

Keyifli Okumalar Dileriz

Binlerce kategoride milyonlarca PDF e-kitap, ders kitapları, dergiler ve romanlara platformumuz üzerinden ücretsiz ulaşabilirsiniz.

RESMİ WEB SİTEMİZ

<https://rantey.org>

Yedek ve Duyuru Kanallarımız

Sitemize erişim engeli gelmesi veya adres değişikliği durumunda aşağıdaki kanallardan güncel giriş adresine erişebilirsiniz:

- Telegram: <https://t.me/birkitapbir>
- WhatsApp Kanalımız : <https://whatsapp.com/channel/0029VbDHv8uE50Us4lvMoc0Y>

CEMAL YILDIRIM

MATEMATİKSEL DÜŞÜNME

Remzi Kitabevi

MATEMATİKSEL DÜŞÜNME

MATEMATİKSEL DÜŞÜNME

Cemal Yıldırım

2. Basım



REMZİ KİTAPÇI

Ücretsiz E-Kitap Arşivi - <https://rantey.org>

BÜYÜK FİKİR KİTAPLARI DİZİSİ, 87
İkinci Basım, Şubat 1996

ISBN 975-14-0078-3

Remzi Kitabevi A.Ş.
Selvili Mescit S. 3 34440 Cağaloğlu-İstanbul, 1996
Tlf: 511 6916 - 522 0583, Fax: 522 9055

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - <https://rantey.org>

Ö N S Ö Z

(Birinci Basım)

Bu kitap okuyucuyu matematiği öğrenmeye değil, matematiksel düşünmeyi tartışarak anlamaya çağırmaktadır.

Okuyucunun öyle bir etkinliğe girmesi için orta öğrenim yıllarında öğrendiği matematik yeterlidir. Felsefi nitelikte bir tartışma ilişkin olduğu alanın bilgisini gerektirir, kuşkusuz; ama anlamlı bir yaşam deneyimiyle birleşen entelektüel ilgi bu amaç için çok daha önemlidir.

Matematik teknik görünümüyle pek çok kimseyi ürküten bir konudur. Oysa soyut formüllerin gerisinde daha düzenli ve kesin biçimiyle, alışık olduğumuz günlük düşünce vardır. Başka bir deyişle, matematikte bize yabancı gelen düşüncenin kendisi değil, düşüncüyü dile getiren kimi özel simgelerdir. Gerçi günlük düşünme daha çok somut nesne ve olgulara yönelik bir etkinliktir. Matematiksel düşünmenin özelliği ise somut olgusal ilişkileri bile soyut terimlerle dile getirebilme, genele açılabilme gücünde kendini göstermektedir. Ne var ki, temelde ikisi de aynı mantığa bağlıdır. İkisinde de ulaşılan sonuçları elden geldiğince sağlam ve doyurucu öncüllere dayama sorumluluğu vardır.

Matematiksel Düşünme daha önce yayımlanan *Bilim Felsefesi* yapıtına koşut bir çalışmadır; altı yıllık bir uğraşın ürünüdür. Kitabın önemli bir bölümünü 1983-1985 yıllarında misafir öğretim üyesi olarak bulunduğum California State University, Northridge'de katıldığım bir seminerde işlediğim konular oluşturmaktadır. Seminer çalışmalarını benimle paylaşan, tartışmalarından geniş ölçüde yararlandığım meslektaş ve öğrencilerime şükran borcumu dile getirmek isterim.

Kitabın sonunda yer alan on çeviri metin, hem asıl metinde yer alan tartışmayı zenginleştirmek, hem de, sorunsal noktalara ışık tutmak amacıyla seçilmiştir. Yetkili kalemlerin ürünü olan bu metinlerin üniversitelerimizde felsefe seminer çalışmaları için de arınan bir kaynak oluşturacağı umulur.

Matematik felsefesi Batı kültür dünyasında son yüzyıl içinde yoğun biçimde işlenen bir düşün alanı olmuştur. Dilimizde henüz bu alanda ne telif, ne de çeviri bir yayına rastlamamaktayız. Elinizdeki kitap bu boşluğu doldurma yolunda bir ilk denemedir; yeni yayınlara yol açarsa, yazar emeğini yeterince değerlendirilmiş sayacaktır.

Cemal Yıldırım

İda Tepe, Akçay
Nisan 1988

Ö N S Ö Z

(İkinci Basım)

Matematiksel Düşünme'nin yeni bir basım olanağı bulmasını, düşün alanına ilginin olumlu bir göstergesi sayıyor, kıvanç duyuyorum. Yayınevi, bu türden bir yapıtın yeterli sayıda okyucu bulamayacağı riskini göze alarak, salt düşün yaşamımıza hizmet sorumluluğuyla, ilk basımı üstlenmişti. Bu kez öyle bir riskin duyulmaması gerçekten sevindirici bir gelişmedir.

Kitabım ikinci basıma, kimi düzeltme ve genişletmeler dışında EKLER bölümüne konan iki yeni çeviri metinle girmektedir. Okuyucuların bu çalışmalarla kitabı daha doyurucu bulacaklarını umuyorum.

Cemal Yıldırım

İda Tepe, Akçay
Ocak, 1996

İçindekiler

I. Bölüm:	GİRİŞ	11
	Matematik Nedir?.....	11
	Matematik ve Bilim	13
II. Bölüm:	MATEMATİĞİN KÖKENİ VE GELİŞİMİ	19
	Başlangıç Dönemi.....	19
	Babil ve Mısır'da Matematik.....	20
	Antik Yunan'da Matematik	21
	Thales ve Pythagoras	23
	Euclides'in <i>Elementler</i> i	26
	Aksiyomatik Yöntem.....	27
	Euclides Sisteminde Yetersizlikler	29
	Yunan Döneminin Sonu.....	30
III. Bölüm:	MODERN MATEMATİĞE GEÇİŞ	32
	Hint ve Arap Etkileri	32
	Beşinci Postulat Sorunu	34
	Saccheri ve Olmayana Ergi Yöntemi	35
	Lambert ve Legendre	37
	Euclides-dışı Geometrilere	38
	Euclides-dışı Geometrilere Tutarlılık ve Doğruluk Sorunları	40
IV. Bölüm:	MATEMATİKSEL DÜŞÜNME YÖNTEMİ	43
	Düşünmede İki Aşama.....	43
	Örnekler	44
	İndüktif-Dedüktif Ayırımı.....	47
	Empirik Doğrulama ve Matematiksel İspat	49
V. Bölüm:	MATEMATİKSEL NESNELER	56
	Sorun	56
	Değişik Görüşler: Realizm, Nominalizm, Yapımcılık	56
	Einstein, Frege, Popper	59
	Sayının Tanımı	62
	Sayı Kümeleri.....	63
VI. Bölüm:	MATEMATİKSEL KESİNLİK	65
	Klasik Görüş	65
	Mantıkçı Empirizm	67

	Analitik-Sentetik Ayırımına Yöneltilen Eleştiriler	70
	Keskinlik Anlayışında Yumuşama	72
VII. Bölüm:	MATEMATİKTE BUNALIMLAR	75
	İlk Bunalım: İrrasyonel Sayılar.....	75
	İkinci Bunalım: Sonsuz Küçükler Hesabı.....	77
	Üçüncü Bunalım: Euclides-dışı Geometrilere	80
	Dördüncü Bunalım: Paradokslar	82
VIII. Bölüm:	MATEMATİĞİN TEMELLERİNE İLİŞKİN	
	FELSEFİ GÖRÜŞLER	87
	Giriş	87
	Mantıkçılık.....	88
	Eleştiri.....	91
	Formalizm	93
	Gödel Darbesi	95
	Sezgicilik	97
	Eleştiri.....	100
	Sonuç.....	101
IX. Bölüm:	AKSİYOMATİK YÖNTEM	102
	İspat Kavramı	102
	Aksiyoamatikleştirme	103
	Aksiyoamatik Yöntem ve Formelleştirme	105
	Formel Bir Sistemin Yapısı.....	108
	Aksiyoamların Yeterlik Ölüütleri	110
	İspat Nedir, Ne Değildir?.....	113
	Yorum ve Model Kavramları	114
	Bir Teorinin Formelleştirilmesi	116
X. Bölüm:	“KURAMSAL” – “UYGULAMALI” AYIRIMI	121
	Ayırımı Bakışlar.....	121
	Kuram-Uygulama İlişkisi	122
	Tartışma	125
XI. Bölüm:	MATEMATİĞİN BİLİMDEKİ YERİ	128
	Giriş	128
	Tarihsel İlişki.....	129
	Karşıt Görüşler.....	131
	Üçüncü Bir Görüş.....	134
	Matematığın Bilimdeki İşlevleri.....	134
XII. Bölüm:	MATEMATİĞİN KÜLTÜREL KONUMU, SANATLA İLİŞKİSİ ...	140
	Karşıt Yaklaşımlar.....	140
	Matematiksel Buluşta Birey ve Kültür	143
	Kültürel İlişkilerde Matematığın Yeri.....	145
	Matematik ve Sanat	146

XIII. Bölüm: MATEMATİK EĞİTİMİ.....	150
Sorun	150
Program ve Yöntemde Reform	151
Matematiksel Yetenek.....	154
“Buluş Sanatı”	157
Problem Çözmede Deneyim ve Uslamlama.....	158

E K L E R :

ÇEVİRİ METİNLER

Ek : 1 – KÜLTÜREL BİR BİRİKİM OLARAK MATEMATİK, W. L. Schaaf	163
Ek : 2 – MATEMATİĞİN GELİŞİMİ, E. T. Bell.....	169
Ek : 3 – MATEMATİKSEL DOĞRULUĞUN NİTELİĞİ, Carl G. Hempel.....	179
Ek : 4 – GEOMETRİ VE EMPİRİK BİLİMLER, Carl G. Hempel.....	191
Ek : 5 – MODERN MATEMATİKSEL DÜŞÜNCE, C. V. Newsom.....	201
Ek : 6 – SANAL NESNELERİN VARLIK SORUNU, P. J. Davis, R. Hersh.....	213
Ek : 7 – MODERN DÜNYADA MATEMATİK, R. Courant	217
Ek : 8 – FİZİKSEL BİLİMLERDE MATEMATİK, F. J. Dyson	224
Ek : 9 – MATEMATİKTE YENİLİK, P. R. Halmos.....	232
Ek : 10 – MATEMATİKSEL YARATMA, H. Poincaré.....	240
Ek : 11 – MATEMATİĞİN TEMELLERİ, M. Kline.....	246
Ek : 12 – RESİM, ŞİİR, MATEMATİK, G. H. Hardy.....	250
ÇEVİRİ METİN YAZARLARINA İLİŞKİN KISA BİLGİLER.....	254
ÖNEMLİ TERİMLER SÖZLÜĞÜ	256
BİBLİYOGRAFYA	261
AD DİZİNİ	263

I. BÖLÜM

GİRİŞ

Matematik Nedir?

Matematiğin değerini bilmeyen ya da yadsıyan kişilerin sayısı hiçbir dönemde fazla olmamıştır. Bilim ve ona dayalı teknolojinin giderek artan ölçülerde etkilediği, hatta biçimlediği çağdaş yaşamda ise matematiğin değeri tartışılmaz bir konudur. En azından sayma, toplama ve çarpma gibi temel hesaplama işlemlerini bilmeksizin kişinin herhangi bir toplumda etkili bir yaşam sürdürmesi düşünülebilir mi?

Ne var ki, önemi hemen herkesçe bilinen matematiğin ne olduğu sorusu dün olduğu gibi bugün de açıklığa kavuşturulmuş bir soru değildir. Antik Yunan'dan günümüze değin düşünürleri uğraştıran bir soruya, çoğu kez birbirine ters düşen yanıtlar verilmiştir. Ama bunlardan hiçbirinin tümüyle doyurucu olduğu söylenemez. Matematikçilerin bile bu konuda yeterince açıklık içinde olduklarını söylemek güç. Üstelik, “matematik nedir?” sorusu sadece kuramsal düzeyde kalan bir soru da değildir. Günlük yaşam işlevlerinin vazgeçilmez aracı olan matematik, kuramsal ilgi yanında pratik ilgilerimiz açısından da üzerinde durulmaya değer bir konudur. Çalışmamızın amacı, bu soruyu irdeleyerek matematiksel düşünmeyi tanıtmak, bu tür düşünmeyi niteleyen kavram ve yöntemleri, gelişme bağlamları ve bilimsel ilişkileri içinde ortaya koymaktır.

Matematik çok yönlü bir konudur; yaklaşımımız temelde mantıksal, ama bir ölçüde de tarihsel olacaktır. Yeri geldikçe matematiğin kültürel ilişkilerine değinecek, hatta kavram ve ilkelerinin oluşmasında yaratıcı imge, sezgi gibi öznel düşünce etkinliklerinin rolünü yoklayacağız. Konu bu yönüyle, kuşkusuz, mantıksal olmaktan çok psikolojiktir. Tarih boyunca matematiksel düşüncede yer alan dönüşümlere baktığımızda çok yönlü bir açıklama gereğini hemen görmekteyiz. Salt mantık ya da felsefe çerçevesinde kalan çözümlemelerle konuya hiçbir aşamasında yeterli ışığın tutulabileceğini bekleyemeyiz. Kaldı ki, matematik kökleri geçmişin derinliklerine uzanan bir gelişmedir: Eski Mısır ve Babil'den günümüze ulaşan, giderek daha soyut ve karmaşık nitelik kazanan bir gelişme!

Her dönemde ve tüm uygarlıklarda yaşamı bütünleyen sanat, bilim, endüstri, tarım ve diğer günlük geçim uğraşlarının etkili aracını sağlayan matematiği, aynı zamanda, kendine özgü amaç, yöntem ve sonuçlarıyla entelektüel değeri yüksek bir

disiplin olarak algılamaya çalışacağız. Başka bir deyişle, matematiğe iki değişik açıdan bakılabilir: (1) araç olarak, (2) amaç olarak. Bilimi de kapsayan tüm uygulama alanlarında matematik bir anlatım ve çıkarsama aracıdır. Matematikçinin gözünde ise, matematik bir araç değil, bir amaçtır; değerini kendi içinde taşıyan, katıksız bilme ilimizin ürünü, bir düşünme ve doğruyu arama uğraşdır.

Çalışmamızın özünü matematiğin anlam, yöntem ve gelişim sorunları oluşturmaktadır. Öte yandan, matematiğin özellikle doğa bilimleriyle ilişkisine bakarak, araç kimliğini belirtmekten de geri kalmayacağız. Ancak ayrıntılara girmeden önce, konuya toplu bir bakışın yararlı olacağını sanıyoruz.

Sorumuza dönelim: Matematik nedir?

Her şeyden önce, üstünkörü de olsa, bu soruyu yanıtlamalıyız. Hemen belirtmeli ki, sürekli çabalara karşın, bu soruya yetkili kafaların üzerinde birleştiği bir yanıt henüz verilememiştir. Körlerin dokunarak tanılamaya çalıştıkları fil gibi: Matematik, kimisine göre kuralları belli satranç türünden bir zekâ oyunu; kimisine göre sayı türünden soyut nesneleri konu alan bir bilim; kimisine göre bilim ve pratik yaşam için yararlı bir hesaplama tekniği. Matematikçilerin gözünde ise matematik bizi doğruya, kesin bilgiye götüren biricik düşünme yöntemi. Matematiği “bilimlerin kraliçesi” sayanlar yanında, hizmetinde görenler de var. Hatta onu ne olduğu, neyle uğraştığı belli olmayan, salt bir zihinsel çıkarım ya da dönüştürme işlemi diye niteleyen, ya da karmaşık kavramsal bir labirente benzeten saygın filozoflara rastlamaktayız.

Görülüyor ki, hazır verilmiş bir tanımdan yola çıkarak matematiği anlamaya kalkmak, birbiriyle bağdaşmaz değişik nitelemelerden birine kapılmaktan ileri geçmeyecek. Bunun yerine bizi tanım oluşturmaya götürecek şu üç temel soruyu yanıtlama daha yararlı olabilir:

- (1) Matematiğin konusu nedir?
- (2) Matematiksel düşünme yöntemini nasıl niteleyebiliriz?
- (3) Matematikte ulaşılan sonuçların özelliği nedir?

Çalışmamızda nirengi noktaları olarak aldığımız bu sorulara şimdilik genel nitelikte, kısa yanıtlar vermekle yetineceğiz; ayrıntılı irdelemeyi ileriki bölümlere bırakıyoruz.

Matematiğin konusunu, kısaca söylemek gerekirse, sayı, nokta, küme gibi soyut nesneler ve bu tür nesneler arasındaki ilişkiler oluşturmaktadır⁽¹⁾. Matematikçi bu nesnelerin özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri ortaya çıkarma, genelleme ve ulaştığı sonuçları ispatlama çabası içindedir. Örneğin tek sayılara ilişkin şu özelliği alalım:

(1) Ünlü 18. yüzyıl *Encyclopédie Methodique* matematiği, “Büyükliklerin sayılabilir veya ölçülebilir özelliklerini konu alan bilim” diye tanımlamıştı. Kimi ders kitaplarında matematiğin bugün bile nicelik ya da düpedüz sayı bilimi diye tanımlandığını görmekteyiz. Ancak bu tanım yetersizdir: Sayı ile ilişkisi olmayan, ölçme ve koordinatlara dayanmayan projektif ve betimsel geometriler bu tanımın dar çerçevesi dışında kalmaktadır.

$$\begin{array}{rcl}
1 & = & 1^2 \\
1 + 3 & = & 2^2 \\
1 + 3 + 5 & = & 3^2 \\
1 + 3 + 5 + 7 & = & 4^2 \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot
\end{array}$$

Böyle bir “gözlem” matematikçiyi genel bir ilişkinin varlığı hipotezine götürür. Nitekim örneğimizdeki ilişkinin matematikte şöyle bir genelleme biçiminde dile getirildiğini görmekteyiz: 1’den başlayarak n sayıda tek sayının toplamı n^2 ’ye eşittir.

Şimdi matematikçi bu genellenmenin doğruluğunu, gözlemlediği ilişkiyi daha fazla tek sayılar üzerinde yoklayarak değil, ispatlayarak, yani genellemeyi doğru sayılan birtakım öncüllerden çıkarsayarak saptamaya çalışır.

Kuşkusuz bir tek örneğe dayanarak genel bir yargıda bulunmak çeşitli yönlerden sakıncalıdır.⁽²⁾ Ancak bir ilk niteleme olarak şöyle diyebiliriz: Matematik, örneğimizdeki türden ilişkileri bulma ve ispatlama çalışmasıdır. Bu nitelemede, kalın çizgilerle de olsa, matematiğin iki aşamalı yöntemini bulmaktayız: İlk aşama, bir özellik ya da ilişkiyi bulma, ortaya çıkarma çabası; ikinci aşama bulunan, ortaya konan ilişkiyi ispatlama sürecini içermektedir. Bir ilişkiyi bulma ya da sezinleme daha çok yaratıcı imge, sezgi ve deneyim gerektiren psikolojik bir olaydır; ispatlama ise, kural ve ölçütleri belli “mantıksal yargılama” diyebileceğimiz bir akıl yürütmedir. Buna göre matematiği, sayı, nokta, küme, fonksiyon türünden soyut nesnelere özgü özellikleri ortaya çıkarma, belirleme ve mantıksal olarak kanıtlama (ispatlama) bilimi diye tanımlayabiliriz.

Çalışmamız boyunca gözönünde tutacağımız bu tanım çeşitli yönlerden işlenmeye ve açıklanmaya muhtaçtır. Ancak öncelikle doğa bilimleriyle bir karşılaştırma yararlı olacaktır.

Matematik ve Bilim

Matematiği de içine alan tüm araştırma alanlarında elde edilen bulgular, ulaşılan

(2) Kuşkusuz matematikte “değişmez bağıntılar” (invariant relations) denilen ilişkilere pek çok örnek gösterilebilir. Geometrik şekillere ilişkin şu üç bağıntı ortaokul öğrencilerinin bildiği örnekler arasındadır:

(1) Euler formülü: Bir şeklin köşeleri K, yüzeyleri Y, ayrıtları A ile gösterilirse, bunlar arasında daima $K+Y=A+2$ denklemi ile dile gelen bir bağıntı vardır.

(2) Düzlem şekillerde köşegen sayısı: $K = \frac{n(n-3)}{2}$ (Denklemden K köşegen sayısını, n kenar sayısını göstermektedir.)

(3) Düzlemli kapalı şekillerde iç açılar toplamı: $A = (n-2) 180$ (Denklemden A iç açılar toplamını, n kenar sayısını göstermektedir.)

sonuçlar önermelerde dile getirilir. Bu önermeler, aynı zamanda, ilişkin oldukları alanın konusunu belirler. Örneğin, fiziğin konusunu maddesel parçacıkların kütle, devinim ve enerji gibi özellikleri, bunlar arasındaki ilişkiler; psikolojinin konusunu insan (kimi zaman tüm canlı organizmaların) davranışları oluşturmaktadır. Matematigi tanımlarken sayı, nokta, küme gibi soyut nesnelerden söz ettik. Görülüyor ki, her bilim alanı öncelikle inceleme konusuyla kimlik kazanmaktadır. Ancak konu yönünden alanlar arasında gördüğümüz farkların niteliği değişiktir. Fizik ile psikolojiyi alalım. Biri maddesel parçacıklarını kütle, devinim, vb. özelliklerini, öbürü insan davranışlarını inceleyen, birbirinden tümüyle ayrı iki bilim dalı. Ancak ikisini de matematikten ayıran ortak bir yanıları var: Olgusal içerikli olmaları. Fizik de, psikoloji de, konu yönünden tüm farklarına karşın olgusal bilimlerdir. Oysa matematigi olgusal bilim olarak niteleyemeyiz. Matematigin uğraş konusu nesneler olgusal değil, kavramsaldır. Sayıları, örneğin, ağaç, taş, bulut, yıldız gibi doğada bulduğumuz nesnelerden sayabilir miyiz? Doğada sayılar değil, olsa olsa sayılabilir nesneler vardır. Sayma bu tür nesneler üzerinde yürütülen bir işlem, bir belirlemedir. Sayılar doğada gözlemlenen nesne ya da olguların adı değil, sayma sürecinde zihnimize oluşan kavramlardır. Öyleyse, matematigi konusu açısından empirik (olgusal) bilimlerle değil, tanımsal ya da biçimsel (formel) bir disiplin olan mantıkla birlikte sınıflamak daha uygun olur.⁽³⁾

Matematik yöntem ve sonuçları bakımından da olgusal bilimlere değil, mantığa yakındır. Empirik bilimlerin inceleme konusu olguları ve olgusal ilişkileri betimleme ve açıklama yoluna gider; gözlem, deney ve ölçme gibi işlemler olguları saptama ve betimleme araçlarını oluşturmakta; teori ya da hipotezler (açıklayıcı genellemeler) kurup test etme ise olguları açıklama yöntemini sağlamaktadır.

Her bilim kendi alanındaki olguları en doyurucu biçimde açıklama gücü taşıyan teori ya da teoriler kurma ve doğrulama çabası içindedir. Matematikte durum oldukça farklıdır. Burada gözlemsel olguları açıklama yerine, “algılanan” ilişkileri teorem olarak ispatlama çabası vardır.⁽⁴⁾ Örneğin, düzlem geometride üçgenlerin iç açılarının toplamına ilişkin teoremi alalım: Tüm üçgenlerde iç açıların toplamı iki dik açının toplamına (yani, 180° 'ye) eşittir. Kuşkusuz başlangıçta bu, üçgenler üzerindeki ölçmelere dayanan bir tür gözlemsel diyebileceğimiz bir genellemeydi. Bir kez, matematikçi bu genellemeyi daha çok çeşit ve sayıda üçgenleri yoklayarak doğrulama yoluna gitmez, ya da bu kadarıyla yetinmez. Sonra, üçgenlerin iç açılarının toplamının neden iki dik açının toplamına eşit olduğu matematikçiyi uğraştırmaz: Onun aradığı açıklama değildir. O, önceden doğru kabul ettiği kimi ilke ya da varsayımlara başvurarak bulduğu ilişkiyi ispatlama yoluna gider. Algılanan bir ilişkinin, daha doğrusu o ilişkiyi dile getiren genellenmenin teorem niteliği kazanması söz konusudur. Bu ise genellenmenin ispatını gerektirir. Matematikçi şu ya da bu şekilde algıladığı ilişkiyi ilginç bulursa, onu açıklamayı değil, mantıksal kesinliğe ka-

(3) Bu ayırımı değişik açılardan gereğinden fazla keskin bulan J. S. Mill ve W. V. O. Quine'ın görüşlerine ilerde değineceğiz. Bkz. VI. BÖLÜM, s. 72.

(4) Buradaki “algılama” duymusal olmaktan çok zihinsel diyebileceğimiz bir algılamadır.

vuşturmayı amaçlar. Başka bir deyişle, ispatın amacı teoremdir, yoksa ispatın öncüllerini oluşturan varsayım (aksiyom ya da postulat)'ların doğrulanması değildir. Oysa, olgusal bilimlerde gözlem konusu bir ilişkiyi ispat değil, açıklama söz konusudur. Bilimsel açıklama öncelikle öncüllerin (özellikle kuramsal nitelikteki açıklamayı genellemelerin) doğrulanmasına yöneliktir.

Ulaşılan sonuçlar açısından bakıldığında, matematik ile empirik bilimler arasında gene temel bir fark göze çarpmaktadır. İki alanda da ulaşılan sonuçlar önermelerde dile getirildiğinden, fark matematiksel bir önerme ile fizikten alınan bir önerme karşılaştırıldığında ortaya çıkacaktır:

Fizikten bir önerme:	Bir gazın hacmi, sıcaklık sabit tutulduğunda, basıncı ile ters orantılıdır.
Matematikten bir önerme:	$3 + 4 = 7$

Örnek aldığımız iki önermenin de doğru olduğunu biliyoruz. Ancak bu aynı anlamda bir “doğruluk” değildir. Birinci önerme olgusal bir ilişkiyi, gazların hacmi ile basıncı arasında deneysel yoldan belirlenen bir ilişkiyi dile getirmektedir. Doğruluğu olgusaldır. Bilim adamı bu tür önermelerin doğruluğunu gözlem ya da deney başvurarak belirler.

İkinci önermeye gelince farklı bir durumla karşılaşmaktayız. Burada gene bir ilişki, iki sayı grubu arasında bir eşitlik ilişkisi dile getirilmektedir. İlk bakışta bu ilişkinin de gözleme dayalı bir genelleme olduğu sanılabilir. Gerçekten, 3 elma ile 4 elmanın bir arada 7 elma oluşturduğunu görmekteyiz. Elma yerine başka nesneler (örneğin, kalem, parmak, bilye, masa, yumurta, vb.) koysak, hep aynı sonuç ortaya çıkar. Ancak, matematiksel doğruluğun, olgusal doğruluğun tersine, gözlem ya da deneye bağlı olmadığını gösterebiliriz. Örneğin, mikroskop altına önce 3, sonra 4 mikrop koyalım: Saydığımızda birlikte 7 değil 8 mikrop bulduğumuzu bir an düşünelim. Şimdi beklentimize ters düşen bu gözleme dayanarak $3 + 4 = 7$ önermesini yanlış sayabilir miyiz? Önerme olgusal nitelikte olsaydı, yanıtımız “evet” olacaktı. Nitekim herhangi bir gazın hacmi ile basıncı arasında beklentiye ters düşen tek bir gözlem, o ilişkiyi dile getiren genellemeyi yanlışlamaya yeter. Oysa gözlem sonucu ne olursa olsun, $3 + 4 = 7$ önermesini yanlışlama olanağı yoktur; hatta gözlemlediğimiz nesneler mikrop değil, elma, kalem, yumurta türünden elle tutulur nesneler olsa, gene de, matematiksel önermeyi yanlış sayamayız: Hatayı önermede değil, sayma işlemimizde ararız, ya da başka türlü açıklamaya çalışırız.

Bu farka ilişkin çeşitli görüş ve tartışmaların ayrıntılarını şimdilik bir yana bırakıp temel görüş ayrılıklarına kısaca değinelim:

Günümüzde oldukça yaygın olan mantıksal empirist görüşe göre, matematiksel önermeler analitik ya da totolojik niteliktedir; doğrulukları *a priori* (gözlem öncesi)'dir. Başka bir deyişle, $3 + 4 = 7$ önermesi, aslında $3 + 4 = 3 + 4$ ya da $7 = 7$ demekten ileri geçmemektedir. Analitik denilen bu tür bir önermeyi hiçbir gözlem ya da deney yanlışlayamaz. Çünkü, son çözümlemede, analitik bir önerme, “bir şey A

ise o şey A'dır" gibi hiçbir olgunun ters düşmeyeceği biçimsel bir doğruyu dile getirmekle kalmaktadır. Örneğimizdeki $3 + 4 = 7$ önermesi, "A, A'dır" biçimini alan tüm önermeler (örneğin, tüm elmalar elmadır, ya da, tüm kocalar evli erkektir) gibi olgusal içerikten yoksun; doğruluğu *a priori* bilinen bir önermedir. Matematik önermelerin kesinliği, tanıma dayanan biçimsel bir özelliktir.

Önermelerinin analitik niteliğine bakarak, matematiğin bir bilim olmadığı söylenmiştir. Bu yargı, "bilim"i tanımlamamıza göre doğru da olabilir, yanlış da. "Bilim" deyince empirik dünyaya yönelik çalışmaları düşünüyorsak, olguların gözlemine dayalı olmayan matematiği bilim sayamayız. Nitekim yüzyılımızda egemen olan görüşün bu yönde olduğu söylenebilir. Ama "bilim" terimine tüm entelektüel etkinlikleri kapsayan bir genişlik tanıyorsak, matematiği de fizik, biyoloji ve psikoloji gibi bilim saymak gerekir. Hatta bu anlamda felsefe, tarih ve klasik çalışmalara da bilim diyebiliriz. Bu kitapta, matematiği empirik bilimlerle değil, soyut kavramsal ilişkiler ile zorunlu çıkarımları konu alan mantıkla sınıflamanın daha doğru olduğu görüşünü paylaşmaktayız.

Ne var ki, empirik bir bilim olmayan matematiğin başta fizik olmak üzere empirik bilimlerle sıkı bir ilişki içinde olduğu gözden kaçmamalıdır. İlerde ayrıntılarına gireceğimiz bu ilişki, biçim-içerik türünden bir ilişkiyi andırmaktadır. Matematiğin biçimi, bilimin içeriği temsil ettiği söylenebilir. Başka bir deyişle, bilim olgusal ilişkileri ortaya çıkarmakta, matematik bu bulguları daha kesin ve açık dile getirmenin formül ya da kalıplarını sağlamaktadır. Kısacası, matematiği bu açıdan Galileo'nun dediği gibi, bilimin dili sayabiliriz.

Matematiği tümüyle içerikten yoksun salt biçimsel bir disiplin sayan görüşü günümüzde temsil eden tanınmış matematikçilerden Kemeny'ye göre, "Matematik, mantık gibi, salt çıkarım biçimleriyle uğraşan, bilginin en genel bir dalıdır; üstelik bilimin vazgeçilmez dili olan matematik bize yeni hiçbir şey öğretmez. Aksini düşünmek, ona göre, kuramsal matematikle bir tür bilim olan uygulamalı matematiği karıştırmak olur. Kemeny, görüşünü şu iki temel sava dayamaktadır:

- (1) Matematiksel doğruluk olgusal değil, mantıksal niteliktedir.
- (2) Mantıksal doğruluk ise analitik niteliktedir; içeriğe değil, biçime bağlıdır.⁽⁵⁾

Kemeny, matematiksel kesinliği önermelerinin analitik niteliğine bağlayarak şöyle demektedir: "Matematiksel önermelerin doğruluğunu değişik yollardan yoklamaya kalktığımızda, her defasında, gözlem sonuçlarının gereksiz olduğunu görürüz; bu önermeleri gözlem sonuçları ne olursa olsun hiçbir zaman yanlışlayama-

(5) "Doğru", "doğruluk" önermelere özgü bir özelliği dile getiren terimlerdir. Bir önerme olgusal ise (örneğin, "Dünya küreseldir," "Su belli koşullarda 100°'de kaynar," "Tüm metaller ısıtıldığında genleşir," gibi) gözlem sonucuna uygun ya da ters düşmesine göre ya doğrudur, ya da yanlış. Önerme analitik nitelikte ise (örneğin, "Tüm amcalar erkektir," "Kırmızı olan her şey renklidir," "Yaşayan varlıklar canlıdır," gibi), gerçek dünyaya ilişkin gözlemlerimiz ne olursa olsun, daima doğrudur. *A priori* olan bu doğruluk, önermenin salt biçimine (ya da içinde geçen sözcüklerin anlamına) bağlıdır. Analitik önermeleri yanlışlama olanağı yoktur.

yız. Matematiksel önermeler, mantıksal doğrular gibi, ‘analitik *a priori*’ niteliktedir.

Ancak bu noktada karşımıza şöyle bir soru çıkabilir: Matematik önermelerin (daha da genel türüyle tüm mantıksal doğruların) gözlem sonuçlarına bağlı olmayan, *a priori* bilinen doğruluklarını, yalnızca önermelerin biçimine bağlı görmek; daha da önemlisi matematiği empirik bilimlerden böylesine kesin bir çizgiyle ayırmak doğru mudur? Bir kez, mantıksal doğruluğu tanımsal ya da önermelerin mantıksal biçimiyle açıklamayan karşıt görüşler de vardır. Bunlara göre, Kemeny’nin “analitik *a priori*” diye nitelediği mantıksal doğruluk, ya mantığın insan düşüncesi-nin yapısal ilkelerini içermesiyle, ya da dış dünyanın en genel ve temel özelliklerini yansıtmalarıyla açıklanmalıdır. Özellikle matematikçiler arasında daha yaygın benimsenen görüşe göre ise, matematiksel kesinliğin kaynağı matematiğin inceleme konusu nesnelerin (sayı, nokta, küme, vb.) niteliğinde, bu nesnelere özgü ilişkilerin dedüktif çıkarsamaya elverişli yapısında aranmalıdır. Sonra, daha önce de belirttiğimiz gibi, matematikle olgusal bilimler arasında Kemeny gibi mantıkçı empiristlerin köktenci ayırımını kesin saymayan ya da aşırı bulan düşünürler de vardır. Örneğin, çağdaş mantıkçılar arasında seçkin bir yer tutan Quine şöyle demektedir:

Bilimde gözlemleri dile getiren önermelerden, kuantum ya da relativite teorisinin temel özelliklerini yansıtan genellemelere kadar uzanan bir süreklilik vardır. Kanımca, bu uzanım bilimin teorik genellemelerini de aşarak ontolojik, hatta gözlem dünyasının daha da uzağında olan matematik ve mantık önermelerini de içine almaktadır. Geniş bir ranj içinde bir uçtan öbür uca sıralanan önermeler arasındaki fark, bana kalırsa, bir tür farkı değil, yalnızca bir derece farkıdır. Bilimler tüm değişik görünümüne karşın, birleşik bir yapıya sahiptir; deneylerimizin ters düştüğü şey, hiç değilse ilkede, tek tek önermeler olmaktan çok, bilimin yapısal bütünlüğüdür. Carnap gibi mantıkçı empiristlere göre, ontolojik sorunlar gibi, matematiksel ve mantıksal ilkelere ilişkin sorunlar da olgusal içerikten yoksundur. Bu ilkeler olsa olsa bilim için seçilmiş uygun kavramsal sistemleri oluşturmaktadır. Aynı nitelemeyi bilimsel hipotez ya da genellemelere uygulamak koşuluyla bu görüşü ben de benimseyebilirim.⁽⁶⁾

Gene, çağdaş matematikçi-filozoflardan Karl Menger, matematiğin ne olduğu, ne olmadığı üzerindeki görüşlere değinerek tepkisini bir dizi soruyla ortaya koymaktadır:

Matematiksel önermeler, Mill ile Mach’ın söylediği gibi, empirik kökenli midir? Yoksa, aritmetik ve geometrik önermelerin **sentetik a priori** yargılar olduğunu ileri süren Kant’a mı inanalım? Poincaré, temel aritmetik kuralların gerçekten **sentetik a priori**, geometrik önermelerin ise analitik yargılar olduğunu söylediğinde, doğruyu mu dile getiriyordu? Tersine, aritmetiğin temel kurallarını analitik, geometrik doğruları ise sentetik diye niteleyen Frege’ye mi hak vereceğiz? Yoksa Russell gibi tüm matematiksel önermeleri analitik sayanları mı izleyelim? Matematiksel önermelerin doğruluğu deneyime bağlı mıdır? Son çözümlemede, matematiksel doğruluk sezgi ve deneyimsel kanıt-

(6) W. V. O. Quine, “On Carnap’s View on Ontology,” *Philosophical Studies*, II, No. 5, 1951.

lara mı dayanmaktadır? Ya da, matematiğin, günümüzde çok kez söylendiği gibi, toto-lojik bir sistem olan mantığın bir parçası olması gerçeği mi bu doğruluğu sağlamaktadır? Yoksa, matematiğin temeli onun tutarlılık ispatına mı dayanmaktadır?

Ben kendi payıma, bu soruların hiçbirinin yanıtının olumlu olabileceğine inanmıyorum. Matematikçinin yaptığı şey, aslında, belli yöntemler aracılığıyla birtakım önermeleri, daha önce seçilmiş birtakım başka önermelerden çıkarsamadan ileri bir şey değildir. İşte, matematikçinin uğraşına ilişkin matematik ve mantığın tüm söyleyebileceği şey bu basit belirlemede saklıdır.⁽⁷⁾

Matematiksel kesinlik üzerindeki farklı görüşler arasındaki tartışmaya, ayrıntılarıyla, ileriki bölümlerde gireceğiz. Bundan önce matematiksel kavramların tarihteki oluşumuna göz atarak matematiğin iki temel kolu olan aritmetik ile geometrinin öncelikle insan deneyiminden nasıl kaynaklandığını görmeye ihtiyaç vardır.

(7) K. Menger, "Foreword," *Introduction to Mathematical Thinking* (F. Waismann), s. VI-VII.

II. BÖLÜM

MATEMATİĞİN KÖKENİ VE GELİŞİMİ

Başlangıç Dönemi

Matematiğin insan deneyiminin bir parçası olduğu, yaşamın pratik ihtiyaçlarından doğduğu kolayca söylenebilir. Özünde evreni nicel özellikleriyle algılama yeteneğine dayanan matematiksel düşünme, başlangıçta günlük yaşam ihtiyaçlarına yönelik basit sayma ve ölçme işlemlerinde kendini göstermiştir. Eski uygarlıklardaki gelişmelere kısa bir bakış bu yargıyı doğrulamaya yetecektir.

Mezopotamya'da tarımsal yerleşme, onu izleyen kentleşme, yazma ve hesaplama becerilerini gerektiren bir ticaret etkinliğine yol açmıştı. Özellikle tapınaklarda biriken servet bir tür kayıt tutmayı gerektiriyordu. İ.Ö. 3000 ve daha öncesi dönemlerden kalma tabletlerde birtakım alış-veriş kayıtlarının yanı sıra basit bazı hesaplamaların da yer aldığı görülmektedir. Sümerler'in bilgi ve beceri birikimini daha da zenginleştiren Babilliler'in bizim "aritmetik" ve "cebir" dediğimiz iki alanda önemli gelişmeler sağladıkları anlaşılmaktadır. Başka türlü, ne ileri mühendislik gerektiren ünlü yapıtlarını ortaya koymalarına, ne de sulama, bataklık kurutma, sel baskınlarını önleme, topraklarını verimli tarım alanlarına dönüştürüp işleme etkinliklerindeki başarılarına olanak bulamazlardı. Buna bir de kullanışlı takvim geliştirme bilgilerini eklersek, matematikte erişilen düzey daha iyi anlaşılır. Bu tür projelerin gerektirdiği yönetim, örgütlenme ve teknik bilgi yanında oldukça ileri matematik bilgisine de ihtiyaç olduğu açıktır. Kuşkusuz, benzer çalışmaların Hindistan ve Çin gibi ülkelerin büyük nehir çevrelerinde de sürdürüldüğünü söyleyebiliriz.

Mezopotamya'dakine benzer bir gelişmeye eski Mısır'da da tanık olmaktadır. Nil Nehri'nin yıllık taşmaları sonucu arazi sınırları bozulmakta, ya da, büsbütün silinmekteydi. Suların çekilmesiyle sınırların yeniden belirlenmesine ihtiyaç vardı. Bu ise tarım alanlarının hemen her yıl ölçülerek dağıtılması demekti. Aslında "yerölçümü" anlamına gelen "geometri" terimi de bu işlevi yansıtmaktadır. İ.Ö. 800 sınırlarında Mısır'ı dolaşan ünlü Yunanlı tarihçi Herodotos'un anlattığına göre, Mısır'da arazi ölçümü, vergilendirmenin de bir gereği idi. Kişilerin vergi yükümlülükleri işledikleri toprağın yüzölçümüne göre belirleniyordu.

İlkel sayma becerisini aşan matematiğin İ.Ö. 5000 yıllarına uzanan bir tarihi olduğu görülmektedir. Antik Yunan öncesi gelişmenin tümü Sümer, Babil, Mısır, Hint ve Çin gibi Doğu kültürlerinin bir ürünüdür. Kuramsal ilgilerin henüz uyan-

madığı başlangıç döneminde aritmetik ile geometri tarım, ticaret ve mühendislik işlerinin yarattığı ihtiyaçları karşılamaya yönelik beceriler olarak ortaya çıkmıştır. Kuramsal ilgilerin ortaya çıkması daha sonra gelen bir gelişmedir. Bunun için, her şeyden önce, elde edilen bilgilerin korunması ve yeni kuşaklarda sürdürülmesi yolunda bir öğretimin başlaması gerekiyordu. Matematğin günlük kullanımları ötesinde, giderek daha soyut, kendi içinde entelektüel yönden ilginç bir nitelik kazanması önemli bir olaydır. Bu gelişmeyi geçim derdinde olmayan, boş zamanını okumaya, öğrenmeye vermiş kimi yönetici ve din adamlarının ilgilerine borçluyuz. İnsan zekâsının yaşam ihtiyaçlarının ötesinde kuramsal konulara yönelmesiyle, pratik aritmetik işlemlerinden daha soyut cebirsel dönüştürmelere, arazi ölçme ve sınır belirleme işlemlerinden geometrik düşünmeye geçilmiştir.

Matematiğe kuramsal bilim niteliği kazandıran Antik Yunanlıların, büyük ölçüde, Mısır ve Babil uygarlıklarına borçlu olduğunu biliyoruz. Bu nedenle, matematiğin başlangıç gelişmelerini bu iki uygarlık çevresinde izlemekle yetineceğiz.

Babil ve Mısır'da Matematik

Eski Mısırlıların çalışmalarını taş ve papirüs üzerine geçirdiklerini kayıtlardan öğreniyoruz. Bunların bir bölümü günümüze kadar gelmiştir. Babilliler ise daha dayanıklı olan tuğlalar kullanıyorlardı. Oysa, Hint ve Çin kültür çevrelerinde kullanılan ağaç kabuğu ya da bambu o denli dayanıklı değildi. Bu yüzden onların başarılarına ilişkin bilgilerimiz son derece yetersiz kalmıştır.

Antik Yunan öncesi matematiğin belirgin özelliği, sına-ma-yanılma yöntemine bağlı, empirik bilgi düzeyinde kalan bir çalışma olmasıdır. Başka türlü olması da kolayca beklenemezdi; çünkü, daha önce de belirttiğimiz üzere, hem Mısır'da hem de Mezopotamya'da matematik, yaşamın pratik ihtiyaçlarından kaynaklanan bir çalışmaydı. Nitekim iki kültürde de kullanılan alan ve hacim formülleri, sına-ma-yanılma yöntemine dayandığından, birtakım hatalar içeriyordu. Örneğin, Mısırlılar dairenin alanını, çapının dokuzda sekizini alarak hesaplıyorlardı. Bu yanlıştı, çünkü kullandıkları formülde " π " sayısı 3.1604... e eşdeğer alınmıştı. Babilliler ise hata payı daha yüksek olan $\pi = 3$ değerini kullanıyorlardı. Onların bir başka hatalı formülü de, kesik bir koninin ya da kare piramidin hacmini, yükseklikle tabanların toplamının yarısının çarpımına eşit saymalarında kendini göstermektedir. Bunun gibi, dörtgenlerin alanını bulmak için kullandıkları $A=(a+c)(b+d)/4$ formülü de (formülde a, b, c, d dörtgenin kenarlarını simgelemekte), dikdörtgenler dışındaki dörtgenler için yanlış sonuç veriyordu. Ne var ki, bu yanlış formüle, aradan 3000 yıl geçtikten sonra bile İ.Ö. 51'de ölen XI. Ptolemy (Batlamyus)'nin mezar taşında da rastlanmıştır. Empirik gözlem ile sına-ma-yanılma yöntemine bağlı bu tür bilgilerin, gerçek anlamda, bir bilim oluşturduğu söylenemez. Bugüne değin, ne Babillilerin ne de Mısırlıların *ispat* kavramına ulaştıklarını gösteren tarihsel bir belge ya da kanıta rastlanmamıştır. Ele geçen tüm belgeler, Yunan öncesi dönemde, matematiğin empirik düzeyi aşmadığını göstermektedir. Ama gene de, ele alınan problemlerin, ulaşılan sonuçların zenginliği gözönünde tutulursa, övgüye değer bir başarıyla karşı

karşıya olduğumuz yadsınamaz. Sınırlı da kalsa, sinama-yanılma yönteminin etkinliğini görmezlikten gelemeyiz.

Özellikle son 60 yıl içinde adı geçen iki kültür çevresinde yürütölen araştırma ve kazılar büyük yoğunluk kazanmıştır. Ortaya çıkarılan belgeler arasında Mısır'da bulunan Ahmes Papirüsü ile şimdiye dek okunabilen 300 kadar Babil tabletinden söz edilebilir.

Ahmes (ya da Rhind) Papirüsü İ.Ö. 1650 sıralarında yazılmış, elkitabı niteliğindeki bir belgedir. İngiliz bilgini A. Henry Rhind'in Mısır'da satın alarak British Museum'a taşıdığı bu kitapta 85 problem var. Araştırmacıların elinde ayrıca daha eski bir döneme ait içinde 25 problemin yer aldığı "Moscow Papirüsü" diye bilinen bir kaynak daha bulunmaktadır. İki kaynaktaki problemlerin hemen tümü sayısal nitelikte basit problemlerden oluşmaktadır. Öyle ki, çoğunun çözümü doğrusal denklemlerin ötesine geçmeyi gerektirmemektedir. Örneğın, şu denkleme, $x+x/5=24$, çözüm aradığımızı düşünelim: x 'e uygun gördüğümüz değeri 5 olsun; buna göre, eşitliğin sağ yanı 24 yerine 6 çıkar: $x+x/5=6$. Oysa, $24 \times 1/4=6$ olduğundan, x 'e 5 değil, 5×4 değerini vermemiz gerektiğini buluruz.

Babil'den kalma belgelere gelince, bunlar iki türden oluşmaktadır: (1) matematiksel tablolar, (2) matematiksel problemler. Sayısı yaklaşık 500.000 olan tabletlerden ancak 300 kadarı bugüne değin okunabilmiştir. Geriye kalanların üzerindeki çalışmalar dünyanın çeşitli müzelerinde sürmektedir.

Okunan tablolar arasında, çarpım, dönüştürme (bölmeyi çarpmaya indirgeme), kare, karekök ve bunlara ilişkin denklemleri çözmede yardımcı tabloların yanı sıra, bileşik faiz hesaplamasında kullanılan üssel tabloların yer aldığı görölmektedir. Problem taşıyan belgelere gelince, bunlarda özellikle cebirsel ve bir ölçüde geometrik nitelikte çeşitli problem örnekleri yer almaktadır. Kimi tabletler üzerinde kolaydan zora doğru sıralanmış 200 kadar sayısal probleme yer verildiği görölmektedir. Bu tür bir düzenlenmenin öğretime yönelik olduğu tahmin edilebilir. Zor sayılan problemler arasında, örneğın, 2. dereceden denklemlerin çözümü hem genel formülü verilerek, hem de kare bütünleme yöntemiyle gösterilmektedir.

Kısaca demek gerekirse, Yunan öncesi dönemde matematik daha çok pratik yaşam ihtiyaçlarına dönük, sinama-yanılma yöntemine bağlı, empirik düzeyde bir uğraştı. Bugüne değin okunan hiçbir belgede ispat yöntemine ilişkin bir belirtiye rastlanmamıştır. Verilen örnekler genel nitelikte dedüktif düşünme yöntemini değil, özel nitelikte sayısal çözümlere ilişkin kazanılmış bilgi ve becerileri sergilemektedir.

Antik Yunan'da Matematik

Antik Yunan matematiğinin kökeni tam açıklıkla henüz ortaya konmuş değildir. Mevcut belge ve kaynaklar Babil ve Mısır'ın etkilerini ortaya koymaktadır. Antik Yunanlı yazarların kendileri Doğulu kaynaklara olan borçlarını belirtmekten geri kalmamışlardır. Pythagoras geleneğine egemen mistisizmin Doğudan kaynaklandığına kesin gözüyle bakılabilir. Daha da önemlisi, Yunan aritmetiği ile astronomisi

Babil birikiminin belirgin izlerini taşımaktadır. Pers İmparatorluğu döneminde başlayan, Büyük İskender'in Doğu'ya açılmasıyla yoğunluk kazanan ilişki ve yakınlaşma, Yunanlı bilginlere Doğu'nun bilgi birikimini yakından tanıma fırsatı sağlamıştır. Geometrinin Yunanistan'a Mısır'dan geçtiği ise artık tartışma konusu olmaktan çıkmıştır.

Ne var ki, Doğu'ya olan borcun ölçüsü ne olursa olsun, Yunanlıların aldıklarıyla yetinmedikleri, matematiğe yeni bir kimlik kazandırdıkları da bilinmektedir. Onların elinde matematik doğruluğu deneyime dayanan empirik önermeler yığını olmaktan çıkarak, doğruluğu mantıksal yöntemle ispatlanan bir sistem niteliği kazanmıştır.

Düşüncede önemli bir devrim demek olan bu dönüşüme hangi koşulların yol açtığı bugün bile yeterince açıklığa kavuşmuş değildir. Bilinen şu ki, İ.Ö. 600-400 döneminde Yunanlıların varlık ve bilgi konularında son derece canlı bir tartışma, arayış içine girdikleri, birtakım kuramsal sorunları akılcı yoldan irdeledikleridir. Bilindiği gibi, kuramsal düzeyde tartışma, bir konu ya da sorunu irdeleme, “doğru” diye bilinen ya da doğruluğuna inanılan yargıları eleştirmenin yanı sıra, çoğu kez kanıtlara giderek ispatlama çabasını içerir. Başka bir deyişle, tartışma özünde bir akıl yürütmedir; kişinin doğru saydığı bir yargı ya da inancı elden geldiğince doyurucu kanıtlara dayama girişimidir. Bu ise, yetkin biçimiyle, “ispatlama” dediğimiz çabanın ta kendisidir.

İspata yönelik tartışma biçimi, felsefe, politika ve ahlak konularında olduğu gibi, matematikte de kendini gösterir; üstelik, matematiksel ispat, diğer alanlarda asla erişilemeyen mantıksal kesinliğe sahiptir. Yunanlıları matematikte, empirik gözlemlere dayalı sınama-yanılma düşünce biçiminden ispat yöntemine yönelten bir başka nedeni, dedüktif çıkarımın sergilediği biçimsel güzellikte bulabiliriz. Güzellik duygusu, duygusal olduğu kadar entelektüel bir deneyimdir. Dedüktif akıl yürütmenin içerdiği düzen, uyum ve tutarlılık klasik Yunan güzellik anlayışını oluşturan öğelerin başlıcalarıydı.

Yunan matematiği, Euclides geometrisinde ulaştığı mantıksal biçimiyle, daha sonraki yüzyılların hayranlık kaynağı olmuştur. Euclides'in İ.Ö. 300 yıllarında İskenderiye'de yazdığı on üç kitaptan oluşan “*Elementler*” adlı yapıtı, Batı dünyasında XIX. yüzyılın sonlarına gelinceye dek geometrinin biricik ders kitabı olarak okutulmuştur. Başarısının tüm parlaklığına karşın Euclides'e, yaratıcı bir matematikçi olmaktan çok, kendisinden önceki çalışmalarda ulaşılan kesin sonuçları toplu ve mantıksal düzende sunan önemli bir yazar olarak bakmak belki de daha doğru olur. Euclides'in ince bir beceriyle uyguladığı ispat yöntemini, ondan 300 yıl kadar önce matematikte ilk deneyen düşünürün Thales olduğu unutulmamalıdır. Thales'i izleyen Pythagoras ve daha sonra Eudoxus'un ispat yöntemine sistematik bir kimlik kazandırdıkları bilinmektedir.

Yunanlıları empirik gözlem ve deneyimden kuramsal düşünceye yönelten bir başka özelliği klasik Yunan toplumunun yapısında bulmaktayız. Bilindiği gibi, toplum o çağda iki sınıfa ayrılmıştı. Bir yanda filozofları, matematikçileri, devlet adamlarını, şair ve heykeltıraşları içine alan küçük bir “efendi” sınıfı; öte yanda, el

becerisi ve alın terine dayanan üretim, kazanç ve diğer pratik işleri yüklenmiş geniş bir “köleler” sınıfı. Bu durum kuşkusuz, kuram-uygulama ayırımına ortam yaratıyordu. Efendiler yalnızca politika, felsefe, söz söyleme ve güzel sanatlarla uğraşmayı değerli sayıyor; gözlem, deneyim ve pratik uygulamaları aşağılık türden işler arasında görüyorlardı. Bu yüzden olmalı ki, klasik çağda empirik bilimler doğa ve varlık üzerinde spekülasyon olmaktan öte bir gelişme göstermemiştir. Gene, geometride ölçme yerine salt düşünceye dayanan ispat yönteminin benimsenmiş olmasında toplumsal yapının, bu yapıdan kaynaklanan değerlerin etkin olduğu yadsınamaz. Bu noktaya değinen Russell şöyle demektedir:

Eski Yunanlılar hipotez yönünden son derece verimli, gözlem yönünden tam tersine son derece kısır bir kültür ortamına sahiptiler. Örneğin, Aristoteles, kadınların erkeklerden daha az sayıda dişi olduğunu söylüyordu; oysa, gözleme gereken saygıyı duysaydı böylesine basit bir yanılıya düşmezdi.⁽¹⁾

Thales ve Pythagoras

Yunan matematiğinin başlangıç dönemine ilişkin bilgilerimiz, *Eudemus Özeti* diye bilinen bir kaynağa dayanmaktadır. İ.S. 5. yüzyılda Proclus’un yazdığı bu kitap, Aristoteles’in öğrencilerinden Eudemos (İ.Ö. 4. yüzyıl)’un daha ayrıntılı olduğu tahmin edilen yapıtının bir özetidir. (Eudemos’un yapıtı ne yazık ki, o döneme ait birçok diğer özgün kaynaklar gibi kaybolmuştur.)

Proclus’tan kalma özete göre, Yunan matematiği İ.Ö. 6. yüzyılın ilk yarısında Miletoslu Thales’le başlar. “Yedi Bilge”den biri olarak ün salan Thales’in bir süre Mısır’da dolaştığı, geometriyi oradan ülkesine getirdiği *Özet*’te yer alan bilgiler arasında. *Özet*’ten ayrıca Thales’in şu önermeleri ispatladığını öğreniyoruz:

- (1) Daireyi herhangi bir çapı iki eşit parçaya böler.
- (2) İkizkenar üçgenlerde taban açıları eşittir.
- (3) Kesişen iki doğrunun oluşturduğu karşıt açılar birbirine eşittir.
- (4) Açılardan ikisi ve kenarlarından biri birbirine eşit olan üçgenler çakışır. (Thales’in bu önermeyi kullanarak gemilerin kıydan uzaklığını ölçtüğü söylenir.)
- (5) Yarım daire içine çizilen her açı dik açıdır. (Bu önermeyi Babillilerin çok daha önce bildiği saptanmıştır.)

Önemli olan nokta, bu tür önermeleri Thales’in bir tür gözlem olan ölçmeye başvurarak değil, mantıksal çıkarım yöntemiyle ortaya koymuş olmasıdır. Denebilir ki, ispat kavramı ilk kez bu örneklerde somut içerik kazanmıştır. Dedüktif çıkarımın aritmetik ya da cebirde değil, geometride kullanılmış olması, matematiğin XIX. yüzyıla gelinceye dek geçirdiği gelişimin niteliğini belirlemesi bakımından önemli bir olaydır. Şöyle ki, aksiyomatik düşüncenin geometriye özgü olduğu gibi, gelenekleşmiş yanlış bir anlayıştan kurtulmak kolay olmamıştır.

(1) B. Russell, “The Origin and Nature of Scientific Method” Bkz. C. Yıldırım, *Bilim Felsefesi*, s. 252.

Proclus'un verdiği *Özet*'te adı geçen ikinci kişi Pythagoras'tır. Thales'in yetiştirdiği Miletos'a yakın Sisam (Samos) adasında İ.Ö. 572 sıralarında doğduğu tahmin edilen bu büyük matematikçinin kendi adıyla anılan ünlü teoremi ortaya koymakla ispat yöntemine kazandırdığı güç ve saygınlık yanında, büyük açıklık getirdiği söylenebilir. *Özet*'ten Pythagoras'ın da Thales gibi Mısır'ı gezdiğini, hatta Babil ve çevresinde kimi merkezlere uğradığını öğreniyoruz. Pythagoras gezisinden dönüşünde İyonya'yı Pers işgali altında bulunca yurdundan ayrılır, İtalya'nın güneyinde bir Yunan liman kasabası olan Crotona'ya yerleşir. Burada, felsefe, bilim ve matematik çalışmalarına koyulan Pythagoras, birtakım tören ve tapınma biçimlerini içeren gizliliğe bağlı ünlü "kardeşlik" derneğini kurar.

Pythagoras ekolü, sayıya ilişkin mistik bir inanca bağlıdır. Buna göre, evrensel düzenin özü sayısaldır. Pythagoras'ın bu öğretiyi Doğu kültürlerinden esinlenerek oluşturduğu söylenebilir. Ne var ki, bir tür din niteliği taşıyan bu bilim dışı görüşe karşın, Pythagoras ekolünün kuruluşunu izleyen iki yüzyıl boyunca matematiğe önemli katkılar yaptığı bilinmektedir. Örneğin, paralel çizgilerin özelliklerine ilişkin çalışmaları, üçgenin iç açılarının toplamının iki dik açının toplamına eşit olduğu teoreminin ispatına yol açar. Yunan geometrik cebirinin gelişmesine yaptıkları katkılar da anılmaya değer: Toplama, çıkarma, bölme, kök alma, hatta genel 2. dereceden eşitlikleri çözme gibi işlemlerin geometrik eşdeğerlerini saptama, önemli katkıları arasında sayılabilir. Dahası var: Ölçülebilir büyüklüklerin karşılaştırılması teorisini geliştiren Pythagorasçılar düzgün geometrik cisimlerin en azından üçünü biliyorlardı: Öte yandan, karenin kenarı ile köşegeninin ölçüştürülemeyeceğini keşfedenler de onlar. İrrasyonel $\sqrt{2}$ 'nin bulunuşu, Pythagorasçılar için olduğu kadar matematiğin daha sonraki gelişmesi için de son derece önemli bir olaydır. Pythagorasçılar, mistik öğretilerine ters düşen bu sonucu gizli tutarak işin içinden çıkmaya bakarken, matematik ilk büyük bunalımını yaşar. Gerçekten, her şeyin tam sayıya indirgenebileceği öğretisi açısından bu sonuç tam bir skandaldı. Kaldı ki, durum sağduyu açısından da iç açıcı değildi: Rasyonel bir sayı ile dile getirilemeyen bir büyüklük nasıl olabilirdi? Karenin kenarı ile köşegenini ortak bir birim uzunlukla mukayese edebilme neden olanak dışı olsun? Pythagorasçıların bir türlü içlerine sindiremedikleri bu beklenmedik sonuç, aslında, onların dolaylı da olsa, önemli katkıları arasında sayılmak gerekir. Çünkü, $\sqrt{2}$ gibi irrasyonel sayıların ortaya çıkmasıyla başlayan bunalımın giderilmesi yolundaki çalışmalar, mantıksal ispat yönteminin belirginlik kazanmasında başlıca etkenlerden biri olmuştur. Nitekim dönemin ünlü bilgini Eudoxus'un, $\sqrt{2}$ 'nin rasyonel bir sayı olamayacağına ilişkin verdiği ispattır ki, bunalıma son vermiştir. Ama Pythagorasçıların asıl büyük katkıları, Thales'te ilk örneklerini gördüğümüz dedüktif çıkarsamayı içeren ispat yöntemini ileri bir düzeyde kullanma başarılarıdır. Böylece matematik alanında doğruluğu varsayılan önermeler arasında mantıksal ilişkilerin kurulabileceği, seçilmiş kimi ilkelerden diğerlerinin mantıksal olarak çıkarsanabileceği düşüncesi zihinlerde yaygınlık kazanmış oluyordu. Nitekim Proclus'un *Özet*'inden, Euclides'ten önce Pythagorasçıların geometriyi aksiyomatik olarak kurma yolunda büyük çaba gösterdiklerini öğreniyoruz. Pythagoras teoreminin çeşitli ispatları bu çabanın ürünleridir. Gerçi, kenarları 3, 4, 5 ya da 5, 12, 13 birim uzunlukta

olan üçgenlerin dik açılı olduğu daha önce hem Mısır'da hem de Babil'de bilinmiyor değildi.⁽²⁾ Ama bu bilgi empirik ölçmelere dayanıyordu. İlişkinin tüm örneklerini kapsayan genel ispatı, henüz bir olasılık olarak bile, üzerinde durulan bir konu değildi. Mantıksal ispat öyle görünüyör ki, düşünce evriminde ancak Antik Yunan döneminde erişilen bir aşamadır.

Sayı ile büyülenen Pythagorasçıların düşünce tarihinde matematikle sınırlı kalmayan bir etki genişliği olmuştur. Onların gözünde nicelik niteliği belirleyen, evrenin yapısını oluşturan gizemli güçtü; öyle ki, tüm nesneler sayıya indirgenebilirdi. Sayılar arasındaki ilişki evrenin yetkin, tanrısal uyumunu örneklemekteydi. Ünlü filozof Platon bu etkiyi çarpıcı bir güç ve incelikte yansıtmaktadır. Platon'un gözünde matematik yetkin bilginin biricik örneğidir. Ona göre, matematikle yola çıkmayan, matematiksel kesinliği amaçlamayan bir eğitim düşünülemezdi. Ünlü Akademi'sinin giriş kapısında, "Geometriyi bilmeyen içeri girmesin!" uyarısı yazılıydı. Kuşkusuz Platon'un sözünü ettiği geometri, eski Mısırlıların geometrisi değildi. Geometriye yer ölçümü gözüyle bakmayı ilkel bir anlayış sayan Platon, *Cumhuriyet* adlı yapıtında görüşünü şöyle açıklamaktadır:

Sanırım, geometricilerin görsel şekiller çizip bunlar üzerinde tartışmaları, onların gerçekte bunları düşündüklerini göstermediğini biliyorsunuzdur. Geometriciler aslında bu şekilleri değil, onların temsil ettiği yetkin nesneleri düşünürler. Örneğin, tartışmalarının konusu çizdikleri kare ya da çap değil, karenin kendisi, çapın kendisidir. Modeli çıkarılan ya da çizilen şeyler, ancak düşüncenin gözüyle görülebilen, kendi başına var olan yetkin nesnelerin birer imgesidir, yoksa kendisi değil!

Platon'un dialoglarının birçoğunda yer alan bu görüş günümüze değin etkisini sürdürmüştür. Nitekim pek çok ders kitabında aynı görüşün değişik biçimlerde de olsa dile getirildiğini görmekteyiz. Örneğin, şu belirlemeler oldukça yaygındır:

Nokta ve çizgi aslında birer kavramdır. Kâğıt üzerinde gördüğümüz şekiller yalnızca o kavramları simgeleyen işaretlerdir.

Gene, geometriyi, "düzgün olmayan şekiller üzerinde düzgün düşünme sanatı" diye niteleyen düşünürler az değildir. Bertrand Russell, "Kanımca, duyularımızı aşan 'idealar' dünyasına olan inanca olduğu gibi, mutlak ve evrensel doğruluk arayan felsefeye de başlıca özentî kaynağı matematik olmuştur" demekle Pythagoras ve Platon geleneğinin güçlü etkisini vurgulamıştır.

Felsefede olduğu gibi matematikte de Yunan düşüncesi olgunluk çağına İ.Ö. 4. yüzyılda ulaşır. Thales ile başlayan matematiğin, mantıksallaşma süreci, Pythagorasçılarla Eudoxus'un önemli katkılarını yüklenerek sonunda Euclides geometrisinde en yetkin örneğiyle günümüze ulaşır.

(2) Babil'de Hamurabi döneminde, dik açılı üçgenlerin kenar kareleri toplamının hipotenüs üstündeki kareye eşit olduğu biliniyordu; ancak önermenin teorem olarak ispatı 1000 yıl sonra gelen Pythagoras'çılar beklemiştir.

Euclides'in "Elementler"i

Eski Yunanlılar için matematik öncelikle geometri demekti. Onların matematiksel düşünceye katkıları en başta geometride kendini gösterir. Euclides sistemi bunun somut örneğidir.

Bu noktada akla şöyle bir soru gelebilir: Yunanlıların geometride tanık olduğumuz büyük başarısı, neden sayısal ilişkileri içeren aritmetik ve cebirde kendini göstermez? Bu sorunun kesin yanıtını bilmiyoruz. Ancak, Pythagorasçıların irrasyonel sayıları tüm çabalarına karşın tamsayı olarak gösterememelerinde nedeni arayanlar vardır. Onları tedirginliğe iten bu tür bir güçlük geometride ortaya çıkmamıştır.

Daha önce de belirttiğimiz gibi, Yunan öncesi dönemin özelliği sınamayanılma yöntemine dayalı empirik bilgi düzeyinde kalmış olmasıdır. Babilliler gibi Mısırlılar da daha çok yaşamın pratik ihtiyaçlarından kaynaklanan ölçme ve hesaplama işlemlerini geliştirme ve kullanma çabası içindeydiler. Yunanlıların her iki kültür çevresinin birikimlerinden önemli ölçülerde yararlandıklarını biliyoruz. Ne var ki, onlar aldıklarıyla yetinmediler. Bir kez Yunanlıların matematikteki ilgisi, felsefede olduğu gibi, pratik olmaktan çok teorik nitelikte idi: Bilgide kesinlik arıyorlardı; açıklamak ve anlamak başlıca kaygılarıydı. Geometriyle işe yaradığı için değil, bilme, öğrenme ve anlama tutkularını doyurmak için uğraşıyorlardı. Onlar için geometri uzaysal ilişkilerin bilimiydi – üstelik diğer alanların elvermediği sıkı düşünme ve ispatlama yöntemini içeren bir bilim! Pythagoras ve ondan esinlenen Platon'un gözünde geometrinin önemi entelektüel bir disiplin olmasındaydı. Soyut ve katıksız niteliğiyle matematik, özellikle ispata dayanan geometri, metafizik düşünce gibi insan kafasının, değeri kendi içinde olan üründü.

Euclides'in "Elementler"i diye bilinen ünlü yapıt (İ.Ö. 300) geometride doruğuna erişen Yunan matematik düşüncesini örneklemesidir. Yüzyıllar boyunca insan düşüncesinin "yetkin" bir ürünü olarak etkisini sürdüren bu yapıtta, daha önceki dönemlerin buluş ve birikimlerinin mantıksal bir düzenlemesini bulmaktayız. "Elementler", Klasik ve Ortaçağlarda olduğu gibi, Yeni ve Yakın Çağlarda da (XIX. yüzyılın sonlarına dek) tüm yüksek öğrenim kurumlarında rakipsiz ders kitabı olarak okutulmuştur. Daha da önemlisi, Euclides'in geometride ortaya koyduğu aksiyomatik sistemin tüm diğer bilimler için özenilen bir model oluşturmuş olmasıdır.

Bu başarılı modelin mimarı Euclides'in kendisine ilişkin bilgimiz yok denecek kadar azdır. Bu konuda Proclus'tan sadece şunları öğreniyoruz:

Euclides "Elementler" adlı yapıtını, Eudoxus'un ispatladığı teoremleri bir araya getirerek oluşturmuştur. Aslında onun başarısı yeni teoremler bulmasında değil, kendisinden önce ortaya konmuş teoremleri mantıksal ilişkileri içinde örgün bir biçimde sunmasındadır. Doğum ve ölüm yılları kesinlikle bilinmemekle birlikte, yaşamının Ptolemy I dönemine rastladığı söylenebilir. Bu dönemden hemen sonra yaşayan Archimedes, Euclides'ten söz etmektedir. Gene, söylentiye göre, Ptolemy I, ünlü geometriciye zor bulduğu "Elementler"i okumaksızın geometriyi kestirmeden öğrenmenin yolunu sorduğunda, Euclides, geometriye giden bir "Kral Yolu" olmadığını söyler. Bunlara ve Pla-

ton'un yazdıklarına bakarak, Euclides'in Aristoteles'ten hemen sonra, ama Eratosthenes ile Archimedes'ten önce yaşadığı, "*Elementler*"ı İ.Ö. 300 sıralarında, yaşadığı İskenderiye'de yazdığı anlaşılmaktadır. Eğitimini Atina'da Platon'un Akademisinde tamamlamış olduğu sanılan Euclides, ünlü İskenderiye Üniversitesi'nde matematik öğretmeniydi.

"*Elementler*"e her dönemde matematik düşüncenin klasik anıtı gözüyle bakılmıştır. Doğa bilimlerinde, hatta felsefede Euclides modelinin günümüze dek süren etkisi gözönünde tutulduğunda bu niteleme yerindedir. Gerçi Euclides'ten önce de benzer kitapların yazıldığı bilinmektedir. Ama bunlardan hiçbirisi "*Elementler*"in etki gücünü göstermediği için zamanla hepsi unutulmuştur. Aslında özgün bir çalışma olmadığı bilinen bu yapıtın etki gücünün nereden kaynaklandığı sorulabilir. Kısaca söylemek gerekirse, "*Elementler*" geometriye, hiçbir düşünce alanında örneği gösterilemeyen mantıksal bir bütünlük kazandırmıştır. Euclides, daha önce değindiğimiz gibi, kendisinden önceki dönemlerde ortaya konan, değişik biçimlerde ispatları verilen önermeleri aksiyom-teorem ilişkisi içinde sunmaktadır. Başka bir deyişle, öncül diye seçtiği az sayıda aksiyom, postulat ve tanımlardan, dedüktif çıkarımla, geriye kalan tüm önermelerin ispatını vermektedir. Aksiyomatik sistemde ispatlanan önermeler sistemin teoremlerini oluşturur. "*Elementler*"in olağanüstü etkisi geometriyi bu biçimde sunma başarısıyla açıklanabilir.

"*Elementler*"i oluşturan 13 kitapta 465 önerme vardır. Çoğu kez sanıldığıının tersine, bu önermelerin önemli bölümü doğrudan geometriye değil, sayı teorisine ve cebirsel geometriye ilişkindir. İlk kitapta, kimi açıklamalarla birlikte, çakışma, paralel çizgiler ve doğrusal şekillere ait teoremler yer almaktadır. İkinci kitap hemen tümüyle cebirsel geometriye; üçüncü kitap daireye; dördüncü kitap düzgün poligonlar oluşturmaya ayrılmış, beşinci ve altıncı kitaplarda ise Eudoxus'un oranlar (proportions) teorisi, teoremin geometriye uygulanması ele alınmıştır. 102 önermeyi içine alan yedinci, sekizinci ve dokuzuncu kitaplarda basit sayı teorisine; onuncu kitapta irrasyonel (örneğin, $\sqrt{2}$) sayılara yer verildiğini görmekteyiz. Geriye kalan üç kitap hacimlerle ilgili. Günümüzde orta dereceli okullarda okutulan ders kitaplarına, düzlem ve hacim konuları bakımından, Euclides'in I, III, IV, VI, XI ve XII. kitaplarının birer özeti gözüyle bakılabilir.

Görüldüğü gibi, "*Elementler*" içerik yönünden oldukça kapsamlı bir kaynak. Ama bizi burada içerikten çok yöntem ilgilendirmektedir. Euclides'in sunuş yöntemi üzerinde yukarda yaptığımız değinmeleri biraz daha ayrıntılı açıklamaya ihtiyaç vardır. "*Elementler*"e tarihsel etki gücünü sağlayan yöntemin başlıca özellikleri nedir?

Aksiyomatik Yöntem

Aristoteles (İ.Ö. 384-322) kendisinden kısa bir süre sonra Euclides'in geometride başarılı örneğini sergilediği aksiyomatik yöntemi kalın çizgilerle şöyle dile getirmektedir:

İspata yönelik her bilim, konusunun ilkelerini oluşturan varsayımlarla işe başlar. Bu varsayımların bir bölümü tüm bilim alanları için ortak niteliktedir (Aristoteles bunlara

‘aksiyom’ adını vermekte); diğerleri her alanın kendi konusuna özgü ilkelere (Aristoteles bunlara ‘postulat’ adını vermektedir). Postulatlar, inceleme konusu nesneleri, bunlara ilişkin özellik ve ilişkileri belirleyen önermelerdir. Örneğin, geometride ‘nokta’, ‘çizgi’ gibi nesneler varsayılmakta, ‘üçgen’, ‘daire’ gibi tanımlanan diğer nesneler, varsayılan nesnelere dayanarak inşa edilmektedir. Örneğin, “Tüm dik açılar eşittir” postulatı, bir küme nesnenin belli bir özelliğini dile getirmektedir.

Gerçekten ileri bir anlayışın ifadesi olan bu çözümlemeye karşın, Aristoteles’in, temel ilkeler saydığı aksiyom, postulat ve tanımlar üzerinde tam bir açıklık içinde olduğu söylenemez. Ancak değişik kaynaklar yoklandığında şu üç noktada genel bir anlayışa ulaşıldığı görülmektedir:

- (1) Aksiyom tüm alanlar için geçerli, doğruluğu apaçık bir önermedir. Örneğin, “Aynı şeye eşit olan şeyler birbirine eşittir.”
- (2) Postulat belli bir konu ya da inceleme alanına özgü, doğruluğu apaçık bir önermedir: Örneğin, “Bir çizgi dışındaki herhangi bir noktadan o çizgiye bir ve yalnız bir paralel çizgi vardır.”
- (3) Aksiyom doğruluğu zorunlu bir önermedir; oysa postulat için zorunluluk söz konusu değildir.

Kısaca söylemek gerekirse, Yunan matematik anlayışında yetkin bir bilim (örneğin, geometri), tüm önermelerini mantıksal bir düzenleme içinde toplayabilen bir çalışmadır; öyle ki, birkaç temel ilkedен mantıksal çıkarımla tüm diğer önermelerine ulaşılabilsin. “*Elementler*”de temel ilkeleri aksiyom, postulat ve tanımlar oluşturmaktadır. Tanımlar, önemli sayılan terimlerin anlamlarını belirlemeye yöneliktir. Çıkarımların öncüllerini sağlayan aksiyom ve postulatlar sistemin doğruluğu apaçık sayılan ilkelerini oluşturur. İspatlanmış önermeler ise sistemin “teoremleri” diye bilinir.

“*Elementler*”in başlangıç bölümünde temel ilkeleri oluşturan önermelerin bir listesini bulmaktayız. Aşağıdaki örnekler, bir fikir verir düşüncesiyle seçilmiştir:

Tanımlar:

Nokta: Büyüklüğü (ya da parçası) olmayan bir nesne.

Doğru: Genişliği olmayan uzunluk.

Yüzey: Yalnızca eni ve boyu olan nesne.

Düzlem: Üzerindeki doğrularla koşut giden yüzey.

.

.

.

Postulatlar:

1. Bir doğru herhangi bir noktadan başka bir noktaya çizilebilir.
2. Bir doğru parçası doğrusal bir çizgi üzerinde sürekli uzatılabilir.

3. Bir daireyi herhangi bir merkez ve uzaklıkla belirleyebiliriz.
4. Tüm dik açılar birbirine eşittir.
5. İki doğru üzerine düşen bir doğru çizgi, aynı yandaki iç açıları birlikte iki dik açıdan az yapıyorsa, iki doğru çizgi, iç açılarının bulunduğu yanda yeterince uzatıldığında birleşir.

Genel Doğrular (Aksiomlar):

1. Aynı şeye eşit olan şeyler birbirine eşittir.
2. Eşit olan şeylere eşit şeyler eklendiğinde sonuçlar eşit olur.
3. Eşit olan şeylerden eşit şeyler çıkarıldığında kalanlar eşittir.
4. Birbiriyle çakışan şeyler birbirine eşittir.
5. Bütün parçasından büyüktür.

Euclides'in bu belirlemeleri, kendisinden bir kuşak önce yaşamış olan Aristoteles'in çözümlemesine tümüyle uygun düşmektedir. Aristoteles ayrıca en az sayıda varsayımlara başvurularak yapılan ispatın yeğlenmesi gereğinden söz ediyordu. Euclides'in bu düşünceye de bağlı kaldığını görmekteyiz.

Euclides'in verdiği tanımların tümü kendisine ait olmamakla birlikte, bir bölümü anlam yönünden yeterince belirgin değildir. Kaldı ki, "nokta", "doğru" gibi ilkel terimlerin tanımlanması en azından gereksizdir. Postulatlara gelince, bunlardan sonuncusu (5. postulat) daha baştan kuşkuyla karşılanmış, yüzyıllar boyu tartışma konusu olmuştur. Önemli sonuçlara yol açan bu tartışmalara ilerde ayrıntılarıyla değineceğiz. Şimdilik Euclides'in yöntem anlayışını kısaca özetlemekle yetineceğiz.

Dedüktif bir sistem birtakım varsayımların konmasını gerektirir. "*Elementler*" de bu koşul 5 postulat ve 5 aksiom konarak yerine getirilmiştir. Postulatların geometriye ilişkin olması nokta, doğru, üçgen, dik açı, daire gibi terimlerden ileri gelmektedir. Euclides bu terimleri ne anlamda kullandığını göstermek için tanımlar vermektedir. Her tanımda adı geçen nesne ya da nesnelerin ne olduğunu, nasıl ayırt edildiğini öğrenmekteyiz; ancak bir tanım bize sözü geçen nesnenin var olup olmadığını, ona ilişkin ne tür bir varsayım yapabileceğimizi bildirmez. Bu tür işlevler postulatlarla bırakılmıştır.

Euclides Sisteminde Yetersizlikler

Batı Felsefe Tarihi'nde Grek matematiğine değinen Russell'ın şu sözlerinde Euclides'in özlü bir değerlendirmesini bulmaktayız:

"*Elementler*"e, yazılmış en büyük kitap gözüyle bakılsa yeridir. Bu kitap gerçekten Yunan zekâsının en yetkin anıtlarından biridir. Kitabın kuşkusuz Yunanlılara özgü eksiklikleri yok değildir: Dayandığı yöntem salt dedüktif niteliktedir; üstelik öncüllerini oluşturan varsayımları hiçbir şekilde yoklama olanağı yoktur, bunlar kuşku götürmez açık doğrular olarak konmuştur. Oysa, XIX. yüzyılda ortaya çıkan Euclides-dışı geomet-

riler bunların hiç değilse bir bölümünün yanlış olabileceğini, bunun da ancak gözleme başvurularak belirlenebileceğini göstermiştir.⁽³⁾

Matematiksel yöntemin oluşma sürecinde olduğu bir dönemde ortaya konan “*Elementler*”in tümüyle kusursuz, yetkin bir yapıt olması beklenemezdi kuşkusuz. Nitekim daha sonraki çalışmalar sistemde birtakım mantıksal yetersizlikler olduğunu göstermiştir.

Bu yetersizliklerden belki de en önemlisi, kimi varsayımların üstü örtük olarak kullanılmış olmasıdır. Bu Euclides’e özgü bir kusur da değildir. Daha sonra oluşturulan sistemlerin pek çoğunda aynı kusura rastlamaktayız. Aksiyomatik bir sistem “aksiyom” ya da “postulat” adı altında konan tüm varsayımların daha baştan belirtilik olarak konmasını gerektirir. Ne var ki, sistem kurucusu çoğu kez, konusuna ilişkin geniş bilgisinin etkisinde, farkında olmaksızın, kimi varsayımlardan yararlanma yoluna gidebilir. Bu durum hem başlangıç ilkelerinin yetersizliğini gösterir, hem de, sistemde olası bazı çelişkilerin ortaya çıkabileceği sakıncasını taşır. Üstü örtük kalan varsayımların tutarlılığını denetlemek çoğu kez olanaksızdır.

Euclides verdiği ispatların bir bölümünde üstü örtük varsayımlara başvurduktan başka, daha önce de değindiğimiz gibi, birtakım gereksiz tanımlara da yer vermektedir. Bir kez terimlerin tümünün tanımlanması, döngül tanımlamaya düşmeksizin, olanaksızdır. Sonra aksiyom ya da postulatlarla geçen terimlerin anlamları bu önermelerin bağlamında az çok açıklık kazanmaktadır; bununla yetinilebilir. Oysa Euclides gereksiz yere ilkel terimleri de tanımlama yoluna gitmiştir. Üstelik verdiği tanımların çoğu hem yetersiz kalmakta, hem de bir amaca hizmet etmemektedir. “*Elementler*”de önermelerin postulat ve teorem olarak ayrılmasına karşın, terimler arasında benzer bir ayırım göze çarpmamaktadır. Terimlerin “ilkel” (tanımlayan) ve “tanımlanan” diye ayrılması modern gelişmeleri beklemiştir.

Yunan Döneminin Sonu

Euclides’ten sonra, hiç değilse Batı dünyasında, matematik uzun süren bir durgunluk dönemine girer. Ancak bu arada klasik çağın belki de en büyük bilim adamı olan Archimedes’in çalışmasına kısaca değinmek gerekir. Archimedes (İ.Ö. 287-212) eğitimini İskenderiye okulunda tamamlar; Euclides’in yöntem ve sistemini tümüyle özümser. Matematiğe katkısı, matematiksel düşünme yöntemini geometri ve mekanik alanlarında son derece başarılı kullanma yeteneğinde kendini gösterir. Archimedes’in çalışmaları, öz ve biçim yönünden, çağdaş çalışmalarda sergilenen çözümleme düzeyinde bir güce sahiptir.

Archimedes, mekanik alandaki bulgularını, Euclides geleneğine uygun olarak, aksiyomatik biçimde sunar. Örneğin, *Düzlem Dengeler Üzerine* adlı çalışmasında mekaniğe ait 25 teoremin üç basit postulata başvurularak ispatlandığını görmekteyiz. Günlük deneyimlere ilişkin olan bu basit postulatlar şunlardır:

(3) B. Russell, *A History of Western Philosophy*, s. 211-212.
Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - <https://rantey.org>

- (1) Eşit uzaklıklarda eşit ağırlıklar dengede kalır; eşit olmayan uzaklıklarda eşit ağırlıklar dengede kalmaz, denge daha uzak mesafedeki ağırlığa doğru bozulur.
- (2) Belli uzaklıklarda dengede kalan ağırlıklardan birine bir şey eklenirse, denge ağırlığın arttığı yönde bozulur; dengedeki ağırlıkların birinden bir şey çıkarılırsa, denge ağırlığın değişmediği yönde bozulur.
- (3) Eşit ve benzer şekiller birbiri üzerine getirilip çakıştırıldığında bu şekillerin ağırlık merkezleri de çakışır; benzer, ama eşit olmayan şekiller söz konusu olduğunda ağırlık merkezleri de benzer yer gösterirler.

Archimedes bu önermelere dayanarak herhangi parabolik bir parçanın ağırlık merkezini ve iki kiriş arasında bulunan bir parabola bölümünü belirliyordu. Oysa bu tür problemlerin çözümü günümüzde integral kalkülüs ile yapılmaktadır.

Archimedes, aksiyomatik yöntemini, *Yüzen Cisimler Üzerine* adlı ünlü yapıtında da kullanır. Bu kitapta, iki temel postulata dayanılarak 19 önermenin ispatı verilmiştir. Matematik yöntemin hidrostatiğe ilk uygulamasını bulduğumuz bu çalışmada Archimedes'in ulaştığı sonuçlar XVI. yüzyıla gelinceye dek aşılamamıştır.

Archimedes'in *Küre ve Silindir Üzerine* adlı geometriye ilişkin çalışmasında yer alan 5 postulattan birine, "Archimedes Postulatu" diye bilinen ilkeye de kısaca değinmeliyiz. Kimi modern geometri kitaplarında süreklilik kavramına geçişte kullanıldığını gördüğümüz bu ilkeyi şöyle dile getirebiliriz: İki doğrusal parça alalım; bunlardan kisasını ötekinden daha uzun yapan sonlu bir katı vardır.

Euclides'ten sonra Archimedes'in yanı sıra başka güçlü matematikçiler de çıkmıştır. Bunlar arasında Apollonius, Erasthenes, Claudius, Ptolemy, Heron, Diofantus ve Pappus gibi adlar sayılabilir. Ancak bunların matematiksel yöntemin gelişmesinde çığır açıcı rol oynadıkları kolayca söylenemez. İ.S. 3. yüzyılın sonlarında yaşayan Pappus'tan sonra klasik Yunan matematiği ölü bir durgunluk içine girer. Roma'nın tam egemenlik kurduğu bu dönemde, Proclus'un gösterdiği çaba, Yunan matematiğinin anısını canlandırmayla sınırlı kalır. Yaratıcı düşünme ve araştırma tutkusu geçmişte kalmıştır. Bilim tümüyle yok olma sürecine girmiş, İskenderiye okulu etkinliğini yitirmiş, büyük kütüphane nerdeyse yok olmuştur. İ.S. 641'de Arapların İskenderiye'yi ele geçirmesiyle birlikte birçok alanda olduğu gibi, matematikte de Yunan dönemi kapanır.

III. BÖLÜM

MODERN MATEMATİĞE GEÇİŞ

Hint ve Arap Etkileri

Roma İmparatorluğu'nun çöküşü 5. yüzyılın ikinci yarısına rastlar. Bu tarihten 11. yüzyılın sonlarına kadar uzanan dönem Avrupa'nın karanlık çağıdır. Bilim, sanat, okul eğitimi hemen tümüyle ortadan silinmeye yüz tutmuş, Grek ve Latin öğrenimi yalnızca Katolik manastırlarında az sayıda keşişlerin tekelinde sürdürülmüştür. Feodal ve kapalı bir toplum düzenine özgü sıkı din baskısı altında, kişilerin özgür düşünme, araştırma, bilgi üretme ve yayma olanağı yoktu. Toplum yaşamında kültürel etkinlikler yerini şiddet, yağma, yıkıp kırma gibi uygarlık dışı davranışlara bırakmıştı.

Romalıların bilimde olduğu gibi matematikte de ilgileri pratik nitelikteydi. Matematikçi ticaret ve mühendislik uğraşlarında işe yaradığı ölçüde kullanıyorlardı. İmparatorluğun çöküşüyle iş yaşamındaki zayıflama matematiğe olan gereksinmeyi daha da azaltır. Denebilir ki, bin yıllık karanlık çağda matematiğin tek kullanıldığı uğraş, Hristiyan takvimini düzenlemeye ilişkin olmuştur.

Ne ki, Avrupa'nın karanlık döneminde matematiğin gelişmesine başka çevrelerde, Hint ve Arap dünyasında tanık olmaktadır. Ancak Hintli matematikçiler, Yunanlıların ispat yöntemine yabancı kalmış, ulaştıkları sonuçları mantıksal olarak sistemleştirme yolunda göze cırpıp bir uğraş içine girmemişlerdir. Bununla birlikte onların hesaplama ve cebirsel tekniklerde gösterdikleri başarı, konumsal sayı sisteminin gelişmesindeki katkıları son derece önemlidir.

İslamiyetin ortaya çıkışıyla Arap dünyası her yönden büyük bir atılım içine girer. Peygamber'in 622'de Mekke'den Medine'ye hicretiyle başlayan bu canlılık, yüzyıl içinde, Hindistan'dan İspanya'ya uzanan bir imparatorluğun kurulmasına yol açar. Çok geçmeden, Arapların eski Yunan ve Hint kaynaklarından yararlanarak tıp, astronomi ve matematik alanlarında önemli çalışmalar ortaya koydukları görülür. Bağdat halifeleri, bir yandan imparatorluğu yönetirken, öte yandan ünlü bilginleri saraylarında toplayarak, klasik Yunan ve Hint kaynaklarını Arapçaya çevirtiyorlardı. Böylece birçok değerli yapıt ve kaynakların kaybı önlendikten başka, Avrupa Rönesansının oluşmasında başlıca etkenleri oluşturan yapıtların Latinceye ve daha sonra kimi ulusal dillere kazandırılmasına giden yol açılmış oluyordu. XI. yüzyılın sonlarına doğru Toledo kentinin yeniden Hristiyanların eline geçmesiyle

birlikte Arap kültür ve bilimi Batılı araştırmacıların bir tür “yağmasına” uğrayarak, Fransa, İtalya ve İngiltere’ye taşınır. Bu dönemde Avrupa ülkelerinde büyük bir çeviri etkinliği göze çarpmaktadır. Cremona’lı Gherardo adında çalışkan bir çevirmen, aralarında Euclides’in “*Elementler*”iyle Ptolemy’nin *Almagest*’i de olan 90 yapıtı Arapçadan Latinceye çevirir. Öte yandan Ortadoğu’yla sıkı ticaret ilişkileri sürdüren İtalyan tüccarlarının, Araplardan öğrendikleri cebir, sayı sistemi ve hesaplama tekniklerini Avrupa’ya taşımada önemli rol oynadıkları bilinmektedir.

Romalılarla karşılaştırıldığında Araplar lehine söylenecek çok şey vardır. Romalıların teorik ilgisi öylesine sönüktü ki, “*Elementler*”in Latinceye ilk çevirisi imparatorluğun yıkılışını beklemiştir (Bethius’un 480 sıralarında yaptığı söylenen ilk çeviri kaybolmuştur.) Oysa, Yunan kaynaklarının değerini Arapların daha iyi anladıkları görülmektedir. Örneğin, Bizans İmparatoru’nun Halife Harun-el Reşid’e armağan ettiği “*Elementler*”in bir kopyası çok geçmeden Arapçaya çevrilir. Bugün elde bulunan ilk Latince çeviri, doğrudan Yunanca aslından değil Arapçadan XII. yüzyılda Bath’lı Adelard’ın yaptığı çeviridir. Avrupa’da geometri öğretimi bu çeviriden sonra canlanmaya başlamıştır.

Aynı şekilde, Hint sayı sistemiyle cebirin de Batı’ya geçişi Arap kaynakları aracılığıyla olmuştur. Bu alanda ilk ve en büyük adımın, Arap matematikçisi El-Kwarizmi’nin IX. yüzyılda yazdığı bir kitabın 300 yıl sonra gene Adelard’ın Latinceye çevirisiyle atıldığını görmekteyiz. El-Kwarizmi gerçekten büyük bir matematikçiydi. Özellikle cebirin işlenip geliştirilmesindeki çalışmaları Avrupa’da matematiğin Rönesans sonrası gelişmesinde etkili olmuştur.

XIII. yüzyıl, Paris, Oxford, Cambridge, Padua ve Napoli’de üniversitelerin kurulduğu dönemdir. Bu kuruluşlarda toplanan bilgin ve matematikçiler, kendi ilgi alanlarında verimli çalışma ortamı bulurlar. “*Elementler*”in aslından ilk çevirisi bu döneme rastlar. Campanus adlı bir matematikçinin yaptığı bu çeviri 200 yıl sonra matbaada basılarak tüm üniversite çevrelerinde ders kitabı olarak okutulur.

Yüz Yıl Savaşları’nın sürdüğü XIV. yüzyıl matematik yönünden sönüktür. Bizans’ın 1453’te düşmesiyle, İstanbul’daki bilginlerle birlikte eski Yunan kaynakları İtalya’ya taşınır ve Avrupa Rönesansı başlar. Artık Arapçadan yapılmış çeviriler bir yana itilerek, özgün kaynaklara dönülür. Bu dönemde matbaanın icadı, kitapların daha kolay çoğaltılıp yayılmasına, dolayısıyla bilginin geniş okuyucu kitlelerine daha hızla ulaşmasına olanak sağlar. Rönesans’ın başladığı XV. yüzyılda başta İtalya olmak üzere orta Avrupa’nın kimi kentlerinde (örneğin, Nurenberg, Viyana, Prag) matematik alanında büyük bir canlılık kendini gösterir. Özellikle, ticaret, denizcilik, astronomi ve harita çalışmalarının gerektirdiği aritmetik, cebir ve trigonometri gibi matematik dallarında önemli gelişmelerin sağlandığını görmekteyiz.

XVI. yüzyıl bu gelişmelerin daha göz doyurucu bir düzeye ulaştığı dönemdir. İtalyan matematikçileri üçüncü ve dördüncü dereceden denklemlerin çözümünü bulurlar. 1572’de Commandino’nun doğrudan Yunancadan yaptığı çeviriler, “*Elementler*”in daha sonraki baskılarının temelini oluşturur.

XVII. yüzyıl, hem bilimde hem de matematikte devrim niteliğinde parlak başarıların dönemidir. Daha yüzyılın başlarında Napier logaritmayı ortaya çıkarır. Har-

riot ile Oughtred cebirsel notasyonu geliştirirler. Galileo modern fiziğin temelini atar. Kepler gezegenlere ilişkin üç yasasını keşfeder. Descartes analitik geometriyi oluşturur. Fermat modern sayı teorisini oluşturmada ilk önemli adımları atar. Huygens'in olasılık teorisiyle diğer bazı alanlara önemli katkıları olur. Nihayet yüz-yılın ikinci yarısında Newton ile Leibniz (birbirinden bağımsız olarak) matematiğin büyük gelişmesi olan diferansiyel ve integral kalkülüsü ortaya koyarlar. Modern matematiğin ilk büyük aşamasını oluşturan bu çalışmaların, aynı zamanda, ileriki atılımların yön ve niteliğini de büyük ölçüde belirlediği söylenebilir.

Beşinci Postulat Sorunu

Modern matematiğe geçişte Euclides'in "Paralel Postulatu" diye bilinen 5. postulatının yol açtığı tedirginlik ve çalışmalara da kısaca değinmemiz gerekir.

Matematik tarihinde belki de hiçbir önerme sonuçları bakımından paralel postulatı kadar etkili olmamıştır. Bu postulat, hem içeriği, hem de ifade biçimi yönünden daha baştan doyurucu bulunmamış, pek çok kuşku ve tartışmaya yol açmıştır. Kimi matematikçilerin gözünde önerme bir postulat niteliği taşımamaktaydı. Öyleyse, ya bir teorem olarak ispat edilmeliydi; ya da, daha temel ve açık gördükleri eşdeğer bir önermeyle değiştirilmeliydi. Sistemi yetkinleştirme yönündeki bu tür çabalar, bir yandan Euclides-dışı geometrilerin ortaya çıkmasına yol açarken, öte yandan, matematiğin mantıksal temellerini irdeleme ve açıklığa kavuşturma gereğini duyurmuştur.

Paralel postulatın sorunsal olması rastlantı bir olay değildir. Diğer postulatlarla basit bir karşılaştırma aradaki farkı göstermeye yeter. Bir kez ifade yönünden diğerleri arasında aykırılık düşmektedir: İlk dört postulat son derece açık ve yalın cümlelerle dile getirilmişken, 5. postulat oldukça karmaşık ve çetrefil bir cümlede dile getirilmiştir. Sonra, diğer postulatların apaçık görünen doğruluğunu bu postulatla bulmamaktayız. Her iki yönden de önerme bir postulat olmaktan çok ispata muhtaç herhangi bir önerme görünümündedir. Aslında, Euclides de bir bakıma duraksama içindedir: Sorunsal bulduğu postulatı, 1-29 No.'lu önermenin ispatına gelinceye dek kullanmaz. Proclus, teorem olarak ispat ettiği sanısına kapılarak, önermenin postulatlar arasından çıkarılması gerektiğini savunur. Ona göre, önerme, teorem olarak bile sorunsal olmaktan çıkmamaktadır; ispatı pek çok teorem ve tanıma başvurmayı gerektirmektedir.

XIX. yüzyıla gelinceye dek paralel postulatın "ispatı", ya da hiç değilse daha basit ve açık başka bir önermeyle değiştirilmesi yolunda pek çok girişimlere tanık olmaktayız. Seçenek olarak ileri sürülen önermeler arasında en çok tutulanı İskoç matematikçisi John Playfair (1748-1819)'e ait olandır: Modern ders kitaplarının hemen hepsinde yer alan bu önerme şöyle dile gelmektedir: Bir çizgi dışındaki herhangi bir noktadan o çizgiye bir, yalnızca bir paralel çizgi vardır. Gerçi bu önerme eskiden bilinmiyor değildi; Proclus'un çalışmasında benzer bir önermeye yer verildiğini görmekteyiz. Ama önermenin paralel postulat kimliğiyle yaygınlık kazanması Playfair'le başlar.

5. postulata bir başka seçenek olarak, üçgenlerin iç açılarına ilişkin teoremin önerildiğini, hatta kimi kez eşdeğer bir önerme olarak kullanıldığını da söylemeliyiz. (Herhangi bir önermeyi paralel postulatın eşdeğeri saymak için iki koşulun yerine getirilmesi gerekir: (1) Paralel postulatı da içine alan Euclides postulatlarından o önermenin çıkarılabilir olduğunu göstermek; (2) Paralel postulatı, eşdeğer sayılan önerme ile birleşen diğer postulatlarla dayanarak ispatlamak. Üçgenlerin iç açılarına ilişkin teorem bu iki koşulu da sağlamaktadır.)

Paralel postulatın Euclides sisteminde teorem olarak ispatı yolunda sayısız girişimler olmuştur. Ancak girişimlerin tümünün sonuçsuz kaldığını biliyoruz. Verilen ispatlar irdelendiğinde eşdeğer bir önermenin üstü örtük ya da açıkça postulatlarla katıldığını görmekteyiz. Proclus'tan öğrendiğimize göre, bu ispatlardan ilki *Almagest*'in yazarı Ptolemy'ye aittir. Ptolemy'nin, bir çizginin dışındaki bir noktadan o çizgiye yalnızca bir paralel çizgi vardır, önermesini farkında olmaksızın varsayımладыığı anlaşılmaktadır. (Daha sonra Playfair'in seçenek olarak önerdiği bu önerme, paralel postulata eşdeğerdir.)

Bir girişim de Proclus'un kendisinden gelmiştir. Ama o da verdiği ispatı gene 5. postulatı içeren şu önermeye dayamıştır: Paralel çizgiler birbirine daima sonlu uzaklıktadır. Bir başka girişim, XIII. yüzyılda yaşayan İranlı astronom ve matematikçi Nasır-ed-din'e (1201-1274) aittir. Ancak onun ispatında da eşdeğer bir önermeye başvurulduğu görülmektedir.

Rönesans'tan sonra Batı Avrupa'da matematiğin gelişiminde, 5. postulat üzerindeki eleştiri ve tartışmalar önemli rol oynamıştır. Bu eleştiri ve tartışmaların özellikle, Proclus'un yorumunun 1533'te çevrilip yayımlanması üzerine yoğunluk kazandığını görmekteyiz. Örneğin, Oxford Üniversitesi'nde öğretim üyesi olan John Wallis (1616-1703), İranlı Nasır-ed-din'den esinlenerek yeni bir ispat vermeyi dener. Ama burada da eşdeğer bir varsayım işe karışmıştır: "Benzer çakışmayan üçgenler vardır."

Görüldüğü gibi, 5. postulatı ispat girişimlerinin ortak özelliği, açık ya da üstü örtük eşdeğer bir varsayımın kullanılmasıdır. Bir bakıma birbirinin tekrarı olan bu girişimlerin matematik düşüncenin gelişmesinde fazla etkili olduğunu söylemek güç. Ancak, XVIII. yüzyıla gelinceye dek süren bu durum, 1733'te İtalyan Jesuit papazı Girolamo Saccheri (1667-1733)'nin çalışmasının açıklanmasıyla yeni bir döneme girmiştir.

Saccheri ve Olmayana Ergi Yöntemi

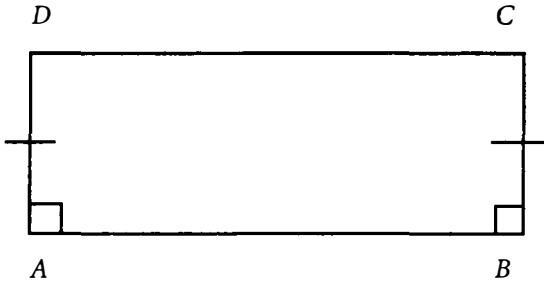
Olmayana-ergi (*reductio-ad-absurdum*, kısaca RAA), klasik çağdan beri kullanılan güçlü, hatta kimi durumlarda vazgeçilmez bir ispat yöntemidir. Yöntemin özünü şöyle dile getirebiliriz: İspatı istenen önermenin, yanlış sayılması halinde, bir çelişkiye yol açıp açmadığına bakılır: Çelişki varsa, ispata konu önermeyi yanlış değil, doğru sayma gereği ortaya çıkar; çelişki yoksa, önerme yanlış demektir, reddedilir.

Euclides'in olmayana-ergi yönteminin kullanılarak sonuçların sonsuz olduğunu

ispatladığını biliyoruz. Gene, $\sqrt{2}$ 'nin rasyonel bir sayı olmadığı da bu yöntemle ispatlanmıştır.

Olmayana-ergi, mantığın iki temel ilkesine dayanır: Çelişmezlik ilkesi (ki, “bir önerme hem yanlış, hem doğru olamaz” der); üçüncü seçeneğin olanaksızlığı ilkesi (ki, “bir önerme ya doğrudur, ya da yanlış” der). Diyelim ki, ispatı istenen P gibi bir önerme var elimizde. Olmayana-ergi yöntemine başvuruyorsak, P’yi yanlış sayar, bu sayılıtının bir çelişki doğurup doğurmadığına bakarız. Yanlış saydığımız P, gerçekte doğru ise, daha önce doğruluğu bilinen ya da varsayılan Q gibi bir başka önermeyi yanlış saymamız gerekecektir. Ne var ki, mantığın çelişmezlik ilkesi gereği Q’yu hem doğru, hem de yanlış sayamayız. Q’yu baştan doğru kabul ettiğimize göre, yadsınması (Q-değil) yanlış demektir. Doğru bir önerme yanlış bir önerme içermeyeceğine göre, P’yi yanlış sayamayız; öyleyse P doğrudur.

İşte Saccheri bu yöntem aracılığıyla Euclides’in 5. postulatının yarattığı sıkıntıyı giderme çabasındaydı. Amacı, geometriyi sürüp gelen bir pürüzden kurtarmaktı. Nitekim, ölümünden birkaç ay önce yayımlanan kitabı, *Tüm Kusurlardan Arındırılmış Euclides* adını taşıyordu. Saccheri daha önceki girişimleri, bu arada Nasır-eddin ile Wallis’in çalışmalarını biliyor, bunların ne yönden yetersiz kaldığını anlıyordu. İşe, olmayana-ergi gereği, paralel postulatı yanlış sayarak koyulur, bir çelişki elde etmeye çalışır. Bunun için, taban açıları dik, tabana bitişik kenarları çıkışan dörtgenleri ele alır. (Bunlara daha sonra “Saccheri Dörtgenleri” denmiştir.) Şimdi, nötr geometride⁽¹⁾ tavan açılarının çakıştığı kolayca ispatlanabilir: $\angle C \cong \angle D$.



Olası üç durumdan söz edilebilir:

Durum 1: Tavan açıları dik açıdır.

Durum 2: Tavan açıları geniş açıdır.

Durum 3: Tavan açıları dar açıdır.

Saccheri, Euclides geometrisine göre, doğru olan Durum 1’i ispatlamak ister; öteki iki durumun yanlış olduğunu göstermeye çalışır. Durum 2’nin çelişkiye götürdüğünü göstermeyi başarır. Şöyle ki, tavan açıları geniş olsaydı, dörtgenin açı toplamı 360 dereceden fazla olurdu; bu ise daha önce ispatlanmış bir teoremle çe-

(1) “Nötr geometri”, paralel postulatı dışlayan, ispatlarının tümünü diğer postulatlarla dayayan geometri demektir.

lişkiye düşmek demektir. Durum 3'e gelince, Saccheri, tüm çabasına karşın, bir çelişki elde edemez, çaresizlik içinde şöyle seslenir: "Dar açılı hipotezinin kesinlikle yanlış olduğunu biliyorum; çünkü böyle bir düşünce doğrusal çizginin doğasına aykırıdır." Saccheri farkında olmaksızın Euclides-dışı bir geometriye ulaşmıştı; ama onun durumu, bulunduğu pırlantayı cam parçası sanan birine benziyordu. Matematik dünyası, 1889'da gene bir İtalyan matematikçisi olan Beltrami'nin ele alıp tanıtmasına kadar Saccheri'nin çalışmasından habersiz kalır.

Lambert ve Legendre

Saccheri'nin çalışmasından 30 yıl sonra Alman matematikçisi Heinrich Lambert (1728-1777)'in paralel postulatı ele aldığını görmekteyiz. Lambert, ilkin 5. postulatın, Euclides'in diğer postulatlarından, ek bir varsayıma gitmeksizin, teorem olarak çıkarsanma olanağını yoklar. Sonra, değişik eşdeğer önermelere indirgeme çabasına girer. Saccheri gibi o da dörtgenler üzerinde çalışır. (Şimdi, "Lambert Dörtgenleri" diye bilinen bu şekillerin açılarından en az üçü dik açıydı). Dar açılı hipotezinden pek çok Euclides-dışı önerme çıkarsayan Lambert, Saccheri'nin tersine, bir çelişkiye ulaştığını iddia etmez.

Lambert, derin öğrenme tutkusuyla kendi kendini yetiştiren seçkin bir matematikçiydi. Paralel postulat üzerindeki çalışmaları dışında matematiğe önemli bazı katkılarıyla da ünlüdür. π sayısının rasyonel olmadığını ilk ispat eden odur. Ayrıca, x , sıfır olmayan bir rasyonel sayı olarak alındığında, $\tan x$ 'in rasyonel olamayacağını gösterir (çünkü, $\tan \pi/4=1$ olduğuna göre, $\pi/4$ ya da π rasyonel olamaz). Betimleyici geometri, astronomi, topografi gibi değişik alanlardaki katkıları dışında, hiperbolik fonksiyonlar teorisini de ona borçluyuz.

Paralel postulatı teorem olarak ispatlama yolundaki çalışmasıyla dikkati çeken bir başka kişi de Fransız matematikçisi A.-M. Legendre (1752-1833) olmuştur. Legendre de olmayana-ergi yöntemini kullanarak üçgenin iç açılarının toplamına ilişkin üç hipotezi irdeler: (1) İç açıların toplamı iki dik açının toplamına eşittir; (2) İç açıların toplamı iki dik açının toplamından büyüktür; (3) İç açıların toplamı iki dik açının toplamından küçüktür. Legendre, bir doğrunun sonsuzluğunu üstü örtük varsayarak, ikinci hipotezin yanlışlığını ortaya koymada güçlük çekmez; ancak tüm çabasına karşın üçüncü hipotezi yanlışlamayı başaramaz. Legendre'in çalışması iki teoremin ispatıyla sonuçlanır. Birincisi, "Bir üçgenin iç açılarının toplamı iki dik açının toplamından fazla olamaz," demektedir; ikincisi, biraz garip görünen şu önermeyi dile getirmektedir: "İç açıların toplamı iki dik açiya eşit bir tek üçgen varsa, tüm üçgenlerin iç açılarının toplamı iki dik açiya eşittir."

Bu ikinci teorem, Saccheri'nin ulaştığı sonuçlar arasında yer almakla birlikte, "Legendre'in İkinci Teoremi" diye bilinir. Birinci teoreme gelince, bunun ispatında yukarıda değindiğimiz gibi, doğruların sonsuzluğu varsayılmıştır. Aslına bakılırsa, Legendre, her iki teoremin ispatında da Archimedes postulatını kullanmıştır. Daha sonra bazı matematikçilerin gösterdiği gibi, birinci teorem için bu postulatın kullanılması kaçınılmazdır.

Legendre yaşadığı dönemde ünlü bir matematikçiydi. Açık ve düpedüz anlatımı, *Eléments de Géométrie* (Geometrinin Öğeleri) adlı çok okunan ders kitabıyla uyandırdığı geniş ilgi, paralel postulat üzerindeki çalışmasına da dikkatleri çekmişti. Oysa, Legendre'in bu konuda ulaştığı sonuç, kendisinden 100 yıl önce gelen Saccheri'nin ortaya koyduğu sonuçları pek aşmış değildi.

Euclides-dışı Geometriler

Yukardaki değinmelerimizin de gösterdiği gibi, uzun süren çabalara karşın paralel postulata ilişkin sorun çözülemez. Sorunsal postulatın ne teorem olarak ispatı, ne de sezgisel olarak daha apaçık görünen eşdeğer bir önermeyle değiştirilmesi başarılı olur. Öte yandan postulatın diğer postulatlardan bağımsız olabileceği düşüncesine ulaşmak da kolay olmadı. Bunun için yeni bir muhayyile atılımına, yeni bir bakış açısına ihtiyaç vardı. Çünkü postulatın bağımsız olabileceği düşüncesi, sonunda, değişik bir geometri demekti. Oysa iki bin yıllık bir koşullanmayı kırmak kolay değildi; Euclides geometrisinin tek doğru geometri olduğu inancı öylesine yerleşmişti ki, tutarlı bir başka geometrinin olabileceği akla bile gelmiyordu. Hatta bu geometriyi insan aklının yapısal özelliğine bağlayan filozoflar vardı. Örneğin, Kant'a göre, uzaya Euclides uzayı niteliği veren aklımızın öznel yapısıdır. Bu görüşün egemen olduğu bir ortamda başka türden bir geometri düşünülemezdi, elbette. Düşünen çıksa bile, düşüncenin ortaya atılması büyük cesaret isteyen bir işte. Nitekim, Gauss çapında bir matematikçi bile bu cesareti gösterememiştir.

Paralel postulatın bağımsız olabileceği kuşkusu ilk kez büyük Alman matematikçisi Carl Friedrich Gauss (1777-1855)'ta kendini gösterir. Aynı düşüncenin çok geçmeden Rus matematikçisi N. I. Lobachevsky (1792-1856) ile Macar matematikçisi János Bolyai (1802-1860)'de ortaya çıktığını görürüz. Her üç matematikçi de birbirinden bağımsız olarak paralel postulatı Playfair biçimiyle ele almış ve üç olasılık üzerinde durmuşlardır: Bir noktadan dışındaki bir çizgiye (1) yalnızca bir paralel çizilebilir, (2) birden fazla paralel çizilebilir, (3) hiçbir paralel çizilemez. Sonsuz bir doğru varsayıldığında (Legendre'in yaptığı gibi) üçüncü olasılık silinmektedir. İkinci olasılığın bir çelişkiye yol açmaması karşısında üç matematikçi de bu hipotezle tutarlı bir geometrinin kurulabileceği düşüncesine ulaşır, bu yolda yoğun bir çalışmaya koyulur.

Euclides-dışı geometrinin kurulmasında ilk adımın Gauss'tan geldiği söylenebilir. Ne var ki, o ulaştığı sonucu açıklama yoluna gitmez. Çalışması hakkındaki bilgimiz, çeşitli kimselere yazdığı mektuplar ile, ölümünden sonra ele geçen notlarından kaynaklanmaktadır.

İkinci büyük adımı Bolyai atmıştır. Bir matematik profesörünün oğlu olan Bolyai, Macar ordusunda subaydı. (Babası, Gauss'un yakın bir dostuydu.) Daha 21 yaşındayken paralel postulat üzerinde çalışan Bolyai, babasına yazdığı bir mektupta, konuya nasıl bir tutkuyla sarıldığını açıkça göstermektedir. Mektubunda ilk fırsatta aldığı sonucu kaleme alacağını söylemekte ve "Hiç yoktan son derece garip, yeni bir dünya oluşturdum" diyerek sevincini açıklamaktadır. Babası, çalışmanın

hemen yayımlanması gereğini ısrarla belirtirse de, Bolyai'nin çalışmasına son şeklini vermesi uzun sürer. Sonunda ancak 1831'de 26 sayfalık bir ek olarak babasının *Tentamen* adlı kitabında yayımlanır. Baba Bolyai kitabının bir kopyasını hemen Gauss'a gönderir; büyük matematikçinin değerlendirmesini merakla bekler. Ne var ki, Gauss'un cevabı hem kendisini hem de oğlunu büyük bir hayal kırıklığına uğrattır. Mektupta şu satırları okuyoruz:

Böyle bir çalışmayı övmekten kaçınacağımı söylemekle başlarsam sözlerime, bir an için şaşıracaksın elbette. Ama başka türlü yapamam: Oğlunun çalışmasını övmek, kendimi övmem olacaktır. Çünkü çalışmanın tüm içeriği, tutulan yol, ulaşılan sonuçlar hemen tümüyle benim son otuz, otuz beş yıl boyunca kafamı işgal eden düşüncelerle çalışmaktadır. İşte bu yüzden oğlunun çalışması benim için tam bir sürpriz olmuştur.

Niyetim, şimdiye dek pek az bir bölümü yayımlanmış olan çalışmamı, kendi yaşam dönemimde, saklı tutmaktı. İnsanların büyük çoğunluğu bizim ulaştığımız sonuçları anlama yeteneğinden yoksundur. Temas ettiğim kimselerin pek azında beklediğim ilgiyi bulabildim. Bu tür şeyleri anlamak için kişinin her şeyden önce keskin bir algı gücüne sahip olması gerekir. Oysa bu noktada çoğunluk tam bir yetersizlik içindedir. Öte yandan, ulaştığım sonuçları, benimle birlikte yok olmaması için, bir an önce kâğıda dökmeyi de planlamaktaydım.

Şimdi bu çabadan kurtulduğuma memnunum ve beni asıl sevindiren şey, beni bu önemli çalışmada geride bırakan kişinin eski arkadaşımın oğlu olmasıdır.

Bu son cümleye karşın, Gauss'u bağışlamayan János Bolyai, derin bir karamsarlığa gömülür; araştırmasını bir daha yayımlatma yoluna gitmez.

Euclides-dışı geometri düşüncesine ilk ulaşan matematikçilerin Gauss ile Bolyai olduğu bilinmekle birlikte, bu tür bir geometriyi ilk gerçekleştiren kişinin Lobachevsky olduğunu söyleyebiliriz.

Lobachevsky yaşamının önemli bir bölümünü Kazan Üniversitesi'nde geçirir: Önce öğrenci, sonra matematik profesörü, daha sonra üniversitenin rektörü olarak. Euclides-dışı geometri üzerindeki ilk çalışması, Bolyai'nin yayınından yaklaşık iki yıl önce, 1829'da çıkar. Çalışma, Rusya'da pek az ilgi uyandırır; Rusça yayınlandığı için de Avrupa'da herhangi bir yankı bulmaz. Lobachevsky geniş matematikçi çevrelere ulaşmak amacıyla çalışmasını önce Almanya'da (1840), sonra Fransa'da (1855) yayınlama yoluna gider. Gauss bile 1840'a gelinceye dek Lobachevsky'nin çalışmasından habersiz kalmıştır. Bolyai ise ancak 1848'de öğrenir. Lobachevsky, çalışmasının ilerde uyandıracığı büyük sarsıntıyı görmeden ölür.

Lobachevsky'nin oluşturduğu yeni geometride Euclides'in 5. postulatı yerini şu postulata bırakmıştır: Bir düzlem üzerinde bulunan m doğrusu dışındaki P gibi bir noktadan m doğrusuyla kesişmeyen birden fazla doğru geçer. Lobachevsky geometrisine önce "imgesel geometri" der, daha sonra, "pangeometri" adını verir.⁽²⁾

Matematik dünyasının Euclides-dışı geometriyle ilgilenmesi Gauss'un 1855'te ölümünden sonra yazışmalarının yayınlanmasıyla yoğunluk kazanır. Beltrami, Kle-

(2) Gauss, Bolyai ve Lobachevsky'nin oluşturduğu Euclides-dışı geometri literatürde şimdi "hiperbolik geometri" diye geçmektedir. Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - <https://rantey.org>

in, Riemann ve Poincaré gibi dönemin en seçkin matematikçilerinin konuya eğildiklerini, konuyu çeşitli yönlerden irdeleyerek açıklığa kavuşturmanın yanı sıra, değişik alanlara (örneğin, karmaşık fonksiyon teorisine) uygulama denemelerine girdiklerini görüyoruz. 1868'de İtalyan matematikçisi Beltrami, paralel postulatın ispat sorununa kesin bir çözüm getirerek yüzyılların kuşku ve tedirginliğini sona erdirir. Beltrami, paralel postulatın diğer postulatlardan bağımsız olduğunu, başka bir deyişle, bu postulatın yalnızca diğerlerine dayanılarak ispat edilemeyeceğini ispatlar. O, bu sonuca, Euclides-dışı geometrinin Euclides geometrisi kadar tutarlı olduğunu göstererek ulaşmıştı.

Lobachevsky'den sonra Euclides-dışı başka bir sistemi Alman matematikçisi Bernhard Riemann (1826-1866) oluşturur. "Elliptik" diye bilinen bu sistemde Euclides'in 1., 2. ve 5. postulatlarının aşağıdaki önermelere dönüştüğünü görmekteyiz:

- (1') İki farklı nokta en az bir doğru belirler.
- (2') Bir doğru sınırsızdır.
- (5') Bir düzlemdeki herhangi iki doğru kesişir (Başka bir deyişle, paralel doğrular yoktur).

Riemann sistemini niteleyen özelliklerden ilginç bulduğumuz iki tanesini vurgulamada yarar vardır: Bunlardan biri, doğruların sonlu ama sınırsız sayılması, diğeri uzay kavramının yeni bir içerik kazanmasıdır.

Euclides-dışı Geometrilerin Tutarlılık ve Doğruluk Sorunları

Euclides-dışı geometrilerin etkisini duyurması kolay olmadı. Yapılan işin gerçekte devrimsel nitelikte olduğu Gauss, Bolyai ve Lobachevsky gibi öncülerin ölümünden çok sonra anlaşıldı. Kendi içinde tutarlı yeni geometrilerin ortaya çıkması matema-tiğe, özellikle Euclides geometrisine ilişkin birtakım yargıların geçersizliğini gösterdikten başka, yerleşmiş kalıplar dışında yeni düşüncelerin olasılığına da kapılarını açmıştır.⁽³⁾

Yeni geometrilerin baştan ciddiye alınmaması, uzun süre kuşku konusu olarak kalması tutarlılık ve doğruluk kaygılarından kaynaklanıyordu. Gerçi ne Bolyai ne de Lobachevsky sistemlerini oluştururken bir tutarsızlıkla karşılaşmamışlardı. Ama pek çok matematikçinin gözünde tutarsızlık daima bir olasılıktı. Euclides geometrisine ters düşen bir sistemin tutarlı olmasına olanak var mıydı?⁽⁴⁾

Bu doğrultuda ilk çalışmayı, daha önce de belirttiğimiz gibi, İtalyan matema-

(3) Bu yargılardan biri 18. yüzyılın büyük filozofu Kant'a aittir. Kant, Euclides geometrisinden başka bir geometriye olanak tanımak şöyle dursun, öyle bir geometrinin tasavvur bile edilemeyeceğinden söz etmişti.

(4) Euclides-dışı geometrilerin (elliptik ya da hiperbolik) tutarlılığı, Euclides geometrisi ölçüt alınarak gösterilebilir. Bu amaçla, tutarlılığı yoklanan geometri için Euclides geometrisinde bir model oluşturmak yeterlidir. (Bkz. M. J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, s. 177-180.)

tikçisi Beltrami'ye borçluyuz. Beltrami 1868'de yayınlanan çalışmasında Euclides-dışı geometrilerin kendi içlerinde tutarlılığını ispatlayarak bu konudaki kuşku ve tereddütleri giderir. Yeni geometrilerin tutarlılığı, paralel postulatın diğer postulatlardan bağımsız olduğunu göstermiş, dolayısıyla diğerlerine dayanarak ispatlanamayacağına kesinlik kazandırmıştır. Paralel postulat diğer postulatlardan çıkarsanabilir nitelikte olsaydı, Euclides-dışı geometrilerin tutarlılığından söz edilemezdi. Çünkü bu geometrilerde paralel postulat yadsınmakta, diğerleri ise olduğu gibi korunmaktadır.

Euclides-dışı geometrilerin önemli bir sonucu, postulat kavramında yarattığı değişiklik olmuştur. Geleneksel olarak aksiyom ya da postulat doğruluğu apaçık ya da zorunlu önermelerdir. Oysa paralel postulat yerine ona ters düşen değişik postulatların konabileceği olgusu "postulat" denen önermenin bir varsayımdan başka bir şey olmadığını göstermiştir. Öyleyse, Euclides postulatları ne aklın değişmez, zorunlu yasaları, ne de uzaysal ilişkileri saptayan biricik doğrulardır. Bilimdeki kimi gelişmeler, uzaysal ilişkilerin değişik boyutlarda farklı özellikler taşıyabileceğini, tek bir geometriyle temsil edilebilecek tek bir uzaydan söz edilemeyeceğini ortaya koymuştur.

Yeni geometrilerin tutarlı sistemler olarak ortaya çıkması yalnız geometride Euclides tekeli değil, ondan da önemlisi, matematiğin "mutlak doğruluk" iddiasını da yıkmıştır. Matematiksel doğruluk göreceldir: Bir teoremin doğruluğu dayandığı aksiyom ya da postulatın doğruluğuna bağlıdır.

Birden fazla geometrinin ortaya çıkmasıyla, doğal olarak, bunlardan hangisinin doğru olduğu sorusu sorulmaya başlanmıştır. Geometri, kuramsal matematiğin bir dalı olarak düşünüldüğünde, soru anlamsızdır, denebilir. Salt matematik söz konusu olduğunda doğruluk şu demektir: Postulatlar doğru ise teoremler de doğrudur. Ama geometriye uzaysal ilişkiler bilimi olarak baktığımızda soru elbette anlamlıdır. Ne var ki, sorunun gene de kesin ve basit bir yanıtı yoktur. Aynı olgusal alana ilişkin birden fazla teoriyle karşılaştığımızda, bunlardan açıklayıcı gücü en yüksek olanı, en çok öndeyiye olanak vereni seçeriz. Geometriye empirik bir bilim gözüyle baktığımızda aynı ölçütleri kullanmalıyız: Geometrilere hangisi incelediğimiz uzaysal ilişkileri betimleme ve açıklamada üstünse, onu "doğru" sayarız. Yaşadığımız uzay kesiminde Euclides-dışı geometriler Euclides geometrisi ölçüsünde yeterli iseler, kesin deneysel bir test oluşturuncaya dek, hepsini birer hipotez saymak en doğru yoldur. Böyle bir test, Gauss'un denediği gibi, fiziksel bir üçgenin iç açılarının toplamına yönelik olabilir. Yakın uzay kesimimizde bugüne değin yapılan tüm ölçmeler bu toplamın (ölçme hatası marjı içinde) 180 olduğunu göstermiştir.(5) Oysa, Euclides-dışı geometriler, ölçülen üçgenin alanıyla orantılı olarak, toplamın

(5) Gauss'un, uzayın ne tür bir geometriyi doğruladığını belirlemek için birbirinden uzak üç dağ tepesini üçgen köşesi olarak iç açıların toplamını ölçme yoluyla bulmaya giriştiği söylenir. Bu yöntemle bulunan sonuçun kesin olması beklenemezdi; çünkü ne denli özenle yapılırsa yapılınsa her ölçmede bir hata payı vardır. Bu nedenle uzayın şu ya da bu geometriye uygun düştüğü değil, ancak uygun düşmediği ispat edilebilir.

180'den farklı olduğu savını içermektedir. Ölçmelerin Euclides sistemini doğrulayıcı sonuçlar vermesi, belki de, üçgenlerin yeterli büyüklükte alınmamış olmasındandır.

Öyleyse, soruyu, “hangisi doğrudur?” diye değil, belki, “hangisi uygulama yönünden daha yararlıdır?” diye sormak yoluna gidilebilir. Uygulama açısından Euclides geometrisinin, hiç değilse kendi yakın uzay bölgemizde, daha elverişli olduğu söz götürmez. Tüm mühendislik, mimarlık, endüstri ve benzeri işlerdeki uygulamalar bu yargıyı kanıtlayıcı niteliktedir. Ancak evrensel boyutlar içinde (genel relativite teorisinde olduğu gibi), Euclides-dışı geometrilerin daha başarılı sonuç verebileceği düşünülebilir. Bilindiği gibi, Einstein teorisini kurmada Euclides geometrisini değil, Riemann geometrisini kullanmıştır.⁽⁶⁾ Öte yandan psikolojide görsel uzaya ilişkin kimi araştırmalar ise, bu tür uzayın, en iyi Lobachevsky geometrisiyle betimlenebileceğini göstermektedir.

Euclides-dışı geometrilerin saygınlık kazanmasıyla birlikte matematiksel yaklaşım “devrimsel” diyebileceğimiz bir değişikliğe uğramıştır. E. T. Bell bu noktayı şöyle dile getirmektedir:

Matematikçi, karakterlerini, onların konuşma ve davranış biçimlerini yaratan romançı gibi, sistemine temel aldığı ilkeleri oluşturmada özgürdür: Ne doğanın yapı ve işleyişi, ne de aklın yasaları onu buna zorlar. Gerçi hem roman yazarı, hem de matematikçi kullandığı malzemenin seçim ve işlenmesinde çevrelerince bir bakıma sınırlıdır; ancak, ne biri ne de diğeri, insanüstü birtakım değişmez zorunluklar altında iş görmez.⁽⁷⁾

Yeni geometrilerin önemli bir sonucu da, matematiğin temelleri üzerinde felsefi tartışmalara yol açmış olmasıdır. Bu tartışmaları ilerde ele alacağız.

(6) Eliptik geometrinin içerdiği uzay yorumuna ilişkin Einstein'ın şu sözleri ilginçtir: “Bu yoruma büyük önem veriyorum. Ondan haberim olmasaydı, genel relativite teorisini hiçbir zaman geliştiremeyecektim.”

(7) E. T. Bell, *The Development of Mathematics*, II. Baskı, New York, McGraw-Hill, 1945, s. 330.

IV. BÖLÜM

MATEMATİKSEL DÜŞÜNME YÖNTEMİ

Düşünmede İki Aşama

Matematiksel düşünme, bilimsel ve ona temel oluşturan günlük düşünme türünden farklı mıdır? Farklı ise, kendine özgü yöntemin özelliği nedir?

Pek çok kimse (bu arada matematikçilerin hemen tümü) için bu soruların yanıtı bellidir: Matematiksel düşünme yalnız günlük düşünmeden değil, bilimsel düşünmeden de farklıdır; kendine özgü bir yöntemi vardır. Onlara göre, matematikte hiçbir düşünce alanında erişilemeyen bir açıklık ve kesinlik bulmaktayız. Matematiksel ispat yöntemiyle ulaşılan önermelerin doğruluğu söz götürmez, yanlışlanması söz konusu edilemez.

İlk bakışta çarpıcı ve akla yakın gelen bu sav, aslında gerçeği yansıtmaktan uzaktır. Biz burada bilimsel düşünme gibi matematiksel düşünmenin de sağduyuya dayalı günlük düşünmeden temelde farklı olmadığını, o düşünmenin belli bir yönde gelişen bir biçimi olduğunu göstermeye çalışacağız.

Hangi konuda ya da düzeyde olursa olsun, düşünme en belirgin biçimiyle bir sorun ya da problem çözme etkinliğidir. Düşünme sürecinde iki temel aşama ayırt edilebilir: (1) sorunu açıklayıcı ya da giderici çözümü bulma veya oluşturma; (2) bulunan ya da oluşturulan çözümün doğruluğunu yoklama. Birinci aşama genellikle “buluş”, “icat” ya da “yaratma” diye nitelenmekte, ikinci aşama ise, “doğrulama”, “kanıtlama” ya da “ispatlama” diye bilinmektedir. Kimi kez yüzeysel bir bakışla birinci aşamayı “indüktif”, ikinci aşamayı “dedüktif” düşünme olarak niteleyenler de vardır. Öte yandan birinci aşamayı niteleyen buluş, icat veya yaratma türünden süreçleri psikolojinin, ikinci aşamayı niteleyen doğrulama, kanıtlama ya da ispatlama süreçlerini mantığın konusu sayma oldukça yaygın bir yaklaşımı temsil etmektedir.

Bu tür ayırmalara ilişkin irdeleme ve tartışmalara ilerde sırası geldikçe yer vereceğiz. Şimdi kalın çizgilerle değindiğimiz iki aşamalı düşünme sürecini günlük yaşamdan, bilimden ve matematikten alınan örneklerle göstermeye çalışacağız. Bu yoldan matematiksel düşünme ile günlük ve bilimsel düşünme türleri arasında var sayılan fark ve benzerlikleri somut bir biçimde ortaya koyabileceğimizi ummaktayız.

Günlük Yaşamdan Örnek

Akşam karanlığında eve döndüğümüzde ilk hareketimiz, elektrik düğmesine uzanmaktır: Parmağımızı basıyoruz, ama ortalık aydınlanmıyor. Beklentimize ters düşen bu durum, kısa bir şaşkınlık, bocalama ya da tedirginlikten sonra, düşüncemizi harekete geçirir; ister istemez durumu anlamak, açıklamak yolunu ararız: Ampul mü yandı? Bağlantılarda bir kopukluk mu var? Sigorta mı attı? Cereyan mı kesik?, vb. Aklımıza gelen bu tür soruların her biri aslında durumu açıklayıcı bir hipotezi içinde taşımaktadır. Sorun ampulün gevşemiş ya da yanmış olmasından kaynaklanmış olabilir. Öyleyse, ampul sıkıştırıldığında, ya da yenisiyle değiştirildiğinde ortalığın aydınlanması gerekir. Sonuç bunu doğrulamazsa, ampule ilişkin hipotez yanlışlanmış demektir. O zaman diğer olasılıkları yoklamaya koyuluruz: Sigortaya bakarız; değilse, cereyanın kesik olup olmadığını yoklarız. Bu tür irdeleme doğru açıklamayı buluncaya dek sürüp gider.

Günlük yaşamımıza dikkatle baktığımızda, hemen her gün örneğimizdeki türden durumlarla karşılaştığımızı görürüz. Gerçek anlamda düşünme, bir olayı hatırlama, hayal kurma ya da özlemlerimizi gözönünde canlandırmaktan çok, bir sorunu aydınlatma, bir problemi çözme, ya da beklentimize ters düşen bir gözlemi açıklama çabasında kendini gösterir. Bu tür düşünmeye, hatırlama, hayal kurma ve çağrışımsal düşünme türlerinden ayırmak için, “nedenli düşünme” diyoruz. Bir sorun ya da problemin olmadığı yerde nedenli düşünme de yoktur.

Verdiğimiz örneğin, yakından incelendiğinde, düşünme sürecinde ayırt ettiğimiz iki aşamayı (bulma ve doğrulama aşamalarını) içerdiğini görmekteyiz. Bir güçlük ya da sorunla başlayan arayış, doyurucu bir açıklama, daha doğrusu gözlemlerin doğruladığı bir hipotez ya da kuramla son bulur. Aynı süreci, bilim tarihinden aldığımız aşağıdaki örnekte daha belirgin çizgileriyle bulmaktayız.

Bilimden Örnek

Yüzyıllar boyunca insanlar bir fıçı ya da benzer bir başka kaptan sıvı boşaltmak için kabın biri altta, diğeri üstte en az iki deliğinin olması gerektiğini deneyimleriyle biliyorlardı. Orta Çağlarda bu türden olgular “dolu evren” hipoteziyle açıklanıyordu. Nitekim bu düşünce kökeni antik çağa uzanan “doğa boşluktan hoşlanmaz” ilkesinde ifadesini bulmuştu. Buna göre, sıvının alt delikten akması için üstte oluşacak boşluğun bir şeyle (örneğin, hava) dolması gerekirdi. XVI. yüzyılın sonlarına değin tartışılmaz bir doğru olarak kabul edilen “doğa boşluktan hoşlanmaz” ilkesinin yetersizliğini ilk kez Galileo fark eder. Galileo o dönemde yaygın olan emme tulumlarının, kuyudan suyu ancak belli bir yüksekliğe çekebildiğini (yaklaşık 10 m.), tüpün üst bölümündeki boşluğa karşın, suyun bu düzeyi aşmadığını gözlemler. Ne ki, “resmi” açıklamaya ters düşen bu gözlem onu yeterince uğraştırmaz; sorunun çözümü öğrencisi Torricelli’ye kalır.

Torricelli, “doğa boşluktan hoşlanmaz” ilkesi doğru ise, nasıl olur da su belli bir düzeyi aşıp boşluğu doldurmuyor? diye merak eder. Sorun herkes için olmasa bile

duyarlı bir bilim adamı için önemlidir. Torricelli koyulduğu araştırma sürecinde merakını bir benzetmeden yararlanarak gidermeyi başarır. Yaşadığı dönemde suyun, içine daldırılan cisimler üzerinde basınç etkisi olduğu bilinmekteydi. Atmosferi bir tür deniz sayan Torricelli, bu analojiye dayanarak, “hava denizi” dediği hipotezi oluşturur. Buna göre, yerküreyi saran hava, deniz gibi, içindeki cisimler üzerinde basınç oluşturur. Tulumda su sütunu belli bir düzeyi aşmıyorsa, nedeni hava basıncının daha fazlası için yeterli olmamasında aranmalıydı. Başka bir deyişle, havası boşaltılmış bir tüpte suyun eriştiği düzey üzerindeki hava basıncıyla belirleniyordu.

Torricelli, oluşturduğu bu açıklamasını deneysel yoldan yoklayarak doğrulama çabasına da girer. Boş tüpte suyun yaklaşık 10.5 m. yükseldiğini bulur ve şöyle düşünür: Hipotezim doğru ise, sudan yaklaşık 14 kez daha ağır olan cıvanın boş tüpteki yüksekliği ancak 76 cm. olmalıdır. 1643'te gerçekleştirdiği deney hipotezinin mantıksal sonuçlarından biri olan bu öndeyiyi doğrular. Daha sonra o dönemin ünlü matematikçilerinden Blaise Pascal ve başkalarının sürdürdüğü deneyler de “hava denizi” hipotezini doğrulamaktan geri kalmaz.

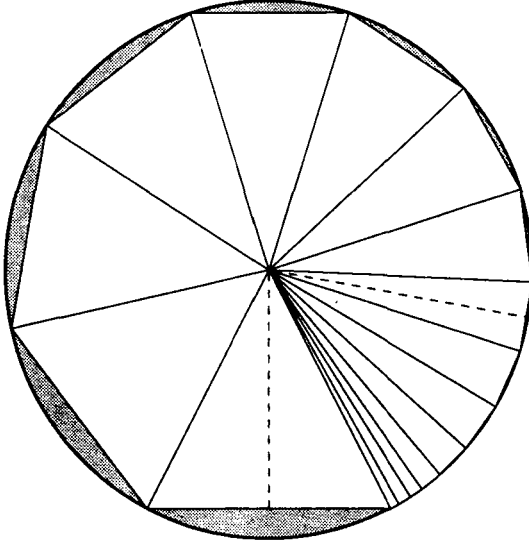
Günlük yaşamdan aldığımız ilk örneğimizde olduğu gibi, bu örnekte de iki aşamalı düşünme sürecini bulmaktayız. İlk aşamada beklenmedik bir gözlem, bir güçlük ya da sorunla karşılaşan kişide düşünce harekete geçmekte, sorunu giderici ya da açıklayıcı bir hipotez arayışı içine girmektedir. İkinci aşamada, bulunan ya da oluşturulan hipotezden çıkarsanan öndeyiler, deney veya gözlem sonuçlarıyla yoklanır; hipotez doğrulanırsa sorun çözülmüş demektir; doğrulanmazsa alternatif hipotezler yoklanır, doyurucu bir çözüm bulununcaya dek arayış ve irdeleme sürer.

Matematikten Örnekler

Yukardaki örneklerden de görüldüğü gibi, ne günlük düşünmeyi, ne de onun daha incelmış ve düzenli bir biçimi olan bilimsel düşünmeyi tümüyle induktif ya da dedüktif sayamayız. Özünde sınama-yanılma yaklaşımına dayanan bu düşünme biçimleri, karşılaşılan problemi hipotezler oluşturarak açıklama ve bu hipotezleri yeni gözlemlere giderek test etme süreçlerini içermektedir. Öyle ki, çağdaş bilim felsefecileri bilimsel düşünmeyi “indüktif” değil, “hipotetik-dedüktif” diye nitelemeyi uygun bulurlar.

Matematiksel düşünmeye gelince, kimi önemli farklara karşın, temelde benzer bir örüntü ile karşılaşmaktayız. Burada da gene “dedüktif” ya da “indüktif” gibi basit nitelemeler yeterli değildir. Matematiksel ispat dedüktif çıkarsamaya dayandığından, pek çok kimse matematiği salt dedüktif bir bilim sayar. Oysa, günlük ya da bilimsel düşünmede olduğu gibi matematikte de “indüktif” diyebileceğimiz düşünme biçimleri vardır.⁽¹⁾ Matematik yalnızca teorem ispatı değildir. Her teorem belli bir ilişkiyi dile getiren bir genellemedir. Matematikçinin öncelikle ispat edeceği bir ge-

(1) Matematiği “dedüktif bilim” diye niteleyenlere karşı çıkan Poincaré, bu nitelemeyi dar ve yetersiz bulur; dedüktif çıkarımla matematiğin kesinlik kazandığını, ama asla yeniye, bilinmeyene açılma-yacağına vurgular. Ona göre tüm bilim dallarında olduğu gibi matematikte de ilerleme yeni kavramlar oluşturma, yeni genellemelerle ileriye taşıma ve yeni olguların işlevi değişiktir. Yeni



nellemeye ulaşması gerekir. Öğüt yerindedir: Pişireceğin balığı *önce* yakala! Matematikte “yakalama” çabası değişik nesne veya ilişkilere yöneliktir. Örneğin, bir sayı ya da sayı kümesi (π sayısı, sanal sayı kümesi gibi), bir şekil, bir formül, bir ilişki, bir çözüm, bir ispat ya da bir işlem olabilir aranan, bulunan şey. Bir ilişkiyi gözlemlleme, ya da gözlemlenen ilişkiyi genelleme, bir çözüme ulaşma, bir formül oluşturma, hatta bir ispat için “ipucu” yakalama dedüktif nitelikte bir düşünmeye değil, olsa olsa indüktif türden “heuristik”, ya da kimi filozofların “retrodüktif” dedikleri düşünme biçimlerine dayanır.⁽²⁾ Matematik tarihinden pek çok örnek verilebilir buna. Dikdörtgen, üçgen ve daire alanlarına ilişkin formüllerin oluşturulması; ölçme, benzetme, sına, karşılaştırma, vb. gibi günlük düşünme süreçleri içinde gerçekleşmiştir. Aynı şekilde, π ve $\sqrt{2}$ gibi rasyonel olmayan sayıların ortaya çıkışında da ortak ölçüsüz büyüklüklerin (örneğin, karenin kenarı ile köşegenin uzunlukları) gözlemlenmiş olmasına borçluyuz. Nitekim, yakından bakıldığında, üçgen alan formülü (Taban $\times$ Yükseklik/2)’nin dikdörtgen alan formülü (Taban $\times$ Yükseklik)’nden; dairenin alan formülü ($\pi r^2 = 2\pi r \times r/2$, formülde $2\pi r$ taban, r ise yükseklik olarak yorumlanabilir)’nin ise üçgenin alan formülünden yararlanılarak oluşturulduğu görülür. Yukardaki şekil bu sonuncu geçişi görsel olarak vermektedir. Gerçekten, daire içine çizilen üçgenler küçüldükçe daireyi daha tam doldurmakta, yük-

kavram ve genelleme için matematiğe özgü (yani mantığa indirgenmesi olanaksız) matematiksel indüksiyon ihtiyacı vardır. “Matematik çalışmalarında mantığa ağırlık veren matematikçiler bile,” diyor Poincaré, “genelleme yöntemi indüksiyona başvurmadan kurtulamazlar.” (Bkz. *Science and Hypothesis*, s. 1-16.)

(2) Bu terimlerin anlamları için kitabın sonuna konan sözlüğe bakınız.

seklikleri (kırk çizgiler) dairenin yarıçapına giderek daha fazla yaklaşmakta ve tabanları çember üzerine daha yakın yerleşmektedir. Yüksekliğin yarıçapa, tabanların çembere yaklaştığını gören antik Yunan matematikçilerinin, üçgenin alan formülünden dairenin alan formülüne geçmeleri fazla zor olmamıştır herhalde.⁽³⁾

İndüktif-Dedüktif Ayrımı

Başlangıçta empirik gözlem ve ölçmelerden kaynaklanan bu tür sonuçları dedüktif düşünce ürünleri saymak yanlıştır. Kuşkusuz, formüllerin temsil ettiği ilişkiler, daha sonra, birtakım postulatlarla başvurularak dedüktif yoldan da elde edilmiştir. Ne var ki bu, bulma aşamasını izleyen ispatlama aşamasına ait bir çalışmadır. Üstelik ispat işlemine bile çoğu kez sınamaya ve yanılma türünden çalışmalarla girildiği söylenebilir. Örneğin, poligonlara ilişkin olası bir teorem önce üçgenler üzerinde yoklanır; üçgenlere uymadığı görülürse, tüm poligonlar için geçerli olduğu savı düşer, ispattan vazgeçilir. Ama bu tür yoklamalar savı doğrulayan sonuçlar verirse, o zaman genel ispat çalışması kaçınılmaz olur.

Şimdi ele alacağımız örnek, matematiksel düşünmede iki aşamanın ilişkisini ve birbirini tamamlayıcı işlevlerini daha belirgin kılmak için seçilmiştir.⁽⁴⁾

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 \quad (1)$$

Yukarda verilen denklem başlangıçta, empirik yollardan (belki de salt rastlantı sonucu) bulunan bir ilişkiyi, 1'den n'e kadar doğal sayıların küplerinin toplamı ile o sayıların toplamının karesi arasındaki eşitliği dile getiren bir genellemedir. Genellemenin bir teorem olarak ispatı kuşkusuz sonraki bir işittir. Genellemeye giden yolda ilk adım, olasıdır ki, aşağıdaki türden somut bir gözleme,

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100 \quad (2)$$

ya da, daha soyut düzeyde şu gözleme,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2 \quad (3)$$

dayanmıştır. Şu ya da bu şekilde algılanan bu ilişkinin daha sonra gelen sayılar için de geçerli kalıp kalmadığı elbette bir merak konusudur. Matematikçi gözlemlerini ister istemez genişletecek, ilk dört sayıyı izleyen sayıları da yoklayarak sonunda (1)'deki genellemeye ulaşmaktan geri kalmayacaktır. İndüktif türden olan bu düşünme sürecine değinen tanınmış matematikçi Polya şöyle demektedir.

Böyle bir genellemeye giderken biz, doğa bilimcileri gibi davranmaktayız. Merak çekici bir bitki ya da garip görünen jeolojik bir oluşumla karşılaşan bilim adamı nasıl incelemesini genişletmekten kendini alamazsa, matematikçi de spesifik bir gözlemde se-

(3) Bkz. *Mathematics*, Time-Life Books, 1969, s. 42

(4) Bu örnek G. Polya'dan uyarlanarak alınmıştır. Bkz. G. Polya, *How To Solve It*, (II. Baskı, 1957), s. 114-119.

zinlediği ilişkiyi başka gözlemlerde yoklamaktan, ilerde ispatlanabilecek bir genellemeye ulaşma çabasından kendini alamaz. Örneğin, sayılara ilişkin şu eşitlikleri,

$$\begin{aligned} 1 + 2 &= 2 + 1 \\ 2 + 3 &= 3 + 2 \\ 3 + 4 &= 4 + 3 \\ \text{vb.} \end{aligned}$$

gözlemleyen matematikçi er geç gözlemlerinin tümünü kapsayan, $a + b = b + a$, denkleminin ulaşır. Görüldüğü gibi bu sonuncu denklem hem bir soyutlama, hem de geniş kapsamlı bir genellemedir.⁽⁵⁾

Şimdi bir ilişkiyi gözlemleme, sezinleme ya da rastlantıyla bulma psikolojik bir olaydır; kuralı belli mantıksal bir çıkarsamaya indirgenemez. Oysa, hem genelleme-ye gitmek, hem de ulaşılan genellemeyi ispatlamak mantığın ilgi alanına giren işlemlerdir. Biri indüktif, diğeri dedüktif düşünme sürecini içerir.

Aslında iki düşünme sürecini her zaman bu denli keskin bir çizgiyle ayırmak kolay değildir. Nitekim ilk bakışta indüktif görünen bir uslama türüne matematikte bir ispat yöntemi olarak başvurulduğu bilinmektedir. Örneğin, Euclides ikizkenar üçgenlerde taban açılarının birbirine eşit olduğunu bir ikizkenar üçgen şeklini örnek alarak ispatlar. O, bu ispatı, iki kenarın eşitliği varsayıldığında taban açılarının eşit olması gerektiğini göstererek yapar. Ne var ki, Euclides'in aldığı örnek, alınabilecek sayısız örneklerden yalnızca biridir. İkizkenar üçgenler, tepe açısının büyüklüğüne göre kenar uzunlukları değişen sonsuz çeşitte olabilir. Oysa Euclides bir tek örnek üzerinde ulaştığı sonucu değişik tüm örnekler için geçerli saymakta, biz de bu genellemeyi yeterince sağlam görmekteyiz. Burada gördüğümüz kesinliğin kaynağı nedir? Euclides'in ispatı neye dayanmaktadır?

Yakından bakıldığında ispatın, tepe açısının büyüklüğüne göre kenarların değişen uzunlukları gibi eğreti ilişkilere değil, tüm ikizkenar üçgenlerde ortak olan özelliklere, ya da temel benzerliklere dayandığını görürüz.

Aşağıdaki ilişki bu tür ispata başka bir örnektir:

İlk iki tek sayının toplamı 2'nin karesine ($1 + 3 = 4 = 2^2$), ilk üç tek sayının toplamı 3'ün karesine ($1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$), ilk dört tek sayının toplamı 4'ün karesine ($1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$) eşittir. Buna bakarak 1'le başlayan bir dizi tek sayının toplamının diziyi oluşturan terimlerin sayısının karesine eşit olduğu genellemesine gidilebilir. Tek sayılara ilişkin bu ilişkiyi içeren denklemin,

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

iki yanına $2n + 1$ eklenerek ilişkinin ispatlandığını görüyoruz:

$$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

(5) G. Polya, *How To Solve It*, s. 115.

Buradan için doğru olanın $n + 1$ için de doğru olduğu gösterilerek verilen ispat, matematiksel induksiyona dayanmaktadır.

Şimdi benzer, ama evrensel geçerlikten yoksun başka bir ilişkiyi alalım. Bir zamanlar, herhangi bir tamsayının kendisiyle çarpımına kendisini ve 41 eklediğimizde sonucun asal bir sayı olduğuna inanılırdı. Simgesel olarak ilişkiyi şöyle yazarız:

$$x^2 + x + 41 = \text{asal sayı}$$

Değişik tamsayılar üzerinde sınama-yanılma yöntemiyle doğrulanan bu ilişkiyi içeren genellemenin tüm tamsayılar için geçerli olduğu söylenebilir mi? Daha önceki örneğimize bakarak, “söylenebilir elbette” diyebiliriz. Gerçekten, x 'e sırasıyla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 tamsayılarını verdiğimizde elde edilen 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151 sonuçlarının asal olduğunu görüyoruz. İkizkenar üçgen örneğine oranla burada kesin bir genelleme için elimizde daha fazla kanıt vardır. Öyle de olsa eldeki kanıtın ispat için yeterli olduğunu söyleyemeyiz. Nitekim, ilk 39 tamsayı için doğru olan genelleme, $x = 40$ olduğunda yanlış olmaktadır. Buna benzer bir örneği Fermat'nın pek çok sayı üzerindeki yoklamasıyla doğruluğuna inandığı,

$$2^{2^x} + 1 = \text{asal sayı}$$

formülünde bulmaktayız. Gerçekten sonuç 4294967297'ye ulaşınca dek ilişki geçerliğini sürdürmektedir. (Formülün x 'e verilecek tüm sayılar için doğru olmadığını Fermat'dan yüzyıl sonra Euler gösterir.)

Görülüyor ki, kimi hallerde bir tek örnek ispat için yeterli olduğu halde, kimi hallerde ise çok sayıda örnek yetersiz kalmaktadır. Bu fark eldeki kanıtın niteliği ile ilgilidir. Bir durumda kanıt, örneklerin temel benzerlik ya da özdeşliğine, diğer durumda “eğreti” diyebileceğimiz benzerliklere dayanmaktadır. İkizkenar üçgenlerin tüm örneklerinde temel bir benzerlik vardır. Oysa asal sayılar arasında, hiç değilse örneklerimizdeki ilişkiler bakımından, temel bir benzerlik yoktur.

Empirik Doğrulama ve Matematiksel İspat

Bilindiği gibi, genelleme (hangi alanda olursa olsun) inceleme konusu bir ya da daha fazla nesne veya ilişkinin gözlemine dayanarak o nesne veya ilişkinin dahil olduğu tüm sınıf hakkında doğruluk savı taşıyan bir yargıdır. İndüktif düşünmenin başlıca özelliğini temsil eden genelleme, bilimde empirik yasaların, matematikte olası teorem (konjektür)'lerin kaynağıdır. Günlük ve bilimsel düşünmede ulaşılan bir genellemenin doğruluğu dayalı olduğu olgusal kanıtların sayı, çeşit ve gücüne göre bir olasılık kazanır. Bir genelleme için elimizdeki kanıtlar ne derece doyurucu görünürse görünsün, genellemenin doğruluğu daima bir olasılık olarak kalır. Bilimsel genellemeler hiçbir zaman kesinlik kazanmaz. Matematikte durum biraz farklıdır. Matematikçi ne günlük yaşamda, ne de hatta bilimde olduğu gibi ulaştığı

genellemesini yeni gözlemlere giderek pekiştirme çabasını sürdürmez, ya da öyle bir çabayla yetinmez. Örneğin, Goldbach'ın olası teoremi,

Her çift sayı iki asal sayının toplamı olarak yazılabilir.

genellemesini içermektedir. Son iki yüzyıl boyunca çift sayılar üzerinde yürütülen yoklamaların tümü genellemenin doğru olduğunu göstermektedir. Bugüne değin genellemeye ters düşen bir çift sayıya rastlanmamıştır. Ancak günlük yaşam ve bilimde yeterli sayılan bu sonuç matematik için yeterli değildir. Matematik, doğruluk olasılığını artıran kanıt toplama yerine genellemeyi ispatlama yolunu arar. (1)'deki genellememize dönelim: Matematikçi n'ye değişik değerler vererek ilişkinin yoklanan tüm durumlarda sürdüğünü görmüştür. (2)'deki gözlem $n = 4$ olduğunda yapılmıştır. $n = 5$, $n = 6$, $n = 7$ vb. olduğunda da ilişki geçerliğini korumaktadır. İlk bakışta bu yoklamaların belli bir noktadan sonra yeterli kanıt sağladığı, öyleyse, genellemenin artık doğru kabul edilmesi gerektiği düşünülebilir. Oysa matematikçi asıl görevinin bu noktada başladığı inancı içindedir. O, doğruluğuna inandığı genellemeye mantıksal kesinlik kazandırmak peşine düşer. Genelleme ispatlanarak teorem kimliği kazanmalıdır. Matematikçinin sorunu bu aşamada daha karmaşık, daha teknik niteliktedir. Çoğu kez sanıldığının tersine ispat, kuralları belli mekanik bir işlem değildir. Öyle olsaydı Goldbach konjektürü ya da "Fermat'ın Son Teoremi"⁽⁶⁾ olarak bilinen konjektür çoktan ispatlanmış olurdu. Gerçekte bir ilişkiyi algılamak ne denli yaratıcı zekâ gerektirirse, bir ispatı bulmak da o denli yaratıcı zekâ etkinliği gerektirebilir. "Bulma" eylemi birinci aşamada olduğu gibi, ikinci aşamada da söz konusudur. Matematikçinin sunduğu ispat, pazara sürülen "bitmiş ürün" niteliğindedir: Belli bir mantıksal düzen içinde tümüyle rasyonel düşünce görünümündedir. Bu görünümde, bulma eyleminin içerdiği öznel etkinlikler yansımaz. Görünüme bakıp matematiği salt dedüktif mantıkla bir tutmanın yanlışlığı bir ya-

(6) Fermat'ın Son Teoremi: $n > 2$ bir tamsayı ise, $x^n + y^n = z^n$ denkleminin pozitif sayılarda çözümü yoktur.

Fermat bu önermeyi ispatladığını ileri sürmüştü. Hukukçu, şair olan Pierre de Fermat (1601-1665) aynı zamanda büyük bir matematikçiydi. Otuz altı yaşında iken okumakta olduğu bir kitabın (Diophantus'un *Aritmetik* adlı kitabının) bir sayfa kenarına, denklemin çözümsüzlüğünü ispatladığı, ancak ispatı, sayfa kenarına sığmayacağı nedeniyle yazmadığı notunu düşmüştü. Gerçi Antik Yunan matematikçileri $x^2 + y^2 = z^2$ denkleminin, kimi değerler için (örneğin, $x=3$, $y=4$, $z=5$, ya da $x=5$, $y=12$, $z=13$ vb.) doğru olduğunu biliyorlardı. Ne var ki, onlar 2'den büyük üs konusunda sessiz kalmışlardı. İlk kez Fermat denklemin $n > 2$ sayılar için çözümsüz kaldığı savını ortaya sürmekle kalmıyor, ispatladığını da iddia ediyordu.

Peki, Fermat dediği gibi "teoremini" gerçekten ispatlamış mıydı? Yoksa ispat savı tahminden ileri bir şey değil miydi? Bugüne değin tartışılan bu sorunun yanıtı bilinmiyor, belki de hiçbir zaman bilinmeyecektir. Ancak son 350 yıl boyunca yoğun arayışlara konu olan ispatın günümüzde İngiliz matematikçisi Andrew Wiles (Princeton Üniversitesi'nde öğretim üyesi) tarafından bulunduğunu öğreniyoruz. Haberin en azından matematikçiler arasında bir bomba etkisi yarattığını söylemeye gerek yoktur. İspatın 200 sayfa aşan uzunlukta olduğu, matematik çevrelerince yoklanmasının aylar alacağı bildirilmektedir. Geçmişte ileri sürülen pek çok "ispat" sonuçsuz kalmıştı. umarız bu kez yine bir hayal kırıklığına düşülmez!

na, tehlikesine değinen tanınmış matematikçiler vardır. Aşağıdaki alıntı bu tehlikeyi çarpıcı bir biçimde dile getirmektedir:

Matematğin dedüktif-aksiyomatik özelliğini vurgulamada tehlikeli bir aşırılığa düştüğü söylenebilir. Gerçi, yaratıcı eylemi, “sezgisel” dediğimiz kavrayışı basit mantıksal bir kalıba indirgeme olanağı yoktur; ne var ki, bu olgu en soyut alanlarda bile matematiksel başarının özünde yer alır. Matematikte amaç, yetkin dedüktif biçime ulaşmaksa, bu yolda itici gücün kaynağı yaratıcı sezgidir. Matematği, isteğe göre ortaya konan birtakım postulat ve tanımlara dayalı bir teoremler sistemi olmaktan ibaret sanmak yanlıştır. Bu niteleme doğru olsaydı, matematik hiçbir yetenekli kişinin ilgisini çekme gücünü taşıyamaz; amaç ve çekicilikten yoksun, salt tanım, kural ve tasımlardan oluşan bir oyun olmaktan ileri geçmezdi.⁽⁷⁾

Yüzeyde ispat, ispata konu genellemeyi doğru sayılan kimi öncüller (postulat veya ispatı verilmiş önermeler)’in mantıksal çıkarım kuralları aracılığıyla zorunlu sonucu olarak gösterme işlemidir. Ancak bu görünüm biraz aldatıcıdır. Her şey mantıksal adımlarla öncüllerden sonuca gitmekten ibaret değildir. Çoğu kez, ispatın daha ilk adımında, konuya ilişkin bilgilerden, benzer durumlardan, bilinen örnek ve deneyimlerden yararlanma yoluna gidilir. Bu tür etkinlikler doğrudan mantığa indirgenemeyen arayışlardır. Örneğin, (1)’deki genellenenin verilmiş bir ispatında ilk adımın biçim benzerliğinden esinlenen küçük bir basitleştirmeyle başladığını görmekteyiz. Gauss’tan beri şu denklem bilinmektedir:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n + 1)/2 \quad (4)$$

Şimdi bu denklemi benzerlik gösterdiği (1)’deki örnekten yararlanarak aşağıdaki formüle dönüştürebiliriz:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = [n(n + 1)/2]^2 \quad (5)$$

Kuşkusuz istersek, formülün geçerliğini n’ye değişik değerler vererek (indüktif yöntemle) yoklayabiliriz. Ama daha kesin olmak için, dedüktif düşünmenin bir türü sayılan “matematiksel indüksiyon” a başvurulabilir. Şöyle ki, n sayısına dek doğru olduğu empirik yoklamayla bilinen formülün n + 1 için doğru olup olmadığı sorulabilir. (Bu soruyu içeren matematiksel indüksiyon ilkesi şöyle tanımlanabilir: n sayısına ait bir özellik n + 1 ve 1 sayılarına da aitse, tüm sayılara ait demektir.)

Şimdi bu sorunun ışığında, (5)’deki formüle paralel olarak şunu yazabiliriz:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 \quad (6)$$

(7) R. Courant ve H. Robbins, *What is Mathematics*, s. XVII.

Bunu doğrulamaya yönelik ilk adım, (6)'dan (5)'i çıkarmak olabilir. Kalan şudur:

$$(n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 - \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \quad (7)$$

Denklemin sağ tarafını bazı dönüştürmelerle sol tarafına indirgediğimizde, eşitliğin doğru olduğunu göstermiş oluruz:

$$\begin{aligned} (n+1)^3 &= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 - \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \\ &= \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \left[(n+2)^2 - n^2 \right] \\ &= \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \left[(n^2 + 4n + 4) - n^2 \right] \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (4n+4) \\ &= (n+1)^2(n+1) \\ &= (n+1)^3 \end{aligned}$$

Ne var ki, asıl ispatı gereken (5)'deki formülün doğruluğunu henüz kesinleştirmiş değiliz. Ama bunun doğru olduğunu biliyorsak, doğruluğu kesinleşen (7)'deki denklemi ekleyerek (6)'nın doğruluğunu mantıksal olarak çıkarabiliriz. Başka bir deyişle, n'ye 1, 2, 3, 4 değerleri verildiğinde genelleme işlemsel olarak kanıtlanmış olduğundan, n = 4 için doğru olan ilişki n + 1, yani 5 için de doğru ise, matematiksel induksiyon gereği, kümedeki tüm diğer sayılar için de doğrudur. Böylece inceleme konusu ilişkiyi içeren genelleme ispatlanmış demektir.

Bu tür ispat, matematikte çok yaygın olarak başvurulacak bir yöntemdir. Hatta bu yöntemi (matematiksel induksiyonu) matematiğin ayırıcı özelliği sayan seçkin matematikçiler vardır.⁽⁸⁾

Matematik tarihi, ispatı daha sonra verilen kimi teoremlerin başlangıçta gözlem veya deneyimden kaynaklanan ya da salt tahmin veya sezgiye dayanan önermeler olarak ortaya atıldığını gösteren sayısız örneklerle doludur. Bunun çarpıcı bir örneğini, XVIII. yüzyılda Edward Waring'in, "Her pozitif sayı en çok dokuz küpün toplamı olarak yazılabilir," diye dile getirdiği induktif genellemesinin ispatının ardından 100 yıl geçtikten sonra verilmiş olmasında bulmaktayız.

(8) H. Poincaré, matematiğin mantığa indirgenemeyeceği savını, matematiksel induksiyonun mantık ilkelerine indirgenemeyeceği savına dayamaktadır.

“Empirik” gözlemlere dayalı indüksiyonun her zaman ispata elverişli genellemeler vermediğini belirtmeden geçemeyeceğiz. Aşağıdaki örnek bunu göstermektedir.

Ünlü matematikçi Pierre Fermat, 1640’ta asal sayıları tanılamak amacıyla şu formülü ortaya atmıştı:

$$2^{2^n} + 1 = \text{asal sayı}$$

(Formülde n , 1, 2, 3, ... gibi pozitif tamsayıları değer olarak alan bir değişkendir.)

Formülün uygulamasında ilk dört sayı (5, 17, 257, 65537) gerçekten asal sayılardır:

$$2^{2^1} + 1 = 5$$

$$2^{2^2} + 1 = 17$$

$$2^{2^3} + 1 = 257$$

$$2^{2^4} + 1 = 65537$$

Ne var ki, Fermat’dan yaklaşık 100 yıl sonra gelen İsviçreli matematikçi Leonhard Euler, formülün, $n = 5$ alındığında, asal sayı vermediğini gösterir:

$$2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297$$

.Gerçekten bu sayı kendisinden küçük iki sayının (6 700 417 ile 641) çarpımı olarak yazılabilir. Böylece, Fermat’nın induktif genellemesi ilk dört uygulamasındaki başarısına karşın, yanlışlanmaktan kurtulamamıştır. Aslında, Fermat’nın oluşturduğu formül, girilen tüm uygulamalarında (n ’ye verilen tüm değerler için) beklenen sonucu verseydi bile, ispatı verilmediği sürece bir tahmin ya da olası teorem (konjektür) olmaktan ileri geçmezdi.

İspat bağlamında, matematikte çok sık başvuru alan bir yöntem de, “olmayana ergi”, ya da “dolaylı ispat” denen yöntemdir.⁽⁹⁾ Olmayana ergi, matematiksel indüksiyon gibi bir dedüktif çıkarsama türüdür. Kısaca şöyle açıklayabiliriz: Yadsınması varsayımımızla açık bir çelişki oluşturan bir yargının, yadsınarak doğruluğunu kanıtlamak. Görüldüğü gibi, böyle bir kanıtlama doğrudan değil, dolaylı bir yol izlenerek sağlanmaktadır. Bunu şöyle de dile getirebiliriz: Diyelim ki, Ali dünyanın yuvarlak olduğunu, Veli ise düz olduğunu söyleyerek tartışıyorlar. Ali, “Bak, diyor, dünyanın yuvarlak olduğunu biliyorum; ama bir an için yuvarlak değil, senin iddia

(9) Teknik bağlamlarda, Latince “reductio ad absurdum” adının kısaltımı RAA geçer.

ettiğin gibi, düz olduğunu düşünelim. O zaman görüyorsun ki, ikimizin de bildiği A, B, C olaylarını yadsımanız ya da yok saymamız gerekecek. Bu olayları yok sayamayacağımıza göre, dünyanın düz olduğunu nasıl savunabiliriz?”

Matematik tarihinde “dolaylı ispat” yönteminin kullanılışı çok eskilere uzanır. Yöntemin bilinen ilk çarpıcı ve önemli uygulamasını Euclides vermiştir. Euclides, asal sayılar kümesinin sonsuz olduğu kanısındaydı. Başka bir deyişle, en büyük asal sayı diye bir nesneden söz edilemeyeceği görüşünü ispatlamak istiyordu. İspatına, asal sayıları,

$$2, 3, 5, 7, \dots, p$$

sıralayarak “p”nin, inandığının tam tersine, en büyük asal sayı olduğu sayılıyla başlar ve çıkarımı şöyle sürdürür:

Tüm asal sayıların çarpımına 1 ekleyerek q sayısını oluşturalım:

$$q = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times p) + 1$$

Şimdi, q ya asal bir sayıdır, ya da değildir. Asal bir sayı ise, p’den büyük olduğuna göre, “p en büyük asal sayıdır,” sayılıyla çelişen bir sonuç ortaya çıkmış demektir. Yok, q asal olmayan bir sayı ise, o zaman da, 1’den ve kendisinden başka en az iki asal çarpanı olması gerekir. Ancak en büyüğü p olan küme elemanlarından hiçbirisi q’nun çarpanı olamaz. Çünkü q bu elemanlardan hangisine bölünse geriye daima 1 kalır. Bu ise, 2, 3, 5, 7, ..., p dizisinin tüm asal sayıları kapsadığı sayılıyla çelişen bir sonuçtur. Öyleyse, p’nin en büyük asal sayı olduğu sayılı yanlıştır; asal sayılar kümesi sonsuzdur.

Bu bölümde dediklerimizi özetlersek, şu iki noktayı özellikle belirtmek gerekir:

- (1) Matematiksel düşünme temelde günlük ve bilimsel düşünmeden farklı değildir. Her türlü düşünmenin başta gelen amacı, doğruya ulaşmaktır. Doğruluk günlük ve bilimsel düşünmede gözlem ya da deney verilerine, matematik ile mantıkta ise ispata bağlıdır.
- (2) Matematikğin tümüyle ispata dayandığı görünümüne bakarak onu salt dedüktif bir bilim saymak yanlıştır. İspat, ispata konu bir ilişki, özellik ya da bunları içeren bir genelleme gerektirir. Öyle bir özellik veya ilişkinin bulunması ise, mantıksal bir çıkarım değil, retrodüktif türden bir düşünme işidir. Her alanda olduğu gibi, matematikte de bulma araştırmacının yaratıcı zekâ, algılama gücü, sezgi, ilgi gibi öznel yetilerine ve konuya ilişkin birikim ve deneyimlerine bağlıdır. Matematikte dedüktif düşünme kadar indüktif, retrodüktif düşünme süreçleri de önemlidir. Dedüktif mantıkla kesinlik kazanan matematik, yeni kavram ve genellemeler için yaratıcı düşünme süreçlerine muhtaçtır.

Yöntem konusunda kalın çizgilerle yaptığımız bu belirleme giriş niteliğindedir. İleriki bölümlerde verdiğimiz açıklamalar yöntem anlayışımızı içerik yönünden daha zenginleştirecektir.⁽¹⁰⁾

Matematiksel düşünmeyi açıklığa kavuşturma çabası öncelikle uğraş konusu nesneleri tanımayı gerektirmektedir. Bundan sonraki bölümde bu nesneleri ele alacağız.

(10) Bkz. IX. BÖLÜM; Ek: 7.

MATEMATİKSEL NESNELER

Sorun

Matematiğin konusu nedir? Başka bir deyişle, matematik ne tür nesnelere ilişkin bir çalışmadır?

Russell, düşün yaşamının bir döneminde, matematiği uğraş konusu belli olmayan bir çalışma olarak nitelemişti. Kuşkusuz o öyle bir nitelemeyi matematiğin soyut mantıksal yapısını çarpıcı bir dille belirtmek için yapmıştı. Yoksa herkes gibi Russell da matematiğin sayı, küme, nokta, doğru gibi birtakım nesneleri, bu nesnelere ait özellik ve ilişkileri konu aldığını biliyordu.

Aslında sorun matematiğin bir uğraş konusunun olup olmadığında, hatta bu konunun ne olduğunda değildir. Sorun, konuyu oluşturan nesnelerin ne tür nesneler olduğu üzerindeki görüş ayrılıklarında ortaya çıkmaktadır. Gerçekten sayı, ya da sayı kümeleri ne türden nesnelerdir? Sayıları taş, ağaç, su, yıldız gibi fiziksel nesnelerle bir tutabilir miyiz? Tutamazsak, nasıl bir ayırıma gidebiliriz?

Bir ilk adım olarak belki fiziksel nesneleri somut, matematiksel nesneleri soyut diye ayırabiliriz. Ama bu ayırım genellikle benimsenmiş de olsa, soyut nesnelerin kökenine ilişkin tartışmalara doyurucu bir çözüm getirmekten uzaktır. Nitekim konu üzerindeki görüş ayrılıkları bugün de sürmektedir. Kaldı ki, “soyut” diye nitelenen nesneler matematiğe özgü bir olay da değildir. Fizik dahil hemen tüm bilim dallarında bu tür nesneler söz konusudur.

Sorunu kısaca şöyle koyabiliriz: Matematiğin uğraş konusu soyut nesnelerin kaynağı nedir? Matematikçi bu nesneleri nasıl bulmaktadır?

Değişik Görüşler: Realizm, Nominalizm, Yapımcılık

Sorularımıza yanıt ararken bu konuda ileri sürülmüş çeşitli görüşler arasında geleksel olarak ön planda tartışılan üç görüşe (realizm, nominalizm, yapımcılık) değinebiliriz. Ancak daha önce, sayı ile rakam arasındaki farkı kısaca belirtmede yarar vardır. “2” rakamı ile onunla adlandırdığımız soyut nesne aynı şey değildir. Rakam yalnızca bir sözcük, bir simgedir; simgelediği nesne ise nicel bir kavramdır. “2” rakamı değişik işaretlerle, örneğin 2, II, < vb. gösterilebilir. Oysa iki kavramı tüm dillerde ve kültürlerde özdeşir. Bir çift kumru, iki el, iki ev, iki yıl gibi deyimlerin or-

tak anlamı bu kavramı oluşturmaktadır. Aşağıda değindiğimiz görüşler rakama değil, sayıya ilişkindir.

Realizm, soyut nesneleri somut nesneler gibi nesnel gerçekliğin bir parçası sayar. Platoncu realizmde sayı türünden soyut nesneler, olgusal dünya ile nedensel ilişkisi olmayan, varlığı düşüncemizden bağımsız yetkin “form” ya da “idea”lardır. Bunlara ilişkin bilgimiz algıdan değil, aklın daha önce “idealar dünyası”nda kazanmış olduğu deneyimden kaynaklanır. Örneğin, π sayısı Platonculara göre, “evrensel” bir nesne olarak sürgit var olmuştur. Matematikçinin onu bilmesi bir gözlem ya da araştırmanın sonucu değil, bir çağrışım, hatırlama ya da iç-kavrayışın sonucudur. Platonculuktan ayrılan modern realizmde sayı, bir tür “gözlem”le doğada bulduğumuz, varlığı bizden bağımsız bir nesnedir. Matematikçinin onu buluşu yeni bir böcek türünü keşfeden biyoloğun yaptığı türden bir iştir.⁽¹⁾ Örneğimizdeki π sayısı, dairenin çemberi ile çapı arasında algılanan değişmez ilişkiyi belirleyen sayıdır; yoksa, salt düşünce ürünü bir kavram ya da isteğe göre oluşturulmuş bir simge değildir.

Matematikte realizmi paylaşılanlar arasında G. H. Hardy ve Kurt Gödel gibi seçkin matematikçiler de vardır. Bunlara göre, matematik gerçek dünyadan uzak soyut görünümüne karşın, temelde doğa bilimlerinden farksızdır; onun da algıladığımız nesneleri, nesnel gerçekliği vardır.⁽²⁾

Nominalizm, soyut nesneleri gerçeklikten yoksun birer isim ya da düpedüz sözcük sayan görüş. Nominalizm, Platoncu ontolojiye bir tepki olarak ortaya çıkmıştır. Nominalist için evren yalnızca tikel somut nesnelerden oluşmuştur; soyut ya da “evrensel” denen nesneler yoktur. Örneğin, 5 diye bir nesne yoktur; 5 parmak, 5 ev, 5 koyun vardır. Oysa realistin gözünde, sözünü ettiğimiz tikel somut nesneler “evrensel” (ya da genel) 5’in gözlemlenen birer örneğidir. Somut, soyut ayrımı gerçekte tikel, tümel ayırımından başka bir şey değildir.

Kimi empiristler de soyut nesneleri var saymaktan kaçınır, elden geldikince onlardan söz etmezler. Bu bakımdan onları realistlerden çok nominalistlere yakın gö-

(1) Russell realist döneminde bu görüşü son derece açık bir dille ortaya koymuştur: “Aritmetik, Kolomb’un Amerika’yı keşfi anlamında bir keşiftir. O nasıl kızılderilileri yaratmadıysa, biz de sayıları yaratmış değiliz. ... Bir şey varolduğu için düşünülebilir; varolma düşünülmüş olmanın sonucu değil, ön-konşuludur.” (B. Russell, “Is Position in Space and Time Absolute or Relative?”, *Mind*X, 1901).

(2) Hardy, Platon’dan günümüze değin pek çok ünlü filozofla paylaştığını söylediği görüşünü şöyle belirtmektedir: “Benim için ve kanımca matematikçilerin büyük çoğunluğu için, ‘matematiksel realite’ diyebileceğim bir gerçeklik vardır. ... Matematikçi olarak işlevimizin dışımızda varolan bu gerçekliği keşfetmek olduğuna inanıyorum. İspatladığımız ve de övünerek ‘yaratıklarımız’ diye kendimize mal ettiğimiz teoremler aslında gözlemler bulduğumuz nesnelerdir.” (G. H. Hardy, *A Mathematician’s Apology*, s. 123) Hardy gibi Gödel de matematiksel nesnelerin algılandığı savındadır: “Matematiksel sezgi türünden algılamayı duyuşsal algılamadan daha az güvenilir saymak için hiçbir neden görmüyorum. ... Set-kuramsal paradoksların matematik için yarattığı sıkıntının duyuşsal yanılgıların fizik için yarattığı sıkıntıdan daha fazla olduğu söylenemez. Matematiksel sezgi verilerini, duyu organlarımızla ulaştığımız nesnelere ilişkin değildir diye, Kant’ın ileri sürdüğü gibi, salt öznel saymak yanlıştır. Tam tersine bu verileri de nesnel dünyanın bir parçası sayabiliriz.” (K. Gödel, “What is Cantor’s Continuum Problem?”, *Philosophy of Mathematics*, Benacerraf and Putnam [ed.], 2. Baskı, s. 271.)

rebiliriz. Nominalistler gibi onlar da matematiği içerikten yoksun, salt mantıksal bir sistem sayma eğilimindedirler. Onlara bakılırsa, matematikçi sayı, küme, fonksiyon türünden nesne ve ilişkilerle değil, belli formel kurallar çerçevesinde birtakım simge ve formüllerle uğraşan biridir. Örneğin, günümüzde bu görüşü temsil eden Benacerraf, sayılara nesne gözüyle bakmamaktadır. Ona göre, matematiğin gerçekten konusu yoktur; bu nedenle de matematiği bilim saymak yanlıştır.

Nominalizm, metafizikten kaçınanlar için taşıdığı tüm çekiciliğe karşın, yetersiz, dahası yüzeysel bir öğreti olmaktan ileri geçmemiştir. Öyle ki, bu görüşe uyulursa, ne matematikte ne de empirik bilimlerde ilerlemeye olanak kalmaz; çünkü matematikte soyut nesnelerden, bilimde ise kuramsal nesnelerden söz etmeksizin ilerlemek şöyle dursun, konuşmak bile olanaksızdır.⁽³⁾

Oysa, Platoncu ontolojiye düşme korkusu soyut nesneleri yadsımak için zorlayıcı bir neden olmamalıdır. Soyut nesneleri kavram olarak kullanmak, Platoncu ontolojiye düşmeyi gerektirmediği gibi, empirist yaklaşıma da aykırı değildir.

Yapımcılık, birbirine tümüyle ters düşen realizm ile nominalizm arasında yer alan görüş. Yapımcılık açısından soyut nesneler ne realistlerin savundukları gibi bizden bağımsız, doğada (ya da “idealar” dünyasında) var olan nesnelerdir; ne de nominalistlerin ileri sürdükleri gibi yalnızca birer isimden ibarettir. Soyut nesneler insan zekâsının çevreyle olan sürekli etkileşimi içinde oluşturduğu betimleyici ya da açıklayıcı kavramlardır. Tüm kavramlar gibi matematiksel kavramların da kökeni empirik yaşantımızdadır. Örneğin, sayı yaşantımıza giren çokluk ve büyüklükleri belirleme aracı olarak oluşturulmuştur. Pozitif tamsayıları alalım: Bunların en ilkel işlevi sayma sürecinde kendini göstermektedir. Bunları ne doğada gözlemlediğimiz savını doğrulayan bir kanıt verilebilmiştir, ne de içeriksiz sözcükler saymak için getirilen açıklamalar doyurucu olmuştur. Doğada sayılar değil, sayılabilen çokluklar vardır. (Çevremizdeki çoklukları saymak, büyüklükleri (örneğin, ağırlık, uzunluk, alan, vb.) ölçmek ihtiyacı insanoğlunu nicel kavramlar oluşturmaya zorlamıştır. Sayılar, sayılabilen nesneler üzerinde yürütülen sayma işleminin bir ürünüdür.⁽⁴⁾ Bu

(3) Son yıllarda *Science Without Numbers* yapıtıyla dikkatleri üzerine çeken Hartry Field, soyut nesnelerle kuramsal nesneler arasında bir ayırım yaparak, kuramsal nesneleri bilim için vazgeçilmez sayarken soyut nesneleri var saymanın ne bilim ne de matematik için gerekli olmadığını savunmaktadır.

(4) Önceliğin sayma sürecinde mi, yoksa sayı kavramında mı olduğu tartışmalı bir konudur. Ünlü psikolog Piaget çocukların sayma kavramı henüz oluşmadan sayabildiklerini göstermiştir. Öte yandan sayma bir çokluğun (örneğin kümesteki tavukların) kaç tane olduğunu belirlemek ise, o zaman, sayma sayı kavramını içeriyor demektir. Nitekim kimi matematikçilerin bu görüşte olduğunu görmekteyiz. Tobias Dantzig, örneğin, en ilkel insanlarda bile “sayı duygusu” dediği bir yetinin varlığından söz etmektedir. Bu duyuyu, bireyin kendi bilgisi dışında, küçük bir çokluktan bir nesnenin alınması ya da o çokluğa bir nesnenin eklenmesi halinde oluşan değişikliği fark etmesi biçiminde kendini açığa vurur. Sayma daha karmaşık zihinsel bir süreç içerir ve sayı duyusuna dayanır. Dantzig’e göre, sayma insana özgü bir işlemdir; oysa bazı hayvanlarda, bu arada kimi kuşlarda sayı duyusunun olduğu söylenebilir. Dantzig savını destekleyen birtakım gözlemleri ortaya koymaktadır. Örneğin, yuvasındaki dört yumurtadan biri alındığında kuşun tedirginlik içine düştüğü, ikisi alındığında yuvasını terk ettiği olayı. Daha çarpıcı ve ilginç bir gözlem de şu: Bir çiftlik sahibi, çiftliğinin gözetleme kulesinde yuva kuran kargayı yakalama peşine düşer.

açıdan bakıldığında matematik bir dil, bir belirleme aracı görünümündedir; insanın etkileşim içinde olduğu çevresini nicel yanlarıyla belirlemek ve anlamak için oluşturulmuş bir dil!

Einstein, Frege, Popper

Gerçekten, matematiksel nesnelerin empirik kökeni, sayma ve ölçme gibi işlemler düzeyinde daha belirgindir. Cebir, analiz ve analitik geometri gibi aritmetik üstü çalışma düzeylerinde empirik dünya ile olan ilişki giderek gözden kaybolmakta, bunun yerine kendi içinde yeterli, ya da gelişim hızını kendi iç gerilim, uyum ve bütünlük arayışlarından alan soyut ve genel bir kavramlar ve ilkeler örüntüsü ortaya çıkmaktadır. Üst düzeyde matematiğin soyut ve simgesel yapısına bakarak onu, insan zekâsının hiçbir koşula bağlı olmaksızın özgürce yarattığı bir dizge sayanlar vardır. Matematiğin oluşumunu empirik dünyadan tümüyle koparan bu görüşü ilk kez tanınmış matematikçi Dedekind dile getirmiş, daha sonra Einstein çarpıcı bir biçimde ortaya koymuştur. Einstein, Aristoteles'ten günümüze değin giderek yaygınlık kazanan bir görüşe, matematiksel nesneleri doğadan elde edilen soyutlamalar sayan görüşe karşı çıkarak şöyle demektedir:

Düşüncemizde ve dilsel anlatımlarımızda ortaya çıkan kavramlar, mantıksal açıdan bakıldığında, tümüyle duyuşal yaşantımızdan induksiyonla ulaşılması olanaksız, düşüncenin özgürce yarattığı nesnelerdir. ... Bu kavramların deneyimlerimizden soyutlama yoluyla (empirik içeriklerinden arındırılarak) oluşturulduğu gibi yanlış bir öğretinin yaygınlık kazanması bir talihsizliktir.⁽⁵⁾

Einstein'a karşın, Aristoteles'in görüşünü tümüyle dayanaksız saymak güçtür. Örneğin, π ve e değişmezlerine bakalım: π yarıçapı 1 olan bir dairenin alanı, e ise doğal logaritmanın tabanı olarak alındığında π ve e 'ye, Aristoteles'in ileri sürdüğü gibi bir soyutlama diyebiliriz. Öte yandan Einstein'ı haklı gösteren örnekler de vardır. Örneğin e^π için doğadan bir soyutlama diyebilir miyiz? Aynı şekilde, $x^2 + 1 = 0$

Adamın kuleye her girişinde karga yuvadan ayrılır, karşıdaki ağaçtan adamın uzaklaşmasını bekler. Toprak sahibi kargayı aldatmak için kuleye bir arkadaşıyla girer, biraz sonra biri dışarı çıkar, öbürü içerde bekler; ama karga aldanmaz, öbürünün de dışarı çıkmasını bekler. Bunun üzerine ertesi gün kuleye üç kişi girer, ikisi dışarı çıkar; karga gene aldanmaz. Adam dört kişilik grupla da sonuç alamayınca, beş kişilik bir grupla denemesini sürdürür. Dörde kadar çoklukların sayısını algılayan kargamız, çokluk beşe çıkınca ipin ucunu kaçıır; kuleye giren beş kişiden dördünün ayrılmasıyla yuvaya döner ve yakalanır. (T. Dantzig, *Number: The Language of Science*, s. 2-4.)

- (5) A. Einstein, "Remarks on Bertrand Russell's Theory of Knowledge," *The Philosophy of Bertrand Russell*, P. A. Schilpp (Ed.), 1951, s. 287. Russell verdiği yanıtta, Einstein'ın savını doğru da yanlış da sayabileceğimizi söyleyerek kendi görüşünü şöyle belirtmektedir: "Sayı kavramını oluşturmada deneylerimizin etkisi yadsınamaz. Ondalık sistemle on parmağımızın ilişkisi bunun en somut kanıtıdır. Tümüyle bir gaz kitlesi olan güneş üzerinde insana benzer zeki yaratıklar yaşadığını bir an için düşünelim; onların ne sayılabilir nesne ne de sayı kavramı vardır. Bir tür matematikleri olsa bile bu aritmetiğe değil, olsa olsa topolojiye dayanan bir matematik olurdu." Aynı kaynak, s. 697.

denkleminde çözüm getiren $i = \sqrt{-1}$ sanal sayısının doğadan bir soyutlama olduğu kolayca söylenebilir mi?

Öte yandan Dedekind’le aynı dönemde yaşamış başka ünlü bir matematikçi, Gottlob Frege, realist bir açıdan hem nominalizme, hem de Einstein’ın dile getirdiği türden yapıcılığa karşı çıkmaktadır. Ona göre, içeriği ve anlamı olmayan bir simge sıradan bir işaretler ve bu tür anlamsız işaretlerle bir aritmetik sistem kurmaya olanak yoktur; olsa olsa simgesel bir oyun oluşturulabilir. Frege, belirttik bir dille matematiğin tüm diğer kavramları gibi sayıların da keşfedildiğini söylemektedir. Matematikçilerin sayıları tanımlamayla oluşturduğu düşüncesini reddederek şöyle demektedir:

Nasıl ki coğrafyacı, “sınırlarını çizgilerle gösterdiğim şu alana ‘Sarı Deniz’ adını veriyorum” dediğinde bir deniz yaratmıyorsa, matematikçi de tanımlama becerisiyle herhangi bir şey yaratmaz. ... Kâğıt üstüne çizilmiş küçük çembersel bir şekile, 1’e eklendiğinde 1 veren özelliğini tanımlamayla kazandığımız savını, bilimsellik görünümü altında ‘batıl inanç’ sayıyorum. O şekil ‘sıfır’ adını almadan önce, öyle bir özelliği taşıyan bir, yalnızca bir nesnenin var olduğunu ortaya koymamız gerekir. Bu nedenle ne sıfırı, ne de herhangi başka bir sayıyı yaratmaya olanak yoktur.⁽⁶⁾

Buna karşı akla hemen şu soru gelmektedir: Bir sayının bizden bağımsız varlığını nasıl saptayabiliriz? “Sıfır” dediğimiz nesneyi kendi dışımızda nasıl, nerde keşfettik? Bilim adamlarının oksijeni, canlı hücreyi, ya da Neptün gezegenini nasıl bulduklarını biliyoruz. Ama hiçbir matematik tarihi, sıfırın ya da π sayısının benzer bir yöntemle (gözlem ya da deneyle) bulunduğunu yazmamaktadır. Bu tür nesneler insan zekâsının çevreyle ilişki ve etkileşimi içinde oluşan kavramlardır. Sıfır sayısı ne gözlemle bulduğumuz, ne de Einstein’ın dediği gibi, düşüncenin özgürce yarattığı bir nesnedir. Sıfır, içinde yer aldığı sayı dizgesinin iç zorunluğu altında uyum arayan insan zekâsının bir ürünüdür. Matematikçi “sıfır” denilen nesneyi, araştırma sürecinde, daha önce oluşturulmuş sayısal ilişkilerin bir gereği olarak ortaya koynuştur.

Hem nominalizme hem de Frege’nin realizmine karşı çıkan bir başka görüşe daha tanık olmaktayız. Buna göre, sayılar ne kâğıt üstüne yazılan simgelerden ibarettir, ne de Frege’nin ileri sürdüğü gibi, bizim dışımızda keşfedebileceğimiz nesnel varlıklardır. Sayılar, kullanım ve uygulamaya soktuğumuz simgelerin bu süreçte kazandığı niteliktir. Wittgenstein’dan kaynaklanan bu görüşü Waismann şöyle açıklamaktadır:

n birimden oluşan bir sayı sistemi ($i_1, i_2, \dots, i_n$) ile sistemdeki sayılarla hesaplama yapmaya olanak veren birtakım kurallar oluşturduğumuzu düşünelim. Şimdi soralım: Bu sayılar nesnel olarak var mıdır, yok mudur?

Frege’nin yanıtı bildiğimiz gibi olumsuzdur. Onun gözünde oluşturulan bu şeylere “sayı” diyemeyiz. Bunlar olsa olsa gerçek nesneleri temsil etmeyen anlamsız simgelerdir. Bu simgelerle kurulan sistem tümüyle bir oyun olmaktan ileri geçmez.

Ne var ki, bu sistemin belli problemleri çözmede yararlı ve verimli olduğunu görür-

(6) F. Frege, *Basic Laws of Arithmetic*, Vol. I, s. XIII.

sek onu oluşturan nesneleri gene gerçekte yok mu sayacağız? Hiçbir matematikçi böyle davranamaz. Nitekim negatif ve irrasyonel sayılar bu şekilde oluşturulmuştur. Aynı şekilde, sanal sayıların, Hamilton'un ortaya attığı quaternionların, Veronese'nin "aktüel-sonsuz küçükler" dediği sayıların ortaya çıkması böyle olmuştur. Bunların hepsi büyük yararlılıkları görülmeden önce bir oyunun elemanları olmaktan başka bir şey değildi. Var olmanın ölçütü uygulama ve kullanışlılıktır. Örneğin, sanal sayılar, $x^2 + 1 = 0$ denkleminin çözüm getirmekle kendilerini kanıtladılar.

Ancak bu demek değildir ki, çözülmemiş herhangi bir problemten kurtulmak için istediğimiz her zaman sayı oluşturabiliriz. Hayır, buna olanak yoktur. $x^2 + 1 = 0$ denkleminin çözümünde sayı ülkesini genişletmeye olanak vardı; oysa, örneğin, $1x = 2$ problemi böyle bir genişletmeye elvermemiştir. Genişleme olanağı matematiğin kendi mantık ya da yasalarına bağlıdır. Yaratma gelişigüzel, isteğe bağlı olamaz; yaratma olanağı sınırlıdır. Genişlemeye olanak bulunduğu, başlangıçta salt simge olarak görünen şeyler, kullanım ve uygulamalarla anlam kazanır. Frege'nin düşüncesinin tersine, anlam kullanım ve uygulamadan bağımsız değildir.⁽⁷⁾

Tartışma konusu soruna ışık tutması bakımından Karl Popper'in "Üç Dünya" kuramına kısaca değinmekte yarar var.⁽⁸⁾

Popper üç dünya ayırt etmektedir: Birinci Dünya, doğal çevremizi oluşturan nesne ve olguları; İkinci Dünya, insanın duyma, düşünme, bilgi edinme, değerlendirme, karar verme gibi öznel süreçleri; Üçüncü Dünya, insanın İkinci Dünya'da oluşturup açığa vurduğu, ama giderek nesnel ve özerk kimlik kazanan kültürel yapıt ve süreçleri kapsamaktadır. Matematik (bilim, din, dil, sanat, felsefe, vb. ile birlikte) Üçüncü Dünya'nın bir parçasıdır. Bu dünyanın en önemli özelliği, İkinci Dünya'dan kaynaklanmasına karşın, öznel yaşamdan bağımsız, nesnel ve özerk olmasıdır.

Popper'a göre, her alanda ilerleme (hatta doğadaki evrim bile) temel bir problem çözme sürecidir. İnsan problemlerini çözme çabasında biyolojik donatımına ek olarak "kültürel" dediğimiz araçlar, düzenek ve yapıtlar oluşturmuştur.

Popper, tüm kültürel nesne ve süreçler gibi, matematiğin, bu arada doğal sayılar dizgesinin insan tarafından oluşturulduğu görüşünü Brouwer ve diğer sezgicilerle paylaşmaktadır. Ancak, sezgicilerden farklı olarak o, kültürel yapıtları İkinci Dünya süreçlerini etkileyen, dolayısıyla yeni sorunlara ve çözüm arayışlarına yol açan nesnel ve özerk bir yaşam devinimi içinde görmektedir. Doğada olduğu gibi matematikte de kimi kez üstesinden gelemediğimiz güçlükler, kendi başına egemen olgular vardır. Örneğin, Goldbach konjektürü türünden problemlerin varlığı, insan zekâsının ürünü olan matematiğin nesnel ve özerk varlığını göstermektedir.⁽⁹⁾ Matematiksel nesneler ve bu nesnelerin özellik ve ilişkilerinden kaynaklanan problemler Üçüncü Dünya'nın öğeleridir. Frege ve onu izleyen realistler, matematiksel iliş-

(7) F. Waismann, *Introduction to Mathematical Thinking*, s. 12-14.

(8) Bkz. K. R. Popper, *Objective Knowledge*, Oxford, 1972, s. 115-119.

(9) Golbach konjektürü, "Her çift sayının iki asal sayının toplamı olarak yazılabileceği" genellemesini dile getirmektedir. Bugüne değin tüm yoklamaların doğruladığı bu önermenin matematiksel ispatı henüz verilememiştir.

ki, nesne ve problemleri Birinci Dünya'ya ya da ona benzer başka bir dünyaya (örneğin, "idealar dünyası"na); Dedekind ve Einstein gibi düşünürler ise İkinci Dünya'ya maletmektedirler. Popper'ın üç dünya kuramı bu görüşlerin sağduyuya da aykırı gelen tek yanlı yorumlarına ışık tutmakla kalmamakta, matematiksel nesnelerin köken ve kimliklerini doğru anlamamızı da sağlamaktadır.⁽¹⁰⁾

Sayının Tanımı

Sayının açık ve yeterli bir tanımını vermek antik Yunan'dan günümüze değin düşünürleri uğraştıran bir konudur. Platon, daha önce de değindiğimiz gibi, sayıları "idea" dediği yetkin formlardan, Aristoteles ise doğaya dayalı soyutlamalardan sayıyordu.⁽¹¹⁾ XIX. yüzyılın sonlarından başlayarak sayıların küme kavramına indirgenebileceği tezi yaygınlık kazanır. Kümeler kuramının ortaya çıkmasıyla başlayan bu girişimin, içerdiği kimi güçlüklerden ötürü, tümüyle başarılı olduğu söylenemez. Russell'in sayıyı, "benzer kümelerin kümesi" diye tanımlaması ilginç olmakla birlikte yalın ve açık olmaktan uzaktır. Buna göre, örneğin, 2'yi "tüm çiftlerin kümesi" diye tanımlamak gerekir. Ancak, "çiftler" sözcüğünden ne anlıyoruz? Sözcüğün kapsamında yalnızca fiziksel nesneleri mi düşünüyoruz? Yoksa, tasavvur edilebilecek her türden çift nesneler mi söz konusudur? "Çiftler" sözcüğüyle demek istenen bu sonuncu ise (ki, öyle olması akla daha yakındır), o zaman isteğe göre çiftler alabildiğine çoğaltılabilir, herkesin kendine göre bir 2 kavramı olur. Kaldı ki, küme kavramının sayı kavramından daha basit ya da daha açık olduğu kuşku götürür. Nitekim Russell da daha sonra bu kuşkuyu dile getirmekten geri kalmamıştır.⁽¹²⁾ Russell'in verdiği tanımın istenilen açıklığı sağladığı söylenemezse, sayıyı indirgeyebileceğimiz daha basit ya da ilkel terim bulunabilir mi? Soruya henüz doyurucu bir yanıtın verildiğini bilmiyoruz.

Filozofları uğraştıran tanım sorunu, neyse ki, matematikçiler için önemli bir güçlük değildir. Tanınmış bir matematikçinin bu konuda söyledikleri ilginçtir:

Verilen tanımların hiçbiri tümüyle doyurucu olmadığına göre, biz matematikçiler, "Sayı nedir?" sorusuna basit ve doğrudan bir yanıt vermeksizin de işimizi görürüz. Belki de sayıyı kabaca para gibi bir değiş-tokuş aracı sayabiliriz. Pek çok kimse için önemli olan ihtiyaç duydukları eşya ve hizmetlerdir; para yalnızca bunları temsil eden bir simgedir; ancak anlamsız bir simge değil! Paranın kullanılmadığı, mal ya da eşyanın takas edildiği trampa yönteminin karmaşık bir toplum düzeninde sıkıntıları bir yana, kullanış olanağı bile yoktur. Matematiği, "Benim parmaklarım senin kulakların-

(10) İlginçtir, "üç dünya" kuramının önündeki düşüncüyü Popper'dan en az yarım yüzyıl önce Alman fizik bilgini Heinrich Hertz'in dile getirdiğini görüyoruz: "Matematiksel formüllerin bağımsız bir varlığa, kendilerine özgü bir anlığa sahip olduğu, görmezlikten gelemeyeceğimiz bir duygudur içimizde. Öyle ki, koyduğumuzdan daha fazlasını bize veren bu nesnelerin bizden, kendilerini oluşturan kafalardan, daha akıllı olduğunu düşünmemek elde değildir. (Bkz. M. J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, s. 250.)

(11) Aristoteles'e göre, Platon matematiksel nesneleri düpedüz "idea"lar dünyasına değil, o dünya ile duyu verileri arası bir yere oturtmuştur.

(12) Bkz. B. Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*, s. 2.

dan fazladır,” türünden önermelere indirgeyen bir sistemi tasavvur etmek bile yersizdir. Sayılar birer simgedir, son derece ilginç ve vazgeçilmez birer simge!⁽¹³⁾

Sayı Kümeleri

Sayının empirik kökenine ilişkin söylediklerimizi değişik sayı kümelerinin oluşumuna da genelleleyebiliriz. XIX. yüzyılın son çeyreğinde tanınmış matematikçi Kronecker, belleklerden silinmeyen şu sözleri söylemişti: “Tanrı tamsayıları yarattı, gerisi insanoğlunun eseridir.” Bununla ne demek istemiştir Kronecker? Tüm diğer sayı kümelerinin bildiğimiz doğal sayılara indirgenebileceğini (ya da doğal sayılardan türetilebileceğini) mi; yoksa, tamsayılar dışında kalan sayıların yapay veya isteğe bağlı olarak oluşturulduğunu mu? Aslında onun bu cümleyle ne anlatmak istediği yeterince açık değildir. Kronecker’ın tamsayılarla diğer sayıları neden böylesine çarpıcı bir dille ayırma yoluna gittiği üzerinde çeşitli yorumlar yapılabilir elbet. Ama önemli olan, birtakım pratik ve kuramsal gereksinmelerin baskısı doğrultusunda sayı sisteminin giderek nasıl dallanıp açıldığını göstermektir. Tamsayıların bir bölümünü oluşturan doğal (ya da pozitif tam) sayıların sayma sürecinin bir ürünü olduğuna yukarda değinmiştik. Peki, tamsayıların diğer bölümünü oluşturan negatif tamsayılar için ne diyeceğiz? Bunların sayma ihtiyacından doğduğunu söylemek güç. Ancak iş ve ticaret yaşamında alacak ve borç hesaplarının insanoğlunu negatif sayı kavramına götürdüğü söylenebilir. Aynı şekilde, kesirli sayıların da yaşantıdan kaynaklandığı ileri sürülebilir: Uzunluk, ağırlık, alan, vb. büyüklüklerin ölçümü çoğu kez tamsayılarla yeteri doğrulukla belirlenememekte, sayıların alt bölümlerine başvurmaya gerektirmektedir. Böylece tamsayılarla kesirli sayıları kapsayan daha geniş bir sayı kümesi, rasyonel sayı kümesi oluşur. Ne var ki, rasyonel sayılar ortak ölçülü büyüklükleri belirlemeye yetmekte, ancak karenin kenarı ile köşegeninin mukayesesinde örneğini gördüğümüz ortak ölçüsüz büyüklükleri belirleme söz konusu olduğunda yetersiz kalmaktadır. Örneğin, π , $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{9}$ gibi sayıları rasyonel sayıyamayız; çünkü bu tür sayıları herhangi iki tamsayının bölümü olarak yazmaya olanak yoktur. Ayrı bir küme oluşturan bu tür sayılara “irrasyonel sayılar” denmiştir. İrrasyonel sayıların katılmasıyla daha kapsamlı bir sayı kümesi (rasyonel ve irrasyonel sayıları içine alan) gerçel (reel) sayılar kümesine ulaşmış oluyoruz. Ancak, açılma burada kalmamaktadır. Kimi matematiksel problemler, örneğin, toplamları 10, çarpımları 40 olan iki sayıyı bulma veya daha önce değindiğimiz gibi, $x^2 + 1 = 0$ denkleminin çözüm getirme çabası matematikçileri, başlangıçta bir türlü benimseyemedikleri, dahası düpedüz olanaksız saydıkları, yeni bir sayı kümesini $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, vb. negatif sayıların kareköküyle gösterilen “sanal sayılar” kümesini oluşturmaya itmiştir.

Sayı sistemlerindeki açılmanın nerede duracağı belli değildir. Nitekim gerçel bir sayı ile salt sanal bir sayının cebirsel toplamı (ki, $a + bi$ biçimini almakta) ger-

(13) E. C. Titchmarsh, *Mathematics for the General Reader*, s. 18-19.

çel sayılar kümesinden daha kapsamlı “karmaşık sayılar” kümesinin oluşumuna yol açmıştır.⁽¹⁴⁾

Sonuç olarak diyebiliriz ki, çevre ile etkileşimden ya da sistemin zamanla su yüzüne vuran kendi iç yetersizliğinden kaynaklanan her açılma, bir pekiştirme döneminden sonra yeni bir açılmanın koşullarını taşır. Her alanda olduğu gibi, matematikte de ilerleme “açılma” ve “pekiştirme” diye adlandırdığımız iki evreli bir süreç görünümündedir. Matematikğin ileri düzeylerinde yeni açılmaların daha çok sistemin iç geriliminden kaynaklandığı söylenebilir. Bu bize, aynı zamanda, matematikğin neden giderek daha soyut bir kimlik kazandığının açıklamasını da vermektedir.⁽¹⁵⁾

(14) $a+bi$ ifadesinde a ile b gerçel sayıları, i ise -1 'in kare kökünü ($i = \sqrt{-1}$) temsil etmektedir.

(15) Matematiksel nesnelere ilişkin benzer bir yaklaşım için bkz. Ek: 6.

MATEMATİKSEL KESİNLİK

Matematikte, doğa bilimleri dahil entelektüel çalışmaların hiçbirinde erişilemeyen bir kesinlik olduğu geleneksel ve yaygın bir kanıdır. Günlük yaşamda bile bir görüş ya da savın kesin doğruluğunu vurgulamak için, “Bu iki kere ikinin dört ettiği kadar kesindir,” ifadesinin sık sık kullanıldığını biliyoruz.

Matematiğe özgü sayılan bu söylentisel kesinliğin niteliği ve kökeni nedir? Bu soruyu yanıtlamaya yönelik tartışmaların matematiği doğru yorumlamamız bakımından önemi vardır. İşte bu konudaki çeşitli görüşleri gözden geçirmekle başlayacağız.

Klasik Görüş

Kökeni antik çağa ulaşan klasik görüşe göre, matematiksel kesinlik matematik önermelerin bir özelliğinden, “apaçıklık” özelliğinden kaynaklanmaktadır. Örneğin, $2 + 5 = 7$ önermesi apaçık doğrudur. Bu tür doğruları ne olgusal, ne de başka bir yoldan temellendirme gereği vardır; sezgi ya da salt aklımızla doğrudan kavrarız.

XIX. yüzyıla gelinceye dek egemenliğini sürdüren bu görüş, kimi gözlem ve gelişmeler karşısında geçerliğini büyük ölçüde yitirmiştir. Bir kez, matematiğin önermeleri arasında doğruluğu apaçık olması şöyle dursun, doğru olup olmadığı belli olmayan pek çok önerme gösterilebilir. Euclides’in 5. postulatı, Fermat’ın son teoremi ve Goldbach konjektürü akla hemen gelen örneklerdir. Dahası, çok iyi bilinen üçgenlerin iç açılarının toplamına ilişkin teoremin doğruluğu için bile apaçık diyebilir miyiz? Sonra Euclides-dışı geometrilerin ortaya çıkışı, daha önce apaçık kabul edilen kimi aksiyom, postulat ve teoremlerin doğru olmadığını göstermiştir. Kaldı ki, sezgimizin her zaman güvenilir olmadığı, bize ilk bakışta mutlak doğru görünen bazı yargı ve savların aslında yanlış olduğu deneylerimizle bildiğimiz bir olaydır. Üstelik, apaçıklık kişilerin deneyim ve birikimlerine bağlı bir özelliktir: Birine apaçık doğru gelen bir önerme bir başkası için kuşku konusu olabilir. Apaçıklığın herkesi bağlayan nesnel ölçütleri yoktur.

Özünde rasyonalist olan klasik görüşe ilk tepki Leibniz ve daha sonra Hume’de dile gelen bir ayırımdan kaynaklanmıştır. Buna göre, doğruluğu zorunlu olan önermeler analitik, doğruluğu gözlem verilerine bağlı olan önermeler sentetik niteliktedir. Mantık ile matematiğin önermeleri birinci gruba, empirik bilimlerin önermele-

ri ikinci gruba girer. Örneğin, bir şey A ise o şey A'dır, ya da $2 + 2 = 4$ gibi önermelerde bulduğumuz kesinlik onların biçimine bağlıdır. Gerçekten, $2 + 2 = 4$ önermesi, A A'dır demenin ötesinde bir şey söylememektedir. Doğruluğu *a priori* bilinen (yani gözlem veya deney öncesi bilinen) bu tür önermeler yanlıılanamaz. Matematiksel önermelerin kesin doğruluğu, ne bu önermelerin metafiziksel bir gerçekliğı dile getirmelerinde, ne de, yanılmaz bir sezgi ya da aklın katıksız ürünü olmalarında aranmalıdır. Bu kesinlik o tür önermelerin tanımsal yapısından kaynaklanan bir kesinliktir.

Ancak bu ayırım da birbirinden farklı iki tepkiye yol açmaktan geri kalmamıştır. Bunlardan ilkinı ortaya koyan Kant, matematiksel önermelerin analitik değıl, zorunlu sentetik olduğunu ileri sürmüş; ikincisini temsil eden J. S. Mill ise matematik önermeleri ne analitik, ne de zorunlu saymıştır. Mill'e göre, olgusal içerikli tüm önermeler gibi matematiğın önermeleri de sentetiktir.

Önce Kant'ın tepkisini gözden geçirelim.

Hume'ın analitik-sentetik ayırımını mantık ve empirik bilimler için geçerli sayan Kant, matematik için geçersiz sayar. Ona göre, analitik doğruların yetkin örnekleri mantıksal önermelerdir; bunları anlamak doğruluklarını kabul etmek için yeterlidir. Empirik bilimleri oluşturan sentetik önermelere gelince, bunların doğrulukları zorunlu değıl, olguya bağlıdır. Kant bunları, "sentetik *a posteriori*" diye niteler. Oysa aşağıdaki örneklerden de görüleceğı gibi, hiç değılse bazı matematik önermeler ne analitik, ne de sentetiktir:

- Bütün tüm parçalarının toplamıdır.
- Paralel doğrular asla birleşmez.
- Asal sayılar sonsuzdur (ya da, en büyük asal sayı yoktur).
- $5 + 7 = 12$.

Kant'a göre, doğrulukları zorunlu, ama aynı zamanda sentetik olan bu tür önermeleri sentetik *a priori* saymalıyız.

Görülüyor ki, Kant uzlaştııcı bir yol izleyerek matematiğın tümüyle ne mantığa, ne de deneyimize indirgenebileceğini söylemektedir. Ancak Kant'ın matematiksel önermeleri sentetik *a priori* sayması nasıl açıklanabilir? Daha doğrusu, Kant'ın kendisi bu savını nasıl temellendirmiştir? Nasıl oluyor da sentetik (yani, olgusal içerikli) kimi önermeler, aynı zamanda, doğruluğu *a priori* bilinen önermeler olabiliyor?

Kant'ın getirdiğı açıklama zihinsel yapımıza ilişkin öğretilerine dayanmaktadır. Buna göre, matematiksel önermeler gerçek dünyayı olduğu gibi değıl, aklımızın kavlıplarında algıladığımız biçimde dile getirmektedir. Başka bir deyişle, matematiksel zorunluk dış dünyayı belli bir biçimde, uzay sezgimizin belirlediğı biçimde, algılamamızdan kaynaklanmaktadır. Dış dünyayı algıladığımız biçimde algılamayı, düzenleyici uzay sezgimize borçluyuz. Algı konusu nesne ve ilişkiler geometriye uygun düşer, çünkü geometrinin kendisi uzay sezgimizin bir belirlemesidir. İşte bu nedenle, geometri sentetik olmasına karşın *a priori* bir bilimdir. (Kant'ın uzay kav-

ramı matematiğin kesinliği yönünden önemlidir. Ona göre uzay, deneyimlerden soyutlama yoluyla ulaştığımız empirik bir kavram değil, tam tersine, empirik dünyaya ilişkin deneyimlerimizin ön koşuludur.)

Kant'ın bu açıklamasının (matematiksel kesinliği zihinsel donatıımıza bağlayan görüşün) doyurucu olup olmadığı tartışma konusudur. Ancak matematik felsefesindeki büyük gelişmeler karşısında sentetik *a priori* öğretisinin fazla bir ağırlık taşıdığını söylemek artık çok güçtür. Özellikle Euclides-dışı geometrilerin ortaya çıkması Kant'ın matematiksel kesinliğe ilişkin tezini temelden sarsmıştır.

J. S. Mill'in savunduğu klasik empirist ya da pozitivist öğretiden kaynaklanan ikinci tepki, aslında hem geleneksel rasyonalizmi hem de Hume'de belirginlik kazanan analitik-sentetik ayrımını (hiç değilse matematik yönünden) reddetmektedir. Mill'e göre, matematik temelde astronomi, fizik ve biyoloji gibi empirik içerikli bir bilimdir. Matematikte bulduğumuz kesinlik bir derece sorundur ve olduğu kadarıyla insanoğlunun uzun geçmişteki deneyimleriyle iyi temellendirilmiş olmasından ileri gelir. Üstelik matematikte, hiçbir düşünce alanında görmediğimiz bir genellik vardır. Sayısız deneyimlerle yoklanmış bir genelleme, kapsamı sınırlı ve daha az yoklanmış önermelere göre bize daha kesin gelir elbet.

Ne var ki, bu görüşün getirdiği açıklamayı da doyurucu bulmak güçtür. Olgu-sal içerikli tüm önermeler, ne denli kapsamlı, ne denli iyi yoklanmış olurlarsa olsunlar, yanlışlanma olasılığından kurtulamazlar. Örneğin, Newton'un yerçekimi yasasını alalım. Evrensel kapsamda olan bu önerme sayısız denecek kadar çok testten geçmiş, Newton'u izleyen son iki yüzyıl boyunca bilim dünyasında doğru kabul edilmiştir. Ancak, XIX. yüzyılın sonlarına doğru kimi yeni gözlemlerin yasaya ters düştüğü görülmüştür. Oysa, matematikte hangi önerme için böyle bir yanlışlanma olasılığından söz edilebilir? Örneğin, $2 + 3 = 5$ önermesini yanlışlayan bir gözlem düşünülebilir mi? Önermeye ters düşen bir sonuç gösterilse bile önermeyi yanlışlanmış saymak yerine, aykırılığı bir gözlem hatası olarak açıklama yoluna gideriz. Oysa, empirik bilimlerde bir önerme ya da genelleme ne denli doğrulanmış olursa olsun daima yeni, beklenmedik bir gözlemle yanlışlanma olasılığı vardır.

Mantıkçı Empirizm

Matematiksel kesinlik konusunda Kant ve Mill'in tepkilerine karşın, Hume'ın ayrımını çıkış noktası kabul eden ve yüzyılımızın ilk yarısında felsefe dünyasında egemenlik kuran mantıkçı empirist görüşü de ana çizgileriyle tanımaya ihtiyaç vardır.

Bilgi edinme ya da doğruya erişme etkinliğimiz felsefenin başlangıçtan günümüze değin ilgilendiği başlıca konulardan biridir. Özellikle matematiksel "doğrular" üzerinde derin fikir ayrılıkları ortaya çıkmıştır. Yukarda belirttiğimiz gibi, empiristlere göre matematik temelde öteki bilimlerden farklı değildir. Matematikteki kesinlik bir derece sorundur. Bilimsel önermeler gibi matematiksel önermeler de yeni gözlemlerle yanlışlanabilir. Mantıksal empiristler bu konuda daha değişik bir görüşü temsil etmektedirler. Buna göre matematik, gerçekten, bilimlerin erişemeyeceği bir kesinlik sağlamakta, ancak bu ne matematik doğruların apaçıklık niteli-

ğinden, ne de olgusal olarak daha iyi temellendirilmiş olmasından kaynaklanan bir kesinliktir. Bu düpedüz bizim yüklediğimiz bir kesinliktir. Matematiksel önermeler, bizim sayısal simgelere ya da mantıksal sözcüklere verdiğimiz anlamları bir biçimden başka bir biçime dönüştürme ya da indirgeme araçlarıdır. İşlevleri olgusal dünyayı betimlemek değil, *tanımsal* doğruları dile getirmektir. Kimi farklarla ortaya konan bu görüşü biraz daha açmalıyız.

Yüzyılımızın başlarında Bertrand Russell matematiği,

P doğru ise Q doğrudur

biçimindeki önermelerden oluşan bir çalışma olarak nitelemiş, matematiğin tümüyle mantığa indirgenebileceği tezini işlemiştir.⁽¹⁾

Matematiği mantığa indirgeme, matematiksel kesinliği açıkladıktan başka kimi pürüzlerin giderilmesini de sağlıyordu. Bir kez matematiğin konusunun ne olduğu sorunu sorun olmaktan çıkıyordu. Sonra kuramsal matematikle uygulamalı matematiğin farkı açıklık kazanıyordu. Kesinlik kuramsal matematiğe özgüydü. Empirik içerikli tüm bilimlerde olduğu gibi uygulamalı matematikte de kesinlikten söz edilemezdi. Einstein bu farkı şöyle dile getirmişti: “Matematiksel ilkeler gerçek dünyaya ilişkin olduğu ölçüde kesinlikten uzak, kesin olduğu ölçüde gerçek dünyaya ilişkin değildir.”⁽²⁾

Russell’in daha sonraları matematiksel bilgiden söz ederken matematiğin mantıksal yapısından çok tanımsal niteliğini vurguladığını görmekteyiz:

Çalışmamızın bir sonucu, matematiği Pythagoras ile Platon’dan beri çıkarılmış olduğu yüce kattan indirmek, dolayısıyla empirik bilimlere karşı tepeden bakma tavrına son vermek olmuştur. Gerçi matematiksel bilginin indüksiyonla deneyimlerden elde edilmediğini biliyoruz. 2 ile 2’nin birlikte 4 olduğuna inanmamızın nedeni, tüm gözlemlerimizin bunu doğrulaması değildir. Bu anlamda matematiksel bilginin empirik içerikli olduğu söylenemez. Ama bu bilgi için dünyaya ilişkin *a priori* bilgi de diyemeyiz. Aslına bakılırsa, matematiksel bilgi sözsel bir bilgidir. “3” “2 + 1”; “4” “3 + 1” demekse, “4” “2 + 2” demektir. Görülüyor ki, matematiksel bilgi öyle sanıldığı gibi gizemli bir şey değildir. Nasıl ki, 1 metrenin 100 cm. olduğu tanımsal bir bilgiyse, 2 + 2’nin de 4 olduğu o türden tanımsal bir bilgidir.⁽³⁾

Russell başka bir bağlamda bu denli kesin bir nitelemeden kaçınarak şöyle demektedir: “Matematiğin üstün kesinliği bir derece sorunudur, var olduğu kadarıyla matematiksel bilginin sözsel olmasından kaynaklanır.”⁽⁴⁾

Matematiksel kesinliği ilkin matematiğin mantığa indirgenebileceği tezine bağlayan Russell’in, daha sonraları bu kesinliği sözsel ya da tanımsal sayma yoluna git-

{1} B. Russell, *Mysticism and Logic*, s. 75.

{2} A. Einstein, “Geometry and Experience”, *Readings in the Philosophy of Science* (Feigl and Brodbeck), s. 189.

{3} B. Russell, *A History of Western Philosophy*, s. 831-832.

{4} B. Russell, *The Art of Philosophizing*, s. 115.

mesinde, mantıkçı empiristlerin (bu arada özellikle Wittgenstein'in) etkisi görülebilir. Ama genç de mantıkçı empiristler, Russell'ı bu noktada yeterince açık bulmamaktadırlar.⁽⁵⁾

Russell tüm matematiğin, "P doğru ise Q doğrudur" biçimini alan önermelerden oluştuğunu söylerken, matematiksel kesinliği önermeler (ya da önerme kalıpları) arasındaki mantıksal ilişkiye (bir önermenin başka bir önermeyi içermesine) bağlıyordu. Oysa, Ayer'e göre, mantıksal önermeler gibi matematiksel önermelerin de zorunlu, *a priori* bilinen doğruluğu, mantıksal ilişkilerden bağımsız olarak, düpedüz analitik nitelikte olmalarından kaynaklanmaktadır. Böylece mantıkçı empiristler için matematiksel kesinlik, matematiğin mantığa indirgenebileceği tezine başvurarak değil, matematik önermelerin kendi başlarına analitik olma özelliğiyle açıklanmaktadır.

Şimdi, mantıkçı empiristlerin dediği gibi, matematiksel önermeler analitik türden ise, matematik de mantık gibi, salt biçimsel bir çalışma demektir. Mantıkçı empiristlerin bu tezine yöneltilen eleştirilere geçmeden önce, bir önermenin analitik olmasından ne anladığımızı açık bir dille ortaya koymamız gerekir. Gerçekten, bir önermenin analitik olması ne demektir?

Şu iki önermeye bakalım:

- (1) Tüm çocuklar yaramazdır.
- (2) Tüm çocuklar çocuktur.

Birinci önermenin doğru olup olmadığı olgusal bir sorundur. Gözlemlerimiz istisnasız her çocuğun yaramaz olduğunu (yaramazlığın gözlemsel bir davranış olduğunu varsayıyoruz) gösteriyorsa, önermeyi doğru; ama en azından bir çocuğun uslu olduğunu saptarsak, önermeyi yanlış sayarız. Olgusal içerikli bu tür önermelerin doğruluğu gözlem ya da deney sonucuna bağlıdır. Oysa, ikinci önermenin doğruluk değerini belirleme herhangi bir gözlem sonucuna başvurmayı gerektirmez. Önerme biçimi gereği doğrudur. "Tüm çocuklar çocuktur" biçimi yönünden "A, A'dır", ya da, "Bir şey A ise o şey A'dır" gibi içerikten yoksun (yani, bize, konuşma konusu nesneye ilişkin asla bilgi vermeyen) bir önermedir. "Analitik" denen bu tür önermeler *a priori* doğrulardır; yadsınmaları çelişkiye yol açar. Oysa, "sentetik" denen birinci tür önermeler, doğru da olsalar, çelişkiye düşülmeden yadsınabilirler.

Kuşkusuz, matematiksel önermeler analitik türden önermeler ise, $2 + 3 = 5$ gibi bir denklemin, A, A'dır biçiminde bir önerme olması gerekir. Bu ise, $2 + 3$ ile 5'in, yazılış farkına karşın, özdeş olduğu demektir. Analitik bir önermede özne ile yüklem ya özdeştir, ya da en azından yüklem öznenin bir bölümünün söz veya anlam olarak yinelemesidir. Bu yapıda olan bir önermeyi, çelişkiye düşmeksizin, yanlışlama olanağı yoktur. Gerçekten bir şey hem $2 + 3$ olsun, hem de 5 olmasın, olanaksızdır. Denkleminde yer alan sözcük veya simgelerin anlamları değişmedikçe denklemin içerdiği önerme (2 ile 3'ün toplamı 5'e eşittir) daima doğrudur. Aynı

(5) Bkz. A. J. Ayer, *Language, Truth and Logic*, s. 81.

şeyin geometrik önermeler için de geçerli olduğunu söyleyebiliriz. Örneğin, “iki nokta arasındaki en kısa mesafe bir doğrudur” diye ifade edilen teoremin doğruluğu, önermenin biçimsel yapısına, ya da içinde geçen “nokta”, “mesafe”, “doğru” gibi terimlerin anlamına bağlıdır. “İki nokta arasındaki en kısa mesafe” ile “doğru” özdeş anlamdadır. Öyle ki, söz konusu teorem aslında “A, A’dır” demekten öte bir şey söylememektedir.

Analitik önermeleri “olası tüm dünyalarda doğru olan önermeler” diye niteleyen Leibniz de, matematiksel doğruları tanım gereği doğrular olarak yorumlamıştır. Leibniz, “1”i ilkel terim alarak, 2, 3, 4, 5, ... sayılarına tanımlama yoluyla ($2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$, gibi) gidilebileceğini gösterir. Örneğin, $3 + 2 = 5$ önermesinin analitik doğruluğunu, verdiği tanımlara dayanarak şöyle ispatlar:

$$\begin{aligned} 5 &= 4 + 1 \text{ (5'in tanımı gereği)} \\ 5 &= (3 + 1) + 1 \text{ (4'ün tanımı gereği)} \\ 5 &= 3 + (1 + 1) \text{ (toplamanın birleşme ilkesi)} \\ 5 &= 3 + 2 \text{ (2'nin tanımı gereği)} \end{aligned}$$

Ama akla hemen şu soru gelebilir: Tüm matematik önermeleri analitik saymak doğru mudur? Nitekim mantıksal empiristlerin görüşü de kimi itirazlara uğramaktan kurtulamamıştır.

Analitik-Sentetik Ayrımına Yöneltilen Eleştiriler

Bir kez, hemen belirtmeli ki, analitik ve sentetik önermeler arasında kesin bir ayırım yapmak her zaman kolay değildir. Bazı önermelerin kullanım amacına göre iki türlü de yorumlanma olanağı vardır. Örneğin, yukarda verdiğimiz örnekler arasındaki geometrik önermeyi sentetik olarak da yorumlayabiliriz. Önerme analitik yorumunda, “doğru” teriminin “iki nokta arasında en kısa mesafe” diye tanımlanmasını temsil ediyordu. Oysa aynı önermenin sentetik yorumunda, “doğru” yüklemi, özne (iki nokta arasında en kısa mesafe)’yi yinelemek yerine, ona içermediği bir özellik vermeye yöneliktir.

Sonra, matematikte, hatta mantıkta rastlanan kimi varlıksal önermeleri analitik saymak olanaksız olmasa bile son derece güçtür. Örneğin, “Boş bir küme vardır,” ya da, “20 ile 25 arasında bir, yalnızca bir asal sayı vardır,” türünden önermeleri nasıl bir yorumla analitik sayabiliriz? Matematikte bu türden pek çok önerme gösterilebileceğine göre, matematiği mantıkçı empiristlerin nitelediği gibi içerikten yoksun, tümüyle sözsel doğruları içeren bir çalışma saymak yerinde midir? Boş bir kümenin varlığına ilişkin örneğimizi alalım. Bu önermenin doğruluğu “boş küme” denen nesnenin var olup olmamasına bağlıdır. Somut ya da soyut bir nesnenin var olup olmaması da tanımsal (yani, sözcüklerin kullanım biçimine bağlı) değil, “empirik” bir sorundur. Öyleyse, matematiksel önermeleri tümüyle analitik saymak doğru olamaz. Kaldı ki, mantığın bile tümüyle analitik ilkelerden oluştuğu tartışma götürür. Nitekim, bir mantık ilkesi sayılan, “Kendisiyle özdeş olan bir şey vardır,” önermesi analitik olmaktan uzaktır. Kimi matematikçi filozoflar, bu arada belki de

Kant, varlıksal önermeleri göz önünde tutarak matematiksel doğruları analitik saymaktan kaçınmışlardır.

Matematiğin mantığa indirgenmesine olduğu kadar analitik sayılmasına da karşı çıkan seçkin matematikçi Poincaré şöyle demektedir:

Matematiğin bir bilim olma olasılığı bile çözülemez bir çelişki gibi görünmektedir. Bu bilim sadece görünürde dedüktif ise, o zaman hiç kimsenin yadsımadığı kesinliği nereden kaynaklanmaktadır? Yok, tam tersine, ortaya koyduğu teoremlerin tümü formal mantık kuralları aracılığıyla tek tek çıkarsanmış önermelerden ibaretse, o zaman neden devasa bir totolojiye indirgenmiş değildir? Tasımsal çıkarım bize hiçbir yeni şey öğretmez; üstelik eğer her şeyin özdeşlik ilkesinden çıkarsanması gerekiyorsa, o zaman her şeyin o ilkeye indirgenmesine olanak olmalıdır. Peki bu durumda, pek çok kitap ciltlerini dolduran matematiksel teoremlerin, dolaylı da olsa, A, A'dır biçiminde içerikten yoksun önermelerden başka bir şey olmadığını mı söyleyeceğiz?⁽⁶⁾

Poincaré, bunun söylenebileceğini inanılmaz bir olay saymaktadır.⁽⁷⁾

Matematiksel kesinlik, hemen her dönemde rasyonalist filozofların görüşlerini temellendirme yolunda başvurdukları bir örnek olmuştur. Platon geometriye, “İdealar” teorisinin bir kanıtı gözüyle bakar. Ona göre, geometrik doğrulara ilişkin bilgilerimizin deneyimden kaynaklanması olanaksızdır; çünkü kum ya da kâğıt üzerine çizilen nokta, doğru parçası, düzlem şekil ve bunlara ilişkin gözlem veya ölçmelerden matematiğin yetkin kavram ve ilkelerine ulaşamaz. Descartes’ı izleyen modern rasyonalistlerin yaklaşımı da fazla farklı değildir. Onlar da kâğıt üzerine geçirilen nokta, doğru parçası, düzlem şekillere ilişkin Euclides postulat ve teoremlerini kökeninde deneyimden bağımsız, *a priori* doğrular sayıyorlardı. Evrensel geçerlikte saydıkları matematiksel ilkelerde, empirik genellemelerde asla olmayan bir zorunluk ve kesinlik bulmaktaydılar. Örneğin, üçgenin iç açılarının toplamına ilişkin teorem, üçgenler üzerindeki gözlemlerden kaynaklanmış olamazdı. Bir kez çizilen üçgenler yetkin olmaktan uzaktır; çizim ve ölçmelerimiz daima az çok hatalıdır. Sonra, söz konusu teoremin doğruluğuna ilişkin güvenimiz, çeşitli üçgenler üzerindeki inceleme ve ölçmelerimizle ne daha fazla pekişmekte, ne de ölçmeler farklı sonuçlar verdiğinde sarsılmaktadır. Teoremin doğruluğu, ispatta yer alan “apaçık doğru” öncüller nedeniyle kesin ve zorunludur. Ancak, geometrik önermeleri, aksiyom ya da teorem kimliğinde olsun, mantıkçı empiristlerin yaptığı gibi, analitik saymak yanlışır. Modern rasyonalistlere göre geometri, Kant’ın dediği gibi, sentetik *a priori* önermelerden oluşmuştur; doğruluğu biçimsel olan analitik önermelerden kurulu boş bir sistem değildir.

Ne ki, bu görüş ister istemez şu soruya yol açmaktadır: Sözü edilen bu sentetik, ama zorunlu doğruları, gözlem veya deneyimlerimizden öğrenmediğimize göre, nasıl bilmekteyiz? Rasyonalist filozoflar akıl, sezgi ya da içe-doğuş gibi öznel yetilerden söz etmektedirler. Platon geometrik ilkeleri “ussal kavrayış” dediği özel bir ye-

(6) H. Poincaré, *Science and Hypothesis*, s. 1-2.

(7) Bu görüşçe karşı Russell’in tepkisi için bkz. B. Russell, *Philosophical Essays*, s. 70-78.

tiyle bildiğimizi ileri sürmüştü. Ona göre, bu yeti, “ruh”un daha önceki bir aşamada, İdealar dünyasında kazandığı bilgileri çağrıştırır bize. Descartes de yetkin saydığı geometrik bilgilerimizi “ussal kavrayış” yetisine bağlamaktadır. Kant’ın açıklaması oldukça farklıdır. O da bir tür sezgi ya da ussal kavrayıştan söz etmektedir. Ancak onun sözünü ettiği yeti, aklımızın dış etki ve olguları kendi iç yapısındaki uzaysal formda algılama gücüdür. Ona göre, Euclides ilkelerinin evrensel, zorunlu ve kesin doğruluğu algılarımızı biçimleyen aklımızın yapısal donatımından kaynaklanmaktadır.

Matematiksel önermeleri salt analitik saymaya karşı daha yeni bir tepkinin de, mantıkçı empiristlerin yaklaşımını genelde paylaşan W. V. O. Quine’dan geldiğini görmekteyiz.⁽⁸⁾ Quine, analitik-sentetik ayırımına bir tür farkı değil, bir derece farkı gözüyle bakmaktadır. Ona göre, salt empirik görünümündeki önermeleri bir uçta, salt analitik görünümündeki önermeleri öbür uçta olmak üzere tüm önermeleri, bu arada bilimin kuramsal yasalarıyla matematiğin varlıksal önermelerini, aynı uzantı üzerinde sıralayabiliriz. Quine bilimi bir bütün olarak görmekte, deneyimlerle doğrulananın (ya da yanlışlananın) bilimin tek tek önermeleri değil, bilimin tümü olduğunu vurgulamaktadır. Matematik ve mantık önermelerinin kolayca yadsınamamasının iki nedeni vardır: (1) Matematik ve mantığın tüm kavramsal düzende tuttuğu önemli yer onlara bir tür bağışıklık sağlamaktadır. (2) Kurulu kavramsal düzenin değişmesini güçleştiren tutuculuğumuz. Quine, matematiksel ilkelerin kesinliğini, tutuculuğumuzla matematiğin düşün yaşamımızda tuttuğu yere bağlı bir görünüm saymaktadır.

Bu açıklama da yeterince doyurucu görünmemektedir. Quine’ın ileri sürdüğü iki neden, matematik dışı alanlar için de geçerli sayılamaz mı? Önce, tutuculuğumuzun matematikle sınırlı kaldığı söylenemez; Kuhn’un gösterdiği gibi tutuculuk tüm bilim dallarında yaygın bir davranıştır.⁽⁹⁾ Sonra, kimi bilimsel ilkelerin, matematik ölçüsünde düşüncemizde yer tuttuğu da görmezlikten gelinmemelidir. Böyle olmasına karşın bilimler matematiğin kesinlik görünümünden uzak kalmaktadır. Öyleyse, Quine’ın yaklaşımını da yeterli bulmak güç.

Kesinlik Anlayışında Yumuşama

Matematiksel kesinliğe ilişkin olarak gözden geçirdiğimiz görüşlerin hiçbirini doyurucu bulduğumuzu söyleyemeyiz. Her şeyden önce, matematiksel önermelerin tümünü tek kalıba indirgeyerek “analitik”, “sentetik” ya da “sentetik *a priori*” diye tekdüze bir nitelemenin yanıltıcı olduğunu belirtmek gerekir. Sonra, yukarda değindiğimiz gibi, matematikte pek çok önerme yoruma açıktır: Hem analitik hem sentetik olarak düşünülebilir. Örneğin, $2 + 3 = 5$ denklemi, Hume ve onu izleyen mantıkçı empiristlerin gözünde analitik bir önermedir. Aynı denklemi, Mill ve onu izleyen klasik empiristler ise düpedüz sentetik bir önerme sayarlar. Şöyle ki, iki

(8) W. V. O. Quine, “Two Dogmas of Empiricism,” *From a Logical Point of View*, s. 20-46.

(9) T. Kuhn, *The Structure of Scientific Revolutions*, s. 10-22.

nesne ile üç nesne (bu nesneler ne türden olurlarsa olsunlar) birlikte daima beş nesne oluşturur. Gerçekten, matematik başlangıçtaki empirik aşamasında kalsaydı bu yorum yeterli olacaktı; denklemin sentetik bir genelleme olmak ötesinde bir özelliğinden söz edilmesine gerek duyulmayacaktı. Ancak, zamanla deneyimden uzaklaşan matematiğin soyut ve mantıksal yapısında söz konusu denklem, sentetik bir önerme olmaktan çıkmış, “analitik” diyebileceğimiz bir nitelik kazanmıştır. Bu noktaya açıklık getirmesi bakımından şu iki önermeyi gözden geçirelim:

- (1) 2’den büyük her çift sayı, iki asal sayının toplamı olarak gösterilebilir.
- (2) 2’den büyük her çift sayı, en çok dört asal sayının toplamı olarak gösterilebilir.

(1)’deki önerme, daha önce de değindiğimiz gibi, “empirik” genelleme niteliğindedir. Tüm yoklamaların doğrulamasına karşın, formel olarak henüz ispatlanmadığından, “konjektür” kimliğini koruyan bu önermenin ne kendi başına analitik olduğu, ne de, doğru ise, doğruluğunun mantıksal bir bağlamda zorunluk kazandığı söylenebilir.

(2)’deki önermeye gelince, birinci önermeyle çok yakın bir benzerlik içinde olmakla birlikte, değişik bir kimlik taşımaktadır. Önerme, “empirik” bir genelleme olmanın ötesinde, teorem olarak ispatlanmış, doğruluğu, ispatında başvurulmuş öncüllerin doğruluğuna bağlı olarak kesinlik kazanmıştır. İspatı oluşturan mantıksal ilişki içinde önermeyi “sentetik” değil, “analitik” ya da daha uygun bir terimle “tolojik” diye nitелеmek yerinde olur.

İspatın bir önermeye kazandırdığı kesinlik ya da zorunluk (önerme kendi başına analitik değilse) dayandığı öncül kümesiyle olan mantıksal ilişkisinden kaynaklanır. (Aslında matematikte, tanımlar dışında, kendi başına analitik önermelere örnek göstermek güçtür. “Analitik” diye gösterilen örnekler bu özelliklerini ya yorum, ya da mantıksal çıkarım bağlamındaki yerlerine borçludur.) Öncülün kendisi ispatlanmış bir teorem bile olsa, kesinliğin bağlı niteliği değişmez, yalnızca bir adım geri gitmiş olur. Şimdi, (2)’deki önermenin doğru olduğu bilinmektedir. Ancak bu doğruluğun kesinliği, önermenin kendi başına (yani, öncüllerden bağımsız olarak) analitik olmasından kaynaklanmamaktadır. Önerme kendi başına analitik değildir. Bu, Russell’ın, “ P ise Q ” diye dile getirdiği mantıksal ilişkinin sağladığı, öncüllere bağlı kesinliktir. Poincaré, belki de bu gerçeği belirtmek için, matematiği kumdan zemin üzerine kurulu bir saraya benzetmişti. Tanınmış bir bilim adamı da, mantıksal zorunluğu sağlayan dedüktif bir sistemi her yanı açık, geniş ve boş bir alanda özenle sınıksız kilitlenmiş bir kapıya benzerek şöyle demektedir:

Herhangi bir ispatı kabul etmek, ispatın dayandığı varsayımları ispatsız kabul etmeyi gerektiriyorsa, ispatlanmadan alınan bu varsayımlardan birini reddetmek, ispatlanmış önermeleri, dolayısıyla tüm matematiği reddetmek anlamına gelir.⁽¹⁰⁾

(10) M. Polanyi, *Personal Knowledge*, s. 192.

Kesinlik arayışı insana özgü köklü bir istektir. Yığınları din, ideoloji ve başka tür fanatizmlerin kucağına atan bu isteğin kimi kişileri de matematiğe yönelttiğini biliyoruz. Ama ussal düşünmeye dayanan matematiğin, tüm kesin görünümüne karşın, kesinlik arayışı içinde ona yönelenleri kimi kez hayal kırıklığına uğrattığı da görülmektedir. Bunun çarpıcı bir örneğini Russel'da bulmaktayız:

İnsanların dinsel inançta buldukları kesinliği ben gençliğimde matematikte bulabileceğimi sanmıştım. Ama çok geçmeden gördüm ki, öğretmenlerimin doğru diye öğrettikleri pek çok ispat aslında yanlışlarla doluydu. Aradığım kesinliği öğretilenlerde değil, belki de matematiğin daha sağlam, daha iyi temellendirilmiş başka alanlarında bulurum umuduyla çalışmaya koyuldum. Araştırmam ilerledikçe, ünlü masaldaki fil ile kaplumbağayı düşünmekten kendimi alamadım. Matematik dünyasını üzerine oturtmak için bir fil inşa ettiğimde, filin sendelediğini gördüm. Fili boşluğa düşmekten kurtarmak için bir kaplumbağa inşa ettiğimde, kaplumbağanın daha da dayanıksız olduğu ortaya çıktı. Çeyrek yüzyıl süren aralıksız, yoğun bir çalışma sonunda anladım ki, matematiği daha sağlam bir temele oturtma yolunda yapabileceğim fazla bir şey yoktur.⁽¹¹⁾

Matematikle mantığın ilişkisi konusunda birbirine sürekli karşı çıkmış iki büyük düşünürün (Poincaré ile Russell'ın) matematiksel kesinlik konusunda iyimserlikten uzak bir yargıda birleşmiş olmaları ilginç değil midir?⁽¹²⁾

(11) B. Russell, *Portraits from Memory*, s. 53.

(12) Matematiksel doğruluk ve kesinlik konusunda daha fazla açıklama için bkz. Ek: 3.

VII. BÖLÜM

MATEMATİKTE BUNALIMLAR

Matematiğe çoğu kez gelişimini doğru bir çizgi üzerinde sürdüren (ya da adım adım ilerleyen), problemlerini er geç çözüme kavuşturan istikrarlı bir bilim gözüyle bakılır. Oysa, matematik tarihine baktığımızda durumun hiç de öyle olmadığını görürüz. Bilimin diğer alanlarında tanık olduğumuz türden duraklama, yozlaşma ya da bunalımlara; görüş, yaklaşım ve yorum farklarına matematikte de rastlamak-tayız. Hatta bu farkların kimi zaman temele inen felsefe çatışmalarına yol açtığını biliyoruz.⁽¹⁾

Bilimde olduğu gibi matematikte de kesinlik arayışı dogmatizme, dogmatizm de beklenmedik değişiklik ya da gelişmeler karşısında bunalıma yol açar. Ancak her bunalımı, tüm olumsuz görünümüne karşın, yeni bir atılım veya açılmaya giden yolda başlangıç koşulu diye niteleyebiliriz. “Bunalım” dediğimiz bu olayları, ayrıntılarına girmeksizin ele alacağız. Ancak, bir noktanın hemen belirtilmesinde yarar vardır: Kısa ya da uzun sürsün, bu tür bunalımların hiçbir geçici bir bocalama olmaktan ileri geçmemiş; kimi kez sanıldığıının tersine, matematiği ne geçersiz ne de işlemez kılan bir olay olmuştur.

Tarih boyunca matematiğin geçirdiği bunalımları dört ana bölümde toplayabiliriz:

- (1) $\sqrt{2}$ gibi rasyonel olmayan sayıların yol açtığı, başlangıçta “olanaksız” ya da “saçma” sayılan negatif (-1) ve sanal $(\sqrt{-1})$ sayıların ortaya çıkmasıyla süren bunalım;
- (2) Başlangıçta sağlam bir temele oturtulamayan ve kavramsal belirsizlik içinde kalan diferansiyel ve integral hesapların yol açtığı bunalım;
- (3) Euclides’in 5. postulatına ilişkin kuşku ve doyum-suzluktan kaynaklanan, Euclides-dışı geometrilerin ortaya çıkmasıyla büyüyen bunalım;
- (4) Kümeler teorisinde başgösteren paradoksların yarattığı, daha sonra Gödel teoremleriyle yeni bir boyut kazanan bunalım.

İlk Bunalım: İrrasyonel Sayılar

Matematikte bilinen ilk bunalım antik Yunan döneminde (İ.Ö. 5. yüzyıl) ortak öl-

(1) Matematiğin temellerine ilişkin görüşler VIII. BÖLÜM’de ele alınmıştır.

çüsüz büyüklüklerin bulunmasıyla ortaya çıkar. İki tamsayının bölümü olarak belirlenemeyen doğru parçalarının varlığı ne demektir? Örneğin, kenarı bir birim olan karenin köşegeni, rasyonel bir sayı ile belirlenemeyen bu türden bir doğru parçasıdır. Evreni tamsayılarla düzenli gören Pythagorasçılar için karenin kenarı ile köşegeni gibi aynı türden geometrik büyüklüklerin ortak ölçsüz olması akıl almaz bir skandaldı; o yüzden ne pahasına olursa olsun gizli tutulmalıydı.

Bu olayın yanı sıra Zeno'nun adıyla anılan birtakım paradoksların ortaya çıkmasıyla matematikteki bunalım yoğunluk kazanır.⁽²⁾ Değişik biçimlerde dile getirilen Zeno paradokslarının ortak özelliği şöyle bir varsayıma dayanmaktadır: Sonlu bir sürede sonsuza giden sayıda devinime olanak yoktur. Belli bir mesafe geriden kalkan tavşanın önündeki kaplumbağayı, bu varsayıma göre, hiçbir zaman yakalayamaması gerekir. Çünkü tavşanın aradaki mesafenin önce $1/2$ 'sini, ondan da önce $1/4$ 'ünü, ondan da önce $1/8$ 'ini, ... ve böyle sonsuza dek bölünebilen aralıkları koşması gerekir ki, bunu sonlu bir sürede gerçekleştirmesi olanaksızdır. (Zeno paradoksunun, yakından bakıldığında, bir çıkarım hatasından kaynaklandığı görülür: Tavşanla kaplumbağa arasındaki mesafenin sonsuz bölünebilir olması bu mesafenin sonsuz olduğu demek değildir. Başka bir deyişle, bir büyüklüğün sonsuz sayıdaki bölümlerinin toplamı o büyüklüğü sonsuz yapmaz.)

Matematiğin bu ilk bunalımdan çıkması kolay olmamıştır. İ.Ö. 4. yüzyılın seçkin matematikçisi Eudoxus'un büyüklük ve orantı kuramı üzerindeki çalışması, sorununu bir ölçüde açıklığa kavuşturur. Eudoxus'un ortak ölçsüz büyüklüklere ilişkin ulaştığı sonuç, Euclides'in "*Elementler*"inin beşinci kitabında yer almıştır. Bu sonuç, ana çizgileriyle, Dedekind'in XIX. yüzyılın ikinci yarısında irrasyonel sayılar üzerindeki çalışmasını andırmaktadır. Daha önce de değindiğimiz üzere, ilk bunalımdan kurtuluş arayışları başlıca iki gelişmeye yol açmıştır: (1) İlginin sayısal kuramlardan geometriye kayması; (2) geometrinin aksiyomatik bir sistem olarak oluşması.

Matematikte ikinci önemli bunalım, geçen yüzyılın ilk yarısında kendini gösterir. Ancak bu olayı ele almadan önce matematiğin Orta Çağ sonrası gelişimine kısaca değinmeliyiz:

Antik Yunan uygarlığının parçalanması üzerine, matematik dahil hemen tüm düşünce alanlarında giderek yozlaşmaya dönüşen bir duraklama dönemine girilir. Bu arada başta Euclides'in "*Elementler*"i, Ptolemy'nin "*Almagest*"i olmak üzere kimi önemli matematiksel yapıtların korunmuş olmasını iyi bir talih saymak gerekir.⁽³⁾ Yüzyıllar boyu hiçbir ilerleme göstermeyen matematikte yeni bir atılım Orta Çağ Hint ve İslam dünyasında kendini gösterir. Özellikle aritmetik ve cebirde ortaya çıkan bu gelişmeyle geometrinin geleneksel egemenliği sarsılır, sayısal ilişkiler ön plana geçer. Yunan düşüncesinde uzunluk, alan ve oylum gibi geometrik kavramlar çerçevesinde kalan büyüklükler, sayı kavramının ön plana geçmesiyle yeni bir kim-

(2) Elea'lı Zeno (İ.Ö. 490 doğumlu), Pythagorasçı'lara karşı hocası Parmenides'i savunması yolunda, evrende çokluk ve devinimi yadsımaya yönelik paradokslarıyla ünlüdür.

(3) "*Almagest*"i uygulamalı matematik saymak daha doğru olur.

lik kazanır. Geometride göz kamaştırıcı yetkinliğe ulaşan ispat yöntemi sayısal hesaplama tekniklerini uzun süre arka planda tutmuş, bu alanda görünür bir gelişmeye olanak bırakmamıştı. Aritmetik ile cebirin ağırlık kazanmasıyla bu durum kökten değişir.

İkinci Bunalım: Sonsuz Küçükler Hesabı

Modern matematik başladığında, matematik geleneğinde iki düşünce saklıdır. Bunlardan biri, Antik Yunan matematiğinden kaynaklanan ispata dayalı geometri, diğeri Hint ve İslam matematiğinde ön plana çıkan sayı kavramı ve ona dayalı cebir. Bugün bildiğimiz matematiği büyük ölçüde XVII. yüzyılda gerçekleşen iki önemli buluşun yol açtığı gelişmelere borçluyuz. Bunlardan ilki, Descartes (1596-1650)'in, o zamana dek birbirinden tümüyle ayrı görünen matematiğin iki dalını, geometri ile cebiri, birleştirme çabasının ürünüdür. Şimdi “analitik geometri” diye bilinen bu çalışmada, koordinatlar aracılığıyla eğrileri denklemlerle, dolayısıyla eğrilerin geometrik özelliklerini cebirsel formüllerle belirleme olanağı doğar. Üstelik denklemleri de grafikte dile getirmeye olanak sağlamakla analitik geometri, cebirin analize dönüşmesine, bu arada “değişken”, “fonksiyon” ve “fonksiyonel bağımlılık” gibi kavramların belirginleşmesine, bu kavramların geometrik terimlerle ifadesine yol açar.

İkinci büyük gelişme, daha sonra “analiz” denen çalışmaya yol açan, Newton ile Leibniz'in birbirinden bağımsız olarak oluşturdukları “sonsuz küçükler hesabı” (infinitesimal calculus)'dır.

XVII. yüzyılda başlayan buluşların yol açtığı ilerlemeler giderek artan hızla birbirini izler. Ancak bu arada Antik dönemde tanık olduğumuz sıkı ispat ölçütlerinin çoğunluk gözardı edildiğini görüyoruz. Matematik, mantıktan çok sezgi, imge ve deneyime bağlı bir çalışma görünümünü alır. Leibniz, Bernoulli ve Euler gibi ünlü matematikçilerin sonsuz küçükler, ayrışık (divergent) diziler toplamı gibi konularda, yanlışlığı bugün bilinen düşünceler ileri sürmekten geri kalmadıklarını biliyoruz. Deyim yerindeyse, “yasa tanımazlık” diyebileceğimiz bu gidiş, özellikle diferansiyel ve integral hesapların fizik ve astronomideki başarılı uygulamalarının yarattığı iyimser ve kamçılayıcı hava içinde, yaygınlık kazanır. Yeni buluş ve yöntemlerin kabına sığmaz bir coşkunlukla hemen uygulamaya konması çabaları XVIII. yüzyılın sonlarına değin sürer. Ama bu arada kimi üstünkörü sonuçların gün ışığına çıktığı, eleştirel bir yaklaşımın giderek kendini duyurmaya başladığı görülür.

XVII. yüzyıl büyük matematikçileri, ulaştıkları parlak başarıların etkisinde, eleştirel tutumdan uzak kalmış, her şeyin yolunda olduğu gibi bir iyimserlik havasına girmişlerdi. Bu yüzden olmalı ki, ne analitik geometri, ne de sonsuz küçükler hesabı sağlam bir temele oturtulmadan kalmıştı.

İkinci bunalıma yol açan kuşku ve tedirginlikler önce diferansiyel hesapların anlam ve dayanaklarına ilişkin olarak ortaya çıkar. İlk eleştiriler Berkley, ardından Hegel gibi idealist filozoflardan gelir. Özellikle diferansiyel kesirlerle sonsuz küçükleri içeren işlemler kuşkuyla karşılanıyordu. Aslında, bu işlemleri oluşturan New-

ton ile Leibniz'in bile temeldeki kavramlar üzerinde tam bir açıklık içinde oldukları kolayca söylenemez. Leibniz, metafizik öğretisi gereği, sonsuz küçükleri varsayıyordu. Newton, fizik ve astronomi çalışmalarında duyumsadığı gereksinmeyle diferansiyel işlemleri oluşturmuştu. Daha çok sezgiye yer veren ve bilimsel ihtiyaçtan doğan bu yöntemin kuramsal dayanakları neydi?

Daha XVIII. yüzyılın ilk yarısında belirsiz kalmış birtakım noktalar yanında kimi çelişkilerin de giderek su yüzüne çıkması ciddi tereddütlere yol açar. Berkley, 1737'de yayımlanan *The Analyst* adlı yapıtında kalkülüs (diferansiyel ve integral hesaplar)'ü, kavramsal dayanaklarını irdeleyerek oldukça ayrıntılı bir eleştiriden geçirir. Daha sonra Legendre ve Lagrange gibi kimi seçkin matematikçilerin de durumdan yakındıklarını biliyoruz. Lagrange (1736-1813), çelişkiler içermesine karşın matematiğin başarısını Tanrı'nın iyilikseverliği altında hataların birbirini götürmesine bağlıyordu. Denebilir ki, matematik o sırada bir bilim olmaktan çok bir sanat (gerisinde mantıktan çok mistik esinlenmenin yattığı bir sanat) görünümündeydi. Nitekim kimi eleştiriciler daha da ileri gidip bu matematiği düpedüz uydurma ya da kurgusal bir beceri olarak niteler.⁽⁴⁾ Gerçekten o sırada kuramsal irdeleme ve temellendirmeleri gereksiz bulan çoğu matematikçilerin tutumunda, matematiğin doğasına ters düşen bir tür "oportünizm" egemendi. Öyle ki, kullanılan işlemlerin geçerliği için uygulama sonuçları yeterli ölçüt sayılıyordu. Başarılı sonuçlarla gözleri kamaşan matematikçiler, ne elde edilen sonuçları mantıksal yönden temellendirme, ne de kullandıkları kavram ve yöntemlerin geçerliliğini irdeleme gereğini duymuyorlardı. Daha fazla ilerlemenin coşkusu içinde yeni hedeflere koşanlardan da beklenemezdi bu zaten.

Ne var ki, Berkley ile başlayan eleştiriler giderek yoğunluk kazanır. XIX. yüzyılın ilk yarısı matematikte hem kuşku konusu işlem ve sonuçları pekiştirme, hem de yeni buluşlara açılma çabasını yaşar. Nitekim bu dönemin Gauss (1777-1855) ile Cauchy (1789-1857) gibi büyük matematikçileri bir yandan eleştirel bir tutum izlerken, öbür yandan yeni buluşlara yönelik atılımlar sergilemişlerdir. Daha önce Legendre ve Lagrange'da da ilk belirtilerini gördüğümüz eleştirel yaklaşım, Gauss'ta tüm etkinliğiyle ortaya çıkar. Denebilir ki, Gauss çalışmasının önemli bir bölümünü matematiği sağlam bir temele oturtma amacına yöneltmişti. Onun, "cebirin temel teoremi" diye bilinen karmaşık sayılar alanında her cebirsel denklemin bir kökü olduğu savını ispat uğraşı, bu pekiştirme çerçevesinde önemli bir çalışmadır. Kaldı ki, o güne değin belirsiz ya da bulanık kalan "karmaşık sayılar" kavramı bile Gauss'un çalışmasında açıklık kazanır.

Analizi gerçel sayılar alanından karmaşık sayılar alanına genişletme işini ise büyük ölçüde Cauchy'ye borçluyuz. Karmaşık bir değışkene ait karmaşık fonksiyonlar teorisini oluşturan Cauchy, sonsuz küçükler gibi ne olduğu açık olmayan kavramları matematikten ayıklama çabasıyla analizde gerçek bir reforma yönelir. (Sonsuz küçükler giderek kaybolma yolunda – yani, sıfıra yaklaşan – nesnel miktarlar ola-

(4) 19. yüzyılda Lubsen ile Vaihinger gibi matematikçiler bu tür nitelermelerde bulunanların başında geliyordu.

rak varsayılıyor, diferansiyel katsayı ve integrallerin bunlardan oluştuğu sanılıyor-du. Oysa, aslına bakılırsa, bu kavram tam bir belirsizlik içindeydi.) Limit, süreklilik gibi kavramlar ilk kez onun elinde açık ve belirgin anlamlarını kazanmıştır. Cauchy'nin limitler teorisi daha sonra Weierstrass'ın çalışmasıyla birleşerek sonsuz küçükler kavramını gereksiz kılar. Bu gelişmeyle ortaya çıkan sonsuz sayılar ile süreklilik sorunlarını ise George Cantor ele alır.

Sayısal sonsuzluk Zeno'dan beri tartışılan, çözüm bekleyen bir sorundu. Euclides geometrisinin aksiyomlarından biri, bütünü her hangi bir parçasından büyük olduğu savını dile getirir. Oysa, bu yargının, sonsuzlar söz konusu olduğunda, doğru olmadığı görülmüştür. Cantor, sonsuz bir dizi ya da kümeyi, kardinal sayısı her hangi bir alt-bölümünün kardinal sayısına denk olan küme diye tanımlar. Başka bir deyişle, sonsuz bir kümedeki elemanlar ile, o kümenin bir alt-bölümüne ait elemanlar bire-bir eşleştirilebilir. Örneğin, sonsuz bir küme oluşturan doğal sayıları bir satır üzerine, doğal sayılar kümesinin bir alt-bölümü olan çift sayıları ikinci satır üzerine yazalım:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	...
2,	4,	6,	8,	10,	12,	...

Görüyoruz ki, ilk satır üzerindeki sayılar ne denli çoğaltılırsa çoğaltılsın, ikinci satır üzerindeki sayılar da o denli çoğaltılabilir; öyle ki, ilk satırdaki her elemana karşılık ikinci satırda daima bir eleman olacaktır. Bu, iki dizinin eşdeğer olduğunu gösterir. Oysa, ikinci dizi birincisinin bir alt-bölümünden başka bir şey değildir.

Cantor geliştirdiği sonsuz sayılar teorisinde farklı büyüklükte sonsuz dizi ya da kümelerin olduğunu gösterir. Örneğin, gerçel sayılar kümesi, doğal sayılar kümesinden daha büyük bir kümedir. Tüm ondalık kesirlerin büyüklük sırasına göre dizildiğini düşünelim. Dizideki ilk kesirin birinci rakamı ile ikinci kesirin ikinci rakamını alıp her rakama bir ekleyerek yeni bir ondalık oluşturalım ve bu işlemi dizi boyunca sürdürelim. Bu şekilde oluşturulan ondalık, tam sandığımız dizideki tüm ondalıklardan farklıdır. Bu, gerçel sayılar söz konusu olduğunda, sayılabilir bir dizi oluşturma'nın olanaksızlığını göstermektedir. Ondalık kesirler sayısının, doğal sayılar sayısından daha yüksek derecede sonsuz olduğu demektir bu.

Analiz bugün bilinen yetkin kimliğine, büyük ölçüde, XIX. yüzyılın ikinci yarısında Karl Weierstrass (1815-1897)'ın çalışmasıyla ulaşır. Cauchy'nin, bulanık "sonsuz küçükler" kavramı yerine daha açık ve net limitler kavramını getirmesiyle başlayan, Weierstrass'ın analizi "aritmetikleştirme"siyle, Cantor'un süreklilik ve sonsuz sayılar kavramına açıklık getirmesiyle noktalanmış çalışmalar geçen yüzyılda yaşanan bunalımı önemli bir yanıyla gidermişti. "Her yanıyla" diyemiyoruz; çünkü, söz konusu bunalımın kapsamında Euclides-dışı geometrilerin yol açtığı sarsıntıyı da bulmaktayız.⁽⁵⁾

(5) Euclides-dışı geometrilerin ortaya çıkışına ilişkin geniş bilgi III. BÖLÜM'de verilmiştir; şimdi yalnızca 19. yüzyıldaki bunalım bakımından etkisine değinmekle yetiniyoruz.

Üçüncü Bunalım: Euclides-dışı Geometriler

İki bin yılı aşkın bir süre boyunca “biricik geometri” kimliğini koruyan Euclides geometrisinden farklı geometrilerin ortaya çıkışı kolayca sindirilebilir bir gelişme olamazdı. Nitekim başlangıçta yarı şaşkınlıkla önemsenmeyen bu olay, yüzyılın son çeyreğinde sarsıcı etkisini duyurmaya başlar. Matematikçilerin içine düştükleri şaşkınlık, sonunda, filozofların da kolayca üstesinden gelemedikleri bir soruna dönüşmüştü. Her biri kendi içinde tutarlı birden fazla geometri ne demekti? Uzun bir geleneğin saygınlığını taşıyan, sayısız uygulama ve ölçmelerle doğruluğu kanıtlanan bir sistem kuşku konusu olabilir miydi? Olamazsa, mantıksal tutarlılık yönünden eşdeğer yetkinlikte olan değişik geometrilerin varlığı nasıl açıklanmalıydı?

Kant’a göre, geometrinin konusu uzay, temel özelliklerini aklımızın yapısına borçluydu; geometrik önermeler bu nedenle zorunlu, *a priori* doğrulardı. Başka bir deyişle, bir tek geometriye olanak vardı, o da, Euclides geometrisiydi. Oysa şimdi, ne görüyoruz? “Biricik” diye bilinen bu geometriye ait önermelerden bir ya da birkaçını yadsımak çelişkiye yol açmak şöyle dursun, kendi içinde tutarlı yeni geometrilerle olanak veriyordu. Euclides-dışı geometrilerin ortaya çıkması, yüzyıllar boyunca oluşan kimi önyargı ve koşullanmaları kökten sarsmaktaydı. Geometrik önermelerin apaçık ya da zorunlu sayılan doğrulukları bir yana, doğru olup olmadıkları, hatta “doğruluk” kavramının kendisi tartışma konusu olmaya başlamıştı. Öte yandan, birbiriyle bağdaşmaz geometrilerin kendi içlerinde tutarlı olmaları, “tutarlılık” kavramını ön plana çeker; bu ise, matematiğin temellerine ilişkin sorunların çözüm arayışında mantığa büyük ağırlık kazandırır.

Biri analizde, diğeri geometride kendini açığa vuran bu iki tedirginlik, XIX. yüzyılı bir bunalım dönemine dönüştürmüştü. Gerçi, XVIII. yüzyılda olduğu gibi bu yüzyılda da matematiksel çalışmaların hem kuramsal, hem uygulama yönünden birbirini izleyen önemli atılımlar içinde olduğu söylenebilir.⁽⁶⁾ Öyle ki, bu iki yüzyıllık dönemi matematik için büyük coğrafi keşifler dönemine benzetenler vardır. Denebilir ki, ilk kez bu dönemde, birtakım belirsizlik, çelişki ve üstünkörülüklerle yüklü olduğu gözlenen matematiğin, aynı zamanda, temelde bir bütün oluşturduğu bilinci uyanmıştır. Bunalımı aşma yolundaki çaba ve arayışların hemen hepsinde bu ortak bilincin etkisini bulmaktayız.

Matematiğin pekiştirilmesine yönelik bu çabada “mantıksal” diyebileceğimiz bir yaklaşımdan daha söz edebiliriz. Richard Dedekind (1831-1916)’in çalışmasında kendini gösteren bu yaklaşım, Peano, Frege ve Russell gibi mantıkçı-matematikçilerde daha belirgin bir karakter kazanır.

Daha çok gerçel sayılara ilişkin teorik çalışmasıyla tanınan Dedekind, diferansiyel ve integral hesapları aritmetik bir temele oturtmaya yönelir. Mantıksal çözümlemeyi içeren bu temellendirme, Peano ile önemli bir dönüm noktasına ulaşır.

Mantıksal çözümlemeye verdiği tüm öneme karşın, matematiğe ilişkin de olsa,

(6) Grup teorisi, cebirde yeni alanlar, Euclides-dışı geometriler, kümeler teorisi, aksiyometik yöntemin işlenip yetkinleştirilmesi bu yüzyılın önemli ürünleri arasında başlıcalarıdır.

mantıksal ya da felsefi sorunlar Dedekind'in ön planda tuttuğu sorunlar değildi. Bu tür sorunlar, gene bir matematikçi olan İtalyan G. Peano (1858-1932)'da önem kazanır. Öyle ki, matematiğin temelleri giderek onun başlıca uğraş konusu olur.

Peano da, Dedekind gibi, kavram ve yöntemlerde üstünlükten kurtulma, daha kesin ve belirgin olma çabasındaydı. Matematikte sağduyu ile sezgiye gereğinden fazla yer verilmesi tutumuna karşıydı. Hem sayı, hem fonksiyon kavramlarına, sezgisel anlamları ötesinde, daha kesin tanımlarla daha belirgin anlamlar verilmeliydi. Soyut matematik, sağduyu ve sezgiye dayanan gelişigüzel bir çalışma olamazdı; tersine, kendi içinde yeterli, formel ya da mantıksal bir sistem olmalıydı. Euclides'in geometride gerçekleştirdiği aksiyomatik kuruluşu, Peano aritmetikte ve giderek analizde gerçekleştirmeye koyulmuştu. Ancak o, Euclides sisteminde bilinen kusur ve eksikliklerden sakınma çabasındaydı. Ona göre, ne aksiyomlar zorunlu, apaçık doğrulardır; ne de ilkel terimler anlamları sezgisel ya da tanımla belirlenebilecek nesnelerdir. İlkel terimlerle onlara ilişkin özellikleri dile getiren aksiyomlar bir kez saptandıktan sonra geriye, teoremleri salt mantıksal yoldan çıkarsama kalır. Peano bu amaçla sıradan dil yerine, kullanışlılığı nedeniyle hemen benimsenen, simgesel bir dil önerir. Aynı şekilde, çıkarımların önceden konmuş kesin mantıksal kurallar çerçevesinde tutulmasında ısrar eder. Böylece onun öngördüğü sistem, belli dönüştürme (ya da çıkarım) kurallarıyla simgesel bir dile dayanan soyut bir kuruluştur.⁽⁷⁾

Peano'nun çalışmasında belirginleşen bu gelişmeyi Gottlob Frege (1848-1925)'nin kaleminden okuyalım:

Matematik, Euclides'te çarpıcı örneğini bulduğumuz sıkı ispat ölçütlerini bir süre gözardı ettikten sonra, yeniden bu ölçütlere dönme, hatta daha ilerisine geçme çabasına girmiştir. Bilindiği gibi, aritmetikte (belki de pek çok kavram ve yöntemlerinin Hindistan'dan kaynaklanması nedeniyle) Yunan geometrisinde ulaşılan sıkı ispata yönelik düşünme geleneği kurulamamıştır. Bu durum ileri analiz yönteminin bulunmasıyla daha da açığa çıkmış, çünkü yeni gelişmelerde sıkı ispat kaygısından büsbütün uzaklaşmıştır. Ne var ki, günümüzde tam tersine bir eğilim kendini göstermektedir. Artık uygulamadaki başarı bir kuram ya da yöntem için yeterli bir ölçüt sayılmıyor. Apaçık görünen pek çok şey için bile ispat istenmektedir. ... Ayrıca, fonksiyon, süreklilik, sonsuzluk ve limit gibi kavramların daha belirgin tanımlarla açıklığa kavuşturulması gereği ortaya çıkmıştır. Matematiğe çoktan yerleşmiş olan negatif ve irrasyonel sayıların da gerçeklik yoklamasından geçmesi gerekmiştir. Hangi yana bakılırsa bakılsın, sıkı ispat, açık tanımlama ve sınırlandırma arayışı tüm canlılığıyla kendini göstermektedir.⁽⁸⁾

(7) Peano ile 1900'de Paris Felsefe Kongresi'nde tanışan Russell'in izlenimleri ilginçtir: "Kongre entelektüel yaşamımda bir dönüm noktası oluşturdu; çünkü orada Peano ile tanıştım. Gerçi daha önce adını duymuş, kimi çalışmalarını görmüştüm; ama notasyonunu öğrenme çabasına girmemişim. Kongredeki konuşmalarda onun ötekilerden daima daha açık ve kesin olduğunu, giriştiği her tartışmada belirgin üstünlük kurduğunu gördüm. Çalışmalar ilerledikçe onun bu başarısını matematiksel mantık alanındaki çalışmasına borçlu olduğunu anladım. Kongre biter bitmez kendisinden aldığım yazılarını incelemeye koyularak, çalışmalarım için yıllardan beri aradığım yeni ve güçlü notasyonu öğrendim. (*The Autobiography of Bertrand Russell*, s. 144.)

(8) G. Frege, *The Foundation of Arithmetic*, Oxford, 1950. Peano'nun aritmetiği aksiyomatik bir dizge olarak kurma çalışmasına ileride değineceğiz. Ayrıca, bakınız: Carl G. Hempel, "Matematiksel Doğruluğun Niteliği", Ek 3.

Bu arayışın içinde, hatta başında, Frege'nin kendisi vardı. Matematiğin mantıksal temellerini derinlemesine irdeleyen Frege, aritmetiğe, geometrinin eriştiği düzeyin de ötesinde bir "ispat bilimi" kimliği kazandırmayı uğraşının başlıca amacı saymıştı. Matematik bir yandan daha sıkı bir mantıksal nitelik kazanırken, öte yandan ona sağlam bir temel bulma çabaları yer almaya başlar. Yüzyılımızın başlarında büyük yoğunluk kazanan bu çabalar, önceki yüzyıllarda ulaşılan sonuçları daha belirgin, tutarlı ve kesin kılmanın yanı sıra, matematiksel düşünme yöntemine de bir açıklık getirir. Artık matematiğe bir yığın formül, teknik bilgi ve teorem ispatı içeren soyut bir çalışma olmanın ötesinde bir düşünme yöntemi gözüyle bakılmaya başlanır. Bu gelişme içinde, matematiğin sağlam bir temele oturtulması yolundaki teknik çalışmalarla birlikte daha çok felsefi nitelikte birtakım çözümlemelerin de ağırlık kazandığı görülür.

Matematiğin temellerini yoklama ve kurmaya yönelik girişimler 1890'lı yıllarda Frege, Peano, Poincaré, Russell, Hilbert vb. düşünürlerin çalışmalarıyla ortaya çıkar. Tartışmalar çok geçmeden, "mantıkçılık", "sezgicilik" ve "formalizm" adlarıyla bilinen üç öğretiyi çevresinde toplanır. Tartışması günümüze değin süren bu görüşleri ele almadan önce, onlara yol açmada önemli rol oynayan bir başka bunalıma da kısaca değinmek gerekir.

Dördüncü Bunalım: Paradokslar

Yüzyılımızın başında patlak veren bu bunalım Cantor'un genel kümeler kuramına ilişkin paradokslardan kaynaklanır. Kümeler kuramında ortaya çıkan paradoksların tüm matematiği sarsması bir bakıma kaçınılmazdı; çünkü matematiğin büyük ölçüde küme kavramına dayandığı ya da bu kavrama indirgenebildiği söz konusuydu.

XIX. yüzyılın sonlarına doğru Cantor'un bulduğu bir paradoks, İtalyan matematikçisi Burali-Forti'ye ait daha önce bulunmuş benzer bir paradoksu izler.⁽⁹⁾ Cantor oluşturduğu kümeler kuramında herhangi bir sonsuz sayıdan daima daha büyük sonsuz bir sayının olduğunu ispatlamıştı. Bu, nasıl ki, en büyük doğal sayı diye bir sayı gösterilemezse, en büyük sonsuz sayı diye bir sayı da gösterilemez demektir. Şimdi olası tüm kümeleri kapsayan kümeyi düşünelim. Açık ki, tüm kümeleri içine alan bu kümeden daha fazla elemanı olan başka bir küme olamaz. Bu doğru ise, o zaman bu kümenin sonsuz olan sayısından daha büyük sonsuz bir sayı nasıl gösterilebilirdi?

Bertrand Russell (1872-1970)'ın 1901'de bulduğu, kendi adıyla anılan paradoks etkisi yönünden çok daha önemli ve sarsıcı nitelikte idi; çünkü Russell paradoksu doğrudan küme kavramından kaynaklanan bir paradokstu. Russell kümeleri kendi

(9) Cantor paradoksunu kısaca şöyle dile getirebiliriz: Tüm kümelerin kümesini düşünelim ve buna T diyelim. T 'nin alt kümelerini içine alan kümeye ise A dersek, A 'nın kardinal sayısının T 'ninkinden daha büyük olduğunu (Cantor teoremi gereği) biliyoruz. Oysa, T , tanımı gereği, tüm kümeleri kapsamaktadır. A 'nın kardinal sayısının daha büyük olması, tüm kümeleri kapsayan kümeden daha büyük bir kümenin olduğunu gösterir ki, bu açık bir çelişki demektir.

kendisine üye olup olmamasına göre ikiye ayırarak, paradoksunu oluşturur. Bir yanda tüm kümelerin kümesi, tüm soyut kavramları içine alan küme gibi kendi kendisinin üyesi olan kümeler vardır. Öte yanda çocuklar kümesi, ülkeler kümesi, yıldızlar kümesi gibi kendi kendisinin üyesi olmayan kümeler vardır. Gerçekten tüm çocukları kapsayan küme bir çocuk değildir; gene tüm ülkeleri içine alan küme de bir ülke değildir. Oysa, tüm kümelerin kümesi bir kümedir; tüm soyut kavramları içeren küme de soyut bir kavramdır. Kendi kendilerine üye olmayan kümelere “normal kümeler”, kendi kendisine üye olan kümelere de “anormal kümeler” diyelim. Şimdi tüm normal kümeleri içine alan bir küme düşünüp buna, N diyelim ve soralım: N normal bir küme midir? Yanıtımız ister “evet”, ister “hayır” olsun, çelişkiye düşmekten kurtulamayız. N normal ise, anormal; anormal ise, normal demektir.⁽¹⁰⁾

Russell paradoksu, kümeler teorisinde matematik için sağlam bir temel bulunduğu düşüncesine beklenmeyen bir darbe indirir. Nitekim aritmetiği mantığa indirgeme yoluyla sağlam bir temele oturtma çabasını sürdüren Frege, Russell paradoksunu öğrenince duyduğu hayal kırıklığını, “aritmetik sendeliyor” diyerek şöyle dile getirir:

Bir bilim adamı için tamamladığı çalışmasının dayandığı temelin birden çökmesi kadar hiçbir şey daha tatsız olamaz. Yapıtım tam basımevinden çıkmak üzereyken Bertrand Russell'den aldığım bir mektup benim için işte böyle bir tatsızlık yarattı.⁽¹¹⁾

Bugün bile doyurucu bir çözüme kavuştuğu söylenemeyen bu ve daha sonra ortaya çıkan benzeri paradoksların, değişik biçimlerde, Antik dönemde de ortaya atıldığını biliyoruz. Bunlardan “yalancı paradoksu” diye bilineni ünlüdür. Kendisi de Giritli olan Epimenides (İ.Ö. 6. yüzyıl),

Tüm Giritliler yalancıdır.

(10) Russell paradoksunun popüler bir örneğini Russell kendisi vermiştir: Uzak ve sapa bir köyün berberi, kendini tıraş etmeyen köylüleri ve yalnız onları tıraş edermiş. Bu berberi kim tıraş edecek? Yanıt ne olursa olsun, sonuç çelişkiye yol açar: Berber kendisini tıraş ederse tıraş etmeyecek, etmezse tıraş edecektir. Peki bu çelişkiden kurtulma yolu yok mudur? Yakından bakıldığında çelişkinin yanlış bir varsayımdan doğduğu görülür: Köyde kendini tıraş etmeyen ve yalnız bunları tıraş eden bir berberin var olabileceği. Böyle bir berberi var saydığımız an çelişki kaçınılmaz olur. Burada mantıkçıların “olmayana ergi” dedikleri yöntemin tipik bir örneğini bulmaktayız. Olmayanı var, ya da yanlış doğru saymanın yol açtığı çelişki. Russell'ın kümelere ilişkin paradoksunun kökeninde de aynı şeyi görmekteyiz: Çelişki, kendi kendisinin üyesi olmayan kümelere (boş ya da dolu) varsaymaktan kaynaklanmaktadır. Denebilir ki, küme oluşturma ilkesi (üyelik koşulu) gözardı edilmedikçe ona göre oluşan kümeyi yok sayma yoluna gidemeyiz. Öyledir, ancak üyelik koşulu, Russell paradoksunda olduğu gibi, kendine yollamalı ise, bu yola gidebiliriz. Belki de bu nedenle Russell paradoksuna karşın, matematikte kümelerin ikincil (talı) araç olarak kullanılmasından vazgeçilmemiştir. (Bkz. W. V. Quine, “Paradox” in *Mathematics in the Modern World*, Morris Kline, (ed.), s. 200-207).

(11) Frege'nin sözünü ettiği yapıt, 1903'te yayımlanan *Grundgesetze der Arithmetik* (Aritmetiğin Temel Yasaları) adlı kitabıdır.

demiş. İlk bakışta bir çelişki gibi görünen, yüzyıllar boyunca öyle sayılan bu önerme aslında tam bir paradoks içermemektedir. Gerçi önerme doğruysa, yani Giritlilerin hepsi gerçekten yalancı ise, bir Giritli olan Epimenides'in savı doğru olamaz; öyleyse söylediği yanlıştır; yani Giritlilerin hepsi yalancı değildir. Ama bu tüm Giritlilerin, bu arada Epimenides'in, doğru söylediği demek değildir. Oysa çelişki içeren bir önerme ya da sav doğru sayıldığında yanlış, yanlış sayıldığında doğru çıkmalıdır. Nitekim bu nitelikte bir paradoksu, Epimenides'ten iki yüzyıl sonra gelen Eubulides'in şu önermesi sergilemektedir:

Bu söylediğim yanlıştır.

Gerçekten bu önermeyi doğru ise yanlış, yanlış ise doğru saymak gerekir. Epimenides de, "Ben şimdi yalan söylüyorum," deseydi, söylediği tam bir paradoks oluşturdu.

Yukarda da belirttiğimiz gibi, kümeler kuramına ilişkin paradokslar matematik dünyasında büyük bir rahatsızlık yaratıyordu. Öyle ki, paradokslara bir çözüm bulunmalıydı, yoksa kümeler kuramından vazgeçmek gerekecekti. Ne ki, matematikçilerin kümeler kuramını bir yana itmeleri söz konusu olamazdı. Ünlü matematikçi Hilbert, "Hiçbir güçlük bizi Cantor'un yarattığı cennetten çıkaramaz," diyordu.

Russell, paradokslar karşısında duyduğu zihinsel sıkıntısını daha sonra şöyle dile getirmiştir:

Cantor "en büyük" diyebileceğimiz bir sayının olmadığını ispatlamıştı. Oysa ben evrendeki tüm nesnelerin sayısının olası en büyük sayı olması gerektiğini sanıyordum. Bu nedenle Cantor'un ispatını oldukça yakından inceleyerek var olan tüm şeylerin kümesine uyguladım. Bu irdeleme beni kendi kendisinin üyesi olmayan kümeleri gözden geçirmeye, bu kümelerin kümesinin kendi kendisinin üyesi olup olmadığını sormaya yöneltti. Gördüm ki, yanıt ister olumlu, ister olumsuz olsun, iki halde de bir çelişkiye yol açmaktadır. Başlangıçta bu çelişkiden kolayca kurtulabileceğimi sanmıştım: Sıkıntının kökeninde basit bir akıl yürütme hatası olmalıydı. Ne var ki, giderek bunun hiç de böyle olmadığını anladım. Benzer bir çelişkiyi Burali-Forti daha önce ortaya koymuştu. Mantıksal çözümleme, kümelerle ilişkin bu çelişkilerin, "yalancı paradoksu" diye bilinen Epimenides paradoksuna benzerliğini gösteriyordu. Bu türden bir çelişkiye şöyle bir örnek oluşturulabilir: Size uzatılan bir kâğıt parçası üzerinde,

"Bu kâğıdın arka yüzündeki önerme yanlıştır."

cümlesini okuyorsunuz. Kâğıdı çevirdiğinizde bu kez,

"Bu kâğıdın arka yüzündeki önerme doğrudur."

cümlesiyle karşılaşıyorsunuz.

O sıra önemsiz saydığım bu tür şeylere takılıp kalma, yetişkin bir kimse için yakışık almayan bir zaman israfı gibi görünüyordu bana. Ancak ne yapabilirdim ki? Bir yerde bir hata vardı; çünkü sıradan öncüllere dayanan bu tür çelişkiler ister istemez karşımıza çıkıyordu. Önemsiz görünse de çözüm bekleyen bir şeydi bu! 1901 yılının ikinci yarısı boyunca çözüme kolayca ulaşabileceğim inancıyla uğraştım. Ancak yıl sonuna doğru anladım ki, problem gerçekten çok büyüktü.⁽¹²⁾

(12) B. Russell, *The Autobiography of Bertrand Russell*, 1872-1914, s. 147.

Russell'ın aradığı çözüm herhangi bir çözüm değildi kuşkusuz. Getireceği çözümün tümüyle doyurucu olması için üç temel koşulu karşılaması gerektiği üzerinde duruyordu. Bunlardan vazgeçilmez saydığı ilk koşul, çözümün çelişkiyi giderici nitelikte olması idi. Mantıksal yönde vazgeçilmez olmamakla birlikte önemli saydığı ikinci koşul matematiği yıpranmaktan korumaktı. Üçüncü koşul, mantıksal ortak duyuya aykırı düşmeyen, beklentiye uygun bir çözüm bulmaktı.⁽¹³⁾

Russell, 1903 ve 1904 yıllarını bu üç özelliği taşıyan bir çözüm bulma çabası içinde geçirir.

Paradokslardan kurtulma yolunda ortaya atılan çözüm önerileri içinde önemli sayılan iki tanesine değinmekle yetineceğiz. Bunlardan biri, matematikçiler açısından daha kestirme ve kolay görünüyordu: Kümeler kuramını hiçbir kuşku ya da eleştiriye yer vermeyecek şekilde, iyice sınırlandırılmış aksiyomatik bir sistem olarak kurmak. Bu yönde ilk girişim, 1908'de, Zermelo'dan gelir. Onu Fraenkel, Skolem, von Neumann ve Bernayes gibi araştırmacılar izler. Ne var ki, aksiyomatikleştirmenin yeterince etkili bir çözüm olmadığı, üstelik paradoksları çözmeye değil, önlemeye yönelik olduğu çok geçmeden görülür. Kaldı ki, aksiyomatikleştirmenin sağladığı önlemin yeni bazı paradokslarla karşılaşmayacağımızı güvence altına aldığı da kesin değildi.

İkinci öneri, paradoksları hem önlemeye, hem de açıklamaya yönelik görünmektedir. Poincaré, kümelerle ilişkin paradoksların, döngül tanımlamadan kaynaklandığı görüşündeydi. Bilindiği gibi, bir kümeyi elemanları belirler. Elemanlardan herhangi birini kümeye başvurarak belirleme yoluna gittiğimizde, döngül bir tanımlamaya düşmüş oluruz. Russell'in berber paradoksunu ele alalım: Köyün berberini, kendini tıraş etmeyenleri ve yalnız onları tıraş eden biri olarak belirlemek döngül bir tanımlamadır. Çünkü, berber, kendisini de içeren kümenin bir alt-kümesine başvurularak belirlenmektedir. Poincaré'nin bu görüşünü paylaşan Russell bu tür döngül tanımlamanın yol açtığı paradokslara, "döngül açmaz ilkesi" dediği bir yasaklama getirir. Buna göre, bir kümede, ancak o kümeye başvurularak tanımlanabilen elemana yer yoktur. Şöyle ki, yurttaşlarla onlardan oluşan ulusu bir tutamayacağımız gibi, kümelerle onlardan oluşan kümeler kümesini bir tutmaktan da kaçınmalıyız. Böylece, paradokslara yol açan kendi kendilerinin elemanı olan kümelerden söz etmekten kaçınma gereği bir kural olarak ortaya çıkmaktadır.⁽¹⁴⁾ Kuşkusuz bu kural küme kavramını sınırlayıcı niteliktedir. Ancak, Cantor'un genel küme kavramının yol açtığı paradoksları önlemek için böyle bir sınırlamayı göze almak kaçınılmaz görünmektedir. Ne var ki, bu çözüm de birtakım itirazlara yol açmaktan geri kalmamıştır. İtiraz sesini yükseltenler arasında başta, matematikte döngül tanımlamayı içeren çözümlerden vazgeçmeyi göze alamayan matematikçileri görmektediriz.

Sıkıntının kökenini mantıkta arayanlar da çıkmıştır. İki değerli standart mantık yerine üç değerli mantık koyarak, çelişkiye yol açıcı "kendine yollamalı" önermeleri

(13) B. Russell, *My Philosophical Development*, s. 79-80.

(14) Paradoksları önlemeye yönelik "Tipler Teorisi"ne VIII. BÖLÜM'de değineceğiz.

doğruluk değeri yönünden *belirsiz* (yani, ne doğru ne de yanlış) saymak yoluna gidilebilir. Ancak, bu çıkış yolunu içeren üç-değerli mantığın gereken ilgiyi yeterince topladığı söylenemez.

Paradokslar sorununa, çeşitli çaba ve çözüm önerilerine karşın, henüz üzerinde herkesin birleştiği bir çözüm getirilememiştir. Şu kadar ki, sorunun matematikçilerle filozofları, sözcükleri kullanmada, önermeleri oluşturmada daha dikkatli ve titiz davranmaya itmekle birlikte, dikkatleri matematiğin temellerine yöneltmekle de son derece yararlı bir sonucu olduğu yadsınamaz.⁽¹⁵⁾

Matematikte empirik bilimlerin ilerlemesinde benzer ve farklı yanlar vardır. İki alanda da genellikle her atılım bir bunalımı izler. Ne var ki, bilim, hiç değilse kuramsal düzeyde, kümülatif değildir. Yeni teori, çözüm getirdiği bunalıma yol açan eski yerleşik teoriyle temelde bağdaşmaz niteliktedir. Oysa matematikte ilerleme büyük ölçüde kümülatif niteliktedir. İrrasyonel sayılar rasyonel sayıların, sanal sayılar gerçel sayıların yadsınmasını gerektirmemiştir. Tam tersine, matematikteki her atılım, daha önce ulaşılmış olan birikime dayalı bir açılma, ya da genişleme demek olmuştur.⁽¹⁶⁾

(15) Paradoksların yol açtığı bunalıma Gödel teoremlerinin getirdiği yeni boyuta VIII. BÖLÜM’de yer vereceğiz.

(16) Matematikteki bunalımlar için bkz. EK: 11.

VIII. BÖLÜM

MATEMATİĞİN TEMELLERİNE İLİŞKİN FELSEFİ GÖRÜŞLER

Giriş

Filozofların matematikle ilgilenmeleri Antik Yunan döneminden beri sürüp gelen bir olaydır. Platon, geometri bilmeyeni Akademi'sine almıyordu. Modern felsefenin kurucusu Descartes aynı zamanda seçkin bir matematikçiydi: Analitik geometriyi en başta ona borçluyuz. Kalkülüsü oluşturan iki bilginden biri XVII. yüzyılın tanınmış filozofı Leibniz'di (diğeri Newton'dur). Sonsuz küçükler teorisine yönetilen ilk ciddi eleştirinin bir filozof olan Berkley'den gelmiş olması da bir rastlantı değildir. Felsefe ile matematiğin ilişkisi, bu örneklerden de görüleceği gibi, Pragmatist felsefenin kurucusu C. S. Peirce'in, "Metafizik sürgit matematiğin taklitçisi olmuştur," yargısının tersine, salt özenti olmaktan ileri bir şeydir. Kaldı ki, matematiğin bunalıma girdiği kimi dönemlerde matematikçilerin de az çok felsefeye başvurduklarını biliyoruz. Özellikle, yüzyılımızın başlarında felsefeye bu yöneliş son derece yoğun bir biçimde ortaya çıkmıştır.

Daha önce de değindiğimiz gibi,⁽¹⁾ geçen yüzyılın ikinci yarısında ortaya çıkan kimi gelişmeler, matematiğin temellerine ilişkin felsefi ilgiyi geniş ölçüde artırır. O dönemin sonunda matematiğin içine düştüğü bunalıma yol açan gelişmeleri başlıca iki başlık altında toplayabiliriz:

- (1) Euclides-dışı geometrilerin ortaya çıkışı. Bu olay matematiğin doğruluğu zorunlu ya da apaçık aksiyomlara dayandığı görüşünü çökertir.
- (2) Kümeler teorisinden kaynaklanan paradokslar ve bunlara doyurucu bir çözümün bulunamaması.⁽²⁾ Matematiğin tutarlılığına ilişkin genel bir ispatın yokluğuyla birleşen bu olay, matematiğe duyulan geleneksel güveni temelinden sarsar.

(1) Bkz. VII. BÖLÜM: MATEMATİKTE BUNALIMLAR.

(2) Poincaré kümeler teorisinden kaynaklanan sıkıntıyı bir soruyla şöyle dile getirmiştir: "Kümeler teorisinin koyunları için yaptığımız ağıla koyunlarla birlikte bir de kurt mu kapatmış olduk, acaba?"

Her iki gelişme de, klasik matematik etkinliği dışında yeni bir arayışa, “felsefi çözümleme” diyebileceğimiz bir yaklaşıma yol açacak nitelikteydi. Nitekim yüzyılımızın başlarında kimi matematikçi filozofların, matematiğin temellerini yoklama, matematiğe daha sağlam bir temel oluşturma çabasına girdiklerini görmekteyiz. Weirstrass’ın, kalkülüs’ü sayı kavramını irdeleyerek sağlam bir temele oturtmuş olması, yeni temellendirme çalışmaları için bir tür model oluşturunuyordu. XIX. yüzyılın son yirmi yılında Frege ve Peano ile başlayan çalışmalar daha sonra Russell, Poincaré, Hilbert ve Boruwer gibi seçkin matematikçiler arasında yoğun tartışma konusu olmaya başlar, sonunda “Mantıkçılık” (Logicism), “Biçimcilik” (Formalism) ve “Sezgicilik” (Intuitionism) diye oluşan üç temel öğretinin çatışmasına dönüşür. Tartışması günümüzde de süren bu öğretileri gözden geçirmeyi yararlı görmekteyiz.

Mantıkçılık

Matematiğe sağlam bir temel oluşturma yolunda en gözcücü felsefi girişimin mantıkçılık olduğı söylenebilir. Gottlob Frege’nin (1848-1925) öncülüğünde belirgin bir kimlik kazanan mantıkçılık, kökeni daha gerilere uzanan bir görüştür. Daha XVII. yüzyılda Leibniz mantıkçılık tezini andıran düşünceler ileri sürmüştü. Ona göre, mantığın kavram ve ilkeleri tüm diğer bilimlerin temelinde yer alan düşünceleri oluşturunuyordu. Frege’den hemen önce çağdaşı tanınmış matematikçi R. Dedekind’in aritmetiği mantıksal bir yöntemle ele aldığını biliyoruz. Frege’nin yaklaşımı daha kesindi: Aritmetik mantığa indirgenerek temellendirilmeliydi. Bu yaklaşım bir yandan matematiği empirik bir bilim sayan J. S. Mill’in görüşüne, öte yandan matematiksel önermeleri sentetik *a priori* doğrular sayan Kant’ın öğretilerine ters düşmekteydi. Frege’nin mantıkçılık diye bilinen bu tezi çarpıcı olduğı kadar özünde basittir: Matematik temelde mantıkla özdeştir. Frege aritmetiği, Russell ise tümüyle matematiği mantığa indirgeme (ya da mantığın bir uzantısı olarak gösterme) yolundan mantıkçılık tezini ispatlamaya koyulurlar. Girişimin gerçeklik kazanması şu iki koşulun yerine getirilmesine bağılı görölmüştür:

- (1) Tüm matematiksel kavramların (daha doğrusu bu kavramları belirleyen terimlerin) salt mantıksal terimlerle belirtir tanımlarını vermek;
- (2) Matematiğin tüm aksiyom ve teoremlerini mantığın temel ilkelerinden çıkarsamak.

Bir tanımlama sorunu olan ilk koşul, her şeyden önce, tanımlayıcı olarak kullanılacak mantık terimlerinin belirlenmesini gerektirmekteydi. Bunlar, örneğin, “mantıksal değişmezler” denen “değil”, “ve”, “veya”, “ise”, “tüm”, “bazı” gibi hiçbir bağlamda vazgeçilemeyen sözcüklerdir. Frege’den önce kimi matematikçiler matematiksel kavramlar arasındaki ilişkilerle ilgilenmiş, aritmetiğin tüm kavramlarının doğal sayılara (1, 2, 3, ...) indirgenebileceğini göstermişlerdir.⁽³⁾ Mantıkçılığa

(3) Kronecker’in “Doğal sayıları Tanrı’ya borçluyuz; gerisi insanoğlunun ürünüdür,” sözü bu indirgemeye yollama olarak yorumlanabilir.

kalan iş doğal sayıları mantık terimleriyle dile getirmektir. Frege sayı kavramını küme kavramının yanı sıra eşdeğerlilik ilişkisine başvurarak tanımlama yoluna gider. Ona göre, elemanları tam bire-bir karşılıklı içinde olan iki küme eşdeğerdir. Örneğin, bir pardesüdeki düğmelerin kümesiyle iliklerin kümesi eşdeğer kümelerdir. “Bir kümenin sayısı”, kendisine eşdeğer olan tüm kümelerin kümesi demektir. Örneğin, 2 sayısı tüm çift elemanlı kümelerin kümesi olarak tanımlanır. Çift elemanlı her küme (örneğin, bir çift çorap, bir çift kumru, vb.) 2 sayısının somut bir örneğidir; ama 2 sayısı bu türden somut örneklerin tümünü kapsayan kümedir. Sayı ise daha genel bir kavram olup, her biri bir küme oluşturan 0, 1, 2, 3, ... gibi tikel sayıların tümünü içine alan kümedir. Buna göre, her tikel sayı, sayının bir örneğidir.

Mantıkçıların benimsediği bu tanımlama, ne var ki, birtakım eleştirilere uğramaktan geri kalmamıştır. Bunlara daha sonra değineceğiz.

Frege'nin yanı sıra G. Peano'nun (1858-1932) bir yandan aritmetiği aksiyomatik bir sistem olarak kurması, öte yandan bu sistemin önermelerini (postulat ve teoremlerini) son derece işlek bir notasyonla dile getirmedeki başarısı mantıkçılığa önemli bir güç sağlar. Peano'ya gelinceye dek aritmetik, geometride iki bin yıl önce gerçekleşmiş olan mantıksal düzenlemeye uzak kalmıştır. İlk kez Peano tüm aritmetiği üç ilkel terime (“sayı”, “sıfır”, “...ni izleyen”) ve bu terimlerin ilişkilerini dile getiren beş postulata (1. Sıfır bir sayıdır, 2. Herhangi bir sayıyı izleyen de bir sayıdır, 3. Aynı sayıyı farklı iki sayı izlemez, 4. Sıfır hiçbir sayıyı izlemez, 5. Sıfıra ait bir özellik, herhangi bir sayıya ait olduğunda onu izleyen sayıya da aitse, tüm sayılara aittir) dayanan bir sistem olarak kurar.⁽⁴⁾ Yakından bakıldığında Peano postulatlarının birlikte doğal sayılar türünden dizileri tanımlamakta olduğu görülür. Seçilen dizi bir sayı olan, ama hiçbir sayıyı izlemeyen “sıfır”la başlamaktadır. Dizide her sayıdan sonra gelen de bir sayıdır, ancak farklı iki sayıyı aynı sayı izlemez. Postulatardan sonuncusu dizideki tüm elemanlara ait özellikleri saptayan “matematiksel induksiyon” ilkesini sunmaktadır.

Peano postulatlarının sağladığı ekonomiye karşın mantıksal yönden tümüyle doyurucu olduğu söylenemezdi. Matematik bunlar gibi başka postulatlar üzerine de kurulabilirdi. Bu demektir ki, ilkel terim ve postulatların seçiminde Peano belli bir zorunluğa bağlı kalmamıştır. Nitekim Peano'nun kendisinin postulatlarını gerekçelendirme yolunda herhangi bir çaba içine girdiğini görmüyoruz. Gerekçelendirmeyi bir sorun olarak Frege ele almıştır.

Frege, Peano postulatlarını (dolayısıyla aritmetiği) mantık ilkelerinden çıkarsama yoluyla temellendirmeye koyulur. Böyle bir çıkarsama hem keyfilik izlenimini silmeye, hem de aritmetiğin mantığa indirgenebileceğini göstermeye yarayacaktı. Bu arada özellikle sayının mantık terimleriyle tanımı verilerek sayı kavramı bulanıklıktan kurtarılmış olacaktı. Aritmetiği mantığa indirgeme çalışmasında başlıca sorunu “sayı”nın açıklığa kavuşturulması olarak gören Frege şöyle diyor:

(4) Peano'nun kurduğu sistem için ayrıca bakınız: EK 3 “Matematiksel Doğruluğun Niteliği,” Carl G. Hempel.

Matematikte sayının ne olduğu üzerinde bugüne değin bir açıklığa ulaşılamamış olması bir skandaldır. Sayının herkesin kabul ettiği bir tanımının olmayışı hoş karşılanabilir, yeter ki, sorun üzerinde genel bir anlayış olsaydı. Oysa, sayının bir nesneler kümesi mi, yoksa karatahta üstünde insan eliyle çizilen bir şekil mi; psikolojiden öğrenmemiz gereken ruhsal bir nesne mi, yoksa mantıksal bir yapıt mı; gelip geçici bir icat mı, yoksa sonsuza dek sürecek bir varlık mı ... olduğu bile belirlenmiş değildir. ... Matematik kendi önermelerinin içeriğini oluşturan düşünceyi, daha doğrusu inceleme konusunu bilmemekte, uğraştığı nesnelerin doğasını anlamaktan uzak kalmaktadır. Peki, bu bir skandal değilse nedir?⁽⁵⁾

Gerçekten, Frege'ye gelinceye dek sayıya ilişkin verilmiş tanımların hemen tümü mantıksal yetersizlik içindeydi. Pek çok matematikçinin gözünde sayı ile çokluk özdeş kavramlardı. Sayı, 2, 3, 5, ... gibi tikel sayıları, yani elemanları çokluk olan kümeleri içine alan kümedir. Her tikel sayı kümesi olduğu çokluktan, sayı ise kümesi olduğu tikel sayılardan daha üst düzeyde soyut bir kavramdır. Russell, Frege'ye borçlu olduğumuz bu çözümlemeden önce sayı ile çokluğun karıştırılmasını, sayı kavramını tam bir belirsizlik içinde tutan bir "saçmalama" olarak nitelemiştir.⁽⁶⁾

Frege'nin sayıya ilişkin getirdiği kavramsal çözümleme ışığında Peano postulatları aritmetiğin (giderek tüm matematiğin) mantığa indirgenmesinde aranan olanağı taşıyor görünüyordu. Postulatları oluşturan üç ilkel terimden biri, "...ni izleyen", zaten mantıksal bir terimdi. Diğer iki terimin, "sıfır" ile "sayı"nın mantık terimleriyle tanımlanmaları sorunu çözmeye yetecekti. Üstelik, "sıfır"ın bir sayı olarak belirlenmiş olması, sorunu daha da basitleştirmekte, yalnızca "sayı"nın tanımıyla yetinmeye olanak vermekteydi. Frege'nin, sayıyı belli bir kümeye benzer ya da ona eşdeğer tüm kümelerin kümesi, "sıfır"ı da tüm boş kümelerin kümesi diye tanımlayarak bu işi başardığı söylenebilir.⁽⁷⁾

Frege ile Peano'nun çalışmaları mantıkcılığın ilk aşamasını oluşturur. İkinci aşama Bertrand Russell (1872-1970) ile başlar. Russell çalışmasını önce 1903'te yayımlanan *Principles of Mathematics* adlı yapıtında, daha sonra A. N. Whitehead (1861-1947)'le ortak yazarı olduğu ve modern mantığın anıtsal yapıtı sayılan *Principia Mathematica* (üç cilt, 1910-1913)'da ortaya koyar. Russell, matematiğin mantığa indirgenmesi ötesinde iki disiplinin özdeş olduğu tezinin tüm kapsamıyla *Principia Mathematica*'da kanıtlandığı savındadır. Frege'de olduğu gibi Russell'in çalışmasında da hareket noktasını Peano postulatları oluşturur. Bu ise öncelikle gerçel sayıların doğal sayılara, doğal sayıların küme kavramına indirgenmesi demektir. Ne

(5) G. Frege, *Über die Zahlen des Herrn H. Schubert* (Bay Schubert'in Sayılarına İlişkin Düşünceler).

(6) Bkz. B. Russell, *History of Western Philosophy*, s. 830.

(7) Bu tanımın birtakım eleştirilere yol açtığına değinmiştik. Bir kez sıfırdan sonra gelen sayılara gelindiğinde, tanımın döngül olduğu kuşkusunu iyice güç kazanmaktadır. Örneğin, 2 sayısını çift elemanlı kümelerin kümesi diye tanımladığımızda, üstü örtük de olsa iki kavramına başvurulmamakta mıdır? Nitekim başta Poincaré olmak üzere kimi matematikçilerin bu noktaya dikkat çektiklerini biliyoruz. Sonra, sayılar küme kavramına indirgendiğinde toplanma özelliklerini yitirmektedir. Gerçekten elemanları çift olan kümelerin kümesiyle elemanları birim olan kümelerin kümesi nasıl toplanabilir? (İlginçtir, sayıların toplanamayacağını Platon yaklaşık 2400 yıl önce söylemişti.)

var ki, kümeler teorisinin yol açtığı paradokslar mantıkçılık için beklenmedik bir sorun yaratmıştı. Russell bu soruna çözüm getiren “Tipler Teorisi”ni oluşturur. Tipler teorisi, kısaca demek gerekirse, kümeler teorisinin konusu nesnelerin hiyerarşik bir düzende işlem görmesini öngörmektedir. Buna göre çoklukları oluşturan asal nesneler 0 (sıfır)-tipini, asal elemanları içeren kümeler 1 (bir)-tipini, 1-tipindeki nesneleri içeren kümeler 2-tipini, vb. oluşturur. Kümeler teorisinin uygulamasında tiplerin karıştırılmaması, işlem gören kümenin tüm elemanlarının aynı tipten olması kuralına bağlı kalınması gereği vardır. Tartışmalı kimi yanlarına karşın, tipler teorisinin döngül tanımlara düşmeyi, dolayısıyla buna bağlı paradoksların oluşmasını önlediği söylenebilir. Ancak teorinin kümeler teorisinde başka türden paradoksların ortaya çıkmayacağını güvence altına aldığı kolayca söylenemez. Kaldı ki, kimi yazarların belirttiği gibi, tipler teorisi Epimenides paradoksu gibi semantik türden paradoksların çözümü için elverişli bir yöntem değildir.⁽⁸⁾

Mantıkçılığın yadsınamaz önemli bir başarısı, formel mantıkla matematiğin ilişkisini kanıtlamanın yanı sıra, tüm klasik matematiğin tek bir formel sisteme indirgenme olanağını göstermiş olmasıdır. Bu sonuç, Hilbert gibi mantıkçılık tezini benimsemeyen matematikçi düşünürlerin de gözünden kaçmamıştır. Çünkü, öyle formel bir sistem, her şeyden önce, matematikte aranan tutarlılığı göstermesi bakımından önemliydi.

Eleştirisi

Mantıkçılığı değerlendirirken eleştirel nitelikte birkaç noktaya değinmeden geçmemeliyiz. Bu noktalardan biri matematiksel kesinliğin doğasına ilişkindir. Mantıkçılar, Kant’ın tam tersine, matematiğin bir konusu olmadığı, yalnızca analitik nitelikte kavramsal ilişkilerle uğraştığı sayılıştından hareket ediyorlardı. Onlara göre matematiksel doğruluğun kesinliği, matematiğin tümüyle dedüktif olan mantıksal temelinden kaynaklanan totolojik bir kesinliktir. Matematiksel kesinliği insan aklının yapısal özelliğine ya da sezgi yetisine bağlayan matematikçi düşünürlerin (örneğin, Poincaré’nin) matematiği totolojik bir dizge sayan mantıkçılık tezini benimsemeleri beklenemezdi kuşkusuz. Nitekim Poincaré, matematiksel kesinliği, matematiğin dedüktif olduğu savıyla değil, “matematiksel induksiyon” ilkesiyle açıklamaktadır. Onun gözünde bu ilke, “akıl” denen zihinsel yetenek ya da sezginin bir ürünüdür. Matematiğe verimli ve yaratıcı bir çalışma kimliği kazandıran şey mantık değil, akıl ya da sezgimizin temel özelliğini yansıtan matematiksel induksiyon türünden düşünme biçimleridir. Böyle bir ilkeye başvurmaksızın matematiği mantığa indirgemeye olanak yoktur. Sezgiye yer vermeyen matematikte yeni buluşlara gitme şöyle dursun, ispat bile yapılamaz. Başvurulduğunda ise (ki mantıkçılığın yaptığı budur) ortaya konan indirgeme döngül bir çıkarım olmaksızın ileri geçmez.⁽⁹⁾

(8) S. F. Barker, *Philosophy of Mathematics*, s. 87.

(9) H. Poincaré, *Science and Method*, s. 143-150. (Mantıkçılığa bir tür savaş açan Poincaré, mantıkçılığı yeni buluşlara kapı açan bir hareket olarak öven Louis Couturat’ı küçümsemekten kendini

Mantıkçılığa karşı çıkanlardan biri de, o gelenek içinde yetişmiş Wittgenstein'dir. Mantık, ona göre, matematiği anlamamız için yeterli bir araç değildir; yeterli olsa bile bizim mantık bilginin bu iş için yeterli olduğu söylenemez.

Wittgenstein'i izleyen Waismann'ın itirazları daha kesindir:

Kanımcı matematiği totolojilerden ibaret görmek yanlıştır. Matematik, mantığın bir kolu değildir; tümüyle bağımsız, kendi kurallarına dayanan bir çalışmadır. Matematiğin mantığa indirgenmesiyle daha sağlam bir temel kazanacağı inancı, bütünüyle bakıldığında, sadece bir yanılgıdır. Ayrıntılara girmeksizin, ... bugün yeni bir yorumun olanak kazandığını belirtmekle yetineceğiz. Buna göre matematik, ne empirik önermelerden, ne de Frege, Russell, Ramsey, Hahn, Carnap vb. düşünürlerin ileri sürdüğü gibi analitik (totolojik) önermelerden oluşmaktadır. Bize kalırsa, matematik, serbestçe seçilen birtakım varsayımlardan çıkarımlar geliştiren bir dizi dedüktif sistemlerden oluşur. Mantık o sistemlerden yalnızca biri olup, onlardan hiçbirinden daha önemli değildir. Bu görüş temelde aksiyomatik niteliktedir. ... Şu kadarı kesinlikle söylenebilir: Bugün artık matematiğin bütünüyle Peano postulatları türünden birkaç önermenin zorunlu sonucu olduğu; öyle ki, bu postulatlar doğrulandığında tüm sistemin doğrulanmış olacağı söylenemez. Matematiği bir tek değil birçok sistem oluşturmaktadır. Bu nedenle, Peano aksiyomlarını salt mantıksal önermelere indirgeme girişimi değerini büyük ölçüde yitirmiştir. ... Biz aritmetiği kurallarını bularak betimleyebiliriz; ama bu kuralları temellendiremeyiz. Bulunacak bir temel başka bir temeli gerektireceğinden işin içinden çıkamayız.⁽¹⁰⁾

Mantıkçılığın eleştirisi günümüzde de sürmektedir. Örneğin, Steiner, aritmetiğin indirgendiği teoriyi (bu, ister salt mantık olsun, ister kümeler teorisi gibi salt mantıksal olduğu kuşkulu olan bir teori olsun) aritmetikten daha az kesin saymaktadır. Gerçekten sayıları küme kavramına indirgemenin matematiğe daha sağlam bir temel oluşturduğu pek çok kimsenin gözünde kuşku konusudur. Kaldı ki, her şeden önce kümeler teorisinin, matematiğin değil mantığın bir parçası olduğu ortaya konmalıydı. Bu nokta bugün bile açıklığa kavuşturulmuş değildir.⁽¹¹⁾ Steiner için matematiğin mantığa (ya da kümeler teorisine) indirgenmesi gerçeklik kazansa bile bunun istenen güven ve yararı sağlayacağı kuşku konusudur. Çünkü kümeler teorisinin kendisi çeşitli yönlerden yetersizlik içindedir. Bir kez bu teori, kimi varlık varsayımlarının yanı sıra, süreklilik (continuum) hipotezi türünden belirsiz önermeler içermektedir. Sonra, teorisinin yol açtığı, bundan sonra yol açabileceği paradokslara kesin, genel bir çözümün bulunduğu ileri sürülemez. Tipler teorisinin is-

alamaz: "Mösyö Couturat son derece çocukça hayaller içindedir. Ona bakılırsa mantıkçılık araştırmacıya yeni ufuklara açılma kanadı sağlamıştır. Oysa ben, tam tersine, mantıkçılığa araştırmacı için köstekten başka bir şey görmüyorum. Üstelik bu öğreti daha kesin olma yönünde bize bir şey sağlamamaktadır. 1'in bir sayı olduğunu ispatlamak için 27 denklem gerektiren bu öğretilerde gerçek bir teoremin ispatı için kaç denklem gerekecektir, acaba?") Aynı kaynak, s. 177-178.

(10) F. Waismann, *Introduction to Mathematical Thinking*, s. 118-122.

(11) İndirgemeyi başka bir açıdan savunan Quine, sayı teorisini kümeler teorisine indirgeme olanaklı olduğundan, bir yerine iki teoriyi elde tutmayı en azından ontolojik israf saymakta, sayı teorisinden bu nedenle vazgeçebileceğimizi önermektedir. (Bkz. W. V. O. Quine, *Ontological Relativity*, s. 53-55.)

tenen güvenceyi sağladığı tartışma konusudur. Kendi tutarlılığı sorunsal olan bir teorinin aritmetiğe görecel de olsa bir tutarlılık sağladığı nasıl söylenebilir? Steiner'e göre, sayı kavramı küme kavramından daha açık ve daha temel bir kavramdır. "Sayı"yı "küme" terimiyle tanımlama bize gerçekte ne kolaylık ne de aradığımız kesinliği sağlar. Russell paradoksu (ki, "tüm kümeler kümesi" kavramından doğmuştur), mantıkçılığın öngördüğü indirgemenin hiç de daha güvenilir bir temel oluşturmadığını göstermiştir. Nitekim Frege bu paradoksu öğrendiğinde büyük bir umutsuzluğa düşerek, "Aritmetik sendelemektedir," demekten kendini alamamıştı.

Steiner de Poincaré gibi matematiği, salt "formel" ya da "dedüktif" bir çalışma saymayı yanlış bulmaktadır.⁽¹²⁾

Tüm eleştirisi ve karşı çıkmalara karşın, matematiğin temelde mantıktan başka bir şey olmadığı öğretisinin etkinliğini yitirdiği söylenemez. Aşağıda verdiğimiz alıntıda Russell, iki disiplinin özdeş olduğu savını kendine özgü açık ve çarpıcı dille ortaya koymaktadır:

Matematik ve mantık, tarihsel gelişimleri bakımından tümüyle farklı konular olmuştur. Matematik bilimle, mantık ise Grekçe ile birlikte yürümüştür. Ama ikisinin de modern çağlarda büyük atılım içine girdiğini görmekteyiz: Mantık daha çok matematikleşmiş, matematik mantıksal nitelik kazanmıştır. Öyle ki, ikisi arasında bir çizgi çizmeye artık olanak yoktur. Çünkü ikisi özdeştir. Aralarındaki fark gençle yetişkin arasındaki farka benzer: Mantık matematiğin gençliğini, matematik mantığın olgunluk çağını temsil etmektedir. Bu görüşü hem mantıkçılar hem de matematikçiler tepkiyle karşılamakta. Mantıkçıların tepkisi, tüm zamanlarını klasik metinleri incelemeye vermiş olmaları nedeniyle simgesel terimlerle dile getirilmiş herhangi bir çıkarsamayı anlamaya yetersizliğinden; matematikçilerin tepkisi ise, öğrenmiş oldukları bir tekniğin anlam ve rasyoneline eğilme çabasını göze alamamaktan doğmaktadır. Ne ki, tepkiyi gösterenler her iki alanda da giderek azalmaktadır. İki disiplin çeşitli yönleriyle öylesine kesişmektedir ki, aralarındaki sıkı ilişki, konuyu bilen hiçbir öğrencinin gözünden kaçmayacak kadar açıktır. Özdeşlik savımızın ispatı teknik ayrıntılara inmeyi gerektiren bir sorundur. Mantığa ait olduğu kuşku götürmez öncüllerden başlayıp, dedüktif çıkarımla, matematiğe ait olduğu yadsınamaz sonuçlara ulaştığımızda, iki alan arasında hiçbir noktada kesin bir ayırım yapılamayacağını kolayca görürüz. Ama gene de sözünü ettiğimiz özdeşliği içine sindiremeyenler çıkarsa, onları, *Principia Mathematica*'nın zincirleme giden tanım ve çıkarımlarının hangi noktasında mantığın bitip matematiğin başladığını göstermeye çağırırız. Görülecektir ki, verecekleri yanıt keyfi olmaktan ileri geçmeyecektir.⁽¹³⁾

Formalizm

Mantıkçılık, matematiği kendi dışında bir alana, mantığa giderek temellendirmeyi öngörüyordu. Formalizm ise temellendirmeyi matematiğin kendi içinde bir yenden düzenleme ya da arındırmayla gerçekleştirmeyi öngörmüştür. David Hilbert (1862-1943)'in öncülüğünde oluşan formalist öğreti bir reform programı niteliğinden

(12) M. Steiner, *Mathematical Knowledge*, s. 71-92.

(13) B. Russell, *An Introduction to Mathematical Philosophy*, s. 194.

dedir. Program, kümeler teorisinden kaynaklanan paradokslar ile sezgicilerin klasik matematiğe yönelttikleri eleştiriler karşısında matematiğin tutarlılığını güvence altına almayı amaçlıyordu. Formalist öğreti açısından matematik soyut nesne ve ilişkileri konu alan simgesel bir sistemdir; öyle ki, sistemi oluşturan terimler anlamsız birer simge, ilişkileri dile getiren tümceler içerikten yoksun birer önerme kalıbıdır. Örneğin, Peano aksiyomlarının sayı dizilerini konu alan birer önerme değil, belki “dizi” denen daha genel ve soyut bir kavrama ilişkin birer açık tümce olduğu söylenebilir. Gerçekten her tür dizide Peano aksiyomlarını doğru önermelere dönüştürme özelliği vardır. Model olarak alınan dizi ister sayılardan, ister bir doğru üzerindeki noktalardan, isterse bir zaman parçasının içerdiği anlardan oluşsun, sonuç değişmez.

Hilbert ve onu izleyenlere göre matematik, mantığa indirgenerek değil, simgesel aksiyomatik bir yapıya dönüştürülerek temellendirilmeliydi. Ancak öyle bir dönüştürmeyle istenen tutarlılığa gerçekleşme ve yoklanma olanağı sağlanabilirdi. Onların gözünde klasik matematikte uygulanan tutarlılık ispat yöntemi de yetersizdi. Hilbert’in Euclides geometrisini soyut aksiyomatik bir dizge olarak mantıksal yetkinliğe ulaştırma çalışması ona, matematiğin tümünde aynı yetkinliği gerçekleştirme umudunu vermişti.⁽¹⁴⁾ Hilbert, bu deneyimine dayanarak, tutarlılık ispatı için matematiğin mantıksal bir dizge ya da kuralları belli satranç türünden bir oyun olarak alınması görüşündeydi. Örneğin, $1 + 1 = 2$ tümcesinde eşitliğin iki yanındaki sayılara, $1 + 1$ ile 2 ’nin, birbirinin yerine kullanabileceğimiz simgeler olmaktan başka bir anlam taşımadıkları gözüyle bakılmalıydı. Kurduğumuz dizgenin tutarlılığı, dizgenin kendi kuralları içinde bizi $2 \neq 2$ gibi bir sonuca götürme olasılığı taşımadığı gösterilerek sağlanmalıydı. Oysa, klasik matematikte tutarlılık yoklaması, yorum ya da model yöntemine dayanıyordu. Buna göre matematiksel bir çalışmanın tutarlılığı, tutarlılığı varsayılan başka bir dizge model alınarak yoklanıyordu. Örneğin, geometrinin tutarlılığını göstermek için, aritmetiğin, ya da tersine aritmetiğin tutarlılığını göstermek için geometrinin model alınması gibi. Ne ki, bu yöntemle belirlenen tutarlılık görecel olmaktan ileri geçemezdi. Başka bir deyişle, tutarlılık yoklaması, sorunu bir alandan başka bir alana kaydırma biçimini almıştı. Şöyle ki, A teorisi tutarlı ise onunla bire-bir eşleşim gösteren B teorisi de tutarlıdır. (Bilindiği gibi, bu yöntem bizi ya döngül çıkmaza sokar, ya da sonu gelmez bir geriye gidişe iter.) Hilbert, tutarlılığın bu sakıncaları taşımayan doğrudan bir yöntemle belirlenebileceğini göstermek istiyordu. Bir dizgenin tutarlı olması herhangi bir çelişki içermemesi, yani dizgenin önerme kalıpları arasında P ve P-değil gibi birbiriyle çelişen iki tümceye yer olmaması demekti. Hilbert, “ispat teorisi” ya da “meta-matematik” diye bilinen çalışmasını öğrencisi Bernays ile ortaklaşa yazdıkları *Grundlagen der Mathematik* (Matematiğin Temelleri) adlı iki ciltlik yapıtında ortaya koyar. Ne var ki, formalizmin *Principia Mathematica*’sı sayılan bu çalışmanın daha ilk cildi (1934) yayımlanmadan beklenmedik bir gelişmeyle karşılaşılır: Gödel teoremleri. Hilbert, matematikte tutarlılık ispatını çalışmasının ana sorunu olarak

(14) Bu çalışma, *Grundlagen der Geometrie* (Geometrinin Temelleri) adıyla 1899’da yayımlanmıştır.

koymuştu. Bu program Gödel'in 1931'de yayımlanan çalışmasıyla umut kırıcı bir darbe yer.⁽¹⁵⁾

Gödel Darbesi

Hilbert programının başlıca amaçlarını,

- (1) Matematiğin aritmetik, geometri, analiz ve kümeler teorisi gibi dallarını (sonunda tüm matematiği) aksiyomatikleştirmek;
- (2) Her dalda kurulan aksiyomatik dizgenin çelişki içermeyen tutarlı bir teori olduğunu ispatlamak;
- (3) Tutarlılığı ispatlanan teoremin aynı zamanda tam (yani, dizgenin kurallarına göre oluşturulan P ya da P-değil gibi her tümcenin, dizgenin öncülleri aksiyomlardan çıkarsanabilir) olduğunu göstermek;
- (4) Tutarlılığı ve tamlığı ispatlanan teoremin kategorik (yani, teoremin tüm yorum ya da modellerinin izomorfik) olduğunu belirlemek.

diye dört noktada özetleyebiliriz. Gödel teoremleri, formalist programın can alıcı iki amacına (tutarlılık ve tamlık), son derece basit dizgeler dışında, gerçekleşme olanağı tanımamaktadır. Başka bir deyişle, aritmetik dahil matematiğin hiçbir dalında tutarlılığın, o dizgenin elverdiği yöntemle, ispatlanamayacağı ortaya konmuştur. Öyle bir ispat için dizgenin dışında başka yöntemlerden yararlanmaya ihtiyaç vardır. Sorunu daha yalın bir dille belirtmek için diyelim ki, Peano aksiyomlarını mantık ilkeleriyle birleştirerek aritmetikte A dizgesini oluşturduk. Şimdi A'nın tutarlılığını (A gerçekten tutarlı ise) A'nın terimleriyle dile getirilen bir ispatla ortaya koyamayız. Tutarlılığa ilişkin bu olumsuz sonuç, Gödel'in daha temel nitelikteki ikinci teoremiyle birleştiğinde Hilbert programı gerçekleşme olanağını büsbütün yitirmektedir. Bu teoreme göre aritmetik ölçüsünde kapsamlı her alanda kurulacak aksiyomatik dizge *eksik* kalmaktan kurtulamaz. Yani, o çapta kurulacak her dizgede, dizgenin kendi olanakları içinde ispatı verilemeyen önermeler, tanımı verilemeyen kavram ya da terimler olacaktır. Kısacası, aritmetik gibi az çok kapsamlı hiçbir dizgenin tutarlılığı ve tamlığı, o dizgenin kendi içinde ispatlanamaz. Bu sonuç Hilbert programının çöküşü demekti kuşkusuz.

Gödel'in çalışması karşısında Hilbert'in içine düştüğü hayal kırıklığı, bir bakıma, Russell paradoksunu öğrendiğinde Frege'nin kapıldığı umutsuzluğu andırmaktaydı.

Unutmamak gerekir ki, formalizm, Gödel'den önce de matematikçilerin kolayca benimsedikleri bir öğretiydi. Matematiğe, tutarlılığın ispatı ya da başka nedenlerle de olsa içeriksiz, formel bir oyun gözüyle bakmak pek çok matematikçinin içine sindiremediği bir tutumdur.⁽¹⁶⁾ Matematikçi normal çalışmasında uğraş

(15) Bu çalışma "*Principia Mathematica* ve Benzer Sistemlerin Formel Olarak Belirlenemeyen önermeleri üzerine" başlığını taşımaktadır.

(16) Formalizm'e tepki duyanlardan biri Hilbert'in öğrencisi tanınmış matematikçi Richard Courant'dı. Bkz. R. Courant ve H. Robbins, *What is Mathematics*, s. XVII. (Bu kitaptan bir alıntıya daha önce "Matematiksel Düşünme Yöntemi" bölümünde yer vermiştik.)

konusu nesne ve ilişkileri anlamsız saymak şöyle dursun, onlara en azından kavramsal düzeyde bir gerçeklik kimliği tanıma eğilimindedir; çalışmasını temellen-dirme kaygısıyla formalist yaklaşıma katılsa bile, bu eğiliminden uzaklaşmış ola-maz. Benzetme yerindeyse, matematikçi de, hafta günlerinde işlediği günahı pazar günü kilisede çıkartan pragmatist işadamaı gibi, hafta boyunca Platonist, pazar gü-nü formalisttir.⁽¹⁷⁾

Formalizm, matematik tarihi ile matematik felsefesinin ilişkisini kesmiştir; çünkü, formalizme göre, “matematik tarihi” diye bir şey yoktur. ... Üstelik herkesin “mate-matik” diye bildiği etkinliğin önemli bir bölümü formalistlerin gözünde matematik değildir. Matematikğin gelişme sürecini göz ardı eden formalizmin kurduğu egemenli-ğe Kant’ın şu sözleriyle karşı çıkmak istiyoruz: Felsefenin yol göstericiliğinden yoksun matematik tarihi körleşmekten, matematik tarihindeki çarpıcı gelişmelere sırt çeviren matematik felsefesi koflaşmaktan kurtulamaz. ... Formalizm ucu çok gerilere uzanan “bağnaz” diyebileceğimiz bir felsefe zincirinin son halkasıdır. İki bin yılı aşkın bir sü-re boyunca bağnazlarla kuşkucuların tartışmasına tanık olmaktadır. Bu büyük tartış-mada matematik, bağnazların övünç kalesi olmuştur. ... Buna karşı çıkmanın zamanı gelmiştir artık!⁽¹⁸⁾

Sonuç

Hilbert, programının gerekçesini şöyle belirtmişti:

Teorimin amacı, matematiksel yöntemlerin güvenilirliğini bir daha tartışılmayacak bir kesinlikle ortaya koymaktı. ... Kanımca bizi paradokslarla karşı karşıya bırakan şu sıradaki gelişmelere göz yumup geçemeyiz. Doğruluk ve kesinliğin kalesi bilinen mate-matikte herkesin öğrendiği, öğrettiği ve kullandığı tanımlarla dedüktif yöntemlerin yol açtığı saçmalıklara bir bakın! Peki, matematiksel düşünme böylesine kusurluysa, doğru-luk ve kesinliği nerede bulacağız?⁽¹⁹⁾

Aranan, matematikğin salt kendi içinde bir kesinlikse, bunu bulamayacağımızı Gödel teoremleri göstermiştir. Artık matematikğin tutarlılığını ispatlama en azından kuşku konusudur. Ne var ki, bu durum Hilbert programının iki temel amacının (tutarlılık ve tamlık) erişilemez olduğu demek değildir. Sorunun bir ölçüde de olsa başlangıçta konan aritmetik ve mantık aksiyomlarıyla sınırlamadan kaynaklandığı söylenebilir. Öyle bir sınırlamaya gidilmediğinde klasik matematikğin tutarlılığının gösterilebileceği olanakdışı değildir. Gentzen’in bu yöndeki çalışması oldukça umut vericidir. Gentzen, sonsuz induksiyonu içeren yöntemiyle tüm aritmetikğin tutarlı bir dizge olarak kurulabileceğini göstermiştir.⁽²⁰⁾ Dahası, Carnap’ın da belirttiği gi-bi, belki de matematikğin tümü formelleştirilebilir. Öyle de olsa, matematik tek ba-

(17) Bu benzetmenin sorumluluğu tanınmış bir matematikçiye aittir. (Bkz. R. Hersh, “Some Propo-sals for the Philosophy of Mathematics,” *Advances in Mathematics*, 31, 1979).

(18) I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, s. 1-5.

(19) D. Hilbert, “On the Infinite,” *Philosophy of Mathematics* (Benacerraf ve Putnam).

(20) Bkz. F. Waismann, *Introduction to Mathematical Thinking*, s. 102-103.

şına hiçbir aksiyomatik dizgede tüketilemez. Bunun için bir değil, kapsamı giderek daha genişleyen birçok dizgelere ihtiyaç vardır. Yine Carnap'ın belirttiği üzere matematiği sayısız dizgelerin bir bütünü saymak daha yerinde bir belirleme olur. Matematiği az sayıda aksiyomlardan çıkarsanabilen bir yığın teoremden ibaret saymak yanlıştır.⁽²¹⁾

Sezgicilik

Matematiği mantığa indirgeyerek temellendirmeye koyulan mantıkçılık için başta gelen sorun, sayıların doğasını belirlemektir. Frege bu soruna “sayı”yı küme kavramıyla tanımlayarak çözüm getirmişti. Formalizmin asıl kaygısı tutarlılıktı. Hilbert çözümü matematiğe salt simgesel bir dizge kimliği vermede bulmuştu. Bu iki yaklaşıma bir tepki olarak ortaya çıkan sezgicilik ise matematiksel nesne ve kuruluş (structures)ların varlık sorununu ön plana çıkarır.

Sezgicilik, kavram ve çıkarımlara somut içerik sağlayan bir sezgiyi matematiğin tek geçerli yöntemi sayan bir görüşü temsil etmektedir. Kısaca demek gerekirse, sezgicilik sonlu adımda inşa yöntemiyle matematiğin, sezgisel olarak bildiğimiz doğal sayılar üzerine kurulabileceği tezini içermektedir. Bu görüşte kavram ve çıkarımların tam bir belirginlikle ortaya konması gereği üzerinde durulur. Oysa, sezgicilere göre, matematik başlıca dallarında (analiz, kümeler teorisi, hatta sayılar teorisi, vb.) bu gereği karşılamaktan uzak kalmıştır.

Yüzyılımızın ilk yarısında felsefi bir görüş olarak etkinlik kazanan sezgiciliğin (kimi kez “inşacılık” da denmektedir) iki tanınmış lideri L. E. J. Brouwer ile A. Heyting'dir. Brouwer'in 1907'de yayımlanan çalışması bu yolda ilk önemli adım olmakla birlikte, sezgici düşüncenin kökenini Kant'a, hatta antik Yunan dönemine uzatanlar da vardır.⁽²²⁾ Kaldı ki, geçen yüzyılın son çeyreğinde L. Kronecker'in, sezgiciliğin kimi temel düşüncelerini dile getirdiğini biliyoruz. Ona göre, matematiğin en sağlam temeli sezgisel olarak oluşan doğal sayılarla onlara ilişkin işlemlerde aranmalıydı. Matematikte tanım ve ispatlar, ancak sonlu adımda inşa edilebilir nitelikte ise geçerli sayılmalıydı. Kronecker, matematikte işlenen her nesne ya da kavramın doğal sayılardan (ya da doğal sayılara dayanan diğer nesnelerden) kalkarak kurulabilir olduğunun gösterilmesini istiyordu. Kurulabilirlik matematiksel varlık için vazgeçilmez bir koşuldur. Daha açık bir deyişle, matematiksel bir nesnenin (örneğin, bir sayı ya da kümenin) var kabul edilebilmesi için bu nesnenin inşa edilebilirliğine ilişkin geçerli bir kural ya da işlemin ortaya konması gerekmektedir. Geçersiz bir işleme örnek olarak, Kronecker, “olmayana ergi” yöntemini göstermişti. Bilindiği gibi, bu yöntem bir nesnenin varlık (ya da bir teoremin doğruluk) ispatını, o nesnenin yok (ya da o teoremin yanlış) sayıldığında ortaya çıkan çelişkiye dayamakta, bu ise söz konusu nesne ya da teoremin inşa edilebilirliğine bir kanıt sağlamamaktadır. Gerçekten, geçerli her mantıksal çıkarımın mutlaka matematiksel

(21) R. Carnap, “The Antinomies and the Incompleteness of Mathematics,” *Monthly for Mathematics and Physics*, 1934.

(22) Fraenkel ve Bar-Hillel, *Foundations of Set Theory*, s. 201.

bir ispat sağladığı söylenemez. Nitekim Kronecker, olmayana ergi yöntemini matematik açısından geçersiz saymıştır.

Kimi düşünceleriyle sezgiciliğe katkıda bulunan bir başka matematikçi de Poincaré'dir. Poincaré, matematiksel her kavramın belirtik bir tanımlamaya elverişli olmasını ister. Bu ölçüte vurulduğunda, Cantor'un kümeler teorisinin bazı kavram, teorem ve yöntemleri onun için geçersizdi. Matematiksel düşünmenin gerçek aracını matematiksel indüksiyonda bulan Poincaré, bu yöntemin sezgisel olarak daha basit bir yöntemle indirgenebileceğine olanak görmüyordu.

Matematik felsefesindeki üç akım arasında tartışma konusu olan bir başka önemli nokta da, sonsuz sayı, küme ya da koleksiyon kavramıydı. Cauchy ile Weierstrass'ın daha önce kalkülüsü'ü "sonsuz nicelikler" kavramından arındırmadaki başarıları Hilbert gibi Brouwer'i de tüm matematiği aynı kavramdan arındırmaya sevketmiştir. Hilbert matematikte sonsuza yollamayı anlamsız buluyordu. Ona göre, sonsuz koleksiyon ya da yapımları var kabul etmemiz için hiçbir kanıt yoktur. Hilbert fiziksel bilimlerin bile o türden karanlık kavramlara artık yer vermediği savındaydı.

Sonsuz kümelerle ilişkin sezgicilerle formalistlerin paylaştığı bu görüşe karşı çıkan Russell, fiziksel varlıkla olası varlık kavramlarının karıştırılmaması gerektiğini, matematik için yalnızca olası varlık kavramının söz konusu olabileceğini vurgular. Nitekim, *Principia Mathematica*'nın ikinci basımında (1925) sonsuzluk aksiyomunu (ki, konuşma evreninde sonsuz çoklukta nesnelerin varlık savını dile getiren bir önermedir) genel bir varsayım olarak değil, kimi teoremlerin ispatında öncül işlevi gören bir hipotez olarak kullandığını görmekteyiz.

Russell ve onu izleyenler sonsuzluk aksiyomunu, hiç değilse olası sonsuz çokluklara ilişkin olarak, apaçık doğru sayarken Hilbert her şeyden önce aksiyomun tutarlılığının ispatlanması gerektiği üzerinde ısrar etmiştir. Hilbert'e göre, aksiyomun ispatlanmaksızın tutarlı sayılması matematikte aranan kesinlik ölçütünü önemli ölçüde zayıflatmakla kalmaz, keyfiliğe de yol açardı. Onun istediği sonsuzluk varsayımına yer vermeksizin klasik matematiğin tutarlılığını ispatlamaktı.

Sezgicilerin sonsuzluk sorununa yaklaşımı benzer görünse de farklıdır. Onlar için tanımı belirgin olmayan çokluklara ilişkin önermelerin doğruluk değeri, bu çokluklar ispatlanmadıkça, yoktur. Öyle ki, sonsuz bir çokluğu betimleyen önermeler söz konusu olduğunda ya Hilbert gibi tutarlılık ispatı isteyeceğiz, ya da bu önermelerin iyi tanımlanmış, belirgin bir küme nesneden söz ettiğinden kuşkulanaacağız. Sezgiciler sonsuz kümelerin inşa edilebilir belirgin tanımlarının verilemeyeceği düşüncesiyle, klasik matematikte geçerli sayılan pek çok ispatı reddetmişlerdir. Örneğin, sonsuz bir çokluğa (bu çokluk belirgin olarak tanımlanamayacağı için) ilişkin önermelerin ne doğru ne de yanlış olduğu söylenebilir. Sezgiciler daha da ileri giderek sayı kümelerinin bile iyi tanımlanmamış olduğunu ileri sürerler. İkiz asalların sonsuz olduğu savını alalım. Klasik matematikçi bu savı ispatlamadığı halde doğruluk değeri (doğru ya da yanlış) olan bir önerme sayar. Oysa, sezgici için böyle bir savın, ispatı verilmedikçe, doğruluk değerinden söz edilemez. Sonsuz bir çokluk sonlu adımda inşa edilebilir bir nesne değildir. Kuşkusuz, belli adımlarla gide-

rek genişleyen bir küme ya da çokluğu sezgisel olarak kavrayabiliriz. Ancak, “sonsuz” denen bir küme ya da çokluk için buna olanak yoktur. Örneğin, herhangi bir doğal sayı “sonsuz” denen doğal sayılar kümesinin bir üyesi olarak değil, sezgisel olarak var olan 1, 2, 3, vb. doğal sayılarla sonlu adımda oluşturulabilen bir nesne olarak varlık kimliği taşır. (Oysa, bilindiği gibi, Dedekind, Weierstrass ve Cantor gibi seçkin matematikçiler “sonsuz küme” kavramını geçerli saymış ve kullanmışlardır.)

Matematiğin ayırıcı özelliği felsefede sürgit tartışma konusu olmuştur. Formalizm bu özelliği matematiğin tutarlı simgesel bir dizge olarak kurulabilirliğinde, mantıkçılık matematiğin mantığa indirgenebilirliğinde aramıştır. Sezgiciler için ise matematiğin ayırıcı özelliği matematiğin zihinsel bir etkinlik oluşunda, matematiksel kavramların sezgisel verilerle inşa edilebilirlik yönteminde aranmalıdır. Buna göre, sayı, küme gibi matematiksel nesneler zihinde inşa edilebildiği ölçüde varlık kimliği kazanır. Sezgicilikte soyut bir nesnenin varlığı ile inşa edilebilirliği eşanlamıdır. Bir nesnenin varlık ispatı sonlu adımda inşa edilebilirliğiyle geçerlik kazanır. Klasik matematikte çoğu varlık ispatı bu koşulu karşılamaktan uzak kaldığı için geçersizdir. Varlık, “olmayana ergi” türünden mantıksal çıkarımlarla yaratılamaz.

Varlık ispatı gibi tanımlamanın da etkili bir işlem ya da yöntemle inşa edilebilir olması gerekir. Bir tamsayı, onu hesaplamaya olanak veren bir yöntem varsa, iyi tanımlanmış demektir. Örneğin, T_1 ve T_2 diye iki tanım alalım:

$T_1 : n - 1$ asal sayı olduğunda n 'nin en büyük asal sayı olduğunu varsayalım;
ancak böyle bir sayı yoksa $n = 1$ olsun.

Şimdi bu tanım çerçevesinde n sayısını 3 olarak hesaplayabiliriz. Çünkü $(3 - 1) = 2$ asal olan biricik çift sayıdır. Oysa aşağıdaki tanımda (T_2) m sayısını hesaplamak için elimizde hiçbir yöntem yoktur:

$T_2 : m - 2$ asal sayı olduğunda m 'nin en büyük asal sayı olduğunu varsayalım;
ancak böyle bir sayı yoksa $m = 1$ olsun. (Nitekim $\bar{1}$ ve $\bar{1} + 2$ gibi ikiz asal sayılar dizisinin sonlu ya da sonsuz olduğu bilinmemektedir.)

Sezgicilik açısından birinci tanım (T_1) geçerli, ikinci tanım (T_2) geçersizdir. Oysa, klasik matematikte bu iki tanım arasındaki fark yeterince kavranmamıştır. Sezgicilerin gözünde matematiksel inşalar, matematiğin güvenilirliğini temellendirmede açık, sağlam ve doğrudan kanıtlardır. Matematiğin ne mantığa indirgenmesine, ne de tutarlılık için içerikten yoksun simgesel bir dizgeye dönüştürülmesine gerek vardır. Sezgiciler tutarlılıktan çok, sezgisel verileri, zihinsel inşaların oluşturduğu kanıtları önemserler. Bu kanıtlara hatta bir anlamda “empirik veriler” gözüyle bakılabilir. Nitekim sezgiciliği pozitivist bir görüş olarak niteleyenler vardır.

Matematik, Brouwer'e göre, bir teori olmaktan çok insan zekâsının bir etkinliği, yaşamın bir parçası, “doğal” diyebileceğimiz bir olaydır. Matematiğe bakışta formalist ve mantıkçıların durağan yaklaşımlarının tersine, sezgicilerin dinamik bir

yaklaşım içinde olduğu söylenebilir. Bu anlayışta pek çok etkinlik gibi matematik de bir evrim sürecinin ürünüdür; tüm diğer bilimler gibi sınama ve yanılmaya açık, değişen, büyüyen bir çalışmadır. Simgesel form ya da dizgeyi değil, düşünme etkinliğini önemseyen sezgiciler matematiksel düşünmenin ne simgeler ne de başka bir dille yeterince ifade edilebileceğine inanmamaktadırlar. Formel ya da informal hiçbir dil matematiksel etkinliği gerçek canlılık ve zenginliğiyle verecek yeterlikte değildir.

Eleştiri

Ne var ki, sezgiciliğin varlık ispatını inşa yöntemine bağlı tutması matematiği önemli ölçüde sınırlayıcıdır. Öyle ki, klasik matematikte geçerli sayılan pek çok ispatın bu ölçüte uymaması nedeniyle geçersiz sayılması gerekmektedir. Getirilen sınırlamanın sonuçlarından biri, sonsuzlar kümesi söz konusu olduğunda “üçüncü şıkkın olanaksızlığı” ilkesinin geçerliğini yitirmesidir. Sezgicilere göre, iki değerli mantık (her önermenin doğru ya da yanlış olduğu ilkesini içeren mantık) insan dilinin sonlu kümeler çerçevesindeki evriminin bir ürünüdür; sonsuz kümelerle uygulandığında paradoksların ortaya çıkması kaçınılmaz olur. İspatı sonlu adımda inşa edilemeyen hiçbir önerme için “doğru” ya da “yanlış” demek yersizdir. O tür önermelerin doğruluk değeri belirsizdir. Bu, sezgiciliğin değişik bir mantık, “doğru”, “yanlış” yanında “belirsiz” kategorisine de yer veren en azından üç değerli bir mantık öngörmesi demektir. *Principia Mathematica*’da çelişmezlik ilkesiyle üçüncü seçeneğin olanaksızlığı ilkesi mantıksal olarak birbirine dönüştürülebilen özdeş ilkelere. Oysa, sezgici anlayışa dayanan bir mantıkta buna olanak yoktur. Üstelik bu anlayışta mantık, matematiğin bir alt-bölümü, iletişime kolaylık sağlayan yardımcı bir çalışma olmaktan ileri bir kimlik taşımamaktadır. Heyting, sezgiciliğin mantığa bakışını kısaca şöyle dile getirmektedir:

Mantık benim dayandığım zemin değildir. Nasıl olabilir ki? Mantık temel alındığında, onun da, ilkeleri matematiksel ilkelere daha karmaşık olan bir temele ihtiyacı olacaktır. Oysa matematiksel bir inşa öylesine doğrudan, öylesine açık olmalıdır ki, ona herhangi bir temel arama gereğini duymayalım. Bir çıkarımın geçerli olup olmadığını mantık kullanmaksızın da bilebiliriz; bunun için açık, bilimsel bir kavrayış yeterlidir.⁽²³⁾

Kronecker gibi Heyting için de matematiğin temeli doğal sayılardır. Doğal sayılar az çok eğitim görmüş herkesin, hatta çocukların yadırgamaksızın kolayca anladıkları, sayma sürecinde evrensel uygulama bulan kavramlardır. Bu denli açık, basit ve alışıktığımız nesneleri, daha basit nesnelere indirgeme çabası boşunadır ona göre.⁽²⁴⁾

Sezgiciliği değerlendirirken sorulması gereken başlıca soru şudur: Sezgiciliğin koyduğu sınırlamalar içinde oluşan matematik mevcut matematiği tümüyle kapsa-

(23) A. Heyting, *Intuitionism: An Introduction*, s. 6.

(24) Aynı yapıt, s. 13.

mayacağına göre, dışlanan bölümlerden vazgeçilebilir mi? Çelişkilerden kurtulma ve açıklık pahasına, matematiksel birikimin kimi değerli öğelerini bir yana itmeyi göze alabilir miyiz?

Bu soru sezgiciliğin içinde taşıdığı bir sakıncayı, bir yetersizliği ortaya koymaktadır. Bir başka yetersizliği, bir çözümleme yöntemi olarak sezgiciliğin istenilen saydamlıkta olmayışı, dolayısıyla değişik yorumlara yol açan bir bulanıklık içinde olmasıdır. Öyle ki, sezgiciliği anlaşılması zor bir yaklaşım sayanlar yanında metafizik türden gizemli bir öğreti gibi görenler de vardır. Buna karşı sezgiciler, üstünkörü saydıkları birtakım yöntem ve sonuçları geleneksel de olsa dokunulmaz saymanın yanlış olduğunu söyleyerek tutumlarını savunmakta, matematiğin sezgicilik yaklaşımı içinde yeniden işlenmesi gereğinde ısrar etmektedirler.

Sonuç

Matematiğin temellerine ilişkin gözden geçirdiğimiz görüşler başlangıç dönemlerindeki canlılıklarını artık korumamakla birlikte tartışmalar bugün de sürmektedir. Sözü daha fazla uzatmamak için sunduğumuz tartışmaları, ilki bir felsefecinin, ikincisi bir matematikçinin kaleminden çıkmış iki alıntıyla kapatmak istiyoruz. Bu alıntılar günümüzün bakış açısını yansıtmak bakımından da ilginçtir:

Filozoflar ile mantıkçılar son elli yıl boyunca matematiğe bir “temel” bulma yolunda öylesine yoğun bir çaba içine girmişlerdir ki, yalnızca birkaç cılız ses matematiğin bir temele gereksinmesi olmadığını söyleme cesaretini gösterebilmiştir. Ben bu cılız seslere katılmak istiyorum. Kanımca matematik açıklık gerektiren bir konu değildir; temellendirilmesine ilişkin bir bunalımı da yoktur. Dahası, matematiğin temeli olmadığı gibi, bir temele ihtiyacı olduğuna da inanmıyorum.⁽²⁵⁾

Tüm sağlamlaştırma çabalarına karşın matematiğin temelleri sallantılı durumundan çıkmış değildir. Belki de matematiği çökartecek yeni güçlüklerle karşılaşacağız. Ne ki, bu pek olası görünmüyor. Matematikçiler kimi mantıksal güçlükler karşısında matematiğin çökmesine izin vermeyeceklerdir. Unutmamak gerekir ki, sezgi her zaman salt mantığı bastırmıştır. Teoremlerimiz uyum içinde kalıyor, bize anlayış ve heyecan sağlıyorsa, kimse bizden “kılı kırk yaran” mantıksal nedenlerle matematikten vazgeçmemizi beklemesin.⁽²⁶⁾

(25) H. Putnam, “Mathematics Without Foundations,” *Journal of Philosophy*, 64, 1967, s. 5-22.

(26) I. Stewart, *Concepts of Modern Mathematics*, s. 297-298.

AKSİYOMATİK YÖNTEM⁽¹⁾

İspat Kavramı

Her bilimsel araştırma alanı, ister olgulara yönelik empirik bir çalışma, ister soyut ilişkilere yönelik formel bir çalışma olsun, belli bir mantıksal temele dayanır. Bu mantık çoğu kez, özellikle bilim dalının başlangıç aşamalarında, belirsiz ya da üstü örtüktür; ancak gelişimin daha ileri aşamalarında belirgin bir kimlik kazanabilir. Bilinçli bir çabayı gerektiren bu dönüşümün tarihte ilk örneğini geometride bulmaktayız.

Geometri, daha önce de belirttiğimiz gibi, mantıksal kuruluş aşamasına Antik Yunan döneminde ulaşır.⁽²⁾ Babil ve Mısır uygarlıklarında ortaya çıkan geometri uygulamaya yönelik, gözlem ve ölçmeye dayanan bir yığın empirik önermeden oluşuyordu. İndüktif genelleme niteliğinde olan bu önermeler arasında birtakım ilişkilerin, mantıksal bağların kurulabileceği daha ileri bir aşamada ancak sezilenenmiştir. Bunun için öncelikle ispat kavramının oluşup etkinlik kazanmasına ihtiyaç vardı.

Genellikle matematiğe özgü bir işlem sayılan ispatlama, yaygın anlamıyla bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu (ya da yanlışlığını) yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır. Günlük yaşamda bile bu çabanın çeşitli örnekleri gösterilebilir. Yargılama bağlamında sanığın suçunu ya da suçsuzluğunu kanıtlamaya yönelik tartışmalar tipik ispatlama girişimleridir. Ne var ki, düşünsel etkinliğin bir özelliği olan ispatlamanın, matematik ve mantıkta gördüğümüz biçimiyle, belirginlik kazanması, rasyonel düşünme gücünde ileri bir aşamayı beklemiştir. Klasik Yunan kültüründe önemli yer tutan felsefi tartışmalar giderek düşünceleri dayanaklarına inerek irdeleme, çıkarımların mantıksal geçerliğini yoklama gibi sıkı bir biçim alır. Aristoteles'in oluşturduğu formel mantık ile ilk örneğini Euclides geometrisinde bulduğumuz aksiyomatik kuruluş bu gelişmenin ürünleridir.

Euclides'ten günümüze değin hemen tüm bilimsel çalışmalarda özenilen aksi-yomatikleşme en çarpıcı ve başarılı örneklerini kuşkusuz matematik alanında vermiştir. Hatta denebilir ki, pek çok matematikçinin gözünde aksiyomatikleşme, uğ-

(1) Bu bölüm, kimi ekleme ve değişikliklerle, *MANTIK: Doğru Düşünme Yöntemi* adlı kitabımın IX. BÖLÜM'ünden alınmıştır.

(2) Bkz. II. BÖLÜM: Matematiğin Kökeni ve Gelişimi.

raşlarının ayırıcı özelliğini oluşturmaktadır. Bu nedenle, matematiksel düşünmenin yapı ve niteliğini açıklığa kavuşturma çabamızda, aksiyomatik yöntemi genel çizgileriyle tanımayı önemli görmekteyiz. Ancak, önce ispat kavramına ilişkin açıklamamızı biraz daha genişletmek yararlı olacaktır:

Matematiğin ispata yönelik bir çalışma olduğu genel bir kanıdır. Ama “ispat” ya da “ispatlama” dediğimiz şey nedir? Neyi, nasıl ispatlarız? Daha önce de yer verdiğimiz bu soruyu, yeri gelmişken, bir kez daha ele alma gereğini duymaktayız.

Tüm bilimsel çalışmalarda birtakım sonuçlara ulaşmak, ulaşılan sonuçların doğruluğunu kanıtlamak ortak amaçtır. Empirik bilimlerde ulaşılan sonuçlar betimleyici veya açıklayıcı genellemeler biçiminde önermelerle dile getirilir. Bilim adamı ulaştığı genellemelere hipotez gözüyle bakar; onları yeni gözlem veya deney verilerine giderek yoklar; bulduğu verilerin hiçbirine ters düşmeyen hipotezlerini, ileride yanlışlanma olasılığını da gözönünde tutarak, doğru sayar. Matematikte ulaşılan sonuçlar da çoğunlukla genelleme biçiminde önermeler ya da “önerme kalıpları” diyebileceğimiz formüllerle dile getirilir. Ne var ki, matematikçi bunları, bilim adamının yaptığı gibi, gözlem ya da deney verilerine başvurarak doğrulama yoluna gitmez; gitse bile, bununla yetinmez. Onun gözünde doğruluğun ölçütü olgusal kanıtta değil, mantıksal ispatta aranmalıdır. Örneğin, matematikçi algıladığı ya da sezindiği bir ilişkiyi genelleyip genellemeyeceğini belirlemek için birtakım somut örnekler üzerinde yoklayabilir. Bu, bilindiği gibi, başlangıç aşamasında başvuru bir tür indüktif çalışmadır. Matematikçi asıl uğraşının bu aşamadan sonra geldiğine inanarak somut örneklerin doğruladığı genellemesini ispata koyulur.

İspat, önermelerin (ya da önerme kalıplarının) ilişkisine dayanan mantıksal bir çıkarımdır. Eldeki genelleme, doğruluğu önceden varsanan ya da bilinen bir veya daha fazla önermenin zorunlu sonucu olarak gösterilebildiğinde, ispatlanmış olur. Başka bir deyişle, A gibi bir önermeyi doğru saydığımızda, B gibi başka bir önermeyi de doğru saymak zorunda olduğumuz ortaya konduğunda, B ispatlanmış demektir. Burada gözden kaçmaması gereken önemli nokta şudur: İspatlanan şey B’nin kendi başına doğruluğu değil, A’ya görecel doğruluğudur. A doğru ise, ondan çıkarsanan B kaçınılmaz olarak doğrudur. A’nın doğruluğu bir sayıltı olduğuna göre, B’nin doğruluğu da bir sayıltı olmaktan ileri geçmez. İspat, ne A’nın ne de B’nin doğru olduğunu göstermekte, yalnızca ikisi arasındaki ilişkinin zorunlu olduğunu açığa çıkarmaktadır.

Aksiyomatikleştirme

“Aksiyomatikleştirme” denilen oluşumda işte bu ispat işleminin daha belirttik, düzenli ve kapsamlı bir uygulamasını bulmaktayız. Amacı, bir bilgi alanını birkaç temel kavram ve ilke çevresinde toplamak, mantıksal yönden düzenlemek, düşünce ve işlemde ekonomi, açıklık ve kesinlik sağlamaktır. Herhangi bir alanda bu amaçın gerçekleşmesi başlıca iki koşula bağlıdır: (1) O alana özgü tüm terimlerin bir-kaçına dayanılarak tanımlanması; (2) O alana özgü tüm önerme veya önerme ka-

lıplarının birkaçına dayanılarak ispatlanması. Her iki koşulun yerine getirilmesi bakımından en yeterli olanakları “formel bilimler” dediğimiz mantık ile matematikte bulmaktayız.

Aksiyomatik yöntemin yapı ve işlevini anlamaya çalışırken, tarihsel gelişimine bir göz atmada yarar vardır.

Aksiyomatik yöntemin kiminle, ne zaman başladığı kesinlikle belirlenmiş değildir. İspat kavramının matematiğe Thales’le girdiği tahmini doğru olsa bile, ne onun ne de onu izleyen Pythagorasçılar aksiyomatik sistem anlayışına ulaştıkları kolayca söylenemez. Gerçi, Pythagorasçılar elinde dedüktif çıkarım yönteminin etkili bir ispat aracı olarak geliştiğini biliyoruz. Ne var ki, $\sqrt{2}$ gibi rasyonel olmayan sayıların ortaya çıkmasıyla içine düşülen bunalım onları özellikle sayısal matematikte daha sistemli çalışmadan alıkoymuştur. Öte yandan aksiyomatik yöntemin Euclides’i beklediği de söylenemez. Ondan en az bir kuşak önce yaşayan Aristoteles’in *Analytica Posteriora* adlı yapıtında yöntemin bazı temel özelliklerine değindiği bilinmektedir.⁽³⁾ Buna bakarak, yöntemin İ.Ö. 4. yüzyıl ortalarında belirginlik kazandığı söylenebilir. Nitekim kimi tarihçiler o dönemin büyük matematikçisi Eudoxus’un irrasyonel sayıların yarattığı bunalıma başarılı çözüm getirme çabasında aksiyomatik yöntem kavramını oluşturduğu düşüncesindedirler.

Aksiyomatikleşme matematikte ortaya çıkmakla birlikte, matematiğe özgü bir oluşum değildir. Daha Antik Çağda Stoiklerin, mantık ilkeleriyle kurallarını aksiyomatik bir sistemde toplama girişiminden söz edilebilir. Archimedes’ten günümüze değin pek çok bilim adamının (hatta bu arada kimi filozofların da) kendi alanlarında Euclides’in verdiği örneği denediklerini biliyoruz.⁽⁴⁾

Aksiyomatikleşmenin aritmetik ve cebirde değil, ilkin geometride kendini göstermesi ilginçtir. Üstelik geçen yüzyılın sonlarına gelinceye dek aksiyomatikleşme nerdeyse tümüyle geometriye özgü kalmıştır. Oysa matematik dışındaki başka alanlarda bu yönde bazı girişimlere rastlamaktayız. Bunlara biraz sonra değineceğiz. Şimdi şu soruyu kısaca yanıtlamalıyız: Aksiyomatikleşmenin ilkin geometride ortaya çıkması ve uzun süre âdeta ona özgü kalması nasıl açıklanabilir? Bunun bir nedenine biraz önce değindik: Sayısal alanda ortaya çıkan bunalım matematiksel etkinliğin geometride yoğunluk kazanmasına yol açar. Gerçekten, Zeno’nun ortaya attığı türden paradokslardan uzak kalma, karenin köşegeniyle kenarı gibi ortak ölçüsüz büyüklüklerin yol açtığı bunalımdan kurtulma olanağı geometride bulunmuştu. Geometride yoğunlaşan tutarlılık arayışı ispatlama, sistemleştirme, düşüncede ekonomiyi sağlama istekleriyle birleşince, aksiyomatikleşmeye giden yol açılmış oluyordu. Bu yolun açılmasında bir diğer neden de geometrik ilişkilerin şekiller aracılığıyla dile getirilme olanağıdır. Simgesel cebirin olanaklarından yoksun o dönemde, dönüştürme ve çıkarımların şekiller üzerinde gösterilmesi büyük kolaylık sağlıyordu. Nitekim bugün bile üçgenlerin iç açılarının toplamına ya da Pytha-

(3) Bkz. Aristoteles’ten alıntı, II. Bölüm, s. 27.

(4) Bu filozoflar arasında özellikle Descartes, Spinoza ve Leibniz gibi 17. yüzyıl rasyonalistlerin adları verilebilir.

goras ilişkisine ait teoremlerin ispatında ders kitaplarının şekillerden vazgeçmediği görülmektedir.

Aksiyomatik yöntemin geometri dışında uygulama girişimleri, matematiğin cebir, aritmetik ve sayılar teorisi gibi en çok gelişmiş dallarında bile XIX. yüzyılı beklemiştir. Oysa, matematikteki bu gecikmeye karşı, felsefe ve fizikte Antik Çağ'dan başlayarak önemli bazı denemelere yer verildiğini görmekteyiz. Bu yolda ilk atılımın Antik Çağın ünlü bilgini Archimedes'ten geldiğine daha önce değinmiştik.⁽⁵⁾ Benzer bir denemeye Rönesans öncesi skolastik felsefede yer verilmiştir. Ortaçağ filozofları Aristoteles mantığını kullanarak doğruluğunu “apaçık” saydıkları kimi temel inançlardan dinin tüm diğer dogmalarını ispatlama yoluna giderler. Euclides modelinin temsil ettiği kesinliğe ulaşma arzusunu Descartes, Spinoza ve Leibniz gibi XVII. yüzyıl rasyonalist filozofların yazılarında da bulmaktayız. Bunlar içinde Spinoza'nın çabası özellikle belirtilmeye değer. Spinoza *Ethik* adlı yapıtında ahlâk öğretisini aksiyomatik geometri modeline uygun bir düzenlemeyle sunar; amacı, tüm ahlâk kural ve ilkelerinin, temel saydığı birkaç genel ilkenin zorunlu sonuçları olduğunu göstermektir. Leibniz ise, genç yaşında, “geometrik yöntem” diye bilinen aksiyomatik yöntemi kullanarak, siyasal sorunlara çözüm getirmeyi denemiştir.

Spinoza'nın “daha fazla geometrileşme” dediği bu çabanın, Archimedes'ten sonra ilk başarılı örneğini Newton'un *Doğa Felsefesinin Matematiksel ilkeleri* (1687) adlı ünlü yapıtında bulmaktayız. Newton çalışmasına “kütle”, “kuvvet” vb. birkaç terime ilişkin sekiz tanımla başlar. “Uzay”, “zaman”, “hareket” gibi terimleri tanımlamaksızın kullanır. Sisteminde çekim ilkesi ile hareket yasaları aksiyomları oluşturur; mekaniğin diğer yasa veya genellemeleri teorem olarak ispatlanır. Galileo ile Kepler'in buldukları, görünürde birbiriyle ilişkisiz yasaların, Newton'da dedüktif bir teorinin teoremlerine dönüştüğünü görürüz. Yüz yıl sonra gelen Lagrange, sistemi daha da işleyerek yetkin bir düzeye ulaştırır. Böylece fizik, aksiyomatik yapıyla kuramsal bilim kimliği kazanan ilk alan olmuştur denebilir.

Başarılarının tüm göz kamaştırıcı parlaklığına karşın, ne Euclides'in ne de Archimedes ile Newton'un aksiyomatik yöntemi tam ve kusursuz kullandıkları söylemez. Bir kez bu çalışmalarda tanımlarla aksiyomların kimi kez karıştırıldığını görüyoruz. Gene verilen ispatların aksiyom veya postulatlarla bağlı kalmadığı, yer yer birtakım üstü-örtük varsayımlara başvurulduğu görülmektedir. Ne var ki, bu tür yetersizliklerin ortaya çıkması XIX. yüzyılın ikinci yarısında tanık olduğumuz eleştiri ve gelişmeleri beklemiştir.

Aksiyomatik Yöntem ve Formelleştirme

XIX. yüzyılın ikinci yarısı, aksiyomatik yöntemin, Euclides ve Newton'un temsil ettiği klasik uygulamalardaki kusurlarından arındığı, mantık ve matematikteki gelişmelere paralel olarak formel karakter aldığı dönemdir. Bu gelişmeye, bir yandan

(5) Bkz. II. BÖLÜM, s 30.

Euclides-dışı geometrilerin ortaya çıkmasıyla matematik anlayışının geçirdiği sarıntı ve özeleştirici, öte yandan Ernst Mach'ın Newton fiziğinin temel kavramlarına yönelttiği eleştiri yol açar.⁽⁶⁾

Euclides geometrisinin 5. postulatı ile ilgili kuşkuların yol açtığı bazı çalışmalara daha önce değinmiştik.⁽⁷⁾ Euclides-dışı geometrilerin ortaya çıkmasıyla, aksiyom veya postulat kavramları üzerindeki çalışmalar daha da bir yoğunluk kazanır. Euclides'in temsil ettiği klasik anlayışta "aksiyom" doğruluğu apaçık ve zorunlu bir ilkedir. "Postulat"a da aynı gözle bakıldığı söylenebilir; şu farkla ki, aksiyom genel nitelikte, postulat ise belli bir alan veya konuya ilişkin birer doğrudur. Euclides-dışı geometrilerin ortaya çıkması bu anlayışı yıkmakla kalmaz, aksiyomla postulat arasındaki farkın gereksizliğini de gösterir. Mantık ve matematikte somut hiçbir konuya ilişkin olmayan veya öyle görünmeyen formel sistemler olanak kazanmaya başlar. Aksiyomatik bir sistemde mantıksal olarak düzenlenen nesneler olgusal dünya ile ilgili önermeler olabileceği gibi, olgusal içerikten yoksun birer formül de olabilir. Böyle olunca bir sistemdeki öncülleri aksiyom ve postulat diye ayırma gereğini yitirir. Unutulmamalıdır ki, Newton teorisi gibi Euclides geometrisi de salt formel bir sistem değil, uygulama alanı belli bir bilimdi. Biri fiziksel nesnelerin hareketlerini, diğeri uzaysal ilişkileri konu almıştı. Oysa, formel bir sistemde öncül olarak kullanılan formüller ya olgusal içerikten yoksun birer totoloji, ya da henüz yorumlanmamış (konusu belirsiz) birer kalıp kimliğini taşır. Böyle bir sistemi, konusu ne olursa olsun, dedüktif nitelikte herhangi bir teoriye uygulama olanağı vardır. Her uygulama, sistemin belli bir yorumu demektir. Önemli olan, kuşkusuz, sisteme herhangi bir yorum vermek değil, sistemin formüllerini olgusal yönden doğru önermelere dönüştürecek yorum veya yorumları bulmaktır.

XIX. yüzyılda matematiğin giderek daha fazla mantıksal, dolayısıyla daha fazla formel nitelik kazanması, klasik aksiyomatik teorilerle formel aksiyomatik sistemler arasındaki farkın belirginleşmesi önemli bir gelişmedir. Klasik sistemlerin yapısal kusurlarını giderme çabası bir yandan "ideal" ve salt mantıksal sistemlere yol açarken, öte yandan aksiyom ve postulat kavramlarının dayandığı geleneksel anlayışı kökünden yıkmıştır. Ne aksiyomları inkâr olanaksız, analitik doğrular, ne de postulatları sezgisel olarak apaçık olgusal doğrular sayma zorunluluğu vardır. Aksiyomatik bir sistemin öncülleri analitik olabileceği gibi, olgusal da olabilir. Bir formül veya önermenin aksiyom veya postulat olarak kabul edilmesi doğruluğunun sezgisel apaçıklığına değil, sistemdeki yerine ve oynayacağı role bağlıdır. Oysa, Euclides geometrisinde aksiyom diye belirlenen "ortak ilkeler", hem mantık ilkeleri gibi doğruluğu zorunlu ve apaçık, hem de postulatlar gibi uzaysal ilişkilere uygulanabilen, dolayısıyla doğruluğu olgusal olan önerme işlemi görmüştür. Bu aksiyomlar ya salt mantıksal ilkelerdir, ya da postulatlar gibi geometriye ilişkin

(6) Viyanalı fizikçi ve bilim felsefecisi, Mach (1838-1916), Newton'ın aksiyomlarla tanımları yeterince ayırt etmemekle yol açtığı karışıklığı, temel veya ilkel kavramların aksiyomlarca üstü örtük tanımlandığı, bu nedenle ancak teoremlerle sisteme giren yeni terimlerin tanımlanması gerektiğini belirterek giderir.

(7) Bkz. III. BÖLÜM.

önermelerdir; ikisi birden olamaz. Aksiyomlar salt mantıksal ilkelerse, veya bu ilkelere çıkarılabilir nitelikte ise, o zaman bunları geometrinin temel öncülleri saymak yanlıştır. Değillerse, o zaman onları postulatlardan ayırmaya gerek yoktur. Bu nedenledir ki, modern kullanımda iki terim özdeş anlam taşımakta, doğruluğu bilinen veya apaçık olan değil, doğruluğu varsayılan önerme veya formüller olarak işlem görmektedir.

Klasik aksiyomatik sistemler salt mantık açısından çeşitli yönlerden kusurlu veya yetersizdi. Teoremlerin ispatı aksiyomları aşan bazı üstü-örtük varsayımları gerektirdikten başka, aksiyomları oluşturan terimlerin anlamlarından (hatta Euclides geometrisinde olduğu üzere birtakım diyagramlardan) da bağımsız değildi. Matematığa daha kesin ve belirtik mantıksal bir temel arayan matematikçiler, aksiyomatikleşmeyi daha soyut bir düzeyde ele almakla birtakım gereksiz pürüzlerden kurtulabileceğini gösterirler. Örneğin, bu yönde ilk adımı atanlardan Alman matematikçisi Pasch şöyle diyordu:

Geometri gerçekten dedüktif bir bilim olacaksa, çıkarımların yanlış biçiminin tümüyle geometrik kavramların anlamından ve de diyagramlardan bağımsız olması esastır. Tek gerekli olan şey, tanım görevi yapan temel önermeleri oluşturan bu kavramlar arasındaki ilişkileri düşündürmektir. Çıkarım işlemi sırasında kullanılan geometrik kavramların anlamını göz önünde tutmak kuşkusuz yararlıdır; fakat bu, hiçbir yönden gerekli değildir. Tam tersine, bu gerekli olduğunda çıkarımda bir kopukluk başlar ve akıl yürütmeyi değiştirmekle eksikliğin giderilemediği zaman, ispat için başvuru önermelerin yetersizliğini kabul etmek zorunda kalırız.⁽⁸⁾

Gerçi Pasch'ın henüz her türlü olgusal içerikten arınmış tam anlamıyla soyut formel bir sistemi öngördüğü söylenemez. Nitekim o, geometrik kavramlardan, önermelerden söz etmekte, bunların anlamını teoremlerin ispatı için gerekli görmemekle beraber, yararsız da saymamaktadır. Fakat sözlerinden formel bir sistemi belirleyen bazı temel koşulların çıktığını söyleyebiliriz. Bu koşullar giderek daha belirginleşerek şu dört noktada toplanmıştır:

- (1) Sonraki tanımlamalarda kullanılmak üzere seçilen ilkel terimlerin belirtik olarak sıralanması,
- (2) Sonraki çıkarım veya ispatlarda başvurulacak temel önerme veya formüllerin belirtik olarak sıralanması,
- (3) İlkel terimler arasındaki ilişkilerin, o terimlere verilecek anlamlardan bağımsız olarak, salt mantıksal türden ilişkiler olması,
- (4) Çıkarım veya ispatlarda yalnız bu ilişkilerin esas tutulması, terimlere verilecek anlamlarla diyagramlara hiçbir şekilde bağlı kalınmaması.

Bu koşullar, herhangi bir sisteme özgü terim ve önermelerle, sistemin oluşumunda mantıkça daha önce varsayılan, terim ve önermeleri de ayırt etmemiz gere-

(8) M. Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, 1882, s. 98.

ğini içermektedir. Hangi alanda olursa olsun, ilkel kabul edilen terimlerin yan yana getirilmesiyle aksiom veya postulatlar oluşmaz; bunun için mantıksal değişmezler dediğimiz “ve”, “veya”, “ise”, “değil”, “tüm”, “bazı” gibi önerme bağlaç ve niceleyicilerden yararlanma gereği vardır. Aynı şekilde çıkarım veya ispatlar yalnız aksiyomlara dayanılarak yapılamaz; aksiyomların içeriğindeki ilişkileri tek tek belirttik hale getirecek birtakım geçerli çıkarım kurallarından yararlanmak zorundayız. Bu da gösterir ki, herhangi bir alanda aksiyomatik bir sistem kurmak için mantık bilgisine, daha doğrusu mantığın bazı kavram ve kurallarına ihtiyaç vardır.

Kaldı ki, sistem dışı varsayılan terim veya önermeler bununla da kalmayabilir. Örneğin, geometrik bir sistem için mantıkla birlikte aritmetiğe de başvurma zorunluğu vardır. Gerçekten, “üçgen” teriminin tanımı 3 sayısının kullanılmasını gerektirir. Aynı şekilde, bir üçgenin iç açılarının toplamının iki dik açının toplamına eşit olduğunu ispatlamak için, toplama ile ilgili aritmetik teoremin geçerliğini varsaymak zorundayız.

Genellikle üstü-örtük yapılan bu tür varsayımlar, temelde, formel sistemlerin ruhuna aykırıdır. Çünkü, formel bir sistemin başta gelen özelliği, sistemin dayandığı her şeyin belirtik olmasıdır. Ne var ki, bu güçlüğün kesin ve yeterli bir çözümünü bulmak kolay değildir.

Formel Bir Sistemin Yapısı

Aksiyomatik bir sistemin yapısını, karmaşık dedüktif bir çıkarım gibi görebiliriz. Bu çıkarımda, daha doğrusu çıkarımlar örgüsünde, “aksiyom” veya “postulat” denilen temel önermeler öncül, bunlara dayanılarak ispatlanan teoremler, birlikte, sonuç işlevi görmektedir. Böyle bir sistemin kurulmasında,

- (1) Tanımlama
- (2) Çıkarım veya ispatlama

dediğimiz iki temel operasyona, ve

- (1) Terimler
 - (a) İlkel terimler
 - (b) türetilen terimler
- (2) Önermeler veya formüller
 - (a) temel önerme veya formüller
 - (b) çıkarılan veya ispatlanan önerme veya formüller
- (3) Kurallar
 - (a) tam-deyim kuralları
 - (b) çıkarım kuralları

dediğimiz üç yapısal öğeye ihtiyaç vardır. Bunları kısaca açıklayalım:

Tanımlama: Tanımlama, terimler arasındaki ilişkileri kurma yolunda başvuru-
lan bir operasyondur. İlkel terimler dışında sisteme alınan terimler, ilkel terimlere

dayanılarak tanımlanır. Buna, “belirtik tanımlama” diyoruz. Ayrıca, aksiyom veya postulatları, ilkel terimlerin anlamlarını belirleyen birer “üstü-örtük tanım” diye düşünebiliriz. Nitekim bazı matematikçiler (örneğin, Poincaré) Euclides geometrisinin tüm aksiyom ve postulatlarını, o geometrinin ilkel terimlerinin, “maskeli tanımlar”ı saymışlardır.

Çıkarım veya ispatlama: Çıkarım veya ispatlama, önerme veya formüller arasındaki mantıksal ilişkileri belirtik hale getirmek, aksiyomları doğru kabul ettiğimizde daha hangi önerme veya formülleri doğru kabul etmemiz gerektiğini göstermek için başvurulmuş bir işlemdir.

Terimler: Sistemin vokabülerini oluşturan terimler, ilkel ve türetilen olmak üzere ikiye ayrılır. İlkel terimler, sisteme, tanımlanmaksızın kabul edilen terimlerdir. (Ancak, içinde geçtikleri aksiyomların bunları üstü-örtük biçimde tanımladıkları söylenebilir.) Türetilen terimler ilkel terimlere dayanılarak belirtik biçimde tanımlanan ve ancak öyle sisteme giren terimlerdir. Örneğin, geometride ilkel sayılan “nokta”, “doğru”, “arasında” gibi terimlere dayanılarak “doğru parçası” (ki, türetilen bir terimdir) şöyle tanımlanır:

Doğru parçası = İki nokta arasındaki doğru.

Şimdi denebilir ki, sistemi oluşturan terimlerden bir bölümünü tanımlamaksızın, bir bölümünü de tanımlayarak alacağımıza, tümünü tanımlamak yoluna gitsek daha iyi olmaz mı? İlk bakışta iyi olur gibi. Fakat buna, “döngül tanımlama” veya “sonsuz geri gidiş” denen tanımlama yollarına düşmeksizin olanak yoktur. Diyelim ki, sistemimiz A, B, C, D terimlerinden oluşmaktadır. A’yı tanımlarken B’ye, B’yi tanımlarken C’ye, C’yi tanımlarken D’ye ve D’yi tanımlarken A’ya başvurursak, döngül tanımlamaya düşmüş oluruz. Çemberi daraltığımızda bu tıpkı “yaşam” terimini “canlılık” terimiyle, “canlılık” terimini de “yaşam” terimiyle tanımlama gibi yararsız olur.

Öte yandan her terimi tanımlama isteği, döngül tanıma düşmekten kaçındığımızı farzedelim, bizi arkası gelmeyen bir tanımlama zinciri içine sokar. Örneğin, A’yı B’ye, B’yi C’ye, C’yi D’ye, D’yi E’ye... başvurarak tanımlamak gibi sonu olmayan bir çıkmaza düşmüş oluruz ki, bunun çözümüne teorik yönden bile olanak yoktur.

İşte bu nedenledir ki, aksiyomatik bir sistemde ister istemez bazı terimleri tanımlamaksızın kabul etme gereği vardır.

Önermeler veya formüller: Sistemin yapısını oluşturan önerme veya formülleri de iki öbekte topluyoruz. Sisteme ispatlanmaksızın alınanlara “aksiyom” veya “postulat”, ispatlanarak alınanlara da “teorem” diyoruz.⁽⁹⁾

Aksiyomatik bir sistemde tüm terimleri tanımlama isteği gibi tüm önerme veya

(9) Bir önerme veya formülün aksiyom veya teorem olması sisteme bağlıdır. Bir sistemde aksiyom diye geçen bir önerme başka bir sistemde teorem, tersine teorem diye geçen bir önerme başka bir sistemde aksiyom olabilir.

formülleri ispatlama isteği de sağlıklı bir biçimde karşılanamaz: Döngül ispatı veya sonu gelmez ispatlamaya düşmeyi göze almaksızın bazı önerme veya formülleri ilkel saymaktan, yani ispatlamaksızın kabul etmekten, kurtulmaya olanak yoktur.

Kurallar: Sistemi oluşturan önerme veya formüllerin, rastgele terim dizilerinden ibaret değil, sentaks yönünden kurallara uygun tam-deyimler olduğunu belirlemek veya denetlemek için birtakım kurallara ihtiyaç vardır. Bunlara, “tam-deyim kuralları” diyeceğiz. Öte yandan, teoremlerin ispatında başvurulana, modus ponens, modus tollens, seçenekli tasım, hipotetik tasım gibi mantık kurallarına çıkarım kuralları diyeceğiz. Geçerliği bağımsız yöntemlerle belirlenmiş çıkarım kuralları olmaksızın, ne teoremlerin formel ispatını vermeye, ne de verilen ispatı denetlemeye olanak vardır.

Aksiyomların Yeterlik Ölçütleri

Bir teori veya konunun aksiyomatikleştirilmesinde başta gelen amaç, düşünce ve ifadede ekonomiyi sağlamak, karışık veya karmaşık görünen bir bilgi alanını az sayıda kavram ve ilkeler çevresinde düzenlemektir. Basit, kesin ve mantıksal bütünlüğü olan bir sistem, bilimsel araştırma ve düşünmenin her alanda ulaşma çabasında olduğu yüce bir sonuçtur. Düşünce basitlik, kullanılan kavram ve dayanılan varsayımların en az sayıda olmasını gerektirir. Düşünce kesinlik bu kavramların açık ve belirgin, çıkarımların dayandığı öncüllerin (varsayım, aksiyom veya hipotezlerin) belirttik olması, mantıksal bütünlük ise, sisteme giren tüm önerme veya formüllerin dedüktif ilişkiler içinde bir ispatlar zinciri oluşturması demektir. Sistemimiz, daha çok sayıda terimi, daha az sayıda terimle tanımlamaya, daha çok sayıda önermeyi daha az sayıda önermeden kalarak ispatlamaya olanak verdiği ölçüde basitliğe, kesinliğe ve mantıksal bütünlüğe erişmiş sayılır.

Aslında, aksiyomatik bir sistemin yeterliğini dayandığı aksiyom veya postulatların mantıksal nitelikleriyle belirleyebiliriz. Hemen söylemeli ki, şu ya da bu önerme veya formülün aksiyom olarak seçiminde hiçbir zorunluluk yoktur; ama bu, seçimin gelişigüzel olabileceği anlamına da gelmez.

Unutmamak gerekir ki, aksiyomların önemi, içirme güçlerine bağlıdır. Deyim yerindeyse, doğurganlık, yani çok sayıda teorem içirme gücü aksiyomda aranan bir özelliktir. Ne var ki, doğurganlığın nesnel bir ölçütü yoktur; üstelik çıkarım veya ispat, aksiyomların içirme gücüne olduğu kadar, bu gücün sezilmesine ve akıl yoluyla ortaya çıkarılmasına, yani aksiyomu kullananın akıl-yürütme gücüne de bağlıdır.

Aksiyomların seçiminde bir diğer özellik de, bilimsel önemi olan yorumlara elverişliliğidir. Burada da nesnel bir ölçüt gösteremeyiz. İçirme gücü gibi yoruma elverişlilik de, aksiyomların yapısal bir niteliği olmaktan çok, aksiyomları kullananın kafa gücüne bağlı bir özelliktir.

Her iki özellik de önemli olmakla beraber, aksiyomların değerlendirilmesi yönünden yeterince kullanışlı değildir. Böyle bir değerlendirme için daha nesnel ölçütlere başvurma gereği vardır.

Seçilen aksiyomların her şeyden önce kendi aralarında tutarlı, sisteme yeterli ve birbirinden bağımsız olmaları gerekir. Başka bir deyişle, tutarlılık, tamlık ve bağımsızlık bir aksiyom takımının yeterli koşullarını oluşturan üç temel özelliktir.

Üç özellikten en önemlisi ve mantıksal yönden vazgeçilmez olanı, tutarlılıktır. Kendi aralarında tutarsız ya da bağdaşmaz olan öncüllere dayanılarak yapılan ispatlar bir değer taşımaz; çünkü, daha önce de işaret ettiğimiz gibi, çelişik bir veya daha fazla öncülден istenilen her sonuç mantıksal olarak çıkarılabilir. Her şeyi ispatlayan bir şey, hiçbir şey ispatlamıyor demektir.

Aksiyomlarımızın tutarlı olup olmadığını nasıl belirleyebiliriz? Sezgiye başvurulabilir, fakat bu, çoğu kez ne yeter ne de güvenilir bir yoldur.

Tutarlılığı denetlemenin objektif bir yolu, aksiyomlarımızın herhangi bir çelişkiye, örneğin, P ve $\sim P$ gibi birbirini deşilleyen iki önermenin ispatına olanak verip vermediğine bakmaktır. Ne var ki, bu yolun, tutarsızlığı yakalamaya elverişli olmakla beraber, tutarlılığı kesinlikle belirleyebildiği söylenemez. Gerçekten, aksiyomların tüm sonuçları tüketilmedikçe, bir çelişki vermeyeceğinden nasıl emin olunabilir? Beklenmedik bir anda veya uzak bir gelecekte bir çelişki veya paradoksla karşılaşabiliriz pekâlâ. Nitekim böyle bir olayın cümleler teorisinde Russell'ın bulunduğu paradoksla ortaya çıktığını daha önce görmüştük.

Başka bir yol da, sistemimizi, tutarlılığı daha önce bilinen başka bir sistemi model alarak yorumlamaktır. Örneğin, aritmetiği veya geometriyi tutarlılığı yeterince belirlenmiş model sayabiliriz. Kurduğumuz sistemi bunlardan birine indirgeyebiliriz, ya da sistemimizle model arasında bire-bir uyum sağlayabilirsek, bundan sistemimizi tutarlı sayabiliriz. Bu yolu Poincaré, Lobachevsky geometrisini Euclides geometrisine; Hilbert, Euclides geometrisini aritmetiğe indirgerek başarıyla denemişlerdir.

Geçerliği tartışmalı bir yol da şudur: Sistemimizi bir olgu grubunu model alarak yorumlamak. Böyle bir model bulunduğunda, ona indirgenebilen sistemimizi tutarlı sayabiliriz. Nitekim, Euclides geometrisinin tutarlılığına olan güvenimiz geniş ölçüde, uzaysal ilişkileri dile getiren teoremlerin doğru önermeler olmasında aranmalıdır.

Ne var ki, kısaca belirtmeye çalıştığımız bu yolların hiçbirisi tutarlılığı doğrudan ispat niteliği taşımamaktadır. Birinci yol bir tür "bekle-gör" yöntemine benzetilebilir. İkinci yol, "A tutarlı ise B de tutarlıdır," gibi koşulsal olmaktan ileri geçmemekte, üçüncü yol ise, dolaylı olarak doğru tutarlı farzetmeyi içermektedir.

Aksiyomların tutarlılığı, mantığın çelişmezlik ilkesine dayanan bir özelliktir. Bir öncüller takımından hem P , hem de P -değil gibi çelişik iki sonuç çıkaramamalıyız. Çıkarabiliyorsak, o zaman sistem tutarsız, dolayısıyla işe yaramaz demektir. Aksiyomatik bir sistem için tutarlılık gerekli, fakat yeter bir koşul değildir. Seçilen aksiyomların tam ve bağımsız olması da istenir.

Aksiyomların tam olması, sistemin kurallarına göre tam-deyim sayılan her önermenin, ya da o önermenin deşillemesinin, bir teorem olarak ispatlanabilmesi demektir. Başka bir deyişle, sistemin terimleriyle ve sentaksına uygun oluşturulan

" $P \wedge \sim P$ " gibi her çelişkideki bileşenlerden birinin ve yalnız birinin, (yani, ya " P "nin ya da " $\sim P$ "nin) sistemde ispatlanabilir olması, aksiyomların yeterliliğini veya tamlığını gösterir. Tutarlılık çelişmezlik ilkesine, tamlık üçüncü şıkkın olanaksızlığı ilkesine dayanan bir özelliktir. Tutarlı bir sistemde P ve $\sim P$ gibi iki önerme birlikte doğru olamaz; fakat sistemin tam olması için bu önermelerden birinin ve yalnız birinin sistemde doğru olması, yani ispatlanabilir olması gerekir.

Tamlık özelliği böyle sıkı bir anlamda alındığında pek az gerçekleşme olanağı taşır. Bu nedenle çoğu kez daha gevşek bir tanımla yetinildiğini görmekteyiz. Buna göre, sistemimizde tam-deyim sayılan herhangi bir önerme veya formülün ispatlanabilir olduğu kesinlikle saptanamayabilir. Böyle de olsa, o önerme veya formül için sistemde ispatlanabilme olanağı görüyorsak, sistemi gevşek anlamda tam sayabiliriz. Bu anlamda bile tamlık koşulunu karşılamak çoğu kez olanaksızdır.⁽¹⁰⁾

Aksiyomların bağımsızlık özelliğine gelince, bu da tamlık gibi mantıksal bir zorunluluk değil, sistemin basitlik ve zarafeti yönünden aranan bir özelliktir.

Aksiyomların birbirinden bağımsız olması isteği teorem olarak ispatlanabilir bir önermenin aksiyomlar arasında yer almaması içindir. Bir aksiyomun diğer aksiyomlardan çıkarılabilir olması, o aksiyomun bağımlı olduğunu, daha doğrusu o önermenin aksiyom değil, teorem olduğunu gösterir. O halde, seçtiğimiz aksiyomların bağımsız olduğunu söyleyebilmemiz için, hiçbirinin ötekilere dayanılarak ispatlanamaması gerekir.

Bir aksiyomun bağımsız olup olmadığını olmayana ergi ispat kuralına başvurarak saptayabiliriz. Buna göre, aksiyomun değillesini (veya çelişliğini) diğer aksiyomlarla birleştirir, çıkan sonuçların tutarlı olup olmadığına bakarız. Sonuçlar tutarlı ise (yani, herhangi bir çelişiklik göstermiyorsa) söz konusu aksiyomu diğerlerinden bağımsız; sonuçlar tutarsızlık içindeyse, o zaman o aksiyomu diğerlerine bağımlı saymak yoluna gideriz. Bağımlı bir aksiyomu aksiyom olarak değil, teorem olarak ele almak daha doğru olur.

Euclides geometrisinde paralel postulat üzerinde yüzyıllar boyunca sürdürülen çalışmalar, bu önermenin bir teorem sayılması gerektiğine yönelikti. Daha önce de belirttiğimiz gibi, sonuçta Euclides-dışı geometrilerin doğuşuna yol açan bu çalışmalar amacına ulaşamamış, söz konusu postulatın bağımsız olmadığını kanıtlayamamıştır. Tam tersine, Saccheri, Lobachevsky ve diğerlerinin gösterdiği üzere, postulatın değillesininin diğer aksiyom ve postulatlarla birleştirilmesiyle ulaşılan so-

(10) Hilbert gibi tutarlılığı biricik ölçüt alan formalist matematikçi ve mantıkçılar, yalnız mantığın değil matematiğin her kolunun da tutarlı ve tam aksiyometik bir sistem olarak kurulabileceği inancındaydılar. Hatta tüm matematiğin böyle tutarlı ve tam bir sistem olarak kurulabileceği ümidini taşıyorlardı.

Bu inanç ve ümit 1931'de Gödel'in ispatladığı iki teoremle yıkılır. Buna göre son derece basit sistemler dışında hiçbir tutarlı sistemin aynı zamanda tam olmasına, hatta bir sistemin tutarlı olduğu iddiasının bile doğru mu, yanlış mı olduğunu kesinlikle belirlemeye olanak yoktur.

Gödel'in, aksiyometik yöntemin etkinlik yönünden sınırlı olduğu gerçeğini kanıtlamakla, aksiyometikleştirme girişimlerine beklenmedik bir darbe indirdiği söylenebilir. (Daha ayrıntılı bilgi için bakınız; E. Nagel ve J. R. Newman, "Gödel's Proof," *The Mathematical Way of Thinking*, J. R. Newman (Ed.), New York: Simon and Schuster, 1956, s. 1668-1695)

nuçlar mantıksal olarak tam bir tutarlılık içinde kalmış, beklenen tutarsızlık ortaya çıkmamıştır.

İspat Nedir, Ne Değildir?

Yeterli bir sistem için aksiyomların kendi aralarında tutarlı, birlikte tam ve birbirinden bağımsız olması gereği üzerinde durduk. Aksiyomların doğruluk değeri ile ilgili birkaç noktayı da açıklamaya ihtiyaç vardır:

Bilindiği gibi, aksiyomatik bir sistemde teoremler, aksiyomlara dayanılarak ispatlanır. Ancak bir teoremin ispatı her zaman aynı şekilde anlaşılmamıştır.

Her şeyden önce, genellikle sanıldığı gibi, gözlem veya deneye başvurarak bir önermenin doğru olduğunu göstermek ispat değildir. Örneğin, Pythagoras teoremine göre, dik açılı bir üçgende hipotenüsün uzunluğunun karesi, açığı oluşturan kenarların karelerinin toplamına eşittir. Şimdi bu teoremin doğru olduğunu son derece duyarlı iletke ve cetvel yardımı ile ölçerek gösterebiliriz. Hatta, daha inandırıcı olmak için, düzgün bir çelik levha üzerinde dik açılı bir üçgenin kenarları üzerine kareler çizer, sonra bunları kesip tartar, hipotenüs üzerindeki karenin diğer iki kareye denk olduğunu ortaya koyabiliriz. Ama bu doğrulamalardan ne biri, ne öbürü bir ispat sayılabilir. Çünkü, bir kez bu tür deneyler tüketici olmaktan uzaktır. Belli bir dik açılı üçgen üzerindeki bulgumuzun tüm dik açılı üçgenler için de doğru olduğunu nasıl bilebiliriz? Öte yandan, bu deneylerimizden bir veya birkaçının teoremi doğrulamadığını düşünelim. O zaman teoremi yanlış mı sayacağız? Sayamayız, çünkü ne denli titiz davranırsak davranalım, ölçme veya tartmamızın hatasız, kullandığımız ölçme araç ve gereçlerinin kusursuz olduğunu söyleyemeyiz. Oysa mantıksal bir ispat için ne hatasız bir ölçmeye, ne de kusursuz ölçme araçlarına ihtiyaç vardır. Mantıksal ispat, bir önermeyi, başka önermelerin zorunlu sonucu yapan ilişkiyi kurmaktır; yoksa ne birinin ne ötekinin doğru olduğunu göstermek değildir.

Öyle ise, bir teoremin ispatı, o teoremin doğru olduğunu değil, bir veya birkaç aksiyomdan çıkarılabilir olduğunu göstermek demektir.⁽¹¹⁾

Mantıksal ispatla olgusal doğruluk arasındaki bu ayrım pek çoğumuz için ilk bakışta şaşırtıcı olabilir. Gerçekten bir önermenin ispatı o önermenin başka önermelerin zorunlu sonucu olduğunu göstermekten ibaretse, matematikteki dillere destan kesinlik nerde kalmaktadır? İspat, doğruluğun ispatı değilse, neye yarar; ispatladığımız teoremlerimiz yanlış olursa, buna ispat denir mi?

Bu tür sorular çoğunluk aksiyomların yanlış anlaşılmasından ileri gelmektedir. Aksiyomlar doğru bilinen veya doğruluğu ispatlanmış önermeler değil, doğru sayılan önermelerdir. Mantık ve matematik, birtakım önermeleri doğru sayarsak, daha ne gibi önermeleri doğru saymamız gerektiğini araştırır. Bilindiği gibi, Euclides ge-

(11) Aslında her argümanın amacı sonucunun doğruluğunu ispatlamaktır. Ne var ki, bunun gerçekleşmesi hem çıkarımın geçerli, hem de öncüllerin doğru olduğunu bilmemizi gerektirir. İkinci koşulu yerine getirme mantığa düşmediğine göre, mantıkta sonucun doğruluğunun ispatı kategorik değil, hipotetik niteliktedir.

ometrisinde aksiyomlar doğruluğu apaçık önermeler sayıldığı için, onlardan çıkarılan teoremler de doğru sayılmıştır. Bu nedenle, bir teoremin ispatı, o teoremin aksiyomlardan çıkarılabilir olduğunu göstermekten ötede, o teoremin doğruluğunu tam kanıtlama anlamına gelmiştir.

Aksiyomları doğruluğu apaçık önermeler diye kabul etmemiz için öteden beri ileri sürülen nedenler doyurucu olmaktan uzaktır. Sezgisel kesinlik çoğu kez aldatıcı olmuştur. Nitekim, “Bütün herhangi bir parçasından daha büyüktür,” önermesi bize sezgisel olarak apaçık doğru görünmektedir. Oysa, daha bazı apaçık görünen önermeler gibi (örneğin, “Doğa boşluktan tiksindir,” “Her yüzeyin iki yanı vardır,” vb.) bunun da doğru olmadığı ortaya çıkmıştır. Kaldı ki, sezgisel apaçıklık kişilerin yetiştirme koşullarına göre değişir; birine apaçık görünen bir şey, bir başkası için pekâlâ anlaşılmaz veya yanlış görünebilir.

Aksiyomları yeterince doğrulanmış olgusal genellemeler saymak da soruna çözüm getirmemektedir. Çünkü, hiçbir genelleme, ne denli kanıtlanmış olursa olsun, doğruluğu ispatlanmış sayılamaz. En sağlam bildiğimiz genellemelerin bile (örneğin, su ısıtır, ateş yakar, vb.) bir gün yanlışlanmayacağı kesin değildir. Öte yandan hangi genellemelerin yeterince kanıtlanmış, hangilerinin eksik kanıtlanmış olduğunu belirlemek de mantığın değil, genellemelerin ait olduğu bilimin işidir. Mantık veya matematik sadece Q gibi bir önermeyi doğru saymamız için P 'yi doğru saymamız yeterli midir? Ya da, P 'yi doğru sayarsak, Q 'yu doğru saymamız gerekir mi? diye sorar. Russell'ın paradoksal görünen tanımı bu gerçeği yansıtmaktadır:

Matematik, ne neden söz ettiğimizi, ne de söylediklerimizin doğru olup olmadığını asla bilmediğimiz bir bilimdir.⁽¹²⁾

Aksiyomları doğruluğu söz götürmez önermeler veya yeterince kanıtlanmış genellemeler sayamayacağımıza göre, o halde ne saymalıyız? Bu sorunun cevabı değişik olabilir: Mantık ve matematikte aksiyomlar, teoremlerin ispatı için, yeterli formlerdir. Bunları istersek doğru sayabiliriz. Olgusal bilimlerde aksiyomlar hipotez veya varsayım niteliğinde önermelerdir. Bunların mantıksal sonuçları olan teoremler doğru veya yanlış olabilir. Birer hipotez niteliğinde olan aksiyomlar, teoremlerin doğruluğunu güvence altına almaz. Tam tersine, teoremlerin gözlem veya deney yolundan doğrulanmaları hipotezlere doğruluk olasılığı kazandırır. Başka bir deyişle, bilimde aksiyomlara bakarak teoremleri doğru saymak şöyle dursun, teoremlere bakarak aksiyomları doğru sayma yoluna gideriz.

Aslında ne matematikte, ne de bilimde aksiyomları teoremlerden daha kesin veya apaçık saymak için bir neden yoktur. Böyle sayılması eskiden beri sürüp gelen bir önyargıdan, ya da psikolojik bir yanılgıdan başka bir şey değildir.

“Yorum” ve “Model” Kavramları

Mantık ve salt matematik dışındaki alanlarda ortaya atılan teoriler ne denli soyut

(12) B. Russell, *Mysticism and Logic*, s. 75.

ve dedüktif nitelikte görünürlerse görünsünler, olgusal dünya ile bir ilişkileri vardır. Klasik Euclides geometrisi bile uzaysal ilişkileri dile getirmekle bu tür olgusal içerikli bir teoriydi. Böyle bir teoriyi çeşitli eşdeğer biçimlerde aksiyomatikleştirme olanağı vardır ve teori ortaya konan bu biçimler için ortak bir yorum veya model oluşturur. Bunun en somut örneğini Euclides geometrisine verilen, çeşitli aksiyomatik eşdeğer biçimlerde bulmaktayız. Hilbert'in aksiyomatik sistemi, örneğin bu biçimlerden sadece biridir.⁽¹³⁾

Çeşitli kalıplara dökülen bir teori içeriği yönünden önemsendiği sürece, değişik biçim veya kalıplar fazla önemli sayılmayabilir. Ancak aksiyomatikleşme formel bir karakter kazanınca, yani teoriye verilen biçim olgusal içerikten soyutlanınca, biçimin önemi ön plana geçer. Çünkü, böyle bir biçim veya kalıba yeni yorumlar vermek, teorinin ilk içeriğinden başka içerikler bulmak olanağını ortaya çıkarır. Demek oluyor ki, içerik yönünden belli bir teori değişik kalıplara dökülebileceği gibi, aynı kalıp veya formel sistemi içeriği değişik konularda yorumlayabiliriz. Bu yorumların her biri aynı formel sistemin bir modeli sayılır. Tek bir sistemin değişik yorumlarını oluşturan modellere yapısal yönden özdeş veya izomorfik modeller denir. Mantık, değişik bilim kollarında veya değişik konularda ortaya atılmış bazı somut ve olgusal içerikli teorilerin yapısal yönden izomorfik olduklarını gösterebilirsek, bu teorileri yalnız belli bir formel sistemin modelleri saymakla kalmayız, aynı zamanda birbiri için de model sayabiliriz. Bu ise bu teorilerden herhangi birini modellerine bakarak daha iyi ve ayrıntılı anlamamıza yardım eder.

Bir de, gene örneğini geometri tarihinde bulduğumuz üzere, herhangi bir teoriden, bir veya birkaç aksiyomunu değiştirmek yoluyla komşu veya akraba teoriler türetme olanağıdır. Euclides-dışı geometrilerin ortaya çıkması böyle olmuştur.

Şimdi akraba teorilerin her biri değişik formel kalıplara dökülebileceğinden ve

(13) Bkz. David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*. 1899.

Euclides geometrisini daha belirgin bir şekilde aksiyomatikleştiren Hilbert, geometriyi beş ilkel terimi içine alan yirmi bir aksiyom üzerine kurar. Geometrinin tüm diğer önermeleri bu aksiyomlara dayanılarak teorem olarak ispatlanır. Aynı işi, daha sonra Veblen iki ilkel terime dayalı on iki aksiyomla başarır.

Hilbert'in çalışması üç yönden önemli sayılabilir. (1) "nokta", "doğru", "düzlem" gibi ilkel terimleri birer kavram adı değil, birer simge veya soyut nesne sayarak aksiyomatikleştirmeye salt biçimsel bir yaklaşım getirmek istemesi, (2) Aksiyomları niteliklerine göre beş öbeğe ayırması: Birinci öbeğe giren sekiz aksiyom "nokta", "doğru", "düzlem" gibi ilkel terimler arasındaki ilişkileri dile getirir. Örneğin: İki nokta bir doğruyu belirler; bir doğru üzerinde hiç değilse iki nokta vardır; bir düzlem üzerinde aynı doğru üzerine düşmeyen en az üç nokta vardır, vb. İkinci öbeğe giren dört aksiyom "arasında" terimi ile ilgilidir. Örneğin, A, B ve C bir doğru üzerindeki noktalarsa, ve B noktası A ile C arasında ise, B noktası C ile A arasındadır, vb. Üçüncü öbekte çakışır-lık veya geometrik eşitlik ile ilgili altı aksiyom yer almıştır. Örneğin: A ve B, a doğrusu üzerinde noktalarsa, ve A', a' doğrusu üzerinde bir nokta ise, a' üzerinde ve A'nın belli bir yanında B' gibi bir ve yalnız bir nokta vardır, öyle ki, A' B' doğru parçası A B doğru parçasıyla çakışır. Dördüncü öbekte yalnız paraleller aksiyomu vardır. Son öbekte yer alan iki aksiyom *Süreklilik* ile ilgilidir.

(3) Son olarak aksiyomlarının tutarlılık ve bağımsızlık özelliklerini saptama yolundaki çalışması. Hilbert'in başlattığı bu çalışma ondan sonra gelen çalışmaların yön ve niteliğini belirlemede son derece etkili olmuştur.

bu kalıpların her biri içeriği değişik konularda yorumlanabileceğinden, bir tek teoriden sayısız aksiyomatik kalıplar ve sayısız modeller türetmek olanağı var demektir. Şu kadar ki, karışıklığa yol açmamak yönünden akraba teoriler, eşdeğer teoriler ve izomorfik teoriler ayırımlarını gözden kaçırmamak gerekir.

Bir Teorinin Formelleştirilmesi

Bir teori veya bilgi alanını aksiyomatikleştirmenin başlıca hedefini şu iki noktada toplayabiliriz:

- (1) Çoğu kez üstü-örtük olan ilişkileri açığa çıkarmak, bu ilişkilere dayalı mantıksal bütünlüğe ulaşmak,
- (2) Düşünmede, tüm varsayım ve kuralları belirttik hale getirerek, tam bir açıklık ve kesinlik sağlamak.

Bu hedeflere ulaşma, her şeyden önce, somuttan soyuta, sezgisel içerikten mantıksal biçime geçişi gerektirir. Başka bir deyişle, bir teorinin mantıksal yapısının açık ve kesin biçimiyle ortaya çıkması olgusal içeriğinden sıyrılıp, salt nesnel nitelikte birtakım simgelerle dile getirilmesiyle olanak kazanır. Salt biçimsel olarak oluşturulan (veya formelleştirilen) bir sistemde terimler kendiliklerinden anlamı olmayan birer soyut nesne, aksiyom ve teoremler doğruluk değerleri belirsiz birer formülden ibarettir.⁽¹⁴⁾ Ne var ki, böyle soyut bir sistem, bir yandan her türlü sezgisel anlamın yol açacağı kural dışı akıl-yürütmelerden sakınmayı sağlamakta, öte yandan değişik konu veya alanlarda yorumlanma olanağı taşımaktadır. Genel karakterde olan salt biçimsel bir sistem araçları ve kuralları önceden belirlenmiş bir oyun (örneğin, satranç) gibidir. Böyle bir sistemde herhangi bir karışıklık veya anlaşmazlık sadece kurallara uymamaktan doğabilir. Akıl-yürütmelerimiz kural ve tanımlara uygun simgelerle dile getirildiğinde, hata ihtimali azalır; en ufak hataları bile saptama olanak kazanır. Leibniz, “bir düşünme hesabı” tasarlamıştı; salt biçimsel bir sistem, düşünmeye aritmetiksel bir işlemin nesnel ve mekanik kimliğini kazandırmakla, Leibniz’in rüyasını gerçekleştirme yolunu açmış görünüyor geniş ölçüde.

Aksiyomatik bir teorinin formelleştirilmesini göstermek için aşağıdaki örneği alalım:⁽¹⁵⁾

- | | |
|------------|---|
| Aksiyom 1. | A ve B bir düzlemde farklı noktalar ise, bu noktaları içine alan en az bir doğru vardır. |
| Aksiyom 2. | A ve B bir düzlemde farklı noktalar ise, bu noktaları içine alan birden fazla doğru yoktur. |
| Aksiyom 3. | Bir düzlemde bulunan iki doğru düzlemin en az bir noktasına ortak sahiptirler. |

(14) Ancak bu formüllerin totolojik nitelikte olması halinde doğruluk değerleri bellidir. Ne var ki, formüllerini totolojik nitelikte olan bir sistemin olgusal yorumları da çoğu kez “trivial” olmaktan ileri geçmemektedir.

(15) Bu örnek, Cohen ve Nagel, *An Introduction to Logic and Scientific Method*, s. 134’ten alınmıştır.

- Aksiyoim 4. Bir düzlemde en az bir doğru vardır.
 Aksiyoim 5. Her doğru, düzlemin en az üç noktasını içine almaktadır.
 Aksiyoim 6. Düzlem üzerindeki noktaların tümü aynı doğruya ait değildir.
 Aksiyoim 7. Hiçbir doğru düzlemin üç noktasından daha fazlasını içine almamaktadır.

Görüldüğü gibi, bu aksiyoimler bir düzlem üzerinde nokta ve doğru ilişkilerini dile getirmektedir. Fakat, “nokta”, “doğru” ve “düzlem” denilen şeyler ne tür nesnelerdir? Çoğumuz bunların ne olduğunu bildiğimizi sanır, hatta bir kâğıt parçası üzerinde kalem ve cetvel yardımıyla çizerek göstermek yoluna bile gidebiliriz. Ne var ki, aksiyoimlarda dile getirilen ilişkilerle, kâğıt üzerine çizdiğimiz geometrik şekillerin arasındaki ilişkilerin aynı olduğu iddia edilebilir mi? Bir tutarsızlık ortaya çıkarsa, hangisini, aksiyoimleri mı yoksa bu şekiller arasındaki gerçek ilişkileri mi düzeltme yoluna gideceğiz?

Aslında salt matematik ve mantık açısından ortada böyle bir sorun yoktur. Ne mantıkçı, ne de matematikçi aksiyoimların gerçek dünyaya uyup uymadığına bakmaz, ya da kâğıt üzerindeki şekillere bakarak aksiyoimleri düzeltme yoluna gitmez. Onların amacı, olgulara uyan bir sistem kurmak değil, kendi içinde tutarlı bir sistem oluşturmaktır.

Denebilir ki, aksiyoimler yalnız sözü geçen nesneler arasındaki ilişkileri dile getirmekle kalmamakta, bu nesneleri üstü-örtük biçimde tanımlamaktadır da. Bu doğrudur kuşkusuz. Üstelik nokta, doğru, düzlem gibi nesneler günlük yaşantımızda sık sık sözü geçen şekillerdir. Sezgisel de olsa, anlamları hakkında bir fikrimiz vardır. Ancak aksiyoimatikleşme yönünden bu anlamların bir önemi yoktur veya olmamak gerekir. Aksiyoimleri doğru saydığımızda daha neleri doğru saymamız gerektiğini saptamada ilkel terimlerin anlamları bir rol oynamaz. Başka bir deyişle, aksiyoimlarla onlara dayanılarak ispatlanan teoremler arasındaki ilişki formel nitelikte olup, ne aksiyoimların ne de onlarda yer alan ilkel terimlerin anlamına bağlıdır. Nokta, doğru, düzlem yerine, aksiyoimlarca belirlenen ilişkiler dışında hiçbir anlamı olmayan birtakım işaret veya simgeler de kullanılabilir. Üstelik böyle bir soyutlama sistemin mantıksal kesinliğini artırma yönünden gereklidir de.

Yukardaki örneğimizde geçen “nokta”, “doğru” ve “düzlem” terimlerinin anlamlarından kurtulmak için bu terimleri soyut simgelerle temsil edebiliriz. Örneğin, “düzlem” yerine S harfini, “nokta” yerine “S’nin elemanı” sözünü kullanabiliriz. Noktaya S’nin elemanı dediğimize göre S’ye bir noktalar kümesi gözüyle bakıyoruz demektir. Buna göre, doğruyu, elemanları nokta olan S kümesinin bir alt-kümesi sayabilir ve “d-kümesi” terimiyle temsil edebiliriz.

Şimdi bu terimleri kullanarak aksiyoimlerimizi yeniden dile getirelim:⁽¹⁶⁾

- Aksiyoim 1'. A ve B eğer S’nin farklı elemanları ise, A ve B’yi içine alan en az bir d-kümesi vardır.

(16) Bkz. Cohen ve Nagel, aynı yapıt, s. 135.

- Aksiyom 2'. A ve B eğer S'nin farklı elemanları ise, bu elemanları içine alan birden fazla d-kümesi yoktur.
- Aksiyom 3'. S'nin herhangi iki d-kümesi, S'nin en az bir elemanına ortak sahiptirler.
- Aksiyom 4'. S'de en az bir d-kümesi vardır.
- Aksiyom 5'. Her d-kümesi S'nin en az üç elemanını içine almaktadır.
- Aksiyom 6'. S'nin tüm elemanları aynı d-kümesine ait değildir.
- Aksiyom 7'. Hiçbir d-kümesi S'nin üçten fazla elemanını içine almamaktadır.

Burada dile getirilen ilişkilerin konusu belli değildir. Aksiyomlar “küme”, “alt-küme”, “eleman” gibi birtakım soyut ve genel nitelikte nesnelerden söz etmekte, fakat bunların somut olarak neleri temsil ettiği belirtilmemektedir. Aynı şekilde “elemanı olma”, “içine alma”, “ait olma” gibi ilişkiler de mantığa ait genel nitelikte kavramlardır. Bu nedenle aksiyomlardan hiçbirine önerme gözüyle bakamayız. “S”, “S'nin elemanı” ve “d-kümesi” gibi terimler birer değişken olup, bunları içine alan aksiyomlar birer önerme-fonksiyonu veya önerme-kalıbı niteliğindedir. Değişkenlere vereceğimiz anlama göre, aksiyomlar değişik konulara ilişkin önermeler niteliği kazanabilir. Örneğin, nokta, doğru ve düzlem terimleriyle oluşturulan aksiyomlara uzaysal ilişkileri dile getiren önermeler olarak yukardaki önerme kalıplarının özel bir yorumu gözüyle bakabiliriz. Değişkenlere vereceğimiz anlamlara göre bu yorumları istediğimiz sayıda artırabiliriz. Şu kadar ki, seçeceğimiz konu, aksiyomlarda dile getirilen formel ilişkileri sağlamış olsun.

Aksiyomlar, birtakım soyut değişkenlerin arasındaki ilişkileri dile getirmekten öteye geçmeyen önerme-fonksiyonu niteliğinde olduğunda, bunlardan mantıksal olarak çıkarılan (ya da bunlara dayanılarak ispatlanan) teoremler de aynı şekilde birtakım soyut ilişkileri dile getiren önerme-fonksiyonları olmaktan ileri geçmez. Aşağıda verilen altı teorem bu türden önerme-fonksiyonu niteliğinde cümlelerdir:⁽¹⁷⁾

- Teorem I. A ve B eğer S'nin farklı elemanları ise, A ve B'yi içine alan bir ve yalnız bir d-kümesi vardır.
(Bu teorem 1' ve 2' nolu aksiyomlardan çıkmaktadır.)
- Teorem II. Birbirinden farklı herhangi iki d-kümesi, S'nin bir ve yalnız bir elemanına ortak sahiptirler.
Bu teorem 2' ve 3' nolu aksiyomlardan çıkmaktadır.)
- Teorem III. S'nin hepsi aynı d-kümesinde olmayan üç elemanı vardır.
Bu teorem 4', 5' ve 6' nolu aksiyomlardan çıkmaktadır.)
- Teorem IV. S'deki her d-kümesi, S'nin sadece üç elemanını içine almaktadır.
Bu teorem 5' ve 7'nolu aksiyomdan çıkmaktadır.)

(17) Bkz. Cohen ve Nagel, aynı yapıt, s. 136.

İlk dört teorem, aksiyomlardan doğrudan çıktığından bunların ispatını ayrıca tartışmaya gerek yoktur. Son iki teoremin ispatı ise bu denli açık ve doğrudan değildir.

Teorem V. İlk altı aksiyoma bağlı herhangi bir S kümesi en az yedi elemanı içine almaktadır.

İspat : A, B, C 'yi S 'nin aynı d -kümesinde olmayan üç elemanı kabul edelim. Teorem III. buna olanak vermektedir. Buna göre, Teorem I. gereğince, AB, BC ve CA 'yı içine alan birbirinden farklı üç d -kümesi olmak gerekir ve aksiyom 5' gereğince, d -kümelerinden her birinin bir üçüncü elemanın daha olması ve bu ek elemanların aksiyom 2' gereğince hem birbirinden hem de A, B ve C 'den farklı olması gerekir.

Şimdi bu ek elemanları D, E ve G ile gösterirsek sözü geçen üç farklı d -kümesi ABD, BCE, CAG diye belirlenmiş olur. Aksiyom 1' gereğince, sözü edilen d -kümelerinden ayrı olarak AE ve BG de birer d -kümesi belirlir. Bunların da aksiyom 4' gereğince S 'nin bir elemanına ortak sahip olmaları gerekir ve bu eleman, aksiyom 2' gereğince zaten belirlenmiş olan elemanlardan biri olamaz. Farklı olması gereken bu elemana F dersek, AEF ve BFG 'nin de birer d -kümesi olduğu ortaya çıkar.

Böylece herhangi bir S kümesinde, A, B, C, D, E, F ve G olmak üzere birbirinden farklı en az yedi elemanın olduğu ispatlanmıştır.

Teorem VI. Aksiyomların yedisine de bağlı olan S kümesi en çok yedi eleman içine almaktadır.

İspat : Bir an için T gibi sekizinci bir elemanın var olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, AT ve BFG diye belirlenen d -kümelerinin aksiyom 3' gereğince bir ortak elemanlarının olması gerekir. Fakat bu eleman B olamaz, çünkü AB , elemanları ABD olan d -kümesini belirlemektedir; yoksa $ABTD$ elemanlarının söz konusu aynı d -kümesine ait olması gerekir ki, bu da aksiyom 7'ye göre olanaksızdır. Bu eleman F de olamaz, çünkü o zaman $AFTE$ elemanlarının AEF diye belirlenen d -kümesine ait olması gerekir. Bu eleman G de olamaz, çünkü o zaman $AGTC$ elemanlarının AGC diye belirlenen d -kümesine ait olması gerekir. Tüm bu sonuçlar, aksiyom 7' gereğince olanaksızdır. Demek oluyor ki, ya bu sonuçları, ya da 7' nolu aksiyomu reddedeceğiz. Aksiyom 7'yi kabul ederek işe başladığımızdan, bu kabulümüzle çelişen tüm sonuçları reddetmek zorundayız: O halde, S kümesinde sekizinci bir eleman yoktur.

Görüldüğü gibi, minik bir örneğini verdiğimiz formel aksiyomatik bir sistemde, tüm çıkarımlar veya ispatlar formel ilişkilere dayanmakta, açıktan veya üstü örtük herhangi bir gözlem veya deney işe karışmamaktadır. Böyle bir sisteme olgusal dünyada uygun düşen bir şeylerin var olup olmadığı ayrı bir konudur. Aksiyomları, dolayısıyla teoremleri, sağlayan herhangi bir olgusal modelin bulunması mantıkçıya değil, bilim adamına düşen bir iştir. Formel bir sistemin her başarılı yorumu doğruluğu gözlem ve deneye dayanan bir bilimsel teori demektir. Bir teoriden soyutlama yoluyla formel bir sisteme gidebileceğimiz gibi, bir formel sistemden yorumlama yoluyla olgusal içeriği değişik birçok teorilere gidebiliriz. Zaten salt matematiğin bilimler için önemi daha çok işte böyle olgusal yorumlama yoluyla olgusal yorumlara elverişli formel sistemler ortaya koyma gücünden gelmektedir.⁽¹⁸⁾

(18) Aksiyomatik yöntemle ilişkin açıklama için bkz. Ek: 5.

X. BÖLÜM

“KURAMSAL” - “UYGULAMALI” AYIRIMI

Ayırımı Bakışlar

Matematikle bilimlerin ilişkisi söz konusu olduğunda geleneksel bir ayırımla karşılaşmaktayız. Kimi matematikçiler, bilim adamlarının, bu arada özellikle mühendislerin, kullandıkları matematiği birtakım hazır formül ve işlemlerden oluşan, pratik yarara yönelik bir araç saymakta, matematiğin bu olmadığını özenle vurgulamaktadırlar. Onlara göre gerçek matematik, uygulama amacı gütmeyen, salt doğruyu bulma ve ispatlamaya yönelik kuramsal bir çalışmadır. Öte yandan pek çok kimse için bilim, teknoloji, ticaret, vb. yaşam etkinliklerinden soyutlanmış, “kuramsal” denilen matematik, matematik değil, olsa olsa satranç türünden bir oyun, ya da anlamsız bir simgeler dizgesidir. Bu görüşü, özellikle çalışmalarında matematiği bir araç olarak kullanan mühendis, ekonomist ve bilimde deneye ağırlık veren araştırmacılarda bulmaktayız.⁽¹⁾ Ne var ki, aynı görüşü paylaşan matematikçiler de vardır. Örneğin, günümüzün tanınmış matematikçilerinden Morris Kline, “Kuramsal matematik yapıyorum,” diye fildişi kulesine çekilen kimi meslektaşlarından yakınmakta, bunların matematik adına yaptıklarını, “Çoğunlukla yararsız, kısır çalışmalar,” olarak nitelemektedir.⁽²⁾

Gerçekten sorulabilir: Goldbach’ın ya da Fermat’nın konjektür (olası teorem)lerini ispatlama neden önemli olsun? Her doğal sayının dört karenin toplamı olarak gösterilebileceğini bilmek ne sağlar? Ardışık asal – çiftler bizi niçin uğraştır-sın? π sayısının rasyonel ya da irrasyonel olması neden bir sorun oluştursun?

Bu tür sorulara vereceğimiz yanıt, kuşkusuz, matematiği anlayış biçimimize bağlıdır. Matematiğe bir araç gözüyle bakanlarla, ona amacı ve doygunluğu kendi içinde, katıksız entelektüel bir uğraş diye sarılanlar arasında bağdaşması zor görüş

(1) Matematikçi Titchmarsh’ın bir anısı, kimi bilim adamlarında kendini açığa vuran bu dar bakış açısını sergilemektedir: “Salt kuramsal matematiğin işe yaramazlığından alaylı bir dille yakınan bir fizikçiye dinlemiştim. Bu fizikçi konuşmasının sonuna doğru bir teoremden, bulunmasından elli yıl sonra relativite teorisinde uygulama alanı bulan bir teoremden, söz ederek hayretini açığa vurmaktan kendini alamamıştı. Olay nerdeyse onun için bir mucize idi. Oysa bu kişi matematiğin doğasını tanımış olsaydı, olayı hayretle değil, olağan karşılardı.” (E. C. Titchmarsh, *Matematics*, s. 196.)

(2) M. Kline, *Mathematics: The Loss of Certainty*, s. 278-306.

ayrılığı vardır. Birinciler için matematiğin değeri açık, kesin ve etkili bir dil; bir çıkarım, bir problem çözme yöntemi olarak sağladığı yararda aranmalıdır. İkinciler için matematik amacı kendi içinde bir çalışmadır; salt bilme tutkusuyla işlenen bir konu kimliğinde önemlidir. Yüzyılımızın seçkin İngiliz matematikçisi G. H. Hardy bu bakışı aşırı biçimiyle şöyle dile getirmiştir:

İki tür matematik vardır: Biri “gerçek”, diğeri “önemsiz” dediğim matematik. Matematiğin çeşitli uygulamalarına bakıp yararını vurgulayan kimselerin sözünü ettiği matematik ikinci tür (benim önemsiz saydığım) matematiktir. Oysa gerçek matematiğin bu anlamda bir yararı yoktur. Gerçek matematiğin amacı, yaşamı kolaylaştırmak değil, doğruya ulaşmaktır. Gerçek matematikçiye araştırmaya yönelten tek itici güç: Bilme, anlama, öğrenme merakıdır; ötesi onu ilgilendirmez.⁽³⁾

Kuramsal matematiğin önemini vurgulayan başka matematikçiler de vardır. Örneğin, Gauss’ın, “Matematik bilimlerin, aritmetik de matematiğin kraliçesidir. Matematiğin çok kez astronomi ve diğer doğal bilimlere hizmet etme alçakgönüllülüğü gösterdiği doğrudur, ancak tüm durumlarda baş köşe onun hakkıdır,” sözleri çoğunluk onun salt kuramsal matematiğe verdiği önem olarak yorumlanmıştır. Yüzyılımızın tanınmış matematikçilerinden Jacques Hadamard (1865-1963)’ın sözleri yoruma gerek göstermeyecek kadar açıktır: “Pratik yarar, aranmadığında elde edilir. Denebilir ki, uygarlığın tüm ilerleme süreci bu ilkeye dayanmaktadır. ... Matematikte doğrudan pratik yarara yönelik pek az önemli araştırmadan söz edilebilir. Bilimsel her alanda olduğu gibi, matematikte de önemli araştırmalar “bilme ve anlama tutkusu” diyebileceğimiz ortak bir entelektüel duygudan kaynaklanır.”⁽⁴⁾ Daha ilımlı bir yaklaşımla David Hilbert de, uygulamanın tüm önemine karşın, matematikte önemin bir ölçütü sayılmaması gerektiğini vurgulamaktan kaçınmaz. Öte yandan, Lobachevsky, soruna daha geniş bir çerçevede bakarak, “Ne denli soyut olursa olsun, hiçbir matematiksel çalışma yoktur ki, bir gün gerçek dünyada olup bitenlere uygulanma olanağı bulmasın,” demiştir. Benzer bir düşünceyi A. N. Whitehead’ın dile getirdiğini görüyoruz: “En kuramsal olduğumuz bir tutumda, pratik uygulamaya en yakın olduğumuzu söylemek bir paradoks değildir.”

Kuram-Uygulama İlişkisi

Bu tür alıntılar daha fazla uzatmadan şu soruyu sorabiliriz: Hardy’nin ileri sürdüğü gibi, gerçekten birbiriyle bağdaşmaz iki matematik mi, yoksa Lobachevsky’nin belirttiği gibi, sonunda birbirine dönüşen çalışmalar mı vardır? Sonra, Hardy’nin “gerçek matematik”, “önemsiz matematik” ayırımında bir üstünlük duygusu, bir tepeden bakma yok mudur? Kraliçelik tahtını matematiğe ayıran Gauss’ın tavrında da aynı duygu kendini açığa vurmuyor mu? Bu noktada ister istemez David Hilbert’in soruna bakış biçimini yansıtan olay akla gelmektedir. Kuramsal ve uygula-

(3) G. H. Hardy, *A Mathematician’s Apology*, s. 139.

(4) J. Hadamard, *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, s. 124-125.

malı matematikçilerin ortak bir toplantısında, iki grup arasında büyüyen gerginliği yumuşatmak üzere, konuşması istenen Hilbert, arabuluculuk görevini şu sözlerle yerine getirir:

Sık sık kuramsal matematikle uygulamalı matematiğin birbirine düşman olduğunu duyarız. Bu doğru değildir. Kuramsal ve uygulamalı matematikler birbirine düşman değildir; hiçbir zaman düşman olmamışlardır, hiçbir zaman da düşman olmayacaklardır. Kuramsal ve uygulamalı matematikler birbirine düşman olamaz. Olamaz, çünkü ikisi arasında ortak hiçbir şey yoktur.

Matematikte ve diğer bilimlerde, kuramsal ve uygulamalı ayırımı Antik Yunan dönemine kadar uzanır. Ayırımın kökeninde toplumun “efendi” - “köle” sınıflarına ayrılmış olması olayının yattığı söylenebilir. Nitekim Platon’un “idealar” ve “görüntüler” ayırımı ile Aristoteles’in “bilim için bilim” diye dile getirebileceğimiz yaklaşımı, o dönemde egemen efendi – köle ayırımını yansıtmaktadır. Düşünsel uğraşları yücelten, eşişlerini horlayan bu tutumun, değişik görünümelerde tüm toplumlarda bugün bile sürdüğü kolayca yadsınamaz. Oysa hangi alanda olursa olsun, tarihe baktığımızda, atılım ve ilerlemelerin çoğunluk kuramla uygulamanın, hipotezle deneyin birleştiği, etkileşim içine girdiği ortamlarda yer aldığını görürüz. Gerçekten, Lobachevsky ile Whitehead’i haklı çıkaran pek çok örnek gösterilebilir. Kimi kez salt pratik yarara ya da uygulamaya yönelik ortaya konan bir kavram, yöntem veya işlemin kuramsal ölçütlere vurulduğunda, kabul edilebilir nitelikte olmasa bile, işe yaradığı, hatta giderek kuramsal yetkinliğe ulaştığı bilinen bir olaydır. Modern matematiğin önemli bir bölümünün, uygulamalardaki gereksinme dürtüsüyle ortaya çıkan, daha sonra kuramcı matematikçilerin elinde işlenerek kuramsal nitelik kazanan çalışmalardan oluştuğu unutulmamalıdır. Akla hemen gelen ilk örnek, diferansiyel ve integral hesaplara ilişkindir. Fizik ve astronomide belli ihtiyaçların yol açtığı bu gelişme, daha önce de belirttiğimiz üzere, Lagrange, Gauss, Cauchy, Weierstrass gibi büyük matematikçilerin elinde işlenerek açıklık kazanır, mantıksal bütünlüğe ulaşır. Yine bunun oldukça yeni bir örneğini, Oliver Heaviside’in elektromanyetik salınım (oscillation) ve ışınlımına ilişkin problemlerin çözümünde son derece yararlı olan çalışmasında bulmaktayız. “Operatör analiz” denilen uygulamaya yönelik bu çalışma, daha sonra kuramsal düzeyde matematiğin yeni bir kolu olarak gelişme olanağı bulur. Benzer bir yolu Paul A. M. Dirac’ın δ (delta) fonksiyonu da izlemiştir. Fizikte belli bir ihtiyacı karşılamak üzere oluşturulan bu kavram, matematikçilerin ele almasından önce, kuramsal ölçütlere vurulduğunda, oldukça ham, hatta aykırı bir görünüm sergiliyordu.

Bazen de tam tersine, salt kuramsal olarak oluşturulan birtakım soyut kavram ve yöntemlerin, zamanla, beklenmedik uygulama alanları bulduğunu görmekteyiz. Bunun sayısız örnekleri arasında akla hemen koni kesitleri, sanal sayılar, Riemann geometrisi, matrisler teorisi gibi başlangıçta ne işe yaradığı belli olmayan, hatta çoğu matematikçinin gözünde bile bir fantazi, bir oyun, ya da “saçma sapan” bir uğraş olmaktan ileri geçmeyen çalışmalar gelmektedir.

Helenist dönemin seçkin matematikçilerinden Bergamalı Apollonius (İ.Ö. 262-190), elips, parabola ve hiperbola denen düzlem eğriler üzerinde yürüttüğü çalışmayı *Koni Kesitleri* adlı yapıtında ortaya koyar. XVII. yüzyıla gelinceye dek koni kesitlerinin pratik açıdan bir işe yaradığı belli değildi. İlk kez Galileo, top mermilerinin parabola “çizerek” yol aldığını; Kepler, gezegenlerin Güneş çevresinde elips yörüngeler “çizerek” ilerlediğini ortaya çıkarır. Apollonius’un yaklaşık iki bin yıl önce, salt kuramsal bir ilgiyle yaptığı bir çalışma, hiç beklenmedik bir biçimde, savaş teknolojisiyle astronomide önemli uygulama alanları bulur.

Başlangıçta matematikçilerin “inanılmaz”, “olanaksız” ya da düpedüz “saçma” diye niteledikleri $\sqrt{-1}$ gibi sanal sayıların uygulama alanı matematikte kendini gösterir. Bilindiği gibi, $x^2 + a = 0$ türünden denklemlere çözüm arayışı negatif sayıların karekökünü alma düşüncesine yol açar. XVI. yüzyıl matematikçisi İtalyan Geronimo Cardano (1501-1576), negatif köklerin önemini ilk kavrayan olmasına karşın, bunları “uydurma” saymaktan kendini alamaz. Aynı yüzyılda onu izleyen Bombelli, $x^2 + a = 0$ (a , pozitif olduğunda) gibi cebirsel bir denklemin çözümü için “sanal” dediği sayılara ihtiyaç olduğunu kavrar. Örneğin, kendisini, ya $x^2 + 1 = 0$ denklemini anlamsız saymak, ya da, x ’in -1 ’in karekökü olduğu gibi son derece saçma bir şeyi kabul etmek ikilemi arasında kalmış bulan Bombelli, ikinci şıkkı seçerek, matematikte yeni bir açılmanın kapısını aralar. Bombelli’nin akıl yürütmesi basitti: $x^2 - 1 = 0$ denklemi anlamlıysa, $x^2 + 1 = 0$ denklemi de anlamlı olmalıydı. Ancak, kuşkuların ardı hemen gelmez. Leibniz ve Euler çapında matematikçiler bile bu “olanaksız” sayılan nesneleri kolayca içlerine sindirememişlerdir. Leibniz, sanal sayıları, “Kutsal ruhun güzel ve göz alıcı sığınağı; varlıkla yokluk arasında, bir tür, hem karada, hem denizde yaşayan bir yaratık” diye niteler. Euler ise, -1 ’in karekökü gibi bir kavramın matematiğin gelişmesindeki önemini ya yeterince görmez, ya da görmezlikten gelmeyi yeğler.

Sanal sayıların kullanımı matematikte yeni bir sayı sisteminin, $a + ib$ biçimini alan (a ile b gerçel sayıları i ise $\sqrt{-1}$ ’i, yani sanal bir sayıyı simgelemektedir) karmaşık (kompleks) sayılar sisteminin ortaya çıkmasına yol açar. Son derece verimli bir çalışma alanı olan fonksiyon teorisi ise doğrudan karmaşık sayıların getirdiği bir gelişmedir. Matematiğin iç yapısındaki önemli rolü böylece kanıtlanmış olan sanal sayıların, “... sonunda, başta fizik olmak üzere, modern bilimin analitik yöntemlerinde vazgeçilmez bir işlevi olduğu da” görülmüştür.⁽⁵⁾

Matematikte salt-kuramsal bir çalışmanın daha sonra uygulama alanı bulma olayına çarpıcı bir başka örneği Riemann’ın eliptik geometrisi vermiştir. Bilindiği gibi, XIX. yüzyılda ortaya çıkan Euclides-dışı geometriler, klasik geometriyi, özellikle paralel postulatın yol açtığı tedirginlikten kurtarma, daha sağlam bir temele oturtma çabalarından kaynaklanmıştır. Diğer yeni geometriler gibi başlangıçta son derece yadırganan eliptik geometrinin, aradan yaklaşık 60 yıl geçtikten sonra, yüz-yılımızda Genel Relativite teorisinde uygulama alanı bulmanın ötesinde, bu teoriyi olanaklı kılmada yaşamsal bir işlev gördüğünü, teorisinin kurucusu Einstein’ın kendi

(5) R. L. Wilder, *Evolution of Mathematical Concepts*, s. 117.

dilinden öğreniyoruz. Teoride öngörülen boyutlardaki uzay, bildiğimiz Euclides uzayı değil, Riemann geometrisinin içerdiği, bir yumurta kabuğunda olduğu gibi dolanıp kendine dönen, kavisli uzaydır.

Son örneğimize gelelim: Geçen yüzyılda Arthur Cayley, “matris kalkülüs” (matrix calculus) çalışmasını ortaya koyduğunda büyük bir tepkiyle karşılaşmıştı. Özellikle Kraliyet astronomu George Bidell Airy, hiçbir uygulama değeri bulmadığı bu çalışmayı sert bir dille yermekten kendini alamaz. Gök mekaniğine önemli katkılarıyla tanınan Airy, uygulamaya yönelik matematiğin ateşli savunucusuydu. Ona göre, fizik ve astronomi için en uygun ve etkili matematiksel aracı diferansiyel denklemler teorisi sağlamaktaydı. Cayley’in matrisler geometrisi olsa olsa eğlendirici bir oyun olabilirdi. Oysa zaman, sonucun hiç de Airy’nin değerlendirmesine uygun çıkmadığını gösterir. Bir tür cebir olan matrisler teorisinin yüzyılımız fiziğinde, özellikle kuantum teorisile “informasyon” teorisinde son derece önemli uygulama alanları bulduğunu görüyoruz.

Tartışma

Öyleyse matematiği kategorik olarak ‘kuramsal’ ve ‘uygulamalı’ diye ikiye ayırmak; birini gerçek, diğerini düzmece, ya da birini yararlı diğerini yararsız saymak, matematik tarihi gözönüne alındığında, yapay bir çabadır. Nitekim, Euclides geometrisine baktığımızda öyle bir ayırımın geçersizliği ortaya çıkmaktadır. Soralım: Euclides geometrisini kuramsal mı, yoksa uygulamalı mı saymalıyız? Bu geometride örneğini bulduğumuz aksiyomatik yöntem, kökeninde kuramsal matematiğin belirgin özelliğini oluşturur. Bilindiği gibi, bu yöntemde teoremlerin ispatı, hiçbir deney ya da ölçmeye başvurulmaksızın salt mantıksal çıkarımla gerçekleştirilir. Kaldı ki, Euclides sistemi herhangi bir uygulamaya yönelik değildir; öyle bir amaçla da oluşturulmamıştır. Gerçi geometrinin, başta mühendislik olmak üzere, çeşitli alanlarda uygulamaları olduğunu biliyoruz. Ne var ki, Euclides, sistemini oluştururken her türlü uygulama kaygılarının ötesinde, salt kuramsal ölçütlere bağlı kalmıştır.⁽⁶⁾ Bu tutumundan ötürü onu eleştirme yoluna gitmek de haklı olamaz. Nitekim o dönemde pratik yarar ağır bassaydı, ne *Elementler* bildiğimiz biçimiyle yazılabilir, ne de kimse koni kesitlerini inceleme yoluna giderdi.

Euclides’in pratik yarar aramayan kuramsal yaklaşımı günümüze değin matematikçiler için özenilen bir örnek, etkili bir eğitim aracı olmuştur. Teknoloji ve uygulamanın ağır bastığı çağımızda, pek çok matematikçinin gözünde matematiğin üstün değeri işe yaramasında değil, kendine özgü mantıksal kesinlik ve estetik yapısında bulunuyorsa, bunu büyük ölçüde Euclides türünden öncüllere borçluyuz. İlginç olan şudur: Kökeninde hiçbir yarar amacı gütmeyen matematiksel çalışmaların, çoğu kez, beklenmedik uygulama alanları bulması. Bu olaya yukarda örnekler

(6) Euclides’in, Platon geleneğine uygun salt kuramsal tavrını vurgulayan ünlü bir söylentiye anmadan geçmeyeceğiz: Dersini izleyen öğrencilerden biri, “Bu ispatlarınızı öğrenmek bize ne sağlar?” diye sorunca, Euclides kölesini çağırır, “Öğrendiklerinin ne işe yaradığını merak eden bu efendiye birkaç kuruş ver, emeğinin boşa gitmediğini görsün,” der.

vererek değindik. Öyleyse, matematikçilerin özellikle eğitim kurumlarında, salt kuramsal araştırma ilgileri yadırganmak şöyle dursun, beslenmeli, teşvik görmelidir. Hatta salt yarar açısından bakıldığında bile, başlangıçta somut hiçbir sonuç vaat etmeyen kuramsal çalışmaların destek görmesinde çeşitli açılardan yarar olduğu söylenebilir. Öte yandan başlangıçta pratik yarar vaat eden çalışmaların da her zaman beklenen sonuçları verdiği söylenemez. Örneğin, yüzyılımıza giriş yıllarında, üstün uygulama gücü taşıdığı gerekçesiyle büyük umutlar bağlanan “Hamilton quaternionları” tekniği, çok geçmeden sözü edilmez olmuştur.

İkinci Dünya Savaşı’ndan bu yana, bilimde olduğu gibi, matematikte de, uygulama eğiliminin büyük ağırlık kazanması, bir bakıma, matematiğin geleneğine ters düşen bir gelişmedir. Gene de durum kaygı verici olmaktan uzaktır. Tüm uygulama arayışlarına karşın, akademik çevrelerdeki üst-düzey araştırmaların ancak küçük bir bölümü salt uygulamaya yönelik sayılabilir.⁽⁷⁾ Aslında matematik geleneği açısından da beklenen budur. Cantor’un kümeler teorisi dahil, son yüzyıl içinde oluşan matematiğin önemli bir bölümünün, hiç değilse başlangıç döneminde herhangi bir alan için doğrudan uygulama amacı güttüğü söylenemez. İki eğilimin aşağı yukarı birbirini dengelediğini belirten Bochner şöyle demektedir:

Öyle görünüyor ki, günümüz matematiğinde, ... kendi iç dinamiğinden kaynaklanan “matematik için matematik” diyebileceğimiz baskın bir eğilim vardır. ... Öte yandan, bu eğilime koşut, ama dış koşullardan beslenen, belki de daha güçlü bir tutum, matematiğin uygulama amaçlı olmasına yöneliktir. Gerçi görünürde birbirine ters düşen bu iki isteği bağdaştırmak için ortada herhangi zorlayıcı bir çaba yoksa da, sonuç tümüyle bakıldığında oldukça doyurucu görünmektedir.⁽⁸⁾

Gerçekten, bir yanda Morris Kline’in, öte yanda G. H. Hardy’nin temsil ettiği iki aşırı uçtaki görüşlerden ne birini, ne de öbürünü tümüyle paylaşmaya olanak yoktur. Her şeyden önce, daha önce de belirttiğimiz gibi, kuramsal ve uygulamalı ayrımı, sanıldığı kadar kesin olmaktan uzaktır. Ele alınan bir problemin ya da ulaşılan bir sonucun hangi aşamada uygulamalı, hangi aşamada salt-kuramsal nitelik kazandığı çoğu kez kolayca belirlenemez. Nitekim doğa bilimlerinin herhangi bir dalında ortaya çıkan bir problemin, başlangıçtaki uygulamalı görünümüne karşın, daha sonra salt kuramsal bir çalışmaya dönüşmesi olağan dışı değildir. Örneğin, Cantor’un başlangıçta ısının matematiksel açıklamasında ortaya çıkan kimi sorunları çözmek için kümeler kuramını oluşturduğunu biliyoruz. Oysa, kümeler kuramının daha sonra yol açtığı, matematikçi filozofları uğraştıran, tutarlık sorunu ile aritmetiği temellendirme sorunu, ne yandan bakılırsa bakılsın, salt kuramsal nitelikte sorunlardır. Aynı şekilde, başlangıçta salt-kuramsal ilgiye konu kimi problemlerin de sonunda düpedüz uygulamalı sorunlara dönüştüğü de bilinmektedir. Bunun en çarpıcı örneklerinden biri, simgesel mantığa özgü kimi yöntem ya da işlemlerin elektrik devrelerinde ve çağdaş kompüter programlarındaki uygulamasında bulmaktayız.

(7) S. Bochner, *The Role of Mathematics in the Rise of Science*, s. 30.

(8) Aynı yapıt, s. 32.

Sonra, Kline’in salt-kuramsal çalışmaları tümüyle yararsız, kısır çalışmalar olarak eleştirmesi ne denli yadırganacak bir yaklaşımsa, Hardy’nin de uygulamaya yönelik çalışmaları “gerçek matematik”ten saymaması da o denli haksızca bir tutumdur. Kuşkusuz, “kuramsal” diye yola çıkan çalışmalardan bir bölümünün sonunda yararsız, uygulamalı ya da kuramsal hiçbir değer taşımayan çabalar olarak kaldığı yadsınamaz. Ama bu, salt-kuramsal çalışmalara özgü değil, uygulamalı çalışmalarda da karşılaşılan bir durumdur. Uygulamalı ya da kuramsal olsun, her alanda, gerçek değer ve yaratıcılık çok sınırlı kalan bir olaydır.

Matematiksel bir çalışmanın nerede, ne zaman yararlı olacağını, hatta yararlı olup olmayacağını baştan kestirmeye olanak yoktur. Ortaya koydukları kuramsal sonuçların beklenmedik uygulamaları belki de herkesten çok matematikçilerin kendileri için şaşırtıcı olmaktadır. Daha 45 yıl önce sayılar teorisi için hiçbir uygulama alanı olmadığını emin bir dille söyleyen Hardy, yaşasaydı günümüzde soyut sayılar teorisinin ulusal güvenlik sorunlarına; asal sayılara özgü kimi ayrıksı özelliklerin, gizli kodlar oluşturmada esas tutulan yeni bir plana nasıl uygulandığını görecekti.

Her alanda olduğu gibi, matematikte de tek yanlılık yanlıtıdır.⁽⁹⁾

(9) Kuramsal-uygulamalı ayırımı için bkz. Ek: 7.

MATEMATİĞİN BİLİMDEKİ YERİ

Giriş•

Bir bilim dalıyla az çok ilişkisi olan herkes, matematiğin bilim için “yaşamsal” diyebileceğimiz önemini bilir. Hatta denebilir ki, bir bilim dalının gelişmişlik aşaması, matematiği kullanmada eriştiği düzeyle ölçülebilir. Örneğin, en gelişmiş alan olarak bilinen teorik fizik (hiç değilse görünümde) matematikten kolayca ayırtsanamayacak ölçüde matematikleşmiştir. Son elli yıl içinde biyolojinin yanı sıra psikoloji, ekonomi ve sosyoloji gibi az gelişmiş bilim dallarının da, elden geldiğince, matematikten yararlanma çabası içine girdiklerini biliyoruz.

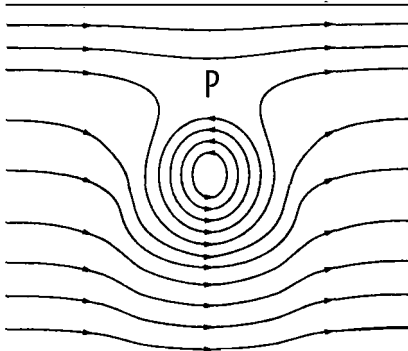
Birtakım soyut nesne ve ilişkileri konu alan matematiğin, olgusal dünyayı betimleme ve açıklamaya yönelik bilimler için önemi nasıl açıklanabilir? Kuramlarını geniş ölçüde matematikten yararlanarak oluşturan Einstein bile bu konudaki hayretini gizlememekte,

Deneyimden tümüyle bağımsız, salt düşüncemizin ürünü olan matematiğin, nesnel dünyayla bu denli yetkin bir uyum içine girebilmesi nasıl olanak kazanmaktadır?

diye sormaktadır.

Gerçekten, doğa ile matematik arasında hayret verici uyuma pek çok örnek verilebilir. Biz ilginç bulduğumuz bir tanesiyle yetineceğiz.

Aşağıdaki diyagramda gördüğümüz nedir? a) Ağaç gövdesinde bir düğüm mü?



b) Akan suyun bir engeli dolaşması mı? Yoksa, c) matematiksel bir denklemin grafik biçiminde ifadesi mi? Hemen söyleyelim, bunların hepsi söylenebilir. Nitekim ağaç gövdesinde bir düğümün kesitini, ya da akan suyun yuvarlak bir cismin çevresindeki dolaşımını gösteren diyagram, aynı zamanda, “Laplace Denklemi” diye bilinen bir diferansiyel denklemin grafiğidir.

Peki bu beklenmeyen uyumun kaynak ve niteliği nedir? Matematikğin doğal ilişkileri soyut formül veya modellerle temsil gücünü nasıl açıklayabiliriz?

Pek çok düşünür için matematikğin sergilediği bu güç, açıklanamaz bir gizem ya da mutlu bir rastlantıdır. Seçkin fizikçi Eugene P. Wigner, 1960’da yazdığı “*Matematikğin Doğa Bilimlerindeki Akıllamaz Etkinliği*” başlığını taşıyan incelemesinde doyurucu hiçbir açıklama getirmeyen şu sözleri söylemekle kalmaktadır:

Fizik yasalarını formüle etmede matematiksel dilin sağladığı gizemsel olanak, ne anladığımızı, ne de hak ettiğimizi söyleyebileceğimiz şaşılasi bir armağandır bize.

Einstein ile Wigner’in yanı sıra daha pek çok bilim adamı ve filozof için bir gizem niteliği taşıyan bu uyum üzerinde bir açıklamaya girişmeden önce, matematik ile bilimin tarih boyunca ilişkisine kısaca değinmede yarar vardır.

Tarihsel İlişki

Matematikğin XVII. yüzyıldan bu yana giderek artan ölçülerde bilimde uygulama alanları bulduğunu biliyoruz. Ne var ki, matematikğin bilimle ilişkisi daha gerilere, Antik Yunan dönemine dek uzanır. Yunan düşüncesinde matematiğe astronomi gibi bir doğabilimi gözüyle bakılırdı; matematik, evreni betimleme ve anlama çabasında güvenilir, etkili ve sistematik bir çalışma sayılıyordu. (Bu belirleme Platon felsefesi dışındaki Yunan düşüncesi için doğrudur!) Örneğin, geometriye, uzaysal ilişkileri konu alan bir bilgi alanı gözüyle bakılıyordu. Antik dünyanın en seçkin matematikçileri, aynı zamanda, seçkin bilginlerdi. Pythagoras, evrenin sayısal olduğu inancındaydı. Ona göre evrenin düzeni, bu düzeni oluşturan değişik nesne ve olguların uyumu sayısal ilişkilerden kaynaklanıyordu. Örneğin, ezgiler uyumundan oluşan müziğin dayandığı sayısal ilişkiler son derece basitti: Telli çalgılarda seslerin uyumsal birleşimiyle tellerin uzunlukları arasındaki ilişkiyi göstermek için “monokord” denen tek tel üzerinde çalışır. Değişik uzunluklarda aldığı teli, belli bir ağırlığın çekimine tutarak telin farklı uzunlukları arasındaki basit sayısal ilişkilerle üretilen çift ses tonlarının doğrudan bağıntılı olduğunu gösterir. Telin uzunlukları 2:1 oranında alındığında ses tonu bir oktav, 3:2 oranında alındığında “beşte bir”, 4:3’ oranında alındığında “dörtte bir”dir. Denebilir ki, Pythagoras’ın bu buluşunu (ki, modern fizik dilinde kısaca şöyle dile getirilebilir: Belli bir gerilimde tutulan bir telin frekansı, yani saniyedeki titreme sayısı, uzunluğu ile orantılıdır,) fiziksel bir ilişkinin matematiksel olarak dile getirilişinin ilk örneği ve teorik fiziğin başlangıcı sayabiliriz.

Ne var ki, evrenin özünü tamsayıya indirgeyen Pythagorasçılar, matematiğe olgusal dünyayı inceleme, gözlem verilerine dayalı yorum ve genellemeleri işleme yo-

lunda kullanılabilecek bir araç olarak değil, evreni açıklamada kendi başına yeterli mistik bir güç olarak bakıyorlardı. Tamsayıyla, ya da tamsayıların bir ilişkisiyle dile getirilemeyen $\sqrt{2}$ gibi ortak ölçüsüz büyüklüklerle karşılaşmaları, geometrinin ön plana çıkmasına yol açar. Öyle ki, Euclides ve onu izleyen Archimedes döneminde matematik artık hemen tümüyle geometri demektir.

Pythagoras'ı hem bilim, hem matematik tarihinde büyük yer tutan Eudoxus ile Archimedes izler. Geometride çeşitli teoremlerin ispatını veren Eudoxus (İ.Ö. 408-355), gezegenlere ilişkin ilk sistemi kuran ünlü bir astronomdur. Archimedes (İ.Ö. 287-212) ise, teorik ve uygulamalı alanlarda çeşitli buluşlarının yanı sıra, mekanikteki öncü çalışmaları gözönüne alındığında, özellikle hidrostatik'in kurucusu olarak, klasik dönemin en büyük bilim adamı sayılır. Biraz önce de değindiğimiz gibi, o dönemde matematik ile bilim arasında kesin bir ayırım çizgisi söz konusu değildi. Euclides geometrisine bile, modern anlamda, salt matematik bir sistem olmaktan çok, uzaysal ilişkileri konu alan uygulamalı matematik, ya da düpedüz doğaya yönelik bilimsel bir çalışma gözüyle bakılıyordu. Şu kadar ki, antik Yunanda ne fizik, ne de bilimin başka bir dalı, Euclides'in ortaya koyduğu örneğe ve de Archimedes'in olağanüstü çabasına karşın, kuramsal bir sistem düzeyine erişememiştir. Bunun bir nedeni belki de, sayısal matematiğin bu amaç için yetersiz kalmasıydı. Nitekim, ağırlık, uzunluk, alan gibi büyüklüklere ilişkin kavramlar ile oran ve orantılara ilişkin çözümlemeleri içeren bu matematikte, gerçel sayı kavramı oluşmamıştır. Üstelik Yunanlıların hesaplama teknikleri işlerlikten uzak, sınırlayıcı ve donuk nitelikteydi. Öyle görünüyor ki, ortak ölçüsüz büyüklüklerin keşfiyle ortaya çıkan bunalım Yunanlı matematikçileri sayısal işlemlerden uzaklaştırmış, geometride teorem ispatına, giderek aksiyomatik düzenlemeye yöneltmiştir. Sayı kavramı ile cebirsel dönüştürmelerden bu uzaklaşma, bilimde iki bin yıllık ölü bir dönemin başlangıcı olmuştur.

Sayıya dayalı modern matematiğin, Yunan matematiğinden çok Hint ve Arap matematiğinden kaynaklandığı söylenebilir. Yunanlılar sayıya dayanan çalışmalarında bile geometriden yararlanma yoluna gitmiştir. Oysa, kökeni Babil'e ulaşan Hint-Arap geleneğinde sayısal problemleri ele almada geliştirilen simgeler ve işlemsel kurallar, sayısal problemleri daha etkili, genel ve soyut düzeyde ele almaya olanak veriyordu. Öte yandan bu gelenekte ispatlama, dolayısıyla elde edilen sonuçları aksiyomatik bir düzende sunma çabasının önemli bir yer tutmadığını görmekteyiz. Euclides'ten gelen aksiyomatik geometrinin tersine, sayı matematiği uzun süre bir yığın işlemsel kural ve ilkelerden oluşan bir çalışma biçiminde kalmıştır. Sayı teorisinin aksiyomatik olarak ele alınması, geçen yüzyılın sonlarında Peano ile başlayan ve yüzyılımızda yoğunluk kazanan çalışmaları beklemiştir.

Rönesans sonrasında bilimde gözlenen devrimsel atılımlarla, matematikte analitik geometri ile diferansiyel ve integral hesapların oluşturulması birlikte yürümüştür. Bilimsel devrimi kamçılayan matematik, Fermat, Descartes, Galileo, Kepler, Newton, Leibniz, vb. matematikçi-bilginlerle etkinlik kazanır. XVIII. yüzyılda Euler, Lagrange ve daha sonra Gauss ve Laplace elinde yetkinliğe erişen bu uygulamalı matematik özünde sayısalıdır. Gerçi geometri önemini yitirmiş değildir. Nitekim Galileo bile, "Bilimin dili matematiktir," derken, aritmetikten çok geometriyi dü-

şünmüş olmalı ki, önümüzde açık duran doğa kitabının harflerinin üçgen, daire gibi şekillerden oluştuğunu söyler. Öyle de olsa, Euclides'te doruk noktasına ulaşan mantıksal sistemleştirme çabası, yerini artık yeni açılım ve denemelere bırakmıştır. Bu dönemin matematikçilerinin gözünde klasik çağın “kılı kırk yaran” mantıksal kesinlik, tanımlama ve ispata yönelik arayışları önemini yitirmiş; sezgisel tahminler, yarı mistik akıl-yürütmeler, sınama-deneme türünden yöntemler değer kazanmıştır. Sonuç, hiçbir dönemde görülmemiş, göz kamaştırıcı bir ilerlemedir. İleriye dönük atılımların XIX. yüzyılda da sürdüğünü görmekteyiz. Ama bu yüzyıl, aynı zamanda, bir pekiştirme, kazanılanı bir temellendirme dönemidir. Özellikle yüzyılın ikinci yarısında mantıksal çözümleme ve eleştirel yaklaşım egemenlik kurmaya yüz tutar. Yeni gelişmelerin, bu arada özellikle diferansiyel ve integral hesapların temellerini yoklama; matematiği sağlam mantıksal bir temele oturtma çalışmaları ağırlık kazanır. Öyle ki, bir anlamda, yeni atılımların yanı sıra, klasik ölçülere dönüldüğü söylenebilir. Bu eğilimin giderek güçlenen egemenliği günümüzde de sürmektedir. Ancak, her alanda olduğu gibi, matematikte de, mantıksal titizliğin, sıkı ispat ve kesinlik arayışlarının gereğinden fazla önemsenmesi, duraklama, sonunda belki de yozlaşma tehlikesini birlikte taşır. Yeni buluş ve atılımlar, donuk mantıksal kuralları ince beceriyle kullanma ustalığından değil, tam tersine, kimi kez ölçsüzlüğe kaçan, yanlışa düşmekten çekinmeyen, sezgiye geniş yer veren arayış ve sınama çabalarından kaynaklanır. Unutmamak gerekir ki, matematik bir araştırma alanıdır; çoğu kez sanıldığı gibi bir yığın mantıksal kural, tanım ve çıkarım yöntemlerinden oluşan salt bir oyun, ya da durağan bir sistem değildir.

Karşıt Görüşler

Tarih boyunca karşılıklı etkileşim içinde olan matematikle bilimin ilişkisine çeşitli yönlerden bakılabilir. Her şeyden önce ikisi de temelde akılcıdır. Ne matematik sayılarda, ya da sayılar arasındaki ilişkilerde artık mistik bir özellik aramakta, ne de bilim doğada olup bitenleri doğa ötesi bir güçle açıklama yoluna gitmektedir. Sonra, iki alanda da doğruyu bulma ve dile getirme çabası egemendir. Kaldı ki, geçmişe baktığımızda, kimi büyük matematikçilerin aynı zamanda bilim adamı olduklarını, kimi büyük bilim adamlarının da aynı zamanda matematikçi olduklarını görmekteyiz. Bilim ile matematiğin arasındaki ilişki, üstelik, tek yönlü değildir; matematiğin bilimin gelişmesindeki etkili işlevi karşısında bilimin de matematiğin gelişmesinde rol oynadığı bir gerçektir. Bu noktayı, çağdaş fizikçi R. B. Lindsay şu sözlerle vurgulamaktadır:

Bugün kullandığımız matematiğin önemli bir bölümünü, öncelikle deneyim verilerini bilimsel betimleme ve açıklama uğraşında olan Newton gibi bilim adamlarına borçluyuz. Öte yandan gene, modern matematiğin önemli bir bölümü, başlangıçta bilim adamlarının kendi amaçları için oluşturdukları kimi yöntem ve kuramların daha sonra salt matematikçiler elinde işlenerek mantıksal yetkinliğe ulaşmasıyla ortaya çıkmıştır.⁽¹⁾

(1) R. B. Lindsay, *The Role of Science in Civilization*, s. 190-191.

Ama tüm ortak özelliklerine ve karşılıklı etkileşimlerine karşın, matematikle bilimi bir tutmaya, ya da birini diğerine indirgemeye olanak yoktur. Matematik, ne yönden bakılırsa bakılsın, doğada olup bitenleri anlamaya yönelik bir çalışma değildir. Ne uğraş konusu nesneler, ne de bunları inceleme yöntemi bakımından bilimlerle sınıflandırılabilir. Bilim, olgusal ilişkileri belirleme ve açıklamaya yöneliktir; matematik, soyut ilişkileri dile getiren teoremleri ispatlamayla yetinir. Örneğin, fizikte suyun donması ispatlanmaz; ilk koşullarına gidilerek açıklanır. Oysa, geometride üçgenlerin iç açılarının toplamının iki dik açının toplamına eşit olduğu ispatlanır; yoksa, eşitliğin nedenleri araştırılarak açıklanması yoluna gidilmez. Bu temel farka karşın, matematiğin bilimler için yaşamsal önemi nereden kaynaklanmaktadır? Bu soruya bugüne değin üzerinde herkesin birleştiği bir yanıt verilememiştir. Ancak ortaya atılan çeşitli görüşlerden birkaçına değinmede yarar vardır.

Görüşlerden çok yaygın olan birine göre, matematiğin bilimlerdeki etkinliği, doğanın matematiksel bir düzen içermesine dayanır. Doğa yasalarını koyan Tanrı, bu görüşü ileri sürenlerin gözünde yetkin bir matematikçidir.⁽²⁾ Evrende tüm olup bitenler matematiksel bir düzene bağlıdır. Başka bir deyişle, evren kendisini matematiksel bir dille açığa vuracak şekilde kurulmuştur. Doğada gözlenen ya da varsanan ilişkilerin matematiksel formül veya denklemlerle dile getirilişi bunun bir kanıtıdır. Örneğin, yerçekimi iki kütle arasındaki uzaklığın karesiyle ters orantılıdır; aynı ilişkiyi bir gazın hacmi ile basıncı arasında da bulmaktayız; serbest düşen cisimler değişmez bir ivmeyle (yeryüzüne yakın bölgede) düşerler, gibi... Matematik, evrenin “kalıtsal” düzeninin bir ifadesidir; olup bitenleri betimleme ve açıklamada bilimler için vazgeçilmez değeri buradan kaynaklanmaktadır. Matematik, insanoglunun şu ya da bu şekilde oluşturduğu bir sistem değil, doğanın bize yüklediği evrensel bir zorunluktur. Pythagoras’tan kaynaklanan, Platonculukla çok yakın benzerlik içinde olan bu görüşe ters düşen bir görüşe de değinmeliyiz: Buna göre matematik, insan zekâsının bir ürünüdür; doğadan bağımsız olarak özgürce oluşturduğumuz simge veya kavramlardan kurulu bir sistemdir. Sistemde yer alan kimi kavram, model ya da kuramların doğaya uygun düşmesinde hiçbir zorunluk yoktur. Daha önce de değindiğimiz gibi, Dedekind, Einstein gibi kimi seçkin düşünürler, sayı sistemleriyle birlikte tüm matematiksel kavramları insan zekâsının doğadan bağımsız, özgürce oluşturduğu ürünler saymışlardır.⁽³⁾ Bu görüşü paylaşan Tobias Dantzig, matematikçiyi, biçip diktiği hazır gıysileri kimlerin giyeceğinden habersiz bir terziye benzeterek şöyle demektedir:

(2) Bu görüşü özellikle modern bilimin büyük bir atılım içine girdiği 17 ve 18. yüzyılların matematikçilerinde bulmaktayız. Euler matematiğin, evrenin yapısal düzenini yansıttığı inancındaydı. Ona göre matematiğin kesin ve zorunlu doğruları “Tanrı” dediğimiz yüce varlığın kanıtlarını taşımaktaydı. Doğayı Tanrı elinden çıkmış bir sanat yapıtı sayan Leibniz de matematikle doğa arasındaki uyumu, düşünce ile evren arasındaki öncesiz uyuma bağlıyordu. Descartes ise, tüm kuşku yaklaşımına karşın, matematiksel doğruları Tanrı’nın doğuştan düşüncemize yerleştirdiği sayı ve şekil kavramlarının bir sonucu sayıyordu.

(3) Bkz. V. BÖLÜM.

Bir bilgenin ders verdiği kürsüsünü iki katına çıkarma problemini çözme girişimi, koni kesitlerini bulmaya yol açar; bu da sonunda, gezegenlerin güneş çevresinde çizdikleri yörüngelere model oluşturur. Cardan ile Bombelli'nin icat ettikleri sanal sayıların, beklenmedik bir biçimde, alternatif akımların özelliklerini betimlediği görülür. Riemann'ın bir fantazi olarak ortaya attığı mutlak diferansiyel hesabı, Relativite teorisi için aranan bir anlatım aracı olur. Cayley ile Sylvester'in yaşadığı dönemde tümüyle gerçek dışı görünen matrislerin, çok sonra kuantum teorisinin sergilediği şaşılalı olaylar için biçilmiş bir kaftan olduğu görülür.⁽⁴⁾

Bu örneklerden de görüldüğü gibi, matematikçilerin oluşturduğu kavram ve kuramlar olgusal dünyadan bağımsız birer modeldir. Nerede, nasıl işe yarayacağı, hatta uygun düşeceği nesnel ilişkilerin var olup olmadığı önceden belirlenemez. Hazır bir giysinin herhangi bir müşteriye uyması gibi, matematiksel soyut bir modelin bilimde herhangi olgusal bir ilişkiye uyması da beklenmedik mutlu bir rastlantı; dahası, kimilerinin gözünde açıklanması olanaksız bir gizem, ya da düpedüz mucize türünden bir olaydır.

Birbirine ters düşen bu iki görüşte de birer gerçek payı bulabiliriz; ama ne birini ne de öbürünü tümüyle doğru sayabiliriz. Matematik teoriler doğanın bize yüklediği doğrular olsaydı, ne yanlışlığı ya da yetersizliği sonra ortaya çıkan teorilere, ne de birbiriyle bağdaşmaz sistemlerin oluşturulmasına olanak bulunabilirdi. Oysa, matematik tarihine baktığımızda, her iki görüş için de çok sayıda örnek bulmaktayız. Her alanda olduğu gibi matematikte de sinama ve yanılmaya, değişik model, kavram ya da teorileri denemeye yer vardır. Öte yandan, matematiği gerçek dünyadan bağımsız, tümüyle insan zekâ ve imgeleminin dilediği biçimde oluşturup doğaya yüklediği, soyut bir sistem saymak da dayanıksız bir sav olmaktan ileri geçmez. Her şeyden önce, aritmetiğin de, geometrinin de kaynağı insanoğlunun deneyimlerindedir. Sonra bu görüş, kimi matematiksel kavram, model ve teorilerin doğadaki ilişkileri dile getirme etkinliğini, dayanaktan yoksun bir varsayıma, “doğanın istenilen kalıba dökülebileceği” varsayımına, başvurmaksızın nasıl açıklayabilecektir?⁽⁵⁾ Doğa balmumu gibi istenilen biçimi almaya elverişli midir? Aynı olguları ya da olgusal ilişkileri değişik, hatta birbiriyle bağdaşmaz teorilerin açıklayabildiği doğru-

(4) T. Dantzig, *Number: The Language of Science*, s. 233-4.

(5) Çağımızın seçkin fizikçilerinden A. S. Eddington, insan aklının doğayı biçimlemedeki etkinliğini şöyle dile getirmektedir:

Bilimin en ileri gittiği yerlerde insan aklının doğadan sağladığı bilgilerimizin, insan aklının doğaya yüklediği şeyler olduğunu öğrendik. Bilinmeyi çevreleyen kumsalda garip bir ayak izi bulduk. Nedenini açıklama yolunda birbirini izleyen kuramlar oluşturduk. Sonunda ayak izini bırakan yaratıcı gözümüzde canlandırmayı başardık. Heyhat, gördük ki izi bırakan insanın ta kendisiymiş!

İlk bakışta çarpıcı gelen bu görüş yeni değildir. Büyük Alman filozofu Kant, Eddington'dan yüz elli yıl önce, dış dünyaya ilişkin bilgilerimizin, aklımızın yapısal kalıplarında biçimlenerek edinildiği savını işlemişti. Kant'ın “sezgi” dediği uzay ve zaman tüm algılarımızı düzenleyen *a priori* kalıplardı. Uzaysal algılarımızın Euclides geometrisinin ilkelerine uygun düşmesi aklımızın yapısal gereği idi; başka türlü olamazdı. (Bu görüş, bilindiği gibi, Euclides-dışı geometrilerin ortaya çıkmasıyla geçerliğini büyük ölçüde yitirmiştir.)

dur. Ama doğa, istenilen kalıba dökülebilir olsaydı, o zaman, teorilerin yeterli-yetersiz, başarılı-başarısız, ya da doğru-yanlış diye değerlendirilmesi anlamsız bir çaba olurdu. Doğada olduğu gibi, bilimde ve matematikte de evrim bir ayıklama düzenine bağlıdır. Bir teorisinin egemenlik kurmasını salt moda ya da koşullanma sayıp açıklamaya çoğu kez olanak yoktur; hele bu egemenlik kalıcı nitelikte ise.

Üçüncü Bir Görüş

Görülüyor ki, kısaca değindiğimiz iki görüş de, matematiğin olgusal dünyayı betimleme ve açıklamada bilime sağladığı güç ve etkinliği açıklamaktan uzak kalmaktadır. Matematiğin gücü, ne doğanın Tanrı eliyle rasyonel düzenlenmiş olduğu savıyla, ne de insanın olgusal dünyadan tümüyle bağımsız olarak oluşturduğu kalıplara doğanın dökülebilir olduğu teziyle açıklanamaz. Kaldı ki, bu iki tez de metafiziksel niteliktedir. Matematiği, J. S. Mill'e uyararak, iyi temellendirilmiş bir tür empirik bilim saymak da sorunu aydınlatmaktan uzak düşmektedir.⁽⁶⁾

Matematiğin anlaşılmasız görünen, dahası, kimilerince "gizemlerin gizemi" sayılan bilimlerdeki yaşamsal rolüne açıklama getirmeye çalışırken, iki noktanın gözönünde tutulması gerekir. Bunlardan biri, doğada algıladığımız çokluklarla büyüklüklerin varlığı; ikincisi, bu çokluk ve büyüklüklere ilişkin sayma ve ölçme deneyimlerimizin yol açtığı ve giderek soyut, genel ve deneyimden bağımsız bir karakter kazanan sayı, küme, fonksiyon gibi temel kavramlara dayalı işlemlerin, dedüktif çıkarım ve dönüştürmelere elverişli olmasıdır. Başka bir anlatımla, matematiğin işlevsel gücü, bir yandan kökeninde doğanın nicel betimleme gerektiren (daha doğrusu, böyle bir betimlemeye olanak veren) kimi özellikleri (çokluk ve büyüklükler)ine bağlı olmasından; öte yandan, uğraş konusu nesne ve ilişkilerin (sayı, küme, fonksiyon, vb.), özellikle ileri aşamalarda, mantıksal düzenlemelere elverişli bir nitelik kazanmasından kaynaklanmaktadır. Birinci özellik matematiğin, birtakım empirik ilişkileri dile getirmedeki etkinliğini, ikincisi matematiğin zorunlu, kesin ve mantıksal öz yapısını açıklamaktadır. Böylece matematiğin bilimlerdeki etkinliğini ne mutlu bir rastlantı, gizemli bir olay ya da mucize saymaya; ne de ona özgü zorunlu ve kesinliği birtakım tanım veya konvansiyonlara bağlayıp matematiği tümüyle analitik saymaya gerek kalmaktadır.

Matematiğin Bilimdeki İşlevleri

Yukardaki belirlemeye açıklık getirmesi bakımından matematiğin bilimlerdeki işlevlerine değinmeliyiz:

(6) Mill'in görüşünü, değişik biçimlerde de olsa, savunanlara günümüzde de rastlamaktayız. Örneğin, Mark Steiner (*Mathematical Knowledge*, s. 21.) şöyle demektedir: (...Matematik yöntemi bakımından diğer bilimlerden pek az fark gösteren bir bilimdir. Dahası, Russell'in çoktan unutulmuş bir görüşünü canlandırarak, matematiğin doğal sayıları zoolojinin böcekleri incelediği gibi incelediğini söyleyeceğim. Matematik, diğer bilimlerden yalnızca konusu yönünden farklıdır; yoksa sanıldığı gibi konudan yoksun olmasıyla değil!" (Steiner'in Russel'a yollama yaparak değindiği görüş için bakınız: B. Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*, s. 169.)

Galileo'dan, hatta daha gerilere giderek, Leonardo da Vinci'den, günümüze değin, matematiğin doğabilimleri için etkili bir anlatım dili, vazgeçilmez bir çıkarım aracı ve zengin bir modeller kaynağı olduğu bilinmektedir.⁽⁷⁾ Ayrıca, matematiği, bir örneğini Kopernik sisteminin ortaya çıkışında bulduğumuz bir etkisinden daha söz edilebilir. Daha uygun bir terim bulunmaması nedeniyle buna, "estetik etki" diyebiliriz.⁽⁸⁾

Matematiğin, özellikle fizik bilimlerinde göze en çok çarpan işlevi uygun bir dil, bir anlatım aracı olmasıdır. Bir dil olarak matematik, etkinliğini özel simgelere; doğa yasalarını kısa, açık ve kesin dile getiren formül ve denklemlerine borçludur. Günlük dil tüm kelime ve nüans zenginliğine karşın, bilimde aranan açık, seçik ve yalın anlatımı sağlamaktan uzak düşmekte; üstelik, sözcüklerin anlam belirsizliği veya çok anlamlılığından kaynaklanan birtakım iletişim zorluklarına yol açmaktadır. Oysa, bir tür yapma dil sayabileceğimiz matematik, anlamları ve kullanım biçimleri belli ve sınırlı olan simgeler kullandığından, güvenilir bir ifade ve iletişim kolaylığı sağlamaktadır. Farkı bir örnekle göstermek için, Kepler'in gezegenlere ilişkin üçüncü yasanı alalım. Matematiksel dilde basit bir denklem ($T^2 = KR^3$) ile dile gelen bu yasanın, günlük (ya da doğal) dilde ifadesi yaklaşık olarak şöyledir:

Bir gezegenin yörüngesini tamamlamada geçirdiği sürenin karesi, gezegenin güneşe olan ortalama uzaklığının küpü ile orantılıdır.

Görüldüğü gibi, hem uzun, hem anlaşılması oldukça güç olan bu ifade, değişik yorumlara açıktır. Oysa, matematiksel denklemde (T^2 'nin geçen sürenin karesi, R^3 'nin güneşe ortalama uzaklığı, K 'nin ise bir değişmez olduğu bilindiğinde) herhangi bir zorluk söz konusu değildir. Denklem, gezegenlerin yörüngelerinde geçir-

(7) "Bir bilim matematiksel olduğu ölçüde yetkindir," diyen Leonardo da Vinci, matematiğin önemini modern çağda belki de ilk vurgulayan düşünürdür. Benzer bir vurgulamayı, Leonardo'dan yaklaşık 300 yıl sonra Kant'ın yaptığına tanık oluyoruz: "Fizik bilimlerin her dalında matematiğin tuttuğu yer ölçüsünde ancak gerçek anlamda bilim vardır."

(8) Bilindiği gibi Kopernik güneş-merkezli sistemini, Ptolemy'nin yer-merkezli astronomisini matematiksel yönden yeterince açık, basit ve zarif bulmadığı için oluşturur. Aslına bakılırsa, Ptolemy sistemi hem sağduyuya, hem de günlük gözlemlere daha uygun düşmektedir. Güneşin dünya çevresinde değil, dünyanın diğer gezegenlerle birlikte, güneş çevresinde döndüğü savı deneyimlerimizle kolayca bağdaşır bir sav değildir. Öyle olmasına karşın, Kopernik'in bu savı içeren bir sistem kurmayı göze alması, kilisenin bilinen tüm tepki ve yasaklamalarına karşın, bilim dünyasının bu sistemi çok geçmeden benimsemesi kolay açıklanabilir türden bir olay değildir. Kopernik olası tepkileri göz önünde tutarak, sistemini matematiksel bir hipotez olarak sunar; doğruluk savından özenle kaçınır. Ama gene de sistem kendini kabul ettirmede gecikmez. Sistemin estetik çekiciliği, matematiksel uyumu, en başta Galileo ve Kepler çapında iki öncü bilim adamını büyüler. Onlar, bu denli 'güzel' buldukları bir düşüncüyü doğru bulmaktan kendilerini alamıyorlardı. Oysa, Galileo'nun açığa vurduğu gibi, Kopernik sistemi sıradan gözlemlerimize her yönden ters düşmekteydi.

Gözlem sonuçlarına büyük ağırlık tanıyan Kepler ile Galileo, ilk bakışta gözlemlerimize ters de düşse, matematiksel uyum içinde gördükleri sistemi benimsediklerini açıklamaktan kaçınmadılar. Bilindiği gibi, bu açık yürekliliğin faturasını Galileo engizisyon mahkemesi önüne iki kez (1616 ve 1632 yıllarında) çıkarak öder.

diği zamanla, güneşe uzaklığı arasındaki ilişkiyi, hiçbir yanlış anlamaya yer vermeden tam ve yalın bir biçimde dile getirmektedir. Üstelik bir denklem, çeşitli matematiksel dönüştürme ve işlemlere elverişli bir yapıya sahip olduğundan, dile getirdiği ilişkinin sonuçlarını irdeleyip genişletmeye ve içine gireceği yeni ilişkileri yoklamaya büyük kolaylık sağlar.

Matematik, bir anlatım aracı olma yanında, bir çıkarım tekniği olarak da önemlidir. Bunun modern bilim tarihinde belki de ilk ve en çarpıcı örneğini Newton'un çalışmasında bulmaktayız.

XVII. yüzyılın ikinci yarısında fizik ve astronomide Newton mekaniğinin egemen olma yolundaki büyük atılımları yanı sıra, karmaşık hareket ve değişimleri betimlemede üstün güce sahip yeni bir matematiksel tekniğin (kalkülüs ya da sonsuz küçükler hesabı) ortaya çıktığını görmekteyiz.

Güçlü bir çözümleme aracı olan kalkülüs'ün bu dönemde, üstelik Newton'un elinde oluşması bir rastlantı olamaz.⁽⁹⁾

Newton, güneş ile bir tek gezegenden oluşan basit bir sistemi varsayarak gezegenin, Kepler'in astronomideki gözlemlere dayanan üç yasası gereğince yörünge çizceğini matematiksel olarak çıkarsar. Bilimsel devrim için son derece parlak bir zaferi temsil eden bu başarı, kalkülüs aracılığıyla gerçekleşir. Newton, kalkülüs'ü kullanarak Galileo ve Kepler'in deney ya da gözlem sonuçlarına dayanarak oluşturdukları yasaları (cisimlerin düşmesine, gel-git hareketlerine, sarkaca, gezegenlerin devinimine, vb. ilişkin yasaları), kurduğu mekanik teorisinin temel genellemelerini oluşturan hareket yasalarıyla evrensel çekim yasasından çıkarsar. Kaldı ki, kalkülüs'e dayalı diferansiyel denklemleri kullanmaksızın Newton mekaniğini, ne doğrulamaya ne de olguların açıklanma ve öndeyisinde yeterince kullanmaya olanak vardı.⁽¹⁰⁾

Matematiğin bilimde oynadığı role açıklık getirmeye çalışırken, en başta, diferansiyel denklemlerin uygulama gücü göze çarpmaktadır. Özellikle klasik fizikte bu denklemlerin kullanımıyla ortaya çıkan uygulama, gerçek anlamda göz kamaştırıcıdır. Analizin özünü oluşturan bu tekniğin, aslında, uygulama alanına girmeyen hiçbir çalışma alanı yoktur, denebilir. Aşağıda, diferansiyel denklem aracılığıyla çözüm getirilen problemlere tipik birkaç örnek vermekle yetinilmiştir:

- (1) Bir gezegen, uydu, roket ya da merminin hareketini belirlemeye ilişkin problemler;
- (2) Bir elektrik devresindeki akım ya da yükü saptama;

(9) Kalkülüs'ün icadı Newton ile çağdaşı Alman filozofu Leibniz arasında, uzun ve iki taraf için de son derece tatsız bir çekişmeye yol açar. Çeşitli belgelerden kalkülüs'ü ilk bulanın Newton olduğu anlaşılıyor. Ancak ilk yayımlama şerefi Leibniz'e aittir. Üstelik Leibniz'in notasyonu, daha basit ve açık olması nedeniyle tüm dünyada benimsenmiştir.

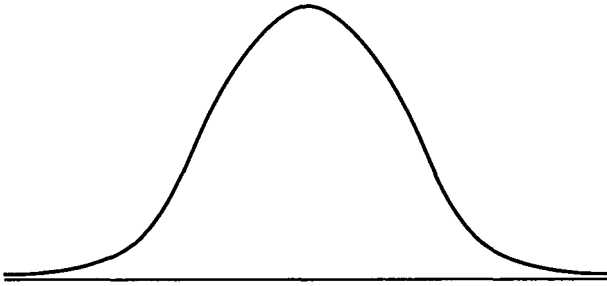
(10) Hartry H. Field, *Science Without Number* adlı kitabında, sayı gibi matematiksel nesnelerin bilim için vazgeçilmez olduğu savına karşı çıkmakta, matematiğin fiziksel dünyaya başarılı uygulamalarına bakıp ne matematiği doğru, ne de soyut nesneleri var sayınamız gerektiğini söyler. Field'e göre, bilimsel teorileri matematik olmaksızın da oluşturabiliriz.

- (3) Bir tel ya da zarın titreşimini belirleme;
- (4) Radyo-aktif bir maddenin çözünme hızını saptama;
- (5) Nüfus artış hızını (belli bir ülkede ya da dünyada) bulma;
- (6) Kimyasal maddelerin reaksiyonlarını inceleme;
- (7) Belli geometrik özellikler taşıyan eğrileri belirleme.

Bu tür problem veya ilişkilerin matematiksel formülasyonu diferansiyel denklemlere yol açmıştır. Örneğimizdeki problemlerin her biri yasal nitelikte bir ilişki içermektedir. Bu ilişkileri dile getirdiğimizde, kimi büyüklüklerin diğer büyüklüklere göre çeşitli değişme hızlarına ilişkin “yasa” dediğimiz genellemelere ulaşırız. Bir genelleme türev içeren matematiksel bir denklem biçimini aldığı anda diferansiyel bir denklem olarak ortaya çıkar. Kuşkusuz bir ilişkinin matematiksel formülasyonunda, genellikle basite indirgeyici kimi varsayımlara gidilir; incelemeye konu durum, doğal karmaşıklığıyla değil, basitleştirilerek ele alınır. Böylece elde edilen denklem çoğu kez gerçek durumu değil, idealize edilmiş bir durumu yansıtır. Ne var ki, sonuç bu biçimiyle daha kapsamlı öndeyi ve açıklamalara elverecek niteliktedir.

Matematığın bilimlere model sağlama işlevine gelince, Gauss eğrisini bir örnek olarak gösterebiliriz.

“Normal Dağılım Eğrisi” diye de bilinen bu eğri, gözlem ya da ölçme sonuçlarına dayanan pek çok frekans dağılımlarının yaklaşık uyum gösterdiği kuramsal bir modeldir.⁽¹¹⁾ Modelin özellikle davranış bilimleri (psikoloji, sosyoloji, eğitim, ekonomi, vb.) alanlarındaki uygulamalarına açıklık getirmek için matematiksel özelliklerine değinmede yarar var.



Normal Dağılım Eğrisi

(11) Normal dağılım eğrisinin dayandığı cebirsel denklem $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ in matematiksel olarak nasıl çıkarıldığını, teknik güclüğü nedeniyle, burada gösteremeyeceğiz. (Formülde y yüksekliği, z ise gözlenen standart puanı simgelemektedir. π ile e bilinen matematiksel değişmezlerdir.)

Şekilde, taban çizgisi, inceleme konusu değişkene ilişkin (bu değişken kümeyi oluşturan bireylerin boy, ağırlık, öğrenme yeteneği, belli bir uğraştaki başarısı, vb. olabilir) ölçeği; yükseklik ise ölçekte yer alan puan ya da değerlerin frekansını gösterir. Çan biçiminde simetrik olan eğrinin en yüksek noktası dağılımın ortalama değerinin frekansını verir.

Normal dağılım eğrisini kullanmak için bir grup bireyin herhangi bir değişkene ilişkin alınan ölçümlerinin yaklaşık normal bir dağılım göstereceği varsayılmalıdır. Bu demektir ki, herhangi bir değişken, normal ya da normale yakın bir dağılım gösteriyorsa, ölçülen gruba ait standard kayma ile ortalama değerleri bilmek koşuluyla, kimi belirlemelerde bulunabiliriz. Örneğin, z puanını bildiğimiz bir bireyin grup içindeki konumunu hemen saptayabiliriz. Normal dağılımın özelliklerine dayanarak hazırlanmış bir tabloya bakarak bu bireyin, grubun yüzde kaçının üstünde (ya da altında) yer aldığını buluruz.

İstatistiksel araştırmalarda, normal dağılım eğrisinin kullanıldığı daha pek çok yer vardır. Özellikle örnekleme dayanan çalışmalarda, evrene ilişkin parametreleri hesaplamada normal dağılım eğrisi daima başvurulmuş bir modeldir.

Normal dağılımın bir model olarak kullanılması, inceleme konusu değişken ya da değişkenlere ilişkin gözlem veya ölçme sonuçlarının normal dağılıma yaklaşık bir dağılım gösterdiği sayılıtısının geçerliliğini gerektirir. Bu sayılıtının geçerli olmadığı durumlarda, normal dağılım eğrisinin bir model olarak kullanılması yanıltıcı olmaktan ileri geçmez.

Unutmamak gerekir ki, bir modelin kullanışlılığı, açıklama konusu olay veya olay kümesiyle yapısal bir benzerlik göstermesiyle olasıdır. Başka bir deyişle, model ile temsil ettiği nesne veya olay arasında bire-bir bir karşılaşım olmalıdır. Değişik olgu alanlarına ait iki veya daha fazla teori, matematiksel olarak, aynı yapıda ise, biri diğeri için model olarak alınabilir. Örneğin, ısı teorisiyle elektostatik teorisinin (“potansiyel” yerine “sıcaklık”, “pozitif elektrik yükü” yerine “ısı kaynağı” terimleri konduğunda) aynı matematiksel denklemlerle dile getirilebildiği bilinmektedir. Nitekim bu benzerliği ilk fark eden Lord Kelvin, yeni geliştirmekte olduğu elektostatik alan teorisi için ısı akışına ait daha önce kurulmuş olan teoriyi bir model olarak kullanmıştır.

Soyut Grup Teorisi de matematiksel modele bir örnek olarak gösterilebilir. Çağdaş fizikte çekirdek parçacıklarının dağılım ve etkileşiminde kendini açığa vuran simetrilerin karmaşık grubunu, Grup Teorisi’nin beklenmedik bir yetkinlikle temsil ettiğini öğreniyoruz. Bilindiği üzere bu teori ayrıca büyük bir veri yığınının düzen getirmek, yeni parçacıkların keşfine yol açmak gibi işlevleriyle de soyut bir sistemin olgular dünyasını betimleme ve açıklamada ne denli önemli olabileceğine parlak bir örnek oluşturmaktadır.⁽¹²⁾

Matematiksel modelin işlevi temsil ettiği nesne veya olgu kümesine ait ilişkileri denklemlerle dile getirme, dolayısıyla açıklayıcı çıkarımlara olanak sağlamaktır. Bu anlamda herhangi bir matematiksel denklem bile uygun düştüğü bir başka ilişki

(12) Bkz. EK 7: R. Courant, “Modern Dünyada Matematik.”

için model sayılabilir. Bir ispat ya da fonksiyon için de aynı şeyi söyleyebiliriz. Modelin uygun düştüğü ilişki türü matematiksel olabileceği gibi, fiziksel, biyolojik, sosyal veya psikolojik olgu dünyasına ait de olabilir. Model işlevinde bir teoriyi “doğru” ya da “yanlış” diye değil, olsa olsa “güzel” ya da “çirkin”, “uygun” ya da “aykırı”, “yararlı” ya da “yararsız” diye nitelemek daha yerinde bir değerlendirme olur. Bir model kullanış amacına hizmet ettiği ölçüde geçerlidir.

Sonuç

Bu bölümü, tanınmış fizikçi W. Heitler’in, bilimle matematiğin ilişkisine ışık tutan şu sözleriyle kapatabiliriz:

Fizik ilerledikçe daha soyut bir karakter almakta, dolayısıyla da “ileri” matematiğe ihtiyaç duymaktadır. Atom fiziğinde ulaşılan soyutluk düzeyinde, atomun uzayda somut olarak betimlenemeyen, ancak matematiksel olarak belirlenebilen soyut varlığından söz edilebilir. ...

Matematik, bir doğa bilimi değildir. Doğada bulamadığımız matematiksel ilişkileri fiziksel süreçlerle bir tutamayız. İlk bakışta matematik, sanat yapıtları gibi, insan zekâsının katıksız bir icadı görünümündedir. Matematiğin birçok dalı, fiziğin henüz ihtiyaç duymadığı bir sırada, doğayı incelemeyi aklından bile geçirmeyen, salt kuramsal düzeyde kalan matematikçilerin elinde oluşmuştur. Aklımızın bir ürünü olan matematiğin doğayla ve onun yasalarıyla ilişkisi ne olabilir? Böyle bakıldığında, bizden bağımsız olan dış dünyanın, salt kendi icadımız olan matematiksel ilkelere uygun davranır olması, tümüyle akıl almaz bir mucize sayılmak gerekir.

Ne var ki, zihinsel etkinliğimizle dış dünyanın, sanıldığı gibi, birbirinden tümüyle bağımsız olduğu doğru değildir. Unutmamak gerekir ki, insan zekâsı, organizmanın çevresiyle sürdürdüğü etkileşimin bir ürünüdür; belli belirsiz, çevrenin yapısal özelliklerini içermektedir. Bilimde ve matematikte oluşturulan yasaların, değişik ölçülerde de olsa, dış dünyanın temel karakterleriyle uyumlu olması bu nedenle beklenmeyen bir olay değildir. Aslında insan ile dış dünya arasında kesin bir ayırım çizgisinden de kolayca söz edilemez. En basit algı düzeyinde bile bu ayırım belirgin olmaktan uzaktır. Matematiksel nesne ve ilişkilerin isteğe göre oluşturulan, salt zihinsel ürünler olduğu iddiası doğru olamaz. Kuşkusuz bu tür nesne ve ilişkilerin oluşumunu zihinsel etkinliğimize borçluyuz; ancak, bu oluşturma eyleminde zihin başıboş değildir; dış dünyadan ve konunun kendi iç gereklerinden kaynaklanan birtakım zorunluklarla çevrilidir.⁽¹³⁾

(13) W. Heitler, *Man and Science*, s. 50-52. Ayrıca bkz. Ek: 7 ve Ek: 8.

XII. BÖLÜM

MATEMATİĞİN KÜLTÜREL KONUMU, SANATLA İLİŞKİSİ

Karşıt Yaklaşımlar

Matematiğin kültürün bütünlüğü içindeki yeri nedir? Müzik, resim, yazın gibi sanat etkinlikleriyle ilişkisi var mıdır?

Bu sorulara kesin, açık ve kısa yanıt bulmak güçtür. Matematik, çoğumuzun gözünde yaşamdan uzak, soyut, sınırsal bir “bilgi” koludur; dar bir çevreye özgü bir etkinliktir. Öyle bir etkinliğin kültürle, hele sanatla ilişkisi olabilir mi? Bunu düşünmek bile yersiz değil midir?⁽¹⁾

İlk bakışta haklı görünen bu anlayış, dayanaksızdır; matematiğin, dahası kültür ve sanatın, yüzeysel bir yorumunu yansıtmaktadır. Sanatın olduğu gibi, matematiğin de kaynağı insandır. Kişiliği nasıl birbirine kapalı bölümlere ayıramazsak, kültürü de ayıramayız. Sosyal antropologlar, dil, sanat, din, felsefe, vb. etkinlikler gibi bilim ve matematiği de kültürün bir parçası, ya da düpedüz kültürel bir ürün sayarlar. Gerçekten bir kültür ortamının olmadığı yerde sanat gibi matematiğe de olanak yoktur, olamaz.

Öte yandan, Platon’dan günümüze değin birçok seçkin filozof ve matematikçilerin, matematiğin kültürleri aşan evrensel bir niteliğe sahip olduğu düşüncesini ileri sürdüğünü görüyoruz. Onların gözünde matematiğin konusu evrenin değişmez doğrularıdır. Sayı ve sayısal ilişkiler kültüre bağlı değil, gerçekliği tüm kültürler için zorunlu nesnelerdir. Geleneksel diyebileceğimiz bu görüşte matematik o tür nesne ve ilişkileri konu alan geçerli evrensel bir çalışmadır.

Birbirine ters düşen bu iki görüşten ilki, “bilimsel empirizm”, ikincisi “metafiziksel rasyonalizm” diyebileceğimiz iki yaklaşımı yansıtmaktadır. Matematiğin kültürel konumunu tümüyle ne birine, ne ötekine indirgeyebiliriz. Matematiğin kaynağını kültürde bulan bilimsel empirizm, genel bir çerçevede doğru olmakla birlikte, matematiksel etkinliğin kültürel konumuna, kültürü oluşturan diğer etkinlikler-

(1) “Kültür” terimi çeşitli anlamlarda kullanılmıştır. Toprağın işlenmesinden bakteri çoğaltımına, toplumsal yaşam ve davranış biçimlerinden kişilerin sanat, bilim ve felsefe deneyimlerine, ulaştıkları anlayış ve duyuş düzeylerine uzanan pek çok şeyi, bu arada özellikle belli bir yöre veya meslek çevresinde oluşan görenek, töre, inanç, beceri, araç ve uğraş biçimlerini kapsamaktadır.

le ilişkisine açıklık getirmekten uzak düşmekte; matematiği kültürleri aşan evrensel gerçeklikle özdeşleştiren metafiziksel rasyonalizm ise matematiği kültürel yaşamın dışına itmekte, insandan koparmaktadır. Ne var ki, Platoncu yaklaşım, özellikle modern bilimin ortaya çıkmasıyla birlikte, etkisini büyük ölçüde yitirmiştir. Matematikçi ve felsefeciler arasında artık pek az kimse o yaklaşımı paylaşmaktadır. Oysa, “bilimsel empirizm” diye nitelediğimiz yaklaşım, yalnız sosyal antropologlar arasında değil, seçkin matematikçiler arasında da yandaş bulmuştur. Örneğin, *Matematiksel Deneyim* adlı ortak yapıtlarıyla son yıllarda dikkatleri çeken iki matematikçinin kaleminden şunları okuyoruz:

Matematik zaman dışında, öncesiz var olan ideal bir gerçekliğin bilimi değildir. Ama öte yandan onu yapma simge ve formüllerden kurulu satranç türünden bir oyun saymak da yanlıştır. ...

Matematiğin bir konusu vardır, kuşkusuz; önermeleri anlamlıdır. Ne ki, bu anlam insan dışı bir gerçeklikten değil, “insan” dediğimiz türün ortak anlayışından kaynaklanır. Matematik bu bakımdan din, ideoloji ya da sanatı andırır. İnsanların oluşturduğu kimi ortak kavramlarla çalışan bu bilim, ancak kültürel bir bağlamda ele alındığında anlaşılabilir. Başka bir deyişle, matematik insan bilimlerinden biridir.⁽²⁾

Kültürel yaklaşımı yansıtan bu görüşü irdelemeye geçmeden biraz açmaya ihtiyaç vardır. Özellikle “matematiksel gerçekliğin” kaynağı sayılan “türün ortak anlayışı” kavramının açıklık kazanması gerekir. Kültürel belirleyiciliğin öncülerinden L. A. White’in açıklaması konuya ışık tutmaktadır:

Matematiğin yasaları tümüyle türümüzün oluşturduğu kültüre dayanır. ... Matematik, doğruları ve gerçekleriyle insan kültürünün bir parçası olmaktan başka bir şey değildir. Matematiksel gerçekliğin kaynağı kültürel gelenektedir. Kültürel kurallardan oluşan gramer, ahlak, trafik, spor vb. ne tür bir gerçeklik taşıyorsa, matematik de o türden bir gerçeklik taşıyor. ... Yeşil veya sarı kavramı, ya da, babanın erkek kardeşi olma ilişkisini simgeleyen “amca” terimi gibi uzay, doğru, düzlem vb. kavramların da dış dünyanın yapısına borçlu olduğumuz zorunlu ve kaçınılmaz bir nitelik taşımadığı artık iyice açıklık kazanmıştır.⁽³⁾

Öyle midir gerçekten?

Matematiğin ortaya çıkışı ve gelişimi elbette bir kültür ortamı gerektirir. Ama matematiksel kavram ve ilkelerde dile gelen ilişkilerin doğruca kültürden kaynaklandığı savı doğru mudur? Matematiksel kuralları, trafik veya spor kuralları gibi, birer kültürel konvansiyon sayıp geçebilir miyiz? Kuşkusuz “yeşil”, “sarı”, “amca” terimleri gibi matematiksel terimler de kültürden kaynaklanan simgelerdir. Ancak,

(2) P. J. Davis ve R. Hersh, *The Mathematical Experience*, s. 410. Bu kitapta sergilenen aşırı kültürel yaklaşıma başka bir kitapta da rastlamaktayız: Kline, *Mathematics: The Loss of Certainty*. Tanınmış bir matematikçi olan Kline, Davis ve Hersh gibi, tüm matematiğin salt insan icadı olduğunu vurgulamakta, doğanın matematiksel bir düzen içerdiği gibi bir görüşe günümüzde yer vermeyi saçma bulmaktadır.

(3) L. White, “The Locus of Mathematical Reality”, *The Science of Culture*, Farrar, Straus, 1949.

“amca” terimiyle belirlenen ilişki kültürel midir? Yoksa bu ilişki, kültürün ötesinde, dış dünyanın canlı kesiminde yer alan bir şey midir? Öyleyse, kültürel olan, ilişkinin kendisi değil, ilişkinin şu ya da bu sözcükle adlandırılmış olması değil midir? “Dış dünya” dediğimiz ve onda gözlemlediğimiz nesne ve ilişkileri öznel ya da kültürel yaşamımızın bir yansıması olarak görmek, iki artı ikinin dört ettiği genellemesinin doğruluğunu kültüre bağli saymak bir tür kolektif tekbencilik (solipcism) olmaz mı? Matematiksel ilişkiler kökeninde kültürel nitelikte olsaydı, iki artı ikinin dört ettiği tüm kültürlerde doğru olabilir miydi?

Sosyal antropologlar, matematiksel doğruların mutlak ya da zorunlu olmadığına, birbiriyle bağdaşmaz geometrilerin varlığını kanıt gösterebilirler. Ne var ki, değişik geometrilerin varlığı kültürel ortamların farklı kimliklerinden değil, geometrik düşüncenin kendi iç gerilim ve mantığından kaynaklanmıştır. Nitekim, Euclides dışı geometrilerin başka kültür ortamlarında değil, Euclides geometrisinin geliştiğı, yüzyıllarca egemen olduğu kültür ortamında ortaya çıktığını görüyoruz. Tüm gözlemler matematiğın temel ilke veya yasalarının ilkel ya da ileri her kültürde geçerli olduğunu göstermektedir. Hangi ortamda olursa olsun, iki elmaya iki elma daha eklediğimizde toplam dört elma olur. Yukarda da belirttiğimiz üzere, kültürel farklar matematiksel gerçeğliğin dile getirilişinde kullanılan söz ya da simgelerde ortaya çıkmaktadır. Dış dünyayı öznel dünyamızın bir yansıması saymak yerine, öznel dünyamızın dış dünyanın nesnel düzen ve dinamiğine göre biçimlendiğini kabul etmek sağduyuya daha uygun düşmez mi? Üstelik sağduyuya uygun bu yorum bizi kültürel göreceliğe, daha önemlisi, tekbencilığe düşmekten kurtarır.

L. White’in temsil ettiği köktenci kültürel belirleyicilik değişik derecelerde başka matematikçilerde de kendini göstermektedir. Örneğın, Kasner ile Newman’ın *Mathematics and Imagination* adlı ortak yapıtlarında şu satırları okuyoruz:

... Matematiksel doğruların bizim kendi düşüncemiz dışında bağımsız var olduğunu görüşünün üstesinden gelebildik sonunda. Öyle bir düşünceye yer verilmiş olması bile bize şimdi şaşılması bir şey gibi gelmektedir.⁽⁴⁾

Bir başka matematikçi, R. L. Wilder, White’in kültürel tekbencilliğini açıkça savunmakta, doğada olduğunu sandığımız düzen ve ilişkilerin aslında bizim doğaya yansıttığımız öznel ürünler ya da özellikler olduğunu ileri sürmektedir.

Gerçeklik (realizm) açısından bakıldığında, tüm bilgi ve kavramlarımızı “öznel” diye nitelerken, kültürel belirleyiciliğın önemli bir ayırımı, nesnel varlıklarla bu varlıkları dile getirme araçları arasındaki ayırımı gözden kaçırdığı görölmektedir. Kültür, bize bizden bağımsız nesneleri niteleme veya belirleme araçlarını sağlar; yoksa bu nesneleri yaratmaz. Ayı “küresel bir gök cismi” ya da “arızın uydusu” diye nitelememiz elbette kültürel dir. Ama, “Ay” dediğimiz cisim, onun küresel biçimi kültürel değildir.

Bu ayırımı yapmakla kültürün etki ve önemini küçültme yoluna gitmiş olmu-

(4) E. Kasner ve J. Newman, *Mathematics and Imagination*, s. 310-311.

yoruz. Biliyoruz ki, kültürel ortamın etkisini gözönüne almaksızın matematiğe ilişkin kimi olayları açıklamaya olanak yoktur. Örneğin, yüzyılımızda Macaristan gibi küçük bir ülkede bu denli çok sayıda seçkin matematikçinin yetişmiş olması nasıl açıklanabilir? Neden satranç oyununda büyük ustaların önemli bir bölümü Rusya'dan çıkmaktadır? Rönesans sonrası dönemde sanat, bilim, felsefe ve matematikteki göz kamaştırıcı atılımlar neden Batı dünyasında yoğunlaşmış, dünyanın diğer kültürlerinde önemli bir gelişme olmamıştır? Geleneği dinsel bağnazlık ya da militarist otoriteye bağlı kültürlerde, sanat, bilim, matematik ve felsefe gibi uğraşların yeri ve değeri ne olabilir? Öyle bir ortamda bu tür etkinlikler tümüyle kısıtlanmamış olsa bile özgür deneme, açılma ve yaratma olanağını ne derece bulabilir?

Görülüyor ki, kültürel etkiyi tek belirleyici saymak gibi yok saymak ya da önemsememek de yanlıştır. Sorun, kültürün işlevini, abartmaya ya da küçümsemeye düşmeksizin belirlemektir. Sanat ve bilim gibi matematiğin oluşum ve gelişimini de kültürel etkenlere başvurmaksızın açıklayamayız; ne ki, salt kültür de her şeyi açıklamaya yeterli değildir. Nitekim Euclides-dışı geometrilerin, fonksiyon cebirinin, sayılar teorisindeki arayışların tümüyle kültüre bağlı gelişmeler olduğu kolayca söylenemez. Euler'in denklemini alalım.

$$e^{\pi i} = -1$$

Euler bu denklemi içinde yaşadığı kültürel ortamın hangi dürtüsü ya da gereği altında yazmıştı? Bugün bile çoğumuza yabancı gelen öyle bir denklemin, ne günlük alışveriş ihtiyaçlarından, ne de genel kültür etkileşiminden kaynaklandığı söylenemez. Benzer birçok denklem, ispat ve teorem gibi bu denklem de matematiğin kendi iç diyalektiğinden, o diyalektiğe duyarlı bireylerin düşünme gücünden kaynaklanmış olabilir. Euler ortaya koyduğu denklemi doğrudan kültürel gereksinmeye değil, matematiksel problemlere duyarlı kişisel zekasına borçludur.

Matematiksel Buluşta Birey ve Kültür

Buluş, yaratma, yeniyi açılma her alanda olduğu gibi matematikte de tartışması süren bir konudur. Yeni bir düşünce, kavram ya da kuram, teknik bir icat nasıl oluşmakta, nasıl ortaya çıkmaktadır? Bu sorunun bilinen bir yanıtı yoktur. Biz burada ilk bakışta birbirine ters düşen iki görüşe değinmekle yetineceğiz.

Görüşlerden birine göre, bulma, yaratma ya da icadın kaynağı bireysel dehadır. İkinci görüş, sosyal, kültürel ve ekonomik koşulları asıl kaynak sayar. Pek çok kimse için ikinci görüş, daha bilimsel de olsa, birinci görüşün çekiciliğinden, getirdiği açıklama kolaylığından uzaktır. Bireysel dehanın önemini vurgulayanlar arasında matematikçiler az değildir. Hatta kimi matematikçilerin gözünde matematik hemen tümüyle yaratıcı bireylerin ürünüdür. Çağdaş matematikçilerden Alfred Adler, örneğin, bu görüşü açıkça savunmaktadır:

Her kuşakta ancak bir iki büyük matematikçi yetişir. Matematikçilerin geri kalan büyük çoğunluğu matematiği etkilemez bile. Onlar öğretmen olarak kuşkusuz yararlı-

dır; varsa araştırmalarından kimse zarar görmez. Ama matematikçi olarak onların önemi yoktur. Matematikçi ya büyüktür, ya da hiçbir şeydir. ... Öte yandan kimin yaratıcı, kimlerin sıradan matematikçi olduğu konusunda duraksamaya yer yoktur: Büyük olan bellidir. Diğerlerine düşen, onun açtığı çıkışı izlemektir.⁽⁵⁾

Adler, üstelik, matematikte yaratıcılığa ancak genç yaşta olanak görmektedir:

Matematikçinin yaratıcı etkinliği kısa sürelidir. Bu etkinliğin yirmi beş, bilemediniz otuz yaşından sonra sürdüğü pek az rastlanan bir olaydır. O zamana kadar dişe gelir bir sonuç ortaya konmamışsa, ondan sonra bir şeyin ortaya çıkacağı pek beklenmemelidir. Yeni başarılar büyük bir çalışmayı izleyebilir; ancak onlar da uzun sürmez.⁽⁶⁾

Adler'e göre, matematiksel yaratma, sanatsal yaratma gibi yoğun bir sevinç kaynağıdır:

Daha önce kimsenin düşünmediği, anlamadığı yeni bir sonuçta, ne olduğu belli olmayan bir ilk hipotezden kalkarak birçok ispat denemeleri, aylar, yıllar süren araştırma, yoklama ve tartma çabaları sonunda ulaşılan gerçekten yeni bir sonuçta, başka hiçbir şeyin veremeyeceği bir sevinç, bir güç ve erinç duygusu vardır. Matematikte yaratma eylemi ölümsüzlüğün soluğunu taşıyan kalıcı bir başarıdır.⁽⁷⁾

Buluş olayını kişisel dehaya değil, kültürel ve sosyal koşullara bağlayan ikinci görüşe gelince, daha çapraşık, dahası gizemli açıklamalarla karşılaşmaktayız. Hegel, "Zeitgeist"ten söz etmişti. Benzer deyişler bugün de eksik değildir: "Koşulların elverişliliği", "zamanın olgunlaşması", "tavında olma", vb. Kimi sosyal bilimcilerle tarihçilerin yanı sıra Marksistler önemli tüm gelişmelerin gerisinde ekonomik ve teknolojik koşulların nedenselliğini bulurlar. Özellikle Marksistlere göre, tarihin akışı kaçınılmazdır; bireylerin etkinliği ancak bu akış içinde anlam taşır.

Bilim, matematik ve sanat kültürel etkinliklerdir kuşkusuz. Bir kültür bağlamına dayanmayan, salt bireysel olan ne bilim, ne sanat, ne de matematikten söz edilebilir. Çok sesli müziğin, tiyatro ve balenin gelişmesi nasıl belli bir kültürel birikimle olanaklıysa, bilim ve matematiğin gelişmesi de öyle bir kültürel birikim gerektirir. Nitekim, matematik tarihinde canlı ve ölü dönemler olmuştur. Örneğin, XVII. yüzyıl son derece canlı, Orta Çağ (M.S. 400-1100) ise ölü bir dönemdir. Niçin? Bir dönemi canlı ya da ölü yapan yalnızca üstün zekâların varlığı ya da yokluğu mudur? Öyleyse, o zaman üstün matematik yeteneklerin Orta Çağ boyunca dünyaya gelmediğini kabul etmemiz gerekir. Doğrusu şu ki, üstün yetenek ya da deha her alanda ancak kültürel koşullar elverişliyse ortaya çıkabilir. Newton, Gauss, Riemann, Poincaré çapındaki seçkinleri salt kültürün bir ürünü saymak doğru değildir elbet. Ne ki, kültürel koşulların elvermediği ortamlarda bu düzeyde üstün yeteneklerin etkinlik kazanmasını da bekleyemeyiz. William James'in dediği gibi,

(5) A. Adler, "Mathematics and Creativity," *The New Yorker Magazine*, February 19, 1972.

(6) Aynı kaynak.

(7) Aynı kaynak.

Bireysel atılım olmaksızın kültür sığ bir göle dönüşür; kültürel ilgi ve sempatinin eksik olduğu ortamda bireysel atılım olsa bile etkinlik kazanamaz.

James'in dile getirdiği şey, iki öğenin (kültürel ortam ile bireysel dehanın) birbirini tamamladığı ve ancak birlikte etkinlik kazandığı gerçeğidir.

Kültürel İlişkilerde Matematiğin Yeri

Kültürle matematiğin ilişkisinden söz ederken, matematiğin kültür üzerindeki etkisine de değinmeliyiz. Bu etkinin matematikçilerin gözündeki önemini tanımış bir matematikçinin kaleminden okuyalım:

... Matematik tüm modern toplumlarda kültürel yaşamın en önemli ögesidir. Matematiğin kültürü oluşturan diğer öğeler üzerindeki etkisi o denli derin ve kapsamlıdır ki, matematiksiz uygar bir yaşamın olanaksız olduğunu rahatlıkla söyleyebiliriz. Bunun herkesçe bilinen örnekleri arasında elektrik, radyo, televizyon, bilgisayar, uzaya açılma araçları gibi teknik gelişmeleri göstermeye gerek yoktur. Basit hesaplama işlemlerine bakmak yeter. Her şey bir yana, aritmetiğin dört işlemini kullanmaksızın günlük yaşamı sürdürmeye olanak var mıdır?(8)

Gerçekten, ileri ya da ilkel tüm kültürlerde matematiğin temelini oluşturan iki etkinlik, sayma ve ölçme vardır. Başka bir deyişle, matematik her düzeyde kültürel yaşamın asal bir ögesi olmanın ötesinde, insanoglunun bir tür yaşamsal işlevlerinden biridir.

Bir an için matematikten yoksun bir kültürü varsayalım. Bu, tümüyle mistik ya da düşsel nitelikte olmasa bile, yaşam ilişkilerinde ancak nitel kavramlarda düşünme ve konuşmaya elveren bir kültür olabilir. Öyle bir kültürde, bir nesnenin iri ya da ufak, uzun ya da kısa, ağır ya da hafif, katı ya da yumuşak, sıcak ya da soğuk; bir küme veya yığının çok ya da az olduğu söylenebilecek belki; ama, o nesne veya kümenin söz konusu özelliğini daha kesin nicel terimlerle belirtmeye olanak olmayacak, dolayısıyla "sayma" ve "ölçme" dediğimiz nicelik belirleme etkinlikleriyle bu etkinliklere dayanan toplama, çıkarma, vb. temel hesaplama işlemleri bilinmeyecektir. Gene öyle bir kültürde, bilimsel ve teknolojik gelişmeler şöyle dursun, en basit üretim ve alışveriş işlerine bile fazla olanak yoktur. Bu ise, bildiğimiz ilkel topluluklardaki yaşam biçimlerinin gerisinde kalan, belki de, karınca ya da arı topluluklarında gözlenen türden sınırlı, donuk ve kapalı bir yaşam biçimi demektir.

Matematiğin özellikle kuramsal bir çalışma olarak gelişmesi belli kültürel koşulların oluşumuna bağlı kalmıştır. Günlük yaşam ve iş-güç ilişkilerinde bir hesaplama yöntemi olarak belirmesi bir bakıma kaçınılmaz olan matematiğin kuramsal bir düşünce niteliği kazanması, örneğin, Antik Yunan döneminde bulduğumuz öğrenme, araştırma ve tartışma etkinliklerinin ağırlık kazandığı kültürlerde olasıdır.

(8) R. L. Wilder, *Evolution of Mathematical Concepts*, s. xi.

Tüm entelektüel ve sanatsal çalışmalar gibi matematik de, anlıksal canlılığın olanak bulduğu, entelektüel ilgiyi besleyen bir ortamda gelişebilir. Öyle bir ortam oluşmadıkça, matematik ne bir uğraş olarak saygınlık kazanır, ne de kuramsal bir çalışma düzeyine ulaşabilir.

Matematik yalnızca insana özgü kültürel yaşamın bir gereği olmakla kalmamakta, o yaşamın değişikliğe, ilerlemeye, yeniliğe açık olmasında, kişilerin birey ve toplum olarak daha akılcı ve tutarlı davranmasında etkili bir eğitim aracıdır da. Matematiğin bilimsel araştırma ve düşünmeye sağladığı vazgeçilmez destek iyi bilinmektedir. Sanata katkısı ise o denli iyi bilinmez. Oysa, sanat etkinliklerinin yapıda, biçimde ve uyumda oluşturduğu güzelliklerin kimi ölçüt ve örneklerini matematikten esinlediği söylenebilir. Matematiğin bilimdeki yerini, ilk uygarlıklardaki yerini daha önceki bölümlerde ayrıntılarıyla gözden geçirmiştik. Burada sanatla ilişkisine değinmekle yetineceğiz.

Matematik ve Sanat

Çoğu kez sanıldığının tersine, matematik salt akıl işi, kuru, teknik bir çalışma değildir; “akıl” ve “akıl dışı” diyebileceğimiz tüm ruhsal yetileri içerir. Matematiğin oluşumunda teknik bilgiye dayanan işlemler yanında, tutkusal ilgiye, duygusal yönelim ve kaynaşmaya, yaratıcı imgelem ve zekâyâ ihtiyaç vardır. Matematik hem mantıksal düşünmeyi içeren bir bilim, hem duygusal doygunluğa yönelik bir sanattır. Bir sanat olarak matematiğin değerini hiçbir sanat çalışmasından daha az bulmayanlar vardır. Ne ki, matematiğin uygulama ve öğretiminde ağırlığın sürgit teknik işlem ve kurallara verilmesi onun sanatsal niteliğini gözden uzak tutmuş, ona nerdeyse sanata ters düşen bir görünüm vermiştir. Oysa, seçkin kimi matematikçi filozofların belirtmekten geri kalmadıkları gibi, matematiğin sanata ters düşmesi şöyle dursun, sanatla yakın benzerliği vardı.⁽⁹⁾ Bir kez, biçim, uyum ve simetri arayışı sanatın olduğu kadar matematiğin de bir özelliğidir. Sonra, iki alanda da yaratma salt duygudan ya da salt akıldan kaynaklanan bir etkinlik değildir. Nasıl ki, bilim ve matematiğin, mantıksal düşünmenin yanı sıra kişisel tutku, imgelem ve beğeni gibi öğeleri içerdiği yadsınamazsa, sanatın da yoğun olarak içerdiği bu öğelerin yanı sıra, göze çarpmasa da, akıl ve mantık ölçütlerine yer verdiği yadsınmaz. Sanatı tümüyle akıl dışı bir etkinlik saymak, matematiği tümüyle mantıksal saymak gibi yanlıştır. Sanatı bilim, matematik ve benzer çalışmalarla bağdaşmaz görmek eski bir alışkanlıktır. Dahası, bilim ve matematiğin ilerlediği dönemlerde sanatın geri kaldığı oldukça yaygın bir görüştür. Bu görüşe karşı çıkan Bronowski,

(9) İlginç bulduğumuz birkaç alıntı:

Weierstrass, “Bir matematikçi biraz da şair değilse, tam bir matematikçi değildir.” Poincaré, “Adına layık bir bilgin, özellikle bir matematikçi, çalışmasından bir sanatçı gibi etkilenmelidir; doyumunu bir sanatçının doyumunu ölçüsünde derin olmalıdır.” Aristoteles, “Matematiksel bilimler düzen, simetri ve ölçü sergiler. Bu özellikler güzelliğin en yüce formlarıdır.” G. H. Hardy, “Matematikçinin yarattığı teori ya da modeller, ressam ya da şairin yapıtları gibi güzel ise değerlidir.” P. A. M. Dirac, “Denklemlerimizin güzel olması deney sonuçlarına uygun düşmesinden daha önemlidir.”

uygarlığın hemen her çağında sanatın bilim ve matematikle elele yürüdüğü savındadır:

... Antik Yunan uygarlığının en parlak döneminde sanatla bilim tam bir etkileşim içindeydi. Yunan dramını yaratan Aeschylus, Pythagoras'ı izlemiştir. Bu dram en yüce düzeyinde iken Socrates felsefesini işliyordu. Socrates için ne diyebiliriz: Bilgin mi, sanatçı mı? İdeal devletinde şairlere yer vermeyen Platon terslik bu ya, diyaloglarını Aristophanes Yunan dramını gömerken yazıyordu. Bu kişilerin sanatta olduğu kadar düşünce de ortaya koydukları örnek yapıtlar Rönesans'ta modern dünyanın hayal gücünü tutuşturmuştur. Rönesans insanının, başlangıçta olduğu gibi bugün de, örnek tipi ve simgesi Leonardo da Vinci hem ressam ve heykeltıraş, hem de matematikçi ve mühendisti. (Batı'da tanınan tek Doğulu şair ömer Hayyam aynı zamanda yaşadığı dönemin seçkin matematikçisi ve astronomuydu.) Leonardo gibi Hayyam da insan zekâsının birliğini, evrensel niteliğini simgeler.⁽¹⁰⁾

Gerçekten, kültürel yaşamın “organik” diyebileceğimiz bir bütünlüğü vardır: Bilim, matematik ve sanat hiçbir dönemde birbirine kapalı çalışmalar olmamıştır. Müziğin yapısında matematiğin yeri Pythagoras'tan beri bilinmektedir. Resim, heykel gibi görsel sanatlarda sanatçının sezgisel yoldan da olsa oranlar yasası, perspektif bilgisi ve geometrik biçimlerden yararlandığı yadsınamaz. Öte yandan, matematik ve bilimde her yeni buluş ya da çözümün, akıl-yürütme gücü yanında, sezgi gücüne dayandığı, çoğu kez estetik kaygıları yansıttığı görmezlikten gelinmemelidir. Her alanda yaratıcı gücün kaynağı akıl değil, sezgidir; akıl düzenleyicidir, işlevi sezgisel atılım veya kavrayışa rasyonel bir görünüm kazandırmaktır.

Yanlışlığı bilinse de yerleşik düşünceleri düzeltmek güçtür. Daha önce değindiğimiz gibi, pek çok kimsenin gözünde sanatla matematik birbirine yabancı iki etkinliklerdir. Matematik soyut simge ve formüllerden oluşan teknik bir konudur; sanatın doğrudan yaşamla kaynaşan sıcak, duygusal içeriğinden uzaktır. Güzellik arayışı, estetik kaygı sanata özgü sayılmıştır. Oysa, güzellik kavramını çözümlediğimizde bu sanının bir önyargı olduğu görülür. Nedir güzellik? “Güzel” dediğimiz şeyi güzel olmayan şeyden ayıran nesnel ölçütler var mıdır? Güzelliği “düzen”, “uyum”, “simetri”, “denge”, “incelik” gibi sözcüklerle tanımlayanlar var. Ama aynı terimlerle matematikte ulaşılan kimi sonuçları da niteleyebiliriz. Matematiğin şiirle değil, çoğu kez anlamı belirsiz imgelerle uğraştığı doğrudur. Ama yine de oluşturduğu teorem veya modellerinin birçoğu alayanların gözünde şiirsel estetiği andıran bir inceliktedir. Düzen, uyum, simetri gibi güzellik ölçütleri temelde matematikseldir. Sanat ürünlerinin değerlendirilmesinde matematiksel ölçütlerin giderek ağırlık kazanması olayını başka türlü nasıl açıklayabiliriz? Gerçi sanatsal estetiğin dile getirilmesi güç, öznel nitelikte kimi ölçütleri içerdiği söylenebilir. Örneğin, sanat yapıtında doğrudan duygulara yönelik, çağa, moda ve salgın heveslere açık bir yan bulabiliriz. Ne ki, aynı zaatları tüm ağırbaşlı görünümüne karşın bilimsel ve matematiksel çalışmalarda da görebiliriz.

(10) J. Bronowski, *The Common Sense of Science*, s. 8.

Öyle görünüyor ki, “sanata özgü” diye ayırt edeceğimiz her özelliği, az çok matematik de paylaşmaktadır. Aynı şeyi, matematiğe özgü sanılan özellikler için de söyleyebiliriz. Matematikle sanat aynı uzanım üzerinde, ama konumları değişik iki etkinliktir. Aralarındaki fark, nitelikte köktenci olmaktan çok derecede bir farktır. Kimi özellikler sanatta daha yoğun ve çarpıcı, kimi özellikler de matematikte daha belirgindir. Bir alanı en belirgin özelliklerini ölçüt alarak tanımlamak belki kaçınılmazdır; ancak görecel olarak belirsiz kalan özellikleri yok saymak doğru olamaz. Örneğin, matematiğin mantıksal yapısı çok vurgulanan bir özelliğidir. Buna bakarak matematiği salt mantıksal çıkarım ve ispat tekniğiyle sınırlı saymak doğru olabilir mi? Gene bir başka yanlış matematiği ispatlanmış bir önermeler yığını, bir doğrular kümesi gibi görmektir. Matematiğin mantıkla özdeş olduğu tezinin büyük öncüsü Russell bile matematiğin sanatsal niteliğini belirtmekten geri kalmamıştır:

İyi anlaşıldığında matematiğin yalnız doğruluğu değil, üstün bir güzelliği de içerdiği görülür. Yaratılışımızdaki zaafı okşamaktan, resim ve müziğin abartılı çekiciliğinden uzak, bir heykel kadar soğuk ve yalın, yalnızca büyük sanatta bulduğumuz yetkin, katıksız bir güzelliktir bu. Yüceliğin denek taşı olan gerçek ruhsal erinç ve doygunluğa, insandan daha fazla olma duygusuna, şiirde olduğu kadar matematikte de erişebiliriz.⁽¹¹⁾

Russell’ın çağdaşı Hardy daha ileri giderek, salt-kuramsal matematiği nerdeyse sanatla bir tutmakta, güzele yönelik bir çalışma saymaktadır:

Matematikçi, ressam ve şair gibi “güzel biçim” yapıcısıdır. Onun ürünü ötekilerinden daha kalıcı ise, nedeni yapının düşünsel kavramlarla işlenmiş olmasıdır. Ressam yapıtını biçim ve renklerle, şair sözcüklerle oluşturur. Düşüncelerin biçim, renk ve sözcüklere göre daha kalıcı olması matematikçinin ürünlerine, diğerlerinde görmediğimiz bir süreklilik kazandırmaktadır. ... Ressamın, şairin ürünleri gibi matematikçinin ürünü de **güzel** olmalıdır. Düşünceler de renkler ve sözcükler gibi tam uyum kurarak bir araya gelmelidir. Güzellik başta gelen ölçüttür; çirkin matematik için dünyamızda sürekli yer yoktur.⁽¹²⁾

Matematiğin sanatsal niteliği daha duygusal sözlerle de dile getirilmiştir; öyle ki, konuyu içinden bilen kimilerinin gözünde matematik, ince işlenmiş bir dantel, çimen üstünde ya da çocuk yüzünde ılık ve gölge kıvıltılarının oluşturduğu canlı bir desendir. Pythagorasçılar, müzikte matematiği bulmuşlardı; istersek matematikte de müziği bulabiliriz. Uzun ve karmaşık bir ispat, bir müzik parçasında bulduğumuz ritmik devinimi duyurabilir bize. Leibniz, “Müziğe sayılarla bilinçaltı uğraşan bir kafanın gizli bir aritmetik çalışması diye bakabiliriz,” demişti. Seçkin matematikçilerin çoğunda kendini açığa vuran müzik sevgisi bir rastlantı değildir herhalde. Yontu, resim, grafik sanatlarla mimarlık geometrik form ve ilişkileri içeren

(11) B. Russell, *Mysticism and Logic*, s. 60.

(12) G. H. Hardy, *A Mathematician’s Apology*, s. 84.

sanat kollarıdır. Bunun iyi bilinen bir örneğini, “Altın Kesit” ve türevlerinin yarattığı estetik etkide bulmaktayız.⁽¹³⁾

Seçkin bilim tarihçisi George Sarton, matematik tarihini incelemenin başlıca önemini matematiğin “hümanist” değerine bağlar. Ona göre, matematik ile içinde olduğu kültürel çevrenin ilişkisini anlamadıkça matematiği, matematiğin gelişimini yeterince anlamaya olanak yoktur. Matematikçilerin, matematik öğretmenlerinin uğraş konularını anlamaları her şeyden önce matematiğe hümanist bir açıdan bakmaya olanak veren bu ilişkiyi tanımlarıyla olasıdır.⁽¹⁴⁾

Bu bizi matematik eğitimindeki sorunlara getirmektedir.

(13) $x - ax = a$ denkleminin ilişkin olan bu kesit, özellikle klasik Yunan mimarlığının “altın dikdörtgen”inde kullanılmıştır. (Altın dikdörtgen, bitişik kenarları $(\sqrt{5} + 1)/2$ oranında olan bir dördgendir.) Bu ilişki Leonardo da Vinci, Raphael, Michael Angelo ve Albert Dürer gibi büyük sanatçıların matematiğe duydukları derin ilgiyi de açıklamaktadır.

(14) Ayrıca bkz. Ek: 9; Ek: 10; Ek: 12.

XIII. BÖLÜM

MATEMATİK EĞİTİMİ

Sorun

Matematik eğitimi matematik kadar eskiye uzanan bir olaydır. Evreni rasyonel sayıya indirgeme savında birleşen Pythagorasçıların gizli derneği bir tür matematik okuluydu. Platon geometri bilmeyenleri Akademisine sokmuyordu. Euclides'in yüzyıllar boyu Batı dünyasında geometrinin biricik ders kitabı olarak okutulan *Elementler*'i, öğretim programının özünü matematiğin oluşturduğu ünlü İskenderiye Okulu'nda yazılmıştı. Matematik Orta Çağlarda da müzik, mantık ve retorik (söz söyleme sanatı) gibi konuların yanı sıra ders programlarında önemli yerini korumuştur. Tarih boyunca matematiğe gösterilen ilgide günlük ve iş yaşamındaki gereksinmelerin rolü büyüktür kuşkusuz. Ne var ki, bu ilgide daha ağır basan bir başka düşüncenin payı vardır: Matematik bilgisinin insan zekâsını bilemedeki eşsiz gücü. Bir önyargı da olsa bu düşünce bugün bile etkisini tümüylü yitirmiş değildir. Pek çok kimsenin, dahası kimi eğitimcilerin gözünde matematiğin insan kafasını biçimlemede kendine özgü bir etkinliği vardır.

Ancak matematik öğretimine her çağda tanınan büyük ağırlığa karşın bu öğretimin sürgit bir sorun olduğunu görmekteyiz. Uykusundan, düşman saldırısının başlaması nedeniyle uyandırıldığında Napolyon'un tedirginliğini, "Hay Allahım, ben de matematik sınavı var sandım!" diye açığa vurduğu söylenir. Ünlü komutana yüklenen bu korku, okul çocuklarının tümünün olmasa bile büyük bir bölümünün korkusu değil midir? Çoğu kimsenin, "başının matematikle hoş olmadığını" söylediğini biliriz. Özellikle kız çocukların matematiğe pek yatkın olmadığı genel bir kanı, kültürel bir önyargıdır. Oysa, anadilini konuşan, okuma-yazma becerisini kazanan herkesin, aritmetik çerçevesinde de kalsa, matematiği öğrenecek yeteneği var demektir; öğrenemiyorsa, ya da istenilen düzeyde gelişme gösteremiyorsa, bunun suçunu çocuğa yüklemek doğru mudur? Bir yanda diğer derslerle karşılaştırıldığında kavramsal yapısı ve mantıksal kuruluşuyla yalınlığın, kesinliğin örneği matematik var önümüzde; öte yandan pek çok öğrencinin korkulu rüyası matematik! Matematiği, özellikle okul sıralarında kimi öğrenciler için korku, hatta nefret konusu yapan şey nedir? Bu sorunun hemen akla gelen yanıtı, "matematiğin konu olarak çetinliği," doyurucu olmaktan uzaktır. Sorun büyük ölçüde öğretmenlerin yetersizliği, programların yüklü ve tekdüze tutulması, okullarda etkili bir rehberlik

hizmetinin yokluğu gibi nedenlerden kaynaklanmaktadır. Gerçi bu olumsuzlukların diğer dersler için de geçerli olduğu söylenebilir. Öyle de olsa, öğrencilerde matematiğe karşı oluşan çekingenlik ve olumsuz tavır neden aynı ölçüde diğer derslerde kendini göstermiyor? Matematiğin kendisinden gelen bir zorluk yoksa, bu fark neden? Bu soruya vereceğimiz yanıt doyurucu olmayabilir. Ama öyle görünüyor ki, matematiğin soyut ve simgesel karakteri değindiğimiz öğretim koşullarındaki yeterliliklerle birleşince olumsuzluk daha keskin bir biçimde ortaya çıkmaktadır.

Program ve Yöntemde Reform

Matematik öğretiminde reform ihtiyacı, kökleri çok gerilere uzanmakla birlikte, İkinci Dünya Savaşı sonrası dönemde, özellikle Sputnik'in uzaya fırlatılmasıyla eyleme dönüşmüştür. Matematik programlarının modası geçmiş, donuk, tekdüze bir anlayışa dayandığı, modern gelişmeleri içerik ve yöntem olarak yansıtmadığı görüşü kalkınmış ülkelerde ağırlık kazanır. Programların yanı sıra ders kitaplarının değiştirilmesi, öğretmenlerin yetiştirilmesi yoluna gidilir. Hareket çok geçmeden devrimsel boyutlara ulaşır. Amaç, matematiğin son yüzyıl içindeki gelişmelerini eğitim programlarına maletmek, "Yeni Matematik" diye bilinen çağdaş anlayışı egemen kılmaktır. Bu öncelikle programı önemini yitirmiş kimi geleneksel konuların (örneğin, uzay geometrisi, logaritma, trigonometri gibi konuların) ağırlığından kurtarmak, kümeler teorisi, eşitsizlikler, "soyut cebir", probabiliteler gibi daha önemli görülen yeni konulara yer açmak, matematiğin giderek artan soyut karakterini seçilen konulara yansıtmak demektir. Yeni ders programlarının düzenlenmesinde başlıca üç noktanın gözönünde tutulduğu görülmektedir:

- (1) Matematik olup-bitmiş, kesin doğrular içeren donuk bir konu değil, yanılma-deneme yaklaşımına yer veren, yeni arayış ve buluşlara açık, canlı bir çalışma alanıdır.
- (2) Matematik, kültürel yaşamda stratejik bir konuma sahiptir: Bilim, teknoloji ve iş yaşamındaki vazgeçilmez uygulamalarının yanı sıra, amacı kendi içinde, entelektüel değeri yüksek, kişinin öğrenme, bulma ve yaratma ilgilerini besleyen, geliştiren eğitsel bir etkinliktir.
- (3) Matematik çoğu kez sanıldığı gibi birbirinden kopuk, değişik konu, işlem ve kurallardan oluşmuş bir yığın bilgi değil, kimi temel ilke ve kavramlara dayanan bir düşünme yöntemi, geniş anlamda bir problem çözme, bulma ve ispatlama etkinliğidir.

Ders konularını seçme ve işleme yöntemine ışık tutan bu düşünceleri biraz daha açmada yarar görmekteyiz. Ama hemen belirtmeli ki, öğretimde herkes için, her zaman geçerli bir yöntem ya da yaklaşımdan söz edilemez. Seçilecek yöntemi işlenen konunun niteliği, öğrencinin ilgi ve yetenek düzeyi, erişilen öğretim aşaması gibi etkenler belirlemelidir. Her konuda, herkese, her düzeyde uygulanabilen, evrensel geçerlikte bir yöntem yoktur. Okullarımızda matematik derslerinde gözlenen başarı düşüklüğünde bu noktanın yeterince anlaşılmamış olmasının payı büyüktür.

Ama gene de öğrenme sürecinde reformcu anlayışın vurguladığı kimi özelliklere değinmeden geçemeyeceğiz:

- (a) Derste yeni geçen kavram ve ilişkiler, özellikle ilk yıllarda, somut örnek ve düzenlemelerden yararlanılarak öğrencinin deneyimi üzerine kurulmalı, onda sezgisel anlam oluşturulmalıdır. Bu aşamada sayma, ölçme, somut nesne ve şekiller üzerinde çalışma önemlidir. Sayı ve küme gibi kavramlar, bunlara bağlı işlemler bile temelde sezgiseldir; çocuğun günlük deneyimlerinden kalkarak öğretilir. Örneği, kümelerin eşitliği “bire-bir” denen bir eşleştirmeye gösterilebilir. Hemen her çocuk, yemek masasına oturacak dört kişi için dört sandalye konması gerektiğini bilir. Daha soyut görünen bir örnek alalım: $3 \times 5 = 5 \times 3$ eşitliği (ki çarpmanın değişme özelliğini göstermektedir) her birinde üç ağaç bulunan beş sıra ile her birinde beş ağaç bulunan üç sıra gibi somut bir düzenlemeyle gösterilebilir. (Bu arada, ilişkiyi sağlamayan örneklerin verilmesi de iyi olur.)
- (b) Öğrenme giderek somut deneyim ve işlemlerden soyut düşünmeye, öğrenileni simgesel olarak dile getirmeye yönelmeli, deneyim bağlamında öğrenilen kavram ve ilişkilerin, o bağlamla sınırlı kalmadığı gösterilmeli, genelleme yolu açılmalıdır. Cebir soyut ve simgesel yapısıyla başlangıçta yüksek yetenekli çocuklar için bile kolay olmayabilir. Sayı yerine harf kullanılmasının çoğu çocuklar için konuya gizemli bir görünüm verdiği doğrudur. x ya da y ’nin belli bir sayıyı değil, bir kümeden herhangi bir sayıyı temsil ettiği herkesin kolayca kavrayabileceği bir düşünce değildir. Öğrenci somut ve belli doğrularla değil, genel doğrularla, belki de ilk kez cebir dersinde karşılaşmaktadır. Ne ki, matematiksel düşünmeye büyük güç sağlayan bu soyut ve simgesel yapılanma, aynı zamanda, öğrencilerin pek çoğu için öğrenme güçlüğüne başlıca nedenidir. Üstünkörü yürütülen, kural ve tanım ezberine dayanan bir öğretimle bu güçlük büsbütün ağırlaşmaktadır. Değişken kavramı gibi sonsuzluk kavramı da sürgit sıkıntı kaynağı olmuştur. (Cantor’a gelinceye dek sonsuzluk düşüncesine ilişkin Zeno paradoksu matematikte çözümünü güç bir sorun olarak kalmıştır. Sonlu kümeler için doğru olan kimi varsayımların sonsuz kümeler söz konusu olunca doğru olmadığını artık biliyoruz. Cantor’un getirdiği açıklama matematiği bürünmüş olduğu gizemli bulanıklıktan kurtarmıştır.) Öğrenci sezgisel deneyim düzeyinden soyut simgesel notasyon düzeyine açıldıkça matematikte ilerleyemez, ilk deneyimlerin dar çerçevesinde kalır. Örneğin, x^2 ve x^3 somut düzenlemelerle gözde canlandırılabilir; ama x^n veya $\sqrt{-1}$ gibi ifadelerin öyle düzenlemelerle gözde canlandırılması kolay değildir. Aslında buna gerek de yoktur. Unutmamak gerekir ki, $\sqrt{-1}$ ifadesi uzun süre Cardan ve Euler gibi seçkin matematikçilerin bile içlerine sindiremedikleri “saçma” bir şey olmuştur.
- (c) Matematik doğruluğu söz götürmez, gözü kapalı öğrenilmesi gereken birtakım kural, işlem ve teoremler yumağı olarak değil, her noktası tartışmaya açık, doğruları irdelenebilen bir çalışma olarak işlenmeli; öğrenci bilineni irdeleme, yeni çözümler arama, yeni ilişkiler bulma etkinliği içine girme fırsatı bulmalıdır. Öğrenci ancak öyle bir etkinlik içinde matematiği benimser, anlayarak öğrenir.
- (d) Öğretimde yaklaşım çok önemlidir. Bir korulukta ağaçlar, bakış açısına göre, düzenli sıralar sergileyebileceği gibi, başka bir açıdan tam bir karışıklık içinde görünebilir. İyi bir yaklaşım, ele alınan her konunun matematiğin bütünlüğü

içindeki yeri gösterilerek, kavram ve ilkelerine açıklık kazandıracak biçimde işlenmesini gerektirir. Öğretim hiçbir alanda anlatma-dinleme tekdüzeliğinde başarılı olamaz; matematikte ise bu büsbütün olanaksızdır. Öğrenci aktif olarak katıldığı derste önemli teoremleri tanıma, bunlara ilişkin ispatları yoklama, ispatın mantıksal kuruluşunu, işlevini öğrenme; aksiyomatik anlayışı kazanma çabasına girmelidir. Unutmamak gerekir ki, okullarımızda çoğunluk ele alındığı gibi, matematik bir kurallar ve tanımlar yığını, bir ispatlar koleksiyonu değildir. Matematik bir düşünme, kültürel yaşamın hemen her alanında etkinliği bilinen bir problem çözme yöntemidir. Özellikle üst düzey öğretimde matematiğin uygulamalı işlevi yanı sıra, kuramsal niteliği göz önünde tutulmalıdır.

Ne var ki, sorun müfredatın (ona koşut olarak öğretim yöntemiyle ders kitaplarının) yeniden ele alınmasıyla bitmiyordu. Eğitim etkinliğinde öğretmenin konusu ve işlevi son derece önemlidir. Reformun başarısı her şeyden önce öğretmenin aktif katılımına, eğitsel yaklaşım ve matematik anlayışına bağlıdır.

Reformcu açıdan matematik öğretimindeki süregelen sıkıntının kökeninde öğretmenlerin nitel yetersizliği yatmaktaydı. Yetersizlik özellikle şu üç bakımdan kendini açığa vuruyordu: (1) Bilgi eksikliği, ya da bilgi birikimindeki durağanlık ve sığlık; (2) Matematiği bir düşünme yöntemi olarak kendine özgü niteliğiyle kavrayış yetersizliği; (3) Öğretmenlerin tutumunda gözlenen görecel katılık. (Deneyimler, öğretmenlerin mesleki yetersizliğini, programlı ders kitabı, sınıf-içi televizyon, video, bilgisayar türünden teknik araçlarla dengeleme veya giderme yolunda alınan önlemlerin de bekleneni sağlamaktan uzak kaldığını göstermiştir.) Öyle ki, öğretmenleri yeniden yetiştirme yoğun bir çaba konusu olmakla kalmaz, öngörülen reformun başlıca güvencesi sayılır.

Reform çalışmalarında rehberlik hizmetinin önemi de gözden kaçmamıştır. Etkili bir öğretim; öğrencilerin ilgi, yetenek ve gereksinmelerine göre yönlendirilmesi gerektirir. Bu ise öncelikle öğrencilerin güvenilir yollardan tanınması demektir. Öğrencinin ilgisi dışında kalan, ya da yeteneklerinin elvermediği düzeyde birtakım konuları öğrenmeye zorlanması, başarısızlığına neden olmakla kalmaz, onda kimi ruhsal bunalımlara da yol açar. Kuşkusuz okullarda etkili bir rehberlik hizmeti ancak programın öğrenciye seçme olanağı tanıyacak biçimde esnek tutulmasıyla olasıdır. Bu nedenle, her şeyden önce programları tekdüzelikten, öğretmenleri yanlış bir eğitim anlayışıyla koşullanmış katı tutumdan uzaklaştırmak, dahası matematiği yeni atılımlara açık canlı bir düşünme etkinliği olarak sunan ders materyali oluşturmak gerekiyordu. Bu ise, üstünkörü önlemlerle kısa yoldan çözümlenecek bir güçlük değildi. “Yeni Matematik” öğretimının beklenen başarıyı vermemiş olmasında sorunun tüm yanlarıyla derinlemesine kavranmamış olması nedeni vardır. Öğretmenlerin istenilen düzeyde yetiştirilmesindeki güçlük, geleneksel öğretime koşullanmış ana-babaların çocuklarını ev ödevlerinde destekleyecek bilgi ve anlayıştan yoksun olmaları bu arada göze çarpan en önemli eksikliklerdir. Geleneksel öğretimin pek çok çocukta yarattığı yılgınlık, bu kez, o öğretimi düzeltmeye yönelik “Yeni Matematik”i anlamakta güçlük çeken ana-babalarda kendini gösterir. Öğretmenler gibi ana-babaların da yeniden eğitilmesi sorunu belirlemiştir.

Matematiksel Yetenek

Klasik öğretimin başarısızlığında çoğu kez gözden kaçan bir neden de, programda öngörülen matematiğin, ilgi ve yetenek farkları gözönünde tutulmaksızın tüm öğrenciler için zorunlu tutulmasıdır. Oysa, günlük gözlemler bile çocukların öğrenme yeteneği bakımından geniş bir dağılım içinde olduğunu göstermektedir. Pek çok çocuğun uzun sürede güçlükle kavradığı bilgiler, kimi çocuklar için son derece kolaydır. Satranç ya da müzik tutkusu gibi matematik ilgisi de herkeste değil, pek az kimsede kendini açığa vurmaktadır. Matematik ilgisinin uyandırılmasında kültürel çevrenin etkisini görmezlikten gelemeyiz elbet. Ne ki, kişide belli bir yönde ilginin yoğunlaşması, o yönde üstün bir yeteneğin varlığıyla olasıdır. Gerçekten, belli bir düzey üstünde matematikte ilerlemenin canlı bir ilgiyle birlikte o ilgiyi besleyen özel bir yetenek gerektirdiği, matematik tarihine göz gezdiren hiç kimsenin kolayca yadsıyamayacağı bir olaydır. Birkaç örnek vermekle yetineceğiz:

Galileo Galilei (1564-1642), hem öncü bilimsel çalışmaları, hem de Engizisyonla içine düştüğü çatışması nedeniyle uygar dünyanın gözünde örnek bir insandır. Yoksul bir matematikçi olan babası, oğlunu daha kazançlı bir mesleğe yönlendirmekte kararlıydı. Galileo, 19 yaşına gelinceye dek “matematik” denen bir konunun varlığından nerdeyse habersiz büyür. Üniversite öğrenimine tıp fakültesinde başlamıştı. Ne ki, bir gün bir rastlantıyla kulak misafiri olduğu bir geometri dersi, onu âdeta büyüler: Galileo, yeni bir dünya keşfetmiş olmanın coşkusu içindedir artık; her şeyi bir yana iterek matematiğe sarılır. Sonunda bildiğimiz gibi, matematiksel yöntemle deneyi birleştirerek modern fiziği yaratan Galileo çıkar ortaya.

Matematikte başarının doğuştan gelen özel yetenekle ilişkisine en çarpıcı örnekleri Gauss, Abel, Galois, Ramanujan gibi büyük matematikçilerde bulmaktayız.

“Matematiğin Prensi” diye anılan Carl F. Gauss (1777-1855), daha üç yaşına basmadan, işçilerin ücret bordrosunu hazırlayan babasının önemli bir hesap hatasını yakalayarak onu şaşırtır. On yaşında ilkokul sıralarında iken aritmetik dersindeki performansı ise daha şaşırtıcıdır: Bir toplantı için sınıftan ayrılmak üzere olan öğretmen, çocukları meşgul tutmak amacıyla 1’den 100’e kadar sayıların toplamını bulmalarını ister. Öğretmen tam kapıdan çıkarken Gauss, parmağını kaldırır, sonucun 5050 olduğunu söyler. Yüz sayının öyle kısa bir sürede art arda yazılıp toplanabileceğine inanmayan öğretmen, öğrencisinden sonuca nasıl ulaştığını sorar. Gauss dizide en alt ve en üst sayılardan başlayarak toplamı 101 olan,

$$\begin{array}{rcl}
 1 + 100 & = & 101 \\
 2 + 99 & = & 101 \\
 3 + 98 & = & 101 \\
 . & & . \\
 . & & . \\
 50 + 51 & = & 101
 \end{array}$$

50 çift sayı olduğunu, dolayısıyla toplamın da

$$50 \times 101 = 5050$$

olması gerektiğini söyler.⁽¹⁾ (Öğretmeninin aracılığıyla Gauss'ın üstün yeteneğini öğrenen dönemin Brunswick Dükü Ferdinand, çocuğu öğrenim yaşamı boyunca koruması altına alır, matematik dünyasının Prensi insanlığa kazandırılmış olur!)

Gauss'ın yaşam döneminde olağanüstü yetenekleriyle genç yaşlarında adları unutulmazlar arasına yazılan iki kişi daha çıkar: Abel ve Galois.

Niels Henrik Abel (1802-1829), Norveç'te bir köy papazının oğlu olarak dünyaya gelir. Yoksulluk içinde geçen kısa yaşamında inanılmaz bir tutkuyla matematiğe sarılan Abel, öğretmeninin yüreklendirmesiyle Newton, Euler, Lagrange ve Gauss'ın yanında büyük matematikçileri okumaya koyulur. Bu arada babasının erken ölümü 7 çocuklu ailenin geçim yükünü 18 yaşındaki Abel'in sırtına yüklemiştir. Ama o, tüm sıkıntılara karşın matematikten elini çekmez; Cauchy, Gauss gibi dönemin ünlülerinden beklediği ilgiyi görmediği halde çalışmasını sürdürür. Daha sonra başarısının gizemi sorulduğunda Abel, çömezleri değil doğrudan ustaları okumasını gösterir.

Abel, "usta" dediği matematikçilerin çalışmalarında kimi zayıf noktalar bulmakta, üstünkörü ortaya konan çözüm ya da ispatları yakalamakta gecikmez. Ne ki, onu asıl yücelten başarısı, denklemlerin cebirsel çözümüne ilişkin çalışması⁽²⁾ ile şimdi "Abel Teoremi" diye bilinen 1826'da Paris Bilimler Akademisi'ne sunduğu transcendental fonksiyonların geniş bir kümesine ait genel bir özellik üzerindeki çalışmasıdır. Legendre, yeni bir analiz dalının icadı saydığı bu çalışmasıyla Abel'in ölümsüzleştğini söylemekten kendini alamaz.

Abel, 26 yaşında yoksulluk ve ihmale kurban gitti; matematik dehası onunkine eş olan Galois ise daha da erken yaşta aptalca göze aldığı bir düellonun kurbanı olur.

Şimdi "Galois Teorisi" diye bilinen denklemlerin genel çözümüne ilişkin özgün çalışmasının yanı sıra, modern matematikte önemli yer tutan Grup Teorisi'nin büyük öncüsü Evariste Galois (1811-1832), Paris'e yakın bir köyde büyüdü. 12 yaşına gelinceye dek okula başlamadı; evinde annesinin öğrettikleriyle yetindi. Aile çevresinde matematikle ilgilenen kimse yoktu.

Galois'ın öğrenim yaşamı tam bir anlayışsızlık ortamı içinde geçer. Gittiği okul onun gözünde bir okul olmaktan çok bir kışla ya da hapishaneydi: Katı bir disiplin, kapalı kapılar, yüksek duvarlarla çevrili kocaman bir bina. Klasik diller ve literatür ağırlıklı programda matematiğe tanınan yer çok dar ve önemsizdi. Galois belki de bir rastlantı sonucu eline geçen bir kitapta aradığı dünyasını bulur. Bu, dönemin ünlü matematikçisi Legendre'in geometri üzerine bir çalışmasıydı. Galois bir okuyuşta kavradığı geometriyle âdeta büyülenir. Oysa, okulda okutulan cebiri son derece sıkıcı, ders kitabını yavan ve katı buluyordu. Cebiri okulda değil, dışarda,

(1) Gauss'ın kullandığı ilişki bilindiği gibi $\frac{n(n+1)}{2}$ formülüyle genelleştirilmiştir.
Bkz. IV. BÖLÜM, s. 51

(2) Abel kendisinden önce pek çok matematikçiyi uğraştıran beşinci dereceden denklemin $(ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0)$ çözümünün olanaksızlığını ispatlar.

asıl kaynağında araması gerektiğini anlayan Galois, çok geçmeden Lagrange'ın cebirsel çözümlemelere ilişkin çalışmalarını, analitik fonksiyonlar teorisini incelemeye, matematiğin başyapıtlarını okumaya koyulur. 15 yaşındaki delikanlı, matematikte kendi gerçek dünyasını bulmuştu artık. Ne ki, okul çevresinin tepkisi kaçınılmazdı: Öğretmenleri onu söz dinlemez, kendini beğenmiş bir ukâla, özgün görünme tutkusu içinde bir "bilgiç" diye niteliyor, durumunu umutsuz görüyorlardı. Sınıf arkadaşlarının gözünde "kafasını matematikle bozmuş", çekilmez biriydi. Galois, kurulu düzenin beklentilerine, yerleşik değer yargılarına ters düştüğü için dışlanmıştı. Öyle ki, göz kamaştırıcı zekâsına karşın giriş sınavında matematikten yetersiz görülerek Ecole Polytechnique'e alınmaz. Dahası, Cauchy çapında bir matematikçinin bile tüm girişimlerine karşın ilgisini çekemez. Bu olumsuzluklar karşısında dünyası kararan Galois kendini o sıra etkinlik kazanan devrimci eyleme kaptırır; krala açıktan karşı çıktığı için iki kez tutuklanır. Başarısız sayıldığı sınavı 50 yıl sonra değerlendiren matematikçiler, "sıradan zekâların dehayı katlettiği" yargısında birleşirler.

Son örneğimiz, yetkili bir kalemin, "Çağımızın en olağanüstü matematik zekâsı," dediği zavallı bir Hintli delikanlıya ilişkindir. 31 yaşında tüberkülozdan ölen Srivinasa Ramanujan (1889-1920), ölümünden 8 yıl önce kendini bir mektupla matematik dünyasına tanıtmanın yolunu aramıştır.⁽³⁾

Saygıdeğer Efendim,

Madras'ta yılda 20 Sterlin ücretle çalışan küçük bir muhasebe memuruyum. Orta öğrenimimden sonra üniversiteye devam edemedim. Boş zamanlarımı matematik üzerinde çalışarak dolduruyorum. Çalışmam üniversite programlarında öngörülen çerçevede, kendi çizdiğim yepyeni bir yönde ilerlemektedir. Özellikle "açılan seriler" (divergent series) üzerindeki araştırma sonuçlarımı burada gösterdiğim matematikçilerin "hayret"le karşıladıklarını belirtmek isterim. ...

Sizden dilediğim, ilişikte gönderdiğim sayfalardaki notları incelemeniz. Eğer bunlarda bir değer bulursanız, teoremlerimi yayımlama olanağı arayacağım. Örnek olarak gönderdiğim notlar ulaştığım sonuçların bir bölümü olup, araştırmamın kendisini ve ayrıntılı ifade biçimlerini yansıtmamaktadır. Yoksul ve deneyimsiz bir kimse olarak sizden bana yol göstermenizi rica ediyorum. Verdiğim zahmetten dolayı bağışlamanız dileğimle, derin saygılar sunarım.

S. Ramanujan

Hintli delikanlı, arkadaşlarının teşvik ve yardımıyla yazdığı bu mektubu 120 teoremle birlikte Cambridge'de seçkin kürsü profesörü G. H. Hardy'ye göndermişti. Hardy, şaşkınlığını daha sonra, "Kimsenin tanımadığı Hintli bir memurdan gelen böyle bir şey karşısında bir matematikçinin ilk tepkisinin ne olacağını siz düşünün artık!" diyerek belirtir.

(3) Bkz. James R. Newman, *Science and Sensibility*, s. 253.

Teoremlerden bir bölümü bilinen şeylerdi; bir bölümünü ancak uğraşarak ispatlayan Hardy, bir bölümüne ise tümüyle yabancı olduğunu görür. Bunlar gerçekten apayrı derinlik ve düzeyde buluşlardı. Sıradan bir kafanın, geçici bir hevesin ürünleri olamazdı.

Hardy'nin bir anısı, Ramanujan'ın sayılarla ne denli içten bir dostluk ilişkisi içinde olduğunu göstermesi bakımından ilginçtir: "Putney'de hasta yatarken ziyaretine gitmiştim. Bindiğim taksinin plâka numarası 1729 idi. Bu sayıda ilginç bir özellik bulmadığımı söyleyince, hemen atıldı, 'Öyle değil, Hardy, çok ilginç sayıdır o. İki küpün iki değişik biçimde toplamı olarak yazılabilen en küçük sayıdır,' dedi."⁽⁴⁾

Ramanujan, matematik dünyasına doğmuş yeni bir yıldızdı, çok geçmeden kaybolan bir yıldız!

"Buluş Sanatı"

Bu tür olağanüstü örneklerle bakarak kitle eğitimine yönelik okullarımız için bir sonuç çıkarmak gerçekçi olmaz kuşkusuz. Ne var ki, gerçekten üstün yetenekli çocukları ortalama zekâ düzeyine göre oluşturulan bir programa tabi tutmak da son derece yanlıştır. Bir toplumun en değerli varlığı her alanda sayısı birkaçı geçmeyen üstün yetenekli çocuklarıdır. Onları sıradan bir öğretim ortamında körletmek, yanlış da ötesinde bir haksızlık, bir yıkımdır.

Çağımızın seçkin matematikçilerinden G. Polya bir "buluş sanatı"ndan söz etmekte, bu sanatın bir yöntem olarak matematik öğretiminde kullanılabileceğini savunmaktadır. Ona göre matematik, bir yığın hazır bilgi değil, çocuğun arayışına açık bir problem çözme etkinliğidir. Polya'nın "heuristics" dediği öğretim stratejisini oluşturan noktaları başlıca dört adıma indirgeyebiliriz:

- Birinci adım* : *Probleme duyarlık kazandırma*: Öğrenciyi problem oluşturma, verilen bir problemi anlama çabası içine sokmak.
- İkinci adım* : *Çözüm arama*: Probleme ilişkin veri ve bilgileri belirlemek, ilişkiler kurmak; gerekirse problemi ana bölümlerine indirgeyerek basitleştirmek.
- Üçüncü adım* : *Çözüm getirme*: Sezgisel ussal tahminlerde bulunmak, bilinen çözümlerden yararlanmak, hipotez kurmak, teori geliştirmek.
- Dördüncü adım* : *Çözümü test etme*: Getirilen çözüme karşı alternatif çözümler oluşturmak, karşıt örnekler aramak; en güçlü çözümlü seçmek ve yoklamak.

Polya'nın dilimize de çevrilen kimi kitaplarında önerdiği yaklaşımı aslında de-

(4) Aynı yapıt, s. 257.

neyimli öğretmenlerin çoğunun yabancı olduğu ilkeleri içermektedir.⁽⁵⁾ Üstelik bu ilkelerin matematik öğretimi için olduğu kadar tüm diğer düşünsel etkinlikler için de geçerli olduğu söylenebilir. Öğrenci bu yaklaşımda edilgen olmaktan çıkmakta, öğretim sürecinde problem oluşturma, çözüm arama, getirilen çözüm ya da çözümleri eleştirme gibi zihinsel etkinliklerle derse aktif olarak katılma fırsatı bulmaktadır. Başka bir deyişle, öğrenci bir araştırmacı davranışı içine girmekte, öğrenme, araştırmayla özdeşleşmektedir.⁽⁶⁾

Problem Çözmede Deneyim ve Uslamlama

Yinelemekte yarar var: Matematik eğitiminin başlıca amacı kişiyi, aritmetik, cebir ve geometrinin temel bilgileriyle donatmanın yanı sıra, düşünmeye yöneltmek; uslamamalarında, ulaştığı sonuçlarda tutarlı olma duyarlığına ulaştırmaktır. Matematik bilgisiyle matematiksel düşünmeyi karıştırmamak gerekir. Bilgi, düşünmek için gerekli ama yeterli değildir. Okullarımızda sürüp gelen öğretim hemen tümüyle bilgiyi ön planda tutmakta, düşünme alışkanlığını kurma etkinliğinden uzak kalmaktadır. Sonuç, hep bildiğimiz gibi, çocukların kafalarını yaşam etkinliklerinde belki de hiç kullanamayacakları, dahası bir süre sonra unutacakları bilgilerle doldurmaktan çoğu kez ileri geçmemektedir. Yerleşik olan bu tutumu düzeltmenin temel koşulu matematiksel düşünme sürecinin yapısını tanımaktır.

Özünde bir problem çözme etkinliği olan düşünme karmaşık bir olaydır; değişik bağlamlarda farklı biçimler sergiler. Örneğin, sanatta imgelem, tarihte anımsama, bilimde açıklama, matematikte ispatlama ya da daha geniş deyişle sonuç çıkarma ağırlık taşıyan düşünme biçimleridir.

Özellikle matematikte belirginlik kazanan “sonuç çıkarma” dediğimiz düşünme nasıl bir süreçtir. Bir sorun ya da problemle karşılaştığımızda nasıl davranıyoruz, sonuca nasıl ulaşıyoruz? Bu soruya yanıt ararken, çözümü yoğun düşünme gerektiren bir iki örneğe bakmada yarar vardır.

Problem 1: Sekiz litrelik bir fıçdaki şarap iki kişi arasında eşit bölüştürülecektir. Elimizde biri beş, diğeri üç litrelik iki boş kap vardır. Eşit bölüşme nasıl sağlanabilir?

Böyle bir durumda, davranışları düşünmeden çok pratik alışkanlıklara bağlı kişi doğrudan sınama-yanılma yoluna gider; şarabı bir kaptan öbürüne boşaltarak sonuç almaya çalışır. Bir tür “el yordamı” olan bu yöntem, rastlantı ya da şansla, aranan sonucu verebilir kuşkusuz; ama çoğu kez uzun bir bocalama ve zaman kaybı pahasına! Oysa az çok düşünme alışkanlığı kazanmış bir kişinin yaklaşımı öyle zaman ve emek ısrafını gerektirmez; kişi, el yordamı yerine “düşünsel deney” diyebileceğimiz bir yöntemle problemini çözmeye çalışır. Bu yöntemle çözüm, verilen bilgileri, bilgiler arasındaki ilişkileri belirleme ve kullanma becerisine dayanır. Nedir verilen bilgiler? Şarap dolu 8 litrelik bir fıçı; 5 ve 3 litrelik boş kaplar. İstenen,

(5) G. Polya, *How to Solve it, Mathematics and Plausible Reasoning* adlı yapıtlarında yaklaşımını ortaya koymuştur. İki ciltten oluşan ikinci kitap, *Matematikte Endüksiyon ve Benzetme* adı altında Türk Matematik Derneği Yayınları arasında çeviri olarak çıkmıştır (1966).

(6) Matematik eğitimine ilişkin bakınız: Ek: 7, Ek: 9, Ek: 10.

şarabın iki kişi arasında eşit bölüşümüdür. Bu bilgilerle kişi yine şarabı bir kaptan öbürüne boşaltarak işe koyulur. Ancak bu kez boşaltma eylemi fiziksel değil, düşünseldir; rasgele değil, çözüme elveren ilişkiler kurularak yapılır. Örneğin, boş kaplar arasında 2 litrelik bir farkın olması önemli bir ipucu sağlayabilir. Bir başka ipucu, boşaltma ve doldurmaların, fıçıda 4 litre şarap kalacak şekilde yapılması gerektiğinde bulunabilir. Çözüme ipucu veren bu türden bir ya da iki ilişki bizi aranan sonuca götürebilir. Başka bir örnek alalım.

Problem 2: Boyutları $3 \times 3 \times 3$ cm. olan tahtadan, kırmızıya boyanmış bir küp var elimizde. Bu küp, boyutları $1 \times 1 \times 1$ cm. olan küçük küplere bölünse, küçük küplerin toplam kaç yüzü boyalı olacaktır?

Burada da işe doğrudan fiziksel deneyle başlanabilir. Örneğin belirlenen boyutta tahtadan küp kesilir, boyanır; sonra bu küp, kenar uzunluğu 1 cm. olan küçük küplere testereyle kesilerek bölünür, boyalı yüzler sayılır. Ya da, daha basit yoldan, küpün boyalı 6 yüzünde 1 cm.lik kareler çizilerek sayılır. Oysa çözüm, bu tür fiziksel hareketlere başvurmaksızın, salt uslamlamayla da bulunabilir. Bunun için, daha önce de belirttiğimiz gibi, probleme ilişkin bilgileri belirlemek, çözüme ipucu sağlayacak ilişkileri kurmak gerekir. Eldeki bilgilerden biri küçük küplerin sayısı; bir diğeri küçük küplerin tüm yüzlerinin boyalı olmadığıdır. Boyalı yüz sayısının küçük küpün konumuna göre değiştiği, çözüme ipucu sağlayan önemli ilişkidir. Köşelerde yer alan küplerin 3, kenarlarda yer alanların 2, yüzey ortasında yer alanların ise yalnızca bir yüzü boyalıdır. Belirlenen bilgiler kişinin ya daha önceki deneyimlerinde vardır, ya da durum üzerindeki yeni gözlemlerle sağlanabilir. Boyalı yüz sayısının konuma göreliği ise, kişinin imgelem ya da zekâ gücüyle bulması gereken ilişkidir.

Verdiğimiz örneklerden de görüldüğü gibi problem çözmede “uslamlama” dediğimiz düşünsel etkinlik yeterlidir; yeter ki, bu etkinlik kişide bir deneyim, bir anlaksal alışkanlık niteliği kazanmış olsun. Bu da, kuşkusuz, ilk yıllardan başlayan bilinçli bir eğitim sürecini gerektirir. Çocuğun günlük deneyimlerine dayalı, gerçek anlamda problem çözmeye yönelik matematik öğretimi bu eğitimde hiç kuşkusuz en etkili araçların başında gelir.

Matematiksel düşünme, kuralları belli salt dedüktif çıkarımdan ibaret değildir; her aşamada kişinin deneyim, sezgi, yaratıcı imgelem ve zekâ gücünü gerektirir. Bunu, verdiğimiz basit örneklerde olduğu gibi daha karmaşık ya da soyut örneklerle de gösterebiliriz. Örneğin, üçgeni alalım. Geometrinin postulatları üçgenin varlığını mantıksal olarak olanaklı kılmaktadır. Ama bu demek değildir ki, “üçgen” dediğimiz nesne dedüktif çıkarsamanın bir ürünüdür. Üçgen kavramının mantıksal niteliği sonraki aşamalarda ulaşılan bir gelişmedir. Başlangıçta üçgen ve benzer nesneler (örneğin, çokgenler, daire, vb.) insanoglunun deneyim ve zekâsının bir ürünü olarak ortaya konmuştur. Çevremizde o tür kavramlara yol açan pek çok nesnel görüntüler vardır. Geometrik şekillerin birçoğu bu görüntülerin anlayışımızda oluşan soyut ve daha düzgün imgeleridir. Geometri bu imgelerden kaynaklanan, giderek uslamlama yoluyla mantıksal yetkinliğe ulaşan bir çalışmadır. Matematik eğitimi, her düzeyde, matematiğin gelişme sürecindeki bu özelliği göz önünde tuttuğu ölçüde başarılı olur.

EKLER:
ÇEVİRİ METİNLER

KÜLTÜREL BİR BİRİKİM OLARAK MATEMATİK

William L. Schaaf (1961)

Genellikle büyük kültürleri belli özelliklerin belirlediği söylenebilir. Örneğin, eski Mısır ile Babil’de bir tür mistisizm ve duyumsallık egemendi; antik Yunanlılar için düşünsel uğraşlar öncelik taşırdı; Romalılar ise daha çok devlet yönetimi, savaşma ve fetih başarılarına ağırlık veriyordu. Batı Avrupa’nın İ.S. 600-1100 dönemindeki kültürü büyük ölçüde dinsel nitelikte idi. Rönesans ile XIX. yüzyıl arasını doğaya açılma, bilimlerin başlama ve gelişme dönemi diye niteleyebiliriz. Son iki yüzyıllık dönemde insanoğlunun doğaya giderek artan ölçüde egemen olma çabasının damgasını bulmaktayız. Bunun kanıtını yalnızca bilim ve teknolojiadaki genel başarılar da değil, fakat aynı zamanda eş görülmemiş endüstri üretiminde, etkili kitle iletişimiyle birlikte gelen otomasyonda görebiliriz. Çağdaş kültürün yaratıcı dilini bilim oluşturmaktadır; matematik, bu dilin alfabesidir.

Empirisizm Döneminin Katkıları

Geçmiş dönemlerde matematik yalnızca kültürün gelişimine yol açan önemli bir araç değil, aynı zamanda, kültürün biçimlediği bir gelişmeydi. Antik Grek öncesi, “matematikte emprisizm dönemi” diye nitelenebilir. Babil ve Mısır matematiğinin başlıca uğraş konusu, astronomi ve takvime ilişkin sorunlardı. Bu arada tapınak, gömüt ve diğer dinsel yapıların yanı sıra arazi ölçme, harita çıkarma, basit mühendislik gibi pratik işlerde de matematikten yararlanılıyordu. Aslında Babillilerin aritmetik ve ölçme bilgilerini daha önce gelen Sümerlilere borçlu olduklarını söyleyebiliriz. Nitekim, İ.Ö. 2500 yıllarında Sümerlerin ağırlık, uzunluk ölçülerini iyi bildikleri, basit ve bileşik faiz hesaplarını üstün bir beceriyle yaptıkları bilinmektedir. Babilliler daha ileri giderek, oldukça karmaşık düzende, çarpma, kare ve karekök alma tabloları geliştirirler. Hatta sıfırı kullandıkları bile söylenebilir (gerçi sıfırın icadı genellikle Hint kültürünün bir katkısı olarak bilinir). Kısacası, Babilliler hesaplama tekniğinde çok ileri bir düzeye ulaşmışlardı.

Matematikleri aynı şekilde empirik nitelikte olan Mısırlıların da hesaplama tekniğinde ileri gittikleri bilinmektedir. Daha İ.Ö 3500 gibi erken bir dönemde sayı sistemleri yüzbinleri, milyonları kapsayacak genişlikte idi. Enflasyon ve ulusal borçlan-

ma henüz bilinmediği için, milyarlardan söz edilmiyordu. Mısırlıların birim kesirleri kullanmadaki becerileri göz kamaştırıcı düzeydeydi; denetleme hesaplarının değerini bildikleri, negatif sayıları kullanmakla genel sayı kavramına ulaştıkları anlaşılıyor.

Babil ile Mısır matematiğinin temelde empirik nitelikte olmasına karşın, bu iki kültür çeşitli yönlerden geleceğe damgasını vurmaktan geri kalmamıştır. Sayı kavramı gök katlarının incelenmesi için olduğu kadar, pazaryerinin alışveriş işlerini düzenlemek için oluşturulmuştur; geometrik şekil düşüncesi, alan ölçme, harita çıkarma, mühendislik ve astronomi çalışmalarında ortaya çıkmıştır. Dahası, zayıf kalmakla birlikte, cebirsel simgeleşimin o dönemde başladığı ileri sürülebilir. Bilinçli olmasa da, doğal sayıların çerçevesini aşip genişleme yoluna girmesi gene bu kültüre borçlu olduğumuz bir gelişmedir. Ölçme deneyimlerinin bir sonucu olarak, matematiksel sonsuzluk düşüncesine yaklaştığı bile söylenebilir.

Yunan Yaklaşımının Etkisi

Antik Yunanlıların elinde, İ.Ö. 600'den başlayarak, matematik, yeni bir gelişme aşamasına girer. Sonra gelen 900 yıl boyunca matematiğin Yunan kültüründe aldığı yer son derece önemli olmuştur. Oysa, o dönemde aritmetikte sağlanan gelişmenin önemsiz bir iki noktadan ileri geçmediğini bugün bilmekteyiz.

Yunan düşünürlerinin, sıradan sayılara ilişkin bilgimizi iki türe ayırmaları üzerinde durulmaya değer bir noktadır: *Logistiké* dedikleri hesaplama sanatı, *arithmetiké* dedikleri soyut sayı teorisi. Daha sonra Latince biçimiyle *logistica* günlük alışveriş, ticaret, sanat ve coğrafya ile astronomiyi de içine alan bilimsel etkinliklerde kullanılan sayısal hesaplama tekniklerini kapsıyordu. *Arithmetica* ise, sayıların özelliklerine ilişkin bir çalışmaydı; kabaca şimdi “yüksek aritmetik” ya da basit “sayı teorisi” dediğimiz asal sayı, çarpanlara ayırma, çakışma, vb. konulara ilişkin bir çalışma. Yunanlıların gözünde *logistica*, matematikçi ve filozofların ilgisine değmeyen “aşağılık” türden bir uğraştı. Bu tür kaba işleri sıradan kişilerin uğraşı sayan düşünürler için önemli olan *arithmetica*, geometri ve felsefe idi. Gerçekten, modern hesaplama yöntemleriyle karşılaştırıldığında, Yunan *logistica*'sı son derece kullanışsız, kaba ve ilkel bir çalışma idi. Yunanlıların sayı sistemi bu yönde daha ileri bir çalışmaya elverişsizdi.

Değişik adlar altında da olsa iki çalışma arasındaki ayırım, matbaanın ortaya çıkışına gelinceye dek sürdürülür. Orta Çağlar'da İtalyan yazarları *logistica*'ya “pratik aritmetik” demişlerdi. Rönesans dönemi Latin yazarları *ars supputandi* deyimini kullanırlar. XVI. yüzyılın ilk yarısından başlayarak iki çalışmanın *Aritmetik* adı altında toplandığını görmekteyiz.

Yunanlıların *arithmetiké* dedikleri çalışmaya gelince, kısaca şöyle diyebiliriz: Matematiksel çalışmaları Pythagorasçılar (İ.Ö. 500) dört dala ayırmışlardı: Mutlak sayılar, ya da *aritimetik*, uygulamalı sayılar, ya da *müzik*, durağan büyüklükler, ya da *geometri*, hareket halindeki büyüklükler, ya da *astronomi*. (Orta Çağlar'da bu dört çalışma, *quadrivium* adıyla anılmıştır.) Yunan aritmetiğinin zayıf yanı, daha başlangıcından itibaren, sayı kavramlarında Doğu gizemciliğinin etkisine girmiş ol-

malarıdır. Yüzyıllar geçtikçe bu etkinin güçlendiği, sonunda Yunan matematiği ile bilimini yozlaştırdığı bilinmektedir. *Gematria* dedikleri sayı büyüğü ve bu büyüğün etkileri Orta Çağlar boyunca süren diğer birtakım saplantılar nedeniyle Yunan matematiği, ne cebiri, ne de kalkülüsü bulacak düzeye erişmeden kalır.

Ne ki, tüm bu eksikliğe karşın, Yunanlıların aritmetiğe ya da sayı teorisine katkılarının önemi görmezlikten gelinemez. Örneğin, (1) Sayılarının bölünebilirliğine ilişkin kimi temel teoremlere ulaştıkları; (2) asal sayıların sonsuz olduğunu ispatladıkları; (3) $\sqrt{2}$ gibi sayıların (ve genel olarak, karenin kenarı ile köşegeninin ortak ölçüşüz) irrasyonel olduğunu buldukları bilinmektedir.

Yunanlıların matematiğe katkılarının en önemlisi, ne zaten basit düzeyde kalan sayı teorisinde, ne de zaten önemsenmeyen hesaplama tekniğinde değildi. Onların en büyük katkıları, iki temel kavram ya da yaklaşıma ilişkindi. Bunlardan biri geometriyi bir sistem olarak kurmada kullandıkları dedüktif çıkarım yöntemi; diğeri fizik dünyasını matematiksel betimlemeye elverişli bulmaları, daha doğrusu, sayıyı bilimin dili saymalarıydı. Bu iki katkı, aradan geçen iki bin yıl boyunca, Batı uygarlığını derinden etkileyen büyük bir mirası oluşturmuştur.

Çorak Dönem

Roma İmparatorluğu'nun düşmesinden sonra Batı kültürü bin yıllık bir durağanlık ve bocalama dönemi yaşar. İ.S. 400-1500 arası tüm bilgi alanlarında olduğu gibi matematikte de tam anlamıyla verimsiz, çorak bir dönemdir. Matematik var olduğu kadarıyla bir avuç insanın özel ilgisi çerçevesinde kalan bir etkinlik olarak sürer. Bunlardan biri, İ.S. 500 sırasında yaşayan Boethius'tur. Matematik geleneğini sürdürenler arasında iki din adamının adlarını da anmak gerekir: 775 sıralarında yaşayan Alcuin ile 1000 yıllarında yaşayan II. Sylvester adıyla Papa olan Fransız asıllı Gerbert. İtalya ve İspanya'da geniş gezilerde bulunan Gerbert, Arap matematiğini, özellikle Hint-Arap rakamlarını öğrenmek fırsatını bulmuştur.

XII, XIII ve XIV. yüzyıllarda derebeylik sisteminin gerilemesiyle Milano, Venedik, Floransa, Pisa ve Cenova gibi ticaretiyle ünlü kent-devletleri ortaya çıkar. Bu sırada matematik gelişen ticaret ve para ekonomisi gibi el sanatları ve teknolojinin de etkisini duymaya başlar. Özellikle mimarlık, askeri mühendislik, denizcilik ve astronomi alanlarındaki gelişmelerin matematik üzerinde büyük etkisi olmuştur. Matematiği etkileyen ticaret faaliyetleri arasında mal takası, gümrük, senet, tahvil, faiz, iskonto, tefecilik, kira, sigorta, ortaklık gibi işlemler sayılabilir. Bu arada Fibonacci adıyla da bilinen ünlü yazar Pisa'lı Leonardo'nun, tüm karşı koymalara karşın, Hint Arap rakam sistemini Batı dünyasında benimsetme çabası anılmadan geçilmemelidir. Leonardo'nun 1202'de yazdığı *Liber Abaci* adlı yapıtıyla Batı'da matematiğin yeni gelişme dönemini açtığı söylenebilir.

Hint-Arap Rakamları ve Aritmetikte Canlanan İlgisi

Hint-Arap rakamlarının Batı'ya geçmesini, Avrupalıların Magriplilerle giriştikleri ti-

caret ilişkileriyle, öğrenimlerini İspanya üniversitelerinde sürdüren bilginlere borçluyuz. Önceleri önyargı ve biraz da tembellik nedeniyle karşı çıkılan bu gelişme, ancak XVI. yüzyılda tüm Avrupa'ya yayılarak istenilen başarıya ulaşır.

1453'te Bizans İmparatorluğu'nun çöküşü üzerine, matematiksel çalışmalara karşı, bu arada özellikle antik döneme ait kaynaklar üzerinde uyanan büyük ilgi zamanla Orta ve Batı Avrupa'ya yayılır. Bu dönemin en etkili yazarlarından biri olan, trigonometrideki çalışmasıyla ünlü Alman matematikçisi Regiomontanus'un matematiksel çalışmalara karşı ilginin yoğunluk kazanmasında etkisi büyük olmuştur. Fibonacci'yi izleyen iki yüzyıl boyunca ilerleme giderek hızlanır: Matbaanın ortaya çıkması, Hint-Arap rakamlarının yaygınlık kazanması, matematiğe yönelik ilginin İtalyan kentlerinin sınırlarını aşp kuzeybatı ülkelerine yayılması ilerlemeyi bütünleyen olaylardır. Regiomontanus'un trigonometrisini, Luca Pacioli'nin 1494'te çıkan *Summae Aritmetica'sı* izler. Bu yapıt, aritmetik alanında yayımlanan kitaplar içinde en eskisi ve etki alanı en geniş olanıdır.

XVI. yüzyılda aritmetikteki gelişmeyle birlikte matematikte yeni ufuklara açılma da başlar. Matematiğe yönelen bilginlerin sayısı giderek artarken, yeni ders kitapları yazılır; bilim ve mekanik daha büyük ilgi toplamaya başlar; matematik, değeri kendi içinde salt entelektüel ilgiye yönelik bir konu kimliği kazanır.

Bu verimli dönemde, gününde son derece popüler olan Robert Recorde'nın *Sanatların Temeli* (Londra, 1540); Hollandalı yazar Gemma Frisius'un, kuramsal ve uygulamalı aritmetiği birleştiren ve çok beğenilen ders kitabı; Felemenk yazar Simon Stevin'in ondalık kesirleri benimsetme yolunda önemli katkı oluşturan çalışması; İskoç soylusu John Napier'in logaritmanın icadıyla sonuçlanan çalışması başlıca gelişmeleri oluşturmaktadır. Descartes'in analitik geometrisiyle Newton ve Leibniz'in kalkülüsünün olduğu 1650-1850 döneminde ise matematikçiler çabalarını daha çok cebir ile geometrinin yanı sıra modern analiz üzerinde toplarlar. Basit aritmetiğe gelince, bu alandaki çalışmaların görecel olarak zayıf kaldığı görülmektedir. Hint-Arap rakam sisteminin benimsenmesi, ondalık kesirlerin sağladığı yararın fark edilmesiyle birleşen bu gelişmeler, matematiğe âdeta tamamlanmış bir konu görünümünü kazandırmıştır.

Aritmetiğin İkili İşlevi

Aritmetiğin 1850'den günümüze değin insanlığın kültürel tarihinde ikili bir işlev sergilediği söylenebilir. Herkesçe bilinen sıradan ilk işlevi, sanat, bilim ve ticaret etkinliklerinde araç olarak kullanılmasıdır. Aritmetiğin araç olarak sağladığı büyük yarar kimi tanınmış yazarlarca (örneğin, L. Hogben, H. G. Wells, H. Mckey, vb.) çok çarpıcı bir dille anlatılmıştır. Zaten bu nokta iyi bilindiğinden üzerinde daha fazla durulmaya gerek yoktur.

Aritmetiğin daha az bilinen, ancak birçoğu yönlerden daha ince ve köklü olan ikinci işlevidir. Son yüzyılda ortaya çıkan bu işlev, matematiğin mantıksal temellerini araştırma ve bu temel üzerine kurulu yapısını belirleme yolunda aritmetiğin oynadığı katalizör rolünde kendini göstermektedir. XX. yüzyıl matematiğinin en

önemli özelliğini oluşturan bu gelişmeyi, her şeyden önce, aritmetiğin daha soyut ve daha genel bir nitelik kazanmasına, sonra cebir ile analizin köktenci “aritmetikleştirilmesi”ne borçluyuz. Bunu birkaç kelimeyle açıklamaya çalışalım.

Matematiksel Yapının Belirlenmesi

Pythagoras tüm matematiğin, 1, 2, 3, ... gibi bildiğimiz sayılardan oluştuğu inancındaydı. XVIII. ve XIX. yüzyıl matematikçileri, yüzeysel buldukları bu görüşle yetinmezlerdi elbet. Onlar, sayı kavramını sıradan tamsayıların ötesinde negatif tamsayıları, sıfırı, rasyonel, irrasyonel, gerçel ve sanal sayıları kapsayacak biçimde genişlettiler. Pythagoras’ın aklına durgunluk verecek bu açılmanın yanı sıra, XIX. yüzyılın ortalarında devrim niteliğinde bir gelişme daha oldu: Matematik daha önce görülmemiş bir imgelem (muhayyile) özgürlüğü kazandı. Devrim, 1830’larda gerçekleşen kimi gelişmelerden kaynaklanır. Örneğin, Lobachevsky’nin öncülüğünde Euclides dışı geometrinin ortaya çıkışı; Peacock, Gregory ve De Morgan’ın öncülüğüyle cebirde soyut yaklaşımın geçerlik kazanması, bu gelişmelerin başlıcalarıdır. Artık geometri gibi cebir de Euclides’in verdiği modeli izleyerek soyut hipotetik-dedüktif bir sistem niteliği kazanmalıydı. Daha sonra Hamilton (“ $a \times b$ ’nin $b \times a$ ’ya eşit olmadığı varsayıldığında ortaya ne tür bir cebir ya da aritmetik çıkar?” diye sorarak) çarpmanın değişim yasasını yadsıma yoluna gittiğinde, kapılar değişiklik arayan yeni atımlara iyice açılmış oldu. Artık matematikçiler daha soyut ve daha genel kavramlara gitme, yeni teoremler oluşturma, postulatların olası tüm sonuçlarını yoklama özgürlüğüne kavuşmuşlardı. Başlıca hedef matematiğin asıl yapısını belirlemektir.

Çağdaş Matematik

Yeni ufuklara açılma hareketi önüne geçilmez bir güç kazanmıştı. Boole, modern mantığa yol açan çalışmasıyla (*Düşünce Yasaları*, 1854) açılmaya yeni bir boyut getirir. 1870’lerde Cantor, Dedekind, Weirstrass, vb. gerçel sayılar üzerinde derinlemesine yürüttükleri çalışmalarıyla sahneye çıkarlar. 1899’da köktenci bir adım daha atılır: Hilbert’in geometriyi soyut mantıksal bir sisteme dönüştürme girişimiyle aksiyomatikleştirmenin ön plana çıkması. Hilbert’in yaklaşımında, geometrik nesnelerle sayılar salt soyut simgelere dönüşür; matematiksel araştırma bu soyut simgeler arasındaki ilişkilerin nitelik ve yapısını belirlemeye yönelik bir çalışma olur. Kaldı ki, Hilbert’ten yaklaşık on yıl önce Peano aritmetiği aksiyomatikleştirme yolunda önemli çalışmasını ortaya koymuştu. Bilindiği gibi, Peano tüm aritmetiği doğal sayılara ilişkin üç ilkel terimi içeren beş postulat üzerine kurar. Bu gelişmelerde sarıya bir kez daha Pythagoras’a döndüğünün işaretini bulmaktayız.

Peano ve Hilbert’le başlayan aksiyomatikleşme, XX. yüzyıl matematiğini biçimleyen en önemli gelişme sayılsa yeridir. Çağdaş matematik daha önceki dönemlerden iki yönden farklıdır: (1) İnceleme konusu nesnelerin içeriğinin değil, aralarındaki soyut ilişkilerin ön plana geçmesi; (2) Matematiğin bir sistem olarak dayandığı temel kavramların ısrarla irdelenmesi.

Matematiksel düşünmenin geçerliği, inceleme konusu nesnelerin niteliğinden değil, düşünmenin kendi niteliğinden kaynaklanmaktadır. Sıradan insanların, matematikte gördüğümüz üst düzeyde soyut ve genelleşici düşünme biçimine yabancı kalmaları doğaldır. Matematikğin pek çok kimseyi itmesinin başlıca nedeni de budur. Gerçekten matematik, kavranması kolay bir konu değildir. Profesör C. H. Judd'un şu sözlerini eğitimcilerin akıllarında tutmasında yarar vardır:

... çocuklar dünyaya kalıtlarında bir sayı sistemi taşıyarak gelmezler; sayı kavramı doğuştan değil, sonra kazandığımız bir kavramdır. Çocuklardan okulda insan aklının en yetkin ürünü olan sayı simge sistemini öğrenmeleri beklenir. Bu sistemi öğrenme sürecinde onlar soyut düzeyde düşünmeyi de öğrenirler. Bir kişinin ya da bir kuşağın kendi başına asla geliştiremeyeceği son derece karmaşık entelektüel bir aracı kullanmaları söz konusudur. İcadı ve yetkinliğe ulaşması, insanlıktan yüzyıllar alan kavramsal bir yöntemi kullanma becerisini çocuklar çoğunluk birkaç yıllık kısa bir sürede kazanırlar.⁽¹⁾

Matematik dilsel bir etkinliktir; asıl amacı, açık ve kesin iletişimdir. Anadilinden sonra, sayı dili, hiç kuşkusuz, insanın en büyük simgesel ürünüdür. Hatta denebilir ki, sayı dili bazı yönlerden anadilinden de daha etkili bir iletişim aracıdır. Kısacası, matematik büyük bir kültürel kalıttır. Gerçi başlangıcı henüz yeterince aydınlanmış değildir; ancak, kültürel bir hazine olarak matematik geleceğin kuşaklarına övünçle bırakabileceğimiz bir başarıdır.

[Bu metin, *Our Mathematical Heritage*
(Ed. M. L. Schaaf)'dan alınmıştır.]

(1) Charle H. Judd, *Educational Psychology*, New York, Houghton Mifflin 1939, s. 270.

EK : 2

MATEMATİĞİN GELİŞİMİ

E. T. Bell (1940)

Tarihin her döneminde tüm uygar insanlar matematiği öğrenme çabası içinde olmuştur. Sanat ve dil gibi matematiğin de tarih öncesine uzanan kökeni belirsizlik içinde kalmıştır. İlk uygarlık dönemlerindeki durumu da ancak günümüz ilkel toplulukların davranışlarına bakarak belirleyebiliyoruz. Kaynağı ne olursa olsun, gelişimini bugüne değin sürdüren matematiğin “sayı” ve “şekil” diyebileceğimiz iki ana uğraş konusu vardır. Bunlardan ilkinin aritmetik ile cebir, ikincisini geometri temsil etmektedir. XVII. yüzyılda birleşen bu iki kol giderek genişleyen matematiksel analiz ırmağını oluşturmuştur.

Beş Akıntı

Sayı ve şekil ana kolları pek çok akıntılardan beslenerek büyümüştür. Bunlardan özellikle iki tanesi, başlangıçtan günümüze değin çok etkili olmuştur. 1, 2, 3, ... doğal sayılar ile sayma işlemi matematikçileri “taneli çokluk” kavramına götürmüştür. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ gibi irrasyonel sayıları oluşturma, eğriler ya da ortak ölçüsüz doğrularla çevrili düzlem alanları (aynı şekilde yüzey ve hacimleri) belirleme çabası; bunun yanı sıra hareket, büyüme ve benzer süreklilik gösteren değişiklikleri betimleme ihtiyacı “süreklilik” kavramına yol açmıştır.

Tüm matematik tarihi bu iki kavramın üstünlük kurma savaşımı olarak yorumlanabilir. Bu çatışma, Grek felsefesinin başlangıç döneminde ön planda yer tutan eski bir savaşımın, Tek’in Çok’u altetme savaşımının bir yankısı gibi görünebilir. Ama “taneli çokluk” kavramı ile “süreklilik” kavramının, matematiğin ilerlemesinde birbirine sağladığı karşılıklı destek gözönünde tutulursa, çatışma imajının hiç değilse matematikte pek de yerinde olduğunu söyleyemeyiz.

Bazı matematikçiler sürekliliğe ilişkin problemlere yöneliktirler. Çalışmalarını geometri, analiz ve uygulamalı matematikte sürdürenler bu türden matematikçilerdir. Öte yandan tüm kollarıyla sayı teorisi, cebir ve matematiksel mantık alanlarında çalışanlar için taneli çokluk kavramı ağırlık taşır. Aslında söz konusu iki eğilim arasında kesin bir ayırım gösterilemez. Seçkin matematikçilerin, çoğunluk, iki yönde de başarılı olduğunu biliyoruz.

Matematik tarihinde sayı, şekil, taneli çokluk ve süreklilik kavramlarının yanı sıra, özellikle XVII. yüzyıldan bu yana, ağırlık kazanan bir beşinci özellikten daha söz edilebilir. Antik Çağ'da astronomi ve mühendislikle başlayan, yaşadığımız çağda biyoloji, psikoloji ve sosyolojiyle etkinliğini sürdüren bilimler, gelişmelerinde giderek daha fazla matematiksel yöntemlere dayanmak ihtiyacını duymuşlardır. Daha çok bu ihtiyacın zorlaması sonucu matematik de, 1637'den başlayarak göz kamaştırıcı bir atılım içine girmiştir. Gene, XVIII. yüzyılın ikinci yarısı ile XIX. yüzyılın ilk yarısında gerçekleşen endüstri devrimi de matematiğin gelişmesini kamçılayan önemli bir etken olmuştur. Gerek bilimsel, gerek endüstriyel çalışmaların ortaya çıkardığı problemlerin çözümü çoğu kez matematiğin olanaklarını zorlamış, yeni yöntem, model ve tekniklerin icadına yol açmıştır. Bunun bir örneğini şu sırada (1940) büyük önem taşıyan anaforsu akış oluşturmaktadır. Bu ve benzer pek çok durumlarda görüldüğü üzere salt teknik nitelikte bir güçlüğü çözme çabası çoğu kez matematikte yeni bir icat ya da ilerlemeye kapı açmıştır.

Zaman Ölçeği

Matematiğin bireysel ilerlemelerine bakmadan önce, zaman içindeki yayılımını gözden geçirmekte yarar vardır.

Topluca bakıldığında, matematiksel gelişmenin zaman içinde çizdiği eğri, biyolojik büyümenin üssel eğrisini andırmaktadır. İkisinde de başlangıçta yavaş ve belirsiz olan ilerleme çizgisi, çağımıza yaklaştıkça artan bir hızla yükselmeye başlar. Gerçi eğrinin tümüyle düzgün olduğu söylenemez; sanat gibi matematiğin de duran dönemleri olmuştur. Böyle bir dönemi Orta Çağlar'da görmekteyiz; İslam uygarlığının olumlu etkisine karşın Avrupa matematikte bir tür "barbarlık" dönemi yaşar. Oysa Archimedes'in yaşadığı İ.Ö. 3. yüzyıla karşılaştırıldığında İslam matematiği bile oldukça geri bir düzeydeydi. Ne var ki, zaman zaman yaşanan duraklama ya da gerilemelere karşın, bütünüyle bakıldığında, matematik tarihinin bir ilerlemeyi sergilediği gözden kaçmamaktadır.

Matematiğin gelişme eğrisinin, sanat ve müzik gibi diğer kültürel etkinliklerin gelişme eğrileriyle tam bir benzerlik içinde olduğunu beklemek yanlışlığına düşmemeliyiz. Heykelcilikte bir başyapıt bir kez parçalandı mı onu yeniden oluşturmak şöyle dursun, hatırlamak bile olanaksızdır. Matematikte ise büyük düşünceler, değişen modalardan etkilenmeksizin, yaşamını sürdürür, giderek daha zenginleşen matematiksel mirasta yerini alır. İnsanoğlunun bugüne değin oluşturduğu biricik evrensel dilde ifadesini bulan matematiksel düşünceler, edebiyat ve sanatın tersine, yerel ya da ulusal beğeniye bağlı değildir. Bugün birkaç bilim adamı dışında kim eski Mısırlıların iki hırsız konu almış masalına ilgi duymaktadır? Gene kaç kişi üç bin yıl önce yaşamış bir topluluk için ilginç olan bu masalı yeterince değerlendirebilecek ölçüde hiyeroglif yazısını bilmektedir. Oysa, Mısırlıların kesik kare piramidin hacmini bulmaya ilişkin kullandıkları yöntem bir mühendise, hatta az çok ölçme bilgisi olan bir okul öğrencisine gösterilse, hiçbir sıkıntıya yol açmadan hemen

anlaşılır. Matematikte elde edilen geçerli sonuçlar korunmakla kalmamakta, yeni buluş ve sonuçlara ulaşma olanağını da sağlamaktadır.

1800'den sonraki gelişmeleri az çok bilen matematikçilerin büyük çoğunluğu, daha önce geçmiş uzun dönemle karşılaştırıldığında, gelişme eğrisinin son 150 yıllık dönemde büyük bir yükseliş gösterdiğini kabul etmektedir. Matematik tarihini bu gelişimi içinde algılamak için her şeyden önce açık ve yansız bir kafa olgunluğuna ihtiyaç vardır. Yaşayan matematiğin yakın geçmişte eriştiği ileri çalışmaları yeterince bilmeyen kimselerin, matematikteki altın çağın çok gerilerde kaldığı gibi temelsiz bir görüşe bağlı kaldıklarını görmekteyiz. Bu görüşü, doğal olarak matematikçiler paylaşmamaktadır. XIX. yüzyıla başlayan son dönem, matematik ve matematik tarihini biraz bilen herkesin gözünde asıl altın çağı temsil etmektedir.

Dikkatli bir yaklaşımla, matematik tarihini değişen uzunlukta başlıca üç döneme ayırabiliriz. Bunlara “uzak”, “orta” ve “yakın” adlarını verelim. Uzak dönem başlangıçtan 1637'ye kadar; orta dönem 1638'den 1800'e kadar, yakın dönem ise 1801'den (bazıları 1801 değil, 1821'i son dönemin başlangıcı sayar) günümüze değin süren zaman dilimlerini kapsamaktadır. Bugün uzman matematikçilerin bildikleri matematik işte bu son dönemde oluşan matematiktir.

Bu tarihlerin dayandığı kesin nedenler vardır. Geometri, Descartes'ın yapıtıyla analitik niteliğini 1637'de kazanır. Yaklaşık elli yıl sonra, Galileo ile Newton'un dinamiğiyle birlikte, Newton ile Leibniz'in ortaya koydukları kalkülüs tüm yaratıcı matematikçiler için ortak bir miras oluşturur. Bu ilerlemenin çapını pek az kimse Leibniz'den daha iyi değerlendirebilirdi. Söylentiye göre Leibniz, Newton'un sağladığı gelişmenin daha önceki tarih boyunca sağlanan tüm gelişmelerden daha üstün olduğunu söylemiştir.

XVIII. yüzyıl matematikçileri, Descartes, Newton ve Leibniz yöntemini, o zaman var olan matematiğin her dalında kullanmaya koyulurlar. Bu yüzyılın belki de en belirgin özelliği araştırmanın soyut ve genel bir karakter almasıdır. Soyut düşünme yönteminin sağladığı gücün tam anlamıyla kavranması XX. yüzyılı beklemişse de, daha o zaman Lagrange'ın cebirsel denklemler üzerindeki çalışmasıyla analitik mekanikte bu güç kendini yansıtmaktadır. Lagrange, mekanikte doğrudan, evrensel bir yöntemle fiziksel bilimlerde bugün bile gücünü koruyan bir gelişmenin öncüsüdür. Ondan önce böyle bir çalışmaya rastlamamaktayız.

1801 yılına gelince, bu, Gauss'ın yapıtının yayımlandığı, birbirini izleyen bir sürü icatlarla dolu yeni bir dönemin başlama tarihidir. Kimilerinin alternatif olarak gösterdikleri 1821 yılı ise, Cauchy'nin diferansiyel ve integral hesapları aydınlatma yolunda başlattığı başarılı çalışmanın ortaya çıktığı yıldır.

XIX. yüzyılda giderek hız kazanan büyük atılımlardan birini geometri alanında bulmaktayız. Bu yüzyılda yetişen şu beş kişiden her birinin (Lobachevsky, Bolyai, Plücker, Riemann, Lie) ortaya koyduğu geometri, eski Yunanlıların en etkin oldukları üç yüzyıllık sürede oluşturdukları tüm geometriye denk, hatta belki de daha fazla olmuştur. XIX. yüzyıl matematiğinin, verim yönünden, daha önceki dönemlerin birikiminden beş kat daha yüksek olduğu dayanaktan yoksun bir sav değildir. Bu yalnızca nicelik yönünden değil, nitelik yönünden de geçerlidir. Kuşkusuz bu

başarıda, orta dönemde geliştirilmiş yöntemlerin payını görmezlikten gelmemek gerekir.

Başlangıç dönemi olarak uzak dönemin kendine özgü birtakım sıkıntı ve zorlukları vardı elbet. Ne var ki, çoğu kez yapıldığı gibi, klasik çağın başarısını olduğundan fazla büyütmekten vazgeçmeliyiz. Unutmamak gerekir ki, yakın zamanlarda kaydedilen ilerlemeler, yöntem ve kuram yönünden 1800 öncesi matematiğinin geçerli tüm sonuçlarını, özel birer hal olarak kapsamaktadır. Kuşkusuz matematikle uğraşan hiç kimse, bizim çağımızla her şeyin sonuna ulaştığımız savında bulunmaz. Lagrange kendi dönemini öyle saymıştı; ama onu hemen nasıl büyük bir patlamanın izlediğini hepimiz biliyoruz. Ancak bu, bizden önce gelenlerin birtakım kesin sonuçlara ulaştığı gerçeğini değiştirmez. Onların sınırlı kalan yöntemleri daha ileri sonuçlara ulaşmalarına elvermiyordu. Olasıdır ki, bizim daha güçlü olan yöntemlerimizin de yerini ilerde çok daha güçlü yeni yöntemler alacaktır.

Yedi Dönem

Daha alışlagelmiş bir sınıflamaya göre, matematik tarihi yedi döneme ayrılır:

- (1) Başlangıçtan Babil ve Mısır'a gelinceye dek geçen dönem;
- (2) Antik Yunan dönemi: İ.Ö. 600-300;
- (3) Hint, Çin, İslam, Yahudi uygarlıklarını kapsayan dönem;
- (4) Avrupa'da Rönesans ve Reformasyon hareketlerini kapsayan XV. ve XVI. yüzyıllar;
- (5) XVII. ve XVIII. yüzyıllar;
- (6) XIX. yüzyıl;
- (7) XX. yüzyıl.

Bu ayırım, kalın çizgilerle Batı uygarlığının gelişmesiyle, bu gelişmenin Yakın-doğu'ya olan borcunu yansıtmaktadır. ...

Gerçi üçüncü dönemde Doğuluların katkısı çok daha önemlidir, ancak bugün bildiğimiz matematik büyük ölçüde Batı uygarlığının bir ürünüdür. Örneğin, eski Çin'deki gelişmeler ya kendi içinde kapalı kalmış ya da etkisi ancak ticaret aracılığıyla bize ulaşmıştır. Çin'de oluşan başlıca yöntemler, öyle görünüyor ki, Batı'da yeniden ortaya çıkıncaya dek gizli tutulmuştur. Örneğin, denklemlerin sayısal çözümü için Horner'in oluşturduğu yöntem, büyük bir olasılıkla, çok daha önce Çin'de bilinmekteydi.

Avrupa matematiği, birtakım ülkelerde gördüğümüz genel kültüre paralel bir yol izlemiştir. Bir kez pratik devlet işlerine yönelik Roma uygarlığının matematiğe bir katkısı olmamıştır. İtalya sanatta parlak dönemine girdiğinde, cebirde de ileri gitmiştir. İngiltere'de Elizabeth I dönemi kapanmaya yüz tuttuğunda matematikte üstünlük İsviçre ile Fransa'ya geçmiştir. Kimi kez, politik güç yönünden önemsiz ülkelerde de bireysel başarılarla rastlanır. Bunun bir örneğini XIX. yüzyılın ilk yarısı

sında Euclides-dışı geometrideki başarısıyla Macaristan vermiştir. Ulusal düzeyde beklenmedik büyük sarsıntı ya da atılımlar da bazen matematiğin gelişmesini kamçılamıştır. Bunun örneklerini 1789 Devrimi'nden sonra Fransa'da, 1848 Ayaklanması'ndan sonra Almanya'da görmekteyiz. Bunun tersi de söylenebilir. Nitekim, 1914-18 dünya savaşından sonra Avrupa matematiği bir duraklama dönemi yaşamıştır. Aynı cansızlığı Rusya, Almanya ve İtalya'daki totaliter sistemlerde de görmekteyiz. Bu olayların etkisini uzaktan yaşayan Amerika Birleşik Devletleri'nde ise 1890'larda başlayan matematiksel gelişme büyük bir atılım içine girerek bu ülkeyi ön plana çıkarır.

Matematiğin parlak dönemleriyle kültürün diğer kollarında yaşanan parlak dönemler her zaman koşut gitmemektedir. Bu tutarsızlığa birkaç örnek gösterilebilir. Bunlardan matematiğin gelişmesi yönünden en önemlisi Orta Çağlar'dadır. XII., kimine göre XIII. yüzyılda Gothic mimarlık ile Hristiyan yaşam düzeni en üst düzeyde iken, Avrupa matematiği emekleme düzeyinde idi. ...

Yukarda yedi döneme ayırdığımız matematiğin gelişme tarihinde en önemli saydığımız üç atılıma değinmekle yetineceğiz.

Bunlardan etkisi en sürekli olanı antik Yunanlıların ortaya koydukları dedüktif düşünme yöntemidir. İkincisi, Rönesans döneminde İtalyan ve Fransız matematikçilerinin geliştirdikleri simgesel cebirdir. Gerçi Hintlilerin daha önce (İ.S. 7. ile 12. yüzyıllar arasında) nerdeyse simgesel cebire ulaştıkları söylenebilir; ama İslam matematikçilerinin tam tersine sözlü cebire döndüklerini görmekteyiz.

Üçüncü büyük atılıma daha önce değinmiştik; ama bir kez daha vurgulamada yarar var. Bu atılım XVII. yüzyılda sayı, şekil ve süreklilik diye belirlenen üç ana kolun birleşmesinde ortaya çıkan kalkülüs ve matematiksel analizin yanı sıra, geometride gerçekleşen dönüşüm ve bunun yol açtığı modern uygulamalı matematik için gerekli yüksek uzayların icadı gibi çalışmalarda kendini gösterir. Öncüleri arasında Fransız, İngiliz ve Almanları bulmaktayız.

Bu çalışmaların simgelediği beşinci dönem, genellikle modern kuramsal matematiğin kaynağı sayılır. Modern bilimin başlangıcı da bu dönemdedir. Galileo ile Newton'un yaklaşımlarında çarpıcı örneklerini bulduğumuz fizik ve astronomideki matematiksel çözümlemeler tüm bilimsel çalışmalarda vazgeçilmez bir yöntem etkinliği kazanır. Öyle ki, XIX. yüzyıla geldiğimizde, matematiğin egemenliği dışında kalan bir bilimden artık söz edilmez olur. XX. yüzyıl matematiğini XIX. yüzyıl matematiğinden ayıran önemli bir özellik varsa, o da, belirgin olarak artan soyutlaşma ve bunun yol açtığı genellemedir, denebilir. Ayrıca, matematiksel teorilerin morfoloji ve anatomisi, üzerinde ilginin yoğunlaştığı konu olmuş; eleştirel anlayış derinlik kazanırken, klasik dedüktif düşünmenin yetersizliği su yüzüne çıkmıştır. Bu yetersizlik, insanoğlunun açık düşünme yolunda yedi bin yıllık uğraşının sonuçsuz kaldığı demek değildir. XX. yüzyılın ilk yarısına özgü eleştirel değerlendirme önceki dönemlerden gelen matematiği büyük ölçüde etkilemekle kalmaz, epistemoloji yönünden de son derece ilginç yeni çalışmalara yol açar. Bu değerlendirmeler karşısında matematiğin Evrensel Doğruluğu temsil ettiği inancının da tümüyle yıkıldığı- nı görmekteyiz.

Matematik tarihinin yedi döneme ayrılması, geleneksel bir yaklaşıma dayanmakta, özellikle uygarlık dediğimiz ışığın yanıp-sönme süreci gözönünde tutulduğunda, aydınlatıcı bir belirleme sağlamaktadır. Ne var ki, daha önce “uzak”, “orta” ve “yakın” diye yaptığımız üç dönem ayırımının, alışılmışın dışında bir yaklaşım olmakla birlikte, hem matematiğin gelişme evrelerini daha doğru yansıttığı, hem de matematiğin kendine özgü “kalıtsal” canlılığını daha çarpıcı biçimde açığa vurduğu söylenebilir.

Bazı Genel Özellikler

Yedi dönemin her birinde matematiksel düşünme, önce olgunluğa doğru kesin bir çıkış, ardından bir gerileme sergilemiştir. Yaratıcı yeni düşüncelerle aşılanmaksızın hiçbir alanda ilerleme olamaz. Antik Yunan döneminde sentetik metrik geometri bir yöntem olarak insan kafasının o günkü olanaklarının elverdiği ölçüde ilerlemişti. XVII. yüzyıla gelinceye dek süren duraklama dönemi, analitik geometriyi oluşturan yeni düşüncelerle kırılmıştır. Geometri, en başta analitik, projektif ve diferansiyel geometrilerin oluşmasıyla genişir, yeni bir kimlik kazanır.

Matematikte izlenen bu canlanma ve ilerleme çizgisi diğer bilimler için de geçerlidir. Euclides ve Apollonius yöntemleriyle yetinen matematikçiler için çeşitli geometrilerin getirdiği karmaşık inceliklerin bilimlerdeki uygulamasını kavramak olanaksızdır. Salt kuramsal matematikte ise yüzyılımızda oluşan soyut uzaylar ve Riemann-dışı geometriler XIX. yüzyıl geometrisini büyük ölçüde geride bırakmıştır. Yüzyılımızın ilk kırk yılı içinde, daha önceki yüzyılın başarılarıyla göz kamaştıran geometrik çalışmaları önemli ölçüde arkaik ve köhne bir görünüm sergiler. Bu, özellikle klasik diferansiyel geometriyle sentetik projektif geometri için söz konusuydu. Matematikle ilerleme sürecekse, yüzyılımız geometrilerinin de yerlerini yeni oluşacak geometrilere bırakması, ya da giderek daha incelen soyutlaşmada yerini alması kaçınılmazdır. Her alanda olduğu gibi matematikte de kesinlik kazanma boş bir umuttur; olduğu kadarıyla ancak matematiğin çoraklaştığı yerde kendini gösterir.

Bu dönem kapanmaya yüz tuttuğunda, onu izleyen dönemin önemsiz sayıp bir yana ittiği, ya da daha güçlü yöntemler kapsamına alarak bir tür egzersiz olarak korduğu kimi zor konular üzerinde gereğinden fazla durma ve ayrıntılara boğulma eğilimi vardır. Örneğin, analitik geometrilerin ilk dönemlerinde büyük bir coşku ve titizlikle incelenen birtakım özel eğriler daha sonraları yalnızca ders kitaplarında alıştırma problemleri olarak yer alır. Matematik mezarlıklarında belki de en geniş yeri, sanki Lagrange, Hamilton ve Jacobi hiç yaşamamış gibi, mekanikte yapay olarak sürdürülen birtakım çetin sorunlara ilişkin çalışmalar tutmaktadır.

Gene günümüze yaklaştıkça matematiğin yeni gelişme alanları, yüzeysel kalan birtakım teknik inceliklerden sıyrılarak asıl özleriyle gelecek kuşakların araştırmasına konu olmaktadır. Azalan karşılıklar yasası ekonomide olduğu gibi, matematikte de geçerlidir: Yöntemde köktenci yeni gelişmeler sağlanmadıkça, gelirin gideri dengeleyeceği beklenemez. Bunun göze batan bir örneğini geçen yüzyılın başta gelen

başarılarından birini oluşturan cebirsel değişmezler (invariants) teorisinde, bir diğer örneğini de gene geçen yüzyıl ortaya çıkan “çoğalan periyodik fonksiyonlar” teorisinde bulmaktayız. Bunlardan ilki, dolaylı olarak genel relativite teorisinin kuruluşunda etkili olmuş; ikincisi ise, analiz ve cebirsel geometri alanlarında pek çok çalışmaya yol açmıştır.

Gelişmeye topluca bakıldığında, son bir olaya daha değinebiliriz: Başlangıçta matematiksel disiplinler arasında keskin ayrımlar yoktu. Araştırmaların ilerlemesiyle birlikte, ana gövdeye bağlı dallar özerk kimlik kazanmaya, bağımsız birer çalışma alanına dönüşmeye yüz tutar. Ancak bunlardan bir bölümü daha sonraki gelişmeler sürecinde ana gövdeyle yeniden birleşip kaynaşma yoluna girer. Örneğin, arazi ölçme, astronomi ve geometriden kaynaklanan trigonometri, özerk kimliğini, daha sonra genelleştirilmiş geometriyi içeren analizle birleşerek, yitirir.

Bu ayrılma ve yeniden kaynaşma sürecinin pek çok kez yinelenmesi bazı matematikçilerde, tüm çalışmalarını kapsayan birleşik bir matematik disiplini oluşturma umudunu yaratmıştır. Yüzyılımızın başlangıcında bir süre bu birleşik disiplinin, matematiksel mantıkla gerçekleşme yolunda olduğu inancı doğmuştur. Ne var ki, hiçbir kalıpta tutulamayacak kadar atılgımlı ve yaratıcı olan matematik, bir kez daha, özgür açılma yoluna girmekte gecikmemiştir.

Matematikte Motivasyon

Matematığın gelişme tarihine baktığımızda, ekonomik etkenlerin bir ölçüde de olsa varlığı gözden kaçmamaktadır. Birinci Dünya Savaşı sonrasında kimi çevrelerin bilinen siyasal nedenlerle matematikteki, özellikle uygulamalı kollarında, tüm önemli atılımların ekonomik motiflerden kaynaklandığı tezini işlediklerini biliyoruz.

Matematığın gelişmesinde entelektüel ilgi ve tutkuyu bir yana itip salt pratik yarar motifini vurgulamak, gerçeği hiç değilse yarı yarıya çarpıtmak demektir. Matematığın gelişmesinde ekonomik motiflerin salt entelektüel ilgilere daha etkili olmadığını iyi bir matematik öğrenimi görmüş herkes bilir. Bu, yalnız ekonomik yönden yararsız görülen kuramsal konularda değil, ticaret, sigorta ve teknoloji gibi uygulamalı alanlarda da böyledir. Pek çok örnek gösterilebilir, ama biz burada biri sayılar teorisinden, ikisi geometriden, biri de cebirden olmak üzere dört örnek vermekle yetineceğiz.

Poligonal sayıların genelleştirilerek sigorta ve istatistikte uygulamasına geçilmesinden iki bin yıl önce bu sayılar, ilerde pratik yaşam bakımından büyük yarar sağlayan uygulamaları asla bilmeksizin, matematikçilerin yoğun ilgisine konu olmuştur. Pythagorasçılar (İ.Ö. VI. yüzyıl) ve onları izleyen diğer matematikçiler için bu sayıların gizemli özellikleri vardı. Onların yaklaşımında bir tür dinsel bir duygu egemendi. Sayı gizemliliğinin, değişik bir biçim altında, Platon’un diyaloglarında da sürdüğünü görmekteyiz. Platon’un İdealar öğretisi, Pythagorasçıların oldukça ham olan sayı kavramını üst düzeyde işlenmiş biçimiyle içermektedir. Bunlardan ne birinin ne de diğerinin bildiğimiz sigorta ve istatistikle bir benzerliği yoktur.

Sonra gelen matematikçiler, entelektüel yönden son derece ilginç buldukları bu

sayıları yakından incelemeye koyulurlar. XVII. yüzyılda Pascal'la birlikte olasılık teorisinin kurucusu olan, dolayısıyla sigortanın babası sayılan Fermat, yıllarca poligonal sayıları salt merak konusu olarak inceler. Başlangıçta ne onun ne de Pascal'ın aklından olasılık kavramını matematiksel tanımlama geçmemiştir.

Sık sık verilen ikinci örneğimiz, koni kesitlerine ilişkindir. Bu konu balistik ve astronomiye, o yoldan da denizciliğe uygulanmasından bin yedi yüz yıl önce, Yunanlılar tarafından tüm yanlarıyla incelenmişti. Descartes'ın analitik geometrisi ile Newton'un dinamiği bilinseydi, bunlara dayanılarak bu uygulamalar Yunan geometrisi olmaksızın da gerçekleştirilebilirdi. Ne var ki, Yunanlıların koni kesitleri üzerindeki bulguları sayesinde doğru yol önce bulunmuştu. Burada da itici gücün entelektüel ilgi olduğunu görüyoruz.

Üçüncü örneğimiz çok boyutlu uzaya ilişkindir. Analitik geometride, düzlemde bir eğri iki değişkenli bir denklemle, düzlem ise üç değişkenli bir denklemle temsil edilir. 1843'te Cayley, geometri dilini üçten fazla değişkenli denklemler sistemine dönüştürerek sonlu herhangi bir sayıda boyutları konu alan geometriyi oluşturur. Bu geometriye bildiğimiz analitik geometrinin formel cebiri yol açar; termodinamik, istatistiksel mekanik ve bilimin diğer alanlarındaki (uygulamalı fiziksel-kimyada olduğu gibi, hem teorik, hem endüstriyel statikteki) kullanımından önce salt entelektüel ilgi nedeniyle işlenerek kurulur. Sırası gelmişken bir noktaya daha değinelim: İstatistiksel mekanikte bir yöntem, bir aritmetik teoriden verilen bir pozitif tamsayının kaç şekilde pozitif tamsayıların toplamı olduğu sorusunu konu alan "partition" teorisinden yararlanma yoluna gider. XVIII. yüzyılda Euler tarafından oluşturulan bu teoriye, 150 yılı aşkın bir süre boyunca matematikçiler, hiçbir yara-ra yönelik olmayan sayılar teorisi alanında bir oyuncak gözüyle bakarlar.

Dördüncü örneğimiz, 1910'dan bu yana gelişme gösteren soyut cebire ilişkindir. Modern cebirle uğraşan herhangi bir matematikçi, uğraş konusunun özünde hiçbir uygulama değeri olmayan yararsız bir problemten, Fermat'ın XVII. yüzyılda ortaya koyduğu ve "Fermat'ın Son Teoremi" diye bilinen bir problemten büyük ölçüde kaynaklandığını bilir. Bugüne değin ispatı verilemeyen bu teoreme göre, x , y , z gibi sıfırdan farklı hiçbir üç tamsayı için (n ikiden büyük olduğunda) $x^n + y^n = z^n$ denklemi doğru değildir. Soyut cebirin bir bölümününün, fiziksel bilimlerde, özellikle çağdaş kuantum mekaniğinde, uygulama alanı bulması güç olmadı. Oysa, geliştirildiğinde bu cebirin bilimsel yönden yarar sağlayacağı kimsenin aklından geçmemiştir. Nitekim bu cebirin kurucularından hiçbiri ne teoriyi bilimde uygulamaya koyabilecek bilgi ve beceriye sahipti; ne de böyle bir uygulamaya ilerde olanak tanıyabilecek durumdaydı. 1925 yılına gelinceye dek hiçbir fizikçi kuantum fiziğinin 1926 ve daha sonra dayanacağı matematiksel yöntemle ilişkin fazla bir şey bilmiyordu.

Çağların Birikimi

Matematiğin ya da herhangi bir bilimin gelişmesini izlerken unutulmaması gereken bir nokta vardır: Tarihin karanlığında gömülü kalmış bir çalışmanın pekâlâ

canlı olabileceği. Her dönemden, şimdi bizde sadece antika ilgisi uyandıran bir yığın ayrıntılı çalışma kaldığı gösterilebilir. Uzak döneme ait olanlar artık matematik tarihine özel ilgi gösterenler dışında kimseyi ilgilendirmemektedir. Orta ve yakın (XVII. yüzyılın ilk yarısıyla başlayan) dönemlerde ortaya konan sayısız teoremler ile üst düzeyde oluşturulmuş kimi teoriler, meslekten uzmanların bile el atmadıkları çalışmalar arasında, bilimsel dergilerde ve bilim kurullarının özel tutanaklarında gömülü yatmaktadır. Dahası, bunların varlığından bile haberi olanların sayısı çok azdır. Binlerce araştırmacının emek ürünü bu tozlu sayfalarda unutulmuştur. Peki geçmişte kalan bu çalışmaları hangi anlamda var ya da yaşıyor sayacağız? Onları yaratanların emeğinin boşa gitmediğini söylemek ne denli gerçeğe uygun olur?

Bu umut kırıcı sorulara verilecek cevapların ne olduğu, matematikte çalışan herkes için bellidir. Dağınık kalan tüm ayrıntılardan sonunda yeni bir kavrama yönelik genel bir yöntem belirmektedir. Bize kalan, yaşayan işte bu kavram ya da yöntemdir. Büyük emekle ortaya konmuş ayrıntılar, oluşturulan genel yöntemle, düzenli ve kolayca işlenebilmektedir. Matematikçi için yeni kavramın, karmaşık ayrıntılardan daha önemli olduğu kimsenin gözünden kaçmayacak kadar açıktır. Ne var ki, insan kafası çoğu kez amaca en kısa yoldan değil, dolaşık yollardan geçerek ulaşmaya koyulur. Bilimsel araştırmada “en az eylem ilkesi”ne yer yoktur. Gerçekten, matematikte rakiplerinden daha şanslı birinin, dolambaçlı yollar izleme eğilimine karşın, rastlantı sonucu ulaştığı hedef, çoğu kez tüm çabalara karşın, gözden uzak kalır. Basitlik ve düpedüz olma genellikle en son elde edilebilen değerlerdir.

Bu değiştiğimiz noktalara örnek vermek için bir kez daha cebirsel “invariant”lara başvurabiliriz. Bu teori, XIX. yüzyılda ilk geliştirildiğinde, yüzlerce hevesli “invariant” ve “covariant”ların ayrıntılı hesaplarına koyuldular. Bu çalışmalar tümüyle geçmişte gömülü kaldı. Ama işin karmaşıklığı sonra gelen matematikçileri cebirde basitliğe yöneltir: Görünürde dağınık olan bir yığın bulgunun kimi basit temel ilkeler ışığında anlam kazandığı görüldü. Ayrıntılar üzerinde o yoğun hesaplamaların yarattığı ihtiyaç olmasaydı, bu ilkeleri oluşturmak şöyle dursun düşünmek yoluna gidilebilir miydi, bilinmez. Tarih söz konusu ilkelerin ortaya çıkış koşullarının öyle olduğunu göstermektedir.

Uzun liste oluşturan “covariant” ve “invariant”ların tarihte gömülü çalışmalar olduğunu söylerken, bunların sürgit yararsız ya da ölü kalacağını ileri sürdüğümüz sanılmasın. Her sosyal etkinlik gibi matematiğin de geleceğini öndemeye olanak yoktur. Ne var ki, sonraları bulunan yöntem ve ilkelerle gerektiğinde aynı sonuçlara daha kolay ve kestirmeden ulaşabiliriz. Kaldı ki, o türden çalışmaların sayısını daha fazla kabartmanın zaman ve emek israfından ileri bir değeri olduğu söylenemez.

Tüm o çalışmaların bize kalan bir sonucu “invariant” kavramıdır. Gördüğümüz kadarıyla bu kavram daha bir süre hem salt kuramsal, hem de uygulamalı matematikte aydınlatıcı işlevini sürdürecektir. ... Önemli olan bir dönemin kendisi değil, bize ne bıraktığıdır. Dahası var: Bir dönem tarihte bize uzak düştükçe, o dö-

nemi oluşturanların, umutları ve korkularıyla, kıskançlık ve birbirlerini çekemezlikleriyle çalışmalarının kalıcı ve nesnel öğelerini karartması olanaksızlaşır. Matematikte erişilen büyük sonuçların bir bölümü anonimdir. 1, 2, 3, ... sayı dizisini kimin ilk tasarladığını, ... ya da, kimin ilk kez “üç” kavramıyla üç keçi, üç öküz, üç tapınak, üç insan, üç tanrı gibi çoklukların ortak özelliğini belirlediğini hiçbir zaman bilemeyeceğiz.

[Bu metin, *The Development of Mathematics* (E. T. Bell)’den alınmıştır.]

EK : 3

MATEMATİKSEL DOĞRULUĞUN NİTELİĞİ

Carl G. Hempel (1945)

Sorun

Bilimsel araştırmada yeterli kanıtı dayanmaksızın hiçbir önerme ve teorinin, doğru sayılmaması temel bir ilkedir. Doğal ve sosyal bilimleri kapsayan empirik bilimlerde, bir teorinin kabulünü sağlayan kanıt, teoriye dayanan ön-deyilerin, deney ya da sistematik gözlemlerle elde edilen olgusal verilere uygun düşmesidir. Peki, matematiksel doğruluk neye dayanmaktadır? Bu yazıda tartışmayı önerdiğim soru budur. “Matematik” terimiyle, aritmetik, cebir ve analizi kapsayan, ama geometriyi dışında tutan bir çalışmayı kastediyorum. Böyle bir ayırıma gitmenin nedeni ileride açıklık kazanacaktır.

Matematiksel Önermeler Apaçık Doğrular mıdır?

Sorunuza ilişkin çeşitli görüşlerden birine göre, empirik bilimlerin hipotezlerinin tersine, matematiksel önermeler ne olgusal kanıt, ne de başka bir temellendirme gerektirir; bunlar, “apaçık” doğrulardır. Doğruluğu apaçıklık duygusuna indirgeyen bu görüş, ne var ki, birtakım güçlüklerle yol açmaktadır. Her şeyden önce, matematikteki teoremlerin birçoğu öylesine güçtür ki, apaçık olmaları şöyle dursun, bunları bir şekilde temellendirmek ilgili uzmanlar için bile kolay değildir. Sonra, matematikte ulaşılan en ilginç sonuçlardan pek çoğunun (özellikle soyut kümeler teorisiyle topoloji gibi alanlarda) kökleri derinlerde yatan sezgilerimiz ve yerleşik apaçıklık duygumuzla ters düştüğü iyi bilinen bir olaydır. Kaldı ki, içerikleri yönünden oldukça basit, ama bugüne değin ispatlanamayan Goldbach ve Fermat teoremlerinin de gösterdiği gibi, matematiksel doğrulukların tümüne apaçık diyemeyiz. Son olarak, apaçıklık savını matematiğin tüm önermeleri için değil, yalnızca bu önermelerin çıkarsandığı temel postulatlar için doğru saysak bile, yargımızın öznel olmaktan ileri geçmediği gerçeğini görmek zorundayız. Gerçekten, neyin apaçık olduğu, neyin olmadığı kişiden kişiye değişen bir değerlendirmedir; öyleyse, apaçıklık matematiksel önermelerin doğruluğunu belirlemede nesnel bir ölçüt olarak alınmaz.

Matematik En Genel Empirik Bilim midir?

John S. Mill'in ileri sürdüğü başka bir görüşe göre, matematik, diğer empirik bilimlerden (astronomi, fizik, kimya, vb.) başlıca iki yönden farklı empirik nitelikte bir bilimdir: Matematiğin konusu, diğer bilimlerle karşılaştırıldığında daha geneldir; matematiğin önermeleri, en sağlam bir şekilde kanıtlanmış astronomi ve fizik önermelerinden çok daha fazla sınanmış ve doğrulanmıştır. Gerçekten, bu görüşe göre, matematiksel ilkeler insanların geçmiş deneyimleriyle öylesine sağlam doğrulanmıştır ki, bunların bilimin diğer dallarına ait iyi doğrulanmış hipotezlerden nitelik yönünden farklı olduğu gibi yanlış bir düşünce böyle oluşmuştur. Öyle ki, diğer teorileri "yüksek olasılıklı" ya da "iyi doğrulanmış" sayarken matematik ilkelere "kesin doğrular" gözüyle bakmaya başlamışız.

Ne var ki, bu görüş de ciddi itirazlara uğramıştır. Empirik karakterde bir hipotezden (örneğin, Newton'un çekim yasasından), belli koşullar altında birtakım gözlemlenebilir olguların oluşacağını öndeyebiliriz: Öndeyilene olguların gözlemlenmesi hipotezi doğrulayıcı, gözlemlenmemesi yanlışlayıcı kanıt oluşturur. Bu, özellikle, empirik hipotezlerin kuramsal olarak yanlışlanabilir nitelikte olduğu demektir. Başka bir deyişle, biz, hipotezin, elde edildiğinde ne tür kanıtlarla yanlışlanacağını biliriz. Şimdi bu açıklamanın ışığında aritmetikten basit bir "hipoteze" bakalım: $3 + 2 = 5$. Eğer bu geçmiş deneyimlerimize dayalı bir genelleme ise, o zaman, ne tür kanıtların elde edildiğinde hipotezi yanlışlayacağımızı söyleyebilmemiz gerekir. Söz konusu genellemeyi çürütücü bir kanıt varsa, o da ancak şu türden bir gözlem olabilir: Bir lam üzerine önce üç, ardından iki mikrop koyuyoruz; sonra bunların birlikte beş mikrop olup olmadığına bakıyoruz. Diyelim ki, saydığımızda beş değil altı mikrop çıkıyor. Şimdi buna bakıp genellenenin yanlışlandığını söyleyebilir miyiz? Elbette söyleyemeyiz. Olsa olsa yanlış saydığımızı, ya da aradan geçen süre içinde, mikroplardan birinin bölünerek ikileştiğini düşünürüz. Ama hiçbir koşul altında, örnek aldığımız aritmetik önermenin bu tür bir olguyla yanlışlandığını düşünmeyiz. Çünkü söz konusu önerme, mikropların davranışına ilişkin bir sav ortaya koymamakta, yalnızca $3 + 2$ nesneden oluşan bir kümenin, aynı zamanda, 5 nesneden oluştuğunu dile getirmektedir. Bunun böyle olması, " $3 + 2$ " ile " 5 "in aynı sayıyı simgelemelerindendir. Başka bir deyişle, iki simge aynı anlama gelmektedir; çünkü, " 2 ", " 3 ", " 5 " ve " $+$ " öyle tanımlanmış, ya da üstü örtük yorumlanmıştır ki, anlamları gereği iki simgenin özdeş olması kaçınılmazdır.

Matematiksel Önermelerin Analitik Karakteri

Öyleyse, $3 + 2 = 5$ önermesi, "altmış yaşında olan hiç kimse kırk beş yaşında değildir," türünden bir doğruluktur. Önermelerin ikisi de içlerinde yer alan sözcüklerin anlamı ya da tanımı gereği doğrudur. Bu tür önermelerin paylaştıkları belli bazı özellikler vardır. Doğrulanmaları olgusal kanıt bulmayı gerektirmez; içlerinde yer alan sözcüklere verilen anlamları çözümlemek bu amaç için yeterlidir. Mantık dilinde bu tür önermelere analitik ya da *a priori* doğru önermeler denir. Bu, onların

doğruluklarının her türlü gözlemsel ya da deneysel kanıtlardan mantık olarak bağımsız olduğu demektir. Sentetik türden olan ve doğrulukları ancak *a posteriori* belirlenebilen empirik bilimlerin önermeleri, yeni olgusal kanıtlarla yanlışlanabilir olmaktan kurtulamaz; oysa, analitik bir önermenin doğruluğu kesindir, yanlışlanma olanağı yoktur. Ne var ki, analitik önermelere özgü bu “kuramsal kesinlik” yüksek bir fiyatla sağlanıyor: Analitik her önerme boştur, olgusal bilgi içeriği yoktur. Örneğin, altmışlık kişinin kırk beş yaşında olmadığı önermesinin herhangi bir olgusal kanıtlarla ters düşmesi olanaksızdır; çünkü, öyle bir önerme olgusal bir sav dile getirmemekte, doğruluğu biçimsel kalmaktadır. İşte bu nedenle o tür bir önerme, olgusal kanıtlara başvurulmaksızın doğrulanabilir.

Matematiksel önermelerin analitik özelliğine ilişkin bu görüşü bir örneklerle göstermek için, matematikten (daha doğrusu mantıktan) şu genellemeyi alalım: $a = b$ ve $b = c$ ise, $a = c$. “Özdeşliğin geçişliliği” denen bu savın dayanağı nedir? Genellenmenin doğruluğu olgusal mıdır? Öyleyse, genellemeyi en azından kuramsal olarak olgusal kanıtlarla yanlışlama olasılığı var demektir. Diyelim ki, a , b , c yeşil rengin değişik tonlarını simgelemekte ve sonuç şöyle görünmektedir: $a = b$ ve $b = c$, ama $a \neq c$. Beklentimizle ters düşen böyle bir sonuç kimi gerçek durumlarda ortaya çıkan bir olaydır. Şimdi bu sonuca bakıp özdeşliğin geçişliliği ilişkisini (ya da o ilişkiyi dile getiren önermeyi) yanlışlanmış sayabilir miyiz? Sayamayız elbette. Çünkü, $a \neq c$ ise, a 'nın b 'ye ve b 'nin c 'ye eşit olması olanaksızdır. a ile b , ya da b ile c arasında belirleyemeyeceğimiz küçüklikte de olsa bir fark olmalıdır. Özdeşliğin, tanım gereği ve bağlı olduğu temel postulatlar altında geçişli bir ilişki olması, olgusal olarak yanlışlanmaya, ya da olgusal olarak yoklanma gereğine olanak vermez. Bu nedenle söz konusu ilke *a priori* doğrudur.

Aksiyomatik Bir Sistem Olarak Matematik

Buraya kadar verdiğimiz açıklamalarda, matematiksel doğruluğun ne apaçıklık özelliğine, ne de olgusal bir temele dayanmadığını, kavramların anlamlarını belirleyen tanımlara bağlı olduğunu belirtmeye çalıştık. Matematik önermelerin tanım gereği doğru olduğu savını, yanlış anlamlara yol açmamak için daha dikkatli bir dille ortaya koymak gerekir.

Gerçekten, matematiksel bir teori yalnızca tanımlardan kalkarak oluşturulamaz. Tanımlardan da önemlisi, ispatlanmaksızın doğru sayılan postulat ya da aksiyom denen, teorinin temel önermeleridir. Bu önermeler gene teori çerçevesinde tanımları verilmeyen birtakım ilkel terim ya da kavramlar kullanılarak formüle edilir; öyle ki, kimi kez postulat ya da aksiyomların, ilkel terimlere ait üstü-örtük tanımlar olduğu savı bile ileri sürülür. Ancak, aksiyom ya da postulatların bir tür tanım oluşturduğu görüşü yanıltıcıdır. Gerçi postulatların bir bakıma ilkel terimlerin anlamlarını sınırladığı söylenebilirse de, kendi içinde tutarlı her aksiyom sisteminin, ilkel terimlerin birden fazla yorumuna olanak verdiği (bunu biraz ilerde örnek vererek göstereceğiz) gözden kaçmamalıdır. Oysa, tanımlama ilişkin olduğu terimin anlamını, başka yorumlara yol açınayacak bir kesinlikle belirlemeyi öngörür.

Bir kez ilkel terimlerle postulatlar saptandıktan sonra, öngörülen teoremin tümü belirlenmiş demektir. Postulatlar şu anlamda sistemin temelini oluşturur: Teorinin her terimi ilkel terimler aracılığıyla tanımlanır, her önermesi mantıksal yoldan postulatlardan çıkarılır. Tam kesinliği sağlamak bakımından, postulatlarla dayanılarak verilen ispatlarda, yani önermelerin postulatlardan çıkarımında başvurulacak mantık ilkelerinin de belirlenmesi gerekir. Oldukça belirtik bir dille formüle edilen bu ilkeler başlıca iki grupta toplanabilir: (1) Mantığın ilkel önermeleri ya da postulatları (örneğin, p ile q doğru ise, p doğrudur, vb.); (2) Çıkarım kuralları (örneğin, *modus ponens* kuralı ile genel bir önerme kalıbından herhangi bir somut örneğine gitmeye elveren, örneklem kuralları gibi.). Mantığın yapı ve içeriğine ilişkin daha ayrıntılı bir tartışmaya, bu yazının çerçevesini aşması nedeniyle burada girmeyeceğiz.

Matematığın Temeli Olarak Peano'nun Aksiyom Sistemi

Şimdi, doğal sayılar aritmetiğini tümüyle çıkarılabileceğimiz bir aksiyom sistemini ele alalım. Bu sistem, İtalyan matematikçisi ve mantıkçısı G. Peano (1858-1932) tarafından kurulmuştur. Sistemin ilkel terimleri "0", "sayı" ve "izleyen" terimlerinden oluşmaktadır. Kuşkusuz bu terimler tanımlanmaksızın teoride yer almaktadır; ancak "0" simgesinin bildiğimiz 0 (sıfır) sayısını, "sayı" teriminin ise, doğal sayıları (1, 2, 3, ...) bilinen anlamlarıyla belirlediği söylenebilir. "İzleyen" terimine gelince, bununla n gibi doğal bir sayıyı hemen izleyen (kısaca n' olarak gösterilen) sayıdan söz edilmektedir. Peano'nun sisteminde şu beş postulatı bulmaktayız:

- P_1 : 0 bir sayıdır.
- P_2 : Bir sayıyı izleyen şey de bir sayıdır.
- P_3 : Aynı sayı iki değişik sayının izleyeni olamaz.
- P_4 : 0 hiçbir sayının izleyeni değildir.
- P_5 : x gibi bir özellik (a) 0'a aitse, (b) n gibi bir sayıya ait olduğundan n' (yani n yi izleyen sayı) ye de aitse, tüm sayılara aittir.

Sonuncu postulat, matematiksel induksiyon ilkesini dile getirmekte, matematiğin tanım gereği doğruluğuna açık bir örnek oluşturmaktadır.

Temel aritmetiğin bu postulatlar üzerine kurulması, çeşitli doğal sayıların tanımla başlanmaktadır. 1 sayısı 0 (sıfır)'ın izleyeni, 2 sayısı 1' 3 sayısı 2' diye tanımlanır. P_2 ye dayanılarak bu tanımlama süreci sonsuza dek uzar; P_3 ten (P_5 in de katkısıyla) dolayı daha önce tanımlanmış sayılardan birine, P_4 ten dolayı da, 0 (sıfır)'a dönme söz konusu olamaz.

İkinci adım olarak, toplamının tanımını vereceğiz. Bu tanım, verilen bir sayıya herhangi bir doğal sayının eklenmesini 1 in yinelenen eklenmesi olarak görebileceğimiz düşüncesini dile getirmektedir. 1 in yinelenen eklenmesi işlemi, izleyen ilişkisiyle kolayca ifade edilebilir. Buna göre toplamının tanımını şöyle gösterebiliriz:

$$T_1 : (a) n + 0 = n; (b) n + k' = (n + k)'$$

Tanımı oluşturan bu iki belirleme herhangi iki tamsayının toplamını tam olarak vermeye yeterlidir. Örneğin, $3 + 2$ nin toplamını alalım: 2 ve 1 sayılarının tanımları gereğince, $3 + 2 = 3 + 1' = 3 + (0)'$ eşitliklerini yazabiliriz. T_1 (b) ye başvurarak $3 + (0)' = (3 + 0)' = ((3 + 0))'$ eşitliklerini; ancak T_1 (a) ve 4 ve 5 sayılarının tanımları gereğince, $((3 + 0))' = (3)' = 4' = 5$ eşitliklerini yazarız. Bu ispat daha önce $3 + 2 = 5$ önermesinin doğruluğuna ilişkin verdiğimiz açıklamayı da daha belirlik ve kesin kılmaktadır. İspatın doğruluğu Peano sisteminde sadece ilgili kavramların tanımlarından değil, fakat aynı zamanda bu kavramları içeren postulatlardan kaynaklanmaktadır. (Verdiğimiz örnekte P_1 ve P_2 nin 1, 2, 3, 4, 5 in Peano sisteminde sayılar olduğunu güvence altına almaları varsayılmıştır. T_1 in herhangi iki sayının toplamını belirlediğine ilişkin genel ispat da P_5 e dayanır.) Bir aksiyomatik teoremin postulat ve tanımlarını, teoremin kavramlarına konan “belirlemeler” sayarsak, doğal sayılar aritmetiğinin önermeleri için, kavramlara başlangıçta konan bu belirlemeler nedeniyle, doğrudur diyeceğiz. (Göz önünde tutulması gereken bir nokta: “ $3 + 2 = 5$ ” formülüne ilişkin verdiğimiz ispatta, özdeşliğin geçişliliği ilkesi kullanılmıştır. Bu ilkeye herhangi bir aritmetik teoremin ispatında kullanılan bir mantık kuralı diye bakıyoruz. Bu nedenle Peano postulatları arasında diğer mantıksal kurallar gibi buna da yer verilmemiştir.)

Doğal sayıların çarpımına gelince, bunu T_2 deki belirlemelerle tanımlayabiliriz. Bu tanım açık ve kesin bir biçimde, iki tamsayının çarpımını nk , her biri n ye eşit olan k tane sayının toplamı olarak görebileğimiz düşüncesini dile getirmektedir.

T_2 : (a) $n.0 = 0$; (b) $n.k' = n.k + n$

Şimdi, toplama ve çarpma işlemlerini düzenleyen “değişme”, “birleşme” ve “dağılım” diye bilinen genel yasaları ($n + k = k + n$, $n.k = k.n$; $n + (k + 1) = (n + k) + 1$, $n.(k.1) = (n.k).1$; $n.(k + 1) = [(n.k) + (n.1)]$) ispatlayabiliriz. Toplama ve çarpmaya dayanarak, onlara ters işlemler olan çıkarma ve bölmenin tanımları verilebilir. Ancak bu “her zaman yapılamamaktadır.” Şöyle ki, toplam ve çarpımın tersine, kalan ve bölüm, verilen her çift sayı için, tanımlanamıyor. Örneğin, $7 - 10$ ile $7 \div 10$ tanımlanmadan kalmaktadır. Bu durumun, sayı sisteminin negatif ve rasyonel sayılarla genişletilmesi zorunluluğuna yol açtığı söylenebilir.

Kimi kez bu genişletmeyi gerçekleştirmek için istenilen sayıları, çıkarma ve bölme işlemlerine elverecek özellikleriyle varsaymamız, ya da postulat olarak koymamız gereğinden söz edilir. Ne var ki, bu yola gitmek, Bertrand Russell’ın dediği gibi, hırsızlığın, alınteriyle kazanmaya göre sağladığı avantajı elde etmeye benzer. Nitekim, hem negatif, hem rasyonel sayıları, birtakım yeni varsayım ya da postulatlarla gitmeksizin, belirttik tanımlar oluşturarak, Peano’nun ilkel terimlerinden alnteri uğraşısıyla elde edebiliriz. Her pozitif veya negatif tamsayıyı, doğal sayıların sıralı çiftlerinin bir kümesi diye tanımlayabiliriz. Örneğin, $+2$ tamsayısı, $m = n + 2$ eşitliğine dayanılarak, doğal sayıların (m, n) gibi tüm sıralı çiftlerinin kümesi; -2 tamsayısı, $n = m + 2$ eşitliğine dayanılarak, doğal sayıların (m, n) gibi tüm sıralı çiftlerinin kümesi olarak tanımlanabilir. Aynı şekilde, rasyonel sayıları, tamsayı sıralı

çiftlerinin kümeleri olarak tanımlayabiliriz. Böylece ortaya çıkan yeni sayı türlerinden yararlanarak çeşitli aritmetik işlemlerinin tanımı verilir; üstelik bu işlemleri düzenleyen tüm aritmetik yasaların geçerliliği, Peano postulatları ile çeşitli aritmetik kavramların tanımları dışında hiçbir şeye başvurmaksızın ispatlanabilir.

Bu şekilde elde edilen daha geniş sisteme gene de tam diyemeyiz. Şöyle ki, sistemdeki her sayının karekökü olmadığı gibi, daha da genel olarak, katsayısı sistemin sayılarından oluşan her cebirsel denklemin de sistemde çözümü yoktur. Bu eksiklik gerçel sayılarla sonunda karmaşık sayıların ortaya çıkmasına yol açmıştır. Burada da, tek bir yeni postulata başvurmaksızın, yalnızca tanım yoluyla büyük bir genişlemenin sağlandığını görmekteyiz. Oluşturulan böyle bir temele dayanılarak sistemin sayıları için çeşitli aritmetik ve cebirsel işlemlerin yanı sıra, fonksiyon, limit, türev ve integral kavramlarının da tanımlanması, üstelik bu kavramlara ilişkin bilinen teoremlerin ispatı olanak kazanmıştır. Böylece, geniş kapsamlı matematiksel sistem Peano sisteminin dar temeli üzerine oturtulmuş oluyordu; öyle ki, matematiğin her kavramı Peano sisteminin üç ilkel terimi kullanılarak tanımlanabilmekte, matematiğin her önermesi o sistemin beş postulatına dayanılarak ispat edilebilmektedir. İspatların çoğu kez yalnızca formel mantığın ilkeleri aracılığı ile verilebildiği de ayrıca kaydedilmelidir. Ne var ki, gerçel sayılara ilişkin kimi teoremlerin ispatı, mantık ilkeleri dışında kalan bir varsayıma başvurmayı gerektirmektedir. Bu, seçiş aksiyomu diye bilinen varsayım şöyle dile getirilmektedir: Hiçbiri boş olmayan, birbirini dışlayan kümelerden oluşan bir küme verildiğinde, o kümelerin her biriyle yalnızca bir ortak elemanı olan en az bir küme vardır. Bu aksiyom ile mantık ilkeleri birlikte, tüm matematiğin Peano'nun mütevazı sisteminden çıkarsanabilir olduğunu göstermeye yetmektedir. Bu sonuç, matematiğin içeriğini sistematize etme ve temelini açıklığa kavuşturma yolunda son derece parlak bir başarıdır.

Peano İlkel Terimlerini Yorumlama

Ulaşılan bu sonuca göre, Peano postulatlarının doğru olması koşuluyla, mantıksal sistemin tümünün doğruluğunu tanımsal bir doğruluk diye niteleyebiliriz. Ancak bu aşamada, Peano postulatlarının doğru ya da yanlış önermeler olduğunu söyleyemeyiz. Çünkü, bu postulatlarda yer alan üç ilkel terime belli bir anlam verilmemiştir. Şimdilik söyleyebileceğimiz şu olabilir: Beş postulatın doğruluğunu sağlayan ilkel terimlerin herhangi bir yorumu, postulatlardan çıkarsanan tüm teoremlerin de doğruluğunu sağlar. Ne var ki, Peano sistemi için bu işi görecektir birden fazla (hatta sayısız diyebileceğimiz kadar çok) yorum vardır. Örneğin, 0 (sıfır)'ı, bir ışın (yarım doğru)'ın başlangıç noktası olarak, ışın üzerindeki bir noktanın izleyenini, başlangıç noktasından itibaren, o noktanın 1 cm. gerisindeki nokta olarak; sayıyı da, ya başlangıç oluşturan, ya da başlangıç noktasından sonlu sayıda adımlarla ulaşılan bir sonraki nokta olarak yorumlayalım. Gerçi bu yorum, daha önce değindiğimiz alışılmış yorumlardan farklıdır; ama gene de, postulatları ve onlardan elde edilen teoremlerin tümünü doğru önermelere dönüştürecek nitelikte bir yorumdur. Daha genel bir deyişle, türü ne olursa olsun, birbirini izleyerek ilerleyen bir dizi nesne-

nin, Peano sistemi için, doğru bir yorum ya da uygun bir “model” oluşturduğunu gösterebiliriz. Bu örnek bir postulat sisteminin ilkel terimleri için “üstü-örtük tanımlar” oluşturmayacağına ilişkin daha önce ileri sürdüğümüz savı destekler niteliktedir. Belirttiğimiz üzere, Peano sistemi değişik pek çok yoruma elvermektedir; oysa bilimde olduğu gibi günlük dilde de aritmetik kavramların her birine belli bir anlam veririz. Örneğin, günlük ve bilimsel dilde 2 kavramına verdiğimiz anlam öyle ki, “Odada özdeş olmayan Bay Brown ile Bay Cope’dan başka kimse yoktur,” önermesinden, “Odada yalnızca iki kişi vardır,” sonucu geçerli olarak çıkarsanabilir. Oysa, Peano sisteminde doğal sayılar, bu arada 2 için konan tanımlar böyle bir çıkarsamaya olanak vermez. Bu tanımlar 2 ya da aritmetiğin başka kavramlarının bilinen anlamını, kimi kez ileri sürüldüğü gibi, “üstü-örtük” belirlemez. Matematikçi, matematiksel kavramların alışık olduğumuz anlamları beni ilgilendirmez, diyerek bu yetersizliği kabullenmek yoluna gidemez. Çünkü, her pozitif gerçel sayının iki karekökü olduğu ispatlandığında, matematikçi de 2 kavramını alışık olduğumuz anlamıyla kullanmaktadır. Üstelik, 2 kavramına Peano sisteminde belirlenen anlamdan daha fazla bir yorum getirmeksizin matematikçi söz konusu teoremini bile ispatlayamaz.

Demek oluyor ki, matematiğin, içerdiği kavramların öngörülen anlamlarıyla doğru bir teori oluşturması için, Peano postulatlarının gerçekten doğru olup olmadıklarına bakmak gerekir. Bu soru ise, kuşkusuz “0”, “doğal sayı” ve “izleyen” terimlerinin açıklıkla tanımlanmasından sonra ancak cevaplandırılabilir. Şimdi bu işi ele alacağız.

Aritmetik Kavramların Alışılmış Anlamlarını Salt Mantıksal Terimlerle Tanımlama

İlk bakışta, aritmetiğin diğer terimlerine dayanmaksızın bu temel kavramları tanımlamaya çalışmak umutsuz bir çaba gibi görülebilir. Oysa böyle bir tanımlama olanak dışı değildir ve temel kavramlar aritmetik terimlere başvurulmaksızın tanımlandığında Peano postulatları doğru önerme niteliği kazanmaktadır. Bu önemli sonucu Alman mantıkçısı G. Frege (1848-1925)’ye ve daha sonra çağdaş İngiliz mantıkçı ve filozofları Bertrand Russell ile A. N. Whitehead’ın sistematik ve ayrıntılı çalışmalarına borçluyuz. Şimdi kısaca bu tanımlara temel oluşturan düşünceleri gözden geçirelim. Bir doğal sayı (ya da Peano’nun deyişiyle, bir sayı) alışılmış anlamıyla, belli nesneler kümesinin bir özelliği olarak düşünülebilir. Örneğin, havariler sınıfı 12’yi, Dionne beşizleri 5’i, herhangi bir çift 2’yi örnekler. Şimdi belli bir kümenin sayısının 2 olduğu savının anlamını açık bir biçimde dile getirelim. Kısa yazılışı ile $n(C) = 2$ diye gösterilen bu savda, 2 kavramının alışılmış anlamı için şu tanımlayıcı terimlerin yeterli olduğunu söyleyebiliriz: x gibi bir nesne ile y gibi bir nesneyi varsaydığımızda, (1) $x \in C$ (yani, x , C kümesinin elemanıdır), $y \in C$, (2) $x \neq y$, ve (3) z nesnesi de C nin bir elemanı, $z \in C$ ise, o zaman, ya $z = x$, ya da $z = y$. (Bu tanıma dayanarak, “Odada özdeş kişiler olmayan Bay Brown ile Bay Cope’dan başka kimse yoktur,” önermesinden, “Odada yalnızca iki kişi vardır,” sonucunun ge-

çerli olarak nasıl çıktığını görmekteyiz.) Aynı şekilde, $n(C) = 1$ önermesinin anlamı, gene x ve y nesnelerini alarak, şöyle tanımlanabilir: $x \in C$, $y \in C$ ve $x = y$ (yani, x ile y özdeşdir). Gene, $n(C) = 0$ önermesinin alışılmış anlamını şöyle verebiliriz: $x \in C$ sağlayan hiçbir nesne yoktur.

Bu tanımların genel biçimi tüm doğal sayıları tanımlamaya elverişlidir. Bir noktayı özellikle belirtmeliyiz: Bu tür tanımlarda, aritmetik terimler asla yer almamakta; tanımlayıcı olarak yalnızca özdeşlik ve farklılık simgeleriyle birlikte mantıksal terimlere başvurulmaktadır. Buraya kadar yaptığımız sadece $n(C) = 2$ gibi ifadelerin anlamını belirlemek oldu; ancak bu bağlam dışında 0, 1, 2, ... gibi sayıların tanımı verilmiş değildir. Bu tanım, örneğin, 2 nin tüm çiftlerin paylaştıkları ortak özellik olarak düşünülmesiyle verilebilir. Bu ortak özellik, kavramsal olarak, bu özelliği paylaşan tüm kümelerin kümesi diye temsil edilebilir. Şöyle ki, 2 tüm çiftlerin kümesi, yani tüm kümelerin kümesi C için $n(C) = 2$. Bu tanım döngül değildir; çünkü, çift kavramı 2 ye herhangi bir yollama yapmaksızın daha önce tanımlanmıştır. Aynı şekilde, 1 tüm birim sınıfların sınıfı, yani tüm kümelerin kümesi C için $n(C) = 1$. Son olarak, 0 tüm boş kümelerin kümesi, yani elemanı olmayan tüm kümelerin kümesidir. Böyle bir küme yalnızca bir tane olduğundan, 0 sayısı tek elemanı boş küme olan kümedir. Görülüyor ki, herhangi doğal bir sayının alışılmış anlamı bu şekilde tanımlanabilir. Peano ilkel terimlerinin, öngörülen yorumlarını nitelemek için yalnızca 0 sayısının tanımını vermek yeterlidir. Geriye “izleyen” ile “tamsayı”yı tanımlamak kalıyor.

Belirtik tanımı burada verilmeyecek kadar pek çok incelik gerektiren “izleyen” teriminin tanımı, şu örnekte görüldüğü gibi, basit bir düşüncenin dikkatle dile getirilmesinden ibarettir. 5 sayısını, yani tüm beşizlerin kümesini alalım. Şimdi beşizlerden gelişigüzel birini seçip, buna henüz onun elemanı olmayan bir nesne ekleyelim. 5 in izleyeni 5', böyle elde edilen kümeye uygulanan sayı olarak tanımlanabilir. Son olarak, doğal sayı kavramının alışılmış anlamını veren bir tanım formüle edebiliriz. Gene burada veremeyeceğimiz bu tanım, doğal sayılar kümesinin, 0, 0 ın izleyeni, izleyenin izleyeni, ... sayılarından oluştuğu düşüncesini dile getirir.

Yukarda verilen tanımlar dikkatli bir dille yazıldığında (simgesel ya da matematiksel mantığın sağladığı ifade teknikleri bu amaç için vazgeçilmez değerdedir), her tanımda başvuru tanımlayıcı terimlerin tümüyle salt mantık terimleri olduğu görülür. Gerçekten, Peano ilkel terimlerinin alışılmış anlamlarıyla bunlara dayanılarak tanımlanan tüm diğer matematik terimlerinin anlamlarını, “ x ” ve “ C ” değişkenleriyle birlikte şu yedi mantık terimi kullanılarak belirlemek olanaklıdır: *değil*, *ve*, *ise*; *x değişkenin kapsadığı tüm nesneler için ...*; *x in* kapsamında en az bir nesne var, *öyle ki ...*; *x, C kümesinin bir elemanıdır*; *x in kapsadığı tüm nesnelerin kümesi*, *öyle ki, ...* Üstelik bu mantıksal kavramların sayısını şu dört temel kavrama indirgeyebiliriz: Verdiğimiz yedi kavramdan ilk üçünü “ne - ne de” ile, beşincisini ise dördüncü ile “ne - ne de”yi kullanarak tanımlamak olanağı vardır. Bu demektir ki, matematiğin tüm kavramlarını salt mantığın dört terimiyle tanımlayabiliriz. (Ne ki, böyle bir indirgeme pratik olmaktan uzaktır: Herhangi bir karmaşık matematik kavramının sözü geçen dört mantık terimi kullanılarak tanımlanması yüzlerce, hat-

ta binlerce sayfa dolduran bir işlem gerektirebilir. Öyle de olsa, matematiği mantığa indirgeme olanağı kuramsal açıdan son derece önemli bir noktadır.)

Peano Postulatlarının Alışılmış Yorumlarındaki Doğruluğu

Bundan önceki bölümde verilen tanımların, aritmetik kavramların alışılmış anlamlarını tam bir açıklıkla belirlediği söylenebilir. Üstelik (şimdi belirteceğimiz nokta, matematiğin geçerliği bakımından önemlidir) Peano postulatlarının, ilkel terimlerin sözü konusu tanımlara uygun anlaşılmasıyla, doğru önermelere dönüştüğü gösterilebilir.

Nitekim P_1 (0 bir sayıdır) doğru bir önerme olmaktadır; çünkü, doğal sayılar 0 ve onun izleyenleri olarak tanımlanmıştır. P_2 (bir sayının izleyeni de bir sayıdır) postulatının doğruluğu da aynı tanıma dayanmaktadır. P_5 (matematiksel induksiyon ilkesi) için de aynı şeyi söyleyebiliriz. Ancak bu postulatın ispatı için yukardaki tanım yerine, “tamsayıya” ilişkin belirtik tanıma başvurmamız gerekir. P_4 (0 herhangi bir sayının izleyeni değildir) postulatının doğruluğuna gelince, onu şöyle gösterebiliriz: “İzleyen” teriminin tanımı gereğince, bir sayının izleyeni olan bir sayı, en az bir elemanı olan kümelerle uygulanır. Oysa, 0 sayısı, tanımı gereği, ancak ve ancak boş olan bir kümeye uygulanabilir. P_1 , P_2 , P_4 , P_5 in doğruluğu, salt mantık kuralları aracılığıyla bu tanımlardan çıkarsanabilirken, P_3 (hiçbir iki sayı aynı izleyeni paylaşmaz)ın ispatı güçlük yaratmaktadır. Daha önce de değindiğimiz gibi, n sayısının izleyeninin tanımı, n sayısında elemanı olan bir kümeye, o kümenin henüz kapsamadığı bir elemanı ekleme sürecine dayanır. Şimdi, var olan nesneler hep birlikte sınırlı sayıda ise, bu ekleme süreci sonsuza dek sürmez; öyleyse, P_1 , P_2 ile birleştiğinde, tamsayıların sonsuz bir küme oluşturduğunu içeren P_3 yanlış demektir. Bu güçlük, “sonsuzluk aksiyomu” denen özel bir aksiyoma başvurularak giderilebilir. Bu aksiyom, P_3 ün ispatını sağlayan, “sonsuz sayılar vardır,” savını içermektedir. Sonsuzluk aksiyomu mantığın bilinen yasaları arasında yer almaz; ama salt mantık terimleriyle dile getirilme olanağı vardır ve modern mantık teorisinin bir ek postulatı olarak düşünülebilir.

Mantığın Bir Kolu Olarak Matematik

Daha önce de belirtildiği üzere aritmetik, cebir ve analizin tüm teoremleri Peano postulatları ile Peano sisteminde ilkel olmayan matematik terimlerin tanımlarından çıkarsanabilir. Bu çıkarsama için yalnızca mantık ilkelerine ihtiyaç vardır. Ancak kimi durumlarda, bu ilkelerle birlikte seçiş aksiyomuna da başvurmak gerekir. Bu sonuçla Peano sistemine ilişkin söylediklerimiz birleştiğinde, *matematiğin yapı ve niteliği ile ilgili “mantıkçılık tezi” diye bilinen şu yargı ortaya çıkmaktadır:*

Matematik, mantığın bir koludur; mantıktan şu anlamda çıkarsanabilir:

- Matematiğin (yani, aritmetik, cebir ve analizin) tüm kavramlarını, salt mantık terimlerini kullanarak tanımlayabiliriz.

- b) Matematiğin tüm teoremlerini bu tanımlardan, mantık ilkeleri aracılığıyla (sonsuzluk ve seçiş aksiyomlarını ekleyerek) çıkarılabılıriz.

Bu anlamda matematiksel önermelerin, o önermelerde geçen terimlerin tanımı gereği doğru olduğu, ya da matematiksel kavramlara tanımla yüklenen özellikleri belirttik hale getirdiği söylenebilir. Demek oluyor ki, matematiksel önermelerin söz götürmez doğruluğu, “Tüm bekârlar evli olmayan kişilerdir,” türünden önermelere özgü kesinlikle aynıdır. Bu tür önermeler gibi matematiksel önermeler de tümüyle olgusal içerikten yoksundur; kesinlikleri de bu boşluktan kaynaklanmaktadır. Matematiksel önermeler olgusal herhangi bir konuda bilgi sağlamaz, olup bitenlere ilişkin bize bir şey bildirmez.

Matematiğin Olgusal Dünyaya Uygulanması

Bu sonuç bildiğimiz bir gerçekle bağdaşmaz görünmektedir: Matematiğin empirik dünyaya uygulanmasında sergilediği göz kamaştırıcı başarı! Bilimlerin ilerlemesi, ulaşılan sonuçların güvenilir bilgi oluşturması büyük ölçüde matematiksel yöntemi kullanma ve uygulama gücüne bağlı bir gelişmedir. Görünürdeki bu paradoksu bazı örneklerle açıklığa kavuşturalım:

Diyelim ki, elimizde belli bir sıcaklıkta hacmi (v) 9 desimetre küp, basıncı (p) 4 atmosfer olan incelemek istediğimiz bir gaz var. Gene diyelim ki, aynı sıcaklık altında $p = 6$ (basıncı 6 atmosfer) olan gazın hacmini, Boyle yasasına dayanarak bulmak istiyoruz. Basit aritmetik kullanarak şöyle düşünebiliriz: v ile p nin karşılıklı değerleri için $vp = C$; öyle ki, $p = 4$ olduğunda, $v = 9$ dur; o halde, $C = 36$. Buna göre $p = 6$ ise $v = 6$ olur. Şimdi, matematiğe dayanan bu öndeyinin deneysel olarak doğrulandığını düşünelim. Bu, kullandığımız aritmetiğin kendine özgü bir öndeyi gücü olduğunu mu, yani aritmetik önermelerin olgusal içerikli olduğunu mu gösterir? Elbette değil. Burada gördüğümüz öndeyi gücü ile olgusal içerik tümüyle verilen ilk koşullarla Boyle yasasından kaynaklanmaktadır. Bilindiği gibi bu yasa olgusal içerikli bir ilişkiyi, $vp = C$ ilişkisini dile getirmektedir. Matematiğin işlevi araçsaldır: $p = 6$, $C = 36$ verildiğinde, diğer değişken v nin 6 olduğunu belirlememizi sağlar. Matematik analitik bir araç olarak belli bir ilişkiye bağlı verilen ilk koşullardan belli bir sonucu çıkarma, ya da öncüllerin içeriğini açığa vurma olanağını verir, yoksa kendi içinde bir öndeyi gücü taşımaz. Şöyle ki, $p = 6$ ve $C = 36$ değerleriyle Boyle yasasından oluşan öncülleri doğru saydığımızda, v nin 6 olduğunu kabul etmemiz gerektiğini aritmetik işlemler bize gösterir. Mantık gibi matematik de bir öncüller kümesinde saklı olan şeyi belirttik kılmaya yarayan kavramsal bir yöntemdir. Bu yöntemle ulaşılan sonuç, öncüllerde zaten üstü-örtük vardır. Başka bir deyişle, sonuç bizim için *kuramsal hiçbir yenilik* değil, olsa olsa psikolojik bir yenilik sergiler. Şöyle de söyleyebiliriz: Birtakım varsayım veya önermeleri doğru saydığımızda, daha neyi doğru saymamız gerektiğini bilemeyebiliriz; mantık veya matematik işte bunu bize gösterir.

Benzer bir çözümleme, uygulamalı matematiğin tüm diğer kullanımları için de geçerlidir. Örneğin, kalkülüs tekniğini gerektiren bir uygulamayı alalım. Belli bir

elektrik alanda bir cismin 5 m/s^2 bir ivmeyle hareket ettiğini düşünelim. Bu hipotezi test etmek için, hipotezden birbirini izleyen iki integrasyon aracılığıyla öndeyi niteliğindeki şu sonucu çıkarabiliriz: Cismin, harekete geçtikten sonra herhangi bir t süresinde aldığı mesafe $5/2t^2$ metredir. Şimdi bu sonuç konuya yabancı bir kimse için psikolojik yönden bir yenilik taşıyabilir, ancak bu bir kuramsal yenilik değildir; çünkü, sonucun içeriği, cismin sabit ivmeyle hareketine ilişkin hipotezde verilmiştir. Gerçekten, gazın küçülen hacminde olduğu gibi, burada da öndeyinin deneysel olarak yanlış çıkması, mantık ya da matematik yöntemin yanlış olduğunu değil, öncüllerden en az birinin (örneğin, belli bir gaze uygulanmasında Boyle yasası) olgusal hata içerdiğini gösterir.

Böylece, empirik bilginin kuruluşunda matematiğin (aynı şekilde mantığın) işlevi, deyiş yerindeyse, özsu çıkarmadır: Matematiksel (ya da mantıksal) yöntemle çıkarılan bilgi özsuyla öncül alınan varsayımın içeriği ile sınırlıdır; ancak matematik yöntemle açığa vurulan bu içerik çoğu kez ilk bakışta sanıldığından çok daha zengin olabilir.

Ulaştığımız bu noktada, aritmetikten veya mantıktan kaynaklanmayan kimi matematiksel disiplinlerin konumlarını kısaca gözden geçirmede yarar vardır. Bu disiplinler arasında özellikle topoloji ve geometri yanında grup, “lattice” ve alan teorileri gibi soyut cebirin değişik dalları gösterilebilir. Bunlardan her biri kendine özgü postulatlarla dayanılarak salt dedüktif bir sistem olarak kurulabilir. Verilen bir teoriye ait postulatları birlikte P ile gösterirsek, teoremin T ile gösterilen her teoremi P den formel mantık ilkeleri aracılığıyla çıkarsanan bir önermedir. Böylece, ispatlanan şey, T nin doğruluğu değil, P nin doğru olması halinde T nin doğru olduğudur. Ancak, hem P, hem de T teoride geçen henüz yorumlanmamış ilkel terimleri taşıdığından, sıkı bir anlamda, ne T nin, ne de P nin doğruluğundan söz edemeyiz; olsa olsa şöyle diyebiliriz: T gibi bir önerme P den mantıksal olarak çıkarsanmışsa, P yi oluşturan önermeleri doğru yapan her yorum T yi de doğru yapar. Bu noktaya dek çözümlememiz Peano postulatlarına dayanan aritmetikteki çözümlemeyle tam bir benzerlik içindedir. Ne var ki, aritmetik söz konusu olduğunda bir adım daha ileri gitmek olanaklıydı; yani, ilkel terimleri salt mantıksal terimlerle tanımlama, bu tanımlar gereğince aritmetiğin postulat ve teoremlerinin koşulsuz doğru olduklarını göstermek yoluna gidilebilirdi. Oysa, aritmetikten kaynaklanmayan disiplinlere benzer bir işlem uygulanamaz. Soyut cebirin değişik dallarına ait ilkel terimlere özgü “alışılmış anlam” yoktur; ve eğer alışılmış yorumunda geometriyi fiziksel uzayın yapısına ilişkin bir teori sayacaksak, bu teoremin ilkel terimlerini birtakım fiziksel nesneleri belirleyen kavramlar olarak düşünmeliyiz. Bu yorumda geometrik teoremin doğruluğu sorununa gelince, bu *empirik* nitelikte bir soruna dönüşür. Aritmetikten kaynaklanmayan disiplinlerin matematikte ya da empirik bilimlerde belli bir konuya uygulanması için öncelikle ilkel terimlerine belli anlamların verilmesi, sonra da bu yorumlamayla postulatların doğru önermelere dönüşüp dönüşmediğinin belirlenmesi gerekir. Postulatlar doğru önermelere dönüşmüşse, tüm teoremlerin de doğru olduğu kesinlik kazanır. Böyle olması kaçınılmazdır; çünkü teoremler yorumlanmış postulatların içeriğini açığa vurmaktan ileri geçmeyen öner-

melerdir. O halde, söz konusu matematiksel teorilerin, empirik alana uygulanması durumunda, aritmetikten ve sonunda salt mantıktan kaynaklanan teoriler gibi, dayatılan postulatlarla bir şey eklenmeksizin, sadece onların içeriklerini belirttik kılan bir işlevi vardır, denebilir.

Gerçi matematiğin empirik bilgilerimizi içerik yönünden zenginleştirici herhangi bir katkısından söz edilemezse de, o tür bilgilerimizin geçerliğini sağlama, hatta dile getirme bakımından vazgeçilmez bir araç olduğu şüphe götürmez. Empirik bilimlerde en önemli teorilerin çoğu (özellikle geniş öndeyi ve uygulama olanakları taşıyan teoriler) matematiksel kavramlar yardımıyla dile getirilmiş olan teorilerdir. Bu teorilerin formülasyonunda özellikle sayı sistemiyle çeşitli metrik değişkenler arasındaki fonksiyonel ilişkilerden yararlanıldığı görülmektedir. Kaldı ki, bu teorilerin bilimsel olarak yoklanması, bu yoldan öndeyilerinin doğrulanması, ayrıca uygulama sonuçlarının irdelenmesi gibi işlevlerin hiçbiri, teoriden birtakım gözlemsel sonuçlar çıkarmaksızın yerine getirilemez. Matematiğin sağladığı teknik yöntemler olmadıkça böyle bir çıkarsamaya olanak olmadığı gibi, genel teorinin ilişkin olduğu konudaki üstü-örtük içeriğini tümüyle bilmeye de olanak yoktur.

Bu çalışmada kalın çizgileriyle verdiğimiz çözümleme, matematik sistemini, olgusal içerikten yoksun, ama göz kamaştırıcı genişlik ve incelikte kavramsal bir yapı olarak sunmaktadır. Matematik, empirik dünyaya ilişkin bir çalışma olmamasına karşın, bu dünyayı bilimsel olarak anlama ve ona egemen olma çabasında son derece güçlü ve vazgeçilmez bir araçtır.

[Bu metin, *The World of Mathematics*, Vol. III, (Ed. J. R. Newman)'dan alınmıştır.]

GEOMETRİ ve EMİRİK BİLİMLER

Carl G. Hempel (1945)

1. Giriş

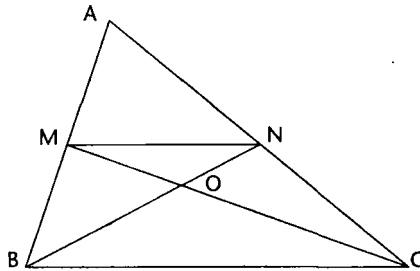
Matematiği empirik bilimlerden ayıran, ona bilimlerin kraliçesi diye ün kazandıran en belirgin özellik hiç kuşkusuz matematiğin kesinliği ve eriştiği sonuçların zorunluluğudur. Empirik bilimlerin en gelişmiş olanında bile bu kesinlik ve zorunluluk yoktur. Empirik olgulara ilişkin bir hipotezin doğruluğu, dayandığı kanıtlara göre en çok yüksek bir olasılıktır, yoksa bir kesinlik olamaz. Başka bir deyişle, bilimde bir hipotez ne denli kanıtlanmış olursa olsun, bir gün yeni gözlemler karşısında yanlışlanma olasılığından kurtulamaz. Böylece, tüm bilimsel hipotez ve teoriler, geçici nitelikte olup, olgulara ters düşmedikleri sürece doğru sayılırlar. Oysa, matematikte bir teorem bir kez ispatlanınca kesinlik kazanır; ne denli ters düşerse düşsün hiçbir gözlem karşısında asla sarsılmaz. Bu yazının amacı, “matematiksel kesinlik” diye bilinen bu özelliği geometriyi örnek olarak tanıtlamak, geometrik teorilerin geçerliği sorununu aydınlatmaya çalışmak ve fiziksel uzayın yapısına ilişkin bilgilerimiz yönünden bu teorilerin önemini belirtmektir.

Matematiksel doğruluğun niteliğini, onu sağlayan metodu inceleyerek anlayabiliriz. Bu konuda sözü uzatmayacağım: Bu metod, bir önermenin başka bir önerme ya da önermelere başvurularak mantıksal çıkarımla ispatlanmasını içerir. Açık-tır ki, ispatta, bazı önermeleri ispatlamaksızın doğru saymak gereği vardır; yoksa sonu gelmeyen bir geriye gidişten kurtulunamaz. Tüm matematiksel teorilerde temel varsayımları oluşturan bu tür önermelere ilişkin oldukları teoremin *aksiyom* veya *postulat*’ları (bu iki terimi eşanlamda kullanacağız) denir. Matematikte aksiyomatik bir sistemin tarihsel ilk örneğini geometri vermiştir. Ne var ki, Euclides’in kurduğu sistemde teoremlerini ispatta dayandığı postulatlar, geometrisinin tüm önermelerini ispatlamaya yeterli değildi. Bu nedenle Euclides sistemi çağımızda birçok kez ele alınarak gözden geçirilmiş, daha tam ve yeterli postulatlar konmuştur. Bunlar arasında Euclides sistemini en yakından izleyeni belki de Hilbert’in oluşturduğu sistemdir.

2. Euclides Postulatlarının Yetersizliği

Euclides postulatlarının yetersizliği, modern matematikte aksiyomatik metod yönünden can alıcı bir noktayı su yüzüne çıkarmaktadır. Bir teoremin postulatları bir kez konduktan sonra, onların çerçevesi dışına çıkılamaz; teoremin tüm diğer önermelerinin mantıksal çıkarımı ancak bu postulatlara dayanılarak yapılır; fiziksel uzayda katı cisimlerin davranışlarına ilişkin herhangi bir apaçıklık duygusuna, ya da geometrik şekillerin özelliklerine başvurulamaz, yaşantı ve deneylerimize yer verilemez. Gerçi bu tür şeyler, bir teoremin ispatını bulmada bize yardımcı olabilir, fakat ispatın dayanakları olarak ileri sürülemez. Bu nokta özellikle geometride önemlidir; çünkü, geometrik şekiller ve ilişkiler üzerindeki sezgi ve yaşantımız, ne postulatlar arasında yer alan ne de onlara dayanılarak ispatlanabilen birtakım üstü-örtük varsayımlar kullanmaya bizi itebilir. Şu örneği alalım: Bir üçgende, kenarları iki eşit parçaya ayıran üç kenar ortay, her birini $1 : 2$ oranında bölen bir noktada kesişirler. Bu teoremi ispatlamak için, ilkin ABC diye aldığımız herhangi bir üçgende (şekile bakınız), AB ve AC'nin ortalarını birleştiren MN doğru parçasının, BC'ye paralel olduğunu, bu nedenle onun yarısı kadar uzunlukta olduğunu gösteririz. Sonra, BN ve CM doğruları çizilir; MON ve BOC üçgenlerinin incelenmesi bizi teoremin ispatına götürür. Bu işlemde genellikle BN ve CM doğrularının B ve N ile C ve M arasında yer alan O noktasında kesiştiği kabul edilir. Bu varsayım geometrik sezgiye dayanır, Euclides'in postulatlarından çıkarsanamaz. Sezgiden bağımsız, ispatlanabilir bir önerme niteliği alabilmesi için Euclides'in postulatlarına özel bazı postulatların eklenmesi gerekmiştir. Örneğin, bunlardan biri, "A, B, C bir doğru üzerinde noktalar ise, ve B noktası A ile C arasında ise, B noktası aynı zamanda C ile A arasındadır" iddiasını dile getirmektedir. İspatta, bu denli önemsiz bir varsayıma bile göz yumulamaz; başta konan postulatlar, tüm önermelerin mantıksal çıkarsamasına elverecek şekilde tam olmalıdır.

Başka bir örneği de şu önermede bulmaktayız: İki kenar ve bunların oluşturduğu iç açıda eş olan üçgenler birbiriyle çakışır. Euclides geometrisinde bu önerme bir teorem olarak ortaya konmuştur. Ne var ki, verilen ispat, şekillerin hareket ve birbirinin üstüne konması düşüncelerinden yararlanmakta, böylece de, katı cisimlere ilişkin deneyimlerimize ve geometrik sezgimize dayanan üstü-örtük varsayım-



ları içermektedir. Oysa bu varsayımları Euclides postulatlarından çıkarsamaya olanak yoktur. Bu nedenledir ki, Hilbert sisteminde bu önerme (daha doğrusu önermenin bir bölümü) belirtik olarak postulatlar arasında yer almıştır.

3. Matematiksel Kesinlik

Matematiksel kesinliği sağlayan şey işte matematik ispatın bu salt dedüktif niteliğidir. Bir teoremin ispatı (örneğin, üçgenin iç açılarının toplamı ile ilgili önermenin ispatı) o teoremin bir önerme olarak doğruluğunu değil, birtakım postulatlardan çıkarılabilir olduğunu gösterir; postulatlar doğru ise, teoremin doğruluğu kesinlik kazanır. Bu nedenle, matematikte her teoremi şu biçimde yazabiliriz. (Formülde P'ler postulatları, T postulatların içerdiği teoremi, $\rightarrow$ ise koşulsal ilişkiyi simgelemektedir):

$$(P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \dots \dots \dots P_N) \rightarrow T$$

Şimdi matematiksel ispatın bu kesin ve zorunlu karakterini biraz daha açıklayalım:

Mantıksal çıkarımların belirgin niteliği şudur: Ulaşılan sonuç, hareket noktası postulatların içeriğini ya tümüyle ya da bir bölümü ile dile getirmekten öteye geçmez. Basit bir örnekle bunu şöyle gösterebiliriz: “Bu şekil dik açılı bir üçgendir,” öncülünden, “Bu şekil bir üçgendir” sonucu mantıksal olarak çıkar. Öncül doğru ise, sonuç zorunlu olarak doğrudur. Ancak görüldüğü gibi sonuç öncülü hiç değilse bir bölümü ile yinelemekten öteye geçmemektedir. Gene, “2 dışındaki tüm asal sayılar tek sayıdır,” “n, 2’den farklı bir asal sayıdır,” öncüllerinden “n bir tek sayıdır,” sonucu mantıksal olarak çıkar. Fakat zorunlu olan bu sonuç da öncüllerin bir parçasını dile getirmekle kalmaktadır. Bu, tüm mantıksal çıkarımların değişmez özelliğidir. Buna bakarak, matematiksel ispatın biricik yöntemi olan dedüktif çıkarımı bir kavramsal çözümleme tekniği diye niteleyebiliriz: Öncüllerde saklı olan savları açığa çıkaran, üstü-örtük olanı belirtik yapan bir teknik. Öyle bir teknik ki, bir çıkarımda öncülleri kabul etmekle, daha neyi ya da neleri kabul ettiğimizi bize göstermektedir. Ancak unutmayalım ki, bir teorem (ispatlanan önerme) içerik yönünden postulatları yeni bir şey eklemek şöyle dursun, çoğu kez onları eksik bir yinelemeden öteye geçmez.

Tüm matematiksel ispatlar birtakım postulatlardan mantıksal çıkarımlara dayandığından, geometrideki Pythagoras teoremi gibi bir teoremin, dayandığı postulatlar bakımından *nesnel* ya da *kuramsal* yeni hiçbir şey ileri sürmediği açıktır. Çıkarımın, postulatlarda farkına varmadığımız bir ilişkiyi ortaya çıkarması bize yeni bir şeye ulaştığımız duygusunu verebilir, ancak bu mantıksal değil, salt psikolojik bir yeniliktir.

Matematiğe özgü kesinliğin niteliği şimdi açıktır: Bir teoremin kesinliği çıkarılmış olduğu postulatları *bağıldır*; postulatlar doğru ise teoremin doğruluğu zorunludur. Çünkü teorem, yukarda belirttiğimiz üzere, postulatlarda ileri sürüleni tam

olmasa da yinelemekten ileri geçmez. Böyle koşullu türden bir doğruluğun ise olgulara ilişkin bir içeriği olmadığı, bu nedenle de empirik hiçbir bulgu ile ters düşmeyeceği açıktır. Oysa empirik bilimlerde hipotez ya da teoriler ne denli kanıtlanmış olurlarsa olsunlar, yeni bazı olgulara ters düşüp yanlışlanma olasılığından kurtulamazlar. Matematiksel doğruluk, salt olgusal ya da empirik içerikten yoksun olduğu için kaçınılmaz ve kesindir. Koşullu biçimde oluşturulan herhangi geometrik bir teorem, mantık deyimiyle analitik niteliktedir; doğruluğu *a priori*'dir. Başka bir deyişle, bu teoremin doğruluğunu, empirik verilere başvurmaksızın salt mantık kuralları aracılığı ile kanıtlayabiliriz.

4. Postulatlar ve Doğruluk

Denebilir ki, geometrik doğruluk üzerindeki bu düşüncelerimiz konunun sadece yarısını yansıtmaktadır. Gerçekten de geometrik ispat bir önermeyi koşullu olarak (yani, postulatları doğru sayma koşuluyla) ileri sürmemizi sağlıyor, ama postulatları kendi başlarına doğru sayarsak, onların mantıksal sonuçları olan teoremleri de koşulsuz olarak doğru saymamız doğru olmaz mı? Örneğin, iki noktanın onları birleştiren bir ve yalnız bir doğruyu belirlediği önermesi, ya da herhangi bir üçgende iç açların toplamı iki dik açının toplamına eşittir, önermesi koşulsuz birer savı dile getirmiyorlar mı? İlk bakışta öyle görünseler de, aslında öyle olmadıklarını geometrinin aksiyomatik kuruluşuna ilişkin iki önemli noktayı gözden geçirdiğimizde anlayacağız.

İlk nokta, Euclides geometrisiyle bağdaşmayan birtakım başka geometrilerin ortaya çıkmış olmasına ilişkindir. Euclides geometrisinde doğru olan, örneğin biraz önce sözünü ettiğimiz iki önerme, bu yeni sistemlerde yanlıştır. Euclidesci olmayan bu sistemlerin bazı temel özelliklerini kısaca belirtmekte yarar vardır. Euclides geometrisinin dayandığı postulatlar arasında ünlü paralel postulatı (herhangi bir doğru dışındaki bir noktadan o doğruya bir ve yalnız bir paralel doğru geçer) da vardır. Bu postulat, ötekilerden çok daha az basit ve sezgisel olarak daha az akla yakın olduğundan, onun bir aksiyom olarak kabul edilmesinin gerekli olmadığını göstermek için tarih boyunca pek çok girişimler yapılmıştır. Ne var ki, paralel postulatı bir teorem olarak ispat yolundaki tüm çabalar boşa çıkmış, sonunda onu Euclides'in diğer postulatlarından (hatta bunların daha tam olan modern formülasyonlarından) çıkarsamaya olanak olmadığı kesinlikle kanıtlanmıştır. Öyle ki, paralel postulatı yerine onunla çelişen başka bir postulatı (örneğin, "herhangi bir doğru dışındaki bir noktadan o doğruya hiç değilse iki doğru paralel geçer," önermesini koyduğumuzda mantıksal tutarlığı tam yeni bir geometrik teori elde edebilmekteyiz. "Hiperbolik geometri" denen bu ilk Euclidesci olmayan geometriyi son yüzyılın ilk 20 yılında bir Rus olan N. I. Lobachevsky ile bir Macar olan J. Bolyai kurmuştur. Daha sonra, "eliptik" denen bir başka geometrinin ortaya çıktığını görüyoruz. Bir Alman olan Riemann'ın kurduğu bu sistemde paralel postulatının yerini, "hiçbir doğrunun paraleli yoktur," önermesi alır. (Ancak, Riemann sisteminin tutarlılığını sağlamak için bu önermenin benimsenmesiyle birlikte diğer Euclides pos-

tulatlarında da bazı değişikliklere ihtiyaç duyulmuştur.) Kuşkusuz bu yeni geometrilerin pek çok teoremleri Euclides teoremlerinden farklı olacaktır. Örneğin, iki boyutlu hiperbolik geometride “herhangi bir doğruya dışındaki bir noktadan sonsuz sayıda paralel doğru geçer,” önermesi bir teoremdir. Bunun gibi, “herhangi bir üçgenin iç açılarının toplamı iki dik açının toplamından azdır,” önermesi de bir teoremdir. Eliptik geometride ise, tam tersine, üçgenin iç açılarının toplamı daima iki açıdan büyüktür; birbirine paralel iki doğru yoktur. Ayrıca, yeni geometrilerde (Euclides geometrisinde daima olduğu gibi) iki farklı nokta onları bağlayan bir doğruyu belirlerse de, belli bazı nokta çiftleri var ki, bunları sonsuz sayıda değişik doğrular birbirine bağlar. Bunun bir örneğini, doğru çizgi kavramını büyük çember olarak yorumladığımızda küre yüzünün temsil ettiği iki boyutlu eğik uzayın yapısında bulmaktayız. Böyle bir uzayda, verilen herhangi iki büyük çember kesiştiğinden, paralel doğrular yoktur; küre çapının uç noktalarını, sonsuz sayıda değişik “doğrular” birbirine bağlar; bir üçgenin iç açılarının toplamı da daima iki dik açıdan fazladır. Gene, böyle bir uzayda, bir çemberin uzunluğu ile çapının bölümü daima 2π ’den azdır.

Euclidesci olmayan geometriler sadece eliptik ve hiperbolik geometriler değildir; daha başka çeşitleri de oluşturulmuştur. İlerde, gene Riemann’ın kurduğu Euclidesci olmayan çok daha genel bir sisteme geçeceğiz.

Modern matematikte farklı geometrilerin ortaya çıkmış olması, matematikte postulatların doğruluğu ileri sürülerek işe başlanmadığını gösterir. Matematigi ilgilendiren şey sadece şudur: Verilen postulatların mantıksal (dedüktif) sonuçlarını çıkarmak. Teoremlerin zorunlu görünen doğrulukları postulatların doğruluğuna bağlı kalmaktadır.

Matematiğin, dayandığı postulatların doğru olduğunu ileri sürmediğini gösteren ikinci bir gözlem de, *geometri kavramlarının statüsü* ile ilgilidir. Aksiyomatik her sistemde, önermeler üzerinde yürütülen işlemle, kavramlar üzerinde yürütülen işlem arasında yakın bir koşutluk vardır. Daha önce de belirttiğimiz gibi, önermeler iki gruba ayrılır: İspatlanmaksızın alınan postulatlar, postulatlara dayanılarak ispatlanan teoremler. Aynı şekilde, kavramlar da iki gruba ayrılır: Tanımlanmaksızın alınan ilkel ya da temel kavramlar, ilkel terimlere dayanılarak tanımlanan kavramlar. (Birtakım kavramların tanımlanmaksızın sisteme alınması, sonsuz geri-gidişe düşmemek için gereklidir.) Benzerlik bu kadarla da kalmamaktadır: Nasıl ki, bir tek teori (örneğin, Euclides geometrisi) için kuramsal olarak sonsuz çoklukta değişik postulat sistemi seçmeye olanak varsa, bunun gibi, sonsuz çoklukta değişik ilkel terimlerden seçme olanağı da vardır. Her zaman değil ama, çoğu kez, bir teoremin değişik aksiyomatikleştirilmesi değişik postulatları gerektirdiği gibi, değişik ilkel terimler de gerektirir. Hilbert’in düzlem geometriyi aksiyomatikleştirmesi altı ilkel terim içermiştir: Nokta, doğru, (bir noktanın bir doğru üzerine) düşmesi, (bir doğru üzerindeki üç noktanın ilişkisi olarak) arasında olma, doğru parçalarının çakışırılığı, ve açılarının çakışırılığı. (Hilbert, sisteminde üç boyutlu geometri için iki ilkel terime daha ihtiyaç vardır: Düzlem, bir noktanın bir düzleme düşmesi.) Geometrinin, açı, üçgen, çember, vb. gibi tüm diğer terimleri ilkel terimlere dayanılarak tanımlanan

terimlerdir. Ancak, ilkel terimler tanımlanmadığına göre, onlara nasıl bir anlam verebiliriz? diye sorulabilir. Bunun yanıtı, onlara belli herhangi bir anlam vermenin gereksiz olduğudur. Gerçi, “nokta”, “doğru”, vb. terimler, bildiğimiz birtakım anlamlar taşırlar; ne var ki, bu terimlerin yer aldığı önermelerin geçerliği bu anlamlardan tümüyle bağımsızdır. Gerçekten de, Euclides geometrisinde “nokta”, “doğru”, “üzerine düşme”, “arasında olma”, vb. terimler yerine, “1’inci tür nesne”, “2’nci tür nesne”, “1 no.’lu ilişki”, “2 no.’lu ilişki”, vb. gibi nötr terimler koyduğumuzu düşünelim. Şimdi ilkel terimlerini değiştirdiğimiz bu geometriyi ilkel terimlerin alışık olduğumuz anlamlarını bilmeyen uzman bir mantıkçı ya da matematikçiye sunarsak ne olur? Bu uzman kişi için tüm ispatlar geçerliğini korur. Nedenini daha önce de açıklamıştık: En sıkı biçimiyle bir ispat, terimlerin bilinen anlamlarına asla başvurmaksızın, aksiyomlardan dedüktif bir çıkarım yapmaktır. Görülüyor ki, aksiyomatik bir teoremin ilkel terimlerine belirli anlam verme gereği yoktur; bu nedenle, mantıksal olarak kurulan geometrik bir sistemin ilkel terimlerine mantıksal değişken gözüyle bakılabilir.

Demek oluyor ki, geometride postulatların doğruluğunun ileri sürüldüğü söylenemez; çünkü postulatlar belirli hiçbir anlamı olmayan kavramlarla oluşturulmuştur. Birtakım değişkenleri içeren postulatlar ise ne doğru ne de yanlıştır! Modern mantığa uygun deyişle, postulatlar önerme değil, ancak değişken terimlerden oluşturulan önerme kalıpları (ya da önerme fonksiyonları)dır. Bu, şunu da göstermektedir ki, geometrinin postulatlarını “apaçık doğrular” saymak da yanlıştır. Çünkü bir savın olmadığı yerde, apaçık doğruluktan da söz edilmez.

5. Saf ve Fiziksel Geometri

Geometri bu anlayış içinde salt formel bir disiplindir; buna *saf geometri* de diyeceğiz. O halde, saf geometri (ister Euclidesci, isterse Euclidesci olmayan türden olsun)nin belirli bir konusu yoktur; özellikle fiziksel uzaya ilişkin bir sav içermemektedir. Tüm teoremleri analitiktir; olgusal içerikten yoksun olmaları nedeniyle kesinlikle doğrudurlar. Saf geometrinin anlamını daha iyi belirlemek için, film yapımcılarının başvurdukları bir söz biçimini kullanabiliriz: İlkel kavramlarla onların geometrik şekillere ilişkin alıştığımız anlamları arasında herhangi bir benzerlik sadece rastlantıdır; postulatlarımız ne geometrik şekillerin, ne fiziksel uzayın özelliklerini, ne de cisimlerin ilişkilerini dile getirmektedir.

Fakat, film yapımcılarının inkârı gibi, hiç değilse Euclides geometrisi için ileri sürülen bu saflık savı da pek inandırıcı görünmüyor; en azından tarihsel olarak geçerli değildir. Kökeninde bu geometri, alan ölçmeye ilişkin ve astronominin gelişmesiyle ortaya çıkan birtakım empirik buluşların genellemelerine dayanır. Bu açıdan bakılınca, geometri olgusal içeriklidir; fiziksel uzayın yapı teorisi, ya da kısaca *fiziksel geometri* adını verebileceğimiz empirik bir bilimdir. Öyle ise, saf geometri ile fiziksel geometri arasındaki ilişki nedir?

Fizikçi, fiziksel cisimlere ilişkin önermelerinde nokta, doğru gibi kavramları kullandığında, bu terimlere aşağı yukarı belirli somut anlamlar verir. Onun kulla-

nımında, “nokta” terimi iğne uçları, kesişen saçlar gibi nesnelerin örneklediği noktaları adlandırır. Aynı şekilde, “doğru” terimi gergin ipliklerin ya da türdeş bir ortamda güneş ışınlarının örneklediği nesnelerin adıdır. Fiziksel geometride tüm diğer terimlerin de böyle somut fiziksel anlamları vardır. Şimdi, buna bakarak, fiziksel geometriyi, saf geometrinin (modern mantığın dilini kullanarak) semantik bir yorumu sayabiliriz. Daha genel bir deyişle diyebiliriz ki, saf matematiksel bir teorinin semantik bir yorumu, teorideki her ilkel terime (dolayısıyla her tanımlanmış terime) belirli bir anlam vermek demektir. Fiziksel geometri söz konusu olduğunda verilen anlam biraz önce de belirttiğimiz gibi, fiziksel niteliktedir. İstersek geometriye aritmetik bir yorum da verebiliriz; bunun için ilkel terimlere aritmetik anlam vermek yeter. Geometrinin aritmetik yorumu, sistemin tutarlılık ve diğer mantıksal özelliklerini incelemek yönünden son derece önemlidir; ancak bu konuyu burada ele almayacağız.

Geometrik teorinin başlangıçta yorumlanmamış (değişken) ilkel terimlerine daha sonra verilen fiziksel anlamlar, dolaylı yoldan, teorinin tüm diğer tanımlanmış terimlerine geçer; böylece bu terimlerle formüle edilmiş postulatlarla teoremler de birer önerme kalıbı değil, fiziksel anlamları belli, yanlış ya da doğru oldukları anlamlı olarak sorulabilen birer önermedir. Örneğin, Euclides geometrisinde yorumlanmamış şu postulatı ele alalım: x, y gibi 1’inci türden her iki nesneye karşılık 2’nci türden l gibi bir nesne vardır, öyle ki, hem x hem y , l ile 1 no.’lu ilişki içindedir. Bu postulatı geçen üç değişken terim yorumlanmadıkça postulatın doğru olup olmadığını sormanın anlamı yoktur. Ama fiziksel bir yorumla postulat şöyle bir önermeye dönüşür: x, y gibi herhangi iki fiziksel nokta için l gibi fiziksel bir doğru vardır, öyle ki, hem x , hem y , l üzerinde bulunur. Bir fiziksel hipotez niteliğinde olan bu önermenin doğru olup olmadığı anlamlı olarak sorulabilir. Aynı şekilde üçgenin iç açılarının toplamına ilişkin teorem, üç ışık ışını ile çevrili kapalı bir şeklin (fiziksel anlamda) iç açılarının toplamı iki dik açıya eşittir, savına dönüştürülebilir.

Böylece, herhangi saf geometrik bir teoriyi (Euclidesci olsun veya olmasın) fiziksel yorumlamayla bir fizik hipotezleri sistemine dönüştürebiliriz. Sistemi oluşturan hipotezlerin doğru olması halinde, fiziksel uzayın yapısına ilişkin bir teori ortaya çıkmış olur. Fakat fiziksel olarak yorumlanmış bir geometrik teorinin olgusal doğruluk sorunu, salt matematiğin değil, empirik bilimin bir sorunudur; sistematik gözlem ya da deneye başvurularak çözümlenebilir ancak. Bu konuda matematikçinin ileri sürebileceği tek sav şu olabilir: Teorinin fiziksel olarak yorumlanmış tüm postulatları doğru ise, teoremleri de zorunlu olarak doğrudur, çünkü teoremler onların mantıksal sonuçlarıdır. Buna bakarak denebilir ki, fiziksel uzayın yapısı yönünden Euclidesci veya Euclidesci olmadığını saptamak için, yapmamız gereken tek şey, fiziksel yorumlanmış postulatları test etmektir. Ne var ki, bunu doğrudan yapmaya pek olanak yoktur; fizik teorilerinin pek çoğunda olduğu gibi, geometride de bu temel hipotezler deneysel yoldan yoklanmaya elverişli değildir. Özellikle, Hilbert’in Euclides geometri sisteminde bir doğru üzerinde bazı sonsuz nokta kümelere ilişkin Cantor’un süreklilik aksiyomu ile paralel aksiyom bu türden hipotezlerdir. Bu nedenle, bilimsel teoriler gibi fiziksel bir geometrinin de empirik olarak

doğrulanması ancak dolaylı yoldan olabilir; şöyle ki, teoremin hipotezlerinden, deneysel teste elverişli birtakım mantıksal sonuçlar ya da öndeyiler çıkarılarak, gözlem ya da deney sonuçlarıyla karşılaştırılır. Deney sonuçları hipotezden çıkarılan öndeyileri tutarsa, hipotez kanıtlanmış olur, ancak bu bir ispat değildir. Tersine, deney sonuçlarının bir tekinin olumsuz olması hipotezi yanlışlamaya yeter. Tüm hipotezleri böyle kanıtlanan bir teori, olumsuz bir deney sonucu çıkmadığı müddetçe doğru kabul edilebilir.

Bu dolaylı doğrulama bağlamındadır ki, matematik ve mantık empirik bilimler için paha biçilmez değer kazanır. Mantık ve matematik olgusal dünyaya ilişkin kendiliklerinden herhangi bir sav ileri sürmezlerse de, Newton mekaniğinin yasaları ya da Euclides geometrisinin fiziksel yorumlanmış postulatları gibi soyut teorik hipotezlerden, doğrudan deneysel teste vurulabilir somut sonuçlar çıkarmayı sağlayan etkin ve vazgeçilmez çıkarım yöntemlerini verirler...

Öyle ki, örneğin, Euclides geometrisinin postulatlarından, içerdikleri temel kavramlar nasıl yorumlanırsa yorumlansın, bir üçgenin iç açılarının toplamına ilişkin teoremin çıkarsanabildiğini görmekteyiz. Yani, getirilen yorum ister fiziksel, ister başka türlü olsun çıkarsama olanağı kaybolmamaktadır. Sözü geçen teorem, geometriye fiziksel yorum verildiğinde, deneysel yoklanmaya elverişli bir önerme niteliğindedir. Üçgenin iç açılarının toplamının iki dik açıya eşitliğini içeren bir önerme, eliptik ve hiperbolik geometrilerin postulatlarına ters düşmesi nedeniyle, kesin bir deneysel test örneği sağlar bize. Nitekim Gauss çapında büyük bir matematikçinin bu deneysel testi yaptığını biliyoruz. Gauss, optik yöntemler kullanarak (dolayısıyla fiziksel doğru çizgileri ışık ışınlarının yolları diye yorumlayarak) üç dağ tepesinin oluşturduğu büyük bir üçgenin iç açılarının toplamını ölçerek saptar. Sonucun, ölçme hata payı içinde iki dik açıya eşit olduğu görülmüştür.

6. Poincaré'nin Konvansiyonel Görüşü

Ancak, Gauss'ın bundan farklı bir sonuç bulduğunu düşünelim. O zaman Euclides geometrisinin fiziksel yorumunun yanlış olduğunu, ya da başka bir deyişle, fiziksel uzayın bu geometriye ters düştüğü gibi bir yargıya mı ulaşacaktık? Değil elbette. Çünkü, sonucun farklı çıkmış olmasını, ışık ışınlarının yollarının bir kuvvetin etkisinde saptırıldığı, bu nedenle doğrusal olmadığı gibi bir olasılıkla açıklama yoluna gidebilirdik. Aynı açıklama yoluna beklentilere aykırı düşen tüm diğer ölçmelerde (örneğin, düzlem şekillere ilişkin çakışma teoremlerine aykırı sonuç veren deneysel testlerde) de başvurulabilir. Bu nokta, sanıldığı kadar önemsiz değildir. Büyük Fransız matematikçisi ve kuramsal fizikçisi Henri Poincaré geometriye ilişkin ünlü konvansiyonel görüşünü bu tür bir düşünce üstüne kurmuştu. Ona göre, sonucu ne olursa olsun hiçbir empirik test fiziksel uzaya ilişkin Euclides anlayışını kesinlikle geçersiz saymamız için yeterli kanıt oluşturmaz. Başka bir deyişle, fizik bilimlerinde Euclides geometrisinin geçerliği daima korunabilir. (Gerektiğinde bu bilimlerin teorilerinde birtakım değişikliklere giderek, örneğin, kimi kuvvetlerin saptırıcı etkileri varsayılarak.)

O halde, fiziksel uzayın Euclides geometrisinin öngördüğü yapıda olup olmadığı nesnel değil konvansiyonel bir sorundur. Bu geometrinin ne pahasına olursa olsun korunması kararı, Poincaré'ye göre, öteki geometrilerle karşılaştırıldığında sağladığı büyük kolaylığa (ya da basitliğe) dayanır.

Ne var ki Poincaré'nin görüşü oldukça yüzeysel kalmaktadır. Konvansiyonizm haklı olarak G gibi bir fiziksel geometrinin daima P gibi geometrik nitelikte olmayan (deneysel testte kullanılan gözlem ve ölçme araçlarına ilişkin fiziksel teori de dahil olmak üzere) birtakım fiziksel hipotezlere dayandığına dikkatimizi çekmekte, ve G'ye ilişkin deneysel testin aslında yalnız G'ye değil, G.P'nin birlikte oluşturduğu sistemin bütününe yönelik olduğunu göstermektedir. Şimdi, G.P'den elde edilen öndeşiler deneysel olarak yanlışlanırsa, bu kuramsal yapıda bir değişikliği gerektirir elbette. Klasik fizikte, G her zaman fiziksel yorumuyla Euclides geometrisi GE demektir. Bu durumda deneysel kanıtlar teoride bir değişiklik gerektirdiğinde, değişikliğe uğrayan GE değil, yalnızca P idi. Oysa Poincaré'nin, bu işlemin daima sağladığı büyük kolaylık nedeniyle ayırt edildiği savı tümüyle doğru değildir. Çünkü, gözöründe tutulması gereken kolaylık sistemin yalnız G bölümüne ait değil, G.P'nin tümüne ait bir kolaylıktır. Öyleyse, gerektiğinde sadece P'de değişiklik yaparak Euclides geometrisini koruma yerine, başka geometri sistemlerine giderek, emirik kanıtlara uygun daha basit bir teori bütünlüğü elde edilebileceği pekâlâ düşünülebilir.

Gerçekten, bu aşamaya fizikte genel görecelik kuramıyla ulaşılmıştır. Daha önce belirttiğimiz biçimde geometrinin ilkel terimleri fiziksel olarak yorumlandığında, astronomide ulaşılan birtakım sonuçların, G olarak Euclides-dışı bir geometriyle birleşen fiziksel bir teori için iyi kanıt oluşturduğunu görmekteyiz. Bu teoriye göre, fiziksel evren geometrik yapısı son derece karmaşık üç boyutlu, kavisli bir uzaydır; oylumu sonlu, ama her yönde sınırsızdır. Ne var ki, Gauss'un deneyinde olduğu gibi görecel olarak küçük alanlarda Euclides geometrisinin, uzayın geometrik yapısını temsil etmede yeterli olduğu söylenebilir. Söz konusu teoride fiziksel uzay için öngörülen yapı türü iki boyutlu bir alanda bir benzetmeyle gösterilebilir. Bunun için küre yüzeyini örnek alacağız. Daha önce de belirttiğimiz gibi, bu tür bir yüzeyin geometrik yapısını betimlemede “doğru” ilkel terimi, “büyük çember” diye yorumlanarak eliptik geometriye başvurulur. Bu anlamda bir kürenin yüzeyi, Euclides-dışı iki boyutlu, kavisli bir uzaydır. Oysa bir düzlem iki boyutlu Euclides uzayıdır. Düzlem tüm yönlerde sınırsız ve sonsuz büyüklükte olduğu halde, küresel yüzey her yönde sınırsız, ama sonlu büyüklüktedir. İki boyutlu bir fizikçi düşünelim; “doğrular” üzerinde yürüyen bu fizikçi ne denli giderse gitsin bir sınırla karşılaşmayacak, yalnızca zaman zaman hareket noktasına döndüğünü görecektir. Aynı durum evrenin tümünde de geçerlidir; yeter ki böyle bir yolculuk için kişinin ömrü ve teknik olanakları elversin. İlginç nokta şu ki, öyle bir dünyanın fizikçileri, üç boyutlu uzay duygusundan yoksun olsalar bile, gezindikleri iki boyutlu uzayın kavisli olduğunu emirik olarak belirleyebilirler. Bunu, doğrular üzerinde yürüyerek öğrenebilecekleri gibi, bir üçgenin iç açılarının toplamına bakarak da saptayabilirler. Bir başka yöntem de, bu yüzey üzerinde herhangi bir dairenin çevresiyle çapının oranını ölçmekle belirlemektir. Görülecektir ki, bu oran π sayısından azdır.

Görecelik kuramının fiziksel uzaya malettiği geometrik yapı, küresel yüzeyi benzeri üç boyutlu bir uzaydır. Aslında bu uzayı, kavisi bir noktadan diğerine değişen bir patatesin kapalı ve sonlu yüzeyi ile daha iyi temsil edebiliriz. Fiziksel evrenimizde, uzayın bir noktadaki kavisi çevresindeki kütlelerin dağılımına bağlıdır; güneş gibi büyük kütlelerin yakınında uzay aşırı derecede kavislidir. Oysa, kütle yoğunluğunun zayıf olduğu bölgelerde uzayın yapısı Euclides geometrisinde öngörülene yaklaşmaktadır. Kütle dağılımı ile uzayın kavisi arasındaki ilişkiyi içeren hipotez güneşin çekim alanından geçen ışınlar üzerindeki gözlemlerle büyük ölçüde doğrulanmıştır.

Fiziksel evrenin yapısını betimlemede kullanılan geometrik teoriyi, eliptik geometrinin bir genellemesi olarak niteleyebiliriz. Bu geometriyi, salt matematiksel bir teori olarak ilk kez Riemann oluşturmuştur. Başlangıçta herhangi bir uygulama için somut bir olanak taşımayan bu geometri genel relativitenin kurulmasında bu olanağı bulur. Einstein'ın fiziksel uzayın yapısını nitelemede aradığı kavramsal aracı Riemann'ın soyut sistemi sağlar. Bu olay önemli bir noktaya ışık tutma açısından da ilginçtir: Sıradan insanın gözünde yarırsız olan soyut matematiksel bir çalışmanın bilimin gelişmesi için son derece yararlı olabileceği.

Kuşkusuz, fiziksel olarak yorumlanmış geometrik bir teorinin geçerliliği deneysel olarak ne denli yoklanırsa yoklansın, matematiksel kesinlikle hiçbir zaman saptanamaz. Böyle bir teori, tıpkı bilimsel bir teori gibi, ancak az ya da çok doğrulanmış olabilir. Bu yazıdaki açıklamalarımızdan da anlaşılabilirliği gibi, empirik konularda matematiksel kesinlik arayışı yanıltıcıdır; sonuçsuz kalmaya mahkûm bir çabadır. Çünkü, daha önce de değindiğimiz gibi, matematiksel kesinliğe ancak olgusal içerikten tümüyle yoksun, analitik türden sistemlerde ulaşılabilir. Einstein'ın şu sözlerinde bu düşüncenin özetini bulmaktayız: "Matematğin yasaları gerçek dünyaya ilişkin oldukları ölçüde kesinlikten, kesin oldukları ölçüde gerçek dünyaya ilişkin olmaktan uzaktır."

[Bu metin, *The World of Mathematics*, Vol. III, (Ed. J. R. Newman)'dan alınmıştır.]

MODERN MATEMATİKSEL DÜŞÜNCE

Carrol V. Newsom (1936)

Matematiğin durağan olduğunu sık sık duyarız. Bundan daha yanıltıcı bir düşünce olamaz. Kuşkusuz matematiğin durağan olduğu, yaratıcı olanaklarının göz ardı edildiği uzun dönemler olmuştur. Ancak, içinde bulunduğumuz dönem, matematiksel gelişme yönünden, son derece parlak ve atılımlı bir dönemdir. Bunu bir ölçüde matematiğin yapı ve niteliğini daha iyi anlamış olmaya borçluyuz.

Matematiğin ne olduğu, ya da ne olmadığı büyük ölçüde yanıtı isteğe kalmış bir sorundur. Bu yüzden matematikçilerin aynı görüşü paylaşmadıklarını biliyoruz. Bertrand Russell matematiği, “ p ise q ” biçimini alan tüm önermelerin kümesi olarak tanımlamıştı. Biz bu çalışmamızda, matematiksel bir sistemi iki ana öğeden (aksiyomlarla bir mantık dizgesinden) oluşan bir çalışma olarak nitelemeyi yerinde bulmaktayız. Buna göre, matematik o tür dizgelerin tümünü kapsayan bir disiplindir. Gerçi bu niteleme Russell’ın tanımına biraz benzerlik gösteriyorsa da, bizim açımızdan daha uygun olduğu söylenebilir. Sözüünü ettiğimiz iki ana öğenin birleşmesini içeren çalışma genellikle “matematiksel çözümleme yöntemi” diye bilinir.

Her matematiksel dizgenin başlangıcı aksiyomatik düşünceden kaynaklanır. Matematiksel dizgenin kurulmasında, postulat ya da aksiyomların önemini vurgulamak için aksiyomatik yöntemden söz edilir. Bu nedenle işe ilk öğeyi oluşturan aksiyomları ele almakla başlamak yerinde olacaktır. Sırası gelmişken, modern matematikte postulat ile aksiyom kavramlarının özdeş olduğunu belirtmeliyiz. “Aksiyom”, “postulat”, “varsayım” gibi sözcükler genellikle aynı anlamda kullanılan terimlerdir.

Aksiyomların niteliği sorununa ciddi bir incelemeyle eğilen ilk düşünürün Aristoteles (İ.Ö. 384-322) olduğunu söyleyebiliriz. Ne ki, bu konuda onun Platon’dan büyük ölçüde etkilenmiş olduğu ileri sürülebilir. Mantıkçılar haklı olarak Aristoteles’e mantık disiplinin babası gözüyle bakarlar. Aristoteles’in özgün mantık dizgesini oluştururken matematiksel modellerden yararlandığı kesindir; ne var ki, matematikçiler onun aksiyomlar üzerindeki çalışmasıyla dedüktif mantık alanındaki katkılarını görmezlikten gelme gibi bir tutum içinde olmuşlardır.⁽¹⁾ 1904’te Hei-

(1) Bu yargıya katılmak güçtür. Aristoteles’in matematiksel modellerden yararlanarak mantığı oluşturduğu, en azından kuşku götürmeyen bir savdır. (Çeviren).

berg, Aristoteles'in matematiksel düşüncelerini içinde toplayan çok değerli bir çalışma ortaya koymuştur. Buna baktığımızda, Aristoteles'in matematiksel bilginin temel niteliği üzerinde oldukça modern düşünceleri olduğu görülmektedir.

Hiç kuşkusuz, en ünlü matematiksel sistemi, Aristoteles'in yaşam döneminden kısa bir süre sonra gelen Euclides ortaya koymuştur. Euclides ünlü İskenderiye Üniversitesi'nde ilk matematik profesörüydü. Buna bakarak çalışma yaşamının yaklaşık İ.Ö. 300 sıralarında olduğu söylenebilir; ama kişi olarak ona ilişkin fazla bir şey bilmediğimizi söyleyemeyiz. Büyük bir olasılıkla Mısırlı değil, Grek kökenliydi. Matematikte ilk mantıksal düzenlemeyi gerçekleştirme başarısının ona ait olduğuna kesin gözüyle bakılabilir. *Elementler* adını taşıyan anıtsal yapıtını orta öğretimden geçen her öğrenci bilir. Günümüzde okutulan hemen tüm düzlem ve cisimler geometrisi ders kitaplarında yer alan konular *Elementler*'i oluşturan on üç kitaptan 1, 3, 4, 6, 11 ve 12 numaralı altı kitapta toplanmıştı. Yapıtın ne ölçüde Euclides'in özgün çalışmasına dayandığı henüz yanıtlanmış bir soru değildir. Bilinen şu ki, Manisalı Theudius'un daha o zaman ünlü olan geometri ders kitabı Euclides'in elinde bir örnek olarak vardı. Öte yandan Platon ile Aristoteles'in kimi öğrencilerinin de onu etkilemiş olması büyük bir olasılıktır. Ama gerçek şu ki, Euclides'in geometriyi belirtik tanım ve aksiyomlarıyla mantıksal bir düzende sunması matematik düşünce tarihinde bir dönüm noktasıdır. Verdiği tanım ve aksiyomların, modern ölçütler bakımından kimi yetersizliklerine karşın, Euclides'in başarısı ne denli vurgulansa yeridir.

Aksiyomatik yöntemin gelişiminde ikinci büyük dönüm noktası, XIX. yüzyılın ilk yarısında oluşur. Bolyai ve Lobachevsky dönemi diyebileceğimiz bu dönem gerçekten modern matematiksel düşünmenin doğuşunu getirmiştir. Bu iki matematikçinin birbirinden bağımsız olarak oluşturdıkları Euclides-dışı geometri klasik geometrinin egemenliğini kıran ilk olaydır. Bu yeni gelişmenin temellerini atanların başında Saccheri ile Gauss gelir. Ne ki, daha 21 yaşındayken Bolyai'nin babasına yazdığı, "Hiçten yepyeni bir evren yarattım," cümlesini bir dönemin kapanış, yeni bir dönemin başlangıç haberi sayabiliriz.

Euclides geometrisiyle Bolyai ve Lobachevsky'nin oluşturdıkları yeni geometri arasındaki tek temel fark, paralel postulatının yerine başka bir varsayımın konmuş olmasıdır. Denebilir ki, başlangıçta böyle bir değişikliğin ne gibi teoremlere yol açacağı merakıyla yola koyulan bu iki matematikçi yaptıklarına belki de bir tür oyun gözüyle bakınırlardı. Oysa ortaya son derece garip bir geometri çıkmıştı. Euclides geometrisinde 5. postulattan bağımsız olan teoremler geçerliklerini yeni geometride de koruyordu. Diğer teoremlerin yerini ise inanılması güç olan birtakım yeni önermeler alıyordu. Bunlar arasında, örneğin, bir düzlemdeki bir doğruya herhangi bir noktadan bir değil iki paralel doğru geçebileceği; gene, bu noktadan ilk iki doğru arasındaki açıda birbiriyle asla kesişmeyen sonsuz sayıda doğru geçebileceği ... gibi önermeler vardı.

Sonuç bu kadarla da kalmıyordu: 1854'te Göttingen Üniversitesi'nde Riemann daha değişik bir geometri ortaya çıkarır. Paralel postulatın yerine başka bir varsayım koyan Riemann'ın elde ettiği geometride tüm doğrular sonlu uzunlukta olup bir üçgenin iç açılarının toplamı iki dik açının toplamından büyüktür.

İlk bakışta bu tür sonuçlar garip, belki de saçma görünebilir; oysa matematikçiler için son derece önemliydi. Bir matematik sistemin temelini oluşturan postulat ya da aksiyomların “apaçık doğrular” olduğu düşüncesi giderek geçerli olmaktan çıkar. Artık postulatlarla onlardan çıkarsanan teoremlerin sağduyumuza doğru gelmesi gereği koşul olma değerini yitirir. Kimi aksiyomlar doğru, kimi aksiyomlar yanlış görünebilir; kimi aksiyomlar da doğruluğu belirsiz önermeler olarak kalabilir. Öyle de olsa, oluşturulan sistem kendi içinde mantıksal tutarlılığı olmak koşuluyla, matematikte geçerli bir sistem olarak benimsenebilir. Gerçekten, matematikte anahtar terim doğruluk değil, geçerliliklerdir. İyi bir aksiyom kümesini belirleyen bazı özellikler vardır kuşkusuz; ne ki, “aksiyom” dediğimiz önermeler büyük ölçüde seçime bağlı öncüllerdir.

Aksiyomatik yöntem, geçen yüzyıl boyunca, giderek daha sıkı ölçütlere bağlanma sürecini yaşar. Sorunun ilk sistematik ele alınışı, 1889’da Peano ile başlar. Yüzyılımızın başlarında, Amerika Birleşik Devletleri’nde E. H. Moore ve onu izleyenler bazı önemli katkılarda bulunurlar. Ama en etkili çalışmayı, hiç kuşkusuz, 1898-99’da Göttingen Üniversitesi’nde geometri okutan David Hilbert’e borçluyuz.

Son yıllarda yeni matematiksel sistemler oluşturma yolunda çok belirgin bir eğilim vardır. Görüldüğü kadarıyla yeni bir sistem için tek gerekli şey, bir aksiyomlar kümesi bulmaktır. Aksiyom oluşturma, geniş ölçüde seçime bağlı olduğuna göre, günümüz matematiğindeki gelişmelerin niteliğini anlamak zor değildir.

Pek çok kimse için garip gelen bu gelişmelerin aksiyomların niteliği ve işlevi iyi anlaşıldığında, açıklık kazanacağını söyleyebiliriz. Matematikçilere çoğu kez şu türden sorular yöneltilmektedir: “Bu kadar değişik türden uzay nasıl olabilir?” Ya da, “Üçten fazla boyuta olanak var mıdır?” Unutulmaması gereken bir noktayı bir kez daha yineleyelim: Matematikçi, bilinen anlamıyla gerçek dünyayla ilgilenmez; konusu bu değildir. Matematikçi seçtiği uygun aksiyomlarla dilediği türden uzay veya dilediği sayıda boyut üzerinde teori oluşturulabilir. Matematikçinin dikkatini geleneksel türden sistemler üzerinde toplamakla kalması beklenemez elbet. Kaldı ki, matematiğin günümüzde geçerli sayılan hiçbir tanımında, matematiksel sistemleri, geçmişte olduğu gibi sayı, doğru, uzay gibi kavramlarla sınırlama gereği yoktur.

Aksiyomların Niteliği

Aksiyomların kimi temel özelliklerini belirlemede matematiğin beklendiğinden daha ileri gittiğini söyleyebiliriz. Aksiyomların diline ilişkin bir açıklamada bulunmadık henüz; oysa teknik açıdan, bizim yaptığımız türden bir tartışmada, buna öncelik vermek gerekir. Bu dilin bazı öğeleri matematikçi için bir sorun yaratmamıştır. Anlatım ve biçimde etkinlik sağlamaya yarayan sözcükler bu türdendir. Dilin diğer bazı öğeleri birtakım sıkıntılara yol açmıştır. Özellikle sözcüklerin tanımlanması pek çok matematikçiye uykusunu kaçırta bir konudur. Matematikçi döngül tanıma düşmekten sakınır. Sözlükler genellikle A terimini B terimine, B terimini C terimine başvurarak tanımlama yoluna gider; ama çok geçmeden C’nin, ya da onu izleyen terimin A’ya başvurularak tanımlandığı görülür. Böylece sonunda A terimi,

A'nın kendisiyle tanımlanmış olur. Sözlüklerde bu yöntem yararlı, hatta kimi kez kaçınılmaz olabilir; ancak matematikte bu tür döngül tanımlara yer verilmez. Kaldı ki, matematikte olduğu gibi, diğer bilimlerde de kimi temel terimlerin tanımlanmaksızın kullanılması gereği anlaşılmıştır. Bu bir kusur ya da eksiklik gibi görünebilir; öyle de olsa, önlenemez. Aslında matematik açısından bu önemli bir sorun da değildir; çünkü zaten matematiksel sistemler, çoğu kez içerdikleri sözcükler anlamlarından soyutlanarak oluşturulur. Ancak tanımlanmaksızın alınan terimlerin elden geldiğince en az sayıda tutulması istenir. Bu yönde oldukça yoğun çalışma yapılmıştır. Örneğin, Euclides geometrisinde bunların sayısının üçe indirilebileceği gösterilmiştir. Başka bir deyişle, sistemin tüm diğer terimleri, tanımlanmaksızın alınan üç terime dayanılarak tanımlanabilmektedir. Bunlar, “nokta”, “doğru” ve “eş” terimleridir. Kuşkusuz, az çok değişik bir başka grup terimle de aynı sonuç alınabilir. Örneğin, “nokta”, “arasında” ve “eş” böyle alternatif bir kümedir. Burada gözden kaçmaması gereken bir nokta var: Bir sistemde tanımlanmaksızın alınan terimler varsa, onlar aracılığıyla tanımlanan diğer terimlerin de anlamları belirsiz kalmaktan kurtulmaz. Bu nedenledir ki, Bertrand Russell'ın, “Matematik ne neye ilişkin konuştuğumuzu bildiğimiz, ne de söylediklerimizin doğru olup olmadığını bildiğimiz bir konudur” belirlemesi bizi şaşırtmamaktadır.

Yukarda da değinildiği üzere, tanım kavramının matematikte kendine özgü bir yeri vardır. Sözlüğü ilkel terimlerin ötesinde genişletme gereği duyulduğunda, yeni terimlere el atılır. Ne var ki, sisteme girecek her yeni terimin ilkel terimlere dayanılarak tanımlanması gerekir. Yeni terimlerin ilkel terimlerle tanımlanma işleminde izlenecek yol ve aralarında kurulacak ilişki tümüyle açıklık kazanmış değildir henüz. Kimi kez daha fazla açılma olanağı vermeyen bir sistemde yeni terimlere başvurmakla bir gelişme sağlandığı izlenimini yaratma çabalarına rastlamaktayız. Ancak yeni olanaklar taşıyan bir kavramı simgelemeyen hiçbir terim, ne denli işe yarar görünürse görünsün, gerçek bir gelişmeye yol açamaz.

Aksiyomların dili ve tanımlamanın işlevi yanı sıra, ikinci önemli nokta, “aksiyom” dediğimiz ilkel önermenin biçimine ilişkindir. Genellikle egemen olan görüşe göre, aksiyom (ya da, postulat) özne-yüklem ilişkisinde bir doğruluk savıdır. Ne var ki, burada hemen bir güçlkle karşılaşmaktayız. Örneğin, geometride herkesin bildiği, “iki nokta bir doğruyu belirler,” aksiyomunu alalım. Bu önerme, nokta ile doğru arasında bir ilişkiyi dile getirmektedir. Ancak bu iki terim (nokta ile doğru) sistemde tanımlanmaksızın yer alan ilkel terimlerdir; anlamları belirsizdir. Geometrice kalem ucunun kâğıtta bıraktığı küçük izi nokta, bir çizgiyi ya da cetvel kenarını doğru olarak düşünebilir. Böyle düşündüğünde aksiyom onun için doğrudur. Oysa, noktayı toplu iğne başı, doğruyu çamaşır ipi olarak yorumlayan başka bir kimse aksiyomu saçma bulabilir. Ama birbirine ters de düşse, iki yoruma da olanak vardır. Dahası, ilkel terimler anlam belirsizliği nedeniyle başka yorumlara da elverişlidir. Aksiyom bir yoruma göre doğru, başka bir yoruma göre yanlış olabilir. Ancak aksiyomun içerdği ilkel terimler tanımlanmadığı için ne doğruluğu, ne de yanlışlığı kesindir; sadece doğruluğu varsayılır. Bu demektir ki, aksiyom yorumlanmadıkça gerçek anlamda bir önerme değildir. Çünkü önermeyi belirleyen en önemli özel-

liği doğru ya da yanlış olmasıdır. Öyleyse, aksiyom için önerme biçiminde bir cümle diyeceğiz. Matematiğe yeni başlamış bir kimse açısından bu durum pek iç açıcı değildir elbet. Matematikçinin kullandığı terimlerin pek çoğunun, tanımlanmış olmasa da bizim için bazı anlamları vardır. Değişik yorumlara yol açan bu durum, terimler yerine simgeler kullanmak yolundan önlenabilir. Örneğin yukarda sözü geçen aksiyomu, “İki x bir y ’yi belirler,” diye yazabiliriz. Şimdi bu yeni ifade bir önerme değil, önerme biçiminde bir cümledir. x ve y simgeleri birtakım nesnelerle yorumlanmadıkça, cümle ne doğru ne de yanlıştır.

Matematiçi, “ x , y ’yi belirler,” cümlesine baktığında, ister istemez fonksiyon ilişkisini düşünür. Oldukça yüzeysel bir tanımlamayla, x ve y gibi iki değişkenden, y ’yi bağımlı, x ’i bağımsız değişken saydığımızda, (yani, x verildiğinde y belirleniyorsa) ikisi arasındaki ilişkiyi fonksiyonel sayıp y ’yi x ’in fonksiyonu diye düşünebiliriz.

Görülüyor ki, simgesel olarak dile getirilen bir aksiyom, bir önerme biçiminde matematiksel bir fonksiyon özelliği sergilemektedir. Bu nedenle bir aksiyom için “tipik bir önerme fonksiyonu” diyebiliriz. “Önerme fonksiyonu” deyimini Frege’nin yazılarında bulmaktayız; ne var ki, bu düşüncenin gerçek anlamda geliştirilip uygulanmasını Bertrand Russell’a borçluyuz. Russell’ın bu kavrama ilişkin söylediğini gözden geçirme ilginç olur. Önerme fonksiyonunu şöyle tanımlamaktadır Russell: “Bir önerme fonksiyonu bir ya da daha fazla değişkeni içine alan, değişken yerine anlamı belirli terimler konduğunda önermeye dönüşen bir cümledir. Örneğin, ‘ x bir insandır,’ ya da ‘ n bir sayıdır,’ dediğimde bir önerme fonksiyonu ortaya koymuş olurum.”

Hemen belirtelim ki, matematiksel bir sistemde önerme fonksiyonu olan sadece aksiyomlar değildir. Aksiyomlardan mantıksal olarak çıkarsanan teoremler de aslında bu türden cümlelerdir.

Matematikçiler önerme fonksiyonu kavramına büyük önem verirler. Kavramın ancak yüzyılımız başlarında etkinlik kazanması oldukça şaşırtıcıdır. Belki de önerme denilen pek çok aksiyom, dolayısıyla teoremler, aslında birer önerme fonksiyonudur. C. J. Keyse’nin ilginç bulduğumuz şu sözleri bu gerçeği dile getirmektedir: “Matematikçilerin pek çok tartışma ve anlaşmazlıklarını bu olaya bağlayabiliriz. Gerçekten, içeriği belirsiz cümleleri, doğruluğu (ya da yanlışlığı) belirgin önermeler imiş gibi ileri sürmekten daha fazla, birtakım sonu gelmez tartışmalara, içinden çıkılmaz anlaşmazlıklara ne yol açabilir?”

Bir Aksiyom Kümesinde Aranan Özellikler

Buraya kadarki tartışmamız tek tek aksiyomlara ve özelliklerine ilişkindi. Matematiksel bir sistem söz konusu olduğunda aksiyomlarla tek tek değil, küme olarak ilgilenmek zorundayız. Bir aksiyom kümesinde aranan özellikleri *tutarlılık*, *bağımsızlık* ve *kategorik olma* diye üç başlık altında toplayabiliriz.

Bir aksiyom kümesinde tutarlılık, soruna yüzeysel baktığımızda, oldukça basittir. Ancak soruna ciddi olarak eğildiğimizde, son derece soyut ve güç bir kavramla karşı karşıya olduğumuzu görmekte gecikmeyiz. Nitekim, modern matematikçiler

arasında en seçkin kimi kafaların günümüzde bile bu sorunla çok yakından ilgilen-diklerini biliyoruz.

Bir aksiyom kümesini, herhangi bir çelişki içermiyorsa, tutarlı diye niteleyebiliriz. Başka bir deyişle, birbirini tutmayan, çelişik teoremler veren bir aksiyom kü-mesi kendi içinde çelişki taşımaktadır; tutarlı olamaz. Tutarlılık kavramının bu açıklamasında fazla bir güçlük yoktur. Ancak matematiğin bu konuda kullanma gereğini duyduğu mantıksal terminoloji kimi sınırlamalar getirmekle güçlüğü yol açmaktadır. Matematikçi bu güçlükle, modern mantıksal paradoksları incelediğin-de karşılaşmaktadır.

Örnek olarak, basitliği ve iyi bilinmesi nedeniyle Russell paradoksunu alabiliriz. Bu paradoks, mantığın ilkel terimlerinden biri olan “küme” (ya da “sınıf”) terimi-ne dayanmaktadır. Küme kabaca “koleksiyon” ya da “bir arada düşünülen çokluk” anlamına gelir. Russell paradoksu, kümelerin, “olağan” ve “olağanüstü” diye ikiye ayrılmasından kaynaklanır. Kendisini bir eleman olarak içermeyen küme olağan kümedir; örneğin, yıldızlar kümesi bir yıldız olmadığı için olağandır. Oysa, kavramlar kümesi bir kavram olduğu için kendisini içerir, olağanüstü bir kümedir. Şimdi tüm olağan kümeleri içine alan bir küme düşünelim ve buna K diyelim. So-ru şudur: K kümesi olağan mıdır, yoksa olağanüstü müdür? Bu soru bizi bir çık-maza sokar; öyle ki, çıkmazdan nasıl kurtulacağımız üzerinde ne matematikçiler, ne de mantıkçılar anlaşmış değillerdir. Problem, matematiğin sonsuzluk kavramıyla ilişkilidir; çözümü belki de bu kavramın ya da küme kavramının bir şekilde sınır-landırılmasını gerektirmektedir. Açık olan şudur: Çelişki kavramı ilk bakışta sandı-ğımız kadar basit ve açık değildir.

Hilbert ile onu izleyenler yıllarca salt kuramsal matematiğin tutarlılığını ispat-lamaya çalışırlar. Son derece karmaşık simgesel dizgelerle uğraşmayı gerektiren bu çalışmanın başarılı olduğu kolayca söylenemez. Üstelik Gödel’in aksiyomatik sis-temlere ilişkin ortaya koyduğu teoremler bu yöndeki çabaları sürdüren matematik-çiler için derin bir hayal kırıklığı yaratmıştır. Gödel, 1931’de, kaba bir anlatımla, matematiksel bir sistemin tutarlılığına ilişkin her ispatın kesin bir çelişki içerdiğini gösterir. Yani, matematikte tutarlılık ispatına yönelik bir girişim tutarsızlığa yol aç-maktadır. Bugüne değin Gödel’in bu buluşunun geçersizliği ne yazık ki, ortaya ko-namamıştır. Aslında bu sonuç yalnız matematik için değil, tüm bilim için önemli bir olaydır.

Bir aksiyom kümesinin tutarlılığını belirleyecek tümüyle kesin bir denetimin olmadığı kabul edilse bile, aksiyomatik bir sistem oluşturan her matematikçi böyle bir belirlemenin gerçekleşmesini ister. Matematikçilerin en çok başvurdukları yön-tem, sisteme somut bir model (ya da yorum) bulmak, böylece ilkel terimlerin içe-rik kazanmasını, aksiyomların doğru önermelere dönüşmesini sağlamaktır. Mate-matikçi, aksiyomlarını (dolayısıyla teoremlerini) doğru önermelere dönüştüren ger-çek ya da tasarlanmış bir konu bulduğunda, sisteminin herhangi bir çelişki içermediği düşüncesinde kendisini haklı sayabilir. Çünkü oluşturduğu soyut sistemde bir çelişki olsaydı, bunun sisteme somut içerik kazandıran modelde ortaya çıkması ge-rekirdi. Bu arada gözden kaçmaması gereken bir nokta var: Herhangi bir soyut sis-

tem için uygun somut bir modelin bulunamaması, sistemin tutarsız olduğu anlamına gelmez. Somut bir model bulmadaki başarısızlık araştırmacının yetersizliğinden, ya da şanssızlıktan kaynaklanabilir.

Bu söylediklerimize açıklık getirmek bakımından, basit bir aksiyom kümesini ele alıp tutarlılığını yoklayalım. Üç aksiyomu içine alan aşağıdaki küme basit bir sıralamaya ilişkindir:

- (1) Eğer a ile b , K kümesinin özdeş elemanları değilse, o zaman, ya a elemanı b 'den küçüktür, ya b elemanı a 'dan küçüktür.
- (2) Eğer a elemanı b 'den küçük ise, o zaman, a ile b , K 'nin özdeş elemanları değildir.
- (3) Eğer a , b 'den küçük ise, b de c 'den küçük ise, o zaman, a elemanı c 'den küçüktür.

Bu aksiyomlar kümesinde birkaç ilkel (tanımlanmaksızın alınan) terim vardır. Bunlar a , b , c , K ve "... den küçüktür," terimleridir. Özdeşlik mantıksal bir terimdir; matematikçinin mantık alanıyla temas derecesine göre sezgisel anlamıyla yetinilir.

K 'yi, bu sisteme uygun düşen bir model olarak uzun tek sıra dizilmiş bir grup insanla temsil edebiliriz. a , b , c gibi küçük harflerin her biri gruptaki bir bireyi gösterir. "...den küçüktür," ifadesini, "... nın önünde bir yerde durmaktadır," diye yorumlayabiliriz. Bu modelin, tüm aksiyomları doğru önermelere dönüştürdüğü kolayca saptanabilir. Bu da aksiyom kümesinin tutarlılığını kabul etmemiz için yeterlidir.

Aksiyomların bağımsızlık özelliğine gelince, bu tutarlılıktan daha basit bir sorundur. Bir aksiyom kümesi, aksiyomlardan hiçbirisi diğerlerinden mantıksal olarak çıkarsanamazsa, bağımsız demektir. Kimi kez bağımsızlık özelliğinin estetik nitelikte bir ölçüt olduğu söylenir. Çünkü matematikçi kullandığı aksiyomların olası en az sayıda tutulmasıyla daha zarif ve yalın bir sistem oluşturduğu inancındadır. Bir aksiyom diğerlerinden çıkarsanabilirse, o zaman, onu aksiyom değil, teorem saymak gerekir. Aksi halde, sistem istenilen yetkinliğe ulaşamaz, güzelliğini yitirir. Ancak, hemen belirtmeli ki, aksiyomların bağımsızlığı sistem için vazgeçilmez bir özellik değildir.

Bağımsızlık için de doyurucu bir denetimi, aksiyomların olgusal ya da ideal bir modelinde bulabiliriz. Ancak burada aranan model, aksiyomlardan biri dışında geriye kalanlara ilişkin olacaktır. Öyle bir modelin bulunmasıyla, modelin dışında kalan (yani, doğrulanmayan) aksiyomun diğerlerinden çıkarsanamadığı gösterilir. Buna yine bir örnekle açıklık getirelim: Daha önce basit sıralamaya ilişkin verdiğimiz aksiyom kümesinde K başlangıçtan bugüne değin yaşayan tüm insanlar, diye yorumlanır, küçük harfler bireyleri simgeler, "... den küçüktür," ifadesi, "... nın atası," diye yorumlanırsa, aksiyomlardan (2) ile (3)'ün doğru önermelere dönüştüğü, aksiyom (1)'in ise doğru bir önermeye dönüşmediği hemen görülür. O halde, aksiyom (1) diğerlerinden çıkarsanamaz; çıkarsanabilseydi diğer iki aksiyomun doğrulandığı tüm yorumlarda onun da doğrulanması gerekirdi; oysa, hiç değilse bir durumda

doğrulanmadığını gördük. Aynı yoldan diğer iki aksiyomun da bağımsızlığını ortaya koymak zor değildir. Kuşkusuz, daha karmaşık aksiyom kümeleri söz konusu olduğunda, açıkladığımız denetleme yönteminin uygulanması öyle kolay değildir. Çoğu kez, olgusal dünyaya dayalı model oluşturamayan araştırmacı, ideal bir modele başvurmak zorunda kalır; bu ise yeterince güvenilir bir çözüm değildir.

Kategorik olma özelliğine gelince, bunun genellikle benimsenen tanımı *izomorfizm* kavramına dayanır. Öyleyse, önce izomorfizm kavramına açıklık getirmek gerekir. Bir aksiyom kümesini doğrulayan herhangi bir olgu grubu (ya da model) bir evren olarak bilinir. Aynı aksiyom kümesini doğrulayan iki evren varsayalım. Diyelim ki, bu iki evrenin elemanları arasında tam bir uyum vardır; öyle ki, bir evrende doğrulanan bir önerme, diğer evrende, birincisindekine karşılık oluşturan elemanlarla yorumlandığında da doğrulanmaktadır. Gene diyelim ki, bunun tersi de doğrudur. Bu denetlenen aksiyom kümesine görecel olarak iki evrenin izomorfik olduğu demektir. Aynı aksiyom kümesine göre izomorfik olan çok sayıda evren olabilir kuşkusuz. Bir anlamda bu evrenlere aynı evren gözüyle bakılabilir. Ne var ki, bunlardan söz edilirken kullanılan dil, ilk bakışta, farklı görünebilir.

Şimdi bir aksiyom kümesinin kategorik olması, aksiyomları doğrulayan yalnızca bir evrenin olması demektir. İki (ya da daha fazla) evren varsa, bu onların izomorfik (yani, bire-bir karşılama içinde) oldukları demektir. Kategorik olma özelliğini daha ayrıntılı olarak ele almayacağız burada. Yalnızca önemli olan noktayı bir kez daha vurgulamakla yetineceğiz: Verilen aksiyom kümesini doğrulayan birden fazla evrenin varlığı söz konusu ise, bunların izomorfik olduğunu saptama zorunluğu ortaya çıkar. Bu aksiyomları doğrulama olgusal bir model aracılığıyla gerçekleştirilir. Oluşturulan model, aksiyomları doğrulamakla kalmamalı, verilen herhangi iki evrenin izomorfizm içinde olduğunu göstermeye de aracı olmalıdır. Kuşkusuz evrenler ikiye ikiye alındığında, bu iş umutsuz bir çabaya dönüşür. O yüzden evrenlerin genel olarak ele alındığını görmekteyiz.

Mantığın İşlevi

Matematiksel bir sistemi oluşturan ikinci ögenin mantık olduğunu söylemiştik. Burada niyetimiz tarihi çok gerilere uzanan bu çalışma alanının ayrıntılı bir betimlemesine girmek değildir. Ne var ki, mantığın matematikle çok yakın ilişkileri vardır; kısaca da olsa, bazı önemli noktaları belirtmeden geçemeyeceğiz.

Daha İ.Ö. 6. yüzyılda Pythagoras, “Akli başında hiç kimsenin karşı çıkamayacağı ispatın kavramsal olarak anlaşılması...” gereğini vurgulamıştı. Ondandır ki iki yüzyıl sonra ilk kez Aristoteles mantıksal düşünmenin yasalarını formüle ederek ortaya koyar. Genellikle dile getiriliş biçimleriyle bu yasaları şöyle yazabiliriz:

- (1) Bir şey A ise o şey A’dır. (Özdeşlik yasası)
- (2) Her şey ya A’dır, ya da A değildir. (Üçüncü şıkkın olanaksızlığı yasası)
- (3) Hiçbir şey hem A, hem A-değil olamaz. (Çelişmezlik yasası)

Bunlardan ilki basittir; son ikisini anlamakta güçlük çekilebilir. Birçok matematikçi ve mantıkçının başvurduğu bir yorumlama yoluyla bunları açıklığa kavuşturabiliriz. Matematikçiler genellikle kimi bireylerin taşıdığı bir özellik gibi soyut bir kavramı düşünmek yerine, o özelliği taşıyan bireylerin oluşturduğu kümeyi düşünmek yoluna giderler. Örneğin, matematikçi kırmızı renkten söz ettiğinde büyük bir olasılıkla “kırmızı” denen soyutlamayı değil, kırmızı nesnelerin kümesini düşünür. Bunu yaklaşık olarak şöyle de belirtebiliriz: Matematikçi, mantıksal ilişkileri içlemsel (intensional) anlamıyla değil, kaplamsal (extensional) anlamıyla ele alır. Üstelik mantıkçi gibi matematikçi de iki kümenin çarpımını, iki kümeye ait ortak üyelerin oluşturduğu yeni bir küme sayar. Gene iki kümenin toplamını kümelerden birine, ötekisine veya ikisine dahil elemanların oluşturduğu yeni bir küme olarak görür. Buna göre, Aristoteles’in son iki yasasını küme kavramına indirgeme yoluna giderek şöyle yazabiliriz:

$$(2) \quad a + -a = 1 \text{ (Üçüncü seçeneğin olanaksızlığı)}$$

$$(3) \quad a \times -a = 0 \text{ (Çelişmezlik yasası)}$$

[Burada eksi (–) işareti değilleme ya da yadsıma, 1 her şeyi (tüm nesneleri) kapsayan küme, 0 simgesi ise boş küme anlamı taşımaktadır.]

Geleneksel mantık hemen tümüyle terimler arasındaki ilişkileri konu almıştı. Sorun, bu tür ilişkiler bakımından neyin doğru olabileceği, ya da olamayacağını belirlemekten ibaretti. Birtakım tasım kurallarının yanı sıra yukarda verilen üç temel yasa çerçevesinde tüm tasımsal çıkarımların geçerlik denetimi yapılabilmekteydi.

Modern mantık çalışmaları geleneksel mantığın dar çerçevesini büyük ölçüde aşmış bulunmaktadır. Yeni sistemin dayandığı temel yasalar “küme”, “tüm”, “bazı”, “değilleme”, “veya”, “ise” gibi birtakım ilkel kavramları içeren ilişkileri dile getirmektedir. Bu yasalar da geleneksel mantığın üç yasası gibi, uygulamalarında hiçbir bilim koluna veya çalışma alanına özgü olmamakla evrensel niteliktedir.

Matematikte olduğu gibi mantıkta da ilkel terimler tanımlanmaksızın, temel yasalar ispatlanmaksızın alınarak aksiyomatik sistemlerin oluşturulabildiği görülmüştür. Aksiyomatik bir temele oturtulan mantıkla, soyut matematiksel bir sistem arasında yapısal yönden önemli bir fark yoktur. Nitekim, örneğini giderek daha çok ilgi toplayan Boole cebirinde bulduğumuz simgesel bir dille aksiyomatik olarak oluşturulan mantık çalışmaları, matematikçilerin anlamakta güçlük çekmedikleri gelişmelerdir. Aslına bakılırsa Boole cebirinin bazı yönleriyle yeni mantıktan çok Aristoteles geleneğine daha yakın olduğu söylenebilir. Yukarda, küme kavramına indirgeyerek simgesel yazdığımız Aristoteles mantığının son iki yasası Boole cebirinin tipik ifade biçimini yansıtmaktadır.

Geleneksel mantığın temelini oluşturan bu “yasa” denen ilkelere aksiyom gözüyle bakıldığında, bunları duruma göre gözden geçirmek ya da büsbütün değiştirmek yoluna gidilebilir. Kullanılacak mantık türünün, ele alınan sorunun niteliğine göre belirleneceği, uzak bir olasılık değildir. Matematik bu aşamayı daha önce geçirmiş bulunmaktadır; matematikçiler ellerindeki problemin gereklerine uygun ma-

tematiğin arayışı içindedirler. Artık mantığın “yasa” denilen geleneksel ilkeleri de tartışma konusudur: Korzybski, örneğin, özdeşlik yasasına ilişkin tedirginliğini gizlememekte, ilkenin evrensel geçerliğini kuşkuyla karşılamaktadır. Aynı şekilde Bro-uwer, üçüncü şıkkın olanaksızlığı yasasına evrensel geçerlik tanımamaktadır. Gerçekten geleneksel mantığın dayalı olduğu felsefe anlayışında evren belirgindir; böyle bir öğretinin geçerliliği elbette kuşku konusu olmaktan kurtulamaz. Düpedüz “evet” ya da düpedüz “hayır” diye kesip atamayacağımız sorunların olduğunu biliyoruz. Üstelik bu sorunların birçoğunun çözümü insan gücünü aşan çetinliktedir. Bu durumda yaklaşımımız nasıl olmalıdır? “Sorunlar çetin de olsa, çözümü bulunabilir” mi diyelim? yoksa, evrende belirsizliğe yer tanıyıp buna uygun bir mantık arayışı içine mi girelim?

Hem mantığın doğasını inceleme, hem de geleneksel mantık dışında başka mantık türlerine olanak olup olmadığını yoklama yolunda ortaya konmuş büyük çabayı, Russell ile Whitehead’in yazdığı *Principia Mathematica* adlı anıtsal yapıtı temsil etmektedir. Bu çalışmada geliştirilen önermeler hesabı kesinlikle Aristoteles mantığından farklıdır. Aynı şekilde, mantıksal gerektirme ve özdeşlik kavramlarına getirilen teknik yorumlar da bilinen anlamlardan çok farklıdır. Üstelik mantıksal çıkarsamaların, yeni sistemde geleneksel yöntemlerin sağladığı ölçüde kolaylıkla, gerçekleşme olanağı bulduğunu söyleyebiliriz.

Principia Mathematica’da ortaya konan mantık sistemini, matris yöntemi kullanarak geliştirme olanağı vardır. Tablo kullanma alışkanlığı olan biri için bu yöntemi uygulamak kolaydır. Verilen iki önermeden her birinin doğru ya da yanlış olduğunu biliyorsak, iki önerme arasındaki belli bir bağıntının niteliğini “matris” denen tabloya başvurarak belirleyebiliriz. Diğer bağıntılara gelince, onların niteliği bu yoldan saptanıp temel alınan bağıntıyla ilişkileri gözönünde tutularak belirlenir. Bu yöntemi ileri düzeyde uygulayan Lukasiewics, önermelerin doğruluk değerini “doğru” ve “yanlış” diye iki değerle sınırlamayan, çok değerli mantık sistemleri kurma olanağını göstermiştir. Tarski’nin çalışmalarıyla bu sistemlerin daha ileri gelişmeler gösterdiğini görüyoruz. Bu gelişmeleri değerlendiren C. I. Lewis, düşüncelerini şu iki noktada toplamıştır:

- (1) Geleneksel yaklaşımda olduğu gibi, evrenin yapısına ya da insan aklının doğasına özgü sayabileceğimiz “mantık yasaları” diye bir şey yoktur. Öteden beri “mantık yasası” denen ilkeler, aslında, doğruluk ve yanlışlık, değilleme, veya gerektirme, tutarlık gibi temel kavramların anlamlarını belirttik kılan analitik türden önermelerdir. “Mantık sistemi” denilen şeye gelince, bu da o tür kavramlarla, o kavramların anlam çözümlemesine dayanan ilkelerin oluşturduğu bir bütünden başka bir şey değildir.
- (2) Pek çok sayıda mantık sistemi geliştirme olanağı vardır. Bunlardan her biri kendi içinde tutarlı ve doğru ilkeleriyle dedüktif çıkarıma öncül sağlayan bir kuruluştur. Bu kuruluş ya da sistemlerin birbirine alternatif olması şu anlamdadır: Her sistemin içerdiği kuram ve ilkeler farklıdır; birinde kullanılan kavram ve ilkeler, genellikle bir diğerinde kullanılmaz.

Bu sonuçların matematik yönünden değeri büyüktür. Matematğin aksiyomatik ögesinin değışken olduğu bir süreden beri bilinmekteydi. Şimdi mantık ögesinin de değışken olduğu görölmektedir. Matematikçi artık dayandığı mantığın önceden konmuş değışmez bir nesne olmadığını, ulaştığı sonuçların, kullandığı mantık türüyle aksiyom sistemine görecel olduğunu bilmektedir.

Bu gelişmeler gözönünde tutulduğunda, matematikle mantığın apayrı çalışmalar olduğu kolayca söylenemez artık. Nitekim söylenmemektedir. Matematikçilerin giderek daha fazla mantıksal çalışmalara girdiğini görmekteyiz. Kuşkusuz yüzyılların geleneklerini kırıp mantıkla yakından ilişkiye girmek matematikçiler için kolay olmamıştır; ama bundan kaçınmalarına artık olanak yoktur.

Kuşkular ve Belirsizlikler

Matematikle mantığın ilişkisi konusunda son söz henüz söylenmiş değildir. XX. yüzyıl matematiğinin en belirgin özelliklerinden birini, konunun temellerine yönelik eleştirel çalışmalarda bulmaktayız. Çağımızda matematikçiler birtakım kuşkular ve belirsizlikler içinde görünmektedir. Pek çok kimsenin, matematiğinin iki öğeden (aksiyomlarla mantık) oluştuğuna ilişkin yukarda ortaya koyduğumuz görüşe katılmayacağını biliyoruz. Onlar için mantık, daha geniş bir çalışma alanı olan matematiğinin yalnızca bir bölümünü oluşturur. Buna karşı mantığı daha genel ve kapsamlı sayanlar vardır. Bunlara göre, matematiği mantığın bir alt bölümü saymak yerinde olur.

“Matematiğın temelleri”ne ilişkin başlıca üç görüşten söz edilebilir: Formalist, Mantıkçılık ve Sezgisicilik diye bilinen bu görüşleri kısaca açıklamada yarar vardır.

Formalistlerin öncüsü Alman matematikçisi David Hilbert’tir. Bizim bu yazıda ortaya koyduğumuz görüş, formalist görüşü yansıtmaktadır. Bu görüş, Oswald Veblen ile E. V. Huntington’un öncülüğünde çoğu Amerikan matematikçilerince paylaşılmaktadır. Kısaca belirtirsek, formalistlerin tezi, matematiğın simgelerle kurulan formel bir sistem olduğu savını içermektedir. Onlar için matematik inceleme konusu nesnelerin yapısını, bir simgeler sistemi oluşturarak belirlemeye yönelik bir çalışmadır. Buna göre matematik, simgesel sistemlerin, her türlü anlamda soyutlanmış yapısal özellikleriyle uğraşır. Bu sistemlerde yer alan bireysel simgelerin, birbirleriyle olan formel ilişkileri dışında, hiçbir anlamı yoktur. Bu, kuşkusuz, matematiğın anlamdan yoksun bir oyun olduğu demek değildir. Tam tersine, bu bakışla matematiğın, özellikle geometri alanında, son derece verimli bir çalışma aşamasına girdiği söylenebilir. Ama gene de, formalist görüşün kimi tartışmalı güçlüklerle yol açtığı yadsınamaz. Özellikle matematiğın geçerliliği bu görüş altında yeterince belirlenmiş değildir.

Bertrand Russell ile A. N. Whitehead’in öncülüğündeki mantıkçılığa gelince, bu görüş salt kuramsal matematiği mantığın bir dalı saymaktadır. İlk belirtilerini Frege ile Peano’nun çalışmalarda bulduğumuz mantıkçılık tezi, Russell ile Whitehead’in daha önce de sözünü ettiğimiz *Principia Mathematica* adlı büyük çalışmalarında tüm ayrıntılarıyla ortaya konmuştur. Modern mantığın başyapıtı olan bu çalışmada matematiği tümüyle mantığa indirgeme girişimi yer almaktadır. Yazarların

olağanüstü bir çabayla matematiğin sayı, sıfır gibi temel kavramlarını, toplama ve çarpma gibi temel aritmetik işlemlerini, küme, değilleme, veya, ise gibi ilkel mantık terimlerine başvurarak tanımlamayı başardıklarına tanık olmaktadır. Ne var ki, bu görüş de birtakım güçlüklerle uğramaktan kurtulamamıştır. En başta sonsuz sayılar konusunda ortaya çıkan bu güçlüklerin kimi çevrelerde mantıkçılık tezinin sarsılmasına, en azından kuşkuyla karşılanmasına yol açtığı söylenebilir.

Hollandalı matematikçi L. E. J. Brouwer'in öncülüğünde (daha sonra Herman Weyl, A. Heyting, vb. matematikçilerin katılmasıyla) ortaya çıkıp güçlenen üçüncü görüş sezgiciliktir. Bu görüşün ana tezi matematiğin, sonsuz sayı dizgelerini kurmaya olanak tanıyan temel bir sezgiye dayandığı savıdır. Brouwer, matematik diye ileri sürülen simgesel örgünün, aslında, daha temelde olan bir düşünce yapısını örten bir şaldan başka bir şey olmadığını vurgulayarak başlar. Ona göre matematikçilerin temelde yatan düşünceden çok görünürdeki simgesel düzenlemelerle uğraşmaları bir sürü sıkıntıya yol açmaktadır. Kısaca demek gerekirse, sezgiciler matematiksel doğrular bütününe, formalistler ile mantıkçıların baktığı gibi nesnel bir örgü (ya da yapı) gözüyle bakmamaktadır. Onlara göre matematiğin, tümüyle simgesel bir yapıya indirgenebilmesine olanak yoktur; matematiksel düşünme, onu ifade için kullanılan dilden kesinlikle ayrıdır. Matematiksel bir sürece ilişkin bilgi, bu sürecin sınırsız ilerlemesine elverecek türden olmalıdır. Başka bir deyişle, "kurma" (inşa etme) olanağını içermeyen "varlık"tan söz edilemez.

Max Black'ın belirttiği gibi, tartışmaya açık bir belirsizlik sürüp gitmektedir: "Mantıkçı ve formalist görüşlerde başarıyı gölgeleyen önemli güçlükler vardır. Matematiği mantığa indirgeme programı can alıcı bir noktada yetersiz kalmakta; matematiğin tutarlılığını ispata yönelik formalist yaklaşım ise olanaklı görünmemektedir. Öte yandan sezgicilik ise, matematiğin büyük bir bölümünün yeniden yazılmasını gerektirmek, eskiden beri kabul edilmiş ispatları reddetmek, salt kuramsal matematikte ulaşılan birçok sonuçları geçersiz saymak, bunların yerine pek de iç açıcı olmayan birtakım karmaşık kavramlar getirmek gibi kendine özgü güçlüklerle yol açmaktadır."

Kısaca değindiğimiz bu üç görüşün yanı sıra, matematik, mantık, dil, bilim ve metafizik kuramları içeren daha geniş bir programı Rudolf Carnap'ın sunduğunu görüyoruz. Temelde dillerin çözümleme ve semantiğine dayanan Carnap'ın yaklaşımının nasıl bir sonuç vereceğini kestirmek için vakit henüz erkendir.

Modern matematiğin kendini içinde bulduğu bu duruma ilişkin yargımız ne olacaktır? Şimdilik bir iki noktayı belirtmekle yetinebiliriz. İlkin, matematikte temel kavram ve yöntemlerin sürekli bir evrim içinde olduğunu vurgulamalıyız. Sonra, birbiriyle bağdaşmaz görünen görüşlerin birbirlerini derinden etkilediklerini söylemeliyiz. Daha sonra, matematikçilerin kimi ödünlerle şu ya da bu görüş çerçevesinde çalışmalarını sürdürdüklerini belirtmeliyiz. En sonunda, gelecekte bir değil birçok matematiğin olabileceğini gözden kaçırmamalıyız.

[Bu metin, *Our Mathematical Heritage*,
(Ed. W. Schaaf)'dan alınmıştır.]

SANAL NESNELERİN VARLIK SORUNU

P. J. Davis, R. Hersh (1981)

Matematiğin temellerine ilişkin geleneksel görüşlerin üçünde de dile getirilmeyen varsayım, matematiğin kuşku götürmez doğruluğun kaynağı olması gerektiğidir.⁽¹⁾ Oysa, tüm ekollerin, dahası tüm matematikçilerin deneyimlerinden öğrendikleri bir şey var: matematiksel doğruluğun, diğer doğrular gibi, yanılabilir ve düzeltilebilir türden olduğu.

Günlük deneyimlerimizin yanlışladığı formalizm ile matematikçinin Tanrı vergisi özel bir sezgiyle ancak kavrayabildiği gizemli bir periler ülkesi varsayan Platonculuk arasında bir seçim yapmak zorunda mıyız gerçekten? Matematiksel felsefenin işlevini daha akla yakın bir yönde düşünebiliriz: Buna göre sorun, kuşku götürmez kesin doğruluğu belirlemek değil, matematiksel bilgiyi, tüm diğer bilgilerimiz gibi, yanlışlanabilir, evrime dayalı kimliğiyle ele almaktır. Daha sağlam bir temel arayışı içinde umutsuz bir çaba sürdürmek yerine, matematiği olduğu gibi, insan bilgisinin bir bölümü olarak görmek yoluna gidebiliriz. Kullandığımız, öğrettiğimiz, icat ya da keşfettiğimiz matematik üzerinde doğrudan ve açık düşünmenin gereğine inanıyoruz.

Cantor, matematiğin özü özgürlüğünde aranmalıdır, diyor. Bu, inşa etme, varsayımlar oluşturma özgürlüğüdür. Matematiğin bu özelliği aslında ne sezgicilerin ne de formalistlerin gözünden kaçmıştır. Oysa Cantor, insan deneyimini aşan matematiksel bir gerçekliğin varlığına inanan bir Platoncuydu. Bu, bizden bağımsız, ama kendi düzenini bize yükleyen sadece bir ölçüde bilebileceğimiz gizemli, ama nesnel bir gerçeklikti. Platonculuğun gerçek bilgi saydığı şey işte bu gerçekliğe ilişkin olan bilgimizdi.

Matematiğin doğasına ilişkin bildiğimiz iki şey vardır. Bunlardan ilki matematiğin insan icadı olduğu gerçeğidir. Matematikçiler bu gerçeği bilirler, çünkü matematiği oluşturan onlardır. Alışık olduğumuz aritmetik ve geometri sürgit var olan, Tanrı vergisi oluşumlarımız gibi görünür bize. Oysa şimdi topolojide kullanılan cebir ve benzeri tekniklerin insan elinden çıktığı bellidir. Çünkü bunların yaratıcılarını kişi olarak tanıyoruz. Kaynakları ister antik dönemlere uzansın, ister günümüze

(1) Söz konusu üç görüş: Mantıklılık, Formalizm ve Sezgiciliktir. Bkz. VIII. BÖLÜM. (Çeviren)

ait olsun matematikteki tüm oluşumlar arasındaki aile benzerliği gözden kaçmayacak kadar açıktır: Hepsinin insan zekâsının ürünü olduğu!

Matematiğin doğasına ilişkin bildiğimiz ikinci gerçek, bizim oluşturup ortaya koyduğumuz matematiksel nesne veya işlemlerin (geometrik şekiller, aritmetik fonksiyonlar ve cebirsel operatörler, vb.) onları oluşturan bizler için gizemli olmalarıdır. Bunlar öyle nesneler ki, kimi özelliklerini ancak büyük çaba ve zekâ inceliğiyle belirleyebilmekte, kimi özelliklerini ise tüm çabalara karşın belirlemekten uzak kalmaktayız. Dahası bu nesnelerin aklımızdan bile geçmeyen özellikleri olabilir. Matematikte “problem çözme” diye bilinen tüm etkinlikler bu güçlüğü sergilemektedir.

Formalizm sözünü ettiğimiz ilk gerçeğe dayanır: Matematiğin insan zekâsının bir ürünü olduğu savını benimser. Bu anlayışta matematiksel nesneler sanal niteliktedir.

Platoncular ise ikinci gerçeğe dayanır: Matematiğin bizden bağımsız, uymamız gereken kendi nesnel yasaları olduğu görüşünü içerir. Öyle ki, örneğin, kenarları a ve b , hipotenüsü h olan bir dik açılı üçgen verildiğinde, $a^2 + b^2 = h^2$ ilişkisini istesek de istemesek de kabul etmek zorundayız. Gene, 1375803627 sayısının asal olup olmadığını bilmiyorum, ama sonucun benim seçimime bağlı olmadığını biliyorum. Sayının kendisi, özelliğini taşımaktadır.

Sanal nesnelerin birtakım özellikleri vardır. Bunların hiç değilse bir bölümü nesnel olarak belirlenebilir.

Platoncu açıdan bakıldığında, bu nesnelerin insan icadı olduğu savı yanlıştır. Bunlar bizden bağımsız, kendi kuralları içinde egemen varlıklardır; açıklayamadığımız bir biçimde insan düşüncesi ve olgusal dünya dışında bir gerçekliğe sahiptirler.

Sezgici (ya da inşacı) açıdan, Platoncu görüşün tam tersine, matematiksel nesneler insan zekâsının ürünüdür. Bu nedenle matematikte inşacı yöntemlerle ispatlanıncaya dek hiçbir şey doğru ya da var kabul edilemez. Formalistlere gelince, onlar işin içinden hemen her şeyi yadsıyarak çıkmaktadırlar. “Matematiksel nesne” denen bir şey olmadığı için bunların doğasına ilişkin bir sorun da yoktur.

Bu tür felsefi ekol tartışmalarını bir yana bırakırsak, matematik deneyimlerimizden öğrendiğimiz iki gerçeği çıkış noktası kabul edebiliriz:

- (1) Matematik bizim yarattığımız bir şeydir; aklımızda oluşan kavramlara ilişkin bir çalışmadır.
- (2) Matematik nesnel bir gerçekliktir; şu anlamda ki, matematiksel nesnelerin belirleyebileceğimiz ya da belirlemekte yetersiz kaldığımız belli özellikleri vardır.

Kendi deneyimlerimize inanıyor, bu iki gerçeği kabul ediyorsak, o zaman bu gerçeklere birbiriyle çelişen değil, birbiriyle bağdaşan iki gerçek olarak nasıl bakabiliriz? diye sormamız gerekir. Daha doğrusu, bu iki gerçeğin birbiriyle bağdaşır olmadığı görüşüne bizi götüren ne gibi bir varsayımın etkisinde olduğumuzu görmeye çalışmamız gerekir. Çünkü, ancak o yoldan daha geniş bir görüş açısı kazanıp deneyimlerimizin ortaya koyduğu gerçekleri kabul edebiliriz.

Felsefi bağlamda, evreni yalnızca iki tür tözden oluşmuş gibi düşünmeye yatkınız: Bunlardan biri, “madde” dediğimiz fizik laboratuvarında incelenen nesne; ikincisi, kafamızda saklı “akıl” denen nesne. Ne ki, evreni bu iki nesnede tükenmiş sanmak en azından yetersiz bir belirlemedir. Tıpkı antik Yunanda fiziksel tüm maddelerin dört asal nesne diye bilinen toprak, su, hava ve ateş nesnelere indirgenmesindeki yetersizlik gibi!

Matematik ne fiziksel ne de düpedüz öznel diyebileceğimiz nesnel bir gerçekliğe sahiptir. Maddesel olmayan bu gerçeklik, maddesel dış dünya gibi kişilerin bilincini aşması anlamında nesneldir. Aslında matematiğin kendisi “ideal” diyebileceğimiz gerçekliğin en çarpıcı ve inandırıcı örneğidir. Önerimiz, matematiğin, içine sığamayacağı dar bir felsefi çerçeveye alınıp sakatlanmaması; tersine, matematiksel deneyimimizi kapsayabilecek genişlikte bir felsefenin oluşturulmasıdır.

Karl Popper’ın yeni çalışmalarında, matematiksel deneyimi çarpıtmaksızın yansıtmaya gücü taşıyan felsefi bağlamı bulduğumuzu söyleyebiliriz. Popper, birbirinden farklı üç gerçekliği belirtmek için, üç dünya (Dünya 1, Dünya 2, Dünya 3) teorisini oluşturmuştur. Dünya 1 kütle, enerji, yıldız, kaya, kan ve kemikleri içeren fiziksel dünyadır. Dünya 2 biyolojik evrimle oluşan düşünce, duygu, duyarlık ve bilinç gibi öznel süreçleri içeren dünyadır. Bu süreçlerin varlığı organizmaya bağımlı olmakla birlikte, fizyoloji ve anatomi türünden oluşumlardan temelde farklıdır; ayrı bir düzeyde incelenmek gerekir.

Evrimin ileri bir aşamasında oluşan Dünya 3 sanat, din, gelenek, dil, teori, toplumsal kurumlar, vb. kültürel varlıkları içerir. Bu varlıkların kaynağı kuşkusuz insan bilincidir; ancak, ortaya çıkmalarıyla birlikte kaynağından bağımsız, nesnel bir kimlik kazanır. Matematiği de içine alan bu dünya kaynaklandığı Dünya 2’den ayrı bir düzeyde ele alınmak gerekir.

Matematik zaman dışı, öncesiz var olan ideal bir gerçekliğe ilişkin bir çalışma olmadığı gibi, yapay simge ve formüllerden kurulu satranç türünden bir oyun da değildir. Tersine, nesnel olarak doğrulanabilen sonuçlar ortaya koyan bilimsel türden bir çalışmadır matematik. Matematiğin bir konu olarak varlığı bir sorun değil, bilinen bir gerçektir. Bu gerçeğin abartmasız ve eksiksiz anlamı, kavramsal ilişkileri konu alan, “bir kez anlaşıldığında kuşkuya yer bırakmayan” kesinlikte bir düşünme veya argüman olmasıdır.

Kim ne derse desin, matematiğin konusu vardır, önermeleri anlamlıdır. Şu kadar ki, bu anlamı insan ötesi bir gerçeklikte değil, insanların ortak anlayışında bulabiliriz. Bu açıdan bakıldığında, matematik birer kültürel etkinlik olan ideoloji, din ya da sanat çalışmalarını andırır; onlar gibi ancak bir kültür bağlamında anlam kazanır. Başka bir deyişle, matematik hümanist bir çalışmadır; insan bilimlerinden biridir.

Matematiği diğer insan bilimlerinden ayıran özelliği bilimlere özgü nesnel doğrulanabilirlik niteliğidir. Doğa bilimleri gibi matematiğin sonuçları da nesnel doğruların gücüne sahiptir. Bu sonuçlar, edebiyat eleştirilerinde gördüğümüz sürgit tartışma çeken kişisel fikirlerin ötesinde bir kesinlik taşımaktadır.

Matematikçi olarak sayı, küme, vb. sanal nesneleri yarattığımızı, sonra da bu

nesnelerin ilişki ve özelliklerini bulmaya çalıştığımızı biliyoruz. Bu bilgiyi içermeyen bir felsefe dar bir anlayış içinde kalmış demektir. Felsefecilerin eleştirileri karşısında bir tür formalizme sığınmak zorunda değiliz. Aynı şekilde, matematiksel doğruluğun nesnelliğine olan inancımızın, insan düşüncesi dışında, ondan bağımsız, ideal bir gerçekliğin varlığını savlayan Platoncu türden bir inanç olduğunu da kabul edemeyiz. Popper ile Lakatos'un çalışmaları modern felsefenin, matematiksel deneyimin gerçekliğini belirttiğimiz anlamda tanıyabileceğini göstermektedir. Bu, matematiğin geçerliğini olduğu gibi kabul etmek; onun yanılabilir, düzeltilebilir ve anlaşılabilir nitelikte olduğunu görmek demektir.

[Bu metin, *The Mathematical Experience*, (Davis ve Hersh)'den alınmıştır.]

MODERN DÜNYADA MATEMATİK

Richard Courant (1964)

Matematiğin modern dünyada genişleyen işlevini, matematikçilerin artan sayısı açıkça göstermektedir. A.B.D.'de, 1900'den bu yana çeşitli matematik kuruluşlarındaki üye sayısı 30 katına yükselmiştir. Bugün doktoralı matematikçi sayısı 4800'dür. Son yirmi beş yıl içinde üniversite dışındaki işyerlerinde çalışan matematikçilerin sayısında on iki kat artış olmuştur. Az çok matematik gerektiren işlerde çalışanların sayısı ise on binleri aşmaktadır. Üniversitelerde şimdi matematik bölümlerine kayıtlı öğrenci sayısı 1956'daki öğrenci sayısından üç kat daha fazladır. Matematik artık bir grup seçkin akademisyene özgü bir uğraş değil, her düzeyde yetenekli gençleri çeken geniş bir meslektir. Günümüzde, matematiksel araştırma ve öğretim geniş bir kapsam kazanmış; matematiksel yöntemler, başta fizik olmak üzere teknolojinin yeni uygulama alanlarında, biyolojik bilimlerde, hatta ekonomiyle birlikte diğer sosyal bilimlerde geniş etkinlik kazanmıştır. Öte yandan bilgisayar teknolojisinin matematik ve tüm diğer matematiksel bilimler için taşıdığı büyük potansiyel güç, birtakım yeni araştırma olanaklarını şimdiden sergilemekle birlikte, henüz yeterince anlaşılmış ve değerlendirilmiş olduğu söylenemez.

Ne var ki, matematiğin çağdaş işlevini, geçmişteki gelişme aşamalarıyla karşılaştırarak, daha iyi belirleyebiliriz. Çok değil, daha üç yüzyıl önceye gelinceye dek, matematiksel düşüncenin ana yapısını geometri oluşturuyordu. Asıl kimliğini antik çağda kazanan geometri, aradan geçen iki bin yıl içinde önemsiz kimi gelişmelerle etkinliğini sürdürmüştü. XVII. yüzyıldan başlayarak matematikte köktenci ve hızlı bir dönüşüm kendini gösterir. Geometride örneğini bulduğumuz kesin, dedüktif mantığa bağlı aksiyomatik düşünme yerini sezgisel, indüktif düşünmeye bırakır. Salt geometrik nosyonların yerini sayı ve cebirsel işlemleri içeren analitik geometri, kalkülüs ve ona dayalı mekanik alır. Bilimde o dönemde başlayan ileriye doğru atılımları besleyen ve kamçılayan gücü bu yeni matematiğin seçkin öncüleri sağlamıştır. Fransız Devrimi'ne ulaştığımızda, matematiksel bilimlerin ulaştığı zengin sonuçlar ile matematiğin kanıtlanmış büyük gücünün başlangıçta dar bir taban üzerinde yükselen bilimi geniş çevrelere yayma, ders kitapları yazma, üniversitelerde matematikçi ve bilim adamları yetiştirme, insan bilgisinin genişleyen olanakları içinde yeni çalışmalara yönelme, gibi gelişmelere yol açtığını görürüz.

Şimdi “klasik” dediğimiz XVII. yüzyılda başlayan matematik, bugüne değin gücünü ve önemini korumuştur. Ulaşılan sonuçlar arasında en verimli olanları, kalkülüsün iki temel kavramını (fonksiyon ve limit kavramını) aydınlatma ve genişletme çabasından kaynaklanmıştır. Fonksiyon kavramı iki ya da daha fazla değişkenin karşılıklı bağımlılığına, limit kavramı ise, sezgisel bir düşünce olan süreklilik kavramını mantıksal kesinliğin denetimine almaya ilişkindir. Değişim oranını belirlemede vazgeçilmez bir araç olan matematiksel çözümleme (analiz) kavramı (ki buna bir ya da daha fazla değişkene ait diferansiyel denklemler de dahildir) kapsamı çok genişlemiş olan modern matematiği tümüyle etkisi altına almıştır. Bu kapsamda üç ana kolu sayı, cebir ve geometri oluşturmaktadır. Bunlara olasılık (probabilite) teorisini de katabiliriz.

Fonksiyon ve sayı sürekliliği (number continuum) kavramlarıyla serbest kalan geometri son derece verimli bir büyüme içine girmiştir. Geometrinin iki genç kolu (topoloji ile diferansiyel geometri) bugün matematiğin en canlı ve etkin dalları arasında yer almaktadır. Olasılık teorisine gelince, bu çalışma bilim ve teknolojiadaki geniş uygulaması nedeniyle özel bir ilgiyle ele alınmayı gerektirir. Kaldı ki, bu teorinin ışığında bilim felsefesinin kimi çözüm bekleyen sorunlarını matematiksel olarak dile getirme olanağı vardır.

Matematik ayrıca XIX. yüzyıl başlarında başlayan bir eğilimi, yeni gelişim ve oluşumları antik dönemin sıkı mantık ölçülerine uygun olarak pekiştirme eğilimini günümüzde daha güçlü bir biçimde yansıtmaktadır. Bu pekiştirme çabası özellikle matematiğin temellerine ilişkin çalışmalara büyük yoğunluk getirmiştir. Pekiştirme sürecinde matematiğin kavramsal yapısını belirleme, dahası matematiksel nesnelerin “varlık” sorununa açıklık getirme başta gelen iki hedef olmuştur.

Matematiğin genişlemesi kaçınılmaz olarak uzmanlaşma ve bölünme eğilimlerini güçlendirmiş, matematiğin birlik ve bütünlüğünü tehlikeye düşürmüştür. Değişik dallarda uzmanlaşanların birbirlerini anlamalarında başgösteren sıkıntıların yanı sıra, matematiğin diğer bilim alanlarıyla teması kaygı verici biçimde zayıflamaya yüz tutmuştur. Ne var ki, matematiğin önemini giderek daha fazla kavrayan toplumun sağladığı destek ve yetenekli gençlerin araştırmaya yönelik başarılı çalışmaları matematikteki ilerlemeleri daha da hızlandırmıştır. Giderek başdöndürücü bir etkinlik içine giren matematikte yayın, bilimsel toplantı ve iş dünyasıyla etkileşim günümüzde inanılmaz boyutlara ulaşmıştır. Bu karmaşık ve hızlı çalışma temposunda matematikçiler için öncelikle matematiğin anlam ve niteliği, yönelik olduğu hedef ve amaçlar, değişik ilgi alanları arasındaki ortak noktalar üzerinde düşünme gereği doğmuştur. Bu gereği karşılamanın en etkili yollarından biri, matematiğin hemen herkesin anlayabileceği bir dille geniş kitlelere açıklanmasına girişmektir herhalde.

“Matematik nedir?” sorusu ne felsefi genellemelerle, ne semantik tanımlarla, ne de gazete ağız lâf ebeliğiyle anlamlı olarak yanıtlanamaz. Bu tür nitelemeler müzik ve resim gibi sanat etkinlikleri için de yetersizdir. Müzik ya da resim olsun, sanatı ritim, uyum ve yapıya, ya da form, renk ve kompozisyona ilişkin yeterli deneyimden yoksun hiç kimse değerlendiremez. Matematiği değerlendirmeye gelince, onun özülü doğrudan temas çok daha gereklidir.

Ölçü içinde kalmak koşuluyla, gene de bazı genel nitelermelere gidebiliriz. Çoğu kez belirtildiği üzere, matematik giderek soyutlaşmaya, mantıksal kesinliğe dayanan aksiyomatik çıkarıma ve daha kapsamlı genellemelere yönelik bir çalışmadır. Bu nitelme gerçeği dile getirmektedir kuşkusuz; ama gerçeğin tümünü değil. Her şeyden önce tek-yanlı kalmaktadır; sonra, gerçek durumu olduğu gibi değil, biraz çarpıtarak yansıtmaktadır. Bir kez soyuta kaçma matematiğe özgü, onun tekelinde bir özellik değildir. Kütle, hız, kuvvet, voltaj ve akım gibi kavramların tümü fiziksel dünyaya ilişkin soyut kavramlardır. Nokta, uzay, sayı ve fonksiyon gibi matematiksel kavramların soyutluk derecesi biraz daha çarpıcıdır, o kadar.

Matematiksel kesinliği yansıtan aksiyomatik çıkarıma gelince, bunun uzun süre en yetkin ve çarpıcı örneğini Euclides'in *Elementler*'i vermiştir. Gerçekten, matematiksel düşüncenin mantık yapısı belirgin aksiyomatik sistemde biçimlenmesi özenilmesi gereken bir başarıdır. Aksiyomatikleşme, matematiğin yapısını belirginleştirmenin yanı sıra, konuyu özüne inerek kavramamıza da yardımcı olmaktadır. Ne var ki, bu özelliğin vurgulanması bize matematikte sezginin, yaratıcı imgenin, kavrayış ve benzer zihinsel etkinliklerin vazgeçilmez işlevini unutturacaksa, yanıltıcı olmaktan ileri geçmez. Gerçi matematik eğitiminde belli aksiyomlara dayanan dedüktif çıkarım, zaman ve enerji israfını önleyen etkili bir öğretim yöntemi sayılabilir. Ancak dogmatik nitelik taşıyan bu yaklaşımın tersine, sezgi ve indüksiyona dayanan, deneme ve yanılmaya yer veren Sokratik yöntemin verimli ve yaratıcı düşüncenin oluşmasında daha etkili olduğu görmezlikten gelinmemelidir.

Dedüktif düşünme nasıl sezgiyle dengelendiğinde daha verimli olmakta ise, kapsamı giderek daha genişleyen genellemeler de, somut ve renkli ayrıntılarla dengelendiğinde anlam kazanmaktadır. Bireysel problemleri, parlak genellemelerin açıklanmasında başvurulan birer örnek saymakla yetinmek yanlıştır. Aslına bakılırsa, genelleme ve teoriler bu tür bireysel problemlerin incelenmesiyle oluşturulur; dahası bir genelleme ya da teorinin somut düzeyde kalan ilişki ve problemlere ışık tutmadıkça anlamlı olduğundan söz edilemez.

Yaşayan matematiğin özünde soyut genelleme ile somut örneğin, dedüktif çıkarımla sezgisel ve indüktif düşünmenin, mantıkla imgenin işbirliğini bulmaktayız. Belli bir başarıda bu öğelerden biri ya da diğeri ağır basabilir. Matematiğin gelişim sürecine tümüyle bakıldığında hepsinin payı önemlidir. Genel olarak denebilir ki, bu gelişim süreci "somut" temelden başlar, giderek ayrıntıları atarak soyut genellemelerle kuramsal bir düzeye ulaşır; sonra, ulaşılan kuramı pekiştirme ve doğrulama amacıyla somut düzeydeki bireysel problemlere dönülür. Kısacası, somuttan soyuta gidiş, soyuttan somuta dönüş matematiksel düşünmenin özünü oluşturur.

Bu ilkeleri doğrulayan örnekleri matematiksel bilimlerin gelişiminde bulmaktayız. Bilindiği gibi, Johannes Kepler, kendine özgü kavrayış gücüyle, Tycho Brahe'nin gözlem birikiminden gezegen yörüngelerinin eliptik biçimde olduğu genellemesini çıkarmıştı. Isaac Newton, daha ileri bir soyutlamayla, bu tür modellerden evrensel çekim yasasına ulaşmıştı. Mekaniğin diferansiyel denklemlerini oluştururken da Newton aynı yolu izlemiştir. Matematiğin yüksek soyut düzeyde sağladığı olanaklar, mekaniğe geniş bir dinamizm gücü kazandırmıştı. Somut ve spesifik dü-

zeydeki problemlerin çözümünde de yeni yöntemin aynı derecede başarılı sonuçlar verdiğini biliyoruz.

Aynı şekilde Michael Faraday, elektro-manyetik konusundaki deneysel bulgularını, son derece ilginç bir yorumla birleştirmeyi başarır. Bu bulgulardan, çok geçmeden elektro-manyetizmin birtakım matematiksel nitel yasalarının çıkarıldığını görüyoruz. Ardından, James Clerk Maxwell tüm somut bulguları ve aralarındaki ilişkileri de kapsayan son derece kapsamlı nicel yasaı oluşturur. Bu yasa, bir diferansiyel denklemler sisteminde manyetik ve elektrik güçleriyle bunların değişim oranlarını birleştirir. Somut ve spesifik olgulardan soyutlanmış ve kopmuş olan bu denklemlerin başlangıçta, uygulama yeteneğinden yoksun birer fantazi izlenimi vermiş olduğu söylenebilir. Ancak çok geçmeden Maxwell'in soyut düzeye çıkışıyla birçok yönlerde ilerlemeye büyük olanaklar açıldığı görülür. Maxwell denklemleri elektro-manyetik olguların dalga niteliğini açıklama, radyo dalgalarının yayılmasına ilişkin Heinrich Hertz deneylerine yol açma, yepyeni bir teknolojik gelişmeyi başlatma ve bilim adamlarını yeni konularda araştırmaya yönelte gibi önemli sonuçlar vermiştir.

Maxwell denklemlerinin sistematik, dedüktif düşünmenin ürünü olduğu söylenemez. Öte yandan onun başarısını salt indüktif düşünme sürecine de bağlayamayız. Maxwell'i, olsa olsa, görünürde birbirinden uzak ve kopuk olgular arasında benzerlik ve paralellik kurabilen; açıkça farklı nesneleri bir sistemde birleştirerek yeni bir anlayış yaratan eşi az zekâlardan biri sayarak açıklayabiliriz.

Paralel bir gelişme çizgisini (somut bireysel örneklerden soyut genellemeler düzeyine çıkışı; oradan yine somut düzeye dönüş) matematiğin kendisinde de bulmaktayız. Matematikte bir teoriyi anlamlı ve önemli yapan şey de, somut örneklerle soyut genellemeler arasındaki bu etkileşimdir. Bu temel gerçeği kavramak için "somut", "soyut", "bireysel" ve "genel" gibi kavramların matematikte mutlak anlamlar taşımadığını, bakış açısına, bilgi düzeyine ve konunun niteliğine bağlı olduğunu görmek gerekir. Örneğin, somut dediğimiz şey çoğu kez alışılmış olan, yerleşmiş olan kavram, yöntem ya da teorilerdir. "Soyutlama" ile "genelleme" terimlerinin de aslında durağan, kesin sonuçları değil, somut ve soyut düzeyler arasında dinamik süreçleri dile getirdiği söylenebilir.

Matematiğe verimli yeni buluşların kimi kez fazla çaba gerektirmeden, ansızın ortaya çıktığı görülmektedir. İzlenen yol genellikle somut örneklerden soyutlamayla bir teoriyi oluşturan temel öğeleri belirleme biçimini almaktadır. Herhangi bir alanda aksiyomatik sistemin oluşması da aynı yolu izler.

Soyutlamanın bu verimli kullanımının bir örneğini, son zamanlarda, John von Neumann ile diğer bazı matematikçilerin David Hilbert'in "spektral" teorisini genellemelerinde bulmaktayız.

Çağdaş matematiğin odak noktasında yer alan grup teorisi de benzer biçimde bir dizi soyutlamalarla oluşmuştur. Bu teorinin kökeni Orta Çağlar'dan beri matematikçilerin merakını çeken bir problemde yatmaktadır. Bu problem, ikinci dereceden daha büyük cebirsel denklemlerin, cebirsel süreçlerle, başka bir deyişle, toplama, çıkarına, çarpma, bölme ve kök alma işlemleriyle çözümünü içeriyordu.

İkinci dereceden denklemler (kuadratik denklemler) teorisi Babillilerce biliniyordu. Üçüncü ve dördüncü dereceden denklemlerin çözümünü Girolamo Cardano ile Nicolo Tartaglia ortaya koymuşlardı. Ne var ki, beşinci ve daha yukarı dereceden denklemlerin çözümüne gelince, büyük güçlüklerle karşılaşmıştı. XIX. yüzyılın başlarında bu eski problemler daha enerjik bir tutumla ele alındı. Özellikle, J. H. Lagrange, N. H. Abel ve Evariste Galois gibi büyük matematikçilerin bu soruna yakından ilgilendiğini biliyoruz. ...

Tümüyle bakıldığında, grup kavramıyla, bu kavramın matematiğin değişik kol- larında sağladığı açıklık ve düzenleme son 150 yıllık dönemin başta gelen bir başa- rısı sayılabilir...

Soyut grup teorisi, parçacık fiziğinin somut problemlerinde önemli uygulama alanı bulur. Burada gördüğümüz uygulama, çekirdek parçacıklarının karşılıklı etki- leşiminde yer alan açık ve gizli simetrilerin karmaşık grubuna ilişkindir. Grup teo- risinin büyük olgusal veri yığınının düzen sağlamada ve yeni parçacıkların varlığını öndeyide gösterdiği başarı, olguların araştırılmasında soyutlamanın önemini tüm açıklığıyla ortaya koymaktadır.

“Sezgi” dediğimiz görünmez yeti, en soyut düşünmeyi bile uyarıp yönelterek yaratıcı matematikte her zaman etkindir. Bu yetinin en çok geometrik sezgi biçi- minde bildiğimiz etkinliğini, geometride yer alan ya da ondan kaynaklanan pek çok önemli matematiksel gelişmelerde bulmaktayız. Ne var ki, bugün matematikte, sez- ginin görünen işlevini azaltma, ya da daha doğru bir deyişle, o işlevi sıkı ve kesin bir akıl-yürütmeyle destekleme yolunda güçlü bir eğilimin varlığından söz edilebilir.

Geometrinin en genç ve güçlü dalı olan topoloji, sezgi ile akıl-yürütme arasın- daki gerilimin bu verimli işleyişini son derece canlı bir biçimde sergilemektedir. Bi- lindiği gibi topoloji, birkaç dağınık, ama önemli buluşla, ciddi bir çalışma alanı olarak XIX. yüzyılda ortaya çıkar ve uzun bir süre hemen hemen tümüyle geomet- rik sezgi konusu olarak kalır; başka bir deyişle, yüzeylerin sürekli deformasyon al- tında değişmeyen özelliklerini belirlemek amacıyla yüzeyleri bir tür makaslama ve yapıştırma yöntemiyle çalışan bir görünüm sergilemekten ileri geçmez. Ancak bu yeni disiplini daha ilk gelişme aşamasında G. F. Bernhard Riemann matematik dünyasının ilgi alanına çekmeyi başarır. Kompleks bir değişkenin ($\sqrt{-1}$ sanal sayısı- nı içine alan bir değişkenin) cebirsel fonksiyonlar teorisine ilişkin ünlü çalışmasın- da Riemann, şimdi “Reimann yüzeyleri” denilen şeye ilişkin topolojik olguların, sö- zü geçen fonksiyonların gerçekten anlaşılması için vazgeçilmez olduğunu gösterir.

XIX. yüzyıl boyunca araştırmacılar, iki, üç ve giderek n sayıda boyutlu yüzeyle- re ilişkin çeşitli topolojik özellikleri bulma yolunda sistematik incelemelerde bulun- dular. Yüzyılımızın başlarında, büyük matematikçi Henri Poincaré ve daha başka- ları, gene aşağı yukarı sezgisel bir temel üzerinde, son derece göz alıcı topoloji teo- risini oluştururlar. Bu çalışma grup teorisinin gelişmesiyle yakından ilişkili olarak sürdürülür ve onun gibi matematiğin değişik dallarıyla matematiksel bilimlerde önemli uygulama değeri gösterir. Örneğin, göksel mekanikte, özellikle gravitasyon alanları etkisiyle eğrilen uzayda gezegen yörüngelerinin kurulmasında yeni teoriden yararlanılır.

Topoloji dalında çalışan matematikçilerin, çok geçmeden, yeni teoriye, geometri gibi matematiğin klasik dallarında görülen sıkı mantıksal düzen ve biçimi (sezgisel temelin sağladığı doyurucu güzelliği yitirmeksizin) kazandırma çabasına koyuldukları görülür. Bu işi Hollandalı matematikçi L. E. J. Brouwer nerdeyse tek başına başarıyla yerine getirir. Onun büyük çabası sayesinde topoloji bugün Euclides geometrisi ölçüsünde mantıksal yöntemle işlenmeye ve gelişmeye elverişli bir çalışma kimliği kazanmıştır.

Brouwer'in karşılaştığı güçlüklerin başında süreklilik kavramının yarattığı dilem yer alıyordu. Sürekliliğin ne olduğunu herkes sezgisel olarak bilir; ne var ki, kalkülüsü öğrenmeye başlayan öğrenci daha işin başında sürekliliği kesin matematiksel bir formülde dile getirme çabasına girer girmez tam bir bocalama içinde kendini bulur. Sıkıntı kaçınılmazdır; çünkü, sürekliliğe ilişkin geometrik sezgi ile matematiğin mantıksal kavramı tam bir uyum içinde değildir...

Yüzyılımızda matematiğin hemen tüm dallarında sınırsız bir genelliğe açılma eğilimine tanık olmaktadır. George Cantor'un geçen yüzyılın son on yılı içinde kümeler teorisindeki başarısından bu yana genellik arayışı pek çok matematikçinin başlıca kaygısı olmuştur. Başta Poincaré olmak üzere kimi büyük matematikçilerin matematik için tehlikeli saydıkları bu eğilime (özellikle içinden çıkılmaz paradokslara yol açtığı gerekçesiyle) var güçleriyle karşı çıktıklarını biliyoruz.

Poincaré'nin militan tutumunun yersiz sınırlama, dahası bir bakıma geriye gidiş olduğu söylenebilir; ama öyle de olsa, spesifik ve somut sorunlara yönelik matematikçileri yüreklendirmekle yararlı bir iş gördüğü yadsınamaz.

Matematiksel etkinliğe yol açan ilgi ve iç dürtüler, kimi kez aynı kişide bile çeşitli biçimlerde ortaya çıkmaktadır. Kuşkusuz, matematiğin büyük bir bölümü (özellikle analiz) için bu ilgi ve dürtülerin kaynağını fiziksel dünyada bulmaktayız. Sayı teorisi ve cebir için bu kaynak, insan zekâsında derinden kök salan sayılar dünyasıdır. Fiziksel gerçeklikten daha da uzaklaştığımızda, matematiksel düşünmenin içerdiği mantıksal süreçler dünyasıyla karşılarız. Ne ki, gerçek dünyadan uzak görünümüne karşın, matematiksel mantığın temel düşünceleri elektronik bilgisayarları anlama, dahası planlama çalışmalarında büyük yarar sağlamıştır.

Kısaca demek gerekirse, matematik somut ve spesifik sorunlarla işe koyulmalı, gene "gerçekliğin" belli bir düzeyine dönmelidir. Soyut düzeye açılma bir kaçış, gerçeklikten bir kopuş biçimini almamalı, öyle kalmamalıdır. Matematikçinin ayağı bir süre yerden kesilse bile sonunda yere basmalıdır. İnanılmaz gibi görünse de, uygulamadan en uzak salt kuramsal matematiğin bile konusu çoğu kez somut gerçekliğe ilişkindir. İnsan zekâsının katıksız bir ürünü olan matematiğin, fizik dünyasının betimlenmesinde ve kavranmasında bu denli etkili olması haklı olarak felsefecileri yakından ilgilendiren çarpıcı bir olaydır.

Gerçi matematik özünde bölünemez; ne var ki, bir ya da daha fazla araştırmacının bir probleme yaklaşımlarında belirgin değişikliklerin varlığı yadsınamaz. Matematiği uygulamalardan uzak tutmaya yönelik salt kuramcı yaklaşım yetkinlik arayışı içindedir. Bu yaklaşımda, bir problemin çözümü hiçbir eksiklik ya da pürüze yer bırakmamalıdır; aranan sonuç kusursuz bir akıl-yürütme zincirinin son halkası

olmalıdır. Çözüm girişimi üstesinden gelinemez güçlüklerle karşılaşır, salt kuramcı, ya problemi yeniden ortaya koyma, ya da çözüme daha elverişli başka bir problemle değiştirme yoluna gider. Hatta, çözüm anlayışını yeniden tanımlayarak problemine “çözüm” getirebilir. Bu yol, gerçekte, asıl doğru çözüme ulaşmada oldukça sık başvurulan bir yoldur.

Uygulamalı araştırmada durum farklıdır. Bir kez problem öyle isteğe göre değiştirilemez; aranan akla yakın, olabildiğince bize güvenilir gelen çözümü sağlamaktır. Bu nedenle gerekirse araştırmacı kimi teorik ilkeleri gözardı edebilir; akıl yürütme süresinde katılıktan az veya çok uzaklaşıp tahmine yer verebilir, hatta sayısal kanıtlarda kimi belirsizliklere göz yumabilir. Son olarak, uygulamalı matematik, kesinlikten uzak, yaklaşık sonuçlarla yetinmek zorundadır. Bu, özellikle fiziksel süreçlerin matematiksel modellerle dile getirilmesi çalışmalarında kaçınılmaz olmaktadır.

Gerçek dünyada olup bitenleri matematiğin soyut modelleriyle temsil etme ve bu temsilin doğruluk derecesini belirleme, deneyimle kesinlik kazanan sezgisel duyguya ihtiyaç gösterir. Bu aynı zamanda, bilinen yöntem veya tekniklerle çözümü olanaksız matematiksel problemlerin oluşturulmasında da önemlidir. Bu durum, hiç değilse, bir yanıla “entelektüel” dediğimiz serüvenin doğasını yansıtmakta, dış dünyaya ilişkin bilgi ve kontrol gücümüzün artmasıyla ortaya çıkan “gerçek” problemleri çözmek yolunda mühendis ve bilim adamlarıyla işbirliğine giren matematikçinin başarıma coşkusu sergilemektedir.

[Bu metin, *Mathematics in the Modern World*, (Ed. M. Kline)’den alınmıştır.]

FİZİKSEL BİLİMLERDE MATEMATİK

Freeman J. Dyson (1964)

1910'da matematikçi Oswald Weblen ile fizikçi James Jeans, Princeton Üniversite-si'nde ders programının reformu üzerinde görüşüyorlardı. Jeans, "Programdan grup teorisini çıkarabiliriz; bu, fizikte gereği hiçbir zaman duyulmayacak bir konu-dur," der. Weblen'in bu görüşe karşı çıkıp çıkmadığı, ya da grup teorisini salt ma-tematik açısından savunup savunmadığı kayıtlarda görünmemektedir. Bilinen şey, grup teorisi öğretiminin sürdürüldüğüdür. Jeans'in önerisinin benimsenmemiş ol-ması Princeton'da bilimin gelişme tarihinde oldukça önemli bir olaydır. İlginç olan şu ki, söz konusu teori fizikte giderek çok önemli bir yer tutar; günümüzde doğa-nın temel parçacıklarını anlama çabasında olan biz fizikçilerin düşüncesine egemen olur. 1920'den günümüze değin fizikte grup teorisinin öncülüğünü üstlenen Her-mann Weyl ile Eugene P. Wigner çapındaki iki bilim adamının Princeton'da olma-larını da bir rastlantı saymamalıyız.

Bu küçük hikâyeden öğreneceğimiz birkaç nokta var. İlk nokta, bilim adamları-nın kendi alanları dışında kalan konularda uluorta birtakım yargılardan kaçınmala-rı gereğidir. Tepeden inme yargıların olumsuz sonuçlarına Jeans'in meslek yaşa-mında çarpıcı bir örnek bulmaktayız. Andığımız görüşmeyle başlayan talihsiz geli-şme, bilim adamı olarak saygınlığını yitirmesiyle son bulur: Ünlü bilim adamı başa-rılı popüler bir yazara, bir radyo konuşmacısına dönüşür; sonunda din ve felsefede yüzeysel kimi çalışmalara yönelir; "Sir" unvanını alarak bilimden elini eteğini çeker.

Ne var ki, Jeans'in izlediği bu düşüş çizgisini hafife almamalıyız. Aynı yola biz de girebiliriz. Unutmamak gerekir ki, 1910'da Jeans saygın bir fizikçi idi. (Gerçi Princeton, sözde Gothik mimarlıkta olduğu gibi, akademik unvanlarda da İngiliz geleneğine uyarak ona uygulamalı matematik profesörlüğü unvanı vermişti.) Mes-lektaşlarının hiçbirinden ne daha yeteneksiz, ne de daha bilgisiz sayılabildi. O dö-nemde fizikle grup teorisinin birleşmesinden bu ölçüde verimli sonuç alınabileceği pek az kimsenin aklından geçebilirdi.

Olaydan öğrendiğimiz ikinci nokta, bilimin geleceğinin önceden kestirilemeye-ceğidir. Matematğin fizik bilimlerindeki yeri, tanımsal bir belirlemeyle öyle kesip atılacak bir konu değildir. Matematikle bilim arasındaki ilişki bilimin dokusu kadar zengin ve çeşitlidir.

Fiziğin uzun ve çetrefil giden tarihi boyunca değişmeyen bir etken varsa, o da, matematiksel imgenin tuttuğu önemli yerdir. Bilimde her yüzyılın çabası değişik bir konuya yöneliktir. Matematik de kendine özgü bir gelişme çizgisi izler. Ancak her dönemde fizik anlayışımızdaki önemli gelişmeler daima empirik gözlemlerle salt matematiksel sezginin el ele vermesine dayanmıştır. Fizikçi için matematik yalnızca olguları hesaplamada kullandığı bir araç değildir; yeni teorileri oluşturmada başvurduğu kavram ve ilkelerin başlıca kaynağıdır da. Yüzyıllar boyunca fiziksel evrenin davranışını yansıtmada matematiğin sergilediği güç, fizikçiler için hayret kaynağıdır. Gezegenerin devinim yasalarını bulan XVII. yüzyılın büyük astronomu Johannes Kepler hayretini teolojik terimlerle şöyle dile getirir: “Görülüyor ki, Tanrı’nın kendisi eli boş durmayacak kadar iyilikseverliğini ortaya koyarak dünyaya kendi görüntüsünün damgasını vurmuştur. Bu nedendir ki, tüm doğa ile yüce göklerin geometri sanatında simgeleştiğini söyleyebilirim.” XIX. yüzyılda, radyo dalgalarının varlığını ortaya çıkararak James Clerk Maxwell’in elektro-manyetik denklemlerini doğrulayan Alman fizikçisi Heinrich Hertz matematiğin “gizemli” saydığı gücü karşısında duyduğu hayreti açığa vurmaktan kendini alamamıştır: “Matematiksel formüllerin bağımsız bir varlığa, kendilerine özgü bir zekâyâ sahip olduğu gibi görmezlikten gelemeyeceğimiz bir duygu var içimizde; öyle ki, bizden, hatta onları keşfedenlerden daha akıllı görünen bu nesneler, başlangıçta aldıklarından çok daha fazlasını bize geri verecek güçtedir.” Nihayet, bizim daha akılcı sandığımız XX. yüzyılda, modern matematiğin gözalıcı başarıları karşısında şaşkınlığını gizlemeyen Eugene Wigner kendine özgü kuru ve yalın deyişle, bakın ne diyor: “Biz eline bir deste anahtar verilen bir kimsenin durumundayız. Bu kimse, önündeki bir dizi kapıyı açmaya koyulduğunda, her kapı önünde elini attığı ilk olmazsa ikinci anahtar kilide uymaktadır. Anahtarlarla kapılar arasındaki bu beklenmedik uyum onu ister istemez kuşkuyla düşürecektir.”

Şimdi, Kepler’in ya da Hertz’in matematiği ile Wigner’in matematiği arasında pek az benzerlik vardır. Kepler, Euclides geometrisi çerçevesinde daire, küre ve düzgün çok genli nesnelerle ilgileniyordu. Hertz’in kafasında kısmi diferansiyel denklemler vardı. Wigner ise, kuantum mekaniğinde kompleks sayılardan söz ediyor ve kuşkusuz (adını anmaksızın) grup teorisini fiziğin çeşitli dallarına sokmadaki kendi başarılarını gözönünde tutuyordu. Matematiğin birer dalı olan Euclides geometrisi, kısmi diferansiyel denklemler ve grup teorisi birbirlerinden öylesine farklı ki, her birinin değişik bir matematik dünyasına aittmiş gibi görüldüğü söylenebilir. Oysa, fiziksel evrenimizi anlamada her üçü de yaşamsal değerdedir. Bu gerçekten kimsenin tümüyle kavrayamadığı hayret verici bir olaydır. Bu olaydan güvenle yalnızca bir sonuç çıkarabiliriz: İnsan zekâsı henüz fiziksel dünyayı, ya da matematiksel dünyayı, ya da ikisi arasındaki ilişkiyi tam anlamaya yaklaşmış değildir.

Bu yazıda, matematiğin fiziğe neden bu denli büyük bir güç sağladığının nedenlerini irdeleme konusunda derin felsefi bir tartışmaya girmeyeceğim. Her yüzyılda, gerçekten felsefi zorluklar içeren sorunlara çözüm getirmek için bilginin temellerini yoklama yoluna giden fizikçi sayısı birkaçı geçmez. Yaşadığımız yüzyıl-

da belki de yalnızca Albert Einstein, Hermann Weyl, Niels Bohr, P. W. Bridgman ve Eugene Wigner'in adları verilebilir. İş başındaki fizikçilerin geriye kalan büyük çoğunluğu (kendim de dahil) temele inen sorunlarla ilgilenmez. Aynı gözlem matematikçiler için de doğrudur. Fransız matematikçisi Henri Lebesgue bunu şöyle dile getirmektedir: “Kanımca, matematikçinin bu kimliğiyle felsefi sorunlarla ilgilenme gereği yoktur; bu görüşü pek çok felsefecinin de paylaştığını biliyoruz.”

Biz çoğunluğa gelince, felsefe yapmayı Bohr ve Wigner gibi devlere bırakarak, doğa üzerindeki yüzeysel çalışmalarımızı sürdürmekle yetinmekteyiz. Bu nedenle, matematiksel kavramların fizikte neden bu denli yaşamsal olduğu tartışmasını bir yana bırakıyorum. Yalnızca doğanın matematiksel terimlerle anlaşılabilirliği inancını dile getirmekle yetiniyorum. Ele almak istediğim sorun, matematiksel kavramların fizikteki etkisine ilişkin pratik nitelikte bir sorundur. Matematikğin fiziğe yüklediği estetik ve düşünme ölçütleri nedir? Fiziksel dünyayı anlama çabasında matematikğin hangi dalları önemli görülmektedir? Sözlerimi grup teorisinin fizikte, özellikle temel parçacıklar teorisinin oluşmasında oynadığı role değinerek bağlayacağım...

Günümüz problemlerinin ayrıntılarına girmeden önce, tarihten bazı örnekler getirerek, matematiğe özgü anlayış ve önyargıların fizikteki etkisini göstereceğim. Aslında, teknik nitelikte olan sorunları herkesin anlayabileceği biçimde açıklamak için geçmişe bakma, daha önce olup bitenlerle şimdiki gelişmeler arasında benzerlikler kurma yararlı bir yoldur. Ancak okuyucuyu, bu benzerlikleri gereğinden fazla ciddiye almaması için uyarmak isterim. Bilim adamlarının pek azı bilim tarihini yakından bilir. Kaldı ki, hemen hiçbir fizikçi, araştırmalarında tarihin yol göstericiliğini arama yoluna gitmez. ... Bilimde gerçek başarıya ulaşmak isteyen kişi öncelikle William Blake'in şu sözlerine kulak vermelidir: “Arabani ve pulluğunu ölümlerin kemikleri üzerinde sür.”⁽¹⁾

Fizikte matematiksel muhayyilenin başarılı uygulamasına en çarpıcı örneği Einstein'ın “Genel Relativite Teorisi” diye bilinen gravitasyon teorisinde bulmaktayız. Einstein teorisini kurmak için Euclides-dışı bir geometriye başvurur. Eğmeçli uzay varsayımına dayanan bu geometri, XIX. yüzyılda oluşturulmuştur. Einstein bildiğimiz fiziksel uzay-zamanı eğmeçli bir uzay olarak yorumlar; öyle ki, fizik yasaları düzlem geometri dışında değişik bir geometrinin önermelerine dönüşür. Başlangıçta tüm bu değişiklik son derece genel ve estetik nitelikte bir yargıya dayanılarak yapılır. Teorinin gözlemsel yoklanması daha sonraki bir iş olmuştur. Gözlem ya da deneyin teorisinin oluşturulmasındaki yaratıcı süreçte bir katkısı yoktur. Einstein matematiksel sezgisine o denli güvenle bağlandı ki, teorisinin gözlemsel yoklamasına geçildiğinde, herhangi bir tereddüde düşmemiş, sonucun olumlu çıkacağından kuşku duymamıştır. Sonucun olumlu çıkması diğer fizikçilerin de kendisine katılmasını sağlar.

(1) A. N. Whitehead'ın ilginç bulduğumuz bir belirlemesi akla gelmektedir: Kurucularını unutmakta duraksayan bir bilim kendini bulamaz. Mantığın çoraklığını bu duraksamayla açıklıyorum. (Çeviren)

Genel relativite, “karanlıkta matematiksel bir sıçrama” diyebileceğimiz, fiziksel bir teorenin başta gelen örneğidir. Einstein’ın kendine özgü muhayyilesi olmasaydı, teorenin oluşması belki de daha bir yüzyıl alabilirdi. XX. yüzyılın diğer büyük icadı olan kuantum teorisi için aynı şeyi söyleyemeyiz. Kuantum mekaniğini, birbirinden bağımsız ve farklı görüşlerden hareket eden Werner Heisenberg ile Erwin Schrödinger oluşturur. Temelde teori birçok kimsenin ortak katkısının bir ürünüdür.

Ne var ki, kuantum mekaniğinde bile sonuca giden kesin adım matematiksel muhayyilenin cesur bir atılımı ile atılır. Bu atılımı Schrödinger’in çalışmasında çok açık olarak görmektediriz.

Schrödinger’in çalışması ışık ışınları teorisiyle, parçacık yörüngeleri teorisi arasında bulunan formel matematiksel bir benzerliğe dayanıyordu. (Söz konusu benzerliği 90 yıl önce İrlandalı matematikçi W. R. Hamilton bulmuştu. Işık ışınları teorisinin, Hamilton’dan sonra Maxwell ve Hertz’in kurduğu ışık dalgaları teorisinin özel bir örneği olduğunu fark eden Schrödinger şöyle düşünür: Işık dalgalarının ışık ışınlarına olan ilişkisine benzer bir ilişki parçacık dalgalarıyla parçacık yörüngeleri arasında niçin olmasın? Salt matematiksel olan bu düşünce onu, şimdi kuantum mekaniği dediğimiz parçacık dalgaları teorisini oluşturmaya götürür. Teori hemen, atomların davranışlarına ilişkin deneysel olarak saptanmış olgularla yoklanır; sonuç genel relativitede gördüğümüz başarıdan daha göz alıcı bir başarı sergiler. Fizikte çoğu kez görüldüğü gibi, kimi deneysel verilerle desteklenen genel matematiksel bir akıl-yürütmeye dayalı bu teori, çok sayıda, son derece kesin ve doğru önde-yilere olanak vermektedir.

Genel relativite ile kuantum mekaniği, matematiksel sezgiyi yaratıcı ve verimli işlevinde açığa vuran iki başarılı girişimdir. Ne yazık ki, madalyonun bir de ters yüzü vardır. Matematiksel sezgi çoğu kez devrimci değil, tutucudur; özgür düşünceye yol açmaktan çok bu yolu tıkayıcıdır. Fiziksel bilimlerin tarihinde bu türden en kötü engeli Aristoteles ile Ptolemy’nin tüm göksel cisimlerin kürelerde dairesel devindiği öğretisini içeren yer-merkezli sistem oluşturmuştur. Aristoteles astronomisi bilime yaklaşık 1800 yıl süren (İ.Ö. 250 - İ.S. 1550) tam karanlık bir dönem yaşatır. Kuşkusuz uzun süren bu durağanlığın birçok nedeni vardı. Ancak başta gelen neden, göksel cisimler için yalnızca küre ve daireyi estetik olarak doyurucu bulan yanlış yolda bir matematiksel sezgiydi.

Ptolemy ay ile gezegenlerin devinimlerini saykil ve episaykillerle açıklıyordu. Başka bir deyişle, bu sistem, birbiri üzerinde devinen değişik büyüklükte daireler içeriyordu. Sistemin en kötü özelliği, olgusal yanlışlanmaya açık olmamasıydı. Teori ayrı ayrı her gezegenin gözlemlenen devinimine uyacak şekilde özel olarak oluşturulduğundan yanlışlanmaya olanak vermiyordu. Ptolemy’nin dönemine gelindiğinde (İ.S. 150), Yunan matematiği yaratıcı gücünü yitirmişti; artık bilimsel muhayyileyi Euclides geometrisinin küre ve dairelerinin kısıtlayıcı baskısından kurtarmaya olanak yoktu. Ne yeni gözlemlerle ne de matematiğin yeni bir atılımıyla rahatsız olmayan, 1000 yıllık karanlık dönem kendini sürdürür.

Kepler 1604’te gezegen yörüngelerinin elips biçiminde olduğunu keşfedip

siklik kozmolojiyi yıktığında, ona bulgusunu güzel gösteren matematiksel bir önyargısı yoktu. Tam tersine keşfine giden yolu tıkayan Orta Çağlar'dan kalma önyargıları vardı. Kepler keşfini, yıllarca didinerek, kolayca kopamadığı bu tür önyargılara karşı gerçekleştirmiştir. Fizikte çığır açmış büyük isimler arasında matematiksel tutuculuk istisna değil genel bir kuraldır. Yeni bir dönemin kapısını aralayan kişi çoğu kez eskinin egemenliğinden tam kurtulmuş değildir. Fizik ve astronomideki büyük keşiflerine matematiksel temel oluşturan kalkülüs'ün babası Isaac Newton bile düşüncelerini arkaik geometri diliyle açıklamayı yeğlemiştir. Başyapıtı *Principia Mathematica* klasik Yunan geometrisinin diliyle yazılmıştır. Asistanı Henry Pemberton, Newton'un Antik Çağ'ın geometrisine büyük bir hayranlık duyduğundan, o geometriye yeterince uymadığı için kendisini sık sık yerdüğinden söz etmektedir. Newton'un yayınlanmamış notlarını toplayıp incelemeyi kendine yaşam boyu meşgale yapan Lord Keynes, Newton'a ilişki izlenimlerini şu sözlerle özetler:

"XVIII. yüzyılda ve daha sonra Newton'a modern bilim dünyasının ilk ve en büyük bilim adamı gözüyle bakılmaya başlandı: Bize aklın soğuk ve yalın kurallarıyla doğaya yaklaşmayı öğreten bilim adamı. Ben ona öyle bakmıyorum. Onun 1696'da Cambridge'den ayrıldıktan sonra tuttuğu notları gözden geçiren hiç kimse- nin de öyle bakabileceğini sanmıyorum. Newton, 'akıl çağı'nın ilk büyük bilim adamı değildir. Ona bir bakıma büyücülerin sonuncusu, Babillilerin veya Sümerle- rin sonuncusu diye' bakmak daha yerinde olur. Dahası, onu son 10.000 yıllık dö- nemde entelektüel mirasımızı kurmaya çalışanların gözüyle dış dünyaya ve düşün yaşamına bakan son büyük düşün adamı sayabiliriz."

Newton'un karakteri, simya ve antik vahiylerle olan düşkünlüğü son derece il- ginç bir konudur; ancak burada üzerinde duracağımız şey bu değildir. Bizi ilgilen- diren yalnızca onun matematiksel yaklaşımı ve bu yaklaşımın bilimsel çalışması üzerindeki etkisidir. Bu konuda bildiğimiz her şey Keynes'in söylediklerine uymak- tadır. Newton'un da Kepler gibi keşiflerini, kendisini içten saran matematiksel ön- yargılarına karşı gerçekleştirdiği üzerinde pek az kuşku vardır.

Bu ve benzeri tarihsel örneklerden çıkan sonucu kısaca şöyle özetleyebiliriz: Matematiksel sezgi, hem iyi hem de kötüdür; hem fizikte yaratıcı çalışma için vaz- geçilmez bir yöntem, hem önyargılarımıza bir sığınak. Bu iki yanlı görünümün ne- denini matematiğin doğasında aramak gerekir. Fizik bilgini Ernst Mach'ın belirttiği üzere, "Matematiğin gücü gereksiz tüm düşüncelerden sıyrılabilmesine ve düşünce- de israfa düşmemek yolundaki üstün becerisine dayanmaktadır." Fizikçi, matemati- gi kullanarak teori oluşturur; çünkü, matematik ona başka türlü düşünemeyeceği ilişkileri kurma olanağı sağlar. ... Teori oluşturma sürecinde matematiksel sezginin işlevi, vazgeçilmezdir; şöyle ki, muhayyilenin özgür etkinliği için "gereksiz düşünce- lerden sakınma" tutumuna ihtiyaç vardır. Ancak bunun tehlikesini de unutmama- lıyız: Bilimsel araştırmada çoğu kez "gereksiz" diye düşünceden sakınmaya değil, düşünceye ihtiyaç vardır.

Şimdi fizikte bugünkü durumu ele alabiliriz. "Fizik" deyince, temel parçacıkları konu alan yüksek enerji fiziğini düşünüyorum. Böyle dar anlamda aldığım fizik alı- şık olmadığımız mutlu bir dönem geçirmektedir. ... 1910'da atom dünyası ne denli

yeni ve garip görünüyorduysa, günümüzde atom-altı parçacıklar dünyası o denli yeni ve garip bir görünüm sergilemektedir. Edinilen tüm deneysel bilgilere karşın, bu dünyaya ilişkin elimizde henüz kapsamlı bir teori yoktur.

Böyle bir durumda teorik fizikçiler hedef ve yöntemlerini matematiksel anlayış ölçütlerine göre belirler. Bu aşamada onun öncelikle yanıtlaması gereken, “acaba teorim çalışacak mı?” sorusu değil, “ulaştığım şey gerçekten bir teori midir?” sorusudur.

Teori oluşturma çabasında fizikçinin başvurduğu şey çoğu kez, daha önce öğrendiği birkaç genel ilkenin yanı sıra bazı matematik yöntemlerle hesaplama teknikleridir. Bunların ne tür bir birleşimiyle teorik sonuç alınabileceği matematik anlayışa kalmış bir sorundur.

Çağdaş teorik çalışmada başvuru üç temel yöntem vardır. Bunlar, alan teorisi, S-matris teorisi ve grup teorisi diye bilinmektedir. Bu teoriler birbiriyle bağdaşmaz değildir; hiç değilse, verdikleri sonuçların birbiriyle çelişir nitelikte olduğu söylenemez. Şu kadar ki, farklı teorileri benimseyenlerin söyledikleri her zaman birbirini tutmamaktadır. Büyük bir olasılıkla doğayı anlamada her üç görüşün de verimli katkılarına tanık olacağız.

Söz konusu üç yöntem arasındaki fark yalnızca matematiksel içerik yönünden değil, bu içeriği işleme biçiminde de kendini göstermektedir. Alan teorisi matematiksel derinliğe ilişkin bir önyargıyla işe koyulmaktadır. Buna göre fizikte köklü anlama matematikte derinleşmeyle birlikte gitmelidir. Bu nedenle matematiksel malzeme olarak Hilbert uzayında operatörler cebiri seçilir. Bu cebir başka birtakım karmaşık matematik yöntemlerle birleşerek gerçek dünyanın belirgin özelliklerini temsil edecek yapısal bir bütünlüğe kavuşturulur. Önemsenen ve vurgulanan, deneysel sonuçlarla uyum sağlamak değil, fizik teorisini matematiksel olarak kurmaktır. Sözü edilen üç temel yöntem içinde deneye en uzak duranı, matematiksel kesinliğe en büyük önem veren, fizikle ilişkisinde belirsiz kalırken, entelektüel amaçlarında en yüksek düzeye yönelik olan alan teorisidir. Bu yöntemin tutkunlarından biri olduğum için yetersiz kaldığı noktaları belirtmeye kendimi yetkili görüyorum.

S-matris teorisinde ise matematiksel malzemenin elden geldiğince basit tutulmasına özellikle özen gösterilir. Bu yöntemi karmaşık değişkenlerin standart analitik fonksiyonlar teorisi (ki, kimliğini XIX. yüzyılın başlarında Fransız matematikçisi Augustin Cauchy'nin elinden çıktığı gibi korumaktadır) oluşturmaktadır. S-matris teorisinin matematiksel derinlikteki yetersizliğini deneysel verilere büyük ağırlık tanımasıyla dengelediği söylenebilir. Teori bir deney sonucunu, diğer deneylerin sonuçlarını kullanarak, hesaplama ve kestirme yoluna gitmektedir. Bazen öndeyiler, deney sonuçlarından bağımsız olarak, “temel ilkeler”e başvurma yoluyla hesaplanır. S-matris teorisinin sağladığı kolaylıklardan biri, hesaplama sürecinde oyunun kurallarını değiştirmeye elvermesidir. Yöntemin esnek yapısı teori oluşturmada kesin uygulamaya değil, bir tür sınama-yanılma yoluyla sonuç almaya olanak vermektedir. Araştırmanın her aşamasında, deneysel sonuçlarla yoklanan hipotezler yanlış çıktığında ayıklanabilmekte, doğrulananlara dayanılarak ilerlenebilmektedir.

Deneyleri yorumlama ve yönlendirmede S-matris teorisinin sağladığı başarı göz alıcı bir düzeydedir. Benim, alan teorisini yeğlemem, tarihsel kanıtlara vurul-

duğunda, güvenilirliği kuşku çeken kişisel bir eğilime dayanmaktadır. S-matris teorisini, bana kalırsa çok basit, derinlikten yoksun, tümüyle alındığında yetersiz görmektedir. Öyle ki, bu teori her şeyi açıklama gücünde olduğunu ortaya koyacak olsa, doğrusu hayal kırıklığına düşer, “Yaratıcı”nın bu denli yüzeysel kalmış olmasına üzülürüm. Ama biliyorum ki, “O”, beklemediğimiz biçimlerde derinleşme inceliği-ne sahiptir.

Son olarak, teorik fizikte kullanılan matematiksel yöntemlerden üçüncüsünü, grup teorisini ele alacağım. Daha çok yüzyılımızın ilk çeyreğinden başlayarak gide-rek büyük derinlik ve güç kazanan bu teoriye daha ayrıntılı bakmak istiyorum. Te-oride iki temel kavram, “grup” ile “temsil” kavramlarıdır. Grup bir küme işlem de-mektir; öyle ki, bunlardan art arda gerçekleştirilen herhangi ikisi birlikte kümeye dahil bir üçüncü işleme eşdeğerdir. Örneğin, üç boyutlu rotasyon grubu O_3 , sıra-dan üç boyutlu uzayın sabit bir merkez çevresinde tüm rotasyonlar kümesi olarak tanımlanır. Buna göre, R_1 ile R_2 o türden iki rotasyon ise, ikisinin birleşimi R_3 gibi bir üçüncü rotasyonla eşleştirilebilir.

Bir grubun temsili ise bir küme sayı ile bu sayıları dönüştürecek bir kural de-mektir; öyle ki, gruba dahil her işlem, sayıların düzgün-tanımlanmış bir dönüştür-mesini sağlar. Bir temsildeki dönüştürmeler, doğrusal (linear) olmakla sınırlıdır; yani, eğer belli bir dönüştürme p yi p' ne q yü q' ne yollarsa, bu aynı zamanda $p + q'$ ü $p' + q'$ ne yollaması demektir. O_3 'ün temsiline bir örnek olarak, P gibi herhangi bir noktanın konumunu belirleyen üç koordinat (x, y, z) gösterilebilir. R gibi bir ro-tasyon uygulandığında, P noktası P' gibi koordinatları x' y' ve z' olan yeni bir nok-taya kayar ve bu x, y, z için dönüştürme kuralını belirler. O_3 'ün bu dönüşümüne üçlü temsil denir; çünkü bu, üç sayı içine almaktadır.

Grup teorisinin fizikteki büyük gücü iki nedene bağlanabilir. Birincisi, kuan-tum mekaniğinin yasaları gereğince, ne zaman fiziksel bir nesnenin simetrisi varsa, bu simetriyi koruyan düzgün-tanımlanmış bir grup (G) işlem vardır; öyle ki, bu nesnenin olası kuantum durumları G 'nin temsilleriyle tam bir karşılaşım içindedir. İkincisi, tüm düzgün-davranışlı gruplarla temsillerinin sayım ve sınıflanması, grup-ların uygulanabileceği fiziksel durumlardan bağımsız olarak matematikçiler tarafın-dan kesinlikle yapılmıştır. Bu iki nedenden grupların soyut niteliklerine ve temsille-rine dayanan ve tüm mekanik ve dinamik modellerden kaçınan temel parçacıkların simetritelerinin katıksız soyut bir teorisini oluşturma olasılığı çıkmaktadır.

Somut grup teorisinden soyut grup teorisine geçişi örnek vererek, daha kolay açıklayabiliriz. Yoğunluğu son derece zayıf bir gaz içinde yüzen bir atomun uzayda yeglediği hiçbir yönü yoktur; bu nedenle sıradan rotasyon grup (O_3) un simetrisine sahiptir. O_3 'ün temsilleri arasında üçlü temsil de vardır. Bir birim spini olan ato-mun durumları bu temsillere aittir ve üçlü durum diye bilinir. Bunlar daima aynı enerjiyle üçlü gruplarda bulunur. Şimdi rotasyonal simetriyi bozacak şekilde man-yetik bir alanın döndüğünü varsayalım; üç eşit enerji azıcık parçalanır ve üç durum spektroskopta spektral çizgilerin görünebilir üçlüsü olarak saptanabilir. Atomun rotasyonal simetrisine göre yapılan böyle bir durum sınıflaması uygulanan somut grup teorisine standart bir örnek oluşturur.

Şimdi farklı bir örnek verelim: “Pions” denen üç tür temel tanecik vardır. Bunlardan biri artı yüklü, biri eksi yüklü, diğeri yüksüz (nötr) dür. Üçünün de kütleleri ve çekirdek etkileşimleri yaklaşık olarak denktir. Şimdi bunların O_3 ile aynı soyut yapıya sahip, ancak sıradan uzay rotasyonlarıyla ilgisi olmayan, bir O_3 grubunun üçlü bir temsili olduğunu düşünelim. Bu durumda O_3 oluşturan işlemlerin nitelikleri hakkında hiçbir şey bilmeksizin, yalnızca soyut grup teorisine dayanarak pionların birçok özelliklerini kestirebiliriz. Bundan daha ilginç olan, Nicholas Kemer’in 1938’de, ilk pion’un keşfinden tam dokuz yıl önce, soyut grup teorisine dayanan öndeyilerini yapmış olmasıdır. O_3 grubu (kimi hafif değişimlerle) fizikte “izotopik spin grubu” diye bilinmektedir.

Görülüyor ki, teorik fizikte kullanabileceğimiz üç matematiksel yöntem ya da teori vardır: Alan teorisi, S-matris teorisi ve grup teorisi. Bunlardan hiçbiri gerçek anlamda teori değildir. “Teori” deyince relativite teorisi veya kuantum mekaniği gibi büyük bir açıklama sistemi akla gelir. Oysa sözünü ettiğimiz yöntemler, gereği kadar ne tam ne de istenilen bütünlüktedir. Kuşkusuz bu benim kişisel değerlendirmem. Uygulama amaçlarında başarılı da olsalar, benim bir teorinin yapısında aradığım estetik ölçülerin gerisinde kalmaktadır. Bu yüzden onları, “cehalet uçuşumu üstüne kurulmuş kardan köprü” diye nitelemek eğilimindeyim. Karl Pearson’a borçlu olduğumuz bu parlak niteleme, genellikle benimsemekte güçlük çektiğimiz teorik düşüncelere uygulanır. Pearson, Gregor Mendel’in kalıtım yasalarını bu yakıştırmayla yerme yoluna gitmişti.

[Bu metin, *Mathematics in the Modern World*, (Ed. M. Kline)’den alınmıştır.]

MATEMATİKTE YENİLİK

Paul R. Halmos (1958)

Herkes son üç yüzyıl boyunca bilim ile teknolojinin giderek artan bir hızla geliştiğini bilir. Bu gelişmede matematiğin yaşamsal işlevini bilmeyen pek az kimse vardır. Oysa gariptir, pek çok kimsenin gözünde matematik Antik Çağ'da kimi "bilge" kişilerin ortaya koyduğu değişmez doğruları içeren, bilim adamlarıyla mühendislerin işlerine geldikçe yararlandıkları durağan bir sanattır. Gerçeğe bundan daha uzak bir düşünce olamaz! Matematik durmadan değişen, gelişen ve büyüyen bir uğraştır. Bu gelişme ve büyümeye yalnızca temel bilimlerin ilerlemesi değil, günlük yaşam koşullarındaki düzeltmeler de dayanmaktadır.

Çağımızın seçkin bilginlerinden John von Neumann salt kuramsal matematikle teknolojinin ilişkisini belirtirken sevdiği bir örneği vermekten kendini alamazdı: Yüz elli yıl önce endüstri, ticaret ve yönetimin dayandığı uygulamalı bilimin en önemli sorunlarından biri deniz kazalarında yaşam kaybını önlemektir. Bu kazalarda yaşam kaybı gerçekten korkutucu boyutlarda idi o zaman. Kazaları önleme yolunda harcanan çaba ve para da aynı boyutlarda büyüktü. Dahası, kimi zaman gülünç biçimlere bürünüyordu bu çabalar. Ne denli karmaşık ya da aykırı da olsa, akla gelen her önlem ve araçtan yararlanma yolu aranıyordu. Gemilerin donatımı artık komik görüntüler sergiliyordu. Kamu ve endüstri yetkilileri çaresizlik içinde önlerine çıkan her deneyden medet umarken, matematikçiler onların düşleyemeyecekleri etkinlikte bir yöntemi sesizce oluşturmaktaydılar. Bu yöntem daha sonra "kompleks bir değişkenin fonksiyonlar teorisi" diye bilinen yöntemdi. [Kompleks değişken, i sanal sayısını (eksi 1'in karekökünü) içeren değişkendir.] Bu salt matematiksel kavramın birçok uygulamaları arasında en verimlilerden biri radyo iletişiminde kendini göstermiştir. Matematikçi Karl Friederich Gauss'tan mucit Guglielmo Marconi'ye uzanan yol, James Clerk Maxwell ile Heinrich Hertz çapında iki dâhinin birkaç adımda kolayca alabileceği kısalıktır.

Matematikte yer alan yenilikler sıralanacak olsa, sonu gelmez bir listeye karşılarız. Örneğin, grup teorisi yaklaşık yüzyıl önce oluşturulmuştu. Bu gelişme büyük bir olasılıkla Gauss'un çağdaşları için işe yaramaz, çirkin bir şeymiş gibi görünürdü. Bugün her fizikçinin bilgi dağarcığında önemli bir yer tutmaktadır grup teorisi. Gene daha 50 yıl önceye gelinceye dek tüm Amerika Birleşik Devletleri'nde

bir tek istatistik profesörü yoktu. Bugün kalıtım ve deneysel psikoloji gibi bilim dallarında istatistiksel yöntemler vazgeçilmez araçlardır. Von Neumann'ın 1928'de yayımlanan, 20 yıl sonra yeni bir canlılık gösteren "Oyun Teorisi"nin ekonomi ve yöneylem araştırma alanlarında önemli uygulama değeri olduğu görülmektedir. Nihayet, matematiksel düşüncelerin yaratıcılarının elinden, yetkin nesneler olarak çıktığı gibi yanlış bir sanıyı düzeltmek için şunu hatırlatacağız: Her dönemde büyük bir hayranlık yaratan Euclides geometrisindeki ispatların, 2000 yıl sonra birtakım ciddi kusurlar taşıdığı görülmüştür. Bu kusurlar yüzyılımızın başında büyük Alman matematikçisi David Hilbert'in çalışmasıyla giderilmiştir.

Matematikte yeni atılımların sürüp gittiğini kabul ettikten sonra, bunların ne tür şeyler olduğunu, nasıl ortaya çıktığını da görmemiz gerekir. Matematiksel bir katkıyı sınıflamanın bir yolu şu olabilir: Bu katkı yeni bir ilişkiyi ortaya çıkarma olabilir; ya da birçok ilişkileri yeni bir yaklaşımla birlikte ele alma olabilir.

Profesyonel matematikçilerin çalışmalarının büyük bir bölümü bilinen ilişkilere yeni ispatlar getirmeye yöneliktir. Bunun bir nedeni, salt kişisel merakı doyurma isteğidir: Bilinen bir konuya ilişkin yeni bir yaklaşım ya da görüş oluşturmada estetik bir zevk vardır. Başka bir nedeni de, söz konusu ilişkiyi ilk ortaya çıkaran matematikçinin çoğu kez kusurlu, hantal ya da üstünkörü bir yöntemle dayanmış olduğunun bilinmesidir. Kaldı ki, o matematikçinin bulduğu ilişkiyle matematiğin diğer dalları arasındaki bağıntıları yeterince görmüş olması da beklenemez. Bununla ilgili bir üçüncü ve oldukça pratik bir neden daha gösterilebilir: Matematiğin son iki bin yıl boyunca kaydettiği gelişme öylesine zengindir ki, sürekli olarak arındırılmasına, basitleştirilmesine, temel kavram ya da ilkelere indirgenmesine ve açıklık kazanmasına ihtiyaç vardır. Yoksa, meşaleyi yeni kuşaklara ulaştırma sorunu içinden çıkılmaz bir girdaba dönüşür. Günümüzde yaşayan hiç kimsenin son on yıl içinde yayımlanmış matematiğin tümünü, üstünkörü de olsa, bilmesine olanak yoktur. Araştırmacılara çalışmalarında ilerleyebilmeleri amacıyla gerekli bilgi ve anlayışı kazandırmak için daha basit, daha özlü ve daha etkili, ama aynı zamanda, daha aydınlatıcı ve anlamlı yöntemler bulmak kaçınılmaz bir zorunluktur.

Garip gelecek ama, kimi zaman eskisinden daha karmaşık bir ispat bulmak yararlı olabilir. Şöyle ki, yeni ispat daha önce sezilenmemiş kimi ilişkileri de açığa çıkarırsa, ileriki kuşakların öğrenme ve anlamalarına büyük kolaylık sağlayan bir genellemenin oluşmasına yol açabilir. René Descartes'ın ortaya koyduğu "koordinat", ya da "analitik" geometri buna iyi bir örnektir. Descartes'ın getirdiği yeniliğin bir sonucu, Euclides geometrisindeki her önermeyi cebirsel olarak ispatlama olanıdır. Analitik geometrinin pek çok önemli özellikleri vardır; ne var ki, Euclides ispatlarıyla karşılaştırıldığında analitik ispatların, basitlik yönünden övünülecek bir özelliği yoktur. Çoğu durumlarda, Euclides geometrisinin üçgen ve daire gibi nesnelere ilişkin verdiği basit ispatlar, analitik geometride içinden çıkılmaz, anlamsız uzun hesaplamalara yol açmaktadır.

Analitik geometrinin değeri matematiğin tümüyle farklı sanılan iki kolu (cebir ile geometri) arasındaki bağıntıyı açığa çıkarmış olmasıdır. İlk geometricilerin başlıca kaygılarından biri, koni kesitleriydi. (Koni kesitleri, bir koninin bir düzlemle

kesilmesiyle oluşan eğriler demektir.) Bunun şekiller üzerinde salt uzaysal bir düşünme biçimi olduğu açıktır. Koni kesitleri (elips, parabola, hiperbola) karteziyen koordinatları üzerine geçirilip cebirsel denklemleri yazıldığında, tüm denklemlerin x ve y 'lerin ancak karelerini içerdiği görülür. İşte eğrilerin doğası üzerindeki anlayışımızı derinleştiren yeni bir gözlem bu. Üstelik bu bulgu bizi yeni bir soruya yöneltmektedir: x ve y yi içeren daha yüksek dereceden denklemlere ilişkin eğrilerin görünüşleri nasıl olacaktır? Bu soru, tek başına uzaysal sezgiyle ulaşamadığımız bir dizi geometrik şekille bizi karşılaştırmaktadır. Üstelik, denklemleri geometrik biçimlere dönüştürmekle, bunların cebirsel yapılarını daha iyi anlama olanağını elde ederiz.

Kuşkusuz hemen her yeni ispat, hem basitlik hem de anlayışımızı derinleştirme yönünden bir kazanç sağlar. Örneğin, bir merminin izlediği parabolik çizgiyle sınırlanmış düzlem parçasının alanını ve namluyu hedefle birleştiren doğru parçasını bulma problemini alalım. Bu ilk kez Archimedes'in çözdüğü bir problemdir. Onun çözümü çok iyi bilinen "tüketme yöntemi"ne dayanıyordu. Buna göre, karmaşık alanları bulmak için daha basit alanları toplama yoluna gidilir. Archimedes'in çözümü ince bir zekâ gerektirdiği kadar uzundur da. Aynı problemi sıradan bir üniversite öğrencisi kalkülüs'ü kullanarak tek bir satır üzerinde çözebilir. Bu başarı öğrenciye değil, kalkülüs'ü ortaya çıkaran ve geliştiren büyük matematikçilere aittir kuşkusuz...

Yeni ispatlar için bu kadar. Yeni bir ilişki gözleme ya da bulma için ne diyeceğiz? Genel bir anlamda, herkes böyle ilişkiler gözlediğini söyleyebilir. Vergi bildirim üzerindeki rakamların toplamını almak, bu anlamda, bir olguyu saptamadır. Büyük olasılıkla bulduğumuz toplam, dayandığı rakamlar göz önünde tutulduğunda, ilk kez saptanan yeni bir olgudur. Matematik bakımından gerçekten yeni ve ilginç olan bir ilişki kapsam ve özünde daha zengindir. Buna bir örnek vermek için 200 yıl önce Leonhard Euler'in ispatladığı, ama matematikçi olmayanlar için yeni görünen şu önermeyi alalım: Her pozitif tamsayı en çok dört karenin toplamı olarak yazılabilir. Kare deyince, 1, 4, 9, 16, 25, vb. sayıları düşünüyoruz. Diziye bakıldığında kareler arasındaki mesafenin giderek büyüdüğü görülür. Kareleri ikişer toplarsak ($4 + 4$ te olduğu gibi, kareleri kendileriyle de toplayabiliriz) elde ettiğimiz dizide mesafeler azalır. Eğer üç karenin toplamı olan sayıları da katarsak, mesafeler daha da azalır. Euler teoremine göre, dört karenin toplamı olan sayıları kattığımızda dizide boş mesafe kalmaz.

Gene yeni olmayan, ama matematikte yeniliğin büyük önemini gösteren bir başka örnek, denklemlerin çözümlenebilirlik teorisidir. Bu teoriyi XIX. yüzyılın başlarında genç Fransız matematikçisi Evaristé Galois kurmuştu. Galois'den önceki matematikçiler, dördüncü dereceye kadar denklemlerin çözümü için formül bulmuşlardı. "Dördüncü dereceye kadar denklem" derken içindeki değişkenlerin üslerinin en çok 4 olduğunu söylüyoruz. Lise cebirinde öğrendiğimiz "kuadratik formül" ile çözülen denklemler ikinci dereceden denklemlerdir.) Onlar doğal olarak daha yüksek dereceden denklemlerin çözümü için de formül olabileceğini düşünmüş, bu yolda uzun süren büyük çabalar harcamışlardı.

Galois, onların arayıp bir türlü bulamadığı genel formüllerin varlığından kuşku duyma cesaretini gösterir. Soruna tümüyle yeni bir açıdan yaklaşır. Aradığı, saklı olan formülü ortaya çıkaracak bir düzenleme, bir oyun değildi. Onun aradığı, tam tersine, denklemlerin ve çözümlerinin daha genel özellikleriydi. Çalışması son derece önemli ve verimli bir kavrama, grup kavramına yol açar. (“Grup” çarpıma benzer bir işlemin tanımlandığı bir küme nesne anlamında bir terimdir.) Bu güzel ve entelektüel anlamı büyük olan kavramın bir sonucu, yaratıcısının kuşkusunu pekiştirmek oldu: Cebirsel denklemlerin tümünün çözümü için genel formüller yoktur. Galois’nın ulaştığı bir sonuç matematikte yeni dediğimiz bir olguya örnektir.

Öte yandan, Galois’nın çalışması, “yeni yaklaşım” dediğimiz üçüncü tür yeniliği de temsil etmektedir. Grup teorisi, son derece değişik ve çok sayıda matematik problemlerin ele alınmasında paha biçilmez değerinde bir araçtır. Üstelik, Galois’nın fikirleri cebir ile geometri arasında beklenmedik başka bir ilişkiyi ortaya çıkarır. Daireyi kareleştirme, küpü iki katına çıkarma, açıyı üçe bölme gibi Antik Çağ’dan beri bilinen ünlü problemlerin de genel çözümünün olmadığı anlaşılır. Galois’nın yeni yaklaşımının yarattığı etkiler, modern cebirde bugün bile duyulmaktadır.

“Matematiksel yenilik” dediğimiz şey nereden kaynaklanmaktadır? Kimi kez (ama her zaman değil!) kaynak matematiğin dışındadır. Matematik nasıl mühendisliğe, fizik, psikoloji, genetik, ekonomi ve diğer bilim kollarına önemli katkılar sağlıyorsa, bu çalışmalar da uyarıcı sorular sormak, yeni gelişme çizgileri ortaya koymak, en azından matematiksel düşüncelerin ifadesi için dilimize yeni olanaklar kazandırmak biçimlerinde matematiksel yaratıcılık gücünü canlı tutmada etkili olabilirler. Bazı hallerde, fizikçi belli bir matematik teoriye ihtiyaç duyduğunda, aradığı şeyin hazır, kendini beklediğini görür. Birçok hallerde de ihtiyaç duyulan teori ya da yöntemin oluşturulması uzun yıllar alabilir.

Yeni bir gelişme çoğu kez salt merak ürünüdür. Matematikte etkili bir merak türü ancak en seçkin meslek mensuplarında kendini gösteren son derece değerli bir özelliktir. Genç bir matematikçi için en büyük sorun, bir problem bulmaktır. İyi sorulan bir soru savaşın yarısını kazanmakla birdir; böyle bir soru oluşturmak büyük ölçüde ilham gerektirir. Sorunun cevabı çok güç olabilir; ama çoğu kez görüldüğü gibi, yaratma ve kavrayış sürecinde duyulan asıl heyecan soruda düğümlenmektedir.

Bir noktayı belirtmede yarar var: Soru ortaya çıktıktan sonra matematikçi, çoğu kez sanıldığı gibi tersine, bilimsel bir Sherlock Holmes gibi ilerlemeye koyulmaz. Matematikçi bir dedüktif çıkarım makinesi değil, bir insandır. Yeni bir düşünceye salt akıl ya da dedüksiyonla değil, alınteri, deneme, indüksiyon ve (şanslı bir kişi ise) ilhamla ulaşabilir. Kuşkusuz “deneme” derken araç ve gereçlere dayanan laboratuvar denemesinden söz etmiyoruz. Dediğimiz, belli bir sorunu tüm ayrıntılarıyla inceleme, çözüm seçeneklerini yoklamadır. (Örnek: İlk 10 kare sayısını yaz; bu kareleri ikiye, üçe, dörde alarak toplamalarının verdiği tüm sayıları belirle.) Bu tür denemelere dayanan matematikçi, indüktif akıl-yürütmeyle genel sonuçlara gider. Bundan sonrası bu sonuçları ispatlamaya kalmıştır ki, çoğu kez büyük çaba ister. İspat için gerekli olan dedüktif akıl-yürütme, aynı zamanda yeni bazı ilişkileri de su yüzüne çıkarmaya yol açabilir.

Yeniliğin kaynağı sorununa dönelim. Matematikçilerin bilgilerini olduğu kadar ilgi ve merak konularını da birbirleriyle paylaştıklarını söylemeliyiz. Mesleğin eşiğine adım atmış öğrenci çoğu kez öğretmenlerinin merak konularından yararlanır. Büyük matematikçiler de kendilerinden önce gelenlerin çözemediği problemleri ele alırken benzer bir davranış içindedirler. Galois ele aldığı problemleri kendisi oluşturmamıştı. Geçmiş günlerden kalan problemler hiçbir zaman eksik olmayacaktır. Bunlardan ünlü iki tanesi (dört-renk harita problemi ile Fermat'ın son teoremi)⁽¹⁾ bugün bile canlılığını sürdürmektedir. Yüzyılımız matematikçileri, ilginç problemleri kapsayan bir listeyi hazır bulmakla kendilerini şanslı sayabilirler. 23 soru içeren bu liste, David Hilbert tarafından 1900'de Paris'te toplanan Uluslararası Matematik Kongresi'ne sunulmuştu. Aradan geçen zaman içinde sorulardan birkaçına çözüm bulundu; geriye kalan büyük çoğunluğu hâlâ çözüm beklemektedir.

Pratik uygulama, merak ve geçmişten gelen birikim, yeniliğin ana kaynaklarıdır. Bunlara iki tane daha ekleyebiliriz: Biri başarısızlık, diğeri hatadır. Fermat'ın konjektürünü ispatlama girişimine kalkan herkes başarısız kalmıştır. Ne var ki, başarısız da kalsa, bu çabalar cebir ve sayılar teorisinde son derece verimli kavramlara yol açmıştır. Hataya gelince, kitaplar dolusu parlak çalışmaları yanılğalarımıza borçluyuz. Bir matematikçinin gözünden kaçan bir nokta, ya da yanlış dile getirdiği bir düşünce çoğu kez diğeri bir matematikçinin doğruya ulaşmasında başlıca etken olmuştur. Kimi kez kişinin kendi hatasından yola çıkarak doğru sonuca ulaştığını biliyoruz.

Matematiksel yaratmanın kaynakları üzerindeki bu açıklamalardan sonra, yaratma etkinliğinin kendisine bakabiliriz. Son yüzyıl içinde belki de en önemli yeniliği Alman matematikçisi George Cantor'un ortaya koyduğu kümeler teorisi olmuştur. Bu gelişmede birçok yeni ilişkilerin yanı sıra eskiden bilinen kimi ilişkilerin de yeni ispatlarını bulmaktayız. Daha da önemlisi, gelişmenin dayandığı yeni yaklaşımın, matematiğin baştan sona yöntem ve ruhuna getirdiği değişikliktir. Klasik cebir ve geometrinin en çapraşık problemlerinden, matematiğin temellerine ilişkin felsefi sorunlarına dek, her şey kümeler teorisiyle yeni bir perspektif kazanmıştır.

Modern bilimsel teorilerin birçoğunun tam tersine, kümeler teorisi son derece basit ve kimsenin yabancı olmadığı bir kavrama dayanmaktadır. "Küme" terimi günlük anlamında olduğu üzere bir yığın somut ya da soyut (sayı, nokta, vb.) nesne demektir. Örneğin, bu sayfa üstündeki harfler bir küme, tüm tek sayılar başka bir küme oluşturur. İlk bakışta çok basit görünen bu kavramdan bir sürü şaşırtıcı matematiksel sonuçlar çıkmaktadır.

Cantor'un kümeler teorisine dayanarak yeni bir ispatını verdiği eski bir olgu cebirsel ve aşkın (transcendental) diye bilinen iki tür sayının varlığına ilişkindi. İki tür arasındaki farkı anlamak için cebirde ele aldığımız sayılara bakalım. Sıradan bir problemde, örneğin, $x^3 - 2x^2 + 3 = 0$ gibi bir denklemle işe koyulur, x in denklemi

(1) Henüz ispatlanmamış bir önermeye, "teorem" değil, "konjektür" demek daha doğru olur. (Çeviren)

doğrulayıcı değer ya da değerlerini ararız. Cebirsel bir sayıyı tanımlamak için ise ters yönde gideriz: Bir sayı ile başlar, ona uygun denklemi ararız. Daha kesin bir dille söylersek, cebirsel dediğimiz sayı $a + bx = 0$ ya da $a + bx + cx^2 = 0$, ya da, $a + bx + cx^2 + dx^3 = 0$, vb. (burada a, b, c, d , vb. sıradan tamsayıları temsil etmektedir) gibi bir denkleme çözüm getiren bir sayıdır. Cebirsel olmayan sayılara ise “aşkın” sayılar diyoruz.

İmdi, sonsuz değişik çözümleri olan sonsuz sayıda denklem vardır. O halde, sonsuz sayıda cebirsel sayı var demektir. Akla hemen şu soru gelmektedir: “Aşkın” denilen sayılar var mıdır? Cantor cevabı biliyordu (cevap, “evet”tir). Ancak onun ispatı tümüyle özgün bir yol izliyordu. Cantor tamsayılar kümesi ile tüm cebirsel sayılar kümesini gözönüne alarak, bu sonsuz büyüklükteki kümeleri karşılaştırma yolunu buldu.

Sonlu kümeleri karşılaştırmak için sadece elemanlarını saymak yeterlidir. Örneğin, İngiliz alfabesinde sessiz harfler kümesinin sesli harfler kümesinden daha büyük olduğunu göstermede bir zorluk yoktur. Cantor sonsuz kümelerle uygulanabilen genel bir sayma yöntemi bulur. Bu yöntemle tüm sayılar kümesinin, tüm cebirsel sayılar kümesinden daha büyük olduğunu göstermekte güçlük çekmez. Bu sonuç aşkın sayıların varlığını açıkça ortaya koymuştur. Cantor’un yöntemiyle sayılara ve diğer matematiksel nesnelere ilişkin pek çok yeni şey öğrenilmiştir. Ne var ki, onun en büyük katkısı şimdi tüm matematik dünyasının benimsediği yeni yaklaşımıydı. Bireysel sayılar, noktalar ya da fonksiyonları ele alma yerine Cantor’dan sonra matematikçiler bu nesnelerin büyük kümeleriyle uğraşmaktadır. Bu kümelerin, bireysel nesnelere ait olmayan, ama gene de onlara açıklık getiren birtakım özellikleri vardır. İki (ya da daha fazla) insan kümesi el ele yürüyebilir; ama tek kişi böyle yürüyemez. Üstelik biz bir kişiyi, arkadaş çevresini biliyorsak, daha iyi tanırız demektir.

Biraz zorlanmış bir örnek olacak ama, kendinizi Princeton-Yale futbol maçını seyreden bir Avrupalı olarak düşünün. Maçın ilk yarısından sonra alana bir bando yürüyerek çıkıyor. Elinizdeki çok güçlü dürbünle müzisyenleri tek tek inceleyebiliyorsunuz. Ceketlerinin rengi sizin için bir anlam taşımadığı için, bandonun hangi takıma ait olduğunu bilmiyorsunuz. Ancak dürbünü bir yana bırakıp bando takımının alandan ayrılırken P harfi gibi biçimlendiğine dikkat ederseniz, büyük bir olasılıkla bandonun Princeton takımına ait olduğunu anlarsınız. Kuşkusuz bu yanıltıcı olabilir. Ama asıl nokta gözden kaçmamalıdır: Bir kümenin yapısı bize o kümeye dahil üyeler hakkında bazı ipuçları verebilir.

Geçmişte matematikçinin ilgisi bireysel problemlere yönelikti. Bir denklemler sistemiyle karşılaştığında sorusu şu olurdu: Bunlara çözüm bulunabilir miydi? Çözüm varsa, bu nasıl olacaktır? Modern matematikçi de bu tür sorulara cevap arar; ancak onun yaklaşımı farklıdır. O örneğin, şöyle sorarak işe koyulabilir: “Verilen iki çözümün toplamı veya çarpımı da bir çözüm müdür?” Bu soru, olası tüm çözümler kümesinin yapısına ilişkindir. Cevap, “evet” ise, bilir ki, uğraş konusu küme belli bir özellik taşımaktadır. (Örneğin, bir grup özelliği.) Bu bilgi bireysel çözümleri de daha iyi tanımayaya yarar.

Kimi problemler karmaşık ve çetin yeni problemlere yol açar. Belli bir doğru parçasından seçilen noktaların oluşturduğu birkaç kümeye bakalım. (Bu doğru parçası bir termometre gibi derecelendirilmiş olsun. Sıfırla belirlenen bir noktanın bir yanında pozitif sayılar, diğer yanında negatif sayılar sıralanmıştır.) Bir iki basit kümeye başlayalım: Sıfırın sağındaki tüm noktalar (yani, pozitif sayılar) kümesi; 2 ile 7 arasındaki noktalar (“sayılar” da diyebiliriz) kümesi; -2 ’nin solundaki noktalar kümesi, vb. Bunlar, hepimizin bildiği basit geometrik diyagramlarla hemen temsil edebileceğimiz türden kümelerdir. Şimdi diyelim ki, tamsayılar arasındaki noktaları ondalık olarak düşünüyor ve bu noktalar kümesini, ondalık noktasının soluna pozitif tek sayı gelecek şekilde oluşturuyoruz. Bu bile fazla bir güçlük vermez; biraz kafa yormakla gözümüzde canlandırabilir, diyagramını çizebiliriz. Peki, ondalık temsilde 6 rakamının asla yer almadığı noktalar kümesi için ne diyeceğiz? Bu pek çok özelliğini bildiğimiz iyi tanımlanmış bir kümedir. Örneğin, $11/20$ (.55) noktası ile $8/7$ (1.142857142857...) noktasının kümeye dahil olduğunu, π (3. 1459265...) ise dahil olmadığını biliyoruz. Bu kümeyi gözde canlandırmak herhalde olası değildir; öyle de olsa, matematikçilerin her gün uğraştıkları kimi kümeler yanında son derece basit kaldığını söyleyebiliriz. Daha karmaşık bir örnek olsun diye, ondalık temsilde 6 rakamının yer aldığı ya da yer almadığı ancak yer alıyorsa asla art arda altı kez yer almadığı bir noktalar kümesini düşünelim. Burada da kümeye ilişkin birtakım şeyler biliyoruz. Örneğin, $11/20$ ile $8/7$ ’nin kümeye dahil olduğunu biliyoruz. Ancak π sayısının kümeye dahil olup olmadığını bilen bir tek kişi dünyada yoktur.

Kuşkusuz Cantor’dan çok önce de matematikçiler bazı küme türlerini (örneğin, üçgenler, daireler, doğrular, vb.), bugünkü yaklaşımdan farklı da olsa, inceliyorlardı. Kümeler teorisinin ilk yıllarında pek çok matematikçinin yenilik heyecanı içinde ölçüyü kaçırdığını biliyoruz. Onların gözünde her küme bir diğeri kadar önemliydi. Matematikte her türden anarşi yaygınlık kazanmıştı. Geçmişin belirgin ve düzgün kümeleri yerine birtakım akıl almaz, acayip kümeler üzerinde çalışılmaya başlanır. Ancak bu başıboş davranış kimi çevrelerde saygınlık görmez. Büyük Fransız matematikçisi Henri Poincaré bir aralık, “İleriki kuşaklar kümeler teorisini kişinin kendisini koruması gereken bir hastalık sayacaktır,” diyerek tepkisini dile getirmişti.

Gençlik çağının aşırı taşkınlığı dindikten sonra Cantor matematiği, kendine ve tarihteki rolüne ilişkin eleştirel bir yaklaşım içinde olgunluk çağına ulaşır. Genç matematikçiler, mesleğin daha eşliğinde küme-kuramsal yaklaşımı öğrendiklerinden, artık yersiz çalkanmalara kendilerini kaptırmamakta, olgunluk çağının ölçüleri içinde araştırmalarını sürdürmektedirler. Kümeler teorisi, matematik tarihinin en güçlü birleştirici kavramlarını içermektedir. Matematiğin birbirine en uzak görünen kolları arasında umulmadık ilişkilerin ortaya çıkması kümeler teorisiyle olanak kazanmıştır. Denebilir ki, çağdaş matematik bütünlüğünü bu teoriye borçludur.

Günümüz matematiğinde, yarın çatışmalara, öbür gün olgun araştırmalara yol açacak bir yenilik söz konusu mudur? Bir şey denemez. Matematiksel bir yeniliği kendine özgü perspektifte görebilmek on, belki de yüz yıl gibi uzunca bir sürenin

geçmesini gerektirebilir. Ancak bir nokta kuşkuya yer vermeyecek kadar açıktır: Matematikçilerin yaşadığı bir dünya var oldukça, yenileşme çabası sürecektir. Yeni kavram ve yeni yöntemler, kimi kez uygulama alanı bulduğu için, ama her zaman ilgi ve merakı körüklediği için araştırma konusu olmakta devam edecektir.

[Bu metin, *Mathematics in the Modern World*, (Ed. M. Kline)'den alınmıştır.]

MATEMATİKSEL YARATMA⁽¹⁾

Henri Poincaré

EDİTÖR'ÜN ÖNSÖZÜ : Matematik nasıl oluşur? Matematiksel önerme ve sistemleri kuran beyin ne tür bir beyindir? Geometrici ya da cebircinin düşünce süreçleriyle, şairin, ressamın, müzisyenin, satranç oyuncusunun düşünce süreçleri arasında ne gibi benzerlik ya da fark vardır? Matematiksel yaratmada önemli öğeler nelerdir? Sezgi mi? Uzay ve zamana ilişkin ince bir duyarlılık mı? Bir hesap makinesinin dakiklığı mı? Güçlü bir bellek mi? Karmaşık mantıksal dönüştürmeler zincirini izleyen üstün bir beceri mi? Yoksa eşsiz bir konsantrasyon gücü mü?

Yüzyılımızın ilk yıllarında Paris'te Psikoloji Derneği'ne konferans olarak sunulan aşağıdaki deneme, matematikçinin kafasında ne olup bittiğini açıklamaya yönelik bilinen en önemli girişimdir. Yazarı Henri Poincaré, bu iş için gerçekten biçilmiş kaftandır. Gelip geçmiş sayılı seçkin matematikçilerden biri olan Poincaré, aynı zamanda, matematiksel fizikte de saygın bir konuma sahiptir. Üstelik bilim felsefesindeki parlak katkılarıyla da hem bilim dünyasında, hem genel entelektüel düzeyde etkili büyük olmuştur.

Matematiksel yaratmanın kökeni en başta psikologları yakından ilgilendiren bir sorundur. Bu yaratma, insan zekâsının çevresinden en az yararlanarak gerçekleştirdiği bir etkinliktir; öyle ki, geometrik düşüncenin yöntemini incelediğimizde insan kafasının en temel özelliğini tanıma olanağını bulabileceğimizi umabiliriz. ...

Bir ilk belirleme, bu denli alışık olduğumuz bir şey olmasaydı, bizde sürpriz etkisi yaratacak niteliktedir. Matematikçi anlayamayan kimselerin var olduğu nasıl açıklanabilir? Gerçekten, matematik yalnızca herkesin kabul ettiği mantık kurallarıyla yürümüş olsaydı, ya da bağlı olduğu kanıtlar tüm normal insanlar için ortak olan ilkelere dayansaydı, o zaman, bu kadar çok kimsenin matematikten uzak durması nasıl açıklanabilirdi?

Herkesin yaratıcı olamayacağında gizem aramaya gerek yoktur. Gene, herkesin öğrendiği bir ispatı sürgit aklında tutabileceği de beklenemez. Ama açıklanan mate-

(1) Bu deneme, James R. Newman'ın 1948'de editör olarak yaptığı kimi kısaltma ve özleştirmelerden sonraki metinden çevrilmiştir. (C. Y.)

matiksel bir akıl-yürütmeyi herkesin anlayamaması düşünüldüğünde, hayret verici bir olaydır. Oysa, böyle bir açıklamayı, o da güçlükle anlayabilenlerin sayısı çok düşüktür. Ortaokul öğretmenlerinin yakından bildiği bu durumu kimse kolayca yadsıyamaz.

Dahası var: Matematikte hataya düşme olasılığına ne diyeceğiz? Sağlıklı bir kafa için mantıksal hataya yer olmamalıdır. Ne var ki, günlük yaşamın sıradan akıl-yürütmelerinde hataya düşmeyen akli başında pek çok kimse biraz daha uzunca akıl-yürütme içeren matematiksel ispatlarla karşılaştığında, ya anlamakta güçlük çekmekte, ya da anladığını hataya düşmeden yineleyememektedir. Oysa, bu ispatlar aslında sıradan günlük akıl-yürütmelere benzer küçük çıkarımların bir araya gelmesiyle oluşmaktadır. Matematikçilerin de hatadan kurtulamadıklarını söylemeye gerek yoktur herhalde.

Bana gelince, itiraf edeyim ki, hatasız toplama bile yapamam. ... Belleğimden yakınmıyorum, ama iyi bir satranç oyuncusu olmama elverecek kadar iyi olduğunu söyleyemem. Öte yandan, pek çok satranç oyuncusu için anlaşılmaz, güç bir ispat söz konusu olduğunda, belleğim neden beni başarısız bırakmıyor? Nedeni herhalde belleğin, genel akıl-yürütme gücüne bağlı kalmasıdır. Matematiksel ispat birtakım tasımların rastgele bir araya gelmesi demek değildir. İspat tasımların belli bir düzen içinde birleşmesiyle oluşur. Burada düzen, içinde yer alan öğelerden çok daha önemlidir. Eğer bu düzene ilişkin bende bir duygu ya da sezgi oluşmuşsa, düzende yer alan şu ya da bu öğeyi unutabileceğim korkusuna kapılmama gerek yoktur; çünkü bunlardan her biri kendiliğinden düzen içindeki yerini kolayca bulur.

Biliyoruz ki, gizli uyum ve ilişkileri yakalamamıza yol açan matematiksel düzene ilişkin bu duygu ya da sezgi herkeste yoktur. Bazı kimseler ya bu tanıımı son derece güç, duygudan yoksun olduğu, ya da bellek ve dikkat güçleri sıradan düzeyi aşmadığı için yüksek matematiği anlamakta kendilerini tam bir yetersizlik içinde bulurlar. Bu tür insanlar çoğunluktadır. Diğer bazıları da böyle bir duygudan pek az pay almıştır; ne var ki, bunların üstün dikkat ve bellek güçleri sayesinde, ayrıntıları bir bir ezberlediklerini, matematiği anladıklarını, dahası, uyguladıklarını görürüz; ancak bunların yaratma güçleri yoktur. Nihayet bir başka grup insanda da bu özel sezgiyi az ya da çok bulmaktayız. Bunlar, matematiği anlamakla kalmamakta, bellekleri sıradan düzeyde de olsa, zaman zaman yaratıcılığa erişebilmekte, sezgilerinin elverdiği ölçüde, yeni ilişkiler bulmaktadırlar.

Gerçekten, “matematiksel yaratma” dediğimiz şey nedir? Herhalde, zaten bilinen matematiksel nesnelerin yeni bir kombinezonu olamaz bu şey. Sıradan herkes böyle bir şey yapabilir. Kaldı ki, oluşturulacak kombinezonlar, büyük bölümü işe yaramaz sonsuz sayıda olabilir. Oysa, yaratmak yalnızca işe yarayanı (ki, bunların sayısı pek azdır) ortaya koymaktır. ...

Şimdi biraz daha derine inip matematikçinin zihninde olup biteni yakalamaya çalışalım. Bu amaçla yapabileceğim en iyi şey, kendi anılarıma başvurmak olacaktır. Ancak söyleyeceğimi, Fuchs fonksiyonları üzerindeki ilk çalışmamla sınırlı tutacağım. Kullanmak zorunda olduğum kimi teknik terimlerden ötürü okuyucudan özür dilerim. Aslında okuyucunun fazla tedirgin olmasına da gerek yoktur. Örne-

ğin, bir teoremin ispatını hangi koşullar altında bulduğumdan söz edeceğim. Bu teorem pek çok kimseye barbarca gelen bir ad taşımaktadır; ama bunun bir önemi yoktur. Önemli olan, teoremin kendisi değil, bağlı olduğu koşullardır.

Benim şimdi “Fuchs Fonksiyonları” dediğim türden fonksiyonların olamayacağını ispat etmek için on beş gün uğraştım durdum. O zaman çok bilgisizdim: Her gün masamın arkasına geçer, birkaç saat hiçbir sonuç vermeyen bir sürü kombinezonlar denerdim. Bir akşam, alışkanlığım dışında kahvemi sütsüz içtiğim için uyum kaçtı, uyuyamadım. Zihnim düşüncelerle çalkanmaya başladı. Birbiriyle çatışan birtakım düşüncelerin sonunda, çiftler oluşturarak kenetlendiğini duyumsadım. Ertesi sabahla birlikte hipergeometrik diziden gelen bir grup Fuchs fonksiyonlarının varlığını saptamış olduğumu gördüm. Geriye sadece birkaç saatimi alan yazma işi kalmıştı.

Sonra, bu fonksiyonları iki dizinin bölümüyle temsil etmek istiyordum. Eliptik fonksiyonların sağladığı benzerlikten yararlanarak ulaştığım bu düşünce, tam anlamıyla bilinçle ve bilerek vardığım bir düşünceydi. Kendime sorduğum soru şuydu: Böyle bir düzenin var olması için özelliklerinin ne olması gerekir? Sonunda fazla güçlük çekmeden, “teta-Fuchs dizisi” adını verdiğim diziye oluşturabildim.

Tam bu sırada, maden fakültesinin düzenlediği jeolojik bir araştırma gezisine katılmak için o sırada yaşadığım Caen kentinden ayrıldım. Gezinin getirdiği değişiklik matematiksel çalışmamı unutturdu bana. Coutances’e ulaşınca bir yere gitmek için otobüs durağında sıralanmıştık. Otobüsün ilk basamağına adımımı attığım anda, Fuchs fonksiyonlarını tanımlamada kullandığım dönüştürmelerin, Euclides-dışı geometriye ait dönüştürmelerle özdeş olduğu düşüncesi kafamda çaktı. Düşüncemi hemen doğrulamaya koyulamazdım; çünkü, otobüste yerimi alır almaz yanımda oturan arkadaşımın daha önce başlattığımız konuşmamızı kaldığı yerden sürdürmeye başladık. Ama içimde düşüncemin doğruluğuna ilişkin kesin bir inanç vardı. Caen’e döner dönmez ilk işim düşüncemi yoklayıp doğrulamak oldu.

Nasıl oldu bilmiyorum, dikkatim pek başarılı sonuç vermeyen birtakım aritmetik problemler üzerinde toplandı. Bu problemlerle daha önceki çalışmalarım arasında herhangi bir ilişki olabileceğine dair bir şey de aklımdan geçmiş değildi. Başarısızlığımın verdiği üzüntüyle kendimi başka şeylerle meşgul etmek için birkaç günlüğüne deniz kıyısına gittim. Bir sabah kumsalda yürürken, gene aynı kesinlik ve beklenmedik çarpıcılıkla kafamda bir düşüncenin doğduğuna tanık oldum. Bu düşünce, belirsiz üç değişkenli ikinci dereceden denklem biçimlerine ait aritmetik dönüştürmelerinin Euclides-dışı geometri dönüştürmeleriyle özdeş olduğuna ilişkindi.

Caen’e döndüğümde bu sonuç üzerinde düşüncemi sürdürerek içeriğini belirlemeye çalıştım. Kuadratik biçimler örneği bana, hipergeometrik diziye karşılık oluşturanlar dışında Fuchs gruplarının olduğunu gösterdi; bunlara teta-Fuchs dizisini uygulayabileceğimi anladım. Böylece, o zaman bildiğim hipergeometrik dizisine ait olanlar dışında Fuchs fonksiyonlarının var olduğu anlaşıldı. Kuşkusuz hemen bu fonksiyonları oluşturma işine koyuldum. Tüm düzenli ve ayrıntılı çabama karşın fonksiyonlardan birine çözüm getiremedim. Ancak bu çabam bana hiç değilse

karşı karşıya olduğum güçlüğü ne olduğunu göstermeye yaradı. Bu da azımsanacak bir kazanç değildi.

Çalışmamın bu aşamasında askerlik hizmetim için Mont-Valerien'e gittim; orada değişik bir uğraş beni bekliyordu. Bir gün caddede yürürken, daha önce başa çıkmadığım güçlüğü çözümünü birdenbire kafamda belirdi. Sorunu enine boyuna ele alacak durumda olmadığım için terhisimi bekledim. Dönüşümde çözüme son biçimini vererek sonucu hemen kaleme aldım.

Konuşmamı daha fazla dağıtmamak için bu son örnek üzerinde toplayacağım.

Öncelikle gözden kaçmaması gereken şey, uzun ve yorucu bir bocalama döneminden sonra çözümün bilinçaltında oluşup bilinç düzeyine vurması olayıdır. Matematiksel yaratmada bilinçaltı sürecin bu işlevi bana göre yadsınamaz bir gerçektir. Diğer alanlarda da belki daha az belirgin olmakla birlikte, bu olayın izlerini görebiliriz. Çoğu kez, güç bir sorunla uğraştığımızda, başlangıçta dişe gelir bir sonuç alamayız. Böyle bir durumda kısa ya da uzun süren bir dinlenmeden sonra işe yeniden koyulur, gene bir ilk bocalamadan geçerek çözüme bizi götüren can alıcı düşüncenin ortaya çıktığını görürüz.

Bu bilinçaltı etkinliğe ilişkin başka bir noktaya daha değinmeliyim: Bu nokta, yaratıcı düşüncenin oluşumundan önce ve sonra yer alması gereken bilinçli çalışmadır. Bu çalışma olmaksızın çözüm ne olanak kazanır, ne de ortaya çıksa bile verimli olur. Günler süren, başarısız ve sonuçsuz çaba olmadıkça, bir ilhamın kendiliğinden oluşacağı beklenmemelidir. Başlangıçta boşa gittiği sanılan öyle bir çabanın aslında yararsız olmadığını verdiğimiz örneklerden görmekteyiz. Bilinçaltı etkinliğini bu tür bilinçli bir çaba harekete geçirmektedir. ...

Bunlar belirlediğimiz olaylar; şimdi bu olayların bize yüklediği düşüncelere gelelim: Matematiksel yaratmada bilinçaltı önemli rol oynamaktadır. Değindiğimiz olaylar doğrulamaktadır bunu. Ne var ki, çoğu kez bilinçaltının otomatik işlediği sanılır. Oysa, biliyoruz ki, matematiksel çalışma mekanik bir iş değildir; ne denli yetkin olursa olsun bir makine ile bu iş görülemez. Matematiği belli kurallara bağlı bir uygulama, değişmez yasalar gereğince yürüten bir etkinlik sanmak yanlıştır. Belli kural ya da ilkeler çerçevesinde kalınarak oluşturulacak çözüm kombinezonları büyük sayıları bulur; üstelik bunlar yararsız olmaktan ileri geçmez. Gerçek yaratma, bir sürü yararsız sonuçlar ortaya koymada değil, doğru ve verimli olanı oluşturmada kendini gösterir. Kuşkusuz bu süreçte de başvuru kimi kural ya da ilkeler vardır; ancak bunlar öylesine esnek, ince ve belirsizdir ki, belirttik tanımlamaya değil, olsa olsa sezinlemeye olanak bulabiliriz. Belirttik tanımlamaya olanak vermeyen bu tür bir çalışmanın mekanik olmasına olanak var mıdır?

Şimdi bir hipotezle karşılaşmaktayız: Bilinçaltı benliğimiz hiçbir şekilde bilinçüstü benliğimizden aşağı değildir. O da diğeri gibi salt otomatik işleyen bir düzence değildir. Onun da önemliyi önemsizden ayırt etme gücü, inceliği ve becerisi vardır. Neyi nasıl seçeceğini bilmekte, ileriye kestirebilmektedir. Dahası bu bakımdan bilinçüstü benliğimizden üstün olduğunu bile söyleyebiliriz. ...

Duygusal duyarlılığın, salt akıl-yürütme işi sanılan matematiksel ispat için öneminden söz etmek şaşırtıcı gelebilir. Öyleyse, matematiksel güzellik duygusunu, sa-

yı ve formların armonisini, geometrik inceliği unutupyoruz, demektir. Bu, tüm gerçek matematikçilerin yakından bildiği, kuşkusuz duygusal duyarlılığı gerektiren estetik bir duyumsamadır.

İmdi, bu güzellik ve incelik özelliklerini yüklediğimiz, bizde estetik duyguya yol açan matematiksel nesneler nelerdir? Bunlar elemanlarının uyumlu bir bütün oluşturduğu ve bu özelliklerinden ötürü aklımızın, ayrıntıları tanırken tümünü kolayca kavrama olanağı bulunduğu sayı, form ve benzer soyut nesnelerdir. Bunların uyumu bir yandan estetik duygularımızı doyururken, öte yandan düşüncemizi beslemekte, ona yol çizmektedir. Üstelik gözlerimiz önüne iyi düzenlenmiş bir bütünlük serdiği için bağlı olduğu matematiksel yasayı kestirmemize olanak sağlamaktadır. Denebilir ki, önemli önemsizlerden ayırt etme gücünü matematikçiye işte bu estetik duyarlılık sağlamaktadır. Bu duyarlılıktan yoksun hiç kimse gerçek bir yaratıcı olamaz.

Ancak verdiğimiz açıklama her şeyi açıklamaktan uzaktır. Bilinçüstü benliğimiz son derece sınırlıdır. Bilinçaltı benliğimize gelince, sınırlarının ne olduğunu bilmiyoruz. Bu nedenle olmalı ki, onun bilinçüstü benliğimize göre daha büyük sayıda kombinezonu çok daha kısa bir sürede oluşturabildiğini söyleyebiliriz. Ama onun da yetersizlikleri yok değildir. Örneğin, sayısı hayalimize sığmayan olası tüm kombinezonları oluşturma gücünde olduğu düşünülebilir mi? Düşünülemez elbet. Ama başka türlü de, oluşturduğu kombinezonlar az sayıda ise ve bunları gelişigüzel oluşturuyorsa, bunlar arasına, bize çözüm sağlayan iyi diye seçtiğimiz kombinezonun girmiş olmasını (ki, çok zayıf bir olasılıktır) nasıl açıklayabiliriz?

Belki de açıklamayı, bilinçaltı etkinlikten önce içine girdiğimiz ilk bilinçli çaba (veya bocalama) aşamasında aramalıyız. Kaba bir karşılaştırmayla başlayalım: Herhangi bir çözüm için oluşturulacak kombinezonların elemanlarını Epicurus'un çengellenmiş atomları gibi düşünebiliriz. Kafamızın tam bir dinlenme içinde olduğu durumda bu atomlar çengellere takılı, hareketsizlik içindedir. ... Oysa, çözüm arayışına yönelik başlangıçtaki çabamızı izleyen yüzeysel durgunluk aşamasında, bu atomlardan bir bölümü çengellerden kurtularak harekete koyulur. Tıpkı gazların kinematik teorisinde gördüğümüz gaz molekülleri gibi bulundukları "kap" içinde gelişigüzel her yönde koşuşup dururlar. Çözüm kombinezonlarını işte böyle devinen atomların karşılıklı etkileşiminin bir ürünü sayabiliriz.

"Öyleyse, başlangıçtaki bilinçli çözüm çabasının rolü nedir?" diye sorulursa, cevabımız şu olacaktır: Atomları uyarıp çengellerden kurtarmak, gaz moleküllerini andıran eylem içine koymaktır. Bilinçaltı düzeydeki bu "başıboş" eylemin bir sonuç vermeyeceği duygusu bizi ilk çabamız sonunda karamsarlığa iten neden olmalı. Gerçekten, yaratıcı süreçte ilk aşama hemen her zaman bir bocalama ve başarısız kalma aşamasıdır. Ancak bu bilinçüstü düzeyde bir olaydır. Bilinçaltı düzeyde harekete geçirilen atomlar, bir sonuç alınıncaya dek "çılgın danslarını" sürdürürler.

Şimdi, harekete geçirilen atomların seçiminde istencimiz gelişigüzel değil, belli bir amaca yönelik olarak çalışmıştır. Bu nedenle harekete geçirilen atomlar rastgele ya da sıradan atomlar değildir. Tam tersine, beklediğimiz çözümü bize sağlayacak atomlardır bunlar. Çözüm eylemi içindeki bu atomların karşılıklı etkileşimiyle oluşan kombinezonların bir işlevi olarak belirecektir.

Başvurduğumuz benzetmenin çok kaba kaçtığını üzümlere söylemeliyim; ama düşüncemi başka nasıl açıklayabileceğimi bilmediğim için bu yola gitmek zorunda kaldım...

Son bir noktaya daha değinmek istiyorum: Konuşmamın başında yaratmaya ilişkin kişisel deneyimlerime değinirken, çalışmadan kendimi alıkoyamadığım uykusuz geçen bir geceden söz etmişim. Bu tür durumlarla sık sık karşılaşırız; hatta bunun için (benim yaptığım gibi) sütsüz kahve türünden uyarıcı bir şey almaya çoğu kez ihtiyaç da yoktur. Öyle bir durumda kişinin kendi bilinçaltı etkinliğine belli belirsiz katıldığı, bu etkinliğin, bir ölçüde, gereğinden fazla uyarılmış bilince yansıdığı, ancak onu değiştirmedeği söylenebilir. Bu süreçte belirsiz de olsa iki benliğin işleyiş, ya da daha açık bir deyişle, çalışma yöntemleri arasındaki farkı sezinleyebiliriz. Yaratma konusundaki psikolojik gözlemlerim, ana çizgileriyle, bu görüşü destekler niteliktedir.

Kuşkusuz burada ileri sürdüğüm görüş, kişisel deneyimlerime ne denli uygun düşerse düşsün, bir hipotez olmaktan ileri geçmez, ve bu niteliğiyle olgusal olarak yoklanıp doğrulanması gerekir. Sorun benim için o denli ilginçtir ki, düşüncelerimi bu yetersiz görünümüyle de olsa sizinle paylaşmaktan kendimi alıkoyamadım.

[Bu metin, *Mathematics in the Modern World*, (Ed. M. Kline)'den alınmıştır.]

MATEMATİĞİN TEMELLERİ

Morris Kline (1968)

Matematik tarihinin hemen her döneminde matematikçilerin bir bunalımla karşı karşıya geldiklerini görmekteyiz. Bu bunalımlar çoğunlukla matematiğin kurulma biçiminden kaynaklanmaktadır.

Günümüz matematiğinin yapısı, kabaca, bir gökdelenin yapısına benzetilebilir. Şu kadar ki, başlangıçta matematikçiler yapılarını kurduklarında sağlam derin bir temel atmaksızın, doğrudan yer üstünden başlamışlardır işe. Aslında normal olan da buydu; çünkü o zaman kimden, sonradan yükselen görkemli yapıyı öngörmesi beklenebilirdi? Üstelik kullanılan yapı malzemesinin (sayı ve geometrik şekillere ilişkin bilgilerin) günlük deneyimlerin sağlam temeline dayandığı inancı egemendi. Matematiğin bu tarihsel kökeni, bugün bile yer ölçme anlamına gelen “geometri” sözcüğünü kullanmamızda kendini açığa vurmaktadır.

Ancak yapı yükseldikçe dayandığı yerin sallantılı olduğu, binanın çökme tehlikesi geçireceği fark edilir. Tehlikeyi ilk sezenler, sezmekle kalmayıp gerekli pekiştirme önlemlerine başvuranlar klasik dönem (İ.Ö. 600-300) Yunan matematikçileri olmuştur. Önlemlerde ilk adım, duvarların dayanacağı sağlam yer parçalarını belirlemektir. Bu yer parçaları “aksiyom” denen doğruluğu apaçık önermelerdir. İkinci adım, yapı iskeletini çelikle pekiştirmektir. İskelete konan çelik, matematikte ulaşılan her yeni sonucun dedüktif ispatı demektir.

Yunan döneminde geliştiği kadarıyla büyük ölçüde Euclides geometrisine dayanan matematiğin yapısı sağlamdı. Ancak, aynı zamanda tedirginliğe yol açan bir “kusur” ortaya çıkmıştı; bu da, kenar uzunluğu bir birim olan karenin köşegeni türünden kimi uzunlukların $\sqrt{2}$ birim uzunluğunda olmasıydı. Oysa, Yunanlıların bildiği sayıların yalnızca sıradan tam sayılar olması, $\sqrt{2}$ gibi sayıları tanımalarına olanak vermiyordu. Öyle ki, “irrasyonel” sayılara yasak koydukları gibi, doğru parçalarını uzunluk ölçüsüyle belirleme düşüncesinden de vazgeçmişlerdi.

Ne var ki, tarihsel gelişmeler yasaklarla durdurulamazdı. İlk İ.S. 600 sıralarında Hintliler negatif sayı kavramını oluşturdular. Sonra, Yunanlılardan daha az titiz olan Araplar irrasyonel sayıları kabul etmekle kalmadılar, bu sayılarla işlem yapmaya elveren kurallar geliştirdiler. Yunan, Hint ve Arap birikimine sahip çıkan Röne-

sans Avrupalı yadırgadıkları iki gelişmeyi (negatif sayı ile irrasyonel sayı kavramlarını) benimsemekte oldukça güçlük çektiler. Neyse ki, bu dönemde bilim bir atılım içine girmişti. Yunanlılar gibi Avrupalılar da bilimsel gelişmede matematiğin önemini kavramada gecikmezler. Özellikle bilimin teknolojik uygulaması matematiğe olan gereksinimi daha da belirginleştirir. İstemeyerek de olsa Avrupalılar negatif ve irrasyonel sayıları kullanmaya başlarlar; çok geçmeden bu sayılara karşı olan olumsuz tavırlarını terk ederek daha serbest bir tutum içine girerler. Ancak Avrupalılar, matematiğin yapısına aritmetik ve cebirdeki bu gelişmeleri katarken, Yunanlıların alt katlarda kullandığı çelik kirişler yerine, sezgisel ve fiziksel kirişler kullanırlar. Bununla birlikte giderek yükselen yapının bu gelişmeleri özümseme sürecine girmesiyle, negatif ve irrasyonel sayılara karşı sürdürülen olumsuz tutum tümüyle yok olur.

Başarılarının sarhoşluğu içinde matematikçiler hep sezgisel ve fiziksel argümanlara başvurarak kalkülüs, diferansiyel denklemler, diferansiyel geometri, varyasyonlar kalkülüsü ve analizin diğer dallarına gözü kapalı atılırlar. Arada kuşku belirtenler çıksa da, hep “Dayan, sonunda başarılı olursun!” öğüdüyle susturuluyordu. Ne var ki, sezgi yüklendiği yükü daha fazla taşıyamazdı. Nitekim çok geçmeden yapının duvarlarında çatlaklar başgösterir. Yapının yeniden kurulması Bernard Bolzano, Augustin Louis Cauchy, Karl Weirstrass gibi matematikçilerin çalışmalarını bekler. Bu çalışmalar matematik tarihinde “analizin mantıksal sağlamlığa kavuşma süreci” diye bilinir.

Yapının pekiştirilmesi sürerken, bu kez, duvarların oturduğu zeminin (Yunanlıların seçtiği aksiyomların) dayanıksızlığı ortaya çıkar. Euclides-dışı geometrilerin oluşmasıyla, Euclides geometrisi aksiyomlarının sanıldığı gibi hiç de sağlam bir zemin oluşturmadığı anlaşılır. Ne ki, aynı yetersizlikler yeni geometrilerin aksiyomları için de söz konusuydu. Matematikçilerin, doğruluğu apaçık, ussal ilke diye benimsedikleri önermelerin aslında güvenilirmez duyu verileri olmaktan ileri bir şey olmadığını kabul ettiklerini görürüz.

Sıkıntı burada bitmez: uzayda vektörleri temsil edecek bir cebir arayışı içinde olan William R. Hamilton “quaternion” denilen yeni bir sayı ortaya koymuştu. Bu sayı ortaya çıkmadan önce hiçbir matematikçinin, a ve b gibi iki sayı verildiğinde, $a.b$ çarpımının $b.a$ çarpımına eşitliğinde en küçük bir kuşku yoktu. Oysa bu eşitlik, ne quaternionlar için, ne de on beş yıl sonra ortaya konan matrisler için doğrudu. Beklenmedik bu gelişim matematikçileri yeni bir kuşku içine düşürdü: sıradan sayıların özelliklerini olduğu gibi kabul etmek bir yanılgı mıydı yoksa? Negatif ve irrasyonel sayıların matematiğe katılmasında matematikçilerin mantıksal değil, fiziksel ve sezgisel argümanlara başvurmuş olmalarının geçersizliği yadsınamazdı artık. Nitekim, tüm matematik (geometri, aritmetik ve onun uzantısı cebir ve analiz) ciddi bir bunalıma sürüklenmiş, görkemli yapının bir bataklıkta kaybolma tehlikesi belirmişti.

Ne var ki, matematikçiler yine gerekli önlemleri almakta gecikmezler. Matematik için sağlam bir temel olmadığı anlaşılıyordu: deyim yerindeyse, güvenilen dağlara kar yağmıştı! Çare belki de temelleri yeterince derinleştirmek, öylece daha güven-

nilir bir dayanak bulmaktı. Bu şu demekti: tüm aksiyom ve tanımlara elden geldiğince mantıksal kesinlik kazandırmak, ulaşılan tüm sonuçları, sağduyuya ne denli uygun görünürse görünsün, mutlaka mantıksal ispattan geçirmek. Aranana artık doğruluk değil, matematikçilerin “tutarlık” dediği mantıksal bağdaşırlıktı. Tüm yapının sıkı dokunmuş bir uyum ve bütünlük kazanması için teoremlerin birlikte tutarlı bir dizge oluşturması gerekliydi. Matematik de, modern bir gökdelenin rüzgârda sallanmasına karşın ayakta durduğu gibi, kuşku götüren temellerine karşın dimdik ayakta kalabilirdi. Şu kadar ki, matematiğin gücü artık ulaştığı sonuçların doğruluğunda değil, tutarlılığında aranacaktı. Bu, matematiğin aksiyomatik bir dizge olarak yeniden kurulması demekti. Yüzyılımızın başında bu işin gerçekleştiği sanılıyordu, üstelik. Öyle ki, 1900’de Paris’te toplanan Uluslararası Matematik Kongresinde, dönemin önde gelen matematikçisi Henri Poincaré’nin, matematiğin tümüyle yetkinliğe kavuştuğunu övünçle açıkladığına tanık olmaktayız. Geçmişte geçirdiği bunalımlardan ötürü saygınlığı bir ölçüde yıpranmış da olsa, matematik sonunda yaşamını kurtarmıştı.

Poincaré yanılıyordu. Matematikçiler dilde ve düşüncede kesinliği sağlamak için matematiğin temellerini simgesel mantıkla kurmaya koyulmuşlardı. Gerçi bu yaklaşımda bir sakınca yoktu. Ama onlar aynı zamanda, George Cantor’un 1880’lerde oluşturduğu kümeler teorisini kullanıyorlardı. Bu teoriye, matematiğin aksiyomatikleştirilmesinde en açık ve güvenilir bir temel gözülle bakılıyordu. Oysa teorinin beklenmeyen zorlukları vardı. Poincaré’nin, matematiğin artık yetkinliğe ulaştığını övünçle açıkladığı sırada kümeler teorisinde kimi çelişki ya da mantıksal tutarsızlıkların ortaya çıktığını görüyoruz. Gerçeğin sert çehresiyle karşılaşmayı göze alamayan matematikçiler, bu çelişkileri “paradoks” sözcüğüyle geçiştirme yoluna giderlerse de sorun ortadadır. Çok geçmeden çözüm arayışı yeniden başlar.

Matematikçiler arasında, paradoksları çözümü gereken ana sorun sayan kimi gruplar, matematiğin temellerini yeni bir yaklaşımla irdeleme yoluna giderler. İlk girişim, Cantor’un oldukça sezgisel yoldan oluşturduğu kümeler teorisini aksiyomatik bir dizgeye dönüştürmeye yöneliktir. E. Zermelo’nun başlattığı bu girişim yalnızca çelişkileri gidermeyi değil, kümeler teorisinin açığa çıkan diğer sorunlarını da çözümlmeyi amaçlıyordu. Bu sorunlardan biri “süreklilik hipotezi” denilen ilkeydi. Öte yandan, Zermelo’nun kullandığı “seçiş aksiyomu” diye bilinen ilkenin de kimi matematikçilerce benimsenmediği bilinmektedir.

Bu arada iki soru özellikle önem kazanır. Bunlardan ilki, kümeler teorisinin aksiyomatikleştirilmesi, teorinin taşıdığı güçlüklerden arınmasını sağlasa bile, süreklilik hipotezini ispata yetip yetmeyeceği idi. İkinci soru ise seçiş aksiyomunun kümeler teorisinin aksiyomatikleştirilmesi için vazgeçilmez olup olmadığı idi.

Kümeler teorisinde, özellikle paradoksların giderilmesine yönelik uğraşlar, tüm önemlerine karşın, matematikçileri asıl kaygılandıran, “Matematik tutarlı mıdır?” sorusuna doyurucu yanıt sağlamaktan uzak kalıyordu. Bilinen çelişkilerin giderilmesi, yenilerinin ortaya çıkmayacağına güvence olamazdı. Matematiğin temellendirilmesine yönelik çalışmalarda artık bir bütün olarak matematiğin değil, başlıca dallarının tutarlılığını ispatlamak ön plana alınmalıydı.

Ancak bu çalışmaların eleştirel incelenmesi ister istemez yeni tartışmalara kapı açar. Sonsuz kümelerin varlık sorunu, üçüncü seçeneğin yokluğu ilkesinin sonsuz kümelere uygulanması, matematiğin temeli olarak mantığın işlevi, daha da önemlisi, “matematiğin temelleri” sözünden ne anlaşılması gerektiği gibi sorunlar tartışılan başlıca konular olur. Bu sorunlara çözüm arayışı değişik yaklaşımlara yol açacaktı, kuşkusuz.

Bir ara, yüzyılımızın büyük matematikçilerinden biri olan David Hilbert’in temsil ettiği yaklaşımın tüm sorunları çözümlenebileceği umudu belirmişti. Ama bu umut, beklenmedik bir biçimde, Kurt Gödel’in teoremiyle kökten yıkılır. Hilbert tüm matematiği formel aksiyomatik bir dizgede toplayabileceği görüşündeydi. Oysa Gödel teoremi, kendi içinde tutarlı herhangi matematiksel bir dizgenin tümünü aksiyomatik bir sistemde toplamaya olanak vermiyordu. ... Matematik dünyası yeni bir umutsuzluk içine düşer, bir kez daha sarsılır. Yarı şaka olarak ağızlarda dolaşan, “Umudumuz artık mantıksal olmak değil, mantıksızlığa düşmemektir,” bu umutsuzluğu yansıtmaktadır. Bu ortamda matematikçiler için önerilebilecek en geçerli tutum, belki de, Evariste Galois’nın 19 yaşında iken dile getirdiği şu cümlede saklıdır: “Matematik, bildiğiyle yetinmeyip araştıran, bulduğuyla kalmayıp doğruyu arayan insan zekâsının ürünüdür.”

[Bu metin, bazı kısaltmalarla, *Mathematics in the Modern World*, (Ed. M. Kline)’den alınmıştır.]

RESİM, ŞİİR, MATEMATİK

G. H. Hardy (1940)

Ressam ya da şair gibi matematikçi de yetkin “desen” (pattern) oluşturmaya yöneliktir. Onun oluşturduğu desenler diğerlerinden daha kalıcıysa, bunun nedeni matematiğin düşünsel bir çalışma olmasındadır. Ressam desenlerini biçim ve renk kullanarak oluşturur; şairin malzemesi ise sözcüklerdir. Resmin de bir tür düşünce içerdiği söylenebilir, kuşkusuz; ama bu düşünce çoğu kez sıradan ve önemsizdir. Şiirde düşünce daha önemli yer tutar; ancak, Housman’ın da vurguladığı gibi, bu önem genellikle abartıldığı ölçüde değildir. “Şiirsel düşünce diyebileceğimiz bir şeyin olduğuna kendimi bir türlü inandıramıyorum,” diyor Housman. “Şiir söylenen bir şey değil, bir şeyi söyleme biçimidir.”

Deli eder insanı bu dünya
Bu gece, bu yıldızlar, bu koku,
Bu tepeden tırnağa çiçek açmış ağaç.

Bu dizelerde⁽¹⁾ dile gelen şeyin düşünsel yönden ne önemi vardır; ama söyleyiş biçimine bakın: bundan daha güzeli olabilir miydi? Düşünce yoksunluğu, sözseldenin güzelliğini pek etkilememektedir. Oysa matematikçinin düşünce dışında işlediği bir malzemesi yoktur; o nedenle ortaya koyduğu ürün daha dayanıklıdır. Zaman düşünceleri sözcüklerden daha az yıpratır.

Matematikçinin desenleri, ressam ya da şairinkiler gibi *güzel* olmalıdır; renkler ya da sözcükler gibi düşünceler de tam bir uyum içinde birleşmelidir. İlk ölçüt güzelliiktir: dünyada çirkin matematiğe yer yoktur. Şimdi günümüzde de yaygınlığını az da olsa sürdüren bir yanlış anlamaya değinmeliyim. Bu Whitehead’ın “yazın dünyasının saplantısı” dediği, matematikte estetik beğenin, “her kuşakta birkaç tuhaf kişiye özgü bir düşkünlük olduğu” inancıdır. Neyse ki, aydın kesimde matematiğin estetik çekiciliğine duyarsız pek az kişi gösterilebilir artık. Matematiksel gü-

(1) Bu dizeler Orhan Veli’nin. Yazarın Shakespeare’den aldığı iki dizenin,

Not all the water in the rough rude sea

Can wash the balın from an anointed King.

çevirisini göze alamadım. Okuyucunun anlayış göstereceğini umarım. (C.Y.)

zelliği *tanımlama* kolay bir iş değildir elbette; ama bu zorluk her türden güzellik için söz konusudur. “Güzel bir şiir” sözüyle ne demek istendiğini bilemeyebiliriz; ama bu bizi o şiiri okuduğumuzda güzel bulmaktan alıkoymaz. Matematikte estetik öğenin önemini her şeye karşın küçümsemekte ısrarlı Profesör Hogben bile bu öğenin varlığını yadsıma yoluna gitmemektedir. “Kuşkusuz,” diyor Hogben, “matematikte soğuk da olsa bir çekicilik bulan kişiler vardır. Dahası, matematiğin estetik çekiciliği seçkin bir azınlık için gerçekten doyurucu olabilir. Ne var ki, bunların sayısı her dönemde birkaç kişiyle sınırlıdır.” Ona göre bu kişiler geniş açık alanların taze esintisinden yoksun sünepe üniversite kasabalarına kapanmış gülünç kimşelerdir. Hogben’in matematiğe bu bakışında, “yazın dünyasının saplantısı”nı bulduğumuzu söylemekle yetineceğiz.

Gerçek şu ki, matematikten daha “popüler” pek az konu vardır. İnsanların çoğu matematiğin değerini bilmektedir; pek çok kimsenin güzel bir ezgiden hoşlandığı gibi. Hatta diyebiliriz ki, matematiğe ilgi duyanların sayısı belki de müzik severlerden daha fazladır. Durum tam tersine görünse de bu savımızı açıklayabiliriz. Müziğin yığınları duygusal yönden etkileme gücü söz götürmez; matematiğin ise öyle bir gücü yoktur. Müzikte yeteneksizlik (kuşkusuz, haklı olarak) insanı fazla küçültücü bir kusur olarak görülmez; oysa, “matematik” sözcüğünden pek çok kimse öylesine ürker ki, bunlar matematiksel aptallıklarını abartarak belirtmekten kaçınmazlar.

“Yazın dünyasının saplantısı”nın saçmalığını ortaya koymak için azıcık düşünme yeter. Uygar ülkelerin hemen hepsinde yığınla satranç oyuncusuna rastlanır; Rusya’da eğitilmiş nüfusun nerdeyse tümü satranç oynar. Biliyoruz ki, satrançta her iyi oyuncu güzel bir oyunu ya da ilginç bir problemi tanır, takdir eder. Bilmediğimiz, satrancın *düpedüz* matematik olduğudur. Öyleyse, satrançta güzel bir oyuna alkış tutan herkes aslında matematiğe hayranlığını dile getirmektedir. Satranç problemini matematiğin “nabız atması” diye niteleyebiliriz. Briç oyunu ya da günlük gazetelerdeki bulmacalar türünden daha düşük düzeydeki etkinlikler de geniş halk çevreleri için aynı şekilde nitelendirilebilir. Hepsinde ilgi çeken güç son derece basit düzeyde matematiksel diyebileceğimiz güçtür. Kitlelerin istediği hafif entelektüel çalan bir heyecandır; daha üst düzeyde ise hiçbir şey matematiğin sağladığı coşkuyu veremez.

Eklemeden edemeyeceğim: kimi ünlü kişilerin bile (onlar ki, her fırsatta matematiği küçültücü sözler etmekten geri kalmazlar) dünyada hiçbir şeyde bulamadıkları doyumunu matematikte bulduklarını görüyoruz. Herbert Spencer’in yirmi yaşında iken dairelere ilişkin ispatladığı bir teoremi (iki bin yıl önce Platon’un ispatlamış olduğunu bilmeksizin tabii) otobiyografisinde yeniden ele alması neyi gösterir? Gene Profesör Soddy’nin birkaç yıl önce verdiği daha göz alıcı özgün ispat da bunun bir başka örneği değil midir?

II

Bir satranç problemi gerçek matematiktir, ama “önemli” matematik değildir. Satrançta bir hareket ne denli zekice ve hesaplı, ne denli özgün ve şaşırtıcı olursa olsun, temel bir nitelikten yoksundur. Satranç problemleri *önemsizdir*. İyi matematik, güzelliğinin yanı sıra ciddidir – istersek buna “önemlidir” diyelim, ama bu sözcüğün anlam belirsizliğini gözönüne alarak, demek istediğimi daha kesin dile getiren “ciddi” sözcüğünü yeğliyorum.

“Ciddi” ya da “önemli” sözcüğüyle, matematiğin pratik yarar sağlayan sonuçlarını kastetmiyorum. Bu noktaya daha sonra değineceğim. Şimdi söylemek istediğim şudur: eğer bir satranç problemi kaba anlamda “yararsız”sa, bu en iyi saydığımız matematik için de doğrudur. Matematiğin yalnızca küçük bir bölümünün pratik yararı vardır ve bu bölüm üstelik oldukça can sıkıcıdır. Matematiksel bir teoremin “ciddiliği”ni çoğu kez önemsenmeye değmez pratik sonuçlarında değil, birleştirdiği matematiksel düşüncelerin öneminde aramalıyız. Kabaca demek gerekirse, matematiksel bir düşüncenin önemi, matematiğin daha geniş ve karmaşık diğer düşünceleriyle doğal ve aydınlatıcı biçimde birleşme gücüyle ölçülmelidir. Buna göre, ciddi matematiksel teorem önemli düşünceleri birleştiren, matematiğin kendisinde ve diğer bilimlerde önemli ilerlemelere yol açan teoremdir. Satrançta hiçbir problemin bilimsel düşüncede herhangi bir ilerlemeye yol açtığı söylenemez. Oysa Pythagoras, Newton ve Einstein matematiksel çalışmalarıyla kendi dönemlerinde bilime tümüyle yeni yönler çizmişlerdir.

Bir kez daha vurgulayalım: bir teoremin ciddiliği sonuçlarında değildir; sonuçlara yalnızca teoremin ciddiliğini gösteren birer kanıt gözüyle bakılabilir. İngiliz dilinin gelişmesinde Shakespeare’in etkisi çok büyüktür; gene bir şair olan Otway’ın ise hemen hiçbir etkisi olmamıştır. Ne var ki, Shakespeare’i daha büyük şair saymamızın nedeni dilimiz üzerindeki bu etkisi değildir. O daha güzel şiir yazdığı için daha iyi şairdir. Satranç problemleri gibi Otway’ın şiirini de önemsiz bulmamız sonuçlarından değil içerik yetersizliğinden ötürüdür.

Kısaca değinmem gereken bir nokta daha var. “Kısaca” diyorsam bu konuyu hafife aldığım anlamına gelmesin! Konu ilginçtir, ama estetik açıdan ciddi bir tartışma için kendimi yeterli görmediğim kadar da zordur. Matematiksel bir teoremin güzelliği büyük ölçüde teoremin içerik zenginliğine *dayanır*, tıpkı şiirde bir dizenin güzelliğinin belli bir ölçüde dizenin içerdiği düşüncelerin önemine bağlı olması gibi. Yukarıda örnek olarak verilen üç dizede salt sözsel desenin güzelliğini bulmaktayız. Aşağıdaki dize ise

Şu garip yeryüzünde anlaşılmaz ömrümüz...(2)

(2) Bu dize Ziya Osman Saba’nın “Cümlemiz” başlıklı şiirinden alınmıştır. Yazarın aldığı örnek gene Shakespeare’den:

After life’s fitful fever he sleeps well.

bu güzelliğin yanı sıra düşünsel yönden daha zengin ve doyurucu bir içerik de sergilemektedir. Belki de bu nedenle, okuyunca daha derinden duygulanmaktayız. Şiirde bile desen güzelliğinin oluşmasında düşüncenin rolü vardır; matematikte ise bu kesin bir zorunluktur.

[Bu metin, G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology*'den alınmıştır.]

ÇEVİRİ METİN YAZARLARINA İLİŞKİN KISA BİLGİLER

Bell, Eric Temple (1883-1960)

Matematiksel düşünce ve matematikçiler üzerinde çok sayıda kitaplarıyla tanınmış İskoç kökenli Amerikan yazarı. Özellikle *Queen of the Sciences* (1931), *Men Of Mathematics* (1937) ve *The Development of Mathematics* (1940) adlı üç kitabıyla ünlüdür.

Courant, Richard (1888-)

New York Üniversitesi emekli matematik profesörü, Matematiksel Bilimler Enstitüsü eski Başkanı. Göttingen, California, Princeton ve Cambridge üniversitelerinde öğretim üyeliği yapmış. David Hilbert'le ortaklaşa yazdığı *Methods of Mathematical Physics* ve H. E. Robbins ile ortaklaşa yazdığı *What is Mathematics* adlı kitaplarla tanınır.

Davis, Philip J.

Brown Üniversitesi (U.S.A.) matematik profesörü. Hersh ile ortaklaşa yazdığı *The Mathematical Experience* (1981) adlı yapıtla tanınmaktadır.

Dyson, Freeman J.

İngiliz kökenli, Princeton İleri Bilimler Enstitüsü profesörü. Fizik ve matematiğe ortak problemler üzerindeki çalışmaları, özellikle kuantum alan teorisiyle karmaşık sistemlerin istatistiksel mekanığe ilişkin araştırmalarıyla tanınmıştır.

Halmos, Paul R.

Michigan Üniversitesi matematik profesörü. Matematik çalışmaları için Guggenheim Fellowship ve Chauvenet ödülünü kazanmıştır.

Hardy, G. H. (1877-1947)

Cambridge Üniversitesi Matematik profesörü; yüzyılımızın seçkin matematikçilerinden; özellikle kuramsal çalışmalarıyla ünlü. Matematik üzerindeki görüşlerini, *A Mathematician's Apology* (1940) adlı popüler yapıtında bulmaktayız. (Dilimize *Bir Matematikçinin Savunması* adıyla çevirilen bu yapıt, TÜBİTAK'ın Popüler Bilim Kitapları dizisinde yayımlanmıştır.)

Hempel, Carl G. (1905-)

Tanınmış bilim felsefecisi. 1937'ye kadar Berlin Üniversitesi'nde, daha sonra Princeton Üniversitesi'nde profesör olan Hempel, mantıkçı empirisizm yaklaşımı içinde matematiğin mantığa indirgenebileceği tezini işlemiştir.

Hersh, Reuben

New Mexico Üniversitesi matematik profesörü. Philip J. Davis ile ortaklaşa yazdığı *The Mathematical Experience* adlı kitapla tanınır.

Kline, Morris

New York Üniversitesi-Courant Enstitüsü matematik profesörü. *Mathematics in Western Culture* (1953); *Mathematics and Physical World* (1959); *Mathematics: The Loss of Certainty* (1980), gibi kitaplarıyla tanınmıştır.

Newsom, Carrol V.

New York Üniversitesi matematik profesörü. H. Eves'le ortaklaşa yazdığı *An Introduction to the Foundation and Fundamental Concepts of Mathematics* (1965) adlı kitapla tanınır.

Poincaré, Henri (1854-1912)

Ünlü Fransız matematikçisi, bilim adamı ve düşünürü. Russell'ın mantıkçılık tezine karşı çıkmak, bir tür sezgicilik görüşünü paylaşmakla tanınan Poincaré yüzyılımızın en büyük matematikçileri arasında yer alır.

Schaaf, William L.

New York Üniversitesi matematik eğitimi emekli profesörü. *Basic Concepts of Elementary Mathematics* ve *Carl F. Gauss: Prince of Mathematicians* adlı iki kitabıyla tanınmıştır. Ayrıca, matematiksel düşünceye ilişkin *Our Mathematical Heritage* adlı antolojinin editörüdür.

ÖNEMLİ TERİMLER SÖZLÜĞÜ

Abakus: Üzerinde boncuk veya tespih taneleri taşıyan çubuklarla bir çerçeveden oluşan en eski sayma ve hesaplama aracı.

Absis: Analitik düzlemdeki bir noktanın x-koordinatı.

Aksiyoum: Bir matematik dizge ya da ispatta doğruluğu varsayılan öncül önerme (postulat).

Aksiyoumatik sistem: Bir bilgi alanındaki tüm önermelerin aksiyoum ve teorem olarak mantıksal ilişki içinde düzenlenişi (dedüktif sistem).

Algoritma: Bir hesaplama yöntemi ya da işlemi; düzenli olarak uygulandığında daima doğru sonuç veren standart işlem.

Analitik önerme: Doğruluğu biçim ya da içinde geçen sözcüklerin anlamına bağlı önerme (karşıtı: sentetik önerme).

Analitik geometri: Cebirsel geometri; iki veya üç değişkenli denklemlerin grafikte gösterildiği, ya da tersine, düzlem veya uzayda geometrik yerleri denklemlerle temsil eden geometri (koordinat geometri).

Analiz: Matematiğin bir kolu: diferansiyel ve integral hesapların modern gelişimi; çözümleme.

Antinomi: Doğrulukları eşit ağırlıkta öncüllere dayanan, ama birbiriyeli çelişen iki önerme ya da ilke (paradoks).

A posteriori: Gözlem veya deney sonrası bilinen; sentetik (olgusal içerikli) önermeler, doğruluğu a posteriori bilinen önermelerdir.

A priori: Gözlem veya deney öncesi bilinen; analitik önermeler doğruluğu a priori bilinen önermelerdir.

Argüman (argument): Belli öncüllere dayanarak bir yargı veya sonucun doğruluğunu kanıtlama (çıkarım).

Aritmetik: Genelde, sayı ve sayısal işlem bilimi; günlük kullanımda, pozitif gerçek sayılarla (kesirli ve ondalık sayılar dahil), dört temel işlemi kapsayan hesaplamalar. (Modern aritmetik, dört temel işlem dışında köklü ve üslü ifadeleri içeren daha üst düzey işlemleri de kapsamaktadır.)

Asal sayı: Kendisi ve 1 dışında böleni olmayan tam sayı (örneğin, 2, 3, 5, 7, 11, vb.).

Asimetrik ilişki: Kendisine ters yöndeki ilişkiyle özdeş olmayan ilişki: $aRb \neq bRa$. Bkz. Simetrik ilişki.

Bilgi: Doğruluğu için elde yeterince kanıt bulunan sav ya da inanç.

Bilgi teorisi: Bilgilerimizin kökenini, niteliğini ve doğru ölçütlerini irdeleyen felsefe dalı (epistemoloji).

Bilim: Belli bir olgu kümesine ilişkin açıklayıcı hipotez veya teoriler oluşturma ve bunları olgusal kanıtlarla yoklama etkinliği.

Birim eleman: Toplama işleminde 0, çarpma işleminde 1 sonuç değiştirmeyen etkisiz elemanlardır.

Birleşme ilkesi: Toplamaya ilişkin: İşlemden yer alan terimlerin gruplanma biçiminin toplamı etkilemediği ilkesi: $a + (b + c) = (a + b) + c$; çarpmaya ilişkin: İşlemden yer alan terimlerin gruplanma biçiminin çarpımı etkilemediği ilkesi: $a(b \times c) = (a \times b)c$.

Büyüklik: (quantity, magnitude): Nesnelerin ölçülebilen özellikleri (örneğin, ağırlık, uzunluk, alan, vb.).

Cebir: Sayıların özellik ve ilişkilerini harf ve simgelerle en genel biçimde inceleyen matematik dalı.

Çelişik: Birlikte doğru ya da yanlış olamama.

Çelişki: Birbirini yadsıyan iki önerme arasındaki mantıksal ilişki.

Çelişmezlik ilkesi: Bir önermenin aynı zamanda hem doğru hem yanlış olmasına olanak tanımayan mantık yasası.

Çıkarım: Bir ya da daha fazla öncülden sonuç çıkarma; dedüktif çıkarım, ispat, indüktif çıkarım genelleme yöntemidir.

Çıkarım kuralları: Dedüktif çıkarımda sonucun doğruluğunu öncüller kümesinin doğruluğuyla güvence altına alan mantık kuralları.

Çokluk (collection): Nesnelerin sayılabilen özelliği.

Çözümleme: Bir nesne, problem ya da teoriyi öğelerine ayırarak inceleme (analiz).

Dağılma ilkesi: Çarpmada, çarpanın çarpılandaki her terime ayrı uygulanmasını sağlayan özellik: $m(a + b) = ma + mb$.

Dedüksiyon: Mantıksal çıkarım; doğru öncüllerden kalktığında sonucun doğruluğunu güvence altına alan çıkarım.

Değişken (variable): Belli bir küme değerden herhangi birini alabilen x, y, z gibi bir simge.

Değişme ilkesi: Toplama ve çarpma işlemleri için geçerli bir özellik: "İşlemdaki terimlerin geçiş sırasının işlemi etkilemediği" belirlemesi. (Örneğin, $a + b = b + a$ toplamının değişme özelliğini, $ab = ba$ çarpmanın değişme özelliğini simgelemektedir.)

Diophantine denklemi: Çözümü tamsayılar gerektiren bir denklem türü. (Örneğin, $2x^2 - 3y^2 = 5$ denkleminin çözümü $x = 2, y = 1$ tamsayılarını gerektirir.)

Doğal sayılar: 1'le (bazen 0'la) başlatılan pozitif tamsayılar.

Doğru önerme: Geçerliği kanıtlanmış önerme. Mantık ve matematikte yadsınması çelişkiye yol açan önerme: Analitik önerme.

Doğruluk: Doğru önermenin niteliği.

Doğruluk değeri: Doğru ve yanlış: Doğru, doğru bir önermenin; yanlış, yanlış bir önermenin doğruluk değeridir.

Döngül çıkarım: İspatta sonucun belirttik ya da üstü örtük olarak öncül kümesinde yer alması; ispatlananın varsayılması.

Döngül tanım: Tanımlamaya konu terimin tanımlayıcı olarak kullanılması.

Empirik: Olgusal olan, deneyime dayanan.

Empirik genelleme: Gözlemsel verilerle doğrulanabilen genelleme; indüktif genelleme.

Euclides-dışı geometriler: Klasik geometrinin aksiyomlarıyla (özellikle 5. postulat ile) çelişen aksiyomlar içeren geometriler. (Örneğin, hiperbolik, eliptik, vb. geometriler.)

Fermat'nın son teoremi: $n > 2$ ise, $x^n + y^n = z^n$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümünün olmadığı savını içeren konjektür.

Fonksiyon: Geniş anlamda: İki kümenin elemanları arasında belli bir ilişki türü; dar anlamda: öyle bir ilişkinin hesaplanmasını sağlayan formül; tanım: Sıralı çift (x, y) lerin öyle bir kümesi ki, x 'in her değeri için y 'nin en çok bir değeri vardır.

Formalizm: Matematikte tutarlılığı vurgulayan, matematiğin belli kurallara göre işlem gören simge ve formüllerden oluşan soyut bir dizge olduğu tezini içeren felsefi öğreti.

Formel sistem: Aksiyom ve teoremleri birer formül olan dedüktif sistem; olgusal olarak yorumlanmamış aksiyomatik sistem.

Geçerlik: Bir işlemin kullanıldığı amaca uygunluğu.

Geçerli çıkarım: İspatı sağlayan dedüktif çıkarım.

Genelleme: Sınırlı sayıda gözlemlerle bulunan bir özelliği, incelemeye konu nesnelerin tümüne genileştirme.

Geometri: Nokta, doğru, düzlem gibi nesnelerin özellikleriyle bunların oluşturduğu şekillerin öğeleri arasındaki ilişkileri inceleyen matematik dalı.

Gerçek sayılar: Tüm sonlu ve sonsuz ondalık sayılar; rasyonel ve irrasyonel sayıları kapsayan sayılar kümesi.

Goldbach konjektürü: Her çift sayının iki asal sayının toplamı olarak yazılabileceği savını içeren önerme.

Gödel teoremi: (1) Tutarlı bir sistemin eksikliği: Herhangi tutarlı bir sistemde, o sistemin ispatı verilemeyen düzgün bir formülü vardır; (2) Herhangi tutarlı bir sistemin kendi içinde tutarlılık ispatı verilemez.

İlke: Temel bir yasa veya varsayım.

İlkel terim: Aksiyomatik sistemlerde tanımlanmaksızın (veya sezgisel anlamıyla yetinilen) terim.

İndüksiyon: Sınırlı sayıda gözleme dayanan çıkarım türü; öncüllerin doğruluğu sonucun doğruluğunu güvence altına almayan çıkarım.

İndüktif genelleme: Bir konuda sınırlı sayıda gözlemden kalkarak o konuda sınırsız bir genellemeye gitmek; dayandığı kanıtların doğruluğunu zorunlu kılmadığı genelleme.

İrrasyonel sayılar: Gerçek sayılar kümesinin rasyonel olmayan alt-kümesi. (Örneğin, $\sqrt{2}$, π , 1.73205... gibi yinelenmeyen sonsuz ondalık dizisi.)

İspat: Mantık ve matematikte bir konjektürü belli aksiyom veya postulatların zorunlu sonucu olarak çıkarsama; konjektürü teoreme dönüştürme.

İzomorfizm: Bire-bir karşılıklı ilişki içinde olan iki dizge arasındaki ilişki.

Kalkülüs (calculus): Newton ile Leibniz'in (birbirinden bağımsız olarak) XVII. yüzyılın ikinci yarısında oluşturdukları matematiksel çözümleme yöntemi; limit ve fonksiyon kavramlarına dayanan kalkülüs "diferansiyel" ve "integral" diye iki bölümden oluşur. Diferansiyel kalkülüs türevlerle, integral kalkülüs "belirli integral" denen eğri uzunluğu eğik cisim hacmi gibi küçük miktarlar toplamının limitiyle uğraşır.

Kanıt: Bir sav ya da hipotezin doğruluğunu belirleyen gözlem veya belge.

Karmaşık sayı: $a + bi$ biçimini alan sayı (a ile b gerçek iki sayı, i ise sanal bir sayı göstermektedir).

Konik kesitler: Bir düzlemin bir dik dairesel koni ile kesişmesiyle oluşan eğri parabola, hiperbola, elips, vb.)

Konjektür: İspatı henüz verilmemiş hipotez veya tahmin; teorem adayı önerme.

Küme: "Sınıf", "yığın" ya da "koleksiyon" anlamında tanımlanmaksızın kullanılan terim.

Kümeler teorisi: Kümeler arasındaki ilişkileri inceleyen matematiksel teori.

Mantık: Geçerli çıkarım kurallarını ve çıkarım biçimlerini inceleyen formel disiplin.

Mantıksal doğruluk: Doğruluğu salt biçimine bağlı önerme türü; yadsınması çelişkiye yol açan önerme (totooloji).

Mantıkçılık: Matematik'in mantıkla özdeş olduğu savını içeren felsefi öğreti (Frege ile Russell'in oluşturduğu tez).

Matematik: Sayı, küme, fonksiyon gibi soyut nesne ve ilişkileri inceleyen, belli simgesel bir dil ve dedüktif çıkarım kuralları kullanan formel bir disiplin.

Matematiksel indüksiyon: Doğal sayılar gibi bir dizi nesneye ilişkin bir önermenin doğruluğunu ispat yöntemi. (Bu yöntem gereğince, dizide ilk nesne için doğru olan önermenin, n gibi bir başka nesne için doğru olduğunda $n + 1$ nesnesi için de doğru olduğu gösterilirse, diziyi oluşturan tüm nesneler için doğru olduğu ispatlanmış olur.)

Matris: Satır ve sütun olarak düzenlenmiş bir küme simge veya nesne.

Metafizik: Gerçekliğin doğasına ilişkin en temel ilkeleri salt akıl ya da sezgiyle kavramaya yönelik felsefi etkinlik (ontoloji).

Mutlak: Hiçbir şeye görecel olmayan, kendi içinde yeterli olan (salt, saltık).

Nesnel: Kişisel ya da öznel eğilimlerimize bağlı olmayan; bizden bağımsız gerçekliğin özelliği.

Niceleme: Gözlem konusu bir özelliği sayasal olarak belirleme.

Niteleme: Bir nesne veya sürece özellik verme.

Nominalizm: Tümel kavramları tekil nesnelerin ortak adları sayan, o tür kavramlara nesnel varlık tanımayan bir felsefe öğretisi (realizm karşıtı).

Olmayana ergi (reductio ad absurdum): Dolaylı ispat yöntemi: İspat bağlamında yadsınması çelişkiye yol açan bir sonucun yadsınarak geçerliğini göstermek.

Ordinat: Analitik düzlemdeki bir noktanın y-koordinatı; bkz. Absis: x-koordinatı.

Ölçme: Nesnelere ait özellikleri belli kurallar uyarınca nicelik olarak belirleme.

Öncül: İspat veya çıkarımda sonucu (teoremi) kanıtlayan önerme; formel sistemlerde aksiyom veya postulat işlevi gören önerme.

Özdeşlik: Tüm özellikleri aynı olan iki ya da daha fazla nesne arasındaki ilişki.

Özdeşlik ilkesi: Mantıkta birinci yasa: Bir önerme doğrudur ya da yanlıştır.

Paralel postulat: Bir doğru dışındaki herhangi bir noktadan o doğruya bir, yalnız bir paralel doğru olduğu savını içeren önerme; Euclides'in 5. postulatı.

Platonculuk: Matematik'in insandan veya kültürden bağımsız, varlığı öncesiz bir gerçekliğe ilişkin mutlak doğrulara yönelik bir çalışma olduğu görüşü.

Postulat: Bakz. Aksiyom.

Rasyonalizm: Bilgi edinmede akıl yetisine büyük önem veren felsefi öğreti.

Realizm: İnceleme konusu dış dünyanın algı veya bilgimizden bağımsız var olduğu savını içeren felsefi görüş.

Problem: Yanıtı istenen bir soru, açıklama gerektiren bir sorun ya da belirsiz, karmaşık, güç bir durum.

Problem çözme: Bir soru ya da probleme açıklayıcı yanıt getirme.

Projektif geometri: Geometrik şekillerin merkezi geometrik projeksiyonla özelliklerini inceleyen geometri dalı.

Rasyonel sayılar: İki tam sayının bölümü olarak yazılabilen sayı; gerçek sayılar kümesinin bir alt-kümesi.

Retrodüksiyon: Açıklayıcı kavram, hipotez veya teori oluşturmaya yönelik düşünme türü; induksiyona benzer çıkarım.

Russell paradoksu: Kendi kendisinin üyesi olmayan tüm kümelerin kümesi kavramının yol açtığı paradoks: Bu küme, kapsadığı kümeler gibi kendi kendisinin üyesi değilse kendi üyesidir, kendi kendinin üyesi ise, kendi üyesi değildir.

Sanal sayı: Negatif bir sayının karekökü olarak ifade edilen sayı (örneğin, $\sqrt{-1}$).

Sayı: Rakamla simgelediğimiz nicelik kavramı; her sayı bir çokluğun kaç tane veya bir büyüklüğün ne kadar olduğunu belirlemenin ölçüsü olarak nitelenebilir. (Sayı, küme kavramına indirgenerek benzer kümelerin kümesi olarak da tanımlanmıştır.)

Sayı doğrusu: Üzerindeki her noktası bir sayı ile karşılasm içinde olan sonsuz uzunluktaki bir doğru.

Seçim aksiyomu: "Belli bir grup kümenin her birinden yalnızca bir eleman alınarak bir küme oluşturulabilir," savını içeren önerme.

Semantik anlam: Sözcüklerin simgeledikleri nesne veya özelliklere ilişkin anlamları.

Sentaks: Bir dilde tümcelerin düzgün kuruluşunu gösteren kurallar bütünü.

Sentetik a priori: Olgusal içerikli, ama doğruluğu a priori bilinen önerme türü (Kant'a göre matematiksel önermeler sentetik a priori türündedir).

Sentetik önerme: Doğruluğu a posteriori bilinen (olgusal içerikli) önerme.

Sezgi: Bilgiye gözlem ya da çıkarım yoluyla değil, doğrudan ulaşma yetisi (iç-kavrayış).

Sezgicilik: Matematğin temellerine ilişkin mantıkcılık ve formalizm öğretilerini reddeden, matematiksel nesnelerin varlığını "yapımcı" bir varlık ispatına bağlı tutan, ispatı verilmedikçe matematiksel önermeleri doğru saymayan görüş. Sezgicilik klasik matematiğin "çift değilleme", "üçüncü seçeneği olanaksızlığı" ilkeleriyle "olmayana ergi" ispat yöntemini geçersiz sayar (yapımcılık).

Simge: Kendi dışında bir şeyin yerini tutan, kullanımı uzlaşımsal olan işaret, rakam, sözcük, vb.

Soyut nesne: Somut ya da spesifik bir nesne, özellik veya ilişki temsil etmeyen simge, sayı, sözcük türünden bir şey.

Soyutlama: Bir düşünce veya kavramı ilişkin olduğu spesifik deneyimlerden uzaklaştırıp genelleme.

Simetrik ilişki: İki nesne arasında bir ilişki türü, öyle ki, birincisi ikinci için ne ise, ikincisi de birincisi için odur: $aRb = bRa$ (R ilişki simgelemektedir. Örneğin, eşitlik bağıntısı: $a = b$ ise $b = a$).

Tamsayılar: Pozitif, negatif tamsayılarla sıfır (0)'ı içeren küme.

Tanım: Bir sözcük ya da terimin anlamını belirleme.

Tasım: İkiisi öncül, biri sonuç üç önermeden kurulu çıkarım türü.

Teorem: İspatlanmış (aksiyomlardan dedüktif olarak çıkarsanmış) önerme.

Teori: Bilimde: Belli bir olgu kümesini açıklayıcı kavramsal sistem. Matematikte: Matematiksel nesne ve ilişkileri mantıksal bir sistem olarak düzenlemede başvuru alan ilke, kavram ve varsayımlar.

Topoloji: Şekillerin germe, bükme, çekmeyle bozulmayan özelliklerini inceleyen geometri dalı.

Totoloji: Doğruluğu biçimsel olan bileşik bir önerme ya da formül. Bkz. Mantıksal doğruluk.

Tutarlılık: Çelişkiye yol açmayan bir küme önerme arasındaki mantıksal ilişki.

Üçüncü seçeneğin olanaksızlığı ilkesi: "Bir önerme ya doğrudur ya da yanlış," diyen mantık yasası.

Varsayım: İspatlanmaksızın doğru sayılan önerme. Bkz. Aksiyom.

Venn diyagramları: Özellikle küme ilişkilerini göstermek, tasımsal çıkarımların geçerlik denetimini yapmak için kullanılan birbiriyle kesişen iki veya üç daire.

Yapımcılık: Belli ilkel nesneler (örneğin, doğal sayılar) kullanılarak sonlu adımda inşa edilebilen matematiksel nesneleri yalnızca var veya anlamlı sayan öğretisi. Bkz. Sezgicilik.

Yorumlama: Anlam verme, bir değışkene belli bir değer yükleme.

Yorumlanmış sistem: İlkel terimlerine belli bir konunun anlamı verilmiş formel sistem.

Yöntem: Genelde: Belli bir amaca ulaşmak için tutulan yol, kullanılan işlem. Matematikte: Konjektür oluşturma ve ispatlama süreçlerinde izlenen yol.

BIBLIYOGRAFYA

- Ayer, A. J., *Language, Truth and Logic*, Dover, New York, 1948.
- Barker, S. F., *Philosophy of Mathematics*, Prentice-Hall, N. J., 1964.
- Bell, E. T., *Men of Mathematics*, Simon and Schuster, New York, 1965.
- Benacerraf, P. ve Putnam, H., *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- Blanché, R., *Axiomatics*, The Free Press of Glencoe, New York, 1962.
- Bochner, S., *The Role of Mathematics in the Rise of Science*, Princeton University Press, 1966.
- Dantzig, T., *Number: The Language of Science*, Doubleday Anchor Books, Garden City, N. Y., 1954.
- Davis, P. J. ve Hersh, R., *The Mathematical Experience*, Houghton Mifflin and Co., Boston, 1981.
- Eves, H. ve Newsom, C. V., *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1965.
- Greenberg, M. j., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1973.
- Field, H. H., *Science Without Numbers*, Basil Blackwell, Oxford, 1980.
- Hadamard, J., *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Dover, New York, 1954.
- Hardy, G. H., *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- Kasner, E. ve Newman, J., *Mathematics and Imagination*, Pelican Books, London, 1968.
- Kitcher, P., *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, Oxford, 1983.
- Kline, M., *Mathematics and the Physical World*, Dover, New York, 1981.
- Mathematics in the Western Culture*, Oxford University Press, Oxford, 1964.
- Mathematics: The Loss of Certainty*, Oxford University Press, Oxford, 1980.
- Mathematics in the Modern World*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1968.
- Körner, S., *The Philosophy of Mathematics*, Harper Torchbooks, New York, 1960.

- Lakatos, I., *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.
- Lehman, H., *Introduction to the Philosophy of Mathematics*, Rowman and Littlefield, Totowa, 1979.
- Luchins, A. S., *Logical Foundations of Mathematics for Behavioral Scientists*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1965.
- Marks, R. W., *The Mathematics Dictionary and Handbook*, Bantom Books, London, 1966.
- Nagel, E. ve Newman, J., *Gödel's Proof*, Routledge and Kegan Paul, London, 1976.
- Newman, j., *The World of Mathematics* (4 volumes), Simon and Schuster, New York, 1956.
- Putnam, H., *Philosophy of Logic*, Harper Torcbooks, New York, 1971.
- Polya, G., *How To Solve It*, Princeton University Press, N. J., 1957.
- Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton University Press, N. J., 1962.
- Reichenbach, H., *Bilimsel Felsefenin Doğuşu*, Remzi Kitabevi, İstanbul, 1981. (Çeviren: C. Yıldırım).
- Russell, B., *Introduction to Mathematical Philosophy*, George Allen and Unwin, London, 1919.
- A History of western Philosophy*, Simon and Schuster, New York, 1945.
- Schaaf, W. L., *Basic Concepts of Elementary Mathematics*, John Wiley, New York, 1965. *Our Mathematical Heritage*, Collier Books, New York, 1963.
- Skemp, R. R., *The Psychology of Learning Mathematics*, Pelican Books, London, 1971.
- Steiner, M., *Mathematical Knowledge*, Cornell University Press, Ithaca, N. Y., 1975.
- Waismann, F., *Introduction to Mathematical Thinking*, Harper Torchbooks, New York, 1959.
- Wilder, R. L., *Introduction to the Foundation of Mathematics*, John Wiley, New York, 1965.
- Evolution of Mathematical Concepts*, Transworld Student Library, London, 1974.
- Yıldırım, C., *Mantık: Doğru Düşünme Yöntemi*, V Yayınları, Ankara, 1987.
- Eğitimi Felsefesi*, A. Ü. Açıköğretim Fakültesi, Yayın No. 203/EF, Ankara, 1987.
- Bilim Tarihi*, Remzi Kitabevi, 3. Basım, 1992.
- The Pattern of Scientific Discovery*, M.E.T.U., Ankara, 1973.
- Science: Its Meaning and Method*, M.E.T.U., Ankara, 1971.
- Evrin Kuramı ve Bağnazlık*, Gerçek Yayınevi, İstanbul, 1989.
- Bilim Felsefesi*, Remzi Kitabevi, 4. Basım 1995.
- Bilimin Öncüleri*, TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları, 4. Basım, 1995.

AD DİZİNİ

- Abel, N.H., 154-155
 Adelard, 33
 Adler, A., 143-144
 Aeschylus, 147
 Airy, G.B., 125
 Apollonius, 31, 124
 Archimedes, 26, 30, 104, 130
 Aristophanes, 147
 Aristoteles, 23, 27, 59-62, 102-105, 123
 Ayer, A.J., 69
- Bar-Hillel, 97
 Barker, S.F., 91
 Bell, E.T., 42
 Beltrami, 39, 40
 Benacerraf, 58
 Berkeley, 77, 78, 85
 Bernoulli, 77
 Bernayes, 85, 94
 Bethius, 33
 Bochner, 126
 Bolyai, 38-41
 Bombelli, 124, 133
 Bronowski, 147
 Brouwer, 61, 88, 97-99
 Burali-Forti, 82, 84
- Campanus, 33
 Cantor, 79, 82, 85, 98, 99, 126, 152
 Cardan, G., 124, 133, 152
 Carnap, R., 17, 92, 96, 97
 Cauchy, 78-80, 98, 123, 155, 156
 Cayley, A., 125, 133
 Claudius, 31
 Cohen, M.R., 116-118
 Commandino, 33
- Courant, R., 51, 95, 138
 Couturat, L., 92
- Dantzig, T., 58, 59, 132, 133
 Davis, P.J., 141
 Dedekind, 59-62, 76, 80, 81, 99, 132
 Dirac, 123, 146
 Descartes, 34, 71, 77, 87, 105, 130
 Diophantus, 31
 Dürer, A., 149
- Eddington, 133
 Einstein, 42, 59, 62, 68, 124, 132
 El-Khwarizmi, 33
 Epimenides, 83-84, 91
 Eratosthenes, 26, 31
 Eubulides, 84
 Euclides, 22, 24, 26-30, 34-36, 40, 41, 54, 62, 65, 72, 75, 76, 80, 102-109, 112-115, 125, 126, 130, 133, 143, 148
 Eudemos, 23
 Eudoxus, 22, 25-27, 75, 104, 130
 Euler, 13, 49, 53, 77, 124, 130, 143, 152, 157
- Fermat, 34, 49-53, 65, 121, 130
 Field, H., 58, 136
 Fraenkel, 85, 97
 Frege, 17, 59-62, 80-83, 88, 90, 93, 96, 97
- Galileo, 15, 34, 44, 124, 130-135, 154
- Galois, 34, 154-156
 Gauss, 38-41, 51, 78, 122, 130, 144, 154, 155
 Gentzen, 96
 Gherardo, 33
 Goldbach, 50, 61, 65, 121
 Gödel, K., 57, 75, 86, 96, 112, 122, 126, 127
 Greenberg, 40, 62
- Hadamard, 122
 Hamilton, 61, 126
 Hamurabi, 25
 Hahn, H., 92
 Hardy, G.H., 57, 122, 126, 127, 146, 148, 156, 157
 Harun-el Reşid, 33
 Harriot, 33-34
 Hayyam, Ömer, 147
 Hegel, 77, 144
 Hempel, C.G., 81, 89
 Heitler, W., 139
 Herredotos, 19
 Heron, 31
 Hersh, R., 95, 141
 Hertz, 62
 Heyting, 97, 100
 Hilbert, D., 82, 84, 88, 91-98, 112, 115-123
 Hogben, L., 251
 Hume, D., 65, 66, 67, 72
 Huygens, 34
- James, W., 145
- Kant, I., 17, 38, 40, 57, 66-71, 91-97, 133, 135
 Kasner, E., 142
 Kelvin, Lord, 138
 Kemeny, J.G. 16-17

- Kepler, 34, 105, 124, 130, 135-136
 Kline, F., 39, 83, 121, 126, 127, 141
 Kopernik, 134, 135
 Kronecker, 63, 89, 97, 100
 Kuhn, T., 72

 Lakatos, 96
 Lagrange, 78, 105, 123, 130, 156
 Lambert, 37
 Laplace, 129, 130
 Legendre, 37, 38, 78, 155, 156
 Leibniz, 34, 65, 70, 77, 78, 87, 105, 116, 124, 130, 136, 149
 Leonardo, 135, 147, 149
 Lindsay, R.B., 131
 Lobachevsky, 38-42, 112, 113, 122, 123
 Lubsen, 78

 Mach, E., 17, 106
 Menger, K., 17-18
 Michael, A., 149
 Mill, J.S., 14, 17, 66-67, 72, 88, 134

 Nagel, E., 112, 116-118
 Napier, 33
 Nasir-ed-din, 35, 36
 Newman, J.R., 112, 142, 156
 Newton, 34, 67, 78, 87, 105, 130, 131, 135, 144, 155

 Oughtred, 34

 Popper, K., 59, 61, 62
 Pappus, 31
 Parmenides, 76
 Pascal, 45
 Pasch, M., 107
 Peano, G., 80-82, 88-95, 130
 Peirce, C.S., 87
 Piaget, 58
 Platon, 25-26, 56, 57, 62, 68-71, 87, 90, 123, 125, 129, 142, 147, 150
 Playfair, 34, 35, 38
 Poincaré, H., 17, 39, 46, 52, 71, 74, 82, 87-93, 97-98, 109-112, 123, 144, 146
 Polanyi, M., 73
 Polya, G., 47, 48, 157, 158
 Proclus, 24-26, 31-35
 Ptolemy, 20, 31-37, 76, 135
 Putnam, H., 101
 Pythagoras, 21, 22, 24-26, 68, 75, 105, 113, 129-130, 132, 147

 Quine, 14, 17, 72, 83, 92

 Ramanujan, 154-157
 Ramsey, 92
 Raphael, 149
 Rhind, A.H., 21
 Riemann, 39, 128, 133, 144
 Robbins, H., 51, 95
 Russell, B., 17, 23, 25, 29-30, 57, 59, 62, 68-69, 71-74, 80-85, 90-93, 98, 114, 134, 148

 Saccheri, 35-38, 113
 Sarton, G., 149
 Skolem, 85
 Socrates, 147
 Spinoza, 105
 Steiner, M., 92, 93, 134
 Stewart, I., 101
 Sylvester, 133

 Thales, 22-26, 104
 Titchmarsh, 63, 121
 Torricelli, 44, 45

 Vaihinger, 78
 Veblen, 116
 Veronese, 61
 Von Neumann, 85

 Wallis, J., 35, 36
 Waring, E., 52
 Weirstrass, 79, 80, 88, 98, 99, 123, 146
 Weismann, F., 18, 61, 92, 96
 White, L., 141-142
 Whitehead, A.N., 90, 123
 Wigner, E.P., 129
 Wilder, R.L., 124, 142, 145
 Wiles, A. 50
 Wittgenstein, 61, 69, 92

 Zeno, 76, 79, 104, 153,
 Zermelo, 85