çok düşük olduğunu demek istiyorsunuz.

Popper: Bu durumda, önümüzdeki iki yılda nihai bir çözüm için hiçbir eğilim yok.

De Finetti: Önümüzdeki iki yıllık dönemde nihai bir çözüm için benim kişisel olasılığım sıfırdır.

Keynes: Mevcut kanıta göre önümüzdeki iki yılda nihai bir barış çözümünün ortaya çıkacağına dair yüksek derecede bir inanca sahip olmak akla uygun değildir.

4 Koşullu Mutlu Harry.

Venn: Kendi aralarındaki göreceli başarı frekansının sadece 0,5 olduğu ve bunların da daha sonra kit kullandığı öğrencilerin bir referans sınıfında göreceli başarı frekansı %75'tir.

Popper: bir öğrencinin sadece %50'lik bir başarı eğilimi varsa ve bu durumda kiti kullanırsa, başarı eğilimi %75'e çıkar.

De Finetti: Reklamcı şuna benzer bir şey söylüyor: bir öğrencinin başarılı olmasına dair benim kişisel bahis oranım eşitse 1'e 1, bu durumda o kiti kullandığında, onun başarısına dair benim kişisel bahis oranım 3'e 1 olarak değişir.

Keynes: Öğrencinin başarısının mantıksal olasılığını 1/2 yapan öğrenci hakkındaki bir bilgiyle başlıyorum. Kit kullandığına dair daha fazla bilgiye göre onun mantıksal başarısı 3/4'tür.

Alıştırma 5-8'e hemen hemen aynı tarzda devam edebilirsiniz.

BÖLÜM 13. KİŞİSEL OLASILIKLAR

1 Nükleer güç.

(a) Hayır. Bahis yarım yüzyılı aşan bir süreyle çözümlenemez.

(b) Evet, birkaç yıl beklemeyi dert etmezseniz.

2 *Çikolatakolik.* Hayır, çünkü –Alice için– ödülün değeri kumarın sonucundan etkilenir.

3 *Zeki uzaylılar.*

(a) Evet, bir yılı yeterince yakın olarak düşünürseniz. Bahsi çözüme kavuşturma koşulları tamamen kesin-
dir ve bahis de kesinlikle bir yılda çözüme kavuşturulacaktır.

(b) Skuli iki seçenekle karşı karşıyadır. Ladbroke'lara 49 dolar verebilir. Bir yılda 1 dolar toplamasının hemen hemen kesin olduğunu düşünüyor. Ya da 49 doları bankada bir-yıllık bir mevduat hesabına yatırabilir ki bu da şu anda çok az bir şekilde (diyelim ki) %4 getirir. Bir yılın sonunda faiz olarak hemen hemen 2 dolar alır. Onun için kazanacağını garanti olduğuna dair bir bahse girmektense parasını bankaya yatırırsa daha iyi olur.

4 *Bahisler.* 3 dolar. 1/4.

5 *Ortaya sürülen parayı arttırmak.* –25 dolar.

6 *Adil bahis.* 3/4.

7 *Mazeret sınavları.* Bir kere daha, sayıları siz seçeceksiniz. Tek gereklilikse:

$$\Pr(B) > \Pr(B/M).$$

Size şöyle de olabilirdi:

$$\Pr(B) = 0,5 \text{ ve } \Pr(B/M) = 0,3.$$

Bu durumda koşullu bahis için ödül matrisi şöyle olurdu:

	M veriliyken B üstüne bahsin ödülü	M veriliyken B'ye karşı bahsin ödülü
B&M	7 dolar	-7 dolar
(~B)&M	-3 dolar	3 dolar
~M	0	0

8 *"Değil" tercihleri tersine çevirir.* (2) meydana gelmezse 10 dolar. Bu sanki bir mantık meselesi gibi görünüyor: "(1) meydana gelirse 10 dolar" için yapılan bir tercih "(2) meydana gelmezse 10 dolar" için yapılan tercihle aynıdır.

BÖLÜM 14. UYUM

- 1 *Diyojen*. B'ye karşı 1 dolar bahse giriyorsunuz. O, B üzerine 9 dolar bahse giriyor. Siz de B üzerine 8 dolar bahse giriyorsunuz. O, B'ye karşı 2 dolar bahse giriyor.
Leafs sonuncu olursa, onun net ödülü 1 dolar – 2 dolar = –1 dolardır.
Leafs sonuncu olmazsa, onun net ödülü 8 dolar – 9 dolar = –1 dolardır.
- 2 *Epikür*. T üstüne 7 dolar bahse giriyorsunuz. O, T'ye karşı 3 dolar bahse giriyor (ilk bahis oranı olan 0,7'yi kullanarak).
T'ye karşı 2 dolar bahse giriyorsunuz. O, T üstüne 8 dolar bahse giriyor (ikinci bahis oranını kullanarak).
T meydana gelirse, net ödülü 2 dolar – 3 dolar = –1 dolardır.
T meydana gelmezse, net ödülü 7 dolar – 8 dolar = –1 dolardır.
- 3 *İyimser Külkedisi*. Uyum için, koşullu bahis oranının, P&S üstüne bahis oranının S üstüne bahis oranına bölünmesine eşit olmasını gerekli görüyoruz. Koşullu bahis oranı $1/2$ 'dir. Fakat $(0,2)/(1/3) = 0,6$ olduğu için koşullu oran oldukça küçüktür. (0,6 olmalıdır, 0,5 değil.)
Diğer yandan ödül matrisindeki durum budur. Onun için Külkedisinden şöyle bahse girmesi isteniyor:
P&S üstüne 2 dolar bahse girin (8 dolar kazanmak için).
S'ye karşı 4 dolar bahse girin (2 dolar kazanmak için).
S veriliyken P'ye karşı 5 dolar bahse girin (5 dolar kazanmak için).
P&S meydana gelirse, 8 dolar kazanıyor; fakat 1 dolarlık net kayıp için diğer iki bahsini kaybediyor.
(~P)&S meydana gelirse, 1 dolarlık net kayıp için P&S üstüne 2 dolar kaybeder; S'ye karşı 4 dolar kaybeder ve koşullu bahis üstüne 5 dolar kazanır.
S meydana gelmezse, 0'lık net kayıpla, 2 dolar kaybeder ve kazanır.

Bu sayıları nasıl elde ettik? Diğer tarafta p, q, r cinsinden,
 $p = 1/2, q = 0,2$ ve $r = 1/3$.

Net kayıp $q - pr = 1/5 - 1 - 6 = -1/30$ olmalıdır.

Onun için 1 dolarlık net kayıp elde etmek için 30'la çarpmalıyız.

P&S üstüne $qr(30 \text{ dolar})$ bahse giriyoruz veya $(1/5)(1/3)(30 \text{ dolar}) = 2 \text{ dolar}$.

S'ye karşı $(1 - r)q(30 \text{ dolar})$ bahse giriyoruz veya $(2/3)(1/5)(30 \text{ dolar}) = 4 \text{ dolar}$.

S'ye bağlı olarak P'ye karşı $(1 - p)r(30 \text{ dolar})$ bahse giriyoruz veya $(1/2)(1/3)(30 \text{ dolar}) = 5 \text{ dolar}$.

4 *Kötümser Külkedisi.*

Burada, koşullu oran *fazlasıyla büyük*. (0,3 olmalıdır, 0,5 değil.) Ondan koşullu oranın haddinden fazla küçük olması durumunda bahse gireceği tarzın tam tersine bahse girmesi istenildi. Dolayısıyla ondan aşağıdakiler istenildi: P&S'ye karşı 4,50 dolar bahse gir (0,50 dolar kazanmak için).

S üstüne 0,50 dolar bahse gir (1 dolar kazanmak için).

S veriliyken P üstüne 2,50 dolar bahse gir (2,50 dolar kazanmak için).

P&S meydana gelirse, 4,50 dolar kaybeder, fakat 1 dolarlık net bir kayıpla 3,50 dolar kazanmak için diğer iki bahsini de kazanır.

(~P)&S meydana gelirse, 1 dolarlık bir kayıpla P&S üstüne 0,50 dolar kazanır, S üstünde 1 dolar kazanır ve koşullu bahis üstünde 2,50 dolar kaybeder.

S meydana gelmezse, 0'lık bir kayıpla 0,50 dolar kaybeder ve kazanır.

5 *Gizemli bir hediye.* Kesin olarak 100 dolar kaybedeceğiniz, kaybetmesi kesin bir kontrat:

$q = C\&H$ üstüne bahis oranı olsun = 0,3.

$r = C$ üstüne bahis oranı olsun = 0,8.

$p = C$ veriliyken H üstüne bahis oranı olsun = 0,5.

Kayıp $(x \text{ dolar})(q - pr) = (x \text{ dolar})(0,3 - 0,4) = -100 \text{ dolar}$, onun için $x = 1000 \text{ dolar}$ olacaktır.

$qr(1000 \text{ dolar}) = 240 \text{ dolar}$ kazanmak için C&H'ye karşı
 $(1 - q)r(1000 \text{ dolar}) = 560 \text{ dolar}$ bahse girin.

$(1 - r)q(1000 \text{ dolar}) = 60 \text{ dolar}$ kazanmak için C üstüne
 $(qr)1000 \text{ dolar} = 240 \text{ dolar}$ bahse girin.

400 dolar kazanmak için C'ye bağlı olarak, H üstüne
 $pr(1000 \text{ dolar}) = 400 \text{ dolar}$ bahse girin.

H&S meydana gelirse, 100 dolar kaybetmek üzere 56 dolar kaybedersiniz, 60 dolar kazanırsınız ve 400 dolar kazanırsınız.

~H&S meydana gelirse, 100 dolar kaybetmek üzere, 240 dolar kazanırsınız, 60 dolar kazanırsınız ve 400 dolar kaybedersiniz.

C meydana gelmezse, 140 dolar kazanırsınız ve 240 dolar kaybedersiniz.

Bundan dolayı C meydana gelirse, 100 dolar kaybedeceğiniz kesindir.

BÖLÜM 15. TECRÜBEDEN ÖĞRENMEK

1 Olabilirlikler.

(a) Önseller: $\Pr(G) = 0,6$. $\Pr(H) = 0,4$. Sonsallar: $\Pr(G/T) = 3/4$. $\Pr(H/T) = 1/4$.

Olabilirlikler: $\Pr(T/G) = 0,6$. $\Pr(T/H) = 0,3$. Olabilirliklerin toplamı 0,9'dur, 1 değildir.

(b) Önseller: $\Pr(G) = 0,85$. $\Pr(B) = 0,15$. Sonsallar: $\Pr(G/W_b) = 0,59$. $\Pr(B/W_b) = 0,41$.

Olabilirlikler: $\Pr(W_b/G) = 0,2$. $\Pr(W_b/B) = 0,8$.

Gerçekte olabilirliklerin toplamı tam 1'dir. Fakat bu olgunun bir önemi yoktur.

Olabilirliklerin toplamı genel olarak 1 yapmaz.

2 Kaybolmuş notlar. İşte benim verdiğim kişisel değerler. Sizinkiler farklı olacaktır.

(a) $\Pr(L) = 0,2$. $\Pr(C) = 0,8$. Ben bu sayıları veriyorum, çünkü notlarımı nadiren kütüphaneye götürürüm ve de eşyalarımı da çoğu zaman sınıfta bırakırım.

(b) $L = \Pr(E/L)$ 'nin olabilirliği 0,3'tür. $C = \Pr(E/C)$ 'nin olabilirliği 0,1'dir. Bunların her ikisine de oldukça düşük

değerler veriyorum, çünkü L arkadaşımın kütüphanede bazı notları görmesini özellikle olası hale getirmiyor. Ve C bunu pek de özellikle olası hale getirmiyor; sadece kütüphanede bazı notları görme olasılığı.

$$(c) \Pr(L/E) = \frac{\Pr(L) \Pr(E/L)}{\Pr(L) \Pr(E/L) + \Pr(C) \Pr(E/C)} = 3/7 \approx 0,43$$

O halde: $\Pr(C/E) = 4/7 \approx 0,57$.

- (d) $F = \Pr(F/L \& E)$ olarak veriliyken L'nin olabilirliği 0,5'tir.
 $F = \Pr(F/C \& E)$ olarak veriliyken C'nin olabilirliği 0,1'dir.

Bunların hepsi kişisel olasılıklardır. Birinci olabilirlik, benim için, büyük değildir, fakat vasattır: Kütüphanede bazı notların görünmüş olması verildiğinde ve notlarımı kütüphanede bıraktığım hipotezine bağlı olarak, arkadaşımın bizzat o notları görmüş olması şaşırtıcı olmazdı. Ancak, notlarımı sınıfta bırakmış olmam F'ye pek fazla bir olasılık bırakmıyor.

(e)

$$\Pr(L/E \& F) = \frac{\Pr(L/E) \Pr(F/L \& E)}{[\Pr(L/E) \Pr(F/L \& E) + \Pr(C/E) \Pr(F/C \& E)]} = 15/19 \approx 0,79$$

$$\Pr(C/E \& F) = 4/19 \approx 0,21.$$

- 3 *Mantarlar*. Zannedersem Jack'ın lezzetli *Sezar*'ı yemesi sizin apandistin olasılığını değerlendirmenizde hiçbir fark yaratmaz. $\Pr(A/Y) \approx \Pr(A)$.

Buna karşılık, *ölüm kapsülünü* yutmuş olsaydı, kesinlikle apandisit olmazdı; ama zehirlenmiş olurdu: $\Pr(A/\sim Y) = 0$.

$$\Pr^*(A) = \Pr(A/\sim Y) \Pr(\sim Y) + \Pr(A/Y) \Pr(Y) = 0,56.$$

Bu çok kötü bir sonuç! Ne yapabileceğinize dair bir fikriniz de yok.

Tecrübeden öğrenmeye dair bu örnek bizi kesinliğe daha da yaklaştırmaz, daha ziyade bizi ümitsiz bir çıkmaz içinde bırakır.

- 4 *Söylentiler, söylentiler*.

(a) Jeffrey kuralıyla:

$$Pr^*(G/I) = Pr(G/I) Pr^*(I) + Pr(G/\sim I)Pr(\sim I).$$

$$Pr(G/\sim I) = 0,9. \text{ O halde } Pr(G/I) = 0,1.$$

$$Pr(G/\sim I) = 0,3.$$

$$Pr^*(I) = 0,8. \text{ O halde } Pr^*(\sim I) = 0,2.$$

$$Pr^*(G/I) = (0,1 \times 0,8) + (0,3 \times 0,2) = 0,08 + 0,06 = 0,14.$$

(b) Söylentiden önceki beklenti

$$Pr(G)U(S/G) + Pr(\sim G)(U/\sim G) = (0,3 \times 20) + (0,7 \times -5) = 6 - 3,5 = 2,5.$$

$$Pr^*(G)U(S/G) + Pr^*(\sim G)(U/\sim G) = (0,14 \times 20) + (0,86 \times -5) = 2,8 - 4,3 = -1,5.$$

Hayır, gözden geçirmiyor.

5 Otobüsler.

(a) Herkesin kendi kişisel olasılıkları olacaktır. İşte benimkiler. $Pr([200]) = 0,9$. $Pr([20]) = 0,1$.

(b) $Pr(n) = Pr(n \& [200]) + Pr(n \& [20])$.

$$1 \leq n \leq 20 \text{ için, } Pr(n) = 19/2000 = 0,0095.$$

$$21 \leq n \leq 200 \text{ için, } Pr(n) = 9/2000 = 0,0045.$$

(c) $Pr(0 \leq n \leq 20) = 0,19$. $Pr(21 \leq n \leq 200) = 0,81$.

(d) $[200]$ 'ün olabilirliği $Pr(19/[200]) = 1/200$.

$$[20]$$
'nin olabilirliği $Pr(19/[20]) = 1/20$.

$[20]$ 'nin $[200]$ 'e göreli olabilirliği ona birdir.

(e) Benim kişisel olasılıklarım ile başlayarak,

$$Pr([200]/19) = 9/19. Pr([20]/19) = 10/19. \text{ Böylece sonraki olasılıklar neredeyse eşittir.}$$

(f) Neredeyse sıfır; şahsen şehrin hemen hemen her yerinde bulunduğumu kabul edersem, bütün rotalar çalışırken her zaman.

(g) Öyle görünüyor. Daha büyük şehir olan Gotterdam'ın 200 otobüs rotası olduğu şeklindeki mantıklı bir düşünceyle başlıyorum. 19 numaralı otobüsü gördükten sonra, Gotterdam'da 200 rotanın olduğuna dair olasılıkların yaklaşık olarak %50 olduğuna karar veriyorum. Numarası 20 ya da altı olan birçok otobüs gördükten sonra ve numarası 20'nin üstünde numarası olan hiçbir otobüs görmeyince Gotterdam'ın sadece 20 otobüs rotası olduğu hususunda hemen hemen emin oluyorum.

6 *Kör talih.*

- (a) Yaklaşık olarak %67.
- (b) %50'den daha iyi.
- (c) 1/10:

$$\frac{1990'larda\ hayatta\ olan\ insanlar}{2150\ yılına\ kadar,\ insanlık\ tarihindeki\ insanlar}$$

oranının mantıklı bir oranıysa bu durumda

$$\frac{1990'larda\ hayatta\ olan\ insanlar}{Şimdiye\ kadar,\ insanlık\ tarihindeki\ insanlar}$$

oranı 1/10'dan çok daha yüksek olmalıdır. (Nüfus patlaması devam ederse, 2150'ye kadar doğacak olan insanların çoğu 2000'den sonra doğacaktır!) Daha yüksek bir oranla Bayes kuralı, Leslie tarafından kullanıldığı şekliyle, insan soyunun yakında yok olacağını daha büyük bir ihtimal haline getirecektir.

(d) Hayır. 1. bölümden doğru bir sonuç ve fakat geçersiz bir argümanınızın olabileceğini hatırlayın. Her ne kadar Leslie bizi 2150 yılına kadar insan soyunun tükenmesine ikna etmiş olsa da, Bayes kuralını kullanarak argümanının akla yatkın olduğuna dair tek bir kanıt bile sunmazdı.

(e) Hayali kesinlik! Bu mantıklı mı?

- 7 *Yanılgı.* Leslie'nin argümanında birçok sorun var. Burada bir yanılgı üzerinde özenle biraz duracağız. *Leslie'nin hesaplamasında doğru olmayan bir olabilirlik kullandığını göstereceğiz.* (Başka yanılgılar da bulmuş olabilirsiniz.) Bayes kuralının veciz özetinin aşağıdaki şekilde olduğunu hatırlayın:

$$\text{Sonsal Olasılık} \propto \text{Önsel Olasılık} \times \text{Olabilirlik}.$$

E kanıtının ışığı altında, H hipotezinin olabilirliği $Pr(E/H)$ 'dir. Kişisel olasılıklar perspektifinden, olabilirlikler de kişiseldir. Öncelikle otobüs problemindeki olabilirliklerin doğru kullanımını hatırlayın. İşte size kişisel olasılıkların akla yatkın şekildeki ifadesi:

(I) Gotterdam'ın 20 otobüs rotasının olduğu koşullu hipotez veriliyken, ilk gördüğüm otobüsün 19 numara olduğuna dair kişisel koşullu olasılığım $1/20$ 'dir.

Olabilirlik $Pr(E/H)$ olduğundan dolayı ilk gördüğüm otobüsün 19 numara olduğu kanıtının ışığı altında $1/20$ oranı böylece Gotterdam'ın 20 otobüs rotasının olduğu hipotezinin mantıklı kişisel olabilirliğidir.

Aynı şekilde $1/200$ oranı, ilk gördüğüm otobüsün 19 numara olduğu kanıtının ışığı altında Gotterdam'ın 200 otobüs rotası olduğu hipotezi, benim için kabul edilebilir bir olabilirliktir. Bunlar otobüs probleminde Bayes kuralı için kullandığımız olabilirliklerdir.

(I)'ın *bahis versiyonu*. Her ne kadar bahis yapay olsa da, çoğu zaman düşüncelerimizi netleştirmemize yardımcı olur. Kişisel koşullu olasılığa (I) karşılık gelecek şekilde:

Gotterdam'ın 20 otobüs rotasının olduğu koşula bağlı olarak, ilk gördüğüm otobüsün 19 numara olduğu şeklinde $1/20$ oranıyla koşullu bir bahis kontratı yapmak adil olurdu; 19 dolar kazanmak için 1 dolar bahse girmek. (Gotterdam'ın 200 otobüs rotası varsa bahisler kaybedilir! Gotterdam'ın 200 otobüs rotası varsa, ben bu bahsi pek istemiyorum.)

Gotterdam'ın 20 otobüs rotasının olduğu koşula bağlı olarak, ilk gördüğüm otobüsün 19 numara olmadığı şeklinde $19/20$ oranıyla koşullu bir bahis kontratı yapmak adil olurdu; 19 dolar kazanmak için 1 dolar bahse girmek. (Gotterdam'ın 200 otobüs rotası varsa bahisler maalesef kaybedilir!)

Şimdi Leslie'nin Bayes kuralını kullanmasını karşılaştı-
rın. (I)'e karşılık gelecek şekilde elimizde (II) var. Leslie'nin niyet ettiği gibi (II)'yi kişisel *olasılığınız ve kendiniz* hakkındaymiş gibi sesli olarak okuyun.

(II) İnsan soyunun 2150'de sona ereceği hipotezi koşula bağlı olarak 1990'ların (en azından bir kısmında) hayatta olmuş olacağıma dair kişisel koşullu olasılığım $1/10$ 'dur.

Bu mantıklı bir kişisel olasılık değildir. 1990'larda ha-

yatta olduğunuza dair koşullu olasılığınız 1'dir! Böylece 1/10, benim 1990'ların (en azından bir kısmında) hayatta olmuş olacağıma dair kanıt ışığında, 2150'ye geldiğinde insan soyunun sona ereceğine dair hipotez sizin kişisel olabilirliğiniz *değildir*.

(II)'nin *bahis versiyonu*. Bazı öğrenciler (II) ile problemi bahis cinsinden daha net olarak görecektir. Akla yatkın bir şekilde bahse giremeyiz, çünkü ödül süresi bakımından 2150 çok çok uzaktadır. Bir an için bunu göz ardı edin. Otobüslere paralel olarak, (II) bu kontratları öneriyor. Önceden olduğu gibi kişisel olasılıkları ele alıyoruz ve sorudaki "ben" sizsiniz:

(iii) İnsanlık soyunun 2150'de sona ereceği hipotezi koşuluna bağlı olarak 1990'ların (en azından bir kısmında) benim hayatta olmuş olacağıma dair 1/10 oranında koşullu bir bahis kontratı yapmak adil olurdu; 9 dolar kazanmak için 1 dolar bahse girmek.

(iv) İnsanlık soyunun 2150'de sona ereceği hipotezi koşuluna bağlı olarak 1990'ların (en azından bir kısmında) benim hayatta olmamış olacağıma dair 9/10 oranında koşullu bir bahis kontratı yapmak adil olurdu; 9 dolar kazanmak için 1 dolar bahse girmek.

İkinci kontrat açıkça adil olmayan bir kontrattır! Profesör Leslie'den kontrat (iv)'ü almasını ve ayrıca, soyun 2150'den çok sonra da devam edeceğine dair onun önerdiği alternatif koşula bağlı olarak bir bahse girmesini isteyin.

(v) İnsanlık soyunun 2150'den çok sonraları da devam edeceği hipotezi koşuluna bağlı olarak 1990'ların (en azından bir kısmında) benim hayatta olmamış olacağıma dair 999/1000 oranında koşullu bir bahis kontratı yapmak adil olurdu.

Profesör Leslie'ye şunu söyleyin: Lütfen kontrat (v)'i kullanarak 9,99 dolar ve kontrat (iv)'ü kullanarak 9 dolar bahse girin.

"1990'larda hayatta olduğumdan dolayı hangi alternatifin doğru olduğuna bağlı olmaksızın, koşullu ba-

histen birini ya da diğerini kazanırım. O halde lütfen şimdi bana asgari kazancım olan 9 doları ödeyin."

(II)'ye geri dönersek, kendisinden alıntı yaparak Leslie'nin yazdığı gibi "soyun kısa sürede yok olması durumunda bir insanın 1990'larda hayatta olması ihtimalinin 1/10 olduğunu söyleyelim."

Güzel. Ben, belki siz de, buna bağlı kalalım. Daha resmi bir şekilde söylersek:

(III) "Hakkında hiçbir şey bilmediğimiz ve rastgele seçilen bir kişinin, insan soyunun 2150'de sona ereceği hipotezi koşuluna bağlı olarak, 1990'larda hayatta olmuş olacağına dair benim kişisel koşullu olasılığım 1/10'dur."

(III) benim için yeteri kadar iyi bir kişisel olasılıktır ve belki sizin için de. Ancak kanıt tesadüfen seçilen bir insan hakkında değildir. Benim hakkımdadır. Kendimiz hakkında tesadüfen seçilen insanlardan daha fazla şey biliriz ve bunun için de kendim hakkındaki kişisel olasılıklarım tesadüfen seçilen insanlar hakkındaki kişisel olasılıklarımdan farklıdır.

Bu argümanın bu şekilde sunulmasıyla Leslie'nin *kelime oyunu yapma yanlışlığına düştüğünü* söyleyebiliriz. Yanlışlıkla aşağıdaki iki şeyi birbirine karıştırmaktadır:

Akla yatkın bir kişisel olasılık olan (III) ile akla yatkın olmayan bir kişisel olasılık olan (II)'yi.

Böylece Leslie'nin hesaplamasında Bayes kuralının içine yerleştirmek üzere olasılık (II)'yi olabilirlik olarak kullanmak bir hatadır.

- 8 *Toplam kanıtlar.* Leslie'nin kıyamet günü argümanını kişisel olasılıklar perspektifinden tartışmıştık. Bildiğiniz gibi başka birçok Bayesçi yaklaşım var. Carnap ve Keynes'in mantıksal olasılık yaklaşımı perspektifinden bakılınca olaylar çok daha basittir. Carnap herhangi bir pratik karar için kullanılmak üzere *toplam kanıtların gerekliliği* üstünde ısrar etti. Kullanacağınız koşullu olasılıklar her zaman elinizde mevcut olan toplam kanıta bağlı olmalıdır. 1990'ların en azından bir kısmında hayatta

olmuş olmanız olgusu kesinlikle elinizde mevcut olan toplam kanıtın bir kısmıdır, onun için kullanılabilir her türlü koşullu olasılık her zaman 1'e eşit olacaktır. Yani: $Pr(1990\text{'ların en azından bir kısmında hayattayım/ elimde mevcut olan toplam kanıt}) = 1$.

BÖLÜM 16. KARARLILIK

- 1 *Aç Clara.*
 - (a) 1,5 lt.
 - (b) $\sqrt{(20/7)}$.
- 2 *Hasta Sam.*
 - (a) 0,9 lt.
 - (b) 6/7.
 - (c) Ortalama daha küçüktür; çünkü ortalamada Sam, Clara'dan daha az yer, fakat standart sapma daha büyüktür, çünkü ortalamadan olan ortalama fark, 2,4 litrelik o büyük beslenme sayesinde, daha büyüktür.
- 3 *Medyan gelir.*
 - (a) 61.000 dolar.
 - (b) 56.000 dolar.
- 4 *Gelirler.* Medyan *bütün ülkelerdeki* ortalamalardan düşüktür, çünkü göreceli olarak az sayıda yüksek gelir vardır. Bunun böyle olmasının nedeni medyanın yüksek gelirlerin ağırlığını hesaba katmaması ve sadece onları saymasıdır. Ortalamayla medyan arasındaki fark arttıkça, genel olarak sıradan gelir kazançlarıyla zenginler arasındaki eşitsizlik artar. Fakat farklı bir sosyal sistem bunu değiştirebilir. Örneğin bütün hanelerin %20'sinin 60.000 dolarlık sabit bir geliri olsaydı, %60'ının da 50.000 dolarlık sabit bir geliri olsaydı, diğer yandan da (diyelim ki, yaşlılar) %20'sinin 20.000 dolarlık sabit bir geliri olsaydı, bu durumda ortalama gelir 46.000 dolar ve medyan da 50.000 dolar olurdu.
- 5 *Yoksulluk sınırı.* Medyanla hesaplanan Kanada aile yoksulluk sınırı yaklaşık olarak 25.000 dolardır. Ortalamayla

hesaplandığında, yaklaşık olarak 28.600 dolardır. Her iki olayda da, aynı istatistikler temelinde hesaplamanın yapıldığı dönem için kullanılan düşük gelir kesmelerinden daha düşüktür.

- 6 *Çabuk düzeltme.* (a) Basit bir metotsa fakir insanların en iyi %30'unu hafifçe arttırmaktır, yani gelirleri mevcut ortalama gelirin %50'sinin altına düşen grupta en üstteki gelir sahipleri. Bu ortalama geliri kayda değer bir şekilde arttırmayacaktır. Fakat hiç kimseyi pek de daha iyi yapmayacaktır ve en fakirleri de daha öncekiler gibi aynı fakirlikte tutacaktır. (b) Hayır; bu metot, daha önce çoğunun sınırın altında kalması gibi medyana dayalı yoksulluk sınırında işe yaramaz.

7 *En olası sayılar.*

(a) Hiç yeşil yoktan (0 yeşil sonucu ya da KKKKK) hepsi yeşile kadar (5 yeşil sonucu ya da YYYYY) değişen şekillerde 32.

(b) $\Pr(0) = \Pr(5) = 1/32$.

(c) $\Pr(1) = \Pr(4) = 5/32$.

(d) $\Pr(2) = \Pr(3) = 10/32$.

(e) 2 ve 3.

(f) $np - (1 - p) \leq k_0 \leq np + p$.

$(5)(1/2) - (1 - 1/2) \leq k_0 \leq (5)(1/2) + 1/2$.

$2 \leq k_0 \leq 3$.

- 8 *En olası sayı.* k_0 öyle bir tam sayı ya da tam sayı çiftidir ki,

$np - (1 - p) \leq k_0 \leq np + p$.

$(13)(0,3) - (1 - 0,3) \leq k_0 \leq (13)(0,3) + 0,3$.

$3,2 \leq k_0 \leq 4,2$.

O halde $\Pr(G) = 0,3$ iken 4 sayısı 13 Bernoulli denemesindeki en olası yeşil sayısıdır.

9 *Başarı.*

(a) $n = 11$ ve $p = 0,3$ iken $np - (1 - p) = 2,6$ ve $np + p = 3,6$ 'dır, o halde başarılarla ilgili en olası sayı 3'tür.

(b) Beklenen başarıların sayısı 3,3'tür.

- 10 *Kıyıda yağmur.* $n = 50$ ve $p = 4/17$ iken $np - (1 - p) = 11$ ve $np + p = 12$ 'dir. Böylece önümüzdeki 50 yıl boyunca, Victoria'daki yağışlı 31 Temmuzların en olası sayıları 11 ve 12'dir.
- 11 *Parçacık hızlandırıcılar.* A koşullarında $n = 60$, $p = 0,7$. O halde $np - (1 - p) = 41,7$ ve $np + p = 42,7$. Böylece $k_0 = 42$.
 B koşullarında $n = 50$, $p = 0,8$. O halde $np - (1 - p) = 39,8$ ve $np + p = 40,8$. Böylece $k_0 = 40$.
- (b) Hayır. En olası ve beklenen sayıların çakışması olağandışıdır. Bu durum sadece beklenen sayı bir tam sayıyken meydana gelir.
- (c) A ile saniyede daha fazla parçacık olmasına rağmen B ile saniyede birazcık daha fazla sayıda hızlı parçacık beklersiniz.

BÖLÜM 17. NORMAL YAKINSAMALAR

1 *Çift modlu*

- İki yağmurlu ve iki kuru mevsim olan bir yerde ay bazında yağışların dağılımı.
- Birçok tipik lisans öğrencisi ve az sayıda sürekli eğitim dersleri alan daha yaşlı insanları da içeren üniversitenin büyük bir gece sınıfındaki yaşların dağılımı.
- Birkaç iyi ve birkaç da kötü takımın olduğu bir ligde bir sezonda kazanılan oyun sayısının dağılımı. (Bu her türlü yarışma, satranç, briç vb grubu için uygulanabilir)

2 *Normal*

- (a) Kabaca normal.
- (b) Kabaca çift modlu (erkekler için bir zirve ve kadınlar için bir zirve).
- (c) Toronto da dâhil olmak üzere birçok ılıman bölgede, her ikisi de değildir. Bir kerelik yağmurlu mevsimi olduğu net olarak bilinen yerlerde, eğri çok kaba olarak çan eğrisi şeklindedir; fakat dünyanın bazı bölgelerinde iki yağışlı mevsim vardır ve çift modludur.
- (d) Normal.

3 *Düşük kalite ürünler.*

(a) 3600.

(b) $d = \sqrt{([p(1 - p)n])} = \sqrt{([3/4 \times 1/4 \times 4800])} = 30$. Böylece bir parti üretimin uzun ömürlü ampullerin sayısının 3600'ün 60 aralığı içerisinde olma olasılığı 0,95'tir.4 *Spordan sonra duş.* $d = \sqrt{([p(1 - p)n])} = \sqrt{([1/2 \times 1/2 \times 3136])} = 28$. $3d = 84$. Böylece $x = 84$.

Elimizdeki 1652'den fazla ya da 1484'ten az erkek çocuk örnekleminde spordan sonra duş almayanlarının olasılığı sadece %1'dir.

5 *Diğer bölgeler.*

(a) 77.

(b) 77.

(c) 51.

(d) 51.

6 *En kötü senaryo.* Genel olarak p , $1/2$ 'den farklı olursa, bu durumda $p = 1/2 + z$ olur ki z pozitifdir ya da negatiftir.

$$p(1 - p) = (1/2 + z)(1/2 - z) = 1/4 - z^2.$$

 $z = 0$ olduğunda bu maksimumdur, o halde $p = 1/2$ olduğunda d bir maksimumdur.**BÖLÜM 18. ANLAMLILIK VE GÜÇ**1 *Doğum günleri.* Prensip olarak, zodyak işaretleri için hesaplama aynıdır. k sayıdaki bir insan grubunda bütün k doğum günlerinin farklı olma olasılığı:

$$(1 - 1/365)(1 - 2/365) \dots (1 - [k - 1]/365)'tir.$$

Sizden bunu çözümlemeniz istenmiyor. 23 kişilik bir grupta, 2 kişinin doğum gününün aynı olmasının 50'ye 50'den daha iyi bir ihtimal olduğunu öğrendiğinde çoğu insan şaşırıp kalıyor. Bu düşünce rastlantıların daha geniş olarak analiz edilmesi için genelleştirilebilir. Görünüştteki bu tesadüf sizi ne zaman şaşırtmalıdır? Ne zaman bir açıklama arayıp bulmalısınız? İyi o zaman, olayların ya-

rısında tamamen tesadüf eseri meydana gelen türde bir şeyse bir izahat istemenize gerek yoktur.

- 2 *Hukukta istatistik.* Sıfır hipotezi şu olmalıdır: Belirli bir katsayı sıfır'dır.

"... ihtimali 20'de birden azdır" şu anlama gelmelidir: *Gerçek katsayının sıfır olma ihtimali %5'ten azdır.* Bu bir hatadır. Doğru ifade: *Doğru katsayı sıfırsa, olasılığı %5'ten az olan bir olay meydana geldi.*

- 3 *E Vitamini ve kalp yetmezliği.*

(a) Hipotez 1: Ölçülüp verilen dozlarda E vitaminin alınmasının ölümcül olmayan kalp atakları vakası üzerinde hiçbir etkisi olmaz. Hipotez 2: Ölçülüp verilen dozlarda E vitaminin alınmasının kalp hastalıklarından ölme vakası üzerinde hiçbir etkisi olmaz.

(b) Görünürde verinin hipotez 1 için kayda değer bir önemi vardır. Bu durumda E vitamini alınması, ölümcül olmayan kalp ataklarını azaltabilir. Fakat hipotez 2 için kayda değer bir önemi yoktur.

(c) Çünkü etkilenebilecek gibi görünenlerin sadece *ölümcül olmayan* kalp atakları olduğunu netleştirmiyor. Birinci cümleyi okuyan ve kalp hastalığı olan birisi "harika!" diye düşünebilirdi. E vitamini ömrümü uzatacak! Tersine, o kişi kendileri hayattayken sadece hayatın daha iyi olacağını –daha az sayıda ölümcül olmayan kalp atakları– öğrenmiş oluyor. Fakat hayat beklentisi üzerinde hiçbir fark yok (gibi görünüyor).

- 4 *Vitaminler: İki test.*

(a) %1.

(b) İki hipotez birbiriyle ilişkili değilse ve iki grup sonuç varsa, bu durumda anlamlılık düzeyi yaklaşık olarak %2 olmalı gibi görünüyor. Yani, tüm zamanların %2'sinde olağan olmayan bir sonuç alırdınız.

Ancak, bu örnekte, iki hipotez arasındaki ilişki daha karmaşıktır. Aynı sonuçlar iki farklı hipotez için de kanıt sunarmış gibi ele alınıyor. Ve her ne kadar farklı olsa da, iki hipotez de sırasıyla, ölümcül ve ölümcül olmayan

kalp atakları hakkında oldukları için değil de daha ziyade ölümcül olmayan atağın bir hastayı ölümcül bir kalp atağına yatkın hale getirebileceği için (ya da tam tersine, gelecekteki bir atağa karşı koruyan bir dokuyu yaratabileceği için) birbiriyle bağlantılıdır.

- 5 *Yağ ve fasulyeler.* Yağlar için p değerlerinin amacı yağ tüketiminin hangi yönünün akciğer kanseri için en ilişkili olabileceğini görmektir. Önemli olan özellik biraz anlamlılık bulunması değildir; daha ziyade doymuş yağın, bu araştırmada diğer her türlü yağa nazaran çok daha anlamlı olduğuydu. Bezelye ve fasulyelere gelince, inceleyenler bu sebzeleri öyle kafalarına göre seçmediler. Zaten baklagil tohumlarının ilişkili olabileceği ve anlamlı sonuçlar çıkarılabileceği tahmininde bulundular. Tersine, akciğer kanseriyle ilişkilenecek bulmak için onlarca yiyecek maddesi üzerinde istatistiksel bir yazılım paketini uyguluyor olsalardı, er ya da geç düşük bir p değeri olan bir şeyle karşılaşmak durumunda olacaklardı. Bu da kendi başına çok az bir şey gösterirdi; fakat belirli bir yiyecek maddesi hakkında daha iyi bir tasarımıyla, özel bir hipotezi test etmek üzere başka bir araştırmanın yapılmasını önerirdi.
- 6 *Psikoloji: 100 test.* Buradaki amaç şüphesiz 200 adet iyi belirlenmiş istatistiksel hipotezi test ederek 200 deney yapan bir deneycinin sadece 100 defada bir kere meydana gelen birkaç sonuç alma beklentisi içinde olabilmesidir. Peki, bu Jerry'nin sonuçlarının değersiz olduğunu mu gösterir? Onun lisansüstü öğrencileri aynı türde bir işi yapıyorlarsa, onların tüm bölümünün çalışması değersiz midir? Bu soruda gerçek bir anlaşmazlık var, bazı istatistikçiler anlamlılık testlerinin arka arkaya kullanılmasından çok şüphe duyuyorlar.
- 7 *Bölüm işbaşında.* Kesinlikle sanki bölüm –ve ima yoluyla, deneysel psikolojinin büyük bir kısmı– gerçek nerede olursa olsun, anlamlıymış gibi görünen çok sayıda sonuç almak zorundaymış gibi görünüyor. Bu konuda büyük bir anlaşmazlık var.

- 8 *Güç*. Bu anlaşmazlığı devam ettiriyor. 5. ve 6. soruların ortaya çıkardığı problemi halletmede Neyman-Pearson çerçevesinin kesin bir çözüm sunduğu o kadar da açık ve net değildir. Doğru olan şu ki daha geniş olan çerçeve, rakip hipotezler hakkında bizi daha dikkatli olarak düşünmeye zorluyor. İnceleyenler istatistiksel olarak güçlü testler tasarlamaya mecbur bırakılırsalardı, anlamsız p değerleri yayınlama arzuları azalardı.
- 9 *Tekrar vitaminler*. Bir testin gücü, yanlış olduğunda test edilen hipotezi reddedebilme olasılığıdır. Büyüklük ya da anlamlılık düzeyi, doğru olduğunda testin reddedilme olasılığıdır.
- Soru H_E , K_E , H_A ya da K_A kesin hipotez ailelerini belirtmiyor. Gerçek testlerde daha kesin olmamız gerekiyor. *Normal olarak yüksek anlamlılık (düşük anlamlılık düzeyi) ve yüksek güce ulaşamayız.*
- H_E iyi haber. Doğruyken H_E 'yi reddetmek istemiyoruz. Böylece sadece anlamlılık büyükken H_E 'yi –diyelim ki 0,01 düzeyinde bir anlamlılık olduğunda– reddedeceğiz. H_E yanlışsa, bu durumda rakip hipotez K_E devam ettikçe, çok da önemli değildir. Onun için özellikle yüksek güce dikkat etmeyiz.
- K_A 'ya göre H_A yanlışsa bu, kötü bir haberdur. Onun için yanlışken H_A 'yı reddetmek istemeyiz. Onun için yüksek bir güç isteriz ve anlamlılık düzeyine de pek o kadar dikkat etmeyiz.
- 10 *Hukuk alanından daha fazla istatistik*. Buradaki amaç 2. sorudakiyle aynıdır. Bu hep rastlanılan bir hatadır; sadece yeni başlayanların değil, uzmanların da yaptığı bir hata. Bu örnekle ilgili olarak, Freedman şöyle bir yorum yapıyor:
- Hayır. Gerçek katsayı sıfırsa, t [istatistiğinin] $> 2,5$ olma şansı %1'dir. Ders kitabının yazarı uzman tanık olarak sıkça tanıklık yapan tanınmış bir ekonometricidir.
- 11 *Bayesçi hukukçular?* David Freedman'ı özetlersek, tersine şöyle dememiz gerekir:

Frekans perspektifinden, $Pr(\text{katsayı} = 0/\text{veri})$ gibi bir ifade saçmadır; katsayı gibi parametreler şans varyasyonu göstermezler.

İnanç perspektifinden, $Pr(\text{katsayı} = 0/\text{veri})$ çok anlamlıdır, fakat bir anlamlılık testi yoluyla hesaplanması fena halde yanlıştır, çünkü katsayının 0'a eşit olduğu önceki olasılık dikkate alınmamıştır; hesaplama *temel oran yanulgısına* örnek oluşturmaktadır. Güç de önemlidir. (Taksiler probleminden *temel oranların* anlamını hatırlayın, bkz. Bölüm 7).

- 12 *Aşırı güvenli fizik.* $x \pm \sigma$ gibi bir sonuç sunduğumuzda "[ölçmüş olduğumuz şeyin] gerçek değerinin $x - \sigma$ ile $x + \sigma$ arasında bir yerlerde bulunma ihtimalinin (yaklaşık olarak) %68 olduğu" tamamen doğru değildir. Gerçek değer kesin bir sayıdır, ya belirtilen aralığın içindedir ya da değildir ve onunla ilgili hiçbir frekans-tipi olasılık yoktur. Doğru ifade şudur: Aynı teknikleri kullanarak arka arka ya faiz miktarlarını ölçseydik ve $\pm \sigma$ gibi bir hata payıyla bir aralık tahmini elde etmiş olsaydık, bu durumda bu aralıkların yaklaşık olarak %68'i doğru, bilinmeyen değeri kapsardı.

BÖLÜM 19. GÜVEN VE TÜMEVARIM DAVRANIŞI

1 *Kaçırılan testler.*

(a) 0,04.

(b) 0,06. Hastalığı dolayısıyla bir testi kaçıranların oranının %95 güven aralığının tahmini gözlemlenen oranın her iki yanında da 0,04'lük bir aralık olurdu; $125/625 = 1/5 = 0,20$, yani (0,16, 0,24). (b) %99 tahmin (0,14, 0,26) aralığıdır.

2 *Daha küçük örneklem.*

(a) Yaklaşık olarak 0,111.

(b) Yaklaşık olarak 0,167. Gözlemlenen oran hemen hemen 0,197, 1. sorudaki 0,2 oranıyla hemen hemen aynı. Fakat şimdi %95'lik tahmin (0,086, 0,308) aralığıdır; başka bir deyişle, "hastalıkları nedeniyle bir sınava

giremeyen öğrencilerin bilinmeyen gerçek oranı %10 ile %30 arasındadır" demekten daha az "kesin."

%99'luk tahmin aşırı derecede "kesin değildir": (0,03, 0,364). Bu, gerçek oran hemen hemen hiçbir şeyden %35'e kadar herhangi bir yerde olabilir demekten çok da iyi değildir.

3 *Parapsikoloji.*

Parapsikolojik olguya inanan San Franciscolular için %95'lik güven aralığı (0,60, 0,66)'dır.

Telepatiye inanan San Franciscolular için %95'lik güven aralığı (0,55, 0,61)'dir.

Medyumların ölümlerle temasa geçebildiğine inanan San Franciscolular için %95'lik güven aralığı (0,28, 0,34)'tür.

Hayaletlere inanan San Franciscolular için %95'lik güven aralığı (0,40, 0,46)'dır.

Afacan perilere inanan San Franciscolular için %95'lik güven aralığı (0,23, 0,29)'dur.

Psikokineze inanan San Franciscolular için %95'lik güven aralığı (0,34, 0,40)'tır.

Her durumda, tüm zamanların en az %95'inde doğru ara-
lıkları veren bir metotla tahmin yapılmıştır.

Ek Okuma Listesi

Özel konular hakkındaki birkaç ders kitabı ve birkaç makaleyi bir kenara bırakırsak, burada tarif edilen eserlerin çoğu önümüzdeki on yıllarda repertuvarda kalmaya devam edecek klasiklerdir.

BÖLÜM 1 VE 2

Tümdengelimle ilgili oldukça fazla sayıda ders kitabı var ve her yıl da daha fazlası piyasaya çıkıyor. Tümevarıma değinen faydalı bir kitapsa şudur:

Robert J. Fogelin ve Walter Sinnott-Armstrong, *Understanding Arguments: An Introduction to Informal Reasoning* [Argümanları Anlamak: Enformel Akıl Yürütmeye Giriş], Fort Worth: Harcourt Brace, 5. baskı, 1997.

Tümevarım mantığı üzerine çok az sayıda ders kitabı vardır. Bunların içerisinde mükemmel olan biri de şudur:

Brian Skyrms, *Choice and Chance: An Introduction to Inductive Logic* [Seçim ve Şans: Tümevarım Mantığına Giriş], Belmont, Calif.: Dickenson, 2. baskı, 1975.

Bizim kitapla çakışan, fakat aynı zamanda onu destekleyen bir kitap da şudur:

Davis Baird, *Inductive Logic: Probability and Statistics* [Tümevarım Mantığı: Olasılık ve İstatistik], Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, 1992.

Baird frekans yaklaşımını vurguluyor. İnanç-tipi, kişisel olasılık yönelimli en iyi ders kitabı:

Colin Howson ve Peter Urbach, *Scientific Reasoning: The Bayesian Approach* [Bilimsel Akıl Yürütme: Bayesçi Yaklaşım], Chicago: Open Court, 2. baskı, 1993.

BÖLÜM 3-5

Bu bölümler olasılıklar hakkında düşünmemize yol açıyor. En az tümevarım mantığı kadar olasılığa ve istatistiğe giriş kitabı vardır ve her yıl da daha fazlası piyasaya çıkmaktadır. Bunların içerisinde mükemmel olan eski bir kitap da şudur:

David Freedman, Robert Pisani ve Roger Purves, *Statistics [İstatistik]*, New York: Norton, 1978.

Basit sezgiler ve büyüleyici örneklerle başlayan ve fakat olasılık kuramında en temelli sonuçlardan bazılarına yol açan gerçek bir klasik olan kitapsa:

William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications [Olasılık Kuramına Giriş ve Uygulamaları]*, New York: Wiley, 1950.

Beklenilmedik çözümlerle birlikte daha zor problemler için de bir damak tadınız varsa, şu kitabı deneyin:

Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability [Olasılıkta Meydan Okuyan Elli Problem]*, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1965.

The Inverse Gambler's Fallacy [Ters Kumarbazın Yanılgısı] 3. bölümde geliştirilmişti, alıştırma 8-10. Bu daha da ileri düzeyde aşağıdaki kitapta açıklanmaktadır:

Ian Hacking, Ters kumarbazın yanılgısı: Tasarımdan bir argüman. Wheeler evrenlerine uygulanan Anthropic Prensip, *Mind* 97 [Zihin] (1987): 331-340. (Eleştiriler için bkz. *Mind*'in daha sonraki sayıları.)

BÖLÜM 6

Bahis sorusu 2 oldukça fazla tartışmaya sebep oldu. Birçok kişi "yanlış" cevap verdi. Bazı yazarlar insanların doğuştan olasılıkla ilgili olarak kötü akıl yürütücüleri olduğuna inanmaktadır. Diğer bazılarıysa sorunun soruluş tarzının bizi

yanılttığını düşünmektedir. İşte size literatürün bir örnekleme-
mesi. Tversky ve Kahneman top yuvarlamayı başlattı:

Daniel Kahneman ve Amos Tversky, On the psychology of prediction [Tahmin psikolojisi üzerine], *Psychological Review* 80 (1973): 237–251.

Amos Tversky ve Daniel Kahneman, Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment [Genişleyene karşı sezgisel akıl yürütme: Olasılık yargısında birleşim yanılgısı], *Psychological Review* 90 (1983): 293–315.

Bazıları sorunun problemi ifade ederken kullanılan dilde olduğunu söylüyor.

K. Fiedler, The dependence of the conjunction fallacy on subtle linguistic factors [Birleşim yanılgısının ince dilbilimsel faktörlere bağımlılığı], *Psychological Research* 50 (1988): 123–129.

Bazıları sorunun insanların çeşitli kariyer ve hobilere sahip olduğu frekansların arkaplan bilgisiyle ilgili olduğunu söylüyor.

Gerd Gigerenzer, How to make cognitive illusions disappear: Beyond 'Heuristics and Biases.' [Bilişsel illüzyonlar nasıl ortadan kaldırılır: 'Buluşsal Yöntemler ve Önyargıların' Ötesinde], *European Review of Social Psychology* 2 (1991): 83–115.

Treversky-Kahneman bilişsel illüzyonlarının çoğu daha ileri düzeyde aşağıdaki kitapta sunulmuştur:

Amos Tversky, Paul Sloviç ve Daniel Kahneman, ed. *Judgement under Uncertainty* [Belirsizlik altında Yargı], Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

BÖLÜM 7

"Taksiler problemi" ve temel oran yanılgısı ayrıca büyük bir literatür de yaratmıştır. Şununla başlamıştır:

Amos Tversky ve Daniel Kahneman, *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* [Belirsizlik altında yargı: Buluşsal yöntemler ve önyargılar], *Science* 185 (1974): 1124–1131.

Psikologlara karşı sağduyunun savunulması için bu makaleye ve onu takip eden çeşitli yazarların yorumlarına bakın.

L. J. Cohen, Can human irrationality be experimentally demonstrated? [İnsanın irrasyonelliği deneysel olarak gösterilebilir mi?], *The Behavioral and Brain Sciences* 4 (1981): 317–331.

Bu makale bu alanla ilgili çoğu uzmanın yaptığı tartışma ve eleştirileri içerir. Ayrıca 6. bölüm için alıntısı yapılan Gigerenzer'in yazısına bakın.

Her türlü bilişsel illüzyonların araştırılması ve daha detaylı bibliyografya için, bkz.:

Massimo Piattelli-Palmarini, *Inevitable Illusions: How Mistakes of Reason Rule Our Minds* [Kaçınılmaz İllüzyonlar: Akıl Yürütme Hataları Nasıl Zihinlerimizi Yönetiyor], New York: Wiley, 1994.

Howard Margolis, *Patterns, Thinking, and Cognition: A Theory of Judgment* [Örüntüler, Düşünme ve Bilişsellik: Bir Yargı Kuramı] Chicago: University of Chicago Press, 1982.

BÖLÜM 8

Beklenti üzerine ek alıştırmalar herhangi bir temel ders kitabında bulunabilir. Bölümün sonundaki alıntılar aşağıdaki kitaptandır:

Antoine Arnauld ve Pierre Nicole, *Logic or the Art of Thinking. Containing, besides Common Rules, Several New Observations Appropriate for Forming Judgment* [Mantık ya da Düşünme Sanatı. Genel Kuralların yanı sıra, Çevreleme, Yargı Oluşturmak için Uygun Olan Çeşitli Yeni Gözlemler], Jill Buroker tarafından çevrilmiş ve bas-

kıya hazırlanmıştır. Cambridge: Cambridge University Press, 1994, s. 273–274.

BÖLÜM 9

Bölümün sonunda incelenen Allais paradoksu, aşağıdaki kitabın sayfa 102–103’ündeki yorumlardan bahsediyor:

L. J. Savage, *The Foundations of Statistics* [İstatistiğin Temelleri] New York: Wiley, 1954.

Bu olasılık kuramının klasik anlatımlarından biridir ve Savage’ın kişisel olasılık kuramının tam olarak ifade edilmesini içerir.

BÖLÜM 10

Pascal’ın *Pensées*’inin (Bu Fransızcada *Düşünceler* anlamına gelmektedir, fakat birçok İngilizce çevirisi Fransızca başlığı kullanır.) *birçok baskısı ve çevirisi vardır*. Maalesef, bazen farklı baskılar bölümleri farklı numaralandırıyor. İşte size yaygın bir şekilde bulunabilir bir çevirisi:

Blaise, Pascal, *Pensées*, A. J. Krailsheimer tarafından bir giriş yazısıyla çevrilmiştir. New York: Penguin, 1966. Bu baskıda “bahis” 418’dir, s. 149–153.

Bahsin birçok felsefi ve tarihsel tartışması vardır. 10. bölümdeki tartışmaya en yakın olan biri:

Ian Hacking, *The Emergence of Probability* [Olasılığın Ortaya Çıkışı] Cambridge: Cambridge University Press, 1975, Bölüm 9.

BÖLÜM 11 VE 12

İşte size 12. bölümde tarif edilen olasılık kuramlarının klasik felsefi anlatımları.

(1) *Frekans Kuramı*. Sadece tek bir klasiğinden bahsedeceğiz:

Richard von Mises, *Probability, Statistics and Truth* [Olasılık, İstatistik ve Gerçek]. London: Allen and Unwin, 1957.

(2) *İstek Kuramı.*

Karl Popper, The propensity interpretation of probability [Olasılığın istek yorumu] *British Journal for the Philosophy of Science* 10 (1959): 25–42.

(3) *Kişisel Kuram.* Bazen olduğu gibi bu düşüncelerin ilk sunulmaları 75 yıl sonra da tazeliğini korur.

F. P. Ramsey, Truth and probability [Gerçek ve olasılık], *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays* [Matematiğin Temelleri ve Diğer Mantıksal Makaleler], Londra: Routledge ve Kegan Paul, 1931. Ayrıca H. E. Kyburg ve Howard E. Smokler, ed. *Studies in Subjective Probability* [Öznel Olasılıkla ilgili Çalışmalar] New York: Wiley, 1964, s. 61–92.

Bruno de Finetti, Öngörü: Mantıksal kanunları, öznel kaynakları. *age.* s. 97–158.

9. bölüm için alıntısı yapılan L. J. Savage'ın kitabı kişisel kuramın klasik ve tam bir izahıdır.

(4) *Mantıksal Kuram.* Keynes hâlâ sadece kuramı için değil, aynı zamanda tarihsel arka planı ve felsefi sezgisi için harika bir okumadır.

John Maynard Keynes, *A Treatise on Probability* [Olasılık Üzerine Bir İnceleme] Londra: Macmillan, 1921.

BÖLÜM 13 VE 14

Bu iki bölümün düşünceleri Ramsey ve de Finetti'den kaynaklanır. Onların 11. ve 12. bölümlerde alıntısı yapılan Kyburg ve Smokler koleksiyonundaki yazıları hâlâ mükemmel birer kaynaktır. Ramsey daha bir okumaya değer olanıdır, Finetti'ninkiyse daha çok detaya sahiptir.

BÖLÜM 15

Daha önce 1. ve 2. bölümler için alıntısı yapılan Howson ve Urbach, Bayesçi düşüncelerin en iyi temel açıklamalarını su-

nar. Jeffrey kuralını içeren, diğer bir girişçe:

Richard Jeffrey, *The Logic of Decision* [*Karar Verme Mantığı*], Chicago: University of Chicago Press, 2. baskı, 1983.

Bayeşçi metodu inceleyen daha ileri seviyedeki bir felsefe kitabıysa:

John Earman, *Bayes or Bust: A Critical Examination of Bayesian Confirmation Theory* [*Bayes ya da Fiyasko: Bayeşçi Onaylama Kuramının Eleştirel Bir İncelemesi*] Cambridge, Mass.: MIT Press, 1992.

Anlık kıyamet

Alıştırma 4–7 John Leslie'nin paradoksal argümanlarını geliştirdi ve onların birer hata olduklarını ileri sürdü. Onun bakış açısından orijinal versiyona ulaşmak için yazılarına ve kitaplarına bakın:

The doomsday argument [Kıyamet günü argümanı], *The Mathematical Intelligencer* 14 (1992): 48–51.

Is the end of the world nigh? [Dünyanın sonu yakın mı?], *The Philosophical Quarterly* 40 (1996): 65–72.

The End of the World [Dünyanın Sonu], Londra: Routledge, 1996.

Mucizeler

Felsefe ve Bayes teoremi başka türlü ve tuhaf bir şekilde keşsiyor. David Hume bir mucizeye inanmak için hiçbir zaman iyi gerekçelerimiz olamaz diyor.

David Hume, *An Enquiry Concerning Human Understanding* [İnsanın Anlama Yetisi Üzerine Bir Soruşturma] 1748, birçok baskısı vardır. *Bkz.* bölüm X.

Bazı filozoflar Hume'un haklı olduğunu tartışmak üzere Bayeşçi akıl yürütmeyi kullanırken, bazılarıysa onun yanlış olduğu argümanını yapmaktadırlar. Tartışmanın bir versiyonu bu iki yazıyla başlar; bu tartışmaya daha sonra yapılan kat-

kıları bulmak için bir arama motorunu kullanabilirsiniz.

J. H. Sobell, On the evidence of testimony for miracles: A Bayesian reconstruction of Hume's analysis [Mucizelere tanıklığın kanıtı üzerine: Hume'un analizinin yeniden Bayesçi inşaaı], *The Philosophical Quarterly* 37 (1987): 166–186.

David Owen, Hume *versus* Price on miracles and prior probabilities: Testimony and the Bayesian calculation [Mucizeler ve önsel olasılıklar üzerine Hume'a karşı Price: Tanıklık ve Bayesçi hesaplama], *age.*, s. 187–202.

BÖLÜM 16

Bu bölümde belirtilen olasılık ve göreceli frekans arasındaki birbirini izleyen bağlantılar Rus matematikçi P. L. Çebişev (1821–1894) sayesinde Bernoulli teoreminin temel ispatında atılan adımlardır. Bu ispat olasılık kuramına iki önemli katkı yapan kişilerce yazılan bir Rus ders kitabında verilmiştir. Hâlâ olasılık düşüncelerine en doğrudan ve pratik girişi veren bu kitap İngilizceye çevrilmiştir. Burada sunulan ispat hiçbir şekilde ileri seviye matematik gerektirmiyor.

B. V. Gnedenko ve A. Ya. Khinchin, *An Elementary Introduction to the Theory of Probability* [Olasılık Kuramına Temel Bir Giriş], New York: Dover, 1962, s. 38–59.

Her ne kadar esas olarak eski Sovyetler Birliğindeki mühendislik öğrencileri için yazılmışsa ve kesin bir şekilde frekans perspektifini benimsemiş olsa da anlatımları, bu kitap boyunca kullanmış olduğumuz olasılık nosyonları zincirinin tamamen aynısını –ve de aynı sırayla– kullanmaktadır. Kitaplarının açık bir felsefesi yoktur, fakat olasılık hususlarında bizim yaptığımızın ötesine geçmektedir ve sadece 122 sayfadır; gerçekten büyük bir artı!

Büyük sayılarla ilgili kanunların daha detaylı bir incelemesi için bölüm 3–5'te alıntısı yapılan Feller'in ders kitabına bakın.

BÖLÜM 17

Herhangi bir olasılık ya da istatistik kitabı normal dağılım hakkında size daha fazla bilgi verecektir.

BÖLÜM 18

Anlamlılık seviyeleri ve Neyman-Pearson testleri çoğu zaman el ele giderler. Bunun nasıl meydana geldiğine dair nedenlerden birisi için, *bkz.*

Gerd Gigerenzer ve David J. Murray, *Cognition as Intuitive Statistics [Sezgisel İstatistik olarak Bilişsellik]*, Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum, 1987.

Anlamlılık düzeylerinin suistimal edilmesine dair birçok örnek bazı konularda kısmen felsefeciler için yazan bir istatistikçinin makalesinden alınmıştır:

David Freedman, Some issues in the foundations of statistics [İstatistiğin temellerindeki bazı konular], *Foundations of Science* 1 (1995): 19–39, katkıda bulunan başkalarının yorumlarıyla, 41–67 ve Freedman'ın cevaba karşılık cevabıyla, 69–83.

Deborah Mayo'nun çıkarım ve karara dair frekans-tipi yaklaşımı izah eden yeni çıkan bir felsefe kitabı 22. bölüm için alıntılanmıştır.

Soru 6 ve 7 anlamlılık testleri hakkında önemli endişeler yaratıyor, ilki şu kitapta ortaya konulmuştur:

Paul Meehl, Theory testing in psychology and physics: A methodological paradox [Psikoloji ve fizikte kuramın test edilmesi: Metodolojik bir paradoks], *Philosophy of Science*. 34 (1967): 103–115.

Meehl eleştirisini birçok yılda geliştirdi: Son zamanlardaki bir tartışma:

Paul Meehl, Why summaries of research on psychological theories are often uninterpretable [Psikolojik kuramlara

dair araştırmaların özetleri neden çoğu zaman yorumlanamaz], *Psychological Reports* 66 (1990): 195–244.

Geleneksel istatistiksel metotların canlı bir felsefi savunusu aşağıdaki eserde bulunabilir:

J. D. Trout, *Measuring the Intentional World: Realism, Naturalism and Quantitative Methods in the Behavioral Sciences* [Tasarlanmış Dünyanın Ölçümü: Davranış Bilimlerinde Gerçekçilik, Doğalcılık ve Niceliksel Metotlar], New York: Oxford University Press, 1998.

BÖLÜM 19

Bilimsel akıl yürütme çerçevesi içerisinde güven aralıkları kuramına dair çok temel bir giriş için, bkz.

Ronald Giere, *Understanding Scientific Reasoning* [Bilimsel Akıl Yürütmeyi Anlamak], New York: Holt, Rinehart and Winston, 1979, Bölüm 11 ve 12.

BÖLÜM 20

Tümevarım sorunun klasik ifadesi David Hume’unkidir. Belki de en iyi giriş aşağıdaki kitabın içerisinde bulunabilir:

David Hume, *An Enquiry Concerning Human Understanding* [İnsanın Anlama Yetisi Üzerine Bir Soruşturma], 1748, değişik baskılar, bölüm IV, V.

Daha karmaşık bir argümana şu kitaptadır:

David Hume, *A Treatise of Human Nature* [İnsan Doğası Üzerine Bir İnceleme], 1739, değişik baskılar, Bölüm III.

Bölüm 20’deki alıntılar *inceleme* için Hume’un bizzat kendi anonim reklamından alınmıştır. Reklamını şöyle adlandırmıştı: “İnsan doğasına dair incelemenin bir özeti.” Bunu, Charles W. Hendel’in *Enquiry*’nin [İnceleme] öğrenci baskısı da dâhil olmak üzere birçok yerde bulabilirsiniz; fakat bu baskıda yazımın modernize edildiğine dikkat ediniz: *An Inquiry Concer-*

ning Human Understanding [İnsanın Anlama Yetisi Üzerine Bir Soruşturma]. New York: Liberal Arts Press, 1955.

Tümevarım sorununun pek hoş bir versiyonu aşağıdaki şu eserin 6. bölümündedir:

Betrand Russell, *The Problems of Philosophy [Felsefenin Sorunları]*, 1912'den beri birçok baskı.

Tümevarım sorunu hakkında (Russell'in bölümü de dâhil olmak üzere) bir makaleler derlemesi de şudur:

Richard Swinburn, *The Justification of Induction [Tümevarımın Gerekçelendirilmesi]*, Oxford: Oxford University Press, 1974.

Popper'ın kaçınması için şu kelimelerle başlayan bir yazısına bakın, "Şüphesiz yanılabilirim, fakat zannedersem büyük bir felsefi problemi, tümevarım problemini çözdüm."

Karl Popper, Conjectural knowledge: My solution of the problem of induction. *Objective Knowledge: An Evolutionary Approach* [Varsayıma dayalı bilgi: Tümevarım problemine benim çözümüm. *Nesnel Bilgi: Evrimsel Bir Yaklaşım*], Oxford: Clarendon Press, 1972, Bölüm 1.

BÖLÜM 21

Daha önce 1. ve 2. bölüm için alıntısı yapılan Howson ve Urbach tümevarım problemine Bayesçi yaklaşım konusundaki en iyi temel tartışmadır.

Hialeah Hume'un yaptığı itiraz ilk olarak aşağıdaki eserde ortaya atılmıştır:

Ian Hacking, Slightly more realistic personal probability [Birazcık daha gerçekçi kişisel olasılık], *Philosophy of Science* 34 (1967): 311-325.

İtiraza karşı koymak için birçok teknik girişim olmuştur, fakat Howson ve Urbach, 6. bölüm, bunların hiçbirisinin işe yaramadığını ortaya koymuştur.

BÖLÜM 22

Charles Sanders Peirce'in oldukça çok sayıda muazzam verimli düşünceleri vardı, fakat onları bir sıraya koymayı beceremiyordu. Onun bilim felsefesinin çeşitli antolojileri var; aşağıdaki eser diğerlerine nazaran daha ziyade onun olasılık hakkındaki çalışmasını içerir:

Justus Buchler, *The Philosophical Writings of Peirce* [*Peirce'in Felsefî Yazıları*], New York: Dover, 1955. Özellikle bkz. 11–14 arasındaki yazılar. Bölüm 22'deki alıntılar Buchler'in 160–164 arasındaki sayfalarındandır. Ayrıca bkz. *Writings of Charles S. Peirce* [*Charles S. Peirce'in Yazıları*], baskıya hazırlayan C. J. W. Kloesel. Bloomington: Indiana University Press, 1982, c. 3, s. 276–281.

Peirce'in olasılık kuramının güven aralığı kuramını nasıl öngördüğünün izahı için bkz.

Ian Hacking. Neyman, Peirce ve Braithwaite. *Science, Belief and Behavior* [*Bilim, İnanç ve Davranış*], (ed.), D. H. Hellor. Cambridge: Cambridge University Press, 1980, s. 141–160.

Peirce'in olasılık hakkındaki görüşlerinin bir anlatısı ve onun genel felsefesiyle ilişkisi için bkz.

Ian Hacking, *The Taming of Chance* [*Şansın Terbiye Edilişi*], Cambridge: Cambridge University Press, 1990, Bölüm 17.

Frekans olasılığının tümevarım problemine nasıl uygulandığını anlatan yeni bir kitap:

Deborah Mayo, *Error and the Growth of Experimental Knowledge* [*Hata ve DeneySEL Bilginin Büyümesi*], Chicago: University of Chicago Press, 1996.

OLASILIK TARİHİ ÜZERİNE

Matematiksel bakış açısından en iyi tarih:

Stephen M. Stigler, *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900* [İstatistiğin Tarihi: 1900'den önce Belirsizliğin Ölçülmesi], Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1986.

Bu her ne kadar bir matematik tarihi olsa da, genel okuyucu tarafından önemli ölçüde erişilebilirdir. Olasılığın biraz daha felsefi ya da kültürel tarihi matematiksel olmayan konuları kapsar. Bunlar arasında Hacking'in *The Emergence of Probability* ve *The Taming of Chance* vardır ve sırasıyla 10. ve 22. bölüm için alıntısı yapılmıştır. 17. yüzyıldaki olasılık yaşantısı ve zamanları hakkındaki büyüleyici bir kitapsa:

Lorraine Daston, *Classical Probability in the Enlightenment* [Aydınlanma Çağında Klasik Olasılık], Princeton: Princeton University Press, 1988.

19. yüzyıl için eşit derecede büyüleyici bir kitapsa:

Theodore Porter, *The Rise of Statistical Thinking, 1820–1900* [İstatistiksel Düşünce Tarzının Yükselişi, 1820–1900], Princeton: Princeton University Press, 1986.

DİZİN

- adil 48
adil ücret 125
akla 381
akla yatkın 22
Allais, Maurice 168
altkümeler, ilgili 207
anlamlılık 308, 310, 311
argüman: eleştiri 19, 61
ayrık 71
- bağımsızlık 50, 72, 96
bahis 234
bahis oranları 234
bahis soruları 13
baskın 176
baskınlık 174
Bayes 109
Bayesçi 216, 228, 257, 332, 358
Bayes Kuralı 108, 110, 111, 112, 255, 282
beklenen değer: tanımı 123
Bernoulli, Daniel 144, 293
Bernoulli, Jacques 293
Bernoulli, Nicholas 144
Bernoulli denemeleri 287, 343
Bernoulli teoremi 292, 337, 343, 389
bilardo: Bayes'te 118
bilardo: Hume'da 365
binom dağılımı 301
birbirini dışlayan 71
büyük sayılar, yasaları 282, 302
- Carnap, Rudolf 201, 217, 272, 273
çakışma 83, 95
çan eğrisi 284, 297
çarpma 73, 95
çekiliş kutuları 110, 288
çıkarım ve davranış 356
- Darwin, Charles 332
davranış, tümevarımsal 357, 358
Bruno de Finetti 252, 274
Abraham de Moivre 300, 302, 305, 369
de Morgan, Augustus 392
Dewey, John 388
Dikkatli Öğrenci 61, 85, 207, 309
Dosso Dossi 4
düşünce deneyleri 228, 244
- eklektik 211
en iyi açıklama için bir çıkarım 37
en kötü senaryo 344
eylemler: açıklaması 122, 123
- fayda 122
faydacılık 158
Fisher, R. A. 259, 332, 359
Freedman, David 359
frekans 192

- Galileo 78
 Galileo uzay aracı 162
 Gauss, C. F. 298
 geçerlilik 20, 22, 23
 Good, I. J. 255, 274
 görelî frekans, en olası 289
 güven aralığı 337, 346
 hesaplamaların çizimi 85
 Hollandalı Kitabı 252
 Hume, David 118, 283, 362, 390
 Hume, Hialeah 378, 379
- inanç 417
 inanç-türündeki olasılık 199,
 227, 282, 375
 istek 218
- James, William 388
 Jeffreys'in kuralı 270, 272, 380
 Joy, Bill 190
- kabul etme ve reddetme 328
 Kahneman, Daniel 103, 112
 kanıt 256
 Kant, Immanuel 158, 373
 karar kuramı: uygulaması 150
 kararlılık, istatistiksel 281
 kaybetmesi kesin olan sözleş-
 meler 245
 kesinlik 71, 94
 kesinlik ve uyum 250
 Keynes, John Maynard 63, 216,
 220, 272
 kişilerarası/kanıtsal olasılık
 197
 kişisel inanç derecesi 198
 Kolmogorov, A. N. 106, 218
 koşullu bahis 238
 koşullu olasılık, tanımı 80, 95
 kumarbazın yanılgısı 47, 53
 kumarlar, risksiz 229
 kumar sistemi, imkânsızlığı 50,
 54, 218
 Laplace, P.S. de 77
 Laplace'ın şaşırtma sorusu 93
 Leslie, John 278, 279, 425
 Loto 6/49 131
- mantıksal sonuç 96
 Mantık ya da Düşünme Sanatı
 144
 martingales 138
 Mendel, Gregor 332
 Mill, John Stuart 158
 modeller 60, 86, 161, 221, 338
- neden 323, 364
 geri çıkarım 37, 38, 389
 Neyman, Jerzy 328, 357
 normal dağılım 299
 normallik 94
- olasılık, canlı 177
 olasılık: kesinlik-olasılığı 287,
 291, 344
 olasılık oranı 237
 olası sayı, en 288
 olay 68
 ortaya konan para 234
 oynaklık 154
 öncül 17
 örneklemeler ve popülasyonlar
 32, 337
- Pagnol, Marcel 398
 Pascal, Blaise 176
 Pascal 145
 p-değeri 320, 334
 Pearson, E. S. 328, 359
 Pearson, Karl 359
 Peirce, Charles Sanders 37, 385,
 388
 piyango biletleri: ücretsiz 42,
 124

- Popper, Karl 219, 370, 371, 372
 psikoloji, deneysel ve anlamlılık
 testleri 318, 334

 Ramsey, F. P. 217, 252
 Ramsey, Frank 274
 rastgele 50
 risk 31

 Savage, L. J. 168, 169, 217, 274
 sigorta 67, 147, 154
 sonuç 17
 standart sapma: örneklemin
 285
 St. Petersburg paradoksu 141,
 153
 şans kurgusu 49
 şüphecilik 362, 363

 tahmin 337, 340
 tanıklık 38
 tasarım, argümandan 66, 176
 tecrübe, -den öğrenmek 257

 temel kurallar 94, 97
 temel oranlar 113, 440
 ters kumarbaz yanılığı 65, 398
 testin gücü 330, 335
 toplam olasılık 95
 toplanabilirlik 95, 247
 Turing, A. M. 274
 tümevarım probleminden Ba-
 yesçi sakınma 375
 tümevarımsal mantık, tanımı
 40
 Tversky, Amos 103, 112

 Venn, John 100, 215, 218
 venn şemaları 100
 Von Neumann, John 274

 Wheeler, John 439

 yanlış pozitifler 114, 121
 yeterli istatistik 332

OLASILIK VE TÜMEVARIM MANTIĞINA GİRİŞ

IAN HACKING

Çağımızın önde gelen bilim felsefecilerinden biri olan Hacking 1936 yılında Kanada'da doğmuştur. Lisans derecesini 1956 yılında British Columbia Üniversitesinden ve doktora derecesiyse 1962 yılında Ludwig Wittgenstein'in bir öğrencisi olan Casimir Lewy'nin yönetiminde Cambridge Üniversitesinden alan Hacking, halen Toronto Üniversitesinde felsefe bölümü profesörüdür. Daha önce aldığı birçok ödülün yanında Ian Hacking 25 Ağustos 2009'da edebiyat ve beşeri bilimler, sosyal bilimler, hukuk ve teoloji alanındaki bilimsel çalışmalara verilen bir Norveç ödülü olan *Holberg International Memorial Ödülü*nü almıştır. Kendisine bu ödül istatistiğin ve olasılık kuranının toplumu nasıl şekillendirdiği üzerine yaptığı çalışmalar dolayısıyla verilmiştir. Ian Hacking Kanada Kralliyet Topluluğunun, Britanya Akademisinin ve Amerikan Sanat ve Bilimler Akademisinin üyesidir.

İRFAN ÖZDABAK

1961 yılında Şebinkarahisar'da doğan İrfan Özdebak, ilk ve orta öğrenimini Bebek Tevfik Fikret İlkokulu ve Özel Darüşşafaka Lisesinde yaptı. Boğaziçi Üniversitende bir yıl Matematik bölümünde okuduktan sonra aynı üniversitenin işletme bölümünü bitirerek ekonomi bölümünde yüksek lisans yaptı. ABD Eastern Michigan Üniversitesinde ekonomi ve istatistik yüksek lisans dersleri aldı. Kazandığı bursla State University of New York-Binghamton'da asistanlık yaptı ve Prof. Donald Quatert yönetiminde tarih yüksek lisans derecesini aldı. Aynı üniversitedeki Fernand Braudel Centre'dan Çağlar Keyder ve Immanuel Wallerstein'den sosyoloji dersleri aldı. İstanbul Üniversitesi Arap dili ve edebiyatı bölümüne bir yıl devam etti. ABD Virginia'da NOVA Community College'de matematik önlisans okudu. Mali denetmenlikten şirket ortaklığı ve üst düzey şirket yöneticiliğine, havacılık hizmetlerinden kafe işletmeciliğine kadar değişik alanlarda ve pozisyonlarda çeşitli işler yaptı. Halen Boğaziçi Üniversitesinde matematik bölümünde lisans eğitimine yarı-zamanlı olarak devam etmekte ve çeşitli çeviri ve danışmanlık işleriyle hayatını kazanmaktadır.

IAN HACKING

Olasılık ve Tümevarım Mantığına Giriş

Bu kitap konuyu hiç bilmeyenler için dünyanın önde gelen bilim felsefecilerinden biri tarafından yazılmıştır. Sadece felsefe okuyan öğrenciler için değil, temel sembolik mantığı hiç bilmeyen okurlar için kurgulanmıştır. Fikirler kolay anlaşılır ve sistematik bir şekilde organize edilip sunulmuştur. Olasılık ve tümevarımın bütün temel tanımları bütüncül bir kurguda tek tek ele alınmıştır: Karar verme teorisi, Bayesçilik, sıklıkla ilgili fikirler, felsefi bir sorun olarak tümevarım gibi temel konular ayrıntılı bir şekilde işlenmiştir. Her ne kadar esas olarak felsefe dersleri için tasarlanmış olsa da, olasılık ve tümevarımı öğrenmek isteyen sosyal bilimler, özellikle de psikoloji, ekonomi, siyaset bilimi ve sosyoloji, hatta tıp öğrencileri tarafından da zevkle okunabilir.

"Olasılıkla ilgili felsefi problemlere yanıtlar bu kitapta."

—David Papineau, King's College

"Hacking'in bu kitabı istatistiksel düşüncenin üzerindeki gizemi aydınlatıyor"

— Katherine van Uum, Grinnell College



ALFA

www.alfakitap.com

f /alfakitap

t /alfakitap

İSTATİSTİK FELSEFESİ

ISBN 978-605-106-981-4



9 786051 069814