

Keyifli Okumalar Dileriz

Binlerce kategoride milyonlarca PDF e-kitap, ders kitapları, dergiler ve romanlara platformumuz üzerinden ücretsiz ulaşabilirsiniz.

RESMİ WEB SİTEMİZ

<https://rantey.org>

Yedek ve Duyuru Kanallarımız

Sitemize erişim engeli gelmesi veya adres değişikliği durumunda aşağıdaki kanallardan güncel giriş adresine erişebilirsiniz:

- Telegram: <https://t.me/birkitapbir>
- WhatsApp Kanalımız : <https://whatsapp.com/channel/0029VbDHv8uE50Us4lvMoc0Y>

Ali Nesin

Matematik ve Oyun



NESİN MATEMATİK KÖYÜ



Dünyanın En Zeki İnsanı Matematikçilere Karşı

Amerika Birleşik Devletleri'nde dikkatimi ilk çeken her şeyin büyüklüğü oldu. Arabalar, binalar, Coca Cola'lar, alışveriş merkezleri, insanlar... Her şey büyük... Ülke zaten devasa...

Büyük, büyük, büyük... Gazeteler de büyük. Günlük gazetelerin sayfa sayısı yüzün oldukça üstünde. İki yüz sayfaya bile eriştikleri olur. İçim erirdi ilk günler gazete alırken. Onca kâğıt, yazık değil mi diye düşünürdüm. Üstelik gazete reklamlarla dolu. Ama gazetesiz de yaşanmıyor ki! Mecburen alışmak zorunda kaldım.

Gene de birtürlü pazar gazetelerine alışamadım. Pazar gazeteleri öbür günlerin gazetelerinin yedi sekiz katı olur. Belki daha da fazla. Herbiri bir ağaç katili.

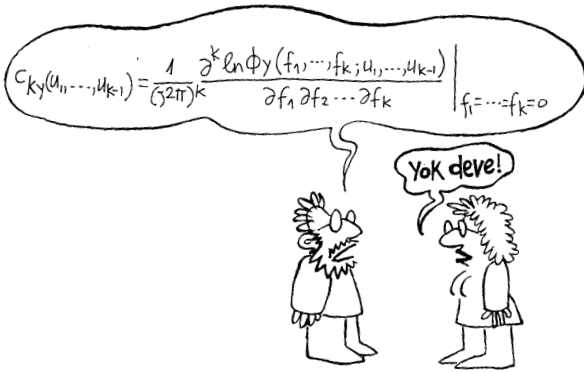
Pazarları gazete almadığımdan Vos Savant'ı çok geç öğrendim. Vos Savant¹ kimdir? Vos Savant dünyanın en zeki insanıdır¹. Kimi gazetelerin pazar günleri ek olarak verdiği magazin havalı bir dergide yazar.

1 “Vos”un ne anlama geldiğini bilmiyorum. “Savant”, Latince kökenli, Fransızca ve İngilizce bir sözcük. İngilizcede az kullanılır. Hem Fransızcada, hem İngilizcede “bilgin” anlamına gelir. Fransızcada çocuklar için kullanıldığında “bilgiç, çokbilmiş” anlamına da gelir. Örneğin, Molière’in Bilgiç Kadınlar adlı oyununun özgün adı Les Femmes Savantes'dır.

Bu dergiyi birden çok gazete ek olarak verdiğinden, milyonlar okur Vos Savant'ı. Adının altında Dünyanın en yüksek IQ'lü insanı diye yazar. IQ dedikleri, zekâ sayısı oluyor. Yani zekâ sınavı sonucu. IQ sayısını hesaplatmak isteyenler bir sınavdan geçerler. O sınavın sonucunda tutturdıkları sayı kadar zeki oldukları anlaşılır. Ne bir fazla, ne bir eksik! Vos Savant, işte o sınavda en çok sayıyı tutturan insanmış. Ünlü Guinness rekorlar kitabında adı geçiyormuş.

Her pazar yazdığı sayfanın tepesinde güzel bir fotoğrafı var. Yıllardır yaşlanmayan bir fotoğraf. Söylemedim değil mi? Vos Savant bir kadın. Sarışın, güzel bir kadın. Ben resminin yalancısıyım.

Okurlar Vos Savant'a soru sorarlar, Vos Savant da yanıtlar soruları. Fizik, kimya, biyoloji, astronomi, astroloji, bilgisayar, anatomi, tıp... Önüne hangi soru çıkarsa çıksın yanıtlar Vos Savant.



Ünlü popüler matematik yazarı Martin Gardner bile arada bir soru yollar Vos Savant'a. Yanıtını öğrenmek için değil elbet. Vos Savant'ı sınava çekmek istediğini de sanmıyorum. Martin Gardner'in amacı okurları düşündürmek, matematiğin yayılmasını, sevilmesini sağlamak, Vos Savant yoluyla daha geniş bir kitleye erişebilmek olmalı.

Vos Savant'ı ilk okuduğumda bütün köşesini aynı konuya ayırmıştı. Haftalar önce, okurlarından biri bir matematik soru-

su sormuş. Vos Savant da - görevi bu değil mi? - yanıtlamış. Matematik dünyası çalkalanmış, ayaklanmış. Mektup üstüne mektup yağmış Vos Savant’a. Matematikçiler yanıtın yanlış olduğunu yazmışlar. Vos Savant direktmiş, “hayır,” demiş, “benim yanıtım doğru, sizinkisi yanlış.” Sen misin böyle yazan! Vos Savant’a bu kez binlerce mektup yağmış. İşte benim aldığım pazar gazetesinde matematikçilerin mektuplarından alıntılar ve Vos Savant’ın bu mektuplara yanıtı vardı. Mektuplar aşağı yukarı şöyleydi:

İşte senin gibi cahiller yüzünden Amerika’da matematik eğitimi bu halde...

Her şeyi bildiğini mi sanıyorsun? Bizim bu matematik denen bilime yıllarımızı verdiğimizizi bilmiyor musun?..

Başını öne eğ ve haksız olduğunu kabul et.

İnadın yeri matematik değildir...

Ve daha neler neler! Vos Savant’ın yanında yer alan matematikçiler de vardı, yok değildi, ama azınlıktaydılar.



Vos Savant’a sorulan soru şuydu: Diyelim televizyonda bir oyun izlencesine katıldınız. Sunucu size üç kapı gösterdi. Kapıların birinin ardında çok pahalı (ve kocaman) bir araba var, öbür iki kapının ardındaysa birer havuç var. (Havuçlar da kocaman!) Kapıların birini seçeceksiniz. Amacınız arabanın olduğu kapıyı seçmek elbet. Sunucu arabanın



hangi kapının ardında olduğunu biliyor. Siz kapıyı seçtikten sonra, ama daha kapıyı açmadan önce, sunucu, geriye kalan iki kapıdan ardında havuç olanını açıp size havucu gösteriyor ve,

– Dilerseniz kapınızı değiştirebilirsiniz, diyor.

Oyunun kuralı bu. Sunucu bu iyiliği salt size değil, herkese yapıyor.

Kapıyı değiştirmeli misiniz, yoksa değiştirmemeli misiniz?

Arabayı kazanma olasılığını artırmak için ne yapmalı?

Belki de değiştirip değiştirmeyeceğinize yazı-tura atarak karar vermelisiniz.

Yazının burasında yarım saat sessiz kalıp okura düşünme payı vermek isterdim. Yanıt şaşırtıcı, ve işin püf noktası anlaşıl-
dığında gözyaşartıcı güzellikte.

Kapıyı değiştirip değiştirmemek konusunda karar vermek için yazı-tura atarsanız, arabayı kazanma olasılığınız $1/2$ 'dir; çünkü açılmamış iki kapıdan salt birinin ardında araba var. Yazı-tura atarsanız arabayı $1/2$ olasılıkla bulacaksınız.

Şimdi kapıyı değiştirmedığınızı varsayalım. Buna A varsayımı diyelim. A varsayımında arabayı seçme olasılığınız $1/3$ 'tür, çünkü üç kapıdan birini seçtik, ve salt bir kapının ardında araba var, sunucu ardında havuç olan bir kapıyı açmış ya da açmamış, umurunuzda değil, ilk seçtiğiniz kapıdan şaşmayacaksınız...

$1/2$, $1/3$ 'ten büyük olduğundan, yazı-tura atmayı, kapıyı değiştirmemeye yeğlemelisiniz.

Şimdi de kapıyı değiştirdiğinizi varsayalım. Bu varsayıma B varsayımı diyelim. B varsayımında kazanma olasılığınız kaçtır? Gene $1/3$ müdür? Yoksa $1/2$ midir?

Ne $1/3$ ne de $1/2$!

B varsayımında nasıl kazanabilirsiniz? Ancak seçtiğiniz ilk

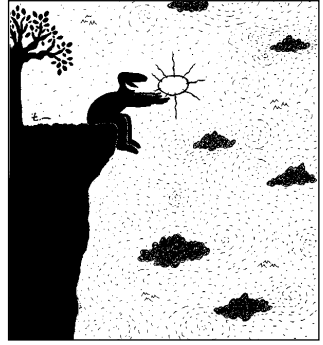
kapının ardında araba yoksa kazanabilirsiniz².

Seçtiğiniz ilk kapının ardında araba olmama olasılığıysa $2/3$ 'tür. Dolayısıyla, *B* varsayımında kazanma olasılığı $2/3$ 'tür. $2/3$, $1/3$ 'ten ve $1/2$ 'den büyük olduğundan kapınızı değiştirmelisiniz.

Bu açıklamalarımı kandıramadığım bir okuruma şu örneği verdim: Diyelim, üç değil, yüz kapı var, ve yalnız birinin ardında araba var. İlk seçiminizden sonra, sunucu arkasında havuç bulunan 98 kapıyı açıp size havuçları gösteriyor. Kapınızı değiştirir misiniz, değiştirmez misiniz? Değiştirirseniz, arabayı kazanma olasılığınız %99'dur. Değiştirmezseniz %1'dir.

Eğer kapı değiştirmenin en iyi strateji olduğuna sizi inandıramıyşsam, bir arkadaşınızla bu oyunu birkaç kez oynayın. Arkadaşınız üç kapının (ya da kutunun) ardına bir nesne koysun ve o nesneyi bulmaya çalışın. Önce yüz kez yazı-tura atın, sonra yüz kez kapı değiştirmeyin, sonra yüz kez kapı değiştirin. En çok, kapı değiştirdiğinizde nesneyi bulduğunuzu göreceksiniz.

Şimdi yazımızın en önemli sorusuna gelelim: Vos Savant mı yoksa matematikçiler mi haklıydı? Yazının başında Vos Savant'ın dünyanın en zeki insanı olduğunu söylemiştim. Vos Savant haklıydı elbet.



2 İşin püf noktası burada. İyiye düşünün. Eğer ilk seçiminizde arabayı bulamamışsanız, ki $2/3$ olasılıkla bulamazsınız, kapıyı değiştirdiğinizde arabayı kesinlikle bulacaksınız.

Matematik

Bir sınıfta tam kırk çocuk dizili;
Bir karatahta, üstünde bir üçgen;
Bir koca daire, sağır, çekingen;
Merkezi güm güm eder davul gibi.

Dilsiz, vatansız harfler, küme küme,
Bekleşir dururlar, azap içinde.

Bir yamuğun yan kenarı tamtakır,
Bir ses yükselir yükselir, alçalır,
Azgın bir problem tutar yolunu,
Döner döner ısırır kuyruğunu.

Bir açının çeneleri gerilir;
Kurt mudur, köpek mi, neyin nesidir?

Ne kadar rakam varsa yeryüzünde
Üşüşmüş, karınca gibi, tahtaya;
Koşarlar bir yuvadan bir yuvaya,
Fal taşına dönmüş gözler önünde.

Jules Supervielle¹

Çeviren: Sabahattin Eyüboğlu

1 1884-1960 yılları arasında yaşamış ünlü bir Fransız şairi.

“Son Teorem” Teorem Oldu En Sonunda

Yıl 1637 sanılıyor. Vebanın ve savaşın Avrupa’yı kasıp kavurduğu yıllar. Yer Toulouse, Fransa’nın güneyinde, İspanya sınırına yakın bir kent. Fransız hukuk adamı, aynı zamanda amatör matematikçi, ama amatör olmasına karşın çağının en büyük matematikçisi Pierre de Fermat (1601-1665), okumakta olduğu Diofantos’un¹ Aritmetik adlı yapıtının sayfa kenarına Latince, “Hanc marginis exiguitas non caperet,” diye not düşüyor. Yani, “sayfa kenarında kanıt için yeterince yer yok.” İlk kez değil bu. Daha önce de buna benzer notlar düşmüştü aynı kitabın sayfalarına. Bundan sonra da düşecek.

Fermat’nın sözünü ettiği şu teoremin kanıtı:

Fermat’nın Son Teoremi. *Eğer n , 2’den büyük bir tamsayıysa, $x^n + y^n = z^n$ denkleminin pozitif tamsayılarda² çözümü yoktur.*

Bu teoremi Fermat gerçekten kanıtlamış mıdır? Bilinmiyor. Büyük bir olasılıkla hiçbir zaman da bilinemeyecek. Dünyanın en büyük beyinleri üç yüz yılı aşkın bir süredir teoremi kanıtlamaya çalıştılar.

1 Diofantos, İS 3’üncü yüzyılda yaşamış Yunanlı bir matematikçidir.

2 Yani 1, 2, 3, 4, ... gibi sayılarda.

Bu çalışmalar sonucu modern cebir doğdu. Teoremi kanıtlamak için geliştirilen yöntemler ve bulunan kavramlar salt matematikte değil, başka dallarda da uygulama alanı buldular.

En sonunda, geçen hafta (Haziran 1993) teoremin kanıtlandığı duyuruldu. Andrew Wiles adlı bir matematikçi kanıtlamış.

Matematik dünyası çalkalandı, şenlendi. Konuşulan tek konu bu oldu. Herkes sevinçliydi. Sanki teoremi bir kişi değil, bütün matematikçiler, hep birlikte kanıtlamışlardı. Öğrencilerimizden çekinmesek horon tepecektik ortalıkta. Çalkalanma dar matematik dünyasını aştı. Haber gazetelerin birinci sayfasında yer aldı. Her gün gittiğim kahvenin garsonu bile Fermat'ın Teoremi'nden sözetti. Bana mı öyle geldi bilmiyorum, ama sanki haberin duyulduğu gün bütün insanlar aynı bayramı kutluyorlardı. İlk aya gidildiğinde, ilk kalp nakli yapıldığında da, anımsıyorum, böyle bir hava sezmiştim. İnsanlar, insanlıklarından gurur duyuyorlardı. Başarı, bir iki kişinin başarısı değildi, hep birlikte başarmıştık. Tümümü-



zün yengisiydi bu. Kimseye karşı değil. Tek kişilik bir yarıştan birinci çıkmıştık..

Gene de kadehleri tokuşturmadan önce biraz beklemek gerekiyor. Fermat'ın Son Teoremi'nin kanıtlandığı ilk kez duyurulmuyor. Daha önce birçok ünlü matematikçi teoremi kanıtladıklarını sandılarsa da sonradan yanlış olduklarını anladılar. Bunlardan en ünlüleri geçen yüzyılda yaşamış olan Cauchy (1789-1857), Lamé (1795-1870) ve Kummer'dir (1810-1893). Bundan dört beş yıl önce de ünlü bir Japon matematikçi teoremi kanıtladığını dünyaya duyurmuştu. Bir aya kalmadı kanıtın yanlış olduğu anlaşıldı. Duyduğuma göre, sayı kuramcıları bu kez kanıttan umutlularmış³.

Bu teoremle salt profesyonel matematikçiler uğraşmadılar. Amatör ya da profesyonel olsun, bir tek matematikçi bilmem ki yaşamının bir döneminde teoremi kanıtlamaya çalışmış olmasın.

Profesyonel matematikçiler de sık sık teoremi kanıtladıklarını öne süren amatörlerden mektup alırlar. Kanıtı anlamaya çalışmak, yanlış bulmak az buz bir iş değildir. Gene de toplumsal görevlerinden biri de bu olduğundan, matematikçiler ellerinden gelince yardımcı olmaya çalışırlar.

Fermat'ın Son Teoremi ne işe yarar? Matematikte ya da yaşamda uygulama alanı var mıdır? Bu teorem kanıtlansa ne olur, kanıtlanmasa ne olur?

Fermat'ın son teoreminin hiçbir uygulamasını bilmiyorum. Ne matematiğe, ne de günlük yaşama... Yani ne kuramsal olarak, ne de uygulamada Fermat'ın Son Teoremi bir işe yarar. Böyle dü-

3 Bugün, 22 Kasım 1993, kanıttaki bir sorunu duyduğumu duydum. Kanıtı düzeltmek için çalışılıyormuş. Sorunun yanıtlanması için aşağı yukarı bir yıl gerektiği söyleniyor. Şimdilik teoremin tam olarak kanıtlandığını söyleyemeyiz. Konudan anlayan matematikçiler son derece umutlular ama.

İkinci basıma ek: Kasım 1994'te, Wiles kanıtını öğrencisi Richard Taylor'ın yardımıyla düzeltti.

Üçüncü basıma ek: Ne tuhaf! Kanıtın düzeltilmesi için aşağı yukarı bir yıl gereksinildiğinin söylendiğini yazmışım ve tam bir yıl sonra kanıt düzeltilmiş!

şünen salt ben değilim, sayı kuramcısı Norbert Schappacher de böyle yazıyor bir yazısında⁴. Fermat'ın Son Teoremi'ni bu yüzden ilginç bulmayanlar olabilir. Ünlü matematikçi Carl Friedrich Gauss bu matematikçilerden biriydi.

Her ne denli Fermat'ın Son Teoremi'nin önermesi matematiksel olarak pek ilginç değilse de, teoremin kanıtlanması matematik için bir sınav sayılır. Üstelik bu teoremin kanıtlanması için geliştirilen yöntemler matematikte çok geniş uygulama alanları bulmuşlardır. Amaç teoremin kendisini kanıtlamaktan çok, matematikçilere bir hedef göstermektir. Nasıl aya gitmenin aya gitmekten de öte bir yararı olmuşsa insanlığa, Fermat'ın Son Teoremi'nin de matematiğe öyle bir katkısı olmuştur.

Fermat'ın yaşadığı çağda herkes matematiksel bir kanıtın nasıl olması gerektiğini bilmiyordu. Örneğin, matematiksel bir önermeyi 0, 1, 2, 3, 4, 5 gibi küçük doğal sayılar için kanıtlayıp, “tümevarımla her doğal sayı için doğrudur” sonucunu çıkaranlar vardı. Ama Fermat matematiksel bir kanıtın nasıl olması gerektiğini biliyordu. Hatta 1657'de Wallis adlı bir matematikçinin buna benzer kötü yöntemlerini eleştirmişti. Yani Fermat'ın, teoremi küçük sayılar için kanıtlayıp, “her sayı için geçerlidir” gibi geçersiz bir çıkarım yapmış olması olası değil⁵.

Pierre de Fermat'ın kanıtlayamadığı teoremleri çekinmeden açıkladığı da biliniyor. Matematikçi Frénicle de Bessy'ye 1640'ta yazdığı mektup buna bir delil (çeviriyi özgürce yapıyorum):

Ama size kesin olarak söyleyeyim ki (çünkü bildiğimden fazlasını kendime mal edemeyeceğim gibi, bilmediğimi de açık açık söylerim) 3, 5, 17, 257, 65537 vb.

4 Les 350 Ans du “Grand Théorème de Fermat”, Norbert Schappacher, önyazı (“preprint”).

5 Kaldı ki, küçük n tamsayıları için bile Fermat'ın teoremini kanıtlamak kolay değildir. Teoremin güçlüğüne kavramak amacıyla, $n = 3$ için kanıtlamaya çalışın. $n = 3$ için bile basit bir kanıtın bilindiğini sanmıyorum. $n = 4$ için kanıt oldukça kolay. “Fermat Ne Biliyordu?” (sayfa 123) adlı yazıda kanıtı bulabilirsiniz.

gibi sayıların bölenleri olmadığını kanıtlayamadım⁶. Bu önermenin doğru olduğundan en ufak bir kuş-kum yok. Eğer kanıt bulduysanız, bana yollama zahmetinde bulunun; çünkü bundan sonra beni bu konularda hiçbir şey durduramaz.

Fermat'ın yalan söylemediği, doğru ya da doğru olduğunu sandığı bir kanıt bulduğu kesin. Bulduğu kanıt yanlış da olabilir. Fermat kusursuz bir insan değildi. Yazışmalarında, ender de olsa, şimdi yanlış olduğu bilinen önermeleri kanıtladığını ileri sürdüğü de oldu. Örneğin, 1659'da, bir mektubunda, biraz önce (dipnotta) sözünü ettiğim $2^{2^n} + 1$ sayılarının asal olduklarını kanıtladığını ileri sürdü. Oysa bu önerme yanlış. Euler, 1732'de $2^{2^5} + 1$ 'in, yani 4.294.967.297'nin 641'e bölündüğünü⁷, dolayısıyla asal olmadığını gösterdi. Yani, Fermat'ın, Son Teorem için düşündüğü kanıt yanlış olabilir.

Kanıtı uzun zaman bulunamayan önermelere sık sık ödül konulur. Bu ödülleri ünlü matematikçiler koyabilirler. Problemle uzun zaman uğraşmışlardır, başarıya ulaşamamışlardır. "Teslim oldum" anlamına ve öbür matematikçileri heveslendirmek amacıyla küçük bir ödül koyarlar. Kimileyin bir bilim akademisi koyar ödülü. O zaman ödül ve ödülün onuru daha büyük olur elbet.

İki kez, 1816 ve 1850'de, Paris Bilimler Akademisi teoremi kanıtlayana bir altın madalya ve 3000 Fransız Frankı vereceğini duyurdu. 1856'da, jüri üyesi olan Cauchy, konu üzerine 11 çalışma aldıklarını, ancak hiçbir çalışmanın teoremi kanıtlayamadığını bildirdi. Gene de çalışmaların konuya katkılarını övüp

6 Bu sayılar sırasıyla $2^1 + 1$, $2^4 + 1$, $2^8 + 1$, $2^{16} + 1$ sayılarına eşittir. $2^{2^n} + 1$ biçiminde yazılan sayıların asal oldukları, yani 1 ve kendilerinden başka bir sayıya bölünemedikleri sanılıyordu. Fermat bu soruyu sormuştur bir önceki mektubunda. Bu tür sayıların asal olmadıkları daha sonra anlaşıldı. Matematik ve Korku adlı kitabımdaki "Asal Sayılar" adlı yazıda bu konuda daha fazla bilgi bulabilirsiniz.

7 $4.294.967.297 = 641 \times 6.700.417$. Bugün, bilgisayarlarla bu bölmeyi bulmak çok kolaydır. O zaman da pek zor değildi. Biraz sabır yeterliydi.

madalyanın Kummer'e verilmesini ve Akademi'nin ödülü kaldırmasını jüri adına önerdi.

1908'da Alman Paul Wolfskelf vasiyetinde Fermat'ın teoremini 13 Eylül 2007'den önce kanıtlayana 100.000 Alman Markı gibi bir servet bıraktı. Matematikçi Paulo Ribenboim, *Fermat'ın Son Teoremi Üzerine 13 Ders* adlı kitabında, Wolfskelf ödülünden sorumlu Dr. F. Schlichting'ten aldığı mektubu yayımladı. Mektubu sunuyorum:

Göttingen, 23 Mart 1974

Sevgili Bayım,

Mektubunuzu yanıtlamakta geciktiğim için lütfen bağışlayın. İlişkide, şimdi 100.000 Mark'ı aşmış olan ödülün kurallarını açıklayan ve ödüle katılmak isteyenlere yolladığımız belgeleri bulacaksınız.

Şimdiye dek kaç kişinin ödüle katıldığı bilinmiyor. İlk yıl (1907-1908) 621 çözüm önerilmiş. Şu anda Fermat'ın problemiyle ilgili elimizde üç metre yüksekliğinde yazışma var. Son on yıllarda soruna şöyle yaklaştık: Akademi'nin sekreterliği yazıları, (1) saçmasapan yazılar, ki bunlar hemen geri gönderiliyor, ve (2) matematiği andıran yazılar olmak üzere ikiye ayırıyor. İkinci kategorideki yazılar matematik bölümüne iletiliyor, matematik bölümü de yazıları okuma, yanlış bulma ve yazarı yanıtlama işlerini asistanlara bırakıyor - şu anda kurban benim. Her ay iki ya da üç mektup yanıtlamam gerekiyor. Son derece gülünç ve ilginç mektuplar elime geçiyor. Örneğin, biri çözümünün yarısını sunuyor, öbür yarısını peşin 1000 Mark yollarsak yollayacağımı söylüyor. Bir başkası, kendisine arka çıkar sam, ünlendiğinde, yayınlardan, televizyon ve radyo konuşmalarından elde edeceği kazancın

%10'unu sunuyor, ve yardımı reddedersem, çözümünü bir Rus üniversitesine yollayarak bizi onurdan yoksun edeceğini söyleyerek tehdit ediyor. Arada bir de Göttingen'e gelip özel olarak konuşmak isteyenler çıkıyor.

Hemen hemen bütün çözümlerin ilkel bir düzeyde yazılmış olmasına karşın (lise matematiği kavramlarıyla ve belki de sayılar kuramında kötü hazmedilmiş bir iki yazı okunduktan sonra), anlaşılmalara çok güç olabiliyor. Toplumsal olarak, ödüle katılanlar genellikle teknik eğitimden geçmiş, ama başaramayıp Fermat'ın teoremini kanıtlayarak birden üne kavuşmak isteyen kişiler. Yazılardan birini gösterdiğim bir doktor, yazarın ağır bir şizofreni olduğunu söyledi. Wolfskelf'in vasiyetlerinden biri de Akademi'nin her yıl önde gelen matematik dergilerinden birinde ödülü duyurmasıydı. Ama daha birinci yıldan sonra dergiler duyuruyu yayımlamayı reddettiler, çünkü dergilere deli mektupları yağıyordu durmadan. Şimdilik, ödülün matematiğe tek katkısı, ödüle konan paradan elde edilen faizin Akademi tarafından kullanılması oldu. Örneğin, 1910'lu yıllarda bu parayla Göttingen Üniversitesi'nin matematik bölümü başkanları (Klein, Hilbert, Minkowski) Poincaré'yi Göttingen'e çağırıp altı konuşma verdirdiler. 1948'den beri paraya dokunulmadı ama.

Umarım bu bilgiler işinize yarar. Başka sorularınız varsa ve yanıtlayabilirsem sevinirim.

Saygılarımla.

F. Schlichting

Sonlu Oyunlar

Bu kitapta sık sık oyunları konu edeceğiz. Oyunları sonlu ve sonsuz oyunlar diye ikiye ayıracağız. Sonsuz oyunları da ilerde ikiye ayıracağız: Uygulamada sonsuza dek sürebilen ve süremeyen oyunlar. Şimdilik sonlu oyunları konu edelim.

Satranç sonlu bir oyundur. Ancak satrancın sonlu olması için özel kurallar konmuştur. Örneğin, “bilmemkaç hamlede piyonlara dokunulmazsa oyun berabere biter” diye bir kural vardır. Bu kural olmasaydı, örneğin yalnızca iki şahın kaldığı oyunlar sonsuza değin sürerdi.

Piştî, briç gibi oyunlar da sonludur. Genellikle kâğıt oyunları sonludur. Sözünü ettiğimiz oyunların sonlu olduğunu kanıtlamak oldukça kolaydır, kâğıt sayısı sonludur ve gittikçe azalır.

Eğer bir oyunun her anında her oyuncunun yapabileceği sonlu tane hamle varsa ve oyunun sürebileceği hamle sayısı sınırlıysa, o oyuna sonlu oyun denir.

Kimi oyunun bitip bitmeyeceğini önceden kestirmek pek kolay değildir. Hatta önsezinin bile yetersiz kaldığı olabilir. Önsezi kazanmak ve teoremin doğruluğuna kendilerini inandırmak için matematikçiler sık sık deneye başvururlar. Bu yöntemi bir oyun için kullanacağız.

İki kişi arasında oynanan şu oyunu ele alalım: İki oyuncu

yazı-tura atıyor. Yazı gelirse birinci oyuncu, tura gelirse ikinci oyuncu kazanacak. Birinci oyuncu oyunun başında ortaya 1 lira koyuyor. Kaybettikçe ortaya koyduğu parayı iki katı artırıyor. Örneğin, ilk atışta kaybederse ikinci atışta ortaya 2 koyuyor. Bu atışta da kaybederse üçüncü atışta ortaya 4 koyuyor. Gene kaybederse 8 koyacak. Kazanınca artırmayı durduruyor ve bir sonraki atışta ortaya 1 lira koyuyor. Oyun böyle sürüyor. İkinci oyuncu para alıp vermekle yetiniyor. Eğer iki oyuncudan birinde para kalmazsa ya da birinci oyuncu açıkladığımız stratejisini sürdüremezse oyun bitiyor.

Bu oyun bitmemelik eder mi? Yani bu son derece yalın oyun sonlu bir oyun mudur?

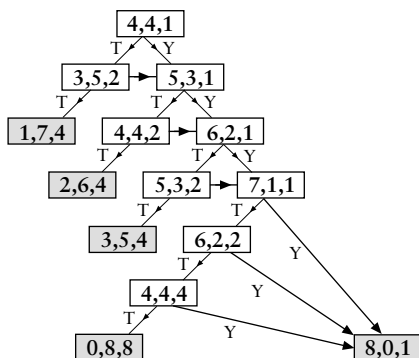
Oyunun başında her iki oyuncunun da dörder lirası olduğunu varsayalım. Oyunun başında birinci oyuncu 1 lira ortaya sürüyor. Bu duruma (4, 4, 1) durumu diyelim. Buradaki birinci sayı, birinci oyuncunun cebindeki para; ikinci sayı, ikinci oyuncunun cebindeki para; üçüncü sayıysa ortaya sürülen para. Bu durumda tura gelirse, yani birinci oyuncu kaybederse (3, 5, 2) durumuna geçeceğiz; çünkü birinci oyuncunun 3 lirası kalacak, ikinci oyuncunun 5 lirası olacak ve ortaya sürülen para 2 lira olacak. Bir kez daha tura gelirse, (1, 7, 4) durumuna ulaşırız ve bu durumda oyun biter; çünkü bu durumda birinci oyuncu 4 lira ortaya koymalıdır ve 4 lirası yoktur.

Örneğin durmadan bir yazı, bir tura gelirse oyun biter mi? İlk oyunda birinci oyuncu bir kazanır. Ama bundan sonraki oyunlarda bir kaybeder, iki kazanır, bir kaybeder, iki kazanır... Dolayısıyla birinci oyuncu bu varsayım ile kazanır.

Yukarıdaki örnekte oyun bitiyor ama oyunun bitmeyebileceği başka zar atışları olabilir.

Bu oyun her oynandığında biter mi ve eğer öyleyse bu oyunun her oynandığında bittiğini kanıtlayabilir miyiz? Yoksa kimileyin bitmeyip sonsuza değin sürdüğü olur mu ve bu durumda hangi yazı-tura atışlarıyla sonsuza değin sürer?

Bu soruları yanıtlamak için oyunun bir şemasını çıkarabiliriz. En tepeye (4, 4, 1) yazalım. Bu oyunun birinci durumu. Bu durumdan aşağı doğru sağlı sollu iki ok çıkaralım: tura oku ve yazı oku. Soldaki ok tura geldiğini, yani birinci oyuncunun kaybettiğini, sağdaki oksa yazı geldiğini, yani birinci oyuncunun kazandığını gösteriyor. Sol okun ucuna birinci oyuncu kaybettiğinde varacağımız durumu, yani (3, 5, 2), yazalım. Sağ okun ucunaysa birinci oyuncu kazandığında varılacak durumu yazalım: (5, 3, 1). Birinci oyuncu stratejisini sürdüremediği durumlardan ok çıkmaz, bu durumlarda oyun bitmiştir. İşte oyunun şeması:



Gri karelerde oyun bitmiştir.

Bu şema sonlu bir oyunun şemasıdır, çünkü okları izleyerek bir döngü elde edemeyiz. Okların gösterdiği yolları izlediğimizde son durumlardan birine erişiriz.

Oyuna her iki oyuncu da dörder lirayla başladığında oyun sonlu olduğunu gördük, en fazla dokuz para atışında oyun biter (en uzun oyunlar TYTYTYTTY ve TYTYTYTTT atılan oyunlar). Okur oyunu başka para durumlarından da başlatabilir. Her seferinde oyunun sonlu olduğunu görecektir. “Demek ki,” diye düşünür matematikçi bu aşamada, “bu oyun bitmeli!” Arkasından soruyu genel olarak yanıtlar:

Teorem. *Oyuncular oyuna kaç parayla başlarsa başlasınlar yukarıdaki oyun biter¹.*

Kanıt: Birinci oyuncu hep kaybederse oyun elbette biter. Birinci oyuncunun peşpeşe n kez kaybettiğini ama bir sonraki $(n + 1)$ 'inci atışta kazandığını varsayalım. İlk n atışta, birinci oyuncu,

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1}$$

lira kaybetmiş olacaktır. Bu sayıya S_n diyelim:

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1}. \quad (1)$$

S_n sayısını hesaplayalım. (1) eşitliğinin sağındaki ve solundaki terimleri 2'yle çarpacak olursak,

$$2S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} + 2^n \quad (2)$$

eşitliğini buluruz. (1) eşitliğini (2)'den çıkaralım. Sol tarafta $2S_n - S_n$, yani S_n buluruz. Sağ tarafta ise hemen hemen bütün terimler sadeleşir ve geriye $2^n - 1$ kalır. Dolayısıyla $S_n = 2^n - 1$ 'dir. Demek ki, birinci oyuncu peşpeşe n kez kaybederse, $2^n - 1$ lira kaybedecektir. Ama bir sonraki atışta, yani $(n + 1)$ 'inci atışta kazandığında 2^n , yani toplam kaybettiklerinin bir fazlasını kazanacaktır. Dolayısıyla, birinci oyuncu her kazanışında, daha önce kaybettiklerini çıkardığı gibi, 1 lira da kazanca geçecektir. Bu ne demektir? Birinci oyuncu oyunu kaybetmedikçe 1 lira kazanmayı sürdürecektir ve bir zaman sonra ikinci oyuncunun bütün parasını ütecek demektir.

Teoremimiz kanıtlanmıştır. □

Bu oyunu ve buna benzer oyunları ilerde de söz konusu yapacağız.

Soru: *Bu oyunun en fazla kaç para atışında biteceğini bulabilir misiniz?*

1 Bu güzel kanıt için Sinan Sertöz'e teşekkür ederim.

5.33487336e-03	5.0099999e-03	6.6746186e-03	8.333933e-03	1.0000300e-02	1.1687097e-02	1.3321770e-02	1.5000335e-02	1.6666967e-02	1.8333660e-02
5.3485156e-03	5.0289191e-03	6.6744731e-03	8.3337181e-03	1.0004999e-02	1.1687032e-02	1.3320760e-02	1.5000300e-02	1.6666966e-02	1.8333658e-02
5.3621580e-03	5.0478423e-03	6.6852904e-03	8.3480191e-03	1.0012499e-02	1.1687376e-02	1.3324270e-02	1.5000383e-02	1.6667166e-02	1.8334016e-02
5.3758004e-03	5.0667655e-03	6.7001335e-03	8.3628371e-03	1.0020000e-02	1.1687720e-02	1.3327780e-02	1.5000466e-02	1.6667366e-02	1.8334374e-02
5.3894428e-03	5.0856887e-03	6.7144286e-03	8.3776551e-03	1.0027500e-02	1.1688064e-02	1.3331290e-02	1.5000549e-02	1.6667566e-02	1.8334732e-02
5.4030852e-03	5.1046119e-03	6.7287237e-03	8.3924731e-03	1.0035000e-02	1.1688408e-02	1.3334800e-02	1.5000632e-02	1.6667766e-02	1.8335090e-02
5.4167276e-03	5.1235351e-03	6.7430188e-03	8.4072911e-03	1.0042500e-02	1.1688752e-02	1.3338310e-02	1.5000715e-02	1.6667966e-02	1.8335448e-02
5.4303700e-03	5.1424583e-03	6.7573139e-03	8.4221091e-03	1.0050000e-02	1.1689096e-02	1.3341820e-02	1.5000798e-02	1.6668166e-02	1.8335806e-02
5.4440124e-03	5.1613815e-03	6.7716090e-03	8.4369271e-03	1.0057500e-02	1.1689440e-02	1.3345330e-02	1.5000881e-02	1.6668366e-02	1.8336164e-02
5.4576548e-03	5.1803047e-03	6.7859041e-03	8.4517451e-03	1.0065000e-02	1.1689784e-02	1.3348840e-02	1.5000964e-02	1.6668566e-02	1.8336522e-02
5.4712972e-03	5.2009279e-03	6.8001992e-03	8.4665631e-03	1.0072500e-02	1.1690128e-02	1.3352350e-02	1.5001047e-02	1.6668766e-02	1.8336880e-02
5.4849396e-03	5.2215511e-03	6.8144943e-03	8.4813811e-03	1.0080000e-02	1.1690472e-02	1.3355860e-02	1.5001130e-02	1.6668966e-02	1.8337238e-02
5.4985820e-03	5.2421743e-03	6.8283794e-03	8.4961991e-03	1.0087500e-02	1.1690816e-02	1.3359370e-02	1.5001213e-02	1.6669166e-02	1.8337596e-02
5.5122244e-03	5.2627975e-03	6.8422645e-03	8.5110171e-03	1.0095000e-02	1.1691160e-02	1.3362880e-02	1.5001296e-02	1.6669366e-02	1.8337954e-02
5.5258668e-03	5.2834207e-03	6.8561496e-03	8.5258351e-03	1.0102500e-02	1.1691504e-02	1.3366390e-02	1.5001379e-02	1.6669566e-02	1.8338312e-02
5.5395092e-03	5.3040439e-03	6.8700347e-03	8.5406531e-03	1.0110000e-02	1.1691848e-02	1.3369900e-02	1.5001462e-02	1.6669766e-02	1.8338670e-02
5.5531516e-03	5.3246671e-03	6.8839198e-03	8.5554711e-03	1.0117500e-02	1.1692192e-02	1.3373410e-02	1.5001545e-02	1.6669966e-02	1.8339028e-02
5.5667940e-03	5.3452903e-03	6.8978049e-03	8.5702891e-03	1.0125000e-02	1.1692536e-02	1.3376920e-02	1.5001628e-02	1.6670166e-02	1.8339386e-02
5.5804364e-03	5.3659135e-03	6.9116900e-03	8.5851071e-03	1.0132500e-02	1.1692880e-02	1.3380430e-02	1.5001711e-02	1.6670366e-02	1.8339744e-02
5.5940788e-03	5.3865367e-03	6.9255751e-03	8.5999251e-03	1.0140000e-02	1.1693224e-02	1.3383940e-02	1.5001794e-02	1.6670566e-02	1.8340102e-02
5.6077212e-03	5.4071599e-03	6.9394602e-03	8.6147431e-03	1.0147500e-02	1.1693568e-02	1.3387450e-02	1.5001877e-02	1.6670766e-02	1.8340460e-02
5.6213636e-03	5.4277831e-03	6.9533453e-03	8.6295611e-03	1.0155000e-02	1.1693912e-02	1.3390960e-02	1.5001960e-02	1.6670966e-02	1.8340818e-02
5.6350060e-03	5.4484063e-03	6.9672304e-03	8.6443791e-03	1.0162500e-02	1.1694256e-02	1.3394470e-02	1.5002043e-02	1.6671166e-02	1.8341176e-02
5.6486484e-03	5.4690295e-03	6.9811155e-03	8.6591971e-03	1.0170000e-02	1.1694600e-02	1.3397980e-02	1.5002126e-02	1.6671366e-02	1.8341534e-02
5.6622908e-03	5.4896527e-03	6.9950006e-03	8.6740151e-03	1.0177500e-02	1.1694944e-02	1.3401490e-02	1.5002209e-02	1.6671566e-02	1.8341892e-02
5.6759332e-03	5.5102759e-03	7.0088857e-03	8.6888331e-03	1.0185000e-02	1.1695288e-02	1.3405000e-02	1.5002292e-02	1.6671766e-02	1.8342250e-02
5.6895756e-03	5.5308991e-03	7.0227708e-03	8.7036511e-03	1.0192500e-02	1.1695632e-02	1.3408510e-02	1.5002375e-02	1.6671966e-02	1.8342608e-02
5.7032180e-03	5.5515223e-03	7.0366559e-03	8.7184691e-03	1.0200000e-02	1.1695976e-02	1.3412020e-02	1.5002458e-02	1.6672166e-02	1.8342966e-02
5.7168604e-03	5.5721455e-03	7.0505410e-03	8.7332871e-03	1.0207500e-02	1.1696320e-02	1.3415530e-02	1.5002541e-02	1.6672366e-02	1.8343324e-02
5.7305028e-03	5.5927687e-03	7.0644261e-03	8.7481051e-03	1.0215000e-02	1.1696664e-02	1.3419040e-02	1.5002624e-02	1.6672566e-02	1.8343682e-02
5.7441452e-03	5.6133919e-03	7.0783112e-03	8.7629231e-03	1.0222500e-02	1.1697008e-02	1.3422550e-02	1.5002707e-02	1.6672766e-02	1.8344040e-02
5.7577876e-03	5.6340151e-03	7.0921963e-03	8.7777411e-03	1.0230000e-02	1.1697352e-02	1.3426060e-02	1.5002790e-02	1.6672966e-02	1.8344398e-02
5.7714300e-03	5.6546383e-03	7.1060814e-03	8.7925591e-03	1.0237500e-02	1.1697696e-02	1.3429570e-02	1.5002873e-02	1.6673166e-02	1.8344756e-02
5.7850724e-03	5.6752615e-03	7.1199665e-03	8.8073771e-03	1.0245000e-02	1.1698040e-02	1.3433080e-02	1.5002956e-02	1.6673366e-02	1.8345114e-02
5.7987148e-03	5.6958847e-03	7.1338516e-03	8.8221951e-03	1.0252500e-02	1.1698384e-02	1.3436590e-02	1.5003039e-02	1.6673566e-02	1.8345472e-02
5.8123572e-03	5.7165079e-03	7.1477367e-03	8.8370131e-03	1.0260000e-02	1.1698728e-02	1.3440100e-02	1.5003122e-02	1.6673766e-02	1.8345830e-02
5.8260000e-03	5.7371311e-03	7.1616218e-03	8.8518311e-03	1.0267500e-02	1.1699072e-02	1.3443610e-02	1.5003205e-02	1.6673966e-02	1.8346188e-02
5.8396424e-03	5.7577543e-03	7.1755069e-03	8.8666491e-03	1.0275000e-02	1.1699416e-02	1.3447120e-02	1.5003288e-02	1.6674166e-02	1.8346546e-02
5.8532848e-03	5.7783775e-03	7.1893920e-03	8.8814671e-03	1.0282500e-02	1.1699760e-02	1.3450630e-02	1.5003371e-02	1.6674366e-02	1.8346904e-02
5.8669272e-03	5.7989999e-03	7.2032771e-03	8.8962851e-03	1.0290000e-02	1.1700104e-02	1.3454140e-02	1.5003454e-02	1.6674566e-02	1.8347262e-02
5.8805696e-03	5.8196231e-03	7.2171622e-03	8.9111031e-03	1.0297500e-02	1.1700448e-02	1.3457650e-02	1.5003537e-02	1.6674766e-02	1.8347620e-02
5.8942120e-03	5.8402463e-03	7.2310473e-03	8.9259211e-03	1.0305000e-02	1.1700792e-02	1.3461160e-02	1.5003620e-02	1.6674966e-02	1.8347978e-02
5.9078544e-03	5.8608695e-03	7.2449324e-03	8.9407391e-03	1.0312500e-02	1.1701136e-02	1.3464670e-02	1.5003703e-02	1.6675166e-02	1.8348336e-02
5.9214968e-03	5.8814927e-03	7.2588175e-03	8.9555571e-03	1.0320000e-02	1.1701480e-02	1.3468180e-02	1.5003786e-02	1.6675366e-02	1.8348694e-02
5.9351392e-03	5.9021159e-03	7.2727026e-03	8.9703751e-03	1.0327500e-02	1.1701824e-02	1.3471690e-02	1.5003869e-02	1.6675566e-02	1.8349052e-02
5.9487816e-03	5.9227391e-03	7.2865877e-03	8.9851931e-03	1.0335000e-02	1.1702168e-02	1.3475200e-02	1.5003952e-02	1.6675766e-02	1.8349410e-02
5.9624240e-03	5.9433623e-03	7.3004728e-03	8.999999e-03	1.0342500e-02	1.1702512e-02	1.3478710e-02	1.5004035e-02	1.6675966e-02	1.8349768e-02
5.9760664e-03	5.9639855e-03	7.3143579e-03	9.0148171e-03	1.0350000e-02	1.1702856e-02	1.3482220e-02	1.5004118e-02	1.6676166e-02	1.8350126e-02
5.9897088e-03	5.9846087e-03	7.3282430e-03	9.0296351e-03	1.0357500e-02	1.1703200e-02	1.3485730e-02	1.5004201e-02	1.6676366e-02	1.8350484e-02
6.0033512e-03	6.0052319e-03	7.3421281e-03	9.0444531e-03	1.0365000e-02	1.1703544e-02	1.3489240e-02	1.5004284e-02	1.6676566e-02	1.8350842e-02
6.0169936e-03	6.0258551e-03	7.3560132e-03	9.0592711e-03	1.0372500e-02	1.1703888e-02	1.3492750e-02	1.5004367e-02	1.6676766e-02	1.8351200e-02
6.0306360e-03	6.0464783e-03	7.3698983e-03	9.0740891e-03	1.0380000e-02	1.1704232e-02	1.3496260e-02	1.5004450e-02	1.6676966e-02	1.8351558e-02
6.0442784e-03	6.0671015e-03	7.3837834e-03	9.0889071e-03	1.0387500e-02	1.1704576e-02	1.3500000e-02	1.5004533e-02	1.6677166e-02	1.8351916e-02
6.0579208e-03	6.0877247e-03	7.3976685e-03	9.1037251e-03	1.0395000e-02	1.1704920e-02	1.3503740e-02	1.5004616e-02	1.6677366e-02	1.8352274e-02
6.0715632e-03	6.1083479e-03	7.4115536e-03	9.1185431e-03	1.0402500e-02	1.1705264e-02	1.3507480e-02	1.5004699e-02	1.6677566e-02	1.8352632e-02
6.0852056e-03	6.1289711e-03	7.4254387e-03	9.1333611e-03	1.0410000e-02	1.1705608e-02	1.3511220e-02	1.5004782e-02	1.6677766e-02	1.8352990e-02
6.0988480e-03	6.1495943e-03	7.4393238e-03	9.1481791e-03	1.0417500e-02	1.1705952e-02	1.3514960e-02	1.5004865e-02	1.6677966e-02	1.8353348e-02
6.1124904e-03	6.1702175e-03	7.4532089e-03	9.1629971e-03	1.0425000e-02	1.1706296e-02	1.3518700e-02	1.5004948e-02	1.6678166e-02	1.8353706e-02
6.1261328e-03	6.1908407e-03	7.4670940e-03	9.1778151e-03	1.0432500e-02	1.1706640e-02	1.3522440e-02	1.5005031e-02	1.6678366e-02	1.8354064e-02
6.1397752e-03	6.2114639e-03	7.4809791e-03	9.1926331e-03	1.0440000e-02	1.1706984e-02	1.3526180e-02	1.5005114e-02	1.6678566e-02	1.8354422e-02
6.1534176e-03	6.2320871e-03	7.4948642e-03	9.2074511e-03	1.0447500e-02	1.1707328e-02	1.3529920e-02	1.5005197e-02	1.6678766e-02	1.8354780e-02
6.1670600e-03	6.2527103e-03	7.5087493e-03	9.2222691e-03	1.0455000e-02	1.1707672e-02	1.3533660e-02	1.5005280e-02	1.6678966e-02	1.8355138e-02
6.1807024e-03	6.2733335e-03	7.5226344e-03	9.2370871e-03	1.0462500e-02	1.1708016e-02	1.3537400e-02	1.5005363e-02	1.6679166e-02	1.8355496e-02
6.1943448e-03	6.2939567e-03	7.5365195e-03	9.2519051e-03	1.0470000e-02	1.1708360e-02	1.3541140e-02	1.5005446e-02	1.6679366e-02	1.8355854e-02
6.2079872e-03	6.3145799e-03	7.5504046e-03	9.2667231e-03	1.0477500e-02	1.1708704e-02	1.3544880e-02	1.5005529e-02	1.6679566e-02	1.8356212e-02
6.2216296e-03	6.3352031e-03	7.5642897e-03	9.2815411e-03	1.0485000e-02	1.1709048e-02	1.3548620e-02	1.5005612e-02	1.6679766e-02	1.8356570e-02
6.2352720e-03	6.3558263e-03	7.5781748e-03	9.2963591e-03	1.0492500e-02	1.1709392e-02	1.3552360e-02	1.5005695e-02		

Beklenti ve Kumarhane Oyunları

Bir oyunun beklentisi, bir oyuncunun o oyunda ortalama ne kadar kazanacağını ya da kaybedeceğini gösteren bir sayıdır. Kumar oynamaya yeltenen her kişi beklentinin ne demek olduğunu bilmelidir.

Şimdi kumarhane müdürü olan bir çocukluk arkadaşına rastladım bugün. Kumarhane müdürü olduğu için kumarhanelerde oynayamadığından yakındı. Oynasaymış, rulette dünyanın parasını kazanabilirmiş...

Şaştım kaldım. Kumarhane müdürü olan biri ruletin beklentisinin negatif olduğunu bilmiyor... İyi ki kumar oynaması idare tarafından yasaklanmış!

Bir örnekle beklentinin nasıl hesaplandığını açıklayayım. Diyelim bir piyango bileti aldınız. Piyango bileti 10 lira. Toplam 100 bilet olduğunu varsayalım. Ve diyelim,

1 bilete 500 lira çıkacak,

2 bilete 100 lira çıkacak ve

5 bilete de 10 lira (yani amorti) çıkacak.

Aynı bilete iki ya da daha fazla ikramiye çıkmasına kuralların izin vermediğini varsayalım. Bir piyango biletinden beklentiniz nedir? Yüzde 1 olasılıkla 500 lira ikramiye kazanacaksınız ve net kârınız 490 lira olacak ($490 = 500 - 10$); yüzde 2 olasılıkla

90 lira kazanacaksınız ($90 = 100 - 10$); yüzde 5 olasılıkla amorti çıkacak, yani ne kazanacak ne de kaybedeceksiniz; geri kalan yüzde 92 olasılıkla aldığınız bilete hiçbir şey çıkmayacak ve bilete verdiğiniz 10 lira yanacak. Biletinizin beklentisi:

$490 \times (1/190) + 90 \times (2/100) + 0 \times (5/100) + (-10) \times (92/100) = -2,5$ dir.

Beklenti negatif olduğundan piyango bileti almamak daha akıllı bir davranıştır.

Yüz biletin yüzünü de alsaydınız, bin lira ödeyip, $500 + 200 + 50 = 750$ kazanacak ve 250 lira zarar edecektiniz, yani bilet başına 2,5 lira kaybedecektiniz, beklenti kadar...

Bir önceki yazıda konumuz olan (4, 4, 1) oyununun beklentisi kaçtır? O yazıdaki şemaya bakıp hesaplayalım. 3 lira kaybetme olasılığımız (yani oyundan 1 lirayla kalkma olasılığımız) $1/2 \times 1/2 = 1/4$ 'tür, çünkü (1, 7, 4) durumuna ancak ilk iki atışta üstüste tura gelirse erişebiliriz. 2 lira kaybetme olasılığımız $1/8 + 1/16$ 'dir, çünkü (2, 6, 4) durumuna YTT ve TYTT atarak erişebiliriz. Okur bütün olasılıkları hesaplarsa beklentinin,

$(-3 \times 1/4) + (-2 \times 3/16) + (-1 \times 9/64) + (-4 \times 27/512) + (4 \times 189/512) = 0$ olduğunu bulur. Demek ki bu oyunun beklentisi 0'dır. Oynansa da olur, oynanmasa da...

Kumarhanelerde kumarhaneye karşı oynanan hemen hemen her oyunun beklentisi negatiftir.

Örneğin, ruletin beklentisi $-1/37$ 'dir (eğer rulet masasında bir sıfır varsa $-1/37$ 'dir, iki sıfır varsa beklenti daha da kötüdür.) Yani ruleti çok oynarsanız, nasıl oynarsanız oynayın, evet, nasıl oynarsanız oynayın, masaya yatırdığınız paranın 37'de birini kaybedersiniz.



Diyeelim rulet masasında paranızı 5'e yatırdınız, diyeelim 1 lira koydunuz. Top döndü döndü... Top 5'e düşerse 36 lira alırsınız, yani 35 lira kazanırsınız.

Top 5'e düşmezse, ortaya koyduğunuz 1 lira deve olur. Rulette (0 dahil olmak üzere) 37 rakam olduğundan, topun 5'e düşme olasılığı 1/37'dir. Demek ki, bu stratejiyle beklentiniz,

$$(1/37) \times 35 + (36/37) \times (-1) = -1/37$$

dir¹.

Diyelim kırmızılara 1 lira oynadınız. Kırmızı olan 18 sayı vardır (0'ın rengi yoktur, öbür renkler siyahtır.) Demek ki kırmızı gelme olasılığı 18/37'dir. Ve bu durumda size 2 lira ödenir, yani 1 lira kazanırsınız. Kırmızı gelmezse, ki 19/37 olasılıkla gelmez, koyduğunuz 1 lirayı kaybedersiniz. Bu stratejiyle beklentiniz,

$$(18/37) \times (1) + (19/37) \times (-1) = -1/37$$

dir. Gene aynı beklentiye bulduk.

Dediğim gibi, rulet oyununda ne yaparsanız yapın, isterseniz ağzınızla kuş tutmaya çalışın, ortaya koyduğunuz paranın 37'de birini (uzun dönemde) kaybetmeye mahkûmsunuz.

Bakara ve kumar makinalarının da beklentileri negatiftir.

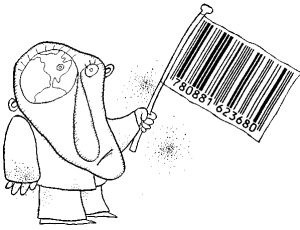
En rezaleti de kumar makinaları... Onların beklentileri daha da negatiftir... Kumarhaneci işine gelmeyen oyunu kumarhanesine koymaz ki...

Akıllı bir insan para kazanmak amacıyla kumarhanede oynamaz.

Eğer 21'in (blackjack'ın) kuralları oyuncudan yanaysa (örneğin 21'e 1,5 misli yerine 2 misli para ödüyorsa) ve oyuncu kâğıtları sayıyorsa (ki çoğu kumarhanede 21'de kâğıt saymak yasaktır, kapı dışarı ederler, oysa doğru dürüst kâğıt sayabilen üç beş kişi vardır yeryüzünde ve onlar da çok az kazanabilirler), o zaman oyuncunun beklentisi çok az da olsa pozitif olabilir. 21'in beklentisini matematiksel kesinlikle hesaplayamayız, çok karışık hesaplar yapmak gerekir. Ancak çeşitli stratejiler bilgisa-

1 Bazı rulet masalarında bir de ayrıca 00 vardır, o zaman beklenti daha da negatiftir.

yara milyonlarca kez oynatılarak deneysel bir sonuç elde edilebilir. Batı'da 21 üzerine birçok kitap yazılmıştır. O kitapları oku-



madan kumarhanede 21 oynamayın. Eğer kumarhane, 21'e yatırılan paranın en az iki mislini vermiyorsa kesinlikle o kumarhanede oynamamalısınız, çünkü 21'in beklentisini müşteriye pozitif yapan kumarhanenin 21'e

iki misli para ödemesidir. Birçok kumarhane 21'e yalnızca bir buçuk misli para veriyor.

Üstüne basa basa söyleyeyim: Profesyonel kumarbazlar bile 21 oyunundan zengin olmamışlardır. Kim aksini iddia ediyorsa, ki var, hem de çok var, ya yalan söylüyordur ya da yeterince oynamamıştır.

Kumarhanelerde oynanan pokere gelince... Poker, kumarhanelerde kumarhaneye karşı değil, öbür oyunculara karşı oynanır. Ancak kumarhanenin aldığı yüzde iyi bir poker oyuncusunun bile beklentisini negatif yapar.

Sonuç olarak, kumarhanelerde yalnızca 21 oynamanızı öneririm. O da iki koşulla:

1) Kumarhanenin kuralları oyuncudan yana olacak (en azından 21'e iki misli para verecek.)

2) Çok para kazanmak için değil, çok para kaybetmeden hoşça vakit geçirmek için ve kırk yılın başı oynayacaksınız.

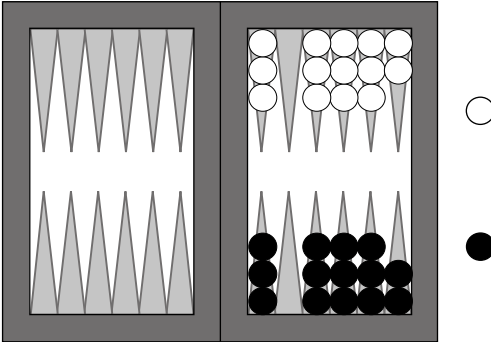
Milli Piyango, Kazı Kazan ve Spor Toto'nun da beklentileri negatiftir. Oynamaması gerekir.

6/49 adı verilen loto oyununun beklentisi çoğunlukla negatiftir. Ancak, birkaç hafta üstüste 6 bilen çıkmamışsa ve ikramiye birike birike olağanüstü boyutlara varmışsa, işte o zaman beklenti belki pozitif olabilir... Ama o zaman da o kadar çok kişi oynar ki oyunu, 6'yı birkaç kişi bilir ve büyük ikramiye paylaşılır ve beklenti gene negatif olur.

Tavla Üzerine Bir Soru

Sonlu Oyunlar yazımızda sonlu oyunlardan söz etmiştik. Bu yazıda **kuramsal** olarak sonsuza dek uzayabilecek ve oynandığında, yani uygulamada, bitip bitmeyeceğinden emin olmadığım bir oyundan sözedeceğiz. Hepimizin bildiği bir oyun bu: Tavla.

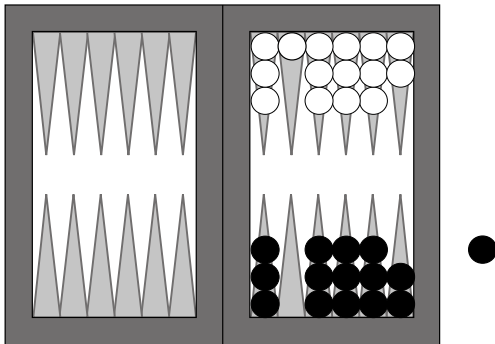
Tavla sonlu bir oyun mudur? Tavlânın uzun sürdüğü olabilir, ama bugüne dek oynadığınız her tavla oyunu sona ermiştir. Hiç yenişmeden günlerce (bir el) tavla oynayana raslamamışsınızdır. Oysa tavla kuramsal olarak sonsuz bir oyundur. Yani kuramsal olarak sonsuza dek sürebilir. Örneğin, her iki oyuncunun da birer kırığı ve birer kapısı olabilir ve her iki oyuncu da (kuramsal olarak) sonsuza dek gele atabilirler. Tek bir kapıya sonsuza dek gele atma olasılığı 0'dır elbet.



Tavlanın (kuramsal olarak) sonsuza dek sürebileceği örnekleri artırabiliriz. Yukarıdaki durumu alalım:

Her iki oyuncunun da birer kırığı var ve her ikisi de penç (5) kapısı dışında bütün kapıları almışlar. Bu durumda her iki oyuncu da durmadan gele atarsa oyun sonsuza dek sürer. Durmadan sonsuza dek gele atmanın, yani hiç penç atamamanın olasılığı - eğer zarlar yüzde yüz olasılıkla penç gelecek şekilde hileli değilse - sıfırdır¹. Yani kuramsal olarak sonsuza dek gele atılabilirse bile, uygulamada atılamaz. Kuramsal olarak sonsuz olabilen tavla oyunu işte bu yüzden uygulamada biter (sanıyorum biter, kanıtım yok!)

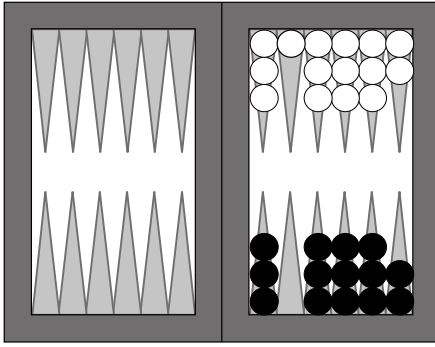
Buna benzer örnekleri çoğaltabiliriz. İşte bir tane daha:



Yukardaki durumda (sıra kimde olursa olsun) her iki oyuncuya da durmadan dübeş (5-5) gelirse oyun sonsuza dek sürer. Bunun olasılığı da sıfırdır elbet.

Tavlanın sonsuza dek sürebileceği durumlara üçüncü bir örnek verelim. Bu örnek yukardaki örneklerden değişik olacak: oyuncular isteyerek (ama gene zarın yardımıyla) sonsuza dek sürdürecekler oyunu:

1 Bu savımın doğruluğu *Yüzde Yüz Sonlu Sonsuz Oyunlar* adlı yazıdan çıkar. (Bkz. sayfa 131.)



Yukardaki oyunda siyahın bir kırığı var ve zar atma sırası onda. Dübeş (5-5) geldi. Diyelim, siyah, kırık pulu dört kez 5 oynadı: Beyazın penç hanesindeki pulunu kırıp kendi penç hanesine yattı. Doğru hamle bu değil ama varsayalım ki siyah böyle oynadı. Şimdi sıra beyazda. Beyaza da dübeş gelsin ve beyaz da kırık taşını dört kez 5 oynasın. Bundan sonra her iki oyuncuya durmadan dübeş gelsin ve yukardaki hamleleri yinelesinler. Oyun sonsuza dek sürer. Ama hile yapılmadan sonsuza dek dübeş gelme olasılığı da sıfırdır.

Tavla - en azından kuramsal ve varsayımsal olarak - çeşitli biçimlerde sonsuza dek sürebilir:

1) Yukardaki ilk iki örnekte olduğu gibi oyuncuların bir seçeneği olmayabilir, oyuncular ne oynarlarsa oynasınlar oyun sonsuza dek sürebilir.

2) Yukardaki üçüncü örnekte olduğu gibi oyuncular bilerek ve isteyerek oyunu sonsuza dek sürdürebilirler.

Bir de şu ayrımı yapabiliriz:

a) Yukardaki her üç örnekte de olduğu gibi oyunun sonsuza dek sürmesi için oyuncular zardan yardım beklerler. Zar istedikleri gibi gelmezse, oyun sonsuza dek süremez.

b) Zar ne gelirse gelsin, oyun sonsuza dek sürebilir.

İlk iki örnek 1a şıkkının, üçüncü örnekse 2a şıkkının olabileceğini göstermektedir. a şıkkının olasılığı sıfırdır, yani zarların sonsuza dek istediğimiz gibi gelme olasılığı sıfırdır. Dolayısı

sıyla 1b ve 2b şıkları üzerine yoğunlaşmak yeterlidir.

1b şikkına bir örnek vermeye çalışayım (başaramayacağım, ama deneyeceğim.) İki oyuncu da altı kapıyı almış olsalar ve her iki oyuncunun da birer kırığı olsa, oyun sonsuza dek sürer. Ama tavlada (hile yapmadan) bu duruma erişilmez. Neden erişilmediğinin kanıtını okura bırakıyoruz.

1b ve 2b şıkları tavlada olabilir mi? Bilmiyorum. 1b şikkının olmaması “gerektiğini” deneyimle biliyoruz. Çünkü oynadığımız her tavla oyunu bitmiştir. Tavla genellikle on on beş dakikada, bilemediniz bir saatte biter. Tavla oyununun sonlu olduğunu deneyimle biliyoruz. Ancak bunun matematiksel kanıtını vermedikçe tavla oyununun **hep** biteceğini matematiksel kesinlikle söyleyemeyiz. Önsezimiz ve deneyimimiz 1b şikkının olamayacağını söylüyor. Ama önsezilerimizden öteye gitmeli ve bunun matematiksel bir kanıtını vermeliyiz. Önsezi, matematiğin vazgeçilmez öğelerindendir ama yeterli değildir.

Genellikle, matematikçi kanıtlayacağı teoremden önce kendi emin olur. Bunun yolu da önseziden geçer. Matematikçi sezgiyle vardığı sonucu daha sonra biçimselleştirmelidir, yani sonucun matematiksel bir kanıtını bulmalıdır. Öyle ki, bu biçimsel kanıtı okuyan hiç kimse kanıtın doğruluğundan en küçük bir kuşku duymasın.

2b şikkının olamayacağını söylemek pek kolay değil. Bir arkadaşınızla anlaşın ve oyunu bitirmemeye çalışarak tavla oynayın. Örneğin ikiniz de sık sık açık verin. Kazanmak için oynamayın. Kaybetmek için de oynamayın. Yalnızca oyunu sonsuza dek sürdürmek için oynayın. Göreceksiniz ki yeterince zamanınız olsa nerdeyse başaracaksınız².

2 Bu yazıyı okuyan bir arkadaşım, tavlının bitip bitmeyeceği konusunu babasına açmış. Arkadaşımın babası, tavlının her zaman -her iki oyuncu da kazanmak için oynasa bile- bitmeyeceğine inanabileceğini söylemiş. Çünkü, bir gün, çok uzun süren, hiç de biteceğe benzemeyen ve yarıda bırakmak zorunda kaldığı bir tavla oyunu oynamış.

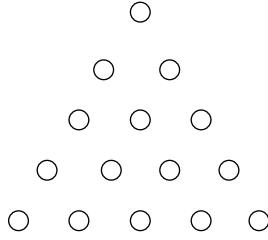
Matematikçi Hilesi

Matematik bölümünün tam karşısına yeni bir lokanta açılmış. Bana kalırsa kötü bir yer seçilmiş. Kaç kişi gider ki o lokantaya? Bizim bölümden başka bir tek bina yok çevrede. Yakında batar. Batmadan gidelim dedik ailecek. Gittik de. Her masanın üstüne bir oyun koymuş lokanta sahibi. Herhalde çocukların oyuna dalıp anababalarını rahat bırakmaları düşüncesiyle konmuş olacak. Güzel bir düşünce. Nitekim öyle de oldu. Çocuklar lokantaya girer girmez oyuna daldılar.

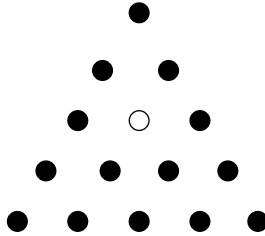


Oyuna şöyle bir göz attım. İlginç bir oyun. Kendimi bildim bileli oyuna düşkünümdür. “Yemekte oyun oynanmadığını bilmiyor musunuz?” bahanesiyle oyuncuğu çocukların elinden alıp eşimle oynamaya başladık. Çocuklar da galiba o sırada “makarna savaşı” yaparak oyalanıyorlardı.

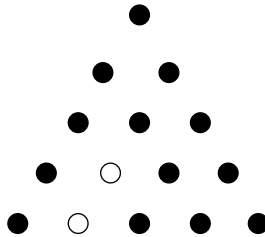
“Yalnızların Oyunu” diye adlandırılan bu oyun, adından da anlaşılacağı gibi, tek kişilik bir oyun. Tahtadan bir üçgenin üstüne $1 + 2 + 3 + 4 + 5$, yani 15 tane delik açılmış. Şöyle:



Bu deliklere girebilecek büyüklükte 14 çubuk var. Çubukları deliklere yerleştireceksiniz (deliklerden biri boş kalacak demek ki.) Örneğin şöyle (boş kalan deliği beyaz, çubuklu delikleri siyah olarak gösteriyorum):

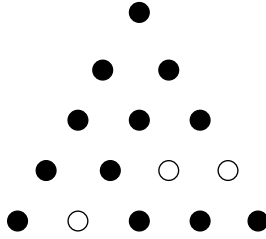


Yapabileceğiniz bir tür yasal hamle var: çubuklardan birini yanındaki ya da çaprazındaki çubuğun üstünden aşırıp bir sonraki deliğe sokabilirsiniz, ama bu hamleyi yapabilmeniz için çubuğun gireceği deliğin boş olması gerekir. Ve üstünden aşılacak çubuk oyundan çıkarılır. Örneğin yukardaki durumda, en alt sıradaki soldan ikinci çubuğu, kuzeydoğusundaki çubuğun üstünden aşırarak aşağıdaki durumu elde edebilirsiniz:



Bundan sonra, alttan ikinci sıranın en sağındaki çubuğu so-

lundaki çubuğun üstünden aşırabilirsiniz:



Gitgide çubuk sayısı azalır. Amaç olabildiğince az çubuk bırakmak. Oyunun arkasında şöyle yazıyor:

- Üç çubuk bırakan – eh! şöyle böyle – 10 puan
- İki çubuk bırakan – ortalamanın üstünde – 25 puan
- Bir çubuk bırakan – çok zeki – 50 puan
- Bir çubuğu oyunun başındaki boş delikte bırakan – çok parlak – 100 puan
- Hiçbiri kımıldayamayacak biçimde 8 çubuk bırakan – dâhi – 200 puan

Uzun bir süre “eh! şöyle böyle”ydik. Neden sonra “çok zeki” aşamasına geçebildik. Çok uğraşmamıza karşın “çok parlak” olmadık. Sıkıldık. “Dâhi” aşamasını denedik. Baktık “dâhilik” de kolay değil, hileye başvurduk. Başvurduğumuz hile, aslında matematikte sık kullanılan bir yöntemdir: kanıtlanacak teoreme son-dan başlanır. Yani kanıt sondan başa doğru bulunur. Örneğin, diyelim iki pozitif x ve y sayıları için,

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerekiyor. Kanıtlamak istediğimiz bu eşitsizliğin karesini alırsak,

$$x+y \leq x+2\sqrt{xy}+y$$

buluruz. Sadeleştirince de doğruluğunu bildiğimiz

$$0 \leq 2\sqrt{xy}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Kanıtı yazmak için yukarda elde ettiğimiz çıkarımları ters çevirmek gerekir:

$$0 \leq \sqrt{xy}$$

eşitsizliğinden

$$0 \leq 2\sqrt{xy}$$

eşitsizliğini çıkarırız. Bu eşitsizliğin soluna ve sağına $x + y$ ekleyerek,

$$x + y \leq x + 2\sqrt{xy} + y$$

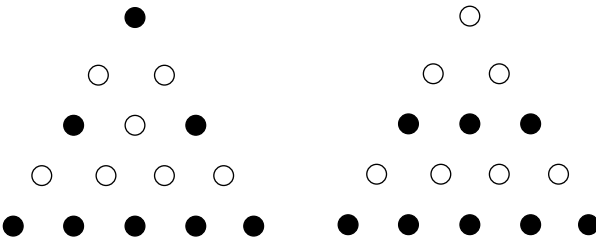
buluruz. Bu son eşitsizliğin sağ tarafındaki terim $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$ 'ye eşit. Demek ki

$$x + y \leq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2.$$

Şimdi iki tarafın da karekökünü alarak, dilediğimiz eşitsizliği kanıtlamış oluruz.

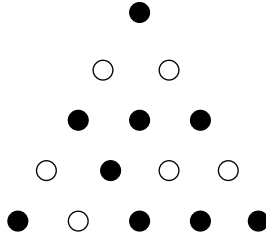
İşte başvurduğumuz hile bu yöntemden esinlenmişti.

Oyuna sondan başladık. Önce oyunun sonundaki durumların ne olabileceğini bulduk. Sekiz çubuğu, hiçbiri kıılmıdayamayacak biçimde nasıl yerleştirebilirdik? Kısa bir zaman sonra (simetrisi saymazsak) iki çözümün olduğunu kolaylıkla anladık:



Çözümleri saptadıktan sonra, bu çözümlerden bir önceki hamlelerin ne olabileceğine baktık. Örneğin, yukardaki solda-

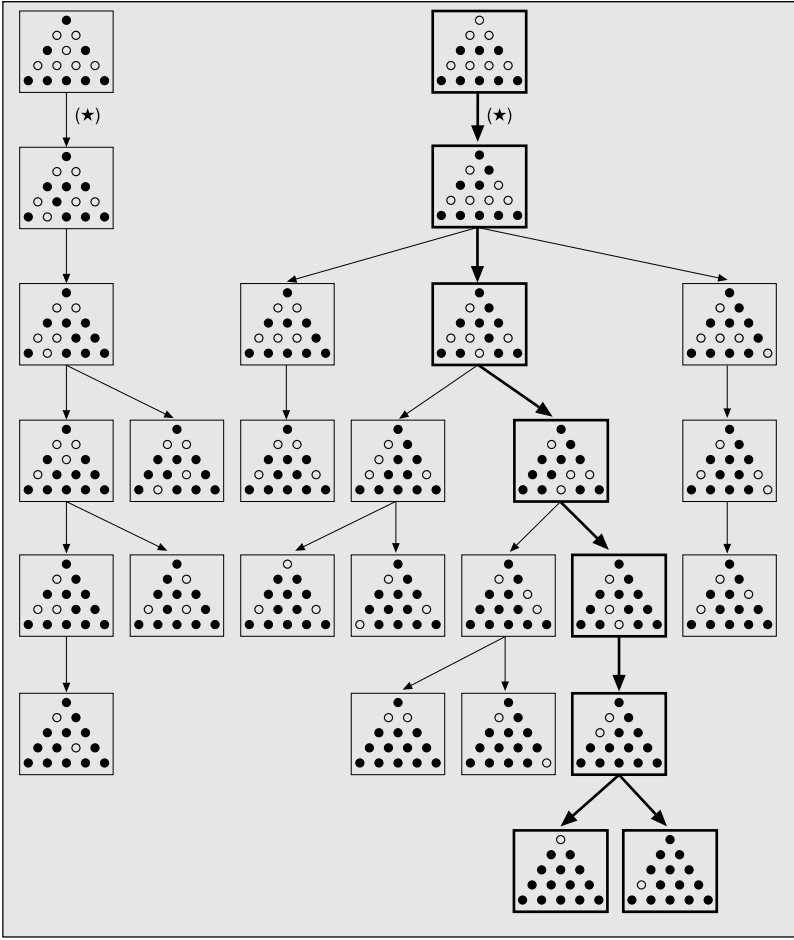
ki duruma gelebilmek için, en alt sıranın soldan ya ikinci ya da dördüncü çubuğu oynanmıştır. Demek ki bu durumdan bir önceki durum şöyle olabilir:



Sonra, teker teker daha önceki hamlelerimizin neler olabileceğini saptadık. Yani geriye doğru gittik. Toplam 14 çubuk var; demek ki 8 çubuk bırakmak için geriye doğru 6 hamle yapmamız gerekiyor. Oyunun tam bir şemasını çıkardık. Bir sonraki sayfada bu şemayı bulacaksınız¹. Kimileyin geriye gidemedik. Yani öyle bir duruma geldik ki, bir önceki hamle olamaz o durumda. O zaman durduk elbet. Ama, bir önceki hamle -ya da hamleler- oldukça, geriye gitmeyi sürdürdük. Geriye doğru altı hamle yapabilmemiz gerekiyordu; yaptık da. Koyu çerçeveli resimleri aşağıdan yukarıya doğru izleyerek “dâhi” unvanını elde ettik.

“Yalnızların Oyunu”nu satıyormuş lokantacı. Aldık elbet. Hem de dört tane birden aldık. Herkese bir tane... Daha sonra sık sık gittik bu lokantaya. Her seferinde bir başka oyun vardı. Hepsinde de zekâ ölçülüyordu: “Zehir gibisiniz!”, “Böylesi görülmemiş!”, “Aşkolsun!”, “Evrenin en zeki yaratığı!” “Çok, ama çok üstün zekâ!” Oyunlar da ucuz değil. Ama onca emekten sonra almamak olmuyor. Önceleri haftada bir gidiyorduk ailecek, sonra ben tek başıma kaçamaklar yapmaya başladım.

1 Yazının sonundaki şemada simetrik durumlar olduğunda, bu durumlardan yalnızca birini çizdim yer kazanmak için. İki simetrik durumdan birinin seçildiği yerlere (*) işareti koydum.



Bölümün de tam karşısında olduğundan gitmesi kolay oluyor. Ne zaman her gün gitmeye başladığımı tam olarak anımsamıyorum. Birdenbire olmadı ki. Yavaş yavaş alıştım. Bizim bölümden hocalar, öğrenciler de orda yiyorlar öğle yemeklerini. Hatta akşamları aileleriyle gelenler de var. Yemek parasından başka, bir de oyuncak parası öduyoruz... Günlerden bir gün, yine o lokantada “Dâhilerin dâhisi” olmaya çalışırken arka masadan bir konuşma kulağıma çarptı. Lokantanın sahibi bir

arkadaşıyla konuşuyordu. Arkadaşı,

– Eee? İşler nasıl? diye sordu.

– Yuvarlanıp gidiyoruz işte... diye yanıtladı lokantacı.

– Bütün lokanta işletenler topu attı, sen nasıl dayanıyorsun şaşıyorum...

– Yemekten pek kazanılmıyor doğrusu...

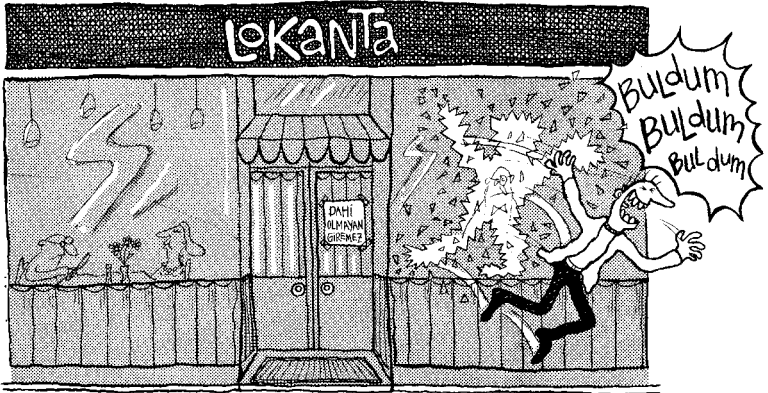
– Neden kazanılıyor ya?

– Oyuncaklardan...

– Oyuncaklardan mı?

– Oyuncaklardan ya! Şu karşıdaki binayı görüyor musun? İşte orası matematik bölümü. Matematikçilere gururlarını okşayacak oyuncaklar sunuyorum. Sözümona zekâ ölçen oyuncaklar. Sen bu matematikçileri bilmezsin. Dayanamazlar bu tür oyuncaklara, kazanmaya, övgülere, gururlarının okşanmasına...

Bir daha gitmedim o lokantaya. İftiraya dayanamam.



Saymadan Saymak

Bir tanımla başlayalım. Eğer n bir doğal sayıysa, $n!$ diye yazılan sayı $1 \times 2 \times \dots \times n$ sayısına eşittir. Yani, tanım gereği,

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n$$

dir. $n!$, “ n fortoriyel” diye okunur. Örneğin,

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$3! = 6$$

$$4! = 24$$

$$5! = 120$$

$$6! = 720$$

$$7! = 5040$$

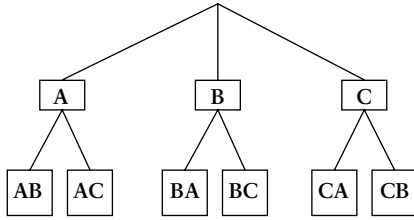
dir. $0! = 1$ olarak tanımlanır. Bu ilk bakışta pek doğal gelmeyen tanımın nedenini yazının ortalarında bulabilirsiniz.

Soru: Elimizde A , B ve C harfleri var ve bu harflerden iki değişik harfli (Türkçede ya da başka bir dilde anlamı olması gerekmez) sözcük üretmek istiyoruz. Kaç sözcük üretebiliriz?

Bu soruyu yanıtlamak için sözcükleri abece sırasına göre sıralayalım.

AB, AC, BC, BA, CA, CB .

Demek 6 sözcük üretebilirmişiz. Bu sözcüklerin oluşumunu şöyle de gösterebiliriz:



Önce ilk harfleri koyuyoruz: Sırasıyla A , B ve C . Sonra ikinci harfleri: eğer ilk harfimiz A ise, ikinci harf için iki seçeneğimiz var, B ve C . Dolayısıyla A budağına iki dal ekliyoruz: B ve C dallarını. Her üç dal için bunu yaptığımızdan, bu 3 harfle toplam $3 \times 2 = 6$ tane iki değişik harfli sözcük yazabileceğimizi görürüz.

Şimdi bu soruyu genelleştirelim.

Birinci Soru. *Elimizde n değişik harf var: $A_1, A_2, \dots, A_n$ harfleri. Bu n harften, r değişik harfli sözcükler üretmek istiyoruz (her harfi en çok bir kez kullanabiliriz.) Kaç sözcük üretebiliriz?*

Bu birinci soruya yanıt verebilmek için yukardaki gibi ters dönmüş bir ağaç yapalım. Bir sonraki sayfadaki şekilden izleyin. Ağacın en tepedeki ilk budağından aşağıya doğru n dal çıkar:

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

dalları. Bunlar sözcüklerin ilk harfleri. Bu dalların uçlarına $n - 1$ dal eklenir (ikinci harfler.) Örneğin A_1 dalına

$$A_2, \dots, A_n$$

dalları eklenir. Bu yeni dallar sırasıyla, iki harfli

$$A_1A_2, \dots, A_1A_n$$

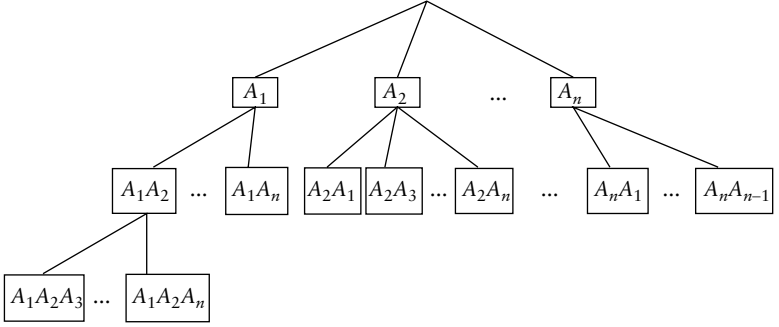
sözcüklerini oluştururlar. A_2 dalınaysa,

$$A_1, A_3, \dots, A_n$$

dalları eklenir ve böylece bu dalların ucunda

$$A_2A_1, A_2A_3, \dots, A_2A_n$$

sözcükleri oluşur. Şimdilik $n \times (n - 1)$ dal elde ettik. Demek ki iki harfli sözcük sayısı $n \times (n - 1)$ imiş. Ağacı sürdürelim.



Yukarda elde ettiğimiz her $n \times (n - 1)$ dala şimdi $n - 2$ dal daha ekleyebiliriz. Örneğin, A_1A_2 dalına,

$$A_3, \dots, A_n$$

dallarını ekleyebiliriz. Bu yeni dalların herbirinin ucuna 3 harfli sözcükler yazılır. Böylece $n \times (n - 1) \times (n - 2)$ tane üç harfli sözcük elde ederiz. Bu yöntemi sürdürerek, $A_1, \dots, A_n$ harflerinden

$$n \times (n - 1) \times \dots \times (n - (r - 1))$$

tane r değişik harfli sözcük yazacağımızı görürüz. Bu sayı da

$$n!/(n - r)!$$

sayısına eşittir (sadeleştirince eşitlik hemen çıkar.) İlk teoremi-mizi kanıtladık:

Teorem 1. Eğer $r \leq n$ iki doğal sayıysa, $A_1, \dots, A_n$ harflerini en çok bir kez kullanarak $n!/(n - r)!$ tane r harfli sözcük yazılır.

Eğer, yukardaki teoremde r 'yi n alırsak, $n!$ buluruz.

Biraz alıştırma yapalım:

1. SELİM sözcüğünün harfleriyle kaç tane üç harfli sözcük yazabiliriz? Yukardaki teoremi uygulayarak

$$5!/(5 - 3)! = 5!/2! = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

sözcük buluruz. Başka bir soru: SELİM sözcüğünün harfleriyle kaç tane beş harfli sözcük yazılır? Yine yukardaki teoremi uygulayalım: $5!/(5-5)! = 5!/0! = 1$ eşitliklerini kullanarak, $5! = 120$ tane beş harfli sözcük yazabileceğimizi görürüz.

2. MELEK sözcüğünün tüm harflerini kullanarak kaç tane (beş harfli elbet) sözcük yazabiliriz? Yukardaki teoremi doğrudan uygulayamayız, çünkü iki tane E harfi var. Önce iki E'yi ayıralım ve ME_1LE_2K “sözcüğünün” tüm harflerini kullanarak kaç tane beş harfli sözcük yazabileceğimizi bulalım. Bu sorunun yanıtı yukardaki gibi $5! = 120$ 'dir. Bu 120 sözcüğün yarısında E_1 harfi E_2 harfinden önce gelir; öbür yarısında E_2 harfi E_1 harfinden önce gelir. Demek ki MELEK sözcüğünün harflerinden $120/2 = 60$ sözcük yazabiliriz.

3. Yukardaki alıştırmaya benzeyen, ama biraz daha zor olan bir alıştırma daha: KELEBEK sözcüğünün tüm harflerini kullanarak kaç sözcük yazabiliriz? Yukardaki yöntemi kullanalım ve önce $K_1E_1LE_2BE_3K_2$ sözcüğünü ele alalım. Bu sözcükten $7!$ sözcük üretebiliriz. Şimdi, $K_1 = K_2$ ve $E_1 = E_2 = E_3$ yapalım. Birinci eşitlik için 2'ye böleriz, ikinci eşitlik içinse $3! = 6$ 'ya. Demek ki KELEBEK sözcüğünün harflerinin yerini değiştirerek $7!/(2 \times 6) = 420$ sözcük yazabiliriz.

4. Bir maymunun önünde 7 tane harf var: B, E, E, E, K, K, L harfleri. Maymun bu harfleri rastgele sıraya diziyor. Maymunun KELEBEK sözcüğünü yazma olasılığı kaçtır? $1/420$ 'dir, yani 0,0024'ten biraz daha az¹.

1 Biraz konumuzun dışına çıkalım: Bir maymun daktilonun başına geçse ve rastgele tuşlara bassa... Ve bunu hiç durmamacasına sonsuza değin yapsa... Sonlu bir zaman sonra Shakespeare'in Hamlet'ini olduğu gibi baştan sona yazma olasılığı kaçtır? 1'dir, yani yüzdür! Bu ilginç ve beklenmedik sonuç, “Shakespeare Maymun muydu?” başlıklı yazımızda kanıtlanmıştır. (Bkz. sayfa 139.)

Aynı sonucu bir başka türlü de bulabiliriz. B, E, E, E, K, K, L harfleri arasından,

- K'yı seçme olasılığımız $2/7$ 'dir,
- geri kalan 6 harften (B, E, E, E, K, L) E'yi seçme olasılığımız $3/6$ 'dır,
- geri kalan 5 harften (B, E, E, K, L) L'yi seçme olasılığımız $1/5$ 'tir,
- geri kalan 4 harften (B, E, E, K) E'yi seçme olasılığımız $2/4$ 'tür,
- geri kalan 3 harften (B, E, K) B'yi seçme olasılığımız $1/3$ 'tür,
- geri kalan 2 harften (E, K) E'yi seçme olasılığımız $1/2$ 'dir,
- geri kalan 1 harften (K) K'yi seçme olasılığımız 1 'dir.

Bu sayıları çarparsak, yukardaki sonucu $1/420$ 'yi buluruz. Şimdi yeni bir soru soralım.

İkinci Soru. Elimizde n ögesi olan bir A kümesi var:

$$A = \{A_1, \dots, A_n\}.$$

$r \leq n$, bir doğal sayı olsun. A kümesinin kaç tane r ögeli altkümesi vardır?

Bu sayıyı hesaplayacağız. Hesaplamak istediğimiz sayıyı

$$\binom{n}{r}$$

olarak yazalım. Bu sayıya “ n 'de r ” ya da “ n seç r ” adı verilir.

Örnek: $n = 5$ ve $r = 3$ olsun. $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ kümesinin 3 ögeli bütün altkümelerini bulalım:

$$\{A_1, A_2, A_3\}$$

$$\{A_1, A_2, A_4\}$$

$$\{A_1, A_2, A_5\}$$

$$\{A_1, A_3, A_4\}$$

$$\{A_1, A_3, A_5\}$$

$$\{A_1, A_4, A_3\}$$

$$\{A_2, A_3, A_4\}$$

$$\{A_2, A_3, A_5\}$$

$$\{A_2, A_4, A_5\}$$

$$\{A_3, A_4, A_5\}$$

Toplam 10 tane 3 ögeli altküme var. Demek ki:

$$\binom{5}{3} = 10$$

imiş.

Birinci soruyla arada şu ayrım var: Birinci soruda $A_1A_2A_3$ ve $A_1A_3A_2$ sözcüklerini ayrı ayrı sayıyorduk; oysa bu sorumuzda sözcüklere değil de harflerden oluşan kümelere bakıyoruz. Hem $A_1A_2A_3$, hem de $A_1A_3A_2$ sözcüklerinin harflerinden $\{A_1, A_2, A_3\}$ kümesi oluşur. Bunun gibi,

$$A_1A_2A_3$$

$$A_1A_3A_2$$

$$A_2A_1A_3$$

$$A_2A_3A_1$$

$$A_3A_1A_2$$

$$A_3A_2A_1$$

sözcüklerinin herbiri $\{A_1, A_2, A_3\}$ kümesini oluştururlar.

İkinci soruyu yanıtlamak için yukardaki örnekten yararlanacağız. Birinci teoremimize göre, r değişik harfli sözcük sayısı $n!/(n-r)!$ dir. Bu $n!/(n-r)!$ sözcükten birçoğu aynı kümenin harflerinden oluşurlar. Kaç tanesinin aynı kümenin harflerinden oluştuğunu bulalım. Yine birinci teoreme göre r harfle yazılan $r!$ sözcük olduğuna göre, $n!/(n-r)!$ sözcükten her $r!$ tanesi aynı kümenin harflerinden oluşur. Demek ki, r ögeli altküme sayısını bulmak için $n!/(n-r)!$ sayısını $r!$ sayısına bölmeliyiz:

$$\frac{n!(n-r)!}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

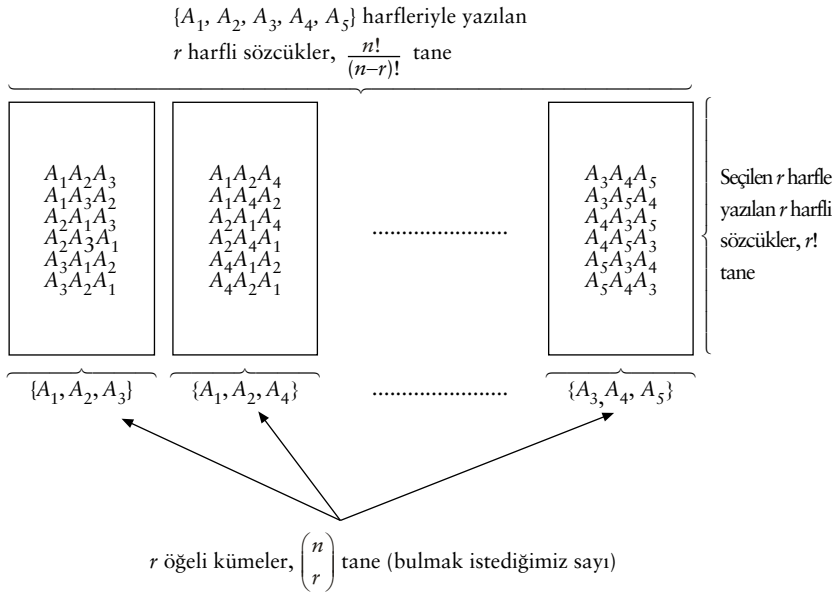
Bulduğumuz bu sonucu daha sonra kullanacağız; bir köşeye yazalım:

Teorem 2. *n öğeli bir kümenin, r öğeli altküme sayısı*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

dir.

Bu teoremin kanıtının $r = 3$ ve $n = 5$ için bir resmini yapalım:



Pokerin Matematiği

Satrançta bir oyuncunun bilip de öbür oyuncunun bilmediği bilgi yoktur. Bu tür oyunlara açık oyun diyelim, “bilgiler açık, ortada” anlamına.

Tavla da bir oyuncunun bildiğini öbür oyuncu bilir. Birinin öbüründen gizlisi saklısı yoktur. Yani tavla da açık bir oyundur. Öte yandan gelecek zarı her iki oyuncu da bilmez. Demek ki tavla açık bir oyun olmasına karşın her iki oyuncunun da bilmediği bilgiler içerir. Gelecek zar oyuncuların istencinden (iradesinden) bağımsızdır. Bu yüzden tavla şans etkenini içerir. Satrantaysa şans yoktur. Satranç gerçekten tam iki kişilik bir oyundur. Tavlaysa, zarı da katarsak, iki buçuk kişilik bir oyundur.

Satranç ve tavlanın tersine, kâğıt oyunlarında genellikle bir oyuncunun bilip de öbür oyuncunun bilmediği bilgiler vardır. Örneğin, öbür oyuncunun elindeki kâğıtlar çoğu zaman bilinmez. Demek ki kâğıt oyunları genellikle açık oyun değildir. Ayrıca kâğıt oyunları - tavla gibi - şansı içerirler. Örneğin yerden rastgele çekeceğiniz bir kâğıt olabilir. Bu kâğıdın ne olacağını önceden ne siz kestirebilirsiniz ne de karşınızdaki oyuncu.

Dünya satranç şampiyonu Kasparov’la bir el satranç oynayacak olsanız, yüzde yüz yenileceğinizi önceden kestirebilirsiniz. Kasparov’a karşı hemen hemen hiç şansınız yoktur. Çünkü satrançta şansın bir dirhem etkisi yoktur. En bilgili, en zeki ve en hazırlıklı olan oyuncu kazanır. Kasparov’a karşı satranç oynamanın dünya boks şampiyonuna karşı boks yapmaktan pek bir ayrımı yoktur.

Öte yandan dünya briç şampiyonu bir takımla bir el briç oynayacak olsanız, yenileceğinizden bunca emin olamazsınız. Çok değil, biraz şanslı bir gününüzde, dünya briç şampiyonu takımı yenebilirsiniz. İşte bu yüzden, şans oyunları çoğu kimseye daha çekici gelir. Ama bir şans oyununda bile şansın etkisini bir dereceye kadar azaltabilirsiniz. Örneğin bir kâğıt oyununda, daha önce çıkmış ve o anda görünen kâğıtlar gözönüne alındığında, hangi kâğıdın kaç olasılıkla gelebileceği daha iyi bilebilirsiniz. Bir de öbür oyuncunun stratejisini önsezi ve deneyiminizle tahmin edebilirsiniz, küçümsenemeyecek bir bilgiye sahip olabilirsiniz. Bu bilgileri en iyi biçimde kullanana “iyi oyuncu” denir.

Bu yazıda pokeri bahane ederek biraz kombinezon hesabı yapacağız. Kombinezon hesaplarına matematikte ve günlük yaşamda sık sık gereksiniriz. Örneğin poker oynarken...

* * *

Poker, dört oyuncuyla ve yediliden asa 32 iskambil kâğıdıyla oynanır. Her oyuncuya önce beş kâğıt dağıtılır, sonra her oyuncu elindeki beş kâğıttan istediği kadarını değiştirebilir (isterse hiç değiştirmez.) Bu değiştirmeden sonra “en iyi” beş kâğıdı olan kazanır. Elbet burda “en iyi” tamlamasının tanımlanması, anlam kazandırılması gerekir. Örneğin, beş kâğıdın beşinin de aynı renkten (örneğin maça, ♠) olduğu bir el çok iyi sayılır. Bu el, iki papaz, iki as ve bir onlu gibi iki çiftten oluşan ellerden daha “iyi” bir eldir. Bunun nedeni bellidir: beş kâğıdın aynı renkten olma olasılığı daha düşüktür.

Aynı renkten beş kâğıtlı ellere renk adı verilir. Bu yazıdaki amaçlarımızdan biri de pokerde dağıtılan ilk beş kâğıdın renk olma olasılığını hesaplamak. Önce ciddi matematik yapacağız. (Ne zaman ciddi matematik yapmadık ki!)

Toplam poker eli sayısı. Önce toplam poker eli sayısını hesaplayalım. 32 kâğıttan kaç tane 5 kâğıtlık el çıkar? Yani 32 ögelik bir kümenin kaç tane 5 ögelik altkümesi vardır? Bir önceki yazıdaki Teorem 2'ye göre,

$$\binom{32}{5} = \frac{32!}{27!5!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 201.376$$

tane, yani 200 binden fazla poker eli vardır. Ve bu poker ellelerinden herbirinin gelme olasılığı aynıdır, yani $1/201.376$ 'dır.

Renk sayısı. Şimdi de kaç tane “renk” eli olduğunu hesaplayalım. Önce kaç tane maça (♠) renkli el olduğunu bulalım. 32 kâğıttan 8 tanesi maça. Bu 8 maçadan 5 tanesini seçeceğiz. Bir önceki yazıdaki Teorem 2'ye göre,

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$$

tane salt maça olan el vardır. Toplam dört renk olduğundan (♣, ♦, ♥, ♠), bu sayıyı 4'le çarparsak, toplam renk sayısını buluruz:

$$56 \times 4 = 224.$$

Ama bu sayıdan, toplam “flush” (aynı renkten ve sürekli kâğıtlar) sayısını çıkarmalıyız. Maçalardan oluşan flush'lar, as'la (A-7-8-9-10), yediliyle, sekizliyle, dokuzluyla ya da onluyla (10-J-Q-K-A) başlayabilir. Demek maçadan 5 tane flush var ve toplam flush sayısı $5 \times 4 = 20$. Böylece, gerçek renk sayısının,

$$224 - 20 = 204$$

olduğunu buluruz. Olasılık olarak düşünürsek, elden renk gelme olasılığı $204/201.376 \approx 0,001013$ 'dır, yani aşağı yukarı binde birdir.

Kare sayısı. Elden kare gelme, yani beş kâğıttan dördünün aynı sayı olma olasılığını bulalım. Önce dört as'lı el sayısını bulalım. Dört as'ın yanına gelebilecek kâğıt sayısı $32 - 4 = 28$ 'dir. Demek 28 tane dört as'lı el var. Toplam 8 tür kâğıt olduğundan, $28 \times 8 = 224$ tane kare el vardır.

Bu sayı, renk sayısından biraz daha fazla olduğundan, renk kareyi yener diye düşünebilirsiniz. Nitekim, eğer pokerde kâğıt değiştirme olmasaydı, düşündüğünüz gibi olurdu. Ama kâğıt değiştirme olasılıkları da etkiler. Örneğin, üç ası olan, öbür iki kâğıdını değiştirerek, dört as olma olasılığını artırır. Bunun gibi eline dört maça gelen, beşinci kâğıdını değiştirerek, renk olasılığını artırır. Yani pokerin sonundaki olasılıklar, ilk beş kâğıdın olasılıklarından değişiktir. Pokerde rengin kareyi yenip yenmediğini bilmiyorum. Unutmuşum! Zaten ne demişler? “Bir konuyu anlayamıyorsan, o konuda bir yazı yaz. Gene anlamadıysan bir kitap yaz. Hâlâ anlayamıyorsan, kitabını oku!”

* * *

Elinde dört maçası olan, maça olmayan kâğıdını değiştirerek kaç olasılıkla rengi yakalayabilir? Hesaplayalım. 32 kâğıdın 5'i elimizde. Demek ki toplam 27 kâğıttan bir kâğıt seçilecek (öbür oyuncuların ellerini bilmiyoruz, onların elinde kâğıt yokmuş gibi hesaplayabiliriz.) Bu 27 kâğıtta 4 tane maça var (toplam maça sayısı 8, ama bu maçalardan 4'ü elimizde.) Demek ki rengi yakalama olasılığımız $4/27$ 'dir, yani $1/7$ 'den biraz daha fazla. Renge çekmeli miyiz? Eğer kâğıt değiştirmek için ortaya 1 lira koymamız gerekiyorsa (bedava kâğıt değiştirilmez pokerde, şansını artırmanın bedelini ödemek gerekir) ve kazanacağımız paranın en az $23/4$ lira olacağını düşünüyorsak kâğıt çekmeliyiz. Yoksa çekmemeliyiz. Örneğin iki oyuncu oyun-

dan kaçmışsa, büyük bir olasılıkla kâğıt çekmeye değmez. Eğer kâğıt çekmeye karar verecek son oyuncuysak ve bizden önceki üç oyuncu oyuna girmişlerse, o zaman kâğıt çekmeliyiz.

Dolgun el sayısı. Eğer bir elde bir türden 3 tane, bir başka türden 2 tane kâğıt varsa, o ele “dolgun” (full house) denir. Örneğin, 3 as ve 2 papazdan oluşan bir el dolgundur. Dolgun eler oldukça iyi ellerdir. İlk beş kâğıdı dolgun görmenin kendine özgü bir zevki vardır. En azından, hangi kâğıdı değiştireceğim türünden zor sorularla karşılaşılmaz.

Elin dolgun olma olasılığını bulalım. Önce 3 as ve 2 papaz gelme olasılığını bulalım. Dört astan üçünü seçeceğiz, yani 4 ögelik bir kümeden 3 ögelik bir altküme seçeceğiz. Bir önceki yazıdaki Teorem 2’ye göre,

$$\binom{4}{3} = 4$$

seçeneğimiz var aslar için. Şimdi de dört papazdan ikisini seçeceğiz. Yine Teorem 2’ye göre,

$$\binom{4}{2} = 6$$

seçeneğimiz var. Demek ki,

$$4 \times 6 = 24$$

tane 3 as ve 2 papazlı el var. 3 papaz ve 2 as’lı eller de 24 tane. Yani as ve papazlardan oluşan

$$24 + 24 = 48$$

tane dolgun el vardır. Bu hesaplar salt as ve papazlar için değil, tüm iki tür kâğıtlar için de geçerli. Örneğin yedi ve dokuzlulardan oluşan 48 tane dolgun el vardır. Kaç tane iki tür kâğıt var? Toplam 8 tür var. Bunlardan 2 tür seçeceğiz. Teorem 2’ye göre,

$$\binom{8}{2} = 28$$

tane iki tür var. Demek ki toplam dolgun el sayısı,
 $48 \times 28 = 1344$
 tür.

Üçgen sayısı. Bir elde 3 tane aynı kâğıt varsa, o ele “üçgen” adı verelim. Örneğin AAAKD bir üçgendir. Ama kare ve dolgunlar üçgen sayılmaz. Üçgen sayısını hesaplayalım. Önce 3 aslı üçgen sayısını bulalım. Teorem 2’ye göre,

$$\binom{4}{3} = 4$$

çeşit 3 as seçebiliriz. Bu 3 asın yanına iki kâğıt gelecek, ama herhangi iki kâğıt değil: hiçbirisi as olmayacak ve aynı tür kâğıt olmayacaklar. As dışında $32 - 4 = 28$ tane kâğıt var. Bunlardan iki tane seçelim:

tane seçenek var. Ama bu seçeneklerden bazıları iki aynı tür

$$\binom{28}{2} = 378$$

kâğıttan oluşuyor. Bu sayıyı bulup 378’den çıkaralım. Kaç tane iki papaz seçebiliriz?

$$\binom{4}{2} = 6$$

tane. As dışında yedi tür kâğıt var. Demek ki, 378 seçenekten $6 \times 7 = 42$ tanesi iki aynı tür kâğıttan oluşuyor. Dolayısıyla, seçilen üç asın yanına,

$$378 - 42 = 336$$

tane iki kâğıtlık el koyabiliriz. Dört çeşit üç as seçilebildiğinden, aslı üçgen el sayısı,

$$336 \times 4 = 1344$$

dür. Bu hesap as dışındaki öbür kâğıtlar için de geçerli olduğundan, üçgen el sayısı,

$$1344 \times 8 = 10.752$$

dir.

Kalan hesapları okura alıştıırma olarak bırakıyorum. Yanıtları aşağıdaki dizelgede bulacaksınız. Matematiksel şeytanınız bol olsun.

El türü	El sayısı	Bin üzerine olasılığı ($\pm 0,005$)
Flush Royal	5	0,025
Flush	20	0,10
Renk	204	1,01
Kare	224	1,11
Dolgun	1.344	6,67
Kent ¹	5.100	25,33
Üçgen	10.752	53,39
İki Çift	24.192	120,13
Bir Çift	107.520	533,93

1 Bir elin kâğıtları peşpeşeyse, örneğin 7-8-9-10-V ise, ama aynı renkten (örneğin kupa) değilse, o ele “kent” denir (her nedense.)

Loto

Loto çok moda oldu. Herkes loto oynuyor, trilyoner olmanın düşünüyü kuruyor...

Ben loto oynamam. Her şeyden önce emeksiz kazançta gözüüm yok. Sonra, loto oynamayı matematikçiliğime yakıştırımmam, çünkü lotonun beklentisi negatiftir.

Lotonun matematiğini yapalım.

Lotoda 1'den 49'a kadar 49 sayı vardır. Oyuncu bu 49 sayıdan 6'sını seçer. Sonra kura çekilir. 6 sayının 6'sını da bilen büyük ikramiyeyi alır.

49 sayıdan 6 sayı seçilecek. Demek ki;

$$\binom{49}{6}$$

tane seçenek var. Bu sayı 13.983.816'ya eşittir, yani aşağı yukarı 14 milyona. Dolayısıyla, lotoda bir kolon oynayarak 6 tutturma olasılığı 14 milyonda birdir.

Loto müdürü televizyona çıktı ve bu olasılığın aslında çok daha küçük olduğunu söyledi. Ne demek istediğini anlayamadım. Bilgisayarlarla olasılığın daha küçük olduğunu göstermişler...

Şaşırdım. Bu bilgisayarlar biz insanlardan başka türlü mü matematik yapıyorlar acaba?

Sonra, sağa sola sora sora anladım işin aslını. Meğer, bilgisayara, 1-2-3-4-5-6 gibi belli bir düzen gösteren çekilişleri say-

dırmamışlar! Oysa lotoda her çekilişin olasılığı aynıdır. Yani 1-2-3-4-5-6'yla 2-14-27-35-38-40 çekilişinin olasılığı aynıdır. Loto müdürü hangi akla hizmetle bazı çekilişleri çekilişten saymamış anlayamıyorum.

Anlıyorum elbet... İnsanları kandırmak için...

İki (değişik) kolon oynarsanız, olasılığınızı 14 milyonda ikiye, yani 7 milyonda bire çıkarırsınız. On değişik kolon oynarsanız, olasılığınız 1,4 milyonda bire yükselir.

Diyelim 1000 kişi 10 kolon loto oynadı. Bu bin kişiden en az birinin büyük ikramiyeyi kazanma olasılığı kaçtır?

Bir kişinin kazanma olasılığı $10/13.983.816$ 'dır. Kazanma olasılığı da $1 - 10/13.983.816$ 'dır elbet.

İki kişinin kazanmama olasılığı $(1 - 10/13.983.816)^2$ 'dir. Üç kişinin kazanmama olasılığı $(1 - 10/13.983.816)^3$ 'tür. Bin kişiden hiçbirinin kazanmama olasılığı,

$$(1 - 10/13.983.816)^{1000}$$

dir. Demek ki, 1000 kişiden en az birinin kazanma olasılığı,

$$1 - (1 - 10/13.983.816)^{1000}$$

Bu sayı, 0,000714856'ya eşit aşağı yukarı, 10 binde 7'den biraz fazla.

Bir milyon kişinin 10'ar kolon loto oynadığını varsayarsak, bir milyon kişiden en az birine büyük ikramiye çıkma olasılığı,

$$1 - (1 - 10/13.983.816)^{1.000.000}$$

dur, yani yüzde 51'dir aşağı yukarı.

Herbiri on kolon oynayan bir milyon kişiden yalnızca birine büyük ikramiye çıkma olasılığı kaçtır? Hesaplayalım. Oyuncularımızı 1'den 1 milyona kadar sıralayalım. Birinci oyuncunun büyük ikramiyeyi kazanma olasılığı,

$$10/13.983.816$$

dır. Geri kalan 999.999 oyuncudan hiçbirinin büyük ikramiyeyi kazanmama olasılığıysa,

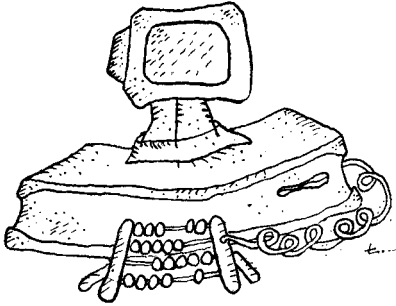
$$(13.983.806/13.983.816)^{999.999}$$

dur. Dolayısıyla, yalnızca birinci oyuncunun büyük ikramiye

kazanma olasılığı,

$$(10/13.983.816) \times (13.983.806/13.983.816)^{999.999}$$

dur. Bir milyon oyuncu olduğundan, oyuncuların yalnızca birinin büyük ikramiye kazanma olasılığı, yukardaki sayının 1 milyonla çarpımına, yani aşağı yukarı 0,349788183'e eşittir. Demek ki hemen hemen yüzde 35 olasılıkla, büyük ikramiye yalnızca 1 oyuncuya çıkacaktır.



İkinci soru: Herbiri on kolon oynayan bir milyon kişiden yalnızca ikisine büyük ikramiye çıkma olasılığı kaçtır? Birinci ve ikinci oyuncuya büyük ikramiye çıkma olasılığı $(10/13.983.816)^2$ 'dir. Geri kalan 999.998 kişiden hiçbirine büyük ikramiye çıkmama olasılığı,

$$(13.983.806/13.983.816)^{999.998}$$

dir. Dolayısıyla, yalnızca birinci ve ikinci oyuncunun büyük ikramiye kazanma olasılığı,

$$(10/13.983.816)^2 \times (13.983.806/13.983.816)^{999.998}$$

dir. Bir milyon oyuncu arasından

$$\binom{1.000.000}{2}$$

tane iki oyuncu seçebileceğimizden, yalnızca iki oyuncunun büyük ikramiyeyi kazanma olasılığı,

$$\binom{1.000.000}{2} = \left(\frac{10}{13.983.816} \right)^2 \times \left(\frac{13.983.806}{13.983.816} \right)^{999.998}$$

dir. Bu sayı, aşağı yukarı 0,125068895’e, yüzde 12,5’a eşittir.

Genel kuram şöyle: Eğer n oyuncu varsa ve her oyuncunun oyunu kazanma olasılığı p ise, oyunu yalnızca m oyuncunun kazanma olasılığı,

$$\binom{n}{m} \times p^m \times (1-p)^{n-m}$$

dir.

Doğumgünleri

Bir başkasıyla aynı gün doğmuş olmamıza şaşarız. Bakalım bu ne kadar şaşırtıcı. Bir toplulukta en az iki kişinin aynı doğumgünü olma olasılığını hesaplayalım.

Hesaplarımızı kolaylaştırmak için, 29 şubatı yok sayarak, bir yılda 365 gün olduğunu varsayalım. Örneğin, toplulukta 366 kişi varsa, içlerinden en az ikisinin doğumgünü mutlaka aynı güne rastlayacaktır. 731 kişi varsa, en az üçünün doğumgünü aynı güne rastlayacaktır...

Toplulukta iki kişi varsa, bu iki kişinin aynı gün doğma olasılığı $1/365$ 'tir. Demek ki ayrı günlerde doğma olasılıkları, $364/365$ 'tir.

Eğer toplulukta üç kişi varsa, üçünün de ayrı ayrı doğumgünleri olma olasılığı,

$$(364/365) \times (363/365)$$

dir¹. Eğer toplulukta dört kişi varsa, dördünün de ayrı ayrı doğumgünleri olma olasılığı,

$$(364/365) \times (363/365) \times (362/365)$$

dir. Eğer toplulukta n kişi varsa, hepsinin ayrı ayrı doğumgünleri olma olasılığı,

1 İkinci kişinin, birinci kişiyle aynı gün doğmaması için, 364 seçeneği vardır. Üçüncü kişiye şimdi 363 seçenek kalmıştır.

$$\frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \dots \times \frac{366-n}{365}$$

dir. En az iki kişinin aynı gün doğmuş olma olasılığıysa,

$$1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \dots \times \frac{366-n}{365}$$

Bu sayıların birkaçını bilgisayarıma (aşağı yukarı elbet) hesaplattırdım. İşte sayılar:

Kişi Sayısı	Olasılık ²
2	0,002739727
3	0,008204162
4	0,01635593
5	0,02713561
6	0,04046249
7	0,05623573
8	0,07433534
9	0,09462386
10	0,1169482
15	0,2529014
20	0,4114385
22	0,4756954
23	0,5072973
25	0,5686998
30	0,7063163
35	0,8143833
40	0,8912318
50	0,9703736
60	0,9941227
70	0,9991596
80	0,9999143
90	0,9999939
100	0,9999997
103	0,9999999

2 En az iki kişinin aynı doğumgünü olma olasılığı.

Görüldüğü gibi 23 kişilik bir toplulukta (örneğin ortalama bir sınıfta) en az iki kişinin aynı gün doğmuş olması yüzde elliden daha büyük bir olasılıktır. Elli kişilik bir sınıftaysa, yüzde 97 olasılıkla iki kişinin doğumgünü aynı güne rastlar.

Bu olasılıkları, doğum olasılığının günden güne değişmediğini varsayarak yaptık. Belki de yaz aylarında daha çok doğum olur... O zaman hesaplar biraz daha değişik olur.

Şimdi de doğum olasılıkları aynı olmadığında, aynı günde doğma olasılığının kaç olacağına bakalım.

Savım şu: *Eğer doğumgünü olasılığı eşit dağılmamışsa, yani belli bir günde doğma olasılığı 1/365'ten değişirse, o zaman 2 kişinin aynı gün doğmuş olma olasılığı, yukarda hesapladığımız 1/365 $\approx$ 0,002739727 sayısından daha büyüktür.*

Benzer bir sav: *İki zar atalım. Zarlar hilesiz olsun. Bu iki zarın aynı sayı olma olasılığı 1/6'dır. Eğer zar hileliyse, o zaman iki kez üstüste aynı zar atma olasılığı 1/6'dan daha büyüktür.*

Örneğin, zar çok hileliyse ve her atışta şaş geliyorsa, iki zarın aynı olma olasılığı 1'dir (yani yüzde yüzdür.) Ya da zarda 1/2 (yüzde 50) olasılıkla penç, 1/2 olasılıkla şaş geliyorsa, o zaman iki zarın aynı olma olasılığı 1/2'dir, yani yüzde ellidir.

İkinci savı kanıtlayalım.

Birinci savın kanıtı da aynı.

Yek (1) gelme olasılığına p_1 , dü (2) gelme olasılığına p_2 , ..., şaş (6) gelme olasılığına p_6 diyelim. Bu altı olasılığın toplamı 1'dir elbette.

Her iki zarın da yek gelme olasılığı p_1^2 'dir. Her iki zarın da dü gelme olasılığı p_2^2 'dir... Her iki zarın



da üç gelme olasılığı p_6^2 'dir. Dolayısıyla, her iki zarın da aynı sayı gelme olasılığı,

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2$$

dir. Savımız, bu sayının en küçük değeri,

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 1/6$$

da aldığını söylüyor (o değer de $1/6$ 'dır.) Bir başka deyişle, eğer p 'lerden birinin değeri $1/6$ 'dan deği  kse, o zaman,

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2$$

sayısının $1/6$ 'dan daha büyük olduğunu söylüyor.

Yani

$$p_1^2 + \dots + p_6^2 \neq \frac{p_1 + \dots + p_6}{6}$$

eşitsizliğini kanıtlamalıyız.

Teorem 1 (Cauchy). *Eğer $r_1, r_2, \dots, r_n$ gerçel sayılarsa,*

$$\left(\sum_{i=1}^n r_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n r_i^2$$

eşitsizliği doğrudur.

Kanıt: İki r ve s gerçel sayısı için, $r^2 - 2rs + s^2 = (r - s)^2 \geq 0$ olduğundan, $rs \leq (r^2 + s^2)/2$ eşitsizliği geçerlidir. Bundan da hemen,

$$\left(\sum_{i=1}^n r_i \right)^2 = \sum_{j,k=1}^n r_j r_k \leq \sum_{j,k=1}^n \frac{r_j^2 + r_k^2}{2} = n \sum_{i=1}^n r_i^2$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Bu da kanıtlamak istediğimiz bir eşitsizliktir.   

Sonsuz İniş ve Sonsuz Çıkış

Sayılar kuramının matematikte yeri ayrıdır. Sayılar kuramı her şeyden önce güzeldir. Üstelik bir ilkokul çocuğunun bile anlayabileceği eşitlikler, teoremler, kanıtlar, sorular vardır.

Çoğumuzun matematikle ilgisi aritmetikle başlamıştır. Kimimiz $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ eşitliğinden, kimimiz $3^2 + 4^2 = 5^2$ eşitliğinden, kimimiz de,

$$1 = 1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

eşitliklerinden büyülenmişizdir. Sayılar kuramında her yaşa, her zevke göre büyü vardır.

Sonsuz Çıkış. Yukardaki eşitlikler raslantısal değildir, ilk n tek sayının toplamı her zaman bir karedir¹. İlk n tek sayı 1, 3, 5, ..., $2n - 1$ olduğundan,

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

dir. Bu eşitlik, sayılar kuramında *tümevarım* adı verilen bir yöntemle kanıtlanabilir.

¹ Bu yazıda “sayı” sözcüğünü 1 ve 1’den büyük tamsayılar için kullanacağız, yani 1, 2, 3, 4, ... sayıları için.

Matematikte ve sayılar kuramında çok sık kullanılan bu yöntemde, kanıtlanmak istenen önerme önce 1 sayısı için kanıtlanır. Sonra, önermenin n sayısı için geçerli olduğu varsayılarak, önerme bir sonraki sayı olan $n + 1$ sayısı için kanıtlanır. Böylece, önermenin tüm sayılar için geçerli olduğu anlaşılır. Çünkü, önerme 1 için doğrudur, 1 için doğru olduğundan 2 için de doğrudur, 2 için doğru olduğundan 3 için de doğrudur... Bu yöntem *sonsuz çıkış* da denilebilir.

Tümevarımla kanıta örnek olarak yukardaki eşitliği kanıtlayalım.

Teorem. Her $n \geq 1$ doğal sayısı için, ilk n tek sayının toplamı n^2 'dir.

Kanıt: İlk n tek sayının toplamına $T(n)$ adını verelim. Yani,

$$T(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

olsun. $T(n) = n^2$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz.

Önce $T(1) = 1^2$ eşitliğinin doğru olup olmadığına bakalım. $T(1)$, 1'den 1'e kadar olan tek sayıların toplamıdır, demek ki $T(1) = 1 = 1^2$ eşitlikleri geçerlidir. Önermemiz 1 için doğru.

Şimdi, $T(n) = n^2$ eşitliğini doğru varsayıp,

$$T(n + 1) = (n + 1)^2$$

eşitliğini kanıtlayalım. $T(n + 1)$ sayısı ilk $n + 1$ tek sayının toplamı, yani 1'den $2n + 1$ 'e kadar olan tek sayıların toplamı. İlk n tek sayının toplamı $T(n)$ 'dir ve varsayımımıza göre bu $T(n)$ sayısı n^2 'ye eşittir. Bir sonraki $n + 1$ 'inci tek sayıysa $2n + 1$. Demek ki,

$$T(n + 1) = \text{İlk } n + 1 \text{ tek sayının toplamı}$$

$$= (\text{İlk } n \text{ tek sayının toplamı}) + (n+1\text{'inci tek sayı})$$

$$= T(n) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

ve $T(n + 1) = (n + 1)^2$.

Demek ki $T(n) = n^2$ eşitliği doğruysa, $T(n + 1) = (n + 1)^2$ eşitliği de doğrudur.

Daha önce $T(1) = 1^2$ eşitliğinin de doğru olduğunu kanıtlamıştık. Böylece her n sayısı için $T(n) = n^2$ eşitliği kanıtlanmış oldu. $\square$

Tümevarımla kanıtın bir zayıf yanı, kanıtlanan önermenin neden doğru olduğunun pek iyi anlaşılamamasıdır. Önsezi kaybolmakta, mekanik bir kanıt verilmektedir. Ne demek istediğimi gene bir örnekle anlatayım. Yukardaki $T(n) = n^2$ eşitliğinin neden doğru olduğunu başka türlü göstereyim. Bir kenarı n uzunluğunda olan bir kare alalım. Bu karenin alanı n^2 'dir. Kareyi n^2 tane küçük kareye bölelim. Şimdi kareleri şöyle sayalım. (Aşağıdaki şekle bakın.) Sol alt köşede 1 kare var. Bu kareye 3 kare dokunur: biri sağından, biri tepesinden, öbürü de sağ üst köşesinden (yani çaprazından.) Bu yeni kareye 5 yeni kare dokunur: ikisi sağından, ikisi tepesinden, biri de çaprazından. Sonra 7 yeni kare... Resim yandadır.

7	6	5	4
5	4	3	3
3	2	2	2
1	1	1	1

1, 3, 5, 7, ... Bunların toplamı küçük karelerin sayısına, yani n^2 'ye eşit. Görüldüğü gibi ilk n tek sayının toplamı n^2 'dir. Yukardaki önermenin neden doğru olduğu birden gün gibi ortaya çıktı. Ama matematiksel değil kanıtımız. Görme duyusuna dayanıyor.

Daha sonra gereksineceğimiz bir sonucu tümevarımla kanıtlayalım:

Teorem. n ögeli bir kümenin altküme sayısı 2^n 'dir.

Kanıt: Önermeyi önce $n = 1$ için kanıtlayacağız. Eğer $X = \{x\}$ bir ögelik bir kümeysen, X 'in 2 altkümesi vardır: $\emptyset$ (boşküme) ve X . Demek ki $n = 1$ olduğunda önermemiz doğru.

Şimdi önermenin n için doğru olduğunu varsayıp, önermeyi bir sonraki sayı olan $n + 1$ için kanıtlayalım. $n + 1$ tane ögesi olan bir küme alalım. Bu kümeye X adını verelim.

$$X = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$$

olsun. X 'in 2^{n+1} tane altkümesi olduğunu kanıtlamak istiyoruz.

$$Y = \{x_1, \dots, x_n\}$$

olsun. Y 'nin 2^n tane altkümesi olduğunu (n tane ögesi olduğundan, varsayımımıza göre) biliyoruz.

X 'in iki tür altkümesi vardır: x_{n+1} 'i içerenler ve içermeyenler. x_{n+1} 'i içermeyenler Y 'nin altkümeleridir ve bunlardan 2^n tane olduğunu biliyoruz. x_{n+1} 'i içermeyen 2^n kümeye x_{n+1} 'i de eklersek, x_{n+1} 'i içeren tüm altkümeleri buluruz. Demek ki X 'in x_{n+1} 'i içermeyen 2^n tane ve x_{n+1} 'i içeren gene 2^n tane altkümesi varmış. Dolayısıyla X 'in altküme sayısı, $2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$ dir. Önermemiz kanıtlanmıştır². $\square$

Alıştırma olarak, okur aşağıdaki önermeleri tümevarımla kanıtlamaya çalışabilir:

1. Eğer $0 \leq x \leq 1$ ise ve $n > 0$ bir doğal sayıysa³,

$$(1 - x)^n \leq 1 - nx + n(n - 1)x^2/2.$$
2. Eğer $n > 0$ bir doğal sayıysa,

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$
3. Eğer $n > 0$ bir doğal sayıysa,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6.$$
4. Eğer $n > 0$ bir doğal sayıysa,

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)/6$$

Bir Çeşitleme. Tümevarımla kanıtın bir çeşitlemesi de şöyledir. Kanıtlamak istediğimiz önerme önce 1 için kanıtlanır. Arkasından önermenin n 'den küçük tüm sayılar için doğru oldu-

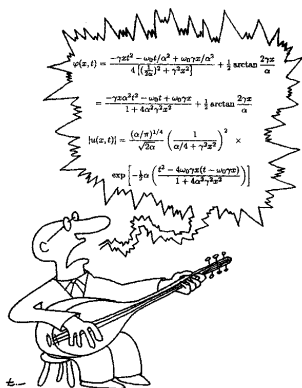
-
- 2 Okur, bu olgudan $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ eşitliğini çıkarabilir “Saymadan Saymak” başlıklı yazıda tanımlamıştık sağdaki sayıları, bkz. s. 39.) Soldaki sayı, yani 2^n , n ögesi olan bir kümenin altküme sayısı. Sağdaki $\binom{n}{k}$ sayıları ise, aynı kümenin k ögeli altkümelerinin sayısı.
 - 3 “Yoksulun Kazanabildiği Bir Oyun” yazısında Önsav 1’de (bkz. sayfa 163) kanıtlanmıştır bu eşitsizlik.

ğu varsayıp, önerme n için kanıtlanır. Bir sonraki yazıda bu tür tümevarımsal kanıta bir örnek vereceğiz.

Sonsuz İniş. Pierre de Fermat (1601-1665) sayılar kuramında sonsuz iniş adını verdiği bir başka yöntem bulmuştur. Sonsuz iniş, sonsuz çıkışın (yani tümevarımın) ters yüz edilmişidir. Önce yöntemi açıklayalım, sonra bir örnek vereceğiz.

Diyeelim sayılarla ilgili bir önerme kanıtlamak istiyoruz. Bu önermeye $\bar{O}(n)$ adını verelim. $\bar{O}(n)$ önermesinin bir sayı için yanlış olduğunu varsayalım, diyelim a sayısı için yanlış. Demek ki $\bar{O}(a)$ önermesinin yanlış olduğunu varsayıyoruz. Bu varsayımdan bir çelişki elde etmeye çalışırız. $\bar{O}(a)$ 'nın yanlışlığından yararlanarak, öyle bir a_1 sayısı bulmaya çalışırız ki, hem $a_1 < a$, hem de $\bar{O}(a_1)$ önermesi yanlıştır. Başardık diyelim. Aynı akıl yürütmeyi a yerine a_1 sayısı için yapacak olursak, öyle bir a_2 sayısı buluruz ki, hem $a_2 < a_1$ 'dir, hem de $\bar{O}(a_2)$ önermesi yanlıştır. Bunu böyle sürdürebiliriz. Öte yandan doğal sayılarda sonsuza dek azala azala inemeyiz. Bir çelişki elde ettik: Hem sonsuza dek inebiliyoruz, hem de inemiyoruz. Demek ki, $\bar{O}(n)$ önermesi bir a sayısı için yanlış olamaz, yani her sayı için doğrudur.

Bu yöntemi şöyle de açıklayabiliriz: Eğer $\bar{O}(n)$ önermesi bir sayı için yanlışsa, bu önermenin yanlış olduğu en küçük bir sayı var-



dır. Bu sayıya a adını verelim. Şimdi de $\sqrt[3]{a}$ önermesinin yanlışlığından yararlanarak, a 'dan küçük bir b sayısı için de önermenin yanlış olduğunu kanıtlamaya çalışalım. Başarırsak bir çelişki elde ederiz, çünkü, a , önermeyi yalanlayan sayıların en küçüğüydü.

Şimdi bir örnek vereyim. Sonsuz iniş yöntemini kullanarak $\sqrt[3]{3}$ sayısının kesirli sayı olmadığını kanıtlayacağım⁴. Diyelim, a ve b doğal sayıları $\sqrt[3]{3} = a/b$ eşitliğini sağlıyor. $\sqrt[3]{3} = a/b$ denkleminde iki tarafın da karesini alırsak, $3 = a^2/b^2$ buluruz, yani $3b^2 = a^2$. Bundan da a^2 'nin üçe bölündüğü çıkar. a^2 üçe bölündüğünden, a sayısı da üçe bölünür. Dolayısıyla a^2 dokuzda bölünür ve $3b^2 = a^2$ denkleminde b^2 'nin de üçe bölündüğü anlaşılır. b^2 üçe bölündüğünden, b de üçe bölünür. Hem a 'nın, hem de b 'nin üçe bölündüğünü kanıtladık. Eğer $a = 3a_1$, $b = 3b_1$ olarak yazarsak, $\sqrt[3]{3} = a/b = 3a_1/3b_1 = a_1/b_1$ elde ederiz. Yani $\sqrt[3]{3} = a_1/b_1$. Ve aynı zamanda $0 < a_1 < a$. Yukarda a ve b sayılarıyla yaptığımız kanıtı, a_1 ve b_1 sayılarıyla yaparsak, öyle a_2 , b_2 sayıları buluruz ki, hem $0 < a_2 < a_1 < a$ dır, hem de $\sqrt[3]{3} = a_2/b_2$ dır. Bu böyle sonsuza dek sürebilir. Öte yandan süremez de! Bir çelişki elde ettik. Demek ki $\sqrt[3]{3}$ kesirli sayı değilmiş⁵.

Okur, alıştırma olarak, önereceğim şu kanıtı denesin: a ve b sayıları için, $\sqrt[3]{3} = a/b$ eşitliğini varsayalım. O zaman

$$\sqrt[3]{3} = (3b - a)/(a - b)$$

eşitliği geçerlidir ve $0 < 3b - a < a$ dir. Sonsuz inişle çelişki elde edilir.

4 Bu örnek yöntemi açıklaması açısından iyi bir örnekse de, yöntemin gücünü ne yazık ki tam gösteremiyor. Fermat bu yöntemle çok daha derin sonuçlar elde etmiştir. Fermat Ne Biliyordu? (II) başlıklı yazıda (sayfa 123), Fermat'ın kanıtlarından birini vereceğiz ve yöntemin gücü daha iyi anlaşılacak.

5 Aslında sonsuz iniş yöntemini ilk Eski Yunanlılar bulmuşlardır. Nitekim verdiğim kanıt Eski Yunanlılara aittir. Ama sanırım Eski Yunanlılar bu yöntemi kullanarak bir tek bu teoremi ve çeşitlemelerini kanıtlamışlardır. Yöntemi ilk kez sistematik olarak uygulayan Fermat'dır. Fermat, sayılar kuramıyla ilgili teoremlerinin çoğunu ya sonsuz çıkışla ya da sonsuz inişle kanıtlamıştır, daha doğrusu kanıtladığını öne sürmüştür, çünkü Fermat teoremlerinin kanıtını pek yazmazdı.

Böyle de Oyun Olur mu?

Bu yazıdaki oyun bir küme bilyeyle ve iki oyuncu arasında oynanıyor. İki oyuncunun önüne bir küme bilye konuyor. Birinci oyuncu bu kümeyi ikiye ayırmak zorunda. İstedığı gibi ayırabilir. Böylece oyunda iki bilye kümesi olur. Şimdi sıra ikinci oyuncuda. İkinci oyuncu bu iki bilye kümesinden birini ikiye ayırır. Oyun böylece sürer. Tek bilyelik kümeler ikiye ayrılamaz elbet. Ayıracak kümesi kalmayan, yani hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybeder.

Diyelim oyuna 5 bilyelik bir kümeyle başlandı. Birinci oyuncu bu kümeyi 2 bilyelik ve 3 bilyelik olarak iki kümeye ayırabilir. Bu durumu (2,3) olarak gösterelim. Şimdi sıra ikinci oyuncuda. İkinci oyuncu 2 bilyelik kümeyi ikiye ayırıp oyunu (1, 1, 3) durumuna sokabilir. Sıra birinci oyuncuda. Birinci oyuncunun pek seçeneği yok; üç bilyelik kümeyi ikiye ayırıp oyunu (1, 1, 1, 2) durumuna sokacak. İkinci oyuncu da 2 bilyelik kümeyi ikiye ayırıp oyunu (1, 1, 1, 1, 1) durumuna sokacak. Birinci oyuncuya hamle kalmadı. Demek ki birinci oyuncu oyunu kaybetti.

Bu oyunu kim ve nasıl oynayarak kazanır? İki oyuncudan birini kazandıran iyi bir strateji var mı?

Diyelim a tane bilyemiz var. Oyun en çok kaç hamle sürebilir? Oyun nasıl oynanırsa oynansın, oyunun $a - 1$ hamle sü-

receğini savlıyorum. Yani oyun, nasıl oynanırsa oynansın, toplam bilye sayısından bir eksik hamlede biter. Savımı hemen kanıtlayayım.

Birinci Kanıt: Savımı tümevarımla kanıtlayacağım; bilye sayısı, yani a üzerine tümevarımla¹... Önce $a = 1$ olsun. Yani 1 bilyelik bir kümemizin olduğunu varsayalım. Birinci oyuncu daha oyuna başlayamadan kaybeder. Demek ki bu oyun 0 hamle, yani $a - 1$ hamle sürer. Eğer $a = 1$ ise, oyunun $a - 1$ hamle süreceğini kanıtladık.

Şimdi $a > 1$ olsun. Tümevarım varsayımımıza göre, a 'dan az bilyesi olan oyunlar, nasıl oynanırlarsa oynansınlar, bilye sayısından bir eksik hamle sürerler. Birinci oyuncu ilk hamlesini yaptı. a bilyelik kümeyi iki kümeye ayırdı. Diyelim birinci kümede b tane, ikinci kümede c tane bilye bıraktı. Demek ki oyun (a) oyunundan (b, c) oyununa dönüştü. $b + c = a$ elbet, bilye sayımız değişmedi... Şimdi önümüzde iki oyun var. Biri b bilyelik, öbürü c bilyelik. b ve c sayıları a 'dan küçük olduklarından -tümevarım varsayımımıza göre- b kümeli oyun $b - 1$ hamle, c kümeli oyun $c - 1$ hamle sürer. Oyunu a oyunundan (b, c) oyununa dönüştüren ilk hamle zaten yapılmıştı. Demek ki toplam $1 + (b - 1) + (c - 1)$ hamlede oyun bitecek. Bu toplamı hesaplamak oldukça kolay:

$$1 + (b - 1) + (c - 1) = b + c - 1 = a - 1,$$

çünkü $b + c = a$. Demek ki b ve c ne olurlarsa olsunlar, oyun $a - 1$ hamlede bitecek. Bizim de kanıtlamak istediğimiz buydu.

İkinci Kanıt: a bilyeyi yanyana dizelim. İkiye ayıracağımız yere bir çubuk yerleştirelim. İkinci oyuncu da öyle yapsın. Çubuk konacak $a - 1$ yer vardır! Kanıt bitmiştir. $\square$

1 “Sonsuz İniş ve Sonsuz Çıkış” yazısında (sayfa 63) açıklanmıştır tümevarımla kanıt yöntemi.

Dolayısıyla, a bilyelik oyunu, eğer a çiftse birinci oyuncu, tekse ikinci oyuncu kazanır. Oyuncular nasıl oynarlarsa oynasınlar... Düşünmelerine gerek yok. Ama düşünmelerine gerek olmadığını bulmak için düşünmek zorunda kaldık! Bayılırım bu tür oyunlara...

Bu oyuna biraz tuz biber ekleyelim, yeni bir kural getirelim: Oyuncular bilyeleri tam ortadan ikiye ayıramasınlar. Örneğin 12 bilyelik bir bilye kumesi iki tane altılık kümeye dönüştürülemesin. Bu yeni oyun çok daha ilginç. Eğer $n = 1, 2, 4, 7, 10, 20, 23, 26$ ise, ikinci oyuncunun kazanan stratejisini olduğunu arkadaşlarımla hesapladık. Eğer $n < 28$ ise ve n yukardaki sayılardan birine eşit değilse, birinci oyuncunun kazanan stratejisi vardır. Bundan başka bu oyun üzerine pek bir şey bilmiyorum.

Bölünebilme

Bir tamsayının üçe ya da dokuza tam olarak bölünüp bölünmediğini anlamak için çok bilinen bir yöntem vardır: Sayıyı oluşturan rakamlar toplanır. Eğer bu toplam üçe (dokuza) bölünüyorsa, sayı da üçe (dokuza) bölünüyordur. Örneğin, 2571 üçe bölünür, çünkü $2 + 5 + 7 + 1$, yani 15, üçe bölünür. Öte yandan 2571 dokuza bölünmez, çünkü 15 dokuza bölünmez. Bu yöntemle, bir sayı üçe ya da dokuza bölündüğünde kalan da bulunabilir. Örneğin 1994 üçe bölündüğünde kalan 2'dir, çünkü $1 + 9 + 9 + 4$, yani 23, üçe bölündüğünde kalan 2'dir. Aynı yöntemle, 1994 dokuza bölündüğünde kalanın 5 olduğu anlaşılır.

Onbire bölünebilme yöntemi de -yukardaki yöntemler kadar olmasa bile- oldukça iyi bilinir. Bir tamsayının onbire tam bölünüp bölünmediğini anlamak için, şunlar yapılır: 1) Tamsayının birinci, üçüncü, beşinci... tek sayılı basamakları toplanır; 2) Sonra ikinci, dördüncü, altıncı... çift sayılı basamakları toplanır; 3) Bu iki toplamdan küçüğü büyüğünden çıkarılır; 4) Eğer çıkarma sonucu bulunan sayı onbire bölünüyorsa tamsayımız da onbire bölünüyor demektir.

Örneğin, 2.753.087 onbire bölünmez, çünkü $2 + 5 + 0 + 7 = 14$, $7 + 3 + 8 = 18$ ve aralarındaki fark 4'tür. Öte yandan,

2678430964 onbire bölünür, çünkü,

$$2 + 7 + 4 + 0 + 6 = 19,$$

$$6 + 8 + 3 + 9 + 4 = 30$$

ve aralarındaki fark 11'dir. Bu yöntemle kalan da bulunabilir, yazının sonunda umarım okur kalanın nasıl bulunabileceğini kendi kendine çıkaracaktır.

İşte bu yazının amacı yukardaki yöntemlerin neden başarılı olduklarını okura anlatmaktır.

Ayrıca bir sayının 7'ye ve 13'e bölünmesi için gerekli ve yeterli oldukça basit kuralları da vereceğiz.

Başlıyoruz!

Bundan böyle 7 sifıra eşit olsun!

"7 sifıra eşit değil ki," deyip karşı çıkabilirsiniz. Haklısınız, 7 sifıra eşit değildir. Daha doğrusu **her zaman** eşit değildir. Ama kimi zaman 7 sifıra eşittir. Bir örnekle bu savımı savunayım: Diyelim bugün pazar ve size şöyle bir soru soruldu: 145 gün sonra günlerden ne olacak? Her 7 gün sonra günler yinelendiğinden, 140 gün sonra gene pazar olacak, dolayısıyla 145 gün sonraki gün aslında 5 gün sonraki gün olacaktır. Yani 145 gün sonra günlerden cuma olacak.

Bu sorunun yanıtını bulmak için 7'yi sıfır yaptık (aşağıdaki hesapta, ancak 7 sifıra eşitlendiğinde geçerli olan eşitlikleri $=_7$ olarak gösterdim):

$$145 = 140 + 5 = (7 \times 20) + 5 =_7 (0 \times 20) + 5 = 0 + 5 = 5.$$

Demek ki günleri hesaplamak için kullanılan aritmetikte 7 sifıra eşitlenebiliyor.

Yine de dikkatli olmak gerekiyor. Günleri hesaplamakta bile olsa her 7 sifıra eşit değildir. Bir örnekle bu noktaya açıklık getiriyim: Diyelim bugün günlerden pazar ve 256 gün sonraki günü bulmak istiyoruz. $256 = (7 \times 36) + 4$ olduğundan 256 gün sonra günlerden perşembe olur. Peki aşağıdaki hesaba ne dersiniz?

$$256 = 2^8 = 2^7 + 1 =_7 2^0 + 1 = 2.$$

Bu kez değişik bir yanıt bulduk. Bir yerde bir yanlış yaptık, ama nerde? İkinci hesabımız yanlış. Çünkü ikinci hesabımızda tepede bulunan 8, günleri değil ikileri saymakta kullanılıyor: 2^8 demekle 2 sayısının kendisiyle sekiz kez çarpılacağı söyleniyor. Yani buradaki sekizin görevi başka. Ama günleri saymakta kullanılan 7'leri hiç çekinmeden sıfırlayabiliriz.

Kimi zaman da 2'yi sıfıra eşitlemek işimize gelebilir. Örneğin, masanın üstünde duran bir paranın tura yüzü görünüyorsa ve bu parayı 145 kez çevirirsek, üste yazı yüzü gelir. Neden? Çünkü, her iki kez çevirdiğimizde, yine tura gözükecek, sanki parayı hiç çevirmemiştik gibi...

Kimi zaman 24'ü sıfıra eşitlemekte yarar vardır. Kimi zaman 12'yi, 60'ı... Okur örnek bulmakta zorluk çekmeyecektir.

Diyelim, bu paragrafta 6'nın sıfır olduğuna karar verdik.

Bunun sonuçlarını irdelemeye çalışalım. Eğer $6 =_6 0$ ise,

$$7 = 6 + 1 =_6 0 + 1 = 1.$$

Bunun gibi $8 =_6 2$ ve $9 =_6 3$. Peki -4 kaçtır? Hesaplayalım:

$$-4 = 0 - 4 =_6 6 - 4 = 2.$$

Demek -4 , 2'ye eşitmiş. Şimdi de -124 'ü hesaplayalım:

$$\begin{aligned} -124 &= -120 - 4 &= -(20 \times 6) - 4 &=_6 -(20 \times 0) - 4 \\ & &= 0 - 4 &=_6 6 - 4 = 2. \end{aligned}$$

Kolayca anlaşılacağı gibi 6 sıfıra eşit olunca, her tamsayı,

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

kümesinin sayılarından birine eşittir. “İyi, güzel, ama ne işe yarar?” diyebilirsiniz. Kimi zaman 6'yı sıfırlamak yararlıdır gerçekten. Örneğin, bir tamsayı altıya bölündüğünde kalanı bulmak istiyorsak hiç çekinmeden 6'yı sıfırlayabiliriz; çünkü 6 altıya bölündüğünde kalan sıfırdır. Örneğin $(17 \times 26) + 25$ altıya bölündüğünde kalanı bulmak istiyorsak, şöyle bir hesap yapabiliriz:

$$(17 \times 26) + 25 =_6 (5 \times 2) + 1 = 11 =_6 5,$$

ve bu sayı altıya bölündüğünde kalanın 5 olduğunu anlarız.

Yukarda yazdıklarımızın kanıtı oldukça kolaydır. Yavaş yavaş kanıtlayalım. Önce tanımdan başlayalım. n sıfır olmayan bir doğal sayı olsun. Bundan böyle eğer a ve b tamsayılar, $a =_n b$ terimi, “ $a - b$ sayısı n sayısına tam bölünür” anlamına, ya da başka bir deyişle, “ a ve b sayıları n 'ye bölündüğünde kalanları eşittir” anlamına gelir.

Örneğin, $1 =_6 7 =_6 13 =_6 -5$.

Birinci tanımımızı kullanarak $=_n$ kavramı üzerine birkaç olgu kanıtlayalım:

Olgu 1. $a =_n a$

Kanıt: $a - a$, yani 0, elbette n 'ye tam bölünür.

Olgu 2. Eğer $a =_n b$ ise, $b =_n a$ 'dır.

Kanıt: Eğer $a - b$ sayısı n 'ye bölünüyorsa, $b - a$ sayısı da n 'ye bölünür.

Olgu 3. Eğer $a =_n b$ ve $b =_n c$ ise, $a =_n c$ 'dir.

Kanıt: Eğer $a - b$ ve $b - c$ sayıları n 'ye bölünüyorsa, $a - c$ sayısı da n 'ye bölünür, çünkü $a - c = (a - b) + (b - c)$ dir.

Olgu 4. Eğer $a =_n x$ ve $b =_n y$ ise, $a + b =_n x + y$ 'dir.

Kanıt: Eğer $a - x$ ve $b - y$ sayıları n 'ye bölünüyorsa,

$$(a + b) - (x + y)$$

sayısı da n 'ye bölünür, çünkü

$$(a + b) - (x + y) = (a - x) + (b - y)$$

dir.

Olgu 5. Eğer $a =_n x$ ve $b =_n y$ ise, $ab =_n xy$ 'dir.

Kanıt: $ab - xy = a(b - y) + y(a - x)$ olduğundan ve $a - x$ ve $b - y$ sayıları n 'ye bölündüğünden, $ab - xy$ sayısı da n 'ye bölünür.

Olgu 6. Eğer $a =_n x$ ise ve $m > 0$ bir tamsayıysa $a^m =_n x^m$.

Kanıt: Olgu 5'i kullanılarak m üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Kanıtlayalım.

Eğer $m = 1$ ise sorun yok: Olgumuzun varsayımına göre

$$a =_n x.$$

Şimdi bu olgunun m için geçerli olduğunu varsayalım (tümevarım varsayımı) ve $m + 1$ için kanıtlayalım. Yani tümevarım varsayımımıza göre,

$$a^m =_n x^m$$

eşitliğini biliyoruz;

$$a^{m+1} =_n x^{m+1}$$

eşitliğini kanıtlamaya çalışacağız. Şimdi $a^m =_n x^m$ (tümevarım varsayımı) ve $x =_n a$ (olgumuzun varsayımı) eşitliklerinden ve Olgu 5'ten,

$$a^{m+1} = a^m a =_n x^m x = x^{m+1}$$

eşitliği çıkar. Olgumuz kanıtlanmıştır.

Bu olguları kullanarak birkaç alıştırma yapalım:

Alıştırma 1. 17^{25} sekize bölündüğünde kaç kalır?

Yanıt: $17^{25} =_8 1^{25} = 1$ olduğundan kalan 1'dir.

Alıştırma 2. 17^{25} dokuz bölündüğünde kaç kalır?

Yanıt: $17^{25} =_9 (-1)^{25} = -1 =_9 8$ olduğundan, yanıt 8'dir.

Alıştırma 3. 17^{25} yediye bölündüğünde kaç kalır?

Yanıt: Bu kez çözüm biraz daha zor. Önce $17 =_7 3$ olduğundan, $17^{25} =_7 3^{25}$ eşitliğini buluruz. Demek 3^{25} 'i hesaplamalıyız. Şimdi de, $3^3 = 27 =_7 -1$ eşitliğinden, $3^6 = (3^3)^2 =_7 (-1)^2 = 1$ eşitliği çıkar. Demek ki $3^{25} = 3^{(6 \times 4) + 1} = (3^6)^4 \times 3 =_4 1^4 \times 3 = 3$ ve dolayısıyla yanıt 3'tür.

Alıştırma 4. m herhangi bir doğal sayı olsun. 10^m üçe ya da dokuza bölündüğünde kaç kalır?

Yanıt: $10 =_3 1$ ve $10 =_9 1$ olduğundan, 10^m sayısı üçe ya da dokuza bölündüğünde 1 kalır.

Üçe ve Dokuza Bölünme. Şimdi bir sayının üçe ve dokuza bölünebilme yönteminin neden başarılı olduğunu anlayabiliriz. Herhangi bir sayı alalım. Diyelim 58.246.309. Ve şimdilik n , 3 ya da 9 olsun. Dördüncü alıştırmaı gözönünde bulundurarak hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} 58.246.309 &= 5 \cdot 10^7 + 8 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 \\ &\quad + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9 \\ &=_n 5 \cdot 1^7 + 8 \cdot 1^6 + 2 \cdot 1^5 + 4 \cdot 1^4 + 6 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 \\ &\quad + 0 \cdot 1^1 + 9 \\ &= 5 + 8 + 2 + 4 + 6 + 3 + 0 + 9 = 37. \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi, 58.246.309 sayısının üçe ya da dokuza bölündüğünde kalanı, 37 sayısının aynı sayıya bölündüğünde kalanına eşit.

Onbire Bölünme. Şimdi de onbire bölünebilme kuralına bakalım. $10 =_{11} -1$ olduğundan,

$$10^n =_{11} \begin{cases} 1 & n \text{ çiftse} \\ -1 & n \text{ tekse} \end{cases}$$

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} 58.246.309 &= 5 \cdot 10^7 + 8 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 \\ &\quad + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9 \\ &=_{11} -5 + 8 - 2 + 4 - 6 + 3 - 0 + 9 = 11 \\ &=_{11} 0. \end{aligned}$$

Demek ki 58.246.309 onbire tam bölünür.

Şimdi, bir sayının yediye ve onüçe bölünebilme kurallarını bulalım. Önce herkesin bildiği ikiye bölünebilme kuralından başlayalım. Yavaş yavaş yediye ve onüçe geleceğiz.

İkiye Bölünme. Bir sayının ikiye (tam olarak) bölünüp bölünmediğini anlamak çok kolaydır. Eğer sayının son rakamı ikiye bölünüyorsa, yani sayı 0, 2, 4, 6, 8 rakamlarından biriyle bitiyorsa, o zaman o sayı ikiye bölünür. Örneğin 121 ikiye bölünmez, öte yandan 124 ikiye bölünür.

İlkokul çocuklarının bile bildiği bu kuralı kanıtlayalım. Herhangi bir x sayısı ele alalım. x 'in ikiye bölünüp bölünmediğini anlamak istiyoruz. Tek basamaklı (yani 10'dan küçük) öyle bir b sayısı vardır ki, belli bir a sayısı için, x 'i $10a + b$ biçiminde yazabiliriz, yani $x = 10a + b$ eşitliği geçerlidir. Örneğin,

$$25 = 2 \times 10 + 5 \quad (a = 2, b = 5)$$

$$256 = 25 \times 10 + 6 \quad (a = 25, b = 6)$$

$$2561 = 256 \times 10 + 1 \quad (a = 256, b = 1).$$

$x = 10a + b$ olduğundan ve 10 ikiye bölündüğünden, x 'in ikiye bölünmesi için yeterli ve gerekli koşul b 'nin ikiye bölünmesidir, yani b 'nin 0, 2, 4, 6, 8 sayılarından biri olmasıdır. Ve b elbette x 'in son rakamıdır...

Beşe Bölünme. Bir sayının beşe bölünmesi için son rakamının ya 0 ya 5 olması gerekir. Bunu da herkes bilir.

Bu kuralın da kanıtı yukardaki gibidir: Sayımızı $10a + b$ olarak yazalım. Burda b , tek basamaklı (yani 10'dan küçük) bir sayıdır. 10 beşe bölündüğünden, sayımızın beşe bölünmesi için b 'nin de beşe bölünmesi gerekmektedir, yani b ya 0 yada 5 olmalıdır.

Dörde Bölünme. Bir sayının dörde bölünüp bölünmediğini anlamak için o sayının son iki basamağına bakılır. Eğer son iki basamağı oluşturan sayı dörde bölünüyorsa, o zaman sayımız da dörde bölünür. Örneğin 34.527.672 sayısı dörde bölünür, çünkü 72 dörde bölünür.

Neden bu böyledir? Yani neden bu kural geçerlidir? Kanıtlayalım. Tamsayımıza x diyelim. x 'in dörde bölünüp bölünme-

diğini anlamak istiyorum. En fazla iki basamaklı (yani 100'den küçük) öyle bir b sayısı vardır ki, belli bir a sayısı için, $x = 100a + b$ eşitliği geçerlidir. Örneğin,

$$26 = 100 \times 0 + 26 \quad (a = 0, b = 26)$$

$$548 = 100 \times 5 + 48 \quad (a = 5, b = 48)$$

$$5400 = 100 \times 54 + 0 \quad (a = 54, b = 0)$$

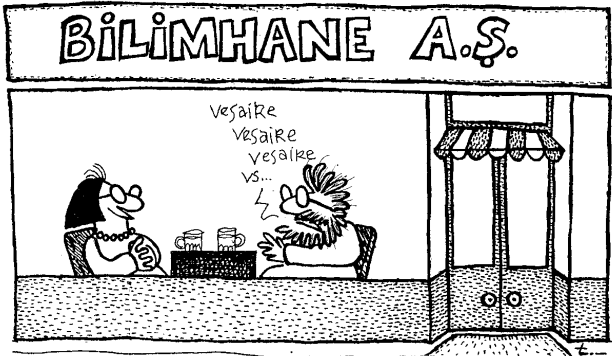
$$42543 = 100 \times 425 + 43 \quad (a = 425, b = 43)$$

100 dörde bölündüğünden ve $x = 100a + b$ olduğundan, x 'in dörde bölünebilmesi için gerekli ve yeterli koşul, b 'nin dörde bölünmesidir. Ve elbette b sayısı, x 'in son iki basamağında ki rakamlardan oluşur. Yukardaki örneklerden yalnızca ikincisi ve üçüncüsü (yani 548 ve 5400) dörde bölünür.

Sekize ve Onaltıya Bölünme. Bir sayının sekize bölünüp bölünmediğini anlamak için o sayının son üç rakamına bakılır. Eğer son üç rakamın oluşturduğu sayı sekize bölünüyorsa, sayı da sekize bölünür. Örneğin 34.527.712 sayısı sekize bölünür, çünkü 712 sekize bölünür.

Bu kuralın neden geçerli olduğunu okur anlamıştır sanırım: 1000'in sekize tam olarak bölünmesinden kaynaklanır.

Bir sayının onaltıya bölünüp bölünmediğini anlamak için o sayının son dört rakamına bakılır. Eğer son dört rakamın oluş-



turduğu sayı onaltıya bölünüyorsa, sayı da onaltıya bölünür. Örneğin 34.521.632 sayısı onaltıya bölünür, çünkü 1632 onaltıya bölünür.

Yediye ve Onüç Bölünme. Yediye ve onüç bölünme kuralları biraz daha az bilinir. Şimdi bu kuralları göreceğiz.

Aslında yediye ve onüç bölünebilme kuralları aynıdır. Bir örnekle açıklayayım. 581.976.024 sayısını ele alalım. Bu sayı yediye/onüç bölünür mü?

Bu soruyu yanıtlamak için aşağıdaki işlemi yapalım: $581 - 976 + 024$. Eğer çıkan sonuç yediye/onüç bölünüyorsa, 581.976.024 sayısı da yediye/onüç bölünür. İşlemi yapalım: $581 - 976 + 024 = -371$. Bulduğumuz -371 sayısı yediye bölünür (sonuç -53 çıkar) ama onüç bölünmez. Demek ki, 581.976.024 sayısı yediye bölünür ama onüç bölünmez.

Yediye ve onüç bölünme kuralının neden doğru olduklarını gösterelim.

Nedenin püf noktası $10^3 + 1 = 7 \times 13 \times 11$ eşitliğindedir.

Bundan da

$$10^3 = 1000 =_7 -1$$

$$10^3 = 1000 =_{13} -1$$

çıkar. Demek ki

$$10^{3n} =_7 (-1)^n$$

$$10^{3n} =_{13} (-1)^n$$

Artık 581.976.024 sayısının neden yediye bölündüğünü anlayabiliriz: (m , 7 ya da 13'e eşit olsun.)

$$\begin{aligned} 581.976.024 &= (581 \times 10^9) + (976 \times 10^6) + (24 \times 10^3) \\ &=_m - 581 + 976 - 24 = -371. \end{aligned}$$

Demek ki, 581.976.024'ün yediye/onüç bölünmesi için, -371 'in yani 371 'in yediye/onüç bölünmesi gerekir.

Yakınsamak

Bu yazıda, ilerde sık sık kullanacağımız bir olguyu tanımlayacağız ve matematiğin en önemli kavramlarından birine (limit kavramına) değineceğiz.

Aslında okur anlatacağım kavramı sezgisel olarak biliyordur. Dolayısıyla, bu yazıyı anlamak daha sonraki yazıları anlamak için bir önkoşul değildir.

0'la 1 arasında herhangi bir sayı alalım. Diyelim 0,9'u aldık. Bu sayıyı kendisiyle tekrar tekrar çarpalım (hesap makinası yararlı olabilir!):

$$\begin{aligned}0,9^1 &= 0,9 \\0,9^2 &= 0,81 \\0,9^3 &= 0,729 \\0,9^4 &= 0,6561 \\0,9^5 &= 0,59049 \\0,9^6 &= 0,531441 \\0,9^7 &= 0,4782969 \\0,9^8 &= 0,43046721 \\0,9^9 &= 0,387420489 \\0,9^{10} &= 0,3486784401 \\0,9^{15} &= 0,205891132... \\0,9^{20} &= 0,121576654...\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0,9^{25} &= 0,071789798... \\
0,9^{30} &= 0,042391158... \\
0,9^{35} &= 0,025031555... \\
0,9^{40} &= 0,014780882... \\
0,9^{45} &= 0,008727963... \\
0,9^{50} &= 0,005153775... \\
0,9^{60} &= 0,00179701... \\
0,9^{70} &= 0,000626578... \\
0,9^{80} &= 0,000218474... \\
0,9^{90} &= 0,000076177... \\
0,9^{100} &= 0,000026561...
\end{aligned}$$

Gördüğümüz gibi sayılar hep küçülüyorlar.

Acaba $0,9$ 'un güçlerini dilediğimiz kadar küçültebilir miyiz? Örneğin, yukarda da görüldüğü üzere $0,001$ 'in altına indik:

$$0,9^{70} = 0,000626578... \leq 0,001.$$

$0,0001$ 'in de altına indik:

$$0,9^{90} = 0,000076177... \leq 0,0001.$$

Dilersek $0,00001$ ve $0,000001$ 'in de altına inebiliriz:

$$0,9^{110} = 0,000009261... \leq 0,00001$$

$$0,9^{132} = 0,000000912... \leq 0,000001.$$

Sıfıra hiç ulaşamayız ama sıfıra dilediğimiz kadar yaklaşabiliriz. Bu yazıda bunu kanıtlayacağız¹.

Öte yandan bu diziyle -1 'e dilediğimiz kadar yaklaşamayız, örneğin $-0,5$ 'in altına inemeyiz, 0 'ın altına bile inemeyiz. Küçülen bu sayılar -1 'e elbet yaklaşırlar, ama dilediğimiz kadar yaklaşmazlar, -1 'le aralarındaki uzaklık 1 'den fazladır hep.

Diyelim ε çok küçük pozitif bir sayı, örneğin $0,000000000001$, hatta daha da küçük, ama 0 değil... Öyle bir n tamsayısı bulabiliriz ki, $0,9^n$ sayısı ε 'dan küçüktür...

1 Meraklı okur, bu olguyu kendi başına, yazının devamını okumadan kanıtlamaya çalışmalı. Başaramayabilir. Önemli değil! Kanıtı daha kolay anlayacaktır.

Bu dediğim yalnızca 0,9 sayısı için değil, 0'la 1 arasındaki herhangi bir sayı için geçerlidir:

Teorem 1. *r , 0'la 1 arasında herhangi bir sayı olsun: $0 < r < 1$. ε , 0'dan büyük hangi sayı olursa olsun. Öyle bir n tamsayısı vardır ki, $r^n < \varepsilon$ eşitsizliği geçerlidir. Hatta öyle bir N tamsayısı vardır ki $n > N$ ise $r^n < \varepsilon$ dir.*

Yani, n 'yi yeterince büyük seçersek, r^n sayılarını dilediğimiz kadar küçültebiliriz.

Örneğin $r = 0,9$ ve $\varepsilon = 0,00001$ ise, yukarda gördüğümüz üzere, n 'yi 110, hatta 110'dan büyük herhangi bir tamsayı alabiliriz.

Teoremin kanıtına başlıyorum.

Aradığım n tamsayısını yavaş yavaş bulacağım. Önce bir önsav:

Önsav. *$s > -1$ herhangi bir sayıysa ve n herhangi bir doğal sayıysa, $(1 + s)^n \geq 1 + ns$ eşitsizliği geçerlidir.*

Önsav'ın Kanıtı: $s > -1$ herhangi bir sayı olsun.

Önsavı, n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Yani, önsavın önce $n = 0$ için geçerli olduğunu kanıtlayacağız; arkasından, önsavın herhangi bir n doğal sayısı için geçerli olduğunu varsayıp, bir sonraki doğal sayı olan $n + 1$ için geçerli olduğunu kanıtlayacağız².

Eğer $n = 0$ ise, $1 + s > 0$ olduğundan,

$$(1 + s)^n = (1 + s)^0 = 1 = 1 + 0s = 1 + ns$$

dir. Dolayısıyla, $n = 0$ ise önsav doğrudur.

2 Tümevarımla kanıt yöntemi, “Sonsuz İniş ve Sonsuz Çıkış” adlı yazıda (sayfa 63) ayrıntılarıyla açıklanmıştır.

Şimdi önsavın n doğal sayısı için geçerli olduğunu varsayalım ve önsavı bir sonraki doğal sayı olan $n + 1$ için kanıtlayalım. Yani,

$$(1 + s)^n \geq 1 + ns$$

eşitsizliğini doğru varsayıp,

$$(1 + s)^{n+1} \geq 1 + (n+1)s$$

eşitsizliğini kanıtlayalım. Başlıyoruz:

$$\begin{aligned} (1 + s)^{n+1} &= (1 + s)^n(1 + s) \geq (1 + ns)(1 + s) \\ &= 1 + (n + 1)s + ns^2 \geq 1 + (n + 1)s. \end{aligned}$$

Kanıtımız bitmiştir. (İlk eşitsizlikte tümevarım varsayımı olan $(1 + s)^n \geq 1 + ns$ ve $1 + s > 0$ eşitsizliklerini kullandık.)

Teorem 1'in Kanıtı: Şimdi teoremimizi kanıtlayabiliriz.

r , 0'la 1 arasında bir sayı olsun, yani $0 < r < 1$ eşitsizliği sağlansın.

ε , 0'dan büyük herhangi bir sayı olsun.

$r^n < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir n doğal sayısı bulacağız.

Birkaç sayı tanımlayalım:

- $s = (1-r)/r$ olsun. s pozitif bir sayıdır.
- m , $1/s$ 'den büyük bir tamsayı olsun, yani $ms \geq 1$ eşitsizliği doğru olsun.

- k , $\varepsilon \geq 1/k$ eşitsizliğini sağlayan bir doğal sayı olsun. Böyle bir k doğal sayısı vardır elbet. Örneğin, $\varepsilon = 0,0000375$ ise, k 'yı 100.000 alabiliriz.

- $n = (k - 1)m$ olsun.

Şimdi bakalım her şey yolunda mı:

$$\begin{aligned} r^n &= \frac{1}{(1/r)^n} = \frac{1}{\left(\frac{r + (1-r)}{r}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1-r}{r}\right)^n} = \frac{1}{(1+s)^n} \\ &\leq \frac{1}{(1+ns)} = \frac{1}{(1+(k-1)ms)} \leq \frac{1}{(1+(k-1))} = \frac{1}{k} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Evet, her şey yolundaymış³. Dilediğimizi kanıtladık.

Matematikte bu şöyle dile getirilir: n sonsuza gittiğinde, r^n sayı dizisi 0'a yakınsar⁴. Ve şöyle yazılır:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0.$$

Yani aslında aşağıdaki teoremi kanıtladık:

Teorem 2. *Eğer $0 < r < 1$ ise, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$.*

Bir başka sayı dizisine bakalım: $1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots$ Bu sayı dizisi de 0'a yakınsar. Örneğin, 1.000.001'inci terim 0,000001'in altına iner. Genel olarak pozitif bir ε sayısının altına inebilir miyiz? Evet! Eğer n , $1/\varepsilon$ 'den büyük bir tamsayıysa (ki öyle bir tamsayı vardır elbet), $1/n$, ε 'den küçük olur. Aşağıdaki teoremi kanıtladık:

Teorem 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$.

$1/n$ dizisi 0'a yakınsadığından, $1/n^2, 1/n!$ gibi diziler de 0'a yakınsarlar çünkü bu sayılar $1/n$ 'den daha küçüktürler⁵.

Teorem 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n! = 0$.

3 Bu eşitsizliklerde sayıların tanımlarını ve bir önceki önsavı kullandık.

4 Tam matematiksel tanım şöyledir: Eğer her $\varepsilon > 0$ için, $|a_n - \ell| < \varepsilon$ eşitsizliğinin her $n > N$ için sağlandığı bir N sayısı varsa, $(a_n)_n$ sayı dizisi ℓ 'ye yakınsar denir.

5 Eğer n pozitif bir doğal sayıysa, $n!$ sayısı $1 \times 2 \times \dots \times n$ olarak tanımlanır. Örneğin, $1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24$ 'tür. $0!$ sayısı, ayrıca, 1 olarak tanımlanır.

Olasılık Hesapları (I)

Olasılık hesaplarına günlük yaşamımızda sık sık gereksiniriz. Örneğin tavla ya da kâğıt oyunları oynarken. İki kapağıya üstüste birkaç kez gele atmayan tavlacı görmedim hiç. Şanssızlık deriz. Elbet, dört kez gele atan üç kez gele atandan daha şanssızdır. Bu yazının amaçlarından biri de “daha şanssız” sözcüğüne matematiksel anlam kazandırmak olacak. Bir sonraki yazıda sonsuz olayların olasılığından sözedeceğiz.

Boş bir zamanınızda, evinizdeki tavlanın zarlarından birini 6000 kez atın. Gelen zarları bir kâğıda yazın. Aşağı yukarı bin kez yek (1), bin kez dü (2), bin kez se (3), ... gelmeli, yani her yüzün gelme olasılığı aşağı yukarı aynı olmalı. Eğer yalnızca 500 kez penç (5) gelmişse zarınız hileli demektir. Aslında her zar hilelidir. Bir yüzü biraz daha ağır, daha eğik, daha aşınmış ya da daha kaygan olabilir. Her zarın zaafı olduğu, yakınlık duyduğu bir sayı vardır. Tavlaya oturmadan önce zarların zaafını iyi bilmek gerekir. Ki ona göre oynayasınız! Tavlanın da deplasmanı vardır!

Tavlamın zarlarından birini 400 kez attım. İşte elde ettiğim sonuçlar:

	1	2	3	4	5	6
İlk 100 atış	17	16	13	25	13	16
İlk 200 atış	38	31	31	41	28	31
İlk 300 atış	54	59	42	59	39	47
İlk 400 atış	70	76	59	77	58	60

Sanki zarımın cehara (4'e) bir zaafı varmış gibi görünüyor.

Bu sonuçları 1 üzerine yazalım, yani ortalamalarını alalım. Örneğin 400 atışta 77 kez cehar geldiğini belirten yere 77/400, yani 0,1925 yazalım. Şu sonuçları buluruz:

	1	2	3	4	5	6
İlk 100 atış	0,17	0,16	0,13	0,25	0,13	0,16
İlk 200 atış	0,19	0,155	0,155	0,205	0,14	0,155
İlk 300 atış	0,18	0,196	0,14	0,197	0,13	0,157
İlk 400 atış	0,175	0,19	0,1475	0,1925	0,145	0,15

Ortalamanın üstündeki sonuçları siyah puntolu harflerle yazdım. Ortalamanın kaç olması gerekiyordu? Zarlar hilesizse ortalamanın 1/6, yani 0,1666... olması gerekir, çünkü bir zarda 6 yüz vardır. Ceharların ortalaması hep yüksek çıkmış, ama bu ortalama gittikçe azalıyor ve beklenen 1/6 ortalamasına yaklaşıyor. 6 bin kez zar attığımda, kimbilir, belki de beklenen ortalama daha çok yaklaşacak. Yukardaki sonuçlar zarımın tam zaafını göstermeyebilirler. Yeterince zar atmadım. Ama son sonuçların doğru olduğunu varsayacak olursam, 100 atışta ortalama 19 kez cehar (4) ve 14 kez penç (5) geldiği sonucunu çıkarırım. Ona göre tavla oynamalıyım (ikinci zarla da aynı deneyi yapmalıyım elbet.)

Elimize bir zar alalım. Altı yüzlü ve hilesiz bir zar... Öyle bir zarın olduğunu varsayalım. Her yüzün gelme olasılığı aynıdır: yek (1) gelme olasılığı, dü (2) gelme olasılığından fazla değildir. Zarın altı yüzü olduğundan ve her sayının gelme olasılığı aynı olduğundan, örneğin yek gelme olasılığına 1/6 demek en doğrusudur. Eğer $i = 1, \dots, 6$ ise, $o(i)$, i sayısının gelme olasılığı olsun. Sez-gilerimize dayanarak yazalım:

$$o(1) = 1/6 = 0,16666....$$

$$o(2) = 1/6$$

$$o(3) = 1/6$$

$$o(4) = 1/6$$

$$o(5) = 1/6$$

$$o(6) = 1/6.$$

Zar hilesiz olduğundan, $o(7) = 0$ da yazabilirdik!

Tüm olasılıkların toplamının 1 olduğuna dikkatinizi çekerim. Günlük yaşamda olasılıklar 100 üzerine hesaplanır, ama matematikte en büyük olasılık 1'dir. Günlük yaşamda kullanılan %75'in matematikçesi 0,75 ya da $3/4$ 'tür.

Hilesiz zarlarla çift sayı atma olasılığını bulalım, yani, 2, 4, 6 sayılarından birinin gelme olasılığını. Her sayının gelme olasılığı $1/6$ olduğundan, çift sayı gelme olasılığı,

$$o(2) + o(4) + o(6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$$

dir. Ve elbet tek sayı gelme olasılığı da, çift sayı gelme olasılığı gibi, $1/2$ 'dir.

Olasılık kuramcıları, yukardaki soruda karşımıza çıkan,

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

kümesine **olaylar kümesi** derler. Örneğin, “yek” bir olaydır ve yek olayının (gerçekleşme) olasılığı $1/6$ 'dır.

Şimdi işleri biraz zorlaştıracakız ve iki (hilesiz) zar atacağız. İlk önce iki zarı birbirinden ayıralım: Zarlardan birine birinci zar, öbürüne ikinci zar diyelim (dilerseniz zarları iki ayrı renge boyayın.) Her iki zarın da altışar yüzü olduğundan, otuz altı “olay” var:

1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

Dikkat ettiyseniz, 1-2 ve 2-1 zarlarını (olaylarını) ayrı yaz-

dım, yani iki ayrı olay olarak gösterdim. Çünkü iki zarı birbirinden ayırıyorum: Birinci zar yeki, ikinci zar düyü gösteriyorsa, gelen zara 1–2 diyorum; tam tersiyse 2–1. Zarlar hilesiz olduğundan her olayın olasılığı aynıdır. Dolayısıyla, $o(i-j)$ sayısı, $i-j$ olayının (zarının) olasılığıysa,

$$o(i-j) = 1/36$$

dır. Örneğin,

$$o(1-1) = o(1-2) = o(2-1) = o(3-4) = 1/36.$$

Bunu şöyle de gösterebiliriz. Zar atacağımıza, yukardaki tabloya rastgele bir taş atalım. 36 hücre olduğundan ve bir hücrenin öbür hücreye göre bir özelliği olmadığından, taşın, örneğin 3–4 hücresine düşme olasılığı $1/36$ 'dır.

Ama tavlada zarlar birbirinden ayırt edilmez. Biz de ayırt etmeyelim. O zaman 1-2 ve 2-1 olaylarını bir olay olarak algılayıp (1, 2) olarak gösterelim. Olayları yukardaki gibi sıralayalım (üstteki tabloyu ikiye katlayarak):

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
		(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
			(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
				(5, 5)	(5, 6)
					(6, 6)

Toplam 21 olayımız var. Ama bu kez her olayın olasılığı aynı değil. Örneğin (1, 2) olayının olasılığı

$$1/36 + 1/36 = 2/36,$$

çünkü (1, 2) zarı için ya 1-2 ya da 2-1 gerekli. (1,2) olayının olasılığı şöyle bulunur:

$$o(1, 2) = o(1-2) + o(2-1) = 1/36 + 1/36 = 2/36.$$

Öte yandan, (1, 1) zarının gelme olasılığı $1/36$ 'dır. Demek ki, eğer $i \neq j$ ise, $o(i, j) = 2/36$ 'dır ve $o(i, i) = 1/36$ 'dır. (Özellikle $2/36$ yerine $1/18$ yazmıyoruz, ilerde kolaylık olacak.)

Alıştırma olarak, çeşitli olasılıklar hesaplayalım.

İki kapıya gele atma olasılığı. Bu kapıların 1 ve 2 kapıları olduğunu varsayalım. Demek ki (1, 1), (1, 2) ya da (2, 2) atma olasılığını hesaplayacağız. Bu da,

$o(1, 1) + o(1, 2) + o(2, 2) = 1/36 + 2/36 + 1/36 = 4/36 = 1/9$ dur. İki kez iki kapıya gele atma olasılığıysa $1/9 \times 1/9 = 1/81$ 'dir. Yedi kez iki kapıya gele atma olasılığıysa $(1/9)^7 = 1/9^7$ dir. (Aşağı yukarı, piyangoda en büyük ikramiye çıkma olasılığına eşit!)

Yek atma olasılığı $= o(1, 1) + o(1, 2) + \dots + o(1, 6) = 1/36 + (5 \times 2/36) = 11/36$. Demek ki, yek atma olasılığı $1/3$ 'ten biraz daha az.

Cehar atma olasılığı. Yukardaki gibi hesaplanır ve $11/36$ bulunur.

Dört hane ilerdeki bir pulu kırma olasılığı. Dört hane ilerdeki bir pulu kırma olasılığını hesaplayacağız. Dört hane ilerdeki pulu kırmak için ya cehar (4) atmak gerekir ya da (1, 1), (1, 3) ve (2, 2) zarlarından birini (arada kapı olmadığını varsayıyoruz.) Demek ki dört hane ilerdeki bir pulu kırma olasılığı,

$$o(4) + o(1, 1) + o(1, 3) + o(2, 2) = 11/36 + 1/36 + 2/36 + 1/36 = 15/36$$

dır.

Altı ve sekiz hane ilerdeki iki puldan en az birini kırma olasılığı. Altı hane ilerdeki pulu kırmak için ya zarlardan biri 6 gelmeli ya da (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 3) zarlarından birini atmalı. Sekiz hane ilerdeki pulu kırmak içinse (2, 2), (2, 6), (3, 5), (4, 4) zarlarından birini atmalı. Dolayısıyla olasılık

$$\begin{aligned} o(6) + o(1,5) + o(2,2) + o(2,4) + o(3,3) + o(3,5) + o(4,4) \\ = 11/36 + 2/36 + 1/36 + 2/36 + 1/36 + 2/36 + 1/36 \\ = 20/36 = 5/9 \end{aligned}$$

dur, yüzde elliden biraz fazla.

n hane ilerdeki bir pulu kırma olasılığı. Eğer $n = 13$ ya da 14 ise, bu olasılık sıfırdır elbet. Ama $n = 15$ ise pulu dübeşle, yani (5, 5)'le kırabiliriz. Bunun da olasılığı $1/36$ 'dır. Okur bu olasılıkları şimdiye değin öğrendikleriyle hesaplayabilir. Bu olasılıkları bir tabloda gösterelim:

$n = \text{uzaklık}$	Kırma olasılığı
1	11/36
2	12/36
3	14/36
4	15/36
5	15/36
6	17/36
7	6/36
8	6/36
9	5/36
10	3/36
11	2/36
12	3/36
15	1/36
16	1/36
18	1/36
20	1/36
24	1/36

Üç zara geçmeden önce, tavlının sınırlı bir oyun olduğunu belirtiyim. Yazdıklarımın tavlının yüksek düzeyde matematik bilgisi gerektirdiğini sandığımı sanılmasın. Ama tavlacıyım diye geçinen olasılık kuramının temelini bilmelidir.

Şimdi üç zar alalım elimize. Yine ilk önce zarlardan herbirini öbürlerinden ayırt edelim: birinci zar, ikinci zar ve üçüncü zar. $6^3 = 216$ olay var ve her olayın olasılığı aynı olduğundan, her zarın gelme olasılığı $1/216$ 'dır. Örneğin,

$$o(1-2-5) = o(1-5-2) = o(2-1-5) = o(2-5-1)$$

$$= o(5-1-2) = o(5-2-1) = 1/216$$

dır. Ancak zarları birbirinden ayırt etmemek en doğal olanı. Biz de etmeyelim. Olay sayımız azaldı, çünkü şimdi, örneğin 1-2-5 ve 5-1-2 olayları arasında bir ayırım yapmıyoruz¹. Bu zara (1, 2, 5) adını verelim. Kolayca görüleceği gibi,

$$o(1, 2, 5) = o(1-2-5) + o(1-5-2) + o(2-1-5) + o(2-5-1) + o(5-1-2) + o(5-2-1) = 6/216 = 1/36.$$

Bunun gibi, $o(3, 4, 6)$ da $1/36$ 'ya eşittir. Ama

$$o(2, 2, 5) = o(2-2-5) + o(2-5-2) + o(5-2-2) = 3/216 = 1/72,$$

ve

$$o(2, 2, 2) = o(2-2-2) = 1/216$$

dır.

Alıştırma olarak, üç zarla toplam 10 atma olasılığını hesaplayalım:

$$o(1,3,6) + o(1,4,5) + o(2,2,6) + o(2,3,5) + o(2,4,4) + o(3,3,4) = 27/216 = 1/8 = 0,125.$$

1 Üç zarda olay sayımız 56'dır. Genel olarak, n zarda olay sayısı kaçtır?

Olasılık Hesapları (II)

Bir önceki yazıdaki örneklerde olay sayısı sonluydu. Örneğin, iki zarla 21 olay vardı. Şimdi olay sayımızı sonsuz yapacağız.

Kolay bir soruyla başlayalım: $[0, 1]$ aralığında rastgele seçilen bir gerçel (reel) sayının, $1/2$ 'den büyük olma olasılığı kaçtır? Yanıt $1/2$ 'dir. Çünkü, $[0, 1]$ aralığındaki sayıların “yarısı” $1/2$ 'den büyük, öbür “yarısı” ise $1/2$ 'den küçüktür.

Kolay bir soru daha: $[0, 1]$ aralığında seçilen bir sayının $1/6$ 'yla $3/7$ arasında olma olasılığı kaçtır? Yanıt $3/7 - 1/6 = 11/42$ 'dir.

Buraya dek şaşılasi bir şey yok.

Peki, $[0, 1]$ aralığında seçilen bir sayının $1/2$ 'ye eşit olma olasılığı kaçtır? Sıfırdır! Önsezi zorlanıyor biraz burda. Çünkü $1/2$ sayısı var ve bana, “bal gibi $1/2$ 'yi seçebilirim” diyebilirsiniz. Ben de size, “madem öyle, bahse girelim” diyebilirim. Bahse girmek istemezsiniz elbet. Çünkü kazanma olasılığınız sıfırdır! Olay sayısı sonsuzsa ve her olayın gerçekleşme olasılığı aynıysa, o zaman, tek bir olayın olasılığı sıfırdır. Şöyle açıklanabilir bu: Diyelim $1/2$ 'yi seçme olasılığı $0,0001$. O zaman, herhangi bir sayıyı seçme olasılığı da $0,0001$ 'dir ve dolayısıyla aşağıdaki

$1/10.000, 2/10.000, 3/10.000, \dots, 10.000/10.000$

onbin sayıdan birini seçme olasılığını bulmak için $0,0001$ 'i on

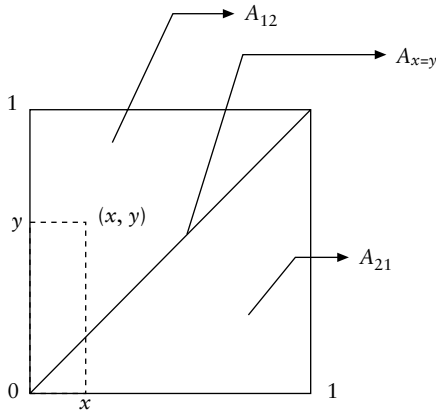
bin kez toplarız ve 1 buluruz, yani %100 olasılık! Olacak şey değil! Demek ki $1/2$ sayısını seçme olasılığı sıfır olmalıdır.

Bu dediğimiz, salt $1/2$ için değil, her sayı için geçerlidir. $[0, 1]$ aralığında, önceden belirlenen bir sayıyı seçme olasılığı sıfırdır. Gerçekle çatışmıyor bu. Eğer dilerseniz $1/2$ 'yi seçebilirsiniz elbet. Ama ancak isterseniz!.. Rastgele bir sayı seçtiğinizde $1/2$ 'yi seçemezsiniz.

Kesinlikle bir sayı seçeceksiniz. Ondan kuşku yok. Ama seçtiğiniz bu sayıyı önceden bilebilme olasılığınız 0'dır!

Şimdi iki sayı seçeceğiz. Sayıları sırayla seçeceğiz, yani birinci sayıyla ikinci sayı arasında ayrım yapacağız. Soru şu: $[0, 1]$ aralığında rastgele ve sırayla iki sayı seçersek, ikinci sayının, birinci sayıdan büyük olma olasılığı kaçtır?

Birinci sayıya x diyelim, ikinci sayıya y . Rastgele (ama sırayla) iki sayı seçmek demek, $[0, 1] \times [0, 1]$, yani $[0, 1]^2$ karesinde rastgele bir (x, y) noktası seçmek demektir.



Yukardaki resimde $[0, 1]^2$ karesi üç olay bölgesine ayrılmış:

$$A_{12} = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x < y\}$$

$$A_{21} = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x > y\}$$

bölgeleri ve çaprazdaki çizgi, yani,

$$A_{x=y} = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$$

çizgisi. Resimden de anlaşıldığı üzere, $[0, 1]^2$ karesindeki rastgele

le bir noktanın A_{12} bölgesinde olma olasılığı $1/2$ 'dir. A_{21} bölgesinde olma olasılığı da $1/2$ 'dir. $A_{x=y}$ bölgesinde olma olasılığıysa sıfırdır.

Daha da zor bir soru soralım. $[0, 1]$ aralığından üç sayı seçelim: x, y, z . Birinci sayı x , ikinci sayı y ve üçüncü sayı z . Şimdi, $x < y < z$ olayının gerçekleşme olasılığı kaçtır? Bu üç sayıyı, $[0, 1]^3$ küpünde¹ bir nokta olarak görebiliriz. Yukardaki gibi bir resim çizmeye çalışabilirsiniz. Ben denedim beceremedim. Üç boyutta görebilmek kolay değil, çizebilmek daha zor. Ama şöyle akıl yürütebiliriz: $[0, 1]^3$ küpünü şu bölgelere ayıralım:

$$A_{123} = \{(x, y, z): x < y < z\}$$

$$A_{132} = \{(x, y, z): x < z < y\}$$

$$A_{213} = \{(x, y, z): y < x < z\}$$

$$A_{231} = \{(x, y, z): y < z < x\}$$

$$A_{312} = \{(x, y, z): z < x < y\}$$

$$A_{321} = \{(x, y, z): z < y < x\}.$$

Birinci bölgenin hacmini bulmak istiyoruz. Bu altı bölgenin hacimleri birbirine eşittir (hiçbirinin hacminin öbüründen büyük olması için bir neden yok.) $[0, 1]^3$ küpünden geriye kalan bölgeler, yukardaki bölgelerin “duvarlarıdır” ve hacimleri sıfırdır. Demek ki, bu altı bölgenin hacimlerinin toplamı $[0, 1]^3$ küpünün hacmine, yani 1 'e eşittir. Ve bundan da her bölgenin hacminin $1/6$ olduğu çıkar. Ne bulduk? $[0, 1]$ aralığından rastgele üç sayı seçersek, ikinci sayının birinci sayıdan ve üçüncü sayının ikinci sayıdan büyük olma olayının olasılığının $1/6$ olduğunu bulduk.

Şimdi $[0, 1]$ aralığından dört sayı seçtiğimizde, birinci sayının ikinci sayıdan, ikinci sayının üçüncü sayıdan ve üçüncü sayının dördüncü sayıdan küçük olma olayının olasılığını hesaplayacağız. Dört boyutta olduğumuzdan, istesek de resim çizeme-

1 Geometrik olarak, $[0,1]^3$, her kenarı 1 uzunluğunda olan üç boyutlu küptür. Başka bir yazış biçimiyle, $[0,1]^3$, $\{(x, y, z): 0 \leq x, y, z \leq 1\}$ kümesidir.

yiz artık. Ama yine de yukardaki gibi düşünebiliriz.

$A_{1234} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in [0, 1]^4 : x_1 < x_2 < x_3 < x_4\}$
kümesi olsun. Bunun gibi, örneğin,

$A_{3142} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in [0, 1]^4 : x_3 < x_1 < x_4 < x_2\}$
kümesini tanımlayalım. Bu kümelerin hepsinin “hacimleri” aynı². Kaç tane bu tür küme var? Teker teker sıralayıp 24 tane olduğunu bulabiliriz kolaylıkla: $A_{1234}, A_{1243}, A_{1324}, A_{1342}, \dots$ Geriye kalan kümeler, bu kümelerin “duvarları” olduklarından hacimleri sıfırdır. Demek ki bulmak istediğimiz olasılık $1/24$ 'dir.

Şimdi en genel soruyu soralım: $[0, 1]$ aralığından n tane rastgele ve sırayla sayı seçiyoruz: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Bu dizinin artan bir dizi olma olasılığı, yani $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ olayının olasılığı kaçtır? Yukardaki gibi akıl yürüteceğiz.

$A_{1,2,\dots,n} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n : x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$
kümesinin hacmini arıyoruz.

Bu tür kümelerden kaç tane olduğunu bulmalıyız. Başka bir deyişle $1, 2, \dots, n$ sayılarını kaç türlü dizebiliriz?

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n$$

türlü dizebiliriz, çünkü bu n sayıyı $n!$ türlü yanyana koyabiliriz³. Bundan da şu sonuç çıkar: $[0, 1]$ aralığından rastgele seçilen $x_1, \dots, x_n$ sayılarının artan bir dizi olma olasılığı $1/n!$ dir.

Örneğin $n = 2, 3, 4$ ise daha önce hesapladığımız $1/2, 1/6, 1/24$ olasılıklarını buluruz. $n = 5$ için, $1/5! = 1/120 = 0,008333\dots$ olasılığını buluruz. $n = 6$ içinse, $1/6! = 1/720 \approx 0,0014$ olasılığını. Dikkat ederseniz, n büyüdükçe olasılık azalıyor.

2 Dört boyutta hacim, integral hesaplarıyla bulunur, ama şu anda önsezi yeterli. Kenar uzunluğu birim olan n boyutlu bir kübün hacminin 1 olduğu bir belittir (aksiyomdur.)

3 Bunu tümevarımla da kanıtlayabiliriz. İlk önce, ilk $n - 1$ sayıyı dizelim. Tümevarım varsayımına göre, $1, 2, \dots, n-1$ sayılarını $(n - 1)!$ türlü dizebiliriz. Bu dizilerden herhangi birini alalım. Şimdi n sayısını, araya bir yere koyacağız. En başa, ortaya bir yere ya da en sona, yani toplam n değişik yere koyabiliriz. Demek ki $1, 2, \dots, n$ sayılarını $(n - 1)! \times n = n!$ türlü dizebiliriz.

Birinci Soru. $[0, 1]$ aralığında rastgele seçilen bir sonsuz sayı dizisinin artan bir dizi olma olasılığı kaçtır?

n herhangi bir doğal sayıysa, $[0, 1]$ aralığında rastgele seçilen n sayının artan bir dizi olma olasılığının $1/n!$ olduğunu gördük. Bu olasılıklar, yani

$1/n!$ sayıları, n arttıkça küçülüyorlar, gittikçe sıfıra yakınsıyorlar⁴. Matematikte buna, “ $1/n!$ sayıları, n sonsuza gittiğinde sıfıra yakınsar” ya da “ $1/n!$ sayılarının limiti sıfırdır” denir. Bİçimsel olarak bunu,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n! = 0$$

olarak yazarız. Demek ki n ne denli büyükse, $[0, 1]$ aralığında rastgele ve sırayla seçilen n sayının artan bir dizi olma olasılığı o denli küçük, o denli sıfıra yakındır. n sonsuza gittiğinde de, olasılık 0 olur. Dolayısıyla birinci sorunun yanıtı 0’dır.

İkinci Soru. $[0, 1]$ aralığında seçilen artan bir dizinin 1’e yakınsama⁵ olasılığı kaçtır?

Soru, bir dizinin artan dizi olması ve 1’e yakınsama olasılığı değil, artan dizilerden kaçta kaçının bire yakınsadığı. Yani koşullu olasılık... Dizinin artan dizi olduğunu önceden biliyoruz. Olaylar kümemiz artan diziler kümesi. Bu artan dizilerden kaçta kaçının 1’e yakınsadığını bulmak istiyoruz.

Her artan dizi 1’e yakınsamaz, kimi de $1/2$ ’ye yakınsar. Örneğin,

$$0, 1/4, 3/8, 7/16, 15/32, 31/64, \dots, (2^{n-1}-1)/2^n, \dots$$



4 “Yakınsamak” başlıklı yazıda (sayfa 83) “yakınsama”nın ne demek olduğu anlatılmış ve $1/n!$ sayılarının sıfıra yakınsadığı kanıtlanmıştı.

5 Yani gittikçe daha çok 1’e yaklaşma, “sonsuzda 1 olma” olasılığı. $1/2, 3/4, 5/6, 7/8, \dots$ böyle bir dizidir. Bu dizi 1’den küçük her sayıyı bir süre sonra aşar, ama 1’i hiç aşamaz.

dizisi artan bir dizidir ve $1/2$ 'ye yakınsar. 1 'e yakınsayan herhangi bir dizinin her terimini $1/2$ 'yle çarparsak $1/2$ 'ye yakınsayan bir sayı buluruz.

ε , sıfırdan büyük, ama küçük bir gerçel sayı olsun. $[0, 1]$ aralığında (sırayla) seçilen n sayının herbirinin $1 - \varepsilon$ 'dan küçük olma ve artan bir dizi oluşturma olasılığı yukardaki gibi kolayca hesaplanır:

$$(1 - \varepsilon)^n / n!$$

dır bu olasılık. Burdaki $(1 - \varepsilon)^n$, n boyutlu ve her kenarı $1 - \varepsilon$ uzunluğunda olan küpün hacmidir. Sırayla seçilen n sayının artan dizi olma olasılığıysa, yukarda gördüğümüz gibi $1/n!$ dir. Demek ki, $[0, 1]$ aralığında seçilen n sayıdan oluşan artan bir dizinin $[0, 1 - \varepsilon]$ aralığında olma olasılığı,

$$\frac{(1 - \varepsilon)^n / n!}{1 / n!} = (1 - \varepsilon)^n$$

dır. Bu olasılığa $P_n(\varepsilon)$ diyelim: $P_n(\varepsilon) = (1 - \varepsilon)^n$. $P_\infty(\varepsilon)$ sayısı, $[0, 1]$ aralığında artan sonsuz bir dizinin $[0, 1 - \varepsilon]$ aralığında olma olasılığı olsun. $P_\infty(\varepsilon)$ olasılığını bulmak için $P_n(\varepsilon)$ 'daki n 'yi sonsuza yaklaştıırız:

$$P_\infty(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon)^n = 0$$

çünkü $1 - \varepsilon$ sayısı 0 'dan büyük ama 1 'den küçüktür⁶. Demek ki artan sonsuz bir dizinin $[0, 1 - \varepsilon]$ aralığında olma olasılığı sıfırdır. Ve bu her $\varepsilon > 0$ için doğru... Bundan da artan sonsuz bir dizinin 1 'e yakınsama olasılığının 1 olduğu çıkar. Şu teoremi kanıtladık:

Teorem. $[0, 1]$ aralığında rastgele seçilen sonsuz bir artan dizi 1 olasılıkla (yani 100% olasılıkla) 1 'e yakınsar.

Üçüncü Soru. $[0, 1]^2$ karesinde seçilen $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinde eğer $x_n \leq x_{n+1}$ ve $y_n \leq y_{n+1}$ ise, bu diziye bir kuzeydoğu dizisi di-

6 Eğer r sayısı $0 \leq r < 1$ eşitsizliklerini sağlıyorsa, n sonsuza gittiğinde, r^n sayıları sıfıra yakınsarlar. Bunu “Yakınsamak” başlıklı yazıda (s. 83) kanıtlamıştık.

yelim⁷. Sorumuz şu: $[0, 1]^2$ karesinde seçilen bir kuzeydoğu dizisinin karenin sınırına yakınsama olasılığı kaçtır?

$[0, 1]^2$ karesinde bir $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kuzeydoğu dizisi seçmek demek, $[0, 1]$ aralığında artan iki $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ve $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi seçmek demektir. Bu iki artan dizinin 1'e yakınsama olasılığı 1 olduğundan, yukardaki teoreme göre, $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kuzeydoğu dizisinin $(1, 1)$ noktasına yakınsama olasılığı da 1'dir. Güzel bir teorem kanıtladık:

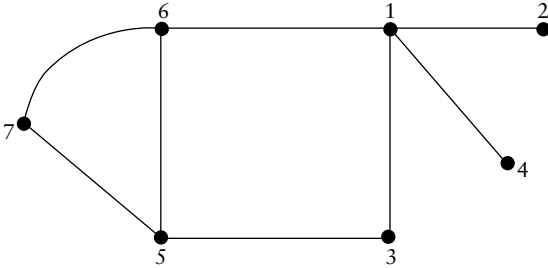
Teorem. $[0, 1]^2$ karesinde rastgele seçilen bir kuzeydoğu dizisi 1 olasılıkla $(1, 1)$ noktasına yakınsar⁸.

7 Yani her seçilen nokta, bir öncesinin kuzeydoğusunda olacak.

8 Bu teoremin daha da genel bir halini Doç. Dr. Nejat Anbarcı sordu. Nejat Anbarcı'nın genel sorusu şuydu: Düzlemde sınırlı (yani sonsuza dek gitmeyen) kapalı bir alan alalım. Örneğin bir dikdörtgenin, bir üçgenin, bir dairenin, bir elipsin içindeki alanları... Bu alanda rastgele seçilen bir kuzeydoğu dizisinin alanın sınırına yakınsama olasılığı kaçtır? Yanıtın 1 olduğunu Engin Mermut'la birlikte (Doç. Dr. Minik Can Ertem'in de yardımıyla) kanıtladık. Bu teorem o kanıtın önemli bir parçasıdır..

Bir Tane Rastgele Çizge Var!

Bir *çizge* (ya da bir başka adıyla, *graf*), sezgisel olarak, noktalardan ve bu noktaları ikişer ikişer birleştiren (doğru ya da eğri) çizgilerden oluşur. Herhangi iki nokta birleşmek zorunda değildir. Örneğin,

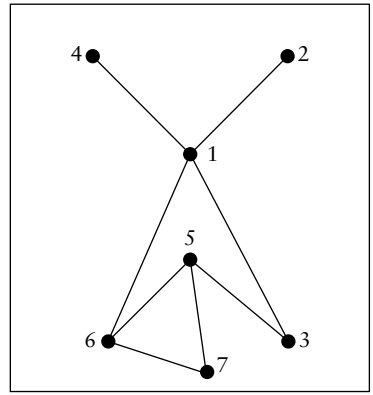
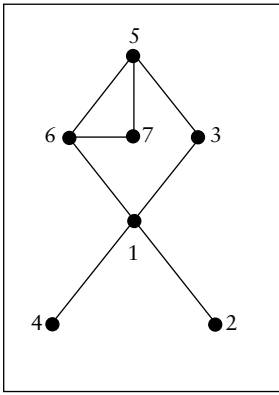


yedi noktalı bir çizgedir. Noktalara 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 adlarını verdik. Birleştirdiğimiz noktalar şunlar:

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{3, 5\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}.$

Bu iki ögelik kümelerine *bağıntı* adı da verilir. Noktaları nasıl bir çizgiyle birleştirdiğimiz önemli değil. Hatta çizgiler kesişebilir bile (kesiştikleri yere çizgenin bir noktasını koymayız o zaman.) Noktaların yerleri de önemli değil. Okur neyin önemli olduğunu merak edebilir! Önemli olan hangi noktayla hangi nokta arasında çizgi (ya da bağıntı) olduğu. Başka bir şey önem-

li değil. Örneğin, yukardaki çizgeyle aşağıdaki çizgeler aynı çizgelerdir:



Bu yazıda ilginç olduğu kadar da şaşırtıcı bir teorem kanıtlayacağız. Size sonsuz tane nokta verdim:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...

noktalarını. Bu noktalardan bir çizge yapmanızı istiyorum. Çizgeyi şöyle yapacaksınız: Her iki nokta için yazı-tura atacaksınız. Yazı gelirse o iki noktayı birleştireceksiniz, tura gelirse birleştirmeyeceksiniz. Her iki nokta için yazı-tura atmayı bitirdiğinizde (!) noktaların adlarını silin. Hangi noktanın 1 noktası, hangi noktanın 2 noktası olduğu belli olmasın. Elinizde adsız noktalar ve noktalar arasında (yukarda “bağıntı” diye adlandırdığımız) birtakım çizgiler kalacak. Ben de aynı şeyi yapacağım. Sizin çizgenize bakmadan... Böylece adsız iki rastgele çizge elde edeceğiz. Sizin rastgele çizgeniz ve benimkisi... Şimdi çizgelerimizi karşılaştıralım. İki çizgenin de aynı olduklarını göreceğiz... Tıpatıp birbirine benziyorlar! Sanki biri öbürünün hık demiş burnundan düşmüş. İnanılır gibi değil ama doğru! Ne sihirdir ne keramet, matematiktir matematik!

Dahası var. Diyelim, ben noktaları birleştirmek için yazı-tura atmadım da zar attım. 6 geldiğinde noktaları birleştirdim, gelmediğinde birleştirmedim. Sizse yazı-tura attınız. Noktaların adları-

nı sildiğimizde gene aynı çizgeleri elde ederiz!

“Çizge” kavramının matematiksel tanımıyla başlayalım:

N bir küme olsun. N 'ye noktalar kümesi diyeceğiz. B , N 'nin iki öğelik altkümelerinden oluşan bir küme olsun. B kümesine bağıntılar kümesi adını verebiliriz¹. (N, B) çiftine çizge denir. Yukardaki örnekte, noktalar kümemiz

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

ve bağıntılar kümemiz

$$B = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{3, 5\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}\}$$

olarak alınmıştır.

Rastgele çizgelerden sözsetmeden önce az noktalı çizgeleri bulalım. Eğer $N = \{1\}$ ise, yani N 'de yalnızca bir nokta varsa, B boşküme olmak zorunda. Dolayısıyla $N = \{1\}$ üzerine bir tek çizge kurulabilir. İşte o çizge:



Şimdi de iki noktalı çizgelere bakalım. $N = \{1, 2\}$ olsun. Bu durumda B ya boşkümedir ya da $\{\{1, 2\}\}$ kümesidir. Demek ki iki noktalı iki çizge var:

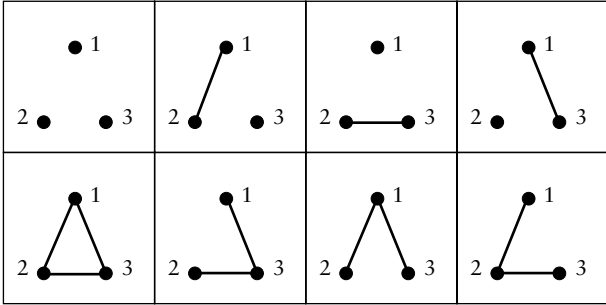


Şimdi amacımız üç noktalı çizgeleri bulmak. Ama bu çizgelerden çok olduğundan, arada unuttuklarımız kalmasın diye önce n noktalı kaç tane çizge olduğunu bulalım. n noktalı, $2^{n(n-1)/2}$ tane çizge olduğunu iddia ediyorum ve hemen kanıtlıyorum: N noktalar kümesinin n tane öğesi varsa (yani n tane noktamız varsa), N 'nin

$$\binom{n}{2}$$

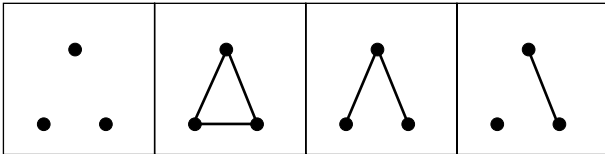
1 N , “nokta”nın N 'si, B ise “bağıntı”nın B 'si.

tane, yani $n(n-1)/2$ tane iki ögeli altkümesi vardır². B iki ögelik altkümelerden oluştuğundan, B bağıntılar kümesi için $2^{n(n-1)/2}$ seçeneğimiz var³. Demek ki n noktalı $2^{n(n-1)/2}$ tane çizge vardır. Eğer $n = 3$ olarak alırsak, bundan 3 noktalı 8 tane çizge olduğu anlaşılır. Bu 8 çizgeyi teker teker bulalım. $N = \{1, 2, 3\}$ olsun. İşte 8 çizge:



Üç nokta arasındaki bağıntıları yazı-tura atarak karar verecek olursak, yukardaki çizgelerden herbirini elde etme olasılığı $1/8$ 'dir.

Bu çizgelerdeki noktaların adlarını, yani sayıları silerseniz, çizge sayımız azalır. Örneğin, bir bağıntısı olan üç çizgenin noktalarının adları silindiğinde bir çizge olurlar. Bunun gibi, iki bağıntısı olan üç çizgeden de bir adsız çizge elde ederiz. Böylece noktaların adlarını sildiğimizde geriye dört çizgemiz kalır:

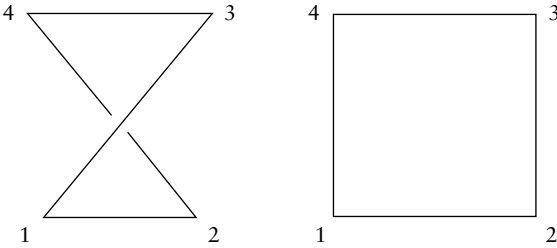


2 $\binom{n}{r}$ sayılarını “Saymadan Saymak” başlıklı yazıda tanımlamıştık (bkz. sayfa 39).

3 “Sonsuz İniş ve Sonsuz Çıkış” başlıklı yazımızda m ögesi olan bir kümenin 2 tane altkümesi olduğunu kanıtlamıştık. Burada m yerine $\binom{n}{2}$ alıyoruz.

Eğer çizgeyi yazı-tura atarak bulmuşsak, yani her bağıntının olasılığı $1/2$ ise, bu adsız çizgelerin olasılıkları sırasıyla $1/8$, $1/8$, $3/8$ ve $3/8$ 'dir.

İki çizgenin noktalarının adlarını sildiğimizde aynı çizgeyi elde etmek ne demektir? Bunun matematiksel tanımını bilmek bu yazı için gerekli değildir, bu yazı için sezgiler yeterlidir. Bir örnek daha verelim ki kuşkuyla yer kalmasın. Aşağıdaki iki çizgeye bakalım.



Bu iki çizge birbirlerine çok benzerler. Tek ayrımları noktalarının adlarıdır. Soldaki çizgede 3 ve 4 noktalarının yerlerini değiştirirsek (bağıntılarıyla birlikte) sağdaki çizgeyi buluruz. Yani noktaların adları olmasaydı iki çizge arasında bir ayrım olmayacaktı. Soldaki çizgenin bağıntıları şunlar:

$$B = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{4, 3\}, \{3, 1\}\}.$$

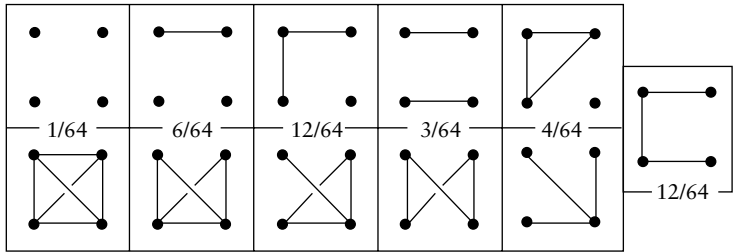
Sağdaki çizgenin bağıntılarıysa,

$$B' = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}.$$

Şimdi, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 3$ göndermesini (fonksiyonunu) ele alalım. Bu gönderme, B bağıntılarını B' bağıntılarına gönderiyor. İşte iki çizgenin noktalarının adları silindiğinde aynı çizge bulunması bu demektir⁴.

4 Bunu matematiksel olarak ifade edelim: (N, B) ve (N', B') iki çizge olsunlar. Eğer, $f(B) = s'$ eşitliğini sağlayan birebir ve örten olan bir $f : N \rightarrow N'$ göndermesi varsa, (N, B) ve (N', B') çizgelerine *eşyapısal çizgeler* denir. İki eşyapısal çizgenin birbirinden tek ayrımı noktalarının adlarıdır. Bu çizgelerden birindeki noktaların adları uygun bir biçimde değiştirildiğinde (x noktasına $f(x)$ denildiğinde örneğin), öbür çizge bulunur.

Dört noktalı ve adsız çizgeleri bulalım. Bunları bağıntı sayısına göre bulabiliriz: önce hiç bağıntısı olmayanlar, sonra bir bağıntısı olanlar, sonra iki bağıntısı olanlar...



Çizgelere iliştilen 1/64, 6/64, 12/64 gibi sayılar, bağıntılara karar vermek için yazı-tura atıldığında çizgenin elde edilme olasılığıdır. Yukarda yaptığımız hesaplardan, dört noktalı çizge sayısının $2^{4 \times 3/2} = 2^6 = 64$ olduğunu biliyoruz. Dört noktalı ve bir bağıntılı kaç çizge vardır? Dört noktadan ikisini seçip aralarına bir bağıntı koymamız gerekiyor. Demek ki

$$\binom{4}{2} = 6$$

tane bir bağıntılı çizge var. Herbirinin olasılığı 1/64 olduğundan, bir bağıntılı çizge elde etme olasılığımız 6/64'tür⁵.

Şimdi sonsuz rastgele çizgelere geelim. N kümesi, 1, 2, 3, 4,... gibi pozitif doğal sayılardan oluşan küme olsun. Bunlar noktalarımız. İki nokta arasında bağıntı olup olmadığına karar vermek için yazı-tura atacağız. Böylece bir bağıntılar kümesi elde edeceğiz. Bu çizgeye R adını verelim (R , "rastgele"nin R 'si.)

5 Yukardaki 11 çizge rastgele konulmamıştır. Altalta gelen çizgeler birbirleriyle ilintilidir. Üst kattan herhangi bir çizgeyi alalım. Bu çizgenin bağıntılarını kaldırıp bağıntı olmayan yerlere bağıntı koyalım. Böylece alt kattaki çizgeyi elde ederiz. En sağdaki çizge için aynı şeyi yapacak olursak gene aynı çizgeyi elde ederiz. Altalta gelen iki çizgenin olasılıkları aynıdır. Yazı-tura atıldığında aynıdır. Eğer zar atarak bağıntılara karar verecek olursak olasılıklar değişebilir. Örneğin, zar attığımızda 6 gelirse bağıntı koymaya, gelmezse bağıntı koymamaya karar verecek olursak, çizgenin bağıntı sayısı çoğaldıkça olasılığı azalır.

R çizgesi hakkında ne söyleyebiliriz? Rastgele çizge olduğundan hiçbir şey bilmemiz olası değil diye düşünebilir okur. İlk bakışta öyle bile görünse, ikinci bakışta R çizgesi üzerine çok şey bildiğimiz anlaşılır.

Basit bir örneklerle başlayayım. Rastgele çizgenin herhangi iki noktası arasındaki “uzaklığın” en fazla iki olduğunu, yani bir noktadan bir başka noktaya üçüncü bir noktadan geçilerek (bağıntıları izleyerek elbet) gidilebileceğini kanıtlayayım.

R rastgele çizgesinde herhangi iki nokta alalım; diyelim 1 ve 2 noktalarını aldık. Savım şu: Öyle bir üçüncü nokta vardır ki, bu üçüncü nokta hem 1 noktasıyla, hem de 2 noktasıyla bağıntılıdır. Savımı kanıtlayayım. 3 noktasını ele alalım. Eğer şanslı bir günümdeysen, 3 noktası dilediğim gibi bir noktadır, yani hem 1 noktasıyla, hem de 2 noktasıyla bağıntılıdır. Bunun böyle olma olasılığı $1/4$. Demek ki $1/4$ olasılıkla, 3 noktası varlığını iddia ettiğim noktalardan biri olacak. Öte yandan $3/4$ olasılıkla 3 noktası istediğim gibi bir nokta olmayacak. Şimdi 3 ve 4 noktalarını ele alalım. Bu iki noktadan hiçbirinin dilediğim gibi bir nokta olmama olasılığı $(3/4)^2$ dir. Eğer n tane nokta alırsak, bu n noktadan hiçbirinin dilediğim gibi bir nokta olmama olasılığı $(3/4)^n$ tür. Ama n büyüdükçe $(3/4)^n$ azalıyor, sıfıra yakınıyor⁶. Demek ki, 3, 4, 5, 6,... noktalarından hiçbirinin benim istediğim gibi bir nokta olmama olasılığı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3/4)^n = 0,$$

ve en az birinin benim istediğim gibi bir nokta olma olasılığı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - (3/4)^n) = 1.$$

Dolayısıyla 1 olasılıkla dilediğim gibi bir nokta vardır.

Rastgele çizgeler üzerine bir başka sonuç daha kanıtlayalım. R , rastgele çizgeniz olsun. Noktaların adlarını silin. Sonra herhangi bir sonlu çizge alın, örneğin yazının başında örnek olarak sunduğumuz 7 noktalı çizgeyi. Onun da adlarını silin. Bu adsız ve sonlu

6 “Yakınsamak” başlıklı yazıya bakın.(Bkz. sayfa 83.)

çizgeye S adını verelim. S sonlu çizgesi, rastgele çizgenizin bir altçizgesidir, yani S çizgesini R çizgesinin içinde bulabilirsiniz. Neden?

Şu nedenden: Rastgele çizgenizin noktalarını yedişer yedişer ayırın. Örneğin şöyle (noktaların adlarını silmiştik; aşağıdaki sayılar noktaların adları değil; yalnızca birbirinden değişik noktalar olduğunu vurgulamak için kullanıyoruz bu sayıları):

$$R_1 = \{1, 2, \dots, 7\}$$

$$R_2 = \{8, 9, \dots, 14\}$$

...

$$R_n = \{7n+1, 7n+2, \dots, 7n+7\}$$

R_1 altçizgesine bakalım. Bu çizgenin S çizgesi olma olasılığı en az $1/2^{7 \times 6/2}$ (neden?), olmama olasılığıysa en fazla $1 - 1/2^{7 \times 6/2}$. Bu son olasılığa α diyelim.

$$0 < \alpha < 1$$

eşitsizliklerine dikkatinizi çekerim. R_1 çizgesinin S çizgesi olma olasılığı α . Ve R_1 ve R_2 çizgelerinden hiçbirinin S çizgesi olmama olasılığı α^2 . Genel olarak, $R_1, \dots, R_n$ çizgelerinden hiçbirinin S çizgesi olmama olasılığı α^n ; en az birinin S olma olasılığıysa $1 - \alpha^n$.

α , 1'den küçük olduğundan, α^n sayıları n arttıkça küçülüp 0'a yakınsarlar⁷. Dolayısıyla $1 - \alpha^n$ sayıları 1'e yakınsar. Sonsuz tane R_n çizgesi olduğundan, bunlardan birinin S olma olasılığı 1'dir. Dolayısıyla, R çizgesinde S 'ye tıpatıp benzeyen bir altçizge (1 olasılıkla, yani yüzde yüz) vardır.

Son olarak yazının başında iddia ettiğim savı kanıtlayayım. Sizin elinizde rastgele bir çizge var. Bu çizgeye $R = (N, B)$ diyelim, noktalarınız da

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

olsun. Benim çizgeye $R' = (N', B')$ diyelim. Noktalarım

⁷ Eğer α sayısı $0 \leq \alpha < 1$ eşitsizliklerini sağlıyorsa, n sonsuza gittiğinde, α^n sayıları sıfıra yakınsarlar. Bunu "Yakınsamak" başlıklı yazıda kanıtlamıştık. (Bkz. s. 83.)

$$a_1', a_2', a_3', a_4', \dots$$

olsun. Bu iki çizgenin noktalarının adlarını değiştireceğim. a ve a' noktalarını b ve b' yapacağım. Ve bu ad değiştirmeyi öyle yapacağım ki, noktaların adlarını sildiğimizde iki çizgenin birbirinin aynısı olduğu apaçık belli olacak. Bağıntılara dokunmayacağım. Yalnızca eski adları silip yeni adlar koyacağım yerine, daha sonra bu yeni adları da sileceğim.

Gelgit yöntemi denilen kullanacağım yöntem, daha çok matematiksel mantıkta kullanılır.

Birinci Adım. Birinci adımda dişe dokunur bir şey yapmayacağız. R çizgesinden başlayalım işe. a_1 noktasına b_1 diyelim bundan böyle. R' çizgesinde b_1 'e benzeyen bir nokta bulabilir miyiz? Elbette! Herhangi bir nokta b_1 'e benzer. Örneğin a_1' noktası. Bundan böyle a_1' noktasına b_1' adını verelim. Çizgelerimizin noktaları şimdilik şöyle:

$$\begin{array}{llllll} R : & b_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \dots \\ R' : & b_1' & a_2' & a_3' & a_4' & a_5' \dots \end{array}$$

İkinci Adım. Şimdi R' çizgesine geçelim. a_2' noktasına b_2' diyelim bundan böyle. Ve $\{b_1', b_2'\}$ altçizgesine bakalım. b_1' ve b_2' arasında bağıntı olabilir ya da olmayabilir. R çizgesinde öyle bir a_n noktası bulmak istiyorum ki $\{b_1, a_n\}$ çizgesiyle $\{b_1', b_2'\}$ çizgesi -noktalarının adları dışında- birbirinin aynı olsun. Diyelim b_1' ve b_2' arasında bir bağıntı var. O zaman, R çizgesinde öyle bir a_n noktası seçmeliyim ki, a_n noktasıyla b_1 noktası arasında bağıntı olsun. Böyle bir a_n noktası bulabilir miyim? 1 olasılıkla bulabileceğimi iddia ediyorum. R çizgesinin hiçbir noktasının b_1 noktasına bağıntılı olmama olasılığı sıfırdır. Bu şöyle anlaşılır. m herhangi bir doğal sayı olsun. $a_2, a_3, \dots, a_{m+1}$ noktalarından hiçbirinin b_1 noktasıyla bağıntısı olmamasının olasılığı $1/2^m$ dir. Sonsuz tane noktamız olduğundan, noktalardan hiçbirinin dile-

diğim gibi bir nokta olmama olasılığı $\lim_{m \rightarrow \infty} 1/2^m = 0$ 'dır. Demek ki, 1 olasılıkla dilediğim gibi bir nokta vardır. Bu nokta a_2 olmayabilir, a_3 olmayabilir, belki a_4 de olmayabilir, ama bir tanesi b_1 'e bağıntılı olacak. R çizgesinde böyle bir nokta seçelim. Diyelim a_4 noktası b_1 noktasına bağıntılı. a_4 noktasına bundan böyle b_2 diyelim. Şimdi

$$\{b_1, b_2\} \text{ ve } \{b_1', b_2'\}$$

altçizgeleri -noktalarının adları dışında- birbirinin aynıdır.

Eğer b_1' ile b_2' arasında bağıntı yoksa, R çizgesinde b_1 ile bağıntısı olmayan bir nokta seçilir ve bu noktaya b_2 adı verilir.

Çizgelerimizin noktalarını yeni adlarıyla sıralayalım:

$$\begin{array}{llllllll} R : & b_1 & b_2 & b_3 & a_3 & a_5 & a_6 & a_7 & \dots \\ R' : & b_1' & b_2' & b_3' & a_3' & a_4' & a_5' & a_7' & \dots \end{array}$$

Üçüncü Adım. R çizgesine geri dönelim. a_2 noktası, R çizgesinin adı değiştirilmeyen ilk noktası. Bu noktayı b_3 yapalım ve $\{b_1, b_2, b_3\}$ altçizgesine bakalım. Diyelim, b_3 ile b_1 bağıntılı ama b_2 ile bağıntılı değil. R' çizgesinde öyle bir a_n' noktası bulacağız ki a_n' noktası b_1' ile bağıntılı olacak ama b_2' ile bağıntılı olmayacak. Eğer öyle bir a_n' bulabilirsek,

$$\{b_1, b_2, b_3\} \text{ ve } \{b_1', b_2', a_n'\}$$

altçizgeleri, noktalarının adları dışında, aynı çizge olacaklar.

Böyle bir a_n' noktası bulabilir miyiz? Evet! Biri olmazsa, bir başkası olmak zorunda. Çünkü $a_3', a_4', \dots, a_{m+2}'$ noktalarından hiçbirinin dilediğimiz gibi bir nokta olmama olasılığı $(3/4)^m$ dir ve m sonsuza gittiğinde bu olasılık 0'a gider. Demek ki dilediğimiz gibi bir a_n' noktası bulma olasılığımız 1'dir. Diyelim a_6' noktası işimizi görüyor. a_6' noktasının adı bundan böyle b_3' olsun. Çizgelerimizin noktaları şimdi şöyle:

$$\begin{array}{llllllll} R : & b_1 & b_2 & b_3 & a_3 & a_5 & a_6 & a_7 & \dots \\ R' : & b_1' & b_2' & b_3' & a_3' & a_4' & a_5' & a_7' & \dots \end{array}$$

Dördüncü Adım. Bu kez R' çizgesinden işe başlayacağız. Adını değiştirmedığımız ilk nokta a_3' . Bu noktaya b_4' diyelim bundan böyle. Şimdi R çizgesinde öyle bir a_n noktası bulalım ki,

$$\{b_1', b_2', b_3', b_4'\} \text{ ve } \{b_1, b_2, b_3, a_n\}$$

altçizgeleri -noktaların adlarını dikkate almazsak- aynı çizge olsunlar. Öyle bir a_n noktası 1 olasılıkla bulunabilir. Nasıl bulunur? Yukardaki gibi... Hiçbir a_n noktasının istediğimiz gibi bir nokta olmaması olasılığı sıfırdır. Demek ki birinin dilediğimiz gibi bir nokta olma olasılığı birdir.

Böylecene sürdürürüz. Tek sayılı adımlarda R çizgesinden, çift sayılı adımlarda R' çizgesinden başlarız. Bu yöntemle ne benim çizgemden ne de sizin çizgenizden nokta unutulmaz.

Sonsuza dek sürdürdüğümüzde, noktalarımız b ve b' harfleriyle yazılmış olur ve her n için,

$$\{b_1, ..., b_n\} \text{ ve } \{b_1', ..., b_n'\}$$

altçizgeleri, adları dışında, birbirinin aynısıdır. Dolayısıyla,

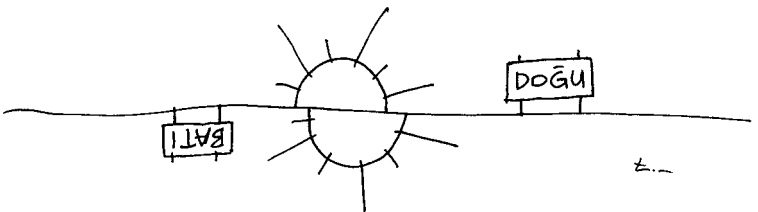
$$\{b_1, b_2, b_3, ... \} \text{ ve } \{b_1', b_2', b_3', ... \}$$

çizgeleri arasında - noktalarının adları dışında - hiç ama hiçbir ayırım yoktur.

Demek ki R ve R' çizgeleri arasında -noktalarının adları dışında bir ayırım yoktur.

Ne kanıtladık? Sizin rastgele çizgenizle benim rastgele çizgem birbirinin eşidir. 1, yani %100 olasılıkla!

Hatta şunu da söyleyebilirim: R çizgesinden bir noktayı ve bu noktanın bütün bağlantılarını silersek, elde ettiğimiz çizge de rastgele bir çizge olur, yani başlangıçtaki çizgeyle -noktalarının adları dışında bir ayırım yoktur.



Fermat Ne Biliyordu? (I)

“**S**on Teorem” Teorem Oldu En Sonunda başlıklı yazıda, 350 yıllık bir arayıştan sonra ancak daha yeni kanıtlanan Fermat’ın “Son Teoremi”nden söz etmiştik. 350 yıllık bir arayıştan sonra... Bir iki yıl değil, beş on yıl da değil, 350 yıl... Bir kuşak, iki kuşak değil, on kuşak... Biraz düşünmek gerekiyor. 350 matematik yılı ne demektir? 350 yıllık bir sabır, 350 yıllık bir uğraş ne demektir? Bir karınca gibi, hiç yılmadan, gıdım gıdım, adım adım, kıyısından köşesinden parçalar koparak... Başlangıçta bilinse 350 yıl sonra her şeyin açıklığa kavuşacağı! Bilinmiyor ki! Nasıl bilinsin? Hiç de bulunamayabilirdi Fermat’ın Son Teoremi’nin kanıtı. Üstelik yol gösteren de yok. Karanlıkta yol alınıyor, hangi yolun izlenmesi gerektiği bilinmeden. Bıkmadan, usanmadan, bezmeden, karamsarlığa kapılmadan, inatla, sabırla, hınçla, ve her gün, ve her gece, ve uykularında, ve yemek yerken, ve yürürken, ve çocuklarıyla oynarken, durmadan düşünüyor amatör ve profesyonel matematikçiler. Gerçeğe erişmek kolay değil. Kimbilir kaç kilo mürekkep, kaç ton kâğıt harcamışlardır, kimbilir kaç kalem, kaç tırnak kemirmişlerdir, kaç mum eritmiş, kaç ampul patlatmışlardır? Kimbilir kaç kez başarıya ulaştıklarını sanıp utku çığlığı atmışlardır? Kimbilir kaç kez yanıldıklarını ayırımsayıp masala-

rını yumruklamışlardır? Ve kimbilir bu matematikçilerden kaçını bugün biliyoruz? Çoğu hiç tanınmamıştır bile, bütün bir yaşam boyu bir adım ilerleyememişlerdir kanıtta.

Önermeyi anımsatayım:

Fermat'nın Son Teoremi. *Eğer $n \geq 3$ bir tamsayıysa,*

$$x^n + y^n = z^n$$

denkleminin pozitif tamsayılarda çözümü yoktur.

Her ne kadar bu önermeye “Fermat'nın Son Teoremi” deniyorsa da, Fermat'nın bu önermeyi kanıtlayıp kanıtlamadığı kuşkulu. “Son Teorem” Teorem Oldu En Sonunda başlıklı yazıda da sözünü ettiğimiz gibi, Fermat, 1637’de okuduğu bir kitabın sayfa kenarına, bu önermenin “harika bir kanıtını” bulunduğunu yazar. Ancak, “kanıt için sayfa kenarında yeterince yer yok” diye de ekler. 1993 yazında Andrew Wiles adında bir matematikçi önermeyi kanıtladığını duyurdu dünyaya.

Wiles'ın önermeyi kanıtladığı duyulmadan hemen önce, önermenin 4 milyondan küçük bütün n sayıları için doğru olduğu biliniyordu. Bu yüzden matematikçilerin büyük çoğunluğu önermenin doğruluğundan kuşku duymuyorlardı. Gene de önerme kanıtlanmalıydı. Kanıt matematiğin özüdür, hatta olgudan çok olgunun kanıtı önemlidir. Gökyüzünden bir ses önermenin doğruluğunu fısıldasa bile, matematikçiler önermeyi kanıtlamak zorundadırlar.

Fermat'nın denkleminin 4 milyondan küçük sayılarla bir çözümü olmayabilir, ama - ne belli? - daha büyük sayılarla denklem çözülebilir belki.

Euler (1707-1783),

$$x^4 + y^4 + z^4 = t^4$$

denkleminin pozitif tamsayılarda çözümü olmadığını sanıyordu. 1987’ye değin bu sanının doğruluğu yanlışlığı anlaşılamadı. Bilgisayarlarda yapılan her deneme sonuçsuz kaldı. 1987’de

Noam Elkies bu denklemin (birbirlerine orantılı olmayan) sonsuz tane çözümü olduğunu gösterdi. En küçük çözüm şu:

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4.$$

Görüldüğü gibi, Fermat denklemine benzeyen bu denklemin küçük sayılarda çözümü yok ama büyük sayılarda var. Bu gibi sürprizlerle karşılaşmayacağımızdan emin olabilmemiz için, ama her şeyden önce matematiğin ve insan zekâsının onuru için, Fermat'ın teoremi kanıtlanmalıdır¹.

1980'lerde Fermat'ın teoreminde çok önemli bir gelişme oldu. Şu teorem kanıtlandı:

Teorem. $n \geq 3$ sabit bir tamsayı olsun. $x^n + y^n = z^n$ denkleminin pozitif tamsayılarda en fazla sonlu tane (sıfır tane de olabilir) çözümü vardır².

Yazının bundan sonraki bölümünde Fermat'ın bildiğinden emin olduğumuz bilgileri açıklayacağım.

Önce $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini ele alalım. Fermat'ın teoremi bu denklemin çözümünün olmadığını söylemiyor. Nitekim denklemin çözümü var. Örneğin,

$$9144^2 + 14833^2 = 17425^2.$$

Nasıl buldum bu eşitliği? İşte matematiğin gücü ve güzelliği burda. Hesaplamaya gerek kalmadan, bu ve bunun gibi bütün eşitlikleri elde edebiliriz. $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini sağlayan daha küçük sayılar da vardır:

-
- 1 Nisan 1994'te Noam Elkies'in Fermat'ın denklemini çözdüğü, yani Fermat teoreminin yanlış olduğu duyuruldu matematik çevresinde. Bunun bir 1 Nisan şakası olduğu birkaç gün sonra anlaşıldı! Nisan şakasını en iyi yutanların arasında olmalıyım, çünkü yanlış haberi alır almaz erişebildiğim herkese yaydım!
 - 2 Sıfır sonlu bir sayıdır. Dolayısıyla bu teorem Fermat'ın teoremiyle çakışmaz. Bu teorem G. Faltings tarafından 1987'de kanıtlanmıştır. Aslında Faltings'in kanıtladığı teorem çok daha genel bir teoremdir. Yukardaki önerme bu genel teoremin çok özel bir durumudur.

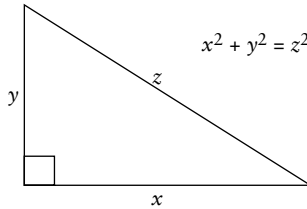
$$\begin{array}{rcl}
3^2 & + & 4^2 = 5^2 \\
5^2 & + & 12^2 = 13^2 \\
7^2 & + & 24^2 = 25^2 \\
8^2 & + & 15^2 = 17^2
\end{array}$$

Babilliler bu eşitlikleri biliyorlardı. İÖ 1900-1600 yılları arasında kazıldığı anlaşılan bir Babil taş tabletinde bunun gibi on beş eşitlik vardır. Babilliler büyük bir olasılıkla

$$(2pq)^2 + (p^2 - q^2)^2 = (p^2 + q^2)^2 \quad (1)$$

eşitliğini de biliyorlardı³. Bu eşitlikte p ve q yerine iki sayı koyarsak, $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini sağlayan sayılar buluruz. Örneğin, $p = 127$ ve $q = 36$ olarak aldığımızda, yukardaki $9144^2 + 14833^2 = 17425^2$ eşitliğini buluruz.

$x^2 + y^2 = z^2$ eşitliğini sağlayan sayılara *Pisagor üçlülere* adı verilir. Çünkü Pisagor'un ünlü teoremine göre, bir diküçgenin dikaçısını oluşturan iki kenarın karelerinin toplamı, üçüncü kenarın karesine eşittir.



Her Pisagor üçlüsü, üç kenarı da tamsayı uzunluğunda olan bir diküçgen verir. Bunun tersi de doğrudur: Üç kenarı da tamsayı uzunluğunda olan her diküçgen bir Pisagor üçlüsü verir.

$x^2 + y^2 = z^2$ eşitliğini sağlayan tüm sayılar, yani tüm Pisagor üçlülere bulunabilir mi? Evet. Eski Yunanlı Öklid İÖ 300 yılında aşağıdaki teoremi kanıtlamıştır.

3 Babil taş tabletindeki eşitliklerden biri de $4961^2 + 6480^2 = 8161^2$ dir! (1) eşitliği bilinmeden bu eşitliğin bulunabilmesi oldukça zor. Bu yüzden Babillilerin (1) eşitliğinden haberli oldukları sanılıyor. Kaldı ki Babilliler ikinci dereceden denklemleri çözmesini biliyorlardı. (1) eşitliğini de bilmeleri gerekir.

Teorem 1. *Gerekirse x 'le y 'nin yerlerini değiştirecek, $x^2 + y^2 = z^2$ denkleminin tüm çözümleri şöyle elde edilir: öyle p, q, d sayıları vardır ki*

$$\begin{aligned}x &= 2dpq \\ y &= d(p^2 - q^2) \\ z &= d(p^2 + q^2)\end{aligned}$$

dir⁴.

Artık, $x^2 + y^2 = z^2$ eşitliğini sağlayan tüm tamsayıları bulabiliriz. Birkaçını bulalım (hep $d = 1$ alacağız.)

p	q	$x = 2pq$	$y = p^2 - q^2$	$z = p^2 + q^2$	$x^2 + y^2 = z^2$
2	1	4	3	5	$4^2 + 3^2 = 5^2$
3	2	12	5	13	$12^2 + 5^2 = 13^2$
4	1	8	15	17	$8^2 + 15^2 = 17^2$
4	3	24	7	25	$24^2 + 7^2 = 25^2$
5	2	20	21	29	$20^2 + 21^2 = 29^2$
5	4	40	9	41	$40^2 + 9^2 = 41^2$
6	1	12	35	37	$12^2 + 35^2 = 37^2$
6	5	60	11	61	$60^2 + 11^2 = 61^2$

Yukarda, ortak bölenleri olmayan ve yalnızca biri çift olan p ve q sayılarını aldık.

Şimdi $x^4 + y^4 = z^4$ denklemine geelim. Bu denklemin pozitif doğal sayılarda çözümü olmadığını Fermat kanıtlamıştır. Kanıt, birinci teoremi ve Sonsuz İniş ve Sonsuz Çıkış başlıklı yazıda (sayfa 63) sözünü ettiğimiz sonsuz iniş yöntemini kullanmıştır. Aslında Fermat daha genel bir teorem kanıtlamıştır:

4 Bu teoremle ilgili iki önemli noktaya değinmek istiyorum. 1) Formüllerde $d = 1$ alındığında (1) eşitliği bulunur. 2) Eğer x, y ve z sayılarının ortak böleni olmasını istemiyorsak, $d = 1$ almamız gerekir. Bu yetmez ama. p ve q sayılarının da ortak bölenlerinin olmaması gerekir. Bu da yeterli değildir, ayrıca p ve q sayılarından biri çift, biri tek olmalı. Nitekim, p ve q sayılarının her ikisi birden tek olduğunda, $p^2 - q^2$ ve $p^2 + q^2$ sayıları çifttir, dolayısıyla x, y ve z sayıları da çifttir ve ikiye bölünürler.

Teorem 2. $x^4 + y^4 = z^2$ denkleminin, dolayısıyla $x^4 + y^4 = z^4$ denkleminin de, pozitif tamsayılarda çözümü yoktur.

İkinci teoremin ilginç bir uygulaması vardır: Fermat'nın teoremi salt 4 için değil, 4'e bölünen tüm sayılar için doğrudur. Örneğin, (a, b, c) sayıları, $x^8 + y^8 = z^8$ denkleminin bir çözümü olsaydı, (a^2, b^2, c^2) sayıları $x^4 + y^4 = z^4$ denkleminin bir çözümü olurdu. Oysa Teorem 2 bu son denklemin çözümünün olmadığını söylüyor. Demek ki $x^8 + y^8 = z^8$ denkleminin de çözümü yoktur.

Aynı türden bir akıl yürütme, Fermat'nın teoremini asal n sayıları⁵ için kanıtlamanın yeterli olduğunu gösterir. İkidən büyük ilk asal sayı 3. Fermat, teoremi $n = 3$ için kanıtladığını mektuplarında sık sık yazmıştır ama, çoğu zaman yaptığı gibi, kanıtını açıklamamıştır. Yıllar sonra, İsviçreli matematikçi Euler (1707-1783) $n = 3$ için bir kanıt bulduğunu matematikçi Goldbach'a yazmıştır; kanıtının, $n = 4$ şikkının kanıtından çok değişik olduğuna dikkati çekip yakın gelecekte genel teoremin kanıtlanacağını sanmadığını eklemiştir. Euler'in 1770'de yayımladığı kanıtında açıklamadığı, karanlık kalmış yerler vardı. Bu açıklanmayan yerlerin doğruluğunu büyük bir matematikçi olan Euler'in bilip bilmediği tartışma konusu. Konuyla ilgili okuduğum kitaplardan, Euler'in düşüncelerinin doğru olduğu, ancak her nedense, her tümcesini açıklamadığı izlenimini edindim. Euler'in kanıtı da sonsuz iniş yöntemini kullanır. Sonsuz iniş yönteminin dışında,

$$\{a + b\sqrt{3} : a, b \text{ tamsayılar}\}$$

karmaşık sayılar kümesinde hangi elemanların bir küp olduğunu (üçüncü güç) bilmek gerekir. Fermat bu kanıtı o çağda bilebilir miydi? Bu yöntemin Fermat'nın çağının çok ilerisinde olduğu bir gerçek. Ama Fermat'nın da çağının çok ilerisinde olduğu bir başka gerçek.

5 Kendinden ve 1'den başka sayıya bölünmeyen sayılara asal sayı denir. Örneğin, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 sayıları asaldır. 15 asal değildir, 5'e bölünür.

Fermat Ne Biliyordu? (II)

Bu yazıda geçen yazıda sözünü ettiğim iki teoremi kanıtlayacağız.

Teorem 1. *Gerekirse x 'le y 'nin yerlerini değiştirirsek,*

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (1)$$

denkleminin tamsayılardaki tüm çözümleri şöyle elde edilir:

Öyle p, q, d sayıları vardır ki,

$$x = 2dpq,$$

$$y = d(p^2 - q^2),$$

$$z = d(p^2 + q^2)$$

dir.

Teorem 2. $x^4 + y^4 = z^2$ denkleminin, dolayısıyla $x^4 + y^4 = z^4$ denkleminin de, pozitif tamsayılarda çözümü yoktur.

Bu iki teoremi kanıtlayabilmek için bir önsava gereksiniyoruz:

Önsav. *Bir tek sayının karesi 4'e bölündüğünde 1 kalır.*

Önsavın Kanıtı: Tek sayımıza a adını verelim. $a = 2b + 1$ biçiminde yazalım. Şimdi hesaplayalım:

$$a^2 = (2b + 1)^2 = 4b^2 + 4b + 1 = 4(b^2 + b) + 1.$$

Demek ki a^2 sayısı 4'e bölündüğünde 1 kalırmış.

Teorem 1'in Birinci Kanıtı: Eğer (a, b, c) üçlüsü, (1) eşitliğini sağlayan üç tamsayıysa ve d herhangi bir tamsayıysa, (ad, bd, cd) tamsayıları da aynı denklemi sağlar. Örneğin, $(8, 15, 17)$ bir çözümdür, bu çözümü ikiyle çarpacak olursak $(16, 30, 34)$ çözümünü buluruz. Yani, bir çözümün çarpımlarını alarak yeni çözümler elde edebiliriz. Bunun tersini de yapabiliriz. Eğer (a, b, c) bir çözümse ve d tamsayısı a, b ve c 'yi bölüyorsa, $(a/d, b/d, c/d)$ tamsayıları da bir çözümdür. Dolayısıyla, ortak böleni olmayan¹ çözümleri bulmak, tüm çözümleri bulmak için yeterlidir. Bundan böyle, (a, b, c) ortak böleni olmayan bir çözümü simgeleyecek.

$a^2 + b^2 = c^2$ olduğundan, a, b, c sayılarından ikisi bir sayıya bölünüyorsa üçüncüsü de aynı sayıya bölünür. Demek ki a, b ve c sayılarından ikisi aynı sayıya bölünemezler. Dolayısıyla bu sayılardan ikisi birden çift olamazlar, yani bu üç sayıdan en az ikisi tek sayıdır. Bu sayılardan ikisi tekse üçüncüsü çift olmak zorundadır.

Hangi sayı çifttir? c çift olamaz (çünkü c çiftse, a ve b tek sayılardır, dolayısıyla yukardaki önsava göre, $a^2 + b^2$ sayısı dörde bölündüğünde iki kalır, yani $a^2 + b^2$ dörde bölünmez; öte yandan c^2 dörde bölünür.) Demek ki a ve b sayılarından biri çift olmak zorunda. Gerekliyse a ve b sayılarının yerlerini değiştirerek, a sayısının çift olduğunu varsayabiliriz. Bundan böyle a 'nın çift olduğunu varsayacağız.

Demek ki b ve c tek sayılar. Dolayısıyla $c - b$ ve $c + b$ çift sayılar. O halde,

$$a = 2n, c - b = 2v, c + b = 2w \quad (2)$$

olarak yazabiliriz. (2) eşitliklerinden,

1 Daha doğrusu en büyük ortak böleni 1 olan!

$$b = \frac{(c+b) - (c-b)}{2} = \frac{2w-2v}{2} = w-v \quad (3)$$

$$c = \frac{(c+b) + (c-b)}{2} = \frac{2w+2v}{2} = w+v \quad (4)$$

eşitlikleri çıktığından, v ve w sayılarının ortak böleni yoktur (çünkü hem v 'yi, hem w 'yi bölen bir sayı, b ve c sayılarını da böler.)

$a^2 + b^2 = c^2$ eşitliğinden, $a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$ eşitliği çıkar. Bu eşitlikte, (2)'den yararlanarak, a yerine $2n$, $c-b$ yerine $2v$, $c+b$ yerine $2w$ koyarsak, ve 4'leri sadeleştirirsek

$$n^2 = vw \quad (5)$$

eşitliğini buluruz. Demek ki vw bir kare. Öte yandan v ve w sayılarının ortak bölenleri yok. Dolayısıyla v ve w de birer kare olmak zorundalar. $v = q^2$ ve $w = p^2$ olarak yazalım. İşimiz aşağı yukarı bitmiştir: (3) ve (4) eşitlikleri $b = p^2 - q^2$ ve $c = p^2 + q^2$ verir; (5) eşitliği $n = pq$ verir; (2) eşitliği de $a = 2n = 2pq$ verir.

Teorem 1'in İkinci Kanıtı: Bu kanıtta geometrik bir yöntem kullanacağız.

Kanıtı başlamadan önce, $(0, 1)$ noktasından geçen ve y eksenine koşut olmayan bir doğrunun denkleminin, bir m sayısı için,

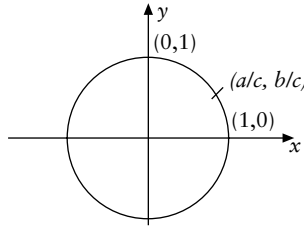
$$y = mx + 1 \quad (6)$$

biçiminde yazılabileceğini okura anımsatırım. m sayısına o doğrunun *eğimi* adı verilir.

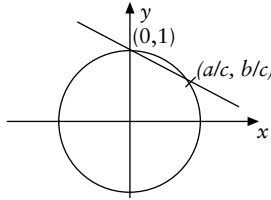
Şimdi a, b, c sayıları, $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini sağlayan üç pozitif sayı olsunlar. O zaman a/c ve b/c kesirli sayıları,

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (7)$$

denklemini sağlarlar. (7) denkleminin gerçel sayılardaki çözümleri, merkezi $(0, 0)$ noktasında olan 1 yarıçaplı daire (birim daire) üzerindedir, dolayısıyla $(a/c, b/c)$ noktası da bu daire üzerindedir:



$a > 0$ olduğundan, $(a/c, b/c)$ noktasıyla $(0, 1)$ noktası, birim dairenin iki değişik noktalarıdır. Bu iki noktadan geçen doğruya bakalım:



Bu doğrunun denklemi $y = [(b-c)/a]x + 1$ 'dir. Yani (6) denklemindeki m sayısı (doğrunun eğimi yani) $(b-c)/a$ sayısına eşittir, dolayısıyla kesirli bir sayıdır. Ortak böleni olmayan iki p ve q tamsayısı için

$$m = (b-c)/a = p/q \quad (8)$$

yazalım. Ayrıca, r ve s sayılarını

$$r = a/c \text{ ve } s = b/c \quad (9)$$

olarak tanımlayalım. (r, s) noktası, yani $(a/c, b/c)$ noktası, hem birim dairenin, hem de $y = mx + 1$ denklemlili doğrunun üstündedir. Dolayısıyla r ve s sayıları (6) ve (7) denklemlerini sağlarlar. Denklemlerimizi yazalım:

$$r^2 + s^2 = 1 \text{ ve } s = mr + 1. \quad (10)$$

İkinci eşitlikten s 'yi biliyoruz: $s = mr + 1$. Bunu birinci eşitliğe yerleştirelim:

$$1 = r^2 + s^2 = r^2 + (mr + 1)^2.$$

Sağdaki terimi açalım:

$$1 = (1 + m^2)r^2 + 2mr + 1,$$

yani,

$$(1 + m^2)r^2 + 2mr = 0,$$

yani,

$$r[(1 + m^2)r + 2m] = 0.$$

Öte yandan $r \neq 0$. Demek ki r 'yi sadeleştirebiliriz ve

$$(1 + m^2)r + 2m = 0,$$

yani,

$$r = -2m/(1+m^2)$$

buluruz. Bunu ve (10) denklemlerinden ikincisini kullanarak s 'yi de bulabiliriz:

$$s = mr+1 = -2m^2/(1+m^2)+1 = (1-m^2)/(1+m^2)$$

Demek ki,

$$r = -2m/(1+m^2)$$

$$s = (1-m^2)/(1+m^2)$$

Şimdi (8) ve (9) denklemlerini yukardaki denklemlere taşıyıp biraz hesap yapacak olursak,

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{-2pq}{p^2 + q^2} c \\ b &= \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} c \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

eşitliklerini elde ederiz. İkinci eşitlikten $p^2 + q^2$ sayısının $(p^2 - q^2)c$ 'yi böldüğü çıkar. Öte yandan $p^2 - q^2$ ile $p^2 + q^2$ sayısının ortak böleni ya 1 ya da 2'dir². Bu ortak bölenin 1 olduğunu varsayalım (ortak bölenin 2 olduğu şıkkı okura bırakıyoruz.) Demek ki $p^2 + q^2$, c 'yi böler. $c = d(p^2 + q^2)$ eşitliğini sağlayan bir d sayısı bulalım, ve bunu (11) eşitliklerine yerleştirelim. Teorem 1 bir kez daha kanıtlanmıştır.

2 u sayısı hem $p^2 + q^2$ 'yi, hem de $p^2 - q^2$ 'yi bölüyorsa, u bu sayıların toplamını ve farkını da böler. Dolayısıyla u hem $2p^2$ 'yi, hem de $2q^2$ 'yi böler. p ile q 'nün ortak böleni olmadığından, $u = 1$ ya da $u = 2$ 'dir.

Teorem 2'nin Kanıtı³: Sonsuz İniş ve Sonsuz Çıkış adlı yazıda sözünü ettiğimiz sonsuz iniş yöntemini kullanacağız. Teoremin yanlış olduğunu varsayalım, yani

$$x^4 + y^4 = z^2 \quad (12)$$

eşitliğinin pozitif tamsayılarda bir çözümünün olduğunu varsayalım. Bir çelişki elde edeceğiz. (12)'nin çözümleri arasında z 'nin en küçük olduğu bir çözüm seçelim. Bu çözüme (x, y, z) diyelim. (12) denklemi sadeleştirmeye olanak verdiğinden ve z en küçük olduğundan, x, y ve z sayılarının ortak böleni yoktur. Bundan da x, y, z sayılarından herhangi ikisinin ortak böleninin olmadığı çıkar. Demek ki bu üç sayıdan yalnızca biri çift olabilir ve en az ikisi tektir. Sayılardan ikisi tekse, üçüncüsü çift olmak zorunda. z çift olamaz (çünkü z çiftse, x ve y tektir, ve $x^4 + y^4$ dörde bölünmez, öte yandan z^2 dörde bölünür.) Demek ki ya x ya y çift. Gerekirse x 'le y 'nin yerlerini değiştirerek, x 'in çift olduğunu varsayabiliriz. Şimdi (x^2, y^2, z) sayılarına birinci teoremimizi uygulayabiliriz: ortak bölenleri olmayan öyle a ve b vardır ki,

$$x^2 = 2ab \quad (13)$$

$$y^2 = a^2 - b^2 \quad (14)$$

$$z = a^2 + b^2 \quad (15)$$

dir. Ayrıca a ve b sayılarından yalnızca biri çifttir. a 'nın çift olmayacağını iddia ediyorum: Eğer a çift olsaydı, b tek olurdu. $a = 2a_1, b = 2b_1 + 1$ yazalım. Bu eşitlikleri (14)'e yerleştirelim:

$$\begin{aligned} y^2 & \stackrel{(14)}{=} a^2 - b^2 = (2a_1)^2 - (2b_1 + 1)^2 \\ & = 4a_1^2 - 4b_1^2 - 4b_1 - 1 \\ & = 4(a_1^2 - b_1^2 - b_1) - 1 \\ & = 4(a_1^2 - b_1^2 - b_1 - 1) + 3 \end{aligned}$$

ve yazının başında kanıtladığımız önsavla çeliştik. İddiamı kanıtladım: a çift olamaz. Demek ki b çifttir. (14) denkleminde $b^2 + y^2 = a^2$ olduğundan birinci teoremi gene uygulayabiliriz: or-

3 Bu kanıt Fermat'nındır.

tak bölüneni olmayan öyle c ve d sayıları vardır ki,

$$b = 2cd \quad (16)$$

$$y = c^2 - d^2 \quad (17)$$

$$a = c^2 + d^2 \quad (18)$$

dir. Şimdi x^2 'yi hesaplayalım:

$$x^2 \stackrel{(13)}{=} 2ab \stackrel{(16,18)}{=} 4cd(c^2 + d^2).$$

Demek, $4cd(c^2 + d^2)$ tam bir kare. Dolayısıyla $cd(c^2 + d^2)$ de tam bir kare. Öte yandan c , d ve $c^2 + d^2$ sayılarından herhangi ikisinin ortak bölüneni yok. Bundan da c , d ve $c^2 + d^2$ sayılarının birer tam kare oldukları çıkar. Yani öyle e , f , g sayıları vardır ki,

$$c = e^2 \quad (19)$$

$$d = f^2 \quad (20)$$

$$c^2 + d^2 = g^2 \quad (21)$$

dir. Kanıtın sonuna geldik. Hesaplayalım:

$$e^4 + f^4 \stackrel{(19,20)}{=} c^2 + d^2 \stackrel{(21)}{=} g^2.$$

Demek ki (e, f, g) sayıları da (12) denkleminin bir çözümü. Son olarak, g sayısının, z sayısından küçük olduğunu kanıtlayalım. Bu dilediğimiz çelişkiyi verecek:

$$\begin{aligned} z &\stackrel{(15)}{=} a^2 + b^2 \stackrel{(16,18)}{=} (c^2 + d^2)^2 + 4c^2d^2 \\ &\stackrel{(21)}{=} g^4 + 4c^2d^2 > g^4 \geq g. \end{aligned}$$

İkinci teorem de kanıtlanmıştır.



Yüzde Yüz Sonlu Sonsuz Oyunlar

“Tavla Üzerine Bir Soru” adlı yazıda kuramsal olarak sonsuz bir oyun olan tavlanın gerçekte, yani uygulamada, sonsuz olup olmadığı sorusunu sorduk. Bu yazıda kuramsal olarak sonsuz, ancak uygulamada sonlu olan, yani oynandığında her zaman (yüzde yüz olasılıkla) biten bir oyundan söz edeceğim.

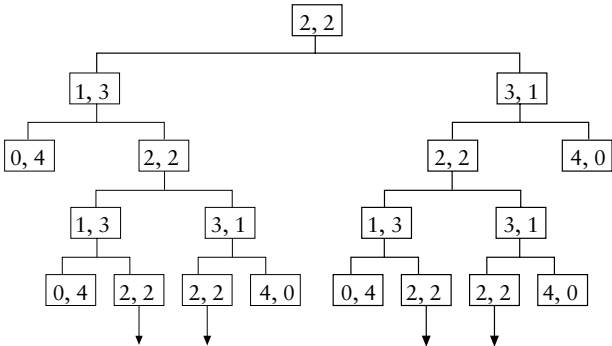
Oyunumuz iki kişi arasında oynanıyor. Yazı-tura atılıyor. Yazı gelirse birinci oyuncu ikinciden 1 lira alıyor, tura gelirse ikinci oyuncu birinciden 1 lira alıyor. Oyunculardan birinin parası bittiğinde oyun da bitiyor.

Eğer iki oyuncunun da oyuna başlarken ikişer lirası varsa ve sürekli bir yazı bir tura gelirse, oyun sonsuza dek sürer; çünkü bu yazı-tura atışlarıyla oyunculardan birinin parası bitmez.

Öte yandan bu oyunu ne zaman oynasanız oyun biter! Hatta oldukça çabuk biter, iki dakika bile sürmez. Neden? İki dakika boyunca bir yazı bir tura gelme olasılığı çok zayıftır da ondan. Bu yazıda bunu kanıtlayacağız. Kuramsal olarak sonsuza dek sürebilen bu oyun, uygulamada sonsuza dek süremez. Çünkü, bu oyunun sonsuza dek sürebilme olasılığı öyle küçük, öyle küçüktür ki... sıfıra eşittir.

Bu olguyu kanıtlamadan önce biraz eğleneceğiz. Eğlence, matematiğin önemli öğelerinden biridir, savsaklamaya gelmez. Yeterince eğlendikten sonra bu olgunun matematiksel kanıtını vereceğiz.

Oyunu daha iyi anlamak için oyunun “ağacını” bulalım. Oyun $(2, 2)$ durumu ile başlıyor. Yani başlangıçta her iki oyuncunun da ikişer lirası var. Diyelim biz birinci oyuncuyuz ve yazı gelince kazanıyoruz. Ağacın tepesine $(2, 2)$ yazalım. Para atıldı. İki olasılık var: Ya tura gelecek ve kaybedeceğiz ya da yazı gelecek ve kazanacağız. Kaybedersek oyunun yeni durumu $(1, 3)$ olacak, yani bizim 1 liramız, öbür oyuncununsa 3 lirası olacak. Bu $(1, 3)$ durumunu ağacın soluna yazalım. Kazanırsak $(3, 1)$ durumuna erişeceğiz. Bunu da ağacın sağına yazalım. Ağaç sağlı sollu kök salar. Soluna kaybettiğimizde, sağınaysa kazandığımızda erişeceğimiz durumu yazarız. $(3, 1)$ ’den sonra gene iki durum ortaya çıkabilir: $(2, 2)$ ve $(4, 0)$ durumları. $(2, 2)$ ’yi sola, $(4, 0)$ ’ı sağa yazalım. $(4, 0)$ durumunda oyun biter ve ağaç kök salmaz. $(2, 2)$ durumundaysa oyun sürer. İşte oyunun ilk dört aşamasını gösteren ağaç:



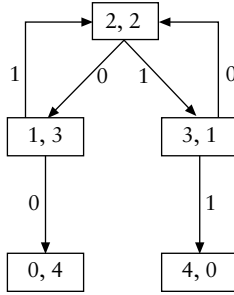
Oyun ancak $(4, 0)$ ve $(0, 4)$ durumlarından birine geldiğinde biter, öbür durumlarda sürer. Bu yüzden dördüncü aşamadaki $(2, 2)$ durumlarında ağaç kök salmayı sürdürür.

Bu ağaç sonsuz bir ağaçtır. Köklerden bazıları bitse bile, köklerin kökü kurumaz. Ağaç sonsuzdur çünkü oyun sonsuzdur. Örneğin, (2, 2), (1, 3), (2, 2), (1, 3), ... diye durmadan sonsuza dek uzayıp giden bir kök vardır.

Oyunun sonsuz olduğunu göstermek için illa sonsuz bir ağaç yapmaya gerek yoktu. Sonlu bir şemayla da bu sonsuz oyunun gidişini gösterebiliriz. Bu şemayı çizelim. Oyunda beş durum var:

(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)

durumları. Bu beş durumu birer kare içine alalım. Bir durumdan öbür duruma nasıl geçildiğini bir okla gösterelim. Eğer bir durumdan öbür duruma kazanarak geçebiliyorsak, okun kenarına 1 koyalım. Kaybederek geçebiliyorsak 0 koyalım. Örneğin, (1, 3) durumundan (2, 2) durumuna kazanarak geçebildiğimizden, (1, 3) durumundan (2, 2) durumuna giden oka 1 adını veririz. İşte bu oyunun şeması:



(0, 4) ve (4, 0) durumlarında oyun bittiğinden, bu iki durumdan ok çıkmaz.

Bu şemaya bakarak oyunun sonsuz olduğunu nasıl anlarız? Eğer bir kısır döngü (yani bir daire) varsa oyun sonsuz demektir. (2, 2) durumundan başlayarak ve okları izleyerek ya (4, 0) ya da (0, 4) durumlarına gelmek zorunda değilsek oyun bitmez. Örneğin (2, 2)'yle (1, 3)'e gidip gelen bir kısır döngü vardır. Bunun gibi (2, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (2, 2), (1, 3), ... döngüsü de döner durur. Demek bu oyun sonsuz bir oyun.

İlk çizdiğimiz ağaca geri dönelim. Ağaca alıcı bir gözle baktığımızda oyunun birinci ve üçüncü yazı-tura atışlarından sonra bitmediği anlaşıyor. Biraz düşünelim, oyunun tek sayılı yazı-tura atışlarından sonra bitmeyeceğini görürüz (örneğin tümevarımla.) Oyun 2, 4, 6 gibi çift sayılı atışlardan sonra bitebilir ancak.

Oyunun ikinci yazı-tura atışında bitme olasılığını bulalım¹. Ağacın ikinci kuşak köklerine bakalım. Dört dal var. Her birinin olasılığı $1/4$ 'tür, çünkü ikinci kuşaktaki $(0, 4)$, $(2, 2)$, $(2, 2)$ ve $(4, 0)$ durumlarına ancak sırasıyla TT (tura tura), TY (tura yazı), YT, YY atıldığında erişebiliriz. Bu dört durumdan ikisinde oyun bitiyor, ikisinde bitmiyor. Dolayısıyla, ikinci yazı-tura atışında oyunun bitme olasılığı $1/4 + 1/4$, yani $1/2$ 'dir.

Şimdi oyunun en fazla dördüncü yazı-tura atışında bitme olasılığını bulalım. Ağaca bakarak, oyunun en fazla dört yazı-tura atışında nasıl bitebileceğini buluruz:

TT, TYTT, TYYY, YTTT, YTTY, YY atıldığında oyun biter. Bu 6 yazı-tura atışının (olayın) olasılıkları sırasıyla şöyle:

$$1/4, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/4.$$

Dolayısıyla, oyunun en fazla dört yazı-tura atışında bitme olasılığı bu sayıların toplamıdır, yani $3/4$ 'tür.

Oyunun en fazla altı yazı-tura atışında bitme olasılığını hesaplayalım. Yukardaki ağacı sürdüreceğiz olursak, altıncı aşamada 4 tane $(0, 4)$ ve 4 tane $(4, 0)$ olduğunu görürüz. Oyunu sona erdirecek bu 8 kökten herbirine ulaşma olasılığı $1/2^6$, yani $1/64$. Dolayısıyla oyunu bitiren bu 8 kök uçlarından birine ulaşma olasılığımız $8/64$, yani $1/8$. Bu olasılığı bir önceki paragrafta bulduğumuz $3/4$ olasılığına ekleyecek olursak oyunun altı ve daha az yazı-tura atışında bitme olasılığını buluruz. De-

1 Paranın hileli olmadığını varsayıyoruz. Yani yazı gelme olasılığı $1/2$, tura gelme olasılığı $1/2$.

mek ki, oyunun en fazla altı yazı-tura atışında bitme olasılığı $3/4 + 1/8 = 7/8$ 'dir.

İkinci, dördüncü ve altıncı yazı-tura atışlarından önce oyunun sona erme olasılıklarının sırasıyla

$$1/2, 3/4, 7/8$$

olduğunu bulduk. Okur, oyunun en fazla sekiz yazı-tura atışında bitme olasılığını hesaplırsa $15/16$ bulacaktır.

Bu kadar eğlence yeter, artık matematik yapalım.

Bir oyuncuda A lira, öbür oyuncuda B lira olsun. Oyunun hangi aşamasında olursak olalım, üstüste $A + B$ kez yazı atıldığında, oyuncuların birinin parası biter, hatta daha önce de bitebilir. Demek ki, eğer 1 olasılıkla üstüste $A + B$ kez yazı atacağımızı kanıtlarsak, bütün yazı-tura oyunlarının 1 olasılıkla sonlu bir zamanda biteceğini kanıtlamış oluruz. Dolayısıyla şu teoremi kanıtlamalıyız:

Teorem. $n > 0$ herhangi bir tamsayı olsun. Sonsuz kez yazı-tura atıldığında üstüste n kez tura gelme olasılığı 1'dir, yani yüzde yüzdür.

Bu teorem, tura gelince kazananın oyunu kazanacağı anlamına gelmez. Üstüste $A + B$ kez tura gelecektir (1 olasılıkla.) Orası kesin. Üstüste $A + B$ kez de yazı gelecektir. O da kesin. Ama hangi oyuncu daha önce kaybedecektir? Orası kesin değil. Şansa bağlı².

Teoremin Kanıtı: Ardarda n kez yazı-tura atıldığında hep tura gelme olasılığı $1/2^n$ dir. Dolayısıyla n yazı-tura atışının hepsinin birden tura olmama olasılığı $1 - 1/2^n$ dir. Bu sayıya α diyelim:

2 “Yoksulun Şansı” adlı yazıda (sayfa 143) hangi oyuncunun kaç olasılıkla oyunu kazanacağını bulacağız.



$$\alpha = 1 - 1/2^n.$$

$0 \leq \alpha < 1$ eşitsizlikleri birazdan önem kazanacak, aklımızın bir köşesinde tutalım.

Şimdi $2n$ kez yazı-tura atalım. $2n$ yazı-tura atışında n kez üstüste tura gelme olasılığına β_2 diyelim. β_2 sayısını bulmak kolay olmayabilir, ama bu

sayının $1 - \alpha^2$ 'den büyük olduğunu kanıtlayabiliriz. $2n$ atışta nasıl üstüste n kez tura gelebilir? Çeşitli biçimlerde gelebilir. Örneğin ilk n atış salt tura olabilir, ya da son n atış salt tura olabilir. Ne birinci n atışın, ne de ikinci n atışın salt tura olma olasılığı α^2 'dir. Demek ki ya birinci n ya da ikinci n atışta salt tura gelme olasılığı $1 - \alpha^2$ 'dir. Dolayısıyla $2n$ atışta n kez üstüste tura gelme olasılığı en az $1 - \alpha^2$ 'dir. Yani,

$$1 < \alpha^2 \leq \beta_2 \leq 1$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Yukardaki akıl yürütmeyi $3n$, $4n$ ve genel olarak kn atış için yapabiliriz. Şöyle yaparız: $k > 0$ bir doğal sayı olsun ve kn kez yazı-tura atalım. β_k , kn atışta üstüste en az n kez tura gelme olasılığı olsun.

$$1 < \alpha^k \leq \beta_k \leq 1 \quad (1)$$

eşitsizliklerini kanıtlamak istiyoruz. $\beta_k \leq 1$ eşitsizliği elbette doğrudur. Birinci eşitsizliğe bakalım. Ne ilk n atışın, ne ikinci n atışın, ... ne de k 'inci n atışın salt tura olma olasılığı α^k 'dir. Dolayısıyla bu kn atıştan birinde (ya birinci, ya ikinci, ... ya da k 'inci n atışlardan birinde) salt tura gelme olasılığı $1 - \alpha^k$ 'dir. Demek ki kn atışta üstüste n kez tura gelme olasılığı $1 - \alpha^k$ sayısından fazladır.

Yani $1 < \alpha^k \leq \beta_k$ eşitsizliği geçerlidir. (1)'i kanıtladık.

$0 < \alpha < 1$ eşitsizliklerinden dolayı, k sonsuza gittiğinde α^k sayısı sifıra yakınsar³ ve $1 - \alpha^k$ sayısı bire yakınsar:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \alpha^k) = 1.$$

(1) eşitliğinde k 'yi sonsuza götürürsek,

$$1 = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \alpha^k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k \leq 1$$

elde ederiz ki, bu da, k sonsuza gittiğinde, β_k sayılarının 1'e yakınsadığını gösterir. Demek ki atış sayımız yükseldikçe n kez ardarda tura atma olasılığımız 1'e yakınsıyor. Teoremimiz kanıtlanmıştır.

Yukardaki kanıtta atılan paranın hilesiz olduğunu pek kullanmadık. Para hileli bile olsa, tura gelme olasılığı sıfır değilse, her n için, sonsuz yazı-tura atışında üstüste n kez tura gelme olasılığı 1'dir. Bunun kanıtı da aynen yukardaki teoremin kanıtı gibidir.

3 Bu olgu, kitabın “Yakınsamak” adlı yazısında kanıtlanmıştır. (Bkz. s.83.)

Bir Maymun Shakespeare Olabilir mi?

Shakespeare'in kimliği üzerine tartışmalar aldı başını yürüdü... Shakespeare'in cahil bir adam olduğu, değil o yapıtları, sevgilisine imla hatası yapmadan bir aşk pusulası yazacak kadar bile İngilizcesi olmadığı ileri sürölüyor. Shakespeare'in yapıtlarını Shakespeare'in değil, başkasının, hatta birçok başkasının yazdığını iddia edenler var. Kimi de aslında Shakespeare'in Shakespeare olmadığını, bir başkası olduğunu söylüyor, ne demek istiyorlarsa!..

Biz, bu savlara bir yenisini eklemek istiyoruz:

Shakespeare bal gibi de bir maymun olabilir.

Daktilonun tuşlarına durmadan rastgele basan bir maymun düşünün. Bu maymun bir zaman sonra Shakespeare'in Hamlet'ini yazacaktır. Noktasıyla, virgölüyle, satırbaşıyla ve diğer başka herşeyiyle...

Evet, yanlış okumadınız! Çok uzun bir süre sonra belki ama, bir zaman sonra, ve sonlu bir zaman sonra, kesinlikle yazacaktır. Hatta Shakespeare'in her yapıtını yazacaktır. Hatta hatta bugüne değin yazılmış ve yazılmamış her yapıtı yazacaktır. Yüzde yüz olasılıkla... Hatta ve hatta yazılmış ve yazılmamış ve hiçbir zaman yazılmayacak her yapıtı bir kez değil, sonsuz kez yazacaktır...

İnanılması nerdeyse imkânsız olan bu olgu matematikte bir teoremdir, dolayısıyla doğrudur!

Diyelim Hamlet'i yazmak için, Shakespeare, noktası, virgülü, büyük ve küçük harfleri dahil olmak üzere, toplam 100 tane daktilo karakteri kullanmış... Daha fazla da kullanmış olabilir... Önemli olan sonlu sayıda daktilo karakteri kullandığı... Diyelim toplam 100 tane daktilo karakteri...

Ve diyelim Hamlet'i yazmak için 1 milyon (yani 10^6 tane) daktilo tuşuna basmak gerekiyor.

Maymun'un basacağı ilk 1 milyon tuşun Shakespeare'in Hamlet'i olma olasılığı, doğruyu söylemek gerekirse, oldukça düşük bir olasılık... Ama 0 değil bu olasılık... Tam tamına

$$(1/102)^{1.000.000}.$$

Demek ki Maymun'un basacağı ilk 1 milyon tuşun Shakespeare'in Hamlet'i olmama olasılığı,

$$1 - (1/102)^{1.000.000}$$

dir. 1'e, yani yüzde yüze çok yakın bir olasılık, ama 1 değil... Bu olasılığa a diyelim. Önemli olan a 'nın 0'dan büyük, 1'den küçük olmasıdır...

İlk 1 milyon tuşun Shakespeare'in Hamlet'i olmama olasılığı α . İkinci 1 milyon tuşun da Hamlet olmama olasılığı α . Dolayısıyla ne birinci, ne de ikinci 1 milyon tuşun Hamlet olmama olasılığı α^2 'dir. Aynı zamanda, üçüncü 1 milyon tuşun da Hamlet olmama olasılığı α^3 'tür... Ne birinci, ne ikinci, ..., ne de n 'inci 1 milyon tuşun Hamlet olmama olasılığı α^n 'dir. Demek ki, Maymun'un hiçbir zaman Hamlet'i yazamama olasılığı, en fazla

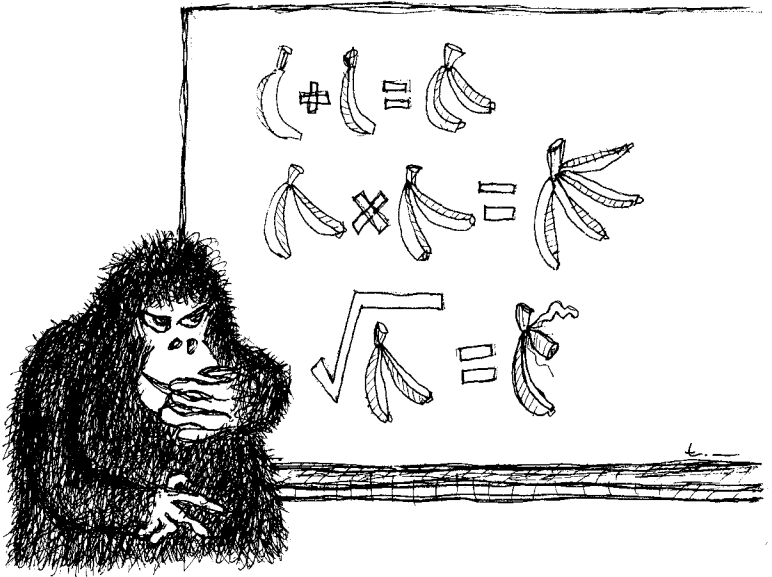
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n$$

sayısına eşittir, ki bu olasılık da (α sayısı 0'la 1 arasında olduğundan) 0'dır¹... Demek ki Maymun'un bir zaman sonra (sonlu bir zaman sonra) Shakespeare'in Hamlet'ini yazma olasılığı 1'dir...

1 Bu olgu, "Yakınsamak" başlıklı yazımızda kanıtlanmıştır. (Bkz. s. 83.)

Aynı kanıt besteler için de geçerlidir. Sonlu tane nota olduğundan, her besteyi, önünde nota yazan bir daktilo olan bir maymun, tuşlara rastgele basarak yazabilir.

Renklerin ve uzayın sürekli olduğunu varsayarsak, resim için aynı şeyi söyleyemeyiz; bir maymun, fırçayı rastgele kullanarak Leonardo'nun La Joconde'unu yaratamaz.



Yoksulun Şansı

Bu yazı girişe gereksinmiyor. Doğrudan, kanıtlayacağımız sonuca geçelim:

“Teorem.” *Yoksulun zengine karşı şansı yoktur.*

Bu çok bilinen “teorem”i kanıtlayabilmek için her şeyden önce önermeyi matematikselleştirmeliyiz.

Zenginin - tanım gereği - çok parası var. Yoksulunsa az parası var. Zenginle yoksul yazı-tura oynayacaklar. Yazı gelirse yoksul zenginden 1 lira alacak. Tura gelirse yoksul zengine 1 lira verecek. Oyun iki oyuncudan birinin parası bitene dek sürecek. Oyun daha önce sona eremez.

Bu kuralla oyun hiç bitmeyip sonsuza dek sürebilir. Örneğin yazı-tura atışlarını sırayla bir yoksul bir zengin kazanırsa oyun sonsuza dek sürer.

Bu oyun sonsuza dek sürebilir ama sonsuza dek sürme olasılığı sıfırdır. Bunu “Yüzde Yüz Sonlu Sonsuz Oyunlar” başlıklı yazımızda (bkz. sayfa 131) kanıtlamıştık. Bu yazıda yukardaki yazı-tura oyununu kaç olasılıkla kimin kazandığını bulacağız. Önce yazı-tura atılan paranın hilesiz olduğunu varsayacağız; yazının sonunda hileli parayla oynanan yazı-tura oyunlarını irdeleyeceğiz.

İki oyuncudan birinin kesinlikle (yani 1 olasılıkla) kazanacağını biliyoruz. Bunu “Yüzde Yüz Sonlu Sonsuz Oyunlar” başlıklı yazımızda kanıtlamıştık. Hangi oyuncunun kaç olasılıkla kazanacağını bulmak istiyoruz. Örneğin birinci oyuncunun 1, ikinci oyuncunun 100 lirası varsa, büyük bir olasılıkla ikinci oyuncu oyunu kazanır. Birinci oyuncunun kazanma olasılığı azdır, ama 0 değildir. Okurun, “yüzde 1 olasılıkla birinci, yüzde 99 olasılıkla ikinci oyuncu kazanır,” dediğini duyar gibi oluyorum. Doğru değil. Yanıt yanlış ama okuru yanılgıya bilerek sürükledim. Bir başka örnek ele alalım.

Diyelim birinci oyuncunun 2, ikinci oyuncunun 3 lirası var. Birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığı kaçtır? Bu kez okur 2/5 yanıtını verecek ve haklı çıkacaktır. Bir önceki örnekte, birinci oyuncunun kazanma olasılığı 1/101’dir, ikinci oyuncununkiye 100/101’dir.

Bu yazıda, oyuna birinci oyuncu n , ikinci oyuncu m lirayla başladığında, birinci oyuncunun oyunu $n/(n+m)$ olasılıkla kazanacağını kanıtlayacağız.

Teorem 1. *Hilesiz parayla oynanan yazı-tura oyununa birinci oyuncu n lirayla, ikinci oyuncu m lirayla başlarsa, birinci oyuncu oyunu $n/(n+m)$ olasılıkla kazanır.*

Teoremi bir an için kanıtlanmış varsayıp önemli bir sonucunu irdeleyelim. Teoreme göre, ikinci oyuncunun ne kadar çok parası varsa, birinci oyuncunun kazanma şansı o kadar azdır. Çünkü n sabit kalır ve m artarsa, $n/(n+m)$ sayısı gittikçe küçülür. Zengin ne denli zenginse ya da yoksul ne denli yoksulsa, yoksulun kazanma olasılığı o denli azdır. Biraz abartalım, ve zenginin sonsuz parası olduğunu varsayalım. O zaman, yoksulun oyunun sonlu bir anında beş parasız kalma olasılığı 1 olacak. Yani yoksul yüzde yüz kaybedecek. Oyuna kaç parayla başlarsa başlasın... Çünkü m sonsuza gittiğinde $n/(n+m)$ sayısı

sıfıra gider. Yoksul milyoner olarak oyuna başlasa bile, zenginin sonsuz parası varsa kesinlikle kaybeder. Dolayısıyla bu teoremden şu çıkar:

Birinci Teoremin Bir Sonucu. *Hilesiz parayla oynanan yazı-tura oyununda, birinci oyuncunun sonlu, ikinci oyuncunun sonsuz parası varsa, oyunu 1 olasılıkla (yani yüzde yüz) ikinci oyuncu kazanır.*

Şimdi teoreminizi kanıtlayalım. $s = n + m$ olsun. Yani s , iki oyuncunun toplam parası olsun.

$p_s(n)$ sayısı, birinci oyuncunun n , ikinci oyuncunun $s - n$ lirası olduğunda, birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığı olsun.

Örneğin, $p_s(0) = 0$. Çünkü birinci oyuncunun hiç parası yoksa, zaten oyunu kaybetmiştir ve kazanma olasılığı yoktur.

Öte yandan, $p_s(s) = 1$. Çünkü, birinci oyuncunun s lirası varsa, ikinci oyuncunun hiç parası kalmamıştır ve oyunu birinci oyuncu kazanmıştır.

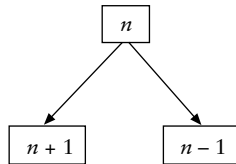
Teorem 1, $p_s(n)$ sayısının n/s olduğunu söylüyor. Demek ki,

$$p_s(n) = n/s \quad (1)$$

eşitliğini kanıtlamalıyız.

$p_s(n)$ sayıları birbirinden bağımsız değildir. Aralarında bir ilişki vardır. Bu ilişkiyi bulalım.

$0 < n < s$ olsun. Birinci oyuncunun n lirası var. İlk yazı-tura atışında oyun iki yoldan birini alabilir: Birinci oyuncu ya kazanacaktır ya kaybedecektir. Kazanırsa $n + 1$ lirası olacaktır, kaybederse de $n - 1$ lirası.



Her iki durumun da olasılığı $1/2$ 'dir. Demek ki k lirayla oyuna başlayan birinci oyuncunun cebinde ilk oyundan sonra yarım olasılıkla $k - 1$ lirası, yarım olasılıkla da $k + 1$ lirası olacaktır. Bu son iki durumda birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığı, sırasıyla, $p_s(k-1)$ ve $p_s(k+1)$ 'dir. Yani, $0 < k < s$ ise,

$$p_s(k) = p_s(k-1)/2 + p_s(k+1)/2$$

dir. Bunu şöyle de yazabiliriz: $0 < k < s$ için,

$$p_s(k+1) = 2p_s(k) - p_s(k-1) \quad (2)$$

Şimdi bir önsav kanıtlayalım:

Önsav. Eğer $0 < k \leq s$ ise, $p_s(k) = kp_s(1)$.

Önsavın Kanıtı: Önsavı k üzerine tümevarımla kanıtlayacağız¹.

Eğer $k = 1$ ise, kanıtlanacak eşitlik $p_s(1) = p_s(1)$ olur ve bu durumda önsavın doğruluğu apaçık.

Şimdi eşitliği $k = 2$ için kanıtlayalım. $p_s(2) = 2p_s(1)$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz. (2) eşitliğinden,

$$p_s(2) \stackrel{(2)}{=} 2p_s(1) - p_s(0)$$

elde ederiz. Ama $p_s(0) = 0$ eşitliğini biliyoruz. Demek ki, $p_s(2) = 2p_s(1)$ ve bu durumda da önsavımız kanıtlanmıştır.

Şimdi $k \geq 3$ olsun. Önsavın $k - 1$ ve k için doğru olduğunu varsayıp $k + 1$ için kanıtlayalım. Bu varsayımlardan ve (2) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} p_s(k+1) &\stackrel{(2)}{=} 2p_s(k) - p_s(k-1) \\ &\stackrel{\text{varsayım}}{=} 2kp_s(1) - (k-1)p_s(1) = (k+1)p_s(1) \end{aligned}$$

çıkar. Önsavımız kanıtlanmıştır. $\square$

Yukardaki önsavda $k = s$ alalım: $1 = p_s(s) = sp_s(1)$ buluruz, yani $p_s(1) = 1/s$. Önsavı bir kez daha $k = n$ için uygularsak, bu eşitlikten $p_s(n) = np_s(1) = n/s$ çıkar. Teoremimiz kanıtlanmıştır.

1 Tümevarımla kanıt yöntemi “Sonsuz İniş Sonsuz Çıkış” yazısında açıklanmıştır. (Bkz. sayfa 63.)

Hileli Paranın Öyküsü. Yazının süreğinde paranın hileli olduğunu varsayacağız².

Yazı gelme olasılığına y diyelim. Birinci oyuncu yazı geldiğinde kazansın. Tura gelme olasılığı t olsun. $y + t = 1$ eşitliği geçerli elbet. Toplam paraya gene s diyeceğiz. $p_s(n)$, birinci oyuncunun (yani yazı geldiğinde kazanan oyuncunun) n lirası varken öbür oyuncunun bütün parasını ütme olasılığı olsun.

Eğer $y = 0$ ise, yani para hiç yazı gelmeyecekçesine hileliyse, oyunu ikinci oyuncu kazanır elbet.

Eğer $y = 1$ ise, oyunu birinci oyuncu kazanır.

Ayrıca $y = 1/2 = t$ şikkını yukarda irdelemiştik.

Demek ki, bundan böyle $0 < y < 1$ ve $t \neq y$ eşitsizliklerini varsayabiliriz. Bu varsayımla oyunun sonsuza değin sürme olasılığının sıfır olduğunu biliyoruz. (Bkz. “Yüzde Yüz Sonlu Sonsuz Oyunlar”, sayfa 131.)

Teorem 2. *Yazı gelme olasılığının y , tura gelme olasılığının t olduğunu varsayalım ($t = 1 - y$). Birinci oyuncu yazı geldiğinde kazansın ve oyuna n lirayla başlasın. İkinci oyuncunun $s - n$ lirası olsun. Ve $y \neq t$ olsun. Birinci oyuncunun yazı-tura oyununu kazanma olasılığı $(y^s - y^{s-n}t^n)/(y^s - t^s)$ dir.*

(2) formülünün bir benzerini bulalım önce. Birinci kanıttaki gibi bir akıl yürütmeye,

$$p_s(n) = tp_s(n-1) + yp_s(n+1)$$

eşitliğini buluruz. Bundan da

$$p_s(n+1) = p_s(n)/y - tp_s(n-1)/y \quad (3)$$

çıkar. Aynen birinci kanıttaki gibi yapacağız. $p_s(n)$ sayısını $p_s(1)$ 'i kullanarak bulacağız.

2 Soruyu bu genel biçimiyle soran ve yanıtlayan Prof. Dr. Nazif Tepedelenlioğlu'na teşekkür ederim.

Önsav. Eğer $0 < n \leq s$ ise,

$$p_s(n) = \frac{y^n - t^n}{y^{n-1}(y-t)} p_s(1).$$

Önsavın Kanıtı:³ n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $n = 1$ için bir sorun yok. $n = 2$ için kanıtlayalım. (3) eşitliğinde $n = 1$ alırsak ve $p_s(0) = 0$, $y + t = 1$ eşitliklerini kullanırsak, önsavın $n = 2$ için doğru olduğunu buluruz. Şimdi formülün n ve $n - 1$ sayıları için doğru olduğunu varsayıp formülü $n + 1$ için kanıtlamak gerekiyor. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. (İpucu: (3) eşitliğini kullanın.)

Artık ikinci teoremi kanıtlayabiliriz. Yukardaki önsavda $n = s$ alırsak ve $p_s(s) = 1$ eşitliğini kullanırsak,

$$p_s(1) = \frac{y^{s-1}(y-t)}{y^s - t^s}$$

buluruz. Bu eşitliği önsava uygulayarak,

$$p_s(n) = \frac{y^n - t^n}{y^{n-1}(y-t)} \frac{y^{s-1}(y-t)}{y^s - t^s}$$

buluruz. Sadeleştirerek,

$$p_s(n) = \frac{y^s - y^{s-n}t^n}{y^s - t^s} \quad (4)$$

eşitliğini buluruz. İkinci teorem de kanıtlanmıştır.

Birinci oyuncuda n lira, ikinci oyuncuda sonsuz para varsa, birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığı nedir? Bu soruyu yanıtlayalım.

3 Bu formülü nasıl bulduğumuzu okur merak edebilir. Daha önceki önsavda $p_s(n) = np_s(1)$ eşitliğini tahmin etmek oldukça kolaydı. Bu önsavdaki formülü bulabilmek için biraz lineer cebir bilmek gerekebilir. Ama formül bulunduktan sonra kanıtlaması oldukça kolaydır.

Bu sorunun yanıtını bulmak için $\lim_{s \rightarrow \infty} p_s(n)$ sayısını bulmalıyız, yani (4) eşitliğindeki s sayısını sonsuza göndermeliyiz. Bu limitin hesaplanması $y < t$ ya da $t < y$ olduğuna göre değişir, ama bulunan sonuç değişmez, her iki şıkta da sıfır bulunur:

İkinci Teoremin Bir Sonucu. *Yazı gelme olasılığı y olsun ve $y < 1$ olsun. Birinci oyuncu yazı gelince kazansın ve ikinci oyuncunun sonsuz parası olsun. Birinci oyuncu 1 olasılıkla (yani %100 olasılıkla) bütün parasını kaybedecektir.*

Örneğin %99 olasılıkla yazı bile gelse, eğer tura geldiğinde kazananın sonsuz parası, yazı geldiğinde kazananın sonlu parası varsa, oyunu önünde sonunda sonsuz parası olan kazanır.

Sonsuz için doğru olan büyük sayılar için de doğrudur aşağı yukarı: Para tek yanlı olmadıkça (yani $y < 1$ oldukça), zengin çok zenginse yazı-tura oyununu büyük bir olasılıkla kazanır.



Züğürt Tesellisi

Bir önceki yazıda, yazı-tura oyununda yoksulun zengine karşı şansının çok az olduğunu kanıtlamıştık. Öyle ki, zengin sonsuz zengin olduğunda oyunu 1 olasılıkla (yani yüzde yüz) kazanacaktır. Bu yazıda bu olgudan güzel bir eşitlik çıkaracağız¹:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)4^k} \binom{2k}{k} = 1$$

Basit bir yazı-tura oyunundan ilginç bir matematiksel eşitliğin çıkması çok hoşuma gitti.

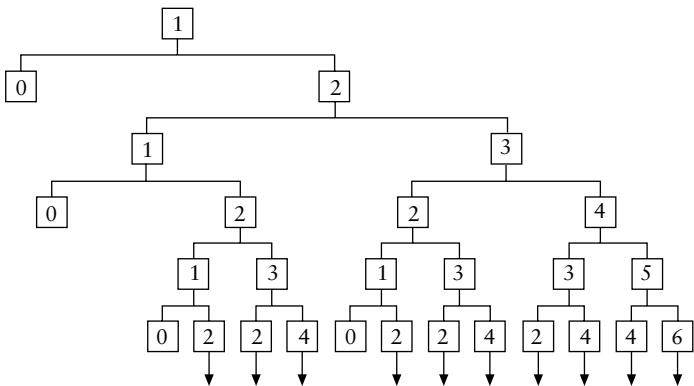
Yoksulun cebinde 1 lira olduğunu varsayalım. Zengin de sonsuz zengin olsun, yani zenginin sonsuz parası olsun. Dolayısıyla zenginin parası bitmez ve zengin oyunu kaybedemez. Yoksulun tek şansı sonsuza değin oynayabilmek. Bunun da olasılığının sıfır olduğunu “Yüzde Yüz Sonlu Sonsuz Oyunlar” başlıklı yazımızdan biliyoruz.

Birinci yazı-tura atıldı. Tura gelirse yoksulun cebindeki tek lira gidecek, beş parasız kalacak ve oyun bitecek. Diyelim ilk oyunu yoksul kazandı. Şimdi cebinde iki lirası var. İkinci oyunda kaybederse gene 1 lirası kalacak, kazanırsa 3 lirası olacak.

¹ $\binom{n}{r}$ sayılarını, “Saymadan Saymak” adlı yazıda tanımlamıştık (sayfa 39-45).

Oyun böylece, sürebildiğince, yani yoksulun parası olduğu sürece sürecek.

Oyunun alabileceği bütün durumları bir “ağaç”la gösterebiliriz. Ağacın en tepesine 1 yazalım. Bu 1, yoksulun oyuna başlamadan önceki bütün serveti. 1’den sonra aşağıya doğru sağlı sollu iki ok (kök) çıkaralım. Bu oklardan soldakinin ucuna 0, sağdakinin ucuna 2 yazalım. Soldaki ok, yoksulun kaybettiğini, sağdakiyse kazandığını gösteriyor. 0 ve 2 sayıları da, birinci yazı-tura atışının sonunda yoksulun cebindeki para: Kaybederse 0, kazanırsa 2 lirası olacak. Kaybettiğinde oyun bitiyor, dolayısıyla 0’dan sonra kök büyümüyor. Kazanmışsa, yani 2 lirası olmuşsa oyun sürüyor. 2’den sonra kök büyüyor, ikiye ayrılıyor. Soldaki kök her zaman yoksulun kaybettiğini gösterecek, sağdakiyse kazandığını. Oyun sonsuza dek uzayabileceğinden, ağacın kökleri sonsuza dek uzar. Bu sonsuz ağaçtan bir bölüm sunalım:



Daha ilk turda yoksulun oyunu kaybetme olasılığı $1/2$ elbet: Tura gelirse kaybedecek.

Yoksul, ilk turda kaybetmemişse, ikinci turda elenemez, çünkü yukardaki ağacın üstten üçüncü katında 0 yok. Ama üçüncü turda elenebilir. Eğer sırasıyla yazı-tura-tura (YTT) gelirse yoksul üçüncü tur sonunda beş parasız kalacaktır. Sırasıyla yazı-tura-tura (yani YTT) gelme olasılığıysa $1/2^3$, yani $1/8$ 'dir.

Demek ki yoksulun üçüncü turda elenme olasılığı $1/8$.

Birinci turda elenme olasılığı da $1/2$ 'ydi.

Bu olasılıkları toplarsak, yoksulun üç tur dayanamama olasılığını buluruz: $1/2 + 1/8 = 5/8$.

Yoksul ilk üç tur dayanabilmişse, dördüncü turu oynamaya hak kazanır. Bu turda elenemez, çünkü en az 1 lirası kalacaktır. Ancak beşinci turda elenebilir. Sırasıyla YTYTT ya da YYTTT gelirse beşinci turda elenecektir.

$n \geq 1$ herhangi bir doğal sayı olsun. Yukardaki ağacın (üst-ten) n 'inci katında kaç tane 0, kaç tane 1, kaç tane 2 vardır? Bu sayılara $p_n(0)$, $p_n(1)$, $p_n(2)$ diyelim. Genel olarak, $0 \leq k \leq n$ ise

$p_n(k)$ = ağacın n 'inci katındaki k sayısı

olsun. Örneğin,

$$p_1(0) = 0, p_1(1) = 1$$

$$p_2(0) = 1, p_2(1) = 0, p_2(2) = 1$$

$$p_3(0) = 0, p_3(1) = 1, p_3(2) = 0, p_3(3) = 1$$

$$p_4(0) = 1, p_4(1) = 0, p_4(2) = 2, p_4(3) = 0, p_4(4) = 1$$

$$p_5(0) = 0, p_5(1) = 2, p_5(2) = 0, p_5(3) = 3, p_5(4) = 0, p_5(5) = 1$$

Bu sayıları nasıl bulabiliriz? Örneğin $p_6(4)$ 'ü ağaca bakmadan bulabilir miyiz? $p_6(4)$, ağacın altıncı katındaki 4'lerin sayısı. Altıncı kattaki 4 sayıları bir üst kattaki 3 ve 5 sayılarından gelir; dolayısıyla,

$$p_6(4) = p_5(3) + p_5(5) = 3 + 1 = 4$$

eşitliği geçerlidir. Bunun gibi, her $2 \leq k < n$ için

$$p_n(k) = p_{n-1}(k-1) + p_{n+1}(k+1) \quad (1)$$

eşitliği geçerlidir. Çünkü n inci sıradaki k 'lar ancak $n-1$ 'inci sıradaki $k-1$ ve $k+1$ 'lerden gelebilirler.

$p_n(0)$ ve $p_n(1)$ sayıları için formülümüz değişik. n 'inci sıradaki 0 sayıları, $n-1$ 'inci sıradaki 1 sayılarından gelebilir ancak. Bunun gibi, n 'inci sıradaki 1 sayıları bir önceki sıradaki 2 sayılarından gelebilir². Dolayısıyla,

2 Bir önceki sırada 0 varsa, oyun orada bitmiştir.

$$p_n(0) = p_{n-1}(1) = p_{n-2}(2) \quad (2)$$

eşitlikleri geçerlidir.

$$p_n(n) = 1 \quad (3)$$

eşitliğini bulmak da zor değildir. Yukardaki eşitlikleri kullanarak bir tablo çizelim (Bu tabloda $p_n(k)$ sayısını n 'inci sırayla k 'inci kolonun kesiştiği yere koyduk):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1										
2	1		1									
3		1		1								
4	1		2		1							
5		2		3		1						
6	2		5		4		1					
7		5		9		5		1				
8	5		14		14		6		1			
9		14		28		20		7		1		
10	14		42		48		27		8		1	
11		42		90		75		35		9		1
12	42		132		165		110		44		10	1

Oyunun ikinci katta (yani birinci atıştan hemen sonra) bitme olasılığı $1/2$, bunu daha önce de görmüştük.

Oyun tek sayılı katlarda bitemez, çünkü tek sayılı katlarda 0 yok. Oyun ancak çift sayılı katlarda bitebilir.

Dördüncü katta bir tek 0 var. Dolayısıyla oyunun dördüncü katta (yani üçüncü atışta) bitme olasılığı $1/2^3$.

Altıncı katta iki tane 0 var. Her sıfır için olasılık $1/2^5$, dolayısıyla oyunun altıncı katta bitme olasılığı $2/2^5$.

Sekizinci katta beş tane 0 var. Her sıfır için olasılık $1/2^7$, dolayısıyla oyunun sekizinci katta bitme olasılığı $5/2^7$.

Genel olarak oyunun $2n$ 'inci katta bitme olasılığı

$$p_{2n}(0)/2^{2n-1}$$

dir. Demek ki oyunun $2n$ 'inci katta ve daha önce bitme olasılığı,

$$p_2(0)/2, p_4(0)/2^3, ..., p_{2n}(0)/2^{2n-1}$$

sayılarının toplamı, yani

$$\sum_{k=1}^n p_{2k}(0)/2^{2k-1}$$

dir. Dolayısıyla oyunun sonlu bir aşamada bitme olasılığını bulmak için yukardaki eşitlikte $n = \infty$ almak gerekiyor (yani n 'yi sonsuza götürmek.) Demek ki oyunun sonlu bir aşamada bitme olasılığı

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{2k}(0)/2^{2k-1}$$

dir. Biz bu sayının 1 olduğunu biliyoruz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{2k}(0)/2^{2k-1} = 1 \quad (4)$$

$p_{2k}(0)$ sayıları kaçtır? Bu sayıların bir formülünü bulursak ve bu formülü (4) eşitliğine yerleştirecek, (4) eşitliği ilginç bir eşitlik olur mu? Evet olur! $p_{2k}(0)$ sayılarını bulalım.

$p_{2n}(0)$ sayılarını bulmak için, her $0 \leq k \leq n$ için, $p_{2n}(2k)$ sayısını bulmalıyız. Yukardaki tablodaki tek sayılı sıraları ve kolonları atalım ki dikkatimizi $p_{2n}(2k)$ sayılarına tam olarak verebileyim:

	0	2	4	6	8	10	12	14	16
2	1	1							
4	1	2	1						
6	2	5	4	1					
8	5	14	14	6	1				
10	14	42	48	27	8	1			
12	42	132	165	110	44	10	1		
14	132	429	572	429	208	65	12	1	
16	429	1430	2002	1638	910	350	90	14	1

Yukardaki tabloya uzun süre, ama oldukça uzun bir süre barksanız, $p_{2n}(2k)$ sayılarını tahmin edebilirsiniz: Eğer $n > 1$ ise,

$$p_{2n}(0) = \frac{1}{n} \binom{2n-1}{n-1} \quad (5)$$

ve $1 \leq k \leq n$ ise,

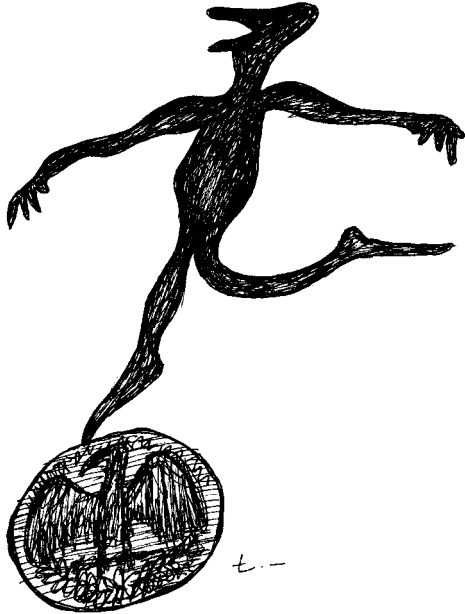
$$p_{2n}(2k) = \frac{1}{n} \binom{2n}{n-k}$$

Bu formüller sihirbazın şapkasından çıkan tavşanlar gibi sunuldu, ama okur bana inanmak zorunda değil, bu formüllerin doğruluğunu, (1, 2, 3) formüllerini kullanarak, n üzerine tümevarımla kanıtlayabilir.

Yukarda bulduğumuz (5) eşitliğini (4) eşitliğine yerleştirelim; elde ettiğimiz eşitlikle biraz oynayacak olursak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)4^k} \binom{2k}{k} = 1$$

eşitliğini buluruz. Olağanüstü bir eşitlik!



Yoksulun Kazanabildiği Bir Oyun

Bu yazıda yoksulu kazandıracağız. Küçük bir olasılıkla da
Bolsa, yoksul kazanabilecek.

Oyunu açıklamadan önce, Sonlu Oyunlar adlı yazımızdaki
(sayfa 17) oyunu anımsayalım:

İki oyuncu yazı-tura oynuyorlar. İlk yazı-tura atışında orta-
ya birer lira sürülüyor. Oyunculardan biri, diyelim birinci
oyuncu, kaybettikçe ortaya koyduğu parayı artırıyor, bir önce-
ki atışta kaybettiğinin iki katını koyuyor. Kazandığındaysa or-
taya 1 lira koyuyor.

Örneğin birinci oyuncu ilk atışta kaybederse, ikinci atışta
ortaya 2 lira sürüyor. İkinci atışta da kaybederse, üçüncü atış-
ta ortaya 4 lira sürüyor. Yine kaybederse 8 lira sürüyor... Ka-
zanana değin bu böyle devam ediyor. Kazandığında, bir sonra-
ki oyunda gene 1 lira ortaya sürüyor. Birinci oyuncu bu strate-
jisine devam edebildikçe devam ediyor. Devam edemediğinde,
yani cebinde yeterli parası kalmadığında, oyun bitiyor.

Sonlu Oyunlar yazısında, iki oyuncunun da sonlu parası ol-
duğunda bu oyunun hem teoride hem de uygulamada kesinlik-
le biteceğini kanıtlamıştık.

Aynı oyunu oynayacağız. Ancak bu kez ikinci oyuncunun
sonsuz parası olduğunu varsayacağız (zengin oyuncu.) Birinci

oyuncununsa yalnızca 1 lirası var (yoksul oyuncu.) Yoksul, birinci oyuncu ve yukarda açıkladığımız stratejiyle oynuyor. Eğer stratejisini sürdüremezse oyun bitiyor; oyun daha önce bitemez.

Zenginin parası hiç bitmediğinden, zenginin bu oyunu kaybetme olasılığı yoktur. Ama, birazdan göreceğimiz üzere, zenginin oyunu kaybetmemesi, yoksulun bu oyundan kazançlı çıkmayacağı anlamına gelmez.

Daha ilk yazı-tura atışında yoksul kaybederse, yoksul cebindeki tek lirayı kaybeder ve oyun hemen biter. Dolayısıyla en az $1/2$ olasılıkla yoksul tek lirasını yitirecektir.

Yoksul ilk atışta kazanıp ikinci atışta kaybederse ne olur? Oyun gene biter, ama bu kez yoksulun cebinde 1 lirası vardır. Yani yoksul “tapi” kalkar. Çünkü, yoksul, birinci yazı-tura atışında kazanmıştır, dolayısıyla ikinci atıştan hemen önce cebinde 2 lirası vardır. İkinci atışta kaybettiğinde yalnızca 1 lirası kalmıştır. Üçüncü atış için ortaya 2 lira koyması gerekmektedir ama 2 lirası yoktur. Yoksul stratejisine devam edemediğinden oyun biter.

Demek ki en az $1/4$ olasılıkla yoksul oyundan ne kazançlı ne de zararlı kalkar. Yoksulun oyundan ne kazançlı ne de zararlı kalkma olasılığını bulamadım.

Yoksulun oyundan beş parasız kalkma olasılığını da bulamadım. Yazının sonunda bu olasılığı bulmak için hesaplanması gereken bir sonsuz toplamı vereceğim.

“Yoksulun Şansı” başlıklı yazıdaki (sayfa 143) oyunun tersine bu oyunda yoksul kazanabilir. Öyle bir an gelebilir ki, yoksulun cebinde 1 liradan fazla para olmasına karşın, yoksul stratejisini sürdüremez (yani oyun biter.) Örneğin, yoksul ilk dört atışta kazanır da sonraki iki atışta kaybederse yoksulun cebinde 2 lira olmasına karşın oyun biter.

Demek ki en az $1/2^6 = 1/64$ olasılıkla yoksul oyundan kazançlı ayrılır.

Yoksulun oyundan k lira kazançlı kalkma olasılığını da bilmiyorum¹.

Bu oyun sonsuza dek sürebilir, örneğin yoksul hep kazanırsa... Ama göreceğiz ki oyunun sonsuza dek sürebilme olasılığı 0'dır. Bunu kanıtlayabildim! Dolayısıyla oyun %100 (yani 1) olasılıkla biter. Demek ki oyun kuramsal olarak sonsuza dek sürebilse bile, uygulamada sonlu sayıda yazı-tura atışından sonra biter². Bu yazıda işte bu sonucu kanıtlayacağız.

Oyunun ilk anlarda alabileceği durumları gösteren bir şema çizeceğiz. Önce oyunun alabileceği durumlarını saptayalım. Oyunun her durumunu iki sayıyla gösterebiliriz. Birinci sayı yoksulun cebindeki para olsun; ikinci sayıysa bir sonraki atış için ortaya sürülen (daha doğrusu yoksulun ortaya sürmesi gereken) para olsun. İkinci sayı hep 2'nin üstleri olmak zorunda, 1, 2, 4, 8, 16 gibi.

Oyunun en başındaki durum (1, 1) durumu. Çünkü, yoksul oyuna 1 lirayla başlıyor ve ilk atışta ortaya 1 lira sürüyor. Bu

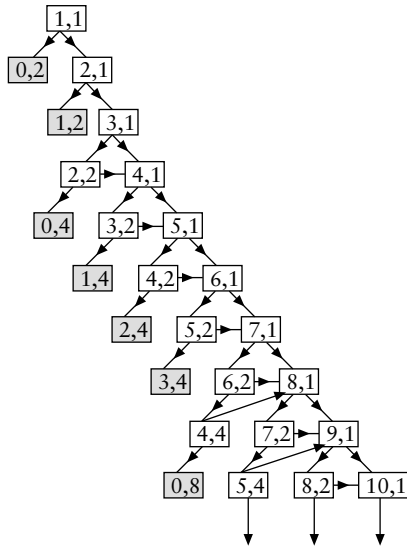
1 Bu hesaplayamadığım olasılıkların yaklaşık hesaplanabilmesi için gereken malzeme bu yazıda vardır. Dileyen okur bu sayıları yaklaşık hesaplayabilir. Bu tam olarak hesaplayamadığım olasılıklar henüz ad verilmemiş sayılar da olabilirler. Sözcük sayımız sonsuz ama ancak sayılabilir sonsuzlukta. Gerçel (reel) sayılarsa sayılamaz sonsuzlukta. Dolayısıyla her sayıya ad veremeyiz. Önemli bulduğumuz sayılara ad veririz. Örneğin π önemli olduğundan π 'ye bir ad verilmiştir: π . π 'nin karesinin ve karekökünün de adları vardır: π^2 ve $\sqrt{\pi}$. Tam olarak hesaplayamadığım bu üç olasılığa daha önce bir ad verilmiş midir bilmiyorum. Verilmemişse hiçbir zaman tam olarak hesaplayamayız. Nasıl π 'nin kaç olduğunu hiçbir zaman tam olarak bilemeyeceksek ve ancak adını söyleyerek π 'nin kimliğini belirtebiliyorsak, bu sayıları da hiçbir zaman bilemeyebiliriz, hatta daha önceden adı konmuş sayılarla arasında cebirsel bir bağıntı bile olmayabilir. Özet olarak demek istediğim, bu sayıların tam olarak hesaplanamayabilecekleri. Bu bağlamda akla gelen ilk soru şu: Hesaplayamadığım olasılıklar kesirli sayılar mıdır?

2 Bu oyunun 1 olasılıkla bitmesi yoksulun cebindeki paraya bağlı değildir. Aşağıdaki şemadan da anlaşılacağı üzere, yoksulun cebinde 1 lira olduğunda oyun 1 olasılıkla biterse, yoksulun cebinde kaç para olursa olsun oyun gene 1 olasılıkla biter.

durumda yoksul kazanırsa oyun (2, 1) durumuna geçecek, kaybederse de (0, 2) durumuna (ve oyun bitecek.)

(2, 1) durumundan sonra oyun ya (1, 2) durumuna ya da (3, 1) durumuna erişir. Birinci şıkta oyun biter, ikinci şıkta sürer.

İşte oyunun ilk birkaç yazı-tura atışında alabileceği durumlar:



(Gri karelerde oyun bitmiştir. Sola giden oklar kaybettiğimizi, sağa giden oklarsa kazandığımızı gösteriyorlar.)

Yukarda da dediğimiz gibi oyunun sonsuza değin sürme olasılığının 0 olduğunu kanıtlayacağız. ($n, 2^k$) durumuna gelme olasılığına $p(n, 2^k)$ diyelim. Örneğin,

$$p(1, 1) = 1$$

$$p(0, 2) = 1/2$$

$$p(2, 1) = 1/2$$

$$p(1, 2) = 1/4$$

$$p(3, 1) = 1/4$$

$$p(2, 2) = 1/8$$

$$p(4, 1) = 1/8 + 1/16 = 3/16$$

$$p(0, 4) = 1/16$$

$$p(3, 2) = 1/16 + 1/32 = 3/32$$

$$p(5, 1) = 1/16 + 2/32 + 1/64 = 9/64$$

Oyunun sonsuza gidebilmesi için bütün $(n, 1)$ durumlarına ulaşılmalıdır. Bu, şemadan kolayca anlaşılıyor. Demek ki oyunun sonsuza dek sürebilme olasılığı, $p(n, 1)$ dizisinin n sonsuza gittiğinde aldığı değerdir. Dolayısıyla,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(n, 1)$$

sayısını hesaplamamız gerekiyor. Bu sayının 0 olduğunu göreceğiz.

Bu limitin sıfır olduğunu kanıtlamak için, aşağıdaki eşitliği bulmak yeterlidir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(2^n - 1, 1) = 0. \quad (*)$$

Bu son eşitliği kanıtlamak daha kolay olacak.

$p(n, 2^k)$ sayılarını bulacağız. Bunun için biraz matematik yapmalıyız. Okurun, yapacağımız matematiği daha iyi anlaması için, sık sık yukardaki şemaya bakması gerekecektir.

İlk olarak, eğer $k > 0$ ise,

$$p(n, 2^k) = p(n+2^{k-1}, 2^{k-1})/2 \quad (1)$$

eşitliğine dikkatinizi çekerim. Çünkü, eğer $k > 0$ ise, $2^k > 1$ dir, yani oyuncumuz 1'den büyük bir para ortaya sürmektedir; dolayısıyla $(n, 2^k)$ durumuna gelmenin bir tek yolu vardır, o da bir önceki oyunda kaybetmiş olmak. Bir önceki oyunun durumu ne olabilir? $(n, 2^k)$ durumunda ortaya 2^k koyduğumuza göre, bir önceki oyunda ortaya 2^{k-1} koymuşuzdur (ve kaybetmişizdir.) Dolayısıyla $(n, 2^k)$ durumuna ancak $(n+2^{k-1}, 2^{k-1})$ durumundan geçilebilir. (1) eşitliği işte bu yüzden geçerlidir.

Eğer $k > 1$ ise, (1) eşitliğinde k yerine $k-1$ ve n yerine

$$n + 2^{k-1}$$

koyabiliriz ve

$$p(n + 2^{k-1}, 2^{k-1}) = p(n + 2^{k-1} + 2^{k-2}, 2^{k-2})/2$$

eşitliğini elde ederiz. Bu son eşitliği (1)'in sağ tarafına yerleştirerek,

$$p(n, 2^k) = p(n + 2^{k-1} + 2^{k-2}, 2^{k-2})/4$$

eşitliğini elde ederiz. Bunu böylece sürdürürsek,

$p(n, 2^k) = p(n + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2 + 1, 1)/2^k$
 eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki $2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2 + 1$ sayısı $2^k - 1$ sayısına eşit olduğundan, eğer $k > 0$ ise,

$$p(n, 2^k) = p(n + 2^k - 1, 1)/2^k \quad (2)$$

eşitliği geçerlidir.

(2) eşitliğinden, $p(n, 2^k)$ sayılarını bulmak için, $p(n, 1)$ sayılarını bulmamız gerektiği anlaşıyor. Bu sayıları bulalım. $(n, 1)$ durumuna ancak kazanarak gelinir. Yani $(n-1, 1)$, $(n-2, 2)$, $(n-4, 4)$ gibi durumlardan. Dolayısıyla, $p(n, 1)$ sayısı,

$$p(n-1, 1)/2, p(n-2, 2)/2, p(n-4, 4)/2, \dots$$

sayılarının toplamıdır, yani, bir k için, $p(n-2^k, 2^k)/2$ biçiminde yazılabilen sayıların toplamıdır. (2) eşitliği,

$$p(n-2^k, 2^k) = p(n-1, 1)/2^k$$

eşitliğini verdiğinden, $p(n, 1)$ sayısının $p(n-1, 1)/2^{k+1}$ sayılarının toplamı olduğu anlaşılır. Ama buradaki k sayıları $n-2^k \geq 2^k$ koşulunu, yani $2^{k+1} \leq n$ koşulunu sağlamalıdır, çünkü aksi halde $(n-2^k, 2^k)$ durumunda oyun bitmiştir ve bu durumdan $(n, 1)$ durumuna geçilmez.

$k(n), 2^k \leq n$ eşitsizliğini sağlayan k sayılarının en büyüğü olsun. Demek ki,

$$\begin{aligned} p(n, 1) &= \sum_{k=1}^{k(n)} p(n-1, 1)/2^{k+1} = p(n-1, 1) \sum_{k=1}^{k(n)} 1/2^{k+1} \\ &= \frac{1}{2} p(n-1, 1) (1 - 1/2^{k(n)}). \end{aligned}$$

Bu eşitliği $n - 1$ kez kullanarak,

$$p(n, 1) = \frac{1}{2^{n-1}} p(1, 1) \prod_{i=2}^n \left(1 - 1/2^{k(i)}\right)$$

buluruz. Ama $p(1, 1) = 1$. Demek ki,

$$p(n, 1) = \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{i=2}^n \left(1 - 1/2^{k(i)}\right).$$

Burada n yerine $2^n - 1$ alırsak,

$$p(2^n - 1, 1) = \frac{1}{2^{2^n - 2}} \prod_{i=2}^{2^n - 1} (1 - 1/2^{k(i)}) \quad (4)$$

buluruz. Şimdi k herhangi bir doğal sayı olsun. Hangi i sayıları için $k(i) = k$ eşitliğinin doğru olduğunu bulalım. i , $k(i) = k$ eşitliğini sağlayan bir sayı olsun. k sayısı, $2^k \leq i$ eşitsizliğini sağlayan sayıların en büyüğü olduğundan, $2^k \leq i < 2^{k+1}$ eşitsizliği geçerlidir. Ve bunun tersi de doğrudur: Eğer $2^k \leq i < 2^{k+1}$ ise, $k(i) = k$ eşitliği geçerlidir. Bu eşitsizlikleri sağlayan kaç tane i sayısı vardır? Biraz düşünme, 2^k tane olduğunu gösterir. (4) eşitliğinin sağındaki çarpılacak terimler bu 2^k tane i sayısı için birbirlerine eşittirler. Dolayısıyla (4) eşitliğini,

$$p(2^n - 1, 1) = \frac{1}{2^{2^n - 2}} \prod_{k=1}^{n-1} (1 - 1/2^k)^{2^k} \quad (5)$$

olarak yazabiliriz. Bu eşitliği kullanarak $p(2^n - 1, 1)$ sayılarının n sonsuza gittiğinde sıfıra yakınsadıklarını kanıtlayacağız. Bunun için konumuzdan biraz uzaklaşıp iki önsav kanıtlayacağız:

Önsav 1. Eğer $0 < x < 1$ ise ve $n > 0$ bir doğal sayıysa,

$$(1 - x)^n \leq 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2.$$

Kanıt: Eğer $n = 1$ ise önsav elbette doğru. Şimdi önsavın n için doğru olduğunu varsayıp $n + 1$ için kanıtlayalım. Demek ki,

$$(1 - x)^{n+1} \leq 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2$$

eşitsizliğini biliyoruz, daha doğrusu bildiğimizi varsayıyoruz. Aynı eşitliği n yerine $n+1$ için, yani

$$(1 - x)^{n+1} \leq 1 - (n+1)x + \frac{(n+1)n}{2} x^2$$

eşitsizliğini kanıtlamaya çalışacağız. Birinci eşitsizliğin her iki tarafını da $1 - x$ ile çarpalım; $0 < 1 - x$ olduğundan,

$$(1-x)^{n+1} \leq (1-nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2)(1-x)$$

elde ederiz. Üstteki eşitliğin sağ tarafını açacak olursak,

$$(1-x)^{n+1} \leq 1-(n+1)x + \frac{n(n+1)}{2}x^2 - \frac{n(n+1)}{2}x^3$$

buluruz. $x > 0$ olduğundan, yukardaki son terimi atıp,

$$(1-x)^{n+1} \leq 1-(n+1)x + \frac{n(n+1)}{2}x^2$$

elde ederiz. Demek ki önsav $n+1$ için doğru. Tümevarımla önsav her doğal sayı için doğrudur. Önsavımız kanıtlanmıştır.

Önsav 2. $k \geq 1$ ise, $(1 - 1/2^k)^{2^k} < 1/2$.

Kanıt: Üstteki önsavda $x = 1/2^k$ ve $n = 2^k$ alalım.

$$(1 - 1/2^k)^{2^k} \leq 1 - 2^k (1/2^k) + \frac{2^k(2^k-1)}{2} (1/2^2)^2$$

elde ederiz. Eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk iki terim sadeleşir. En sağdaki terimi hesaplayalım:

$$\frac{2^k(2^k-1)}{2} (1/2^k)^2 = \frac{2^k-1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2}$$

İkinci önsav da kanıtlanmıştır³.

Şimdi (5)'teki sayıların sifıra yakınsadığını kanıtlayabiliriz. İkinci önsavı ve (5) eşitliğini kullanarak,

$$p(2^n - 1, 1) < \frac{1}{2^{2^n + n - 3}}$$

buluruz. n sonsuza gittiğinde sağdaki terimler 0'a yakınsadığından, $p(2^{n-1}, 1)$ sayıları da sifıra yakınsar. Demek ki oyunun sonuza dek sürme olasılığı 0'dır ve oyun 1 olasılıkla biter.

³ Bu önsavın doğruluğu biraz analizle de çıkabilir. $(1 - 1/2^k)^{2^k}$ sayılarının $1/e$ sayısından (dolayısıyla $1/2$ sayısından da) küçük oldukları analiz kullanarak kolaylıkla kanıtlanabilir.

Oyundan yoksulun zararlı (yani 0 lirayla) kalkma olasılığı nedir? Bu olasılığı bulmak için $p(0,2^k)$ sayılarını toplamalıyız.

$$p_0 = \sum_{k=1}^{\infty} p(0,2^k)$$

olsun. p_0 , yoksulun oyundan zararlı kalkma olasılığıdır.

(2) eşitliğinde $n = 0$ alırsak,

$$p(0,2^k) = p(2^k - 1, 1) / 2^k$$

buluruz. (5) eşitliğini de kullanarak,

$$p(0,2^k) = \frac{1}{2^{2^k + k - 2}} \prod_{i=1}^{k-1} (1 - 1/2^i)^{2^i}$$

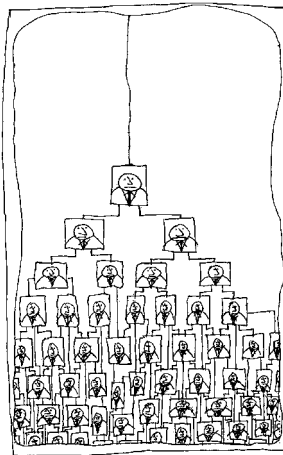
elde ederiz. Dolayısıyla,

$$p_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k + k - 2}} \prod_{i=1}^{k-1} (1 - 1/2^i)^{2^i}$$

dir. Bu sayıyı hesaplayamadım. Ancak Önsav 2'den bu sayının

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k + 2k - 3}}$$

sayısından küçük olduğu çıkar.



Matematikte Biçim ve Sezgi Üzerine

Bilindiği gibi, günümüzün matematiği biçimselleştirilebilir. Yani öyle bir yazılım (bilgisayar programı) yapılabilir ki, bir kanıtın doğru olup olmadığı bilgisayara sorulup öğrenilebilir¹. Böyle bir yazılım yapabilmek için bilgisayara şunları öğretmek gerekir:

- Matematiğin yazıldığı abece (yani alfabe),
- Hangi harf dizilerinin matematiksel tümce oluşturdukları,
- Hangi matematiksel tümcelerin belit olarak kabul edildikleri,
- Çıkarım kuralları.

Burda bu dört maddeyi ayrıntılarıyla açıklamayacağım. Okurun matematik deneyimine ve matematiksel olgunluğuna güvenip kısa geçeceğim.

Abecce. Örneğin ♠ simgesi matematikte kullanılmaz ve dolayısıyla matematiğin abecesinde böyle bir simge yoktur. Öte yandan

¹ Öte yandan, bilgisayardan bir savı kanıtlamasını ya da o savın yanlış olduğunu göstermesini isteyemeyiz. Bu, apayrı bir sorundur.

$\forall, \exists, \vee, \wedge, \rightarrow, \in, \subseteq, +, =, \neq, (,), \emptyset, v_1, v_2, v_3, \dots$

gibi simgeler matematikte kullanılır ve matematiğin abecesinin harfleri arasındadır.

Her ne denli simge sayımız sonsuz gibi görünüyorsa da, sonlu sayıda simgeyle de yetinebiliriz: v_1 yerine $v|$, v_2 yerine $v||$, v_3 yerine $v|||$ yazarak, v_n simgeleri yerine v ve $|$ simgelerinden oluşan “sözcükler” kullanabiliriz.

Kolaylık sağlayacaksa yeni simgeler de yaratabiliriz. Örneğin, formüllerin daha kolay anlaşılmasını sağlayacaksa, “boşluk” anlamına gelen yeni bir simge yaratabiliriz. “Boşluk” anlamına gelen yeni bir simge yaratmayacağız ve boşluğu özgürce kullanacağız.

Matematiksel Tümce. Yukardaki abecenin harfleriyle matematiksel tümceler yazılır. Örneğin,

$$\forall v_1 \exists v_2 (v_1 \subseteq v_2)$$

matematiksel bir tümcedir. Öte yandan,

$$\forall \exists = ((v_6 +$$

matematiksel bir tümce değildir. Bilgisayara hangi harf dizilerinin matematiksel tümce oldukları kolaylıkla öğretilir. Yani öyle bir yazılım yapılabilir ki, bilgisayara bir simgeler dizisi verildiğinde, bilgisayar sonlu bir zaman içinde, ya “*evet, bu matematiksel bir tümcedir,*” ya da “*hayır, bu matematiksel bir tümce değildir,*” der ve yanıtı doğru olur.

Belitler. Belit, doğruluğu önceden, kanıtsız kabul edilmiş matematiksel tümce demektir. Bir belitin kabul edilip edilmemesi gerektiği felsefi sorunlar yaratabilir. Konumuz felsefe değil ama. Verilen beliti tartışma hakkımız yok. Olsa olsa, bu belitleri kabul eden matematikçinin teoremini önemli bulmaz ve okumayız. Örneğin,

$$\forall v_1 \forall v_2 (v_1 = v_2 \rightarrow v_2 = v_1)$$

bir belittir. Öte yandan,

$$\exists v_1 (v_1 \in v_1)$$

bir belit değildir. Bilgisayara hangi matematiksel tümcelerin belit oldukları belirtilerin listesi verilerek kolaylıkla öğretilir.

Çıkarım Kuralları. Matematikte belitlerden yola çıkarak yeni tümceler kanıtlanır. Bu kanıtlanmış tümcelere teorem denir. Yeni tümce elde etme, yani kanıtlama yöntemlerine çıkarım kuralları denir.

Örneğin, eğer a ve $a \rightarrow b$ tümceleri daha önce kanıtlanmış teoremlerse, b tümcesini de teorem olarak kabul ederiz².

Çıkarım kuralları olmadan yeni teorem üretilemez, belitlerle yetinilmek zorunda kalınır, ki o zaman da matematik olmaz.

Çıkarım kuralları da bilgisayara kolaylıkla öğretilir.

Kanıt. Bir kanıt sonlu tane matematiksel tümceden oluşur, yani bir tümce listesidir. Tümceler şu iki kurala uymak zorundadır: Her tümce

1) ya bir belittir

2) ya da kendisinden önce yer alan iki tümceden modus ponens yoluyla elde edilmiştir, yani eğer tümce b ise, b 'den önce listede $a \rightarrow b$ ve a tümceleri vardır.

Teorem'in Tanımı. Bir kanıtın son tümcesine teorem adı verilir.

Diyelim yukardaki aşamalardan geçtik ve kanıtların doğru mu yanlış mı olduğuna karar verebilen bir yazılım hazırladık. Sonra bir teorem kanıtladık, daha doğrusu kanıtladığımızı sa-

2 Bu çıkarım kuralına *Modus ponens* adı verilir.

nıyoruz. Çünkü yanlış yapıp yapmadığımızdan henüz emin değiliz. Teoremi ve kanıtını bilgisayara verelim ve bilgisayarın yanıtını bekleyelim. Biçimsel olarak kanıt, sonlu bir matematiksel tümceler dizelgesidir; ve bu tümceler herbiri ya bir belirtir ya da dizelgenin daha önceki tümcelerinden çıkarım kuralları kullanılarak yaratılmıştır.



Dizelgenin son tümce-

siyse kanıtladığımız teoremdir. Böyle bir dizelgeyi bilgisayara verelim. Bir zaman sonra bilgisayar, “Bu doğru bir kanıttır” ya da “Bu yanlış bir kanıttır,” yanıtını verir.

İşler bu kadar kolay olsaydı matematikte yanlış yapılmazdı. Oysa her matematikçinin bildiği gibi, matematikçi doğru kanıttan çok yanlış kanıt verir.

Yukarda sözünü ettiğimiz yazılım gerçekten yapılabilir. Zorluk, matematikçinin kanıtını bilgisayarın anlayabileceği dile çevirebilmesindedir. Matematikçi de bir insandır. Düşünürken günlük dilde düşünür, biçimsel matematik dilinde düşünmez. Örneğin, “*A kümesinin B kümesinde yoğun olduğunu varsayalım,*” der. Bu basit tümcede A ve B kümelerinin ve “yoğunluk” teriminin tanımları gizlidir. Matematikçi bu tanımların ne demek olduğunu bilir, ama bilgisayarın anlayabileceği bir dilde yazmakta zorlanır. Çünkü bu tanımları bilgisayarın anlayabileceği bir dile çevirmeye kalksa, kullanacağı kâğıt için Amazon ormanları yetmeyebilir.

Matematikçi bilgisayardan daha mı zekidir? Bir açıdan öyledir. Çünkü matematikçi sezgisini kullanır. Oysa bilgisayarın sezgi gücü yoktur (en azından kısıtlıdır; yapay zekâ denilen

araştırma alanının en önemli sorunlarından biri bilimcinin sezgisini bilgisayara aktarabilmektir.) Matematikçi bir kanıta başlamadan önce kanıtın hangi yolu izlemesi gerektiğini aşağı yukarı bilir. Sezgi gücüyle, sağduyuyla bilir. Kanıtını da kâğıda geçirirken biçimsel matematik dilini değil, günlük dili kullanır³.

Matematikçinin çalışırken, yani düşünürken ve bulduklarını kâğıda geçirirken kullandığı bu dili biçimsel dile çevirmek kolay değildir. Hatta belki de olanaksızdır, insan ömrüne sığmayabilir. Satranç oyunu bu yazdıklarıma güzel örnek olur. Satranç oyuncusu, oyunun bir anında tüm olasılıkları düşünmez. Sezgisi, sağduyusu, alışkanlıkları, satranç terbiyesi, yüzlerce olasılıktan bir kaçını seçmesini sağlar ve bu olasılıklar üzerinde kafasını yorar. Matematikçi de bu yönden biraz satranç oyuncusunu andırır.

Sezginin gücünden yararlanan matematikçi, sezgiden zarar da görebilir: yanlış yapar. Şimdi, yanlış olduğu apaçık belli olan bir “teorem” kanıtlayacağız. Sezgimizi kullanarak...

“Teorem.” $-1 = 1$.

Kanıt: Gerçel sayılarda⁴ karesi -1 'e eşit olan bir sayı yoktur. Ama karmaşık sayılarda karesi -1 'e eşit olan bir sayı vardır, hem de bir tane değil iki tane vardır. Bu sayılara i ve $-i$ adı verilir. Yani,

$$i^2 = -1 \text{ ve } (-i)^2 = -1$$

dir. Başka bir deyişle karmaşık sayılarda -1 'in karekökü vardır. Çoğu kitapta,

$$i = \sqrt{-1}$$

3 Matematikçi ve genel olarak bilimlerin, okullarımızda Türkçe öğretilmesi salt Türkçemiz için değil, bu yüzden de önemlidir. Bilimin evrensel olduğu savunulabilir, ama bilimci düşünürken evrensel değildir. En iyiyi, en doğruyu anadilinde düşünür. Çünkü sezgisiyle ve sağduyusuyla düşünür. Yaratıcı güçte sezgi ve sağduyuya yabancı bir dilde erişmek anadilden daha zordur. Bilim insanı rüya gördüğü dilde bilim yapmalıdır.

4 Gerçel sayılar, “bildiğimiz”, bir doğru üzerinde gösterilen sayılardır.

yazar. Bu yazılımın ne kadar tehlikeli olduğunu göreceğiz şimdi.

Başıyoruz:

$$i = \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{1}{i}.$$

Demek ki,

$$i = \frac{1}{i}$$

dir. Yani, $i^2 = 1$. Oysa $i^2 = -1$ idi. Demek ki $-1 = 1$. Teoremi-miz kanıtlanmıştır.

Yanlış var bir yerde ama nerde?

Yanlış yazılımda.

$$\sqrt{-1} = i$$

yazmaya hakkımız yok. Çünkü -1 sayısının iki kökü vardır: i ve $-i$. Bunlardan birinin öbürüne göre bir üstünlüğü, bir ayrı-calığı yoktur⁵. Her ikisi de aynı özellikleri sağlarlar. Yazının kalan bölümünde bunu göstereceğim.

Önce gerçel sayılardan başlayayım. Gerçel sayılarda kök-lerden birini öbürüne yeğleyebiliriz. Çünkü gerçel sayılarda köklerden biri sıfırdan büyüktür, öbürüyse küçüktür. Yani iki kökü birbirinden ayırt edebiliriz. Örneğin, $x^2 = 25$ ise, x ya 5'tir ya da -5 . Bu iki kökten yalnızca bir tanesi sıfırdan büyük-tür: 5. İki kökü birbirinden ayırıp $\sqrt{25} = 5$ yazabiliriz. Gerçel sayılarda, eğer $x \geq 0$ ise, x 'in karekökü şöyle tanımlanır⁶:

$$\sqrt{x} = y \Leftrightarrow y \geq 0 \wedge y^2 = x.$$

Yukardaki tümcede $y \geq 0$ yerine

$$\exists z \left(z^2 = y \right)$$

de yazabiliriz, çünkü gerçel sayılarda pozitif olmakla bir sayı-

5 Eğer bu iki kökten birini (örneğin i 'yi) **yapay** olarak öbürüne yeğleyecek bile olsak,o zaman $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ eşitliği geçerli olmayabilir.

6 $\wedge$ simgesi “ve” anlamındadır.

nın karesi olmak eşanlamlıdır. Dolayısıyla, gerçel sayılarda karekök şöyle tanımlanır:

$$\sqrt{x} = y \Leftrightarrow \exists z (z^2 = y \wedge y^2 = x).$$

Bu tümcedeki z^2 ve y^2 terimlerinin yerine $z \cdot z$ ve $y \cdot y$ kullanırsak, tanımımız

$$\sqrt{x} = y \Leftrightarrow \exists z (z \cdot z = y \wedge y \cdot y = x)$$

olur. Bu son tanımda kullandığımız tek özel simge çarpma ($\cdot$) simgesidir.

Şimdi karmaşık sayılara gelelim. Her karmaşık sayı,

$$a + bi$$

biçiminde yazılır. Burda a ve b sayıları gerçel sayılardır. Karmaşık sayılarda toplama ve çarpma “doğal” olarak yapılır:

$$0i = 0,$$

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i,$$

$$(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i.$$

Karmaşık sayılar gerçel sayıları içerirler: $a + bi$ karmaşık sayısında $b = 0$ olarak alırsak, a gerçel sayısını buluruz.

Daha önce de belirttiğim gibi karmaşık sayılarda i 'yle $-i$ 'yi birbirinden ayırt edemeyiz. Karmaşık sayılarda, gerçel sayılarda olduğu gibi doğal bir sıralama yoktur. i sayısı için, $-i$ 'den küçük ya da büyük diyemeyiz. Dahası, karmaşık sayıların toplama ve çarpma kullanılarak yazılabilen hiçbir özelliği, i sayısı ile $-i$ sayısı arasında bir ayırım yapamaz. Nitekim, karmaşık sayılarda i sayısını, $-i$ sayısına yollayan bir özyapı eşlemesi⁷ vardır:

$$f(a + bi) = a - bi$$

eşlemesi. Bu eşleme şu özellikleri sağlar: Her x ve y karmaşık sayıları için

$$f(xy) = f(x)f(y) \text{ ve } f(x + y) = f(x) + f(y).$$

7 Eşleme: birebir ve örten bir fonksiyon; bijeksiyon.

Özyapı eşlemesi: otomorfizma, yapıyı bozmayan, yapıya “saygı duyan” eşleme.

Okur bu özellikleri kolaylıkla doğrulayabilir. Öte yandan, i , i sayısını $-i$ sayısına gönderir, ama toplama ve çarpmayı etkilemez. Toplama ve çarpmayı etkilemediği gibi, gerçel sayıları da etkilemez: Eğer a gerçel bir sayıysa, $f(a) = a$ dır.

Demek ki karmaşık sayılarda, toplama, çarpma ve gerçel sayılar kullanarak yazılabilen hiçbir özellik i sayısı ile $-i$ sayısını birbirinden ayıramaz. Dolayısıyla bu iki sayıdan birini öbürüne yeğleyemeyiz. Yani

$$\sqrt{-1} = i$$

formülünü yazamayız, yazarsak da işlem yaparken dikkatli olmalıyız, yoksa yukardaki gibi $-1 = 1$ buluruz. Sonuç olarak

$$\sqrt{-1} = i$$

yazılımı tehlikelidir, ve son derece dikkatle kullanılmalıdır.

Sezgi gücüyle,

$$\sqrt{-1} = i$$

yazdık ve yanılgıya düştük. Önemli mi? Bir yanlışla pabuç mu bırakacağız? Hem sonra kim söyledi matematiğin tehlikesiz bir oyun olduğunu?

Feza Gürsey

Geçen yaz, babamın yıllardır biriktirdiği belgelere bakıyorduk birlikte. Babasına yazdığı mektuplar, okul karneleri, okul arkadaşlarının ve öğretmenlerinin fotoğrafları, solmuş gazete kupürleri, okul defterleri, subayken hazırladığı raporlar, resim akademisinde yaptığı resimler, kurduğu fotoğraf stüdyosunun ve çıkardığı gazetelerin antetli kâğıt ve zarfları, kendisinin de tam anımsayamadığı savcılık çağrıları, yılları belirsiz tren, otobüs ve uak biletleri... Neler vardı neler...

Sararmış bir fotoğraf çıktı karşıma bir an. Bir portre. Gözüm bir yerden ısırıyor, ama nerden? Oysa fotoğraf çok eski, öylesine eski ki fotoğraftaki kişiyi tanı mış olmam olanaksız. Babama kim olduğunu sordum. Fotoğrafa bakar bakmaz,

– Aaa! Canım benim, dedi sevgi dolu bir sesle.

Fotoğrafı elinden bırakmadan uzun uzun baktı. Duygulan mıştı. Saygıyla sessizliği korudum. Herhalde bir okul arkadaşı olmalı diye geçirdim iimden. İyi anlaştığı, sırdaşı olduğu bir okul arkadaşı olmalı. “Canım benim” sozcklerini öylesine kullandı. Yanılmışım. Bir süre sonra gözlüklerinin üstünden uzaklara bakarak,

– Reşit Bey, dedi, Feza Bey’in babası...

Reşit Bey babamın Kuleli’den öğretmeni ydi. Bunu biliyordum. Çocukluğumda da duymuştum adını. Reşit Bey’i çok se-



vip saydığını da biliyordum. Çağının ve coğrafyasının çok ötesinde bir bilim insanı olduğunu kimbilir kaç kez duymuştum ağzından. Reşit Bey'i ve oğlu Feza Gürsey'i bize örnek olarak gösterirdi. Bütün bunları biliyordum ama gene de öğretmenini olan bir kişiye "Aaa! Canım benim" diyebilmesine

şaşırmıştım. Herhalde, babam, ilerlemiş yaşından dolayı Reşit Bey'i genç bir insan olarak canlandırıyordu gözünde. Demek insanlar yaşlandıkça öğretmenlerini çocukları gibi görebiliyorlardı. Yabancıysa olduğum bir duygu diye geçirdim içimden.

Babamın öğretmeni Reşit Bey'in oğlu Feza Bey ve ailesiyle 1977'de başladım yazışmaya. Liseyi yeni bitirmiştım ve üniversite öğrenimi için Amerika'ya gitmek istiyordum. Feza Bey Yale Üniversitesi'nde fizik profesörüydü. Babam aracılığıyla yazışmaya başladık. Sonradan düşüncemi değiştirip Fransa'ya gittim.

1980'de Feza Bey'in ailesiyle yazışmalarımız yeniden canlandı. Üniversitenin üçüncü yılındaydım. Üniversite sonrasını düşünme zamanım gelmişti. Doktora yapmak istediğimi biliyordum ama doktorayı nerede yapacaktım? ABD'de karar kıldım.

1980 yazıydı. Feza Gürsey ve ailesi Fransa'ya geldiler. Eşi Suha Hanım'ı ve kendisini ilk o zaman gördüm. Oğlu Yusuf Gürsey'le bir yaz önce Türkiye'de tanışmıştım. Feza Bey, Fransa'nın ve dünyanın en gözde bilim merkezlerinden biri olan Collège de France'ta ders vermeye gelmişti. Derslerine gittim. Salon tıklım tıklım doluydu. İlgi çok yüksekti. Dinleyicilerin Feza Bey'in söylediklerinden tek bir sözcük kaçırmak istemedikleri belliydi. Dersinden pek bir şey anlayamadım. Nasıl anlayabilirdim ki, üniversitenin üçüncü yılını daha yeni bitirmiştım ve matematik bölümündeydim... Ama bir dakika olsun gözümü kırpmadım. Kırpmak istemediğimden değil, Feza Bey kırpmama izin vermedi. Son derece akıcı bir Fransızcayla ve saygı uyandıran

bir dinginlikle konuşuyordu. Sözlerini anlayamadığım çok güzel bir müzik dinler gibiydim. Varlığını ta çocukluğumdan beri sezdığım ama yabancı olduğu gizemli bir evreni çok yakından tanıyordu Feza Bey. Bu hiç kuşkusuz böyleydi. Doğanın, evrenin, her şeyin gizini keşfetmişti ve bu gizi bizimle paylaşıyordu. Bunu yaparken nasıl da alçak gönüllüydü! Anlattıklarını herkesin anladığından, anlayabileceğinden en küçük bir kuşku duymuyordu. “Gördüğünüz gibi pek de zor değilmiş” der gibiydi. Sanki biraz çabayla her şeyi anlayabilirdim. Sanki başımın üstünde cilveli bir kuş pırpır edip duruyordu da, her nedense o kuşa tutunmak için birtürlü kolumu kaldıramıyordum. Oysa kolumu bir kaldırırsam o kuşa tutunup çok uzaklara gidebilecek, Feza Bey’in erdiği sırlara ben de erebilecektim.

Dersten sonra birlikteydik. Konuşmasının anladığım bölümlerinden, yani matematikle ilgili bölümlerinden sorular sordum. Sanki bir meslektaşımıymışım gibi başladı anlatmaya. “Ağızdan bal akıyor” denir ya, işte öyleydi, ağızdan gerçekten bal akıyordu. Daha da önemlisi beni ciddiye alıyordu. Ciddiye alınıyordum... Bir bilim adamı olarak ciddiye alınıyordum... Feza Bey acaba o gün bana gerçekten neler öğrettiğinin, neler verdiğinin ayrımında mıydı?

Yale Üniversitesi’ne doktora için başvurdum. Kabul edildim. Feza Bey sayesinde kabul edildiğimi sonradan öğrendim. ABD’de Türkiye’deki gibi üniversiteye girişte sınav yoktur. Üniversite notlarına ve öğretmenlerden gelen mektuplara bakarlar. Her yıl yüzlerce, belki de binlerce öğrenci başvurur dünyanın dört bir yanından. Bunların arasından on üç doktora öğrencisi seçilecek. Kolay değil onca kişinin arasından seçmek. Matematik bölümü Feza Bey’e sormuş:

– Ali nasıldır?

Feza Bey nerden bilsin matematikte nasıl olduğumu? Gene de,

– Çok iyidir, demiş, bence kabul etmelisiniz.

– Ama okul notları pek iyi değil, demişler.

– Fransa’da ABD’deki gibi bol not verilmez. Notları Fransa için çok iyi. Kabul edin pişman olmayacaksınız.

Feza Bey kırılır mı? Yale’e kabul edildim. Feza Bey sayesinde Yale’e girdiğimi öğrendiğimde büyük bir sorumluluk altında buldum kendimi. Feza Bey’e güvenip beni matematik bölümüne kabul etmişlerdi. Feza Bey’i utandırmamalıydım. Nasıl yapacaktım bunu? Çok çalışmak doktora için yeterli değil ki. Yeterliymiş. Sonradan öğrendim.

Feza Bey üzerine ne anlatayım? Bilimdeki üstün başarılarını mı, kazandığı ödülleri mi? Yoksa yetiştirdiği öğrencilerden mi sözetsen? İnceliğine, duyarlılığına, sanat sevgisine ve bilgisine haksızlık etmiş olmam mı? Belki de daha kişisel olmalıyım; ABD’deki evinin bir Türk yurdu haline geldiğini, Türk öğrencilerinin sorunlarına karıkoca nasıl çözüm bulmak için uğraştıklarını anlatmalıyım. Eşimle evlendiğimiz gece evlerinde ailecek düzenledikleri kutlamada Asaf Halet Çelebi’nin “Maria” şiirini nasıl duyarak okuduğunu atlamamalıyım. Gece geç saatlere dek evinde biz gençlerle oturduğunu, yaşlılarıymışız gibi sohbet ettiğini, bizlerle oyunlar oynayıp bir çocuk gibi eğlendiğini söylemeliyim. Ya elinde kâğıt kalem, koltuğunda hesaplara daldığı anlar? Feza Bey eşsiz bir insandı. Feza Bey sayfalara sığmaz.

Babamla belgelerine baktığımız günler çoktan geride kaldı. Geçen hafta çoluk çocuk, Ankara’da Altınpark’a gittik. Amacımız Feza Gürsey Bilim Merkezi’ni ziyaret etmektir. Feza Bey’in adına yaraşır bir yer yapmışlar. Ailecek, büyük küçük hepimiz çok eğlendik. Feza Bey’in duvardaki o güzel fotoğrafını çıkarırken gördüm. Babamın, öğretmeni Reşit Bey’in sararıp solmuş fotoğrafını gördüğünde sarfettiği sözler çıkacaktı ağzımdan az kalsın. Son anda toparlandım. İşte o zaman babamın sözlerinin asıl anlamını kavradım. Reşit ve Feza Bey’ler bütün Türkiye’nin canlarıdır. Hepimiz öğrencileriyiz. Biz öğrencilerinde yaşayacaklar. Çok yaşasınlar!

1993

Feza Gürsey'in Bir Konuşması

Feza Gürsey'in 1968 yılında TÜBİTAK Bilim Ödülü'nü alırken yaptığı güzel konuşmanın son iki bölümünü geçiyorum. Konuşmanın tam metni Bilim ve Teknik dergisinin 295'inci sayısında (Haziran 1992) yayımlanmıştır.

III. Partikül Fiziğinin Bilimde ve Toplumda Yeri

Yeni temel fizik kanunlarının aranması yolundaki bazı gelişmeleri, bilhassa simetriler ile ilgili olan neticeleri kısaca gözden geçirdik. Dünyanın sayılı lâboratuvarlarında yapılan büyük çapta tecrübeler bu temel bilim yarışını halen beslemekte devam ediyor. Uzay yarışını gazetelerden her gün izliyoruz. Yüksek enerji fiziği yarışı da hemen hemen aynı derecede pahalı ve heyecanlı olduğu halde basına pek aksetmiyor. Öyleyse, halk efkârını fazla ilgilendirmeyen, şu anda endüstri ile de bir bağı olmayan çok masraflı bir teşebbüsü milletler neden teşvik ederler? Türkiye bu yarışla neden ilgilensin?

Bu suallere birkaç yönden cevap vermeğe çalışalım. İlk önce, tatbikat imkânlarını ele alalım. Artık asırların verdiği tecrübe ile biliyoruz ki, fizikte esas kanunlar bulunur bulunmaz uygulamalı fiziğe, oradan da teknolojiye

geçiş yolu açıktır. Yüksek enerji fiziğinde temel kanunları hâlâ aradığımıza göre, onları yakın bir gelecekte uygulamak bahis konusu olamaz. O halde “partikül fiziği faydasız” deyip geçelim mi?

Böyle bir acele yargı vermeğe hakkımız yok. Çünkü bir ilim dalının temellik derecesi ile tatbikat zamanı ters orantılıdır. Partikül fiziğinin teknolojiye yerini ne zaman alacağını, ne biçim tatbikatlara yol açacağını bugünden kimse kestiremez. Asrın başında atom fiziğinden lazerlerin, çekirdek fiziğinden nükleer bomba ve reaktörlerin doğacağını kim düşünebilirdi? Çekirdek fiziğinin babası koca Rutherford bile ilk nükleer reaktörün işlemesinden beş sene evvel, çekirdek fiziğinin tahmini mümkün bir gelecekte herhangi bir pratik tatbikatı olmayacağını söylemişti. İlim bâbında en kötü falcılar ilim adamlarıdır. Gene de şahsi bir tahminimi ortaya atayım: Antimaddenin yok oluşundan açığa çıkan müthiş enerjileri kullanacak yeni tip süper reaktörler yapmak ilerde mümkün olabilir. Her halde şüphemiz olmasın ki bugünden yüksek enerji fiziğinde üstün olanlar, yarın, hayalimizin dahi almadığı teknolojik gelişmelerle yer yüzünü değiştireceklerdir.

Uzun vadeli teknolojik gelişmeler bir yana, böyle temel bir konudan daha kısa vadeli ne gibi faydalar beklebilir?

Her şeyden önce partikül fiziği başka fizik kollarını etkileyecektir. Bunların başında astronomi ve kozmoloji geliyor. En küçükler âleminde bulduğumuz neticelerin en büyükler âleminde enerji kaynaklarını, dengelerini ve yıldızların, galaksilerin doğuş, yaşayış ve ölümlerini aydınlatacağı muhakkaktır. Şimdiden kâinatta nötrinoların önemli rol oynadığı biliniyor, antimaddenin de demin bahsi geçen kuasarlara gibi esrarlı olaylarla bir ilgisi olabileceği tahmin ediliyor.

Partikül fiziğinin etkisi altında kalacak ikinci konu çekirdek fiziğidir. Yakında, partiküller yardımıyla çekirdek kuvvetlerinin anlaşılıp bu konunun sağlam bir temel üzerine oturtulmasına muhakkak nazarı ile bakılıyor.

Nihayet başka önemli etki de matematiğe olabilir. Nasıl mekaniğin doğru ve kesin ifadesi Newton'u differansiyel hesabı yaratmağa zorladıysa, partikül fiziğinin tam teorisi de matematiğin yeni kollarının gelişmesine hatta doğmasına yol açabilir.

Bir temel bilim konusu, komşu bilim dallarından başka ne çeşit insan faaliyetlerine yardımcı olabilir? Belki temel bilimin en büyük rolü, insanın düşünce tarzını değiştirmesidir. Çağdaş fizikte rölativite prensibi, belirsizlik prensibi, bir teorinin yalnız gözlenebilir büyüklüklere dayanması prensibi gibi genel ve derin tabiat prensipleri felsefeye, hatta gündelik düşünce tarzımıza bile girmiş bulunuyor. Partikül fiziğinde de, bizi hiç alışılmamış düşünce tarzlarına götürecek yeni kavramlar doğmaktadır. Onlardan dünya görüşümüzü, hatta mantığımızı etkileyecek yeni derin prensipler çıkacağına şüphe etmiyorum. Fizikçi, mantığını tabiata zorlamağa çalışmaz, düşünce tarzını tabiatın öğrendiği hakikatlere göre ayarlar; tabiatın hocalığını kabul ederek ondan mantığını şekillendirmesini ve yontmasını ister.

Bütün bunlardan başka unutmayalım ki, partikül fiziğinin büyük ölçüde bir sosyal ve kültürel macera tarafı da var. O da insanlığı, maddenin iki bin senedir aranan sırrına yaklaştıracak tek konu olması. Tabiatın bu çözülmemiş meselesi tırmanılmamış bir dağ, ayak basılmamış bir kutup veya el değmemiş bir planet gibi yerinde durdukça, fikir fâtihtlerini üstüne çekmeğe devam edecektir.

IV. Temel Bilim ve Türkiye

Yirminci asrın bu büyük tecrübe ve fikir macerası karşısında Türkiye ne yapabilir? Fakir milletimizden dev lâboratuvarların inşasına katılması beklenemez. Fakat toplumumuz fikrî tecessüse, yaratıcılığa, tabiat meselelerinin çözümüne değer veriyorsa, yeni düşünce tarzlarına katkıda bulunmak, yarının akıllar durduracak teknolojisine bugünden yatırım yapmak istiyorsa, yüksek enerji fiziği gibi temel bilim faaliyetlerini teşvike devam etmelidir. Halen genç kuşaktan Ankara’da ve İstanbul’da bu konu ile ilgili ancak bir düzine kadar fizikçimiz var. İkisi tecrübeci, kalanı teori ile uğraşiyor. Onların ve onların yetiştireceği gençlerin sayesinde büyük merkezlerde yapılan tecrübelerle gücümüzün yettiği kadar katılabilir, yeni kanunları bulma yarışına parasız girer, belki de önemli bir katkıda bulunabiliriz. Sade konserve balık ve meyva suyu, yahut naylon ve çelik üretimini değil, orijinal fikir ve sağlam bilgi üretimini de artırabiliriz.

Temel bilim faaliyetleri ile ilgili olarak şu anda elimizde tuttuğumuz büyük imkâna dikkatinizi çekmek isterim. Temel bilim, uygulamalı bilimin ve teknolojinin aksine herkese açıktır. Temel bilimde sır yoktur. Tersine, bu konuda çalışan bilim adamları arasında, milletleri, siyasi inançları ne olursa olsun tam bir dayanışma vardır. Gençlerimiz bu dayanışmadan faydalanarak milleti yarınki teknolojiye hazırlayabilirler. Yüksek enerji fiziğinde meselâ Hindistan’da yapılan bir keşif, telgraf, mektup, hatta uçağına atlayan haberci fizikçiler vasıtası ile ertesi günü Japonya, Rusya, Avrupa veya Amerika’ya ulaştırılır. Yardım isteyen her grup dört bir taraftan yardım görür. Uluslararası kongrelerde seminerlerde genç ilim adamları tanışır, dostane bir rekabet havası içinde birbirleri ile fikir ve netice teati ederler.

Yarın yüksek enerji fiziği de nükleer bombalar ve uzay araçları gibi uygulamalı safhaya girince etrafına gizlilik perdeleri inecek ve bu konuyu işleyenlere her türlü yardım kesilecektir. O zaman istesek de yarışa giremeyiz. Yeni teknolojiyi memleketimize küçük mikyasta bile sokmağa kalksak malzeme, âlet ve montaj masraflarımızdan başka, plânlama, işletme ve geliştirme için lüzumlu bilgiyi, belimizi bükecek meblağlar ödemek pahasına satın almak mecburiyetinde kalırız. Halbuki temel konuları bugünden öğrenirsek, yarın kapalı duvarlar içinde bile kendi uygulamalarımızı kendimiz yürütebiliriz.

Son olarak bir noktayı daha belirtmek istiyorum. Toplumun teşvik edeceği birkaç temel bilim adamının başarısı, onların şahsi başarısı değil, bu tecessüsü ve uzak görüşlülüğü duyan toplumun başarısı sayılmalıdır. Aya iki üç astronot indiği zaman başarı, bu işe emek, para ve irade yatıran milletlerin olacaktır. Onun içindir ki toplum musikiyi, resmi, şiiri lüzumsuz bulduğu anda, o toplumda her fert dâhi bile olsa, sanatkâr yetişmez. Sade kısa vadeli düşünen, dar anlamda ütiliter felsefeye sarılan bir toplumda partikül fizikçisine yer yoktur. Fakat öyle toplumların da yarının ileri teknolojik dünyasında, bilim ve fikir tarihlerinde yeri olmayacaktır.

İnsan, toplumun bir parçasıdır. Ama unutmayalım ki, toplum da tabiat içinde yerini alır. O yüzden temel bilim, tabiata dönüktür. Toplum temel bilime dönük olduğu nispette bilim de insanlara uygulamalı meyvelerini bırakır. Temel bilimi unutan medeniyetler sonunda teknoloji kıtlığından ve fikir yoksunluğundan kurtulamazlar.

Her türlü faydalarını ve önemini bir kalemde silsek bile yüksek enerji fiziği gibi bir konunun son bir özü kalıyor geriye: O da güzelliği. Bir taraftan temel bilim derin bir gerçeği aksettirdiği için güzel. Bir taraftan da lojik ya-

pısı ve sadeliği bakımından güzel. Macera açısından bakılırsa, sürprizli yollardan beklenmedik netice ve kavramlara sürüklediği araştırmacılara heyecan dolu anlar yaşattığı için güzel. Böyle yaratıcı ve gerçek bir güzelliğin ne zararı olabilir? Bir avuç insan, eski dervişler misâli, tabiatın sırlarını dolaşır dururlar. Şair Muhyiddin Abdal'ın dediği gibi:

Muhyiddinem dervişem
Hak yoluna girmişem
On sekiz bin âlemi
Bir zerrede görmüşem.



Matematik Kitapları Üzerine

Geçen yaz [1992] Milli Eğitim Bakanlığı'nın çıkardığı matematik kitaplarını aldım. İlkokul 1'den lise 3'e dek tam on-bir cilt...

Okul kitabı yazmak, hele ilkokul kitabı yazmak, öyle küçümsenecek bir iş değildir. Bilimsel araştırmadan çok daha fazla sorumluluk isteyen bir uğraştır. Matematiğin yanısıra didaktik ve eğitim (pedagoji) de bilmek gerekir.

Konuların nasıl işlenip, hangi sırayla sunulacağı, örneklerin, soruların, sözcüklerin seçimi, resimle yazı arasındaki oran, geçmişte bizim ve başka ülkelerin deneyimleri gibi önemli noktaların üstünde uzun uzun durulması, hatta herbirinin birer araştırma konusu olması gerekir.

Örneğin ilkokul birinci sınıf öğrencilerine aritmetiği mi, geometriyi mi, yoksa küme kavramını mı öğretmeli ilk? Belki de “altında, üstünde, yanında, kenarında” gibi yedi yaşındaki bir çocuğa daha “doğal” gelebilecek kavramlara öncelik tanınmalı. Yoksa ne öğretildiğinden çok, soru sorma alışkanlığını aşılacak mı önemlidir? Bu işe yıllarını verenlerin bile bu birincil soruların yanıtlarında anlaştıklarını sanmıyorum.

Kısacası, bu iş öylesine karmaşık, öylesine zordur ki, kusursuz diyebileceğimiz bir okul kitabı yazmak nerdeyse olanaksız-

dır. Zorluğun bilincindeyim, ve amacım kesinlikle satın aldığım kitapları eleştirmek değil. Haddime mi? Uzmanlar bile bu konuda anlaşılamazken... Benimkisi salt merak...

Matematik eğitiminin nasıl yapılması konusunda tam bir uzlaşma sağlamak güç olabilir. Gene de matematik eğitiminde uzman olsun olmasın herkesin uzlaştığı biriki nokta vardır sanırım. Örneğin, matematik eğitiminin amacını saptamak pek zor olmasa gerek.

Nedir matematik eğitiminin amacı, ya da amaçları? Matematikğin güzelliğini, yalınlığını ve gücünü göstermek, düşünmesini, yani bağımsız ve doğru düşünmesini öğretmek, düşünmeyi bir alışkanlık haline getirmek. Unuttuklarımız, okurun eklemek istedikleri olabilir. Pek önemli değil. Üç aşağı beş yukarı hepimizin matematik eğitiminin amacında birleşeceğimize eminim.

Matematik kitaplarından rastgele birini açtım. Gözlerime inanamadım: İlk sayfada çatık kaşlı bir mehmetçik, göklerde dalgalanan bir bayrak ve İstiklal Marşı var. Atatürk'ün bir portresi ikinci, Gençliğe Söylevi üçüncü sayfada... Söylev günümüzün Türkçesine çevrilmemiş... Muhafaza'lı, müdafaa'lı, şerait'li ve de cebir'li! Neden çocuklarımızın anlayacağı dile çevirmemişler? Yoksa matematik kitabına Atatürk'ün Gençliğe Söylevi'ni koyanların amacı çocuklara Atatürk'ü anlatmak ve sevdirmek değil mi? Belli ki değil... Bir başka matematik kitabına Türkiye haritası koymuşlar. Bir an kuşkuya düşüp yanlışlıkla coğrafya kitabı aldığımı sandım. Hayır, yanılmamışım, kitabın kapağında **İlkokullar İçin MATEMATİK I** yazıyor. Her kitabın sonunda bir de Öğretmen Marşı var. Öğrenciler için yazılmış bir kitapta... Buyrun öğretmen marşına! Bu kadarla da yetinmemişler. İlkokul dörtlerin matematik kitabının aşağı yukarı tam ortasına bir okuma parçası koymuşlar: *Atatürkçü Düşüncede Özellik Taşıyan Önemli Yaklaşımlar*. Otuz sayfa ötede Tehdit başlıklı bir başka okuma parçası var. *Türkiye'nin jeopolitik önemi* diyor ve tahmin ettiğiniz gibi düşmanlarımız-

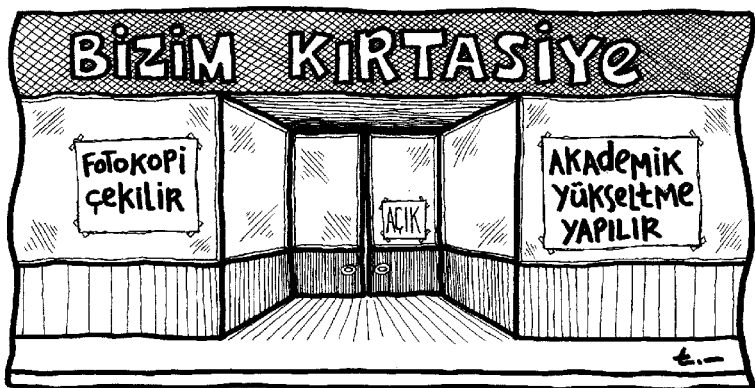
dan, yani Romanya, Bulgaristan ve Rusya'dan, sözediyor. Kitap 1991'de yazılmış.

Matematiğin yukarıda sıraladığımız amaçlarıyla yakından uzaktan hiçbir ilgisi olmayan bu resim ve yazıları matematik kitabına koyanların amacı ne olabilir? Acaba çocuklara Atatürk'ü ve yurdumuzu sevdirmek mi istiyorlar?

Aklı başında kime sorulursa sorulsun, bir matematik kitabına Atatürk resminin konulmasını beyin yıkama olarak nitelendirir. Yoksa Atatürk'ü sevdirmek ve anlatmak için, Atatürk'ün değerini kavratmak için, beyin yıkamaya mı gerek var? Hitler'i, Mussolini'yi, Pinochet'yi, Stalin'i sevdirmek için beyin yıkamaya gerek duyulabilir, Atatürk'ü sevdirmek için de mi beyin yıkamalı?

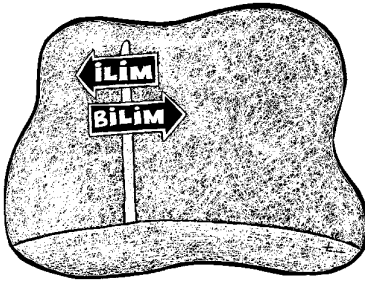
Matematik düşünmeyi öğretir. Sloganların, milliyetçiliğin, İstiklal Marşı'nın, bayrağın, askerin yeri değildir bir matematik kitabı. Hele beyin yıkamanın hiç ama hiç yeri yoktur matematik kitaplarında. Bu kitaplarla matematik okuyan çocuk ne matematiği, ne de Atatürk'ü sevebilir. Amaç bu mu?

Matematik kitabında yeri olmayan bu resimleri, bu okuma parçalarını koymak kimin kafasından çıkmıştır, kimin aklına gelmiştir? Kimini tanıdığım yazarların, yani matematikçi arkadaşlarımın, böyle bir saçmalıkta parmakları olduğunu sanmıyo-



rum. Hiçbir matematikçi böyle bir yönetime başvuramaz. Bu saçmalık, eğitim ve matematikle kıyısından köşesinden en küçük bir ilgisi olmayan kişilerin eseri olmalı.

Matematik kitabına resim ve okuma parçası konulmaz mı? Konulur. Örneğin düşündüren eğlenceli oyunlar, bilmeceler konulabilir. Ünlü matematikçilerin resimleri, yaşamöyküleri, oturdukları evin, çalıştıkları masanın, yazdıkları kalemin fotoğrafları konulabilir. Ünlü yapıtlardan alıntılar da yapılabilir. Çok da iyi olur. Böylece öğrenci hem zorlandığı konular arasında rahat bir soluk alır, hem de kuramlarını okuduğu matematikçilerle içli dışlı olur, onlara yabancılık duymaz, bilimde



yenilik yapanların kendisi gibi insan olduklarını görür. Eğer öğrencinin ülkesinden gurur duyması isteniyorsa hocamız Cahit Arf'tan sözedilsin. İlla Atatürk'ten söz etmek gerekiyorsa, eski Türkçe Söylev'i değil, Atatürk'ün yaşamının son yıllarında öztürkçe bir geometri kitabı yazdığını, “üçgen, dikey, açı” gibi onlarca sözcüğü dilimize kazandırdığını anlatan bir okuma parçası konulsun.

Milli Eğitim Bakanımız iki aydır Sayın Nahit Mentеше'dir¹. Yılların deneyimi olan bir bakan. Bu saçmalıkların matematik kitaplarından kaldırılması gerektiğini düşündüğünden kuşku yok. Umarım önümüzdeki yıllarda çocuklarımız ve gençlerimiz, aptallığın tüm çıplaklığıyla gözler önüne serilmediği matematik kitaplarından eğitim görürler.

1 Kitapın ilk basımından bugüne kadar sosyal demokrattan ortanın sağına, ortanın sağından İslamcısına dek siyaset yelpazesinin hemen hemen her derecesinden bakan geldi geçti. Ders kitaplarında hâlâ daha bir değişiklik yok.

Hypatia

Sivas'ta yakılanların anısına

Hypatia bugüne yapıtı kalmış ilk kadın matematikçidir. İS 370-415 yılları arasında yaşamış olmasına karşın, yaşamı bugün okullarımızda - ne yazık ki - ders olarak okutulacak güncellikte¹.

Hypatia İskenderiye'de doğup İskenderiye'de öldüğünden, Hypatia'nın başına gelenlerin nedenlerini anlayabilmek için o yılların İskenderiye'sini bilmemizde yarar var.

İskenderiye, Makedonya kralı ve Aristo'nun öğrencisi Büyük İskender tarafından İÖ 332 yılında Mısır'da kurulmuş bir kenttir. İskender'in ölümünden (İÖ 323) sonra, İskender'in en güvendiği general olan Ptolemaios ve ailesi tarafından yönetildi. Çok büyük bir üniversite ve kitaplık kuruldu. Çağın en önemli kültür merkezlerinden biri oldu.

Bu kentte salt Yunanlılar ve Mısırlılar değil, Yahudiler de yaşıyordu. Hatta o çağların en önemli Yahudi kentiydi.

İskenderiyeliler bir süre için Roma İmparatorluğu'ndan bağımsızlıklarını korumayı zar zor başarabildilerse de, İS 80 yılında pes ettiler.

1 Tarihçi Charles Kingsley, Hypatia'nın yaşamından öylesine etkilenmiş ki, Hypatia'nın yaşamını konu eden bir roman bile yazmış (1907).

326 yılında, 1. Constantin Roma'nın entrikalarından kurtulabilmek amacıyla Roma İmparatorluğu'nun merkezini doğuya kaydırmak istedi ve Konstantinopol'u, yani İstanbul'u, kurdu². Hemen sonra da Hıristiyanlığı kabul etti. Paganlarla Hıristiyanların kavgası 5. yüzyıla taşdı. Daha sonra da göreceğimiz gibi, Yahudilerin ve Yunan paganlarının etkin oldukları İskenderiye de bu kavgadan payını fazlasıyla aldı.

Tarihe birazdan geri dönmek üzere Hypatia'nın çocukluğundan söz edeyim biraz³. Hypatia'nın babası Theon, İskenderiye Üniversitesi'nde matematik hocasıydı. Daha sonra üniversitenin rektörü oldu. Hypatia, İskenderiye'deki zengin bilim ortamından yararlandı. Daha genç yaşlarında soru sormayı, araştırmayı ve kuşku duymayı öğrendi. Theon, kızını kusursuz bir insan olarak yetiştirmek istiyordu. Kızının eğitimini üstlendi, hem öğretmeni, hem oyun arkadaşı oldu. El sanatları, şiir, felsefe, din, astronomi, astroloji, matematik konularında eksiksiz bilgilenmesi için elinden ne geliyorsa yaptı. Çok iyi bir öğretmendi. Öğrettiği konuları seviyor ve sevgisini karşısındakine aktarabiliyordu. O çağda ve dünyanın o yöresinde bilinen bütün dinleri kızına öğretti. Dogma düşüncelere ve dinlere saplanmasına izin vermedi.

Bütün dogmatik dinler yanlışlarla doludur ve kendine saygısı olan bir kimse tarafından son gerçek olarak kabul edilmemelidir,

ve

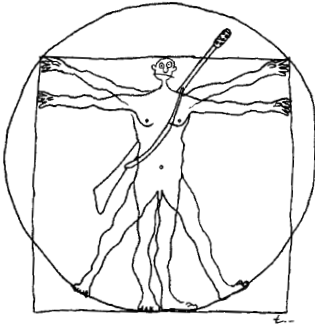
2 İstanbul ve çevresinde daha önce de insanlar yaşıyordu elbet. I. Constantin, İstanbul'u büyük bir yerleşim merkezi haline getirmiştir. Her yazısı bende matematiksel çağrışımlar uyandıran Melih Cevdet Anday 17 Aralık 1993 tarihli Cumhuriyet'te şöyle yazıyor: "[...] bugün Fikirtepe denilen yer, geç Kalkolitik çağda (İ.Ö. 4000-3500) kurulmuş İstanbul'un ilk yerleşme yeridir. İ.Ö. 680 yılında Yunanistan'dan gelen Megaralılar ise bugünkü Kadıköy'de Khalkedon adı ile anılan yerleşmeyi kurdular."

3 Hypatia'nın yaşamıyla ilgili bilgiler Elbert Hubbard'ın Little Journeys to the Homes of Great Teachers ve Lynn M. Osen'in Women in Mathematics adlı yapıtlarından alınmıştır.

Düşünme hakkını hep kullanmalısın. Çünkü, yanlış düşünmek, hiç düşünmemekten yeğdir,

dedi kızına.

Kızının salt zihinsel değil, bedensel gelişmesine de gereken önemi verdi. Günün belli saatleri spora ayrılmıştı. Hypatia yüzmesini, kürek çekmesini, ata binmesini, dağa tırmanmasını öğrendi. Hitabet, Yunanlılarda hem bir bilim, hem de bir sanattı. Hypatia güzel ve etkili konuşmasını da öğrendi. Güzel sözcükleri seçmeyi, doğru mantığı kullanmayı, düşüncelerini nasıl dile getirirse etkili olacağını, ne zaman fısıldayıp, ne zaman sesini yükseltmesi gerektiğini öğrendi. Theon kızına aldatıcı ve kandırıcı güzel dillerden sakınması gerektiğini söylemeyi de unutmadı. Geçiciyle kalıcı arasındaki ayrımı, neyin önemli, neyin önemsiz



olduğunu anlattı. Kısacası, Theon, kızının her anını değerlendir-di. Bir oya gibi işledi gençkızı.

Yıllar sonra Hypatia babasından öğrendiklerine kendi kendine öğrendiklerini de katıp şöyle yazdı:

Masallar masal diye, efsaneler efsane diye anlatılmalıdır. Boşinançları gerçek diye öğretmekten daha korkunç bir şey olamaz. Çocuk akli bunları kabul eder ve çocuk yanlış şeylere inanır. Bu yanlış inançlardan arınmak çok zor olur, uzun yıllar alır. İnsanlar boşinançlara bir gerçekmiş gibi inanıp uğruna dövüşürler. Hatta boşinançlar uğruna daha fazla dövüşürler, çünkü boşinanç öylesine elle tutulmazdır ki çürütülmesi nerdeyse olanaksızdır.

Hypatia biraz büyüdüğünde - babasının etkisinden kurtulmak için olabilir - dünyayı dolaşmaya çıktı. Kimi bir yıl dolaştı diyor, kimi on yıl. Roma'ya ve Atina'ya gitti. Atinalı filozof,

yeni-eflatuncu Plütark'tan dersler aldı⁴. Bu yolculuğu sırasında matematikçi olarak ünlendi. İskenderiye'ye geri döndüğünde üniversitede matematik ve felsefe okutması istendi. Seve seve kabullendi. Bu günler için yetiştirilmemiş miydi? Hypatia çok sevilen, iyi bir öğretmendi. Tarihçi Sokrat⁵, Hypatia'nın hem sınıfının, hem de evinin öğrencilerle, çağın bilgin ve düşünürleriyle dolup taşıdığını yazıyor. Avrupa'dan, Asya'dan ve Afrika'dan öğrenciler salt Hypatia'nın öğrencisi olmak için akın akın İskenderiye'ye geldiler. Diofantos'un ünlü Aritmetik adlı yapıtından⁶ ders verirdi genellikle. Elbet, yapıtı olduğu gibi değil, düşüncelerini katarak, yorumlarını getirerek, geliştirdiği yöntemleri açıklayarak anlatırdı.

Hypatia matematik üzerine birçok kitap yazmıştır. Ne yazık ki bu kitaplardan günümüze ancak parçaları kalabilmiştir. Çoğu İskenderiye yangınında ve Serapis tapınağının azgın halk tarafından yakılıp yıkılmasında zarar görmüştür. Babasıyla birlikte Öklid üzerine en az bir kitap yazdığı biliniyor. Diofantos'un astronomi üzerine çalışmalarına katkıda bulunan bir yapıtının parçaları 15'inci yüzyılda Vatikan kitaplığında bulunmuştur. Hypatia'nın bir de Apollonius'un Konikleri Üzerine adlı bir kitap yazdığı biliniyor. Hypatia'dan sonra 17'nci yüzyılın ikinci

4 Atinalı iki Plütark vardır. Birincisi 46-120 yılları arasında yaşamıştır, yaşamöykücüsü olarak tanınır daha çok. Sözüünü ettiğim Plütark daha az tanınmıştır. Bu yazıda yeri yok ama, dayanamadım: Birinci Plütark'ın bilimsel yapıtlarından birkaçının adı şöyle: Çocukların Eğitimi Üzerine - Bir Delikanlı Şiiri Nasıl İhtimeldir?, Yağcıyla Gerçek Dost Nasıl Ayırdedilir?, Evliye Öğütler, Kara Hayvanları mı Yoksa Deniz Hayvanları mı Daha Zekidir?, Su mu Yoksa Ateş mi Daha Yararlıdır?

5 Atinalı filozof Sokrat değil.

6 Çağımızın matematiğine büyük katkısı ve etkisi olan bu yapıt, ancak 1600'lü yıllarda Latinceye çevrilip Batı tarafından tanınmıştır. Fermat, Büyük Teoremini işte bu çevirinin bir sayfa kenarına yazmıştır. Diofantos da İskenderiye'de yaşamıştır. Tahminen 3'üncü yüzyılın ortalarında. İskenderiye 3'üncü yüzyılın sonlarında bir başka matematikçi tanımıştır: Pappüs. Bugün hâlâ daha Pappüs'ün geometriyle ilgili çok önemli bir teoremi matematikte sık sık kullanılır.

yarısına değin bu konuya dokunulmamıştır, ta ki Descartes, Fermat, Newton, Leibniz gelene dek. Bunun dışında, Ptolemaios'un astronomi ve Diofantos'un aritmetik kitaplarına düştüğü notları var elimizde. Hypatia, gökyüzü gözlemlerinde, su arıtmada, denizcilikte kullanılan çeşitli buluşlarıyla da ünlüdür.

Hypatia çok güzel bir kadındı. Güzelliği, bilgisi ve akli dille-re destandı. Prenslar, filozoflar Hypatia'ya evlenme önerisinde bulundular. Hiçbirini ak-lına eşit bulmamış olacak ki, "ben gerçekte evliyim" lafabeliğine sığınarak önerileri geri çevirdi. Öte yandan, sevgiliden yok-sun olmadığı biliniyor.

Hypatia öylesine ün-lüydü ki, "İskenderiyeli fi-lozof" ya da "İskenderiye-li esin perisi" adresli mek-tuplar doğrudan kendisi-ne verilirdi.

Hypatia, yeni-eflatun-cular denilen bir düşünce okulundan sayardı kendi-ni. Bu okulun bilimsel düşünme yöntemi Hıristiyanların dogma-tik ve bağnaz düşünceleriyle çelişiyordu.

İS 412 yılında, İskenderiye'nin patrikanesinin başına Kiril adında bir adam atandı. Kiril'in öykümüzde önemli yeri var. Bi-raz Kiril'den sözedeyim⁷.

Kiril çöllerde oruç tutup dua eden sofu bir Hıristiyandı. Ge-ne de dünya işlerinden elini ayağını çekmemişti (bir arkadaşının



7 Kiril (Cyril) üzerine bilgiler, Edward Gibbon'ın (1737-1794) Decline and Fall of the Roman Empire adlı yapıtından elde edilmiştir.

eleştirisi.) İyi bir konuşmacıydı ve insanları kullanmasını, etkilemesini iyi biliyordu. “Paraboları” denilen bir çapulcu ordusu emrindeydi. Parabolariler başlangıçta bugünün Kızılay’ı görevini görüyorlardı. Daha sonra amaçlarından sapıp, çalıp çırpma-ya başladılar. Kiril paganlara saldırmaya en zayıflarından başladı. Çok yakıp yıktı, çok suçsuz insan öldürdü. Sonra, İskenderiye’nin kuruluşundan bu yana özel yasalarla korunan ve barış içinde yaşayan Yahudilere yüklendi. Tapınaklarını, yani havra- larını yerle bir edip onları kentten sürdü.

Roma’nın atadığı Mısır müfettişi, Orestes adında çağına göre aydın sayılacak bir insandı. Hypatia’nın da yakın arkadaşıydı. Kiril’in yaptıklarını hükümetine şikayet ettiyse de bir sonuç elde edemedi. Bir gün, Orestes arabasıyla yoldan geçerken 500 kadar rahip Orestes’e saldırıp öldürmek ister. Orestes, hıristiyan olduğunu ısrarla söylese de bir yararını görmez. Taş yağmuruna tutulur. Yaralanan Orestes ölümden son anda halk tarafından kurtarılır. Orestes, kendini yaralayanın cezasını orada ve o anda verir: ölüm. Kiril daha sonra Orestes’in öldürttüğü kişiyi büyük bir törenle katedrale gömdürür ve adını Thaumasius’a (“Mükemmel” demek) değiştirir.

Kiril yalnız dinsel gücü değil, siyasi gücü de eline geçirmek istiyordu. Bu nedenle Orestes ve yandaşları yokedilmeliydi, en azından Orestes zayıflatılmalıydı. Hypatia, Orestes’in yakın arkadaşlarının en önemlisi ve en başta gelenlerindendi. Hem saygındı, hem bilgiliydi, hem iyi konuşurdu, hem de ünlüydü. Hypatia ortadan kaldırılmalıydı. Orestes’le Kiril’in dostluklarına tek engelin Hypatia olduğu ve Kiril’e kızıoğlankız bir adak gerektiği söylentileri yayılır kentte. Matematik tarihinin en korkunç cinayeti için ortam hazırlanmıştır. Kışkırtmacıların da yardımıyla, çapulcular, işsizler, cahiller Hıristiyan olmayan Hypatia’ya karşı kızıştırılır. Hypatia, üniversitesinin önünde arabasındayken bu canavarların hücumuna uğrar. Önce soyarlar, sonra midye kabuklarıyla etlerini parçalayıp ateşe atarlar.

Soruşturma açılır elbet. Açılmaz olur mu? Ama rüşvet ve güç gösterisi sayesinde sonuçlanmadan kapanır. Kiril, Hypatia'nın Roma'da olduğunu, linç edilmediğini bildirir halka. İskenderiye-lileri kandırmış olabilir ama Tarih'i kandıramamış⁸.

Beşinci yüzyılın başında İskenderiye'de yaşanan dehşetin bir benzeri, yirminci yüzyılın sonunda Sivas'ta yaşandı. Elimizi şakağımıza koyup düşünelim.



8 Bu yazı yazıldıktan sonra, The American Monthly, cilt 101, sayı 3, Mart 1994, sayfa 234-243'te Michael Deakin'in "Hypatia and Her Mathematics" adlı yazısı yayımlandı. Deakin yazısında Hipatya üzerine yaygın yanlış bilgilerimizi düzeltiyor. Konuyla ilgilenenlerin okuması gereken bir yazı.