DİJİTAL KÜTÜPHANE KANALI

Keyifli Okumalar Dileriz

Binlerce kategoride milyonlarca PDF e-kitap, ders kitapları, dergiler ve romanlara platformumuz üzerinden ücretsiz ulaşabilirsiniz.

RESMİ WEB SİTEMİZ

https://rantey.org

Yedek ve Duyuru Kanallarımız
Sitemize erişim engeli gelmesi veya adres değişikliği durumunda aşağıdaki kanallardan güncel giriş adresine erişebilirsiniz:

• Telegram: https://t.me/birkitapbir

• WhatsApp Kanalımız : https://whatsapp.com/channel/0029VbDHv8uE50Us4IvMoc0Y

Matematik Felsefesi

Editör: Bekir S. Gür

Bertrand Russell
David Hilbert
L.E.J. Brouwer
Paul Bernays
Douglas Gasking
Kurt Gödel
Paul Benacerraf
Hartry Field
Penelope Maddy
Michael D. Resnik
Gregory J. Chaitin
Reuben Hersh
Bekir S. Gür

Ücretsiz PDF Kitap Arşivi - https://rantey.org

felsefe

2. Baskı

Bekir S. Gür. ODTÜ Matematik Öğretmenliği Bölümü'nden mezun oldu. Bir süre öğretmenlik görevinde bulundu. Florida Eyalet Üniversitesi'nde öğretim teknolojisi dalında yüksek lisansını yaptı. Hâlen, Utah Eyalet Üniversitesi'nde aynı dalda doktora çalışmalarını sürdürmektedir. Çeşitli dergilerde telif ve çeviri yazıları yayınlandı. Matematik Felsefesi (Orient Yayınları, Ankara, 2004) adlı yayınlanmış bir derleme çalışması bulunuyor. Bilim ve matematik tarihçisi Rüştü Raşid'in makalelerinden oluşan İslam'da Bilim ve Avrupalı Klasik Modernitenin İcadı adlı derlemesi Kadim Yayınları tarafından baskıya hazırlanmaktadır.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Matematik Felsefesi

Editör: Bekir S. Gür

Bertrand Russell
David Hilbert
L.E.J. Brouwer
Paul Bernays
Douglas Gasking
Kurt Gödel
Paul Benacerraf
Hartry Field
Penelope Maddy
Michael D. Resnik
Gregory J. Chaitin
Reuben Hersh

kodlab
Gelenekten Geleceğe
Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Kadim Yayınları : 5
Felsefe Kitaplığı : 1

ISBN: 975-9000-04-0

© Kadim Yayınları, Aralık 2004
Tüm Hakları Saklıdır.

Matematik Felsefesi
Editör: Bekir S. Gür

Yayına Hazırlayan
Oğuzhan Altuğ Kılıç

İç Tasarım
Ali Karagöz

Kapak Tasarım
Oğuz Çetin

Basım
Cantekin Matbaası
Tel: (312) 384 34 35

Kadim Yayınları
Büklüm Sk. No: 19/2 Kavaklıdere / Ankara
Tel: (312) 418 54 74
Fax: (312) 418 78 76

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

İÇİNDEKİLER

Sunuş 7

Başlarken

Matematik Felsefesine Giriş
Bekir S. Gür 13

I. Matematiğin Temelleri

Matematiksel Felsefeye Giriş*'ten Seçmeler*
Bertrand Russell 73

Matematiksel Mantığın Felsefi Önemi
Bertrand Russell 105

Sonsuz Üzerine
David Hilbert 117

Matematiğin Temelleri
David Hilbert 143

Sezgicilik Üzerine Konuşmalar
L.E.J. Brouwer 163

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

II. Ontoloji ve Matematiksel Hakikat

Matematikteki Platonculuk Üzerine
Paul Bernays 175

Matematik ve Dünya
Douglas Gasking 195

Cantor'un Süreklilik Problemi Nedir?
Kurt Gödel 217

Matematiksel Hakikat
Paul Benacerraf 239

III. Matematiksel Nesneler ve Matematiksel Bilgi

Matematikte Realizm ve Karşı-Realizm
Hartry Field 265

Kümeler ve Sayılar
Penelope Maddy 299

Modeller Bilimi Olarak Matematik: Ontoloji ve Referans
Michael D. Resnik 325

IV. Özgün Yönelimler

Matematiğin Temelleri Üzerine Uyuşmazlık Yüzyılı
Gregory J. Chaitin 359

Matematik Felsefesinin İhyası İçin Bazı Öneriler
Reuben Hersh 399

Şahıs Dizini 431

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

SUNUŞ

"Geometri ile ilgisi olmayan bir filozof, ancak yarım bir filozoftur; felsefe ile ilgisi bulunmayan bir matematikçi, ancak yarım bir matematikçidir. Bu iki disiplinin birbirine yabancılaşması, ikisinin de zararına olmuştur."

Frege

Felsefe bölümü öğrencilerinin Descartes'ın *Metot Üzerine Konuşmalar*'ını okumuş oldukları kabul edilir. Ne var ki, felsefe öğrencileri, *Metot*'un Descartes'ın şaheseri kabul edilen *Geometri*'yi içerdiğinin farkına varmazlar. Aslında Descartes'ın kitabının orijinal başlığı, *Metot, Diyoptrik, Meteorlar ve Geometri Üzerine Konuşmalar*'dır.[1] Öte yandan, matematikçiler de yanlış eğitilir. Onlar, Descartes'ın analitik geometrinin kurucusu olduğunu iyi bilirler; fakat bu çalışmanın onun felsefedeki çalışmalarının bir parçası olduğunu bilmezler. Hollandalı matematikçi Willem Kuyk'u izleyerek yukarıdaki tespitte bulunan matematikçi-filozof Hersh'in dediği gibi, belki de

1 Doğrusu tarihsel olarak Descartes, muhtelif bilimsel çalışmalarını yayınlamak üzere birleştirirken, bu çalışmaların hepsinin gerçekte büyük bir temel projenin parçası olduğunu göstermek için bir önsöz yazmıştır. Bu önsöz *Metot*'tur. Zamanla başlı başına bir eser kimliğine bürünmüştür. Ayrıntılı bilgi için bkz. özellikle, çevirmenin yaptığı açıklamaların bulunduğu giriş (xi-xxxii), Descartes (1999).

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

matematikçiler *Metot*'u okumamaktalar, felsefeciler ise *Geometri*'yi okumamaktalar (Hersh, 1997: 110-3).

İşin aslı, felsefeciler matematik hakkında sık sık yazarlar, fakat popüler yazılarında bazen aşırı genelleştirmeler yaparak okuyucuyu yanlış yönlendirirler (Barker: 1964). Matematikçilerin önemli bir kısmı ise yaptıkları işin felsefî yönü ile uğraşmamayı, bunun yerine belli popüler söylemlerle yetinmeyi yeğlemişlerdir. Böyle olunca da bizde ve dünyada matematik felsefesi alanı, ciddî bir ilgi görmemiştir. Genel olarak gözlenen bu ilgi eksikliğine rağmen, matematik felsefesi bir çok önemli düşünürün felsefesinde merkezî bir rol oynamıştır. Sözgelimi, Edmund Husserl, Ludwig Wittgenstein ve Bertrand Russell gibi 20. yüzyılın önemli düşünürlerinin matematik felsefesi ile ciddî derecede iştigal ettikleri iyi bilinmektedir. Aslında önemli düşünürlerin bu asırdaki ilgisi zannedilenden daha fazladır; örneğin, yapısöküm'ün kurucusu sayılan Jacques Derrida'nın, Husserl'in *Geometrinin Orijini* adlı incelemesi üzerine eseri, basılan ilk önemli eseridir. Yine Gilles Deleuze'ün Leibniz, diferansiyel ve matematik üzerine yorumları kayda değerdir.

Bilindiği üzere, dünyada matematik felsefesi ile ilgili çalışmalar geçen asrın ilk çeyreğinde doruk noktasına ulaşmıştır. Müteakip yarım asırlık dilimde bu çalışmalar nispeten yavaşladı; yüzyılın son çeyreğinde ise bu alanda yeniden bir canlanma yaşandı. Yüzyılın bu son çeyreğinde, Türkiye'de dünyadakine paralel bir açılım sağlandığı söylenemez. Alanın günümüzdeki hâline çokça tesir etmiş düşünürler tarafından kaleme alınmış metinlerin Türkçe'de olmamasının, alandaki araştırmaların niteliğini etkileyen önemli bir etmen olduğu söylenebilir. Elinizdeki bu eser, entelektüel tarihin unutulmuş bu parçasını okuyucusuna sunmak niyetindedir.

Birinci el kaynakların, akademik çalışmalardaki önemi izahtan varestedir; dolayısıyla, bu çalışmanın, alana ilgi duyan araştırmacı-

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

lar için vazgeçilmez bir kaynak kitap olacağına inanmaktayız. Antolojik çalışmalarda vurgu yapılan bir hususun altını burada çizmekte fayda var. Derlenen makalelerin bütün matematik felsefesi alanını sunmak gibi bir amacı yoktur. Birçok antolojide olduğu gibi burada güdülen amaç, daha ziyade, tek başına veya birlikte okunması alandaki temel tartışmalara ışık tutabilecek makalelerden bir kısmını toplu bir şekilde okuyucuya sunmaktır.

Kitap, *Matematiğin Temelleri; Ontoloji ve Matematiksel Hakikat; Matematiksel Nesneler ve Matematiksel Bilgi* ile *Özgün Yönelimler* olmak üzere dört bölümden oluşmaktadır. Tabiî ki, kitabı bölümlere ayırmak, bir bölümdeki makalelerin başka bölümlerde ele alınan konularla ilgili olmadığı anlamına gelmez. Sözgelimi, ikinci kısımda yer alan Bernays'ın 'Matematiksel Platonculuk Üzerine' adlı makalesi biçimci ve sezgici yaklaşımların özetini güzel bir şekilde sunmakta ve dolayısıyla birinci kısım olan matematiğin temelleri ile bağlantılı olmaktadır. Yine üçüncü kısımda yer alan makalelerin nerdeyse tümü ontoloji ve doğruluk gibi konularla, yani ikinci kısımda tartışılan konularla temelden ilgilidir.

Ayrıca, *Başlarken* adlı yardımcı bir bölümü kitabın başına eklemeyi uygun bulduk. Bu bölümde tarafımızdan hazırlanan "Matematik Felsefesine Giriş" başlıklı bir yazı yer almakta. Kitaptaki makalelerde yer alan tartışmaların bir kısmının kimi okuyucularımız için nispeten ileri seviyede olabileceğini göz önüne alarak, alanı tanıtmak amacıyla bu yazıyı hazırladık. Bu yazının daha sonraki metinlere zihinsel bir hazırlık sağlayacağını umuyoruz.

Kitabın birinci kısmı, matematik felsefesinde geçen yüzyılda en çok tartışılan konu olan matematiğin temelleri ile alakalı mantıkçılık, biçimcilik (formalizm) ve sezgicilik adlı ekollerin başını çekmiş olan Russell, Hilbert ve Brouwer gibi önemli matematikçi-filozofların yazdıklarından seçilen beş makaleden oluşmaktadır.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Kitabın ikinci kısmında, matematik felsefesi tarihindeki temel tartışmaları oluşturan soyut matematiksel nesnelerin ontolojisi ve matematiksel hakikat gibi konularla ilgili Bernays, Gasking, Gödel ve Benacerraf tarafından yazılan dört makale yer almaktadır.

Üçüncü bölümde, matematiksel nesnelerin doğası, var olup olmadıkları ve bu matematiksel nesneler hakkında nasıl bilgi elde edildiği türü konular hakkındaki tartışmalar, son dönem matematik felsefesini şekillendiren Field, Maddy ve Resnik gibi filozoflar tarafından ele alınmakta.

Lakatos'un matematik felsefesinde başlattığı akıma Kitcher'in 'özgün' adını vermesini izleyerek, başlığını 'özgün yönelimler' olarak belirlediğimiz son bölümde, bu yönelimin en canlı sesi olan Hersh'in bir yazısı yer alıyor. Ayrıca, felsefeci ve matematikçiler için kışkırtıcı iddiaları bulunan Chaitin'in bir yazısını da bu bölüme eklemeyi uygun bulduk.

Çalışmanın her aşamasında yardımlarını esirgemeyen ve entelektüel dünyamıza bir katkı olması amacıyla bu konuda çalışmaya beni teşvik eden bütün dostlara minnettarım. Hususiyetle, bu alanda uzlaşımsal bir felsefi dilin eksikliğine rağmen zorlu metinlerin çevirisini üstlenen ve metinler üzerine müştereken kafa yoran dostlarım Muharrem Özlük, Cezmi Kayan, Halim Güner, Murat Özoğlu ve M. Sabır Kiraz'a minnettarım. Giriş yazısının ilk taslağını okuma nezaketi gösterip gelişmesine katkıda bulunan hocalarım ve arkadaşlarım Nuh Yılmaz, Cemalettin Haşimi, Doç. Dr. Yasin Aktay, Dr. Tahsin Görgün, Doç. Dr. Mehmet Görmez, Metin Yiğit, Dr. Bülent Sönmez ve Faruk Ekmekçi'ye; bazı metinlerdeki dil yanlışlarını düzeltmede önemli katkıları bulunan değerli dostlarım Hamdi Topal ve Emine İleri'ye teşekkürlerimi sunabilmeyi diliyorum. Ayrıca, çalışmaların başından itibaren her türlü hususta yardımcı olan Sadık Gür'e ve yazı taslaklarını bilgisayara geçiren Nurettin Gür ile Ömer Özcan'a müteşekkirim. Son olarak çalışmanın basımını üstlenen sevgili dos-

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

tum ve yayıncım Serhat Buhari Baytekin'e minnettarlığımı sunar, genç yayıncılık Kadim Yayınlarına başarılar dilerim. Bu mütevazı çalışma, alanında yapılan çalışmalara bir derinlik katabilirse, gerçek amacına ulaşmış olacaktır.

Bekir S. Gür
Mart 2004, Utah

Referanslar

Barker, Stephen F. (1964). *Philosophy of Mathematics*. Prentice-Hall, Inc.

Descartes, René (1999) *Discourse on Method and Related Writings*, Çeviren ve notlandıran: Desmond M. Clarke, Penguin Classics.

Hersh, Reuben (1997). *What is Mathematics, Really?* New York: Oxford University Press.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

BAŞLARKEN

MATEMATİK FELSEFESİNE GİRİŞ

Bekir S. Gür

Tek başına matematiğin varoluşu bile, insan zihninin ulaşabileceği önemli sınırlara işaret etmektedir. Entelektüel kelimesini zihinsel etkinliklerin tümünü kapsayıcı anlamda ele alırsak, matematik, insanoğlunun kazandığı en önemli entelektüel başarılardan biri olarak karşımıza çıkar. Bundan dolayı Alfred North Whitehead matematiği, müzik ile birlikte "insan ruhunun belki de en önemli ürünü" olarak nitelemişti (Tymoczko, 1998: xiii).

Modern toplumun şekillenmesinde önemli bir rolü olan matematik, günümüzde uçak teknolojisinden bilgisayarlara kadar birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. Öyle ki, yaşadığımız dünyanın her geçen gün biraz daha sayısallaştığına şahit oluyoruz.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Artık, dijital (rakamsal) kelimesi hayatın ayrılmaz bir parçası hâline gelmiştir. Bütün eğitim görmüşler, dünyaya sayıların çerçevesinden bakarlar. Anne ve babalar çocuklarının matematikten yüksek not almasını isterler; devlet, okullarda matematiğe daha çok saat ayırır; üniversitelerdeki en büyük bölümlerden biri matematik bölümüdür. Zekâ testleri, genel yetenek ve iş sınavlarının çoğu, adayın matematiksel akıl yürütmesini ölçen özel testlerden oluşur. Matematik bilmek bir üstünlük olarak kabul edilir. Geometrinin, insan aklını aydınlattığı ve zihni doğrulttuğu, ayrıca, geometrik akıl yürütmelere hata bulaşmasının neredeyse imkânsız olduğu eskiden beri ileri sürülen bir görüştür. Sözgelimi, İbn Haldun'a göre, geometri ile uğraşan birinin zekâsı artar ve zihni kolay kolay hataya düşmez (1958: 130-1). Ayrıca, evrenin görünüşünün arkasında ne yattığını anlamak için matematik eğitimi almak gerektiğini düşünen Platon'un, Akademi'sinin kapısına, "Geometri bilmeyen girmesin" diye yazdırdığı rivayet edilir.

Tarihî açıdan matematik, mutlak doğru ile eş olarak görülmüştür. Öklit geometrisi 2300 yıldır okullarda mutlak doğru olarak okutulmaktadır. Matematikçiler bile 19. yüzyıla kadar Öklit'in *Elementler*'ini mutlak doğru olarak algılamışlardır. Matematiğin bu büyüsüne kapılan birçok filozof, çalışmalarında iddialarını ortaya koymak ya da güçlendirmek için, *Elementler*'in sistemini takip etmişlerdir. Descartes yazılarında *Elementler*'in sistemini övmüş, Newton *Principia*'sında, Spinoza *Etik*'inde görüşlerini desteklemek için *Elementler*'in sistemine özenmiş ve bu sistemin benzerini kullanmıştır. Spinoza ve Descartes, Tanrı'nın varlığını ispat ederken "*more geometrico*–daha fazla geometri" düşüncesi ile hareket etmişlerdir (Hersh, 1979). Spinoza, kendi önermelerindeki doğruluk ifadesi belirtmek için, "bir üçgenin iç açıları toplamı, iki dik açının toplamına eşit olduğu gibi" türünde ifadeler kullanmıştır (Hersh, 1997: 121). Hobbes, geometriden bahsederken, "insan oğluna bahşedilmiş

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

... biricik bilim" demiştir (Ernest, 1998: 1). Whitehead ve Russell matematiğin biricikliğini, en kamil biçimde birlikte yazdıkları, *Principia Mathematica*'da ortaya koymaya çalışmışlardır. 1910-13 yılları arasında Whitehead ve Russell, Newton'a hürmeten başlıklarında *Principia* kelimesine yer vererek, Newton'un fizikte yaptığı devrimi, matematik için sağlam bir temel bularak matematikte yapmayı amaçlamışlardır (Tymoczko, 1998: xv).

Birçok filozof, matematiğin mutlak doğru olduğuna inanmaktadır. Öyle ki, Hempel meşhur 'Matematiksel Doğruluğun Doğası Üzerine' adlı makalesinde, matematiğin önermelerinin "tanımı itibariyle doğru" olduğunu belirtmiş, matematik önermelerinin, "Bütün bekarlar evli değildir" ifadesindeki gibi kesinlik değerine sahip olduğunu belirterek, matematiğin mutlak geçerliliğini iddia etmiştir (Hempel, 1945: 378).

Kısacası, matematik, tarih boyunca yanılmaz bilginin kaynağı olarak algılanmıştır. Bu ayrıcalığın kökeninin, onun mantıksal yapısına, teoremleri sunuşuna ve doğrulama metotlarına dayandığı iddia edilmiştir (Ernest, 1998: 1). Bu bağlamda, gözlem ve deneye dayanmadan, sadece akıl ile mutlak bilgi sunduğu iddia edilen matematik, felsefî bir soruşturma için biçilmiş bir kaftandır artık: Matematik nedir? Matematiksel bilginin temeli nedir? Matematiksel doğru, mutlak doğru mudur? Niçin? Matematiksel hakikatin doğası nedir? Matematiğin önermelerinin doğru olmasının gerekçeleri nelerdir? Matematiksel önermeler, bizden bağımsız olarak mı doğrudur? Matematiksel ispatlar zamanla değişmezler mi? Matematikte de doğa bilimlerindeki gibi devrimler var mı? Matematiksel doğrular niçin zorunludur? Matematik eğer kainatın dili ise, niçin bu böyledir? Matematik nasıl oluyor da 'gerçek' dünyada işe yarıyor? Bu sorular hulâsaten 'matematik felsefesi nedir?'e ilişkindir.

Bu çalışmada; *Matematik Felsefesi: Kavramsal Bir Giriş, Matematik Felsefesine Tarihî Bir Bakış, Matematiğin Temelleri, Modern Matematik*

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Felsefesindeki Gelişmeler gibi dört alt-başlık altında bu felsefeyi tanıtmaya çalışacağız. Sonuç kısmında da birkaç genel husus üzerinde durup yazıyı noktalayacağız.

I-MATEMATİK FELSEFESİ: KAVRAMSAL BİR GİRİŞ

Matematik felsefesinin ne olduğu, matematik ve felsefe arasındaki ilişki, filozofların bilgi sistemlerinde matematiğin ayrıcalıklı konumunun kökenleri, matematiğin ne olduğu ve matematikçilerin çoğunun inandığı bir matematik felsefesi olarak Platonculuk bu bölümde incelenecektir.

a-Matematik Felsefesi Nedir?

Günümüzün önemli matematik filozoflarından biri olan Maddy, "Matematik filozofunun görevinin, matematiği reform etme değil, onu tanımlama ve açıklama olduğunu kabul ediyorum" demektedir (1990: 28). Böylece Maddy, matematik felsefesinin, matematiği betimleyici ve açıklayıcı boyutuna dikkat çeker. Körner de benzeri bir bakış açısını sunar. Ona göre, nasıl ki bilim felsefesinin görevi hipotez test etmek veya teori üretmek değilse, matematik felsefesi de matematik teoremlerinin sayısını doğrudan artırmaz. Körner için matematik felsefesi matematik demek değildir; matematik üzerine yansımalardır (1986: 9). Filozof Tymoczko da matematik felsefesinin, insanoğlunun nasıl matematik yaptığını açıkladığını ve matematik disiplininin temel özelliklerini, gün yüzüne çıkararak, matematik hakkında genel bir bakış açısı sunduğunu belirtmektedir (1998: xiii).

G. Priest, klâsik matematik felsefesinin iki temel alanı olduğunu belirtir. Bunlardan birincisi, matematiksel bilginin doğası ve konumu ile ilgili epistemolojik sorunlardır. İkinci ise, matematiksel nesnelerin varoluşlarının doğası ve konumu ile ilgili ontolojik sorunlar-

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

dır. Priest bu belirleme ile geleneksel sorunları dile getirmektedir. Bununla birlikte matematik felsefesine, matematiğin kaynağı, tarihi ve kullanımı ile ilgili sorunları da katar (Ernest, 1998: 50).

Matematiğin veya matematik felsefesinin neliği üzerine konuşurken, felsefedeki kural-koyucu/betimleyici ayrımını akılda tutmakta fayda vardır. İleride geniş olarak ele alacağımız mantıkçılık, biçimcilik ve sezgicilik türü matematik felsefesi okulları, matematiğin doğası için matematiğin kural koyucu bir tanımını vermeye çalışmaktadır. Sözgelimi, sezgiciler, 'olmayana ergi' ispat yöntemini matematikten dışlarlar. Dolayısıyla, bu tür anlayışlar programatiktir. Yani bu görüşler, matematiğin ne olduğundan ziyade nasıl olması gerektiği üzerinde dururlar (Ernest, 1998: 50-1). Körner bu anlayışın matematik felsefesi açısından yanlış bir yaklaşım olduğunu vurgular (1986: 12). Ona göre, matematik felsefesinin, '...dır' türü betimleyici yönünü; '.... malıdır' veya '.... melidir' türü programatik yönü ile karıştırmak, başka alanlarda olduğu gibi matematik felsefesinde de zararlıdır.

Lakatos da bir kısım matematik felsefecisini eleştirerek, matematik felsefesinin matematik tarihine veya tecrübî bilgilere dayanması gerektiğini vurgulamıştır. Ona göre, felsefenin rehberliğinde olmayan matematik tarihi körleşmiş, matematik tarihine sırtını dönen matematik felsefesi ise koflaşmıştır (Lakatos, 1976: 2). Lakatos'un bu eleştirisi göz önünde tutulduğunda, matematik felsefesinin inceleme alanı matematiksel doğru ve ontolojik meselelerle sınırlı kalmamakta, tam tersine genişlemektedir. Bu bakış açısıyla hareket ettiğimizde, matematiğin kendisi çok yönlüdür ve matematik felsefesi, matematiksel önermeler, kuramlar, kavramlar, tarih ve matematik pratiği gibi birçok unsuru kapsama alanına almaktadır (Ernest, 1998: 51). Şunu da belirtmekte fayda var ki, Wittgenstein'ın 'çeşni' (motley) dediği, matematiğin bu çok yönlü konumunu dikkate alma çabası matematik felsefesinde oldukça yeni sayılır.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Lakatos ve Wittgenstein'ın yaklaşımını esas alan Ernest, matematik felsefesinin alanını genişleterek, matematik felsefesinin şu 13 sorun ile ilgilenmesi gerektiğini belirtir: 1-Matematiksel bilginin gerekçelendirilmesi, 2-Matematiksel nesnelerin karakteri ve ontolojik konumu, 3-Matematiksel Platonculuğun bu kadar makul ve başarılı bir bakış olmasının nedenlerinin açıklanması, 4-Matematikçinin pratiği ile matematiğin kendi karakterinin ilişkisi, 5-Öznel matematiksel bilgi ile kabul görmüş matematiksel bilginin ilişkisi, 6-Kişinin mevcut matematiği nasıl öğrendiği, 7-Kişinin matematiksel bilgiyi yeni bir bilgiye nasıl dönüştürdüğü, 8-Matematiksel bilginin gelişimi, 9-Dil ve matematik ile kil tabletlerden bilgisayara kadar bilgi teknolojilerinin birbiriyle ilişkisi, 10-Tarihin, matematik felsefesini nasıl aydınlattığı, 11-Matematik ile diğer bilgi alanları, değerler, kültür ve tecrübe ilişkisi, 12-Pür matematiğin, bilim ve 'gerçek' hayatta uygulamalarının çok kullanışlı ve güçlü olmasının açıklanması, 13-Matematiksel teorilerin nasıl değerlendirildiği veya takdir topladığı, değerlendirme sürecinde herhangi bir kriterler topluluğunun olup olmadığı (Ernest, 1998: 51-52).

Özetlersek, matematik felsefesindeki sorunlar iki ana başlık altında toplanabilir. Birincisi, klâsik olarak adlandırabileceğimiz matematiksel epistemoloji ve ontoloji ile ilgili daha temel sorunlar. İkincisi, birincisine nazaran oldukça daha 'genç' sayılan, matematik ve insan etkileşimini konu edinen sorunlar ki, bu sorunlar doğal olarak sadece matematikle veya felsefeyle ilgili değil; tarih, psikoloji, sosyoloji, eğitim gibi bir beşerî bilimleri de ilgilendirir. Şimdilik, matematik felsefesi açısından böyle geniş yelpazeli bir kavramsallaştırma çabası genel kabul görmemiştir.

b-Matematik, Felsefe ve Matematik Nedir?

Bütün büyük filozoflar matematik hakkında konuşmuştur. Akademik uzmanlaşmanın yaygınlaşmasından önce; René Descartes, Gottfried Wilhelm Leibniz, Blaise Pascal, Bernard Balzano, Bertrand

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Russell, Alfred North Whitehead, David Hilbert, Henri Poincaré, Gottlob Frege, Alonzo Church, Kurt Gödel, Alfred Renyi ve Alfred Tarski gibi isimler hem matematikçi hem de filozof olarak çalışmalarını sürdürmüşlerdir. Öyle ki, Platon, Descartes, Leibniz, Kant, Frege, Russell, Wittgenstein, Quine, Putnam gibi filozofların düşünce sistemlerinde matematik çok önemli bir yer işgal etmiştir. Aslında bu ilgi, Brown'ın da belirttiği gibi, sadece analitik felsefe denen akımla sınırlı değildir. Husserl[1] ve Lonergin'in çalışmaları ile Kıta Avrupa'sı ve Thomistik felsefede bu ilgi zannedildiğinden de büyüktür. Öyle ki, ciddî bir felsefî merakı olan herkesin, matematiğin doğasına yönelik bir ilgisi olması da beklenir (Brown, 1999: xi-xii; Hersh, 1997:26).

Aşırı uzmanlaşmanın matematik ve felsefe arasındaki tarih boyunca süregelen bu etkileşimi sarstığı söylenebilir. Zira, bugün, aynı matematik bölümünün çatısı altında çalışan bir analizci, cebirciyi anlamakta zorluk çekmektedir. Benzeri bir durum felsefe bölümleri için de geçerlidir; sözgelimi, etik üzerine çalışan biri, bilim veya matematik felsefesi üzerine çalışan birini anlamakta zorlanmaktadır.

Matematik felsefesi, felsefenin diğer dalları veya matematiğin diğer alanları dikkate alındığında çok fazla gelişmemiştir (Barrow, 2001: xii). Burada, matematiğin, matematikçi gözünde mükemmel bir sistem olması ve gerçek dünyada ciddî bir sorunla karşılaşmadan kullanılması, ayrıca, genel olarak bir matematikçinin matematik yaparken aldığı zevkin etkili olduğu söylenebilir. Sözgelimi, Fransız matematikçisi Henri Lebesgue'ya (1875-1945) göre, matematikçi olan birinin felsefe ile zihnini meşgul etmesine gerek yoktur.[2]

1 Husserl'in ilk felsefî çalışması matematik felsefesi ile ilgili olmasına rağmen, Hersh'e göre, Russell'ın takipçileri olan analitik filozofları tarafından tektipleştirmeci politikalara kurban gitmiş ve neticede günümüz matematik felsefesinde adına az rastlanır olmuştur (1997:165-166).

2 'http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Quotations/Lebesgue.html'9 Ocak 2003.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Şimdi, bir filozof için matematiğin neden çekici olduğu sorusu akla gelebilir. Shapiro, bu konuda üç önemli noktaya dikkat çeker. Birincisi, her iki disiplin de dünyayı anlamlandırma çabasının bir ürünü olarak Antik Yunan'da doğmuş veya gelişme açısından önemli mesafeler kaydetmişlerdir.[3] İkinci sebep, birçok karmaşık felsefî sorunun matematiğe yönelindiği zaman netliğe kavuşmasıdır. Örneğin bir dil filozofu için, 'Bu terim neyi göstermektedir, bir nesneyi mi?' gibi sorular için matematik dili iyi bir malzeme sağlamaktadır. Tymoczko da benzeri bir noktaya vurgu yaparak, matematik felsefesinin geleneksel olarak, felsefe kuramları için bir test imkânı sunduğunu belirtir (1988: xiv). Üçüncü sepep epistemoloji ile ilgilidir. Matematik, bilimde hayatî bir öneme sahiptir. Dünyayı anlama çabasında matematiğin temel bir görev üstlendiği açıktır. Fiziksel dünyanın anlaşılması için matematik merkezî bir konumdadır. Bir filozof için, 'Kainatın dili niçin matematikle yazılmıştır?' türü sorular önemli olmalıdır (Shapiro, 2000: 3).

Bu açıklamalardan sonra akla gelebilecek bir soru şudur: Peki, matematik nedir? Atom bombasının mimarlarından olan meşhur fizikçi Oppenheimer, bir defasında, günümüzde filozofların ma-

3 Gerek Aydın Sayılı, Martin Bernal, matematik tarihçisi G.G. Joseph ve gerekse daha yakın zamanlardaki bilim ve matematik tarihindeki çalışmalar, eskiden beri özellikle matematik tarihinde yapılan, Yunan ve Yunan-öncesi türü bir ayrımı ciddî derecede sarsmışlardır. Babil ve Mısır'ın düşünüldüğünden daha ileri bir matematiğe sahip oldukları yeni çalışmalar ile ortaya konmuştur. Nihayetinde, Yunanlıların gerek Mısır ve gerekse Mezopotamyalılardan çok şey öğrendikleri açıktır. Öyle ki, Yunan diye bilinen birçok yazarın, sözgelimi, Diophantos'un Yunan olup olmadığı bile meçhuldür. Struik'e göre, belki de Yunanlaşmış bir Mezopotamyalıdır. Ayrıca Yunan olmayan birçok yazarın Grekçe yazdığı bilinmektedir. Yine Pisagor ve Thales gibi matematikçi ve filozofların Mısır, Mezopotamya ve Hindistan'a geziler yapıp, onlardan gerek matematik gerekse felsefe denebilecek birçok düşünce öğrendikleri bilinen tarihî bir vakıadır. Dolayısıyla Shapiro'nun bu yargısına katılmak mümkün değildir. Fakat nihayetinde hem matematik hem de felsefede saf akıl ile bilgiye ulaşma çabasının benzerliği dikkat çekicidir (Struik, 1967: 59-60; Joseph, 1992: 125-9).

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

tematik bilmediklerini, hatta bir adım daha ileri giderek, matematikçilerin de matematik bilmediklerini söylemiştir.[4] Oppenhemir'ın ifadesinde, matematikçilerin teknik olarak bilgilerinin eksik olduğunu mu yoksa matematikçilerin gerçekte uğraştıkları işin özüne vakıf olmadıklarını mı kastettiği açık değildir. Burada teknik yöne vurgu yapması ihtimali düşüktür; çünkü 20. yüzyıl matematiği, matematiğin atılım çağı olmuş ve kimilerince 'altın çağ' olarak nitelendirilmiştir. Bu yüzden Oppenheimer'in kastettiği şeyin matematiğin doğası ve mahiyetine ilişkin olduğu söylenebilir. Aslında, matematiğin ne olduğu sorusu matematik felsefesinde çetin bir sorundur. Gerçekten de, Lasserre'nin dediği gibi:

> "Bir fizikçiye 'Fizik nedir?' veya bir tarihçiye, 'Tarih nedir?' diye sorduğunuzda, yanıt vermekte hiç zorlanmaz. Çünkü gerçekten de ikisi de, ne aradığını bilmeksizin kendi işini yapamaz. Ancak, bir matematikçiye, 'Matematik nedir?' diye sorduğunuzda, haklı olarak yanıtı bilmediğini söyleyebilir ve bu onu matematikçi olmaktan alıkoymaz." (Barrow, 2001:1)

Nedir matematik? *Oxford* sözlüğüne bakılırsa matematik, sayı, miktar ve uzay bilimidir. *The American Heritage* sözlüğüne bakılırsa matematik, miktar ve kümelerin arasındaki ilişkileri sayı ve sembol kullanarak araştırır. Bu tanımlarda, sayı ve miktarla ilgili kısım aritmetik, uzay ile ilgili kısım ise, geometri olarak adlandırılır. *TDK Türkçe Sözlüğü*'ne bakılırsa, matematik için şu karşılık bulunur: "Aritmetik, cebir, geometri gibi sayı ve ölçü temeline dayanarak niceliklerin özelliklerini inceleyen bilimlerinin ortak adı, riyaziye." Modern matematiğin birçok branşını dışarıda tutan sıraladığımız bu tanımlamalar, başlangıç için işimize yarayabilir. Aritmetik, sayılar ve sayılar ile ilgili işlemlerle ilgilenir. Cebir, aritmetiksel işlemlerin

4 'http://math.furman.edu/~mwoodard/ascquoto.html' 9 Ocak 2003.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

genelleştirilmiş hâllerini semboller aracılığı ile inceler. Geometri ise, şekiller ve uzay ölçümleri ile ilgilenir. Geometrinin, Öklit'ten beri bilinen ayırıcı vasfı, *çıkarım* (tümdengelim) yoluyla ispat yapmamıza olanak sağlamasıdır. Bu klâsik ispat yöntemine göre, elimizde belli tanımlar ve aksiyomlar[5] vardır; bunların değişik kombinasyonlarından elde edilen teoremler, mantık kuralları ile birlikte yalnızca tanımlar ve aksiyomlar kullanılarak elde edilmeye çalışılır. Hâlbuki, aritmetiğin geometri gibi sistematik olarak aksiyomatikleştirilmesi çok yeni bir hadisedir; yaklaşık olarak iki bin yıl sonra gerçekleşebilmiştir. Bu minvalde, aritmetik ve cebir gibi matematiğin diğer branşlarında da çıkarıma olan vurgu artınca, C.S. Peirce, "Matematik, gerekli sonuçları çıkarma bilimidir" demiştir. Önceki nahif sözlük tanımlarındaki gibi, bu tanımda da birçok eksiklik vardır. Peirce'ın bu tanımından, "Ne hakkında çıkarım?" sorusu cevapsız kalmakta, matematiğin bizatihi konusu açıklanmamaktadır. Bu tanımlara değinen Davis ve Hersh, farklılıklardan yola çıkarak, her neslin farklı bir matematik tanımı geliştirdiği ve bu tanımın zamanla doğal olarak değiştiğine dikkat çekmişlerdir (Davis & Hersh, 1981: 6-8).

Bu yaklaşım dışında, matematiği, bazı fizikçilerin inandığı gibi, bir modelden ibaret görenler de vardır. Halbuki, böyle bir tanımlamada da birçok unsur eksiktir. Galileo gibi kainatın dili matematik

5 Yeri gelmişken aksiyomlar, hakkında önemli bir açıklama yapmak, faydalı olabilir. Günümüzde, aksiyom bir sistemin öncülleri veya daha doğru bir ifade ile, kabulleri manasında kullanılmaktadır. Postulat ise, bu mana ile eş anlamlı olarak kullanılmaktadır. Ne var ki, bu iki sözcüğün Öklit zamanındaki kullanışları farklıdır. Aksiyom, tüm alanlar için doğru görülen önermelere verilen ad, postulat ise bir alana örneğin geometriye has doğrulara verilen ad olarak eski Yunan kaynaklarında geçmektedir. Aksiyomlar, denebilir ki, Öklit-dışı geometrilerin ispatına kadar, mutlak doğru gibi görülmekteydi fakat bu keşiften sonra modern matematikte aksiyomlar, doğru olması gerekmeyen kabuller olarak düşünülmektedir.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

ile yazılmıştır demek veya benzeri bir yaklaşım sergileyen büyük matematikçi Bell (1883-1960) gibi matematiği 'bilimlerin kraliçesi' ve 'bilimlerin hizmetçisi' olarak tanımlamanın işimizi daha da güçleştirdiği ortadadır.[6] Çünkü, böyle bir tanımlama zihnimizde/kağıt üzerinde inşa ettiğimiz/keşfettiğimiz matematiğin, neden fiziksel dünyada bir karşılık bulduğu sorununu çözmüyor.

Şimdiye kadar verilen açıklamalardan 'matematik nedir?' sorusunun net bir cevabının verilemediği anlaşılmış olsa gerek. Zaten, Bertrand Russell bir keresinde, "Matematik, ne neden söz ettiğimizi ne de söylediğimiz şeyin doğru olup olmadığını bilmediğimiz bir konudur" demiştir. Lakatos da matematikten "bazen net, bazen bulanık şey" diye bahsetmiştir (Davis & Hersh, 1981).

Matematiğin ne olduğu hakkında yukarıda bir kısmını sergilemeye çalıştığımız argümanlardan başka onlarca farklı tanım ve sloganik söz de varolagelmiştir. Fakat bu tanımlamaların her biri, matematiğin ne olduğu hakkında bir fikir verse de, bütüncül bir bakış açısı sunmaktan yoksundur. Belki de, matematiğin ne olduğunu anlamak için geniş bir bakış açısı ile matematik felsefesi ve tarihini birlikte okumak gerekiyor. Bir sonraki bölümde, bu amacın bir ayağını oluşturan, matematik felsefesi tarihini ele alacağız. Fakat bundan önce bütün zamanlarda ayrıcalığını hep koruyan Platonculuğu kayırarak, bir matematik felsefesi örneği olarak okuyucuya öncelikli olarak tanıtmak istiyoruz. Zira, 'Matematik nedir?' sorusunun bir cevabı olarak da okunabilecek olan ve neredeyse bütün matematikçiler tarafından inanılan matematiksel Platonculuğun kendisi, matematik felsefesinde merkezî bir konumdadır.

6 Bu iki tanımlamanın her biri Bell'in iki ayrı kitabına isim olmuştur. Bilim ve Matematik ilişkisi için ayrıca bkz. 'Science and Mathematics' başlıklı bölüm. Bell, Eric Temple; *The Handmaiden of the Sciences*. New York: Reynal & Hitchcock; 1937. 1-19

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

c-Platonculuk

Matematik felsefesinde önemli bir konu da matematiğin ilgilendiği konunun kendisidir. Başka bir tabirle, matematik ne ile uğraşır? Herhangi bir matematik kitabını açtığınızda, sayılar, noktalar, kümeler, fonksiyonlar gibi birçok isimle karşılaşırsınız. Sözgelimi, Hilbert'in geometri sisteminde şöyle bir aksiyomla karşılaşırız: 'Verilen herhangi iki nokta için, her iki noktanın üzerinde olduğu düz bir çizgi vardır.' Bu varoluş nasıl bir şeydir? Bu tür bir soruya, matematiksel bir nesne; zaman, zihin ve dilden bağımsız bir sekilde varlığını sürdürür şeklinde cevap veren yaklaşım Platonculuk olarak adlandırılır. Bu görüş, *ontolojik realizm* veya sadece *realizm* olarak da anılır[7] (Shapiro, 2000:25).

Genel olarak kabul edilen anlayışa göre, matematikçilerin çoğunlu Platoncudur. Bazı matematikçilerin, matematiksel teoremler ve doğrular hakkındaki görüşlerini aktarmak, Platonculuğu anlamak açısından faydalı olabilir. Mesela, matematikçi-filozof Frege'ye göre; Pisagor teoremi zaman-üstü bir doğruluğa sahiptir; matematikçiler Pisagor teoremini keşfetmeden önce bile o, bir gezegen gibi eskiden beri vardı. Ayrıca 20. yüzyılın en önemli matematikçilerinden G.H. Hardy klâsik makalesi, 'Matematiksel İspat'ta matematiksel teoremlerin doğruluk ve yanlışlığının mutlak olduğunu, bunun bizim onlar hakkındaki bilgimizden bağımsız olduğu ve matematiksel doğruluğun nesnel gerçekliğin bir parçası olduğunu belirtmiştir. Yine, kümeler ve matematiksel kavramların, gerçek nesneler gibi algılanabileceğini ve bizim tanımlarımızdan bağımsız var olduklarını söyleyen meşhur mantıkçı Gödel, Platoncu görüşlerini dile getirmiştir (Brown, 1999: 10-11).

7 Yazı boyunca realizm ve Platonculuk kelimelerini birbirine yakın manada kullanacağım. Geleneksel Platonculuk ve Realizm arasındaki ilişki için, *Realism in Mathematics* adlı kitabın aynı başlıklı bölümüne bakınız (Maddy, 1990: 20-35).

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Aslında, Platonculuk günümüz matematikçileri arasında da yaygındır. Meşhur matematiksel fizikçi Penrose günümüzün önemli Platoncularındandır. Penrose şöyle der: "Mandelbrot kümesi insan zihninin bir buluşu değildir. O bir keşiftir. Aynen Everest Tepesi gibi, Mandelbrot kümesi oradadır!" (1989: 95).

Platonculuğun ne olduğu sorunu üzerine yoğunlaşan Brown, Platonculuğun çekirdeğinin şu maddelerden oluştuğunu belirtir (1999: 11-15):

1- Matematiksel nesneler gerçektirler ve bizden bağımsız olarak vardırlar.
2- Matematiksel nesneler, zaman ve mekanın dışındadırlar.
3- Matematiksel varlıklar, bir bakıma soyuttur bir bakıma soyut değildir. (Matematiksel varlıklar, fiziksel bir varlığa sahip olmama manasında soyutturlar, fakat sözgelimi 2 sayısının *tikel* olması, evrensel olmaması manasında soyut değillerdir.)
4- Matematiksel nesneleri sezebilir ve matematiksel hakikati kavrayabiliriz.
5- Matematik ampirik değil, *a priori*'dir (tecrübeden bağımsız olarak ulaşılabilen bilgi).
6- Matematik, *a priori* olmasına rağmen, kesin doğru olması gerekmez.
7- Platonculuk, diğer görüşlerden daha fazla, matematiksel hakikati arama tekniklerine açıktır.

Fakat, Platonculuğun farklı yorumları vardır. Yukarıda Brown'ın saydığı yedi maddenin bazıları, Platoncular'ın bir kısım tarafından kabul edilmemektedir. Sözgelimi, altıncı maddede geçen, matematiğin yanılabilirliği görüşü 'saf-kan' Platoncuların bir kısmı tarafından kabul edilmeyecektir. Brown altıncı maddeyi, Platonculuğun bir özelliği olarak ortaya koyarken, ileride değineceğimiz Lakatos'un

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

matematiğin yanılabilirliği hakkındaki görüşü ile Platonculuğun uyuşturulabileceğini ima eder (Brown, 1999: 19-23).

Matematiksel nesne ve doğruların, bizden bağımsız olarak var olduklarını iddia eden Platonculuk, bu nesne ve doğruların nasıl var olduğu, bizim bunlar hakkında nasıl bilgi sahibi olabileceğimiz gibi konularda bazı ontolojik sorunlarla yüzyüze olsa da, Bernays'ın (1935) deyimi ile, matematikçilerin gönlünde 'taht kurmuştur'.

II-MATEMATİK FELSEFESİNE TARİHİ BİR BAKIŞ

Bu yazının sınırları dahilinde tüm görüşlere yer vermek imkânsızdır. Bu yüzden, nispeten önemli gördüğümüz bakış açılarını tanıtmak ile kendimizi sınırlayacağız. Ayrıca, günümüz matematik felsefesinde unutulan ciddiye alınmayan birçok farklı görüşün araştırılmayı/öne çıkarılmayı beklediğini not etmekte fayda var. Daha önce, Frege'nin *Grunlagen* kitabı, Russell bu çalışmayı dünyaya tanıtmadan önce bilinmemekteydi. Lakatos'un doktora çalışması olan ve son yıllarda adından çokça söz ettiren, *Proofs and Refutations* [İspatlar ve Çürütmeler] Amerika'da 15 yıl süreyle çok az kişinin dikkatini çekmiş, şimdilerde adından sıkça söz ettirir olmuştur. Günümüzde, matematikçi Chaitin'in iddiaları birçok filozof tarafından ciddiye alınmazken, kimileri de bu görüşlere önem atfetmektedir. Husserl'in matematik felsefesindeki çalışmaları neredeyse unutulmuştur. Geçmişte önem verilen kimi konulara şimdi önem atfedilmemektedir. Sözgelimi, matematik felsefesinde başucu eseri sayılan Benacerraf ve Putnam'ın antolojisinin 1983'teki ikinci baskısında birçok yazı çıkarılmıştır. Örneğin, Wittgenstein'ın kendi kitabından alıntılar, Dummett ile Bernays'ın Wittgenstein hakkındaki yazıları ve yine Quine'in 'Ampirizmin İki Dogması' adlı makaleleri çıkarılmıştır.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Bunca *hareketlilik*, matematik felsefesi tarihinin lineer bir şekilde gelişmediğini göstermekte ve bütüncül/nesnel bir özetin verilmesini imkânsızlaştırmaktadır. Nihayetinde, yapılacak her değerlendirme veya antolojik çalışma, en başta sayfa sınırlamasından dolayı bazı noktaları atlamak/kayırmak zorunda kalacaktır. Ayrıca, bu metinde, matematik felsefesinde Avrupa veya Batı felsefe tarihi paradigması dışında kalan yaklaşımlar (Çin, Hint veya İslâm medeniyetlerinin katkıları gibi) üzerinde durulmadı. Bu çalışma, esas olarak, mevzubahis paradigma içinde yer alan matematik felsefesi üzerine mevcut literetürün bir sunumudur. Etnomatematik ve Avrupa-merkeziyetçilik gibi mevzulara girmeden bu konuyu *şimdilik* bir kenara bırakıyoruz.

Philip Kitcher matematik felsefesinin genellikle Frege ile başlatıldığına dikkat çeker. Körner de 19. yüzyılın ikinci yarısında matematik felsefesinde yeni bir çağın başladığı üzerinde genel bir uzlaşma olduğunu belirtir (1986: 13). Kendinden sonra gelen filozofların kendisinin ortaya attığı sorunlarla uğraşacağı kadar etkili olan Frege, modern mantığı geliştirmiş ve bu mantığın üzerine matematiğin temellerini oturtmaya çalışmıştı. Bu bağlamda, matematik felsefesinin esas kaygısı, matematiksel bilginin temellerine ilişkin sorunlara cevap vermek olarak belirlenmiştir. Frege, matematiksel bilginin herhangi bir tecrübî bilgi olmaksızın bilinebileceğini, dahası mantığın matematik için kesin ve mutlak bir temel sağladığını iddia etmiştir (Kitcher & Aspray, 1988: 3).

Modern manada matematik felsefesinin Frege ile başladığı kabul edilse de, Frege'yi anlamak için Kant'ı, onu anlamak için ise Platon ve Pisagorlular gibi daha önceki filozofları anlamak gereklidir. Onun için tarihî gezimize daha gerilerden başlamakta fayda vardır. Cantor'un sonsuzluk üzerine çalışmalarının sebep olduğu kriz'e kadarki dönemin matematik felsefesi tarihini önce ele alıp, kriz ve kriz sonrası modern matematik felsefesini ayrı ayrı inceleyelim.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

a- Kriz Öncesi

"Tarihî gezimize antik Yunan ile başlamak doğaldır. Çünkü günümüzde bildiğimiz hâliyle matematik ve felsefenin, Yunan'da doğduğu genel olarak kabul edilir." demektedir Shapiro (2000:49). Oysa, gerek Thales, gerekse Pisagorlulann başta Babil ve Mısır olmak üzere birçok yeri ziyaret ettikleri, başta matematik olmak üzere tıp, astronomi ve birçok mistik öğretiyi Yunanlılara taşıdıkları bilinmektedir.[8]

Pisagorlulara göre sayılar kainatın özünde vardır; yani aslında her şey sayıdır. Onlara göre, doğadaki her şey sayılar veya sayıların oranı şeklinde açıklanabilir. Sayı mistisizminin Pisagorlular ile başlamadığı bilinen bir vakıa olsa da, Pisagorluların birçok mistik öğretiye sahip olduğu bilinmektedir (Aczel, 2000: 11-16). Sözgelimi, onlara göre 'bir' sayısı, bütün sayıların üreticisidir. İki, ilk çift sayıdır ve görüş, düşünceyi temsil eder. Çift sayılar kadınları, tek sayılar ise erkekleri gösterir. Üç, gerçek anlamda ilk tek sayıdır ve düzeni temsil eder. Dört, ilk tam kare sayıdır ve adaleti gösterir. Beş, iki ve üç sayısının birleşimi olarak evliliği gösterir, vesaire. Bu tür sayı mistizmlerinin daha sonraki çağlarda, gerek Hristiyan, gerek Musevî ve gerekse de kimi Müslüman topluluklarda etkili olduğu bilinmektedir.

Öklit'in (yaklaşık M.Ö. 330-275) *Elementler*'i zamanının en önemli eseri olarak dikkat çekicidir. *Elementler*'in aksiyomatik sistemi kurup, ispatları ortaya koyması, denebilir ki, asırlar boyunca

8 Matematik Felsefesi ile ilgili tarihî çalışmaların genellikle Antik Yunan ile başlatılması, Avrupa-merkeziyetçi bakış açısının kalıntılarıdır. Daha önce değindiğimiz üzere, geçmişte ve günümüzde matematik ve felsefe ile alâkalı çalışmalarda bu bakış açısıyla sıkça karşılaşılmaktadır. Tekrar belirtelim ki, bu çalışma Batı düşüncesi üzerine literatürün bir sunumu amacında olduğu için bu tartışmaya girmeden, sadece işaret etmekle yetiniyoruz.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

matematiğin sarsılmaz mutlak doğru olduğu inancı ile eşanlamlı olarak kullanılmıştır. Öklit'in kurduğu sistem 2000 yıldan fazla mutlak doğru gibi görünmesine rağmen, ancak modern zamanlarda bu sistemde gedikler olduğu anlaşılmıştır.[9] Sözgelimi, bir çemberin içindeki bir nokta ile çemberin dışındaki bir noktayı birleştiren bir doğruya sahip olduğumuzu kabul edelim. Öklit, bu doğrunun çember ile kesiştiğini kabul etmiştir. Günümüzde bu zarnın, Öklit'in kullandığı postulat, aksiyom ve tanımlardan elde edilemeyeceği anlaşılmıştır. Sonucu elde etmek için, süreklilik adı verilen matematiksel bir prensibin eklenmesi gerekir (Shapiro, 2000: 86). İşin ilginç tarafı, *Elementler* uzmanlarının çok yakın zamanlarda farkına vardığı bu mantıksal boşluk, bu sonucun Batı'da keşfedilmesinden yedi asır öncesinde matematikçi ve matematik filozofu İbn Heysem tarafından 11. asırda şöyle ele alınmıştır: "Öklit, iki çemberin bir noktada kesişeceğini söylemiş, fakat birbirlerini kestiklerini ispatlamamıştır, bu özelliği göstermeksizin kabul etmiştir." (Rashed, 2000: 163).[10]

Platon ve Aristo için, matematik demek neredeyse geometri demekti. Platon matematikten, "ilk olarak öğrenilmesi gereken, bilginin her çeşidinde faydalı" diye bahsetmektedir (Shapiro, 2000: 61). Platon için geometri, formlar dünyasını oluşturmaktadır. Formlar dünyasında her şey mükemmeldir; tecrübî dünyada ise her şey ancak mükemmele yakındır. Aristo, Platon'a karşı bir pozisyon alarak, tecrübî bilginin önemini vurgulamıştır (Körner 1986: 14-21). Aristo'nun matematik felsefesinde, matematiğin fiziksel dünyaya uygulanması gayet sıradandır. Yani matematikçi fiziksel nesnelerin

9 *Elementler*'deki mantıksal boşluklar için bk: Barker, 1964: 38-40.

10 İbn Heysem'in bu konu ile alakalı, *Öklit'in Elementleri Hakkındaki Şüphelerin Çözümü ve Onun Düşünceleri Üzerine* adlı incelemesinin İstanbul Üniversitesi Kütüphenesi'nde olduğu anlaşılmıştır. Bu tespiti yapan değerli bilim tarihçisi Prof. Roshdi Rashed, benzeri birçok çalışmayı gün yüzüne çıkararak bilim tarihini yeniden düşünmemiz gerektiğini ihtar etmektedir. -Bu konudaki makalesini bana gönderme nezaketinde bulunan Prof. Rashed'e teşekkürü borç bilirim.-

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

gerçek özelliklerine yakın özelliklerle çalışır. İki ayrı gerçeklikten bahsetmediğimiz için, matematiksel ve fiziksel gerçekliği ayırmanın bir manası yoktur. Aristo'nun bu görüşü açıkça ampirizmin tohumlarını taşır (Shapiro, 2000: 69).

René Descartes (1596-1650) için matematik temel bir konumdadır. Descartes, matematiğin doğruluğuna hayrandır. Yazılarında kullanmayı ihmal etmiş olsa da *Elementler*'in sistemini o da takdir eder. Ayrıca, Tanrı'nın matematiksel bir ispatını verir (Hersh, 1997: 110-118).

Leibniz (1646-1716), basit hesaplamalar sayesinde doğru akıl yürütmelerin yapılabileceği bir dil hayal etmiştir: "Herhangi bir kişi, benim cümlelerimin birinden şüphe duyarsa, benim diyeceğim söz: 'buyrun soruyu sayıları kullanarak hesaplayalım' olacaktır. Böylece kalem ve mürekkep kullanarak çabucak cevaba ulaşırız" (Hersh, 1997: 124-125). Leibniz'in bu hayalinin, gerek Hilbert'in düşüncelerinin gelişmesinde, gerekse de matematik ve bilgisayarlardaki sembolik dilin gelişmesinde önemli payı vardır.[11]

Kant'a (1724-1804) kadar genel olarak, matematik felsefesi ve din birbirini destekler şekilde karşımıza çıkar. Berkeley ve Leibniz'ın yapıtlarında din, matematik felsefesindeki sorunların çözüm kaynağı olarak görülmüştür. "Matematik niçin gerçek dünyada bir karşılık bulur?", "Matematiksel nesneler, zihnimizden, zaman ve mekandan nasıl bağımsız olabilirler?" türünden zor soruların cevabı açıktır; Tanrı, matematiğin doğası hakkındaki sorunlar için kusursuz bir cevaptır.

Spinoza, matematik felsefesi üzerine doğrudan yazmamış olsa

11 Ayrıca, matematiğin temel teoremlerinden biri olan, her sayının yalnızca bir şekilde asal çarpanlarına ayrılabilmesi bu tür bir düşünce ile birleştirilince ortaya ilginç bir sonuç çıkmıştır. Gödel sayıları olarak adlandırılan ve her cümleye karşılık, asal sayılardan oluşan bir çarpım sonucunun verilmesi ile çalışan bu sistemi Gödel meşhur eksiklik teoreminin ispatını sunarken kullanmıştır.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

da, yazdıkları matematik felsefesini dolaylı yoldan etkilemiştir. Hersh'e göre, Spinoza'nın matematik felsefesindeki dolaylı rolü, bilimi sekülerleştirmesinde yatmaktadır. Böylece o, modern Platonculuğun ikileminin doğmasına yardımcı olmuştur. Bu bağlamda, Kant, Pisagor'dan gönümüze teolojiyi açıkça felsefesinin bir parçası yapan son filozoftur. Descartes ve Leibniz'in aksine Kant, matematiğin kesinliğinin, Tanrı'nın varlığının kesinliği için bir delil olduğu düşüncesini kullanmamıştır. Kant, Tanrı'nın varlığı meselesini, matematik kuramından ayrı tutmuştur (Hersh, 1997: 122-3, 133-5).

Yeri gelmişken zamanın matematikçilerinin düşüncesini yansıtması açısından ilginç bir hadiseden bahsedelim. Rivayet edildiğine göre, bütün çağların en üretken matematikçilerinden sayılan Euler (1707-1783) ile devrin önemli bir filozofu olan Diderot karşılaştığında ateist olan Diderot, Euler'den Tanrının varlığının matematiksel bir ispatını ister. Bu meydan okumaya karşı, Euler, tahtaya $(a+b^n)/n=x$ eşitliğini yazar ve "Dolayısıyla Tanrı vardır" der. Matematik bilmediğini ve bu eşitliğin konu ile alakasını kuramadığını belli etmemek için ayrıca herhangi bir soru sormaktan çekinen Diderot, bu sonucu kabullenmek zorunda kalır ve Euler'e karşı bir şey diyemez. Bunun yanında, ruhun materyal bir öz olmadığı ve Tanrı'nın varlığı ile alakalı Euler'in ciddî ispatlarının zamanın teoloji kitaplarında yer etmiş olduğu rivayet edilir (Bell, 1937: 147).

18. yüzyılın bir başka önemli filozofu Berkeley'in (1685-1753) *The Analyst* (1734) adlı kitabı, kendi zamanında matematikçi olarak matematikçilere karşı yapılmış tek felsefî eleştiridir. Bu kitabıyla Berkeley, Newton ve Leibniz'ın diferansiyel kalkulüsüne saldırmıştır. Berkeley'in aritmetik hakkında ilginç bir görüşü vardır. Ona göre, sayıların varlığından bahsedilemez; yani sayılar yoktur (Hersh, 1997: 127-128).

Geleneksel olarak, matematiğin hem tecrübeden bağımsız olarak

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

bilinebileceği hem de fiziksel dünyada bir karşılığı olduğu veya fiziksel dünyayla bir ilişkisi olduğuna inanılır. Bu bizi *a priori* tartışmasına götürür.[12]

Asıl sorun şudur: *a priori* bir doğru nasıl olur da *a posteriori* bir karşılık bulur? Immanuel Kant'ın, aritmetik ve geometrinin sentetik *a priori* olduğu görüşü temelde bu sorunu aşmak için üretilmiş bir cevaptır. Kant'a göre, matematik, dış dünyayı algıladığımız algılarımızın biçimiyle ilgilidir. Öklit geometrisi uzay sezgisi, aritmetik ise uzay ve zaman sezgisine dayanır. Böylece, matematik gerekli ve zorunlu bir şey hâline gelir; çünkü istesek de dünyayı başka türlü algılayamayız. Matematiksel bilgi *a priori* olarak bilinebilir; çünkü deney veya tecrübe olmaksızın algılarımız ile onu elde edebiliriz (Shapiro, 2000: 23).[13]

Kant'a göre, Öklit geometrisi sentetik bir *a priori* bilgiye yani doğruluğu zorunlu bir şeye örnektir. Ona göre, bu zorunluluk, az önce değindiğimiz algılarımız veya insanın düşünce tarzında hatta beynimizin yapılış tarzında yatmaktaydı. Russell, "Bir deliden başka hiç kimse, diyorlardı, Öklit geometrisinin geçerliliğinden kuşkulanmaz ve ancak bir aptal onun nesnel referansını yadsır." diyerek Öklit geometrisinin oluşturduğu paradigmanın ne kadar sağlam olduğunu

12 Hatırlatmak gerekirse, *a priori*, zamandan ve tecrübeden bağımsız olarak veya onlarsız ulaşılabilen bilgiye denir. Kant'ın (1724-1804) *a priori* analizi iki kısma ayrılır. Analitik *a priori* bilgi, sadece mantık kullanılarak elde edilen bilgilerdir. Sentetik *a priori* ise, zaman ve uzay sezgisini kullanarak elde edilen bilgilerdir. Tecrübî olarak bilinen doğrulara ise, *a posteriori* denir (Lacey, 1999: '*a priori*' ve 'analitik' maddeleri; Shapiro, 2000: 21-24). İlk olarak Kant'ta bulduğumuz sentetik-analitik ayrımına benzer ayrımları daha önceki çalışmalarda da bulabiliriz: Leibniz, 'aklın doğruları' ve 'olguların doğruları' ayrımını (Körner,1986:22); Hume, 'olgular ile ilgili' ve 'akıl ile ilgili'; Vico verum/*a priori* doğru ve certum/ampirik ayrımına gitmiştir (Ernest, 1998: 2).

13 Ayrıca apriori, analitik-sentetik bilgi vs. için geniş açıklama için bkz. Barker, 1964: 3-7

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

vurgulamıştır (Barrow, 2001: 12, 14-15).

Ne var ki, Öklit-dışı geometrilerin keşfi, Kant'ın uzay felsefesini savunulamaz kılmıştır (Gödel (1961), her ne kadar Kant'ın ifadelerinin karışık olduğunu teslim etse de Kant'ın yanlış anlaşıldığını ve hakkının verilmediğini savunmaktadır). Çünkü, daha sonra Betrami, Klein ve Poincaré gösterdi ki, Öklit ve Öklit-dışı geometriler 'eş-tutarlıdır' (Hersh, 1997: 132-3).[14] Yani, biri tutarlı ise, öteki de tutarlıdır. Kanadalı geometrici Coxeter bir yazısında, 1820'lerde Öklit geometrisi dışında bir geometri hayal etmenin ne kadar zor olduğuna değinerek, Öklit-dışı geometrilerin keşfinin doğruluk ve gerçeklik hakkındaki fikirleri derinden sarstığını belirtir (Greenberg, 1980: 1).

Çevremizdeki sıradan mühendislik yapılarına baktığımızda Öklit geometrisinin ne kadar kullanışlı olduğu görülür; fakat daha büyük boyutlara çıkıldığı zaman, Öklit-dışı geometrilerin veya daha özelde söylemek gerekirse, Einstein'ın genel görelilik teorisini kurarken fiziksel dünyayı tanımlamak için kullandığı Minkowski geometrisinin daha doğru olduğu görülür. Bu noktada Poincaré'nin görüşü dikkat çekicidir: "Geometrik aksiyomlar, ne *a priori* sentetik sezgilerden ne de deneysel olgulardan ibaret değildir. .... Bir geometri başka bir geometriden daha doğru olamaz ancak daha kullanışlı olabilir." (Poincaré, 1905: 50) Filozoflar yukarıda anlatılan Poincaré'nin uzlaşımcılık (konvansiyonelizm) fikrini hâlâ tartışmaktadırlar (Greenberg, 1980: 239). 20. yüzyıl bilim felsefesinde derin ve uzun soluklu tartışmalara yol açmış bu görüşe göre, genel olarak bilim belli örtük/ortak kabullere, şartlandırılmalara veya uzlaşımlara dayanmaktadır.

Kant'a yeniden dönersek, Kant'ın temel sorunlarından biri de

14 İlginçtir, matematikçiler kitaplarında felsefî bir devrim niteliğindeki bu keşfin felsefî sonuçlarından hiç bahsetmemeyi yeğlerler! (Bkz. Hersh, 1997:133).

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

bütün matematik felsefesini, 'sezgi' üzerine inşa etmesinde yatar. Ayrıca, Kant'ın analitik-sentetik ayrımı da eleştirilerden nasibini almıştır; ileride değineceğimiz üzere Quine, bu ayrımın yetersiz ve yapay bir ayrım olduğu vurgulayarak bu tür bir ayrımı sarsmıştır. Sözgelimi, Kant'ın analitik tanımı, 'Hava yağışlı ise, yağmur yağıyordur veya kar yağıyordur' türü birçok önermeye uygulanamaz (Shapiro, 2000: 77).

Neredeyse bütün filozoflar tarafından ayrıcalıklı görülen matematik, Hume'a (1711-1776) gelince sıradanlaşmış görünmektedir. Locke ve Berkeley'in takipçisi, kendi kendini yetiştirmiş bir fizikçi ve matematikçi olan David Hume, 20. yüzyıldan önce, matematiğin diğer bilimler gibi yalnızca ihtimalî bilgi verdiğini belirten az sayıda filozoftan biridir (Hersh, 1997: 188, 192). Hume'un bu 'marjinal' görüşünü aktarıp, Kant'ın önemli bir rakibi olan Mill'e geçeceğiz.

Mill (1806-1873), matematiksel kesinlik ile aklın ulaşabileceği en yüksek dereceli kesinlik arasında kurulan ilişkiyi sorgulamış, matematiğin neredeyse tüm filozoflar tarafından tecrübe ve gözlemden bağımsız ele alınmasına karşı çıkmıştır. Mill'in görüşleri kendi çağında çok fazla revaç bulmamış olsa bile günümüzde Quine ve Kitcher gibi önemli filozoflar Mill'in görüşlerini ciddiye almaktadırlar (Shapiro, 2000: 99, 101-102).

Mill'e göre, ki bu görüş ampirizmin özünü oluşturur: 2+2 = 4 eşitliğinin anlamı, 'iki taşı yanyana koy, öte tarafa da iki taş koy sonra bunları yanyana getir eder 4 taş' gibi gayet basit ve sıradandır. Yani Mill'e göre, matematiksel bilgiyi elde etme yöntemi temelde fizik gibi diğer tür bilgi edinme yöntemleri ile aynıdır; dolayısıyla matematiğin herhangi ciddi bir üstünlüğü yoktur. Burada, Mill'e yönelik bir eleştiriyi aktarmak faydalı olacaktır. Mill, matematik açısından ilkel sayılabilecek konularla ilgilenmiş, yüksek seviyeli matematikle uğraşmamıştır; ki bu, Aristo için anlaşılabilecek bir şey olsa da Mill için böyle söylenemez. Meselâ, Mill kendi görüşlerinden

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

yola çıkarak matematiksel tümevarımı nasıl açıklayacaktır? (Shapiro, 2000: 100) Bu arada, sadece temel düzeyde matematikle uğraşmış olan Mill'in savunduğu ampirizmin, şimdiki ampirizmin zorlukları ile karşılaşmadığı da söylenebilir. Sözgelimi, şimdi, sonlu fiziksel nesnenin olduğuna fakat sonsuz sayının olduğuna inanılmaktadır (Hersh, 1997: 196).

Stuart Mill'in babası James Mill, Hobbes ve Condillac gibi sayıların varlığını inkar eden nominalistlere göre, 2+1, 3'ün tanımıdır. Bu fikirleri ile bu düşünürler, Russell'ı ve Russell'ın takipçilerini önceleyerek, 2+1 = 3 denkleminin totoloji olduğunu iddia etmişlerdir. S. Mill bu görüşlere karşı çıkmıştır. Mill'e göre, 2+1 totoloji değil bilgilendirici bir denklemdir ve bize bir üçlünün, tek ve çift olmak üzere iki gruba ayrılabileceğini gösterir (Hersh, 1997: 196).

Toparlarsak, matematik felsefesinin ilk devirlerinden beri temelde iki görüş ile karşı karşıya bulunmaktayız. Rasyonalizm olarak adlandırılabilecek olan görüşe göre, matematiğin sarsılmaz bir temeli vardır ve bu akıl ile bilinebilir. Kökenlerini, Platon'da bulan bu görüşün en önemli temsilcileri Descartes, Spinoza ve Leibniz'dır. Bu görüşe karşı çıkan ikinci görüşü ampirizm olarak adlandırırsak, bu görüşü savunanlara göre, matematiksel bilginin kaynağı, saf akıl değil, tecrübedir. Kökenlerini Aristo'da bulan bu görüşün en önemli temsilcileri Locke, Berkeley, Hume ve S. Mill'dir. Bu iki görüş modern matematik felsefesini temelden biçimlendirecektir. Tartışmasız baskın olan birinci görüşü, ileride değineceğimiz temelci yaklaşımda, ikinci görüşü ise Viyana çevresi ve Quine gibi filozoflarda bulmaktayız (Shapiro, 2000: 4).

b- Kriz

Tarih boyunca matematiğin mutlak doğru olduğu hakkındaki görüş süregelirken, beklenmeyen bazı gelişmeler olmuştur. Öklit-dışı geometrilerin keşfi, bu anlamda çok önemli bir gelişmedir. Asırlar

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

önce, Pisagorlular arasında kök iki sayısının keşfinin doğurduğu tedirginlik geometriye olan ilginin artmasına sebep olmuştu. 19. yüzyılda ise, geometrideki kesinliğin azalması, bütün matematikteki kesinliğin azalması tehlikesini doğurdu.

Öklit-dışı geometrilerin ortaya çıkışının doğurduğu şok, analizin geometrik sezginin yerini almasıyla daha da derinleşmiştir. Uzayı-kaplayan eğriler ve hiçbir yerde türevi alınamayan sürekli eğriler tam birer sürpriz ve şok olmuştur. Bunlar matematiğin o zamana kadar üzerine kurulu olduğu, geometrik sezginin yanılabilirliğini ortaya koymaktaydı (Hersh, 1997: 137).

Zamanın önemli matematikçileri bu sorun ile boğuşmuşlardır. Dedekind ve Weierstrass'ın öncülüğünde matematikçiler, o zamana kadar matematiğin temeli olarak görülen geometriyi aritmetik ile değiştirmişlerdir. Bu süreçte, matematik felsefesini derinden etkileyecek matematiksel çalışmalar Cantor'dan gelmiştir.

Modern anlamda küme kuramının kurucularından biri olan Cantor'un sonsuzluk üzerine incelemeleri matematik tarihinde kuşkusuz bir devrim niteliğindedir. Cantor, kümelerin farklı sonsuz büyüklüklere sahip olduğunu ispatlayarak, sonsuzluğu derecelendirmeyi başarmıştır.[15] Burali-Forti'nin, 1897 yılında ortaya attığı paradoks, küme kuramı hakkında bazı şeylerin yanlış olduğu izleniminı vermiştir. Cantor da benzeri bir paradoksa kendi çalışmalarında ulaşmıştır. Ne var ki, paradoks en meşhur halini 1902 yılında Russell'ın elinde alacaktır. Bu paradoks yine Zermelo tarafından bağımsız olarak bulunmuştur. Bu paradoksların ortak özelliği, 'kümelerin kümesi' kavramının paradokslara yol açmasıdır. Basitçe şöyle bir küme tanımlayın:

A = (X öyle elemanlardan oluşmakta ki, X elemanı X'in elemanı değildir). Yani, kendi kendinin elemanı olmayan kümelerin kümesini

15 Transfinit sayılar için bkz. Barker, 1964: 63-67

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

ele alalım. Russell şu soruyu sormuştur: A kümesi, kendi kümesinin elemanı mıdır? A'nın, A'nın elemanı olması veya olmaması durumlarının her ikisi de paradoksa yol açar. Şöyle bir sonuca varırsınız: A kendisinin bir elemanındır; ancak ve ancak A kendisinin bir elemanı değildir. Bu paradoksların önemi, matematiğin üzerine kurulu olduğu sanılan basit küme kavramının sorunlara yol açmasıydı.

Bu arada küme kuramı ve matematik felsefesini derinden etkilemiş başka bir hususa değinmeden geçemeyeceğim: Cantor'un Süreklilik Hipotezi. İbranice, alef (elif, A) harfini kullanarak yazılan bu denklem şöyledir:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Doğal sayıların kümesinin eleman sayısı (kardinalite), $\aleph_0$ ile gösterilir. Benzer şekilde, reel sayıların eleman sayısı, $\aleph_1$ olarak gösterilir ve transfinit[16] olarak adlandırılır. Cantor şöyle bir tez ortaya atmıştı: Bu iki küme arasında, yani doğal sayıların kümesinden büyük, reel sayıların kümesinden küçük küme yoktur. Hilbert'in 1900 yılında Paris'te düzenlenen Uluslararası Matematikçiler Sempozyumu'nda sunduğu meşhur 23 sorudan onuncusu olan ve Süreklilik Hipotezi olarak bilinen bu ifade, aradan geçen 120 yıldan fazla bir süreye rağmen sırrını korumaktadır (Aczel, 2000: 1-9). İleride değineceğimiz gibi, bu denklem bilinen küme teorisi aksiyomları ile ne yanlışlanabilir ne de doğrulanabilir niteliktedir.

Özetle, matematiğin temeli olarak geometrik sezginin sorunlar ile karşılaşması, matematiğin mutlak doğru olduğu inancının yitirilmesi olarak görülürken, Dedekind ve Weierstrass liderliğinde matematikçiler, matematiğin temeli olarak geometri yerine aritmetiği

16 Matematiksel bir kavram olan transfinit, Cantor'un sonsuzluk incelemelerinden doğan bir kavramdır. Doğal sayıların kümesinin eleman sayısı (cardinality), $_0$ ile gösterilir ve Alef-sıfır *(aleph-null)* olarak okunur. Benzer şekilde, reel sayıların eleman sayısı, $_1$ olarak gösterilir ve transfinit olarak adlandırılır. Transfinit, bilinen sonsuz doğal sayıların eleman sayısından büyüktür.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

ikame ettiler. Ne var ki, Cantor'un sonsuzluk analizleri aritmetiğin dayandığı küme kuramında paradokslara yol açtı. Matematikçiler bu krizi ortadan kaldırmak için matematiğin temellerini sağlama alma konusunda ciddî çalışmalara başladılar.

c- Kriz Sonrası ve Matematiğin Temelleri

19. yüzyılın sonunda matematiğin büyük ölçüde, kümelere dayandığı yada indirgenebileceği düşüncesi göz önüne alınınca paradoksların sebep olduğu krizi anlamak daha kolay olur. Çalışmalarının kalbini kümelere dayandırdığından dolayı Frege, küme kuramındaki bu paradokslardan matematikte doğurduğu sorunlardan en çok etkilenenlerden biri olmuştur. Öyle ki, Russell bulduğu paradoksu bir mektupla Frege'ye bildirince, Frege, "aritmetik sendeliyor" demekten kendini alıkoyamamış ve hüznünü şu ifadelerle anlatmıştır: "Bir bilim adamı için en istenmedik şey, çalışması henüz basılmışken, çalışmasının dayandığı temelin birden çökmesidir. Çalışmam tam baskıdan çıkmak üzereyken Bay Bertrand Russell'dan aldığım mektup beni böyle bir duruma soktu."[17] Frege, aritmetiğin temelleri ile ilgili çalışmasının sonuna bu notu ekleme zorunluluğu hissetmiştir. Böylece, asırlarca mutlak bilginin biricik kaynağı görülen matematiğe musallat olan bu paradokslardan kurtulmak isteyen matematikçiler ve mantıkçılar için hummalı bir çalışma söz konusudur artık!

III- MATEMATİĞİN TEMELLERİ

Daha önce değinildiği üzere, Frege kendisinden sonraki yüzyılın yani 20. yüzyıl matematik felsefesinin tonunu ve gündemini belir-

17 'http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Beginnings_of_set_theory.html', 13 Ağustos 2002.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

lemiş, matematik felsefesinin ana sorununun matematiksel bilginin temellerini belirlemek olduğuna inanmıştı. Hersh'in tabiri ile, Frege, ilk *full-time* matematik filozofudur (Hersh, 1997: 141).

Matematik felsefesi hakkındaki yazılmış sıradan bir ders kitabı veya makaleye bakarsak, Cantor'un sonsuzluk üzerine olan incelemelerinin küme teorisinde ortaya çıkardığı sorunlardan sonra, bu sorunları ortadan kaldırmak için bir temel sorununun ortaya çıktığı, 30-40 yıllık çalışmaların herhangi bir sonuç vermediği, daha sonra da matematik felsefesinin bir uykuya daldığı izlenimi ediniriz. Aslında, bütün çağlarda matematik felsefesi olagelmiştir; ama temelci dönemin ayırıcı vasfı, öncü matematikçilerin, matematik felsefesi ile aktif olarak uğraşmalarıdır (Hersh, 1997: 138).

Gerçekten de, 1870 ve 1880'lerden, yani Dedekind ve Frege'den beri, matematik felsefesi tek bir sorunla boğuşmaktadır (Hersh, 1997: 21-2). Bu sorun, matematiği belirsizliklerden kurtaracak, çelişkilerden temizleyecek, olası yanılmaları ortadan kaldıracak sağlam bir temel bulma sorunudur.

Matematiğin böyle bir temeli bulunduğu inancı, *temelcilik* (foundationism) olarak adlandırılır. Temelcilik terimi, Imre Lakatos tarafından ortaya atılmıştır. Temelcilik döneminde, zamanın önemli matematikçileri felsefî tartışmalarda yer almışlardır. Philip Kitcher'ın tespitine göre, meşhur üç temelci okulun (Mantıkçılık, Biçimcilik, Sezgicilik veya İnşacılık) sırasıyla kurucuları olan Frege, Hilbert ve Brouwer'ın üçü de Kantçıydılar. Çok az istisna dışında 20. yüzyılın başında herhangi bir ampirist gelenek söz konusu değildir. Üç temelci program da Fregeci iskelet altında buluşmuş ve paradokslara cevap olarak, aritmetik ve analizi sahih bir şekilde gerekçelendirmeyi hedeflemişlerdir (Kitcher & Aspray, 1988: 6, 8; Hersh, 1997: 91, 133). Temelcilerin çalışmalarını daha iyi ele almak için her bir temelci görüşü ayrı ayrı inceleyelim.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

a- Mantıkçılık

Mantıkçılık, katıksız (pür) matematiğin, mantığın bir kolu olduğunu iddia eden düşünce okuludur. Mantıkçılara göre, bütün matematiksel doğrular, sadece aksiyom ve mantıksal çıkarım kullanılarak ispatlanabilir. Mantıkçılığın kurucuları Frege ve Russell, mantığın tam bir kesinlik sunduğuna inanıyor ve aritmetiği mantık üzerine inşa edebilirlerse, bütün matematiği bu yolla mantık gibi sağlam kılabileceklerini düşünüyorlardı.

Frege, sayıların insan zihnindeki fikirler olduğunu iddia eden psikolojizme, sayıların evrimleştiğini iddia eden tarihselciliğe ve sayıların fiziksel dünyadaki nesneler olduğunu iddia eden ampirizme karşı sert eleştiriler getirdi. Ona göre, sayılar soyut düşüncelerdir. Öyle ki, bu soyut düşünceler, doğmayan ve ölmeyen, değişmeyen, bizden bağımsız nesnelerdir. Bu yüzden Frege'ye göre, aritmetik, zaman sezgisine dayalı sentetik *a priori* değil, mantığa dayanan analitik *a priori*'dir.[18] Frege'ye göre, sayılar denklik sınıflarının sınıfıdır. Örneğin iki sayısı bütün çiftlerin sınıfıdır (Hersh, 1997:130-50).

Russell, Frege'nin meşhur kitabı *Grunlagen*'i ele alıp dünyaya tanıtmadan önce, Frege onca önemli çalışmasına rağmen neredeyse hiç dikkatleri çekmemişti. Russell paradoksları ciddiye almış ve üstadı Frege'nin hedeflerini gerçekleştirmek için yoğun bir çalışma başlatarak matematiği paradokslardan temizlemeyi kendine hedef bellemişti. Russell ve Whitehead'in çabalarının ürünü olan meşhur *Principia Mathematica*, matematiği formalize etmeye ve mantığa oturtmaya çalışan önemli bir eserdir.

Russell ve Whitehead, bu kitapta küme kuramının uyarlanmış bir biçimi olan tipler teorisini üretmişlerdir. Tipler teorisi, kendi kendi-

18 Bu arada bir ironiye işaret etmekte fayda var. Frege ilerleyen yaşlarında, aritmetiğin, uzay sezgisine dayandığını belirtmiştir.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

nin üyesi olan kümeleri dışarıda tutarak paradoksları engelliyordu. Bu kitaptaki, ispatlar bilinen ispatlardan bazı yönleri ile farklıdır. Mantıksal bir bütünlük arayışında oldukları ve paradoksları hallet-mek istedikleri için, yazarlar, kitaplarında ancak 180 sayfalık uğraş sonucunda 1 sayısının 0'dan farklı olduğunu ispatlayabilmişlerdir (Hersh, 1997: 28). Sonuçta, paradokslardan kurtulmak için, küme kuramı karmaşık bir hâle dönüştürülmüş ve sonsuzluk aksiyomu gibi aksiyomlar eklenmiştir. Barker şöyle demektedir: "*Principia Mathematica*'daki teknikler kullanılarak bazı geleneksel teoremleri ifade etmek ve ispatlamak zor veya imkânsızdır."[19] (Barker, 1964: 85-89) Bu arada, Russell'ın kendisi bile sonsuzluk aksiyomundan tatmin olmamış ve kendini "Sonsuzluk aksiyomunu mantıksal terimler ile ifade edilebilen fakat sadece mantık ile iddia edilemeye-cek önermelere örnek olarak alabiliriz." demekten alıkoyamamıştır (Ernest, 1998: 16).

Russell'ın bu son düşüncesi, daha sonraki çalışmalar ile des-teklenmiş ve birçok önemli matematiksel aksiyomun birbirinden bağımsız olduğu anlaşılmıştır. Yani aksiyomun veya aksiyomun tersinin alınması herhangi bir çelişki doğurmamıştır. Cantor'un Süreklilik Hipotezi'ne, tıpkı Öklit'in paralel aksiyomu gibi önce inanılmamış fakat daha sonra bu hipotezin mevcut aksiyomlardan bağımsız olduğu anlaşılmıştır. Süreklilik Hipotezinin yanlışlana-mayacağının ispatı Gödel tarafından, doğrulanmayacağının ispatı ise Paul Cohen tarafından verilmiştir. Neticede, Cantor'un ortaya attığı Süreklilik Hipotezi, bildiğimiz küme kuramının aksiyomları ile ne yanlışlanabilir ne de doğrulanabilir; teknik terimler ile ifade edersek, hipotez, mevcut aksiyomlardan bağımsızdır. Ernest'e göre bu, mantıkçıların "bütün matematiksel doğrular sadece mantıksal çıkarım ve aksiyomlar ile ispatlanabilir" iddiasını çürütmektedir

19 Tipler teorisi ve *Principia Mathematica* hakkında geniş bilgi için bkz. Barker, 1964: 85-89.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

(Ernest, 1998: 16). Aslında, daha güçlü aksiyomlar bulsak, çözümsüz sorunların akıbetini şu an için bilmediğimizden, mantıkçıların bu iddiası yine tartışma konusu olacaktır. İleride değineceğimiz Gödel'in teorem ve görüşleri bu konuda önemli ipuçları sağlamaktadır.

Mantıkçılığın karşılaştığı sorunlardan dolayı, Russell 'P ise Q' şeklinde dile getirilebilecek öncülün/aksiyomun doğru kabul edilmesine bağlı mantıkçılığın zayıf bir versiyonunu ileri sürmüştür.[20] Bu görüşe göre, matematik, çıkarıma dayalı bir sistemdir. Bu sistemde, eldeki aksiyom kümelerinin sonuçları, doğruluğu iddia edilmeksizin incelenir. Aslında bu görüş, konvansiyonelizme yakındır. Konvansiyonelizme göre, matematiğin kabulleri konvansiyonel olarak kabul edilmiştir. Yani bu doğrular iradî olarak doğru kabul edilmiştir (Ernest, 1998: 16-7). Bu noktada, Poincaré'nin matematik için, kum üzerine kurulu saray veya 'kumdan saray' benzetmesi zihinde çağrışım yapmaktadır (Yıldırım, 2000: 73).

Bu arada mantıkçılığın bir türevi sayılan mantıkçı pozitivizme değinmemiz faydalı olur kanaatindeyim. Mantıkçı pozitivizm, 1930'lu ve 1940'lı yıllarda Hitler'den kaçan bir grup mülteci tarafından Amerika'da güçlendirilen bir yaklaşımdır. Mantıkçı pozitivizmin Amerika'daki en önemli temsilcisi ise Rudolph Carnap'tır. Mantıkçı pozitivistlere göre, bir cümlenin anlamı, onun doğruluk durumu ile aşağı yukarı aynıdır. Dolayısıyla onlara göre, doğrulu-

20 Maddy, Russell'ın bu görüşü mantıkçılıktan sonra değil, önce savunduğunu yazmıştır (Maddy, 1990: 25). Maddy ile kişisel yazışmamda, kendi görüşünü şu şekilde belirtmiştir: Ernest'in bu iddiasının temelinde muhtemelen, Russell'ın sonsuzluk veya seçim aksiyomu gibi aksiyomların mantık ile temellenebileceği iddiasını sonradan bırakıp, bu aksiyomları kabul olarak ele almayı yeğlemesi yatmaktadır. Maddy'nin bu açıklamasından sonra bana göre, Ernest ile Maddy'nun bu noktadaki zıt gibi görünen görüşleri şu şekilde birleştirilebilir: Russell mantıkçılık çalışmalarını tamamladıktan sonra tekrar eski görüşü olan 'P ise Q'ya dönmüştür. Ayrıca Russell, Principia Mathematica'nın ikinci baskısında, sonsuzluk aksiyomunu *hipotez* olarak ele almıştır (Benacerraf & Putnam, 1964: 6) Kişisel bir yazışmamda aksiyomun, hipotez olarak ele alınışına dikkatimi çeken Ernest oldu. –Maddy ve Ernest'e burada teşekkür ederim.-

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

ğuna karar veremediğimiz, metafizik, etik ve daha birçok şey felsefenin dışına atılmış oluyordu. Hersh'in şu tespiti gayet enteresandır: "Aynı kurala göre zamanla mantıkçı pozitivizm de felsefenin dışına atılmıştır." (1997: 139)

Sonuç olarak şunu diyebiliriz ki, felsefî başarısızlığına rağmen mantıkçı-küme kuramcılığı günümüz matematik felsefesinde de baskın konumdadır. Öyle ki, Philip Kitcher, "Matematiksel felsefenin son otuz yılı, Frege'ye bir dizi dipnottan ibarettir." demiştir (Hersh, 1997: 149).

b- Biçimcilik (Formalizm)

Formalizm, popüler terimlerle ifade edersek, matematiğin 'kağıt üzerindeki işaretlerle oynanan bir oyun' olduğunu iddia eder. Formalizmin başlıca taraftarları Hilbert, ilk dönem von Neumann ve Curry'dir.

Formalizm temelde iki türe ayrılabilir. Terim biçimciliği olarak nitelenen biçimciliğe göre, matematiğin bir konusu vardır ve matematiksel önermeler ya doğru ya da yanlıştır. Bu görüş, zor soruları kolaylıkla cevaplandırmaktadır. "Matematik ne hakkındadır? Sayılar, kümeler vs. Bu sayılar, kümeler vs. nedir? Bunlar dilsel özelliklerdir. Matematik nasıl bilinir? Matematiksel bilgi nedir? Bu, karakterlerin birbiri ile nasıl ilişkili olduklarının ve bunların matematiksel pratik içinde nasıl manipüle edildiklerinin bilgisidir." Oyun biçimciliği olarak adlandırılan biçimcilik de zor metafizik ve epistemolojik soruları kolayca cevaplandırır. "Matematik ne hakkındadır? Hiçbir şey. Sayılar, kümeler vs. nedir? Bunlar var değiller veyahut olmamalıdırlar. Matematik nasıl bilinir? Matematiksel bilgi nedir? Bu, oyunun kurallarının veya bu kurallara göre belirlenen hareketlerin bilgisidir." (Shapiro, 2000: 145)

Biçimciler içinde Hilbert'in programı göz kamaştırıcıdır. Hil-

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

bert, "Gerçekte matematiksel bir problemi alt etmenin en çekici ana sebeplerinden biri daima içimizdeki şu çığlığı hissetmemizdendir: Problem işte ortada, hadi cevabını bul, onu sadece düşünerek bulabilirsin, çünkü matematikte *bilinemeyecek* diye bir şey yoktur." demiştir (Hilbert, 1925: 1950).[21]

John von Neumann, Hilbert'in programını dört basamakta özetlemektedir (von Neumann, 1964: 52):

1. Matematik ve mantıkta kullanılan bütün sembolleri belirlemek,
2. Klâsik matematikte bu sembollerle elde edilen 'anlamlı' diyebileceğimiz bütün teoremleri veya formülleri netleştirmek,
3. Klâsik matematikte 'ispatlanabilir' diye bilinen formülleri inşa edebilecek bir inşa prosedürü sağlamak.
4. Klâsik matematiğin bu formülleri veya ispatları, aritmetik metotlarının sonlu uygulamalarıyla kontrol etmek.

Programdaki, matematiğin formelleştirilmesini öneren birinci maddeden üçüncü maddeye kadarki kısmın büyük ölçüde, Russell ve takipçileri ile Hilbert ve takipçileri tarafından başarıldığı söylenebilir. Bütün amaçların toplamı sayılabilecek mekanik bir ispat prosedürünü öneren 4. madde sorunlu bulunmuştur (von Neumann, 1964: 52-54; Shapiro, 2000: 165).

Barrow, biçimciliğin iki eksik yanına işaret eder. Barrow'a göre biçimcilik, "Matematiksel simgeler ile matematikçilerin akılları arasındaki ilişkiyi ve matematiğin fiziksel dünyanın işleyişini tanımlamak bakımından ne kadar yararlı olduğunu açıklamakta

21 Hilbert'in çoğu zaman şu cümleyi tekrarladığı rivayet edilir: "Wir müssen wissen. Wir werden wissen." (Bilmek zorundayız, Bileceğiz.) Öyle ki, bu söz mezar taşına kazılıdır (Barrow, 2001: 156).

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

başarısızdır." (2001: 203)

Ernest'in belirttiği şekliyle, formalizmin temelde iki iddiası vardır: "1-Pür matematik, anlamdan arındırılmış formel bir sistemde ifade edilebilir. 2- Bu formel sistemin tutarsızlık içermediği matematik yoluyla gösterilebilir." (1998: 19) Ne var ki, bu iki iddia da derinden yara almıştır. Gödel'in birinci teoremi, aritmetiğin bütün doğrularının Peano aksiyomları veya daha büyük herhangi bir aksiyom kümesinden elde edilemeyeceğini ortaya koymuştur. Gerçekten de Paris ve Harrington adlı matematikçilerin yapmış oldukları çalışmalar bu sonucu doğrulamıştır. Ramsey teoreminin bu matematikçiler tarafından önerilen versiyonu doğrudur; fakat bunlar, Peano aksiyomları kullanılarak elde edilemezler. Böylece formalizmin birinci iddiası kökten sarsılmıştır. Gödel'in ikinci eksiklik teoremi sistemin güvende olup olmadığını anlayamayacağımızı göstererek, formalizmin ikinci iddiasını yere sermiştir. Gödel'in teoremlerine ileride tekrar döneceğiz.

c-İnşacılık (*Constructivism*)

Şöyle bir x sayısı tanımlayalım:
'Goldbach sanısı[22] doğru ise, x sayısı 3 olsun. Eğer Goldbach sanısı yanlış ise, x sayısı 5 olsun.' Sonra şöyle bir soru soralım: 'x sayısı asal sayı mıdır?' Böyle basit bir soruya verilecek cevap çoğumuz için bellidir. Hem 3 hem de 5 birer asal sayı olduğu için, her iki durumda

22 Goldbach, meşhur matematikçi Euler'e yazdığı bir mektupta 2'den büyük bütün çift sayıların iki asal sayının toplamı olarak ifade edilebileceğini yazmıştır. Sözgelimi, 4=2+2, 6=3+3, 8=3+5, 10=3+7, 12=5+7 gibi. Bütün sayılar için bu ifadenin doğru olduğu sanılmaktadır. Fakat aradan birkaç asır geçmesine rağmen Golbach'ın bu iddiasının ispatı sunulamamış, dolayısıyla teorem değil, sanı (conjecture) olarak adlandırılmıştır.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

da sayı asal olacağından cevap olumludur. İlginç olan şey, böyle bir cevabı inşacıların kabul etmeyecek olmasıdır. Şu an için, Goldbach sanısının doğru veya yanlış olduğunu bilmediğimiz veya böyle bir önermenin inşacı bir ispatı henüz verilemediği için böyle bir iddia anlamsızdır.[23]

İnşacılar, matematiği çelişkilerden ve anlamsızlıklardan kurtarmak için matematiği yeniden inşa etme gayesi ile yola çıkmışlardır. Dolayısıyla, onlara göre doğal sayılardan sonlu sayıda basamak ile inşa edilemeyen matematiksel önermeler, matematikten hariç tutulmalıdır. İnşacılara göre, klâsik matematik güvenilir değildir ve inşacı metotlarla yeniden inşa edilmeye ihtiyacı vardır. İnşacılar, Cantor'un reel sayıların ispatı türü inşa edilemeyen ispatları ve Aristo'dan beri yürürlükte olan *hariç tutulan orta ilkesinin*[24] kullanıldığı ispatları reddederler. Onlar, doğruluğu veya yanlışlığını bilmediğimiz bir şey hakkında bir kabule gidemeyeceğimizi, belirsiz türünden üçüncü bir şıkkın da olduğuna inanırlar. Dolayısıyla temelde bu ilkenin kullanıldığı *reductio ad absurdum* veya 'olmayana ergi' yönteminin de kullanıldığı ispatları da kabul etmezler (Ernest, 1998: 20-21; Hersh, 1997: 139). Böylece klâsik mantığı revizyona tâbi tutmayı amaçlamışlardır.

Bu arada, 1920'lerden itibaren Alfred Tarski, Emil Post, Jan Lukasiewicz gibi mantıkçıların çalışmalarına değinmekte fayda var. Bu mantıkçılar, 'çok-değerli mantık' üzerine ilerlemeler sağlamışlar ve bunların tutarlı olduklarını göstermişlerdir. Bu sistemde, doğru ve yanlış gibi ikili doğruluk değeri yerine; doğru, yanlış ve belirsiz olmak üzere üçlü doğruluk değeri söz konusudur. Böylece,

23 Bu örnek hakkında geniş açıklama ve başka örnekler için bkz. Brown (1999: 113-114).

24 'Üçüncü seçeneğin olanaksızlığı ilkesi' olarak da Türkçe'de kullanılan terimi, biz, 'hariç tutulan orta ilkesi' (law of excluded middle: tertium non datur) olarak bırakmayı tercih ettik.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

mantıkçı Alonzo Church'ün belirttiği üzere, "... (k)uşkusuz mantık olarak kullanılması olası birden fazla formel sistem bulunmaktadır ve bu sistemlerden biri, bir başkasından daha hoş veya daha uygun olabilir, ancak bu uygun olanın doğru olduğu ve diğerinin yanlış olduğu anlamına gelmez." (-Türkçe'de küçük değişiklikler ile- Barrow, 2001: 23-24).

En meşhur inşacılar, sezgici felsefenin öncülüğünü yapmış L.E.J. Brouwer ve öğrencisi A. Heyting'dir. 1960'lı yılların sonunda E. Bishop, hariç tutulan orta ilkesini kullanmayı reddetmiş, öte taraftan sezgici matematik ve klâsik matematiğin ortak yönlerini alarak, Brouwer'in başlattığı sezgici programı revize etmeye çalışmış ve sezgiciliği, inşacılık olarak adlandırmıştır. Daha sonra bu inşacı programı, analize uygulamaya çalışmıştır. Günümüzde Michael Dummett gibi filozoflar, inşacılığın değişik biçimlerini savunmaktadırlar.

Yeri gelmişken, son asrın filozofları arasında yaygın olarak görülen 'metafizikten kaçınma' tavrına değinmekte fayda var. Bu açıdan matematik filozofları da genel eğilime abonedirler. Heyting, hocası Brouwer gibi, klâsik matematiğin, matematiksel nesnelerin bizim dışımızda ve bizden bağımsız olarak varolduğu ve matematiksel doğruların nesnel olduğunu iddia eden metafiziksel bir prensibe dayandığını belirtir. Heyting, matematiğin herhangi bir metafiziksel prensibe dayanmaması gerektiği üzerinde ısrarla durur. Ayrıca formalist Curry de, formalizmin temel amacının, metafiziksel kabulleri bertaraf etmek olduğunu belirtmiştir (Shapiro, 2000: 188).

Hem Brouwer hem de Hilbert, sonlu aritmetik üzerinde durmuşlardır. Brouwer'ın başını çektiği sezgicilik ve Hilbert'in başını çektiği formalizm arasındaki fark, matematiğin 'kesin geçerliliği'nin nerede olduğu noktasında düğümlenmektedir. Brouwer farklılığı, secgicilerin kesinliği insan zihninde, formalistlerin ise kağıt üstünde varolduğuna inanmaları şeklinde açıklarlar (Shapiro, 2000: 174-5).

d- Temelciliğin Değerlendirilmesi

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Cantor'un matematiksel sonsuzluk üzerine yapmış olduğu analizlerin matematiğin dayandığı küme kuramında yol açtığı kriz, üç temelci okulun doğmasına yol açmıştır. Yukarıda üç temelci görüş olan mantıkçılık, biçimcilik ve inşacılığın görüşlerini özetlemeye çalıştık. Temelci okulların üçü de matematiğe sağlam bir temel bulma iddiası ile yola çıkmışlardır. He ne kadar şu an için matematikçiler ve filozoflar, onca çalışma sonrası böyle bir amacın muhal olduğunu düşünseler de, matematiğin temellerinin, matematik felsefesindeki ana sorun olduğu söylenebilir.

Church, 1962'de matematiğin temelleri hakkındaki görüşlerini şu şekilde açıklıyordu: "Matematik için herhangi bir temel [tayini] ... belli bir döngü içerisindedir. Yani, kendileri belli bir temele dayanmayan, iman veya sezgi olarak kabul edilecek bazı ön-kabuller her zaman olacaktır." (Ernest, 1998: 27)

Temelci anlayıştan ayrı olarak, Poincaré paradokslardan kurtulmak için "impredikatif" dediği, döngüsel akıl yürütmeler kavramını kullanmıştır. Fakat daha sonra matematiğin tümünün bunun üzerine bina edildiği anlaşılmıştır. Nitekim Hermann Weyl bunlara dayanmaksızın matematik yapmaya çabalamış, ama başaramamıştır (Barrow, 2001: 152).

Hilbert'in temelci çalışmalarına son veren, daha önce değindiğimiz üzere, kuşkusuz Gödel olmuştur. Gödel'in 'eksiklik teoremi' olarak bilinen meşhur sonuç, yirminci yüzyılın düşünce tarihindeki en önemli anıtsal başarılardan biridir. Öyle ki, bir mantıkçı olan Gödel, *Time* dergisince yapılan ankette, yirminci yüzyılın en etkili düşünür-bilim adamlarından biri seçilmiştir.

Gödel'in iki önemli teorisinin birine veya her ikisine birden Gödel teoremi dendiği olur. Gödel'in birinci teoremi, eksiklik teoremi olarak da bilinir. Buna göre, aritmetiği aksiyomatikleştirebilen herhangi bir sistem içinde öyle formüller vardır ki, bu aksiyom sis-

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

teminde elde edilemez. Yani genel hâliyle, matematik sistemlerinde öyle teoremler vardır ki bu teoremlerin doğruluğu veya yanlışlığı o sistem içerisinde gösterilemez. Gödel'in bu eksiklik teoremi, matematikte bilinemez diye bir şeyin olmadığına inanan biçimcileri derinden sarsmıştır. Gödel'in ikinci eksiklik teoremi sistemin güvende olup olmadığını anlayamayacağımızı, yani bir sistemin tutarlılığının sistemin kendi içinde gösterilemeyeceğini göstererek, yine biçimcilerin tutarlılık hülyalarına bir son vermiştir.

Von Neumann, Gödel'in çalışmalarını hemen kavramış görünen ilk matematikçi olarak karşımıza çıkar (Barrow, 2001: 163). Öyle ki, formalist anlayışı terk etmiş ve hemen Gödel teoremlerinin olası sonuçları üzerine çalışmıştır. Aslında Gödel'in ulaştığı sonuçların çok derin etkileri olmuştur. Sözgelimi, Lucas ve Penrose Gödel teoreminin, informel aritmetiksel ispatlamanın bir makineden her zaman daha hızlı olacağı anlamına geldiğini belirtirler.[25] Webb gibi kimileri ise, bu yorumlara katılmayıp, eksiklik teoreminin mekanizmi desteklediğini iddia ederler (Shapiro, 2000: 44).

Russell, Gödel'in çalışmalarını tam olarak anlamamış, zaten ciddî ve yoğun bir uğraşın sonucu olan *Principia*'yı yazdıktan sonra matematikle ilgilenmez hâle gelmiştir. Öyle ki, bir keresinde bu uğraşın zihinlerini onarılamaz bir şekilde tahrip ettiğini söylemiştir. Ömrünün geri kalan kısmında, felsefe, politika ve edebiyat ile ilgilenmiştir. Wittgenstein da Gödel'in çalışmalarının mahiyetini anlamamış ve kötü kavrayıştan kaynaklanan zayıf eleştirilerde bulunmuştur. Hilbert de Gödel'in sonuçlarını incelemekten kaçınmıştır (Barrow, 2001: 163-7).

Gödel'in 1964 tarihli meşhur 'Cantor'un Süreklilik Hipotezi

25 Bu konuda yazılmış en popüler ve zekice makalenin, bilim-kurgu yazarı matematikçi Rudy Rucker'a ait olduğu rahatlıkla söylenebilir. Anlaşılır ve zevkli bir özet için bkz. Rucker (1983; 168-177).

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Nedir?' adlı makalesi, üzerinde durulması gereken, Gödel'in fikirlerinin bir tür uygulaması olarak görülebilecek önemli bir incelemedir. Bahsi geçen makalenin sonunda Gödel, süreklilik hipotezinin doğrulanamayacağını iddia etmiştir. Süreklilik hipotezinin yanlışlanamayacağının ispatı daha önce Gödel'in bizzat kendisi tarafından verilmişti. İşin ilginç tarafı, bu sonuç Paul Cohen tarafından makale yayınlanmadan önce ispatlanmıştır.[26] Neticede, Cantor'un ortaya attığı süreklilik hipotezi, bildiğimiz küme kuramının aksiyomları ile ne yanlışlanabilir ne de doğrulanabilir. Teknik olarak ifade edersek, süreklilik hipotezi, küme kuramının bildik aksiyomlarından bağımsızdır.

Gödel, daha önce değinildiği üzere, birçok meşhur matematikçi gibi Platoncuydu. Yeniden hatırlatırsak, Gödel'e göre matematik bizden bağımsız, ideal bir nesnel gerçeklik ile ilgilidir. Bu yüzden ona göre, matematiksel hakikatler, zaman-üstü yani değişmezdir. Fakat Gödel'e göre, bildiğimiz matematik mutlak doğru değildir; sezgilerimiz yanılabilir niteliktedir. Zaten, mutlak doğruluk, aksiyom metodolojisi olarak önerilen aksiyomları üretkenliğine göre seçme ile de sarsılmıştır. Gödel'in kendi sözcükleri ile, yeni aksiyomlar "sadece olası" kesinlik sağlarlar. Gödel, böyle bir aksiyom metodolojisinin yaygınlaşması halinde, matematiğin klâsik olarak bilinen "mutlak kesin"liğini kaybedeceğini, fakat esasında, bu sürecin matematikte zaten önemli bir miktarda bayağı bir gerçekleştiğini belirtir (Shapiro, 2000: 211).

Gödel, 1964 tarihli makalesinin sonunda, matematikteki aksiyomların, fizikteki üretkenliklerine göre seçilebilme ihtimalinden bahsedip, bunun daha çok spekülatif bir şey olduğuna değinir. Gü-

26 Cohen bu ispatını Gödel'den bir yıl önce yani 1963'te yayınlamış olmasına karşın, Gödel makaleyi yazdığı zaman bu konu hakkında bilgi sahibi değildi.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

nümüzde matematik ve fiziğin tümünde böyle bir şeyi denemekten oldukça uzağız. Fakat burada dikkat edilmesi gereken bir nokta, böyle bir metodoloji kullanılırsa, matematiğin klâsik *a priori* özelliğini yitireceğidir (Shapiro, 2000: 211). Gödel'in bu spekülasyonunun, fikirlerine daha sonra değineceğimiz, Quine'a oldukça yakın olduğu söylenebilir.

Gödel'in formalizme indirdiği darbelerden sonra, formalizmin matematikçiler arasındaki destekçi sayısının azaldığı söylenebilir. 1940'lı yıllar sonrasında, formalizmi açıkça destekleyenlerin başında Haskell Curry gelir. Ayrıca, 1950'li ve 1960'lı yıllarda bütün dünyada etkili formalist bir grup olan 'Nicolas Bourbaki'ye değinmekte fayda var. Bu grup, Bourbaki takma adı altında, yüksek lisans ders kitapları yazmıştır. Bu formalist anlayış, ülkemizin de dahil olduğu birçok ülkenin orta öğrenim kurumlarında da etkili olmuştur. Öte yandan son yıllarda, dünyada, özellikle Amerika'da eğitim fakültelerinde yayılan bir anlayış ile matematik eğitimi daha bir somut olana ve uygulamaya dönük yaklaşımlara kaymıştır.

Bernays'ın da işaret ettiği gibi, onca felsefî itiraza veya tıkanmaya rağmen, matematik bir taraftan hızlı ve güvenli bir şekilde gelişme göstermekteydi (1935: 274). Gerçekten de, temelci yaklaşımların, epistemolojik başarısızlıklarına rağmen matematiksel olarak birçok ilerlemeye yol açtıkları bir vakıadır. Sözgelimi birçok matematiksel kavramın tanımının verilmesi, Russell'ın tipler teorisi, birinci-dereceden mantık, ispat teorisinin ilk evreleri vs. mantıkçıların matematiğe yaptıkları önemli katkılar arasında sayılabilir. Yine biçimcilik, aksiyomatik sistemin geliştirilmesi, küme kuramı, ispat teorisi ve metamatematik, modern bilgisayarın 'babası' sayılan Turing makinesinin gelişmesinde önemli roller oynamış, ayrıca hesap teorisinin gelişmesine de önemli katkıda bulunmustur. Benzer şekilde inşacı matematik, şu an için bile matematiğin canlı bir alanı sayılabilir.

İnşacı anlayış, ispat teorisi, hesap teorisi ve inşacı küme teorisinin gelişmesine yardımcı olmuştur. Özetle, üç anlayışın ortak özelliği olan matematiğe sağlam bir temel bulma iddiası epistemolojik açıdan iflas etmiş görünse de[27] temelcilerin çalışmaları matematiksel açıdan verimli olmuştur (Ernest, 1998: 18-24).

Temelciliğe getirdiği bakış açısı ile dikkatleri üzerine çeken önemli bir filozof ise Hilary Putnam'dır. Putnam 1967 yılında yazdığı bir makalede şöyle demektedir:

> "Filozoflar ile mantıkçılar son elli yıl boyunca matematiğe bir 'temel' bulma yolunda öylesine yoğun bir çaba içine girmişlerdir ki, yalnızca birkaç cılız ses matematiğin bir temele gereksinmesi olmadığını söyleme cesareti gösterebilmiştir. Ben bu cılız seslere katılmak istiyorum. Kanımca matematik açıklık gerektiren bir konu değildir; temellendirilmesine ilişkin bir bunalımı da yoktur. Dahası, matematiğin temeli olmadığı gibi, bir temele ihtiyacı olduğuna da inanmıyorum." (Putnam'dan aktaran Yıldırım (2000: 101)

Bourbaki örneğinde görüldüğü üzere, 20. yüzyılın ortalarına gelindiğinde, formalizmin ders kitaplarında ve matematik hakkındaki yazılarda dominant felsefî bakış açısı olduğu söylenebilir.[28] Mantıkçılık kendine oldukça fazla sayıda destekçi bulmuş, inşacılık ise birkaç taraftarı ile kendi hâlinde devam etmiştir. Tabî ki, Platonculuk o zaman ve dahi bütün zamanlarda neredeyse tüm matematikçiler tarafından, "bir yeraltı dini" gibi kabul görmekteydi ve görmektedir

27 Bu görüşe katılmayan, sözgelimi, Shapiro'ya göre, mantıkçılık ölmemiştir ve hâlâ canlı bir araştırma alanıdır (2000:138).

28 Hersh, formalizmin bu başarısının önemli bir sebebi olarak, formalizmin mantıkçı pozitivizm ile bağını sayar (1997:164). 1940'lı ve 1950'li yıllarda bilim felsefesinde baskın olan bu anlayışa göre, mantıksal kalkulüs içinde bütün bilimler birleştirilip formelleştirilebilirdi. Formalizm ise matematik için bunu öneriyordu.

(Hersh, 1997: 162).

Bu kısımda, matematik felsefesi tarihi boyunca en hararetli devir olan, temelcilik dönemini incelemiş olduk. Temelcilik sonrası yaşanan gelişmeleri bir sonraki bölümde genişçe ele alacağız.

IV- MODERN MATEMATİK FELSEFESİNDEKİ GELİŞMELER

Yüzyılın ilk döneminde etkili olan Frege, Russell, Poincaré, Hilbert, Brouwer ve Gödel iyi birer matematikçiydiler. Gerçekten de matematik felsefesinin 20. yüzyıldaki gelişimine bakıldığında, yüzyılın ilk dönemlerinin daha çok matematikçiler tarafından, ikinci döneminin ise daha çok filozoflar tarafından şekillendirildiği görülür.

Yüzyılın ilk dönemlerindeki uğraşılan sorunlar, matematiğin temelleri gibi global sorunlar ile tanım, teorem ve ispatın ne olduğu gibi konulardan müteşekkildi. Yüzyılın ikinci yarısında uğraşılan sorunlar ise, ilk yarıda çözülmemiş olan bir kısım sorunlar ile yeni bir takım sorunlardan ibarettir. İkinci yarı temelde, matematik eğitimi almış veya matematik hakkında bilgi sahibi filozoflar tarafından şekillendirilmiş ve böylece matematik felsefesi hakkında 'daha felsefi' sorunlar üzerine yoğunlaşılmıştır. Platonculuk, matematiksel realizm ve ontoloji, matematikte gerekircilik türü tartışmalar yakın zamanlardaki matematik felsefesine yön vermiştir. II. Dünya Savaşı'ndan sonraki bu devirde, ilginç bir şekilde daha dikkatli üretilmiş argümanlar, kavramsal analizler, diğer filozofların yazdıklarına derinlemesine cevaplar, iddialar ve redler ve genel olarak daha dar felsefi problemler ile matematik felsefesi, filozofların tarzına yaklaşmıştır. Bu arada Kitcher ve Aspray'ın 'özgün' (maverick) diye tanımladıkları matematiksel deneyim ve metodoloji ile ilgilenen, Lakatos'un başını çektiği yeni bir akım göze çarpmaktadır (Ernest, 1998: 41, 53-54; Kitcher & Aspray, 1988:17; Brown, 1999: XII).

Son yıllarda, dikkati çeken bir konu da bilgisayar ispatları ve

grafikleridir. 1976 yılında Dört Renk Sanısı'nın bilgisayar tarafından ispatının verilmesi matematikçiler ve filozoflar arasında ispatın ne olduğu, bilgisayar ispatının kabul edilip edilemeyeceği gibi ciddî tartışmalara yol açmıştır. Aslında birçok matematikçi, bilgisayar ispatına sert tepki göstermiştir. Bu arada, böyle bir tepkiden yola çıkan Hersh bir ironiye işaret eder (1997: 28). On yıllarca, matematik filozoflarının bir kısmı, geçerli bir ispatın herhangi mekanik bir yolla kontrol edilebileceğinden bahsettiler. Şimdi, bilgisayar tarafından uzun yıllardır çözülemeyen bir sorunun ispatı verilince, bazıları "Bu, bir ispat değildir!" demektedirler.

Üzerinde önemle durmamız gereken diğer bir husus da, uygulamalı matematiğin matematik felsefesi içindeki konumunun daha çok dikkatleri üzerine çektiğidir. Gerçekten de, özellikle son yıllarda uygulamalı matematik ve fiziğin matematik felsefesi içerisindeki konumu neredeyse popüler bir hâle gelmiştir (Shapiro, 2000: 201). Hersh'in işaret ettiği gibi, Pisagor'dan Russell'a kadar çok az istisna dışında,[29] matematik felsefesinde şimdiye dek uygulamalı matematiğe pek önem verilmemiştir (1997: 236). Uygulamalı matematiğe, özellikle belli bir dönemde, matematikçiler küçümser bir eda ile bakmışlardır. Yirminci yüzyılın meşhur pür matematikçilerinden Hardy, bu isimlerden en çok bilinenlerindendir.[30]

Uygulamalı matematik ile ilgili bir diğer konu da, matematiğin, fizik özelinde doğa bilimleri içindeki konumudur. Eugene Wigner bu sorunu yıllar önce, "matematiğin doğa bilimleri içindeki akıl almaz etkililiği" olarak belirtmiş ve bu sorun için mantıksal bir açıklama olmadığını ifade etmişti. Aynı şekilde S. Weinberg, "Fizikçinin,

29 Uygulamalı matematiğe önem verenlerin başında Körner gelir. Kitabının 8. bölümü, Pür ve Uygulamalı Matematiğin Doğası başlığını taşımaktadır (Körner, 1986: 156-186).

30 Hardy, meşhur kitabı, *Bir Matematikçinin Savunması*'nda birçok kez bu konuya temas eder (Hardy, 1993: 130-136).

kendinden önce matematikçinin orada olmasını görmesi oldukça gizemlidir." derken, Richard Feynman, "Matematik ile, (gerçekte) ne olacağını kestirmenin mümkün olmasını oldukça şaşırtıcı bulurum. Matematik denen şey, orijinal şeyle hiçbir alakası olmayan kuralları basitçe takip etmekten ibarettir." demiştir (Shapiro, 2000: 39). Görüldüğü üzere fizikçiler, matematiğin fizikteki olağanüstü rolüne değinerek, matematiğin doğasını tam olarak kavrayamadıklarını ifade ediyorlar.

Öte yandan, matematiğin, Nobel ödülü sayılan, matematikçiler arasında en saygın ödül olarak kabul gören Field Madalyası'nın son yıllarda açığa çıkardığı tablo da çok ilginçtir. Field madalyası, 1936'dan beri, II. Dünya Savaşı yılları hariç, her 4 yılda bir verilmektedir. İlginç olan şey, 1990 yılında ilk defa bir fizikçiye Field Madalyası verilmiş olmasıdır. Dahası, matematik sorularının fiziksel metotlarla çözümüne son yıllarda sıkça başvurulmaktadır. Ayrıca, gittikçe artan oranda matematiksel fizik ile ilgilenen matematikçiler Field Madalyası'na layık görülmektedirler. Bu ise, son yıllarda matematik ve fizik çalışmalarının birbirine ne kadar yaklaştığının bir göstergesidir (Monastyrsky, 1998: 1-19, 105). Neticede, matematiğin öyle uygulamaları bulunmuştur ki, bugün uygulamalı matematiği küçümseyen bir matematikçi bulmak oldukça zordur. Tam da bu noktada, Galileo'nun "Doğa felsefesinin dili, matematik ile yazılmıştır." diye nitelediği matematik, niye kainatın dilidir, bu uyum nerden gelmektedir türü soruların matematikçi için her çağda niçin önemli olduğu ve birçok matematikçinin neden Platoncu olmayı yeğlediği anlaşılabilir. Bütün bunlara bakarak bir kehanette bulunabiliriz: Matematiğin dış dünyada neden bir karşılığının olduğu sorunu ile baş edemeyen bir matematik felsefesi, tarihin çöplüğüne atılmaya mâhkumdur.

Matematik felsefesi ve matematikte önemi artan belli başlı konulara değindikten sonra, matematik felsefesindeki belli başlı akım

ve görüşleri tartışmaya geçebiliriz. Yirminci yüzyılın en önemli filozoflarından kabul edilen Quine'ın (1908-2000) matematik felsefesi hakkındaki görüşleri oldukça önemlidir. Quine, "Ampirizmin İki Dogması" adlı meşhur makalesinde, eskiden beri uygulanagelen, olgulardan bağımsız bilinebilen veya olgularla bilinebilen ayrımı olarak tarif edilen ve ilk olarak Kant'ta açıkça karşılaştığımız analitik-sentetik 'dogma'sına savaş açar. Quine'a göre, dil ve dünya faktörleri birbirine düğümlenmiş gibi iç içe geçmiştir ve bu ikisi arasında keskin bir ayrım yoktur. Dolayısıyla, bir cümlenin sadece dilsel sebeplerden ötürü doğru olduğunu söylemenin veya analitik olduğunu söylemenin bir mantığı yoktur (Shapiro, 2000: 213). Quine'ın savaş açtığı ikinci dogma, 'indirgemecilik'tir. Bu düşünceye göre, anlamlı cümlelerin her biri bunların mantıksal inşalarına denktir. Bu dogmanın altında yatan şey, anlamlı her bir cümlenin, doğrudan tecrübe yoluyla doğrulanabilir cümlelerin mantıksal bir kombinasyonu olması gerektiği hakkındaki 'dogma'dır.

Quine, bu dogmalar yerine 'dikişsiz ağ' benzetmesini önerir. Quine'a göre, inanç sistemimiz bir ağ oluşturur ve bu sistemde her inanç başka bir inançla bağlantılıdır. Bu bağlantılardan bazıları mantıksal, bazıları dilseldir vs. Tecrübe ile doğrulanabilen, yani tecrübe ile ilişkili olan inançlar ağın sınırındadır. Yeni gözlemler sayısız bağlantılar arasında değişiklik meydana getirir ve bu bağlantılar arasında yeni bir dengeye ulaşılana dek sürer. Quine'ın bu holistik (bütüncül) görüşüne göre, bilim adamı bu bağlantı seçeneklerinden istediğini kullanabilir. Bu holistik bakış açısı, tecrübe yoluyla doğrulanabilen anlamlı her bir cümlenin mantıksal bir kombinasyona sahip olması gerektiği yönündeki ikinci 'dogma'yı reddeder (Shapiro, 2000: 213-4).

Quine, holizm ve ampirizme dayanarak matematiğin bilimde

31 Hersh'in, Quine'ın reel sayılar hakkındaki görüşüne itirazları için bkz. Hersh, 1997: 172-175.

uygulaması bulunan kısımlarını kabul eder (Shapiro, 2000: 219). Tahmin edileceği üzere, Quine'ın matematik hakkındaki görüşleri birçok eleştiri almıştır. Sözgelimi, Quine'ın matematiksel gerçeklik, ancak fiziksel gerçeklik ile bilinebilir yönündeki görüşüne Hersh karşı çıkmaktadır.[31]

1950'li ve 1960'lı yıllarda, yeni-Fregeci yaklaşımların eski temelci yaklaşımların yerini almaya başladığına şahit olmaktayız. Yeni-Fregeci yaklaşımın ayırdedici iddiası, Zermelo-Fraenkel aksiyom kümelerinin bir uzantısı olan küme kuramının bütün matematik için temel oluşturduğudur. Yeni-Fregecilere göre, bütün matematik küme kuramının içine gömülüdür ve özelde sayılar, genelde ise bütün matematiksel varlıklar kümelerden ibarettir (Kitcher & Aspray, 1988: 12, 13).

1960'lı ve 1970'li yıllarda, Platonculuğa ciddî eleştiriler yöneltilmeye başlanmıştır. Bu eleştirilerin günümüz matematik felsefesinin şekillenmesinde önemli bir rolü vardır (Kitcher & Aspray, 1988: 12). Öncelikle, matematiksel nesnelerin varlığını inkâr eden, ontolojik olarak anti-realist olarak betimlenebilecek görüşün radikal bir biçimi olan nominalizme değinelim (Shapiro, 2000: 226). Chihara, matematiğin detaylı bir nominalist versiyonunu 1973'te sunarak, ontolojik Platonculuğa karşı gelmiştir. Chihara'nın çalışmaları, nominalizme olan ilginin artmasına sebep olmuştur (Kitcher & Aspray, 1988: 13-14). Chihara dışında nominalizmin farklı bir biçimini savunan, Gottlieb ve Field önemli figürler olarak karşımıza çıkmaktadır.

Zaruriyet (Indispensability) tartışması olarak bilinen, 'Matematik bilim için temel teşkil eder mi?' sorusu nominalizmi anlamak açısından önem teşkil etmektedir. Quine ve Putnam'ın ilk olarak evet demesi, nominalist Field'in ise karşı çıkıp, hayır demesi ile başlayan tartışma günümüzde hâlâ devam etmektedir (Brown, 1999: 46). Nominalistler, sayılar ve kümeler gibi matematiksel nesneleri varsaymaksızın, nasıl bir matematiğin bilim için gerekli olduğunu

göstermeye çalışmaktadırlar (Kitcher & Aspray, 1988: 13-14; Shapiro, 2000: 226). Çağdaş nominalizm, Chihara, Gottlieb ve Field'in her birinin öncülüğünü yaptığı üç farklı biçimde karşımıza çıkmaktadır (Kitcher & Aspray, 1988: 15-16). Şimdi her birinin görüşlerine değinelim.

Chihara, soyut nesnelerin varlığı kabul edilerek kurulan cümlelerin, ifadelerin sadece dilsel varlıklar olarak yeniden inşa edilebileceğini iddia eder. Yani Chihara'ya göre, matematiksel dil öyle sistemleştirilebilir ki, matematiksel nesnelere gizliden veya açıktan bir referans söz konusu olmaz. Fakat burada, Chihara'nın, sisteminde, tümevarım ve bütünlülük aksiyomlarının her ikisini de doğru kabul ettiğini belirtelim. Dolayısıyla Shapiro'nun belirttiği gibi, Chihara, doğruluk değeri açısından realisttir; yani ona göre matematiksel cümleler zihin ve matematikçiden bağımsız nesnel bir doğruluğa sahiptirler (Shapiro, 2000: 227). Gottlieb ise, matematiksel nesnelerden kaçınmak için, 've', 'veya', 'bazı' gibi önerme bağlaç ve niceleyicilerini yeniden yorumlamayı önerir (Kitcher & Aspray, 1988: 15-16).

Field'in kurguculuk (fictionalism) olarak adlandırdığı görüşe göre, edebî kurgu ürünü olan *Oliver Twist* neyse, sayılar veya kümeler de aynı konumdadır (Shapiro, 2000: 227). Field'in kurguculuğu, nominalizm içinde gelenekten en fazla kopan görüştür. Field'e göre, fiziksel teoriler öyle bir şekilde yeniden kurulabilir ki, sayılara veya matematiksel nesnelere vurguya gerek kalmaz. Field'e göre, matematiksel bilgi basitçe mantıksal bilgiden ibarettir. Matematiksel terminoloji, onlarsız sonuca varmak daha zor olacağı için kullanılmaktadır. Kitcher, Field'in bu görüşleri ile Hilbert'in formalizmi arasındaki benzerliklere dikkat çeker (Kitcher & Aspray, 1988: 15-16).

Kurgucuların, matematiksel nesnelere herhangi bir varlık atfetmeden bir kurgu ürünü kabul edip bilim yapılabileceği iddiası günümüzde hâlâ tartışılmaktadır (Hersh, 1997:179). Yakın zamanda, John P. Burgess ve Gideon Rosen'ın *A Subject With No Object* (1997)

[Nesnesiz bir Özne] adlı kitabı, soyut nesneleri var saymaksızın bilimde kullanılan matematiği yeniden inşa etmeyi amaçlayan programları geniş ve eleştirel bir biçimde incelemektedir. Kitabın başlığı, bu programlardan herhangi biri başarılırsa matematiğin neye dönüşeceğine işaret etmektedir (Shapiro, 2000: 243-4).

Matematik felsefesi alanında, 1970'lerden günümüze en önemli makalelerden biri kuşkusuz Benacerraf'ın 1973 yılına ait "Matematiksel Hakikat" adlı makalesidir. Benacerraf, bahsi geçen makalede bir ikilem ortaya atar: matematiksel doğruluk hakkındaki en iyi görüşlerimiz matematiksel bilgi hakkındaki bilgilerimiz ile uyuşmamaktadır. Elimizdeki en iyi doğruluk teorisine göre, genel olarak, doğru matematik cümleleri doğruluklarını, matematiksel nesnelerin özelliklerine ve birbirleriyle olan ilişkisinden alır. Ayrıca, bu nesneler zamandan ve mekândan bağımsız gibi görünmektedirler. Benacerraf, en iyi bilgi kuramımıza göre; bilen kişi ile hakkında bilgi edindiğimiz şey arasında nedensel bir ilişki olması gerektiğine dikkat çeker. Sonuç gayet basit ve açıktır: Madem matematiksel nesneler, zaman ve mekandan bağımsız görünmektedirler ve bu nesneler ve insan arasında herhangi bir bağ yoktur, o zaman en iyi bilgi kuramımıza göre, matematiksel bilgi imkânsızdır![32]

Benacerraf'ın bu makalesinden sonra matematik felsefesinde yapılan yayınların önemli bir kısmının bu ikileme cevap bulmak amacında olduğunu belirtmekte fayda var. Bazı filozoflar, insan bilgisinin şartlarını daha iyi anlatan bilgi kuramları bizden bağımsız matematiksel nesneleri anlamamızı sağlayacaktır diyerek yeni-Fregeciliğin ikilemden etkilenmediğini iddia etmektedirler. Öte yandan, bir kısmı ise ikilemi daha da derinleştirerek yeni-Fregeci anlayışta revizyonlar önermişlerdir (Kitcher & Aspray, 1988: 14).

32 Makalenin güzel ve kısa bir değerlendirmesi için bkz. Kitcher & Aspray, 1988: 14.

Bu bağlamda, yapısalcılığın *(structuralism)*, aslında Benacerraf'ın başka bir problemi olan, 'Sahici doğal sayıları, küme kuramının desteklediği ihtimallerden hangisiyle tanımlayacağız?' sorununa bir tepki olarak ortaya çıktığını söylemek münkündür (Kitcher & Aspray, 1988: 15). Bilindiği üzere, doğal sayıların küme kuramıyla gösterimi Zermelo ve von Neumann tarafından farklı şekillerde ortaya atılmıştır. Ernst Zermelo, 0'ı boş küme olarak, yani ϕ olarak, 1 sayısını $\{\phi\}$ olarak, 2 sayısını $\{\{\phi\}\}$ olarak, 3 sayısını $\{\{\{\phi\}\}\}$ olarak vs. tanımlamayı önermiştir. John von Neumann ise, 0'ı boş küme yani ϕ olarak, 1'i $\{\phi\}$ olarak, 2'yi $\{\phi,\{\phi\}\}$ olarak, 3'ü $\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$ olarak vs. tanımlamayı önermişti. Peki, o zaman, bunlardan hangisi doğrudur? Bu soruya cevap olarak ortaya çıkan yapısalcılığın ana destekçileri Benacerraf, Hellman, Michael Resnik ve Stewart Shapiro olarak sıralanabilir.

Matematiğe yabancı olmayan yapısalcılık, matematik felsefesindeki hâliyle oldukça yeni sayılır (Hersh, 1997:177). Yapısalcılık, matematiği model, kalıp, şablon gibi anlamlara da gelen 'pattern' bilimi olarak tanımlamaktadır. Çoğu yapısalcı, matematiğin her cümlesinin bizden bağımsız olarak doğru veya yanlış olduğunu iddia eder. Yapısalcılar, matematiksel nesnelerin varlığı konusunda değişik görüşlere sahiptir (Shapiro, 2000: 257).

Yapısalcılar, doğal sayılar arasındaki herhangi bir ontolojik bağımsızlığı reddederler. Onlara göre, bir doğal sayının özü, o sayının diğer doğal sayılarla ilişkisinde yatar. Aritmetiğin içeriği, basit bir soyut yapı olmasındadır ki, bu yapıdaki pattern, benzer özelliklere sahip herhangi bir sonsuz dizide de söz konusudur. Dolayısıyla, 2 sayısı doğal sayılar yapısındaki, 2. konumdan ibarettir; 5 sayısı, 5. konumdan ibarettir vs. Sözgelimi 7 sayısını asal sayı kılan bu sayının bizatihi kendisi değil, bu yapıdaki konumu veya sırasıdır. (Shapiro, 2000: 258).

Yapısalcılığın önemli bir filozofu olan Michael Resnik, bu ko-

nuyla alakalı meşhur bir makalesinin girişinde, "Matematikte, iddia ediyorum ki, yapılar içinde dizili 'içsel' birleşimli nesnelere sahip değiliz, sahip olduğumuz şey sadece yapılardır. Matematiksel sabit ve değişkenlerin gösterdiği varlıklar yani matematiksel nesneler, yapının içerisinde (herhangi bir) yapıya sahip olmayan nokta ve konumlardır. Yapının içerisindeki konumlar gibi, matematiksel nesnelerin herhangi bir kimliği veya özelliği yoktur." demiştir (1981: 530).

Yapısalcılık hakkında bu temel bilgileri verdikten sonra[33], başka bir önemli akıma, mutlakçılığa geçmek istiyorum. Matematiksel doğruların, geçerli ve bu nedenle yanılmaz, sarsılmaz, nesnel olduğunu savunan bakış açısına mutlakçılık denmektedir. Sözgelimi, mantıkçı pozitivizm ve mantıkçı ampirizmin en önemli temsilcilerinden olan Ayer, "Matematik ve mantığın doğruları, gerekli ve kesin olarak karşımıza çıkar." demekle bu mutlakçı anlayışın önemli bir temsilcisi olarak karşımıza çıkmaktadır (Ernest, 1998: 9-10, 14). Yaygın kabul gören bu mutlakçı anlayış, yüzyılın başında ortaya çıkan çelişki ve karışıklıklardan dolayı yara almıştır. Matematiğin sarsılmazlığını ve kesinliğini göstermeye çalışan temelci yaklaşımlar yirminci yüzyıl matematik felsefesinde baskındır. Bu bağlamda, Macar Yahudilerinden olan Imre Lakatos radikal bir karşı görüşle ortaya çıkmıştır.

Matematiğin sosyal, kültürel, tarihsel köklerine vurgu yapıp, matematiğin hayatın diğer parçaları gibi sosyal bir ürün olduğunu iddia eden *hümanist*ler, kendi tarihlerine başlangıç olarak Frege'yi değil, Lakatos'u alırlar (Hersh, 1997:208, Kitcher & Aspray, 1988: 17-18). Son yıllarda, Hersh ve Ernest gibi hümanist veya sosyal inşacılar, Philip Kitcher gibi natüralistler ve Thomas Tymoczko gibi "sözde-ampirikçiler" Lakatos'un çalışmalarını ciddiye almak-

33 Yapısalcılık ile ilgili ontolojik sorunlar için bkz. Shapiro, 2000: 261.

tadırlar. Kitcher, Lakatos'un ortaya attığı sorunların izinden giden, matematik felsefesindeki yeni akıma 'özgün' adını vermektedir.

Proofs and Refutations [İspatlar ve Çürütmeler] 'da "Biçimciliğin kurduğu egemenliğe karşı, insanın Kant'ın tespitini yeniden söyleyesi gelir; felsefenin yol göstericiliğinden yoksun matematik tarihi *körleşmekten*, matematik tarihindeki enteresan gelişmelere sırt çeviren matematik felsefesi de *koflaşmaktan* kurtulamaz." (Lakatos, 1976: 2) diyen Lakatos, matematik tarihini, "hutbesine metin" addeder (Hersh, 1997: 211). Lakatos'a göre, matematik doğa bilimleri gibi, *yanılabilir*dir. Lakatos, yanılabilirlik kavramını, Popper'ın, *eleştirel yanılabilirlik* teriminden matematik felsefesine uyarlamıştır (Ernest, 1998: 10). Thomas Kuhn'un *Bilimsel Devrimlerin Yapısı* adlı yapıtı, bilim tarihinin bilim felsefesine derinlik katabileceğini göstermiştir. Matematik tarihi ve felsefesi açısından bu tür çalışmaların henüz başlangıç safhasında olduğu söylenebilir. Bu cümleden hareketle, Lakatos'un çalışmalarına kısaca göz atmakta fayda görüyorum.

Lakatos'un izindeki azınlık gruba göre, matematik felsefesi, doğa bilimleri felsefesinde olduğu gibi metodik sorunlarla da ilgilenmelidir. Popper'in *Conjectures and Refutations* [Sanılar ve Çürütmeler] adlı kitabını çağrıştıran, *Proofs and Refutations* [İspatlar ve Çürütmeler] isimli kitabında Lakatos, Popper'ın doğa bilimleri için uyguladığı metodolojiyi matematiğe uyarlar (Kitcher & Aspray, 1988: 17-8). Lakatos'un didaktik bir tarzda yazdığı kitabında Öğretmen ile Alfa, Beta, Gama vs. adlı öğrencilerden oluşan bir sınıfta tarihî keşifleri canlandırması, benzerine az rastlanır felsefî diyalogları hatırlatır. Lakatos kitabında, Euler-Cauchy sanısı olarak bilinen herhangi birçokyüzlünün köşe (K), yüzey (Y) ve ayrıtları (A) arasındaki ilişkiyi gösteren K+Y=A+2 eşitliğini tarihî bir örnek alarak, şu metodik sorulara cevap arar: Matematik nasıl gelişir? Matematiksel ilerleme nedir? Matematiksel tanımlar nasıl revize edilir? İspatlar nasıl düzeltilir? Bu değişiklikleri yaparken matematikçinin

izlediği metodolojik kurallar var mı? Varsa eğer, nedir bu kurallar? Kitapta, matematiksel gelişimin perde arkası, zekice ortaya konmaya çalışılmaktadır.

Lakatos'un bıraktığı yerden bu tür metodik sorunlar üzerine çalışma yapma geleneği henüz yeni sayılır ve bu konudaki çalışmalar da oldukça eksiktir (Kitcher & Aspray, 1988: 17-18). Lakatos'un matematik felsefesine kattığı önemli bir kavram da *sözde-ampirik*dir. Buna göre, matematik monoton bir şekilde büyümez; spekülasyon, tahmin ve eleştiriler ile birlikte büyür (Lakatos, 1976: 5). Sözde-ampirikçiler ile inşacılar arasında benzerlikler vardır; aradaki fark ise birincilerin matematiği daha çok sosyal bir ürün olarak görürken, inşacıların matematiğin sınırları içinde düşünmeleridir (Tymoczko, 1998: xvi).

Bu arada, yeri gelmişken günümüz sosyal inşacılarından özellikle Ernest'in, çalışmalarını ciddiye aldığı Wittgenstein'ın matematik felsefesindeki konumuna işaret etmekte fayda var. Wittgenstein'ın matematik felsefesi hakkındaki görüşleri genel kabul görmemiştir. Ayrıca Wittgenstein'ın görüşlerinin ne olduğu noktasında da ciddî fikir ayrılıkları söz konusudur. Kreisel gibi kimileri, onu 'katı bir sonlucu'; Dummett gibi kimileri 'saf-kan konvansiyonelci'; Maddy gibi kimileri onun 'matematik felsefesi karşıtlığı'nın savunucusu olarak nitelerken; Anderson, Bernays ve Kreisel gibi kimileri matematikten anlamadığını belirtmişlerdir (Ernest, 1998: 67). Mantıkçı Kreisel, Wittgenstein'ın çalışmalarını, "parlak bir zekanın ehemmiyetsiz ürünleri" diye niteler. Fakat Bloor, Ernest, Shanker ve Wright

---

34 Wittgenstein'ın oldukça karmaşık ve tartışmalı olan matematik felsefesini konu bütünlüğünü korumak amacıyla burada incelemeyeceğiz. Fakat ilgili okuyucular yukarıda sayılan kaynaklara başvurabilirler.

35 Sözgelimi, Resnik'in *Frege and Philosophy of Mathematics* (1980) [Frege ve Matematik Felsefesi]; Kitcher'in *The Nature of Mathematical Knowledge* (1983) [Matematiksel Bilginin Doğası]; Wright'ın *Frege's Conception of Numbers* (1983) [Frege'nin Sayıları Algılayışı]; Hale'in *Abstract Objects* (1987) [Soyut Nesneler]; Aspray ve

gibi yazarlar Wittgenstein'ın görüşlerine sempati ile bakmaktadırlar (Hersh, 1997: 201).[34]

1980'li ve 1990'lı yıllar, matematik felsefesi alanında birçok önemli kitabın basılmasına şahit oldu. Bu hareketlenme, matematik felsefesinde yüzyılın ilk çeyreğinde Hilbert, Russell, Gödel gibi matematikçi filozoflardan sonra nispeten duraksamaya yüz tutmuş alanın yeniden canlanması olarak da okunabilir.[35] Bu yayınlar içinden, Gödel'in Platonculuğu ile Quine'ın ampirizmini birleştiren ve her ikisinin eksikliklerinden kaçınmaya çalışan Penelope Maddy'nin kendine has Platonculuk veya küme kuramsal realizm savunması kayda değerdir (Maddy, 1990: 177-181). Maddy'nin çalışmalarında, öne çıkan önemli bir husus, küme kuramı aksiyomlarının altında yatan inançların ne olduğudur.[36]

Yakın zamanlarda dikkati çeken başka önemli çalışmalardan ikisi, Jody Azzouni'nin *Metaphysical Myths, Mathematical Practice* (1994) [Metafiziksel Mitler, Matematiksel Tecrübe] ve Mark Balaguer'ın *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics* (1998) [Matematikte Platonculuk ve Karşı-Platonculuk] adlı çalışmalarıdır. Değişik bakış açılarından iki yazarın iddiasına göre de, felsefî argümanlar,

---

Kitcher'ın *History and Philosophy of Modern Mathematics* (1988) [Modern Matematiğin Tarihi ve Felsefesi] adlı eserler; seksenli yıllarda basılan önemli eserlerden bir kısmıdır (Irvine, 1990: xii). Maddy'nin *Realism in Mathematics* (1990) [Matematikte Realizm]; Dummett'in *Frege: Philosophy of Mathematics* (1991) [Frege: Matematik Felsfesi]; Field'in *Realism, Mathematics and Modality* (1989) [Realizm, Matematik ve Modalite]; Chihara'nın *Constructibility and Mathematical Existence* (1990) [İnşa-edilebilirlik ve Matematiksel Varlık]; Helman'ın *Mathematics Without Numbers* (1989) [Sayılarsız Matematik]; Coffa'nın *The Semantic Tradition From Kant to Carnap* (1991) [Kant'tan Carnap'a Semantik Geleneği]; adlı eserler, doksanlı yıllarda basılan bahse değer eserlerden bir kısmıdır (Shapiro, 2000: 220).

36 Maddy, *Realism in Mathematics* (1990)'te savunduğu görüşlerin bir kısmını *Naturalism in Mathematics* (1997) [Matematikte Naturalizm]'te değiştirmiştir (Shapiro, 2000: 224).

37 Güzel bir özet için Shapiro (2000: 249-50)'nun 'Jöntürkler' (Young Turks) adlı bölümüne bakınız.

matematiksel nesnelerin, matematikçiden bağımsız olup olmadığına karar vermekte yetersizdir. Böylece, iki yazara göre, bu konu *aşkındır*.[37]

Frege'nin matematiğe yaklaşımını esas alan çalışmalar bugün de devam etmektedir. Crispin Wright, Bob Hale ve Neil Tennant'ın çalışmaları bu açıdan önemlidir. *Yeni-Mantıkçılık* şu iki önerme ile karşımıza çıkmaktadır: Birincisi, matematiğin önemli bir özü *a priori* olarak bilinebilir; ikincisi, bu matematik, ideal yani bizden bağımsız matematiksel nesneler ile ilgilenir. Yeni-Mantıkçılığa göre, "soyut gerçekliğin bilgisine nasıl ulaşırız?" sorusunun cevabı, matematiksel dili kullanırken demek istediğimiz hakkındaki bilgimizde yatar. Bu görüşler, matematiğin *a priori* olduğunu, nesnel doğrulara sahip olduğunu iddia eden geleneksel görüşe sahip ve fakat ontolojik realizmin karşılaştığı epistemolojik sorunlarla boğuşanlar için caziptir (Shapiro, 2000: 133).

Nihayetinde, matematik felsefesinin günümüzdeki durumuna bakılırsa, biri Frege'nin takipçilerinin matematik felsefesini matematiğin temelleri etrafında ele alan anlayış ve daha yeni ve daha az gelişmiş olan ve asıl sorunu matematiğin metodolojisi olan anlayış olmak üzere iki ana-akım olduğu söylenebilir. Bu iki anlayışın, nihai olarak uyuşup uyuşmadığı merak konusudur. Lakatos, matematiğin *a priori* bir temeli olmadığını iddia ederek çalışmalarını yürütmüştür. Parsons'un çalışmaları, matematiğe temel arama ve matematiksel bilginin gelişiminde ciddî sorunlar olduğu yolundaki uyuşmazlığı sorunsallaştırdığı için önemlidir. Kitcher de çalışmalarını, matematik için *a priori* bir temelin bulunmadığından hareketle yürütürken, Steiner ve Maddy gibi yazarlar, bu iki programın, nihaî olarak uyuşabileceğini iddia etmektedirler (Kitcher & Aspray, 1988: 19). Lakatos'un görüşlerinin takipçilerinden olan Tymoczko da, matematikçinin pratiğindeki yanılma ile ontolojik realizmin uyuşabileceği kanaatindedir (Tymoczko, 1998: xvi).

V- SONUÇ

Hersh, herhangi bir matematik felsefesi görüşünü sınamak için 7 hususa dikkat çeker (1995: 592). Matematiğin makul bir felsefî beyanı olduğu iddiasını taşıyan her felsefî ekol, bu soruların her birine tatmin edici cevaplar verebilmelidir:

1- Matematiği diğer beşerî bilgilerinden farklı kılan şeyler nelerdir,
2- Matematik ne hakkındadır veya matematiğin konusu nedir,
3- Matematik hakkında evrensele-yakın bir uzlaşım niçin vardır,
4- Matematiksel bilgiyi nasıl elde ederiz,
5- Matematikçinin sosyal olaylardan etkilenmesine rağmen, matematik niçin zaman, mekân, ırk gibi değişik unsurlardan bağımsızdır,
6- Sonsuz var mıdır,
7- Pür matematik, 'gerçek' dünyada nasıl bu kadar karşılık bulabilmekte ve kullanışlı olabilmektedir,

Bu soruların tümü, ne mantıkçılık ne sezgicilik ne de hümanizm veya başka bir felsefî ekol tarafından yetkin ve doyurucu bir şekilde cevaplanamamıştır. Bu yaklaşımların kimi bazı hususları açıklamada ötekilerden daha iyi olsa da, her biri kendi eksikliklerinden mahfuz değildir. Dolayısıyla, matematik felsefesindeki mevcut yak-

38 Hersh'in bu benzetmesi, Sibernetiğin kurucularından meşhur matematikçi Norbert Wiener'in (1894-1964) fizikçiler hakkındaki şu ifadesini çağrıştırır: "Modern fizikçi, Pazartesi, Çarşamba ve Cuma günleri, kuantum teorisyenidir. Salı, Perşembe ve Cumartesi günleri, yerçekimsel rölativite teorisinin öğrencisi olur. Pazar günü ise her ikisi de değildir. Tercihen kendisi olmak üzere, bir kişinin çıkıp bu iki görüş arasında bir bağlantı yakalaması için Tanrı'ya dua etmektedir."('http://math.furman.edu/~mwoodard/ascquotw.html', 14 Ağustos 2002)

laşımların her biri sadece sınırlı bir alanda tatmin edicidirler.

Bu 'parçalı' bakış açısının matematik felsefesindeki karşılığını ararsak, Hersh'in güzel bir şekilde ortaya koyduğu üzere, matematik dünyasındaki genel bir anlayış ile karşılaşırız. Bu anlayışa göre, matematikçi, hafta içi matematiksel çalışmalarını yürütürken Platoncu, hafta sonu ne ile uğraştığı sorusuna muhatap olunca ise, formalist (biçimci) olmaktadır.[38] Matematikçinin formalizme kaçışını, birazdan değineceğimiz zor sorulara cevap veremeyişle irtibatlandırır Hersh.

Eğer matematiksel nesneler bizden bağımsız olarak zaman ve mekân dışında var iseler, biz bunlar hakkında nasıl bilgi sahibi olabiliyoruz? Böyle bir âlem niye var, nasıl var? Hersh, "Matematik felsefesindeki, yakın zamanlarda karşılaşılan sorunlar, nihaî olarak dinin bilimden sürgün edilmesinin bir sonucudur." demektedir (1997: 122-135). Tanrı'nın varlığı ve ilmi kabul edildiğinde matematik felsefesini meşgul eden 'Sayılar nasıl vardır?', 'Matematiksel doğrular, niçin zamandan ve mekandan bağımsız görünmekteler?', 'Matematik "gerçek dünya"da niçin çalışır?' türü soruların tamamı yok olacaktır. Çünkü, Tanrı için bunlar sorun olamaz.

Aslında, matematiğin ontolojisi ile ilgili sorunlar çok çetindir. Öyle ki, dinin top yekûn bilimsel düşünceden silinmesi ile bazı matematikçiler için mistik inançlar devreye girmiştir. Burada, Macar Yahudilerinden Amerika'ya göç etmiş, 20. yüzyılın en üretken matematikçilerinden olan, Paul Erdös'e değinmek yerinde olur. Erdös, bir toplantıda matematiğin biz keşfetmeden önce var olup olmadığı sorununu hatırlattıktan sonra, bir kitaptan bahseder. Ona göre, *transfinit*[39] bir kitapta bütün güzel matematiksel ispatlar mevcuttur; Tanrı bazen matematikçi kullarına lütufta bulunup o kitabın bazı yapraklarını göstermektedir. Erdös, meslektaşlarının güzel bir

39 Bkz. 16. dipnot

ispat yapması karşısında iltifat için, 'doğrudan kitaptan' tabirini kullanırdı. Erdös'ün tanıtıldığı ve onun 'kitap' hakkındaki fikirlerinden bahsedildiği bir toplantıda, Erdös araya girmiş ve "Tanrı'ya inanmak zorunda değilsiniz ama Kitab'a inanmalısınız." demiştir (Hoffman, 1999: 23-24).

Toparlarsak, Hersh'e göre, yakın zamanlardaki matematik felsefesindeki ana sorun veya Platonculuğun sorunu, Tanrı düşüncesinin entelektüel dünyadan sürgün edilmiş olmasına rağmen, muazzam denebilecek matematiksel hakikatı Tanrı'nın zihninde tutmaya devam etmek istemesidir.

Bu yazıda özetlendiği üzere, son yıllarda matematik felsefesinde yaşanan canlanma ile birlikte, birçok yeni eğilim ortaya çıkmıştır. Lakatos'un matematiği ispat-çürütme ikilisi içerisinde açıklama çabası; Hersh'in matematiği beşerî bir ürün olarak sunması; Shapiro ve Resnik'in yapısalcılık açıklamaları; sayıların varlığını inkâr eden nominalistler; Kitcher, Maddy'nin naturalizmi bunlardan bir kaçıdır.

Matematiğe klâsik yaklaşımların sınırlılıklarını aşma çabası olarak ortaya çıkan bu çabalardan her birinin geleceği meçhuldür. Ne var ki, bu çabaların izi, Benacerraf'ın dikkat çektiği kabul edilebilir bir semantik veya epistemoloji arayışlarından birini veya ikisini aşmaya dönük çabalar olarak da görülebilirler. Bu çalışmalar, aynı zamanda, matematikçinin hafta içi 'platoncu' hafta sonu biçimci olması problemini de aşmaya dönük sayılır. Fakat bu problemlerin çözüldüğünü söyleyebilme lüksünden hâlâ yoksunuz. II. Dünya Savaşı ile Amerikan matematiğinde tırmanışa geçen uygulamalı matematiğin 'gerçek' hayatta daha çok kullanılması ise, matematik felsefesinin en çetin sorularından olan matematiğin dış dünyada 'akıl almaz' uygulanabilirliliği sorununa daha fazla dikkat çekmekten öte net bir çözüm sunamamıştır. Uygulamalı matematik, hem matematik hem de matematik felsefesi içinde ciddî bir yer teşkil etmektedir artık.

Matematikçiler matematiksel hakikatin bizim dışımızda var olduğu inancını sürdürmektedirler. Tanrı hâlâ sevgili matematikçi kullarına 'kitap'tan ispat yaprakları göstermeye devam etmektedir. İşin ironik tarafı da vardır: Son yıllarda, birçok filozof-matematikçi tarafından, matematikçinin pratiğine daha çok dikkat çekildiği hâlde, matematikçinin pratiğinde bu 'mistik' inanışın sürdürüldüğüne, metafizikten kaçınma tavrından dolayı az dikkat çekiliyor.

Şüphesiz ki, matematik felsefesi gelişmeye devam edecektir. Öyle görünüyor ki, ontolojik olarak sayıların varlığını inkâr edenler bir uçta, bunları varlığın başka bir türü olarak görmeye devam edenler öteki uçta olmak üzere matematikçi ve filozoflar yerlerini bu iki uç arasında almaya devam edecekler. Bu gelişmelerin yönü ne olursa olsun, matematiğin doğruluk iddiası devam ettikçe, uygulamalı matematiğin doğada karşılık bulması şeklindeki 'akılsız'lık zihinleri uğraştırmaya devam ettikçe, matematikçi işinden haz alarak bu işi sürdürdükçe, bütün çağlarda felsefi bir merak matematiğe eşlik edecektir.

Referanslar

Aczel, Amir D. (2000). *The Mistery of the Aleph: Mathematics, The Kabbalah, and The Search for Infinity*. New York: Four Walls Eight Windows.

Barker, Stephen F. (1964). *Philosophy of Mathematics*. Prentice-Hall, Inc.

Barrow, John D. (2001). *Gökteki Pi: Saymak, Düşünmek ve Olmak*. Çev. İ. Güpgüpoğlu & İ. Karman. İstanbul: Beyaz Yayınları.

Bell, Eric T. (1937). *Men of Math*, Simon and Schuster, New York.

Benacerraf, Paul & Putnam, Hilary (Ed.) (1964). *Philosophy of Mathematics; Selected Readings*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Bernays, Paul (1935). "On Platonism in Mathematics". 274-86 Benacerraf & Putnam içinde.

Brown, James Robert (1999). *Philosophy of Mathematics: An Introduction to the World of Proof and Pictures*. Routledge.

Davis, Philip J. & Hersh Reuben (1981). *The Mathematical Experience*. Birkhauser.

Ernest, Paul (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. State University of New York Press; Albany.

Greenberg, Marvin Jay (1980). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. W.H. Freeman and Company, New York.

Gödel, Kurt (1961). "The Modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy". *Collected Works*, Volume III (1961), Oxford University Press, 1981.
http://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/

Hardy, G.H. (1993). *A Mathematician's Apology*. Cambridge University Press: 1993

Hempel, Carl G. (1945). "On the Nature of Mathematical Truth". 366-81 Benacerraf & Putnam içinde.

Hersh, Reuben (1979). "Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics". 9-28 Tymoczko içinde.

Hersh, Reuben (1995). "Fresh Breezes in the Philosophy of Mathematics". *American Mathematical Monthly*. Volume 102, Number 7. 589-594.

Hersh, Reuben (1997). *What is Mathematics, Really?* New York: Oxford University Press.

Hilbert, David (1925). "On the Infinite". 134-151 Benacerraf & Putnam içinde.

Hoffmann, Paul (1999). *Yalnızca Sayıları Seven Adam: Paul Erdös'ün Hikayesi ve Matematiksel Hakikat Arayışı*, çev. D. Kömürcü, İstanbul, Sistem Yayıncılık:

Ibn Khaldun (1958). *The Muqaddimah: An Introduction to History*. Trans. By Franz Rosenthal. Pantheon Books. v3.

Irvine, A. D. (1990). "Introduction: Nominalism, Realism & *Physicalism in Mathematics*"; (Ed.) Physicalism in Mathematics, Kluwer Academic Publishers. ix-xxvi.

Joseph, G.G. (1992). *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*. Penguin.

Kitcher, Philip & Aspray, William (1988). "An Opinionated Introduction", (Ed.)

History and Philosophy of Modern Mathematics, University of Minnesota Press, Minneapolis. 3-57.

Körner, Stephan (1986). *The Philosophy of Mathematics: An Introductory Essay*. New York: Dover Publications.

Lacey, A. R. (1999). *A Dictionary of Philosophy*. Barnes & Noble.

Lakatos, Imre (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge University Press.

Maddy, Penelope (1990). *Realism in Mathematics*. New York: Oxford University Pres.

Monastyrsky, Michael (1998). *Modern Mathematics in the Light of the Fields Medals*. AK Peters, Ltd. Wellesley, Massachusetts.

Penrose, Roger (1989). *The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds, and The Law of Physics*. Oxford University Press.

Poincaré, Henri (1905). *Science and Hypothesis*. The Walter Scott Publishing Co.

Rashed, Roshdi (2000). "Al-Sijzi and Maimonides: A Mathematical and Philosophical Commentary on Proposition II-14 in Apollonius' *Conic Sections*."; *Maimonides and the Sciences*, (Eds.) R. S. Cohen & H. Levine, Kluwer Acdemic Publishers. 159-172

Resnik, Michael D. (1981). `Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference', *Nous* 15: 529-50.

Rucker, Rudy (1983). *Infinity and the Mind: The Science and the Philosophy of Infinite*. New York: Bantam Books.

Shapiro, Stewart (2000). *Thinking About Mathematics: Philosophy of Mathematics*. New York: Oxford University Press.

Struik, Dirk J. (1967). *A Concise History of Mathematics*. New York: Dover.

Tymoczko, Thomas (1998) (Ed.). *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

von Neumann, John (1964). "The Formalist Foundations of Mathematics" 50-54 Benacerraf & Putnam içinde.

Yıldırım, Cemal (2000). *Matematiksel Düşünme*. 3. Basım. Remzi Kitabevi.

I. MATEMATİĞİN TEMELLERİ

MATEMATİKSEL FELSEFEYE GİRİŞ'TEN SEÇMELER*

Bertrand Russell
Çev. Muharrem Özlük

DOĞAL SAYILAR DİZİSİ

MATEMATİK, en aşina olduğumuz kısımlarından başladığımız zaman, bizi iki zıt yönden birine götüren bir çalışmadır. En aşina olduğumuz yön, tamsayılardan kesirlere, reel sayılara, karmaşık sayılara, toplama ve çarpmadan türev ve integrale ve daha yüksek matematiğe tedricen artan bir karmaşıklığa doğru olan yöndür. Daha

* Russell, Bertrand, *Introduction to Mathematical Philosophy*. New York: Dover Publications, Inc., 1993. 1-19, 194-206.

az aşina olduğumuz diğer yön, analiz yoluyla git gide daha soyut ve mantıksal basitliğe doğru ilerleyen yöndür; başlangıç olarak kabul edilenden neyin çıkarılabileceği veya çıkarılamayacağı, hangi genel kanı ve ilkeler elde edilebilir türü sorular sorulur. Matematiksel felsefenin temel niteliği, sıradan matematiğin aksine, bu karşıt yönün izlenmesinin neticesidir. Fakat şurası anlaşılmalıdır ki, farklılık (bir yerdedir ve) konuda değil araştırıcının zihnî durumundadır. İlk Yunan geometricileri, Mısırlıların arazi ölçümlerinin tecrübî ilkelerinden, bu ilkeleri makul gösteren genel önermelere ve buradan Öklit'in aksiyom ve postulatlarına geçerek yukarıdaki tanım itibariyle matematiksel felsefe içine girmişlerdir. Fakat bir kere bu aksiyom ve postulatlara ulaşıldıktan sonra Öklit'te de olduğu gibi çıkarım işi sıradan matematiğe ait olmuştur. Matematik ve matematiksel felsefe arasındaki ayrım, araştırmayı ilgilendiren önermelere değil araştırmaya sevk eden ilgiye ve araştırmanın ulaştığı dereceye bağlıdır.

Aynı ayrımı farklı bir şekilde de ifade edebiliriz. Matematikte, belli ve kolay olan şeyler mantık olarak başta gelenler değil, mantıksal tümdengelim açısından bakıldığında ortalarda bir yerlerde olanlardır. Görünmesi en kolay olan cisimlerde olduğu gibi ne çok uzak, ne çok küçük ne de çok büyük; bu nedenle kolaylıkla anlaşılan kavramlar ne çok karmaşık ne de çok basit (mantıksal bakımdan "basit") olmuştur. Görsel gücümüzün arttırılması için teleskop ve mikroskop gibi iki çeşit araca ihtiyacımız olduğu gibi, mantık sınırlarımızın genişletilmesi için de iki çeşit araca ihtiyacımız vardır. Biri bizi yüksek matematiğe götürürken diğeri geriye doğru, matematikte peşinen kabul etmeye meyilli olduğumuz şeylerin mantıksal temellerine götürür. Biz içyüzünü iyi bildiğimiz sıradan matematik kavramlarını inceleyerek yeni silahlara ve bu gerisin geriye yaptığımız yolculuğun ardından yeni genişleme sınırları benimseyerek bütünüyle yeni matematik konularına ulaşım araçlarını bulmalıyız. Bu kitabın [*Matematiksel Felsefeye Giriş*] amacı, matematiksel felsefeyi

basit olarak ve teknik olmadan; muğlak olan veya temel düzeyde çalışılması hemen hemen mümkün olmayacak derecede zor olan bölümleri, genişletmeden açıklamaktır. Tam bir açıklama, *Principia Mathematica*'da[1] bulunabilir, elinizdeki bu çalışmanın sadece bir giriş olması amaçlanmıştır.

Günümüzde orta düzeyde eğitilmiş birine göre matematiğin en bariz başlangıç noktası tamsayılar olacaktır.

1, 2, 3, 4, ... vs.

Belki, ancak biraz matematik bilgisine sahip biri, 1 yerine 0'dan başlamayı düşünecektir. Fakat biz bu bilgi düzeyini esas alacağız; başlangıç düzeyi olarak şu diziyi ele alalım.

0, 1, 2, 3, ... n, n+1, ...

Ayrıca, 'doğal sayılar dizisi'nden bahsederken bu diziyi kastedeceğiz.

Anca yüksek bir medeniyet seviyesinde bu seriyi başlangıç olarak alabilmişizdir. Sülünün ayaklarının ve bir çift günün, 2 sayısının bir ürünü olduğunu keşfetmek asırlar gerektirmiş olmalıdır; yapılan soyutlamaların derecesi kolay olmaktan uzaktır. Dahası, 1'in bir sayı olduğunun keşfi zor olmuş olmalıdır. 0'a gelince, o, çok yakın bir zamanın katkısıdır; Yunanlı ve Romalıların böyle bir rakamı yoktu. Daha önceleri matematiksel felsefe gemisine binmiş olsaydık, doğal sayılar serisinden daha az soyut ve gerisin geriye yaptığımız yolculukta bir basamak olarak ulaşabileceğimiz, bir şeyle başlamak zorunda kalırdık. Hâlihazırda, analizde son safha olan matematiğin mantıksal temellerine aşinalığımız arttıkça, daha gerisi için başlayabileceğiz. Şu an için doğal sayılar matematikte en kolayı ve en bilindiği temsil eder görünmektedir.

1 Russell ve Whitehead, Cambridge University Press. 1. cilt, 1910; 2. cilt, 1911; 3. cilt, 1913.

Fakat bilindik olmasına rağmen anlaşılmış değildir. Çok az insan "sayı" veya "0" veya "1" kelimeleriyle ne kastedildiğinin tanımını yapabilmektedir. Herhangi bir doğal sayıya, 0'dan başlayarak sürekli 1 ekleyerek ulaşabileceğini görmek hiç de zor değildir. Fakat bizler, "1 ekleme" ve "sürekli" ile ne kastettiğimizi tanımlamak zorundayız. Bunlar, hiçbir şekilde kolay değildir. Şimdiye kadar, aritmetiğin ilk kavramlarından en azından bazılarının tanımlanmayacak derecede basit ve primitif olduğunun kabul edilmesi gerektiğine inanılıyordu. Şimdiye değin tanımlanmış bütün terimler, başka terimler arcılığıyla tanımlandığından, kendi tanımları için bir başlangıç noktasına sahip olabilmek için açıktır ki, insan bilgisi her zaman için bazı terimleri, tanımı olmaksızın anlaşılır kabul etmek durumundadır. Tanımlanmaktan aciz terimlerin var olma zorunluluğu açık değildir; tanımlamalarda ne kadar ileri gidersek gidelim, her zaman için daha da ileri gidebilmek mümkündür. Diğer taraftan yine mümkündür ki, analizimiz yeterince ilerlediğinde, gerçekten basit ve dolayısıyla mantık olarak analizde bulunan tanımlama çeşitlerine elverişli olmayan terimlere ulaşabiliriz. Bu mesele üzerinde karar vermek mecburiyetinde değiliz; amaçlarımıza göre şunu gözlemlemek yeterlidir: İnsanın gücü sonlu olduğundan, bildiğimiz tanımlar, devamlı surette olmasa da şu an için tanımlanmamış terimlerle bir yerlerden kesinlikle başlamak zorundadır.

Analitik geometri dahil, geleneksel pür matematiğin tamamının, tamamen doğal sayılar üzerine önermelerden oluştuğu düşünülebilir. Demek istediğim, kullanılan terimler doğal sayılarda tanımlanabilir ve önermeler doğal sayıların özelliklerinden –her iki durumda da pür mantığın önerme ve fikirlerinin eklenmesiyle- çıkarılabilir.

Geleneksel pür matematiğin tümünün doğal sayılardan çıkarılabileceği uzun zamandır şüphelenilmesine karşın oldukça yeni bir keşiftir. Matematiğin 'aritmetikselleştirilmesinin' önündeki en ciddî engelin kâşifi Pisagor, sadece matematiğin değil her şeyin sayılardan çıkarılabileceğine inanıyordu. Ölçülemezlerin varlığını

keşfeden, özellikle de, karenin kenarının ve köşegeninin ölçülemezliğini bulan Pisagor'dur. Bir kenarı 1 cm olan karenin köşegenindeki santim sayısı, sayıya dahi benzemeyen, karekök 2'dir. Buradan kaynaklanan problem günümüzde çözülmüştür; ileriki bölümlerde açıklanacağı üzere, aritmetiğin mantığa indirgenmesi yardımıyla anca ve *tamamen* çözülmüştür. Çok büyük öneme haiz olağanüstü bir başarı olmasına rağmen, matematiğin aritmetikselleştirilmesini şu an için öylece kabul edeceğiz.

Bütün geleneksel pür matematiği doğal sayılar teorisine indirgedikten sonra mantıksal analizde atılacak adım, bu teoriyi kendisinden türetebilecek en küçük öncüller ve tanımlanmamış terimler kümesine indirgemekti. Bu iş, Peano tarafından gerçekleştirildi. O, tüm doğal sayılar teorisinin pür mantıktakilere ek olarak üç temel düşünce ve beş temel önermeden çıkarılabileceğini göstermiştir. Bu üç düşünce ve beş önerme böylece, daha önce olduğu gibi, geleneksel pür matematiğin bütününün ayakları oldu. Eğer bunlar başka terimlerle tanımlanabilseydi veya ispatlanabilseydi, aynı şekilde bütün pür matematik de olabilirdi.

Bunun, tabiri caizse, mantıksal "ağırlığı," doğal sayılar teorisinden çıkarılan bütün bilimlerinkine eşittir; bütün bu bilimlerin doğruluğundan, eğer bu beş önermenin doğruluğu garanti edilirse ve elbette kullanılan bütünüyle mantıksal aletlerde de hatalı hiçbir şey yoksa, emin olunabilir. Peano'nun bu çalışmasıyla matematiğin analizi olağanüstü kolaylaşmıştır.

Peano'nun aritmetiğindeki üç temel düşünce şunlardır:

0, sayı , halef (ardıl).

"Halef" kelimesiyle doğal sırlamada bir sonraki sayı kastedilmektedir. Yani 0'ın halefi 1'dir, 1'in halefi 2'dir vesaire. Sayı kelimesi bu bağlamda, doğal sayılar sınıfını kastetmektedir.[2] Peano, bu sınıf

2 Bu bölümde "sayı" kelimesini bu anlamda kullanacağız. Sonraları kelime daha genel anlamda kullanılacaktır.

fın bütün elemanlarını bildiğimizi farz etmiyor; fakat bütün insanları teker teker bilmememize rağmen "Jones bir insandır," dediğimiz zaman ne kastettiğimizi bildiğimiz gibi şu veya bu bir sayıdır dediğimiz zaman da kastedileni bildiğimizi var sayıyor.

(1) 0 bir sayıdır.

(2) Herhangi bir sayının halefi yine bir sayıdır.

(3) Aynı halefe sahip iki sayı yoktur.

(4) 0 hiçbir sayının halefi değildir.

(5) 0'a ait herhangi bir özelliğe, bu özelliğe sahip bütün sayıların halefleri de sahip ise, bütün sayılar bu özelliğe sahiptir.

Bu ilkelerden sonuncusu matematiksel tümevarım ilkesidir. Sırada matematiksel tümevarımla ilgili söyleyeceğimiz çok şey var; ama şimdilik sadece Peano'nun aritmetik analizinde geçtiği kadarıyla yetineceğiz.

Şimdi kısaca doğal sayılar teorisinin ne şekilde bu üç düşünce ve beş önermeden çıkarıldığını ele alalım. Başlangıç olarak, 1'i "0'ın halefi" olarak, 2'yi "1'in halefi"olarak, vb. tanımlayalım. Gayet açıktır ki, bu tanımlamalarda istediğimiz kadar ilerleyebiliriz; çünkü (2) nedeniyle ulaştığımız her sayının bir halefi olacaktır ve (3) nedeniyle bu, henüz tanımlanmış olan sayılardan hiçbiri olamaz, ki eğer olsaydı iki farklı sayı aynı halefe sahip olacaktı ve (4) nedeniylede halef serisinde ulaştığımız sayılardan olmayan hiçbiri 0 olamaz. Böylece halef serisi bize devamlı surette yeni sayılardan oluşan sonu olmayan bir seriyi verir. (5) nedeniyle bütün sayılar, 0'dan başlayan ve ardı ardına gelen haleflerle devam eden bu serinin içerisinde yer almaktadır; çünkü,

(a) 0 bu seriye aittir.

(b) Bir n sayısı buna ait ise, halefi de aittir,

Dolayısıyla matematiksel tümevarıma göre, her sayı bu seriye aittir.

Diyelim ki, iki sayının toplamını tanımlamak istiyoruz. Herhangi bir m sayısı alalım, m+0'ı, m olarak ve m+(n+1)'i, m+n'nin halefi

olarak tanımlayalım. *n* sayısı hangi sayı olursa olsun, (5) nedeniyle bu *m* ve *n*'nin toplamının tanımını verir. Aynı şekilde herhangi iki sayının çarpımını da tanımlayabiliriz.

Okuyucu aritmetiğin herhangi bir sıradan temel önermesinin bu beş öncülümüzle ispatlanabileceğine kolaylıkla ikna olabilir ve eğer bir zorlukla karşılaşırsa ispatını Peano'da bulabilir.

Peano'nun bulunduğu noktanın daha ilerisine gitmeyi gerekli kılan görüşleri matematiğin aritmetikselleştirilmesinin nihaî mükemmeliyetine ulaştıran kişinin, matematiği mantıksallaştırmayı yani kendinden öncekilerin matematik için yeterli olduğunu gösterdikleri aritmetik kavramlarını mantığa indirgemeyi başaran ilk kişinin yani Frege'nin görüşlerine dönme zamanıdır. Bu bölümde Frege'nin yaptığı sayı tanımını ve bazı özel sayıların tanımını vermeyeceğiz. Fakat Peano'nun yaptığı işin, neden görüldüğü gibi bir son olmadığının bazı sebeplerini vereceğiz.

İlk olarak Peano'nun 3 temel düşüncesi- şöyle ki "0", "sayı" ve "halef"–üzerine sonsuz sayıda değişik yorum getirilebilir. Hepsi de beş temel önermeyi sağlayacaktır. Birkaç örnek verelim.

(1) "0" 100 anlamına ve "sayı" doğal sayılar serisinde 100'den itibaren olan sayılar anlamına gelsin. Şu hâlde, bütün temel önermelerimiz sağlanmaktadır, dördüncüsü de dahil; çünkü 100, 99'un halefi olmasına rağmen 99 halihazırda "sayı" kelimesine biçtiğimiz anlamda "sayı" değildir. Aşikârdır ki, bu örnekte 100 yerine herhangi bir sayı yerleştirilebilir.

(2) "0" her zamanki anlamını yüklensin, fakat "sayı", "çift sayılar" anlamına gelsin ve bir sayısının "halefi" de ona eklendiğinde oluşan sayı olsun. Şu hâlde 1, iki sayısının yerini; 2, dört sayısının yerini vesaire tutacaktır; "sayılar" serisi de şu şekilde olacaktır:

0, iki, dört, altı, sekiz, ...

Peano'nun beş öncülü hâlâ sağlanmaktadır.

(3) "0" bir sayısı anlamına, "sayı"

1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, ...

kümesi anlamına ve "halef" "yarı" anlamına gelsin. Şu hâlde, Peano'nun beş kabulünün tamamı bu kümenin doğruları olacaktır.

Açıktır ki, bu tür örnekleri istediğimiz kadar katlayabiliriz. Aslında, bize sonsuz, hiçbir tekrar içermeyen, başlangıcı olan, başlangıçtan itibaren sonlu sayıda adımla erişilemeyen terim içermeyen herhangi bir

$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$

serisi verilse de Peano'nun kabullerini sağlayan bir terimler kümesi elde ederiz. Kurallara uygun ispatı az çok uzun olmasına rağmen bu kolayca görülür. "0", x_0 anlamına gelsin, "sayı" terimler kümesinin tümüne karşılık gelsin ve x_n'in "halefi", x_{n+1} anlamına gelsin. Şu hâlde,

(1) "0, bir sayıdır"; yani x bu kümenin elemanıdır.

(2) "Herhangi bir sayının halefi yine bir sayıdır"; yani kümeden herhangi bir x_n terimi alırsak, x_{n+1} de bu kümede olacaktır.

(3) "Aynı halefe sahip olan herhangi iki sayı yoktur"; yani x_m ve x_n kümenin iki farklı elemanıysa, x_{m+1} ve x_{n+1} farklıdır. Bu, şundan kaynaklanır (hipotez itibariyle), kümede herhangi bir tekrar yoktur.

(4) "0, herhangi bir sayının halefi değildir"; yani kümede x_0'dan önce gelen hiçbir terim yoktur.

(5) Bu da, x_0'a ait herhangi bir özellik ve x_n'e de ait olmak şartıyla x_{n+1}'de bulunuyorsa, bu özellik bütün x'lere aittir, biçimine gelir.

Bu, sayıların karşılıklı benzer özelliklerinden kaynaklanmaktadır.

$x_0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$

biçimindeki, ilk terimi olan, her terimin halefi bulunan (dolayısıyla bir son terimi yoktur), tekrarsız ve her terime başlangıçtan itibaren sonlu sayıda adımda ulaşılabilen bir seriye *dizi (progression)* denir. Matematiğin temellerinde dizinin önemi büyüktür. Biraz önce

de gördüğümüz gibi, her dizi Peano'nun beş kabulünü sağlamaktadır. Tersi durumda da Peano'nun beş kabulünü sağlayan her serinin bir dizi olduğu ispatlanabilir. Dolayısıyla bu beş kabul, dizilerin sınıfını tanımlamak için kullanılabilir: "Diziler", "bu beş kabulü sağlayan serilerdir". Herhangi bir dizi pür matematiğin temeli olarak alınabilir: İlk terimi "0" olarak, kümenin bütün terimlerini "sayı" olarak ve dizide bir sonrakini "halef" olarak adlandırabiliriz. Dizi sayılardan oluşmak zorunda değildir; uzaydaki noktalardan veya zamandaki anlardan veya sonsuz miktarda bulunan başka terimlerden oluşturulabilir. Her başka dizi, geleneksel pür matematiğin bütün önermelerinin değişik yorumlanmalarına sebep olmaktadır; bütün bu olası yorumlar aynı derecede doğru olacaktır.

Peano'nun sisteminde onun temel düşünceleri üzerine yapılan değişik yorumları birbirinden ayırmaya olanak tanıyan hiçbir şey yoktur. "0" ile ne kastedildiğini bildiğimiz farz edilmiştir ve de bu simgenin 100 anlamına veya Cleopatra'nın iğnesi anlamına geleceğini farz etmeyeceğimiz öngörülmüştür.

Bu nokta, yani "0", "sayı" ve "halef" kelimelerinin, Peano'nun beş kabulü yardımıyla tanımlanamaması ve bunlardan bağımsız olarak yorumlanmak zorunda olması önemlidir. Biz sayılarımızın sadece matematik formüllerini sağlamasını değil, doğru bir şekilde sıradan nesnelere de uygulanmasını istiyoruz. Biz on parmağımız, iki gözümüz ve bir burnumuz olsun istiyoruz. "1"in 100 anlamına geldiği ve "2"nin 101 anlamına geldiği ve benzeri gibi bir sistem soyut matematik için bir sorun teşkil etmeyebilir; fakat gündelik hayata uygun olmayacaktır. Biz "0", "sayı" ve "halef" kelimelerinin öyle anlamları olsun istiyoruz ki, bize parmaklarımızın, gözlerimizin ve burnumuzun doğru aynımını versin. Bizim halihazırda "1", "2" ve benzerleriyle ne kastedildiğine dair (yeterince anlaşılır ve çözümlemeci olmasa da) biraz bilgimiz var; dolayısıyla sayıların aritmetikteki kullanılışı bu bilgilerimizle uyuşmalıdır. Bunun Peano'nun yöntemi ile olacağını garanti edemeyiz; bizim tüm yapabileceğimiz,

eğer onun yöntemini benimsersek, "diğer daha basit kavramlar ile ne kastettiğimizi açıklayamasak da, biz '0', 'sayı' ve 'halef' kelimeleriyle ne kastettiğimizi biliyoruz" demek olur. Mecbur kaldığımız zaman- ki, bir yerde hepimiz mecbur kalacağız- bunu söylemek gayet makul olmaktadır. Fakat bu söylemi mümkün olduğunca geciktirmek, matematiksel felsefenin amacıdır. Aritmetiğin mantık teorisi ile de bunu çok uzun bir süre için geciktirebiliriz.

"0", "sayı" ve "halef" terimlerini tanımlayamasak da, anlamlarını bildiğimiz terimler olarak oluşturmak yerine, bunları Peano'nun beş kabulünü sağlayan *herhangi* üç terim olarak bırakabilirdik, şeklinde bir tavsiyede bulunulabilir. Bunlar, artık tanımlanmamış olmasına rağmen, belli anlamları olan terimler olmayacaklardır; onlar "değişken", belli hipotezleri, yani beş kabulle belirtilenleri oluşturmakta kullanılan terimler olacaklardır. Fakat diğer türlü, belirsizdirler. Eğer bu planı benimsersek, "doğal sayılar" denen emin olduğumuz terimler kümesi ile ilgili teoremlerimizi değil, belli özellikleri olan terimlerin kümelerinin hepsi ile ilgili olanlar ispatlanacaktır. Böyle bir yöntem aldatıcı değildir; aksine belli amaçlar için değerli bir genellemeyi temsil etmektedir. Fakat iki açıdan aritmetiğe yeterli bir temel teşkil edememektedir. Birincisi, bu bizi Peano'nun kabullerini sağlayan herhangi bir terimler kümesinin olup olmadığı bilgisine sahip kılmıyor, böyle kümelerin olup olmadığının keşif yolları üzerine en ufak bir imada dahi bulunmuyor. İkincisi, biraz önce görüldüğü üzere, biz sayıların bildik şeneleri saymada kullanılabilecek şekilde olmasını istiyoruz ve bu sadece belli şekildeki özellikleri olmasından ziyade, sayılarımızın *kesin* anlamlı olmalarını gerektirir. Bu kesin anlam, aritmetiğin mantık teorisi ile tanımlanmıştır.

SAYININ TANIMI

"Sayı nedir?" sorusu sıkça sorulmuş bir sorudur. Fakat sadece bizim zamanımızda doğru olarak cevaplanmıştır. Cevap, 1884'te Frege

tarafından, onun *Grundlagen der Arithmetik*'inde verilmiştir.[3] Bu kitap, oldukça kısa, zor olmayan ve çok büyük öneme haiz olmasına rağmen, hemen hemen hiç dikkat çekmemiştir. Ayrıca, 1901'de bu satırların yazarı tarafından tekrar keşfedilene kadar içerdiği sayı tanımı fiiliyatta meçhul olarak kalmıştır.

Sayının tanımını ararken açık olması gereken ilk şey, araştırmamızın dilbilgisi diyebileceğimiz şeydir. Çoğu filozof sayıyı tanımlamaya teşebbüs ettiği zaman, gerçekte, oldukça farklı bir şey olan çokluğu tanımlamaya girişmiştir. *İnsan*, insanların tipik özelliği olduğu gibi, *sayı da* sayıların tipik özelliğidir. Bir çokluk sayının değil belli bazı sayıların getirisidir. Meselâ, bir insan üçlüsü 3 sayısının bir özelliğidir ve 3 sayısı sayının bir örneğidir; fakat üçlü, sayının bir getirisi değildir. Bu nokta temel ve hemen hiç bahse değer görünmeyebilir, fakat birkaç istisna dışında filozoflar için çözümünün çok zor olduğu ispatlanmıştır.

Belli bir sayı, bu sayıyı içeren herhangi bir terimler koleksiyonuyla özdeş değildir: 3 sayısı Brown, Jones ve Robinson'dan oluşan üçlü ile özdeş değildir. 3 sayısı, bütün üçlülerde ortak olarak bulunan ve bunları diğer seçmelerden ayıran bir şeydir. Bir sayı, belli seçmeleri, yani o sayıya sahip olanları niteleyen bir şeydir.

"Koleksiyon" yerine, kural olarak, "sınıf" veya bazen "küme" demeliyiz. Matematikte aynı şey için kullanılan başka kelimeler de, "toplam [:aggregate]" ve "çok-katlı [:manifold]"dır. Daha sonra sınıflar üzerine çok şey söyleyeceğiz. Şimdilik mümkün olduğu kadar kısa değineceğiz. Fakat bazı noktalar da var ki, hemen belirtilmesi gerekiyor.

Bir sınıf veya koleksiyon ilk bakışta oldukça farklı görünen iki yolla tanımlanabilir. Elemanlarını sayabiliriz; "kastettiğim koleksi-

3 Aynı cevap, onun *Grundgesetze der Arithmetik* (cilt I, 1893)'inde daha bütün ve daha açıklamalı olarak verilmiştir.

yon Brown, Jones ve Robinson'dur," dediğimiz zaman olduğu gibi. Veya "insanoğlu" veya "Londra'nın sakinleri"nde olduğu gibi bir tanımlayıcı özellik belirtebiliriz. Sayımı gerektiren tanıma "genişletme [extension]" ile yapılan tanım; tanımlayıcı özelliğin ifade edildiği tanıma "yoğunlaştırma [intension]" ile yapılan tanım denir. Bu iki tanımdan "yoğunlaştırma" ile yapılanı mantıken daha esastır. Bu, iki şey göz önüne alınarak gösterilebilir:

(1) Genişletme ile yapılan tanım her zaman için yoğunlaştırma ile yapılana indirgenebilir,

(2) Yoğunlaştırma ile yapılan tanım çoğunlukla teorik olarak dahi genişletme ile yapılan tanıma indirgenemiyor.

Her iki noktanın da bir iki kelimelik izaha ihtiyacı var.

(1) Brown, Jones ve Robinson'ın her biri bütün evrende başka hiçbir şeyde bulunmayan belli bir özelliğe sahiptir; yani Brown veya Jones veya Robinson'dan biri olma özelliği. Bu özellik, Brown, Jones ve Robinson'dan oluşan sınıfın yoğunlaştırma yolu ile yapılan bir tanımını vermekte kullanılabilir. Şöyle bir formülü ele alalım: "x Brown'dur veya x Jones'tur veya x Robinson'dır." Bu formül sadece üç x için yani Brown, Jones ve Robinson için doğru olacaktır. Bu şekliyle üç kökü olan kübik bir denkleme benzemektedir. Bu, üç insandan oluşan sınıfın elemanlarına has ortak bir özellik tayini olarak alınabilir. Benzer bir işlem genişletilmiş olarak verilmiş herhangi bir sınıfa kolaylıkla uygulanabilir.

(2) Açıktır ki, fiiliyatta elemanlarını numaralandıramasak da, sınıf hakkında çoğu zaman büyük miktarda bilgi sahibi olabiliriz. Gerçekte hiçbir insan bütün insanları veya sadece Londra'nın sakinlerini sayamaz; bu sınıfların her biri hakkında çok miktarda şey bilinse bile. Bu kadarı, bir sınıf hakkında malumat için genişletme yoluyla yapılan tanımın gerekli olmadığını göstermek için yeterlidir. Fakat sıra sonsuz sınıfları göz önüne almaya geldiğinde, numaralandırmanın sadece sonlu bir zamanda yaşayanlar için teorik olarak bile mümkün olmadığını görürüz. Bütün doğal sayıları sayamayız;

onlar 0, 1, 2, 3 ve diğerleridir. Bir noktada kendimizi "ve diğerleri" ile sınırlandırmalıyız. Bütün kesirleri veya bütün köklü ifadeleri veya herhangi bir sonsuz seçmenin hepsini sayamayız. Dolayısıyla bunun gibi bütün seçmeler üzerine bilgimiz sadece yoğunlaştırma yoluyla yapılan bir tanımlamadan çıkarılabilir.

Bu bilgiler sayının tanımını aramamızla üç farklı şekilde ilgilidir. Birincisi, sayıların kendileri bir sonsuz koleksiyon oluştururlar ve dolayısıyla numaralandırma yoluyla tanımlanamazlar. İkincisi, belli sayıda terimlerden oluşan seçmelerin kendileri, ola ki, sonsuz bir koleksiyon oluşturur; meselâ, şunu farz edebiliriz: Dünyada üçlülerden oluşan sonsuz koleksiyon vardır; aksi durumda, mümkün olmasına rağmen, öyle görünmeyen dünyadaki nesnelerin toplam sayısı sonlu olur. Üçüncüsü, "sayı"yı öyle bir şekilde tanımlamak istiyoruz ki, sonsuz sayısı mümkün olabilsin. Böylece sonsuz bir koleksiyondaki terim sayısından bahsedebilelim; dahası böyle bir koleksiyon yoğunlaştırma yoluysa yani bütün elemanlarıyla ortak ve onlara has bir özellik ile tanımlanmalıdır.

Birçok amaç için bir sınıf ve bunun tanımlayıcı özelliği fiiliyatta birbiri yerine kullanılabilir. İkisi arasındaki en önemli fark şu gerçeğin içindedir: Verilen bir küme elemanlarını içeren sadece bir sınıf vardır; hâlbuki, her zaman için onunla verilen bir sınıfın tanımlanabileceği birçok farklı nitelik vardır. İnsan, tüysüz iki ayaklılar olarak veya akıllı hayvanlar olarak veya (daha doğrusu) Swift'in Yahoo'ları[4] tanımlamak için kullandığı hususiyetler cinsinden tanımlanabilir. İşte bu tanımlayıcı niteliğin hiçbir zaman tek olmaması gerçeğidir sınıfları kullanışlı yapan; diğer türlü elemanlarına özgü ve ortak olan özelliklerle sınırlı kalabiliriz.[5] Bu özelliklerin her hangi

4 Yahoo: Swift'in *Gulliver'in Maceraları*'nda insana benzeyen, kaba saba bir ırk. Ç.N.

5 Sonradan açıklanacağı gibi, sınıflar, tanımlayıcı niteliklerden imal edilmiş mantıksal kurgular olarak düşünülebilir. Fakat şimdilik, bizim, sınıflara gerçekmiş gibi davranmaktaki ısrarımız bunu basitleştirecektir. [Bu kısım çevirimizde yer almamıştır. Ç.N.]

biri benzersizliğin önemli olmadığı yerlerde sınıfın yerine kullanılabilir.

Şimdi sayının tanımına dönersek, sayı, belli seçmeleri yani belli sayıda terimi olanları, bir araya getirme yoludur. Bütün çiftleri bir destede, bütün üçlüleri bir başkasında vesaire varsayabiliriz. Bu şekilde, her biri belli sayıda terim içeren bütün seçmeleri içeren desteler elde ederiz. Her deste, elemanları seçmeler olan bir sınıftır, yani sınıflardır; dolayısıyla her biri bir sınıflar sınıfıdır. Meselâ, bütün çiftlerden oluşan deste bir sınıflar sınıfıdır; her çift iki elemanlı bir sınıftır ve bütün çiftlerin destesi her biri iki elemanlı sınıflardan oluşan sonsuz sayıda elemanı olan bir sınıftır.

İki seçmenin aynı desteye ait olup olmadığına nasıl karar vereceğiz? Akla gelen ilk cevap: "Her birinin kaç elamana sahip olduğunu bul ve eğer aynı sayıda elemana sahip iseler onları aynı desteye koy." Fakat bu, sayıları tanımladığımızı ve bir seçmenin kaç terime sahip olduğunu bulmayı bildiğimizi öngörür. Sayma işlemine o kadar alışığız ki, böyle bir öngörü kolaylıkla dikkatten kaçabiliyor. Gerçekte, her nasılsa, bildik olmasına rağmen, sayma, mantık olarak çok karmaşık bir işlemdir; dahası bu sadece koleksiyon sonlu ise seçmenin kaç tane terimi olduğunun bulunuşunun bir sonucu olarak elde edilebilir. Bizim sayı tanımımız bütün sayıların sonlu olduğunu önceden kabul etmemelidir. Ve biz hiçbir durumda, bir kısır döngü olmaksızın, saymayı sayıları tanımlamakta kullanamayız; çünkü sayma işleminde sayılar kullanılmıştır. Dolayısıyla bizim, iki koleksiyon aynı sayıda terime sahip olduğu vakit, başka bir karar verme yöntemine ihtiyacımız var.

Hâlihazırda, o sayının ne olduğunu bulmak yerine iki seçmenin aynı sayıda terimi olup olmadığını bulmak mantıken daha basittir. Bir örnek bunu anlaşılır hâle getirecektir. Dünyanın herhangi bir yerinde çok erkeklilik veya çok eşlilik olmasaydı herhangi bir anda yaşayan koca sayısı, eşlerinin sayısıyla tamamen aynı olacaktı. İkna

olmak için ne bir oybirliğine ne de koca ve eşlerinin gerçek sayısını bilmeye ihtiyacımız var. Her iki seçmenin sayısının aynı olması gerektiğini biliyoruz. Çünkü her koca bir eşe ve her eş bir kocaya sahiptir. Bu, karı-koca ilişkisi "bire-bir"dir diye ifade edilir.

Eğer x, y'ye doğru söz konusu bağıntıya sahipse, başka hiçbir x, y'den farklı herhangi bir y terimine doğru aynı bağıntıya sahip değilse, o zaman bu bağıntıya "bire-bir" denir. İki koşuldan sadece ilki gerçekleşirse, bağıntıya "bire-çok"; sadece ikinci koşul gerçekleşirse "çoğa-bir" denir. 1 sayısının bu tanımlarda kullanılmadığı da gözlemlenmelidir.

İsevî memleketlerde, koca-eş ilişkisi bire-bir; Muhammedî memleketlerde bire-çok; Tibet'te çoğa-bir'dir. Baba oğul bağıntısı bire-çok; oğul baba bağıntısı çoğa-bir; fakat en büyük oğuldan babaya doğru bir bağıntı bire-bir'dir. n herhangi bir sayı olsun, n'den n+1'e olan bağıntı bire-bir'dir; fakat negatif sayılar dahil edilirse bağıntı ikiye-bir şekline dönüşür; çünkü n ve $-n$ aynı kareye sahiptir. Bu örnekler, bire-bir, bire-çok ve çoğa-bir bağıntıları -sadece sayının tanımıyla ilgili değil, diğer birçok bağlamda matematiğin ilkelerinde büyük rol oynayan bu kavramları- anlaşılır kılmak için yeterli olmalıdır.

Evlilik bağıntısının, kocaları ve eşlerini ilişkilendirmesinde olduğu gibi, bir sınıfın her terimini diğer sınıfın bir terimiyle ilişkilendiren bire-bir bağıntı varsa, bu iki sınıfa "benzer" denir. Birkaç ön-tanım bu tanımı daha kesin olarak belirtmemize yardımcı olacaktır. Bir şeye veya diğerine belli bir bağıntısı olan terimler sınıfına bu bağıntının tanım kümesi denir; dolayısıyla babalar, baba-çocuk ilişkisinin tanım kümesidir; kocalar koca-eş ilişkinin tanım kümesidir; eşler eş-koca ilişkisinin tanım kümesidir ve eşler ve kocalar birlikte evlilik bağıntısının tanım kümesidir. Eş-koca bağıntısı koca-eş bağıntısının *tersi* olarak adlandırılır. Benzer bir şekilde, *daha küçük*, *daha büyüğün* tersidir; *sonra*, *daha öncenin* tersidir, vesaire. Genelde,

verilen bir bağıntı x ve y arasında etki gösteriyorsa, y ve x arasında etki gösteren bir bağıntı, verilen bir bağıntının tersidir. Bir bağıntının *ters-tanım kümesi* tersinin tanım-kümesidir; dolayısıyla eşler sınıfı, koca-eş bağıntısının ters-tanım kümesidir. Şimdi benzerliğin tanımını şu şekilde verebiliriz:

İki sınıf arasındaki bir bire-bir bağıntıda, bir sınıf tanım kümesi diğeri ters-tanım kümesi oluyorsa bu sınıf diğerine "benzerdir" denir.

Şunları ispat etmek kolaydır: (1) Her sınıf kendisine benzerdir, (2) eğer bir α sınıfı bir β sınıfına benzer ise β, α'ya benzerdir, (3) eğer α, β'ya ve β, γ'ya benzer ise α, γ'ya benzerdir. Eğer bir bağıntı bu özelliklerden birinci özelliğe sahipse *yansıyan*, ikincisine sahipse *simetrik* ve üçüncüsüne sahipse *geçişken*'dir. Açıktır ki, tanım kümesi üzerinde simetrik ve geçişken olan bir bağıntı, yansıyan olmalıdır. Bu özelliklere sahip bağıntılar önemli bir türdür ve benzerliğin bu bağıntılardan biri olduğu dikkate değerdir.

Sağduyumuza binaen aşikârdır ki eğer iki sonlu sınıf benzerse, diğer türlü değil de aynı sayıda terime sahiptirler. Sayma eylemi, sayılacak nesneler kümesi ve işleme girmiş doğal sayılar (0-hariç) arasında bire-bir bağıntı kurulmasıyla meydana gelir. Buna göre sağduyumuzun vardığı sonuç, sayılacak kümede sayımda kullanılan son sayıya kadar olan sayılar kadar nesnenin var olduğudur. Ve biz yine biliyoruz ki, kendimizi sonlu sayılarla ne kadar sınırlandırırsak sınırlandıralım, 1'den n'ye kadar sadece n sayı vardır. Dolayısıyla diyebiliriz ki, bir seçmenin sayımında kullanılan son sayı, tabiî ki, koleksiyon (seçme) sonlu ise, seçmedeki terim sayısıdır. Fakat bu sonuç sadece sonlu seçmelere uygulanabilirliği bir yana iki benzer sınıfın aynı sayıda terime sahip olması gerçeğini varsayar ve buna dayanır; (meselâ) 10 nesne saymak için yaptığımız şey bu nesneler kümesinin 1'den 10'a kadar olan sayılar kümesine benzer olduğunu göstermektir. Benzerlik kavramı, sayma işleminde mantıken önceden varsayılmıştır ve bu daha az bilinmesine rağmen mantıken

daha basittir. Sayma işleminde sayılacak nesneler; birinci, ikinci, üçüncü, vb. gibi bir sırada alınak gereklidir; fakat bu sıra sayının bir esasından değildir. Bu konu mantıkî nazar itibariyle ilgisiz bir ilâve, lüzumsuz bir karışıklıktır. Benzerlik kavramı bir sıra talep etmez; mesela, kocaların sayısı ile eşlerin sayısının aynı olduğunu aralarında bir öncelik sıralaması kurmaya gerek duymadan gördük. Benzerlik kavramı ayrıca benzer sınıfların sonlu olmasını da gerektirmez. Meselâ, bir tarafta (0 hariç) doğal sayıları ve diğer tarafta payında 1 olan kesirleri ele alalım: açıktır ki, 2'yi ½ ile, 3'ü 1/3 ile, vesaire, ilişkilendirebiliriz; böylece iki sınıfın benzerliğini ispatlarız.

Dolayısıyla, "benzerlik" kavramını, bu bölümde daha önceden sorduğumuz soru mahiyetinde, iki seçmenin aynı desteye ait olup olmamaları konusunda karar vermekte kullanabiliriz. Biz bir destenin hiç elemanı olmayan bütün sınıflardan oluşmasını istiyoruz. Bu, 0 sayısı için olacaktır. Daha sonra bir destenin bir elemanı olan bütün sınıflardan oluşmasını istiyoruz. Bu, 1 sayısı için olacaktır. Daha sonra 2 sayısı için, bir destenin bütün çiftlerden oluşmasını istiyoruz; daha sonra bir de bütün üçlüler için; vesaire. Herhangi bir koleksiyon verilsin, bunun ait olduğu desteyi buna benzer olan bütün seçmelerden oluşan sınıf olarak tanımlayabiliriz. Meselâ, bir seçmenin üç elemanı olsun, buna benzer bütün seçmelerin sınıfının, üçlülerin sınıfı olacağını görmek çok kolay olacaktır. Ve bir seçmenin sahip olabileceği terimlerin sayısı ne olursa olsun, buna "benzer" olan seçmeler aynı sayıda terime sahip olacaktır. Bunu "aynı sayıda terime sahip olmanın" *tanımı* olarak alabiliriz. Açıktır ki, kendimizi sonlu seçmelerle sınırlandırdığımız sürece, bu kullanıma müsait sonuçlar vermektedir.

Şimdiye kadar en hafif derecede paradoksal bir şey öne sürmedik. Fakat sayının halihazırdaki tanımına geldiğimizde, ilk bakışta mantığa aykırı olarak görünen şeyden, bu izlenim kısa zamanda kaybolacak olmasına rağmen kaçınamıyoruz. Biz doğal olarak

(meselâ) çiftler sınıfının 2 sayısından farklı bir şey olduğunu düşünürüz. Fakat çiftlerin sınıfı üzerine hiç kuşku yoktur; o şüphesizdir ve tanımlanması zor değildir. Hâlbuki, 2 sayısı, başka bir anlamda, hakkındaki zaten mi vardı yoksa biz mi onun izini sürdük de bulduk konusunda hiçbir zaman emin olamayacağımız, metafizik bir varlıktır. İşte bu nedenle kendimizi çiftlerin sınıfıyla sınırlamak, her zaman için ulaşılmaz olarak kalması gereken sorun yaratacak 2 sayısını araştırmaktan, ki bundan eminiz, daha güvenlidir. Buna göre şu tanımı yaptık:

Bir sınıfın sayısı, ona benzer olan bütün sınıfların sınıfıdır.

Dolayısıyla çiftlerin sayısı, bütün çiftlerin sınıfı olacaktır. Aslında tanımımıza göre de bütün çiftlerin sınıfı, 2 sayısı olacaktır. Biraz gariplik pahasına bu tanım kesinlik ve şüphesizliği garantilemektedir. Ve böyle tanımlanmış sayıların, bizim sayıların sahip olmasını beklediğimiz bütün özelliklere sahip olduğunu göstermek zor değildir.

Şimdi sayıları genel olarak benzerliğin sınıfları içinde topladığı herhangi bir deste gibi tanımlamaya devam edebiliriz. Bir sayı, herhangi ikisinin birbirine benzer olduğu ve kümenin dışında kümenin içindekine benzer olanın bulunmadığı, bir sınıflar kümesidir. Başka bir deyişle, bir sayı (genel olarak) bir elemanının sayısı olan herhangi bir koleksiyondur veya daha da basit olarak:

Sayı, bazı sınıfların sayısı olan herhangi bir şeydir.

Böyle bir tanım görünüşte kelimeler itibariyle bir döngü içerir; fakat gerçekte böyle değildir. Biz "verilen bir sınıfın sayısını" genel itibariyle sayı kavramını kullanmadan tanımlarız; böylece herhangi bir mantıksal hataya meydan vermeden sayıyı genel olarak "verilen bir sınıfın sayısı" terimleriyle tanımlayabiliriz.

Gerçekte bu tür tanımlar sıkça kullanılmaktadır. Meselâ, babalar sınıfı; önce birinin babası olmanın ne olduğu tanımlanacak sonra, birilerinin babası olanların hepsi babalar sınıfı olarak tanımlanacaktır. Benzer şekilde (meselâ), kare sayıları tanımlamak istersek, öncelikle

'biri, bir diğerinin karesidir' demekle ne kastettiğimizi tanımlamalı ve daha sonra kare sayıları, başka sayıların karesi olanlar şeklinde tanımlamalıyız. Bu tür bir işlem sıkça uygulanır ve bunun meşru olduğu ve çoğu zaman da gerekli olduğunu kavramak önemlidir.

Şimdi elimizde sonlu seçmelerde uygulanabilecek bir sayı tanımımız var. Geriye bunun sonsuz seçmelerde nasıl uygulanabileceğini görmek kalıyor. Fakat öncelikle "sonlu" ve "sonsuz" ile ne kastettiğimizi kararlaştırmalıyız ki, bu da (buradaki) sınırlar dahilinde yapılamaz.

MATEMATİK VE MANTIK[6]

Tarihsel anlamda, matematik ve mantık tamamen farklı çalışmalar olmuşlardır. Matematik bilimle, mantık Yunanlılarla ilişkilendirilmiştir. Fakat ikisi de son zamanlarda gelişmiştir; mantık daha çok matematikselleşmiş ve matematik daha çok mantıksal hâle gelmiştir. Sonuçta, ikisi arasında bir çizgi çizmek tamamen imkânsız hâle gelmiştir; haddi zatında ikisi bir olmuştur. Genç ve yetişkin kadar birbirinden farklıdırlar; Mantık matematiğin gençliği ve matematik mantığın yetişkin hâlidir. Bu görüşe, klâsik metinlerle çalışarak vakitlerini geçiren ve bir parça sembolik muhakemeyi takipten aciz mantıkçılar ve bir tekniğin içeriğini veya sebeplerini soruşturmayı dert edinmeden öğrenmiş matematikçiler, içerlemişlerdir. Şansımıza bu iki tip de gittikçe azalmaktadır şimdilerde. Günümüz matematik çalışmalarının çoğu açıkça mantığın sınırları üzerindedir; yine günümüz mantığının çoğu sembolik ve formeldir; ki matematik ve mantığın bu çok yakın ilişkisi her eğitimli öğrenciye aşikâr olmaktadır.

Bunların özdeşliğinin ispatı tabiî ki, bir detay işidir: Bütün evrence mantığa aitliği kabul edilen öncüllerle başlamak ve açıkça

6 Bu kısım, Russell'ın kitabının son bölümünü oluşturmaktadır. Ç.N.

matematiğe ait olan tümdengelim yoluyla sonuçlara ulaşmak bize matematiğin sağda ve mantığın solda kalacağı keskin bir çizginin çizilebileceği bir noktanın bulunmadığını gösterir. Eğer hâlâ matematik ve mantığın özdeşliğini kabul etmeyenler varsa, onları *Principia Mathematica*'daki tanımlar ve tümdengelimler silsilesinin hangi noktasında mantığın bittiğini ve matematiğin başladığını düşündüklerini belirtmeye davet edebiliriz O zaman herhangi bir cevabın tamamen keyfî olduğu açığa çıkacaktır.

Bu kitabın önceki bölümlerinde, doğal sayılardan hareketle önce "sayma sayılarını" tanımladık ve sayı kavramının nasıl genelleştirildiğini gösterdik ve daha sonra kendimizi mantığın temelleriyle uğraşır bulana kadar tanımla ilişkili kavramları inceledik; sentetik ve tümdengelimli işlemlerle önce bu temeller gelir ve doğal sayılara ancak uzun bir yolculuktan sonra ulaşır. Bu tür bir işlem bizim benimsediğimizden usulen daha doğru olmasına rağmen okuyucu için çok daha zordur; çünkü bunun başladığı esas mantıksal kavramlar ve önermeler doğal sayılarla karşılaştırıldığında uzak ve alışılmamıştır. Ayrıca bunlar, ötesi hâlâ bilinmeyen şimdiki bilgi sınırını temsil etmektedir; ve bilginin bunlar üzerine hakimiyeti şimdilik çok güvenli değildir.

Matematiğin "miktar" bilimi olduğu söylenegelmiştir. "Miktar" kaba bir sözcüktür, fakat tartışmamızın hatırına onu "sayı" kelimesiyle değiştirebiliriz. Matematik sayı bilimidir ibaresi iki farklı şekilde doğru olmayacaktır. Bir tarafta sayı ile hiçbir işi olmayan matematiğin tanınmış dalları vardır–koordinatları ve ölçmeyi kullanmayan bütün geometri, meselâ izdüşümsel ve betimsel geometrinin aşağıya koordinatlarının olduğu noktaya doğru, sayıyla veya *büyüklük* ve *küçüklük* anlamında miktarla dahi bir işi yoktur. Diğer taraftan sayma sayıların tanımı yoluyla, tümevarım ve ilkel bağıntılar yoluyla, genel seri teorisi yoluyla ve aritmetiksel işlemlerin tanımları yoluyla daha önce sadece sayılarla bağıntılı olarak ispat-

lanabilen daha çok genelleştirme yapabilmek mümkün hâle gelmiştir. Sonuç, önceleri bir tek aritmetik varken aritmetik şimdi çok sayıda ayrı çalışmaya bölünmüştür ve hiçbiri özel olarak sayılarla ilgilenmemektedir. Sayıların en temel özellikleri, bire-bir bağıntılar ve sınıfların arasındaki benzerlik ile ilgilidir. Toplama, birbirinden bağımsız olduğu bilinmeyen sınıflar kümesine sırasıyla benzer olan birbirinden bağımsız sınıfların oluşturulmasıyla ilgilidir. Çarpma, "seçmeler: selections" teorisiyle bağlantılı, yani bire-çok bağıntıların belli bir çeşididir. "Finitude: Sonluluk", matematiksel tümevarım teorisinin tamamını ortaya çıkaran ilkel bağıntıların genel çalışmasıyla bağlantılıdır. Sayı serilerinin çeşitli türlerinin temel özellikleri ve fonksiyonların süreklilik teorisi ile fonksiyonların limitinin esasları sayılarla ciddî anlamda ilişkisi olmayacak şekilde genelleştirilebilir. Bütün yöntemli mukayeselerde olabildiğince genelleştirmek bir kaidedir; çünkü biz ancak bu şekilde verilen bir tümdengelim işleminin daha yaygın uygulanabilir sonuçlar vermesini sağlamaktayız. Bundan dolayı, bizler sadece, matematikte bütün evrence kabul edilmiş, bir yöntem izleyerek, aritmetiğin muhakemesini genelleştirmekteyiz. Ve bu genelleştirme ile gerçekte yeni tümdengelimli sistemler takımı meydana getirdik ki, bunda, geleneksel aritmetik birden çözüldü ve genişledi; fakat bu yeni tümdengelimli sistemlerin herhangi birinin –meselâ, seçmeler teorisinin– mantığa ya da aritmetiğe ait olup olmaması tamamen keyfîdir ve makul bir şekilde karara varmak da mümkün değildir.

Böylece şu soruyla karşı karşıya kalmaktayız: Herhangi bir farktan yoksun olarak matematik veya mantık olarak adlandırılan, bu konu nedir? Bunu tanımlayabileceğimiz bir yol var mı?

Konunun belli nitelikleri açıktır. Başlamak gerekirse, bu konuda belli şeylerle veya belli özelliklerle ilgilenmiyoruz; aslında biz *herhangi* bir şey veya *herhangi* bir özellik hakkında ne söylenebileceği ile ilgilenmekteyiz. Biz, bir ve bir ikidir diyebiliriz. Fakat Sokrates

ve Platon ikidir diyemeyiz; çünkü biz, bizim ayarımızda mantıkçılar ve soyut matematikçiler, Sokrates ve Platon'u hiç duymadık. Böyle kimselerin bulunmadığı bir dünya hâlâ bir ve birin iki olduğu bir dünya olacaktır. Bu, soyut matematikçiler ve mantıkçılar olarak, bize hiç açık değildir; eğer öyle yaparsak alâkasız ve formel olmayan bir şeyler tanıtmış olurduk. Bunu tasım (syllogism) olayında uygulayarak açık hale getirebiliriz. Geleneksel mantık der ki: "Bütün insanlar ölümlüdür. Sokrates bir insandır, dolayısıyla Sokrates ölümlüdür." Şimdi neyi iddia etmek niyetinde olduğumuz açıktır; başlangıç itibariyle, öncüller sonucu gerektirir, öncüllerin ve sonucun gerçekte doğru olduğunu iddia etmiyoruz, en geleneksel mantık dahi öncüllerin esas itibariyle doğru olmasının mantıkla alâkası olmadığına işaret eder. Dolayısıyla yukarıdaki geleneksel tasımda yapılacak ilk değişiklik, tasımın şu şekilde ifade edilmesi olacaktır: "Eğer bütün insanlar ölümlüyse ve Sokrates bir insan ise o zaman Sokrates ölümlüdür." Şimdi biz bu ibarenin içindeki belli terimler sebebiyle değil *biçimi* nedeniyle geçerli olduğunun iletilmek istendiğini gözlemleyebiliriz. Eğer biz "Sokrates bir insandır" ibaresini öncülümüzden kaldırmış olsaydık, biçimsel-olmayan bir önermeye sahip olmamız gerekirdi ki, Sokrates'in bir insan olduğu gerçekten de doğru olduğu durumda ancak kabul edilebilirdi; bu durumda ise ifadeyi genelleştiremezdik. Fakat yukarıda olduğu gibi ifade *formel* olduğu vakit, içinde geçen terimlere hiçbir şey bağlı değildir. Böylece biz *insanlar* yerine α, *ölümlüler* yerine β ve Sokrates yerine x koyabiliriz ki, burada α ve β, herhangi bir ne olursa olsun sınıfı ve x, herhangi bir kimsedir. O zaman şu ifadeye ulaşırız: "x, α ve β hangi olası değerleri alırsa alsın, eğer bütün α'lar β ise ve x bir α ise, o zaman x bir β'dır." Başka bir deyişle, "bu önermeli fonksiyon" eğer bütün α'lar β ve x bir α ise, o zaman x bir β'dır önermesi her zaman doğrudur. Burada en sonunda -sadece Sokrates, insanlar ve ölümlüler üzerine geleneksel bir ifadeden esinlenerek elde edilen- bir mantık önermesine sahip olduk.

Açıktır ki, eğer amacımız formel muhakeme ise her zaman için en sonunda yukarıdaki gibi hiçbir gerçek şey veya özelliğin belirtilmediği ifadelere ulaşmalıyız; bu da genel itibariyle ispatlanabilecek şeyin özel bir durumunu ispatlamakla, vaktimizi harcamama isteğiyle gerçekleşir. Sokrates üzerine uzun bir meseleye girişmek daha sonra tamamen aynı meseleyi Platon üzerine yinelemek gülünç olacaktır. Eğer bizim meselemiz (meselâ) bütün insanlar için geçerliyse bunu "x" kullanarak "Eğer x bir insan ise" hipotezi ile ispatlamalıyız. Bu hipotez ile mesele, x bir insan olmasa dahi farazî geçerliliğini muhafaza edecektir. Fakat şimdi x'in insan olmasını desteklemez isek ve onun yerine x'in bir maymun veya bir kaz veya bir başbakan olduğunu farz ettiğimiz zaman meselemizin hâlâ geçerli olduğunu görmeliyiz. Dolayısıyla öncülümüzü "x bir insandır" şeklinde alarak vakit kaybetmek yerine "x bir α'dır" şeklinde almalıyız; burada α herhangi bir bireyler sınıfı veya ϕ belirli bir türde herhangi bir önermeli fonksiyon olmak üzere "ϕx"tir. Böylece özel şeylerin veya mantıktaki veya soyut matematikteki özelliklerin hiçbir bahsinin geçmeyişi, dediğimiz gibi bu çalışmanın "tamamen formel" olması gerçeğinin zorunlu bir sonucudur.

Bu noktada kendimizi, ifadesi çözümünden kolay bir sorunla yüzleşmiş buluruz. Sorun şu: "Mantıksal bir önermenin yapıtaşları nelerdir?" "Cevabı bilmiyorum fakat sorunun nasıl meydana geldiğini açıklamayı önerebilirim."

Meselâ, "Sokrates, Aristo'dan önceydi." önermesini ele alalım. Burada açıkça görülüyor ki, iki terim arasında bir bağıntımız var ve bu önermenin (aynı zamanda buna karşılık gelen durumun) bileşenleri sadece iki terim ve bağıntıdır; yani Sokrates, Aristo ve *önce*. (Sokrates ve Aristo'nun basit olmadığı gerçeğini göz ardı ediyorum; ayrıca onların isimleri olarak görünen şeyler gerçekten karmaşık tariflerdir. Bu gerçeklerin hiçbiri şu anki konumuzla ilgili değildir.) Bu tip önermeleri, "x β y" genel biçimiyle gösterebilir ve "x'den y'ye

β bağıntısı vardır." şeklinde okuyabiliriz. Bu genel biçim mantıksal önermelerde bulunabilir, fakat bunun hiçbir özel durumu bulunamaz. Acaba genel biçimin kendisinin bu tip mantıksal önermelerin bir bileşeni olduğu sonucuna mı varıyoruz?

"Sokrates, Aristo'dan öncedir." şeklinde bir önerme verilsin, belli bileşenlerimiz ve de belli bir biçimimiz vardır. Fakat bu biçimin kendisi yeni bir bileşen değildir; eğer öyle olsaydı ikisini ve diğer bileşenleri de kapsayacak yeni bir biçime ihtiyacımız olurdu. Gerçekte bizler bir önermenin *bütün* bileşenlerini, biçimini değiştirmeden, değişkenlere dönüştürebiliriz. Bizim, belirli iki terim arasında bağıntı uygulayan yani önermeler sınıfının herhangi biri yerine "x β y" şeklinde bir dizgeyi kullanırken yaptığımız da budur. Daha genel bir iddiaya doğru ilerleyebiliriz; şöyle ki, "x β y bazen doğrudur" yani ikili bağıntıların sağlandığı durumlar vardır. Bu iddia, sözcüğü kullandığımız anlamda mantığa (veya matematiğe) ait olacaktır. Fakat bu iddiada herhangi özel bir şey veya özel bağıntılardan bahsetmedik; hiçbir özel şey veya bağıntı soyut bir mantık önermesine asla giremez. Mantıksal önermelerin tek mümkün bileşenleri, saf biçimlerle baş başa kaldık.

Soyut biçimlerin –meselâ, "x β y" biçimindekilerin- önermelere bizim önemsediğimiz biçimde fiilen girdiğini destekler mahiyette bir şey iddia etmek istemiyorum. Bir tarafta bir anlayış diğer tarafta karşıt anlayış bulunması itibariyle bu tür önermelerin analizi zor bir meseledir. Bu meseleye şimdi eğilemeyiz; fakat bir ilk yaklaşım olarak, *biçimler*, mantıksal önermelere bileşenleri olarak girenlerdir görüşü kabul edilebilir. Ve bir önermenin "biçimi" ile ne kastettiğimizi (resmen tanımlamasak da) şu şekilde açıklayabiliriz:

Bir önermenin "biçimi", önermenin her bileşeni bir başkasıyla değiştirildiği zaman değişmeden kalandır.

Böylece "Sokrates Aristo'dan daha öncedir" ile "Napolyon, Wellington'dan daha büyüktür" gibi iki önermenin her bileşeni farklı olmasına rağmen aynı biçime sahiptir.

Biz böylece, mantıksal veya matematiksel önermelerin (yeterli olmasa da) zorunlu bir niteliği olarak, bunların şöyle oluştuklarını ortaya koyabiliriz: Onlar hiçbir değişken içermeyen (yani, bütün, bazı, bir, vb. gibi kelimeler içermeyen) önermelerden her bileşeni bir değişkene dönüştürmekle elde edilebilir ve sonuç her zaman doğrudur veya bazen doğrudur veya bazı değişkenler itibariyle her zaman doğrudur veya biçimlerin herhangi bir terkibidir iddiasında bulunabiliriz. Ve aynı şeyi başka bir şekilde belirtmenin yolu: Mantık (veya matematik) sadece *biçimlerle* ilgilenir ve sadece onların her zaman veya bazen doğru- "her zaman" ve "bazen" kelimelerinin olabilecek bütün kullanılışları ile- oluşunun belirtilme şekliyle ilgilenir.

Bütün dillerde tek işlevi biçimi belirtmek olan bazı kelimeler vardır. Bu kelimeler, genel itibariyle az çekimi olup en çok ortak olanlardır. "Sokrates beşerdir: Sokrates is human" cümlesini alalım. Burada "is: dır" önermenin bir bileşeni değildir; sadece özne-yüklem biçimini işaret etmektedir. Benzer olarak, "Sokrates is earlier than Aristo: Sokrates Aristo'dan daha evveldir" cümlesinde "is:dır" ve "than:-den" sadece biçime işaret etmektedir: Bu önerme "Sokrates precedes Aristo: Sokrates Aristo'dan öncedir" ile aynıdır. Fakat bunda bu kelimeler yoktur ve biçim başka türlü ifade edilmiştir. Biçim, kural olarak, özel kelimeler olmadan da ifade *edilebilir*; kelimelerin dizilişi istenileni fazlasıyla gerçekleştirebilir. Fakat bu ilke üzerinde fazla durulmamalıdır. Meselâ, hiçbir kelime olmaksızın önermenin en küçük yapı biçimlerini (veya "doğruluk-fonksiyonları" dediğimiz şeyi) uygun olarak nasıl ifade ettiğimizi görmek zor olacaktır. Gördük ki, bir kelime veya sembol, yani *uyuşmazlığa* işaret eden bir kelime veya sembol, bu amaç için yeterli olacaktır. Fakat biri bile olmasa, kendimizi güçlükler içinde buluruz. Bu yine de şu anki amacımız için önemli bir nokta değildir. Bizim için önemli olan, biçimin, genel bir önerme için önermenin içinde biçimi belirten herhangi bir kelime veya sembol olmasa dahi önemli olabileceğini gözlemlemek-

tir. Eğer biz biçimin kendisi hakkında konuşmak istiyorsak, öncelikle, onun adını koymak zorundayız; fakat matematikte olduğu gibi, biçime sahip bütün önermeler hakkında konuşmak istersek biçim üzerine bir söz genellikle zorunlu bulunmayacaktır; muhtemelen teori kısmında *hiçbir zaman* zorunlu olmayacaktır.

Farzımuhal, -ki bence mümkün- önermelerin biçimleri, biçimi için herhangi bir özel kelime kullanılmadan ifade edilmiş önermelerin biçimleri ile temsil *edilebilir*. O zaman, temelindeki her şeyi bir kelime grubuna, doğal söz dilimine bağlı olan bir dile ulaşırız. Bu tür bir dilde, matematiğin *bütün* önermelerini bir tek kelimesini dahi bilmediğimiz bir dilde ifade edebiliriz. Matematiksel mantığın dili, mükemmelleştirilseydi böyle bir dil olacaktır. Değişkenler için sembollerimiz olmalı, şöyle ki, "x", "β" ve "y" gibi türlü şekillerde dizilmiş; ve bu dizim değişkenlerin bütün değerleri veya bazı değerleri için doğru olacak bir şeye işaret etmelidir. Herhangi bir kelime bilmek zorunda değiliz, çünkü onlara sadece değişkenlere değer verilirken ihtiyaç olacak, ki bu bir soyut matematikçi veya mantıkçının değil uygulamalı matematikçinin işidir. Bu, mantığa ait bir önermenin işaretlerinden biridir; uygun bir dil verilsin, bu tip bir önerme böyle bir dilde söz dizimini bilen fakat tek bir kelime dahi bilmeyen bir kişi tarafından öne sürülebilir.

Fakat, her şeye rağmen "is:-dır" ve "than:-den" gibi biçim ifade eden kelimeler vardır. Ve şimdiye dek matematiksel mantık için bulunmuş her sembolik anlatımda sabit anlamlı semboller vardır. Doğruluk-fonksiyonlarını oluşturmakta kullanılan uyuşmazlık sembolünü örnek olarak alabiliriz. Bu tip kelimeler veya semboller mantıkta bulunabilir. Sorumuz şudur: Bunları nasıl tanımlayacağız?

Bu tip kelime veya semboller, "mantıksal sabitler" dediğimiz kavramı ifade ederler. Mantıksal sabitler biçimi tanımladığımız gibi tanımlanabilir ki, gerçekte bunlar öz itibariyle aynı şeylerdir. Herhangi birinin terimlerinin her birinin bir diğeriyle değişmesi suretiy-

le elde edilebilen önermelerden birkaçında ortak olarak bulunanlar, temel mantıksal sabitler olacaktır. Meselâ, "Napoleon is greater than Wellington: Napolyon Wellington'dan daha büyüktür" önermesi "Socrates is earlier than Aristo: Sokrates Aristo'den daha evveldir" önermesinden "Sokrates" yerine "Napolyon", "Aristo" yerine "Wellington" ve "earlier: daha evveldir" yerine "greater: daha büyüktür" değişimleri ile elde edilmiştir. Bazı önermeler, "Socrates is earlier than Aristo: Sokrates Aristo'dan daha evveldir" örneğinden elde edilebilir biçimde olanlardır. Biz "Sokrates is human: Sokrates beşerdir" veya "the Athenians gave the hemlock to Sokrates: Sokrates'e zehiri Atinalılar verdi." biçimindeki önermeleri yukarıdaki örnekten terim-terim değiştirerek elde edemeyiz. Çünkü birincisi özne–yüklem biçiminde iken ikincisi üç terimli bir bağıntıyı ifade etmektedir. Eğer biz tamamı ile soyut mantıksal dilimize herhangi bir kelime alacaksak, bunlar açıkça "mantıksal sabit" olmalıdırlar ve "mantıksal sabitler" her zaman ya yukarıdaki gibi terim-terim değiştirmek suretiyle birbirinden elde edilebilen bir grup önermede ortak olarak bulunacak ya da bunlardan türetilecektir. İşte biz bu ortak olana "biçim" diyoruz.

Bu anlamda pür matematikte bulunan bütün "sabitler" mantıksal sabitlerdir. Meselâ, 1 sayısı bu biçimdeki önermelerden elde edilebilir: "c gibi öyle bir terim vardır ki ϕx sadece ve sadece x, c olduğunda doğru olur. Bu ϕ'nin bir fonksiyonudur ve türlü değişik önerme ϕ'ye değişik değerler vererek elde edilir. Biz yukarıdaki ϕ fonksiyonunu (ara aşamalardaki şu anki amacımızla ilgisiz ufak bir atlamayla beraber) "ϕ tarafından belirlenen sınıf birim sınıftır" veya (1 sınıfların sınıfı olmak kaydıyla) "ϕ tarafından belirlenen sınıf 1'in bir elemanıdır" önermesiyle açıklandığı gibi algılayabiliriz. Bu yolla, 1'in bulunduğu önermeler belli bir sabit mantıksal biçimden çıkarılmış bir anlama sahip olacaklardır. Ve bütün matematiksel sabitler için aynı durum söz konusu olacaktır: Hepsi mantıksal sabit veya

sembolik kısaltmalar olup uygun bir metindeki bütün kullanımları mantıksal sabitler yoluyla belirlenmiştir.

Fakat bütün mantıksal (veya matematiksel) önermeler değişkenlerle birlikte mantıksal sabitler vasıtasıyla tamamen ifade edilebilirse de, bu demek değildir ki, aksi durumda, bu şekilde ifade edilebilen bütün önermeler mantıklıdır. Şimdiye kadar matematiksel önermelerin gerekli fakat yeterli olmayan bir ölçütünü bulduk. Biz temel *düşüncelerin* karakterini yeterince tanımladık ki, matematikteki bütün düşünceler bu temel düşünceler yoluyla tanımlanabilir. Fakat matematiğin bütün önermelerinin *çıkarılabildiği* temel *önermeleri* yeterince tanımlamadık. Bu, şimdiye dek tam cevabın ne olduğu bulunamadığı için, daha zor bir meseledir.

Mantıksal terimlerle kesinlikle ifade edilebilmesine rağmen mantık tarafından doğruluğu iddia edilemeyene örnek olarak sonsuzluk aksiyomunu alabiliriz. Mantığın bütün önermelerinin, analitik olduğu veya karşıtlarının kendinden çelişkili olduğu söylemiyle ifade edilegelen bir özelliği vardır. Bu önerme kalıbı, yine de, tatmin edici değildir. Çelişki kuralı mantıksal önermelerden sadece biridir; özel hiçbir üstünlüğü yoktur; ve bir önermenin karşıtının kendinden çelişkili oluşunun ispatı, çelişki kuralı bir tarafa tümdengelimin diğer ilkelerine daha çok ihtiyaç duyacak gibidir. Bununla beraber, araştırmakta olduğumuz mantıksal önermelerin özelliği farkına varan ve tanımlamak isteyen kimselerin dediği gibi, bu çelişki kuralından çıkarılabilmenin içinde gizlidir. Şimdilik *totoloji* diyebileceğimiz bu özellik, n hangi sayı olursa olsun, evrendeki bireylerin sayısı n'dir savına da dayanmamaktadır. Tiplerin çeşitliliği olmasaydı, n sonlu bir tam sayı olmak üzere, n terimli sınıfların varlığını veya $\aleph_0$ terimli sınıfların varlığını bile ispatlamak mantıken mümkün olacaktı. Fakat bu tipler sayesinde bu tür ispatlar ... aldatıcıdır. Dünyada n tane birey olup olmadığının tespitinde ampirik gözlemler ile baş başa kaldık. Leibnizci anlamda "olanaklı" dünyalar arasında bir, iki, üç, ...

birey içeren dünyalar olacaktır. Bir bireyin[7] bile olması için herhangi bir mantıkî gereklilik görünmemektedir –hatta, neden gerçekte herhangi bir dünya olmalıdır ki? Tanrı'nın varlığına dair ontolojik bir ispat, geçerli olmuş olsaydı, en azından bir bireyin mantıkî gerekliliğini oluşturacaktı. Fakat bu genel itibariyle geçersiz olarak kabul edilmiştir ve gerçekte de hatalı bir varlık görüşüne dayanmaktadır; yani adı konulmuş bir şeyin değil, sadece tarifi yapılmış bir şeyin varlığının ileri sürülebileceğini kavrayamamaktadır. Bu nedenle, "this is the so-and-so: bu falan filandır" ve " the so-and-so exists: falan filan vardır" cümlelerinden hareketle "this exists: bu vardır" demek anlamsızdır. Eğer ontolojik tartışmayı reddedersek dünyanın varlığının kaza (*accident*: ilinek Ç.N.) olduğuna kabule doğru sürükleniriz; yani mantıken gereklilik arz etmez. Eğer böyle olursa, mantığın hiçbir ilkesi -bir varsayıma dayalı olaylar hariç- "varlık" iddiasında bulunamaz. Yani hiçbiri "the propositional function so-and-so is sometimes true: şöyle şöyle bir fonksiyon önermesi bazen doğrudur." biçiminde olamaz. Bu biçimdeki önermeler, mantıkta kullanıldıkları vakit, bütünüyle iddiada bulunan bir önerme olarak değil, ya varsayım olarak ya da varsayımın bir sonucu olarak kullanılmış olmalıdırlar. Mantığın bütünüyle iddiada her zaman bulunan önermelerinin hepsi, bazı fonksiyon önermelerinin *her zaman* için doğru olduğunu onaylar nitelikte olacaktır. Meselâ, şu her zaman doğrudur: Eğer p, q'yu gerektirir ve q, r'yi gerektirirse p, r'yi gerektirir veya bütün α'lar β ise ve x bir α ise x bir β'dır. Bu tür önermeler mantıkta kullanılabilirler ve bunların doğruluğu da kainatın varlığından bağımsızdır; şunu ifade edebiliriz, eğer bir evren olsaydı bütün genel önermeler doğru olacaktı; çünkü bir genel önermenin karşıtı ... varlık iddiasında bulunan bir önermedir ve eğer bir

7 *Principia Mathematica*'daki temel önermeler, en azından bir bireyin varlığına dair bir düşünceye yol açar nitelikteydi. Fakat şimdi ben bunu saf mantık için bir kusur olarak görüyorum.

evren yok ise o zaman genel önermenin karşıtı her zaman için yanlış olacaktır.

Mantıksal önermeler gerçek dünya üzerine bir çalışma yapılmaksızın *apriori* olarak bilinebilecek niteliktedirler. Biz Sokrates'in bir insan olduğunu ancak tecrübî gerçeklerle yapılmış bir çalışmayla biliyoruz; soyut (yani değişkenlerle ifade edildiği zaman ki) biçim ile tasımın doğrulunu deneyime başvurma ihtiyacı duymaksızın bilebiliriz. Bu mantıksal önermelerin kendisinde bulunan bir özellik değil bizim onları öğrenme yolumuzun bir özelliğidir. Bunun, onların yapısının ne olabileceği sorusuna bir dayanağı vardır. Çünkü deney olmaksızın bilebileceğimizi farz etmenin zor olacağı bazı önerme çeşitleri vardır.

Açıktır ki, "mantığın" veya "matematiğin" tanımı, eski bir kavram olan "analitik" önermelere yeni bir tanım verme çalışmasıyla aranmalıdır. Her ne kadar en kısa zamanda çelişki kuralından hareketle elde edilenler gibi mantıksal önermeleri tanımlayarak hoşnut olabilirsek de, bizler ihtilaf edebiliriz. Ve kabul etmeliyiz ki, bunlar tecrübî yolla öğrendiklerimizden tamamen farklı bir önermeler sınıfıdır. Bunların hepsi biraz önce "totoloji" isminde karar kıldığımız özelliğe sahiptirler. Bu, tamamen değişkenlerle ve mantıksal sabitlerle (bir mantıksal sabit bir önermedeki *bütün* bileşenler değiştirildiğinde dahi sabit kalandır) ifade edilebilecekleri gerçeğiyle birleştirildiğinde mantığın veya pür matematiğin tanımını verecektir. Şu an için, "totolojiyi" nasıl tanımlayabileceğimizi bilmiyorum.[8] Bir süre için tatmin edici görünebilecek bir tanım tavsiye etmek kolay olacaktır; fakat, istenen tanımın özelliğine tamamen aşina olmama rağmen hoşnut olunacak bir tanım bilmiyorum. Bu noktada dolayısıyla şu an için, matematiğin mantıksal temellerine gerisin geriye yaptığımız yolculuğumuzda bilginin sınırına ulaşmış oluyoruz.

8 "Totolojinin" matematiğin tanımı için önemine, bu problem üzerinde çalışan eski öğrencim, Ludwig Wittgenstein dikkatimi çekmişti. Problemi çözüp çözmediğini hatta yaşayıp yaşamadığını dahi bilmiyorum.

Şimdi, az çok özetini verdiğimiz matematiksel felsefeye giriş konusunun sonuna geldik. Mantıksal sembolleri kullanmaktan çekindiğimiz sürece bu konuyla ilgili fikirleri yeterince ilerletebilmek imkânsızdır. Günlük konuşma dilimizde anlatmak istediğimizi, tam bir şekilde doğal olarak ifade eden hiçbir kelime olmadığından, kelimelere değişik anlamlar atfetmek durumundayız -günlük konuşma diline bağımlı olduğumuz için- ve okuyucu ilkin olmasa da bir süre sonra kesinlikle kelimeleri olağan anlamlarına kaydıracaktır. Böylece, söylenmek istenenlere, yanlış kavramlarla ulaşmış olacağız. Dahası, gündelik dil bilgisi ve sözdizimi olağanüstü bir şekilde yanlış yönlendirmektedir. Bu durum şunun gibidir: Sayıları göz önüne alırsak, "on adam" ile "beyaz adam" dil bilgisi açısından aynı biçimdedirler; bu sebeple 10, "adamı" niteleyen bir sıfat olarak düşünülebilir. Yine bu durum, her nerede fonksiyon önermesi varsa ve özellikle varlık ve tanımlama için de geçerlidir. Dil yanlış yönlendirildiği için, mantığa uygulandığı zaman (ki bu hiçbir zaman istenmedi) geniş olduğu ve kesin olmadığı için, mantıksal sembolizm, konumuz üzerine herhangi kesin veya bütün bir çalışma için katiyen gereklidir. Dolayısıyla, matematiğin temellerinde ihtisaslaşmak isteyen okuyucular, umulur ki, sembollerle uğraşma zahmetinden kaçınmayacaklardır. Aslında bu emek düşünüldüğünden çok daha azdır. Yukarıdaki üstünkörü çalışma açığa çıkarmış olmalıdır ki, bu konuda sayısız çözülmemiş problem ve yapılmayı bekleyen birçok iş bulunmaktadır. Bu küçük kitap ile herhangi bir öğrenci matematiksel mantık üzerine ciddî bir çalışmaya yöneltilebilmişse, bu kitap yazılmasındaki esas amacına ulaşmış olacaktır.

MATEMATİKSEL MANTIĞIN FELSEFÎ ÖNEMİ*

Bertrand Russell
Çev. Muharrem Özlük

Matematiksel mantıktan bahsederken, bu kelimeyi çok geniş bir anlamda kullanacağım. Bu kelimeyle ben Cantor'un transfinit sayılar üzerine çalışmalarını anladığım kadar, Frege ve Peano'nun mantıksal çalışmalarını da anlıyorum. Weierstrass ve onun takipçileri matematiği 'aritmetikleştirmişlerdir'; yani onlar bütün bir analizi tamsayıların incelenmesine indirgemişlerdir. Bu indirgemenin başarılması çok önemli bir aşamanın tamamlanmasına işaret etmiştir ki, bunun sonunda parçalara ayırma modasına kesinlikle kısa bir ara verilmelidir. Fakat tamsayılar teorisi özellikle sonlu ve sonsuz sayıların özelliklerinin benzerliklerini dikkate aldığımızda özerk bir anlamda oluşturulamamaktadır. Şu hâlde, daha ileri gitmek ve aritmetiği indirgemek, hepsinden de öte sayıların tanımını mantığa indirgemek gerekliydi. Bundan sonra 'matematiksel mantık' ibaresiyle, amacı aritmetiğin ve geometrinin açıkça mantığa dayalı olan

* *Bertrand Russell'ın Seçme Makaleleri* (1972); Routledge. Makalenin bir kopyası, http://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/en/russell.htm (22 Ekim 2002) adresinde bulunabilir.

kavramlar vasıtasıyla, analizi ile tümdengelimi olan herhangi bir mantık teorisini kastedeceğim. Burada müzakere etmek istediğim de işte bu modern eğilimdir.

Matematiksel mantığın yaptığı bir işin incelenmesinde matematiksel sonuçları, modern çalışmalarla ortaya çıkarılmış olan matematiksel muhakeme metodunu veya matematiksel mantığın oluşturduğu analize göre matematiksel önermelerin içkin mahiyetini dikkate alabiliriz. Konunun bu üç yönünün farkına tam olarak varmak mümkün değildir; fakat müzakerenin çerçeve işlevini görecek kadar bir ayrım söz konusudur. Ters bir sıranın en iyi olabileceği düşünülebilirdi; yani önce matematiksel önermenin ne olduğu sonra bu tip önermelerin kanıtlanmasına yarayan yöntemi, son olarak da, bu yöntemin bizi yönlendirdiği sonuçları ele almalıyız. Fakat çözmek zorunda olduğumuz problem, her sahici felsefe probleminde olduğu gibi analizin bir sorunudur ve analizin problemlerinde en iyi yöntem, sonuçlardan yola çıkan ve öncüllere ulaşan yöntemdir. Matematiksel mantıkta en yüksek kesinlik derecesine sahip olan çıkarımlardır: Nihaî öncüllere ne kadar yaklaşırsak o kadar belirsizlik ve zorlukla karşılaşırız.

Felsefî bakış açısıyla bu yeni metodun en göz alıcı sonuçları, sonsuzluk ve süreklilik hakkında oluşturabildiğimiz doğru teorilerdir. Biz biliyoruz ki, sonsuz elemanlı bir koleksiyon (seçme), meselâ, sonlu bir tamsayılar koleksiyonuyla ilgilendiğimiz zaman, bütün koleksiyon ile bunun bir parçası arasında bire-bir eşleme vardır. Örneğin, sonlu tamsayılar ile çift sayılar arasında böyle bir bağıntı vardır; çünkü sonlu bir sayı ile kendisinin iki katı arasında kurulan bağıntı birebirdir. Bu sebeple açıktır ki, sonsuz bir koleksiyon sayısı ile bu koleksiyonun bir parçasının sayısı eşittir. Önceden bunun bir çelişki olduğuna inanılıyordu; hatta Leibniz bizatihi sonsuzun bir taraftarı olmasına rağmen bu öngörülen çelişki sebebiyle sonsuz sayısını inkâr etmiştir. Fakat bir çelişkinin söz konusu olduğunu

gösterebilmek için, bütün sayıların matematiksel tümevarıma uyduğunu kabul etmeliyiz. Matematiksel tümevarımı açıklamak için, her zaman *n*'ye has bir özellik *n*+1'de de bulunuyorsa, buna o sayının 'genetik özelliği' diyelim. Böyle bir özellik, meselâ, 100'den büyük olma özelliği olabilir. Eğer bir sayı 100'den büyük ise ondan bir sonraki sayı da 100'den büyüktür. Bir genetik özellik 0 sayısında da varsa buna o sayının 'tümevarım özelliği' diyelim. Böyle bir özellik 1'de bulunmalıdır; çünkü bu kalıtsaldır ve 0'da vardır; aynı şekilde, 2'de de olmak zorundadır; çünkü 1'de vardır, vesaire. Sonuç itibariyle, günlük hayatta kullandığımız sayılar tümevarımın bütün özelliklerine sahiptir. Şimdi, sayıların tümevarım özellikleri arasında şunları bulduk: Eğer herhangi bir koleksiyonda *n* sayısı varsa, bu koleksiyonun hiçbir parçasında aynı *n* sayısı olamaz. Bundan hareketle, eğer bütün sayılar tümevarım özelliklerine sahip ise, aynı sayıya kendilerinin bir parçası olarak sahip olan koleksiyonlar vardır sonucunda bir çelişki vardır. Fakat bu çelişki, bütün tümevarım özelliklerine sahip olmayan sayıların varlığını kabul ettiğimiz takdirde gözden kaybolur. Ve sonra görülür ki, sonsuz sayısında hiçbir çelişki yoktur. Cantor, sonsuz sayısının bütün bir aritmetiğini yakın zamanda ortaya koymuş ve bu aritmetik yardımıyla sonsuzun mahiyeti hakkındaki felsefeyi antik çağlardan beri karıştıran biraz önceki problemleri tamamen çözüme kavuşturmuştur.

Süreklilik üzerine problemler ile sonsuz üzerine problemler birbiriyle çok yakından ilişkilidir ve bunların çözümleri de aynı yollardan etkilenirler. Elea'lı Zeno'nun çıkmazları ile uzayın, zamanın ve hareketin analizindeki güçlüklerin hepsi yeni süreklilik teorisiyle tamamen aşılmıştır. Bunun sebebi, çelişkili olmayan bir teorinin kurulmasıdır ki buna göre süreklilik, önceleri imkân dahilinde görülmeyen, sonsuz ayrık elemandan oluşur. Bu elemanların hepsine sürekli bir ikili ayrım ile ulaşılmaz; fakat bundan elemanların var olmadığı sonucu çıkmaz.

Bunu uzay ve zaman felsefesinde tam bir devrim takip eder. Çelişkili olduğuna inanılan realist teoriler artık böyle değiller; dahası idealist teoriler, varoluşlarına ilişkin en ufak mazeretlerini dahi kaybettiler. Bölünemeyen elemanlarına kadar analizinin mümkün olmadığına inanılan akıl, bunu matematiksel analizde mümkün kılmaktadır. Dahası aklımız, sürekliliğin olduğu yerde sıçramaların varlığını farz etmeden ve de bağımsız; aynı zamanda bölünemeyen elemanlarına kadar analizinden vazgeçmeden fiziksel, buna ilâveten algılanabilir dünyanın bir açıklamasını verebilmeyi mümkün kılmaktadır.

Hareketin ve diğer sürekli değişimlerin matematiksel teorileri, sonsuz sayısı ve süreklilliğin mahiyetine ilişkin teorilerin yanı sıra birbirine bağlı iki kavram olan bir *fonksiyonu* ve bir *değişkeni* kullanırlar. Bu düşüncelerin önemi, bir örnekle gösterilebilir. Felsefe kitaplarında hâlâ şu biçimde bir nedensellik kuralı yargısına rastlarız: 'Aynı sebep tekrarlandığı vakit aynı sonuç da tekrarlanacaktır.' Hâlbuki, hemen belirtilebilir ki, aynı sebep hiçbir zaman tekrarlanmayacaktır. Aslına bakıldığında, olan şey belli tür sebepler ile bunlardan kaynaklanan sonuçlar arasında sabit bir bağıntının bulunmasıdır. Her nerede böyle bir sabit bağıntı varsa, sonuç sebebin bir fonksiyonudur. Bu sabit bağıntıyla sonsuz sayıda sebep ve sonucu olan tek bir sonuca ulaşırız, ayrıca, böylece aynı sebebin *yinelenmesini* öngören yıpranmış hipotezden de sakınmış oluruz. Matematiğin aynı anda sonsuz veriyle baş edebilme gücünün sırrını açıklayan, bu fonksiyon düşüncesi, yani sabit bağıntı fikridir.

Fonksiyon fikrinin matematikte oynadığı rolü anlayabilmek için her şeyden önce matematiksel tümdengelim metodunu anlamalıyız. Kabul edilecektir ki, matematiksel tümevarım ile gerçekleştirilen matematiksel ispatlar bile her zaman tümdengelimlidir. Şimdi, bir tümdengelimde hemen her zaman tümdengelimin geçerliliği, bahis mevzusu olan konuya değil, yalnız konu hakkında ne söy-

lenildiğinin biçimine bağımlıdır. Örneğin, şu klâsik cümleleri ele alalım: Bütün insanlar ölümlüdür, Sokrates bir insandır, dolayısıyla Sokrates ölümlüdür. Burada açıktır ki, Sokrates'in yerine Platon'u veya Aristo'yu veya herhangi birini koysak da söylenen doğru kalır. O zaman diyebiliriz ki: Eğer bütün insanlar ölümlü ise ve eğer *x* bir insan ise *x* ölümlüdür. Bu, önermeden çıkardığımız ilk genellemedir. Fakat daha da ileri gitmek kolaydır. Yukarıdaki tümdengelimde dikkatimizi çeken, hiçbir şeyin insan ve ölümlü olma gerçeğine bağımlı olmamasıdır. Eğer herhangi bir *a* sınıfının bütün elemanları bir *s* sınıfının bir elemanı ise, ve eğer *x*, *a* sınıfının bir elemanı ise o zaman *x*, *s* sınıfının bir elemanıdır. Bu ibarede, Sokrates'in ölümlü olduğunu ispatlayan biçim ile aynı biçimdeki tümdengelimlerin temelinde yatan pür (katıksız) mantıksal biçimi elde ederiz. Pür matematiğin (veya matematiksel mantığın, zaten ikisi de aynı şey) bir önermesini elde etmek için, herhangi bir tümdengelimi, biraz önce gerçekleştirdiğimize benzer bir işleme tabî tutmalıyız; yani eğer bir ibare, bir terimi değiştirildiğinde doğruluğunu muhafaza ediyorsa, bu terim bir değişkenle, yani niteliksiz bir nesneyle değiştirilmelidir. Bu yolla sonunda pür mantığa ait bir önermeye ulaşırız; yani mantıksal sabitlerden başka bir sabit içermeyen bir önermeye. *Mantıksal sabit*in tanımını yapmak kolay değil; fakat şu kadar söylenebilir ki: Önermede bulunan ve değişken ile değiştirilmeye çalışıldığında hâlâ yerini koruyan bir *sabit mantıksaldır*. Daha kesin olursak, mantıksal sabitleri belki şu şekilde belirleyebiliriz: Bir tümdengelim alır ve terimlerini değişkenler ile değiştirirsek, sayılı birkaç adım sonra tümdengelimde hâlâ yerini muhafaza eden belli bir gruba ait sabitler olacaktır ve eğer genellemeye devam etmek istersek her zaman için bu aynı gruba ait sabitler yerlerini muhafaza edecektir. İşte bu grup, mantıksal sabitlerin grubudur. Mantıksal sabitler soyut biçimi oluşturanlardır; formel bir önerme mantıksal sabitler haricinde başka bir sabit içermeyen önermedir. Hâlihazırda, Sokrates'in ölümlü

olduğunu ispatlayan tümdengelimi şu biçime indirgedik: "x bir a ise, a'nın bütün elemanları b'nin elemanı ise bunu müteakip x bir b'dir." Bunlar mantıksal sabitlerdir ve açıktır ki, bunlar tamamen formel kavramlardır.

Şimdi, herhangi bir muteber tümdengelimin geçerliliği onun biçimine bağlıdır. Ve bu biçim, mantıksal olanlar haricindeki diğer sabitler kalmayıncaya kadar, tümdengelimdeki terimlerin değişkenlerle değiştirilmesi ile elde edilir. Ve tersi bir işlemde, her muteber tümdengelim, değişkenler üzerinde mantıksal sabitlerle işlem yapabilen, değişkenlere hipotezi doğrulayacak belli değerler verebilen bir tümdengelimden başlayarak elde edilebilir.

Bu genelleme işlemleri ile, ibaredeki esas tümdengelim elemanını, ne söylendiğinin kısmîliğine bağımlı olan elemanlardan ayırınız. Pür matematik tümdengelim elemanıyla etraflıca ilgilenir. Biz pür matematiğin önermelerini bir *pürleştirme* (saflaştırma) işlemi ile elde ederiz. Eğer ben, "işte iki şey ve işte başka iki şey; dolayısıyla toplamda etti dört şey." dersem, pür matematiğin bir önermesini dillendirmiş olmam, çünkü burada kısmî veri söz konusudur. Bu önerme şu genel önermenin bir *uygulama*sıdır: "İki şey verilirse ve başka iki şey daha, toplamda dört şey olur." Sonraki önerme pür matematiğin bir önermesiyken, ilk önerme uygulamalı matematiğin bir önermesidir.

Açıktır ki, konunun kısmîliğinde yatan şey, hipotezin gerçekleşebilmesidir ve bu bize, yalnızca hipotezin tezi gerektirdiğini iddia etmemize olanak tanımaz, ayrıca, hipotez doğru olduğunda tezin de doğru olduğunu söyler. Böyle bir iddia pür matematikte yapılmaz. Burada biz kendimizi şu farazî biçimle sınırlıyoruz: Bu ve bunun gibi bir hipotezi sağlayan herhangi bir konu, bu ve bu gibi bir tezi de sağlayacaktır. İşte bu sebeple pür matematik tamamen farazî olmuştur ve kendini tamamen niteliksiz bir nesneye yani bir *değişkene* vermiştir. Herhangi bir muteber tümdengelim kendi formunu, pür

matematiğe ait farazî bir önermede bulur; fakat, pür matematiğin kendisinde biz her ikisi de mantıksal sabitler cinsinden ifade edilmediği sürece ne hipotezi ne de tezi doğrulamaktayız.

Eğer tümdengelimleri böyle bir şekle indirgemenin neden bu kadar değerli olduğu sorulacak olursa, ben buna birbirleriyle ilişkili iki sebep vardır derim. Birincisi, herhangi bir gerçeği mümkün olduğu kadar genelleştirmek iyi bir şeydir; ikincisi, tümdengelimin bilinmeyen bir x ile oluşturulması bir emek tasarrufu meydana getirir. Biz yalnızca Sokrates'i muhakeme ettiğimiz zaman sadece Sokrates'e uygun sonuçlar elde ederiz; bu nedenle eğer Platon hakkında bir şeyler bilmek istersek muhakemeyi yeniden yapmak zorundayız. Fakat x üzerinde işlem yaptığımız zaman, hipotezi sağlayan bütün x'ler için geçerli olacağını bildiğimiz sonuçlar elde ederiz. İktisadın bildik bilimsel amilleri ile genellemeler, bizi az önce kabataslak verdiğimiz matematiksel metodun teorisine götürür.

Bu söylenenlerden sonra, pür matematikteki önermelerin içkin mahiyeti hakkında ne düşünülmesi gerektiğini görmek kolay olur. Pür matematikte biz hiçbir zaman şöyle şöyle bir nesneye uygulanabilen olguları tartışmayız; gerçek dünya hakkında herhangi bir bilgiye kesinlikle ihtiyaç duymayız. Biz sırf değişkenlerle ilgileniriz; yani, üzerinde kimi zaman icra edilen hipotezlerin kurulduğu herhangi bir konuyla ilgileniriz. Fakat şöyle şöyle bir nesne için hipotezlerin doğrulanması, tümdengelimin doğruluğu için değil sadece tümdengelimin önemi için gereklidir. İlk bakışta böyle bir bilimde her şeyin keyfî olduğu zannedilebilir. Fakat öyle değildir. Hipotezin tezi doğru bir biçimde ima etmesi gerekir. Eğer hipotezin tezi gerektirdiği hipotezler kurarsak, sadece bu yeni hipotezin yeni tezi doğru olarak gerektirmesi durumunda tümdengelimde bulunabiliriz. Gerektirme mantıksal bir sabittir ve vazgeçilmezdir. Dolayısıyla gerektirme hakkında doğru önermelere ihtiyaç duyarız. Eğer biz doğru olmayan öncülleri gerektirme önermelerinde kullanırsak

buradan kaynaklanması muhtemel sonuçlar, öncüllerden sıhhatli bir biçimde çıkarılamaz ki, bu nedenle farazî bir ispat dahi elde edilemez. Doğru öncüllere olan bu gereksinim birinci derecede öneme sahip bir ayırımı vurgulamaktadır; yani öncül ile hipotez arasındaki farkı. "Sokrates bir insandır dolayısıyla Sokrates ölümlüdür." dersek, "Sokrates bir insandır" önermesi bir öncüldür; fakat, "Sokrates bir insan ise Sokrates ölümlüdür" dediğimiz zaman, "Sokrates bir insandır" önermesi sadece bir hipotezdir. Ayrı şekilde "*p*'den *q*'yu elde edebiliyorsak, *q*'dan *r*'yi elde edebiliyorsak o zaman *p*'den *r*'yi elde edebiliriz" dediğim zaman "*p*'den *q*'yu elde edebiliriz ve *q*'dan *r*'yi elde edebiliriz" önermesi bir hipotezdir, fakat önermenin bütünü, bir hipotez değildir, ki onayladığım için gerçekte doğrudur. Bu önerme tümdengelimin bir kuralıdır ve tümdengelim kurallarının matematikte iki yönlü kullanımı söz konusudur: Hem öncüller olarak hem de öncüllerden hareketle sonuçlar elde edebilme metodu olarak. Şimdi, eğer tümdengelimin kuralları doğru olmasaydı bunları kullanarak elde edilecek sonuçlar hakikatte bunların sonuçları olmayacaktı; bu nedenle yanlış bir öncülden yola çıkarak doğru bir tümdengelimimiz dahi olmayacaktı. Matematiğin temellerini sonraki kısımlarından ayıran işte bu tümdengelim kurallarının iki yönlü kullanımıdır. Sonraki kısımlarda aynı tümdengelim kurallarını çıkarımda bulunmak için kullanırız; fakat artık onları doğrudan doğruya öncül olarak kullanmayız. Sonuç olarak sonraki kısımlarda, tümdengelimler normalde yanlış olmasa da doğrudan doğruya kullanılan öncüller yanlış olabilir, fakat temelde, öncüller doğru değilse tümdengelim de yanlış olacaktır. Bu noktada açık olmak gerekir, ki tersi durumda keyfiyet ve hipotez kısmı gerçekte olduğundan daha büyük görünebilir.

Dolayısıyla matematik, tamamıyla, sadece değişken ve mantıksal sabitler içeren önermelerden -yani katkısız biçimsel önermelerden- oluşmuştur (çünkü, mantıksal sabitler biçimi oluşturanlardır).

Bizim, bu tip önermeleri tanıyabilme gücüne sahip olmamız dikkate değerdir. Matematiksel bilginin analizinin gerektirdikleri, bilgi teorisinin ilgisi dışında değildir. Tecrübî teorilere karşılık olarak, ilk sırada belirtilebilecek olan, matematiksel bilginin duyulardan elde edilebilen verilere dayanmayan öncüllere ihtiyaç duymasıdır. Her genel önerme duyular yoluyla elde edilen bilginin sınırlarının ötesine geçer ki, duyular tamamıyla bireyle sınırlıdır. Eğer bize verilen durumun genele genişletilmesinde tümevarımın yollarından etkilendiğini söylersek, tümevarımın kendisinin deneyimler yoluyla ispatlanmadığını kabul etmek zorunda kalırız. Tümevarımın temel ilkesinin kesin biçimi her ne olursa olsun açıktır; ki ilk olarak bu ilke geneldir ve ikinci olarak –bir kısır döngü olmaksızın- tümevarımın kendisi olmadan kanıtlanamaz.

Tümevarım ilkesinin az çok şu şekilde ifade edilebileceği düşünülebilir: Bize herhangi iki özelliğin belli sayıda durumda beraber meydana geldiği bilgisi verilmiş olsun; bu özelliklerden birine sahip yeni bir durumun diğer özelliğe de sahip olması, bu özelliğe sahip olmaması durumunda daha muhtemeldir. Bunun tümevarım ilkesinin tatminkâr bir ifadesi olduğunu söylemiyorum; sadece, olasılık kavramını içeren tamamen genel bir ilke olması gerektiği için tümevarım ilkesi en azından buna benzer olmalıdır diyorum. Şimdi, açıktır ki, duyu-tecrübe ilişkisi böyle bir ilkeyi kanıtlayamaz, muhtemel dahi kılamaz; bunun tek sebebi ilkenin kendinden münhasır çoğu zaman iyi sonuç vermiş olması, ileride de muhtemelen iyi sonuç vereceğine dair bir kanaate yol açması gerçeğidir. Dolayısıyla, tümevarımla elde edilen bilgi muhakeme sonucu elde edilmiş bütün bilgilerde olduğu gibi, *apriori* ve evrensel mantık ilkelerine ihtiyaç duyar. Tümevarım ilkesini ifade etmekle biz her tümevarımı tümdengelime dönüştürürüz; tümevarım belli bir öncülü, yani tümevarım ilkesini kullanan bir tümdengelimden başka bir şey değildir.

İnsan bilgisi, şimdiye değin primitif ve kanıtlanmamış olduğu kadarıyla, iki kısma ayrılmıştır: Sadece varlığı doğrulamamızı

sağlayan tikel olayların bilgisi ve sadece veriler üzerine muhakeme yapmamızı sağlayan aklî doğruların bilgisi. Bilimde ve günlük hayatta bu iki tür bilgi birbirine karışmış durumdadır: Doğrulanmış önermeler mantıksal ilkeler vasıtasıyla belli öncüllerden elde edilmiştir. Saf algılamada biz sadece belli olayların bilgisine ulaşırız: Pür matematikte ise sadece mantıksal doğruların bilgisine ulaşırız. Böyle bir bilginin mümkün olabilmesi için kendinden aşikâr, yani kanıta ihtiyaç duymadan bilinen, mantıksal doğrular bulunmalıdır. Bu doğrular, pür matematiğin öncülleridir ve aynı zamanda konu ne olursa olsun bütün ispatlarda tümdengelim elemanıdırlar.

O zaman şimdi, sadece gözleyebildiğimiz durumlar üzerine değil bütün olan ve olabilecek durumlar üzerine iddialarda bulunmak mümkündür. Bu tür iddiaların varlığı ve tecrübe üzerinde kurulduğu söylenen hemen hemen bütün bilgi kırıntılarının bunlara ihtiyacı, geleneksel ampirizmin bir yanlış içinde olduğunu ve *apriori* ve evrensel bir bilginin var olduğunu gösterir.

Geleneksel ampirizmin bilgi teorisinde yanılmış olması gerçeğine dayanarak idealizmin doğru olduğu düşünülmemelidir. İdealizm, en azından Kant'tan türetilen her bilgi kuramı-*apriori* doğruların evrenselliği, bunların zihnin niteliklerini ifade edebilme özelliğinden kaynaklanmakta olduğunu farz eder: Kişisel şeyler böyle görünür; çünkü görünüşün mahiyetinin konuyla bağımlılığı aynı şu şekildedir: Eğer mavi gözlük takarsak her şey mavi görünür. Kant'ın sınıflaması zihnin renkli gözlükleridir; *apriori* doğrular bu gözlüklerden kaynaklanan yanıltıcı görünüşlerdir. Bunun yanı sıra bizler, herkesin aynı tür gözlüğe sahip olduğunu ve bu gözlüklerin renklerinin hiçbir zaman değişmediğini bilmek zorundayız. Kant bize bunu nasıl bildiğini söylemeye tenezzül etmemiştir.

Kant'ın hipotezinin sonuçlarını dikkate aldığımız zaman, fiziksel dünyanın tikel olgularının sahip olduğu aynı zihnî bağımsızlık ve aynı nesnelliğe, genel ve *apriori* doğruların da sahip olması gerektiği

açığa çıkar. Gerçekte, genel doğrular sadece psikolojik olguları ifade ediyor ise, biz bunların kişiden kişiye, andan ana sabit kalıp kalmadığını bilemeyiz ve hiçbir zaman bunları, bir olguyu diğer bir olgudan çıkarmada uygun bir şekilde kullanamayız. Çünkü bunlar olguları değil, olgular hakkındaki fikirlerimizi birleştirir. Mantık ve matematik bizi skolastik anlamda bir tür realizmi kabul etmeye, yani şöyle şöyle bir kısmî varoluşa doğrudan dayanmayan bir evrenseller ve doğrular dünyasının varlığını itirafa zorlar. Bu evrenseller dünyası, her ne kadar tikel verilerin *var olduğu* manada olamazlarsa da varlığını sürdürüyor olmalıdırlar. Evrenseller üzerine belirsiz sayıdaki önermelerin doğrudan doğruya bilgisine sahibiz; bu, duyumların kesinliği kadar nihaî bir olgudur. Pür matematik –ki, temel kısımlarına genelde "mantık" denir- belli evrenseller hakkında doğrudan veya ispat yoluyla bilebileceğimiz her şeyin toplamıdır.

Kendinden aşikâr doğrular üzerine bir yanlış anlamadan kaçınmak gerekir. Kendinden aşikârlık psikolojik bir özelliktir ve dolayısıyla öznel ve değişkendir. Bu bilgi için esastır; çünkü bütün bilgiler ya kendinden aşikârdır ya da bunlardan çıkarılmıştır. Fakat kendinden aşikâr bir doğrudan hareketle elde edilen bilginin basamaklarıyla mantıksal tümdengelimin basamakları aynı değildir. Ve biz, bir tümdengelim sistemi için şöyle şöyle öncüller verdiğimiz zaman bu öncüllerin, sistemde kendinden aşikâr olarak nitelenenleri oluşturduğunu zannetmemeliyiz. İlk olarak, kendinden aşikârlığın dereceleri vardır; elde edilen sonuçların daha aşikâr olması gayet muhtemeldir. İkincil olarak, çoğu sonuçların doğruluğundan emin olduğumuz durumlar olabilir; hâlbuki, öncüller sadece olası görünür ve onların olasılığı, onlardan kaynaklanan sonuçların doğruluğuna bağlıdır. Böyle bir durumda, öncüllerin, tümdengelimli bir sistemde yer alması istenilen doğru sonuçları gerektiğinden emin olabiliriz. Çoğu esas öncül, içkin olarak kendilerinden çıkarılan çoğu sonuçtan daha az açık olduğu için bu noktanın matematiğin temellerinde bir

uygulaması söz konusudur. Bunun yanı sıra, eğer tümdengelimli bir sistemde öncüllerin kendinden aşikârlığı üzerinde çok fazla durursak, sezginin (uzamsal değil mantıksal), matematikte oynadığı rol hakkında bir yanlışlığa düşebiliriz. Mantıksal sezginin rolü üzerine bir soru psikolojik bir sorudur ve tümdengelimli bir sistem oluştururken, hakkında bir fikir sahibi olunması gerekli de değildir.

Özetlersek, ilk olarak gördük ki, matematiksel mantık sonsuzluk ve süreklilik problemlerini çözüme kavuşturmuştur ve bu da elle tutulur bir uzay, zaman ve hareket felsefesini mümkün kılmıştır. İkincil olarak gördük ki, pür matematik genel itibariyle değişkenler ve mantıksal sabitler ile ifade edilmiş, yani tamamen formel önermeler sınıfı olarak tanımlanabilir. Üçüncü olarak gördük ki, matematiksel bilginin olasılığı, hem ampirizmi hem de idealizmi reddeder. Çünkü bu, insan bilgisinin tamamen duyusal olgulardan çıkarılmadığını, aksine öznel veya psikolojik anlamda hiçbir şekilde ifade edilemeyen *apriori* bilginin varlığını göstermektedir.

SONSUZ ÜZERİNE*

David Hilbert
Çev. Halim Güner

Weierstrass, derine işleyen eleştirileri sayesinde matematiksel analize sağlam bir temel sağladı. Özellikle minimum, fonksiyon ve diferansiyel konularındaki kavramlarla beraber birçok kavramı açıklayarak, sonsuz küçüklük kalkülüsünde [o zaman] hâlâ karşılaşılan noksanlıkları ortadan kaldırdı. Dahası Weierstrass, sonsuz küçüklüğü, hakkındaki bütün karışık kavramlardan kurtardı ve böylece bu kavramlardan ileri gelen zorlukları tam olarak çözdü. Eğer bugün analizde tam bir uyumluluk, irrasyonel sayılar ve limit kavramlarına dayandırılan tümdengelim metotlarının kullanımında kesinlik ve hatta değişik türdeki limitlerin en hünerli ve farklı kombinasyonlarının kullanıldığı diferansiyel kuramı ve integral denklemlerdeki en karmaşık sorulara rağmen yine de elde edilen sonuçlarda tutarlılık varsa, bu mutlu durum evvela Weierstrass'ın bilimsel çalışmalarından ileri gelmektedir.

---

* D. Hilbert, 'On the Infinite'; Benacerraf & Putnam (Ed.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Prentice-Hall, 1964. 134-151.

Lâkin Weierstrass'ın sonsuz küçük hesaplamalar için sağladığı temele rağmen analizin temellerine ilişkin tartışmalar hâlâ devam etmektedir.

Bu tartışmaların son bulmaması *sonsuz* kavramının, matematikte kullanıldığı hâliyle, tam olarak açıklığa kavuşmamış olmasındandır. Gerçekte Weierstrass'ın analizi, sonsuz büyük ve sonsuz küçük hakkındaki ifadeleri, sonlu büyüklükler hakkındaki ifadeler arasındaki ilişkilere indirgeyerek çözüyordu. Buna rağmen sonsuz, reel sayıları tanımlayan sonsuz sayılar serilerinde ve birden bire var olup tamamlanmış bütünlük olarak düşünülen reel sayı sistemi kavramında hâlâ kendini gösterir.

Weierstrass analiz için kurduğu temelde, belli bir özellikteki *bütün* reel sayılardan bahsedildiği veya belli bir özellikteki reel sayıların *varlığı* tartışıldığı zaman devreye giren ve sonsuz kavramını içeren mantıksal tümdengelim biçimlerini şartsız kabul etti ve tekrar tekrar kullandı.

Sonuç olarak, Weierstrass'ın kuramında sonsuz, başka bir tarzda yeniden ortaya çıkabilir ve Weierstrass'ın eleştirisiyle dayatılan kesinlikten kaçabilir. Bundan dolayı, bizim temelinden çözmemiz gereken şey, az önce değindiğimiz anlamda *sonsuz problemidir*. Sonsuzluk, sonsuz küçüklük kalkülüsünün limit işlemlerindeki, sonsuz büyük ve sonsuz küçük manasındadır; ki bu yalnızca bir mecaz olarak ortaya çıkmıştır; aynen bunun gibi, tümdengelim metotlarında hâlâ kullanıldığını gördüğümüz sonsuz bir bütünlük manasında sonsuzun bir illüzyon olduğunu fark etmeliyiz. Tıpkı sonsuz küçüklük ile işlemin, tam olarak aynı sonucu ve aynı şıklıktaki biçimsel ilişkilere götüren, sonlu ile işlemin yerine kullanılıyor olması gibi; genel olarak sonsuz üzerine temellendirilen tümdengelim metodu yerine, tam olarak aynı sonucu veren, diğer deyişle, aynı ispat zinciri, teorem ve formüllerin elde edildiği aynı metotları olanaklı kılan sonlu prosedürler kullanılmalıdır.

Kuramının amacı, matematiksel metotların kesinliğini temelinden sağlamaktır. Bu vazife sonsuz küçük hesaplamaların kritik döneminde bile başarılamadı. Bundan dolayı, bu kuram, Weierstrass'ın kurmuş olduğu analizin temelleri ile başarmayı umduğu ve bu yönde gerekli ve önemli bir adım atmış olduğu başarıyı tamamlamalıdır.

Fakat sonsuz kavramını açıklığa kavuşturmak için hâlâ daha genel bir perspektif uygundur. Dikkatli bir okuyucu, matematik literatürünün, kaynağını sonsuz kavramında bulan anlamsızlık ve saçmalıklarla tıka basa dolu olduğunu fark edecektir. Örneğin, yazarların titiz (rigor) matematikte -sanki kesin bir şartmış gibi- sadece *sonlu* basamaklı tümdengelim yöntemlerinin ispatta kabul edilebilirliğinde ısrar ettiklerini görürüz. Sanki daha önce birileri çıkıp da sonsuz basamaklı bir tümdengelim yapmayı başarabilmiş de!

Dahası, bizim uzun zamandır terk edildiğini düşündüğümüz eski itirazlar değişik şekillerde hâlâ ortaya çıkıyor. Örneğin şu, son zamanlarda ortaya çıktı: Bir kavramı risksiz, yani herhangi bir çelişkiye yol açmadan sunmak mümkün olsa bile ve hatta birileri onun sunumunun çelişkiye yol açmadığını kanıtlayabilse bile, bu kavramın sunumu bundan dolayı hâlâ gerekçelendirilmiş sayılmaz. Bu itiraz bir zamanlar karmaşık-sanal sayılara yapılan şu itirazla tamamen aynı değil mi: 'Onların kullanımının çelişkilere yol açmadığı doğrudur. Fakat bununla birlikte onların sunumu hayalî büyüklükler var olmadığından yersizdir.' Eğer, tutarlılığı kanıtlamanın dışında, bir ölçümü gerekçelendirme sorusunun bir anlamı varsa, bu ancak ölçümün uygun başarıya eşlik edip etmediğinden emin olmaya bağlı olabilir. Gerçekte böyle bir başarı esastır; çünkü matematik ve her yerde olduğu gibi, başarı, kararını herkesin kabul ettiği yüce bir divan gibidir.

Bazı insanların hayalet görmesi gibi, farklı bir yazar, iddiaların olmadığı yerlerde bile çelişkiler gördüğünü zanneder; meselâ, 'tu-

tarlı işlem görmeyi' özel bir kabul olarak ele aldığı somut duyu dünyasında. Ben kendim daima şunu kabul etmişimdir: Sadece yargılar, ve tümdengelimler yoluyla yargılara geçişe izin verdiği kadarıyla hipotezler, birbirleriyle çelişebilirler. Olgu ve olayların kendi içlerinde çelişkili olabilecekleri görüşü bana dikkatsiz düşünmenin esas bir örneğiymiş gibi görünüyor.

Yukarıdaki yorumlar, sadece özelleştirilmiş bilimsel ilgilerin alanına ait olmak yerine, *sonsuzun doğasının* tam bir açıklamasının, *insan zihninin kendi vakarı* için gerekli olduğu olgusunu ortaya koymak niyetindedir.

Çok eski zamanlardan beri, sonsuz insanlığın *hislerini* diğer sorulardan daha çok cezp etmiştir. Hemen hemen hiçbir düşünce, zihni bu kadar çok tahrik etmemiştir. Yine diğer hiçbir *kavram*, sonsuzun *açıklama* gereksiniminden daha fazla gereksinim duymamıştır.

Sonsuz doğasını açıklama görevine dönmeden önce başta sonsuza gerçekte nasıl bir anlam verildiğine kısaca değinelim. İlk önce, fizikten ne öğrenebileceğimizi görelim. Kişinin doğal olay ve maddelerden edindiği ilk nahif izlenimi, kalıcılık ve sürekliliktir. Bir parça metal veya bir miktar sıvıyı düşündüğümüz zaman, onların sonsuz bölünebilirliği, onların en küçük parçalarının bütünün gösterdiği tüm özellikleri gösterdiği izlenimini ediniriz. Fakat bilim adamları madde fiziğinin inceleme yöntemlerinin yeterince inceltildiği yerlerde kendi çabalarının eksikliğinden değil, nesnelerin doğasından ileri gelen bölünürlük sınırları ile karşılaştılar. Sonuç olarak, modern bilimin yönelimini sonsuz küçükten kurtulma olarak bile yorumlayabiliriz. Eski *nature non facit saltus** prensibinin yerine aksini bile iddia edebiliriz; yani 'doğa sıçramalar yapar'.

Bütün maddelerin 'atom' denilen küçük yapı bloklarından meydana geldiği ve bütün değişik makroskobik objelerin bu atomların

* Aristo'ya atfedilen Lâtince bu söz, '*doğa sıçrama yapmaz*' manasına gelir. Ç.N.

birleşmesi ve bağlanmalarından oluştuğu yaygın olarak bilinir. Yine de fizik, madde atomculuğunda durmadı. Geçen yüzyılın sonunda, ilk bakışta çok garip görünen elektrik atomculuğu ortaya çıktı. O zamana kadar elektrik için sürekli aktif bir etmen modeli uygulandı ve elektrik sıvı bir akım olarak düşünüldü. Ama daha sonra elektriğin pozitif ve negatif *elektronlardan* müteşekkil olduğu gösterildi.

Elektrik ve maddeye ek olarak, fizikte enerjinin korunuşunu içeren başka bir varlık, yani enerji vardır. Fakat enerjinin bile sonsuz bölünürlüğe imkân vermediği kabul edilmiştir. Planck, *enerjinin quantasını* keşfetmiştir.

Böylece, sonsuz küçüklüğü kavramak için gerekli olan bölünebilirliğin bir çeşidine imkân veren homojen bir süreklilik gerçekte hiçbir yerde bulunmaz. Bir sürekliliğin sonsuz bölünebilirliği sadece düşüncede varolan bir işlemdir. Sadece bir düşüncedir ki, aslında, doğa, gözlemlerimiz ile fiziksel ve kimyasal deneylerimizin sonuçları tarafından yanlışlanır.

Sonsuzun doğada bulunup bulunmaması sorusuyla karşılaştığımız ikinci yer, evrenin bir bütün olarak göz önüne alınmasıdır. Burada evrenin sonsuz büyüklükte bir şeyi kapsayıp kapsamadığını göstermek için evrenin genişliğini düşünmeliyiz. Fakat yine de burada modern bilim, özellikle astronomi, soruyu yeniden gündeme getirdi ve soruyu eksik metafiziksel spekülasyonlarla değil, deneyleme ve doğa kanunlarının uygulamasına dayandırarak çözmeye çabaladı. Burada yine sonsuzluğa karşı ciddî eleştiriler yapılmıştır. *Öklitçi* geometri uzay sonsuzdur postulatını gerekli kılıyor. Öklitçi geometri tutarlı bir kavramsal sistem olmasına rağmen, bu, geometrinin gerçeklikte yürürlükte olması sonucunu doğurmuyor. Gerçek uzayın Öklitçi olup olmadığı sadece gözlem ve deney yoluyla gösterilebilir. Sadece spekülasyonlarla uzayın sonsuzluğunu ispata kalkışmak bariz yanlışlıklar içerir. Belirli bir parça uzayın dışında daha fazla uzay olması olgusundan, uzayın sonsuz olduğu değil sadece sınırsız ol-

duğu çıkarılır. Sınırsızlık ve sonluluk uyuşturulabilir. *Eliptik* denilen geometride matematiksel araştırmalar, doğal bir sonlu evren modeli sağlarlar. Bugün Öklit geometrisinin terk edilmesi artık sadece matematiksel veya felsefî bir spekülasyon değil, lâkin, aslında evrenin sonluluğu sorunuyla hiçbir alakası olmayan düşünceler tarafından öneriliyor. Einstein, Öklit geometrisinin terk edilmesi gerektiğini gösterdi. Einstein kendi yer çekimsel kuramının temelinde, kozmolojik sorunları irdeler ve sonlu bir evrenin mümkün olabileceğini gösterir. Dahası, astronominin bütün sonuçları evrenin eliptik olduğu postulatıyla kusursuz bir şekilde uyuşturulabilir.

Evrenin sonluluğunu, iki yaklaşım ile, yani sonsuz küçük ve sonsuz büyüklüğü göz önünde bulundurarak ortaya koyduk. Fakat sonsuz hâlâ düşüncemizde zarurî bir rol oynayabilir ve düşüncemizde gerekçelendirilmiş bir yer işgal edebilir. Matematikte bu durumun nasıl olduğunu görelim. İlk önce, insan zihninin en saf ve en basit ürünü olan sayı kuramını sorgulayalım. Sayı kuramının zengin çeşitlilikteki formülleri arasından temel bir formül olan şunu düşünelim:

$1^2+2^2+3^2+ \ldots +n^2=[n.(n+1)(2n+1)]/6$

Biz n yerine herhangi bir tam sayı bırakabileceğimizden (n=2 veya n=5 gibi), bu formül zımnî olarak sonsuz sayıda önerme içerir. Bu bir formül için esas bir karakteristiktir. Bu özellik, formülün, aritmetik bir problemin çözümünü temsil edebilmesini sağlar ve kendi ispatı için özel bir fikri zorunlu kılar. Öte yandan,

$$1^2+2^2=[2.3.5]/6$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=[5.6.11]/6$$

türü bireysel sayısal denklemler, hesaplama ile basitçe doğrulanabilirler ve bu nedenle bunların özel hiçbir önemi yoktur.

İdeal elementlerin önemli ve verimli metotlarında görülen sonsuz kavramının bütünüyle değişik ve yekta bir düşüncesiyle karşılaşıyoruz. İdeal elementlerin metodu basit yüzey geometrisinde bile

kullanılıyor. Yüzeyin noktaları ve düz çizgileri başlangıçta gerçek, sahiden var olan nesnelerdir. Bu noktalar ve düz çizgiler için geçerli olan aksiyomlardan bir tanesi bağlantı aksiyomudur; iki noktadan bir ve sadece bir tane düz çizgi geçer. Bu aksiyomlardan, 'iki düz çizgi en çok bir noktada bir birini keser'i çıkarabiliriz. İki düz çizgi daima bir noktada kesişir diye bir teorem yoktur; çünkü iki düz çizgi pekâlâ paralel olabilir. Fakat hâlâ şunu biliyoruz ki, ideal elementlerin, yani sonsuz uzunlukta çizgiler ve sonsuzlukta noktaların sunuşu sayesinde, iki düz çizgi yalnız bir ve sadece bir noktada kesişir teoremini evrensel olarak doğru olarak çıkarabileceğimizi biliyoruz. Bu ideal 'sonsuz' elementler ile bağlantı kuralları sistemini, basit ve olabildiğince açık yapma avantajı vardır. Dahası, bir nokta ile bir düz çizgi arasındaki simetrilik sayesinde, geometri için çok kullanışlı olan ikilik prensibi ortaya çıkarılır.

İdeal elementlerin kullanımına diğer bir örnek, bir denklemin köklerinin varlığı ve sayısı hakkındaki teoremleri basitleştirmeye yarayan cebirin bildik *kompleks-sanal* büyüklükleridir.

Geometride ideal bir noktayı tanımlamada sonsuz sayıda çizgiler, yani birbirine paralel düz çizgiler kullanılır; aynı şekilde sonsuz çokluktaki sayıların belirli sistemleri bir *ideal sayıyı* tanımlamada kullanılır. İdeal elementler prensibinin bu kullanımı, hepsinin içinde en dâhice olanıdır. Eğer cebirde bu prensibi sistemli olarak uygularsak, tam olarak 1, 2, 3, 4.... gibi bilinen bütün sayılar için kullanılan basit ve bildik bölme kurallarını elde ederiz. Biz şimdiden yüksek aritmetiğin alanı içindeyiz.

Şimdi matematiğin en estetik ve zarif inşa edilmiş yapısına, yani analize geliyoruz. Zaten sonsuzluğun analizde baş rolü oynadığını biliyorsunuz. Tam olarak söylemek gerekirse matematiksel analiz sonsuzun bir senfonisidir.

Sonsuz küçük hesaplamalarında yapılan harika işlemler, sonsuz sayıda elementlerin matematiksel sistemleri ile işlem yapmadan

doğar. Fakat, sonsuzu 'çok büyük' ile tanımlama akla çok yatkın gözükse bile, er geç eski sofistlerde de kısmen bilinen uyuşmazlıklar, yani sonsuz küçük hesaplamaların paradoksları diye adlandırılan sorunlar baş gösterir. Fakat sonsuz için geçerli olan (örneğin, parça bütünden daha küçüktür, bir minimum ve maksimumun varlığı, toplama veya çarpmanın terimlerinin kendi arasında değiştirilebilirliği) birçok teoremin, dolaysız ve sınırsızca sonsuzluğa genişletilemeyeceğinin kabulü, temel ilerlemeyi işaretlemekteydi. Bu yazının başında bu soruların, Weierstrass'ın dikkate değer keskinliğiyle, bütünüyle açıklanmış olduğunu söylemiştim. Bugün analiz sadece kendi aralığında yanılmaz olmakla kalmaz, ayrıca sonsuzluğun kullanımı için pratik bir araç olmuştur.

Fakat analiz tek başına sonsuzun doğası hakkında en derin anlayışı bize sağlamaz. Bu anlayış genel bir felsefî düşünüş yoluna daha yakın ve sonsuz hakkındaki soruların bütün karmaşıklığına yeni bir ışık tutmak için dizayn edilmiş bir disiplin ile bize kazandırılacaktır. Bu disiplin, George Cantor'un kümeler kuramıdır. Bu yazıda biz sadece, Cantor doktrininin merkez çekirdeğini oluşturan kümeler kuramının emsalsiz ve orijinal parçasıyla, yani *transfinit* sayılar kuramıyla ilgileniyoruz. Bu kuram, sanırım matematiksel deha'nın en güzel ürünü ve insanın katıksız zihinsel aktivitelerinin en mükemmel başarılarından bir tanesidir. Peki bu kuram nedir?

Cantor'un sunduğu yeni sonsuz kavramını kısaca karakterize etmek isteyen biri şunu söyleyebilir: Biz sonsuz küçük ve sonsuz büyüklük ile sadece sınırlayıcı kavramlar olarak, bir oluş olarak, bir meydana gelme olarak ilgileniyoruz, diğer deyişle, *potansiyel sonsuz* ile ilgileniyoruz. Fakat bu gerçek sonsuz değildir. Gerçek sonsuz ile; 1, 2, 3, 4, ... gibi sayıların bütünlüğünün kendisini tamamlanmış bir birlik olarak veya bir aralığın noktalarını hep birden var olan şeylerin bir bütünlüğü olarak göz önünde bulundurduğumuz zaman karşılaşırız. Bu çeşit bir sonsuzluk, *gerçek sonsuzluk* olarak bilinir.

Matematiğin temellerindeki çalışmalarıyla çok bilinen iki matematikçi Frege ve Dedekind birbirlerinden bağımsız olarak, aritmetiğe sezgiden ve deneyimden bağımsız bir temel sağlamak için gerçek sonsuzluğu kullandılar. Bu temel yalnızca saf mantığa dayandırılmış ve bu temelde tamamen mantıksal tümdengelim yöntemleri kullanılmıştır. Dedekind daha da ileri giderek, sonlu sayı kavramını sezgiden almayıp bunu sonsuz bir küme fikri ile mantıksal olarak türetti. Fakat sistematik olarak gerçek sonsuz fikrini geliştiren Cantor'dur. Önceden bahsi geçen sonsuzun iki örneğini düşünelim:

1.) 1, 2, 3, 4 ...

2.) 0-1 aralığının noktaları veya yine aynı anlama gelen 0 ile 1 arasındaki reel sayıların bütünü.

Bu örnekleri onların büyüklükleri açısından ele almak oldukça doğaldır. Fakat böyle bir ele alış bütün matematikçilerin bugün aşina olduğu şaşırtıcı sonuçları açığa vurur. Bütün rasyonel sayılar kümesini, yani 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, ... 3/7, ..., kesirlerini yalnız genişlikleri açısından ele aldığımız zaman bu kümenin tam sayılar kümesinden daha büyük olmadığını fark ederiz. Böylece, rasyonel sayıların genel yolla sayılabilir, yani numaralandırılabilir olduğunu söyleriz. Aynı durum sayıların bütün kökleri için geçerlidir; gerçekte bütün cebirsel sayıların kümesi için bile geçerlidir. İkinci örnek birincisiyle benzeşir. Oldukça şaşırtıcıdır ki, bir karenin veya küpün bütün noktalarının kümesi, 0 ile 1 aralığının noktalar kümesinden daha büyük değildir. Benzer şekilde, bu, bütün sürekli fonksiyonların kümesi için de böyledir. Bu durumları ilk öğrendiğinizde büyüklük bakış açısından eşsiz bir tane sonsuz olduğunu düşünebilirsiniz. Aslında hiç de öyle değildir! (1) ve (2) örneklerdeki kümeler, bizim deyimimizle, 'eş' değillerdir. İşin doğrusu, ikinci küme birinci kümeden daha büyük olmasından dolayı numaralandırılamaz. Tam bu noktada, Cantor'un kuramında yeni olan ve ona özgü olanla karşılaşırız. Bir aralığın noktaları alışkın olduğumuz yolla, yani 1, 2, 3, ...

diye sayılamaz. Fakat gerçek sonsuzluğu kabul ettiğimiz için burada durmak mecburiyetinde değiliz. Biz 1, 2, 3, ... diye saydığımız bu nesneleri, belirli bir sırada numaralandırılmış ve hep birden varolan nesneler olarak düşünebiliriz. Cantor'u takip ederek bu düzenin türüne ω dersek, doğal olarak saymaya ω+1, ω+2, ω+3, ... ve ω+ω veya ω.2'ya kadar devam ederiz; ve tekrar

$(\omega.2)+1, (\omega.2)+2, (\omega.2)+3, \ldots (\omega.2)+\omega$ *veya* $\omega.3$

ve daha da ileride

$\omega.2, \omega.3, \omega.4, \ldots \omega.\omega.$ veya $\omega^2, \omega^2+1, \ldots,$

böylece sonunda bu tabloyu elde ederiz:

$1, 2, 3, \ldots$

$\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots$

$\omega.2, (\omega.2)+1, (\omega.2)+2, \ldots$

$\omega.3, (\omega.3)+1, (\omega.3)+2, \ldots$

.

.

.

$\omega^2, \omega^2+1, \ldots$

$\omega^2+\omega, \omega^2+\omega.2, \omega^2+\omega.3, \ldots$

$\omega^2.2, (\omega^2.2)+1, \ldots$

$(\omega^2.2)+\omega, (\omega^2.2)+(\omega.2), \ldots$

$\omega^3, \ldots$

$\omega^4, \ldots$

$\omega^\omega, \quad \omega^{\omega^\omega}, \quad \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \quad \ldots\ldots$

Bunlar Cantor'un ilk transfinit sayıları veya onun deyişiyle ikinci sayı sınıfının sayılarıdır. Saymayı sıradan numaralandırılabilir sonsuzun ötesine genişleterek, yani sıradan sonlu saymanın uygun devamlılığını doğal ve eşsiz bir gösterimle, transfinit sayılara kolayca ulaştık. Şimdiye kadar bir kümenin elemanlarını sadece birinci, ikinci, üçüncü,..... diye sayarken şimdi (ω+1)inci, ... ω^ω inci elemanını da sayıyoruz.

Verilen bu gelişmelerle, insan, birilerinin bu transfinit sayıları kullanarak normal yolla sayılamayan şu kümeleri gerçekten sayıp sayamayacağını merak eder.

Bu kavramların temellerinin üzerine Cantor sonsuz ötesi sayıların kuramını oldukça başarılı bir şekilde geliştirdi ve onlar için tam bir kalkülüs icat etti. Frege, Dedekind ve Cantor'un Herkülvarî işbirlikleri sayesinde, sonsuz kral yapıldı ve olağanüstü zaferin saltanatının keyfi çıkarıldı. Meydan okuma yarışında, sonsuz başarının baş döndüren doruğuna ulaştı.

Fakat tepkiler de eksik olmadı; dahası gerçekte çok dramatik bir biçim aldı. Tepkiler, sonsuz küçükler kalkülüsünün gelişmesine karşı tepkilere mükemmel bir benzerlikle ortaya kondu. Önemli ve yeni sonuçların keşfindeki hazzın içinde matematikçiler tümdengelim metotlarının geçerliliğine çok az dikkat ettiler. Çünkü âdet olmuş tanımların ve tümdengelim metotlarının kullanımının sonucu olarak çelişkiler aşama aşama ortaya çıktı. Küme kuramının paradoksları denilen çelişkiler ilk başta gözden kaçmış olarak düşünülse bile işlemsel olarak çok hassas ve ciddî oldu. Özellikle Zermelo ve Russell tarafından keşfedilen bir çelişki, matematik dünyasında öğrenildiği zaman doğrudan doğruya yıkıcı bir etki bıraktı. Bu paradokslarla karşılaşan Dedekind ve Frege kendi bakış açılarını tam olarak terk ettiler ve geri çekildiler. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen* adlı çığır açıcı tezinin yeni bir baskısının yayımlanmasına izin vermeden önce, uzun zaman tereddüt etti. Bir sonsözde, Frege de *Grundgesetze der Mathematik* adlı kitabının yönünün yanlış olduğunu kabul etmek zorunda kaldı. Cantor'un doktrini de tüm yönlerden saldırıya uğradı. Bu etki o kadar şiddetliydi ki, en basit ve kullanıma elverişli fikirleri ve matematiğin en basit ve en önemli tümdengelim yöntemlerini bile tehdit etti ve onların kullanışlı kanuna aykırı sayılma noktasına geldi. Eski düzenin savunucuları da vardı tabi. Fakat onların savunma taktikleri çok fazla cesaretsizdi ve hayatî önem

taşıyan noktalarda bir ittifak halinde asla şekillenmedi. Paradokslar için çok fazla değişik çareler önerildi ve bunları açıklamak için sunulan yöntemler birbirlerinden çok farklıydı.

Kabul etmeliyiz ki, paradokslara karşı inşa ettiğimiz şu anki durum tahammül edilmezdir. Bir düşünün herkesin öğrendiği, öğrettiği, gerçekliğin ve kesinliğin mükemmel örneği olan matematiğin kullandığı tanımlar ve tümdengelim yöntemleri saçmalıklara yol açıyor. Eğer matematiksel düşünce kusurlu ise biz kesinliği ve gerçekliği nerede bulacağız?

Fakat bilimimize ihanet etmeden paradokslara karşı koymanın tam olarak tatminkâr bir yolu vardır. Bu yolu bulmamıza yardım edecek ve nasıl bir yol alacağımızı gösterecek tavırlar ve istekler şunlardır:

1. Her nerede kurtulma umudu varsa, verimli tanımları ve tümdengelim yöntemlerini dikkatlice inceleyeceğiz. Onlara bakacak, güçlendirecek ve kullanışlı kılacağız. Kimse bizi Cantor'un bizim için oluşturduğu cennetten kovamayacaktır.

2. Tümdengelimlerimiz için kimsenin şüphe duymadığı ve çelişkilerin ve paradoksların sadece bizim kendi dikkatsizliğimizden dolayı çıktığı sıradan temel sayı kuramında var olan kesinliği matematiğin tümünde kurmalıyız.

Açıktır ki, bu amaçlara, ancak *sonsuzun doğası* tam olarak izah edildikten sonra ulaşılabilir.

Hangi deneyim, gözlem veya bilgi uygulanırsa uygulansın sonsuzun hiçbir yerde gerçeklikte bulunmadığını daha önce görmüştük. Nesne hakkındaki düşünce, nesnenin kendisinden bu kadar farklı olabilir mi? Kısaca, düşünce gerçeklikten bu kadar çok uzaklaştırılmış olabilir mi? Daha çok, bazı reel hislerde sonsuz ile karşılaştığımızı düşündüğümüzde, realitede aşırı derecede büyük ve aşırı derecede küçük ebatlarla sık sık karşılaşmamız olgusuyla baştan çıktığımız ziyadesiyle açık değil mi?

Mantıksal tümdengelim materyallerini gerçek şeylere veya olaylara uyguladığımız zaman her nasılsa bizi aldatıyor veya güç durumda bırakıyor mu?[1] Hayır! Özdeksel mantıksal tümdengelim zarurîdir. Bizi sadece keyfî soyut tanımlamalar, özellikle şu sonsuz sayıda nesne içerenleri biçimlendirdiğimiz zaman aldatır. Böyle durumlarda özdeksel mantıksal tümdengelimi makul olmayan yerlerde kullanmışızdır. Yani onun kullanımı için gerekli olan ön koşullara yeterince dikkat etmemişizdir. Böyle ön koşulları hesaba katmamızın gerekli olduğunu kabullenmemizle beraber kendimizi filozoflar ile, özellikle Kant ile uyuşma içinde buluruz. Kant kendi doktrininin ayrılmaz bir parçası olarak, matematiğin mantıktan bağımsız verilen bir konu içeriğini ele aldığını öğretti. Bundan dolayı matematik hiçbir zaman yalnız mantığa oturtulamaz. Netice olarak Frege ve Dedekind'in matematiği böyle mantığa oturtmaya kalkışmaları başarısızlığa mahkumdu.

Mantıksal tümdengelimi kullanmak ve mantıksal işlemleri başarmak için ilâve bir ön koşul olarak mefhumun içinde bazı şeyler, yani bütün düşüncelerden evvel direkt olarak denenmiş gibi sezilen mantıksal olmayan bazı yapısal objeler verilmelidir. Mantıksal tümdengelimin kesin olması için bu objeler bütün yönleriyle görülebilmeli ve özellikleri, farklılıkları, sıraları ve hudutları objelerin kendi kendileriyle beraber, bir şeyin başka bir şeye indirgenememesi ve hiçbir indirgeme gerektirmemesi olarak verilmelidir. Bu benim, sadece matematik için değil bütün bilimsel düşünce, anlama, haberleşme için gerekli gördüğüm temel felsefedir. Matematiğin konusu, bu kurama uygun olarak, yapıları dolaysız olarak açık ve tanınabilir somut sembollerin kendileridir.

1 [Bu yazı boyunca, Almanca 'inhaltlich' kelimesi 'materyal (özdeksel)' veya 'materyal olarak' kelimeleri ile karşılanmıştır. Kelimeler bu amaca hizmet ederler. Öz veya içerik ve mantıksal biçim arasındaki klâsik ayrımı belirtmek için kullanılırlar. –İngilizce'ye çevirenin notu.]

Sıradan sonlu sayı kuramının doğası ve metodunu düşünelim. Bu kuram kuşkusuz, sezgici özdeksel göz önüne almalar yoluyla sayısal yapılardan inşa edilebilir. Fakat şuna emin olabiliriz ki, matematik yalnızca sayısal denklemleri içermiyor ve yalnızca bunlara indirgenemez. Yine de matematiğin tam sayılara uyguladığımız zaman daima doğru sayısal denklemler veren bir cihaz olduğu iddia edilebilir. Fakat bu durumda bile matematiğin gerçekte daima doğru denklemler verdiğinden yeterince emin olmak için bu cihazın yapısını incelememiz gereklidir. Böyle bir incelemeyi tamamlamayla sadece aynı somut maddî sonlu metotları, sayı kuramının inşasında sayısal denklemleri türetmek için kullanıldığı şekliyle, elde ederiz. Gerçekte bu bilimsel ihtiyaç yerine getirilebilir, yani-sayı kuramının doğruluğuna vardığımız yol olan- saf sezgisel ve sonlu bir yolda matematiksel cihazın geçerliliğini garanti eden bakışları elde etmek olanaklıdır.

Sayı kuramını daha yakından inceleyelim. Sayı kuramında;

1, 11, 111, 1111

gibi sayısal sembollere sahibiz ki, her bir sayısal sembol, sadece 1'leri içermesi olgusuyla, sezgisel olarak tanınabilir. Konumuzun ana temasını oluşturan bu sayısal semboller, kendi içlerinde bir anlam taşımıyorlar. Fakat bu sembollere ek olarak, anlamı olan ve iletişimi sağlayan diğer sembollere, basit sayı kuramında bile, ihtiyaç duyarız; örneğin, 2 sayısal sembolü 11 sayısal sembolü için ve 3 sayısal sembolü 111 sayısal sembolü için kısaltma olarak kullanılır. Dahası +, = ve > gibi sembolleri, ifadeleri anlatmak için kullanırız. Kısaltmaları hesaba kattığımız zaman 2+3=3+2 ile 2+3 ve 3+2 olgusunun aynı sayısal sembol yani 11111 sayısal sembolü olduğunu anlatırız. Benzer şekilde 3>2; 3 sembolü olgusunun yani 111'in, 2 sembolünden yani 11 sembolünden daha uzun olduğunu anlatmayı sağlar, başka bir deyişle, ikinci sembol birinci sembolün bir alt parçasıdır.

Biz *a*, *b*, *c* harflerini de iletişim için kullanırız. Böylece, *b*>*a* bize *b* sayısal sembolünün *a* sayısal sembolünden daha uzun olduğunu anlatır. Bu bakış açısıyla *a*+*b*=*b*+*a* ile sadece şunu kastederiz: *a*+*b* sayısal sembolü *b*+*a* sayısal sembolüyle aynı uzunluktadır. Bu iletişimin içeriği maddî tümdengelim ile ispatlanabilir. Aslında, bu sezgisel maddî ele alış çeşidi bizi oldukça uzağa götürebilir.

Yine de size bu sezgisel metodun nerede aşıldığına dair bir örnek vereyim. Bilinen en büyük asal sayı 39 rakamlı olan,

p=170 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884 105 727'dır.•

Öklit sayesinde iyi bilinen bir metot ile, 'p+1 ile p!+1 arasında en az yeni bir asal sayı vardır' ifadesinin ispatını tamamen sonlu çerçevede kalarak verebiliriz. Bu ifadenin kendisi bizim sonlu yaklaşıma çok iyi uyar; 'vardır' ifadesi, p+1 veya p+2 veya p+3, ... veya p!+1'in asal sayı olduğu kesindir ifadesini kısaltmayı sağlar. Ayrıca bunu söylemek; "bir asal sayı vardır ki

1. >p, ve aynı zamanda
2. ≤p!+1'dir

demek aynı anlama geldiği aşikâr olduğu için, sadece Öklit teoreminin ifade ettiğinin bir parçasını ifade eden teoremi (yani p'den büyük bir asal sayı vardır teoremini) formüle etmemize yol açar. p'den büyük bir asal sayı vardır teoremi, içeriği yönünden çok zayıf bir ifade olduğu hâlde -Öklit teoreminin öne sürdüğü fikrin yalnızca bir parçasını öne sürüyor- ve Öklit teoreminden bu teoreme geçiş oldukça zararsız görünmesine rağmen, yine de bu geçiş, parçalı ifade bağlamından koparılsa ve bağımsız bir fikirmiş gibi göz önünde bulundurulursa, bu, transfinit içine bir sıçrayış yapılması demektir.

• Bu tespit, doğal olarak, yazıldığı zamana aittir. Bu yazı yayına hazırlandığı zaman, bilinen en büyük asal sayı, Michael Cameron adlı 20 yaşındaki Kanadalı gencin 2001 Kasım ayında ispatladığı, basamak sayısı 4 milyondan fazla olan $2^{13,466,917}$-1 sayısıdır. (http://www.mersenne.org./prime.html, Kasım 2002) Ç.N.

Bu nasıl olabilir? Çünkü, 'vardır'! gibi varoluşsal bir ifadeye sahibiz. Doğru, Öklit teoreminde de benzer ifadeye sahiptik. Fakat oradaki 'vardır' önceden bahsettiğimiz gibi, p+1 veya p+2 veya p+3, ... veya p!+1 asal sayıdır ifadesi için bir kısaltmaydı. Aynen 'bu tebeşir parçası veya bu parça veya bu parça ... veya bu parça kırmızıdır' ifadesinin yerine kısaca 'bu tebeşir parçalarının arasında bir kırmızı parça vardır' demek gibi. Bir sonlu bütünlüğü içinde belirli özellikli bir obje 'vardır' gibi bir ifade sonlu yaklaşımımıza kusursuz bir uyum sağlar. Fakat 'ya p+1 veya p+2 veya p+3 ... veya (sonsuza değin) ... belirli bir özelliğe sahiptir' gibi bir ifadenin kendisi sonsuz bir mantıksal üründür. Sonsuzluğun içinde böyle bir genişletme, ilâve açıklama ve tedbirler mevcut olmadıkça, kalkülüsteki sonlu ürünleri sonsuz ürünlere genişletmeden daha kabul edilebilir değildir. Buna göre, böyle genişletmeler genellikle anlamsızlığa sebep olurlar.

Bizim sonlu bakış açımızdan, 'belirli özellikli bir sayı vardır' biçiminde bulunan bir ifade, genel olarak sadece parçalı bir ifade anlamına gelir; yani daha belirli bir ifadenin bir parçası gibi göz önünde bulundurulur. Fakat birçok maksat için daha kesin formüle etmeler gereksiz olabilir.

İçeriği sonlu bir kopuş (disjunction) ile ifade edilemeyen varoluşsal bir ifadeyi analiz ederken sonsuz ile karşılaşırız. Benzer olarak genel bir ifadeyi, yani sayısal sembolü işaret eden genel bir ifadeyi, olumsuzlayarak transfinit bir ifade elde ederiz. Örneğin, eğer *'a'* bir sayısal sembol ise o zaman *a+1=1+a* evrensel olarak doğrudur ifadesi, bizim sonlu perspektifimizden *olumsuzlanmaya yetersizdir*. Bu ifade sonsuz sayıda sayısal denklemin 've' ile birleşimi olarak değil, fakat sayısal bir sembol verildiğinde bir şeyleri öne süren sadece varsayımsal bir karar olarak yorumlanabileceğini düşündüğümüzde, bunu daha iyi anlayacağız.

Bundan dolayı, sonlucu bakış açımızdan, hemen şimdi verilen bir denklem gibi bir denklemin, ki orda keyfî bir sembol ortaya

çıkar, bütün semboller için geçerli olduğu veya karşı bir örnekle çürütüldüğünü iddia edemeyiz. Böyle bir fikir ileri sürme, hariç tutulan orta yasasının bir uygulaması olmakla, denklemin evrensel geçerliliği ifadesinin *olumsuzlanmaya açık* olduğu ön kabullenmesine dayanır.

Her hâlükârda şunu not etmeliyiz: Eğer sonlucu ifadeler alanının içinde kalırsak, ki gerçekte kalmalıyız, kural olarak çok karmaşık mantıksal kanunlara sahip olacağızdır. Onların karmaşıklıkları, 'hepsi' ve 'vardır' gibi ifadelerle birleştirildiği ve bunlar diğer ifadelerin içine yuvalanmış olarak ortaya çıktığı zaman kontrol edilemez bir hâl alır. Kısaca, Aristo'nun öğrettiği ve insanların düşünmeye başladıklarından beri kullandıkları mantıksal yasalar geçerli değildir. Tabîî ki, sonlucu ifadeler alanı için kabul edilebilir mantıksal yasalar geliştirebilirdik. Fakat böyle bir mantığı geliştirme, Aristo mantığının basit yasalarını, kullanımını bırakmak istemediğimiz için fayda sağlamaz. Ayrıca hiç kimse -velev ki, meleklerin dilini konuşsa bile- insanları, genel ifadeleri olumsuzlanmaktan veya kısmî kararları oluşturmaktan veya *tertium non datur*'u (*'hariç tutulan orta ilkesi'* -Ç.N.) kullanmaktan vazgeçiremezdi. Peki o hâlde ne yapabiliriz?

Matematikçi olduğumuzu ve matematikçiler olarak kararsız durumlarda sık sık kaldığımızı ve bu durumlardan ideal elementlerin dâhice metotları sayesinde kurtulduğumuzu hatırlayalım. Bu yazının başında bu metodun kullanımının bazı meşhur örneklerini size göstermiştim. Tıpkı, cebirin kanunlarını en basit şeklinde korumak için $i=\sqrt{-1}$'in sunulması gibi (örneğin, bir denklemin köklerinin varlığı ve sayısı hakkındaki yasalar); ideal çarpanların cebirsel tam sayılarda bölünebilmenin basit kurallarını korumak için sunulması gibi (örneğin, 2 ve $1+\sqrt{-5}$ sayıları için müşterek ideal bir bölen verilmiştir; gerçekte böyle bir bölen olmadığı hâlde); benzer şekilde Aristo mantığının sıradan basit biçimsel kurallarını korumak için, *sonlucu*

ifadeleri ideal ifadeler ile beslemeliyiz. Kronecker'in öylesine şiddetlice saldırdığı tümdengelim metotlarının, -kendisinin matematiğin en büyük başarısı olarak takdir ettiği- Kummer'in sayı kuramı üzerine olan çalışmasındaki hayran olduğu şeyin ta kendisinin buradaki karşılığı olması ironiktir.

İdeal ifadeleri nasıl elde ederiz? İdeal ifadeleri elde etme dikkate değer olduğu gibi makul ve ümit vericidir de; bu elde ediş için yapmamız gereken sadece matematiğin temellerine ilişkin kuramda elde edilen gelişmeleri doğal ve açık bir şekilde takip etmektir. Aslında şunun farkına varmalıyız ki, temel matematik bile sezgisel sayı kuramının sınırlarının ötesine gider. Bizim yorumladığımız şekliyle sezgi, özdeksel sayı kuramı, harflerin kullanıldığı cebirsel hesaplama metodunu içermiyor. Formüller daima sezgisel sayı kuramında iletişim için kullanıldı. Harfler sayısal sembollere karşılık olarak kullanılıyordu ve bir denklem iki sembolün çakıştığı olgusunu iletiyordu. Diğer taraftan, cebirde harfler içeren ifadeleri, sayı kuramının özdeksel teoremlerini biçimleştiren bağımsız yapılar gibi ele alırız. Sayısal semboller hakkındaki ifadeler yerine, kendi kendileri sezgisel çalışmaların somut nesneleri olan formüllere sahibiz. Sayıkuramsal özdeksel ispatın yerine, belirli kurallarla diğer bir formülden başka bir formülün türetilmesi durumu vardır.

Böylece, cebirde bile gördüğümüz gibi, sonlucu nesnelerin bir çoğalması meydana gelir. Şimdiye kadar sadece 1, 11, ... 11111 gibi sayısal nesneler sembollerdi. Bunlar tek başına özdeksel ele almanın nesneleri idiler. Fakat matematiksel tecrübe, cebirde bile, daha ilerilere gider. Gerçekte bizim sonlucu bakış açımızdan, bir formül simgelediği anlam açısından geçerlidir. Örneğin,

$$a+b=b+a.$$

eşitliğinin her zaman geçerli olduğunu söyleyen teorem gibi, burada a ve b işaretleri belirli sayısal sembolleri belirtmek için kullanılmaktadır; buna rağmen, biz bu iletişim biçimini değil de, onu şu formül ile değiştirmeyi yeğleriz:

$$a+b=b+a.$$

Sonraki bu formül katiyen gösterilen (signified) şeylerin dolaysız bir iletişimi değil, daha çok belirli bir biçimsel yapıdır ki,

$$2+3=3+2$$
$$5+7=7+5$$

gibi eski sonlucu ifadeleri ile ilişkisi, formülde a ve *b*; 2, 3, 5, 7 gibi sayısal semboller ile değiştirildiğinde -bir ispat prosedürü ile- bireysel sonlucu ifadeler basit bir ispat prosedürü yoluyla elde edilir olgusunu kapsar. Bundan dolayı *a*, *b*, =, + ve ayrıca *a+b=b+a* tam formülü de, sayısal sembollerin bir şey ifade etmemesi gibi, kendi içlerinde hiçbir şey anlatmazlar sonucunu ortaya çıkarabiliriz. Hâlâ bu formülden anlam yüklediğimiz diğer formülleri çıkarabiliriz; yani onları sonlucu ifadelerin iletişimi olarak yorumladığımız zaman. Bu sonucu genelleştirerek, matematiği iki çeşit formül deposu olarak değerlendirebiliriz: Birincisi, sonlucu ifadelerin anlamlı iletişimlerine karşılık gelen formüller ve ikincisi, hiçbir şey belirtmeyen diğer formüller; ki bunlar *kuramımızın ideal yapılarıdır.*

Şimdi bizim amacımız neydi? Bir tarafta, matematikte, sadece sayısal sembolleri içeren sonlucu ifadeleri buluruz; sözgelimi,

$$3>2,\ 2+3=3+2,\ 2=3,\ 1\neq 1,$$

ki bizim sonlucu bakış açımızdan hemen sezilebilir ve başka bir şeyden yardım almaksızın anlaşılabilir. Bu ifadeler doğru ve yanlış diye değerlendirilebilir. Aristocu mantık, özel tedbirler olmaksızın sınırsızca bunlara uygulanabilir. Çelişkili-olmama prensibi onlar için geçerlidir; yani bu ifadelerden birinin reddi ve ifadenin kendisi aynı anda doğru olamaz. *Tertium non datur* onlar için geçerlidir; yani ya ifade ya da ifadenin olumsuzu doğrudur. Bu ifade yanlıştır demek bu ifadenin tersi doğrudur demek ile aynıdır. Diğer taraftan, problem teşkil etmeyen bu basit ifadelere ek olarak biz çok sorunlu sonlucu ifadelerle karşılaşırız; örneğin, kısmî ifadelere parçalanamayan sorunlu ifadeler gibi. Son olarak, sıradan mantık kuralla-

rının evrensel geçerliliği için ideal ifadeleri tanıttık. Fakat bu ideal ifadeler, yani formüller, sonlucu ifadeleri anlatamadıklarından, artık hiçbir anlam ifade etmedikleri için mantıksal işlemler onlara sonlu ifadelerde olduğu gibi somut olarak uygulanamaz. Bundan dolayı, mantıksal işlemlerin ve matematiksel ispatların kendilerini biçimselleştirmek gereklidir. Bu biçimleştirme, mantıksal ilişkileri formüllere dönüştürmeyi gerekli kılar. Bu yüzden, matematiksel sembollere ek olarak

& (ve), v (veya), → (gerektirir, ise), ¬[2] (değil)

gibi mantıksal sembolleri de tanıtmalı ve ayrıca *a*, *b*, *c*, ... gibi matematiksel değişkenlere ek olarak mantıksal değişkenleri yani *A*, *B*, *C*, ... gibi önermesel değişkenleri de kullanmalıyız.

Bu nasıl olabilir? Şanslıyız ki, bilimin gelişme tarihindeki faaliğini sık sık gözlemlemiş olduğumuz önceden kurulu olan uyum, Einstein'a onun yerçekimsel kuramı için önceden tam olarak gelişmiş genel değişmezlik kalkülüsü vererek yardım eden o önceden kurulmuş aynı uyum bizim yardımımıza da geliyor; mantıksal kalkülüsün önceden başarılı olduğunu gördük. Şundan emin olabilirsiniz ki, mantıksal kalkülüs aslında tümüyle farklı bir bakış açısından geliştirildi. Mantıksal kalkülüste kullanılan semboller sadece iletişim için sunuldular. Yine de bu mantıksal sembollere herhangi bir anlam yüklemeyi inkâr etme, matematiksel sembollere anlam yüklemeyi inkâr ettiğimiz ve mantıksal kalkülüsün formüllerinin kendi içlerinde anlamları olmayan ideal ifadeler olduklarını söylediğimiz gibi, bizim sonlucu bakış açımızla tutarlılık arz eder. Mantıksal kalkülüste matematiksel ifadeleri formüllere dönüştüren ve biçimsel prosedürle mantıksal tümdengelimi açıklayan semboller diline sahibiz. Özdeksel sayı kuramından biçimsel cebire geçişe tam

2 Hilbert'in orijinal makalesinde olumsuzluğu belirtmek için '—' işareti kullanılmış olsa da, biz '~'ı tercih ettik. İngilizce Derleyenler.

bir benzerlikle, şimdi mantıksal kalkülüsün işaretleri ve işlem sembollerini anlamlarından soyutlamaya tâbi tutarız. Yani sonunda basit dilde iletişim sağlayan matematiksel bilginin yerine, başarılı bir şekilde gösterilen kurallara göre oluşturulan matematiksel ve mantıksal sembolleri içeren bir formüller kümesini elde ederiz. Formüllerden bir kısmı matematiksel aksiyomlara karşılık gelir. Formülleri birbirlerinden türetmeyi sağlayan kurallar, özdeksel tümdengelime karşılık gelir. Böylece kurallarla yönlendirilen biçimsel bir prosedür, özdeksel tümdengelimin yerine geçiriliyor. Bundan dolayı hem aksiyomlar için (ki başlangıçta, nahifçe temel doğrular olarak görülmelerine rağmen, çoktandır modern aksiyomatik sistemde kavramlar arasındaki saf ilişkiler olarak işlendi) ve hem de mantıksal kalkülüs için (ki başlangıçta, yalnız farklı bir dil olarak varsayılmıştı) nahif bir işlemeden biçimsel bir işlemeye sıkı bir geçiş yapılmış olur.

Şimdi kısaca *matematiksel ispatın* nasıl biçimselleştirildiğini açıklayalım. Matematiğin biçimsel yapısı için yapı taşları görevini gören kesin formüllerin 'aksiyom' olarak adlandırıldığını önceden söylemiştim. Matematiksel bir ispat bizim sezgilerimize açık olması zorunlu olan bir figürdür. Matematiksel ispat şu türden tümdengelim şemalarından elde edilen çıkarımları içerir:

$$\frac{G \qquad G \rightarrow I}{I}$$

ki burada, her bir verili ön-kabullem, diğer bir deyişle G ve G→I formülleri birer aksiyomdur veya dönüşümlerle elde edilmiş aksiyomların sonuçlarıdır veya bir önceki tümdengelimin son formülüdür ya da değiştirmelerin yapılmasıyla bir formülden doğarlar. Eğer bu bir ispatın son formülü ise, formülün ispatlanabilir olduğu söylenir.

Bizim programımızın kendi kendisi *'ispat kuramımız için aksiyomların seçimine'* yol gösterir. Aksiyomların seçiminde bir miktar keyfi-

liğe karşın, geometride olduğu gibi bazı aksiyom grupları niteliksel olarak ayırt edilebilirler.

Bu grupların her birinden alınmış örnekler

1.Çıkarım aksiyomları

i-) $A\rightarrow(B\rightarrow A)$

(bir varsayımın eklenmesi)

ii-) $(B\rightarrow C)\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)]$

(bir ifadenin elenmesi)

2.Olumsuzlama aksiyomları

i-) $[A\rightarrow(B\&\sim B)]\rightarrow\sim A$

(çelişki ilkesi)

ii-) $\sim\sim A\rightarrow A$

(çifte olumsuzlama ilkesi)

1'inci ve 2'nci gruptaki aksiyomlar basitçe önerme kalkülüsünün aksiyomlarıdır.

3.Transfinit aksiyomlar

(i) $(a)A(a)\rightarrow A(a)$

(evrenselden tikele sonuç çıkarma; Aristocu aksiyom);

(ii) $\sim(a)A(a)\rightarrow(\exists a)\sim A(a)$

(eğer bir yüklem evrensel olarak uygulanamıyorsa, karşıt bir örnek vardır demektir);

(iii) $\sim(\exists a)A(a)\rightarrow(a)\sim A(a)$

(eğer bir önerme için hiçbir örnek yoksa, o hâlde önerme bütün a'lar için yanlıştır).

Bu noktada çok dikkate değer bir olgu ile karşılaşıyoruz: Transfinit aksiyomlar seçim aksiyomu diye adlandırılan aksiyomun özünü içeren bir tek aksiyomdan çıkarılabilir. Seçim aksiyomu, matematik literatüründe en çok tartışılan aksiyomdur:

(i') $A(a)\rightarrow A(\varepsilon A)$'dir,

ki burada ε transfinittir; mantıksal seçim fonksiyonudur.

Sonra aşağıdaki özel matematiksel aksiyomlar verilen aksiyomlara eklenir:

4. Özdeşlik aksiyomları.

(i) $a=a$

(ii) $a=b\rightarrow(A(a)\rightarrow A(b))$

ve son olarak

5. Sayı aksiyomları.

(i) $a+1\neq 0$

(ii) tam tümevarım aksiyomu.

Böylece şimdi biz ispat kuramımızı başarma, dahası ispatlanabilir formüllerin sistemini yani matematiği oluşturma konumundayız. Ama bu başarıda duyduğumuz genel hazzımız ve bu gerekli aracı (mantıksal kalkülüs) bulmada duyduğumuz özel hazzımız bizim tarafımızdan herhangi bir çaba harcamadan gelişti; çalışmamızın özel şartını unutmamalıyız. İdeal elementlerin metoduyla bağlanan sadece bir şart, ama kesinlikle gerekli bir şart vardır. Bu şart, bir tutarlılık ispatıdır; bir aralığın eleman ekleyerek genişletilmesi eğer sadece genişleme ekleme olmadan önceki dar aralıkta çelişkiye sebep olmuyorsa veya başka bir deyişle, eski yapılardan ideal yapılar yok edildiği zaman, elde edilen ilişkiler daima eski aralıkta geçerli ise meşrudur.

Şu anki durumda tutarlılık problemi kolayca ele alınabilir. Tutarlılık problemi ortaya konan kurallara göre ve bizim aksiyomlarımızdan, $1\neq 1$'in bir ispatın son formülü olarak elde edilemeyişi veya başka bir deyişle, $1\neq 1$'in ispatlanabilir bir formül olmadığını ispatlamaya açıkça indirgenir. Bu iş sadece, örneğin, özdeksel kurulmuş sayı kuramında $\sqrt{2}$'nin irrasyonelliğinin ispatının bulunması amacı, yani $a^2=2b^2$ bağıntısındaki a ve b sayısal sembollerini bulmanın veya başka bir deyişle kesin özellikli iki sayısal sembol üretmenin imkânsız olduğunun ispatını bulma amacına ait olduğu kadar sezgisel irdeleme aralığına da aittir. Benzer şekilde, bir ispatın belli bir

türünün üretilemeyeceğini göstermek zorunlu görevimizdir. Biçimselleştirilmiş bir ispat, sayısal bir sembol gibi, somut ve görülebilir bir nesnedir. Onu tam olarak betimleyebiliriz. Dahası son formülün gerekli özelliği, başka bir deyişle, '1≠1'i vermesi, ispatın somut olarak elde edilebilir bir özelliğidir. Buna ek olarak, gerçekten de, bu formüle son formülüymüş gibi sahip olan ispatı elde etmemizin imkânsız olduğunu ispat edebildiğimizden dolayı bizim ideal ifadelerimizin tanıtılmasını gerekçelendirmiş oluruz.

Aynı zamanda, matematikçileri uzun zaman rahatsız eden bir problemin, yani *aritmetik aksiyomlarının tutarlılığı* probleminin ispatı sorununun çözülmüş olduğunu keşfetmemiz sevindirici bir sürprizdir. Çünkü her nerede aksiyomatik metotlar kullanılsa, tutarlılığı ispatlamak problemi ile karşılaşırız. Elbette kuralları ve aksiyomları seçmede, anlamada ve kullanmada sadece kör inançlara güvenmek istemiyoruz. Geometri ve fiziksel kuramda, tutarlılığın ispatı onların tutarlılığını aritmetik aksiyomlarının tutarlılığına indirgemek yoluyla karşılanır. Fakat bu metodu aritmetiğin tutarlılığının kendisini ispatlamak için kullanamayız. Bizim ideal elementlerin metodu üzerine temellendirilmiş ispat kuramımız, bu en son önemli adımı atmamızı sağladığından dolayı, aksiyomatik doktrinin kemerlerinden birinin gerekli köşe taşını şekillendiriyor. Bir kez sonsuz küçükler kalkülüsün paradokslarıyla bir kez de küme kuramının paradokslarıyla, iki kez tecrübe ettiğimiz şey, üçüncü bir kez tekrar ve asla yaşanmayacaktır.

Burada taslağını çizdiğimiz ispat kuramının, yalnızca matematiğin kurulması için somut bir temel değil, ayrıca şimdiye kadar matematikçilerin ele alamadıkları temel matematiksel soruları ele almak için genel bir metot sağladığına inanıyorum.

Bir anlamda, matematik, temel sorulara karar vermek için herkesin hemfikir olduğu ve her ifadenin kontrol edilebileceği somut bir temel üzerine kurulmuş üst düzey bir kürsü, bağımsız bir mahkeme olmuştur.

'Sezgicilik' diye adlandırılan yeni iddiaların, ılımlı olsalar da, bana göre ilk önce bu kürsüden geçerlilik sertifikası almaları gerekir.

'Her matematiksel problemin çözülebilir olduğu' tezi önemli temel problemlerin çeşidine bir örnektir. Hepimiz bunun gerçekten böyle olduğuna inanıyoruz. Gerçekte matematiksel bir problemi haklamanın en çekici ana sebeplerinden biri daima içimizdeki şu çığlığı hissetmemizdendir: İşte problem ortada, cevabını bul, onu sadece düşünerek bulabilirsin, çünkü matematikte *ignorabimus* (bilinemeyecek) bir şey yoktur. Şimdi benim ispat kuramın bütün matematiksel problemlerin çözümü için genel bir metot sağlayamıyor -yani böyle bir metot basitçe yoktur. Yine de ispat (yani, bütün matematiksel problemler çözülebilirdir iddiası tutarlı bir kabuldür) tam olarak kuramımızın faaliyet alanının içine düşer.

Şimdi son kozumu oynayacağım. Yeni bir kuramın asit testi, bu kuramın çözmek için direkt olarak tasarlanmadığı, uzun zamandır bilinen problemleri çözme kabiliyetidir. 'Onları meyvelerinden bileceksin' vecizesi kuramlar için de geçerlidir. Cantor, ikinci sayı sınıfının sayıları olarak adlandırılan ilk transfinit sayılarını keşfettiği zaman hemen, önce bahsettiğim gibi, bu saymanın transfinit metodunun, başka yerde olağan bir anlamda sayılamadığı bilinen kümeleri sayıp sayamayacağı sorusu ortaya çıktı. Bir aralığın noktaları böyle bir kümeye iyi bir örnektir. Bir aralığın noktaları, başka deyişle, önceden verilen sayılar tablosu aracılığıyla reel sayıların sayılıp sayılamayacağı sorusu Cantor'un ortaya attığı ama çözemediği ünlü süreklilik problemidir. Bazı matematikçilerin bu problemin varlığını inkâr ederek onu ortadan kaldırabileceklerini düşünmelerine rağmen, şu açıklama onların ne kadar yanıldıklarını gösteriyor: Süreklilik problemi eşsizliği ve iç güzelliğiyle diğer problemlerden ayrışır. Dahası, şu iki nitelikle diğer problemler üzerine avantaj sunar: Bir tarafta eski metotlar çözüm sağlayamadığı için yeni metotların onun

çözümü için gerekliliği, diğer taraftan elde edilecek sonuçlardan ötürü çözümünün kendisi büyük önem taşır.

Benim geliştirdiğim kuram, süreklilik problemine bir çözüm sağlıyor. Her matematiksel problemin çözülebilir olduğunun ispatı, bu problemin çözümüne ilk ve en önemli basamaktır.[3]

Özetlersek, ana temamıza geri dönelim ve sonsuz hakkındaki tüm düşüncelerimizden bazı sonuçlar çıkaralım. Bizim başlıca sonucumuz, sonsuzun realitede hiçbir yerde bulunamayacağıdır. Sonsuz ne doğada vardır ne de rasyonel düşünceye geçerli bir temel sağlıyor -ki bu, varlık ve düşünce arasında dikkate değer bir uyumdur. Frege ve Dedekind'in önceki çabalarının tersine, bilimsel bilgi için mantık tek başına yeterli değil, belli sezgisel kavramlar ve görüşler gerekli koşullardır. Sonsuzun kullanıldığı işlemlerde kesinlik, sadece sonlu ile yapılabilir.

Artık, sonsuza biçilen tek rol, bizim kuramımız ile inşa edilmiş çerçeve içinde tereddütsüzce güvenebileceğimiz fikridir –eğer kişi fikirden, Kant'ın terminolojisinde, bütün deneyimleri aşan ve somutu bir bütün olarak tamamlayan bir us kavramını kast ediyorsa.

Son olarak, P. Bernays'a, özellikle süreklilik teoreminin ispatı noktasında, hem teknik hem de metnin düzeltilmesindeki zekî işbirliği ve kıymetli yardımı için teşekkürlerimi belirtmek isterim.

3 [Bu noktada Hilbert süreklilik problemi için bir çözüm taslağı sunar. Girişim ilginç olsa da hiçbir zaman başarılamadı. Biz, dolayısı ile, buradan çıkardık onu. İngilizce Derleyenler.]

MATEMATİĞİN TEMELLERİ*

David Hilbert
Çev. Cezmi Kayan

5 yıl önce bir gün, burada açıklanan ve o zamandan beri beni sürekli meşgul eden matematiğin temelleri hakkındaki düşüncelerimi tamamlamak ve geliştirmek benim için büyük bir onur ve aynı zamanda bir zorunluluktur. Rahatlıkla bir ispat kuramı olarak adlandırabileceğimiz, matematiğe temel sağlayan bu yeni yol ile, belirli bir amaç güdüyorum; her matematiksel ifadeyi somut olarak gösterebilen ve tamamen türetebilen ve bu nedenle de matematiksel tanım ve çıkarımları sarsılmaz bir hâle dönüştüren, böylelikle bütün bilimin yeterli bir resmini veren formüllere dönüştürerek, şimdi ortaya çıkan şeklin içinde matematiğin temelleriyle ilgili bütün sorunları bir kerede çözümlemek istiyorum. Tam olarak geliştirilmeden önce hâlâ çok fazla iş yapılması gerekse de, ispat kuramımla, bu amaca tamamen ulaşabileceğime inanıyorum.

---

* *The Emergence of Logical Empricism: From 1900 to the Vienna Circle* [Mantıksal Ampirizmin Ortaya Çıkması: 1900'den Viyana Çevresine] (1996), Volume 1, Garland Publishing, Inc. New York & London, 228-243. Bizim çeviride esas aldığımız metin, bu kitaptaki metnin bazı önemsiz biçimci kısımları çıkarılmış hâlidir.
'http://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/ge/hilbert.htm' Kasım 2002.

Matematik, anca diğer bilimler kadar yalnızca mantığa dayandırılabilir; (mesele) bundan ziyade (şudur), mantıksal çıkarımların kullanımı ve mantıksal işlemlerin performansı için bir koşul olarak bir şeyler temsil fakültemizde bize önceden bir şey verilmelidir; (ki bunlar) düşünceden önce dolayımsız bir deneyim şeklinde sezgisel olarak varolan belirli mantık-dışı somut nesnelerdir. Mantıksal çıkarımlar güvenilir ise, bu nesnelerin parçalarının tümünde araştırma yapmak mümkündür. Bu nesnelerin oluşumları, birbirilerinden farklı olmaları, birbirilerini izlemeleri veya sıralanmış olmaları, nesnelerle birlikte hemen sezgisel olarak verilmeleri ne başka bir şeye indirgenebilir bir şeydir ne de indirgenmesi gereklidir. Bu, matematik ve genel olarak bütün bilimsel düşünme, anlama ve iletişim için gerekli gördüğüm temel felsefî duruştur. Ve özellikle matematikte, kabul ettiğimiz kavrama göre şekli açık ve doğrudan doğruya tanınabilir olan somut şeylerin kendilerine işaret ettiklerini düşünüyoruz. Bu, varsayılması gereken küçüklüktedir; hiçbir bilimsel düşünür ondan vazgeçemez ve bu nedenle herkes bilinçli olarak yada olmayarak onu sürdürmelidir.

Şimdi ispat kuramının temel düşüncesini sunacağım.

Matematiği oluşturan tüm ifadeler formüllere dönüştürülüyor, böylece matematik, formüllerin tam bir listesi oluyor. Bu, sıradan matematik formüllerinden sadece şunda farklıdır, sıradan işaretlerin dışında şu mantıksal işaretler de onların içinde bulunur:♦

$\rightarrow$	&	V	~	$\forall(x)$	$\exists(x)$
demektir ki	Ve	veya	değil	tümü	vardır bazı

Matematiğin biçimsel büyük binasının yapı blokları olan belirli formüllere aksiyom denir. Bir ispat, algısal sezgimize verilmesi gereken bir sıralamadır, aşağıdaki şemaya göre çıkarımlardır.

♦ Yazı boyunca kullanılan değişik sembol ve notasyonları, anlaşılır olsun diye günümüzde kullanılanlara uyarladık (ayrıca yaygınlığına binaen, '&' sembolünü '∧'ye tercih ettik). Ç.N.

Š

Š → İ

İ

Burada öncüllerin her biri yani sıralamadaki formüller olan Š ve Š → İ ya birer aksiyomdur yada birer aksiyom yerine konulmuştur veya ispatın başlangıcında oluşan veya ispatın yer değiştirmesiyle ortaya çıkan bir çıkarımın son formülüyle kesişir. Bir formül, bir aksiyom ise veya bir ispatın son formülüyse ispatlanabilir denilir.

Aksiyomlar ve ispatlanabilir önermeler yani bu prosedürlerden oluşan formüller, şimdiye kadar gelişen alışılmış matematiği oluşturan düşüncelerin kopyalarıdır.

Burada özetlenen program yoluyla ispat kuramımız için aksiyomların seçimi önceden belirtilmiştir; onları aşağıdaki gibi düzenliyoruz.

I. Çıkarım Aksiyomları

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (bir kabulün sunumu)
2. $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ (bir kabulün atlanması)
3. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ (kabullerin yer değiştirmesi)
4. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (bir kabulün elenmesi)

II. VE, VEYA ile ilgili Aksiyomlar

5. $A \,\&\, B \rightarrow A$;
6. $A \,\&\, B \rightarrow B$;
7. $A \rightarrow (B \rightarrow A \,\&\, B)$;
8. $A \rightarrow A \vee B$;
9. $B \rightarrow A \vee B$;
10. $((A \rightarrow C) \,\&\, (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$.

III. Olumsuzlama Aksiyomları

11. $(A \rightarrow B \,\&\, \sim B) \rightarrow \sim A$ (çelişki ilkesi)
12. $\sim(\sim A)) \rightarrow A$ (çifte olumsuzlama ilkesi)

Grup I, II, III'ün aksiyomları önerme kalkülüsünün aksiyomlarıdır. 11 ve 12'den özellikle şu formül;

$$(A \,\&\, \sim(A)) \rightarrow B$$

ve hariç tutulan orta mantık ilkesi olan,

$$((A \rightarrow B) \,\&\, (\sim A \rightarrow B)) \rightarrow B \text{ türer.}$$

IV. Mantıksal e-aksiyomu

13. $A(a) \rightarrow A\,(\mathbf{e}(A))$.

Burada **e**(A), eğer herhangi bir nesne için doğruysa, A(a) önermesi kesinlikle doğru olur, **e**'ye mantıksal **e**-fonksiyonu diyelim. Mantıksal E-fonksiyonunun rolünü açıklamak için aşağıdaki yorumları yapalım.

Biçimsel sistemde **e**-fonksiyonu üç yolla kullanılır.

1. **e**'yi kullanarak "hepsi" ve "bazı (vardır)" aşağıdaki gibi tanımlanır.

$\forall(a)\, A\,(a) \leftrightarrow A\,(\mathbf{e}(\sim A))$,

$(\exists a)A(a) \leftrightarrow A\,(\mathbf{e}(A))$,

Burada, çift ok (↔) iki çıkarım kombinasyonu anlamına karşılık gelir ve bunun yerine bundan sonra (**E** "denklik" işaretini kullanacağız.

Bu tanıma göre, IV 13, **e**-aksiyomu evrensel ve varoluşsal niceleyicileri kapsayan mantıksal ilişkileri verir; şöyle ki,

$\forall(a)A(a) \rightarrow A(b)$ (Aristo'nun özdeyişi)

ve $\sim(\forall(a)A(a)) \rightarrow (\exists a)(\sim A(a))$ (hariç tutulan orta ilkesi)

2. Bir *Ş* önermesi yalnız ve yalnızca bir nesneyi içine alıyorsa, o zaman $\mathbf{e}(Ş)$, $Ş(a)$'nın sağlandığı *nesnedir*.

Bu nedenle, **e**-fonksiyonu, sadece bir nesneyi içine aldığı zaman t önermesini, örneğin $Ş(a)$, çözmemize olanak tanır; böylelikle şunu elde ederiz:

$a = \mathbf{e}(Ş)$

3. Bunun ötesinde, **e**, tercih fonksiyonu rolünü üstlenir; yani, $A(a)$'nın birkaç nesne için sağlandığı durumda $\mathbf{e}(Ş)$, $Ş(a)$'nın sağlandığı *a* nesnelerinin *herhangi biridir*.

Bu saf mantıksal aksiyomların dışında, aşağıdaki spesifik aksiyomlar da vardır.

V. Eşitlik Aksiyomları

14. $a = a$;

15. $(a = b) \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b))$.

VI. Sayı Aksiyomları

16. $a' \neq 0$;

17. $(A(0) \ \& \ \forall(a)(A(a) \rightarrow A(a'))) \rightarrow A(b)$ (matematiksel tümevarım ilkesi)

Burada a' sonraki sayıyı gösterir ve 1, 2, 3, ... tamsayıları 0', 0'', 0''', ... şeklinde yazılabilir.

İkinci sayı sınıfının ve Cantor'un daha yüksek sayı sınıflarının sayılarına karşılık gelen tümevarım aksiyomları eklenmelidir; ama, Cantor'un kuramına uygun bir şemada birleştirilmelidirler.

Son olarak, matematik kavramlarını sunan ve aksiyomların karakterlerine sahip, aynı zamanda genel bir tekrarlı şemasından türeyen, belirli tekrarlı aksiyomlara sahip olan açık tanımlamalara da ihtiyacımız var. Bu aksiyomların formüle edilmelerini anlatmadan önce, ilkin, genel olarak aksiyomların kullanılmasını yöneten kuralları açıklamalıyız. Kuramımda, içeriksel çıkarım, kurallara göre işaretlerin maniple edilmesiyle yer değiştirmiştir. Bütün kuramsal araştırmaların temel vasıtası olacaksa, bu yolla aksiyomatik yöntem, kazanabileceği ve kazanması gereken güvenilirlik ve mükemmelliği elde eder.

İlk olarak aşağıdaki şartlar gerçekleşmelidir.

Matematiksel değişkenler için her zaman küçük italik Lâtin harflerini kullanınız; ama sabit matematiksel nesneler (spesifik fonksiyonlar) için küçük Yunan harfleri kullanılır. [Bu yazıda kalın harf kullanacağız.] Değişken atomik önermeler (belirsiz formüller) için

her zaman büyük italik Lâtin harfleri, ama sabit atomik önermeler için büyük Yunan [bu yazıda kalın harf] harflerini kullanıyoruz; örneğin,

$Z(a)$ [*a* bir doğal sayıdır]

ve

$N(a)$ [*a* ikinci sayı sınıfının bir sayısıdır].

Yerine koyma prosedürüne göre, aşağıdaki genel uzlaşmalara varınız.

Önerme değişkenlerinin yerine, sadece formülleri koyabiliriz; yani mantıksal işaretleri kullanarak temel formülden yapılan sıralamaları:

$$\rightarrow \; \& \; \vee \; \sim \; \forall(x) \; \exists(x)$$

Temel formüller, muhtemelen argüman iliştirilmekle ve sabit önermelerin işaretleriyle olabilen formül değişkenleridir; örneğin, bağlantılı çıkarım yerlerinin doldurulmasıyla,

$$Z, N, =, <$$

olabilir.

Matematiksel bir değişken yerine herhangi bir sıralama konulabilir; ama matematiksel bir değişken, bir formül içinde oluştuğunda ne çeşit değişken olduğunu ifade eden, anlamına gelme işaretinden sonra gelen sabit önerme her zaman önce gelmelidir; örneğin,

$$Z(a) \rightarrow a+1=1+a,$$
$$N(a) \rightarrow N(a').$$

Bu uzlaşım, sadece sıradan sayılar veya hepsinden sonra göz önüne alınan ikinci sayı sınıfının sayıları gibi yerine konulanları etkiler. V. ve VI. aksiyomlarda önce gelmesi gereken $Z(a)$ ve $Z(b)$ kısaltma hatırına atlanmıştır.

Alman büyük harf ve küçük harflerinin referansları vardır ve sadece bilgi göstermek için kullanılırlar.

Matematiksel değişkenler iki çeşittir: (1) *ilkel değişkenler* ve (2) *değişken çeşitleri*

1. Aritmetik ve analizin tümünde sıradan tamsayılar yalnız ilkel değişken olarak yeterliyken Cantor'un her bir transfinit sayı sınıfları ile birlikte o sınıfın sayılarını tam olarak sıraya koyan, bağlantılı ilkel bir değişken vardır. Bu nedenle, her bir ilkel değişkene karşılık gelen, ne çeşit olduğunu belirten bir önerme vardır; bu önerme aksiyomlar tarafından örtük olarak belirlenir.

Her bir ilkel değişkenle birlikte, çıkarımları ilkel değişken olan fonksiyonları tanımlamak için kullandığımız bağlı bir tekrarlı çeşidi vardır. Sayı-kuramsal değişkene bağlı bir tekrarlı n=0'daki değeri ve n' değerinin n'den nasıl elde edileceğini belirttiğimiz zaman, t sayı-kuramsal değişken n'nin t fonksiyonunu tanımlamak için kullanılan "sıradan tekrarlı"dır. Sıradan tekrarlı genelleştirmesi, transfinit tekrarlıdır. Değişkenin bir değerinin fonksiyonun değeri, "fonksiyonunun önceki değerleri kullanılarak belirlenir", genel ilkesine dayanır.

2. İlkel değişkenlerden, bunlara bağlı önermelere, örneğin Z'ye, mantıksal bağlantıları uygulayarak değişkenlerin daha fazla çeşitlerini türetebiliriz. Bu şekilde tanımlanan değişkenlere değişken-çeşitleri denir ve bunları tanımlayan önermelere çeşit-önermeler denir; bunların her biri için yeni bir özel işaret verilir. Bu nedenle;

$$Ø(f) \text{ Œ } \forall(a)(Z(a) \rightarrow Z(f(a)))$$

formülü değişken-çeşidinin en basit bir örneğini sunar; bu formül fonksiyon değişkeninin ("bir-fonksiyon-olmak") çeşidini tanımlar. Daha ileri bir örnek de şu formüldür:

$$F(g) \text{ Œ } (f)((P(f) \rightarrow Z(g(f)));$$

Bu, "bir-fonksiyonun-fonksiyonu-olma"yı tanımlar; g çıkarımı yeni bir-fonksiyon-fonksiyonu değişkenidir.

Daha yüksek değişken-çeşitlerini üretmek için alt-simge ile çeşit-önermelerini kendi başlarına vermeliyiz; böylelikle tekrarlı bir prosedürü olası hâle getiririz.

Şimdi açık tanımlardan ve tekrarlı aksiyomlardan ne anlaşılabileceğini belirleyebiliriz; açık bir tanım, sol yanında, çıkarım gibi

değişkenlerle birlikte tanımlanabilen işareti olan (büyük veya küçük Yunan harfi [kalın]), sağ yanında bu çıkarımların içinde sadece serbest değişkenler olacak şekilde oluşan sıralamalara sahip olan ve daha önce verilenlerin dışında sabitler için işareti olmayan bir özdeşlik veya eşitliktir.

Benzer şekilde, tekrarlı aksiyomları, tekrarlı prosedürüne göre model alınan formül sistemleridir. Bunlar, kuramının genel temelleridir. Uygulandığı şekle sizi alıştırmak için tekrarlı tanımlanan özel fonksiyonların bazı örneklerini söylemek istiyorum.

...

Şimdi matematiği inşa etmeye başlarsak, bakışlarımızı ilk olarak temel sayı kuramına yöneltmeliyiz; içerikle ilgili sezgisel bakış açısıyla bunun doğruluğunu elde edebileceğimizi ve kanıtlayabileceğimizi anlayacağız. Bu yaklaşımı alırken karşılaşacağımız formüller sadece bilgi vermek için kullanılır. Harfler rakamları gösterir ve bir eşitlik, iki işaretin aynı anlama geldiği bilgisini bize sunar.

Cebirde ise durum farklıdır; cebirde harflerden oluşan ifadelerin kendi başlarına bağımsız nesneler olduğunu, cebirde geçen sayı kuramı önermelerinin bunları kullanarak biçimleştirildiğini düşünürüz. Önceden rakamların olduğu yerde şimdi kavramsal sezgimize göre sırayla göz önüne alınan somut nesneler olan formüller vardır; belirli kurallara göre bir formülün diğerinden türemesi, içeriğe dayalı sayı-kuramsal ispatın yerini alır.

Bu nedenle cebir, asırlık sayı kuramının çok ötesine geçiyor. Örneğin, cebirde, a'nın sahici bir sayı-kuramsal değişken olduğu $1+a=a+1$ formülü bile, artık sadece içeriksel bir şey hakkında bilgi vermiyor; lâkin, kendi başına bir anlamı olmayan ve ispatı içeriğe dayalı olmayan ama tümevarım aksiyomlarına başvurulmasını gerektiren belli bir biçimsel nesne olan kanıtlanabilir bir formüldür.

İçeriksel yollarla kanıtlanabilen $1+3=3+1$ ve $1+7=7+1$ formülleri yukarıdaki cebirsel formülden sadece bir ispat prosedürüyle elde

edilebilir; örneğin, *a* yerine 3 ve 7 sayılarının konulması yani yerine koyma kuralını kullanırız.

Bundan dolayı, temel matematik bile; birincisi, sonlu önermelerin içeriksel iletimlerine karşılık gelen (asıl olarak sayısal eşitlikler veya eşitsizlikler yada bunlardan oluşan kompleks iletimler) kuramın gerçek *önermeleri* olarak adlandırabileceğimiz formüller, ikincisi, içeriksel sayı kuramının rakamları gibi kendi başlarına bir anlamı olmayan ama kurallarımıza göre idare edilen ve kuramın *ideal nesneleri* olarak görülmesi gereken şeyler olan formülleri kapsar.

Bu hususlar gösteriyor ki, *ideal önermeler olarak formüller* kavramına ulaşmak için, bizim sadece matematiksel uygulamanın şimdiye kadar izlediği gelişim çizgisini doğal ve tutarlı bir şekilde izlemeye ihtiyacımız vardır. Ve şimdi, bundan böyle bizim için, sadece matematiksel değişkenleri değil, aynı zamanda mantıksal işaretleri V, &, vs. mantıksal değişkenleri yani cebirde rakamlar ve harfler gibi *A, B, C, ...*, önerme değişkenlerini hesaba katmak normal ve tutarlıdır. Bunların kendi başlarına işaret olarak bir anlamları yoktur. Bunlar sadece ideal önermeler için yapı bloklarıdır.

Gerçekten de, cebirin biçimsel bakış açısını bütün matematiğe yaymak için acil sebeplerimiz var. Temel sayı kuramında önceden beri hissedilen temel bir zorluğu hafifletmek istiyoruz. Tekrar şu eşitliği bir örnek olarak alıyorum:

$$a+1=1+a;$$

eğer bunu şu bilgiyi vermek için kullanırsak,

$$a+1=1+a,$$

burada *a* herhangi bir sayıdır, bu iletim inkar edilemez; çünkü,

$$a+1\neq 1+a$$

önermesi için, önermede sonlu bir anlam taşımayan bir *a* sayısı vardır; zaten bütün sayılar sınanamaz. Bu yüzden, sonlu eğilimi kabul edersek, yukarıdaki gibi, bir eşitliğe göre alternatif kullanamayız. Bu eşitliğin içindeki belirtilmemiş bir rakam, ya her rakam için

geçerlidir ya da karşı bir örnekle çürütülebilir. "Hariç tutulan orta ilkesi"nin bir uygulaması olarak, bu alternatif, sorudaki eşitliğin her zaman geçerli olduğu iddiasını inkâr etmenin mümkün olduğu varsayımına temelden bağlıdır.

Ama, biz hariç tutulan orta ilkesi veya aksiyomlarımızdan anlatılan diğer Aristo mantık kurallarını kullanmaktan vazgeçemeyiz. Çünkü analizin yapılması bunlarsız olanaksızdır.

Şimdi, karşı karşıya olduğumuz temel zorluktan ideal önermeleri kullanarak kaçınabiliriz. Gerçek önermeleri ideal olanlara yanaştırmak için, Aristo'nun bütün basit mantık kurallarının alındığı ve genel matematiksel çıkarım yöntemlerinin hepsinin geçerli olduğu önermeler sistemi elde edilir. Örneğin, negatif sayılar temel sayı kuramında kaçınılmaz olduğu ve modern sayı kuramı ve cebir sadece Kummer-Dedekind idealleriyle mümkün olduğu gibi, aynen bilimsel matematik de sadece ideal önermelerin sunumuyla mümkün olabilir.

Emin olmak için tek ama kaçınılmaz bir şart her zaman ideal elemanlar yönteminin kullanımına iliştirilir. Bu tutarlılığın kanıtıdır; ideal elamanların eklenmesiyle genişletme, sadece eski, dar bir alan ile çelişmiyorsa uygundur; yani eski nesneye sebep olan ilişkiler ideal nesneler elimine edildiğinde eski alanda geçerlidirler.

Ama şimdiki durumda bu tutarlılık sorunu kolayca halledilebilir. Gösterilecek nokta, ideal nesneler verildiğinde, bizim için mantıksal olarak çelişen Ş ve ~Ş gibi iki önermeyi elde etmenin olası olmadığıdır. Şimdi, yukarıda anlattığım gibi,

$$(A \,\&\, \sim A) \rightarrow B$$

mantıksal formülü olumsuzlama aksiyomlarının sonucudur. A'nın yerine Ş önermesini ve B'nin yerine, $0 \neq 0$ eşitsizliğini koyarsak şunu elde ederiz:

$$(Ş \,\&\, \sim Ş) \rightarrow (0 \neq 0).$$

Dahası, bir kez bu formülü elde ettikten sonra, $0\neq0$ formülünü Ş ve ~Ş'den elde edebiliriz. Bundan dolayı, tutarlılığı kanıtlamak için gereken sadece $0\neq0$'ın bir ispatın son formülü olarak yürüklükte olan kurallarla aksiyomlarımızdan elde edilemeyeceğini göstermektir; bu nedenle $0\neq0$, kanıtlanabilir bir formülü inkârdır. Ve bu içeriksel sayı kuramındaki görev gibi, örneğin kök(2)'nin irrasyonelliğini kanıtlamak, yani $a^2=2b^2$ ilişkisini sağlayan a ve b gibi iki rakam bulmanın imkânsız olduğunu ispatlamak, belirli bir özelliği olan iki sayı bulmanın imkansızlığını kanıtlamak gibi temel olarak sezgisel bir görevdir. Bunun gibi bizim için önemli olan nokta, bu türden ispatları bulmanın imkânsızlığını göstermektedir. Ama bir rakam gibi, biçimselleştirilmiş bir ispat da, somut ve araştırılabilir bir konudur. Bu, başlangıçtan sonuna kadar götürülebilir. Son formülün gerekli yapıya, yani $0\neq0$'a sahip olması, somut olarak araştırılabilen kanıtın bir özelliğidir. Bunun ispatı verilebilir ve bu ideal önermelerimizi sunmak için bir gerekçe sağlar. Diğer yandan, bunun, uzun zamandan beri acil olan bir sorunun çözümünü de, yani aritmetik aksiyomların tutarlılığının kanıtını verdiğini anlıyoruz.

Aksiyomatik metodun kullanıldığı yerde, aksiyomların tutarlılığını kanıtlamak mecburidir. Geometri ve fiziksel kuramlarda bu ispat, aritmetik aksiyomlarının tutarlılığına indirgenerek başarıyla kullanılır. Bu yöntem, aritmetiğin kendisinde açıkça başarısız olur. İspat kuramımız, bu önemli son adımı, ideal elemanlar yöntemiyle mümkün kılarak, aksiyomatik sistemin zorunlu kilit taşını oluşturur.

Her yeni kuramın nihaî testi, kuramın özel olarak cevaplandırmak için oluşturulmadığı önceden var olan sorunları cevaplamadaki başarısıdır. Cantor, ikinci sayı sınıfı sayıları şeklinde adlandırılan ilk transfinit sayılarını keşfeder keşfetmez, sıradan anlamda sayılamayan ve başka bağlamlarda bilinen kümelerin elemanlarının bu transfinit sayma ile sayılıp sayılamayacağı sorunu ortaya çıktı. Doğ-

ru parçası, göz önüne alınan bu çeşit kümenin ilk ve en önemli kümesidir. Doğru parçasının noktalarının, yani gerçek sayıların, ikinci sayı sınıfı sayılarını kullanarak sayılabilip sayılamayacağı sorunu, Cantor tarafından formüle edilen ama çözülemeyen ünlü süreklik sorunudur. "Sonsuz Üzerine" (1925) adlı makalemde bu sorunun bizim ispat kuramımızla nasıl çözülebildiğini gösterdim.*

Cantor'un bu süreklilik hipotezinin, sıradan analizin mükemmel bir somut problemini oluşturduğunu göstermek için daha da giderek, bu hipotezin aşağıdaki gibi bir formülle ifade edilebileceğini iddia ediyorum:

$$\forall(\exists h)((f)(\emptyset(f) \rightarrow N(h(f))) \;\&\; \forall(f,g)[\emptyset(f) \;\&\; \emptyset(g) \rightarrow ((h(f) = h(g)) \rightarrow (f, g))]),$$

burada kısaltmak için:

$$\forall(a)(Z(a) \rightarrow Z(f(a))) \text{ yerine } \emptyset(f)$$

ve,

$$\forall(a)(Z(a) \rightarrow (f(a) = g(a))) \text{ yerine } (f, g) \text{ koyarız.}$$

Bu formülde, ikinci sayı sınıfının ilkel değişkeniyle bağlanan N önermesi hâlâ vardır. Ama bundan kaçınılabilir; çünkü iyi bilindiği üzere, ikinci sayı sınıfı sayıları sayı dizisinin iyi-dizilişi ile, yani iki sayı-kuramsal değişkene sahip olan ve 0 ve 1 değerlerini alan belirli fonksiyonlarla gösterilebilir; öyle ki, sorudaki önerme, saf olarak fonksiyonlar hakkında olan bir önerme biçimini alır.

Daha önce değişik yerlerde bu ispat kuramının temel özelliklerini açıkladım; Kopenhag'da [1922], bura Hamburg'da [1922], Leipzig'de [1922] ve Münster'de [1925]; bu arada, bu kuramda birçok yanlış bulundu ve bu kurama karşı, olabildiğince haksız bulduğum, her türlü itiraz yükseldi. Şimdi bu noktalardan bazılarını açıklamaya çalışacağım.

---

* Hilbert, adı geçen makalede, süreklilik sorununun nasıl çözülebileceğinin taslağını sunar; ne var ki, bu yöntem hiçbir zaman bir sonuç vermemiştir. Ç.N.

Poincaré, daha önce görüşlerime aykırı olan değişik sözler söylemişti; hepsinden çok, aritmetik aksiyomlarının bir tutarlılık ispatının olabilirliğini reddetti, tümevarım yönteminin kendisi dışında bir yolla, matematiksel tümevarım yönteminin tutarlılığının asla ispatlanamayacağını iddia etti. Ama kuramının gösterdiği gibi, aritmetiğin temelleri kurulduğunda tekrarlı ilerleyen iki ayrı yöntem kullanılmaya başlandı. Yani bir yandan tamsayıların rakamları gibi sezgisel yapımı (ki buna zıt olarak, verilen herhangi bir sayının ayrışması veya bir rakam gibi inşa edilmiş, somut olarak verilen herhangi bir sıralamanın ayrışmasına karşılık gelir), ki bu içeriksel tümevarımdır. Diğer yandan tümevarım aksiyomuna dayanan ve kendisiyle matematiksel değişkenin biçimsel sistemde rolünü oynamaya başlayabileceği biçimsel tümevarım özelliği.

Poincaré, tamamen farklı olan bu iki tümevarım yöntemini ayırt etmeyerek yanlış kanıya düşüyor. Üzücü olan, kendi neslinde fikir açısından en zengin olan ve en üretken matematikçi olan Poincaré, Cantor'un muhteşem kavramlarına karşı adil bir düşünce oluşmasını önleyen bir önyargıya sahipti. Bu koşullarda, bir ara, tamamen yetersiz olan kuramını reddetmek zorundaydı. Poincaré, kimi zaman, otoritesinden dolayı genç nesiller üzerinde tek yanlı bir etki bıraktı.

Principia Mathematica'nın matematik için endişesiz bir temel oluşturduğu iddiasında olan, Russell ve Whitehead'ın temeller kuramının takipçileri, kuramına değişik platformlarda karşı geldiler.

Russell ve Whitehead'ın temeller kuramı geniş kapsamlı genel bir mantıksal araştırmadır. Ama, matematiğin üzerinde durduğu temel, ilk olarak sonsuzluk aksiyomuna ve sonra azalabilirlik aksiyomuna dayanır ve bu aksiyomlardan her ikisi de bir tutarlılık ispatıyla desteklenmeyen, halis içeriksel varsayımlardır. Bu varsayımlar, geçerliliği şüpheli olan ve kuramının herhangi bir durumda gerektirmediği durumlardır.

Kuramında, Russell'ın azalabilirlik aksiyomunun, fonksiyon değişkenleriyle ilgili olan kuralda karşılığı vardır. Ama azalabilirlik, kuramında öngörülmemiştir, daha çok bedeli karşılanabilir bir özellik olarak tanınmıştır: Azalmanın uygulanması, sadece bir çelişkinin ispatı verildiğinde gereklidir ve sonra ispat kuramına göre bu azalma her zaman başarılı olmaya mâhkumdur.

Şimdi en yeni araştırmalara göre, temeller hakkındaki araştırmanın yine böyle canlı bir beğeni kazanması ve ilgi çekmesi bana, tabiî ki, büyük memnuniyet vermektedir. Ama bu araştırmaların içerik ve sonuçları hakkında iyice düşündüğümde, bunların eğilimlerinin çoğuyla aynı fikirde olamıyorum; Cantor'un görkemli düşünceler dünyası daha keşfedilmeden önceki bir zamandan gelmişler gibi, bunların zamanın büyük oranda gerisinde olduğunu hissediyorum.

Bunda bu en yeni incelemelerin, neden temeller kuramının; fonksiyonların inşa sorunu, Cantor'un süreklilik hipotezinin ispatı veya çürütülmesi, bütün matematiksel problemlerin çözülebilir olup olmadığı sorunu ve tutarlılık ve varoluşun bütün matematiksel nesneler için eşit olup olmaması sorunu gibi büyük problemlerinin azlığını durdurduğunun sebebini de görüyorum.

Bugünün matematiğin temelleri hakkındaki literatürün arkasında Brouwer'ın ilerlettiği ve sezgicilik diye adlandırdığı doktrin büyük bir yekûn teşkil etmekte. Polemik yapmak için herhangi bir istekten dolayı değil ama görüşlerimi açıkça anlatmak ve kuramının kavramlarının yanlış anlaşılmasını önlemek için Brouwer'ın iddialarına daha yakından bakmalıyım.

Brouwer (Kronecker'in kendi zamanında yaptığı gibi), varoluş ifadelerinin, var olduğu iddia edilen nesnelerin inşasını içermezse kendi başlarına anlamsız olduğunu söylüyor: Ona göre, bu ifadeler değersiz bir yazıdır. Ve bunların kullanımı matematiğin dejenere olup bir oyuna dönüşmesine sebep olur.

Aşağıdaki örnek, mantıksal **e**-fonksiyonlarla gerçekleştirilen yalnız bir varoluş ispatının, hiçbir suretle değersiz bir yazının parçası olamayacağını gösteren bir örnek yerine geçebilir.

Gauss tarafından yapılan, analiz için, kök(–1) ile biçimlenen sıradan karmaşık sayıların ötesine gitmenin gereksiz olduğu şeklinde yorumu yargılamak için, Weierstrass ve Dedekind bazı incelemeler yaptılar. Bunlar, belirli teoremlerin formüle edilmesi ve ispatına yol açtı. Belli bir zaman önce cebirsel biçimler hakkında genel bir teorem ileri sürdüm (1896): Bu saf bir varoluş ifadesidir ve inşa edilebilirliği içeren bir ifadeye dönüştürülemez. Ancak bu varoluş teoremini kullanarak, Weierstrass'ın uzun ve açık olmayan çıkarımlarından ayrıca Dedekind'ın hayli karmaşık hesaplamalarından kaçındım. Gauss tarafından taslağı verilen ayrıca Weierstrass ve Dedekind tarafından formüle edilen iddiaların geçerliliğinin içsel sebeplerini açığa çıkardığıma inanıyorum.

Ama eğer tutarlılıkla ilgili hâlâ tereddütleriniz varsa, en azından e-fonksiyonunun yardımıyla gerçekleştirilen genel teoremlerin - örneğin Fermat'nın teoreminin niteliği- ispatlarından, sonlu ispat elde etmenin genel bir yöntemi olarak tutarlılığın ispatının önemini kabul etmek zorundasınız.

Varsayalım ki, örneğin Fermat'nın muazzam teoremi için, mantıksal fonksiyon e'nin kullanıldığı bir ispat bulduk. O zaman onun sonlu bir ispatını aşağıdaki gibi yapardık.

Varsayalım ki,

p, a, b, c (p>2) sayı-gösterenleri

Fermat'nın,

$$a^p + b^p = c^p$$

eşitliğini sağlasın. O zaman bu eşitliği, prosedüre bir ispat biçimi vererek ispatlanabilir bir formül olarak da elde edebilirdik; ki bu yolla a^p+b^p ve c^p rakamlarının kesiştiklerini bulurduk. Öte yandan, varsayımımıza göre formülün bir ispatı elimizde olurdu.

$$(Z(a) \,\&\, Z(b) \,\&\, Z(c) \,\&\, Z(p) \,\&\, (p > 2)) \rightarrow (a^p + b^p \neq c^p),$$

buradan, yerine koyma ve çıkarım ile,

$$a^p + b^p \neq c^p$$

elde edilirdi. Bu nedenle,

$$a^p + b^p = c^p \text{ ve}$$
$$a^p + b^p \neq c^p \text{ nin,}$$

her ikisi de ispatlanabilirdi. Ama tutarlılığın ispatının sonlu bir yolla gösterdiği gibi, böyle bir şey olamaz.

Bununla birlikte verilen örnekler sadece keyfî olarak seçilmiş özel durumlardır. Aslında matematik, Brouwer'ın varoluş ifadeleriyle ilgili iddialarını çürüten örneklerle doludur.

Şimdi matematiğin bir oyuna dejenere olması sitemine göre meselenin mahiyeti nedir?

Saf varoluş teoremlerinin kaynağı, bütün ideal önermelerin yapısının bağlı olduğu mantıksal e-aksiyomudur. Dahası, formül oyunu hangi dereceye kadar başarılı olabilir? Bu formül oyunu, matematik biliminin bütün düşünce-içeriğini sabit bir şekilde anlatmamıza ve aynı zamanda her bir önerme ve olgu arasındaki bağın açık olacak şekilde geliştirmesine olanak sağlar. Her bir formülün kendi başına yorumlanabilmesini, evrensel bir gereklilik yapmak için, hiçbir suretle uygun değildir; bunun zıddına tam da doğası itibariyle bir kuram için bazı çıkarımların ortasında sezgi veya anlama başvurmaya ihtiyacımız yoktur. Fizikçilerin bir kuramdan tam olarak talep ettikleri şudur: Özel önermelerin doğa yasalarından ve hipotezlerden, saf bir formül oyununa dayalı, konuyla ilgisi olmayan sebepler söylenmeden, çıkarımlarla türetilmesidir. Aynen, fizik kurallarının sadece belirli birleşimleri ve sonuçları deneyle kontrol edilebilir olması gibi, ispat kuramımda sadece gerçek önermeler doğrudan ispatlanabilirdir. Saf varoluş ispatlarının değeri, tam olarak bireysel inşaların onlarla elimine edilmesi ve birçok farklı inşaların temel bir fikir altında alt alta toplanmasını içerir, böylelikle ispat için sadece ne gerekli olduğu açıkça göze çarpar; düşüncenin kısalığı ve ekonomisi varoluş ispatlarının *raison d'être*'sidir [varlık nedenidir, Ç.N.]. Aslında saf varoluş teoremleri, bilimimizin tarihsel gelişimde en önemli dönüm noktalarıdır. Ama böyle sebepler samimi sezgiciyi rahatsız etmez.

Brouwer'in karşı çıktığı formül oyunu, matematiksel değerinin yanında, büyük bir felsefi öneme de sahiptir. Bu formül oyunu *düşüncemizin tekniğinin* ifade edildiği belirli kurallara göre gerçekleştirilir. Bu kurallar keşfedilebilen ve kesin bir şekilde söylenebilen kapalı bir sistem oluşturur. İspat kuramının temel fikri, anlayışımızın etkinliğini anlatmanın dışında, düşüncemizin gerçekten ilerlediği kuralların bir tutanağını oluşturmanın dışında bir şey değildir. Çoğu zaman olduğu gibi düşünme, konuşma ile yazmaya paraleldir. İfadeler oluşturur ve onları birbiri ardına sıralarız. Gözlemlerin ve fenomenlerin bütünlüğü ciddî ve tam bir araştırma konusu olmayı hak ediyorsa, bu konu tam da odur; çünkü, bizi keyfilik, duygu ve alışkanlıktan kurtarmak ve bana göründüğü gibi sezgicilikte en son noktasına varan Kronecker'in görüşlerinde hissedilen öznellikten korumak bilimin görevinin bir parçasıdır.

Sezgiciliğin en sert ve en şiddetli meydan okuması, hariç tutulan orta ilkesinin geçerliliğini hedef almasıdır; örneğin, en basit şekilde bir sayı-kuramsal değişkeni içeren herhangi bir iddiaya göre çıkarım tarzının geçerliliğinde, ya iddia değişkenin bütün değerleri için doğrudur ya da iddianın yanlış olduğu bir sayı vardır. Hariç tutulan orta ilkesi mantıksal e-aksiyomunun bir sonucudur ve şimdiye kadar en ufak bir hataya yol açmamıştır. Bundan başka, yanlış kullanıma izin vermeyecek kadar açık ve anlaşılırdır. Özellikle, hariç tutulan orta ilkesi, küme kuramının ünlü paradokslarının oluşumundan sorumlu tutulamaz; bu paradokslar daha çok ispat kuramının otomatik olarak dışında kalan, kabul edilemez ve anlamsız kavramların sunumundan kaynaklanır. Hariç tutulan orta ilkesi yardımıyla gerçekleştirilen varoluş ispatları, genellikle şaşırtan kısalık ve zarifliklerinden dolayı özellikle çekicidirler. Hariç tutulan orta ilkesini matematikçiden almak, gökbilimciden teleskopunu almanın veya boksöre yumruklarını kullanmayı yasaklamanın aynısıdır. Varoluş ifadelerini ve hariç tutulan orta ilkesini yasaklamak matematik biliminden vazgeç-

meyle aynı değerdedir. Modern matematiğin muazzam genişliğiyle karşılaştırılırsa, sezgicinin mantıksal e-aksiyomlarını kullanmadan saf olarak elde ettiği zavallı atıklar, eksik ve ilgisiz kalan yalnız sonuçlar ne anlama gelir? Fonksiyonlar kuramının teoremleri, örneğin uygun haritalama* kuramı ve kısmî diferansiyel eşitlikler ve Fourier seriler kuramındaki temel teoremler gibi teoremleri bilimimizdeki sadece birkaç örnek arasından seçilen, bana göre ideal önermelerdir ve gelişmeleri için mantıksal e-aksiyomları gerekir.

Bu şartlarda, bir matematikçinin, hariç tutulan orta ilkesinin, bir çıkarım yolu olarak katiyen geçerli olduğundan şüphe duymasına şaşıyorum. Şimdi görüldüğü gibi, aynı işi yapan koca bir matematikçiler topluluğunun oluşmasına daha çok şaşıyorum. En çok da şu olguya şaşıyorum: Matematiksel çevrelerde bile tek bir adamın önerisinin gücü, tabiî ki mizaç ve orijinallikle birlikte, en olası olmayan ve acayip etkilere sahiptir.

Cantor'un süreklilik hipotezi ispatının taslağı bile eleştirilmemiş olarak kalmadı. Bu nedenle, bu ispat üzerine de bazı yorumlar yapacağım. ...

Sunuşumdan, ispat kuramının etkili alanını belirleyen ve genel olarak onun çekirdeğini oluşturan tutarlılık ispatını tanıyacaksınızdır. W. Ackermann'ın metodu hâlâ daha da genişlemeye izin verir. Onun yaklaşımında, sıradan analizin temelleri için şimdiye kadar, sadece sınırlılığın saf bir matematiksel ispatını gerçekleştirme görevi kaldı. Şimdiden nihaî sonucun ne olacağını söylemek istiyorum: Matematik ön-varsayımların olmadığı bir bilimdir. Onu inşa için, Kronecker'in yaptığı gibi Tanrı'ya veya Poincaré'in yaptığı gibi

* Uygun haritalama, *conformal mapping'in* karşılığı olarak kullanılmıştır. Bir matematik problemini veya çözümü başka birine çevirme tekniğine bu ad verilir. Bazı kurallar altında, öyle bir karmaşık haritalama fonksiyonu tanımlayabiliriz ki, bir karmaşık düzlemdeki her nokta başka bir karmaşık düzlemdeki bir noktaya karşılık gelir. Ç.N.

matematiksel tümevarım ilkesine iliştirilen, anlayışımızın özel bir fakültesi varsayımına veya Brouwer'in asıl sezgisine veya Russell'ın ve Whitehead'in yaptığı gibi sonsuzluk, azalabilirlik aksiyomlarına veya tutarlılık ispatıyla karşılanamayan gerçek içeriksel varsayımlar olan bütünlüğe ihtiyaç duymuyorum.

Ayrıca, P. Bernays'ın sadık iş arkadaşım olduğunu söylemek istiyorum. O sadece bana sürekli tavsiye vererek yardım etmekle kalmadı, aynı zamanda kendi fikirlerinin ve görüşlerinin yeni noktalarını kattı. Bu yüzden, buna ikimizin ortak bir çalışması demek istiyorum. Yakında kuramın ayrıntılı bir sunumunu yayınlamayı düşünüyoruz.

SEZGİCİLİK ÜZERİNE KONUŞMALAR*

L.E.J. Brouwer
Çev. Cezmi Kayan & Bekir S. Gür

Tarihsel Giriş ve Temel Kavramlar

Matematiksel düşünce mekanizmasının yavaş yavaş dönüşümü; tarih boyunca birincisi matematiksel kesinliğin orijini, ikincisi ise matematiksel bilimin nesnesinin sınırlandırılmasıyla ilgili olmak üzere [iki yönden] meydana gelen değişimlerin, hüküm süren felsefî düşüncelerdeki bir sonucudur. Bu bağlamda, suje-obje [özne-nesne] ortamında zaman ve mekân için filozofların ilişkilendirdiği hâliyle mekanın, suje'den objeye doğru kayan sürekli eğilimine rağmen, zaman ve mekânın değişmez özelliklerinin varlığına olan inancın, deneyim ve dilden bağımsız olan özelliklerinin varlığına olan inancın 19. asra kadar hemen hemen bozulmadan kaldığı kanaatine varabiliriz. Matematik denilen bu özelliklerin tam bilgilerini elde

* *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism* (Brouwer'ın Sezgicilik Üzerine Cambridge Dersleri) (1951), Cambridge University Press, 1981. İlk dersin çoğu ve bir kısım parçalar buraya alınmıştır.
'http://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/ne/brouwer.htm' Kasım 2002.

etmek için genellikle aşağıdaki yollar denenmiştir: Yer ve zamanın bazı çok bilinen dış ve iç deneyim düzenliliklerinin, değişmezliği postüle edilmiştir. Ki bu değişmezlik ya kesinlik olarak ya da elde edilebilecek derecede bir yaklaşım olarak söz konusudur. Bunlara aksiyom denilmiş ve dile konulmuşlardır. Bunun üzerine, aksiyomların dil-bilimsel özlerinden, deneyim rehberliğindeki akıl yürütmeler ile daha karmaşık özellikli sistemler geliştirildi. Fakat, dil-bilimsel açıdan klâsik mantık ilkeleri takip edildi ve kullanıldı. Bu çeşit düşünme ve çalışma açısına *gözlemsel* duruş diyeceğiz. Ayrıca, uzun bir süre bu gözlemsel duruş ile karakterize edildi. Bu duruş, mantığı otonom olarak ve matematiği (varoluşsal olarak değilse eğer, fonksiyonel olarak) mantığa bağlı olarak kabul etmiştir.

Uzay için, 19. yy'da ve 20. yy'ın başlarında Lobachevsky, Bolyai, Riemann, Cayley, Klein, Hilbert, Einstein, Levi-Cività ve Hahn adlarıyla zikredilen bir dizi keşiflerden dolayı gözlemsel açı savunulamaz oldu ve matematik yavaş yavaş sadece bir sayı bilimine dönüştürüldü; ayrıca gözlemsel uzayın dışında, gelenekselden farklı özelliklere sahip ve onun kadar güzel olan, bazen doğrudan doğruya mantıksal spekülasyonlardan doğan çok sayıdaki diğer uzayların aritmetiksel realizasyonu gerçekleşti. Sonuçta, klâsik (Öklitçi, üç boyutlu) uzay bilimi, bir yanında bahsi geçen sayıların (kesin) bilimini diğer yanında (uygulamalı matematik gibi) betimleyici doğa bilimlerinin (doğal yaklaşımları) olmak üzere, önceliği olmayan bir bölüm hâlinde varlığını devam ettirmek durumundaydı.

Geometrinin alanını genişleten bu işlemde önemli bir parça, bazen hiç bir deneyimin öncülük etmediği ve hatta bazen deneyimden bağımsız olarak tasarlanan aksiyomlardan başlayan, mantıksal kurallarla kelimeler üzerinden yürüyen *mantıksal-dilbilimsel metotla* işlenmiştir. Bununla cesaretlenen *Eski Formalist Okul* (Dedekind, Cantor, Peano, Hilbert, Russell, Zermelo, Couturat), matematik *ve mantığın* sıkı bir muameleye tâbi tutulması için (matematik ve man-

tığı araştırma nesnelerini özenle işlenmesi amacıyla olmasa da); en sonunda, dile yabancı olan tüm elemanları reddetti; böylece mantık ve matematiğin karakterindeki zorunlu farklılıkları ve otonomluğu ortadan kaldırdı. Fakat, asıl olarak bu okul tarafından, matematik biliminin bu ilkelere göre kurulduğu şeklinde beslenen bu umut, çelişkisizlik ispatıyla bir gün tamam olacaktı; ki böyle bir ispat hiçbir zaman başarılamamıştır. Dahası şimdilerde, son birkaç yılda yapılan mantıksal araştırmalardan sonra bu umudun evrensel olarak terk edildiğini kabul edebiliriz.

Tamamen değişik bir yönelme, başlıca Poincaré, Borel ve Lebesgue'nun öncülük ettiği *Ön-sezgici Okul*'du. Bu düşünürlerin, doğal sayıların sunumu için, tam tümevarım ilkesi için ve varoluş aksiyomlarının aracılığı olmadan oluşan ve bu yüzden aritmetik ile cebirin "ayrılabilir" parçaları olarak adlandırılabilen bu kaynaktan meydana gelen matematiksel varlıklar için, uyarlanmış bir gözlemsel bakış açısını sürdürdükleri görülüyor. Bu sebeplerden dolayı, klâsik mantık yoluyla elde edilen bu tür teoremler için bile, dilden ve mantıktan bağımsız olarak, varlık ve hatasızlık iddia etmişlerdir ve mantıksal ispat olmadan bile onun çelişkisizliğini katî olarak kabul etmişlerdir. Ama süreklilik için dil ve mantığa tamamen yabancı olan bir orijin arama çabaları görünmüyor. Bazı durumlarda, rasyonel sayıların yakınsak sonsuz dizilerini tanımlayan hiç-bitmeyen ve hiç-numaralandırılamayan yasa türleri tarafından üretilen "gerçek sayılar"ın hiç-bitmeyen ve hiç-numaralandırılamayan türleriyle kendilerini tatmin etmişlerdir. Bununla beraber, "gerçek sayılar"ın bu hiç-bitmeyen ve hiç-numaralandırılamayan türleri, pozitif bir ölçüme sahip olmadığından dolayı sürekliliğin matematiksel fonksiyonunu karşılayamamaktadır. Diğer durumlarda sürekliliği, duyusal ya da epistemolojik kanıtlar olmadan, 'sıralı bağımlılık aksiyomu' veya 'bütünlük aksiyomu' gibi bazı mantıksal varoluş aksiyomlarına başvurarak sunmuşlardır. Her iki durumda

da, matematiğin ileri gelişiminde, *principium tertii exclusi* [hariç tutulan orta ilkesi -Ç.N.] de dahil klâsik mantık, herhangi bir kısmını ayırmaksızın ve deneyimden bağımsız olarak uygulanmaya devam etmiştir. Bu, şimdiye kadar üretilen sistemlerin çelişmezliğinin, ünlü mantıksal-matematiksel zıtlıkların keşfi ile şüpheli olduğu olgusuna aldırmadan yapılmıştır.

Aslında, ön-sezgicilik, bir yandan matematik ve mantık arasında karakterce aslî farkları korumuş görünmekte, öte yandan mantığın ve matematiğin bir kısmının otonomisini devam ettirmiş görünmektedir. Matematiğin geri kalanı bu ikisine bağımlı olmuştur.

Bu arada, eski formalizm üzerine sağlam eleştirinin uyguladığı baskı altında Hilbert, sahih matematik için değil meta-matematik için dilden bağımsız varoluş ve katiyet postule eden *Yeni Formalist Okul*'u kurdu. Meta-matematik, kusurlardan arındırılmış bir matematik dilinde oluşan sembollerin ve bu sembollerin işlenmelerinin kurallarının bilimsel incelenmesidir. Bu temel üzerine, yeni formalizm eski formalizmin tersine, doğal sayı ve tam tümdengelim sezgisinin başlangıçtan beri var olan pratik kullanımını *in confesso* [itiraf etmeksizin -Ç.N.] sağlamıştır. Matematiğin sadece küçük bir kısmının (ön-sezgicilikten çok daha küçük) bu şekilde otonom olarak postule edildiği doğrudur. Yeni formalizm, matematik dilinin mükemmelliği ile matematiğin kendisinin mükemmelliği arasında açık bir bağlantı görülmeyeceği itirazıyla, kendi prosedürlerinden vazgeçirilemez.

Böylece, formalizm ve ön-sezgicilik tarafından bırakılan durum şöyle özetlenebilir: Doğal sayıların temel teorisi için, tam tümevarım ilkesi ve aritmetik ile cebirin az-çok büyük bir yekûnu, kesin varoluş; mutlak güvenilirlik ve çelişmezlik; dilden bağımsız olarak ve kanıtlanmadan evrensel olarak kabul edilmiştir. Sürekliliğe gelince, onun dilsiz varoluşu sorunu ihmal edilmiştir; pozitif ölçüyle bir gerçek sayılar kümesi olarak kurulmasına mantıksal araçlarla

çalışılmıştır ve çelişkisiz varoluşunun ispatı sunulamamıştır. Tüm matematik için klâsik mantığın dört ilkesi, kesin doğruları ortaya çıkarmak için kabul edilmiştir.

Bu durumda, sezgicilik iki eyleme aracılık etmiştir. Birincisi, yıkıcı ve kısırlatıcı sonuçlara sebep olmuş, ama ikincisi yeni gelişmeler için birçok olasılık üretmiştir.

SEZGİCİLİĞİN BİRİNCİ EYLEMİ

Matematiği, matematiksel dilden ve böylece teorik mantık tarafından betimlenen bir dil fenomeninden tamamen ayırmak; ayrıca, sezgici matematiğin, zaman hareketinin algısında kökenlerini bulan, zihnin zorunlu bir dilsiz etkinliği olduğunu teslim etmektir. Zaman hareketinin bu kavramı, hayatın bir anını iki ayrı şeye ayırmakla tanımlanabilir; bunlardan biri diğerine yer verir ama hafızada tutulur. Bu nedenle, eğer ikilik bütün kaliteden yoksun bırakılırsa, tüm ikiliğin ortak özü içi boş biçime dönüşür. Ayrıca bu ortak öz, bu içi boş biçim, matematiğin temel sezgisidir.

Daha iç deneyimler, temel sezginin sınırsız açılmasıyla, 'ayrışabilir' matematiğin çoğunun, uyarlanmış barışık bir biçiminde yeniden nasıl inşa edilebildiğini açığa çıkarıyor. Böyle kurulmuş bir matematiksel düşünce binasında, dil, matematiksel yapıları bellemek ve diğerleriyle iletişim kurmak için etkili -fakat yanılmaz ya da asla kesin olmayan- bir teknik dışında rol oynamıyor. Bu yüzden matematiksel dil, kendi başına asla yeni matematiksel sistemler oluşturamaz. Ama bu matematiksel dilin oldukça mantıksal karakterinden dolayı şu soru doğal olarak kendisini karşımıza çıkarır: *Varsayalım ki, matematiksel dil içinde, sezgici matematiksel bir işlemi çözmeye çalışırken, klâsik mantık ilkelerinden birinin bir uygulamasının bir figürü, bir an için, düşünmeksizin formüle edilsin. İlgili edimsel matematiksel sistemde, dilin bu figürü, edimsel bir dilsiz matematiksel prosedüre eşlik edebilir mi?*

Dikkatli bir inceleme, kısaca açıklarsak, *eğer dilin kaçınılmaz yetersizliği, bir açıklama ve haberleşme şekli olarak kabul edilirse, çelişki ve kıyas ilkeleri bakımından,* cevabın *olumlu* olduğunu açığa çıkarır. *Ama özel durumlar dışında, hariç tutulan orta ilkesine göre cevap negatiftir. Bu nedenle bu ilke genel olarak yeni matematiksel doğruları keşfetmek için bir araç olmaz.*

Gerçekten de, matematikte *principium tertii exclusi*'nin uygulamalarının her biri bazı edimsel matematiksel prosedürlere eşlik ediyorsa, bu, (bir özelliğin matematiksel bir varlığa tahsis edilmesi olan) matematiksel önermelerin her birinin *yargılanabileceği* yani ya kanıtlanabileceği ya da saçmalığa indirgenebileceği demektir.

Şimdi, sonlu bir matematiksel sistemdeki, kapalı sonlu doğanın her yapısı ile, sadece sonlu sayıda yolla uğraşılabilir ve her çaba sonlu sayıdaki adımda başarılı ya da başarısız olmayı kanıtlar. Şuna varırız: Sonlu bir matematiksel sistemdeki, kapalı sonlu doğanın bir yapısının mümkün olan her önermesi yargılanabilir ve böylece bu şartlar altında *Hariç Tutulan Orta İlkesi*'nin uygulamaları meşrudur.

Fakat şimdi, müsaadenizle, sonsuz sistemlere geçelim ve sözgelimi *pi*'nin ondalık açılımında şöyle bir *n* doğal sayısının var olup olmadığını araştıralım: Açılımın n'inci, (n+l)'inci, ... ve (n+9)'uncu rakamları, bir 0123456789 dizisi oluştursun. Bu soru, şimdiye kadar yargılanabilir bir önerme olmadığından, ne olumlu ne de olumsuz cevaplanabilir. Öte yandan, sezgici bir bakış açısıyla, insan düşüncesinin dışında matematiksel doğru olmadığından dolayı, *pi*'nin ondalık açılımında bir 0123456789 dizisinin olup olmadığı önermesi mantıktan yoksundur.

Bahsi geçen özellik, zanna dayanarak *n* sayısına tahsis edilme, *sıvışma özelliği*'nin bir örneğidir. Bununla biz aşağıdaki üç şartı karşılayan bir *f* özelliğini anlıyoruz:

(i) her *n* doğal sayısı için *n*'nin *f* özelliğine sahip olup olmadığına karar verilebilir;

(ii) f'ye sahip olan bir *n* doğal sayısını hesaplama için bir yol yoktur;

(iii) en az bir doğal sayının *f* özelliğine sahip olduğu varsayımı saçma olarak bilinemez.

Açıktır ki, bir özelliğin sıvışma doğasının sürekli olması şart değildir; *f* özelliğine sahip bir doğal sayı bir gün bulunabilir ya da böyle bir doğal sayının varlığının saçmalığı bir gün kanıtlanabilir.

...

Matematikte hariç tutulan orta ilkesinin evrensel geçerliliğine olan inanç, sezgiciler tarafından, *pi*'nin rasyonelliği ya da gök kubbenin dünya etrafında dönmesine olan eski inanç gibi medeniyet tarihinin bir fenomeni olarak düşünülür. Sezgiciler, bu dogmanın uzun süre hüküm sürmesini iki olgu ile açıklamaya çalışıyorlar. Bunlardan birincisi şudur: Matematiksel varlıkların herhangi bir alanının içinde tek bir önerme için ilkenin çelişmezliği kolaylıkla tanınabilir; ikincisi ise şudur: Dış dünyaya ait basit günlük fenomenlerin geniş bir grubunu incelerken, klâsik mantığın tümünün dikkatli uygulamasının bir hataya yol açtığı asla görülmemiştir. [Bu, *de facto* olarak <bilfiil Ç.N.>, ortak nesnelerin ve bilinen işlemlerin yapıldığı mekanizmaların, durumlar sistemi (the system of states) gibi davrandıklarını gösterir. Elemanları sonlu sayıda bağıntılar ile bağlı olan sonlu bir ayrık kümenin oluşmuş kısmını varsayabilirler.]

Sezgiciliğin birinci eylemiyle mümkün kılınan matematiksel etkinliğin ilk bakışta, bahsi geçtiği üzere, mantıksal aksiyomlar kullanılarak oluşan matematiksel varlıklar reddedildiği için, 'ayrışabilir' matematik ile sınırlandırıldığı görülür. Öte yandan, hariç tutulan orta ilkesi reddedildiğinden dolayı, 'ayrışabilir' matematik sınırları içinde bile etkinlik alanının oldukça daraltılmak zorunda kalındığı görülecektir. Özellikle süreklilik alanın dışında kalmış görünümünde olduğundan, sezgicilikte analize yer kalmayacağından bu aşamada korkulabilir. Ama bu korku şunu varsayacaktır: Temel sezginin sezgici açıklaması ile üretilen sonsuz dizilerin, temel diziler olması

yani klâsik olanları gibi, baştan başlayarak n'inci terim her n için sabit olacak şekilde önceden belirlenmiş sonsuz dizilerin, ilerleyen olması gerekecektir. Ama durum böyle değildir; tersine, analizi içeren ve genellikle klâsik matematiğin sınırlarını aşan çok daha geniş bir gelişme alanı sezgiciliğin ikinci eylemiyle açılmıştır.

SEZGİCİLİĞİN İKİNCİ EYLEMİ

[İkinci eylem] *yeni matematiksel varlıkları oluşturmanın iki yolunu kabul etmektir. Birincisi, daha önceden elde edilmiş matematiksel varlıkların az veya çok serbestçe ilerleyen sonsuz dizilerini* [kabul etme] *biçimindedir* (böylece hiçbir tam değere sahip olmayan ondalık kesirler için, kabul edilen tam değerleri almanın hiçbir garantisi yoktur). *Matematiksel varlıkları oluşturmanın ikinci yolu, matematiksel türlerin biçimindedir. Yani daha önce elde edilen matematiksel varlıklar için varsayılabilen, "belirli bir matematiksel varlık için geçerli iseler, bu varlığa 'eşit' olarak tanımlanan bütün matematiksel varlıklar için geçerlidir* -eşitlilik için; simetri, yansıma ve geçişlilik şartları sağlanmalı-" *şartını sağlayabilmeli.*

* * *

Sezgicilikte geçerli ama klâsikte geçerli olmayan teoremlerde, matematik genellikle şu çerçevede meydana gelir: Belirli bir türe ait olan matematiksel varlıklar için, belirli bir özelliğin öğretilmesi, temel sezgiden ve –klâsik matematik için yanlış olan- bu zorunlu hususî karakter özelliklerinden gelişme yoluna özel bir karakteri empoze eder. Dikkat çeken örnekler süreklilik parçalanamaz ve *birim sürekliliğin tam bir fonksiyonu, zorunlu olarak düzgün süreklidir* şeklindeki modern teoremlerdir.

NOTLAR:

Güzelliğe yönelmiş içe dönük bilim sonuçlar için risk taşımaz. Matematiksel varlık deposu her fert ve insanlık için gerçek bir şeydir.

İç deneyim (taslak hâlinde verilmiştir):
ikilik;
hafızada hastalıklardan korunan ve depolanan ikilik;
değişmez birlik kavramına yol açan ikilik;
birlik artı birlik kavramına yol açan ikilik ve birlik;
ikilik artı birlik ve doğal sayılar dizisi olarak üçlük;
birliğin matematiksel bir sistem ve hafızada hastalıklardan korunan ve depolanan iki matematiksel sistemin birbirlerinden ayrı olarak toplanabildiği matematiksel sistemler;
vb.

* * *

Kasım 1951'de Düzenlenen 'Klâsik Mantık ve Matematik İlişkisindeki Değişmeler (Sezgici Matematiğin Mantık Üzerine Etkisi)' Adlı Konferanstan Bazı Kısımlar

Klâsik mantık, insan düşüncesinden bağımsız olarak bir hakikat bulunduğunu varsaymıştır. Bu hakikatin bir kısmı 'doğru iddialar' denilen cümleler kullanılarak ifade edilir; asıl olarak, bazı nesnelere belirli özellikler tahsis edilir veya belirli özelliklere sahip olan nesnelerin varlığını söyler veya belirli fenomenler belirli kanunlara göre davranır. Bundan başka, klâsik mantık yeni doğru önermelerin eskilerinden otomatik bir çıkarımına izin veren genel bir dilbilimsel kurallar olduğunu var saymıştır. Böylece asıl olarak deneyime dayanan ve aksiyom denilen, 'açıkça' doğru olan önermelerin sınırlı bir stokundan başlayarak, deneyimden bağımsız olan dil bilimsel işlemlerle, teorik olarak, mevcut insan bilgisine büyük bir katkı sağlanacaktı. Son olarak, 'doğrunun tersi' için 'yanlış' terimini kullanarak klâsik mantık şunu kabul etti: 'Hariç tutulan orta ilkesi' denilen özelliğin hayrına, her önerme özellikle her varoluş önermesi ve bir nesneye bir özelliğin ya da bir olaya bir davranışın her tahsis edilişi, insanoğlunun bir şeyin yanlışlığı ya da doğruluğunu bilmesinden bağımsız olarak ya doğru ya da yanlıştır. Böylelikle, örneğin yanlışlığın çelişkisi doğru anlamına gelecekken, *a* önermesi -ki, *a* önerme-

si, eğer *b* önermesi doğru ya da yanlış ise doğrudur- evrensel olarak doğru olacaktır. 'Doğru' ile 'doğru olarak bilinen ve kaydedilen' yer değiştirirse bu ilke geçerlidir; fakat bu sınıflandırma değişkendir. Bu yüzden ilkeyi tekellüm ederken 'belirli bir anda'yı eklememiz gerekir.

Matematik, uzay ve zaman bilimi olarak kabul edildiği sürece, sadece uzay ve zamanın insan deneyiminden bağımsız olarak var olduğuna inanılan zamanlarda değil, aynı zamanda bilinçli dış insan deneyiminin tabiî (doğuştan) biçimleri için uygulandığından sonra bile, matematik bu klâsik mantığın sevilen bir faaliyet alanıydı. Bazı kanaatler hüküm sürmeye devam etti: Biz bilelim veya bilmeyelim, matematiksel bir önerme ya doğru ya da yanlıştır ve matematiksel doğruluk, insanlığın nesli tükendikten sonra bile -doğa yasaları gibi- hayatta kalmaya devam edecektir. Yaklaşık yarım yüzyıl önce bunu, büyük Fransız matematikçisi Charles Hermite şu sözlerle ifade etti: *"Il existe, si je ne me trompe, tout un monde qui est l'ensemble des vérités mathématiques, dans lequel nous n'avons d'accés que par l'intelligence, comme existe le monde des réalités physiques; l'un et l'autre indépendant de nous, tous deux de création divine et qui ne semblent distincts quà cause de la faiblesse de notre esprit, par contre ne sont pour une pensée puissante qu'une seule et même chose, et dont la synthèse se rélève partiellement dans cette merveilleuse correspondence entre les Mathématiques abstraites d'une part, l'Astronomie, et toutes les branches de la Physique de l'autre."*[1]

Matematiğin ancak otonom bir içsel inşa etkinliği olduğu tanındıktan sonra –ki, matematik dış dünyaya uygulanabilmesine rağ-

1 ["Eğer yanılmıyorsam, fiziksel gerçeklik dünyasının var olduğu gibi, sadece zekâmızla ulaşabileceğimiz matematiksel gerçekliklerden oluşan bir dünya da var. Bu ikisi de bizden bağımsız, bir yaratılış ürünü ve zekâmızın zayıflığından dolayı bize makul gelmiyor ancak öte yandan güçlü bir dimağ için tek ve ortak bir şeyden farkları yok ve bunun sentezi soyut matematikçiler bir taraf, astronomi ve fiziğin tüm dalları da diğer taraf olmak üzere iki taraf arasındaki harikulâde ilişkide kısmî olarak ortaya çıkıyor." Fransızca paragrafı çeviren O. Şen'e teşekkür ederiz. Ç.N.]

men, ne orijini ne de metotları dış dünyaya bağımlıdır-, ilk olarak bütün aksiyomlar aldatıcı oldu ve ikinci olarak bir matematiksel önermenin doğruluk ya da yanlışlık kriteri, mantık ya da her şeyi bilen farazî varlıklara baş vurulmadan matematiksel etkinliğin kendisine hasredildi. Dolaysız bir sonuç şuydu: Matematiksel bir önerme olan *a* için –önceleri münhasıran kabul edilen- doğruluk ve yanlışlık durumları aşağıdaki üç durumla yer değiştirildi:

(1) *a*'nın doğru olduğu kanıtlandı;

(2) *a*'nın saçma olduğu kanıtlandı;

(3) *a*'nın ne doğruluğu ne de yanlışlığı kanıtlandı ve ne de *a*'nın doğru ya da yanlış olduğunu ifade eden sonlu bir algoritma biliyoruz. [*a*'nın ne doğruluğun ne de yanlışlığının şimdiye kadar kanıtlanmaması bununla beraber *a*'nın doğru ya da yanlış olduğunu ifade eden sonlu bir algoritmayı bilmememiz durumu, açıkça birinci ve ikinci şıkka indirgenebilir. Bu, özellikle sonlu matematiksel sistemlerde, hudutlu sonlu bir karakterin inşasının imkânlılığı önermesine uygulanır. Çünkü böyle bir inşa sadece sınırlı sayıdaki özel yollarda uygulanmaya çalışılır ve her çaba sonlu sayıda adımda başarılı ya da başarısız olmayı kanıtlar.]

(1.) ve (2.) durumunun sürekli karakterine karşılık, (3.) tür bir önerme bazen diğer bir duruma geçer: Sadece daha ileri düşüncelerin böyle bir hedefi başaran bir algoritma üretmesinden değil, aynı zamanda –birazdan göreceğimiz gibi- modern ya da sezgici matematikte, matematiksel bir varlık zorunlu olarak önceden belirlenmiş değildir ve özgür gelişme durumunda matematiksel bir varlık daha önce kazanmadığı bir özelliğe sahip olabilir.

Sıvışma özelliği hakkında yukarıdaki konferansa bakın.

***

Sezgici matematiğin böyle genişlemesine yol açan sebeplerden biri [yanlış, genişleme kendiliğinden-açılmanın dolaysız bir sonucudur; bu nedenle, burada sadece genişlemenin faydaları açıklan-

mıştır]; klâsik matematiğin, mantığın yardımı olmaksızın sürekliliği noktalardan üretmedeki başarısızlığıdır. Çünkü, rasyonel sayıların önceden belirli yakınsak sonsuz dizileri tarafından belirlenen gerçek sayılar için, hiç bitmeyen bir numaralandırılamayan tür gerçekten ortaya çıkarılabilmiştir. Bu hiç bitmeyen bir numaralandırılamayan tür, asla sıfır ölçüsünü aşmamaya mahkum edilmiştir. Klâsik matematik, noktalardan pozitif ölçülü bir süreklilik oluşturmak için, en azından bir aksiyomdan başlayan bazı mantıksal işlemlere başvurmuştur. Bu türün daha yaygın bir metodu Hilbert'e aittir. Onun metodu, rasyonel sayılar alanının aritmetiği için geçerli olan bir dizi sıralama ve hesaplama -Arşimet özelliği dahil- özelliklerinden başlayarak, bu alanı takip eden geniş hâllerini ve aritmetikten daha geniş alanlara ve önceki alanları ile aritmetiği kapsayan özellikleri koruyan haliyle aritmetiği göz önüne alır. Hilbert, bu genişleme için bir son olduğunu ve aritmetiğin daha fazla genişleme için aciz kaldığını kabul ediyor; yani bütünlük aksiyomu denilen aksiyomu uyguluyor. Sezgici bakış açısından, bu yolla üretilmiş bir süreklilik, matematiksel bir varlık oluşturamamış sadece dilbilimsel bir varlık oluşturmuştur. Sezgici matematik, sadece serbest ilerleyen sonsuz dizileri kabul etme yoluyla, bu dilbilimsel sürekliliği, pozitif ölçülü hakikî bir matematiksel süreklilik ile ve klâsik analizin dilbilimsel doğruları, hakiki matematiksel doğrular ile yer değiştirebilmiştir.

Bununla birlikte, matematiksel doğruluğu keşfetmek için klâsik mantığı bir araç olarak reddetmesine karşın, sezgici matematik; matematiksel önermelerin genel bir iç-gözlemsel kuramına sahiptir. Sezgici matematik mantığı olarak adlandırılabilen, ki doğruluk payı vardır, bu kuramı aşağıdaki ifadelerle açıklayacağız. [Sonraki bölüm çevrilmemiştir. Ç.N.]

II. ONTOLOJİ VE MATEMATİKSEL HAKİKAT

MATEMATİKTEKİ PLATONCULUK ÜZERİNE*

Paul Bernays
Çev. Cezmi Kayan & Bekir S. Gür

Müsaadenizle, sizi şimdi matematiğin temelleri hakkındaki araştırmaların günümüzdeki durumuna götüreceğim.

Bu alanda henüz çözülmemiş sorular kaldığından dolayı, size alanın tam bir resmini sunacak durumda değilim. Fakat, durumun, bir temeller krizinden bahseden kişileri dinleyen birinin zannettiği kadar vahim olmadığına dikkat çekilmelidir. Bu kriz ifadesi, belirli

* 18 Haziran 1934 tarihinde University of Geneva'da verilmiş Fransızca konuşmanın, İngilizce tercümesinden alınmıştır. Benacerraf, Paul & Putnam, Hilary (Ed.) (1964). *Philosophy of Mathematics; Selected Readings*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall. 274-286.

bakış açılarından gerekçelendirilebilir; lâkin bu ifade matematik biliminin temelinden sarsıldığı düşüncesine yol açabilir.

Gerçek şu ki, matematiksel bilimler tam bir güvenlik ve düzen içinde gelişmektedir. Dedekind, Poincaré ve Hilbert'in görüşleri büyük bir başarıyla, sonuçlarda herhangi bir çelişkiye yol açmadan sistematik olarak geliştirilmiştir.

İtirazlar sadece felsefi cihetten yükselmiştir. Bu itirazlar, analiz ve küme kuramına özgü belirli bir tür akıl yürütme yollarıyla ilgilidir. Bu akıl yürütme çeşitleri, sistematik olarak, başlangıçta analizin metotlarına kesin bir şekil vermede kullanıldı. [Bunlara göre,] bir kuramın nesneleri, aşağıdaki gibi akıl yürütülen bir bütünün elemanları olarak görülebilirler. Kuramın kavramları kullanılarak açıklanabilen her bir özellik için, bu özelliğe sahip olan bütünün bir elemanının var olup olmadığı tarafsız olarak belirlenen [bir gerçektir]. Bu bakış açısından, bunun gibi, ya bir kümenin bütün elemanlarının verilen bir özelliğe sahip olduğu ya da bu özelliğe sahip olmayan en az bir elemanın var olduğu anlaşılır.

Bu çeşit bir kuram kurma örneği, Hilbert'in geometri aksiyomatikleştirmesinde bulunabilir. Hilbert'in aksiyom sistemi Öklit'inkiyle kıyaslandığında, Yunan geometricinin belirli (gerekli) postulatları dahil etmediğini ihmal edersek, Öklit, şekillerin inşa edildiğinden bahsederken, Hilbert'in, noktalar sisteminden, düz çizgilerden ve düzlemlerden bizim dışımızda varmış gibi bahsettiği görülür. Öklit, 'iki nokta bir çizgiyle birleştirilebilir' aksiyomunu varsayar; oysa Hilbert, 'verilen herhangi iki nokta için, her iki noktanın üzerinde olduğu düz bir çizgi vardır.' aksiyomunu varsayar. Burada, 'vardır' sözcüğü, düz çizgiler sisteminde var olma anlamındadır.

Bu örnek bile gösteriyor ki, hakkında konuştuğumuz eğilim, nesneleri konuyu yansıtan bütün bağlarından kopuk olarak görmeye dayanır.

Özellikle, Platon'un felsefesinde öne sürüldüğü için bu eğilime, 'Platonculuk' diyeceğim.

Platoncu olarak esinlenen matematiksel kavramların değeri, onların soyut hayal etme modelleri sağlamalarıdır. Bu kavramlar, basitlikleri ve mantıksal güçleriyle göze çarparlar. Bunlar, belirli deneyim ve sezgi bölgelerinden genelleştirilen temsilleri oluşturuyorlar.

Bununla birlikte, geometri ve fiziğin kuramsal sistemlerinin aritmetiksel bir biçime dönüştürülebileceğini biliyoruz. Bu nedenle, dikkatimizi aritmetikteki Platonculuğa yönlendireceğiz. Bununla beraber, burada aritmetiği analiz ve küme kuramını kapsayan çok geniş bir anlamda kullanmaktayım.

Aritmetik tarafından ortaya konulan en zayıf 'Platoncu' varsayım, tamsayıların bütünlüğüdür. Bundan, tamsayılar için, *tertium non datur* [hariç tutulan orta ilkesi -Ç.N.] çıkar. Yani, P tamsayıların bir yüklemi ise, P ya her sayı için doğrudur ya da en az bir istisna söz konusudur.

Bahsi geçen varsayım ile bu kopma, analizde neredeyse sürekli kullanılan hariç tutulan orta mantık ilkesinin dolaysız bir sonucudur.

Örneğin, bunun aracılığıyla, yakınsayan serilerle verilen iki reel sayı olan a ve b için şu sonuçlardan birine ulaşılır: $a=b$, $a<b$ ya da $b<a$'dır. Ve bunun gibi bir dizi pozitif rasyonel sayı, ya istediğiniz kadar sıfıra yakındır ya da dizinin bütün üyelerinden küçük bir pozitif rasyonel sayı vardır.

İlk bakışta, bu tür kopmalar önemsiz görünür; dolayısıyla bir kabulün iddiasını fark edebilmek için dikkatli olmalıyız.

Hâlbuki analiz, bu ılımlı Platonculuk çeşidini içermiyor. Sayılar kümesi, sayılar dizisi ve fonksiyon kavramları açısından analiz, Platonculuğu daha güçlü bir dereceye kadar yansıtıyor. Analiz, kümelerin, dizilerin ve fonksiyonların tanımlarını verme olasılığından so-

yutlanır. Bu kavramlar, 'sözde-kombinatoryal'* anlamda kullanılır; bununla sonsuzdan sonluya doğru bir benzerliği ifade etmekteyim.

Örnek olarak 1, 2, ..., n sonlu serisinin her bir üyesini aynı seriden bir elemanla eşleştiren farklı fonksiyonları düşünün. Bu çeşit n^n tane fonksiyon vardır ve bunların her biri n bağımsız saptamayla elde edilebilir. Sonsuz duruma geçersek, her tamsayıyı bir tamsayıyla eşleştiren bağımsız saptamaların bir sonsuzluğuyla oluşan fonksiyonları hayal ediyoruz ve bu fonksiyonların bütünlüğü hakkında akıl yürütüyoruz.

Aynı şekilde, her bir sayının dahil edileceği ya da dışarıda bırakılacağına sonsuz çokluktaki bağımsız eylemlerin sonucunda karar veren bir tamsayı kümesi düşünülebilir. Biz bunu, bu kümelerin bütünlüğü düşüncesine ekliyoruz. Reel sayılar dizisi ve reel sayılar kümesi benzer bir şekilde zihinde canlandırılır. Bu bakış açısından belirli fonksiyonların, dizilerin ve kümelerin inşacı tanımları; inşadan bağımsız olan ve ondan önce gelen bir nesneyi seçmek için tek yoldur.

Tercih aksiyomu, söz konusu 'sözde-kombinatoryal' kavramların doğrudan bir uygulamasıdır. Zaten, reel sayılar kuramında genellikle aşağıdaki özel biçimde kullanılır.

$$M_1, M_2 \ldots$$

dizisi, boş-olmayan reel sayı kümelerinin bir dizisi olsun; bu durumda, her n indeksi için a_n, M_n'in bir elemanı olacak şekilde,

$$a_1, a_2, \ldots$$

dizisi vardır.

---

* [Sonlu bir kümenin elemanlarının dizilişi, seçimi veya özelliklerini konu edinen matematiğin çalışma alanına *combinatorics* denir. 'Combinatorial' kelimesini 'kombinatoryal' olarak bırakmayı tercih ettik. Yazar, sözde-kombinatoryal kelimesiyle, sonsuzluk durumları analizleri ile sonlu durumlar üzerine yaptığımız analizler arasındaki benzerliklerden çıkardığımız sonuçlara vurgu yapıyor. Ç.N]

Sayılar dizisinin etkili inşaları talep edilirse, yukarıdaki prensip itirazlara açıktır.

Poincaré'nin döngüsel (*impredicative*) tanımlamasında da benzer bir durumla karşılaşırız. Reel sayıların döngüsel tanımlaması, bütün reel sayıların belirli bir P özelliğine sahip olmaları ya da T özelliğine sahip bir reel sayının var olduğu hipotezine başvurur.

Bu çeşit bir tanımlama, tamsayı dizilerinin bütünlüğünü[n var olduğu] varsayımına bağlıdır. Çünkü reel bir sayı, tamsayılar dizisinin özel bir çeşidi olan ondalık bir kesirle gösterilir.

Bu, özellikle reel sayıların sınırlı bir kümesinin, en küçük bir üst sınıra sahip olduğunu belirten temel teoremi kanıtlamak için kullanılır.

Cantor'un kuramlarında Platoncu kavramlar, reel sayılar kuramının kavramlarının çok ötesine uzanır. Bu, bir fonksiyonun 'sözde-kombinatoryal' kavramının kullanımının yeniden ifade edilmesiyle ve biriktirme yöntemlerinin eklenmesiyle yapılır. Bu küme kuramının meşhur metodudur.

Analiz ve küme kuramının Platoncu kavramları, cebir ve topolojinin modern kuramlarında da uygulanır. Bu kavramların, bu alanlarda çok verimli oldukları kanıtlanmıştır.

Bu kısa özet, Platonculuğu ve onun matematikteki uygulamalarını nitelemek için yeterlidir. Bu uygulama öyle yaygındır ki, Platonculuğun günümüz matematiğinde taht kurduğunu söylemek abartı olmaz.

Ama diğer yandan bu eğilimin ilk ortaya çıktığından beri eleştirildiğini ve birçok tartışmaya sebep olduğunu görmekteyiz. Bu karşı çıkışlar sadece aşırı Platonculuğu çürütse de, küme kuramında keşfedilen paradokslarla eleştiriler güçlenmiştir.

Şimdiye kadar biz sadece, düşüncenin bir alanının ideal bir izdüşümünden daha fazlasını iddia etmeyen sınırlı bir Platonculuktan bahsettik. Ama sorun burada değil. Birkaç matematikçi ve filozof, matematiğin bütün nesnelerini ve bağıntılarını içeren ideal bir nes-

neler dünyasının var olduğunu ileri sürerek, Platonculuğun metotlarını kavramsal bir realizm anlamında yorumlamışlardır. Özellikle Russell-Zermelo paradoksunu çevreleyen karşıtlıklar tarafından savunulamaz kılınan şey, bu mutlak Platonculuktur.

Bu paradokslar tamamıyla mantıksal biçimlerinde ilk defa duyulduklarında, ciddî ehemmiyeti olmayan kelime oyunları gibi düşünülebilir. Lâkin, paradoksların bu kısaltılmış biçimlerinin, mutlak Platonculuğun değişik gerektirmelerinin sonuçlarının izlenmesiyle elde edildiği göz önünde tutulmalıdır.

Bu karşıtlıkların asıl önemi, bütün matematiksel nesnelerin bütünlüğü düşüncesi ile küme ve fonksiyonun genel kavramlarının birleştirilmesinin imkânsızlığının ortaya çıkmasıdır. Bütünlüğün kendisi, küme için elemanların bir alanını oluşturabilir; fonksiyonlar için ise, iddia ve değerleri oluşturabilir.

Dolayısıyla, mutlak Platonculuğu terk etmeliyiz. Fakat bunun, paradokslardan türeyen neredeyse tek buyruk olduğu görülmelidir. Paradokslar her tarafta sevildiğinden, bazıları bu sonucun üzücü olduğunu düşünebilir. Fakat paradokslardan kaçınmak, tek bir anlama sahip bir program oluşturmaz. Özellikle, sınırlandırılmış Platonculuk, karşıtlıklardan hiç etkilenmemiştir.

Analiz temellerinin eleştirisi hâlâ bu kaynaktan güç alıyor ve paradokslardan kaçınmanın değişik yolları arasında en radikali, Platonculuğu elimine etmektir.

Bu elemenin nasıl yapılabileceğine bir bakalım. Platonculuk tarafından ortaya konulan iki temel varsayıma karşılık gelen iki adımda yapılıyor. İlk adım, sözde-kombinatoryal diye adlandırdığım küme, dizi ya da fonksiyon kavramlarını inşacı kavramlarla yer değiştirmektir. Bağımsız saptamaların sonsuzluğu düşüncesi reddedilmektedir. Sonsuz bir dizi ya da bir ondalık kesrin, sadece aritmetik bir yasayla verilebileceği vurgulanıyor ve süreklilik, böyle yasalarla tanımlanan elemanların bir kümesi olarak ele alınıyor.

Bu prosedür, analizin tam bir aritmetikleşmesi eğilimine uyarlanır. Gerçekten de, analizin aritmetikleştirilmesinin normal metotla bitirilemeyeceği teslim edilmelidir. Daha önce gördüğümüz gibi, orada uygulanan kavramlar, tamsayı kavramlarına ve mantıksal kavramlara tamamen indirgenemez.

Bununla beraber, eğer her bir reel sayının aritmetik bir yasayla tanımlandığı düşüncesini savunmayı sürdürürsek, reel sayıların bütünlüğü düşüncesi artık vazgeçilmez değildir. Ayrıca, tercih aksiyomu artık açık değildir. Yine -Russell ve Whithead'ın yaptığı gibi- eğer yardımcı varsayımları ortaya koymazsak, çeşitli sıradan sonuçlar olmadan da yetinmeliyiz. Weyl, *Das Kontinuum* adlı kitabında bu sonuçları çok açık kılmıştır.

Eleme sürecinin ikinci aşamasına geçelim. Bu adım, tamsayıların bütünlüğü düşüncesini terk etmekten oluşuyor. Bu bakış açısı, ilk defa Kronecker tarafından savunuldu ve sonra Brouwer tarafından sistematik olarak geliştirildi.

Bazılarınız Mart [1934]'ta bu metodun sahih bir sunumunu, Profesör Brouwer'ın kendisinden dinlemiş olsanız bile, ben birkaç kelimelik açıklama yapacağım.

Öncelikle, Kronecker ile ilgili bir yanlış anlaşılma düzeltilmelidir. Bu anlayış, 'Tanrı önce tamsayıları yarattı, matematikteki diğer her şey insan ürünüdür.' şeklinde sık sık tekrar edilen özdeyişinden kaynaklanıyor. Bu, gerçekten Kronecker'in görüşü olsaydı, Kronecker tamsayıların bütünlüğü düşüncesini kabul etmeliydi.

Aslında, Brouwer metodu gibi, Kronecker metodu da belirli bir ideal nesne oluşturan bir dizi doğal sayı varsayımından kaçınmasıyla nitelendirilir.

Kronecker ve Brouwer'a göre, sayı dizilerinden sadece, ulaştığı tüm sınırları geçen, asla bitmeyen bir süreç anlamında bahsedilebilir.

Bu sapma noktası, diğer ıraksamaları, özellikle mantıksal formların uygulanması ve yorumlanması ile ilgili olanları da bağrında

taşır. Yani, ne tamsayılar hakkında genel bir yargı ne de bir varoluş yargısı, sayı dizilerinin bir özelliğini açıklama olarak yorumlanabilir. Sayılarla ilgili genel bir teorem, herhangi bir sayının inşası için bir özelliğin kendisini sunduğu, bir çeşit tahmin olarak kabul edilebilir. Ayrıca, belirli bir özelliğe sahip bir sayının var olduğunun doğrulanması, sorudaki özelliğe sahip olan [tikel] bir sayıyı gösteren ya da böyle bir sayıyı elde etmek için gereken bir metodu gösteren daha kesin bir önermenin, eksik bir iletişimi olarak yorumlanır; Hilbert buna "kısmî yargı" diyor.

Aynı sebeplerle tamsayılarla ilgili genel veya varoluşsal bir önermenin değilinin kesin bir anlamı yoktur. Matematiksel bir önermeye ulaşmak için, önermenin değili güçlendirilmelidir. Örneğin, P özelliğine sahip olan sayının var olduğunu doğrulayan bir önermenin, güçlendirilmiş değilini vermek, P özelliğine sahip bir sayının verilemeyeceğini ya da bu özelliğe sahip bir sayının bir çelişkiye sebep olduğu varsayımını söylemektir. Fakat, böyle güçlendirilmiş değiller için hariç tutulan orta ilkesi artık uygulanamaz.

Brouwer'ın "sezgici" metodunda karşılaşılan karakteristik karmaşıklıklar bundan kaynaklanır.

Örneğin, şöyle ayrıklar (disjunctions) genellikle kullanılmaz: Pozitif terimli bir dizi ya yakınsayan ya da ıraksayandır; iki yakınsayan toplam ya aynı reel sayıyı ya da farklı reel sayıları gösterir.

Tamsayılar ve cebirsel sayılar kuramında bu tür sorunları önleyebilir ve gerekli tüm teorem ve iddiaları korumayı başarabiliriz.

Aslında, Kronecker, daha önce cebirsel alanlar kuramının özünün, tam sayıların bütünlüğüne başvurulmadan, kendi bakış açısıyla geliştirebileceğini göstermiştir.[1]

1 Bu amaçla, Kronecker, konuşmasında, cebirsel sayı kavramını bir şekilde tanımlamıştır. Bu tanım, bu kavramı tanımlamanın oldukça temel bir yolu olmasına rağmen tamamen unutulmuştur. Bu metot, cebirsel sayıları, katsayıları rasyonel sayılardan müteşekkil olmak üzere tek değişkenli indirgene-

Analize gelince, Brouwer'ın bunu sezgiciliğin şartlarıyla uyumlu olarak geliştirdiğini biliyorsunuz. Ama bu yöntemle, her sürekli fonksiyonun kapalı bir aralıkta bir maksimumu olduğu şeklindeki temel teorem gibi birçok sıradan teorem terk edilmelidir. Küme kuramında bulunan şeylerden çok azı, sezgici matematikte geçerli bulunmaktadır.

Yaklaşık olarak, sezgiciliğin sayı kuramına uyarlandığı söylenebilir; tamsayıların bütünlüğü düşüncesini kullanan ama sözde-kombinatoryal kavramlardan kaçınan yarı Platoncu metot, fonksiyonların aritmetik kuramına uyarlanan ve bilinen Platonculuk sürekliliğinin geometrik kuramı için yeterlidir.

Bununla ilgili şaşılacak bir şey yoktur; çünkü varsayımları, gerekli olduğu herhangi bir bilim alanı için sınırlamak, çağdaş matematikçi için bilinen bir prosedürdür. Bu sınırlamayla, bir kuram metodik açıklık kazanır ve bu sezgiciliğin verimli olduğunu kanıtladığı yöndür.

Ama bildiğiniz gibi, sezgicilik böyle bir role yeterli değildir; sezgicilik, normal matematiğe karşıdır ve sadece gerçek matematiği gösterdiğini iddia eder.

Öte yandan, matematikçiler genellikle analizin iyi test edilmiş ve zarif metotlarını çok zorunlu değilse karışık metotlarla değiştirmeye hiç de razı değillerdir.

Sorunu daha derinlemesine tartışmalıyız. Sezgici metodun varsayımlarını ve felsefî karakterini biraz daha tanımlamaya çalışalım.

Brouwer'ın başvurduğu şeyin ne olduğu açıktır. Sezgiciliğin temel düşüncelerinin saf sezgiyle açık bir şekilde bize verildiğini iddia ediyor. Buna dayanarak, Kant ile olan kısmî uyuşmasını ortaya

---

mez polinom sembollerinin değişimleri olarak temsil etmeyi içermektedir. Tanımlardan başlamak üzere, cebirsel sayılar için temel işlemler ve bağıntılar tanımlanır; sıradan hesap kurallarının sağlandığı ispatlanır; ve son olarak, cebirsel katsayılı bir polinomun a ve b bağımsız değişkenleri için farklı işaretli değerleri varsa, polinomun a ve b arasında bir sıfır değeri var olduğu gösterilir.

çıkarıyor. Ama Kant için zaman ve uzaya göre saf bir sezgi varken, Brouwer sadece, Kant gibi, zamana dayanarak sayı sezgisini kabul ediyor.

Bu felsefî konuma gelince, Brouwer'a iki gerekli noktanın teslim edilmesi gerekiyor. Bunlardan birincisi, tamsayı kavramının sezgisel kaynaklı olduğudur. Bu bakımdan, daha sonra döneceğim mantıkçıların[2] çalışmalarıyla hiçbir değişiklik arz etmez. İkincisi, Kant'ın yaptığı şekilde aritmetik ve geometri yapılmamalıdır. Sayı kavramı geometri kavramından daha temeldir.

Geometrik sezginin varlığını tamamen inkâr etmek bana hâlâ biraz acelecilik gibi görünüyor. Ama bu sorunu bir yana bırakalım, daha acil olanları var. Aritmetik sezgi tarafından verilen açıklığın (evidence: açık, kanıt Ç.N.) tam olarak sezgici aritmetiğin sınırlarının gerektirdiği kadar genişletilmesi gerçekten kesin midir? Ve son olarak, neyin açık ve neyin sadece akla yatkın olduğunun arasına tam bir sınır çizmek mümkün müdür?

Bu iki sorunun olumsuz olarak cevaplandırılması gerektiğine inanıyorum. İlk olarak, insanların, hatta düşünürlerin bile genellikle açıklık hakkında aynı düşüncede olmadıklarını biliyorsunuz. Yine, daha önce açık olarak kabul edilen varsayımlar bazen reddedilir.

Şimdiye kadar, hakkında tartışma yapılan bir açıklık sorunu örneği, paralel aksiyomudur. Bence aksiyoma karşı yöneltilen eleştiriler, aksiyomun Öklit sistemindeki özel konumuyla kısmen açıklanır. Diğer birçok aksiyom atlanmıştır; sonuçta, paralel aksiyomu diğerlerinden karmaşıklığıyla göze çarpar.

Bu sorunda şunu vurgulamaktan hoşnut olacağım: Sadece topolojik gerçekler ya da projektif aksiyomlarla açıklanan gerçeklere uygulandığı düşünülerek geometrinin açıklığı hakkında şüpheler bulunabilir. Öte yandan, geometrik sezginin kesin olmadığı iddia edilebilir. Bu düşünceler kendi içinde tutarlıdır ve hepsinin savun-

2 'Logiciens' kelimesi 'mantıkçılar' olarak çevrilecektir. İngilizce'ye Ç.N.

dukları iddialar vardır. Fakat, metrik geometrinin, Öklit ve Bolyai-Lobachevsky geometrilerinde ortak olan yasalarla sınırlı bir açıklığa sahip olduğunu iddia etmek -ki bu kesin metrik açıklık tam karenin varlığını bile garanti etmez- bana oldukça yapay görünüyor. Fakat bu birçok matematikçinin bakış açısıydı.

Burada, bizim vurgulamaya çalıştığımız sorun, açıklığın sınırlarını çizmeye çalışırken karşılaşılan zorluklardır.

Bununla birlikte, bu zorluklar, sorunun ötesinde herhangi bir açık şeyin bulunmasını imkânsız kılmıyor ve elbette sezgicilik böyle şeyleri sunuyor. Ama bu temel açıklık bölgesi için de tamamen kapatılabilir mi? Bu sorun, aşağıdaki nedenden ötürü tamamen şüpheden uzak değildir. Sezgicilik, çok büyük sayılar için, inşacı sayıların tekrarlı metoduyla, gerekli işlemlerin somut bir anlama sahip olmasını durdurma olasılığına izin vermez. k ve l tam sayılarından hemen k^l elde edilebilir. Bu iş birkaç adımda tecrübî herhangi bir sayıdan çok büyük sayılara örneğin $67^{(257^{729})}$ gibi bir sayıya yol açar.

Sıradan matematik gibi sezgicilik de bu sayının Arap rakamlarıyla gösterilebileceğini iddia ediyor. Sezgiciliğin varoluşsal iddialara yaptığı eleştiriler ileri götürülüp şu soru sorulamaz mı: Pratikte onu elde edecek bir konumda olmadığımıza göre, çok büyük sayılar için, Arap rakamlarının var olduğunu iddia etmek ne anlama geliyor?

Brouwer sezgiye başvuruyor; ama sezginin açıklığının gerçekten sezgisel olduğu şüphelidir. Bu, erişilebilir sayılar için somut olarak kanıtlanabilir ilişkileri, erişilemez sayılara genişletmekten oluşan genel bir metodun uygulaması değil midir? Bilindiği üzere, bu benzerliği uygulamanın sebebi, erişilebilir ve erişilemez olan sayılar arasında tam bir sınırın olmadığı gerçeğiyle güçlendirilir. "Uygulanabilir" bir prosedür kavramı tanıtılabilir ve tekrarlı tanımlamaların ithali, uygulanabilir işlemlerle sınırlandırılabilir. Çelişkileri önlemek için, hariç tutulan orta ilkesini uygulanabilirlik kavramına uygulamaktan kaçınmak yeterlidir. Ama bu kaçınmalar sezgicilik olmadan da olur.

Umarım yanlış anlaşılmam; aritmetiğin bu sınırlamayla yapılabileceğini tavsiye etmekten çok uzağım. Ortaya çıkan kuram oldukça yavan dahi olsa, sezgicilik, temelini, kendisinden şüphelenebilen ve prensip olarak onsuz yapılabilen önermelerden alır. Ben bu hususu göstermekle ilgileniyorum.

Bu nedenle, tam açıklık bölgesinin, bütün sezgiciliğe genişletilmesi mutlak olarak şüpheden uzak değildir. Diğer yandan, bazı matematikçiler, sezgici aritmetiğin bütün açıklığını tanıyor ve buna ek olarak sayı dizileri kavramının şu anlamda açık olduğunu iddia ediyorlar; bir sayının varoluşunun doğrulanması, o sayıya -doğrudan ya da tekrarlı- bir sınır verilmesini gerektirmez. Bunun haricinde, böyle bir sınırlamanın, gerçek bir somut sunumdan ne kadar uzak olduğunu az önce gördük.

Kısacası, sezgisel kanıtın bakış açısı, tek başına sezgiciliğin lehinde karar vermez.

Buna ek olarak, sezgiciliğin iddialarında kullandığı açıklığın, her zaman dolaysız bir özellik olmadığı görülmelidir. Soyut yansımalar da buna dahildir. Gerçekten de, sezgiciler, "Her n sayısının A(n) özelliği varsa, B geçerlidir," şeklindeki genel bir varsayımı içeren ifadeleri sık sık kullanırlar.

Böyle bir ifade sezgisel olarak şu şekilde yorumlanır: "Eğer her n sayısının A(n) özelliğinin var olduğu ispatlanırsa, B geçerlidir." Burada soyut bir çeşit hipotezimiz vardır; çünkü sezgicilikte açıklama metotları sabit olmadığından dolayı bir şeyin ispatlanma şartı sezgisel olarak belirlenemez.

Verilen bir ifadenin, kısmî bir yargı olarak da yorumlanabileceği doğrudur. Yani, verilen bir ifade, verili bir hipotezden çıkarılan B'nin ispatının varolduğu iddiası olarak görülebilir. Öyle ki B'nin ispatı etkili bir tarzda verilebilecektir.[3] (Bu, yaklaşık olarak Kolmo-

3 ["... c'est à dire comme une indication d'un raisonnement conduisant de la dite hypothèse à la conclusion B, raisonnement B, raisonnement qu'on présente effectivement."]

gorov'un sezgicilik yorumu anlamındadır.) Her durumda, iddiaya, sezgisel olarak sabitlenmeyen genel bir hipotezden başlanmalıdır. Bu nedenle, bu iddia soyut bir yansımadır.

Biraz önce verilen örnekte soyut bölüm oldukça sınırlıydı. Soyut karakter, hipotezler üst üste geldiğinde daha belirgin olur. Yani şunun gibi önermeler formüle edildiğinde soyut karakter daha belirgin olur: "Eğer, A(n)'in her n için geçerli olduğu hipotezinden B çıkarılabilirse, o hâlde, C geçerlidir;" veya "Eğer A'nın bir çelişkiye yol açtığı hipotezinden bir çelişki ortaya çıkıyorsa, o hâlde, B geçerlidir;" ya da kısaca "Eğer A'nın saçmalığı saçma ise, o halde B geçerlidir." Bu cümlelerin soyutluluğu daha da artırılabilir.

Soyut akıl yürütmenin bu biçimlerinin sistematik olarak uygulanmasıyla Brouwer, Kronecker'in metotlarının ötesine geçmiş ve -Heyting tarafından [daha sonra] sistematize edilmiş- genel bir sezgici mantığı kurmada başarılı olmuştur.

Sonuç kavramlarının tamamen uygulandığı bu sezgici mantığı göz önüne alırsak ve burada kullanılan metodu normal metotla karşılaştırırsak, sezgiciliğin karakteristik genel özelliğinin saf sezgiden kurulu olmadığını, bundan ziyade, bilimin tüm gelişimi ile [üzerinde kurulu olduğu] eyleyen ve yansıtan özne ilişkilerine dayalı olduğunu görürüz.

Bu, aşırı metodik bir konumdur. Bu konum, üzerinde düşünülen konudan alabildiğince ayrılmış kuramlar kurmaktan oluşan alışılagelmiş matematik yapma tarzına zıttır.

Bu farkına varma, sezgiciliğin matematiksel düşüncesinin tek meşru metodu olduğundan şüphelenmemize yol açar. Bu nedenle, [üzerinde düşünülen] konudan uzak olan eğilimin Platonculuk egemenliğinde çok bastırıldığını kabul etsek bile, bu, doğrunun zıt uçlarda yattığına inanmamıza sebep olmaz. Her iki olasılığı da akılda tutarak, bilimin her branşında metodun, araştırılan nesnenin karakterine uyarlanmasını sağlamayı amaçlarız.

Örneğin, sayı kuramı için bir sayının sezgisel kavramını kullanmak çok doğaldır. Gerçekten de, bu yolla sayı kuramı, tam tümevarım aksiyomu ya da Dedekind ve Russell'ın sonsuzluk aksiyomları gibi bir aksiyom verilmeden de kurulabilir.

Bundan başka, sayının sezgisel kavramını önlemek için, bir önermenin, bir fonksiyonun ya da rastgele bir uygunluğun daha genel bir kavramını tanıtmaya sürüklenirsiniz. Bu kavramlar genelde nesnel olarak tanımlanmamışlardır. Aksiyomatik küme kuramındaki gibi, böyle bir kavramın aksiyomatik metotla daha belirgin yapılacağı doğrudur; fakat aksiyomlar sistemi çok karışıktır.

Frege'nin, saf mantığı matematiksel nesne evreninin genel kuramı olarak görüp aritmetiği saf mantıktan çıkarmaya çalıştığını biliyorsunuz. Russell-Zermelo çelişkileri, bu mutlak Platoncu girişimin -temelleriyle birlikte- altı oyulmuş olsa da, mantıkçılık okulu aritmetiği bir mantık sistemine dahil etme düşüncesini terk etmemiştir. Mutlak Platonculuk yerine bazı başlangıç varsayımlarını ortaya koymuşlardır. Fakat bundan dolayı sistem, saf mantık karakterini yitirmiştir.

Principia Mathematica sisteminde, sadece sonsuzluk ve indirgenebilirlik aksiyomları değil, aynı zamanda bireylerin evrensel bir alanının ve yüklemlerin bir alanının başlangıç kavramı da saf mantığın ötesine gider. Nesneler evreninin, kuramsal işlem için hazırlanmış, konular ve yüklemler şeklinde bölündüğünü sanmak gerçekten de *ad hoc* [kurtarıcı] bir varsayımdır.

Hâlbuki, bu yardımcı varsayımlarla bile, aritmetiğin bütünü mantık sistemiyle başarılı bir şekilde birleştirilemez. Bu nedenle, sistem sabit kurallara göre geliştirildiği için, aritmetiğin bütün teoremleri bir dizi sabit kuralla elde edilebilmelidir. Ama durum böyle değildir; Gödel'in gösterdiği gibi aritmetik, verilen herhangi bir formalizmi aşar. (Aslında, bu durum aksiyomatik küme kuramı için de geçerlidir.)

Bunun yanında, aritmetiği mantıktan elde etme isteği, mantığın aritmetikle olan ilişkisinin, genel ile özel arasındaki ilişki gibi oldu-

ğu yolundaki geleneksel düşünceden kaynaklanır. Bana göre, işin aslı, matematiksel soyutlama, mantıksal soyutlamadan daha az bir dereceye sahip değil, fakat başka bir yöndedir.

Bu düşünceler, mantığı sistematik olarak geliştirmeyi ve matematiksel ispatları biçimselleştirmeyi amaçlayan mantıkçıların araştırmalarının kendine özgü değerini hiç azaltmaz. Biz burada sadece, sayı kuramı için sezgisel metodun daha uygun olduğu tezini savunma ile ilgileniyoruz.

Diğer yandan, süreklilik kuramı için analiz tarafından verilen sezgici metot oldukça yapay görünüyor. Süreklilik düşüncesi, analizin, sürekliliği aritmetik yoluyla açıkladığı, geometrik bir düşüncedir.

Sürekliliği temsil eden sezgici metot, süreklilik düşüncesine normal metottan daha iyi uyarlanmış mıdır?

Weyl, bizim buna inanmamızı isteyecektir. Weyl, sürekliliği tek tek noktalara ayırdığı için sıradan analize sitem ediyor. Ama bu sitem, sürekliliği aritmetik yasalarının bir kümesi olarak gören yarı-Platonculuğa daha iyi hitap etmiyor mu? Normal metodun gerçeği şudur ki, özel bir noktanın süreklilikte göze çarptığı tarz ile, bir dizinin sözde-kombinatoryal kavramından dolayı, -elemanları genellikle yalnızca zımnî olarak dahil olan- bütün reel sayılar kümesinde göze çarpan bir aritmetik yasa ile reel bir sayının tanımlandığı tarz arasında tam bir benzerlik vardır.

Benim için bu benzerlik, sürekliliğin puslu karakteri ve çözülmemiş aritmetik problemlerinden kaynaklanan belirsizlikler arasında sezgiciliğin kurduğundan daha çok sürekliliğin doğasıyla uyumlu görünmektedir.

Normal analizde sürekli bir fonksiyon ve türevlenebilir bir fonksiyon kavramının, sezgilerimizin gösterdiği bir eğrinin çok ötesine giden bir genelliği var olduğu doğrudur. Bununla beraber, bu analizde sürekli bir fonksiyonun maksimum(u olduğu) teoremi

ve Rolle teoremini kurabiliriz ve böylece sezgisel kavramı tekrar birleştiririz.

Sezgici analiz, bir fonksiyonun çok daha sınırlı bir kavramıyla başlıyor olsa bile, bu basit teoremlere ulaşamamaktadır. Bu teoremler, daha karmaşık olanlarla yer değiştirmelidir. Bu, sezgici kavram söz konusu olduğunda, sürekliliğin geometrik bir düşüncesine ait olduğu inkâr edilemeyen bir bütünlük karakterine sahip olmamasından kaynaklanıyor. Dahası, mükemmel bir aritmetikleştirmeye direnen sürekliliğin bu karakteridir.

Bu düşünceler, aritmetik ve geometri ikiliğinin, sezgicilik ve Platonculuk arasındaki karşıtlıkla ilgisiz olmadığına dikkat etmemize yol açar. Sayı kavramını aritmetikte görürüz. Sayı kavramı sezgisel kökenlidir; ama bu durumda sayıların bütünlüğü düşüncesi üst üste gelir. Diğer yandan geometride, Platoncu bir uzay düşüncesi aslî bir şeydir ve şekillerin inşasının, sezgici prosedürlerle meydana gelmesi bu arka plâna aykırıdır.

Bu, sezgici ve Platoncu eğilimlerin ikisinin de gerekli olduğunu göstermeye yeter; iki eğilim birbirini tamamlıyor ve birini terk etmek zorbalık olur.

Ama aritmetik ve geometrininki gibi, bu iki eğilimin ikiliği de tam bir simetriye sahip değildir. Daha önce işaret ettiğimiz gibi, 'sayı düşüncesi, uzay düşüncesinden daha fazla akla yatkındır' gibi, aritmetik ve geometriyi tamamen birbirlerine uydurmak münasip değildir. Bunun gibi, Platonculuğun varsayımlarının, sezgicilikte bulunmayan aşkın bir karaktere sahip olduğunu bilmeyiz.

Her bir Platoncu varsayımla ilgili belirli önlemler almamızı gerektiren de Platonculuğun bu aşkın karakteridir. Bundan dolayı, böyle bir varsayım rastgele olmasa ve zihinde doğal olarak yer etse bile, sınırlı bir bölgenin dışında çelişkiye düşülebilir şeklinde sınırlı bir uygulamaya izin verdiğini söyleyen bir ilke olacaktır.

Basit kılma dürtüsü, ilkelerimizi olabildiğince geniş yapmaya sebep olduğundan dolayı bu olasılıkla karşı karşıya olduğumuzda daha dikkatli olmalıyız. Dahası, böyle bir sınırlama ihtiyacı pek göze çarpmaz.

Daha önce gördüğümüz gibi, mutlak Platonculuk tarafından çok vurgulanan bütünlük ilkesi için durum buydu. Burada, bir sınırlamanın gerekli olduğunu gösteren sadece Russell-Zermelo çelişkilerinin keşfedilmesiydi.

Bu nedenle, matematiğin dayandığı Platoncu varsayımların, izin verilen sınırların ötesine gitmediğinden emin olmak için bir metot bulmak arzu edilen bir şeydir. Mevzu edilen varsayımlar; bütünlük ilkesi, benzerlik ilkesi ya da devamlılık yasalarının değişik şekillerine indirgenir. Ve bu ilkelerin uygulanmasını sınırlayan koşul, temel varsayımlardan çıkarılan sonuçların tutarlılığı koşulundan farklı bir şey değildir.

Bildiğiniz gibi, Hilbert bu tutarlılığı temin edecek yolları bulmaya çalışıyor ve onun ispat kuramının amacı da budur.

Bu kuram, kısmen mantıkçıların sonuçlarına dayanıyor. Mantıkçılar; aritmetikte, analizde ve küme kuramında kullanılan argümanların biçimselleştirilebileceğini göstermişlerdir. Yani argümanlar, semboller şeklinde ve sabit kurallara göre açıklanan sembolik işlemler olarak açıklanabilirler. İlkel önermeler, ilk formüllere karşılık gelir ve her mantıksal tümdengelim, verilen kurallara göre birbirinden türeyebilen formüller dizisine karşılık gelir. Bu formalizmde (biçimcilik), Platoncu bir varsayım, bir ilk formül ya da diğerlerinden elde edilmiş formüllerden yenilerini elde etmek için bir kural tesis etmek ile gösterilir. Bu yolla, bir ispatın olasılıklarının araştırılması, temel sayı kuramında karşılaştığımız türden problemlere indirgenir. Özellikle, A ve ~A (çizgi olumsuzu göstermektedir) gibi birbiriyle çelişen iki formül bulmanın imkânsızlığının kanıtlanması başarılırsa kuramın tutarlılığı ispatlanmış olur. İspatlanacak bu ifade, sözgeli-

mi, $a^2=2b^2$ eşitliğinin, a ve b gibi iki tamsayıyla sağlanmasının imkânsızlığını iddia eden bir önerme ile aynı yapıdadır.

Sembolik indirgeme yoluyla bir kuramın tutarlılık sorunu böylece, temel aritmetiksel karakterli bir probleme indirgenir.

Bu temel düşünceden hareketle Hilbert, (ana tutarlılık ispatları için) iddialarının önde gelen düşüncelerini göstererek, ispat kuramının ayrıntılı bir programını sunmuştur. Hilbert'in niyeti, kendini sezgisel ve kombinatoryal düşüncelerle sınırlamaktı; onun "sonlu bakış açısı" bu metotlarla sınırlıydı.

Bu çerçevede, kuram belirli bir noktaya kadar geliştirilmiştir. Ackermann, von Neumann, Skolem, Herbrand, Gödel, Gentzen gibi birkaç matematikçi buna katkıda bulunmuştur.

Bununla beraber, bu araştırmalar nispeten sınırlı bir alan içinde kaldı. Gerçekten de, tamsayıların aksiyomatik kuramının tutarlılığının bir ispatına bile ulaşılamadı. Bilindiği üzere, Peano aksiyomlarının sıradan mantıksal kalkulüs biçimselleştirmelerine, toplama $(a+b)$ ve çarpma $(a.b)$'nın tekrarlı tanımlamaları eklenerek bu kuramın sembolik gösterimi elde edilir.

Formel (biçimsel) bir kuramın tutarlılık ispatının, düşünülen formalizmle gösterilemeyeceği şeklindeki Gödel'in genel teoremiyle bu konu aydınlandı. Bu teoremden, şu daha özel önerme ortaya çıkar: Temel kombinatoryal metotlarla aritmetiksel bir önermenin, her bir temel kombinatoryal ispatını ifade edebilen formel bir kuramın tutarlılığının kanıtlanması imkânsızdır.

Şimdi, bu önermenin, aksiyomatik sayı kuramının formalizmine uygulandığı görülüyor. En azından, şimdiye kadar gösterilen hiçbir çaba, bu formalizmde açıklanamayan temel bir kombinatoryal ispat örneğini vermedi. Ayrıca, bahsi geçen durumlarda, bir ispatı bahsi geçen formalizme dönüştürebilen metotlar genel olarak yeterli görünüyor.

Bunun böyle olduğunu varsayarak[4], sayıların aksiyomatik kuramının tutarlılığını ispatlamak için, temel kombinatoryal metottan daha güçlü metotların gerekli olduğu sonucuna ulaşırız. Gödel ve Gentzen'in yeni bir keşfi, bizi böyle daha güçlü bir metoda yönlendirir. Gödel ve Gentzen (birbirinden bağımsız olarak), sezgici aritmetiğin tutarlılığının, aksiyomatik sayı kuramının tutarlılığı anlamına geldiğini göstermişlerdir. Heyting'in sezgici aritmetik ve mantığı biçimselleştirmesi kullanılarak bu sonuç elde edildi. Bu iddia oldukça basit bir şekilde temel metotlarla yürütülür. Bu sonuçtan, aksiyomatik sayı kuramının tutarlı olduğuna varmak için, sezgici aritmetiğin tutarlı olduğunu varsaymak yeterlidir.

Aksiyomatik sayı kuramının tutarlılığının bu ispatı bize, diğer şeylerin yanında, sezgiciliğin aslında soyut iddialarıyla temel kombinatoryal metotların ötesine gittiğini gösteriyor.

Şimdi ortaya çıkan sorun, sezgiciliğin soyut iddialarını kabul ederek varılan ispat kuramı metodunun güçlendirilmesi, bizi, analizin tutarlılığını kanıtlayacak bir konuma getirip getirmeyeceğidir. Yanıt, çok önemlidir; hatta ispat kuramı için kesindir ve hatta, bana öyle görünüyor ki, sezgici metotlara atfedilen rol için de bu böyledir.

Matematiğin temelleri hakkındaki araştırmalar hâlâ gelişmektedir. Bazı temel sorunlar çözülmemiştir; dahası bu alanda neleri keşfedeceğimizi bilmiyoruz. Bununla beraber bu araştırmalar, bakış açımızı değiştirerek merakımızı uyandırıyor. Bu, bilimin daha çok olgunluk kazanmış klâsik bölümleri tarafından aynı derecede uyandırılmayan bir duygudur.

4 Aritmetiksel bir önermenin her bir temel kombinatoryal ispatını, aksiyomatik sayı kuramının formalizmine dönüştürme olasılığını göstermeye çalışırken, temel kombinatoryal metot alanının sınırlarının tam olarak belirlenmesi güçlüğüyle karşılaşırız.

Bu konuşmanın metnini yayınlamak için geliştirmeme, nezaketinden yardım eden Profesör Wavre'ye teşekkür etmek istiyorum. Ayrıca, ilk taslağın Fransızca'sını geliştirmek için gözden geçiren M. Rveff'e bu iyiliğinden dolayı teşekkür ediyorum.

MATEMATİK ve DÜNYA*

Douglas Gasking
Çev. Cezmi Kayan & Bekir S. Gür

Amacım, matematiksel önermelerin özelliklerini açıklamaya çalışmak ve matematiksel önermelerin, –saatler, maddelerin uzunlukları ve gelir vergisi formları gibi- her günkü hesap ve ölçüm dünyası ile ilişkilerini açıklamaktır. Görüşlerimi birkaç cümleyle özetlemek ve sonra bu görüşleri savunmak isterdim. Fakat, maalesef bunu yapamıyorum; çünkü ileride göstermeye çalıştığım gibi, herhangi bir kısa ifadenin, konunun doğruluğunu tam bir kesinlikle açıklayamadığını düşünüyorum. Bu nedenle, tahminlerle gideceğim. Yani, neyin doğru ve neyin yanlış olduğunu göstermek umuduyla birkaç muhtelif görüşü aktaracağım, sonra bu açıklamalara açıklık getireceğim.

Filozofların matematiksel önermeler hakkındaki görüşleri, birçok şey hakkındaki görüşleri gibi iki ana sınıfa ayrılabilir. Mate-

* Douglas Gasking'in 'The World and Mathematics' başlıklı yazısı ilk olarak *Australian Journal of Philosophy*'de (vol. 18, September 1940, 97-116) yayınlanmış ve birçok derlemede yer etmiştir. *Language, Logic and Causation: Philosophical Writing of Douglas Gasking*, Ed. by I. T. Oakley & L. J. O'Neill, Melbourne University Press, 1996, 14-31.

matiksel önermeleri, uzakta analiz etmeye çalışan, yani önermelerin *gerçekte* başka bir şey olduğunu söyleyenler vardır (iyiliğin, aslında, sadece memnuniyet olduğunu söyleyen etik yazarları veya sandalye ve masaların, aslında, duyu grupları ya da ruh kümeleri olduğunu söyleyen metafizikçiler gibi). Ben böyle 'uzakçı-analiz' kuramlarını, 'radikal' kuramlar olarak adlandıracağım. Diğer yandan, matematiksel önermelerin *sui generis* [nevi şahsına münhasır, Ç.N.] olduğunu, başka bir şeyle çözülemeyeceğini; matematiksel önermelerin gerçeğin, diğerlerinden tamamen farklı bir yönü hakkında bilgi verdiğini söylemekte ısrar edenler de vardır (bunları, iyiliğin analiz edilemeyen basit bir nitelik oluğunu iddia eden filozoflar veya bir sandalyenin bir sandalye, yani duyularla bilinen, ama duyularla karıştırılmaması gereken dışsal bir madde özü olduğunu söyleyen realist filozoflarla karşılaştırın). Kolaylık için, her türlü uzakçı-analize karşı olan bu kuram türlerine 'muhafazakâr' diyeceğim. Şu kanıları sürdürmeliyim: Genel olarak 'muhafazakâr' dediğim görüşler, felsefede tamamıyla doğru ama aydınlatıcı değil ve hayli yetersizdirler; 'radikal' türdeki görüşler ise, yanlış ama ilginç ve aydınlatıcıdırlar.

Matematiğin doğası hakkındaki 'radikal' kuramları göz önüne alarak başlıyorum. Bildiğim kadarıyla bu kuramlar asıl olarak ikiye ayrılır. (1) Bazı kişiler, bir matematiksel önermenin *aslında*, özellikle iyi kurulmuş belirli bir türün ampirik bir genellemesi olduğunu veya mantıksal olarak, çok iyi kurulmuş bilimsel bir kanun ile aynı statüde olduğunu iddia ediyorlar. Mill'in kuramı bu türdendi ve konuştuğum birçok bilim adamı benzer görüşlere sahiptir. Bunlara, matematik hakkındaki 'ampirik' kuramlar diyelim. (2) Diğer yandan, uzak matematiksel önermeleri, sembolleri kullanan önermeler olarak çözümleyen, genellikle 'uzlaşımcı' denilen pek çok kuram vardır. Örnekler: 'Matematiksel bir önermeyle, konuşmacı veya yazar sembolleri kullanma niyetini, belirli bir yolla sadece açıklar ve diğerlerinin de böyle yapmasını önerir veya emreder.' 'Matema-

tiksel bir önerme, gerçekte, eğitimli insanların yaygın olarak belirli sembolleri nasıl kullandığını anlatan ampirik bir önermedir.' 'Matematiksel bir önerme, gerçekte, sembolleri maniple etmek için bir kuraldır.' (Sözgelimi, Ayer ve C. T. Lewis bu genel türdeki görüşlerini açıklamışlardır.)

İlk olarak, 'ampirik' kuramlarla başlayalım. Bu kuramlara göre, matematiksel bir önerme, çok sayıda numune inceleyerek elde edilen ve istisnasız genel bir düzene uydukları görülen nesnelerin özellikleri ve davranışları hakkında, özellikle iyi kurulmuş ampirik bir genelleme veya kuralı sadece açıklar. Örneğin, '7+5=12' önermesi sadece şu deneyimi açıklar: (Bu kuramın bir versiyonunda) herhangi yedi nesneyi ve aynı türden beş tane daha nesneyi sayarsak, sonra bu nesnelerin hepsini birden sayarsak her zaman on iki sayısını elde ederiz. Veya yine 'Eşkenar üçgenler eşit açılıdır.' geometrik önermesinin sadece şunu açıkladığı iddia edilebilir: Bir üçgenin kenarlarını ölçerek eşit bulduğumuzda, açıları da aynı doğruluk derecesiyle ölçersek onların da eşit olduğunu buluruz. Bu türden önermelerin, sözgelimi, Boyle gaz yasasına, temelde benzer fakat daha iyi kurulduğu iddia edilebilir.

Ama, '7+5=12', sayma grupları hakkında elde edeceğiniz önermeler ile aynı anlama gelmez. 7+5'in 12'ye eşit olduğu doğrudur ama şu doğru değildir: Yedi nesneyi ve sonra beş nesneyi ve daha sonra bu nesnelerin hepsini saydığımızda her zaman on iki elde ederiz. İnsanlar bazen yanlış sayarlar, bazen sayılan nesneler eriyiverir (eğer mum iseler) ya da birleşirler (cıva damlaları iseler). Bunun gibi, eşkenar üçgenlerin eşit açılı olduğu önermesi, ölçme ile eşkenar bulunan herhangi bir üçgenin açılarını ölçersek onların eşit olduğunu bulacağımız önermesiyle aynı değildir. Birincisi doğru iken ikincisi yanlıştır. Bazen cetvel ve iletkilerimizle hata yaparız.

Burada, matematiksel bir önermenin karşılığı olarak sunulan ampirik bir önermenin, doğru bir karşılık olmadığı, fakat sayma ve

ölçme hakkında doğru olan ampirik bir önerme bulmanın imkânsız olduğunun gösterilememiş olduğu şeklinde bir itiraz yapılabilir. Öyleyse, bazı alternatifleri deneyelim. '7+5=12'nin, *'titiz ve dikkatli* sayarsanız, şöyle şöyle bir sonuca ulaşırsınız' anlamına geldiği iddia edilebilir. Ama, saymada azamî hassasiyet gösterilse bile, yine de bazen, bir şekilde büyük sayılarda hata oluşur. Bu durumda '7+5=12'nin, *'doğru* sayarsanız, şöyle şöyle bir sonuca ulaşırsınız' anlamına geldiği söylenebilir mi? Hâlbuki, bir kere, nesneleri doğru saysanız bile, yedi nesnelik bir grupla beş nesnelik bir grubu toplarsanız her zaman on ikiyi elde edemezsiniz. Bazı durumlarda, bir kişi doğru olarak yedi nesneyi sayar sonra beş nesneyi doğru olarak sayar ve daha sonra toplamı doğru olarak sayar ve on biri elde eder. Sayarken bazen bir nesne yok olur ya da diğer bir tanesiyle birleşir. Bunlar böyle olmasa bile, 7+5=12'nin karşılığı olarak önerilen karşılık, insanlar sayı sayarlarken ne olduğuyla ilgili basit bir ampirik önerme vermez, ama yalnızca bir totoloji verir. Öyleyse, saymada doğruluk kriteri nedir? Elbette, yedi ile beşi toplarsanız, on iki elde edersiniz. Matematiksel önermeden bağımsız olarak, bu bağlamda, 'doğruluk'un bir anlamı yoktur. Böylece, '7+5=12'nin anlamının önerdiğimiz analizi, yeterince genişletildiğinde, şöyle işler: '7+5=12', 'nesneleri *doğru* olarak sayarsanız (yani 7 ile 5'in toplamı ile 12'yi elde edeceğiniz şekilde), 7'yi 5'e ekleme ile, 12'yi elde edersiniz' demektir.

Matematiksel önermeler ile insanların sayma ve ölçmede elde ettikleri sonuçlar arasında önemli bağlantılar olduğu konusunda hiçbir şüphe yoktur. Ama bu, matematiksel bir önermenin, böyle herhangi bir ampirik önermenin aynısı ya da ona eşit olduğu anlamına gelmez; bu nedenle: Matematiksel bir önerme 'düzeltilemez' iken, ampirik bir önerme 'düzeltilebilir'dir.

'Düzeltilebilir' ile 'düzeltilemez' önermeler arasındaki fark, en iyi şekilde örneklerle açıklanabilir. Her gün ileri sürdüğümüz iddi-

aların çoğu, örneğin, 'Bay Smith bir günlüğüne dışarı gitti.' ifadesi düzeltilebilirdir. Bununla basitçe şunu ifade ediyorum: Bu tür bir iddia ileri sürdüğümüzde, bu iddiamızda gerekçemiz ne kadar güçlü olursa olsun, belirli şeyler olursa *eğer*, her zaman onu geri çekebilmeliyiz ve onun yanlış olduğunu kabul etmeliyiz. Bu nedenle, Smith bir günlüğüne dışarıdadır iddiam düzeltilebilirdir; çünkü (onunla bu sabah sokakta karşılaştığımda, tren istasyonuna gittiğini söylediğinden dolayı bunu iddia etmem için mükemmel bir gerekçem varsa da), sözgelimi, odasına gidip onu orada otururken bulursam, onun dışarıda olduğu şeklindeki iddiamı geri çekmeliyim ve bu iddianın yanlış olduğunu kabul etmeliyim. Belirli olaylara dikkat etmeliyim; öyle ki, gerçekleşirlerse eğer, iddianın yanlış olduğunu gösterirler.

Diğer yandan, '7+5=12' gibi bir matematiksel önerme 'düzeltilemez'dir; çünkü gelecekteki hiçbir olay, ne olursa olsun, bunun yanlış olduğunu kanıtlayamaz ya da bu önermenin geri çekilmesine sebep olamaz. Her türlü fantastik olaylar zincirini hayal edebilirsiniz; ama olabilecek hiçbir şey '7+5=12'nin doğru olduğunu çürütemez. Bu nedenle, 7 kibriti, sonra 5 kibriti ve sonra bunların hepsini sayarsam ve 11'i elde edersem, bu, 7+5=12 önermesinin geri çekilmesine veya bu önermenin yanlış olduğuna dair en küçük bir eğilime yol açmaz. Bu durum benim veya herhangi bir başka kişi için, sadece kibritlerle değil, kitaplar, şemsiyeler ve her türlü nesne için tekrarlansa bile önermeyi geri çekmeyiz. Böyle bir durumda kesinlikle şöyle demeyiz: "7+5=12" önermesi ampirik olarak çürütüldü; 7+5'in aslında 11'e eşit olduğu bulundu. Seçeceğimiz çok sayıda alternatif açıklama vardır. Psikolojik bir hipotezi deneyebiliriz; örneğin: Herkeste, belirli tür saymaları yaparken son saymada bir nesneyi eksik saymalarına sebep olan acayip bir psikolojik rahatsızlık olduğunun keşfedildiği söylenebilir (hipnoz deneylerinde telkin altındaki öznenin basılı bir sayfadaki 't'leri görememesi gibi). Veya bir fiziksel hipotezi tercih edebiliriz: Evrenin ilginç bir yasası deneysel olarak bulundu, buna

göre 5 nesne ile 7 nesne toplandığı zaman bu toplama süreci nesnelerden birinin kaybolmasına ya da diğer bir nesneyle birleşmesine yol açıyor. Fakat ne olursa olsun *asla* telaffuz etmememiz gereken şey: 7+5=12 önermesinin deneysel olarak çürütüleceğidir. Değişik şeyler olursa, matematiğimizi değil, fiziğimizi değiştirmeliyiz.

Çok geniş olan, matematiksel önermelerin tamamen düzeltilemez olduğu iddiası, bence, aşırı basitleştirilmiştir ve bu iddianın nitelendirilmeye ihtiyacı vardır. Sunuşumun basit olması için nitelikleri şimdi değil sonra anlatacağım. Öyleyse, şimdilik bu iddianın doğruya çok yakın olduğunu kabul ederseniz, dikkatinizi bu iddianın belirli sonuçlarına çekmek istiyorum. *Düzeltilebilir* bir önerme, size dünya hakkında bazı bilgiler verirken, tamamen *düzeltilemez* bir önerme hiçbir şey vermez. Düzeltilebilir bir önerme, dünyada belli şeyler olursa iddianızı geri çekeceğiniz ve yanlış olduğunu kabul edeceğiniz önermedir. Bu nedenle, *bu* şeylerin (yani, gerçekleştiklerinde önermenizi geri çekeceğiniz şeyler) *olmayacağı* hakkında bilgi verir. Düzeltilemez bir önerme, *ne olursa olsun* asla yanlış olduğunu kabul etmeyeceğiniz önermedir; bu nedenle size, *ne* olup bittiği hakkında bilgi vermez. Örneğin, Smith bir günlüğüne dışarıdadır düzeltilebilir önermesinin doğruluğu, gerçekleşen belirli bazı olaylarla uyumlu (örneğin, odasına gitmeniz ve odayı boş bulmanız) ve diğer bazı belirli olaylarla uyumlu değildir (örneğin, odasına gitmeniz ve onu orada bulmanız); dolayısıyla, ne tür şeylerin olacağını (odasını boş bulacağınız) ve ne tür şeylerin olmayacağını (odasında onu bulamayacağınız) belirtir. Diğer yandan düzeltilemez bir önermenin doğruluğu, herhangi bir veya anlaşılır bir durum ile uyumludur. (Örneğin, sayma ile ilgili tecrübeleriniz ne olursa olsun, 7+5=12 önermesi her zaman doğrudur.) Bu nedenle, bu önerme hangi olayın gerçekleşeceğini ve hangi olayın gerçekleşmeyeceğini söylemez. Yani, '7+5=12' önermesi gerçek dünya hakkında hiç bilgi vermez.

Bir önerme gerçek dünya hakkında bilgi vermiyorsa, öyleyse mesele nedir, ne iş yapar? Bence bir anlamda, şunu ifade etmek doğrudur: *Söylenecek* olan şeye hükmediyor, yani belirli olayların *nasıl açıklanacağını* belirtiyor. Bu nedenle, '7+5=12' önermesi 7+5'i sayarken 11'in elde edilmeyeceğini söylemiyor. (Daha önce gördüğümüz gibi bu, bazen 11 elde edildiğinden, yanlıştır.) Ama, ifade etmek gerekirse şunu *ortaya koyuyor*: Saymada 7+5'ten 11 elde ederseniz, neler olduğu hakkında şu tür açıklamalar yapmak durumundasınız: *Ya* 'Saymada bir hata yaptım.' *ya da* 'Birileri bana el şakası yaptı ve ben bakmıyorken nesnelerden birini aldı.' *ya da* 'Nesnelerden iki tanesi birleşmiş.' *ya da* 'Nesnelerden biri yok oldu.' vb.

Bana göre bu, matematiğin değişik 'uzlaşımcı' kuramlarının doğruluğudur. Yalnız, maalesef, böyle kuramları açıklayan formüller genellikle yanıltıcı ve yanlıştır. Örneğin, 'matematiksel bir önerme, yalnızca, konuşanın ya da yazarın sembolleri belirli bir şekilde kullanma iradesini açıklıyor' demek açıkça yanlıştır. Bu ifade doğru olsaydı ve '+' sembolünü 5+7=35 olacak şekilde kullansaydım, o zaman, '5+7=35' dediğim zaman doğru konuşmuş olacaktım. Ama, bu önerme doğru değildir. Herhangi bir matematiksel önermenin doğruluğu, benim kararıma veya irademe bağlı değildir. Benim isteğimden bağımsızdır. Bu formül, matematiğin 'umumî' ve 'birey-üstü' karakterini ihmal etmektedir.

Ya da şu formülü düşünün: 'Matematiksel bir önerme, aslında insanların belirli sembolleri yaygın olarak kullanma yolunu açıklayan ampirik bir ifadedir.' Bana göre bu, [doğruya] daha yakındır. Fakat bu ise, aşikâr olan şu itiraza açıktır: '7+5=12' gerçekten de sembollerin yaygın kullanımı hakkındaki bir iddia olsaydı, o hâlde, insanların değişik bir sembol uzlaşımı olsaydı 7+5, 12'ye eşit olmazdı. Ancak, insanlar sembolleri şimdikinden çok daha değişik şekilde kullanmış olsalardı bile, bizim şimdi '7+5=12' ifadesi ile belirttiğimiz olgu hâlâ doğru olurdu. Dil alışkanlığımızdaki hiçbir değişiklik bunu asla yanlış yapamaz.

Bence bu itiraz, önerilen formülün bu hâliyle yanlış olduğunu göstermeye yeterlidir. Lâkin, dil alışkanlığımızdaki hiçbir değişikliğin, *niçin* '7+5=12' önermesini yanlış yapamayacağını göremediysek, onun meziyetine karşı kör olmalıyız. Sebebi şudur: Şu anda sembolleri kullanırken, önerme düzeltilemezdir. Düzeltilemez bir önerme, gerçek dünyada ne olursa olsun doğru olduğunu iddia etmeye devam edeceğimiz ve hangi şart altında olursa olsun yanlış olduğunu asla kabul etmeyeceğimiz önermedir. Sembol kullanımının tamamen değişik olduğu bir dünyayı, örneğin, Mars'ı hayal edin. Düzeltilemez önermelerimizi Mars sembollerine nasıl *çevirirdik*? Çevirimiz doğruysa -yani önerme, Mars dilinde bizim '7+5=12' ile ifade ettiğimizin aynısı ise, o *da* düzeltilemez olur- öteki türlü, bu çeviriye doğru diyemeyiz. Bu nedenle, '7+5=12'nin Mars dilindeki doğru çevirisi, Marslıların ne olursa olsun doğru demeyi sürdüreceği bir önerme olmalıdır. Bu yüzden '7+5=12' ve diğer bütün sembol uzlaşımları çevirisi, düzeltilemezdir; yani ne olursa olsun doğrudur. Böylece, bunun doğruluğu, bir anlamda, insanların sembolleri belirli şekillerde kullandığı şeklindeki ampirik olguya bağlıdır. Fakat, 'bu, insanların sembolleri nasıl kullandığını açıklar' demek, bu olgunun yanlış bir ifade tarzı olur.

Daha iyi bir formüle etme şöyledir: 'Matematiksel bir önerme gerçekte, sembollerin maniplesi için bir kural ifade eder.' Fakat bu da şu sebepten dolayı yetersizdir: Onun, 'sembollerin maniplesi için bir kural' olduğunu söylemek, onun tamamen keyfî olduğunu akla getirir. Sembolik bir kural, isteğimize göre kullanıp kullanmayacağımız hususunda bizim karar verebileceğimiz bir şeydir. ('Evlar'ı kolayca 'ev'in çoğulu olarak kullanabiliriz ve hâlihazırdaki gibi ilerleyebiliriz.) Ama, görünen o ki, zorluklara düşmeden, kendi isteğimizle matematiksel bir önermeyi değiştiremeyiz. Köprü yapan bir mühendis başka bir şeyi değil, standart çarpma tablosunu kullanmak zorundadır; aksi takdirde köprü çöker. Bu nedenle, hangi

matematiksel sistemi kullandığımız keyfi görünmüyor; bir sistem pratikte işlerken, bir başkası işlemez. Hangi sistemi kullanacağımızın, bizim kararımıza bağlı değil, gerçek dünyanın doğasına bağlı olduğu görünüyor. '7+5=12'nin gerçekten sembolleri kullanmanın bir kuralını ifade ettiğini söylemek, bu önermenin aynen şuna benzediğini iddia etmektir: "ev"in çoğul hâli, "ler" eklenmesiyle oluşur. Ama, bu ikisi arasında fark var*dır*; bu nedenle formül yanıltıcıdır.

Bu makaleyi, köprülerin herhangi bir matematikle inşa edilemeyeceği ve bu nedenle matematiğin gerçekliğin doğasına bağlı olduğu şeklindeki itirazı ayrıntılı olarak gözden geçirerek sonuca bağlamak istiyorum. Fakat, bunu yapmadan önce, 'muhafazakâr' olarak adlandırdığım kuram tipini açıklayacağım. (Radikal), yani matematiksel önermelerin 'gerçekten' sayma sonuçları hakkındaki ampirik önermeler olduğu şeklindeki kuramın yanlış olduğunu gördük. Ancak, iki çeşit önerme arasında yakın bir bağlantı vardır ve bu yüzden ampirik kuram doğru olmasa da, anlamlıdır. Bu, matematiksel önermeler ile sayma ve hesaplamanın günlük uygulaması arasındaki bağlantıyı vurguluyor; bu nedenle, matematiği çok soyut ve saf (yani bozuk paranın sıradan hesabından çok uzak, saf akıl ve Platoncu "Formlar' olarak görme) yapan kuram çeşidi için, yararlı bir doğrulayıcı olarak görev yapar. Bunun gibi değişik 'uzlaşımcı' kuramlar da, kesin konuşursak, yanlıştır ama bunların da anlamları vardır. Matematiksel önermeler, belirli yönlerden sembolleri kullanma kuralları *gibidirler*; sembollerin nasıl kullanılacağı ile ilgili ampirik önermeler *gibidirler*; sembolleri belirli yönlerde kullanma niyetinin ifadesi *gibidirler*. Ama uzlaşımcı formüller yanlıştır; çünkü matematiksel önermeler bunların hiçbiriyle *aynı* değildir. Onlar neyseler odurlar; kendi yollarında işlev görürler ve diğer çeşit önermelerin hiçbiri ile tıpa tıp uymazlar.

Ve bu, 'muhafazakâr' dediğim kuram çeşitlerini tamamen doğru yapar. Matematiksel önermeler *sui generis*'dir. Ama sadece: 'Neyse-

ler odurlar' demek pek yararlı değildir. Bu, öğrenilmiş dille süslense de daha iyi olmaz: Örneğin, 'Matematiksel önermeler, gerçekliğin yapısıyla; sayılar, şekil, büyüklük ve bunun gibi evrenseller arasındaki zorunlu ve sentetik ilişkileri ile ilgili çok genel olguları açıklar.' 'Matematiksel önermeler neyle ilgilidirler?' sorusuna, bunun gibi cevapların bilgi verici ve aydınlatıcı olduğunu düşünme eğilimindeyseniz, kendinize şu soruyu sorunuz: 'Duyan bir kişi "gerçekliğin yapısı", "evrenseller arasındaki zorunlu ilişkiler" ve bunun gibi cümle kalıplarının anlamlarını nasıl anlayabilir? Bu cümleler ona ilk olarak nasıl açıklandı?' 'Evrenseller arasındaki zorunlu ilişki'nin ne anlama geldiği ona şunlar söylenerek anlatılmıştır: Örneğin, renk, şekil, büyüklük, sayı vb. evrensellerdir ve evrenseller arasındaki zorunlu bir ilişkinin bir örneği, 'şekli olan her şeyin büyüklüğü vardır', '2+2=4', 'bir ikiz kenar üçgenin iki açısı eşittir' ve benzeri ilişkilerdir. Bu cümleler, örneğin, 'evrenseller arasındaki zorunlu ilişki', dile '2+2=4' gibi cümleler *üzerinden* veya *onlar yoluyla tanıtılmıştır*; bu cümleler, diğerleri arasında, matematiksel önermeler *üzerinden* tanıtılmıştır. John Wisdom'ın[1] sözlerini kullanırsak, onlar 'ölçmek için yapılmıştır'. Dolayısıyla, birine, matematiksel önermelerin 'filan' olduğunu söylemek –açıklayıcı örneklerde olduğu gibi, 'filan'ı açıklamak için, diğerlerinin yanında matematiksel önermeleri tanıtmak zorunda kalıyorsanız eğer- bir işe yaramaz. 'Matematiksel önermeler nedir?' sorusuna 'muhafazakâr' bir yanıt vermeyi şu örnekle karşılaştırın: Bir çocuk 'kör' kelimesinin anlamını öğrenmeden 'görmek', 'görmemek', 'gözleri bağlı', vb. gibi kelimelerin anlamını öğreniyor. 'Kör' kelimesi ona şöyle açıklanıyor: 'Kör bir kişi güpe gündüz, gözleri bağlı olmasa bile göremeyen kişidir'. Eğer çocuk, 'Kör bir kişi güpe gündüz, gözleri bağlı olmasa bile niçin göremiyor?' diye sorsa bu

1 Bu makaleyi yazarken, Wisdom ve Wittgenstein'ın derslerine minnettarlığım çoktur.

soruya 'Çünkü, o kördür.' diye cevap vermek pek kullanışlı değildir. Felsefedeki 'muhafazakâr' cevap gibi, bu sonraki soruları durdurabilir ama bir memnuniyetsizlik hissi bırakır.

Öyleyse matematiğin doğası hakkında kafası karışmış birine ne tür bir cevap *verilebilir*? Matematiksel önermeler neyseler odurlar; bu nedenle onları başka bir şeye eşitleyen herhangi bir radikal cevap, örneğin sembolik kurallar, sayma ve ölçmenin sonuçlarının ifadesi veya yaygın sembolik kullanımın ifadesi yanlış olur. Böyle cevaplar, eşitliğin iki yanı farklı olduğundan dolayı yanlıştırlar. Bunun gibi muhafazakâr cevaplar, eşitliğin iki yanı aynı anlamda olduğu için işe yaramaz. Tanımlama işlevsizdir; çünkü, dile tanımlanan şey yoluyla tanıtılır ve sadece onun dolayımı ile açıklanabilir. Bu, 'ölçmek için yapılmış'tır. Basit bir formül yoktur. Kafa karışıklığını gidermenin tek yolu, matematiksel önermelerin kullanımı ve özelliklerini ayrıntılı bir şekilde ve örneklerle açıklamaktır. Kesin olarak yanlış ama açıklayıcı olan kurama yapılan doğal itirazları da göz önüne alarak, bunu bir dereceye kadar, şimdi yapmaya çalışacağım: 'Matematiksel önermeler, sembollerin maniple edilmesi ile ilgili kuralları açıklar.' Buna yapılan itiraz: Matematik, en azından bir dereceye kadar sembolik uzlaşıma göre değil, dünyanın pratik işlerine uygulandığında, sadece şimdiki sistem yararlı sonuçlar verdiğinden dolayı, gerçekliğin doğasına bağlıyken, sembolik kurallar tamamen keyfidir. Buna karşı, istediğimiz *herhangi* bir matematiksel kuralı kullanabileceğimizi ve hâlâ doğru sonuçlar elde edebileceğimizi iddia ediyorum.

Örnek 1: Şimdiki çarpım tablomuza göre 6 x 4, 24 eder. Bunun sembolleri kullanmamız için sadece uzlaşımsal bir kural olmadığını, öyle olsaydı istediğimiz herhangi bir diğer kuralı, örneğin, 6 x 4 = 12'yi kullanabileceğimizi ve hâlâ doğru sonuçlar elde edebileceğimizi iddia edebilirsiniz. Ama eğer bu alternatif kuralı kullanırsanız, pratiğe dönük işlerinizin daima yanlış gittiğini görürsünüz. Örne-

ğin, her biri 1 metre kare olan seramiklerle döşemek için, bir odayı ölçen ve odanın kenarlarının 6 ve 4 metre olduğunu bulan bir inşaatçı, bu alternatif tabloyu kullanamaz. İnşaatçı kendi kendine: 'Oda altıya dörttür; 6 x 4 = 12 eder; öyleyse bu iş için 12 seramik gerekir.' diyemez. Eğer böyle derse, yeri kaplamak için yeterince seramiği olmadığını görür.

Ama inşaatçı kolaylıkla 6 x 4 = 12 aritmetiğini kullanabilir; ardından ölçme ve sayma ile, yeri kaplamak için gereken tam sayıda seramikle odayı döşeyebilirdi. Bunu nasıl yapar? Şöyle:

(1) Kenarları ölçer ve 4'e 6 yazar.

(2) 4 ile 6'yı, 4 x 6 = 12 veren 'tuhaf' bir çarpım tablosuna göre çarpar.

(3) 12 tane seramiği sayar, onları yere döşer. Ve seramikler tam olarak odanın zeminine uyarlar.

Kullanılan bu 'tuhaf' çarpım tablosu, 2 x 2 = 4, 2 x 4 = 6, 2 x 8 = 10, 4 x 4 = 9, 4 x 6 = 12 vs. verir. *Kendi* tablosuna göre, a ile b'yi çarparak bulduğu sayı, *bizim* aritmetiğimizde şu formülle elde edilir:

(a+2) (b+2) / 4

Ve anlatılan tuhaf çarpım tablosunu kullanarak, başka büyüklükteki yerleri döşeyebilir ve hâlâ her zaman, yeri seramik kaplamak için gereken doğru sayıyı bulur.

Bu nasıl olur? Odanın kenarlarını metre-ölçer çubuğu ile şu şekilde belirler: Çubuğun '0' ile işaretlenmiş ucunu bir köşeye koyar, '36 cm' olarak işaretlenmiş öteki ucunu öte köşeye koyar. Bunu yaptıktan sonra, 1 der. Sonra 36 yazılı nokta etrafında çubuğu döndürür; çubuk iki dik açı döner; şimdi, 36 cm yazılı uç, başlangıç köşesine daha yakındır ve 0 yazılı uç karşı taraftadır. Buna 'iki' der. Ama şimdi çubuğun yönü tersine çevrilmiştir ve uzaklığın daima aynı yönde ölçülmesi uzlaşımdır (adettir). Bu nedenle, inşaatçı çubuğu ortasından döndürür ve böylece eskiden 36 olan yer şimdi 0 olur ve 0 olan yer 36'dır. Bunu yaptıkça, 'üç' der. Sonra 36 yazılı nokta

etrafında çubuğu dönderir, çubuk iki dik açı döner; 'dört' der. Bunu yaptıktan sonra çubuğun yönünü değiştirir ve 'beş' der. Çubuğu tekrar döndürür ve 'altı' der. Şimdi çubuğun ucu köşededir ve kenarın uzunluğu olarak '6 metre' yazar. (Bize göre ölçmüş olsaydık, '4 metre' yazmış olurduk.) Sonra kısa kenarı da kendi yoluyla ölçer ve uzunluğunu 4 metre olarak bulur. (Biz kendimize göre yapsaydık 3 bulurduk.) Sonra 4 ile 6'nın çarpımının sonucunu 12 olarak veren kendi tablosuna göre bu sayıları çarpar, 12 tane seramiği sayar ve bunları yere döşer. Uzunluk ölçmek için anlatılan tekniği kullandığı sürece her zaman, her oda için 'tuhaf' çarpım tablosuyla doğru sayıyı elde eder.

Bu örnek, uzunlukları ölçmek için belirli teknikleri kullandığımızdan dolayı, alanları bulma amacıyla uzunlukları çarpma metodunu kullandığımızı gösterir. Alan hesaplama tekniğimiz, uzunluk ölçme tekniğimizle ilişkilidir.

Burada şöyle diyebilirsiniz: Bunun doğru olduğunu kabul edersek bile, durum hâlâ matematiğin keyfi olmadığı yönündedir; çünkü kullandığımız ölçme metodunu *ve* değişik bir çarpım tablosunu kullanamazsınız; (kullanırsanız) oda için gereken seramiğin doğru sayısını *hâlâ* elde edemezsiniz. Elde edemez miyiz? Görelim.

Örnek 2: 'Tuhaf' çarpım tablomuzun 3 x 4 = 24'ü verdiğini varsayın. İnşaatçı, bir odanın kenarlarını, bizim yaptığımızın aynısını yaparak ölçüyor ve sırasıyla 3 ve 4 metre olarak buluyor. Sonra 3 ile 4'ü 'çarpıyor' ve 24'ü elde ediyor. 24 tane seramiği sayıyor, onları yere döşüyor, seramiklerin sayısı yere kusursuz uyuyor ve hiçbiri artmıyor. İnşaatçı bunu nasıl yapıyor?

Kenarları bizim gibi ölçüyor ve '3' ile '4' yazıyor, bunları 'çarpıyor' ve 24 elde ediyor. Sonra 24 seramiği şöyle sayıyor: Dükkanından bir seramik alıyor ve '1' diyor. Seramiği kamyonuna koyuyor ve '2' diyor. Başka bir seramik alıyor ve '3' diyor. Bunu kamyonuna koyuyor ve '4' diyor. Bu işe '24' e ulaşıncaya kadar devam ediyor.

Sonra kendi '24' seramiğini alıyor ve odaya döşüyor. Ve bunlar odaya tam olarak uyuyor.

Bu örnek, alan hesaplama tekniğimizin belirli bir ölçme tekniğiyle *ve* belirli bir sayma tekniğiyle ilişkili olduğunu gösteriyor.

Bu aşamada, itirazlarınızı sürdürebilirsiniz. Şöyle diyebilirsiniz: Matematik gerçek dünya hakkında size bir şeyler *söyler* ve sembolik kullanımın keyfî bir kuralı değildir. Size şunu söyler: *Eğer* bizim yaptığımız gibi uzunlukları ölçer ve sayarsanız, şimdiki tablomuza göre uzunlukları çarpmadıkça, oda için gereken seramiğin doğru sayısını bulamazsınız. Matematik keyfî değildir; çünkü, örneğin, bir odanın kenarlarını bizim gibi ölçüp 4 ve 3 bulursanız, seramikleri bizim gibi sayarsanız ve başka bir çarpım tablosunu, örneğin, 3 x 4 = 24 olan bir tabloyu kullanırsanız odayı döşemek için gereken seramik sayısını yanlış bulursunuz. Ama ben, bu 'tuhaf' tabloyu kullanabileceğimizi ve şimdiki gibi sayma ve ölçme yapabileceğimizi ve hâlâ doğru sayıda seramik bulacağınızı iddia ediyorum. Bunun nasıl olacağını görmeye yardımcı olmak için benzer bir durum üzerinde düşünelim.

Örnek 3: Şimdi şu olağanüstü durumun olduğunu düşünün. Bir odayı normal olarak ölçüyorsunuz ve kenarları 6 ile 4 buluyorsunuz. Normal olarak çarpıyorsunuz ve 24 elde ediyorsunuz. Sonra 24 seramiği normal olarak ölçüyorsunuz. (Her bir seramik 1 x 1'dir.) Ama, seramikleri odaya döşemeye kalkıştığınızda, sadece 12 tanesini döşeyebileceğinizi görüyorsunuz; 12 tanesi arttı. Böyle bir şeye ne dersiniz?

İlk söyleyeceğimiz şey, şunlar olabilir: 'Ölçerken bir hata yapmış olmalısınız' veya 'çarpmada bir hata yapmış olmalısınız' ya da 'seramiklerinizi bir şekilde yanlış saymışsınız'. Ve hemen ölçümleri, saymaları ve hesaplamaları kontrol ederiz. Ama, varsayın ki, çok sayıda oldukça kalifiye kişilerle yapılan, çok dikkatli kontroller ve tekrar kontrollerden sonra bunlarda herhangi bir hata *olmadığı* gö-

rüldü. Dahası, bu durumun herkes ve her oda ve seramik için her zaman gerçekleştiğini varsayın. Bu duruma ne demeli? Bu ilginç durumu açıklayabilecek birçok yol hâlâ vardır. Ben, akla yatkın iki hipotezi anlatacağım:

(1) Ölçüm çubukları, bizim sandığımızın tersine, konuldukları her yerde aynı uzunlukta değildir. Kendi uzunluklarındaki şeylere karşı konulduklarında ve ayrıca kuzey-güney doğrultusundaki daha büyük şeylere karşı konulduklarında uzunlukları aynı kalır. Ama doğu-batı doğrultusunda kendilerinden daha büyük nesnelere karşı konulduklarında her zaman önceki uzunluklarının yarısına düşerler (ve bu kısalma öyle bir şekilde olur ki, biz asla fark etmiyoruz.) Bu nedenle, oda aslında 6'ya 2 metre uzunluğunda, yani 12 metre karedir ve 12 seramik gerekiyor. Ölçüm çubuğu, 6 metre uzunluğundaki kuzey-güney doğrultusundaki duvarın yanına konulduğunda, bir metre uzunluğunda kalıyor ve ölçümden 6 elde ediyoruz. Ama, doğu-batı doğrultusundaki kısa duvar boyunca yere konulduğunda uzunluğu yarım metreye düşüyor ve iki metre uzunluğundaki duvar boyunca dört kez konulabilir. Boyutlara 6 ile 4 derseniz, bunları çarparak 24 elde edilir. Ki, siz gerçek alanı, olduğundan çok hesaplamış olursunuz.

(2) Alternatif bir hipotez: Odayı ölçtüğümüzde çubuk her zaman sabit kalır ve odanın alanı gerçekten 24 metre karedir. Ama sadece 12 seramik döşüyoruz; her bir seramik 1 metre karedir; demek ki, seramikler *genişlemeli*, yani odaya konulduğunda alanları iki katına çıkmalı. Nesnelerin odaya konulduğunda alanlarını aniden iki katına çıkardıkları *enteresan* bir fizik kanunudur. Genişlemeyi görmüyoruz, çünkü ani olarak oluyor. Ayrıca, seramikleri odanın dışında ve içinde ölçerek bu değişimi asla göremeyiz, çünkü çubuğumuz da, odaya sokulduğunda aynı oranda genişliyor.

(Her türlü çelişkiyi halletmek için, *ad hoc* hipotezleriyle birlikte kolaylıkla daha ayrıntılı bir şekilde ortaya konulabilecek olan) bu ör-

nek gösteriyor ki, şimdiki çarpım tablosunu kullandığımızda inşaatçıların ihtiyaçlarının pratikteki tahminleri alt üst olsa da, bu ihtiyaç asla şimdiki çarpma kurallarımızı değiştirmemize sebep olmaz. Bu anormallikler karşısında, *fiziksel* kanunlar ile ilgili bilgilerimizin eksik olduğu söylenir, çarpım tablomuzun 'yanlış' olduğu söylenmez. Nesnelerle normal bir şekilde çalışırken, sürekli olarak 12 seramik artıyorsa, 6x4=24 olduğunu düşünmekte hata yapıyoruz denilmez. Bunun yerine, fiziksel nesnelerin belirli yollarla genişleyip kısalmalarını düşünmediğimizden yanlış yapıyoruz deriz. Bir şeyler yanlış olduğunda daima fiziğimizi değiştiririz, matematiğimizi değil.

Örnek 3'ten şimdiki aritmetik kullanıldığında bir şeyler yanlış gittiğinde ne yapmamız gerektiğini gördük ise, şimdi sorunu aydınlatmak niyetiyle yapılan bir itirazı cevaplayabiliriz. İtiraz şuydu:

'Pratikteki işlerimizde istediğimiz herhangi bir aritmetiği kullanırsak, hâlâ tam doğru sonuçlar elde edeceğimizi söylemek yanlıştır. Matematik sembolik kuralların keyfî bir koleksiyonu değildir. Bu nedenle matematik bize bir şeyler söyler ve gerçekliğin doğasına bağlıdır. Bu yüzden, *hem* sayma *hem de* ölçmeyi bizim yaptığımız gibi yapıp *ayrıca* "tuhaf" çarpım tablosunu kullanırsanız eğer, odayı döşemek için gereken seramik sayısını doğru olarak elde edemezsiniz. Bu nedenle, "3x4=12" önermesi size şunu der: Normal olarak 3'e 4 metre olarak ölçülen bir oda için, normal olarak sayılmış 12 seramikten ne çok ne de az seramiğe gerek vardır. Bunun doğruluğu dünya hakkındaki bu olguya dayanır.'

Ama ben bunu reddediyorum. Ben şunu diyorum:

(1) şimdiki sayma ve ölçme tekniğini kullansaydık,

(2) (sözgelimi) 3 x 4 = 24 kuralına göre çarpsaydık,

(3) yine de odamızı döşemek için gereken seramik sayısını tam olarak doğru bulurduk.

Bu nedenle, 3 x 4 = 12'nin, sembollerin kullanımı ile ilgili bazı olguların haricinde dünya hakkındaki hiçbir olguya bağlı olmadığını söylüyorum.

Örnek 4: 3 x 4 = 24'ün geçerli olduğu 'tuhaf' bir aritmetiği düşünün. Eğer bu bizim evrensel olarak kabul edilmiş ve standart aritmetiğimiz olsaydı, '3 x 4 = 24' önermesini, şimdiki standart aritmetiğimizdeki '3 x 4 = 12' önermesinin *aynısı* gibi kullanırdık. Yani, bu tuhaf sistemi kullansaydık, *ne* olursa olsun '3 x 4 = 24' önermesine bağlı kalmalı ve inşaatçı ihtiyaçlarının tahmininin her başarısızlığını ve bunun gibi başarısızlıkları, *her zaman*, dünyaya uygulanan fiziksel kuralların hatalı bir görünüşüne atfetmeliyiz, ama *asla* '3 x 4 = 24' formülünün yanlışlığına atfetmemeliyiz. Bu son önerme, matematiksel sistemimizin bir parçası olmuş *olsaydı*, '3 x 4 = 12'nin şimdi bize göründüğü gibi *düzeltilemez* olurdu.

Örnek 3'te, '3 x 4 = 12' kullanıldığında işler yanlış giderse neler yapılacağını ve söyleneceğini gördük. Şimdi, *eğer* '3 x 4 = 24' kuralımız, ve düzeltilemez, olsa idi; ve *eğer* bunu kullanaraktan pratikte yanlış sonuçlar elde ettiğimizi görürsek, örnek 3'te yaptığımızın şeylerin aynısını yapmalı ve demeliyiz. Bu nedenle, kuralımızın 3 x 4 = 24 olduğunu varsayarak, bir inşaatçı yeri ölçüyor ve '3' ile '4' yazıyor. Kendi tablosuna göre çarpıyor ve 24 elde ediyor. 24 tane seramiği normal olarak sayıyor ve odaya döşemeye çalışıyor. Sadece 12 tanesini döşeyebileceğini görüyor. Bu durumda o ne der? "3x4'ün 24'e eşit olmadığını deneysel olarak kanıtladım" *demez*; çünkü ona göre '3 x 4 = 24' önermesi *düzeltilemezdir*. Yani ne kadar olağanüstü olursa olsun dünyada hiçbir olay onu reddetmesine ya da doğru veya yanlışlığıyla ilgili bir şey demesine yol açmaz. O, şu gibi bir şeyler söyler: 'Bu odanın alanı *sahiden* 24 metre karedir. Sadece 12 metre karelik seramik yerleştirebildim; demek ki seramikler odaya döşendiklerinde alanlarını iki katına çıkarıyorlar.' (Daha önce gördüğümüz gibi, sözgelimi ölçüm çubuklarıyla ilgili olanı türünden diğer hipotezleri de kullanabilir. Ama bu en kullanışlısıdır.)

Bu nedenle, kolaylıkla şimdiki gibi sayıp ölçebilirdik *ve* 3 x 4 = 24'ün geçerli olduğu bir aritmetiği kullanabilirdik; *dahası*, kusursuz

doyurucu sonuçlar elde edebilirdik. Tabiî ki, sadece pratikte doyurucu sonuçlar elde etmek için, şimdikinden bazı yönlerden farklı bir fizik kullanmalıyız. Bu yüzden, bir odanın alanını 24 metre kare olarak bulan bir inşaatçı, 24 seramiği odaya döşemeye asla çalışmaz; çünkü okulda fizik dersinde odaya döşenen seramiklerin alanının iki katına çıktığını öğrenmiş olmalıdır. Bu yüzden şunu iddia eder: "Seramikler alanını iki katına çıkardıklarından, odaya 24 seramiğin yarısını, yani 12 seramik döşemeliyim." 12 tane seramiği sayar ve odayı bunlarla mükemmel olarak döşer.

Ama burada bile inatçı bir itirazcı bunların hepsini kabul edebilir; ama hâlâ matematiğin rasgele bir uzlaşım olmadığını ve dünyayla ilgili bazı olgulara dayandığını ileri sürebilir. Şöyle diyebilir: "'3 x 4 = 12' doğrudur ve bu önerme dünyayla ilgili olgudan dolayı doğrudur; yani *eğer* seramikler ve cetveller genişlemez ve kısalmazlarsa (sıcaklığa bağlı küçük değişmeler hariç) ve normal olarak ölçer ve sayarsak, 3'e 4'lük bir odayı döşemek için eksik veya fazla değil tam 12 seramiğe ihtiyaç duyarız. Ve '3 x 4 = 24' yanlıştır; çünkü 'vahşi gerçeğe' göre yani *eğer* seramikler vb. genişlemezler ve *eğer* normal olarak ölçer ve sayarsanız, 24 seramik, 3 ile 4 boyutlarındaki bir odayı döşemek için çok fazladır."

Bu itirazda, gözden kaçırılan noktayı belirlemek için, bence şöyle sorulabilir: "Bir seramiğin ya da bir çubuğun uzadığı veya kısaldığını nasıl buluruz?" Bunu yapmak için normalde iki yolumuz vardır. Onu büyürken veya küçülürken *izleyebiliriz*. Ya da onu önce ve sonra *ölçebiliriz*.

Şimdi, örnek 4'te açıklanan, tuhaf aritmetiğimizin 3 x 4 = 24 verdiği ve nesnelerin odaya girdiğinde alanlarını iki katına çıkardığı durumda, nesnelerin genişlediğini nasıl bulursunuz? Onların büyümesini izleyemeyiz-*ex hypothesi* [varsayıma göre -Ç.N.], bunu gözleyemeyiz. Önce ve sonra ölçerek de olmaz. Çünkü, ölçüm çubuğunun *da* genişlediğini varsaydığımızdan, odanın dışında çubukla ölçülen

seramik boyutları, odanın içinde (şimdi genişlemiş olan) çubukla ölçülen boyutlarının aynısıdır. Bu durumda, seramiklerin, *belirli bir yolla ölçülmeleri, sayılmaları ve hesaplanmalarıyla*, genişlediklerini -her bir seramiğin '1 x 1' ölçüsünde olduğunu, odanın 3 x 4 yani 24 metre kare olduğunu ve odaya sadece 12 tane seramiği yerleştirebileceğimizi bularak- elde ederiz. Bu, seramiklerin genişlemesiyle ilgili biricik *kriterdir*. Seramiklerin genişlediği, tuhaf aritmetiğimizin bir *sonucudur*. Bunun gibi, şimdiki davranışlarımızda, seramiklerin genişlemediğine ilişkin kriterimiz, 1 x 1 boyutunda 12 tane seramiğin, 3 x 4 yani 12 metre kare uzunluğundaki bir odaya tam olarak uymasıdır. Şimdiki aritmetiğimizden, seramiklerin genişlemediği sonucu ortaya çıkar.

Örnek 4'te, 3 x 4 = 24'ün geçerli olduğu 'tuhaf' bir aritmetiğe sahiptik ve bir 'doğa yasası' olarak seramiklerin odaya konulduğunda genişlediği 'tuhaf' bir fiziğe sahiptik. Ama, dünyada olanları açıklayan, 'doğa yasası' değildir. Bu, daha çok, 'uzlaşısal' bir yasadır; bu, mevcut fiziğin şu yasası ile benzerlik arz eder: Bir cisim yerde dururken, yere doğru uyguladığı güçe karşın, yer, cisme aksi yönde eşit bir güç uygular. Bu sadece, var olan bir şeyi açıklamak için değil, hesaplamalarımızı dengelemek için sisteme konulur.

Bu son itiraz biraz değişik bir şekilde yapılabilir. Şöyle denmiş olabilirdi: " '3x4=12', gerçeğin doğasına dayanır ve onu açıklar; çünkü, ne olduğu ve ne olmadığıyla ilgili belirli bir katıksız ampirik önerme, yani karmaşık bir önerme, gerektirir: '*Hem* seramiklerin genişlememesi *hem de* 3 ile 4 ölçütündeki bir yeri döşemek için 12'den daha az seramiğe ihtiyaç duyulması durumlarının ikisi birden aynı anda olmaz.'" Ama, ("p ve q'nun ikisi aynı anda değil" şeklindeki) bu karmaşık önermenin ampirik olmadığını, yani gerçek dünyada olan bir şeyi açıklamadığını, çünkü düzeltilemez olduğunu iddia etmeye devam ediyorum. Olabileceğini düşündüğümüz hiçbir şey, bu karmaşık önermeyi reddetmemize asla sebep olmaz. Bu nedenle,

bu önerme, gerçek dünyada ne olduğunu söylemez. Bu karmaşık önermenin elemanları olan basit önermelerin, yani "Seramikler genişlemezler." ve "3 ile 4 boyutunda olan bir zemini kaplamak için 12'den az sayıda seramiğe ihtiyacımız vardır." önermelerinin ikisi de düzeltilebilirdir ve her ikisi de gerçek dünyayı açıklar (bir tanesi yanlış açıklar.) Ama onların ikisinin aynı anda doğru olmadıklarını söyleyen karmaşık önerme, düzeltilemezdir ve bu yüzden daha önce verilen sebeplerden dolayı gerçek dünyanın doğasını açıklamaz ve ona bağlı değildir. Bunda sıra dışı bir şey yoktur. 'Perdelerim şimdi bütün yüzeyleri boyunca kırmızıdır.' ve 'Perdelerin şimdi tamamen yeşildir.' önermelerinin ikisi de düzeltilebilir önermelerdir; gerçek dünyayı tanımlarlar. (İşin aslı, biri doğru, diğeri yanlıştır.) Ama, 'Perdelerimin ikisi de aynı anda, tüm yüzeyleri boyunca kırmızı ve yeşil değillerdir.' karmaşık önermesi düzeltilemezdir; çünkü hiçbir şey bana onu inkâr ettiremez ve bu nedenle, gerçek dünyanın tanımlayıcısı değildir.

Makale boyunca, matematiksel önermelerin tamamen düzeltilemez olduğu, yani *ne kadar* tuhaf şeyler olursa olsun, *asla* matematiğimizi değiştirmememiz gerektiğini, her zaman fiziğimizi değiştirmeyi tercih etmemiz gerektiğini belirttim. Bu, o zaman, aşırı bir basitleştirmeydi; lâkin, şimdi nitelendirilmiş olsa gerek. Matematiğimizi asla değiştirmeye *gerek* olmadığını iddia etmeye devam ediyorum. Bununla beraber, fiziksel kanunlarımızın gittikçe karıştığını ama matematiksel sistemimizi değiştirerek fizikte çok büyük bir basitleştirme sağlayacağımızı bulabiliriz. Böyle bir durumda farklı bir matematiksel sistem kullanmaya karar verebiliriz. (Anladığım kadarıyla şimdiye kadar, çağdaş fiziğin belirli bazı branşlarında bu oldu.) Dahası, bazı [matematiksel] sistemleri kullanmak için oldukça elverişsiz ve zor bulabilir ve diğer bazı sistemleri nispeten kolay ve elverişli bulabiliriz. Matematik, en azından bu derece kadar, gerçek dünyanın doğasına bağlıdır ve onu yansıtır. Sözgelimi,

aritmetik ve geometrinin bir çeşidini kullanarak, fiziğin, zihinsel olarak doyurucu olan, mantıksal olarak sade ve basit bir sisteme indirgenebileceğini bulabiliriz; diğer yandan, değişik aritmetik ve geometrileri kullanarak fiziğin çok karışık *ad hoc* hipotezleriyle dolu olduğunu bulabiliriz. Bununla beraber, sade, basit, kolay ve zihinsel olarak doyurucu olarak bulduğumuz şeyler; ölçme çubukları, katılar ve sıvılar, elektrik yükleri yani dış dünyanın davranışından çok psikolojik durumumuza bağlıdır.

CANTOR'UN SÜREKLİLİK PROBLEMİ NEDİR?*

Kurt Gödel
Çev. Cezmi Kayan & Bekir S. Gür

1. KARDİNAL SAYI KAVRAMI**

Cantor'un süreklilik problemi basit olarak şu sorudur: Öklit uzayındaki düz bir çizgi üzerinde kaç tane nokta vardır? Buna denk bir soru da şudur: Tam sayıların kaç değişik kümesi vardır?

Bu sorun, tabiî ki, "sayı" kavramı sonsuz kümelere genişletildiğinde ancak ortaya çıkar. Bu nedenle, bu genişlemenin belirlenmiş

---

* Benacerraf, Paul & Putnam, Hilary (Ed.) (1964). *Philosophy of Mathematics; Selected Readings*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall. 258-273.

** Kardinal (cardinal) Sayı: Herhangi bir kümeye denk olan kümelerin ailesini ifade eden sayıya, o kümenin kardinalitesi denir. Bir kümenin eleman sayısı, o kümenin kardinal sayısıdır da denebilir. Dolayısıyla, bir kümenin üç elemanı varsa, o kümenin kardinalitesi üç olur. Kardinal ve ordinal sayı çifti ve ayrımı matematikte çok önemlidir. Ordinal sayılar, bir sıralama söz konusu olduğunda konum veya yer bildirir; sözgelimi, üçüncü veya dördüncü gibi. Kardinal sayı, "kaç tane?" sorusuna cevap verirken; ordinal sayı, "kaçıncı?" sorusunu cevaplandırır. Yazı boyunca kardinal sayıyı olduğu gibi, ordinal sayı kavramını ise, cümle içindeki bağlamına göre sıralı sayı veya sıra sayıları olarak çevirmeyi uygun bulduk. Ç.N.

tek bir şekilde oturtulabileceği ve bu yüzden, yukarıda kullanılan basit terimlerle problemin gerekçelendireceği hususlardan şüphe duyulabilir. Ancak daha yakından bir inceleme, Cantor'un sonsuz sayı tanımının gerçekten böyle bir teklik karakterine sahip olduğunu gösterir. Çünkü, sonsuz kümelere ilişkin "sayı" ne anlama gelirse gelsin, şu özelliğe sahip olmalarını istiyoruz: Nesneler aynı kalmak üzere, özellikleri ya da karşılıklı ilişkileri (örneğin, renkleri ya da uzaydaki dağılımları) değiştirilirse, aynı sınıfa ait olan nesnelerin sayısı kesinlikle değişmez. Ama buradan, Cantor'un sayılar arasındaki eşitlik tanımı olan, iki kümenin elemanlarının bire-bir karşılaştırılması yapılabilirse bu iki kümenin (uzay-zaman dünyasının değişebilen nesnelerinin en azından iki kümesi) aynı sayıda kardinal sayılara sahip olacakları sonucu hemen çıkar. Bu nedenle, A ve B gibi iki küme için, böyle bir tekabüliyet varsa, A'nın her bir elemanının özellikleri ve ilişkileri, B'nin tekabül eden elemanınki ile değiştirilerek, A kümesinin B kümesine (en azından kuramsal olarak) dönüştürülmesi mümkündür. Böylece A öyle bir kümeye dönüşür ki, B'den tamamen ayırt edilemez olur ve böylece aynı kardinal sayıda olurlar. Örneğin, bir kare ve bir doğru parçasının tamamen, topak şeklinde noktalarla doldurulduğunu varsayarak (böylece, her bir noktasında tam olarak birer topak yerleşecektir), bir karenin noktaları ile bir doğru parçası arasında ve böylelikle de, karşılık gelen topaklar arasında da bire-bir eşleşmenin varolduğu şeklinde kanıtlanabilir bir olgunun olmasından dolayı şu sonucu elde ederiz: Karenin topakları, doğru parçasını tam olarak doldurabilecek şekilde düzenlenebilir ya da bunun tersi de söz konusudur. Bu düşüncelerin sadece fiziksel nesnelere doğrudan uygulandığı doğrudur. Ancak numaralanan nesnelerin türüne dayanan "sayı" kavramının, tatmin edici bir cevabını vermek hayli güçtür.

Bu nedenle, M, N den farklı ama B'nin bazı alt kümelerinin kardinal sayılarına eşit olduğunda, bir A kümesinin M kardinal sayısı-

nın, bir B kümesinin N kardinal sayısından daha az olur kaydıyla, sonsuz sayıların "daha büyük" ve "daha küçük" bir tanımına kolaylıkla genişletilebilen, Cantor'un sayılar arasındaki eşitlik tanımını kabul etmekten başka nerdeyse hiçbir seçim kalmamıştır. Belirli bir özelliğe sahip bir kardinal sayının var olması, böyle bir kardinal sayının bir kümesinin var olduğu anlamına gelir. Bu tanımlara göre, sonsuz-çoklukta değişik sonsuz kardinal sayıların ya da "kuvvetlerin" bulunduğunu ve hususî olarak, bir kümenin alt kümelerinin sayısının her zaman kümenin eleman sayısından çok olduğunu ispatlamak mümkün olur. Bundan başka, bu tanımlar, aritmetik işlemlerin sonsuz sayılara genişletilmesini (yine hiçbir keyfilik olmadan) ve pratik olarak, hesaplamanın bütün olağan kurallarının kanıtlanmasını mümkün kılar.

Ama bundan sonra bile, tamsayıların ondalıklı gösterimiyle karşılaştırılabilen, sonsuz kardinal sayıların bazı sistematik gösterimi yoksa bireysel bir kümenin, örneğin doğrusal sürekliliğin, kardinal sayıları tanımlama sorunu iyi-tanımlanmış olmaz. Bununla birlikte, her bir kardinal sayı ve kardinal sayıların her bir kümesi için[1], büyüklükçe onu takip eden tam olarak bir kardinal sayı vardır ve her bir kümenin kardinal sayıları, bu şekilde elde edilmiş serilerde elde edilir şeklindeki teoremden dolayı böyle bir sistematik gösterim vardır.[2] Bu teorem, sonlu sayıları hemen takip eden kardinal sayıları (ki bu, "numaralandırılamayan sonsuz" kümelerin kuvvetidir)

1 Bütün kardinal sayıların bir kümesinin neden var olmadığı sorunu için 15. Dipnota bakınız.

2 Bu teoremin ispatı için seçim aksiyomu gerekir (bkz. A.A. Fraenkel ve Y.Bar-Hillel, *Foundations of Set Theory*, Amsterdan, 1958). Ama denilebilir ki, neredeyse olası bütün bakış açılarından bu aksiyom, küme kuramının diğer aksiyomları kadar iyi kurulmuştur. Diğer aksiyomlar tutarlı olmak şartıyla, seçim aksiyomunun küme kuramının genellikle varsayılan diğer aksiyomlarıyla tutarlı olduğu kanıtlanmıştır (16. dipnotta alıntı yapılan makaleme bakınız). Bunun dışında, diğer aksiyomları karşılayan nesnelerin herhangi bir sistemi, bu aksiyomları ve seçim aksiyomunu karşılayan nesnelerin bir sistemine göre tanımlamak mümkündür. Son olarak, 13. dipnotta açıklanan

$\aleph_0$ ile, sonrakini $\aleph_1$ ile vb. göstermeyi mümkün kılar; *i* bir tamsayı olmak üzere, $\aleph_i$ den hemen sonra gelen $\aleph_w$ ile, bir sonraki $\aleph_{w+1}$ ile gösterilir vb. Sıralı sayılar kuramı, bu serileri sürekli genişletmeye olanak sağlar.

2. SÜREKLİLİK PROBLEMİ, SÜREKLİLİK HİPOTEZİ VE BU HİPOTEZİN DOĞRULUĞUYLA İLGİLİ ŞİMDİYE KADAR ELDE EDİLEN KISMÎ SONUÇLAR

Böylece, "kaç tane" ifadesinin analizi şüpheye yer bırakmadan, bu makalenin ikinci satırında anlatılan soru için açık bir anlam ortaya çıkarır: Problem, $\aleph$'lerden hangisinin düz bir çizginin noktalarının sayısı olduğunu bulmak ya da bir Öklit uzayındaki (herhangi bir boyut sayısındaki) diğer bir sürekliliğin noktalarının sayısının (hangi $\aleph$ ile aynı) olduğunu bulmaktır. Bu sayının $\aleph_0$ dan büyük olduğunu kanıtladıktan sonra Cantor, bu sayının $\aleph_1$ olduğu sanısını (konjektür) ortaya attı. Buna denk bir önerme de şudur: Sürekliliğin herhangi bir sonsuz alt kümesi ya tamsayılar ya da bütün süreklilik kümesi kuvvetine sahiptir. İşte, Cantor'un süreklilik hipotezi budur.

Lâkin, her ne kadar Cantor'un küme kuramının yetmiş yıldan fazla bir gelişmişliği ve problemin bu kuram açısından büyük öneme sahip olsa da, iki şey hariç, sürekliliğin kuvvetinin ne olduğu veya onun alt kümelerinin yukarıda bahsedilen şartı sağlayıp sağlamadığı sorunları hakkında şimdiye kadar hiçbir şey ispat edilememiştir. Bunlar, (1) sürekliliğin kuvveti belirli bir özel türün bir kardinal sayısı değildir; yani sayılamayacak kadar çok küçük kardinal sayıların bir sınıfı değildir[3] ve (2) sürekliliğin alt kümeleri

kümenin "pür" kavramı için seçim aksiyomu, diğer küme-kuramsal aksiyomlar kadar açıktır.

3 bkz. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 1. baskı (1914), s. 68 ya da H. Bachmann, *Erg. Math* N.F. I (1955), s. 167. Bu teoremin kâşifi olan J. König, kanıtladığından daha fazlasını öne sürmüştür. (bkz. *Math. Ann.*,60 (1904), s.177).

hakkında az önce bahsi geçen önermenin, bu alt kümelerin belli bir sonsuz küçüklükteki bölümü yani analitik[4] kümeler için doğrudur.[5] Sürekliliğin kuvveti için, ne kadar büyük olursa olsun bir üst sınır tayin edilemez. Sürekliliğin kardinal sayılarının niteliği, niceliğinden daha iyi biliniyor da değildir. Bu sayının düzenli mi ya da tek mi olduğu, erişilebilir mi ya da erişilemez mi olduğu ve (König'in olumsuz sonucu dışında) konfinalitelerinin* karakterinin ne olduğu (4. dipnota bakınız) kararlaştırılmamıştır. Az önce anlatılan sonuçlara ek olarak bilinen tek şey, Cantor'un sanısının çok sayıdaki sonucu ve bu tahmine eşit olan bazı önermelerdir.[6]

Problem, kardinal aritmetiğin genel sorunlarıyla birlikte ele alındığında, bu açık başarısızlık daha da büyür. Sürekliliğin kuvvetinin $2^{\aleph_0}$'ya eşit olduğu kolaylıkla ispatlanır. Böylece, süreklilik problemi, kardinal sayıların "çarpım tablosu"ndan bir soruna, yani belirli bir sonsuz çarpımın (aslında oluşabilecek sıradan-olmayan en basit çarpım) değerlendirilmesi sorununa dönüşür. Bununla beraber, süreklilik hipotezinin değerinin belirlenmesi için bir üst sınır (çarpanları >1) olan, bir tane sonsuz çarpım yoktur. Sonsuz çarpımların değerlendirmesi hakkında bilinen bütün şey, Cantor ve (sürekliliğin

4 Teknik terimlerin tanımlandığı bölüme bakın. [Biz bahsi geçen bölümü çevirmedik. Orada analitik hakkında şu ibare geçmektedir: "Bir küme, bir üst boyutun bir uzayında, bir kısım Borel-küme'sinin dik izdüşümü ise, o küme analitik'tir." Ç.N.]

5 Bkz. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 3. baskı (1935), s. 32. Analitik kümelerin tamamlayıcıları için bile, sorun şu anda karar verilemezdir. Ayrıca kümeler sadece $\aleph_0$ ya da $\aleph_1$ ya da sürekliliğin kuvvetine sahip ya da sınırlı olduklarında karıtlanabilirler. (bkz. C. Kuratowski, *Topologie*, I, Warszawa-Lwow, 1933, s.246).

* Confinality, denklik ilişkisidir; denklik sınıfları, confinality sınıfları olarak adlandırılır. Denklemlerde geçen "cf(m)" şeklindeki kısaltmalar, cofinality karakterini temsil eder (character of confinality). Ç.N.

6 Bkz. W.Sierpinski, *Hypothése du Continu* (Varşova:1934: 2. baskı; NewYork, 1956).

kuvveti hakkındaki daha önce bahsedilen olumsuz teoremi çıkaran) König'den dolayı ve değişik çarpanların üslere, dahası, üslerin -daha küçük taban ya da üslerle- üslere indirgenmesi şeklindeki çarpımların indirgenmesiyle ilgili bazı teoremlerden dolayı, iki alt sınır olduğudur. Bu teoremler, sonsuz çarpımların hesaplanması problemini, $\aleph_\alpha^{\aleph_0}$'nın ve sıralı sayılarının belirli temel işlemlerinin yürütülmesine, sözgelimi, bir serilerinin sınırını belirlemeye indirgerler.[7] Bütün çarpımlar ve kuvvetler, "genelleştirilmiş süreklilik hipotezi" kabul edildiğinde kolaylıkla hesaplanabilir.[8] Bu hipotezin kabul edilmesi, her α için $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ olduğu veya diğer bir deyişle $\aleph_\alpha$'nın kuvvet kümesinin alt kümelerinin sayısının $\aleph_{\alpha+1}$ olması demektir. Ama kanıtı verilmemiş herhangi bir kabul yapmadan, m<n'den ($2^m \leq 2^n$ sonucunun çıkarıldığı açık olduğu hâlde) $2^m<2^n$ ya da $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$ sonucunun çıkarılıp çıkarılamayacağı bile bilinmiyor.

3. KÜME KURAMI TEMELLERİNİN BİR ANALİZİNE DAYALI BİR PROBLEMİN YENİDEN İFADE EDİLMESİ VE BU DOĞRULTUDA ELDE EDİLEN SONUÇLAR

Bu alandaki en temel sorunlarda bile sonuçların ender olması, belli bir noktaya kadar tamamen matematiksel zorluklara dayandırılabilir. Ancak, görünen o ki (4. kısıma bakınız), daha derin sebepler söz konusudur ve bu problemlerin tam bir çözümü sadece, bu problemlerde karşılaşılan ("küme", "bire-bir karşılık gelme" gibi) terimlerin anlamlarının ve kullanımlarının altında yatan aksiyomların (matematiğin alışılageldik şekliyle verdiğinden) daha derin bir analiziyle elde edilebilir. Daha önce bu tür birkaç analiz önerilmiştir. Öyleyse bunların bizim problemimiz için ne sunduklarına bir bakalım.

---

7 Bu indirgenme A.Tarski'nin *Fund. Math.*, 7 (1925), 1'de yayınlanan bir makalesindeki sonuçlar ve yöntemlerle ortaya konabilir.

8 $\aleph_\alpha$ düzenli sayıları için şu kolaylıkla elde edilebilir:
$\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$

İlk olarak, sonuçlarında tamamen yıkıcı olan Brouwer'ın sezgiciliği vardır. $\aleph_1$ den büyük olan $\aleph$'ler kuramı anlamsız olarak bütünüyle reddedilmiştir.[9] Cantor'un sanısı, hepsi bizatihi çok ilginç olsalar da, asıl problemden oldukça farklı olan birkaç değişik anlamlar alır. Bunlar, bizi kısmen pozitif, kısmen negatif cevaplara götürür.[10] Ancak bu alandaki her şey yeterince netleştirilmemiştir. H. Poincaré ve H. Weyl'in[11] çizgilerinin "yarı-sezgici" bakış açısı küme kuramını pek sürdürmez.

Ama Cantor'un küme kuramına ve doğal bir genellemesi olan klâsik matematiğe karşı olan bu negatif tutum, hiçbir surette bunların temellerinin yakın bir incelemesinin doğal sonucu değildir. Bununla beraber, matematiksel nesneleri, sadece kendi yapımlarımız olarak yorumlanacak kadar veya en azından tamamen matematiksel sezgide verilebilecek kadar kabul eden matematiğin doğasının, belirli bir felsefî kavrayışının sonucudur. Matematiksel nesnelerin yapımlarımızdan ve bu nesneler hakkında bireysel sezgiye sahip oluşumuzdan bağımsız olarak var olduklarını kabul eden ve sadece, genel matematiksel kavramlarla ilgili aksiyomların güvenilirliklerini ve doğruluklarını tanımamızı sağlayacak kadar açık olmalarını şart koşan biri için, inanıyorum ki, bütün orijinalliği ve anlamı ile birlikte Cantor'un küme kuramının tatmin edici bir temeli vardır. Yani küme kuramının aksiyomatiği aşağıda açıklandığı gibi yorumlanır.

Başlangıçta küme-kuramsal paradoksların, böyle bir girişimi başarısızlığa mahkum ettiği düşünülebilir; ama daha yakın bir inceleme bu paradoksların hiç sorun çıkarmadığını gösterir. Matematik

9 Bkz. L.E.J. Brouwer, *Atti del IV Congresso Internationale dei Matematici* (Roma, 1908), s. 569.

10 Bkz. L.E.J. Brouwer, *Over de gondslagen der wiskunde* (Amsterdam and Leipzig, 1907) I, 9; III, 2.

11 Bkz. H. Weyl, *Das Kontinuum*, 2. baskı, 1932. Orada (s. 20) açıklanan kümelerin inşasının prosedürü, yeterince çok (transfinit) sayıda yinelendiğinde,

için olmasa bile, mantık ve epistemoloji için çok ciddî sorundurlar. Kümeler matematikte (en azından, Cantor'un küme kuramının tümünü kapsayan günümüz matematiğinde) karşımıza çıktığı kadarıyla; tam sayılar, rasyonel sayılar (yani tamsayı çiftleri), reel sayılar (yani rasyonel sayılar kümeleri) ya da reel sayıların fonksiyonlarının (yani reel sayı çiftlerinin kümeleri) vb. kümeleridirler. Kümelerin tümü (ya da genel olarak kümelerin varlığı) hakkındaki teoremler öne sürüldüğü zaman, hiçbir zorluk çekmeden, tamsayı kümeleri bununla birlikte tamsayı kümelerinin kümeleri vb.'ni karşıladıkları şeklinde yorumlanabilirler (sırasıyla, ya tamsayı kümeleri ya da tamsayı kümelerinin kümeleri ya da ... vb.'den biri var olur; ki, bu kümeler önerilen özelliği taşıyorlar). Ancak, bu küme kavramı,[12] bütün var olan şeyleri iki kategoriye ayırarak elde edilen bir şey değil, "kümenin"[13] işleminin tekrarlı uygulamasıyla[14] tamsayılardan

---

Kısım 4'te -ki, orada süreklilik hipotezi doğrudur- anlatılan küme kuramı modelinin reel sayılarını tam olarak elde eder. Ama bu yineleme yarı-sezgici bakış açısı sınırları içinde mümkün değildir.

12 Matematiğin modern soyut disiplinlerinin, özellikle de kategoriler kuramının ruhunun, aşikâr oldukça -örneğin kategorilerin kendinden-uygulanabilirlikleri yoluyla (S. Maclane'in *Sym. On Foundations of Mathematics*, Warsaw, 1959, makalesine bakınız)- bu küme kavramını aştığı kabul edilmelidir. Bununla beraber, değişik düzeylerdeki kategoriler ayırt edilirse, kuramın matematiksel içeriğinden herhangi bir şeyin kaybedildiği şeklinde anlaşılmıyor. Bu yoruma uymayan ilginç matematiksel ispatlar bulunsaydı, o zaman küme kuramının paradoksları matematik için ciddî bir problem olurdu.

13 ("x" değişkeni, verilen bazı nesneler boyunca değişmek üzere) "x'lerin kümesi" işlemi yeterince tanımlanamaz (en azından mevcut bilgi durumuyla). Sadece, yine küme kavramını içeren diğer deyimlerle yeniden ifade edilebilir. Örneğin: Bir "çokluk"un ("birleşim", "parça") sınırlı sayıda kelimeyle tanımlayıp tanımlamamamızın önemli olmadığı (bu şekilde rastgele kümeler dışlanmazlar) bir şey olarak algılandığı; "x'lerin çokluğu", "x'lerin herhangi sayılarının birleşimi", "x'lerin bütününün parçası" gibi.

14 Bu deyimin anlamı, transfinit tekrarlamayı içerir. Yani sonlu tekrarlamayla elde edilen kümelerin, bütünlüğün kendisi, "kümenin" işleminin daha ileri uygulamalarının bir temeli ve bir kümesi olarak kabul edilir.

(ya da diğer bazı iyi tanımlanmış nesnelerden) elde edilebilen bir şey olarak, asla hiçbir karşıtlığa yol açmaz. Yani kümenin bu kavramı ile kusursuz olarak "nahif" ve eleştirisiz bir çalışmanın, şimdiye kadar tamamen kendinden-tutarlı olduğunu kanıtlamıştır.[15]

Bunun dışında, kümenin bu kavramının sınırsız kullanımının temelinde yatan aksiyomlar ya da, en azından, şimdiye kadar tasarlanan tüm matematiksel ispatlar için (aşırı büyük kardinal sayıların varlığıyla ilgili teoremler için olanlar hariç, 20. dipnota bakınız) yeterli olan bu aksiyomların bir alt kümeleri; bu aksiyomlardan çıkarılan, verilen bazı önermelerin matematiksel mantık ile, sembollerin kullanımıyla ilgili saf bir kombinatoryal probleme dönüştürülüp dönüştürülemeyeceği sorunu -ki bunu en radikal sezgici bile anlamlı olarak kabul etmek zorundadır- aksiyomatik küme kuramında[16] tam olarak formüle edilmiştir. Bu nedenle hangi felsefî açıdan bakılırsa bakılsın, Cantor'un süreklilik problemi en azından şu anlamı reddedilemez bir şekilde taşır: Bahsedilen sistemlerde formüle edilen küme kuramının aksiyomlarından bir cevabın türeyip türeyemeyeceğini bulmak ve eğer bulunursa cevabın hangisi olduğunu bulmak.

---

15 "Küme" teriminin bu açıklamasından, bütün kümelerin bir kümesi ya da benzer bir uzantının diğer kümelerinin var olmayacağı sonucu hemen çıkarılır. Çünkü bu şekilde elde edilen her küme, "kümesi" işleminin daha ileri uygulamalarına dolaysız olarak yol açar ve daha büyük kümelerin varlığına sebep olur.

16 Örn. bkz. P.Bernays, "A system of axiomatic set theory," *J. Symb. Log.*, 2 (1937), 65; 6 (1941), 1; 7 (1942), 65, 133; 8 (1943), 89. J. Von Neumann, "Eine Axiomatisierung der Mengenlehre," *J. Reine u. Angew. Math.*, 154 (1925), 219; yine a.g.e., 160 (1929), 227; *Math. Zs.*, 27 (1928), 669. K. Gödel, *The Consistency of the Continuum Hypothesis* (*Ann. Math. Studies* No.3) 1940, 2. baskı, 1951. P. Bernays ve A. A. Fraenkel, *Axiomatic Set Theory* (Amsterdam, 1958). Sonsuzluğun çok güçlü aksiyomlarını dahil ederek, çok daha zarif aksiyomatizasyonlar yakın zamanda mümkün olmuştur. (20. dipnotta alıntı yapılan Bernays'ın makalesine bakınız.)

Elbette, bu şekilde yorumlanırsa, Cantor'un sanısı için (aksiyomların tutarlı olduğu kabul edilerek) *apriori* üç ihtimal vardır: İspatlanabilir, çürütülebilir ya da karar-verilmezdir.[17] (Problemin zorluğunun muhtemelen tamamen matematiksel olmaması sanısının sadece tam bir formülasyonu olan) üçüncü alternatif en mümkün olanıdır. Şu anda bu alternatif için bir ispat aramak belki problemi yıkmak için en umut verici yoldur. Daha önce bu yönde bir sonuç elde edilmiştir; yani aksiyomlar tutarlıysa, Cantor'un sanısı küme kuramının aksiyomlarıyla çürütülemez (Kısım 4'e bakınız).

Yine de, burada şunu not etmeliyiz, benimsenen bakış açısına göre, küme kuramının kabul edilen aksiyomlarından Cantor'un sanısının karar-verilemezliğinin bir ispatı (zıddıyla ayırt etme şeklinde, örneğin, π'nin transandantal oluşunun bir ispatı) hiçbir suretle problemi çözmez. Bu nedenle bir önceki sayfada ve 13. dipnotta açıklandığı gibi küme kuramının ilkel terimlerinin anlamları geçerli olarak kabul edilirse, bazı iyi-belirlenmiş gerçekliği açıklayan küme-kuramsal kavramlar ve teoremler ortaya çıkar; öyle ki, Cantor'un sanısı ya doğru ya da yanlış olmak zorunda olur. Bu nedenle bugün kabul edilen aksiyomlarla karar verilemezlikleri, bu aksiyomların sadece o gerçekliğin tam bir tanımını içermedikleri anlamına gelir. Böyle bir inanç hiçbir suretle hayalî değildir. Çünkü bildik aksiyomlardan dolayı kararsız olan bir soruyu karar verilebilir kılan yollar elde edilebilir.

İlk olarak, küme kuramının aksiyomlarının kendisi hiçbir suretle kapalı bir sistem oluşturmaz. Aksine, aksiyomların dayandığı küme kavramının kendisi,[18] "kümesi" işleminin daha da ileri tekrarlarının var olduğunu iddia eden, yeni aksiyomlarla genişletilmelerini öne-

17 Aksiyomlar tutarlı olmadığında, Cantor'un sanısı için dört *apriori* olası alternatiflerden biri oluşur; yani bu durumda küme kuramının aksiyomlarıyla hem gösterilebilir (kanıtlanabilir) hem de çürütülebilir.

18 Benzer şekilde "küme özelliği" kavramı (küme kuramının ilkel terimlerin ikincisi) bu kavrama başvuran aksiyomların sürekli uzantılarını öneriyor.

rir. Bu aksiyomlar çok büyük kardinal sayıların (yani bu kardinal sayıları içeren kümelerin) var olduğunu iddia eden önermeler olarak da formüle edilebilir. Bu sağlam "sonsuzluk aksiyomları"nın en basiti, $> \aleph_0$ şeklinde erişilemeyen sayıların (zayıf ya da güçlü anlamda) varlığını öne sürer. Genel olarak konuşursak, sonraki aksiyom, diğer aksiyomlarda açıklanan kümelerin oluşum prosedürlerinin kullanılmasıyla elde edilen kümelerin toplamının yine bir küme (ve bu nedenle, bu prosedürlerin daha ileri uygulamalarının yeni bir temelini) oluşturmasından başka bir şey değildir.[19] Sonsuzluğun diğer aksiyomları ilk olarak P. Mahlo tarafından formüle edilmiştir.[20] Bu aksiyomlar açıkça hem bugün kullanılan küme kuramının aksiyomatik sisteminin eksik olduğunu hem de yeni aksiyomlarla –ki, yalnızca yukarıda açıklanan küme kavramının içeriğini açıklar– keyfî olmadan tamamlanabileceğini gösterir.

Bundan başka "küme özelliğinin özelliği" kavramları vb. sunulabilir. Ama bu şekilde elde edilen yeni aksiyomlar, kümelerin sınırlı alanlarına başvuran önermelerin sonuçları gibi (örneğin süreklilik hipotezi gibi) kümeler hakkındaki aksiyomların içinde (bugün bilindikleri kadarıyla) bulunurlar.

19 Bkz. E. Zermelo, *Fund. Math.*, 16 (1930), 29.

20 Bkz. Ber. *Verh. Sächs. Ges. Wiss*, 63 (1911), 190-200; 269-76. Bununla birlikte, Mahlo'nun konuyu sunuşundan, tanımladığı sayıların gerçekten var oldukları sonucu çıkarılamaz. Son yıllarda sonsuzluk aksiyomlarıyla ilgili önemli ilerlemeler yaşanmıştır. Özellikle, Mahlo'nunkinden tamamen farklı ilkelere dayalı olan bazıları formüle edilmiştir ve Dana Scott, bu aksiyomlardan birinin, A önermesinin reddi anlamına geldiğini kanıtlamıştır (4. kısımda anlatılacaktır). Bu nedenle, 4. kısımda açıklanan süreklilik hipotezinin tutarlılığının ispatı bu aksiyom eklendiğinde *verilemez*. Ama bu aksiyomların, Mahlo'nunkiyle aynı anlamda olan genel küme kavramından çıkarılması henüz netleştirilmemiştir. Bkz. A. Tarski, *Proc. Intn'l Congress for Logic*, Stanford, 1960, s. 134; D. Scott, Bull. Pol. Ac. Sci., Warsaw, April, 1961; W. P. Hanf ve D. Scott, *AMS Notices*, 8 (1961), 445. Mahlo'nun aksiyomları, Azriel Levy tarafından tüm kümelerin sistemi hakkındaki genel bir ilkeden türetilmiştir. Bkz. *Pac. Jour. of Math.*, 10 (1960), s. 233. Ayrıca bkz. P. Bernays, *Essays in the Foundations of Mathematics Dedicated to A. A. Fraenkel*, 1961, s. 1; ki bu makalelerdeki neredeyse tüm küme-kuramsal aksiyomlar Levy ilkesinden türetilmiştir.

Bu aksiyomların dolayımsız konuları olan çok büyük transfinit sayılar alanının çok ötesinde de sonuçları olduğu kanıtlanabilir. Tutarlı oldukları kabul edilerek her bir aksiyomun Diophantine eşitliklerinin alanlarında bile karar verilebilir önermelerin sayısını arttırdığı gösterilebilir. Süreklilik problemi için Mahlo ilkelerine (daha önce bahsedilen süreklilik hipotezinin çürütülemezliğinin ispatı, hiç değişmeden tüm bu aksiyomlara uygulanabilir) dayalı olarak kurulabilen bu sonsuzluk aksiyomları yoluyla bir çözüm umudu azdır. Ama değişik ilkelere dayalı diğer aksiyomlar vardır (20. dipnota bakınız); yine, normal aksiyomların dışında, sonsuzluk aksiyomu, 18. dipnotta anlatılan aksiyomlar, (şimdiye kadar bilinmeyen) küme kuramı aksiyomları vardır ki, mantık ve matematiğin temelini oluşturan kavramların daha derin bir anlayışı, şimdiye kadar bilinmeyen bu aksiyomları, bu kavramların ima ettiği şekliyle tanımamızı sağlayacaktır (örn. 23. dipnota bakınız).

Bununla birlikte, ikinci olarak, bazı yeni aksiyomların tabiî zorunlulukları dikkate alınmadan bile ve bu tabiî zorunluluğu hiç olmasa bile, doğruluğu hakkında olası bir karar diğer bir yolla elde edilebilir; yani tümevarımsal olarak "başarı"sı üzerinde çalışarak elde edilebilir. Burada başarı, sonuçlardaki, özellikle de "doğrulanabilir" sonuçlardaki verimliliktir. Bu sonuçlar yeni aksiyom sunulmadan kanıtlanabilen sonuçlardır; fakat, ispatların keşfi, yeni aksiyomun yardımıyla oldukça kolay ve daha basittir ve birçok değişik ispatı bir ispata indirgemeye imkan sağlar. Sezgiciler tarafından reddedilen, reel sayılar sisteminin aksiyomları, bu anlamda, bir dereceye kadar doğrulanmıştır. Çünkü analitik sayı kuramı genellikle daha elverişsiz bir yol ile sonradan temel metotlarla doğrulanabilen sayı-kuramsal teoremlerin doğrulanmasını sağlar. Bununla birlikte bundan çok daha yüksek derecede bir doğrulama anlaşılabilirdir. Tüm alanı aydınlatan ve problemleri çözmek için güçlü metotlar sağlayan (ve hatta mümkün olabildiği kadar onları inşacı tarzda

çözen) doğrulanabilir sonuçlarda bolca bulunan aksiyomlar var olabilir. Öyle ki, tabiî olarak gerekli olup olmadıklarına bakılmaksızın, en azından iyi-kurulmuş herhangi bir fiziksel kuramla aynı anlamda oldukları kabul edilmelidir.

4. SORU HAKKINDA BAZI GÖZLEMLER: SÜREKLİLİK PROBLEMİNİN BİR ÇÖZÜMÜNÜN HANGİ ANLAMDA VE HANGİ YÖNDE OLMASI BEKLENİR?

Lâkin bu düşünceler süreklilik problemi için uygun mudurlar? Kabul edilen aksiyomlarla problemin çözümsüzlüğünü gerçekten gösteren herhangi bir gösterge var mıdır? Zannımca en az iki tane vardır:

Şimdiye kadar kurulan küme kuramının tüm aksiyomlarını karşılayan oldukça farklı tanımlanmış iki nesne sınıfının var olması ilkidir. Bir sınıf, elemanlarının özellikleri tarafından belirli bir şekilde tanımlanan kümelerden oluşur;[21] keyfî çokluklar anlamındaki diğer kümeler, yapılıp yapılamayacağı veya nasıl yapılacağına bakılmaksızın, tanımlanabilir. Şimdi, hangi nesnelerin numaralandırılacağı ve hangi bire-bir karşılık gelmeye dayanacağı belirlenmeden önce, bu nesnelerin numaralarının tespiti pek beklenmez. Bazı talihli rastlantılar olma durumu hariç tabi. Ama eğer tanımlanabilen özelliklerin uzantıları anlamının dışında kümelerden bahsetmenin anlamsız olduğuna inanılıyorsa, o zaman da bu düşünceye göre asıl olan kümelerin bu karakteri -yani kümelerin, tanımlanabilen özelliklerin uzantıları oldukları- kullanılmaksızın küme kuramının problemleri-

21 Yani "sıralı sayılara *göre*" (yani yaklaşık olarak her bir sıralı sayı için onu gösteren bir sembolün verilmesi varsayımı altında) belirli prosedürlerle tanımlanabilir. 16. ve 24. dipnotlarda alıntı yapılan makalelerime bakınız. Elbette Richard'ın paradoksu bu çeşit bir tanımlanabilirliğe uygulanamaz. Çünkü sıralı sayıların bütünlüğü kesinlikle numaralandırılamaz değildir.

nin ancak küçük bir kısmı çözülebilir. Bununla birlikte kümelerin bu karakteri ne açıkça formüle edilebilir ne de küme kuramının kabul edilen aksiyomlarında dolaylı olarak bulunabilirler. Böylelikle her iki bakış açısıyla da, 2. Kısımda denilenler dikkate alınırsa, süreklilik probleminin şimdiye kadar kurulan aksiyomlara dayalı olarak çözülemeyeceği, ama diğer yandan kümelerin tanımlanabilirlikleri hakkında bir şey söyleyen ya da ima eden bazı yeni aksiyomların yardımıyla çözülebileceği ortaya atılabilir.[22]

Bu tahminin sonraki yarısı daha önceden kanıtlanmıştır: Yani (kendisi aksiyomatik küme kuramında tanımlı olan) 21. dipnotta anlatılan tanımlanabilirlik kavramı, aksiyomatik küme kuramında, bu anlamda her kümenin tanımlanabilir olduğu aksiyomundan genel süreklilik hipotezinin türetilmesine olanak sağlar.[23] Bu aksiyom (buna "A" diyelim) diğer aksiyomların tutarlı olduğu kabulü altında, diğer aksiyomlarla kanıtlanabilir şeklinde tutarlı olduğundan dolayı bu sonuç (tanımlanabilirliğe karşı alınan felsefi konum ne olursa olsun), küme kuramı aksiyomlarının kendi içlerinde tutarlı olmaları şartıyla, süreklilik hipotezinin, küme kuramının diğer aksiyomlarıyla tutarlı olduğunu gösterir.[24] Yapısı itibariyle ispat,

22 Bununla birlikte, asla gerçekleşmeyen, D. Hilbert'in süreklilik probleminin bir çözümünün programı da (bkz. *Math. Ann.*, 95 (1926), 161) reel sayıların tüm olası tanımlarının bir düşüncesine dayanır.

23 Diğer yandan, bunun karşı anlamındaki bir aksiyomdan, Cantor'un sanısının olumsuzlanması türetilebilir. Bütün kümeler sisteminin bir kısım maksimum özelliğini (geometride Hilbert'in tamlık aksiyomu gibi) gösteren bir aksiyom üzerine düşünüyorum; öte yandan, A aksiyomu minimum bir özelliği gösterecektir. Sadece maksimum bir özelliğin, 13. dipnotta açıklanan küme kavramı ile uyum içinde olduğuna dikkat edin.

24 16. dipnotta alıntı yapılan makaleme ve *Proc. Nat. Ac. Sci.*, 25 (1939), 220'deki makaleme bakınız. Bu makalede yer alan işaretlerdeki bir hatayı ve bir basım hatasını bu vesile ile düzeltmek istiyorum: s. 221'de 25-29 satırda; s. 222'de 4-6 ve 10.; s. 223'de 11-19. satırlarda, α harfi (bulunduğu tüm yerlerde) μ ile yer değiştirmelidir. Yine s. 222'deki 6. teoremde "$\equiv$" sembolü $\Phi_\alpha(x)$ ile $\Phi_\alpha(x')$ arasına yerleştirilmelidir. İspatı tüm ayrıntılarıyla gerçekleştirmek için 16. dipnotta alıntı yapılan makaleye bakılmalıdır.

Öklit geometrisinin içinde bir model kullanılarak yapılan Öklit-dışı geometrinin tutarlılık ispatına benzer. Yani küme kuramı aksiyomlarından daha önce bahsedilen anlamda tanımlanabilen kümelerin A önermesinin ve böylece genel süreklilik hipotezinin doğru olduğu küme kuramının bir modelini oluşturduğu sonucu çıkar.

Bildik aksiyomlara dayalı olan süreklilik probleminin çözülemezliği taraftarı olan ikinci bir argüman, Cantor'un tahmininin yanlış olacağını gösteren (Cantor'un zamanında bilinmeyen) belirli olgulara dayandırılabilirken,[25] diğer yandan Cantor'un tahmininin çürütülmesinin bugün kabul edilen aksiyomlara göre gösterilmesi imkânsızdır.

Böyle bir olgu (ilgili kümelerin aşırı derecede ender olduklarını ileri süren) nokta kümelerin belirli özelliklerinin varlığıdır. Bu özelliklere sahip numaralandırılamaz olmayan kümelerin varlığı kanıtlanabilir. Ama sürekliliğin kuvvetinin örneklerinin varlığını ispatlamak için açık bir yol yoktur. (Düz bir çizginin alt kümelerinin) bu tür özellikleri şunlardır: (1) Her mükemmel kümenin ilk kategorisidirler[26], (2) çizginin her sürekli bire-bir haritalanmasıyla kendi üzerine getirilen bir sıfır kümesidirler.[27] Benzer bir doğanın başka bir özelliği herhangi bir verilen uzunluğun sonsuz çokluktaki aralıkları tarafından kaplanabilmeleridir. Ancak bu durumda şimdiye kadar numaralandırılamaz olmayan örneklerin varlığı bile ispatlanmamıştır. Bununla birlikte, süreklilik hipotezinden üç durumun hepsinde de hem sürekliliğin kuvvetinin örnekleri[28] hem de hatta

25 Bu yöndeki görüşler N. Lusin tarafından da *Fund. Math.*, 25 (1935), s. 129ff'de açıklanmıştır. Ayrıca bkz. W. Sierpinski, a.g.e., s. 132.

26 Bkz.W. Sierpinski, *Fund. Math.*, 22 (1934), 270, ve C. Kuratowski, *Topologie*, I, s. 269ff.

27 Bkz. N. Lusin ve W. Sierpinski, *Bull. Internat. Ac. Sci.*, Cracovie 1918, s. 35; ve W. Sierpinski, *Fund. Math.*, 22 (1934), 270.

28 Üçüncü durum için 6. dipnotta atıf yapılan eserin 39. sayfasına bakınız. Birinci basımın 1. teoremi.

örneğin düz çizginin *her* dönüşümüyle (sonsuz çokluktaki noktaya kadar) kendilerine taşınabilir oldukları sonucu çıkarılabilir.[29]

Süreklilik hipotezinin pek makul olmayan diğer sonuçlarına göre şunlar vardır: (1) aralıkların *her* yoğun kümesiyle (numaralandırılamaz çokluktaki noktaya kadar) kaplanan sürekliliğin kuvvetinin düz bir çizgisinin alt kümeleri;[30] (2) (Menger-Urysohn tarzında) numaralandırılamayan-sonlu-olmayan-boyuttaki-alt-kümelerin hiçbirini içermeyen Hilbert uzayının sonsuz boyuttaki alt kümeleri;[31] (3) sürekliliğin kuvveti herhangi bir M kümesini, çok sayıdaki karşılıklı ayrık $A^i_{x_i}$ kümesinin sürekliliğine ayrışacak sonsuz bir A^i dizisi vardır: öyle ki, her bir i için, $A^i_{x_i}$ kümesi hangi yolla seçilirse seçilsin, $\prod_{i=0}^{\infty}(M - A^i_{x_i})$ numaralandırılamazdır.[32] "Sürekliliğin kuvveti", "$\aleph_1$" ile yer değiştirildiğinde bile (1) ve (3) oldukça akıl dışıdır.

Süreklilik hipotezini kullanmaksızın elde edilen, nokta-küme kuramının birçok sonucunun da oldukça beklenmedik ve akıl dışı olduğu söylenebilir.[33] Ama bu doğru olsa bile, burada durum farklıdır. Buradaki örneklerin çoğunda (örneğin Peano eğrisinde), bu zıt görünüm, sezgici geometrik kavramlarımız ile küme-kuramsal kavramlarımız arasındaki uyum eksikliğiyle açıklanabilir. Yine, süreklilik hipotezini reddeden sayısız makul önermenin var olmasının aksine, süreklilik hipotezini doğrulayan bir önermenin bulunmaması dikkat çekici bir durumdur. İnanıyorum ki, şimdiye kadar söylenenler yan yana getirilince şunu söylemek için yeterli sebep elde mevcuttur: Süreklilik probleminin küme kuramındaki

29 Bkz. W. Sierpinski, *Ann. Scuol. Norm. Sup.*, Pisa 4 (1935), 43.
30 Bkz. N. Lusin, *C. R. Paris*, 158 (1914), 1259.
31 Bkz. W. Hurewicz, Fund. Math., 19 (1931), 8.
32 Bkz. S. Braun ve W. Sierpinski, *Fund. Math.*, 19 (1932), 1. önerme. Bu önerme süreklilik hipotezine denktir.
33 Bkz. Örn. L. Blumenthal, *Am. Math. Monthly*, 47 (1940), 346.

rolü, Cantor'un sanısını çürütebilecek yeni aksiyomların keşfine yol açmasıdır.*

İKİNCİ BASIMA EKLEME

Önceki makalenin yayınlanmasından beri çok sayıda yeni sonuç elde edilmiştir. Önceki tartışmalarla bağlantılı olanlara değinmek istiyorum.

1. A. Hajnal, eğer $2^{\aleph_0} \neq \aleph_2$ küme kuramının aksiyomlarından türetilebilirse, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$'nin de türetilebileceğini ispatlamıştır.[34] Eğer Cantor'un süreklilik hipotezi küme kuramı aksiyomlarına dayanarak kanıtlanabilseydi, bu sürpriz sonuç, süreklilik probleminin çözümünü büyük ölçüde kolaylaştırabilirdi; ki, muhtemelen bu durum söz konusu değildir.

2. W. Sierpinski'nin kitabının yeni baskısında Cantor'un hipotezinin bazı yeni sonuçları ve bu hipoteze denk olan önermeler bulunabilir.[35] Birinci baskıda süreklilik hipotezinin, (genelleştirilmiş bir eğri, bir kısım kartezyen koordinat sistemlerinde $y=f(x)$ eşitliğiyle tanımlanabilen bir nokta küme olmak üzere) Öklit düzleminin numaralandırılamayacak şekilde çok sayıda "genelleştirilmiş eğriler"-in toplamı olduğu şeklindeki önermeye eşit olduğu ispatlanmıştır. İkinci baskıda, Öklit düzleminin sürekliliğin kuvvetinin erişilemez bir sayı olmadığı şeklindeki zayıf varsayım altında süreklilikten daha az olan birçok genelleştirilmiş eğrinin toplamı olduğunun kanıtlanabileceği gösterilmiştir.[36] Bu teoremin tersinin bir ispatı,

---

* Bu kısımdan sonra Gödel, "Bazı Teknik Terimlerin Tanımları" başlığı altında konu ile alakalı bir kısım matematiksel terimleri tanımlaya girişir. Biz bu teknik kısmı atlamayı uygun gördük. Ç.N.

34 Bkz. *Zeitschr. F. Math. Log. u. Grundl. d. Math.*, II (1956), 131.

35 6. dipnota bakınız.

36 2. baskının 207. sayfası ya da *Fund. Math.*, 38 (1951), 9'a bakınız. C. Kuratowski ve R. Sikorski'nin ilgili sonuçları *Fund. Math.*, 38 (1951), 15 ve 18'de verilmiştir.

$2^{\aleph_0} = > \aleph_0$ erişilemeyen en küçük sayı şeklindeki hipoteze bir miktar akla yatkınlık kazandırır. Bununla beraber, bu çıkarıma çok dikkat edilir. Çünkü bu durumdaki paradoksal görünüm (Peano "eğrile ri"ndeki gibi), (en azından kısmen) eğrinin geometrik sezgilerimizin, eğrilerin sadece bazı karakteristik özelliklerine sahip olan bir şeye transfer edilmesinden dolayıdır. Şunu vurgulamalıyız ki, bir önceki bölümde anlatılan süreklilik hipotezinin sezgi-karşıtı sonuçlarında böyle bir şey yoktur.

3. C. Kuratowski tutarlılığı 4. kısımda anlatılan tutarlılık ispatından çıkarılan süreklilik hipotezinin daha güçlü bir hâlini formüle etmiştir.[37] Akabinde, bu yeni hipotezden değişik sonuçlar çıkarmıştır.

4. Son yıllarda sonsuzluk aksiyomları hakkında bayağı ilginç yeni sonuçlar elde edilmiştir (20. ve 16. dipnotlara bakınız).

4. kısımda savunulan görüşe karşı olarak, Cantor'un süreklilik probleminin, küme kuramının kabul edilen aksiyomlarıyla karar verilemez olması durumunda, aynen Öklit-dışı geometrinin tutarlılığının ispatıyla matematikçi için Öklit'in beşinci iddiasının doğruluğu sorununun anlamını yitirmesi gibi, Cantor'un süreklilik probleminin doğruluğu sorununun anlamını yitireceği iddia edilmiştir.[38] Bu nedenle, hem matematiksel hem de epistemolojik bakış açısından küme kuramındaki durumun, geometridekinden çok farklı olduğuna dikkati çekmek istiyorum.

Erişilemez sayıların varlığı aksiyomunda (ki, küme kuramının von Neumann-Bernays aksiyomlarıyla tutarlı olmaları şartıyla, von Neumann-Bernays aksiyomları ile karar verilemez oldukları kanıtlanabilir) örneğin içerisinde iddia edildiği sistem ile içerisinde reddedildiği sistem arasında matematiksel olarak önemli bir asimetri vardır.[39]

37 *Fund. Math.*, 35 (1948), 131'e bakınız.

38 Bkz. Alfred Errera, *Atti Accad. Ligure*, 9 (1952), 176-83.

39 Aynı asimetri küme kuramının en düşük düzeylerinde de oluşur ki, orada sorudaki aksiyomların tutarlılığı şüphecilerin itirazlarına daha az maruz kaldı.

Yani sonrakinin (lâkin, öncekinin değil), orijinal (genişletilmemiş) sistemde bir modeli vardır ki, tanımlanabilir ve ispatlanabilirdir. Bu demektir ki, önceki, daha güçlü bir anlamda bir uzantıdır. Yakın ilişkili bir olgu, aksiyomun önerilmesinin (lâkin, inkârının değil) (tek tek örnekleri hesaplamalarla kanıtlanabilen) sayılar hakkındaki yeni teoremler anlamına geldiği şeklindedir. Bu nedenle, 3. Kısımda açıklanan doğruluğun kriteri bir dereceye kadar önermeler için doyurucudur, ama retler için öyle değildir. Kısacası, sadece önerme "verimli" bir genişletme üretirken inkâr, çok sınırlı etki alanının dışında kısırdır. Cantor'un süreklilik hipotezinin de sayı kuramı için kısır olduğu ve orijinal sistemde yapılabilen bir modelde doğru olduğu kanıtlanabilirken, sürekliliğin kuvveti hakkındaki diğer bazı aksiyomlar için durum muhtemelen böyle olmayacaktır. Diğer yandan bu asimetrilerin hiçbiri Öklit'in beşinci postulatına uygulanamaz. Daha kesin ifade etmek gerekirse, postulat ile reddi zayıf anlamda uzantılardır.

Epistemolojik duruma göre, sadece, eğer dikkate alınan aksiyomların sistemi hipotetik-tümdengelimsel bir sistem olarak yorumlanırsa, yani ilkel terimlerin anlamı belirsiz bırakıldığında, karar verilemezliğin bir ispatıyla sorunun anlamını yitirdiği söylenebilir. Geometride eğer ilkel terimler belirli anlamlarla, sözgelimi katı cisimlerin davranışı, ışık ışınlarına gönderme yapılırken olduğu gibi ele alındığında Öklit'in beşinci postulatının doğru olup olmadığı sorunu anlamını korur. Küme kuramındaki durum benzerdir. Tek fark, geometride bugün genellikle benimsenen anlam matematiksel sezgiden çok fiziğe gönderme yapar ve bu nedenle böyle bir karar, matematiğin kapsamı dışında kalır. Diğer yandan 3. kısım ve 13. dipnotta açıklanan şekilde anlaşılan transfinit küme kuramının nesneleri, açıkça fiziksel dünyaya bağlı değillerdir ve fiziksel deneyim ile olan dolaylı bağlantıları bile çok gevşektir (bunun başlıca nedeni küme-kuramsal kavramların bugünün fiziksel kuramlarında sadece küçük bir rol oynamasıdır).

Yine de duyu tecrübelerimizden uzaklıklarına rağmen, aksiyomların kendilerini bize doğru gibi kabul ettirmeleri olgusunda görüldüğü üzere, küme kuramının nesnelerinin bir algısına benzeyen bir şeye de sahibiz. Bu tür bir algıya, yani matematiksel sezgiye duyu algısından daha az güvenmemiz için bir sebep göremiyorum. Fiziksel kuramlar oluşturmamızı sağlayan duyu algıları, gelecekteki duyu algılarının bu kuramlarla uyumlu olmasını beklememize sebep olur; dahası, şu an için kararsız olan bir sorunun bir anlamı olduğuna ve gelecekte karar verilebileceğine inanmamızı sağlar. Matematikteki küme-kuramsal paradokslar, fizikteki duyu yanılgılarından daha çok sıkıntılı değildirler. Cantor'un süreklilik hipotezi türü problemlerin bir çözümüne yol açacak, yeni matematiksel sezgilerin tamamen mümkün olduğu daha önce belirtilmiştir (3. kısım).

Matematiksel sezginin, ilgili nesnelerin *dolayımsız* bir bilgisini veren bir duyu olarak kabul edilmesine gerek olmadığına dikkat edilmelidir. Bunun yerine, fiziksel deneyimde olduğu gibi, düşünce ve bu nesneler hakkındaki düşüncelerimizi dolaysız olarak verilen başka bir şeye dayalı olarak *biçimlendiriyoruz*. Burada sadece bu başka bir şey hisler değildir ya da asıl olarak değildir. Hislerden öte bu şey, aslında (matematikten bağımsız olarak) dolaysız bir şekilde şu olgudan çıkar: Fiziksel nesnelere gönderme yapan düşüncelerimiz bile duyular veya sadece duyuların terkibinden, niteliksel olarak farklı bileşenler içerir; sözgelimi, nesne düşüncesinin kendisi böyle bir şeydir; fakat öte yandan düşüncemiz ile niteliksel olarak yeni bir şey üretmiyor, fakat sadece verili elemanları yeniden üretiyor ve birleştiriyoruz. Açıktır ki, matematiğin temelini oluşturan "verilenler", ampirik düşüncelerimizde bulunan soyut elamanlarla yakından ilgilidir.[40] Bununla birlikte, bundan, bu ikinci türün bilgisinin, Kant'ın

40 13. dipnotta açıklanan küme kavramı ile Kantçı manada, tam anlama kategorileri arasında yakın bir ilişki olduğuna dikkat edin. Yani her ikisinin fonksiyonu "sentez"dir; yani çok-katlılardan birliklerin üretilmesidir (örn. Kant'ta muhtelif veçhelerinden *bir* nesne çıkarma düşüncesi).

önerdiği gibi, tamamen sübjektif bir şey olduğu sonucu hiçbir suretle çıkmaz. Çünkü bu bilgiler duyu organlarımız aracılığıyla belirli şeylerin eylemleriyle birleştirilemez. Bunun yerine, onlar da objektif gerçekliğin bir veçhini temsil edebilirler. Fakat, duyuların tersine, bizdeki varlıkları kendimiz ile gerçeklik arasındaki başka bir tür ilişkiden dolayı olabilir.

Ancak, matematiksel sezginin nesnelerinin objektif varlığı sorunu (ki, yeri gelmişken dış dünyanın nesnel varlığı sorununun tam bir kopyası olan) burada tartışılan problem için sonuca belirleyici değildir. Küme kuramının aksiyomlarını ve bu aksiyomların uzantılarının açık bir serisinin üretilmesi için, yeterince açık olan bir sezginin varlığı şeklindeki psikolojik olgu bile tek başına, Cantor'un süreklilik hipotezi gibi önermelerin doğruluk ya da yanlışlıkları sorununu anlamlandırmaya yeterlidir. Ama belki de başka her şeyden daha çok, küme kuramında bu doğruluk kriterinin kabulünü gerekçelendiren şu olgudur: Matematiksel sezginin süregelen çekiciliği hem transfinit küme kuramı sorununa müphem olmayan bir çözüm bulmak için hem de (Goldbach sanısı türü)[41] sonlu sayı kuramının problemlerinin çözümü için[42] gereklidir; ki, problemlerin içine giren kavramların anlamlılığı ve müphem olmayışlarından nerdeyse şüphe edilmez. Bu sonuç, her aksiyomatik sistem için bu türde sonsuz sayıda karar-verilemez önerme vardır olgusundan çıkar.

Daha önce (3. kısmın sonu), matematiksel sezginin dışında matematiksel aksiyomların doğruluğunun başka bir (sadece ihtimalî olsa da) kriterinin varlığından bahsedilmişti; bu aksiyomların matematikteki ve buna ek olarak denilebilir ki, fizikteki yararlılıkları. Ancak

41 Yani, tek tek durumlar üzerinden karar verilebilen tamsayılar hakkındaki evrensel (tümel) önermeler.

42 Tabii ki, eğer tümevarımsal (olası), örneğin, teoremi çok büyük sayılara kadar kanıtlamak ya da daha dolaylı tümevarımsal prosedürler gibi (bkz. 3. kısım sonu ve bu sayfa), kararlardan tatmin olunmazsa.

bu kriter, gelecekte sonuç belirleyici olabilirse de özellikle küme-kuramsal aksiyomlara (örneğin, büyük kardinal sayılara gönderme yapanlara) henüz uygulanamaz. Çünkü diğer alanlardaki sonuçları hakkında çok az şey biliniyor. Burada tartışılan kriterin bir uygulamasının en basit örneği, bazı küme-kuramsal aksiyomların herhangi bir tamsayıya kadar hesaplamayla kanıtlanabilen sayı-kuramsal sonuçları olduğunda ortaya çıkar. Bununla birlikte, bugün bilinenlere dayalı olarak, herhangi bir küme-kuramsal aksiyomun doğruluğunu bu şekilde olası kılmak mümkün değildir.

NOT

Bu makalenin yazımı tamamlandıktan kısa bir süre sonra, Cantor'un süreklilik hipotezinin, (seçme aksiyomunun da dahil olduğu) küme kuramının von Neumann-Bernays aksiyomlarıyla ispatlanabilir olup olmadığı sorunu, Paul J. Cohen tarafından olumsuz olarak tespit edildi. Bu ispatın bir taslağı yakın zamanda *Ulusal Bilimler Akademisi Tutanağı*'nda yayınlanacaktır. $\aleph_0$'in geniş bir aralığı için $2^{\aleph_n} = \aleph_n$ eşitliği tutarlı ve zayıf anlamda bir uzatmadır (yani yeni bir sayı-kuramsal teorem içirmez). "Standart" tanımın uygun bir kavramı için, König teoremi tarafından dışlanmayan (bkz. 2. kısım) tanımlanabilir $\aleph_\omega$'ın olup olmadığı -ki, König teoremi için yokturhâlâ çözümsüz bir sorudur (elbette, sorudaki $\aleph_\omega$'ın varlığının kanıtlanabilir ya da postüle edilebilir olduğu farz edilmelidir).

MATEMATİKSEL HAKİKAT*

Paul Benacerraf
Çev. Muharrem Özlük

Sempozyum adı "Matematiksel Hakikat" olsa da, biraz daha geniş, ancak özünde matematiksel hakikat kavramını barındıran konuları, dahası, matematikte hakikatin bilhakkın nasıl açıklandığına dair konuları da ele alacağım. Bunlardan en önemlisi matematiksel bilgidir. Kanaatimce matematiksel hakikatin yapısını birbirinden oldukça farklı iki anlayış oluşturmuştur:

(1) Matematik önermelerinin semantiği ile dilin geri kalanının[1] semantiğinin paralel olacağı, homojen bir semantik (anlambilim) kuramına sahip olma anlayışı.

(2) Matematiksel hakikat ile makul bir epistemolojiyi iç içe kabul etme anlayışı.

---

* Bu makale Amerikan Felsefi Topluluğu ve Sembolik Mantık Topluluğu'nun 'Matematiksel Hakikat' başlıklı sempozyumunda (27 Aralık 1973) sunulmak üzere hazırlanmıştır. P. Benacerraf, "Mathematical Truth", *The Journal of Philosophy*, Volume LXX no. 19, November 8, 1973.

1 Semantiğin "dilin geri kalanı için de" geçerli olduğu kurgusuna veya daha açık bir ifadeyle, desteklerini bu konudan alan görüş savunucularının genellikle bu tür bir semantiğe, en azından dilin felsefi olarak önemli kısımları için sahip oldukları düşüncesine burada müsamaha gösteriyorum.

Benim genel görüşüm, matematiksel hakikat kavramının neredeyse [mevcut] bütün açıklamalarının, bu iki esastan biriyle *ve dahi öteki pahasına* belirlendiği şeklindedir. Dahası, iki anlayışın da uygun bir temelde birleşmesi gerektiğine inandığımdan, matematiğin içinde ve dışında hakikat ve bilginin temellerini ortaya koyma iddiasında olan karşılaştığım her semantik ve epistemolojik çözümle, kendimi oldukça hayal kırıklığına uğramış bir hâlde buluyorum. Çünkü, az sonra ortaya koyacağım gibi, matematiksel olan ve olmayan konuları benzer olarak ele alan hakikat hakkındaki görüşler, matematiksel bilginin hepsini nasıl elde edebileceğimiz sorununu anlaşılmaz kılmak pahasına ilerlemektedir. Aynı zamanda matematiksel önermeleri, (nasıl elde edilebileceğini kesin olarak bildiğimiz) *doğru olma* koşullarının bir çeşidi olarak görenler bunu, bu koşullarla doğru olma koşullarını gösteren ifadelerin herhangi bir analizi arasında bir ilişki kuramama pahasına yapmaktadırlar. Eğer kendi görüşlerimi kuvvetli delillere dayandırmak istiyorsam, bunun ne anlama geldiğini bazı detaylarla anlaşılır kılmam gerekir; ancak, bunu bu kısıtlı şartlarda yapabileceğimi zannetmiyorum. Fakat bu iddiada dikkate değer bir şey olup olmadığına karar verebilmeniz için yeteri kadar açıklama yapmaya çalışacağım.

Felsefî olarak tatminkâr herhangi bir görüşün hakikat, referans, anlam ve bilgiyi kapsaması ve bu kavramlara uygulanan bütün önermeler için yeterli olması gerektiğinin açık olduğunu düşünüyorum.[2] Orta ölçekli fizikî nesneler hakkındaki belirli ampirik önerme-

2 Haddi zatında, bu yazıda anlama dair söyleyebileceğim hiçbir şey yok. Bu kavramın, itibarını çoktan kaybettiğine inansam da her şeye rağmen bu kavramı bir kenara atmıyorum. Yeni ortaya konan çalışmalar -ki, bunlar içinde en önemlisi Kripke'nin çalışmalarıdır-, Frege'nin kastettiği 'anlamda', anlam kavramının, üzerinden geçen bunca zamanda, hakikat ile Frege veya onun takipçilerinin düşündüğünden daha az ilişkisinin olduğunu ortaya koymuştur. Referans, muhtemelen hakikat ile en irtibatlı olduğu için dikkatimi

ler için üzerinde geçerli gibi *görünen*, ancak daha kuramsal bilgileri açıklamakta yetersiz kalan bir bilgi kuramı, sadece eksik olduğu için değil, nesnelerin tarifinde yeteri kadar kapsamlı olsa bile yanlış olabileceğinden dolayı doyurucu değildir. Aksini düşünmek, her şey bir yana, bilgimizin diğer alanlarla olan bağını göz ardı etmektir. Hakikat ve referans hakkındaki görüşler için durum aynıdır. Konuştuğumuz, tartıştığımız, kuram oluşturduğumuz, matematik yaptığımız, vb. bir dildeki hakikat kuramı benzer ifadeler için benzer hakikat koşullarını aynı şekilde sağlamalıdır. Nicelik belirleyicileri içeren iki cümleyle anlatılan hakikat koşulları, nicelik belirleyicilerinin katkısını kısmen benzer olarak yansıtmalıdırlar. Böyle homojen bir kuramdan herhangi bir sapmanın dikkate alınabilmesi için çok kuvvetli sebepler olmalıdır. Böyle bir sapma, örneğin, matematiksel muhakemedeki nicelik belirleyicilerinin katkısını; kalemler, filler ve başkan yardımcıları hakkındaki normal günlük muhakemelerimizden farklı bir şekilde açıklayan bir kuramda kendini belli edebilmelidir. David Hilbert bu katkıyı açıklayan görüşünü "Sonsuz Üzerine"[3] adlı çalışmasında ortaya koymuş, bu da aşağıda kısaca özetlenmiştir. İleride, dilimiz için tatmin edici, genel bir hakikat kuramından taşımasını beklediğim koşullar hakkında olduğu kadar, bunun bilgi hakkında makul addettiğim görüş ile nasıl iç içe geçtiği hakkında daha fazla söz söylemeye çalışacağım.

Burada şu kadarını söylemek yeter ki, benim yorumlarımı matematiksel hakikat kuramlarıyla ortaya koymam çoğu zaman daha

---

referans ile sınırlandıracağım. Referanstaki bir değişikliğin, anlamda bunu müteakip bir değişiklik olmaksızın meydana geldiği ve hakikatin bir sorunu olduğu kabul edilirse, anlam hakkında konuşmak, bu yazıda bizi ilgilendiren problem yumağının oldukça ötesinde kalır. Bu yorumlar tartışma amaçlı değil, sadece açıklama amaçlıdır.

3 Paul Benacerraf ve Hilary Putnam'ın derlediği *Philosophy of Mathematics* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964) kitabında tercüme edilmiş ve yayınlanmıştır.

uygun olsa da, esas konumuzun, bütün bir felsefî bakış açısı olduğunu her zaman hatırımızda bulundurmamız gerekir. Bunu bütün bir bakış açısı olarak ele almamın sebebi, matematiksel hakikat veya matematiksel bilgi açısından yeterli gibi görünen bir görüşün olmamasından dolayı değil, bu ikisini bir araya getirebilen tatminkâr bir görüşün eksikliğinden dolayıdır. Böyle bir görüş ortaya koymanın mümkün olduğunu düşünüyor ve bu yazının kişiye, önünde duran bazı engeller hakkında daha keskin bir anlayış kazandıracağını umuyorum.

I. İKİ GÖRÜŞ

Aşağıdaki iki ifadeyi ele alalım.

(1) New York'tan daha eski en az üç büyük şehir vardır.

(2) 17'den daha büyük en az üç mükemmel sayı vardır.

Bunlar dilbilgisi açısından aynı mantıksal kurguya sahip midirler? Daha açık bir ifadeyle, bunların ikisi de aşağıdaki ifadeyle aynı biçimde midirler?

(3) a'ya R [özelliğini] taşıyan en az üç FG vardır.

Burada 'en az üç ...vardır' sayısal bir nicelik belirleyici olup; varoluşsal nicelik belirleyicileri, değişkenler ve özdeşlikler hatırına bunu bir kenara bırakabiliriz; 'F' ve 'G' bir adet yüklemin, 'R' iki adet yüklemin ve 'a' nicelik belirleyicilerinin hepsini içeren sınıfın bir elemanının yerini tutmaktadır. [Yüklem: önermedeki özne hakkında kabul veya reddedilmiş kısım. *Ç.N.*] (1) ve (2)'nin hakikat koşulları nelerdir? Bunlar birbiriyle paralel midir? Müsaadenizle, 'büyük' ve 'daha eski' kelimelerindeki belirsizliği ve büyük bir şehri, büyük bir şey ve bir şehir yapmaktan ziyade (tam olmasa da) bir şehre göre büyük bir şey gibi yapan İngilizce'deki nitelik sıfatlarının dizimindeki hususiyetleri bir kenara bırakalım. Bu karışıklığı bir kenara bırakınca (3)'ün, (1)'in biçimini kusursuz olarak yansıttığı daha

net olarak görülüyor. Dolayısıyla (1), sadece ve sadece, 'a'nın yerini alacak ifadenin adıyla anılan şey ('New York') 'R'nin yerini alacak ifadenin kurduğu bağıntıya ('①, ②'den daha eskidir.'), 'F' ve 'G'nin yerini alacak yüklemleri (sırasıyla, 'büyük' ve 'şehir') sağlayan (nicelik belirleyicilerinin hepsinin bulunduğu tanım kümesinden) en az üç elemana kadar uyarsa doğru olacaktır. Toparlarsak, uygun bir hakikat tanımının bize söyleyeceği budur ve bence bu doğrudur. Dolayısıyla, eğer (1) doğruysa, bunun sebebi, belli şehirlerin birbiriyle belli bir ilişki içerisinde olmasıdır, vesaire.

Peki, (2) için durum nedir? Bunun doğruluk koşullarını açıklayabilmek için (3)'ü yine aynı şekilde ana kaynak olarak kullanabilir miyiz? Cevabı bariz bir şekilde "elbette" olan aptalca bir soru gibi görünüyor. Ancak bu konunun (matematik felsefesinin) mazisi birçok başka cevapla karşılaşmıştır. Benim 'standart' olarak adlandırdığım bu tipte bir semantik görüşü, sayıların mahiyetine dair Platoncu bir görüşle birleştirmenin getireceği sonuçlarla yüzleşmek istemeyen bazıları (buna, benim geçmişteki ve şimdiki hâllerim de dahil[4]), rakamların isimler olduğunu kabul etmekten ve dolayısıyla (2)'nin, (3)'ün biçiminde olduğu sonucundan çekinmişlerdir. David Hilbert (*a.g.e.*), matematikte sonsuzluk kavramının kullanımına dair tatmin edici bir görüşe ulaşmak için çabalarken, değişik, fakat aynı derecede ıraksayan bir yaklaşım benimsemiştir. Hilbert'in bir dil bilgisi analizinde geçerli olduğunun daha fazla gerekçelendirilmesine gerek duyulmayan birtakım ifade ve metotları, 'sezgici' matematikte olanları, ayırdığı görülebilir. Müsaadenizle, bunların hepsinin "sonlu adımla doğruluğunun kanıtlanabilir" olduğunu, bir anlamda tam olarak belli olmadıklarını kabul edelim. "Gerçek" veya "sonlu adımda doğruluğu kanıtlanabilir" ifadelerden "gerçek" ifadelere ge-

4 Bakınız benim "What Numbers Could Not Be," *Philosophical Review* LXXIV, 1 (January 1965): 47-73.

çişte; bu özelliği taşımayan aritmetik ifadeleri –umumiyetle, nicelik belirleyicilerini içeren belirli ifadeleri- Hilbert, bir araçsalcının doğa bilimlerinde kuramı, gözlem ifadelerinden gözlem ifadelerine geçişi olarak gördüğü kadar etkili bir araç olarak görür. Matematiksel olarak "kuramsal" olan bu ifadelere Hilbert, "ideal varlıklar" adını vererek bunların ortaya konuluşunu, projektif geometride "sonsuzdaki" noktaların ortaya konuluşuna benzetmiştir. İfadeler gerçekten önem verdiğiniz şeylerin kuramını daha basit ve daha zarif kılmak için bir kolaylık olarak ortaya konulmuştur. Eğer bunların ortaya konuluşu çelişkiye sebebiyet vermiyorsa ve bu gibi başka faydaları da varsa birinci-derece aritmetiğin tamamı için bir tutarlılık ispatı arayışının haklılığı böylece ortaya çıkar.

Kaba taslak olsa da bu, eğer Hilbert'in görüşünün makul bir yanı ise, onun bütün miktar belirleyici içeren ifadeleri semantik açıdan aynı kıymette görmediğinin göstergesidir. Onun da dediği gibi, aritmetik için bir semantiğin oluşturulması oldukça zordur. Ancak zor olsun veya olmasın bu semantik (2)'deki nicelik belirleyiciye, (1)'deki belirleyiciden farklı şekilde davranır. Ana hatları aktarılan Hilbert'in görüşü, (3) modeline göre (2)'nin yapıldığı görüşüne açıkça bir ret sunar.

Diğer görüşlerde aritmetik ifadelerinin doğruluk koşulları, belirli bir aksiyom kümesinden biçimsel olarak çıkarılabilmek olarak öne sürülmüştür. Aritmetik içinde kapalı olan her ifadeye bir doğruluk değeri biçme arzusuyla birleştiğinde bu görüşler, eksiklik teoremiyle baltalanmıştır. Bu görüşler, çıkarılabilirlik olarak addedilen şeye serbesti tanıyarak (örneğin, mümkün olan çıkarımlarda $_{w}$-kuralının uygulanması eklenilerek) veya tamamlanabilirlik arzusundan vazgeçerek, en azından içsel bir tutarlılığa çekilebilir. Daha iyi bir terimin olmaması ve bunların hemen hemen bütün ifadelerin sözdizimsel (kombinatoryal) özelliklerinde anahtar olması sebebiyle bu gibi görüşlere, matematiksel doğruluğun muayyenleri hakkındaki

"kombinatoryal" görüşler diyeceğim. Kombinatoryal görüşlerin ana düşüncesi, aritmetiğin ifadelerine sahip oldukları belli (genelde, ispat-kuramsal) sözdizimsel özellikler temelinde doğruluk değerleri atfetmektir. Doğruluk, genellikle, belli aksiyomlardan (biçimsel) çıkarılabilme olarak tanımlanır. (Çoğu zaman S'nin konudaki özel bir sistem olduğu, S'deki doğrulukla ilgili daha yumuşak bir iddia olarak ortaya konur.) Olay ne olursa olsun bu gibi durumlarda hakikat çok net bir şekilde referansa, sözlük anlamına veya kanaate göre açıklanmaz. "Hakikat" yüklemi sözdizimine göre tanımlanır.

Aynı şekilde sayılar kavramında "analitik" olduğu iddia edilen Peano aksiyomlarında aritmetiğin hakikati üzerine bazı görüşleri ben "kombinatoryal" olarak değerlendiriyorum. Tabiî ki, uzlaşımcı görüşler de buna dahildir. Çünkü bu görüşleri uzlaşımcı yapan şey (3)'ü kullanıp (2)'yi, (1)'e uyarlayarak analiz eden "realist" görüşle aralarındaki ayrılıktır.

Son olarak, bir ayrım daha yaparsak, herhangi bir görüş, matematiksel önermeleri kendinden-referanslı ya da başka türlü kombinatoryal mevzular olarak ele alıyorsa, otomatik olarak "kombinatoryal" olmaz. Çünkü bu tür bir görüş matematiksel önermeleri, içerdikleri isimler ve nicelik belirleyicileriyle; bir de alanlarındaki nesnelere affettikleri özelliklerle "standart" bir şekilde, yani *hakikat* kavramının temelinde özellikle Tarski'nin görüşünün olduğunu kabul ederek analiz etmelidir. Aradaki fark ise bunun savunucularının, matematiksel dilin analizinde realist olsalar da, tamamen matematiksel olarak sıra dışı nesnelerin matematiksel evreni oluşturduğunu düşünerek Platoncular ile yollarının ayrılmasıdır: Onlara göre, matematik meta-matematikle ve sözdizimiyle sınırlıdır.

(2)'deki gibi ifadelerin doğruluğuna dair çeşitli yaklaşımların ilgili esasları hakkındaki değerlendirmelerimi sonraki bölümlere bırakıyorum. Bu noktada sadece, bir tarafta matematiksel ifadelere belli sözdizimi (ve belli semantiği) yerleştiren görüşlerle, diğer tarafta çok

net bir şekilde sözdizimi ve semantiği göz ardı ederek, semantik olmayan sözdizimsel yaklaşımlar temelinde hakikat koşullarını saptamaya (veya var olan hakikat değerlerinin dağılımını belirlemeye ve sebebini izah etmeye) çalışan görüşler arasındaki farklılıkları ortaya koymak istiyorum. Nihayetinde, kendisini hakikat ve bilgi hakkında uygun ve bütün bir felsefî anlayışın önemli bir parçası olarak gören her tür görüşün fayda ve kusurlarını ele alacağım.

Peki bu parçalar nelerdir ve bunlar birbiriyle nasıl ilişkilidir?

II. İKİ KOŞUL

A. Bu tür bir bütün görüşün ilk şartı, daha çok, hakikat kavramıyla ilgilidir. Şu an için matematiksel doğruluğun yine matematiksel *hakikat* olarak görüldüğü bir hakikat kuramının olması gerektiğini belirtebiliriz. Bu görüş hiç şüphesiz (sadece herhangi bir biçimsel sistemde teorem olma durumlarında değil) kendi hakikatlerinin koşulu olan matematiksel önermelerin hakikat koşullarını sağlamalıdır. Bu demek *değildir* ki, herhangi bir sistemde teorem olmak, verilen bir önerme veya önermeler sınıfının hakikat koşulu olamaz. Bu, daha çok hakikat koşulu olarak teorem olmayı öneren herhangi bir kuramın *hakikat ile teorem olması arasındaki bağlantıyı da açıklamasını* gerektirir.

Bu ilk şartı başka bir şekilde şöyle ortaya koyabiliriz: Matematiksel hakikatin herhangi bir kuramı ile ifadelerin "hakikat" denilen özelliklerinin gerçekten doğru olduğunu onaylayan genel bir hakikat kuramıyla -isterseniz, hakikat kuramlarının kuramıyla- uyumlu olmasını istemektir. Bana öyle görünüyor ki, bu sadece dilin tamamını kapsayan genel bir kuram temelinde (paradoksları uygun bir şekilde kenarda bırakabileceğimizi farz ederek) olabilir. Galiba bu şartın şimdiki durumumuza uygulanabilirliği basit bir isteğe bağlıdır. Buna göre, matematiğin semantik araçları, yapıldığı doğal dilin esas kısmı olarak görülecek ve böylece ana dildeki isimler veya,

daha genel olarak, tekil terimler, yüklemler ve nicelik belirleyicileri hakkında ortaya koyduğumuz *semantik* görüş her ne olursa olsun bizim matematiğin dili olarak sınıflandırdığımız ana dilin bu kısımlarını içerecektir.

Benim düşünceme göre bu şartın sağlanabilmesi için (3) model alınarak (1) ve (2)'yi benzer şekilde ele almakta yetersiz kalan bir görüşle yetinilmemelidir. Elbette, *farklılıklar* olabilir; ancak ben bunların, tekil terimler ve yüklemlerin referans analizi aşamasında ortaya çıkmasını beklerim. Bana göre böyle bir tek görüş vardır -ki o da Tarski'ye aittir. Bunun da ana özelliği dilin sözdizimi–semantik analizinin belli bir çeşidi temelinde doğruluğu referans (veya kanaat) terimleriyle tanımlamak ve böylece kabul edilmiş herhangi bir matematiksel hakikat kuramı, bir kavram analizi olacak ve bu da en azından Tarski'ye göre bir hakikat kavramı olacaktır. Uygun şekilde ele alınırsa, "kombinatoryal" dediğim bütün görüşlerin, bu şartı sağlayamayacağını düşünüyorum. Diğer taraftan (2)'yi, (1) ve (3)'e eşdeğer olacak şekilde benzeten görüş, diğer birçok varyantında olduğu gibi, bu şartı çok açık olarak sağlayacaktır.

B. Genel bir görüş üzerindeki ikinci şartım matematiksel bilgiye sahip olduğumuzu farz eder. Dahası, bu tür bir bilgi de matematiksel olduğu için daha az bir bilgi değildir. Bizim bilgimiz doğrular hakkında olduğundan, veya bu şekilde yorumlanabileceğinden, matematiksel hakikat hakkındaki bir görüşün kabul edilebilir olması için, matematiksel bilgiye ulaşabilme olasılığıyla tutarlı olmak zorundadır: Matematiksel önermelerin hakikat koşulları, bunların sağlanıp sağlanmadığını bilmemizi imkânsız kılamaz. Bu, anlaşılması imkânsız doğruların olamayacağını söylemek değildir –bu, sadece, bütün doğrular anlaşılmaz değildir, çünkü bazılarını bilmekteyiz demektir. O zaman, hakikat hakkındaki yeterli bir görüş için asgarî şart, matematiksel doğrunun doyurucu bir açıklamasının, bu gibi bazı doğruların bilinebilir olma ihtimaliyle tutarlılık göstermesi olacaktır. Daha net bir şekilde ifade edersek, izah edildiği gibi,

matematiksel hakikat kavramı elimizdeki matematiksel bilgiyi nasıl elde ettiğimizi anlaşılır kılacak şekilde genel bir bilgi kuramıyla uyumlu olmalıdır. Matematiğin kabul edilebilir bir semantiği kabul edilebilir bir epistemoloji ile uyumlu olmalıdır. Meselâ, Cleveland'in New York ile Chicago arasında olduğunu biliyorsam, bunun sebebi benim hâlihazırdaki "öznel" kanaatlerimle bu ifadenin hakikat koşulları arasında belli bir bağıntının olmasıdır (hakikat ve bilgi hakkındaki görüşlerimiz her ne olursa olsun bunlar birbiriyle bu şekilde bağlantılı olmalıdır.) Aynı şekilde, matematikte de benim p hakkındaki kanaatlerimle p'nin gerçek olması için gerekenler arasında bir bağlantı kurmak mümkün olmalıdır. Tamamen gereksiz olsa da, ikinci koşulun, birinciyi sağlayan görüşleri hariçte bırakmaya ve sağlamayan diğer birçok görüşü de kabul etmeye nasıl meyilli olduğunun görülebileceğini düşünüyorum. Çünkü tipik "standart" bir görüş, hakikat koşullarını, (en azından sayı kuramı veya küme kuramında) algıladığımız yapısı sebebiyle insan idrakinin (mesela, duyumlarımızın ve benzerlerinin) daha iyi bilinen araçlarının etki alanının ötesine yerleşen nesnelerin durumlarıyla tasvir edecektir. Diğer yandan, "kombinatoryal" görüşler genellikle, tam olarak bu olguya olan hassasiyetlerinden doğmaktadır ve bu nedenle de hemen hemen her zaman epistemolojinin konularından güç almıştır. Bunların temel özelliği, matematikte hakikat iddialarını muhakeme ederken izlediğimiz adımlar, yani ispat, temel alınarak matematiksel önermeler hakkında bir görüş üretmelerinde yatmaktadır. Matematiksel hakikat hakkındaki bu tür görüşleri bir yana bırakırsak, matematiksel bilgiyi nasıl elde ettiğimize dair çok az bilinmeyenin olması şaşırtıcı değildir. Bizim sadece biçimsel ispatı üretme ve mütalaa etme kabiliyetlerimize dair bir görüşe ihtiyacımız vardır.[5]

5 Hakkıyla yapılırsa, tabiî ki, bu çok büyük bir iştir. Bununla beraber bizim belirli biçimsel nesnelerin sözdizimine göre tanımlanmış belirli özelliklerinin olduğunu belirleyebilme kabiliyetimiz üzerinde dikkatini toplamak yerine, sistemin semantiğinden kaynaklanan yığının hesabını bir tarafta yapmaktadır.

Ancak, balonu bu noktada sıkıştırırsak, açıkça, hakikat tarafı şişecektir; ispat kavramını ne kadar iyi sonuçlandırırsak, ispatın tanımını (semantik değil de) kombinatoryal özelliklerle ne kadar yakından ilişkilendirirsek, bunu, bu suretle ispatlanan –veya öyle görünen şeyin- hakikatiyle ilişkilendirmek o kadar zor olacaktır. Şu hâlde bunlar iki koşulumuz olmaktadır. Bunlar ayrı ayrı yeterince zararsız görünmektedirler. Makalenin geri kalanında hem bunları savunmayı sürdüreceğim hem de birlikte öne sürülmüş hemen hemen her matematiksel hakikat görüşünü dışarıda bırakır gibi görünen meseleleri ayrıntılarıyla açıklayacağım. Benim geliştirmeye çalıştığım iki temel ilke ışığında bunların görece üstünlüklerini irdeleyerek yukarıda bahsini ettiğim matematiksel hakikat hakkındaki iki ana yaklaşımı sırasıyla ele alacağım. Umarım bu ilkeler benim yaptığım gibi geliştirilir ve destek görür.

III. STANDART GÖRÜŞ

(2)'yi (3) biçiminde algılayıp öyle inceleyen "Platoncu" anlayışa "standart görüş" diyeceğim. Bunun haklı olduğu yerler çoktur ve kusurlarına geçmeden önce bunları biraz ayrıntısıyla sıralamaya değer.

Az önce de işaret ettiğim gibi, bu anlayış, matematiksel önermelerin mantıksal biçimini, çok net bir şekilde tecrübî olanlara benzetmektedir: Tecrübî ve matematiksel önermeler aynı şekilde yüklemler, tekil terimler, nicelik belirleyicileri vs. içerirler.

Fakat isimler, yüklemler ve nicelik belirleyicilerinden oluşmayan (veya bunlardan ibaretmiş gibi tam olarak incelenemeyen) ifadelere ne demeli? Konuya doğrudan girersek, Tarski'nin hakikati nasıl tanımlayabileceğimizi gösterdiği dile ait olmayan ifadeler hakkında ne diyeceğiz? Şunu söylemeliyim ki, (eğer varsa) bu tür diller hakkında, Tarski'nin "referans" dilleri için sağladığı türde bir hakikat

anlayışına ihtiyacımız var. Matematik dilinin ait olduğu düşünülen dilin (meselâ, İngilizce'nin) hakikat koşullarının Tarski'nin çalıştığı çizgide daha ayrıntılı bir şekilde inceleneceğini farz ediyorum. Bu nedenle, önceki bölümlerde ortaya atılan –(2)'nin hakikat koşulları nasıl belirlenecek?- sorusu, bir dereceye kadar, benim İngilizce'nin geri kalan büyük bir kısmı için uygun olduğunu düşündüğüm analizin aynısı, İngilizce'nin, matematiğin yapıldığı alt dili için de uygulanabilir mi sorusuyla aynı şekilde yorumlanabilir. Eğer böyleyse, gelecek bölümde ele alacağım matematiksel bilgiyi genel bir epistemolojiyle uyumlu hâle getirmeyle ilgili şüpheler, kuramda yapılacak uygun bir değişiklikle ört bas edilebilme ihtimali olsa da açıkça işlerliğini korumaktadır. Diğer taraftan, eğer matematik dili referans çizgilerinde analiz edilemeyecekse, bu yeni dil için sadece hakikat anlayışına (veya semantiğine) değil, referans (nicelik belirleyici) dilleri için doğruluğu (henüz analiz edilen) bu yeni dilin hakikatiyle ilişkilendiren yeni *bir hakikat kuramlarının kuramına da* ihtiyacımız olacaktır. Elimizde bu tür bir görüş olsa da matematiksel bilgiyi izah etme işi hâlâ yapılmayı beklemektedir. Fakat matematik dilinin yeni semantik resmi çoğu durumda epistemoloji konularından yardım aldığından bu iş tahminen daha kolay olacaktır. Bununla beraber, bu aklı başında alternatif görüşe bu makalede yer vermeyeceğim çünkü; gerçekte bunu benimseyen birinin olduğunu düşünmüyorum. Dahası, bunu seçmek, başlangıçtaki yüzeysel makuliyetine rağmen matematiksel dilin "standart" yorumunu göz önünü almak ve *reddetmek* olup, sonrasında bunun yerine alternatif bir semantiği sağlamaktır.[6] Burada ele aldığım ve atıfta bulunduğum "kombinatoryal" kuramcılar genellikle keklerinin olmasını ve bunu da yemeyi

6 Bazen bunun, Hilary Putnam'ın *"Mathematics without Foundations"* [Temelsiz Matematik] adlı teşvik edici makalesinde yapmak istediği şeylerden biri olduğunu düşünüyorum. *Journal of Philospohy*, LXIV, 1 (Jan. 19, 1967): 5-22.

istemişlerdir: Onlar, matematiksel dili destekleyen görüşteki hakikat koşullarının, bu dil için uygun olduğunu *da* kabul ettikleri referans semantiğiyle bir bağı olmadığının farkında değillerdir. Bu makalenin açılış paragraflarında kısaca özetlediğim görüş itibariyle Hilbert, bunun için bir istisna olabilecek en yakın aday konumundadır. Fakat bunu ilerletmek, bizi konumuzdan oldukça uzaklaştıracaktır. Öyleyse "standart görüşün" methine geri dönelim.

Bunun başlıca avantajlarından biri, yalın matematiksel kuramlarındaki hakikat tanımlarının, daha aşağı derecedeki tecrübî kuzenlerinde uygulananlarla aynı temel cümleciğe sahip olmalarıdır. Başka türlü ortaya koyarsak, bunların hepsi, gözden geçirilmekte olan alt bilim dalını önemsemeksizin nicelik belirleyicileri hakkında tek bir görüş oluşturduğumuz dilin bir parçası olarak alınabilir. Matematiksel ve tecrübî bilim dalları mantıksal dilbilgisi noktasından ayrışamazlar. Bu avantajın önemine az önce değindim: Bunun anlamı daha az muğlak ve daha çok iz sürülebilir bir alanda uygulayacağımız bir mantıksal–dilbilgisel kuram bizim işimizi burada daha iyi görür. Bize tek bir, muntazam görüş yeter; matematik için bir yenisini bulmaya gerek yoktur. Bu, herhangi bir dilbilgisi kuramı ile hakikat hakkındaki bir görüş için yeterli bir semantik birleştirildiğinde de doğru kalmalıdır. Tarski kuramı olarak adlandırdığım kurama olan eğilimim, onun hakikat hakkında sahip olduğumuz geçerli, sistematik ve genel olan yegâne görüşü ortaya koymasından kaynaklanmaktadır. Standart görüşte bulunan ekonomik bir sonuç da mantıksal ilişkilerin aynı işleme tabi tutulmasıdır: konuya göre değişmezler. Doğrusu "konuyu" tanımlamakta yardımcı olarak kullanılırlar. Aynı çıkarım kuralları uygulanabilir; böylece bu kullanımlar, bize sıradan çıkarımlar hakkında bir görüş sağlayan aynı kuramın hesabına yazılacağından, bir çifte standart da önlenmiş olur. Standart görüşü reddedersek yeni ve özel bir görüşe ihtiyacımız olacaktır. Hâlbuki, nicelik belirleyicili çıkarımların standart kullanım-

ları, sağlam ispatlarla doğrulanmıştır. Birinci dereceden mantıktaki kuramların biçimsel hâlinin doğrulanabilmesi, (Tamamlanabilirlik teoremiyle beraber) önermelerin bütün mantıksal sonuçlarının teorem olarak kabul edilmesinin garanti altına alınmasını gerektirmektedir. Standart anlayış bu garantiyi vermektedir. İlk sonuçların iyi netice verdiği görülüyor. Standart görüşü reddetmek bu sonuçları bir kenara atmaktır. Yenilerinin bulunması gerekir.

Bu görüşün üstünlüklerinden bu kadar bahsettiğimiz yeter. Bunun yanlışları nelerdir?

Yukarıda da belirttiğim gibi, standart anlayışın en önemli eksiği, matematiksel hakikat görüşümüzün, bütün bir bilgi anlayışıyla uyumunda gerekli hassasiyeti gösterememesidir. Gayet açıktır ki, bu hususu ikna edici kılmak için, en azından kaba taslak doğru kabul ettiğim ve standart olarak yorumlandığında matematiksel hakikatlerin bilgiyi oluşturmadığı esasına dayanarak, epistemolojiyi kısaca açıklamam gerekir. Bunun için epistemolojinin genel problemleri arasında uzun ve dolambaçlı bir yoldan geçmek gerekir. Bunu başka bir sefere bırakıyor ve kendimi bu görüşün problemimize en uygun ve en çok dikkat çeken özelliklerinin kısa bir özetini sunmakla sınırlandırıyorum.

IV. BİLGİ

X'in, *S*'nin doğru olduğunu bilmesi için, *X* ile *S*'nin isim, yüklem ve nicelik belirleyicilerinin referansları arasında nedensel bazı bağıntıların bulunduğu nedensel bir bilgi anlayışını destekliyorum. Bunun yanında, *S*'nin *iki misli* nedensel olduğunu bilerek benim söylediklerimle bir bağ kuran, nedensel bir *referans* kuramına da inanıyorum. Umarım ardı sıra yazacaklarım, bu düzenlemeyi saran sisi birazcık dahi olsa dağıtacaktır.

Hermione'un, tuttuğu siyah nesnenin bir yer mantarı olduğunu bilmesi, belirli bir (belki de psikolojik) durumda olması (en azından gerektirmesi) demektir.[7] Bu, en azından tuttuğu nesnenin bir yer mantarı olmasına müsaade edecek kadar, dünyanın geri kalanıyla işbirliği içerisinde olmasını da gerektirir. Dahası, benim de vurgulamak istediğim kısım budur; normal olarak tuttuğu siyah nesnenin bir yer mantarı olması, tuttuğu siyah nesnenin bir yer mantarı olduğunu uygun bir yolla onun kanaatlerinin nedensel bir açıklamasıyla ortaya koymalıdır. Fakat "uygun bir yol" nedir? Cevap vermek için çabalamayacağım. Ancak, birkaç yazar bu istikameti işaret eden görüşlerini yayınlamışlardır[8] ve aralarındaki farklılıklara rağmen tam olarak açıklayabilmek çok zor olsa da doğru olduğunu düşündüğüm ortak bir ana fikirleri var gibi görünmektedir. Böyle bir görüşün doğru olmak zorunda olup olmadığını ve bizim bilgi kavramımızın temelinde bulunup bulunmadığını aşağıdaki şartlar altında söyleyeceklerimiz belirleyecektir. *x*'in *p*'yi bildiği iddia ediliyor. *x*'in *p*'yi bilemeyeceğini düşünelim. Bu düşüncemizi destekleyebilecek hangi sebepleri ortaya atabiliriz? *x*'in normal çıkarımsal güçlere sahip olduğuna, *p*'nin gerçekten de doğru olduğuna vesaireye ikna olduysak, *x*'in ilgili kanıtlara veya sebeplere sahip olacak duruma

7 Mümkünse, psikolojik durumların doğasıyla ilgili zihin veya psikoloji felsefesi konuları civarında bir yerde durmaktan sakınmak istiyorum. Hermione'un, paspasın üzerinde bir kedi olduğunu, gerçek bir paspasın üzerindeki gerçek bir kediye bakarak öğrenebileceğini söyleyen herhangi bir görüş benim işimi görür. Paspasın üzerindeki kediye bakmak Hermione'u bir durumun içine sokuyorsa ve siz bu duruma ister fiziksel, ister psikolojik isterseniz de fizyolojik durum deyin, o baktığında, kedinin paspasın üzerinde olmasıyla -bu eğer onun bilgi durumuysa- böyle bir durumun nedensel olarak uygun bir şekilde ilişkili olduğu anlaşılıyorsa, benim buna bir itirazım yoktur. Böyle bir durum yoksa eğer bu benim açımdan çok kötü olacak.

8 Birkaçını zikredersek: Gilbert H. Harman, *Thought* (Princeton, N.J. University Press, 1973); Alvin I. Goldman, "A Causal Theory of Knowing" *Journal of Philosophy*, LXIV, 12 (June 22, 1967): 357-372; Brian Skyrms, "The Explication of 'X knows that p'," *a.g.e.*, 373-389.

gelemeyeceği iddiasında çoğu zaman ilerleme kaydedemeyiz: Yani, *x*'in dört–boyutlu uzay–zaman kurtçuğu, *x*'in (ilgili bir çıkarım varsa) bu çıkarımı desteklemeye yetecek kadar kanıta sahip olduğunu iddia eden hakikat önermesinin zeminiyle gerekli (nedensel) teması gerçekleştiremez. *p* önermesi dünyanın nasıl olabileceğine dair kısıtlamalar getirmektedir. Dünya hakkındaki bilgimiz ve *p*'nin getirdiği kısıtlamalar üzerindeki anlayışımız, *p*'nin hakikat koşulları tarafından belirlendiğinden, bize çoğu zaman belirli bir kişinin *p*'yi bilecek kadar delile sahip olamayacağını söyleyecektir ve dolayısıyla biz de o kişinin bilgi hakkındaki iddiasını kabul etmeyeceğiz.

Orta ölçekli nesneler hakkındaki bilgimize dair bir görüş olarak bu iddia şu anda doğru iz üzerindedir. Bu görüş nedensel olarak bilinen olgulara dair referanslar içerecektir. Dahası, (evler, ağaçlar, yer mantarı, köpekler ve ekmek sepetleri hakkındaki) bu tür bir bilgi en açık ve uğraşılması en kolay meseledir.

Karşılıklı ilişkilerin bulunması kaydıyla bilgi hakkındaki diğer meseleler de bu tür meseleler hakkındaki çıkarımlar temel alınarak açıklanabilir. Bu demek oluyor ki, bizim genel yasalar ve kuramlar hakkındaki bilgimizi ve buradan da gelecek ile geçmişin çoğu hakkındaki bilgimizi içermektedir. Bu görüş ampristlerin önerdikleri yolu, büyük ölçüde "keşif" ve "doğrulama" arasına dikkatli bir ayrım getiren çabalar yüzünden modern görüşlere dahil edilmeyen yukarıda belirtilen çok açık nedensel şartların oluşturduğu önemli değişikliklerle beraber yakından takip etmektedir.

Özetle, diğer bilgimizle birlikte *p*'yi muhtemel ilişkili kanıtların etki alanını belirlemekte kullanırız. *x* (bilmesi varsayılan kişi) hakkında bildiklerimizi, uygun bir ilişkinin olup olmadığını, yani *x*'in *p* hakkındaki mevcut kanaatinin olayla nedensel olarak uygun bir şekilde bağlı olup olmadığını belirlemekte kullanırız; çünkü –onun delilleri, *p*'nin belirlediği etki alanından elde edilse de edilmese de– *p* doğrudur. Eğer değilse, *x*, *p*'yi bilemez. *x*'in kanaatinin nedenleri

ile *p*'nin doğru olduğu durumda ne yapılması gerektiği arasındaki ilişki çok geniş bir çeşitlilik gösterebilir. Fakat her zaman için *bazı* bağlantılar vardır ve bu bağlantı *x*'in kanaatinin temellerini *p* mevzusuyla ilişkilendirir.

(p'nin açıklandığı dil için yeterli bir hakikat tanımında verildiği gibi) *p*'nin hakikat koşullarıyla *p*'nin bilindiği temeller arasında, en azından kişiyi önermelerin kendiliğinden olmadığına inandırabilecek uygun bir çeşit bağlantı kurmak mümkün olmalıdır. Bunun yokluğunda, *bu temellere sahip olmak* ile *doğru olan bir önermeye inanmak* arasında bir bağlantı kurulamamıştır. Bu temellere sahip olmak *p*'yi *bilmenin* açıklamasıyla uyuşamaz. *Bu temeller üzerinde p* ile *p* hakkında bir kanaati gerekçelendirme arasında bir bağlantı kurulamaz. Fakat düzgün bir şekilde kabul görmüş doğru kanaat biçimlerinin bir çeşidi olan bilgi için bu bağlantı kurulmalıdır. (Tâbii ki, bütün bilgiler sağlam olmaları bakımından kabul görmüş doğru kanaatler olmak zorunda değildir.)

Bunun, bilgi hakkındaki bu görüş ile matematiksel hakikat hakkındaki "standart" görüşü birleştirmenin, matematiksel bilginin nasıl mümkün olduğunu göstermeyi zorlaştırdığına işaret etmenin başlangıcını oluşturması şaşırtıcı gelmeyecektir. Örneğin, sayılar normal addedilmesi gereken bir çeşit varlık ise, sayı kuramının önermelerinin hakikat koşulları ile matematiksel bilgiye sahip olduğu düşünülen kişilerle ilişkili herhangi bir olay arasında bir bağlantı kurulamaz.[9] Kişinin herhangi bir sayı–kuramsal önermeyi düzgün bir şekilde nasıl bilebileceğine dair bir çalışma imkânsız olacaktır. Matematiksel önermelerin içerdiği hakikat koşullarını nasıl bilebileceğimize dair bir anlayışımız olmadığı için de matematiksel hakikat hakkındaki bir görüş üzerindeki ikinci şartımız sağlanmayacaktır.

9 Buna ve bununla ilgili noktalara dair sağlıklı bir kuşkucu yaklaşım için bkz. Mark Steiner, "Platonism and the Causal Theory of Knowledge," *Journal of Philosophy*, LXX, 3 (Feb. 8, 1973): 57-66.

Buna verilebilecek ilk karşılıklardan biri –bu önermelerde bazıları ancak ve ancak belli kurallarla belli aksiyomlardan çıkarılabiliyorsa doğrudur– burada işe yaramayacaktır. Çünkü, emin olmak için, bu koşulları içerip içermediğini sorgulayabiliriz. Aslında böyle durumda eksik olan şey, hakikat standart bir şekilde doğrudan tanımlandığında, hakikat ile ispat arasındaki bağlantıdır. Kısacası, belli kurallara göre belli aksiyomlardan çıkarılabilmek, belli sayı-kuramcı önermelerin hakikat koşulu olabilirse de bu bir hakikat koşuluysa; mevzu bahis bu koşul, hakikat ve bilgiyi birleştirmede yardımcı olacaksa ve bunların ispatları yardımıyla matematiksel doğrulukları bileceksek; bu *hakikat*, hakkındaki görüşten de elde edilmek zorundadır.

Tâbii ki, aritmetiğin küme–kuramcı bir anlayışında, *aritmetiği* hem sözdizimi hem de semantik açısından ortaya koyduğumuz koşulları yüzeysel olarak karşılayabilecek şekilde düzenleyebiliriz. Ancak bunun davet ettiği gerileme oldukça barizdir. Çünkü küme kuramı hakkında, karşılıklarının arz edildiği biçimde, yine aynı sorular sorulmalıdır.

V. İKİ ÖRNEK

Matematiksel hakikat ve matematiksel bilgi hakkında birçok görüş vardır. Benim müdafaa ettiğim savların bunların hepsine uygulanabilir olmasına çalışılmıştır. Kapsamlı olmaya çalışmak yerine son birkaç sayfayı, biri 'standart' görüş diğeri 'kombinatoryal' görüş olmak üzere, iki temsili duruma ayıracağım. Birincisi en açık ve anlaşılır savunucularından Kurt Gödel tarafından ifade edilen standart görüştür.

Gödel, matematiksel hakikat hakkındaki gerçekçi (yani standart) bir görüşte, temel önermeleri nasıl bildiğimizle kuramın referans araçlarını nasıl yorumladığımız arasında uygun bir şekilde bir iliş-

kinin kurulması gerektiğinin tamamen farkındaydı. Dolayısıyla, süreklilik problemini nasıl çözebileceğimizi tartışırken, bu problemin kabul edilen aksiyomlarla karar verilemez olduğu gösterildiğinde şu resmi çizmektedir.

> ...(T)ransfinit küme kuramının nesneleri ... açıktır ki, fizikî dünyaya ait değillerdir ve hatta bunların fizikî deneyimle olan dolaylı bağlantıları da oldukça gevşektir....
> Yine de duyu tecrübelerimizden uzaklıklarına rağmen aksiyomların kendilerini bize doğru gibi kabul ettirmeleri olgusunda görüldüğü üzere küme kuramının nesnelerinin bir algısına benzeyen bir şeye de sahibiz. Bu tür bir algıya yani matematiksel sezgiye duyu algısından daha az güvenmemiz için bir neden göremiyorum. Fiziksel kuramlar oluşturmamızı sağlayan duyu algıları, gelecekteki duyu algılarının bu kuramlarla uyumlu olmasını beklememize neden olur, dahası şu an için kararsız olan bir sorunun, bir anlamı olduğuna ve gelecekte karar verilebileceğine inanmamızı sağlar.[10]

Çizilen bu resmi hem teşvik edici hem de sorunlu buluyorum. Canımı sıkan şey, aksiyomların *nasıl* "kendilerini bize gerçek oldukları yönünde dayattıklarına" dair bir görüş olmaksızın, duyusal algılama ile bilimler arasındaki mukayesenin fazla hoşnut edici bir tarafı olmamasıdır. Burada *tam anlamıyla* eksik olan şey ikinci, koşulumda yerine getirilmesi istenen, bilişsel melekelerimizle bilinen nesneler arasında bağ kuran bir görüşün ortaya konmamasıdır. Bilimlerde böyle bir görüşün en azından giriş kısmına sahibiz ve bu nedenseldir de. Bilgiyi sadece, bilişsel melekelerimizle uygun bir şekilde ilişkilendirebildiğimiz kanaatler olarak kabul ediyoruz. Gayet münasip bir şekilde bilgi hakkındaki kavrayışımız ile bilen olarak kendimiz hakkındaki kavrayışımız el ele ilerlemektedir. Elbette *yüzeysel* bir benzeşme vardır. Çünkü, Gödel'in işaret ettiği gibi, biz aksiyomları

10 Benacerraf ve Putnam'ın adı geçen eserinin gözden geçirilmiş baskısında "What is Cantor's Continuum Problem?", sayfa 271.

onlardan, daha doğrudan "algıya" (daha açık sezgiye) sahip olabileceğimiz alanlara dair sonuçlar çıkararak "doğrulamaktayız". Fakat bize, bu "daha açık" önermeleri bile nasıl bildiğimiz hiçbir zaman söylenmemiştir. Örneğin, üst dereceli sonsuz aksiyomların "doğrulanabilir" sonuçlarının (diğer türlü hakkında hüküm verilemez), kendileri verilen herhangi bir tam sayıya kadar yapılan hesaplamalarla "doğrulanabilir" olan sayı-kuramsal önermelerdir. *Eğer bunlar, standart görüşün biçtiği anlama geliyorsa,* bir faydasının olabilmesi için bu hikâye bize hesap aritmetiğinin önermelerini nasıl bildiğimizi söylemelidir. Tabiî ki söylenmedi. Dolayısıyla bu mukayese en iyi hâliyle yüzeyseldir.

Bu kadar can sıkıcı vaziyet yeter. Muhtemelen daha önemlisi ve benim teşvik edici bulduğum şey Gödel'i matematik ile ampirik bilimler arasında bir paralellik kurmaya iten temel uzlaşıdır. Gödel bence, matematiksel önermeler hakkındaki gerçekçi ve Platoncu yorumlarının oluşturduğu, matematiğin konusunu oluşturan varlıklar ile bilen insan arasındaki uçurumu aşmak için köprü kurulmasına yönelik bir şeylerin söylenmesi gerektiğini anlamıştı. Matematiksel önermelerin mantıksal biçimiyle veya bilinen nesnelerin yapısıyla boş yere uğraşmak yerine bu nesnelerle "iletişim" kurabileceğimiz özel bir melekenin varlığını öne sürmektedir. Esas problemin analizi üzerinde uzlaşmış gibi görünüyoruz; ancak epistemoloji mevzuunda, yani nesneleri bilecek duruma gelebileceğimiz yollardan hangilerinin bizlere açık olduğu meselesinde açıkça aynı fikirde değiliz.

Tecrübî bilgi hakkındaki görüşümüz kabul edilebilir ise bunun sebebi kısmen, kuramsal bilgimizdeki nedensel görüşü *prima facie* nasıl dolduracağımızın açık olmadığı meselede, bağlantıyı daha açık hâle getirmeye çalışmamız olmalıdır. Dolayısıyla, matematiğe geldiğimizde, matematiksel sezgimizin matematiksel önermelerin hakikatiyle nasıl ilişkili olduğuna dair uygun bir görüşün yokluğu, bütün görüşü yetersiz göstermektedir.

Yazılarda yer bulan düşündürücü bir tarihsel notu ifade edersek, Platon'un, bunları tarif ettiği şekilde biçimlerin yapısı verildiğinde en azından kısmen, kişinin bunlar hakkında nasıl bilgi sahibi olabileceğini açıklamakta *anamnesis* kavramına müracaat ettiğini düşünmek mantıksız gelmemektedir.[11]

Matematiksel doğruluk hakkındaki "kombinatoryal" görüşün epistemolojiye dayanan kökleri vardır. Bu görüş, matematiğin "nesneleri" ne olursa olsun bizim bilgimiz ispatlardan elde edilir önermesiyle başlar. İspatlar yazılır, söylenir veya yazılabilir, söylenebilir (bazıları, yazılmalı söylenmelidir); matematikçiler bunları inceleyebilir ve bunların ispat olduğu konusunda birleşebilirler. Matematiksel bilginin büyük bir kısmı bu ispatlar yoluyla elde edilir ve aktarılır. Kısacası, benim "kombinatoryal" dediğim görüşler sınıfı güçlerini, matematiksel bilginin bu veçhesinden, yani üretim ve aktarımdaki (özellikle dilbilimsel) araçlarından almaktadır.

Bilginin üretiminde ispatların rolüne dikkat edilirse hakikatin temellerinin ispatın kendisinde arandığı görülür. Kombinatoryal görüşler, bilginin nasıl elde edilebileceği konusu üzerine Platoncuların yaydığı sır perdesinin farkına vardıklarından, daha bir güç kazanmışlardır. Bunun yanına matematiğin kendi ürünümüz olan bir çocuk olduğu kanaatinin farkına varılmasını da eklersek, (bu görüşlerde matematiksel keşif nadiren bağımsız bir gerçeklik hakkındaki keşiftir) nesep hakkında kavramlaştırma ilkelerinin aranması şaşırtıcı gelmez. Matematiksel hakikat hakkındaki çoğu görüş bu sınıflandırmaya girmektedir. Belki de hemen hemen hepsi. Birkaçına kısaca değinmiştim ve Hilbert'in "Sonsuz Üzerine"deki görüşünü çok kısa olarak ele almıştım. Son örnek olarak, uzlaşımcıların, mantık ve

11 "Ruh, ölümsüz olduğundan, defalarca doğmuş olduğundan ve bu dünyada veya öteki dünyada var olan her şeyi görmüş olduğundan bunların hepsinin bilgisine sahiptir." (Plato, *Meno*, 81). [Anamnesis, Platon'da ruhun idealar dünyasında edindiği bilgileri hatırlaması kavramı. Ç.N.]

matematiğin hakikatlerinin sarih uzlaşımlar sebebiyle doğru olduğu (veya, doğru yapılabildiği) şeklindeki görüş demetini ele almak istiyorum. Mevzu bahis uzlaşımlar genellikle kuramın önermeleri olmaktadır. Savunucularının muhakkak uzak durmak isteyecekleri birkaç görüşü bölük pörçük bir araya getirerek muhtemelen bir kez daha hepsine haksızlık yapmış olacağım.

Quine, bu konudaki klâsikleşmiş makalesinde[12], mantık hakikatlerinin bir uzlaşı ürünü olduğunu söyleyen görüşü, burada yapabileceğimi umduğumdan çok daha iyi bir şekilde, açıkça, ikna edici bir şekilde ve kararlılıkla ele almıştır. Sayılamayacak kadar çok hakikat için görüş belirtmek durumunda olduğumuzdan, uygun ifadelerin hakikatlerinin belirlenmesi işinin teker teker değil de toptan bir şekilde yapılmasına işaret etmiştir. Fakat toptan belirleme sadece genel ilkeler aracılığıyla işleyebilir ve eğer herhangi bir mantığı anlamak gibi bir düşüncemiz yoksa genel ilkelerden istisnaları elde edemeyiz; bu tür bir iş için mantığa gereksinimimiz vardır.

Bu ölmüş atın daha fazla kamçılanması gerektiğini düşündüğümden değil de, hem Quine'ın görüşü mantıkla sınırlı olduğu hem de benim ortaya koymak istediğim genel ilkeler bundan doyurucu derecede hasıl olmadığı için, bir başka meseleyi daha eklemek istiyorum; belki bu ikna edici olabilir. Gerçekten de Quine uzlaşımcıların belirli ilkelerini kabul etmektedir ki, benim onu tekzip etmem gerekir. Sayılamayacak kadar çok hakikatin toptan belirlenmesi gerekliliği meselesini uzlaşımcılığa dayandırırken Quine, hesaba katmamız gereken sadece sonlu sayıda hakikat olsaydı uzlaşımcının kendi meselesini ortaya koyabileceği bir şansının olabileceğini teslim etmektedir. Quine şöyle demektedir:

12 W. V. Quine, "Truth by Convention", Benacerraf ve Putnam'ın adı geçen eserinde tekrar basılmıştır.

> Hakikat değerleri, sonsuz sayıdakinin bir anda yapılması yerine teker teker yapılabilseydi yukarıdaki güçlük ortadan kalkardı; mantığın hakikatleri ancak teker teker kararlaştırılıp teyit edilirse bunları daha genel uzlaşımlardan çıkarım yoluyla elde etme problemi ortaya çıkmazdı (s. 344)

Dolayısıyla, mantığın ifadelerinin yakalarına hakikat değerlerini takabileceğimiz bir yol bulunabilseydi, hakikatin uzlaşımcı görüşüne yapılan itirazlar ortadan kalkardı –çünkü sorgulanabilecek tek şey olan hakikat değerlerini bütün ifadeler için belirlemiş olacağız.

"Doğru" kelimesinin böyle serpiştirilmesiyle neyin üstesinden gelinebileceğini yine de merak ediyorum. Dilin bütün cümlelerinin her birine bir doğruluk değeri verebilecek bir doğruluk kavramını belirlemede bunun yeterli olmayacağı muhakkaktır [birinci-dereceden bir biçimselleştirmede dilin küme kuramı olduğunu farz edin] (çift sayıda nalı olanlar "doğru" olsun).

Doğruluk kavramının belirlenmesinde "doğru" yüklemının kullanılmasının ne gibi bir değeri olabilir? Sadece bu iki heceli kelimenin kullanılmasının? Tarski, belli bir dilin doğruluk tanımı için gerekli ve yeterli koşulun T uzlaşımının sağlanması olduğunu öne sürmüştür.[13] Doğruluk değerlerinin vasat olarak (tekrar tekrar) dağıtımı, toplanıp T uzlaşımını sağlayan bir tek doğruluk kuramına yatırıla-

13 Alfred Tarski, "The Concept of Truth for Formalized Languages"; Tarski'nin, *Logic, Semantics and Metamathematics* (New York: Oxford, 1956) adlı kitabında yeniden basılmıştır. T uzlaşımı sayfa 187/8'de şöyle ifade edilmiştir.
T UZLAŞIMI: Meta-dilde açıkça ifade edilmiş 'Tr' sembolünün biçimsel olarak doğru bir tanımına, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa doğruluğun yeterli bir tanımı denilecektir:
(α) '$x \in Tr$ ancak ve ancak p' ifadesinden elde edilen bütün cümlelerde 'x' sembolünün yerine mevzu bahis dildeki herhangi bir ibarenin yapısal tanımlayıcı bir ismi ve 'p' sembolünün yerine de bu ifadenin metadile çevrimini biçimlendiren bir ifade olmalıdır.
(β) 'Herhangi bir x için, $x \in Tr$ ise $x \in S$'dir.' (başka bir deyişle '$Tr \subseteq S$').

bilir*. Bana göre, en önemli meseleyi sorgulamadan kabul etmeye ve onun (T uzlaşımının) ifadesindeki çevirme kavramını göz ardı etmeye hazırsak bu bize yeter. İfade etmesi zor olsa da, doğruluk tanımlarını oluştururken (yani, isim verme, isnat, kanaat ve nicelik belirleme gibi 'referans' kavramlarıyla doğruluğun analizini yaparken) Tarski tarafından kullanılan kuramsal araçlar eksik kalacaktır. Aşina olduğumuz dilbilgisi biçimleri itibariyle, bildik tekrar eden ibareler usulüne uygun olarak gelişmeyen tanımlar, T uzlaşımını sağlasa bile yeterli olmayabilirler. Açıklamalar, referans ve kanaat usulüne uygun olarak gelişmeli, dahası, kendisi bir referans anlayışıyla desteklenmelidir. Ancak bu son iddianın savunması buraya alınamayacak kadar karışık bir meseledir.[14]

"Uzlaşım ile Doğruluk"un yazarı Quine, bir kelime içeren bütün yerlerin doğruluk değerini belirlemenin, onun referansını belirlemede yeterli olacağını hissetmiştir. Doğruluk kavramına sahip olsaydık ve bizi ilgilendiren bu terimin referansını, doğruluğun tanımı aracılığıyla elde etmiş olsaydık, böyle olabilirdi. Fakat doğruluk kavramının kendisini bu şekilde sabitleme çabasında aşikâr bir yanlış var gibi görünüyor. Böyle yapmakla bu metodun diğer kavramlara da uygulanabilmesine imkân tanıyan en uygun desteği atmaktayız. Doğruluk ve referans beraber ilerler. Bir dereceye kadar sahip olduğumuz doğruluk kavramı, Tarski'nin ele aldığı diller sınıfı için onu tanımlamakta kullandığı kavramlar arasında arabulucu olarak ilerler– Tarski'nin yaklaşımının özü T uzlaşımının çok daha ötesine geçmekte ve asıl tanım için bir şema içermektedir; bildik isnat, nice-

* [Yazar, burada, bir işe yatırım yapıp ondan kat kat para elde etme anlamında 'yatırmak' (parlayed) fiilini kullanarak, doğruluk değeri dağılımının tek bir doğruluk kuramına yatırılabileceğini belirtiyor. Ç.N.]

14 Benzer bir görüşün mükemmel bir sunuşu için bakınız, Hartry Field, "Tarski's Theory of Truth"; *Journal of Philosophy*, LXIX, 13 (July 13, 1972): 347-375.

lik belirleme vesaire araçlarla ilerlemeyen bir dilin doğruluk analizi, bizi memnun etmemelidir.

Bir not vermek, gerekirse matematiksel doğruluğun yapısı hakkındaki "kombinatoryal" görüşlerin bana göre neden başarısız oldukları aşikâr olmalıdır. Doğruluk hakkındaki bir görüş için bana gerekli görünen, doğruluğu tanımlanmakta olan önermelerin konusundan başlayan yoldan kaçınıyorlar. Epistemolojinin görüşlerinin etkisiyle, sağlanıp sağlanmadığını sadece ölülerin belirleyebileceği doğruluk koşullarıyla çıkagelmişlerdir; bunun için ödedikleri bedel de bunların koşulları olduğu önermelerin doğrulukları ile "doğruluk koşulları" denilenler arasında bir bağlantı kuramamak olmuştur.

Birinci-dereceden mantığın hakikatlerinin uzlaşımlardan kaynaklanmadığı kabul edilse bile, matematiğin geri kalanın (mantıkçılar için küme kuramının; mantıkçı olmayanlar için küme kuramının, sayı kuramının ve diğer şeylerin) birinci-dereceden mantıkta biçimselleştirilmiş uzlaşımlardan oluştuğu hâlâ iddia edilebilir. Bu görüş de, böyle bir uzlaşım kavramının, *hakikati* beraberinde getirmek durumunda olmadığı itirazına maruz kalacaktır.[15] Böyle olmadığı gerçekten de açıktır. Çünkü, daha genel itirazları göz ardı etsek bile mantık bir kere sabitlendi mi, maddeler hâlinde sıralanmış uzlaşımların tutarsız olmaya yüz tutmaya başlaması mümkün olmaktadır. Dolayısıyla, uzlaşımları ortaya koymanın, hakikati *garantilediği* görüşü desteklenemez. Fakat, hakikati *garantileyemiyorsa* desteklediği durumlarla desteklemediği durumları ne ayırmaktadır? Tutarlılık bir cevap olamaz. Bunu bu şekilde zorlamak tutarsızlığın doğruluğu henüz belirlenmemiş bir ispat olduğu gerçeğini yanlış yorumlamak-

15 Belki de bundan ayırt edemeyeceğimiz benzer argümanlar, aksiyomların doğru olduğunu (*bu* postulatları öğrenerek biz dili öğrendik) nasıl bildiğimizi açıklayabilecek şekilde geliştirilirse, var olan kavramların (yenilerinin nasıl anlaşılabileceğini maddeler hâlinde belirtmeye zıt olarak) *gizil tanımlarını*, bu postulatların oluşturduğunu iddia eden görüşe de uygulanabilir.

tır. Bir kez daha bunun altında yatan sebep, önermelerin maddeler hâlinde dizilmesinin, önermeler arasında bir bağlantı kurmaması ve bunların konularının maddeler hâlinde sıralanmasının hakikate bir faydasının olmamasıdır. Bu olsa olsa sıralanmış maddelerle tutarlı doğruluk tanımlarını (yorumlarını) sınırlandırmaktadır. Ne ki, bu da yetmez.

Bu noktayı açmak için Russell'ın çok sık kullandığı sözü ele alalım: "İstediğimiz şeyi 'önerme' metodunun birçok avantajı vardır; bunun avantajları gerçekten zahmetli bir işten yapılan hırsızlığın avantajlarıyla aynıdır."[16] Benim geliştirdiğim görüşe göre bu yanlıştır. Çünkü hırsızlık sonucunda en azından bir ganimet elde edersiniz; hâlbuki, kesin tanım, uzlaşımsal önerme ve bunların akrabaları hakikati getirmekten acizdirler. Bunlar sadece ahlâkî olarak değil pratik olarak da kifayetsizdirler.

16 Bertrand Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy* (London: Allen & Unwin, 1919), s. 71.

III. MATEMATİKSEL NESNELER VE MATEMATİKSEL BİLGİ

MATEMATİKTE REALİZM ve KARŞI-REALİZM

Hartry Field
Çev. Muharrem Özlük & Cezmi Kayan

Matematikte realizm sayılar, fonksiyonlar, kümeler ve benzeri matematiksel varlıkların sahiden bulunduğunu belirten doktrindir. Peki bu doktrine niçin inanılsın?

Olası bir cevap şudur: Açık zorluklara maruz kalmayan matematiksel gerçekliğin bilinen tek açıklaması, matematiğin dışında işleyen gerçeğin açıklamasıyla aynı olanıdır. (Temelde Tarski'nin açıklaması.) Gerçekliğin bu açıklamasına göre, "17'den daha büyük asal sayılar vardır" cümlesi ancak en azından sayı olma, asal olma ve on yediden büyük olma özelliklerine sahip bir varlık var ise doğrudur; dahası, böyle bir varlık açıkça matematiksel bir varlık olacaktır. Bir tartışmada matematiksel gerçekliğin alternatif bir açıklamasını

---

* Bu makale, Kasım 1981'de, Rice Üniversitesi'ndeki Realizm ve Karşı-Realizm Konferansı için hazırlanmıştır. ***Mathematical Objects and Mathematical Knowledge***, Ed. Michael D. Resnik, Aldershot, Hants, England; Brookfield, Vt.: Dartmouth, c1995. 3-28.

bulamazsak matematiksel gerçekliğin standart açıklamasının bu sonucunun bizi matematiksel varlıklara inanmaya zorlayacağını duymuştum.

Aslında tabiî ki, bu böyle bir şey yapmaz. Matematiksel gerçeğin bu açıklamasını kabul edersek –ki benim önerebileceğim daha iyi bir şey yok– hem matematiksel varlıkları inkâr edip *hem de* "17'den daha büyük asal sayılar vardır" gibi standart matematiksel teoremlerin doğru olduğunu kabul edemeyiz. Ama bu durumda sorun: Hangi nedenle standart matematiksel teoremleri doğru olarak kabul etmekteyiz? Standart matematiksel teoremlerinin doğru olduğu varsayımının, matematiksel varlıkların varolduğu varsayımından neden daha açık olduğunun ve neden daha az savunma gerektirdiğinin anlaşılması zordur.

Standart matematiksel teoremleri doğru olarak ele almanın tek sebebinin, filozofların değil de matematikçilerin en iyi şekilde değerlendirebileceği özel bir matematiksel sebebin bulunabilmesi olduğu bazen söylenir. Bu standart matematik gerçekten doğru değilse bizim onu doğru olacak şekilde düzenlememiz gerekir şeklindeki düşünceye dayanır. Sonuç, yeni bir matematik olacaktır ve bu yeni matematiğin eskisinden gerçekten iyi olup olmadığına layıkıyla karar verebilecek konumda bulunanlar filozoflar değil matematikçilerdir.

Fakat bu tür bir yaklaşım matematiksel bir kuramın iyi olması için doğru olması gerekir düşüncesine dayanır. Bir an için hiçbir matematiksel varlığın olmadığını düşünün: O zaman 'Bazı ... (vardır)' ile başlayan hiçbir iddia doğru olmazken 'Bütün ...' ile başlayan her iddia da (anlamsızca) doğru olacaktır.[1] Eğer matematiğimizi doğru önermeleri alacak ve yanlış önermeleri almayacak şekilde düzenlersek elde edeceğimiz kuramın matematiksel bir öneminin kalmayacağı açıktır. Bu durumda bizim karşı-realistlerin bakış açısıyla doğruluk bir şey, matematiksel önem doğruluk ile uyumlu olmayan başka

bir şeydir. Matematikçiler iyi matematiği neyin belirlediğini değerlendirmek açısından filozoflardan daha iyi bir konumdadırlar; ama bu konum, neyin iyi matematik olduğu yargısından, aynı zamanda hangi matematiksel önermenin doğru olduğuna karar vermeye en uygun olanların matematikçiler olduğu sonucuna ulaşmanın doğru olduğu şeklindeki felsefî varsayımı kabul etmektedir.[2]

Öyleyse bizim tartışmamız bir yandan matematiksel varlıkların var olduğuna ve matematiğin amacının bunlara ve bunlar arasındaki ilişkilere doğru bir açıklama getirdiğine inanan bir realist ile diğer yandan matematiksel varlıkların olduğuna inanmayan ve matematiğin doğruluktan başka diğer amaçları da olduğunu düşünen bir karşı-realist arasındadır.

Bir karşı-realistin önerebileceği farklı amaç ne olabilir? Bazen doğruya alternatif olarak önerilen amaç tutarlılıktır. Elbette tutarlılık tek başına matematiksel olarak önemli olmayı garanti etmiyor ama matematiksel realist için de doğruluk matematiksel olarak önemli olmanın bir garantisi değildir. Onun için sadece yeterince kapsamlı olan doğru kuramlar matematiksel olarak önemlidir. (En az iki matematiksel nesnenin var olduğu kuramı matematiksel realiste göre doğrudur; ancak, tabiî ki, bunun bir önemi yoktur.) Öyleyse bir yönüyle karşı-realizmde, matematiksel bir kuram önemli olacak kadar kapsamlı ise sormamız gereken tek şey bu kuramın tutarlı olup olmadığıdır; ayrıca bu kuram doğru olmak zorunda da değildir; zaten bu amaç matematiksel varlıkların varlığını gerektirdiğinden hiçbir zaman gerçekleşemeyecektir.

Eğer sadece matematiğin iç yapısına dair görüşler dikkate alınırsa, karşı-realizmin bu şekline karşı çıkmanın zor olacağını düşünüyorum. Ama eğer matematiğin önemli özelliklerinden birinin fiziksel dünyaya uygulanması olduğunu hatırlarsak, matematiğin tutarlılığının yetersiz olduğunu açıkça görebiliriz. Çünkü bir kuram tutarlı olabilir ama fiziksel dünya hakkında yanlış sonuçlar da içe-

rebilir; açıktır ki, eğer matematiksel bir kuramın böyle bir özelliği olsaydı, bu kuram tutarlı olmasına rağmen kusurlu olurdu.

Az önce anlatılan durum gerçek bir olasılık mıdır? Bunu cevaplamadan önce fiziksel dünya hakkında yanlış sonuçlar içeren bir kuramdan bahsederken 'fiziksel dünya hakkında' ifadesini çok dar bir anlamda kullandığımı söylemeliyim: Eğer bir önerme matematiksel varlıkların miktarını belirtiyorsa, bunu 'fiziksel dünya hakkında' olarak görmüyorum. Bu nedenle, bu odadaki bütün elmaların kümesi, {0,1} kümesiyle 1-1 eşlenebilir önermesi geniş manada fizikî dünya hakkındaki bir önerme olarak kabul edilebilir olsa da eldeki sebeplerden dolayı böyle kabul edilemez. Tersine "bu odada elmalardan oluşan birbirinden farklı x ve y vardır ve bu odadaki her elma ya x ya da y'dir" önermesi dar anlamıyla bile tamamen fiziksel dünya hakkındadır. Dar anlamdaki "fiziksel dünya hakkında" ve bu deyime eklenebilecek herhangi bir geniş anlam arasında ikilem içinde kalma tehlikesini önlemek için bazen "fiziksel dünya hakkındaki önerme" yerine "nominalistik önerme" deyimini kullanacağım. Bu durumda geçen paragrafın sonundaki ifadem, yanlış nominalistik önermeler içeren herhangi bir matematiksel kuram tutarlı olsa da yetersiz olacaktır şeklini alır.

Tutarlı bir matematiksel kuramın yanlış nominalistik sonuçlar içerme ihtimali var mıdır? Cevap, "hayır" gibi görünebilir: Zaten matematiksel bir kuram yalnızca matematiksel varlıklardan bahsederken, matematiksel bir kuramın tüm mantıksal gerçeklerin ötesinde nominalistik bir anlamı nasıl olabilir ki?

Ne yazık ki, bu iddia, matematiksel kuramlar yalnızca matematiksel varlıklardan bahseder şeklindeki yanlış bir öncüle dayanmaktadır. Soyut küme kuramını değil de fiiliyatta kullandığımız küme kuramını ele alalım fakat bu küme kuramı elemanları küme-olmayan kümeleri de hesaba katsın. Böyle bir küme kuramı hiçbir şekilde "sadece matematiksel varlıklardan bahsetmez": Örneğin, bu normal

küme kuramları her bir matematiksel olmayan varlığın değişik kümelerin elemanları olduğunu öne sürebilirler. Kabul edelim ki, bu, matematiksel olmayan varlıklar hakkında yapılan oldukça zayıf bir iddiaya benzemektedir. Ama bu iddia, geçen paragraftaki, matematiksel bir kuram "sadece matematiksel nesnelerden bahsettiğinden" dolayı mantıksal gerçeklerin ötesindeki matematiksel olmayan nesneler hakkında hiçbir anlama sahip olamaz şeklindeki iddiaya şüphe getirmeye yeterlidir. (Gerçekten de, geçen paragraftaki iddia Robinson'un Tutarlılık Teoremi ya da Craig'ın Interpolasyon Lemma [yardımcı teorem -Ç.N.]'sı formalize edilmeye çalışılırsa, küme kuramında elemanları küme olmayan her bir kümenin başka bir kümenin elemanı olduğunu göreceklerdir ve bu da iddianın önüne geçmek için yeterlidir.)[3] Bu nedenle tutarlı bir matematiksel kuramın yanlış nominalistik sonuçları olabilir.

Dahası, aslında olabilir! M matematiksel kuramını düşünelim: Elemanları küme olmayan kümeleri eleman olarak kabul eden kümeleri içerecek şekilde dönüştürülmüş Zermelo-Fraenkel küme kuramı ile başlayalım. Böylece bu kuram, bu gibi kümelerin hepsini içeren bir kümenin olduğu iddiasını da içerecektir. Ayırma ve yer değiştirme şemalarını, üyeleri küme olmayan kümelerin tarifinde kullanılagelen ampirik kelime haznesini bu şemaların örneklerinde ortaya çıkaracak şekilde yorumlayın. (Bir önceki notta olduğu gibi, şemaların böyle geniş bir yorumu sezgisel küme kuramında da kullanılmaktadır. Örneğin, uzayda sıcaklığın en az 0 °C olduğu noktaların bir kümesinin olduğunu kabul etmemizin bir problem çıkarmayacağını düşünürüz. Fakat 'sıcaklık' terimi ayırma şemalarında bulunmuyorsa bu sonuç gerekçelendirilemez.) Şimdiye değin, sezgisel küme kuramı ile iş görüyorduk. Şimdi M'ye ulaşmak için sonsuzluk aksiyomunu, değili ile değiştirin. Bu M kuramı açıkça tutarlıdır (gerçekten de çok açık bir tutarlılık ispatı var); fakat bunun fiziksel dünya hakkında hâlihazırdaki en son fiziksel kuramlarla çelişen sonuçları vardır.

Bunu görebilmek için T, içinde matematiksel-olmayan varlıklardan oluşan, sonsuz lineer bir sıralama içeren herhangi bir nominalistik kuram olsun. Daha açık olmak gerekirse, farz edelim ki, T'de miktar belirleyicilerinden bazıları (hepsinin olması şart değil) matematiksel olmayan terimlerle sınırlandırılmış olan ve aşağıdaki türden önermeleri elde edebileceğimiz bir A(x,y) formülü var olsun[4].

(i) $\forall x \forall y \forall z [A(x,y) \wedge A(y,z) \rightarrow A(x,z)]$

(ii) $\forall x - A(x,x)$

(iii) $\forall x \forall y [A(x,y) \vee x = y \vee A(y,x)]$ ve

(iv) $\forall x \exists y [A(x,y) \wedge \exists z (A(x,z) \wedge A(z,y))]$

T ile birlikte M'nin tutarsız olduğunu görmek hiç de zor değil; çünkü T ile M birlikteyken sıralamadaki herhangi bir x'i 0'a, bir sonrakini 1'e, daha sonrakini 2'ye götüren ve böyle devam eden bir fonksiyon tanımlanabilir. Elemanları küme olmayan kümelerin hepsini içeren bir küme ile birlikte yer değiştirme şeması size 0, 1, 2 ve diğerlerini içeren bir kümenin olduğunu gösterecektir. Bu da sonsuzluk aksiyomunun değilinin ihlali demektir. Bu nedenle M, buradaki biçimiyle herhangi bir T ile tutarsız olmaktadır. Bu da M'nin bu şekildeki herhangi bir T'yi (yani, T'deki aksiyomların bazı sonlu birleşimlerini) tekzip ettiğini göstermektedir. Örneğin, üzerinde eşit aralıklarla dizilmiş sonsuz sayıda noktalar dizisini içeren fiziksel bir uzaya göre yapılmış herhangi bir kuram, M matematiksel kuramı tarafından yanlış olmakla itham edilecektir.[5] Bence bunlar, tutarlı olsa da, M'de bazı şeylerin oldukça yanlış olduğunu göstermek için yeterlidir.

Az önce açıklanan türdeki T'lerin bazılarının doğru olması benim iddiamı gerçekten etkilemez. Çünkü fiziksel dünya hakkında aslında yanlış olan sonuçlara yol açan matematiksel bir kuramın değerlendirilmesinde hiç de önemli görünmemektedir. Zaten yanlış sonuçlara da yol açsa hemen hemen aynı yetersizlikte görünmektedir: Güneş sistemimizde tam olarak dokuz gezegenin bulundu-

ğunu söyleyen bir matematiksel kuram için rasyonalistlerden hiç değişmemiş olanları hariç hepsi bunun, bu matematiksel kuramı kabul edilemez olarak göstereceğini düşüneceklerdir. Buna göre, yukarıda açıklanan türdeki T fiziksel kuramlarından hiçbiri doğru olmasa da yukarıdaki M kuramı kesinlikle kabul edilemezdir. Küme kuramındaki sonsuzluk aksiyomundan kaçınmak isterseniz, bu mümkündür; ancak, M'deki güçlüklerden kaçınabilmek için küme kuramında (yer değiştirme şemasında sınırlamalar yapmak gibi) diğer değişiklikleri de yapmalısınız ki, fiziksel dünya hakkında istenmeyen sonuçlardan kaçınabilesiniz.

Tutarlı (ve kapsamlı) bir matematiksel kuramın ciddî şekilde yetersiz olabileceğini gördük; bu nedenle amacın doğruluğun yerine tutarlılığı yerleştirmenin olduğu karşı-realizmin yukarıdaki itirazlara maruz kalmayan ikinci yönünü deneyelim. İlginç bir matematiksel kuramın iyi olması için sadece, *fiziksel dünya hakkında içten tutarlı her kuram ile uyumlu olması gerektiğini* kabul edelim. Bu da karşı-realizmin bir ifadesidir; çünkü kuramın iyi olması için doğru olma zorunluluğu yoktur.

Fiziksel dünya ile ilgili içkin olarak tutarlı her kuramla uyumlu bir matematiksel kurama *tutucu* diyelim. Kolaylıkla görülebileceği gibi, bu, aşağıdaki ifadeye eşittir:

(C) M matematiksel kuramı tutucudur; ancak ve ancak fiziksel dünya ile ilgili herhangi bir A önermesi ve bu gibi önermelerden oluşan herhangi bir N yapısı için, A sadece N'den çıkarılamıyorsa N+M'den de çıkarılamaz.

Karşı-realizm, bu şekliyle, matematiksel bir kuramın önemli olması için yeterince kapsamlı olmasının yanında tutucu olması gerektiğini ve doğru olmak zorunda olmadığını söylemektedir.[6]

Başlangıçta C'ye göre tutucu olan bir kuramın önemli olmadığı ya da en azından fiziksel dünyaya uygulamada bir öneminin olmadığı düşünülebilir. Çünkü, herhangi bir N nominalistik kuramı için

N+M'den, N'den tek başına elde ettiğimiz sonuçlardan daha fazlasını elde edemeyeceksek M'nin ne gibi bir değeri olabilir ki?

Ama bu iddia hatalıdır. Gerçekten bu iddia yanlış olmalıdır. Çünkü dört paragraf önce söylediklerimden açıkça anlaşılabileceği gibi, standart matematiğin tutucu olduğunu kabul etmek için kuvvetli sebepler; vardır ama kimse standart matematiğin bir değerinin olduğunu inkar edemez.[7] Yine de tutucu olduğu bilinen matematiksel bir kuramın değerinin ne olduğu sorusu cevap beklemektedir. Tutucu bir kuramın değerli olabilmesi için iki olası durum söz konusudur.

İlkin, tutucu bir matematiksel kuram nominalistik kuramlardan çıkarım yapmayı kolaylaştırabilir. Yani, M tutucu iken, A tek başına N'den çıkarılamıyorsa N+M'den de çıkarılamaz (burada N nominalistik bir kuram ve A da nominalistik bir önermedir); fakat A'nın, N+M'nin bir sonucu olduğunu görmek, A'nın sadece N'nin sonucu olduğunu görmekten çok daha kolaydır. Daha sonra da göreceğimiz gibi, matematik bu bağlamdaki çıkarımları kolaylaştırmaktadır ve bu, değerinin kesinlikle büyük bir kısmını oluşturmaktadır.

Buna ilâveten, ikinci olarak, tutucu bir matematiksel kuram, meselâ, fiziksel kuramlarımızın özellikle öncüllerinde kullanılarak değerini gösterir. Bu, matematiğin tutuculuğunun belirlediği bir şey değildir; matematiğin tutuculuğu sadece N önermelerinin nominalistik bir yapısına sahipseniz o zaman N + matematiğin, nominalistik sonuçlar itibariyle sadece N'nin sahip olduğundan daha fazla etkin güce sahip olmadığını söylemektedir. Fakat bunu söylemek, istediğimiz her şeyi yapabileceğimiz bir nominalistik önermeler yapısını bulabileceğimiz anlamına *gelmemektedir*. Gerçekten de, daha sonra değineceğim gibi, nihayetinde tek ciddî görüş olan matematik tutucu olduğu kadar doğrudur görüşü de nominalistik önermeler yapısının her zaman elde mevcut olamayacağı öncülüne bağımlıdır. Dolayısıyla, ilk bakışta matematiğin tutuculuğuna

rağmen yararlı olabileceği sadece iki *prima facie* [ilk bakışta, Ç.N.] durumun olduğunu görürüz: (nominalistik öncüller ve nominalistik sonuçlar arasındaki) *çıkarımları kolaylaştırmada* ve de *kuramsal olarak vazgeçilmezliğiyle* (sözgelimi, bazı önemli kuramların öncüllerinde gereklidirler) faydalı olabilir. Her iki durum için de mi, yoksa sadece birincisi için mi faydalı olduğu realizm/karşı-realizm çekişmesi açısından önemlidir.

Bu soruna geçmeden önce tutuculuk ve doğruluk arasındaki ilişki hakkında bir şeyler söylemeliyim. Tutarlılığın aksine tutuculuk doğruluktan *kaynaklanmaz*; bu nedenle karşı-realistimiz, realistin doğruluk amacının yerine kesinlikle *daha zayıf* bir amaç yerleştirmemektedir; o, *başka* bir amaç edinmektedir. Bu amaç, tipik bir realistin de dolaylı olarak bildiği bir amaçtır. Çünkü, az önce de belirtildiği gibi, realist ve realist-olmayanın, tutuculuğu neden iyi bir matematiksel kuramın bir gerekliliği olarak algıladığının oldukça güçlü sebepleri vardır. Zaten ben, iyi matematiksel kuramların sadece doğru değil zorunlu olarak doğru olmaları gerektiği şeklindeki geleneksel realist önermeyle, iyi matematiksel kuramların sadece doğru değil aynı zamanda tutucu olduğu iddiasının az veya çok aynı olduklarına inanıyorum. Tutuculuk, kabaca, "doğruluğa ihtiyaç duymayan zorunlu doğru" olarak düşünülebilir. Tutucu bir kuram, zorunlu olarak doğru olanlar gibi, fizikî dünyanın herhangi bir olası durumuyla uyumludur. Tutucu bir kuramla zorunlu olarak doğru olanlar arasındaki tek gerçek fark, tutucu olanın doğru olmak zorunda olmayışıdır.

İyi bir matematiksel kuramın tutucu olma zorunluluğu matematik ile fen arasındaki derin ayrılığa işaret etmektedir. Gerçekten de, tutucu olmama iyi bir bilimsel kuramın amaçlarındandır. Bununla iyi bir bilimsel kuram T için N'nin A'yı gerektirmediği ama N+T'nin gerektireceği şekilde *nominalistik* N ve A'ların olacağını söylemiyorum. *Bu* çok sıradandır. Çünkü T bilimsel kuramı, bayağı olmayan

nominalistik önermeler (matematiksel varlıklar hakkında mantıksal doğrular dışında bir şey söylemeyen önermeler) içermese de, onun bayağı olmayan sonuçları mutlaka olacaktır –meselâ, A böyle bir sonuç olsa N de sadece mantıksal doğrulardan oluşsa, T'nin bu anlamda tutuculuğu ihlâl edeceği aşikârdır.

Lâkin, fiziksel bir kuramın tutucu olmadığı ve olmamasını gerektiren daha ilginç bir durum vardır. Hatırlayalım ki, matematiksel kuramlarda olduğu gibi fiziksel kuramlarda da, realizm hakkındaki konular üzerinde durulmaktadır. Fiziksel kuramlarda da realizm meseleleri matematiksel varlıklar üzerinde değil atom altı parçacıkları, cisimler, uzay-zaman bölgeleri –*gözlenemeyenler*, her ne kadar bu kelimenin bütün durumlarda uygun olup olmayacağı belli değilse de, en uygunudur (meselâ, uzay-zaman bölgelerinin gözlenemeyenler olarak kabul edilip edilmediği kesin değildir)– gibi varlıklar üzerinde yükselir. Matematiksel kuramlarda ise, tutuculuk, *çelişkili* varlıklar hakkındaki önermelerden *çelişkisiz* varlıklar hakkındaki öncüllerle çelişkisiz varlıklar hakkında yeni sonuçlara varılamayacağını söylemektedir. Ve bence bu, tutuculuk ile genel itibariyle anlatmak istediğimiz şey olmalıdır. Öyleyse;

(C') Fiziksel bir kuram T tutucudur ancak ve ancak gözlenebilenler hakkındaki önermelerin herhangi bir P temsili ve yine bunlar hakkındaki herhangi bir A önermesi için A tek başına P'den gelmedikçe P+T'den de gelmez.

Neyin tutucu bir fiziksel kuram olduğu hakkındaki bu çok daha ilginç açıklamada eksik kalan bir durum var ki, tutucu olan fiziksel bir kuram, eğer kabul edilebilir olan ve tutucu olmayan daha büyük bir fiziksel kuramın parçası değilse, bunun kabulü kesinlikle mümkün değildir. Kabul edilebilirlik, doğrudan kabul edilmiş ve bu yüzden tutucu alt kuramlarına karşı tutucu olmayan bir kuramdan azar azar oluşsa da, bilimde kabul edilebilirlik, *nihaî olarak* tutucu ol-

mamayı gerektirir. Fiziksel kuramlarda kabul edilebilirliğin tutucu olmamayı gerektirmesinin sebebi açık olmalıdır. Çünkü tutucu bir fiziksel kuram test edilemez; bir kuramı test etmek için tam olarak yaptığımız şey gözlenebilenler hakkındaki öncüllerle (deneysel koşulları belirleyenlerle) bu kuramı gözlenebilenler hakkında sonuçlar çıkarmada (deneysel tahminlerde) kullanmaktır. Bir deney yapar ve tahminimiz de tutarsa bu bir dereceye kadar[8] "gözlemlenebilir" öncüllerden "gözlemlenebilir" sonuçların elde edilişinde önemli olan kuramın bu öncüllerini doğrulayacaktır. Bir fiziksel kuram az önce açıklanan anlamda tutucu olsaydı, bunların hiçbiri gözlenebilenler hakkındaki öncüllerle gözlenebilenler hakkında sonuç elde etmede hiçbir zaman önemli olmayacaktı; bu nedenle hiçbiri (daha büyük ve tutucu olmayan bir kuramın parçası olanlar hariç) asla doğrulanamayacaktı.

Burada fiziksel kuramların nasıl doğrulandığını verirken elbette kabaca geçiştirdiğimiz veya atladığımız olmuştur; fakat bunların hiçbirinin şu anki konumuza tesiri yoktur. Meselâ, bir deneyin alt yapısının tarifine bakarak umumiyetle bir test tahmini "yaparken" deneyin alt yapısının tarifinde gözlenemeyenlere atıfta bulunur ve çıkarımımızda teste tabi tuttuğumuz kuramın yanında farkında olmadan birçok kuramı da kullanırız. Bu, teste tâbi tuttuğumuz kuramın tutucu olmama zorunluluğunun altını oymaktadır fakat bu kuramı alır ve çıkarımda dolaylı olarak kullanılan bütün kuram parçacıklarını ve deneyin alt yapısının tarifinde kullanılan bütün diğer kuramları da eklersek *bu* kuram temsilinin, bir test imkânı sağlayabilmesi için tutucu olmaması gerektiğini görürüz. Bu da bizim istediğimiz bir şeydir: Bir fiziksel kuramın bütünüyle deneysel olarak test edilebilmesi için kesinlikle tutucu olmaması gerekir.[9]

Bilim, faydalı olacaksa tutucu *olamaz*; matematik ise faydalı olmak için tutucu *olmalıdır* konusu üzerinde gereğinden fazla durmuş olabilirim. Fakat bu önemli bir noktadır; çünkü bilimde matematiğin

süregelen etkin değerinin önünü alır; ikincisi, bir kuramın (burada fiziksel bir kuramın) doğruluğunun tutucu olmayı icap ettirmediği gerçeğini çarpıcı bir biçimde gösterir.

Elbette bir kuramın tutuculuğu onun doğru olmasını gerektirmez. Bu, tutuculuğun tanımından da anlaşılabilir; ancak bunun yanında birbiriyle çelişen matematiksel kuramların (örneğin, seçim aksiyomlu küme kuramı ile bunun tersinin olduğu küme kuramı veya süreklilik hipotezinin bulunduğu bir küme kuramı ile bunun tersinin bulunduğu küme kuramının) her ikisinin de tutucu olabileceğini söylemek gerekir.[10] Öyleyse tutuculuk ve doğruluğun, matematiğin birbirinden oldukça bağımsız iki özelliği olduğu açığa kavuşmuş olmalıdır -(tabi, doğruluk matematiğin bir özelliği ise). Matematiğin herhangi bir özel uygulaması verildiğinde bu uygulamada matematiğin yararının tutuculuğundan mı yoksa doğruluğundan mı kaynaklandığını sormak doğaldır. Bahsini ettiğimiz şu (dikkate değecek kadar kapsamlı bir matematiksel kuramın iyi olması için doğru olmak zorunda olmayacağına sadece tutucu olması gerektiğine inanan) karşı-realistlerin matematiğin bütün uygulamalarının yararının sadece tutuculuğuyla açıklanabileceği görüşünü koruyacakları açıktır. Bu görüşteki ısrarın doğru olup olmadığını görelim.

Herhangi bir matematiksel kuramın tutucu olduğu gerçeğini –bir kere gösterildiğinde herkes tarafından kabul göreceğini düşündüğüm bir durumu– hatırlarsak buradan hareketle matematiğin sadece iki yolla yararlı olabileceği görebilir. Nominalistik öncüllerden nominalistik sonuçlar çıkarmayı kolaylaştırmada, bunun yanı sıra, bazı önemli matematik-dışı kuramların öncüllerinin formülasyonunda üstlendiği önemli rol itibariyle yararlı olabilir.

Matematiğin genellikle sadece birinci sebep itibariyle yararlı olduğunu gösteren birçok örnek vardır. Muhtemelen en kolay örnekleri temel sayılar kuramında bulabiliriz. N, birim elemanı ve genel birim aksiyomlarını içeren fakat bütün diğer soyut olmayan

sembolleri sıradan fizikî nesneler kategorisinde olan ve miktar belirleyicileri sadece fizikî nesneler üzerinde geçerli olan bir kuram olsun. "Karıncayiyen", N'nin kategorilerinden biri olsun; o zaman N için bunu ve birim elemanı kullanarak şunu söyleyebiliriz:

1- Tam olarak yirmi bir karıncayiyen vardır.

Aynı şekilde ek birkaç fizikî nesne kategorisiyle, tabi, matematiksel nesneler olmaksızın şunları söyleyebiliriz:

2- Her karıncayiyenin üzerinde tam olarak üç böcek vardır.

3- Her böcek ise bir karıncayiyenin üzerindedir. Ve;

4- Tam olarak altmış üç böcek vardır.

Diyelim ki, 4'ün, miktar belirleme kuramı ve birim eleman ile 1-3'ün sonucu olup olmadığını bilmek istiyoruz. Bunun cevabı müspettir; fakat miktar belirleme kuramı ve birim elemanı kullanarak 4'e ulaşmak için 1'den 3'e kadar yapılacak bir işlem oldukça uzun ve yorucu olacaktır. Sayı kuramının giriş kısmı ve küme kuramının bir iki çok basit esası bunu oldukça kolaylaştırır. Çünkü *bu matematik kuramıyla* 1-3'ün geçerliliğini ancak ve ancak aşağıdakilerle gösterebiliriz.

1'- Karıncayiyenler kümesinin eleman sayısı 21'dir.

2'- Tanım kümesi, karıncayiyenler kümelerinden oluşan ve tanım kümesindeki her elemanı o elemanın üzerindeki böcekler kümesiyle eşleyen fonksiyonun değer kümelerinin hepsinin eleman sayısı 3'tür.

3'- 2''deki fonksiyon 1-1'dir ve değer kümeleri bütün böcekler kümesinin bölümleridir.

Aynı şekilde matematiksel kuram 4'ün ancak ve ancak aşağıdakiler sağlandığında doğru olabileceğini söylemektedir.

4'- Bütün böcekler kümesinin eleman sayısı 63'tür.

Nihayetinde matematiksel kuram 1'-3' sağlandığında 4''ün de sağlandığını kolayca ispatlayabilmemizi mümkün kılmaktadır. Sonuç olarak, *bu matematiksel kuramı kullanarak* 1'den 3'e kadar sağlanırsa 4'ün de sağlandığını ispatlayabiliriz.

Bu, kabul edilmiş matematiksel kuramlarla, matematiği kullanmaksızın yaptığımız çıkarımlardan çok daha kolay bir şekilde, yaptığımız çıkarımlara verebileceğimiz en basit örneklerden sadece biridir. Ve bu şekilde yaptığımız çıkarımlar da her zaman doğru olacaktır. *Prima facie* olarak bu, kabul edilmiş matematiksel bir kuramın doğruluğuna dair iyi bir karut olarak algılanabilir. Zaten doğru olmasaydı bunun bu şekilde kullanımı, doğru öncüllerden bazen yanlış sonuçların elde edilmesine yol açacaktı. Fakat şimdi biz doğruluk ile tutuculuğu birbirinden ayırarak gördük ki, *prima facie* mantıklı görünen iddia tamamen yanlıştı. Bu gibi durumlarda matematiksel kuramımızın hiçbir şekilde hataya meydan vermemesi, doğruluğuna gereksinim duyulmaksızın, tutuculuğuyla açıklanabilir.

Bu konuda bazı şeylere dikkat etmek gerekir. Birincisi, benim onu anladığım kadarıyla bir karşı-realist, 1', 2' ve diğerlerinin 1, 2 ve diğerlerine anlamca eşit olduğunu iddia etmemektedir. Sadece, 1' ile 1'in, 2' ile 2'nin ve diğerlerinin *değerce* eşitliğinin *standart matematikten geldiğini* ve standart matematiğin ekseriyetle yanlış olduğunu bunun da 1', 2' ve diğerlerinin 1, 2 ve diğerleriyle aynı doğruluk değerlerine sahip olmalarını garanti edemeyeceğini söylemektedir. (Zaten karşı-realiste göre bunların doğruluk değerleri çoğu zaman aynı olmayacaktır: Meselâ, 1', ne kadar karınca yiyen olursa olsun, sözlük anlamı-olmayan terimlerin semantiğinde, çoğu görüşe göre yanlış olacaktır.) 1 ve 1''nün doğruluk değerleri itibariyle de olsa denkliğini savunan her iddia, anlam itibariyle az çok yersizdir; çünkü sayı kuramının yararı standart matematiğin tutucu olduğu gerçeğiyle birlikte daha az çelişkili olan ve 1', 2' ve diğerlerinin 1, 2 ve diğerleriyle değerce eşitliğinin standart matematikten geldiğini söyleyen iddia ile açıklanabilir.

İkinci olarak, sayı kuramının yukarıdaki uygulaması sonsuz sayıda elemanın varlığını öngören bir varsayıma dayanmamaktadır. (Yüzeysel olarak benzer olan mantıksal görüş ise, bunu gerekli

görür: Detaylara girmeden basitçe açıklarsak, bu gereklilik mantıkçı görüşün sayılar hakkındaki önermeleri, anlamlarını sözde koruyarak, diğer elemanlara da *uygulamasından* bir de standart matematiksel kuramları doğru kabul edişinden kaynaklanır). Matematiğin karşı-realistleri, bizim varsayımımızda sonsuz sayıda elemanın bulunması gerekli olmadığından şanslı sayılabilirler. Onlara göre sonsuz sayıda elemanın olabilmesi için sonsuz sayıda *fiziksel* varlığın mevcudiyeti oldukça *olası* görünse de (meselâ, her ışık dalgasının sonsuz parçasının olduğu düşünülebilir) sayı kuramının yeterliliğini fizikî dünya hakkındaki bu gibi varsayımlara dayandırmak uygun görülmemektedir. Sayı kuramının ise *doğruluğu* için miktar belirleyicilerinin etkinlik göstereceği sonsuz sayıda elemana ihtiyacı olduğu açıktır; fakat onun *tutuculuğu* için bu tür bir şey gerekli değildir. Zaten benim de uygulamalarımda göstermek istediğim, sadece tutuculuğa ihtiyacımız olduğudur.

Sayı kuramının, *yukarıdakinin benzeri durumlarda*, yararları hesabına söyleyebileceklerimiz bunlardan ibarettir. Ama bu kesinlikle matematiğin tipik olmayan bir uygulamasıdır. Bir fizikçinin, örneğin, elektromanyetik konusunda bir kuram ortaya koymaya çalıştığını düşünün: Bir sürü diferansiyel denklem içeren bir kuramla yola çıkacaktır. Bu kuram matematiğin zaten büyük bir kısmını –reel sayıları, reel sayılarda fonksiyonları, diferansiyel operatörlerini ve diğerlerini– önceden kabul ediyor olacaktır. Burada matematiği nominalistik öncüllerden nominalistik sonuçların çıkarımını kolaylaştırmada kullanıyormuşuz gibi kesinlikle görünmemektedir; çünkü, nominalistik öncüller nerededir? Bunları elde etmek elektromanyetik kuramını bir şekilde nominalistik olarak ifade etmeye bağlıdır ve *prima facie* bunun nasıl yapılabileceğini görmek oldukça zordur. Eğer bu doğruysa, matematiğin çıkarımları kolaylaştırması bir tarafa, matematik *kuramsal olarak zarurî* olmaktadır. Ancak matematiğin kuramsal olarak vazgeçilemezliğinin onun tutuculuğuyla nasıl açık-

lanabileceğini göstermek hayli zordur. Bu nedenle, eğer matematik kuramsal olarak zarurî ise, bunu açıklamanın tek yolu onun doğru olduğunu kabul etmektir.

Anladığım kadarıyla bu, Quine-Putnam ikilisinin matematiğin doğruluğuna dair fikirleriyle aynı anlamdadır. Quine ve Putnam iddialarını matematiğin matematiksel olmayan alanlardaki yararını açıklamak için matematiğin doğruluğunu kabul etmek gerektiğini söyleyerek ortaya koyma eğilimindedirler. Bu iddia, gördüğümüz gibi, oldukça abartılıdır: Bu yararın *bir kısmı* sadece ve sadece matematiğin tutuculuğuyla açıklanabilmektedir. Bence onların temel düşünceleri şu yoruma dayanmaktadır: Eğer matematik (fizikte ve diğer önemli alanlarda) kuramsal olarak zarurî ise, o zaman matematiğin tutuculuğu, yararını açıklamak için yeterli değildir. Bu nedenle, bu makalede matematiğin tutuculuğuna verilen önemin bir karşı-realistin hedeflerinin ötesine geçmede pek başarı sağlayamadığı düşünülebilir.

Aslında bana göre matematiğin tutuculuğuna verilen önem boşa gitmiş değildir. Çünkü nihayetinde matematiğin kuramsal olarak zarurî olmadığının; elektromanyetik kuramı gibi fiziksel kuramların nominalistik olarak yeniden formüle edilebileceğinin ve bu yapıldığında fiziğin Platoncu formülasyonlarının matematiğin tutuculuğu kullanılarak doğrulanabileceğinin gösterilebileceğine inanıyorum. Bana göre fiziğin normal Platoncu formülasyonları 1'-3''ne benziyor; yani eğer 1-3 doğruysa *standart matematikte* 1'-3' de doğrudur. Benzer şekilde, *standart matematikte* fiziğin Platoncu formülasyonları eğer nominalistik olanlar doğru ise doğrudur. Eğer bu doğru ise bir nominalist bile fiziğin platoncu formülasyonlarını nominalistik olarak ifade edilebilen sonuçlar çıkarmada kullanabilir. Çünkü az önce dediğim gibi, bu nominalistik sonuçlar nominalistik fizik *artı standart matematikten* çıkarılır. Yani eğer standart matematik tutucu ise bu sonuçlar tek başına nominalistik fizikten çıkar. Bu durumda,

fiziksel kuramları nominalize etmek için belirli bir program uygulanabilir ise, doğruluğun yerini almaya aday olan tutuculuğun rolü ilk bakışta göründüğünden çok daha büyük olur.

Bu makalede amacım, fiziksel kuramların Platoncu formülasyonlarının temel nominalistik formülasyonların basit bir tutucu uzantısı olduğunu gösteren programı tartışmak değildir. Bu konuyu başka bir yerde ele almıştım – (en azından fiziksel kuramların önemli bir sınıfı üzerinde ele almıştım; bir de bunu diğer fiziksel kuramlara genişletme programı bana oldukça mümkün görünmektedir.)[11] Burada daha az teknik olarak işlenebilen bir dizi nokta üzerinde duracağım.

Öncelikle Quine-Putnam ikilisinin zaruriyet argümanlarıyla uğraşılsa bile, realist konumu destekleyen başka görüşler olacaktır şeklinde düşünülebilir. Örneğin, matematiğin radikal bir realist görüşünün bir çok iddiasını Gödel'in geliştirdiği iyi bilinir. Bir karşı-realist de bu iddialarla mücadele etmek zorunda değil midir?

Buna cevaben Gödel'in güçlü iddialarının çoğunun eninde sonunda Quine-Putnam ikilisinin zaruriyet iddiasına dayandığına dikkat çekmek istiyorum. Meselâ, Gödel matematiksel "verilerin" en dar yorumuyla bile –yani, matematiksel "verileri" en basitinden sayı kuramı denklemleriyle sınırlasak dahi– matematiğin oldukça soyut bölümlerinin, bu verilerin açıklanabildikleri ölçüde doğrulanabileceğini söylemektedir:

> ... [B]azı yeni aksiyomların tabiî zorunlulukları dikkate alınmadan bile ve bu tabiî zorunluluk hiç olmasa bile, doğruluğu hakkında olası bir karar diğer bir yolla elde edilebilir; yani. tümevarımsal olarak "başarı"sı üzerinde çalışarak elde edilebilir. Burada başarı, sonuçlardaki, özellikle de "doğrulanabilir" sonuçlardaki verimliliktir. Bu sonuçlar yeni aksiyom sunulmadan kanıtlanabilen sonuçlardır; fakat, ispatların keşfi yeni aksiyomun yardımıyla oldukça kolay ve daha basittir; dahası, birçok değişik ispatı bir ispata daraltmaya imkân sağlar. Sezgiciler tarafından reddedilen reel sayılar sisteminin aksiyomları, bu anlamda bir dereceye kadar doğ-

> rulanmıştır. Çünkü analitik sayı kuramı genellikle, daha elverişsiz bir yol ile sonradan temel metotlarla doğrulanabilen sayı-kuramsal teoremlerin doğrulanmasını sağlar. Bununla birlikte bundan çok daha yüksek derecede bir doğrulama anlaşılabilirdir. Tüm alanı aydınlatan ve problemleri çözmek için güçlü metotlar sağlayan (ve hatta mümkün olabildiği kadar onları inşacı tarzda çözen) doğrulanabilir sonuçlarda bolca bulunan aksiyomlar var olabilir. Öyle ki, tabiî olarak gerekli olup olmadıklarına bakılmaksızın, en azından iyi-kurulmuş herhangi bir fiziksel kuramla aynı anlamda oldukları kabul edilmelidir.[12]

Aynı şekilde Gödel, bunları kararlaştırmada küme kuramındaki "büyük kardinal aksiyomlarının" bile sonuçlarının yardımcı olabileceğini belirtmektedir:

> Bu aksiyomların, dolayımsız konuları olan çok büyük transfinit sayılar alanının çok ötesinde de sonuçları olduğu kanıtlanabilir. Tutarlı oldukları kabul edilerek her bir aksiyomun, Diophantine eşitliklerinin alanlarında bile karar verilebilir önermelerin sayısını arttırdığı gösterilebilir.[13]

Öyleyse yine bu tür konuların doğruluğuna, bilimde kullanılana benzer bir hipotetik–tümdengelimsel işlem ile (kat'î olmasa da ihtimal dahilinde) karar verilebilir.

Bu çeşit iddiaların yeterli derecede ikna ediciliği vardır; yani en azından akla oldukça yatkındırlar; eğer "matematiksel bilgileri" doğru olarak kabul edersek matematiğin çok daha soyut bölümleriyle ilgili iddiaların doğruluk değerine sahip olduklarına inanmalıyız ve gerçekten verilen bu önermelerin özel doğruluk değerine sahip olduklarına inanmak için sebeplerin bulunduğunu kabul etmeliyiz. Eğer bu doğruysa ve zaruriyet iddialarını en azından "matematiksel bilgilerin" doğruluğunu tartışmak için kullanabilirsek zaruriyet iddiaları artı Gödelci düşünceler oldukça soyut matematiksel iddiaları tartışmak için kullanılabilir. Belirli bir büyük kardinal aksiyomu savunmanın, küme kuramının zarurî bölümleriyle olan ilişkisi ve aksiyom kullanmaksızın elde edilen sonuçlardan daha basit ve daha

bütün bir yolla zarurî sonuçlara ulaşılabilmesi olgusu ışığında makul olduğu söylenebilir. Ama elbette bu, matematiğin *bir kısmının* zarurî olduğunu kabul etmektedir. Eğer matematiğin *hiçbir* kısmı zarurî değilse, o zaman, görebildiğim kadarıyla, "matematiksel bilgiler" denilenleri bile doğru olarak kabul etmek için bir sebep kalmaz. Bu nedenle bu bilgilerle olan ilişkilerine göre matematiğin diğer kısımlarının doğruluğu iddiası değerini yitirir.

Zaruriyet düşünceleri bir tarafa "matematiksel bilgileri" bile doğru kabul etmek için bir sebep yoktur derken haksız mıyım? Burada uzun bir tartışmaya girmeyeceğim; ancak kısaca söylemek gerekirse, şimdiye kadar "matematiksel bilgiyi" doğru kabul eden, zaruriyete dayanmayan, duyduğum her iddia bana çok net bir şekilde şüpheli görünmektedir. Yani, bu gibi her iddia, *karşı-realizmin burada savunulan biçimi karşısında* şüphelidir. Bu makalenin başlangıç paragraflarında bahsi geçen bazı iddialar gibi standart matematiği doğru kabul eden belli bazı zarurî olmayan iddialar, matematiğe doğruluk haricinde ne gibi geçerli bir amaç atfedilebileceği konusunda hiçbir fikri olmayan kimselere oldukça makul gelecektir. Ama ne zaman ki, matematiksel bir kuramı iyi yapanın ne olduğunun hesabını verebilen alternatif bir düşünceye sahip olunur, o zaman zaruriyet dışındaki bu ve diğer tüm iddialar şüpheli olarak görülürler.

Müsaadenizle, vazgeçilebilirlik [zarurî olmama] üzerine bir iki şey daha söyleyeyim. Öncelikle, vazgeçilebilir olarak kabul ettiklerim, sayılar, fonksiyonlar, kümeler türü matematiksel varlıklardır. Kendine nominalist diyen herhangi bir filozofun karşı çıktığı her çeşit varlığın vazgeçilebilir olduğunu söylemiyorum. Özellikle, gelişen fiziksel kuramda uzay-zaman bölgelerinin vazgeçilebilir olduklarını da söylemiyorum. Fiziğin tipik Platoncu formülasyonları uzay-zaman bölgelerini *ve* sayıları, fonksiyonları, kümeleri ve benzerlerini kullanır; benim iddiam sayıların, fonksiyonların, kümelerin ve benzerlerinin elenebilecekleridir; ancak, uzay-zaman bölgeleri hakkında böyle bir şey söylemiyorum.

Matematiksel varlıkların kabulünde isteksiz olan çoğu filozofun gerekçesi, uzay-zaman bölgelerinin kabulündeki isteksizliğin gerekçeleriyle eşdeğerde ise, matematiksel varlıkları reddedip uzay-zaman bölgelerini kabul eder bir konumu muhafaza etmek sadece marjinal bir durum olacaktır. Ancak, ben öyle düşünmüyorum. Matematiksel varlıklar hakkındaki şüphenin asıl sebebi bu varlıkların bilgi kuramı ve referans kuramı ya da inanç–içerik kuramına çıkardıkları güçlük olabilir.[14] Platoncu düşünceye göre matematiksel önermelerimizin doğruluk değeri, uzay-zamanın dışındaki bir dünyaya ait olan Platoncu varlıkları kapsayan gerçeklere bağlıdır. Platoncu dünyadaki varlıklar ile bizim aramızda nedensel bağlar yoktur. Öyleyse o dünyada ne olduğuyla ilgili herhangi bir bilgiye nasıl sahip olabiliriz? Ve belki de, daha temel olarak, "iki" gibi özel bir kelimenin ya da özel bir inancın beynimizin bir durumunun o dünyadaki nesnelerin mutlak sonsuzluğundan belirli bir tanesi *olması* veya *onun yerine geçmesi* nasıl mümkün olabilir? Bu soruları cevaplamak için bizimle bu Platoncu dünya arasında biraz *fiziksel-olmayan bağlantı*, biraz *mistik zihinsel kavrayışın* olması gerekir gibi görünüyor.[15]

Bu görüşlerin uzay-zaman bölgelerine karşı öne sürdüğü güçlüklerle matematiksel varlıklara karşı öne sürdüğü güçlükler kıyaslanabilir mi? Hayır. İlk olarak az önceki zorluklar sadece matematiksel varlıklar ile bizim aramızda nedensel bağlantıların eksikliğinden dolayı değildir. Bu zorluklar (realiste göre) bununla beraber o varlıkların uzay-zamanın dışında varolması gerçeğine dayanmaktadır. İlk olarak, bilgi hakkındaki problemi düşünün. Elbette diğer herhangi bir şeyin varlığı hakkında çıkarılabilecek epistemolojik problemler olduğu gibi uzay-zaman bölgelerinin kabulü hakkında da çıkabilecek bazı epistemolojik sorunlar vardır. Ancak, matematiksel varlıklardaki gibi esaslı bir epistemolojik problem yoktur. Çünkü burada

söz konusu varlıklar dünyasına erişimimizin sadece mistik bir fiziksel-olmayan ilişkiyle olduğu bir durumun makul bir tarafı kalmamıştır. Tabiî ki, bizimle uzay-zaman bölgeleri arasında sorun çıkarmayan fiziksel ilişkiler, meselâ, uzaysal ilişkiler vardır ve bu da uzay-zaman bölgelerine olan epistemolojik erişimimizi sağlar. Örneğin, bizimle olan uzaysal ilişkilerinden dolayı belirli uzay-zaman bölgeleri görüş alanımıza girebilir. Tabiî ki, bütün uzay-zaman bölgeleri uzayda ve zamanda görüş alanımıza girecek kadar yakın değildir. Ancak bu, uzay-zaman bölgeleri için, örneğin kaplanlar için, çıkandan daha çok epistemolojik problem çıkarmıyor; bu nedenle, görüş alanımıza girmenin dışında uzay-zaman bölgeleri fiziksel nesnelerle şüpheli olmayan ilişkilere (uzam-zamansal ilişkilere) sahiptir ve bu bize onları bilmek için daha az doğrudan gözlemsel araç sağlar. Sayılar için bu tür dolaylı gözlemsel erişimin yakın bir benzeri yoktur. Bunun sebebi, örneğin, uzay-zaman yapısı hakkındaki kuramları gözlemle doğrulayabilir ve yanlışlayabiliriz; ancak, sayılar hakkındaki kuramları bu şekilde doğrulayamayız ya da yanlışlayamayız. Kısacası, gerçekten ciddî epistemolojik problemleri çıkaran şey sadece nedensel olarak erişilmez varlıkların varsayımı değildir; nedensel olarak erişilmeyen, görüş alanımıza girmeyen ve onlar hakkında güvenilir bilgileri nasıl alabileceğimizi açıklama olasılığı olan diğer fiziksel ilişkilere sahip olmayan varlıkların varsayımıdır. Yani, bu sorun sayıların ve diğer matematiksel varlıkların çıkardığı epistemolojik bir sorundur ve uzay-zaman bölgeleri bu sorunu ortaya çıkarmaz.

Benzer şeyler referans problemi için de geçerlidir (bununla nesnelerin yerini kelimelerin nasıl doldurabildiği sorunundan öte, esas itibariyle düşüncelerin ve türevlerinin nesnelerin yerini almaları problemini kastediyorum). Sayılar ve diğer varlıklara referans problemini (bu geniş anlamda) bu kadar zor kılan, sadece sayılar ve diğer varlıkların üzerimizde nedensel etkilerinin olmaması değil, aynı zamanda referans ilişkilerini açıklayabilen diğer fiziksel ilişkilere

dayanmamalarıdır. Diğer yandan, uzay-zaman bölgeleri bizimle sorunsuz ilişkiler yani uzam-zamansal ilişkiler, kurulabilecek bir noktadadır. Bu demektir ki, örneğin, onların çoğunu belirleyebiliriz.[16] (Tabiî ki, hepsini değil, zaten kaplanların da hepsine ulaşamayız; sözgelimi, biz doğmadan önce var olanları belirleyemeyiz.) Daha da önemlisi, ('burada', 'şimdi' gibi) zarflar yardımıyla veya bunların zihinsel benzerleriyle bazı uzay-zaman bölgelerine atıfta bulunabiliriz; hatta fiziksel nesnelere veya burada-ve-şimdiye dayanmanı gerektiren uzam-zamansal ilişkiler yardımıyla diğer birçok uzay-zaman bölgesine atıfta bulunabiliriz. Bu durumda sayılara atıfta bulunurken karşılaşılan erişim probleminin uzay-zaman bölgelerinde karşımıza çıkmadığı açıkça görünmektedir.

Önceki ifadelerde uzay-zaman bölgelerinin sayılar gibi nedensel olarak değişmez oldukları varsayımına şüphe getirmedim. Bununla ben, bu varsayım kabul edilse bile, uzay-zamanın epistemolojik olarak da, atıfta bulunurken de matematiksel varlıklardan çok daha az şüpheli olduğunu anlatmak istedim. Buna rağmen, bana öyle görünüyor ki, uzay-zamanın nedensel olarak değişmez olduğu varsayımı miadını doldurmuş bir fiziksel kuramın kalıntısıdır. Bu durum uzay-zaman bölgelerinin, epistemolojik olarak matematiksel varlıkların olduğu kadar problemli olmadıklarını daha da açık ortaya koymaktadır.

Uzay-zamanın nedensel olarak değişmez olduğu iddiasının aksine ben, uzay-zaman noktalarının ve bölgelerinin tam-donanımlı nedensel araçlar olduklarını iddia ediyorum. Bu görüş, uzay-zamanı varsayan herhangi bir kurama uygulanabilir. Örneğin, uzay-zamanı, içinde elektron gibi nesnelerin bulunduğu hareketsiz bir arena olarak düşünmek yerine elektronların ayrı varlıklar olduğundan vazgeçilebilir ve elektronların (kütle-yoğunluk, yük-yoğunluk vb.) özellikleri aslında sadece bulundukları uzay-zaman bölgelerinin özellikleri olarak kabul edilebilir. *Bu şekilde bakarsak*, fiziksel nes-

neleri gayet normal olarak nedensel araçlar olarak gördüğümüz gibi, uzay-zaman bölgelerini de aynı şekilde nedensel araçlar olarak görebiliriz: Eğer fiziksel özellikleri farklı olsaydı farklı nedensel sonuçlar ortaya çıkardı.

Fakat neden bu şekilde bakalım diye itiraz edilebilir. Elektronlara bu şekilde bakmak mümkündür ama mecburî değildir. Bununla birlikte, dikkatler maddeden alanlara çekildiğinde durum değişir. Çünkü bir alan kuramı (elektromanyetik alan değerleri, değişik yer çekimsel tensörler, vb. gibi) nedensel özellikleri uzay-zaman noktalarıyla ilişkilendiren *en doğal kuram* olarak yorumlanmaktadır. Yine aynı şekilde alan mevzusunun (fiziksel nesnelerin önemsiz bir kısa yolu olarak değil de) ciddiyetle ele alındığı herhangi bir kuram da nedensel özellikleri uzay-zaman noktalarıyla ilişkilendiren, yani özellikleri nesnelerin karakterini nedensel olarak etkileyecek şekilde ilişkilendiren, en doğal kuram olarak yorumlanacaktır.

Aklıma gelmişken, "özellikler" konusu burada müphem bir anlamdadır; ki, daha önce bahsettiğim kitabımda alanların nominalistik irdelenişinde tensörler gibi matematiksel varlıklara atıfta bulunulmadığı gibi bunlara da bir atıfta bulunulmamıştır. Onun yaptığı, *uzay-zaman noktalarının nedensel öncüllerini* kullanmak iken benim söylediğim, alan kavramıyla ciddiyetle alâkadar kuramlar için, bunun hemen hemen kaçınılmaz olduğudur.

"Hemen hemen" kaçınılmaz diyorum; çünkü, alan kuramlarını ciddiyetle ele alan ve uzay-zamanın nedensel olarak etkin olduğu sonucuna varmayan bir yol vardır.[17] Ancak bana öyle görünüyor ki, bu uzay-zamanın nedensel etkinliğini göz ardı edebilmenin *yalnızca sözde* bir ifadesidir ve bizim asıl ilgilendiğimiz nominalizm konusuna hiçbir etkisi yoktur. Uzay-zaman noktalarına nedensel özellikler yüklemekten kaçınmanın yolu, alanlar hakkında en "saf realist" gibi alandan, büyük bir fiziksel nesne gibi uzay-zamandan bağımsız bir varlık olarak söz etmektir. Nerededir bu nesne? Muhtemelen,

her zaman, her yerde.[18] Bu görüşe göre, nedensel olarak etkin olan uzay-zaman değil elektromanyetik alandır. Buna rağmen, dikkat edilirse, bu görüş eskisinden söyleyiş tarzı itibariyle biraz daha farklıdır. Çünkü uzay-zaman noktaları arasındaki geometrik bağıntılar (arada olma, denklik ve benzerleri) aynı zamanda elektromanyetik alanın minimal uzam-zamansal kısımları arasında da geçerlidir. Bunun yanında her yerde geçerli bir alan verildiğinde, uzay-zaman hakkındaki sıradan geometrik tespitler şu andan itibaren alan için de geçerli olacaktır. Sonuç olarak burada iddia edilen şey, uzay-zamanın bütün geometrik özelliklerine sahip, elektromanyetik özellikleriyle fiziksel nesnelere nedensel olarak etki eden bir varlığın, elektromanyetik alanın yanı sıra sadece geometrik özelliklere sahip nedensel olarak değişmez olan bir başka varlığın, uzay-zamanın bulunduğudur. Ancak bu varlıklardan ikincisinin gereksiz oluşu gayet açıktır; diğer varlıkla tamamen aynı özelliklere sahip, aynı zamanda nedensel olarak etkin bir başka varlığa inanmaya gerek yoktur. Zaten nedensel olarak etkin varlığa, 'elektromanyetik alan' veya 'uzay-zaman' denmesi tamamen bir söyleyiş sorunudur.[19] Gelişen fiziksel kuramlarda önemli olan nokta, sıradan fiziksel nesnelerin yanında geometrik ve elektromanyetik özelliklere sahip bir varlığa ihtiyaç duyulmasıdır; çünkü bu elektromanyetik özellikler nedensel olarak etkilidir[20]; söz konusu varlık, sıradan fiziksel nesneler kadar nedensel bir faktördür. Gelişen fiziksel kuramlarda, sayılar gibi nedensel olarak değişmez olan nesnelere ihtiyaç yoktur.

Bu durumda sonuç;

(a) uzay-zaman bölgeleri, matematiksel varlıkların aksine nedensel araçlardır ya da eğer isterseniz bunların yerine "elektromanyetik alanın bölümleri" gibi nedensel araçları kullanabiliriz.

(b) her durumda matematiksel varlıklar hakkındaki felsefî itirazlar sadece bunların nedensel yapılarına değil, bunun yanında "erişilemezliklerine" karşılık gelen diğer özelliklerine de (fiziksel

nesnelerle sorunsuz ilişkilerin eksikliği gibi) yöneliktir. Ancak uzay-zaman bölgelerinin bu tür özellikleri yoktur.

Bu iki sonucun her biri tek başına, matematiksel nesnelerle uzay-zaman bölgelerinden aynı anda vazgeçilemeyeceği, bir de ikincisini kabul ederken birincisinden vazgeçmenin pek bir değeri olmadığı itirazlarına son vermek için yeterlidir.

Şimdi, matematiksel varlıkların vazgeçilebilir olduğunu söylediğim iddiama yapılan son bir itirazı ele alalım. Şimdiye kadar sadece bu yazıda (ve de kitabımda) ortaya koyduklarıma yapılan itiraz, matematiksel varlıkların *bilimde* kuramsal olarak vazgeçilebilir olduğu, ancak dikkate almamız gereken başka bir önemli alanın bulunduğu, bunun da *mantık* olduğudur. Gerçekten de eğer matematiksel varlıkların mantıkta vazgeçilebilir olduklarını gösteremezsek, bunların bilimde de vazgeçilebilir olduklarını *tam anlamıyla* göstermiş olamayız. Çünkü gelişen bilimde mantığı kullanmak durumundayız. Sonuç olarak matematiksel varlıkların mantıkta açıkça vazgeçilebilir olmadıkları tartışılabilir. Buna rağmen mantıksal sonuçların standart semantik tanımları, matematiksel varlıklar olan *modellerle* yapılır ve semantik kavramını soyut bir ispat-kuramsal kavramıyla, belirli bir biçimsel sistemde ispatlanabilirlikle, değiştirmeye şüpheyle bakan biri bile bunları tanımlayabilmek için (sembol-token* dizileri ile bu dizilerin keyfî dizileri gibi) soyut nesnelere ihtiyaç duyacaktır.

Bu itirazlar, geniş konuları ilgilendirdiğinden, bunlara burada yeterince değinebileceğimi sanmıyorum. Gerçekten de bunlara cevaben benim bulunduğum konumu tam anlamıyla belirtebilmiş değilim. Yine de aşağıdakiler kabaca bir fikir oluşturabilir.

Nominalistik aksiyomlardan sonuçlar çıkarmada mantığa ihtiyacınız olacağından, bilimdeki nominalistik soyutlamalara *rağmen* mantık hakkındaki görüşlerin, matematiksel varlıkların bilim için

* Token, bir sembolün bir tikeli/örneği/ferdi karşılığındadır. Sözgelimi 222 doğal sayısı, "2" sayısının üç adet token'ini kapsar. Ç.N.

bile gerçekten vazgeçilmez olduklarını gösterebileceğini söyleyen az önceki itirazların küçük bir kısmıyla başlayalım. İtirazın *bu* kısmı bana mantıkla metamantığı birbirinden ayırt etmede hataya düşen kötü bir muhakeme gibi görünmektedir. Mantığın kendisi bir muhakemedir; bizim varsaymamız gereken varlıklar sadece muhakememizin öncüllerinde, ara ve son aşamalarındaki çıkarımlarda ihtiyaç duyduklarımızdır. Fiziksel kuramları nominalistik olarak soyutlayabildiğimiz sürece, öncüllerimizde matematiksel varlıklara kesinlikle ihtiyacımız yoktur; çünkü dünya hakkında tahminlerde bulunurken ve açıklama yaparken kullandığımız çıkarımlar nominalistik olduğundan, nihaî çıkarımlarımızda matematiksel varlıklara ihtiyacımız olmamaktadır.[21] Böylece matematiğin tutuculuğu da bize, ara çıkarımlarda bunlara ihtiyacımız olmadığını gösterecektir. Dolayısıyla, *fiziksel kuramlarda* bunlara gereksinimimiz yoktur.

Yine de itirazın ana kısmı hâlâ durmaktadır: *Metamantıkta* matematiksel varlıklara ihtiyacımız varmış gibi görünmektedir. Bir nominalistin buna cevabı iki şekilde olabilir. Birincisi; standart metamantığın iddialarının aslında doğru olmadığını söyleyerek gayet makul bir konumu benimseyebilir. Buna makuliyet kazandırmak için de, metamantık hakkında benim normal matematik için söylediğim gibi, standart metamantıkla ilgili bir sorun yoktur; ancak metamantığın yararının doğruluğu ile bağdaştırılamayacağını söylemeye mecbur olacaktır.

Öyleyse standart metamantıkta neyin iyi olduğunu nasıl açıklayacağız? Buna verilebilecek ilk doğal karşılık, bizim normal matematikte neyin iyi olduğuna verdiğimiz cevabı anımsatacaktır: (Biraz değişik hâliyle ancak gayet açık olarak) tutuculuk. Metamantık, alışılagelmiş şekilde kullanıldığında, metamantıksal olmayan ifadelerimizdeki iddialarımızı basitleştirmede faydalıdır; ancak, bu yolla ulaştığımız sonuçlara metamantıksal muhakemeye başvurmaksızın sadece sıradan mantıksal yorumlamalar kullanılarak her zaman ulaşılabilir.

Metamantığın bu anlamda tutucu olduğu doğrudur. Bu da metamantıksal olmayan öncüllerden bunların sonuçlarına kadarki iddialarımızı basitleştirmedeki yararını ortaya koymaktadır. Örnek olarak, eğer bir B cümlesi A_1, ..., A_{n+1} cümlelerinde formel olarak türetilebilirse (ya da bir sonucu ise), $A_{n-1} \supset B$, formel olarak A_1, ..., A_n cümlelerinden türetilebilir (ya da bir sonucudur). Bu, verilen A_1, ..., A_n terimlerinden, verilen bir $A_{n-1} \supset B$ sonucu hakkında akıl yürütmede kullanılan çok yararlı bir teoremdir. Bu şekilde mantık kurmada A_1, ..., A_n doğru terimlerinden asla $A_{n-1} \supset B$ yanlış sonuçlarını çıkarmadığımız açıktır ve bu gerçeğin açıklamasının sadece metamantığın tutucu olduğu varsayımını gerektirdiği ve doğru olduğu varsayımını gerektirmediği açıktır.

Tek sorun, metamantığın bütün kullanımlarının bir tek tutuculuk yardımıyla pek açıklanabilecek gibi görünmemesidir. *Neyin neden kaynaklandığı* hakkındaki iddiaların yararı tutuculuk ile açıklanabilir. Ancak *neyin neden kaynaklanmadığına* dair iddialara ne demeli? Aynı şekilde tutarlılık hakkındaki iddialara ne demeli? Bunlar metamantıksal olmayan iddialardan yorumlar yapmamıza yardımcı olacakmış gibi görünmemektedir. Bunlar daha çok, eğer inanıyorsak, bizi bu belli bazı argümanları *aramaktan vazgeçirmeye* ve kuramlarımız hakkında *endişelerimizi kaldırmaya* çalışır. Aynı işi gören diğer bir çeşit önerme tutuculuk önermesidir; bununla beraber *tutuculuk* tutarlılığın genelleştirilmiş hâlidir. Bu yazıda matematiğin tutuculuğu üzerine olan iddialarım, nominalistik öncüllerden daha kolaylıkla çıkarımda bulunmamızı sağlayacak bir role kesinlikle sahip değildir. Bunların görevi daha çok benim tutucu olduklarını iddia ettiğim sistemlerin faydası üzerindeki bazı endişeleri ortadan kaldırmaktadır.

O zaman metamantık hakkındaki makul görüş nedir? Makul olan, metamantığın iddialarının iyi olması için doğru olmak zorunda olmamasıdır; sadece, doğruluk gerektirmeyen bazı meziyetlere

ihtiyacı vardır. Fakat diğer meziyetler hangileridir? Tutuculuk bunlardan biridir; ancak makul olan görüşü savunabilmek için tutarlılık, tutuculuk ve benzerlerinin metamantıksal önermelerinin yararını açıklayabilen, doğruluğa ihtiyaç duymayan başka meziyetler bulmalıyız. En azından şu an için bu işi doğruluk haricinde görebilecek başka bir meziyet bilmiyorum. Dolayısıyla, makul olan görüşü de benimseyemiyorum.

Bununla birlikte az önce değindiğim gibi, bir nominalist makul olan tavrı benimsemek zorunda değildir; bunun yerine normal metamantıksal önermelerimize karşı bir anlayış yerleştirebilir ve metamantıksal önerileri matematiksel varlıkları kullanmaksızın açıklamaya çalışabilir. Bence bu veya buna çok yakın bir şey yapılabilir. Ancak, bu fiziksel kuramların nominalizasyonunda ihtiyaç duyulmayan bir şeyi: Mantığımızın, 'mantıksal olarak mümkündür ki' kip (modal) operatörünü kapsayacak şekilde, genişlemesini gerektirir. Tabiî ki, böyle bir mantıksal operatörü kullanan bir nominalist, bunu 'olası dünyalar' kavramıyla açıklamaya çalışmamalıdır. Çünkü 'olası dünyalar', epistemoloji ve referans bilimi ilgilendiği sürece, matematiksel varlıklardan daha az problemli olmayan soyut varlıklardır.[22] Böyle bir kip operatörü kullanmak isteyen bir nominalistin, 'bu operatörün açıklanmasına, değil operatörünün veya miktar belirleyicilerin açıklanmasına olan ihtiyacımızdan daha fazla ihtiyacımız yoktur; bunun yerine, kip operatörlerini, tanımlayarak değil de diğerlerini her nasıl anladıysak o şekilde anlamamız gereken mantıksal esaslardan biri olarak görmeliyiz' demesi gerekir.[23]

Bu, uygun bir tavır mıdır? Fiziği nominalize ederken mantıksal olasılık operatörünü (ya da olasılık operatörünün herhangi bir çeşidini) kullanmak bana göre hiç mi hiç uygun değildir. Anladığım kadarıyla, fiziğin ilgi alanı sadece gerçek dünyanın özelliklerini tarif etmektir ve ben bu yapılırken nelerin mümkün olduğunun ortaya konmasını uygun bulmuyorum. (Bu bir argüman değil sadece görüş

bildirimidir.) Yine de bana öyle görünüyor ki, metamantığın özünde durum son derece farklıdır. Olasılık, fizikle yakın bir bağlantısı olmadan mantıkla iç içe bir yapı içerisindeymiş gibi görünmektedir: Mantık, olasının bilimidir. Zaten metamantıksal kavramların alışılagelmiş Platoncu uygulamaları, olasılığı kullanmaktan kaçındıkları için yapay görünmektedir. Bir ibarenin ispatlanabilirliğini, onun bir ispatı olma koşullarını sağlayan sembollerin soyut benzerlerinden oluşan soyut bir dizinin *gerçek* varlığı yerine, bu semboller dizisinin *olası* varlığıyla belirlemek daha doğal değil midir? Son elemanı olmayan ayrık lineer sıralamalar kuramının semantik tutarlılığı, birinci üyesi sonsuz bir küme ve ikinci üyesi o kümenin kendisi ile Kartezyen çarpımının bir alt kümesi olan sıralı bir çiftin *gerçek* varlığından daha çok, bu kuramın belirttiği tarzda varlıkların *olası* varoluşlarına göre daha doğal olarak düşünülmüş değil midir? Ben böyle düşünürdüm.[24]

Bana öyle görünüyor ki, metamantıksal kavramların normal küme-kuramsal kullanımlarının filozoflar arasındaki yaygın kabulünün sebebinin kısmen şudur: Olabilirlilik olası dünyalar ile açıklandığında, olabilirlik türünden *prima facie* daha doğal izah, nihayetinde, en azından küme kuramsal izah kadar tuhaf olacaktır. Fakat eğer olabilirliliği, olası dünyalar ile açıklamaktan uzak dursursak, kip operatörünü, kümelerden fonksiyonlara oradan da doğruluk-değerlerine kadar olan kavramlarla açıklanması gereken miktar belirleyiciler kadar olası dünyalarla açıklanan mantığın basit bir esası olarak kabul edersek, bu iddialar düşer ve metamantıksal kavramların olabilirlikle açıklanması daha bir sezgisel olarak kalır.

İtiraf etmeliyim ki, metamantıkta bile olabilirlik kavramına girilmesini pek hoş karşılamıyorum. Bu, bu kavramı fizikte kullanmaktan veya bizimle veya gözlemlediğimiz ve uzay-zamanın dışında var olan hiçbir şeyle nedensel bir bağı olmayan Platoncu protoplazma parçalarının kullanılmasından daha kötü görünmemektedir. Ancak

yine de mümkünse kaçınmayı tercih ederim. Bunun mümkün olmadığından tam anlamıyla emin değilim. Yukarıda bahsettiğim makul görüş, işin önemli bir kısmını görmektedir. Bunun yanında, tutuculuk ve doğruluk haricinde doğru olmasını beklemeksizin standart metamantık hakkında neyin iyi olduğunu açıklayabileceğimiz başka bir meziyetin ortaya çıkışını düşünmek dahi memnuniyet vericidir. Ancak, buna ulaşabilecek bir yol bulana kadar, metamantıkla uğraşırken mantıksal olabilirlik operatörünün esas kabul edilmesi, eldeki en uygun davranıştır.

NOTLAR

1) Basit olması için, "boş adlar"ı içeren önermelerin doğruluk-değerlerini benimseyip savunmaktan kaçınmak için, burada dikkatimi bireysel sabitlere sahip olmayan önermelerle sınırladım. Ama kişinin boş adlar hakkındaki görüşünün ayrıntıları ne olursa olsun, matematiksel bir önermenin doğru ya da yanlış olması, sadece sentaksal biçimine ait ilginç olmayan olgulara bağlı olan karşı-realist konumun bir sonucu olacaktır; bu nedenle kuramın tamamen doğru önermeler içermesinin matematiksel bir anlamı yoktur.
2) Bu, '2+2=4' ün *aritmetiğe göre doğru* olduğunu söylemez; tartışılan felsefi varsayım bunun aritmetiğe göre doğru olup olmaması değildir; lâkin, mesele bunun ve aritmetiğin geri kalanının doğru olup olmadığıdır. Eğer bu felsefi varsayım yanlış olsaydı, o zaman '2+2=4'; *-belli mitlere göre doğru olan* ama yine de (Robert Peary'nin gözlemlerinin ortaya serdiği gibi) yanlış olan- 'Noel Baba Kuzey Kutbu'nda yaşıyor' ifadesine benzemez. Matematiğin mitler ve kurgular ile olan benzerliği hakkında güzel bir inceleme için, Charles Chihara'nın *Ontology and Vicious Circle Principle* (Cornell University Pres, 1973) adlı kitabının ikinci bölümüne ve Steve Wagner, 'Arithmetical Fiction' (*Pacific Philosophical Quarterly*, yakında çıkacak) adlı makalesine bakınız.
3) Aslında pratikte kullandığımız küme kuramı, pür küme kuramından hem her bir küme-olmayan, değişik kümelerin bir üyesidir demek ile, hem de ayırma ve yer değiştirme şemaları ile gerçekleşen kümelerin inşasında

kullanılan ampirik kelime dağarcığını kullanmakla farklılaşır. (Örneğin, sıcaklığı en az sıfır santigrat derece olan uzaydaki bütün noktaların kümesini tanıtabiliriz.) Bu gerçek, önceki paragraftaki iddia için daha da büyük sorunlar ortaya çıkarır. Ayrıntılar için *Science Without Numbers: A Defense of Nominalism* (Princeton University Press, 1980) adlı kitabımın 17-18. sayfalarına bakınız.

4) A(x,y)'yi x ve y dışındaki serbest değişkenleri içerecek şekilde oluşturabiliriz; bu durumda bu ek değişkenler için (i)-(iv), sınırlı ya da sınırsız evrensel miktar belirleyiciler ile öncelenmelidir.

5) Aslında eğer M'yi tercih aksiyomunu ekleyerek güçlendirirsek, T üzerindeki gereklilikleri azaltabiliriz: T sadece sınırlı sayıda önerme içerir -ki bu önermeler müştereken sonsuz sayıda nesne gerektirir. Sözgelimi, ışık ışınlarının sonsuz sayıdaki kısımlara sahip olduğunu söyleyen sınırlı sayıdaki birçok aksiyomu ima eden herhangi bir fiziksel kuram güçlendirilmiş M ile tutarsız olur; yine de, güçlendirilmiş M'nin tutarlı olduğu hakkında az şüphe vardır.

6) Kitabımda standart küme kuramının tutuculuğunun, "neredeyse" bu kuramın tutarlılığından "çıktığını" iddia ettim; daha doğrusu, bu kuramın tutarlılığının, bu kuramın tutuculuğunun birazcık sınırlandırılmış bir versiyonunu sağlamaya yettiğini öne sürdüm. Her ne kadar standart küme kuramında tutarlılık ile tutuculuk arasındaki boşluk oldukça küçük ise de, sıra dışı (deviant) M küme kuramı örneğinde görüldüğü üzere, bu fark genel olarak matematiksel kuramlar için büyüktür.

7) Bu, daha ayrıntısıyla *Science Without Numbers*, s. 12-14'de anlatılmıştır. Birinci bölümün ekine de bakınız.

8) Bu ne derece bağlı oluş, diğer şeylerle birlikte, verilen "gözlenebilir" öncüllerden "gözlenebilir" sonuçlara götüren *diğer* kuramların müsait oluşlarına bağlıdır.

9) Basitleştirmek için, ihtimalî bilimsel kuramları burada ihmal ettim. Bunlar anlatılan anlamda tutucu-olmamaları gerekmez, ama "gözlenebilir" öncüllerden "gözlenebilir" sonuçların elde edilme olasılığına dönüştürmeye yol açan biraz daha genel anlamda tutucu-olmamaları zorunludur. Bu dönüşme, matematiksel kuramlar ile bilimsel kuramlar arasında anlattığım temel karşıtlığı etkilemez. Çünkü iyi matematiksel kuramlar genelleştirilmiş şu anlamda tutucudurlar: Bunları nominalistik öncüllere katmak, nominalistik sonuçların olasılıklarını etkilemez.

10) *Science Without Numbers*, s. 15 ile karşılaştırın.

11) *Science Without Numbers*. Orada anlatılan fiziksel kuramlar düz uzay-zamandaki klâsik alan kuramlarıdır. Bir dipnotta da yaklaşımın nasıl eğri

uzay-zamandaki klâsik alan kuramlarına genişletilebileceğinin taslağını sunmuştum. Fakat belirttiğim üzere, önerilen bu genişleme, öncelikle eğik uzay-zaman teoreminin bir gösterimini kanıtlamaya dayanıyor; ki, bu, prensip olarak olabilir görünmekte fakat bildiğim kadarıyla şimdiye kadar gerçekleştirilmemiştir. Farklı türdeki kuantum kuramları değişik metotlar gerektirir ve benim hâlâ onlarla nasıl baş edildiği hakkında hiçbir fikrim yok. (Bu kısmen, zannımca, nominalistik şüphelerden oldukça bağımsızdır; zaten bu kuramları anladığımı hissetmiyorum.)

12) Kurt Gödel, "Cantor'un Süreklilik Problemi Nedir?", Benacerraf ve Putnam'ın içinde, *Readings in the Philosophy of Mathematics* (Prentice-Hall, 1964), s. 265.
13) a.g.e., s. 264.
14) Böyle bir evham, başka güçlü sebeplere de dayanır. Örneğin, Paul Benacerraf tarafından "What Numbers Could Not Be?", (*Philosophical Review*, 1965)'de yapılan gibi, Benacerraf'ın sunduğu bu problemin Platoncular için ne kadar büyük bir sıkıntı olduğunu açık kılan sonraki tartışmalar için bkz. Philip Kitcher, "The Plight of the Platonist" (*Nous*, 1978) ve Steve Wagner "Arithmetical Fiction" (*Pacific Philosophical Quarterly*, yakında çıkacak). Matematiksel varlıklar hakkındaki şüphelerin bir diğer güçlü sebebi, Hilary Putnam'ın "Models and Reality" (*Journal of Symbolic Logic*, 1980) adlı makalesinin başında güçlü olarak ortaya konan, standart-olmayan modeller problemidir. (Putnam, yazısının ilerleyen kısımlarında, matematiksel realizm ile ilgili ortaya koyduğu sorunun fiziksel dünya hakkındaki realizm için de sorun olduğunu ileri sürüyor; ne var ki, bu iddia da fazla inandırıcı değildir.)
15) Bkz. Paul Benacerraf "Mathematical Truth," *Journal of Philosophy*, 1973.
16) Eğer bir nesne nesneyi harekete geçiren üzerine hiçbir nedensel etki uygulamazsa, bir nesneye referansı işaretle sağlama alma düşüncesi hakkında tuhaf bir şey var olduğu düşünülebilir. Ama bunun için az etken görüyorum. Gerçekten de Colin McGinn'in gösterdiği gibi ("The Mechanism of Reference," *Synthese*, 1981), sıradan bir fiziksel nesneye el hareketi ile işaret ederek referans verme, işaret edilen nesnenin işaret eden kişi üzerinde herhangi bir nedensel etkisine bağlı olmayı gerektirmez. (*Tipik olarak* elbette, böyle bir nedensel etki olacaktır. Ama tipik-olmayan durumlarda nedensel etki bulunmayabilir ve yine de belli bir insana referans için 'şu adam' sözü başarılı olabilir.)
17) David Malement, *Journal of Philosophy*'de yayınlanacak olan, kitabının bir değerlendirme yazısında bunu savunuyor.
18) Söz konusu alanın (ya da söz konusu her bir alanın) tam olarak sıfır değerini aldığı noktaların oldukça küçük kümesi bir istisna olabilir. Örneğin,

elektromanyetik vb. güçlerin sınırsız bir aralığı olduğundan bu noktalar kümesi aşırı ince olmak zorundadır. Eğer fiziksel alanların bu ufak bölge dışında tüm uzay-zamanı kaplayan kocaman varlıklar olduğu ileri sürülseydi, metnin mevcut paragrafının geriye kalan iddiası birazcık değiştirilmek zorunda kalırdı; lâkin, sonucun temel olarak değiştirileceğini sanmıyorum. (Ayrıca, böyle bir önerinin, tavsiye edilmesi açısından akla çok az yatkın olduğunu düşünüyorum.)

19) Sonraki terminolojiyi yeğlemenin bir sebebi vardır. Zira, iki ya da daha fazla alanları, örneğin, bir elektromanyetik alan ve bir yerçekimi alanını kapsayan kuramları düşünün. (Burada özellikle geometrik terimlerle anlaşılamayan Brans ve Dicke'in skaler alanı gibi, yer-çekimsel bir alandan bahsediyorum.) Elektromanyetik, yerçekimsel ve geometrik özelliklere sahip bir nesnenin varoluşu varsayımı, biri elektromanyetik ve geometrik öteki yerçekimsel ve geometrik özelliklere sahip iki nesnenin bulunduğunu varsayımından daha doğal görünüyor. (Biri elektromanyetik ve geometrik özellikli; başka biri yerçekimsel ve geometrik özellikli; öteki nedensel olarak hareketsiz olan sadece geometrik özelliklere sahip üç nesneli bir açıklama, yine de, daha az doğal görünüyor.) Fakat bir nesne açısından, nesne için tek doğal ad 'uzay-zaman'dır: Söz konusu nesne hem elektromanyetik hem de yerçekimsel özelliklere sahip olduğundan dolayı, 'elektromanyetik alan' ve 'yerçekimsel alan' terimleri uygun değildir.

20) Genel görelilikte, geometrik özellikler gibi.

21) George Bealer, konuşmasında buna itiraz etti; lâkin, onun oldukça ilginç itirazını ve benim niçin onun itirazının geçersiz olduğunu düşündüğümü tartışmak bizi çok uzak bir alana götürür.

22) "Olası dünyalar" soyutu derken David Lewis'in (*Counterfactuals*, Harvard University Press, 1973. Bölüm 4.1), gerçek evren geniş bir gerçekliğin sadece 4 boyutlu bir dilimi olduğu ve diğer 'olası dünyaların' bu geniş gerçekliğin sadece dört boyutlu farklı dilimleri oldukları ve bu nedenle gerçek evrenden daha soyut olmadıkları şeklindeki görüşünü ihmal ediyorum. Bu görüş bana oldukça mantıksız görünüyor; ayrıca, nominalist için az çekiciliği vardır. Ayrıca, eğer diğer olası dünyalar soyut varlıklar değilseler bile, bu dünyaların bilgisinden ve bunlara referans vermeden kaynaklanan sorunlar, sayıların benzer sorunları kadar baş edilemezdir.

23) Bu görüşün bir savunması için bkz. Colin McGinn, "Modal Reality" (R. Healey, *Reduction, Time and Reality*, Cambridge University Press, 1961). Bununla birlikte, McGinn'e muhalif olarak, ilkel bir olabilirlik operatörü kabulümü *mantıksal* olabilirlik operatörü ile sınırlayacağım.

24) (David Lewis'in tarzından sonra, a.g.e.) mantıksal sonuçların vb. küme-kuramsal açıklamalarının şuna dayanarak yanlış olduğu ileri sürülebilir:

'Evli olan bekarlar vardır.' türü muhtelif tutarsız şeylerin tutarlı görünmesine müsaade ederler. Böyle bir iddia çözümlenmesi güç sorunlar ortaya çıkarıyor ve bu iddianın nihaî olarak doğru olup olmadığından emin değilim.

KÜMELER VE SAYILAR*

Penelope Maddy
Çev. Murat Özoğlu

I

Matematik felsefesindeki muhtelif fikirler, "realizm" ya da başka bir ifadeyle, "Platonizm"[1] başlıkları altında bir araya getirilmiştir. Bu görüşlerin temel ilkeleri şöyledir:

1) Matematiksel ifadeler ya doğru ya da yanlıştır.

2) Bu ifadelerin kesinliği, (insan usunun bir icadı ya da insan lisanına özgü bir mizaç vs. değil de) insanoğlunun algı ve bilgisinden bağımsızca var olan matematiksel nesnelerin özelliğinden kaynaklanır.

3) Bu ifadelerin, bu doğruluk değerlerine sahip olmaları, bizim onların hangi değerleri aldıklarını belirleyebilme kabiliyetimizden bağımsızdır (Dummett [4], s. 147; Putnam [19], s. 69-70).

---

* Bu yazı, *Noûs* 15 (1981), no. 4, 495—511'den alınmıştır.

1 Bu noktada "Platonizm" terimini kullanmaktan kaçınacağım; zira, bazı meseleler hakkında (örneğin, matematiksel nesneler evrensel ya da tikel midirler? zamanda ve mekanda yerleri var mıdır? vb.) önceden hüküm veriyor gibi yorumlanabilir.

Bu nevi görüşler, matematiksel söylev için, birçok matematikçinin ön-felsefi görüşlerine uygun düşen ve uygulamalı matematiği izahatımızı kolaylaştıran, standart bir Tarskici anlambilimine olanak tanır (Putnam [19], sayfa 337-341). Matematiksel realizmler revaçta olan iki türden meydan okumalara hâlâ hassas görünmektedir. Bunlardan birincileri, temel olarak epistemolojik olanlardır. Örneğin, eğer matematik keşfedilmemiş türden nesnelerle alâkalı olsaydı, insanoğlu bu nesnelerle, onlardan söz etmek ya da onlar hakkında bilgi sahibi olmak için, uygun olan yollarla nasıl etkileşim kurabilirdi? (Benacerraf [1], Lear [13], Jubien [10]). İkincileri ise, matematiksel realizmlere mantıkçı ya da tam olarak ifade etmek gerekirse, küme kuramcı eğilimlerle yaklaşan ontolojik meydan okumalardır. Örneğin, eğer sayılar küme iseler acaba hangi türden kümelerdir?[2] (Benacerraf [2], Kitcher [11]).

Burada benim amacım, küme-kuramcı eğilimler ile birlikte, muayyen bir formdaki matematiksel realizmin bu itirazları nasıl karşılayabileceğini belirtmektir. Küme kuramcı realizm diye adlandıracağım bu muayyen görüş, her ne kadar metinlerin dışına taşmalar ve bu metinlere dayalı yorumlar kaçınılmaz olsa da, genel itibarıyla Gödel'in metinlerinden çıkarılmıştır *([8] ve [9])*. Küme-kuramcı realizmin kendi hâliyle cazibeli ya da, en azından, ilgi çekici bulunacağını umuyorum. Nitekim, lehinde doğrudan bir savunmam olmamıştır. Tekrar etmek gerekirse, buradaki sınırlı hedefim, yukarıda bahsettiğim popüler itirazların bazı türlerini karşılamaktır. Hatta bu oldukça kapsamlı bir meseledir; dolayısıyla, küme kuramcı realizmi epistemolojik meydan okumaların bazı son versiyonlarına

2 Bu problem sadece doğal sayılar için değil, aynı zamanda, reel sayılar ve sıralı ikililer için de geçerlidir. Reel sayılar için "Set Theoretic Realizm" [16] adlı incelemenin 4. bölümüne, sıralı ikililer için ise Kitcher'ın "The Plight of the Platonist" [11] adlı makalesine müracaat edilsin.

karşı savunmama "Perception and Mathematical Intuition" [Algı ve Matematiksel Sezgi] adlı çalışmamda ([14]) yer vermiş olmam büyük bir talihtir.[3] Burada ben dikkatimi, daha ziyade, ontolojik meselelere çevireceğim. Bir sonraki bölümde, küme kuramcı realizmin geleneksel felsefî realizmlerle olan bağlantı ve benzerliklerini inceleyerek ve bu bağlamda onu diğer matematiksel realizimlerle karşılaştırarak açıklayacağım. İlerledikçe, epistemolojik beyanın nasıl işlemesi gerektiğini belirteceğim ve buradan da epistemolojik beyan ile ontolojik itirazlar arasında bir bağlantı kuracağım. Üçüncü bölümde, ontolojik problemler ön plânda yer alacak. Dördüncü bölümde, itirazlar değerlendirilecek. Sonuncu bölüm ise ilâve yorumlar ve sonuçları içerecektir.

II

"Realizm" kelimesi, felsefede en azından üç temel amaca hizmet eder. Bunlar;

(1) Evrenseller (tümeller) problemiyle alâkalı müzakerelerde, nominalizm ve kavramcılığa tezat düşer. (Buna realizm$_1$ diyelim.)

(2) Dış dünyanın varlığı ile alâkalı tartışmalarda, fenomenalizm (görüngübilim) ile tezat düşer. (Buna realizm$_2$ diyelim.)

(3) Kuramsal varlıkların ontolojik durumlarını incelerken, işlemsellik ve araçsalcılığa tezat düşer. (Buna da realizm$_3$ diyelim.)

Matematik felsefesindeki görüşler, çoğunlukla, realizm olarak adlandırılır. Çünkü, bu görüşler matematikteki ontolojik soruları, genel felsefî realizmlerce içerilen soruların özel durumları ya da

3 "Perception and Mathematical Intuition" (14) adlı çalışmada ele alınan epistemolojik meydan okuma, bilgi ve referansın nedensel kuramı üzerine kurulmuştur. Bu meydan okuma, son zamanların en yaygın uyarlaması olmuştur. Ancak, bu noktada Wittgenstein'in görüşünün farklı bir uyarlama içerdiğine inanıyorum. Bu mevzuya değinmek ise, henüz teşebbüs etmediğim ayrı ve önemli bir görevdir.

benzerleri olarak kabul eder. Sözgelimi, matematiği, yapıların reelleştirilmesi (var kılınması) değil de bu yapıların çalışma alanı olarak gören görüşler, matematiksel problemi evrensellerin genel problemlerinin özel bir durumu olarak ele alıyormuş gibi düşünülebilir (Resnik [21], Benacerraf [2]).

Son zamanların popüler bir matematiksel realizmi, matematiksel problemi kuramsal varlık problemiyle benzer bulan bir realizm oldu (Quine [20]; Putnam [19], sayfa xiii; Steiner [23]). Bu nevi görüşte, matematik, kuramsal bilimlerin en ilerisi olarak görülür. Analitik-sentetik ayrımının kalkması ile realistler; biliminin başarısının ve matematiğin bilimdeki uygulamalarının, elektronlar ve maddeyi oluşturan yapı taşlarının yanında matematiksel yaradılışları da kabul etmemiz için bir sebep teşkil ettiğini iddia ederler. Modern matematiğin, ne kadarlık kısmının fizikteki uygulamalar ve diğer kuramsal bilimler ile gerekçelendirilebileceği hususunda bazı görüş ayrılıkları vardır. Kimileri, sadece zayıf bir yüklemli *(predicative)* küme kuramının gerekli olduğunu savunurken, (Chihara [3]) bir kısmı da övgüyü, netice kuramı basitliği gibi felsefî bilimlerin standart eserlerinden alınan temeller üzerindeki transfinit küme kuramcı hiyerarşinin muhtelif derecelerine kadar genişletmişlerdir. (Putnam [19], sayfa 345-347).

Yukarıda ikinci kategoride ele aldığımız realizme ($realizm_2$) gelince, acaba matematiğin durumu bu türden bir realizme benzerlik arz etti mi? Bu noktada cevap evettir ve bu benzerlik üçüncü kategoride ele aldığımız realizmle ($realizm_3$) olan bağlantının az farklı bir uyarlamasıyla birliktelik arz eder. Bu noktada zihnimde Gödel'in realizmi canlanıyor.[4] Bu realizme göre, hissel algılamaya benzer bir

4 Gödel, matematiksel realizm ve $realizm_2$ arasında bir benzerlik olduğunu görme konusunda yalnız değildir. Kreisel bu mevzuda görüşünü şöyle dile getirmiştir: "Realist görüşün kabulü olan harici matematiksel nesneler, aynı görüşün kabulü olan fiziksel nesnelerden daha kuşkulu değildirler." ([12]: 186)

matematiksel algılama ya da sezinleme yeteneği mevcuttur:

> ... Hissel deneyimden uzak olmalarına rağmen, aksiyomların kendilerini bizlere doğruluklarını kabul etmemiz yönünde baskı uyguladıkları savından da anlaşılacağı üzere, bizlerde, küme kuramına ait nesnelerin algılanması gibi bir şey de mevcuttur. Şahsen ben, hissel algıya nazaran matematiksel sezinlemeye neden daha az güvenimiz olması gerektiği yönünde bir sebep göremiyorum.... Nasıl ki, hissel algılarımızın başarılı bir kuramı için fiziksel nesnelere gereklilik varsa, başarılı bir matematiksel sistem elde etmek için de kümelere o derece gereklilik vardır ([9]: s. 271; [8]: s. 220).

Bizler fiziksel nesneleri algılar, matematiksel nesneleri ise sezinleriz ve

> *...(H)er iki durumda da, birilerinin "veriler" ile alakalı önermeler olarak iddia ettiği bu bağımsız varlıklarla alâkalı önermeleri yorumlamak imkânsızdır...* ([8]: s. 220).

Matematiksel realizm'in bu türü şüphesiz olarak ikinci kategorideki realizm'e benzer. Ne var ki, Gödel, matematiksel olguların bütününün sezinlenebilirliğinin, fiziksel bilimlerin bütün olgularının hislerle algılanabilirliğinden fazla olduğuna inanmaz:

> Doğrulanabilir sonuçları ile bütün bir alana öylesine ışık tutan ve problemlerin çözümlenmesi için öylesine etkili metodlar geliştiren o kadar fazla aksiyom vardır ki, belirgin bir sezinlenebilirlikleri olsun veya olmasın, bu aksiyomlar iyi temeller üzerine konmuş fiziksel kuramlarla aynı anlayış içinde kabullenilmek durumundadırlar ([9]: s. 265).

Bu yüzden Gödel'in fikirleri, hem realizm$_2$ hem de realizm$_3$ ile benzerlikler ihtiva eder. Realizm$_3$ ile olan benzerliği, bir önceki paragrafta tanımladığımız benzerlikten birazcık farklılık arz eder. Çünkü, karşısında kuramsal önermelerin test edildiği düşük dereceli ya da "gözleme dayalı" olgular, fiziksel algıları ve sezgileri içerdiği kadar matematiksel olanları da içerir.

Bu nedenle, burada göz önünde bulunduracağım küme kuramcı

realizm, Gödel'in görüşünün ana hatlarını izler. Matematiksel bilim ile fiziksel bilim tamamen paraleldir. Her ikisi de algısal ve sezinsel esaslardan başlar (realizm$_2$) ve algısallık ya da sezinsellikle doğrulanamaz; ancak kuramsal olarak doğrulanır (realizm$_3$), ilâve kuram basamakları ile gelişir. Gerçekten, bu iki bilimi tek bir bilim olarak görmek belki de en iyisidir. Çünkü fiziksel bilimlerin en basit nesneleri orta-ölçekli fiziksel nesnelerdir ve matematiğin en basit nesneleri ise bu nesneleri içine alan kümelerdir. Öyleyse, bu iki bilim sadece yüksek kuramsal derecede değil, aynı zamanda algısal ve sezgisel seviyelerde de birbirleri ile bağdaşmışlardır. Böylelikle, bu özgün bilim, fiziksel nesnelerin bütününü urelementler[5] olarak kapsayan kümeler kuramı olarak düşünülebilir.

Küme kuramcı realizm'in en belirgin yetersizliği, daha fazla kuramsal ilkenin gerekçelendirilebilmesi için, varsayımlara dayanan tümdengelim *(hypotheticodeductive)* modelinin üzerine kurulu olduğu, matematiksel algı ya da sezgi fikridir. "Perception and Mathematical Intuition" ([14]) adlı kitabın ana konusu, bu fikirlerin bir açıklamasının verilebileceğini ve bunların en azından, orta-ölçekli fiziksel nesneler için nedensel referans ve bilgi kuramlarını savunanlar için kabul edilebilir olduğunu savunmaktır. Burada bu kesimden bahsedilmiştir; zira bu kesim son yıllarda matematiksel realizmlere karşı yapılan epistemolojik itirazların en belirgin kaynağıdır. Bu noktada, bunun meselenin sonu olduğunu iddia etmiyorum.

Orta-ölçekli fiziksel nesnelerin içerildiği kümeler hakkındaki belirli inançları ve aynı zamanda genişletme ve eşleştirme gibi bazı basit küme kuramcı aksiyomları doğrulayan matematiksel algılama ve sezinlemenin değerini varsaydıktan sonra, ileri küme kuramın-

5 Bir urelement hiçbir eleman içermeyen ve bazı kümelere ait olan kümelere denir ve bunlar boş küme ile aynı değildir. 'Pür' küme kuramında bütün elemanlar kümedir ve urelementler yoktur. Bazen, küme kuramının aksiyomlarında urelementlerin bulunması için teknik olarak küçük değişiklik yapılır. (http://mathworld.wolfram.com.Urelement.htlm, Kasım 2002) -Ç.N.

daki kuramsal prensiplerin, aslında fiziksel bilimin uzun süre kullanılmış ve kabul edilmiş teknikleri ile sınandıklarını görmek oldukça kolaydır. Hakikaten de, aksiyomların kuramsal olarak gerekçelendirilmesi, Zermelo'nun öncü çalışmalarında seçim aksiyomunu, 'bilim için gerekli bir prensip' olarak savunması ile başlar. Zermelo şöyle devam eder:

> ...(S)eçim aksiyomu kesinlikle çürütülmediği sürece hiç kimsenin; üretken bilimin temsilcilerini bu "hipotezi" -beni ilgilendirdiği kadarıyla böyle adlandırılabilir- kullanmaktan ve bu hipotezin sonuçlarını mümkün olan en uç dereceye kadar genişletmekten alı koymaya hakkı yoktur. Özellikle, muayyen bir görüşün esasında yer alan muhtemel çelişkilerin sadece bu yol ile keşfedilebilir olması bunun için bir sebep teşkil eder ... (B)ilim, nihaî olarak sabitlenmiş prensiplerin bakış açısından değil; prensipler, bilimin bakış açısından yargılanmalıdır ([25]: s. 187).

Matematikteki süreklilik problemini çözmeye muktedir yeni aksiyomlar için yapılan güncel araştırmalar, kendi sezgisel açıklıklarından (*:evidence*, açık, kanıt) ziyade, doğrulama derecelerine (yani doğrulanmış örnekleri kabul ettiği ve doğrulanmamış olanlarından sakındığı derece) ve açıklayıcılık gücü ve alanına göre sınanmış sayısız kuramsal öneri örneği sağlamıştır.[6]

Matematikte açıklayıcılık fikri, alışılagelmiş dışında bulunabileceği[7] ve epistemolojik beyan ile ontolojik reddetmeleri bağdaştırma bana yardımcı olacağı için, küme kuramının açıklayıcı kuvvetinin bir sunumu olacağını düşündüğüm, temel bir örnek vereyim.

---

6 *Set Theoretic Realizm* [16] adlı kitabın 5. bölümünde, bu konuya özgü birtakım belirli örnekler tartışılmıştır. Yine, Putnam, *Mathematics, Matter and Method* [19] adlı kitabında (66-7), Zermelo'nun "sözde-ampirik metot" kullanımını tartışmıştır.

7 Steiner "Mathematical Explanation" [22] ve " Mathematics, Explanation and Scientific Knowledge" [24] adlı makalelerde matematiksel açıklama ile alâkalı bazı çalışmalarda bulunmuştur. Yine Kitcher, bu konuya katkılarında hoş mütalaalarda bulunmuştur.

Diyelim ki, çarpmanın niçin değişme özelliğine sahip olduğunu merak ediyorsunuz. Bu durumda, bunu Peano'nun postulatlarından faydalanarak, tümevarım metoduyla aşağıdakileri göstererek ispatlayabilirsiniz:

(1) $n.0 = 0.n$

(2) eğer $n.m = m.n$ ise o zaman,

$(n + 1).m = m.(n + 1)$ eşitliği de doğru olur.

Tabi bunu yaparken, birtakım parlak yardımcı önerilere ihtiyacımız olacak. (Mendleson [17], s. 123-128) Eğer Peano'nun önermelerinin doğruluğuna ve teoremin sağlamlığına ikna olduysanız, bu örnek sizi çarpma işleminin değişkenliğine ikna etmeli. Ne var ki, çarpmanın değişme özelliğinin olduğuna başta ikna edildiniz. Oysaki, sizin sorunuz zaten neden bu özelliğin olduğuydu ve ispat, bu sorunun cevabını bulma adına yeterli olmadı. Şimdi, mevzuyu küme kuramcı bir perspektiften ele aldığınızı ve çarpma işleminin neden değişken olduğu sorusunu kendinize bir daha sorduğunuzu farz edelim. Cevap burada gayet açık ve hazırdır; çünkü eğer A ve B iki küme iseler, biliyoruz ki, o zaman AxB ve BxA kartezyen çarpımları arasında birebir örten bir bağıntı vardır.

Bu olgunun ispatındaki temel fikir, eski bir gözleme dayanır: n sıralı m noktadan oluşmuş bir dikdörtgen $n.m$ sayıda nokta içerir; fakat bu dikdörtgenin kenarlarını yer değiştirirsek $m.n$ sayıda nokta içerir. Bunun, çarpmanın neden değişken olduğunu açıkladığını farz ediyorum ve bu postulatların böyle bir açıklama sağlayabilme yetisi; içerildikleri küme kuramcı aksiyomlar için bazı kuramsal destekler sunar. Ancak, eğer dikkat edilecek olursa, aslında açıklanması için küme kuramcı prensiplerin kullanıldığı önermeler sayı kuramcı önermelerdir. Bu örnek o açıdan değişik bir örnek değildir; zira, küme kuramının kuramsal hipotezlerini destekleyici bazı örnekler ve bu hipotezler aracılığıyla açıklanan önermeler, genel itibariyle sayı kuramına aittir. Bu yüzden, şimdiye kadar belirtmeye çalıştı-

ğımız, epistemolojik beyan ile ontolojik karşı gelmeler arasındaki dikkat çeken bağıntı şöyledir; önerilen epistemolojik bir beyanın çalışması için şu ontolojik soruya bazı cevaplar verilmesi gerekmektedir: Kümeler ve sayılar arasında nasıl bir ilişki vardır?

III

Sayılar ile kümeler arasındaki ilişkinin bildik bir açıklaması, sayıların basitçe belirli kümeler olmalarıdır. Bu yaklaşımın ontolojik ekonomi açısından avantajı vardır ve sayıların, kümeler için sağlanmış epistemolojik kuram içinde yer almasını sağlar. Hangi kümelerin sayılar olarak belirlendiğine bağlı olarak, sayılarla alâkalı olgular kümelerle alâkalı temel algısal olgular içerisinde yer alabilir. Ayrıca, elbette Peano'nun aksiyomları gibi, sayılar kuramıyla alâkalı bir şeyler de, küme kuramının sezgisel aksiyomları ve onların sonuçları arasında yer alacaktır. Ne yazık ki, Benacerraf *([2])*, sayıların birer küme olduğunu savunan bu görüşlere ciddî itirazlarda bulunmuştur. Ayrıca, matematiksel realistin, sayıların basitçe matematiksel nesnelerin başka bir çeşidi olduğu fikrine kapılmaması için, bu görüşe de itirazları olmuştur.

Sayıların küme oldukları görüşüne karşı itirazlar, sayılar kuramının küme kuramına indirgenebilirliği için bazı makul gereksinimlerin belirlenmesi ve bu gereksinimleri sağlamak için, sayıların birkaç farklı küme sistemleri düzenlenerek tanımlanabileceğinin gözlemlenmesi ile birlikte başlamıştır. Bunlardan en iyi bilineni Frege, Zermelo ve von Neumann'ın beyanlarıdır. Meselâ, Frege'nin beyanına göre,

3 = "'0, 1 veya 2 ile özdeş' kavramı ile eş-çoklukta" kavramının uzantısı

$= \{x : \exists F: x \text{ --}>^{1\text{-}1}_{\text{örten}} \{0,1,2\}\}$

Zermelo'nun beyanına göre

$3=\{\{\{\emptyset\}\}\}$

von Neumann'ın beyanına göre ise

$3=\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

olarak tanımlanır.

Ne var ki, Benacerraf bu beyanların her birinin içerdiği kümelerin (sınıfların), gereksiz birtakım koşulları sağladığını; ancak, sayı kuramının küme kuramına indirgenebilmesi için gerekli koşulları sağlamadan çok uzak olduğunu belirtmiştir.

Meselâ,

Frege'nin beyanına göre, $\{1\} \in 1$;

Zermelo'nun beyanına göre, $1 \notin 3$

ve von Neumann'ın beyanına göre, $1 \in 3$.

Benacerraf, eğer bu beyanlardan herhangi birisi, hangi kümenin gerçekten sayılar olduğunu belirlemiş (seçmiş) olsaydı, bu durumda, hangisinin hangisini belirleyeceği mevzuunda bir tez olmalıdır diye devam eder ve böyle bir tez olmadığı için sayıların kümeler olmadığını ileri sürer.

Benacerraf'ın bu düşüncesinin üzerine, akla gelebilecek ilk soru şudur: Küme kuramcı beyanlardan hangisinin doğru olduğunu ortaya koyan böyle bir düşünceye neden ihtiyacımız olmalı? Buradaki düşünce şudur: $3 = \{\{\{\emptyset\}\}\}$ eşitliğinin doğru olup olmadığı sorusu, çözümü için sayılar kuramına ait derin teoremlerin ispatını bekleyen bir soru değildir; daha ziyade, konu ile ilgili bütün bilgi zaten mevcutmuş gibi gözüken bir sorudur. Benacerraf'ı bu mevzuda onaylayalım ve elimizdeki bilginin bu meseleyi sonuçlandırıp sonuçlandırmayacağı sorusunu şimdilik bir kenara bırakalım.

Benacerraf'ın sayıların kümeler olmadığı gibi, herhangi bir türden nesneler de olmadığı yönündeki itirazı çok açık değildir. Bu itirazının, yukarıda göz önünde bulundurduğumuzla aynı paralellikte devam etmesi gerekir. Diyelim ki, bir nesneler dizisi, sayı kuramının bu nesnelerin kuramına indirgenebilmesi için tüm gereksinimleri

karşılasın. Bu durumda, bu dizinin üçüncü elemanının 3 sayısı olduğunu iddia etmek için elimizde ne gibi bir gerekçe var? Dizinin geri kalan elementleri ile ilişkisi olduğundan dolayı bu nesne 3 sayısı ile aynı işlevi görür; ancak, Benacerraf bu nesnenin şu ya da bu nesne şeklinde ayırt edilebilmesi için ekstra niteliklere sahip olması gerektiğini ileri sürer. Ve bu gereksiz nitelikler, zihnimizde $\{\{\{\varnothing\}\}\}$ kümesinin gereksiz nitelikleri ile aynı soruyu uyandırıyor: Niçin başkaları değil de bunlar? Başka bir deyişle; bu nesnenin, 3 değil de (başka bir dizide) değişik gereksiz niteliklere sahip başka bir nesne olduğunu iddia etmek arasında fark yoktur. Ve bu nesnelerden herhangi birisi 3 sayısı olsaydı, o zaman tezlerimiz onu sahtesinden ayırt edebilmeliydi. Böyle bir şey olmadığı için, 3 belirli bir nesne değildir.

Bu itirazın rahatsız edici bir özelliği de, nesne olmanın neyi gerektirdiği mevzuunda bir kabule dayalı olmasıdır. Benacerraf *([2], s. 70)*, sayılar için gerekli ve yeterli niteliklerin bu sayılara, sayı sisteminin içerisindeki rolleri aracılığıyla verilebileceğini savunur ve eğer bir nesnenin gereksiz özellikleri varsa, bu nesnenin sayı olmaktan diskalifiye edileceği sonucuna varır. Fakat, sayıların gerekli ve yeterli olan bu niteliklerin dışında nitelikleri neden alamayacağı açık değildir. Boş küme ağırlık ve yükseklikten yoksunken, neden 3 sayısı bütün bu gereksiz niteliklerden yoksun olmasın?[8]

İyi ki, burası nesnelliğin ontolojik araştırmasının yeri değildir. Meseleyi küme kuramcı realizmin bakış açısından ele alalım. Bu görüşe göre, kümeler diğer fiziksel nesneler gibi nesne ve maddeciklerdir. Hatta, ([14])'te bahsedilen epistemolojik beyanın bir parçası da şudur ki, fiziksel nesneleri içeren kümenin uzayda ve zamanda bir yeri vardır. Özellikle, bir şeylerin oluşturduğu küme, o şeylerin tamamının yerleştirildiği yere yerleştirilir. Ya sayılar? Benacerraf'ın

8 Steiner bu noktayı, sayıların nesneler olduğunu savunurken dile getirmiştir. *Mathematical Knowledge* [23] adlı kitaba bakınız (88-9).

sayıların küme olmadığı yönündeki itirazının baskısını onaylayan ve yine sayıların herhangi bir türden nesneler olmadığı yönündeki kanısından kuşkulanan birisi, sayıların ikinci türden bağımsızca var olan matematiksel nesneyi temsil edeceği fikrine kapılabilir. Ve eğer gerçekten de bu fikir doğru ise, o zaman bu nesneleri içerebilmesi için matematiksel algı ve sezginin tanımında bir değişiklik yapılması gerekmektedir.

Böyle bir yöntem ise, bariz olarak, küme kuramcı inanca ait görüşleri kısmen dahi olsa motive eden ontolojik ekonominin prensiplerini çiğneyecektir; fakat bunu bir tarafa bırakalım. Benim esas kuşkum şudur ki, epistemolojik tanımı genişletmek için fiziksel nesnelerin kümelerine atandığı gibi sayılara da bir yer atanmalıdır; fakat bu çok farklı bir türden yer olarak sonlanacaktır. Örneğin, elime baktığımda, parmaklarımı içeren küme benden önce gelir ve aynı şekilde 10 sayısı da benden önce gelir. Fakat, eğer durum gerçekte böyle olursa, o zaman 10 sayısı aynı zamanda, Amerika Birleşik Devletleri Beysbol Ligi'ndeki, değişik eyaletlere ait herhangi bir takımın atış sırası listesinde de sunulur. Burada açık olan nokta şudur ki, herhangi bir nesneler kümesini bir yere, belirli bir zamanda yerleştirmek makul olurken, bir sayı aynı anda birçok farklı mekâna yerleştirilmek zorunda kalacaktır. Başka bir deyişle, en azından geleneksel olan bir kriterce, sayılar tikellerden ziyade daha çok evrenseldirler.[9]

Sayıları evrenseller olarak ele aldığımız takdirde, bildik bir zemin üzerinde olacağız. Frege, sayıların fiziksel nesnelerin bir özelliği olmadığını göstermiştir ([6], bölüm 23). Peki o zaman sayılar neyin nitelikleridir? Bu soruya değişik cevaplar verilmiştir; ancak, mesele küme kuramcı realist bakış açısından ele alınırsa, en cazip ve en akla

9 Karumca, aritmetik üzerine yoğunlaşan yazarların, matematiksel realizmi, realizm$_1$'in özel bir durumu olarak görme sebebi budur.

yatkın cevap "kümeler" olur. Bu cevap daha önce bahsettiğimiz ontolojik ekonomiye aykırı düşmez. Nitekim, herhangi bir nesne üzerindeki çalışma, aynı zamanda o nesnenin nitelikleri üzerindeki çalışmayı da mutlaka içerir. Benim önerime göre, küme kuramcı realizmin dayandığı bilim/matematik benzerliği şu şekilde genişletilebilir: Sayılar kümelerin nitelikleridir (uzunlukların fiziksel nesnelerin nitelikleri olduğu gibi) ve sayı kuramı küme kuramının temelde sonlu kümelerin sayısal nitelikleriyle ilgilenen bir bölümüdür.

Bu görüşe karşı değişik itirazları göz önünde bulundurmadan önce, ölçünün bir açıklamasını tarif ederek ve bunun hem uzunluğa, hem de sayı niteliklerine nasıl uygulandığını belirterek, bu benzerliğin detaylarına değinmek istiyorum.[10] Başlangıç olarak, uzunluk fiziksel bir niceliktir ve nicelikler ise nesnelerin (ister fiziksel ister matematiksel olsun) dereceyi kabul eden nitelikleridir. Eğer birkaç nesne aynı niceliğe sahipse, o hâlde bu nesneler kıyaslanabilmeliler. Başka bir ifadeyle, sahip oldukları bu niceliğe göre doğrusal (lineer) bir sıralama oluşturmalılar. Bu yüzden, eğer uzunluğu ele alacak olursak, şöyle diyebiliriz: A, B'den kısadır; ancak ve ancak, A ve B'yi birer uçlarını sabitleyerek yanyana getirdiğimizde, B'nin diğer ucu A'nın diğer ucunun ötesine uzanır. Bu bağıntı (doğrusal sıralama bağıntısı diye adlandıralım) kolaylıkla taşınabilir değişik fiziksel nesneler arasında doğrusal bir bağıntı oluşturur. Aynı şekilde, bir kural, nesnelere numerik saptamalarda bulunmak için bir ölçek oluşturur.[11] Bir ölçeğin belirli bir niceliği ölçmesi ise, ancak ve ancak, o ölçekte ölçüm için, sadece aynı nicelliğe sahip nesnelere ve numerik saptamaları aynı niceliğin doğrusal sıralaması ile uyuşan nesnelere uygulanan bir kuralın olması ile mümkündür. Öyleyse, sayıların bir cetvele (ölçek) oranla saptanması uzunluğun ölçümü

10 Bu beyan, Ellis'in görüşünden ortaya çıkmıştır. [5]

11 "Sayısal saptama" ile bir sayı niteliğinin atanmasını kastediyorum. Burada, "sayı" ve sayı niteliği"ni birbirinin yerini tutacak şekilde kullanacağım.

için bir ölçek sağlar.

İlk soru, aynı doğrusal sıralamayı doğuran iki farklı doğrusal sıralama bağıntısının, aynı nicelikleri mi, yoksa farklı nicelikleri mi kıyasladığı yönündedir. Meselâ, yeni bir bağıntı kuralım ve diyelim ki: A B'den *-kısadır ancak ve ancak A'nın bir ucundan diğer ucuna tam olarak denk gelen bir ip, B'nin iki ucuna yetişmez. Burada soru, "x y'den kısadır" ve "x y'den *-kısadır" ifadelerinin eşanlamlı olup olmadığı değildir. Eğer ifadeler, aynı fiziksel özelliği ayırabilmek için eşanlamlı olmak zorunda olsalardı, o zaman x y'den sıcaktır, x'in moleküler hızı y'den fazladır, x'in cıvanın hacmindeki etkisi y'den daha fazladır gibi nitelikler hiçbir zaman teşhis edilemeyecekti. Bilimsel nitelikler nomolojik♦ eş-uzantılılık gibi şeylerle ayırt edilmiştir (Putnam [19], 19. Bölüm). Bu nedenle bilimsel realistin açık cevabı, "kısadır" ve "*-kısadır" ifadelerinin aynı fiziksel nitelikler olduğu yönündedir.

Aynı nedenle, numerik ayrımlarının sıralaması, uzunluğun doğrusal sıralaması ile uyuştuğu sürece, uzunluk değişik ölçeklerle ölçülebilir (metre ve yarda gibi). Nitekim, bir yardalık uzunluk ile 0.9144 metrelik uzunluk aynı fiziksel niteliklerdir. Sonuç olarak, ölçekler kendi aralarında, sayısal saptamaları belirleyen kurallar aracılığı ile değil, kendi sayısal saptamaları aracılığı ile ayırt edilmişlerdir. Bu yüzden de, aynı ölçekte değişik kurallar ile ölçüm yapılabilir. Örneğin, 3 cm'yi bu ya da şu cetvelle ölçmüş olman aynı

♦ Nomoloji, genel fiziksel ve mantıksal kuralları inceleyen araştırma alanıdır. (Ç.N.)

12 Bu paragrafın tanımlamaları, ısı ile alâkalı durumda yaptığımız tanımlamalarla aynı çizgi üzerinde hareket ederler. Sıcak olmak insanlarda belirli duyulara sebebiyet vermek demektir. Bunu, moleküler hareketlenmenin şöyle şöyle olması ile açıklama durumundayız. Fakat moleküler hareketin şöyle şöyle olması aynı zamanda cıva hacmi üzerine belli bir etkiye sebebiyet vermesi demektir. Tanımlamanın geçişliliğinin kullanılmasıyla; insanlarda belirli duyulara sebebiyet verme ile cıva hacmi üzerine bir etkiye sebebiyet verme aynı nitelikte olur.

fiziksel niteliktir.[12]

Fiziksel bilimler fiziksel nesneler üzerinde bir uğraş olduğu gibi, küme kuramı da kümeler üzerinde bir uğraştır ve sayı ise, üzerinde uğraşılan nicelikler arasındadır. Bir doğrusal bağıntının varlığını kanıtlamak, şöyle bir bağıntı aracılığı ile hiç de zor olmayacaktır: A'nın sayısı B'den daha azdır; ancak ve ancak A'nın her bir elemanı, B'nin farklı elemanı ile eşleşirken; tersi mevzu bahis olmasın. Aynı doğrusal sıralamayı, değişik doğrusal sıralama bağıntıları kullanarak kurabileceğimiz açıktır. Ancak, sayısal nicelik mevzu bahis olduğunda, ölçü biriminin seçiminde keyfiliğe yer yoktur. Örneğin, 1 sayı niteliğinin (3 ya da herhangi bir sayı değil de) bir metrelik bir cetvele atanması gibi, münferit (tekil) şeylere 1 sayı niteliğinin atanmasında hiçbir keyfîlik yoktur. Sayı niteliklerinin ölçümünde, keyfî bir birim seçiminin olmayışı, bu sayı niteliklerinin ölçümü ile diğer ölçümler arasındaki uyuşmazlık için açık bir sebeptir. Bir A kümesi 3 sayı özelliğine sahiptir; ancak ve ancak şu koşul sağlanırsa;

$\exists x \exists y \exists z\ (x \neq y\ \&\ y \neq z\ \&\ x \neq z\ \&\ x \in S\ \&\ y \in S\ \&\ z \in S\ \&\ z \in S\ \&\ \forall\ w\ (w \in S \supset w = x \vee w = y \vee w = z))$.

Diğer bir ifadeyle, biz sayı niteliklerini elementleri teker teker göz önünde bulundurarak ölçeriz ve bunlar küme verildiğinde zaten ayırt edilir.

Ancak, her ne kadar ölçek seçiminde keyfiliğe yer olmasa da, o ölçek üzerinde ölçüm kuralları için olası seçeneklerde çeşitlilik vardır. Benacerraf'ın da önerdiği gibi, Amerika'da sayı niteliklerini ölçmenin en yaygın yolu, kümeyi, "bir", "iki", "üç", vesaire türündeki bir simge örnekleri dizisi ile kıyaslamaktır.[13] Fakat, uzunluğun

13 Esasen, bu analiz bazı yönleriyle Benacerraf'ın analizine benzer. Benacerraf şöyle yazmıştır: "Temel düşünce şudur ki: (sayı sözcüklerinin) bu tekrarlamalı dizileri, kümeleri ölçmek için kullandığımız bir çeşit cetveldir." ([2]: 71) Burada ele alınmayan, Benacerraf'ın görüşünde biçimci bir element vardır.

ölçümünde olduğu gibi, ve benzer sebeplerden ötürü, sayılar için de aynı ölçek üzerinde değişik kurallar kullanarak ölçüm yapmak ve aynı niceliği elde etmek mümkündür. Meselâ, küme, Almanca sembollerin dizisi ile ya da von Neumann'ın sıralı sayı dizisi ile kıyaslanabilir.

IV

Kümelerin sayılarla olan bu ilişkisini ortaya koyduktan sonra, hem Benacerraf hem de Frege'nin, sayıların nitelikleri ile alâkalı görüşe itirazda bulundukları gerçeği ile yüzleşmem gerekli. İsterseniz Benacerraf'ın sayıların belirli kümeler olduğu görüşüne karşı itirazını yeniden hatırlayalım. Benacerraf'ın itirazı, eğer sayılar belirli kümeler ise, hangi kümeler olduklarını kanıtlayacak tezler olması gerektiği ve böyle tezlerin olmadığı yönündeki iki iddia üzerine kurulmuştu. Birinci iddiasını kabul ettik; ancak, ikinci iddiasını şimdiye bıraktık. Çünkü aslında bu, Benacerraf'ın sayıların nitelik ile görüşü aleyhine hareket etme sebebidir. Benacerraf'ın korkusu, Frege'nin 3 sayısı ile ilgili önerisi üzerinedir. Zira eğer sayılar gerçekten kümelerin nitelikleri olsalardı, bu Frege'nin 3 sayısını üç elemanlı kümelerin kümesi ile eş tutma önerisinin, Zermelo ve von Neumann'ın önerilerinden daha iyi olduğu fikrini doğurabilirdi. Bu noktada ben, Benacerraf ile aynı görüşe katılma eğilimindeyim ve son bölümde, bu mevzu ile alâkalı söyleyecek çok şeyim olacak. Şimdilik, Benacerraf'ın nitelik ile alâkalı görüşlere karşı itiraz ederek, bu sonucu engelleme girişimlerini göz önünde bulundurmak istiyorum.

Benacerraf'ın itirazı, çoğunlukla, kelime yapısı olarak sayıların bildik sıfatlara benzemediği şeklindeki, dilbilgisel belirtiler üzerine kuruludur. Sözgelimi, sayı kelimeleri yapay durumlar hariç "...dir/dır (is/are)" türü bağlamlarda yer almaz; sayı kelimelerinin bütün sıfatlardan önce gelmesi gerekir. Bu tür olguların, sayıların küme-

lerin nitelikleri olmadığı iddiasını neden desteklediğini görmek zordur. Herkes tarafından kabul edileceği gibi, "ellerimin kümesi ikidir" şeklinde birşey diyemeyiz. Yapabileceğimiz en iyi şey, "ellerimin kümesi 'iki elemanlıdır'" demektir. Gerçekten de herşeye rağmen, "kalemim sekiz santimetre" şeklinde bir cümle de kuramayız. En iyi şu şekilde söyleyebiliriz: Kalemim sekiz santimetre uzunluğundadır. Ancak, bu kimseyi uzunluğun fiziksel nesnelerin özelliği olduğunu düşünmekten alıkoyamaz. Üstelik, dilbilgisel gerçeklerin önemini değerlendirmek iki sebepten dolayı zordur. Bunlar;

1) bizim dilbilgisel yapılarımızın, gerçeği hangi derecede yansıttığı bilinmemektedir.

2) bu tartışmada, her iki karşı görüşe de destek verecek dilbilgisel kanıtlar mevcuttur.

Bu iki husus Frege'nin aşağıdaki şu sözlerinde belirtilmiştir:

> ... (B)urada bizim meselemiz, bilimin amaçlarına uygun olan kullanışlı bir sayı kavramına ulaşmaktır. Bu yüzden, bizler sayıların günlük yaşamda niteleyici tümce yapılarında da gözüktüğü tezi ile vazgeçmemeliyiz ([6], bölüm 57).

Ne Benacerraf'ın ne de Frege'nin kendi görüşleri göz önüne alındığında dilbiligisel kanıtları bir kenara bırakmada istekli olmadıkları not edilmeye değer. Meselâ, Lawrence Olivier'ın, 3 sayısı ile aynı rolü oynayabileceğinden bahsetmek garip karşılanmamalı, öyle değil mi? Frege şöyle demektedir:

> ... (B)ir sayının, bir kavramdan daha kapsamlı ya da az kapsamlı olduğundan bahsetmek çok alışılmış değildir. Ne var ki, eğer böyle bir durum gerçekleşirse, hiçbir şey bizi böyle düşünmekten alı koyamaz ([6], bölüm 69). [14]

Benacerraf ve Frege'nin, sayıların kümelerin nitelikleri olduğu görüşüne karşı itirazı, sayıların fiziksel nesnelerin nitelikleri olduğu

14 Bu dilbigisel yapılar, sözdizimsellikten daha ziyade semantik olarak sapma gösterirler. Ancak, bu ayrımı yapmak oldukça zordur.

görüşüne karşı itirazından çok daha zayıftır. İlkine karşın, Benacerraf sadece "'onyedi'nin' sınıfların bir yüklemi olarak düşünülmeye *ihtiyacı* yoktur" şeklinde özetlemiştir ([2], sayfa 61). Ayrıca, sayıların fiziksel nesnelerin nitelikleri olduğunu savunan görüş üzerine, şüpheleri ortadan kaldıran bir atak ekledikten sonra ([6], bölüm 23), sayıların kavramların bir niteliği olduğunu yadsıması mevzuunda Frege'nin hassasiyeti azalmıştır. (Burada göz önünde bulundurulan görüş, aslında sayıların, kavramların uzantılarının bir niteliği oldukları görüşüne çok yakındır. Bu fikir Frege tarafından değerlendirilmemiştir; ama belli ki, bir kavramın böylesine bir niteliği, o kavramın uzantısı ile saptanabilir.) Frege'nin önerdiği deliller yine dilbilgiseldir: Kelime yapısı olarak sayılar "F kavramı 0 sayısına sahiptir" gibi önermelerde, yüklemin bir parçası olarak bulunurlar; yine sayılar "2 sayısı" ("the number 2") ifadesinde olduğu gibi harf-i tarif (the) ile birlikte bulunur, vesaire. Bu tür delillerin, şüpheleri ortadan kaldıran, kesin deliller olmadığını önceden görmüştük, Frege'nin kendi gözünde dahi bu böyledir.

Frege'nin bir noktada, sayıların kavramların açılımlarından ziyade, kavramlar olabileceğini belirtmesi ilginçtir. Bu, en azından, bir nesne görüşünden daha çok nitelik görüşüne yakın görünür. Frege bu görüşü reddeder; çünkü bu görüş aşağıdaki iki itiraza tâbidir:

> 1... "2 sayısı" ("the number 2") gibi ifadelerde, belirli harf-i tarif (the) kullanımı ve sayıların çoğul olarak ifade edilmesinin (birler, ikiler, vs.) imkânsızlığı, ve aynı zamanda, sayının, sayı ifadelerinin yükleminde sadece bir element oluşturması gerçeği ile belirtildiği gibi, sayıların nesneler olduğu şeklindeki daha önceki ifademle çelişir.
> 2... kavramlar kendileri çakışmadığı hâlde aynı uzantılara sahip olabilirler ([6], bölüm 69, dipnot 1).

Görüldüğü gibi, ilk itiraz fazla ciddî değildir; fakat ikincisi gerçek bir problem gibi modern bakışın dikkatini üzerine çeker. Acaba aşağıdaki eşitliğin sağlanıp sağlanmadığı hakkında nasıl hüküm

vereceğiz:

" 'kendisi ile özdeş olmayan' kavramı ile eş-çoklukta" kavramı

=? " 'kare çemberi' kavramı ile eş-çoklukta" kavramı

Ya da, aynı şekilde, şu eşitliğin sağlanıp sağlanmadığı hakkında nasıl hüküm vereceğiz:

2 = " '0 ya da 1 ile özdeş' kavramı ile eş-çoklukta" kavramı

=? " ' " '0 ile biten doğal sayılar serisinin adedi' kavramı ile eş-çoklukta" kavramı ile biten doğal sayılar serisinin elemanı' kavramı ile eş-çoklukta" kavramı

= sıfırın ardılının ardılı

Başka bir ifadeyle, eğer iki ortak-uzantılı kavram farklı olabilirse, bu durumda biz sayı kuramının temel özdeşliklerini koruyabilecek miyiz?

Zamanında, Frege şöyle yazmıştır:

> Ortaya çıktığı üzre, bu itirazların birleştirilebileceğine ikna oldum; fakat bunu yapmak bizi şimdiki amacımızdan çok uzaklara götürür ([16], bölüm 69, dipnot 1).

Sonradan çözüm gelir:

> ... (U)zantıdaki rastlantı, nesneler arası özdeşliğin yerini tutan bağıntının kavramları arasındaki etkileşim için zorunlu ve yeterli bir kriterdir ([7], s. 80).

Bu her ne kadar nesnellik görüşüne karşı koyan nitelik görüşü için kapı aralasa da, aldatıcı bir yaklaşımdır.[15] "'F ile eş-çoklukta' kavramı" gibi ifadelerin, yine de, kavramlara değil de nesnelere isnat etmesi şeklinde sonuçlanır ([7], s. 48). Fakat, Frege'nin görüşlerindeki bu karmaşıklığı yeniden düzene sokmaktansa, burada bahsi geçen nitelik görüşü için de, yukarıdakine benzer bir zorluk ortaya

15 Bu noktada, bu mevzuu bana belirten Resnik'e müteşekkir olduğumu bildirmek istiyorum. Aynı zamanda, Jack Vogel de, Frege'nin hayatının son zamanlarında sayı ile alâkalı bir nitelik kuramına daha uysal baktığını ima eden bazı makalelerine dikkatimi çekmiştir.

çıkar mı yoksa çıkmaz mı, onu sorgulayalım.

Önerilen görüşte, önceden zikredilen özdeşliklerle kıyaslanabilir özdeşlikler şunlardır:

"{∅, {∅}, {{∅}}} ile eş-çoklukta" niteliği

$=^?$ "{∅, {∅}, {∅, {∅}}} ile eş-çoklukta" niteliği

ya da

2 = "{∅, {∅}} ile eş-çoklukta" niteliği

$=^?$ "∅ ∪ {∅} ∪ {{∅}} ile eş-çoklukta" niteliği

= sıfırın ardılının ardılı.

Tekrar edecek olursak, burada sorumuz, niteliklerin nasıl ayırt edileceğidir. Bu noktada Frege'yi takip edip, ortak-uzantılı niteliklerin özdeş olduğunu iddia edemeyiz; nitekim, bu genel manada doğru değildir. Diğer bir taraftan, küme kuramcı realistin mecbur kaldığı gibi, eğer biz de bilim/matematik benzerliğini ciddiye alıyorsak, o zaman daha önceki itirazlar, ilgili yüklemlerin anlamdaşlığının bir koşul için oldukça kuvvetli olduğunu göstermiştir. Gerekli olan ise, nomolojik ortak-uzantılılık gibi şeyler ve yukarıdaki yüklemlerin yararlandığı türden şeylerdir. (Onların ortak-uzantılılıkları Zermelo-Fraenkel'de ispatlanabilirdir.)

Bu sadece, aynı ölçek üzerinde ölçüm yapmak için, değişik kuralların aynı niceliği bulabileceği noktasına yaklaşmanın başka bir yoludur. Ayrım biraz kaba ve hazır olsa da, anahtar düşünce, sayı niteliklerinin yüklemlerin uzantıları ya da anlamlarından daha çok, bilimsel niteliklere benzediği fikridir. Bu yüzden, Frege'nin dipnotundan çıkarılanlanan kaygı, farklı iki bir-metrelik ölçü çubuğunun her ikisinin de metre birimiyle ölçüm yapabilip yapamayacağı, ya da başka bir ifadeyle, bir metreyi şu ya da bu cetvelle (yani farklı cetvellerle) ölçmüş olmanın aynı fiziksel nitelik olup olmadığı problemi ile benzerdir. Aynı şekilde Benacerraf, sayılar kuramını von Neumann ve Zermelo'nun uyarlamasından öğrenen iki gencin hikâyesinden bahsederken, gençlerin 3'ün 17'nin elemanı olup olmadığı mevzuundaki anlaşmazlıkları, bir santimin tahta mı yoksa plâstik

mi olduğu mevzuundaki hayali bir tartışmaya benzer bulunur.

O zaman, şu da, benim, Benacerraf'ın ontolojik meydan okumasına önerdiğim çözümümdür. Sayıların, kümeler ve başka türden nesneler olmadığına ben de katılıyorum. Sayılar kümelerin nitelikleridir, sayı kuramı ise küme kuramının sonlu kümelerin sayı nitelikleriyle ilgilenen bölümüdür. Haddi zatında, sayı kuramı küme kuramının kendi genel epistemolojik beyanının içerisinde yer alır. Son olarak, sayılar kuramının küme kuramı içerisinde birçok yorumunun olmasının sebebi, bu yorumların, gerçekten de sadece sayelerinde kümelerin sayı niteliklerinin ölçülebileceği alternatif kurallar olmasıdır.[16]

V

Şimdi, doğal olarak akla gelebilecek bir kaç soruyu cevaplamak ya da en azından tartışmak istiyorum. Birinci soru şöyle: Sayı nitelikleri kümeler gibi küme kuramının resmî ontolojisinde yer almalı mı? Ve bu soruya bağlı olaraktan ikinci soru şu: Sayılarla alâkalı nitelik terimleri, küme kuramının resmî dilinde yer almalı mı? Öncelikle birinci soruya cevap olarak, bu sorunun, uzunlukların fiziksel bilimlerin resmî ontolojisinde yer alıp almadığı sorusu ile benzerliğini belirtmek istiyorum. Bu noktada, matematiksel realizmin problemleri realizm$_1$'in özel bir durumuna dönüşür. Putnam, evrensellerin fiziksel bilimlerin ontolojisi tarafından içerilmesi gerektiğini öne sürer ([19], bölüm 19) ve eğer bu doğru ise aynı şey küme kuramı için de doğru olmalıdır. Ancak mesele küme kuramcı realizmin bakış açısından ele alınacak olunursa, ki bu realizm de, matematiksel realizm, realizm$_2$ ve realizm$_3$ ile benzerdir; bu soru çok da elzem değildir. Şunun farkına varmak yeterlidir: Evrenseller problemi-

16 Kanaatimce, reel sayılarla ilgili ontolojik problemler de aynı şekilde çözümlenebilir. "Set Theoretic Realizm" [16] adlı tez çalışmasının 4. bölümüne bakınız.

nin, küme kuramı için bir problem oluşu, fiziksel bilimler için bir problem olmasından daha fazla bir problem teşkil etmez. Sayılar; uzunluk, hız ve ağırlık gibi (ne olursa olsun) aynı ontolojik statüden hoşlanırlar.

İkinci soru birçok yönden biraz daha fazla sorunlu. Nitelikler biçimsel küme kuramı içinde genellikle nasıl yer alırlar? Cevap: Uzantıları aracılığıyla. "Asal olmak" ya da " reel olmak"'tan değil de, "asal sayılar kümesi" ya da "reel sayılar kümesi"nden bahsedilir. Nitelik görüşünün, Frege'nin sayıları eş-çokluktaki kümelerin kümeleri ile bir tutmasına destek çıkması, benim, Benacerraf'a mutabık kalmayı yeğledim dememin sebebidir. Elbette problem şudur: 3 elemanlı olmanın açılımı bir küme değil bir has sınıftır*. Bu yüzden, benim düşünceme göre, sayı niteliklerinin formel küme kuramındaki rolünün anlaşılması problemi, has sınıfların rolünün anlaşılması probleminin özel bir durumudur. Bu rolü *Proper Classes* adlı eserimde aydınlatmaya çalıştım. Bu kitapta bir lisan için has sınıf terimleri ile birlikte bir semantik sağladım ve hem sayılar için terimlerin nasıl oluşturulabileceğini hem de sayılar üzerinde nicelendirmenin nasıl başarılacağını belirttim. (Özellikle 7. bölüme bakınız).

Sayılar kuramının küme kuramının konusu içinde içerildiğini önermiş olmama rağmen, bu sayı kuramının küme kuramına herhangi bir bildik anlayış içerisinde bir indirgenmesi değildir. Fiziksel bilimlerdeki indirgemelerle olan benzerlikler yetersizdir. Sayıların sayı kuramcı (makro) niteliklerinin küme kuramcı (mikro) niteliklerine dayanılarak, yani belirli kümeler ile olan özdeşlikleri ile açıklanmış olmaları mevzu bahis değildir. Meydana gelen şey, bir kuramın diğerine indirgenmesi olayı değildir; ortada iki kuram ve iki tür nes-

* Has sınıf *(proper class)* kavramı, Russell paradoksu türünden sorunları aşmak için üretilmiştir. Bu kavram ile kendi kendini kapsayan kümeler kümesi yasaklanmış olur. Ç.N.

ne varmış gibi gösteren bir yanlış anlaşılma düzeltilmiştir. Sadece, sayı nitelikleriyle kümeler vardır; sayılar kuramı ise sonlu küme kuramının bir bölümüdür. Aslında sayılar kuramının küme kuramına alışılagelmiş indirgemeleri sadece sayı niteliklerinin nesneler olarak alınması ve bu yüzden belirli kümeler ile eş tutulması mevzuunda yanlıştır. Sayı nitelikleri, nitelikler olarak değerlendirildiği zaman; o aynı kümeler, kendileri ve diğer kümeler arasında bazı metafiziksel ayrımlar türü yanlış izlenimler bırakmadan, ölçüm aleti olaraktan kullanılabilirler. Burada, küme kuramı için hiçbir epistemolojik öncelik iddia edilmediği de vurgulanmalı. "Perception and Mathematical Intuition" ([14]) adlı incelememde ele aldığım epistemolojik beyana göre, sayının algısal bilgisini edinme yeteneğimiz, kümelerinkini edinme yeteneğimizden önce gelemez. Bu tür bir açıklama, birilerini kümelerin epistemolojik olarak öncelikli olduğunu kabullenmeye sevkedebilir. Fakat Piaget'nin sonuçları bunun mevzu bahis olmadığını gösterir. Kümelerin ve bu kümelerin etkileşimlerinin algısal olarak tamamen farkında olma becerisi gerçekte sayı niteliklerinin algısal bilgisini edinme becerisi ile bir arada kazanılır. Bu yüzden küme kuramı epistemolojik avantajdan hoşlanmaz.[17]

Böyle bir avantaj iddia edilmediği için, sayı kuramının küme kuramına indirgenmesine karşı yapılan bildik itirazların birçoğu işlemez. Örneğin, bu mevzuda endişe, çoğu kez önerilen indirgenmenin, birtakım sayı kuramcı prensipleri, özellikle de matematiksel tümevarım prensibini, peşin peşin varsaymadan gerçekleştirilebilip gerçekleştirilemeyeceği şeklinde dile getirilmiştir. Eğer bu prensip başta kabul edilmek zorunda olunsa, bu prensibin kümeler kuramında ispatlanabileceğini gösteren çok az epistemolojik emare olacağı iddia edilmektedir. Bu itirazların alabileceği değişik biçim-

17 Bilhassa, Piaget'in deneyleri, kümeler arasındaki alt küme bağıntısının sayı niteliklerinden önce tam anlamıyla kavranamayacağını önermektedir.

lerdeki bir tartışmaya girmeyeceğim. Ancak, sayılar kuramının epistemolojik esaslarını, kalıtsal sonlu kümeler kuramının epistemolojik esaslarından ayırmanın fazla bir anlam ifade etmediğini de vurgulamak isterim. Örneğin, tekrarlama *(recursion)* kuramının aynı doğallık içerisinde sayılarla ya da kalıtsal sonlu kümelerle başlanarak geliştirilebileceği çok iyi biliniyor. "Perception and Mathematical Intuition" ([14]) adlı eserde ele alınan epistemolojik beyana göre, sayı nitelikleriyle alâkalı sezgisel inanışlar, kümelerle alâkalı sezgisel inanışlarla birlikte elde edilir. Bazı türden matematiksel indüksiyonlar muhtemelen bu inanışların arasındadır. Bu prensibin mantık yoluyla çıkarımlanabileceği gerekçesiyle bu prensipten vazgeçilebileceğini zannedenler, kümeler kuramını mantığına dahil etmeye mecbur kalmışlardır. Bu prensibin küme kuramının sezgisel prensipleri arasında olmadığını düşünenler, sayı niteliklerinin temelde küme olduğu gerçeğini ihmal ederler.

Kümeler kuramının kesinliğinin, sayılar kuramına nazaran az olduğu gerekçesi ile, sayı kuramının, küme kuramının bir bölümü olarak yorumlanmasının anlamsız olduğu şeklindeki şikâyetlenmelere de aynı tür cevap verilebilir. Sayı kuramı ile kalıtsal sonlu küme kuramı arasındaki yakın ilişki anlaşıldığı zaman, bu iki kuramın birlikte geçerli ya da geçersiz olduğu belirginleşecektir. Süreklilik problemi veya ölçülebilir kardinallerin varlığı gibi üst düzey küme kuramı belirsizliklerinin, kalıtsal sonlu kümelerin kararlılığı üzerinde hiçbir etkisi yoktur.

Sonsöz olarak, burada küme kuramcı realizm olarak adlandırılan matematiksel realizmin bir çeşidini betimledim ve bu realizmin Benacerraf'ın ontolojik meydan okumasını nasıl karşıladığını göstermeye çalıştım. Seyir içerisinde, sayılar kümelerin nitelikleri olarak, sayı kuramı ise sonlu küme kuramının bir bölümü olarak alındı. "Perception and Mathematical Intuition" ([14]) adlı eserde, bir tür epistemolojik meydan okumaya verilen cevap ile birlikte bu çalış-

manın, en azından genel manada, matematiksel realizmin, özelde ise küme kuramcı realizmin daha iyi anlaşılmasını sağlayacak yolu kısmen temizleyeceğini umut ediyorum.[18]

KAYNAKÇA

[1] P. Benacerraf, "Mathematical Truth", *Journal of Philosophy* 70(1973): 661-79.

[2] P. Benacerraf, "What Numbers Could Not Be", *Philosophical Review* 74(1965): 47-73.

[3] C. Chihara, *Ontolgy and the Vicious Circle Principle*, (Cornell, 1973).

[4] M. Dummett, *Truth and Other Enigmas*, (Harvard, 1978).

[5] B. Ellis, *Basic Concepts of Measurement*, (Cambridge, 1966).

[6] G. Frege, *The Foundations of Arithmetic*, translated by J. Austin, second edition, (Northwestern, 1968).

[7] *G. Frege, Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, translated by P. Geach and M. Black, (Blackwell, 1970).

[8] K. Gödel, "Russell's Mathematical Logic", *Philosophy of Mathematics* içinde, edited by P. Benacerraf and H. Putnam, (Prentice-Hall, 1964): 221-32.

[9] K. Gödel, "What is Cantor's Continuum Problem?", *Ibid.*: 258-73.

[10] M. Jubien, "Ontology and Mathematical Truth", *Noûs* 11 (1977): 133-50.

18 Bu makale "Set Theoretic Realizm" [16] adlı doktora tezi çalışmamın 4. bölümünden derlenmiştir. Bu tez ile alâkalı yardım ve teşvikinden dolayı danışmanım John Burgess'e ve bu çalışma taslak hâlindeyken yaptıkları yararlı eleştirilerinden dolayı Michael Resnik'e ve isimsiz bir hakeme şükran borcumu bildirmek isterim.

[11] P. Kitcher, "The Plight of the Platonist", *Noûs* 12(1978): 119-96.

[12] G. Kreisel, "Mathematical Logic", *Lectures on Modern Mathematics* içinde, vol. III, edited by L. Saaty, (Wiley, 1965).

[13] J. Lear, "Sets and Semantics", *Journal of Philosophy* 74(1977): 86-102.

[14] P. Maddy, "Perception and Mathematical Intuition", *Philosophical Review* 89 (1980): 163-96.

[15] P. Maddy, "Proper Classes", *Journal of Symholic Logic* (yayınlanacak).

[16] P. Maddy, Set Theoretic Realism, Ph.D. dissertation, (Princeton, 1979).

[17] E. Mendleson, *Introduction to Mathematual Logic*, second edition, (van Nostrand, 1979).

[18] J. Piaget and A. Szeminska, *The Child's Conception of Number*, translated by G. Gattegno and F. Hodgson, (Humanities, 1952).

[19] H. Putnam, *Mathematics, Matter and Method*, second edition, (Cambridge, 1979).

[20] W. Quine, "On What There Is'", in *From a Logical Point of View*, (Harvard, 1953): 1-19.

[21] M. Resnik, "Mathematical Knowledge and Pattern Recognition's," *Canadian Journal of Philosophy* 5(1975): 25-39.

[22] M. Steiner, "Mathematical Explanation", *Philosophical Studies* 34(1978): 135-51.

[23] M. Steiner, *Mathematical Knowledge*, (Cornell, 1975).

[24] M. Steiner, "Mathematics, Explanation and Scientific Knowledge", *Noûs* 12(1978): 17-28.

[25] E. Zermelo, "A New Proof of the Possibility of a Well-Ordering", *From Frege to Gödel* içinde, edited by J. van Heijenoort, (Harvard, 1967): 183-98.

MODELLER BİLİMİ OLARAK MATEMATİK: ONTOLOJİ VE REFERANS*

Michael D. Resnik
Çev. M. Sabır Kiraz & Cezmi Kayan

1. GİRİŞ

Matematiksel ifadelerin mantıksal biçimlerinin önemle ele alındığı ve bunların anlambiliminin standart olarak, örneğin Tarski'nin oluşturduğu biçimde, referanslarının bulunduğu matematiksel bir anlayış arayışı içerisindeyim. Bununla beraber, ciddî anlamda karşı konulamamış varsayımlar; matematiğin soyut varlıkların, yani maddesel ve zihinsel olmayan, uzayda ve zamanda bulunmayan şeylerin bilimi olduğunu gösteriyor. Dolayısıyla ben bir Platoncuyum.[1]

---

* Michael D. Resnik, "Mathematics as a science of patterns: ontology and reference," *Noûs* 15 (1981), 529-550.

1 'Platoncu' terimini günümüz matematik felsefesinde yaygın olarak kullanılan soyut matematiksel nesneler hakkındaki realizm yerine kullanıyorum; bununla, Platon'un idealar kuramını kabul ettiğim anlaşılmasın. Platonculuğu benimsememin çeşitli ve karmaşık sebepleri vardır; bunların bir kısmı Resnik [9], [19] ve [11]'de bulunabilir. [2]'de Paul Benacerraf, matematik ve bilimin geri kalanı için tek bir anlambilimi oluşturmanın kuvvetli delillerini ortaya koymaktadır;

Platoncu gibi görünen birçok matematik filozofu nispeten zorlu iki sorunla karşılaşmıştır. Birincisi, Platoncu matematiksel nesneler uzayda ve zamanda mevcut olmadığından, bunlar hakkındaki bilgi ve kanaatlerimizi elde etme imkânının sorgusu gündeme gelir. İkincisi, matematiksel kuramların hiçbiri, nesnelerini izomorfizme kadar belirlemekten daha fazla bir şey yapamaz şeklindeki olgudan ortaya çıkan sorun. Dolayısıyla bir Platoncu, belirli şeyler hakkındaki muayyen bir matematiksel kuramın, bu nesnelerin ne olduğu hakkında tanımlayıcı bir ifade oluşturamayacağını iddia ederken, çelişkili bir konum içerisindeymiş gibi görünür.[2]

Bana göre problemler, kısmen, matematiğin ne hakkında olduğuna dair köklü bir yanlış kavrayıştan kaynaklanmaktadır. Eğer sayıları; örneğin, sandalyeleri veya arabaları düşündüğümüz gibi her biri diğerlerinden bağımsız olarak kabul edilebilen nesneler olarak algılarsak, herhangi bir sayı hakkındaki bilgimizin, bu sayıyla bizim aramızdaki bir ilişkiye bağlı olduğunu düşünmemek oldukça zordur. Bu tarz bir düşünce bizi diğer nesneler karşısında sayıların hüviyetinin tamamen belirlenmesi gerektiği düşüncesine götürür. Kimi zaman matematikçiler; matematiğin, matematiksel nesnelerin kendi 'içkin' doğasıyla değil, bu nesneleri içeren yapılarla ilgilen-

---

matematiksel terimler için bir çeşit, diğer bilimsel terimler için başka bir çeşit anlambilimi mevcut ise, her iki türden terimler içeren ifadeler için de özel bir anlambilimi gerekir. Greensboro Konferansı'nda Benacerraf ve diğerleri arasındaki bir münazarada gözlemlediğim kadarıyla, bu argüman daha da güçlendirilebilir. Çünkü matematiksel ve diğer bilimsel ifadeleri içeren çıkarımlar hakkında bir görüş oluşturabilmek için matematik ve bilim için tek bir anlambilimi gerekecektir. [11]'in 62. sayfasında bu Frege'ye kadar dayanmaktadır. Tek bir anlambilim ve mantıksal biçimlerin önemle ele alındığı bir görüşün gerekliliği kabul edildiğinde, Tarskici yaklaşımın ağırlığı kişiyi doğruca Platonculuğa götürür.

2 [2]'de ve[1]'de Benacerraf sırasıyla birinci ve ikinci problem üzerinde görüşlerini açıklamaktadır. Steiner [12]'de birincisini uzunca ele alırken [5]'te Jubien ve [6]'da Kitcher ikincisini irdeler. Bu konuyla ilgili ayrıca Maddy'nin makalesine bakınız.

3 Karşılaştırınız; Jubien [5], Kitcher [6], Parsons [7], Benacerraf [1], Steiner

diğini vurgulamışlardır. Onlar, matematiksel nesnelere bağımsız olarak değil de daha çok yapılar içerisinde sahip olduğumuzu fark etmişlerdir. 13'ün bir asal sayı olması onun içsel bir özelliğiyle değil, daha ziyade, doğal sayılar içerisindeki yeri itibariyle belirlenmektedir. Bazı filozoflar matematiksel düşüncedeki bu eğilime önem vermişlerdir.[3] Fakat ben bu düşüncenin öncekilerinkinden daha ciddî olarak ele alınması gerektiği kanısındayım. İddia ediyorum ki, matematikte, yapılar içerisinde dizili "içkin" niteliklere sahip nesnelerimiz yoktur, sadece yapılarımız vardır. Matematiğin nesneleri yani matematiksel sabitlerimizin ve nicelik belirleyicilerimizin işaret ettiği varlıklar, yapı içindeki yapısız noktalar veya konumlardır. Yapının içerisindeki bir konum olmaları itibariyle yapının dışarısında bir hüviyetleri veya özellikleri yoktur. Dahası, matematikte sayılar gibi bazı matematiksel nesnelerin içkin yapılara sahip olduğunu gösteren çeşitli sonuçlar, örneğin bunların kümelerle özdeşleştirilmesi, gerçekte yapılar arası ilişkilerdir.

Epistemolojik sebeplerden dolayı yapılar (strüktür) yerine, matematiksel modeller* ve bunların konumlarından bahsetmeyi daha anlamlı buluyorum. Modelleri ve bunların konumlarını soyut varlıklar olarak görmekteyim. Makalenin büyük bir kısmı modeller hakkında genişçe bir görüş oluşturmaya ve matematiksel nesnelerin hüviyetlerini tam anlamıyla belirlemedeki yetersizliğimize dayanan Platonculuğa yapılan itirazı dindiren, bu nesneler hakkında yeni bir kavrayışa nasıl yol açtığını açıklamaya ayrılmıştır.

Ayrıca, matematiğin modeller bilimi olarak görülmesinin matematiksel bilginin genel epistemolojik görüntü içerisinde oldukça

---

[12].

* Bu çeviride, 'pattern' kelimesi yerine, anlamı tam karşılayamasa da, yaygınlığına binaen 'model' kelimesini tercih ettik. Örüntü olarak da Türkçe'ye çevrilen 'pattern'; şablon, numune, kalıp, desen, düzen gibi manaları da kapsar. Ç.N.

4 Matematiksel bilgi üzerine 1982 American Philosophical Association Wes-

merkezî bir yere sahip olduğunu göstererek, Platoncuların epistemolojik problemlerini çözmeyi –veya en azından bunların aciliyetini ortadan kaldırmayı- garanti ettiğini düşünüyorum. Daha detaylı bir epistemolojiyi başka bir yerde geliştirmeyi umuyorum; ancak makalenin esas konusuna geçmeden önce hâlihazırdaki görüşümü kabaca tasvir etmek niyetindeyim.[4]

Belirli türdeki bir modelin birkaç örneğiyle karşı karşıya geldiğimizde (dahası, doğru psikolojik durumda ve uygun amaçlara sahip olduğumuzda) doğal olarak bu örneklerin benzerliklerinden etkileniriz –bunların bir modele uyduğunu görürüz.[5] Böylece, bir dedektif bir ay zarfında çeşitli boğulma vakıaları ile karşılaştığında, "bunun bir düzeni (pattern) var" şeklinde düşünür. Tabiî ki, bu, düzenin veya modelin ne olduğunu bilmek demek değildir. Bundan faydalanabileceğimiz anlamına da gelmemektedir. Ancak, modelin örnekleriyle birkaç kez daha karşılaştıktan sonra (veya önceki örnekler üzerinde biraz daha kafa yorduktan sonra), modelin kendisini tarif etmeye kalkışabiliriz. Bu genellikle canlandırma veya konumsal inceleme yoluyla yapılabilir. Meselâ, dedektif diyecektir ki: Kurban atkıyla boğulmuş, katil kurbanına arkadan yaklaşmış, cinayet çarşamba günü işlenmiş, vesaire. (Bunun üzerinde biraz düşünürsek, bu bizi matematikte referansın nasıl mümkün olduğuna dair bir görüşe götürebilir.) Modelin bu tür bir tarifi daha sonra bu modeli oluşturan veya bu modele uyduğu düşünülen veriler ışığında kontrol edilebilir. Bir modeli tarif etmeyle bunun ve buna uyan verilerin bir kuramını ortaya sermek birbirine çok benzemektedir.

---

tern Division Sempozyumu için yazdığım bir makalede daha tam ve belki biraz değişik bir görüşüm bulunabilir. Yazı, Nous XV, 1 (Mart 1982)'te çıkacak. Daha önceki bir denemem için [10]'a bakınız.

5 Bütün modeller –dolayısıyla da nitelemeler– örnekleriyle karşı karşıya gelinerek bilinemez.

6 Bunlardan biri, bu makalenin Greensboro Konferansı'nda sunulan versiyo-

Bir modelin kısmî bir tarifine sahipsek diğer özelliklerini de buradan çıkarabiliriz. Bu şekilde, dedektif, katilin kurbanını bir atkıyla boğabilecek büyüklük ve güce sahip olduğunu çıkarabilir. Dahası, kendimize bir model oluşturduktan sonra bunun varyasyonları üzerinde rahatlıkla düşünebiliriz. Yani, çarşambadan ziyade cuma günkü cinayette uzun bir atkıyla iki kurban aynı anda boğulmuş, vesaire. Yeni modellerin bilgisine giden bu yola matematikçilerin oldukça aşina olması bir yana bu, benim matematiksel bilgi anlayışım için de oldukça mühimdir. Çünkü küçük sonlu modelleri, bunların somut örnekleriyle karşı karşıya gelerek anladığımızı düşünmek inanılmaz değildir; ancak, sonsuz veya karmaşık modeller hakkındaki bilgimize bu yolla ulaştığımıza inanmak biraz daha çaba ve gayret gerektirir. Bana göre, sonsuz modeller hakkındaki ilk düşünce sonlu modellerin sınırsızca genişletilmesiyle ortaya çıkmıştır. Sonsuz bir modeli belirlemek için, tabiî ki, bundan daha fazlası gerekir: Sonsuz modeli ortaya koyuş tarzımız tutarlı olmalıdır; uygun bir şekilde, genişlediği sonlu modellerle bağlantılı olmalıdır, vb. Fakat ben sayı kuramı ve matematiğin üst branşları için bu yolla bir epistemoloji geliştirilebileceğini düşünüyorum. Bu da matematiğin epistemolojisini, dil ve müzik bilgisi hakkındaki epistemolojilerin yanına bir yere yerleştirecektir. Çünkü hiç şüphesiz bu alanlarda da benzer işlemleri gerçekleştirmekteyiz. Dile ait söylemlerin ve müzik eserlerinin modellerini içselleştiririz, daha önceden hiç söylenmemiş veya icra edilmemiş yeni modeller üretebilmekteyiz ve bu modellerin genel özelliklerini sınıflandırıp tanıyabiliyoruz. Eğer bunu beceremeseydik, yeni şarkılar ve hikâyeler yazamaz, saçmalık ile ahenksizliği ayırt edemezdik. Toplama işleminin değişme özelliği olduğunu bilmek, aktif-pasif dönüşümünün, anlamı genelde koruduğunu bilmek gibidir; en büyük diye bir doğal sayının olmadığını bilmek de bir ölçünün, örneğin, iki defa tekrarlandığı bir şarkı gibi bunun üç defa tekrarlandığı başka bir şarkının olduğunu (olabileceğini) bilmek gibidir.

Modeller hakkındaki bilgimize dayanarak, matematiğin epistemolojisi hakkında söylenmesi gereken daha çok şey var. Ancak, umarım, bu kabataslak açıklamalarım matematiğin epistemolojisinin, dilin ve müziğin epistemolojisinden daha gizemli (veya çok daha gizemli) olmadığını anlaşılır kılmıştır. Matematik gibi bunlar da tecrübe ile başlar, bunu soyutlar ve hiç denenmemişe (belki de matematikteki gibi hiç denenemeyecek olana) ulaşır.

2. MODELLER

Modeller hakkında geliştirilmiş felsefî bir görüş bilmesem de bunların ne olabileceğine dair birkaç öneriye rastlamıştım.[6] Bunların hepsi bir model ve bunun örnekleri arasındaki ilişkiden yola çıkar. Bunun yerine ben, modellerin birbirleriyle nasıl ilişkili oldukları ve özel bir durum olarak nasıl başladıkları üzerine odaklanacağım. Bu yaklaşım bana gayet doğal görünse de deneyimlerim, bu konudaki sezgilerin oldukça çeşitli olduğunu göstermiştir. Bunun, matematiğin yapısı hakkındaki iki kuram, yani geometri ve model kuramı* üzerinde düşünülerek oluşturulduğunu hatırınızda tutmanız, yaklaşımımı kavrayabilmenizde yardımcı olabilir. Benim bakış açım, model kuramını geometri içinde ele alır.

Bir model, benim *konum* olarak adlandırdığım, çeşitli ilişkilerde yer alan (ve çeşitli özelliklere, ayırt edilebilir konumlara ve işlemlere sahip) bir ya da daha çok nesneden oluşur.[7] Bir konum geometrik

---

nu üzerine görüşlerini belirten Gilbert Harman tarafından verilmiştir.

* Aksiyomatik küme kuramı yorumlarının genel bir kuramı olan model kuramı (model theory), mantığın matematiksel yapıları inceleyen bir branşıdır. Ç.N.

7 Parantez içindeki ifadeyi yapının model kuramındaki tanımıyla kıyaslayabilmek için ekledim. Tam anlamıyla ifade edersek, modelin kendisinde bulunan ilişkiler kullanılarak fark edilemeyen ayırt edilmiş konumlar, işlemler ve özellikler modelin bir başka modelle iç içe olduğunun farkına varılmasıyla görülebilmelidir. Meselâ, (N, S, 0) örneğin 0, ayırt edilmiş konumunu içerir;

bir nokta gibidir; ait olduğu modelde bulunduğu konumdan dolayı sahip olduğu özelliklerden başka hiçbir özelliği yoktur. Meselâ, bir ABC eşkenar üçgeni göz önüne alırsa, A, B, C, noktaları seçilebilir. Fakat bunlar herhangi bir ABC üçgeninin köşelerinden ayırt edebilirler. Yine aynı şekilde ABC üçgenini *izole edilmiş* olarak ele aldığımız varsayılırsa, bu, başka eşkenar üçgenler arasından seçilemez. Geometride –eşlik ve benzerlik gibi– yapısal bağıntılar fevkalade önemlidir; ancak, diğer birçok geometrik nesneyle ilişkisi olan nokta, doğru, düzlem ve benzeri varlıkların özdeşlik ve farklılık iddiaları bağlamla ilgilidir. Bu geometrik analojiyi, matematikte uğraşılmakta olan diğer birçok yapıya aktarıyorum. Bir yapı veya model içindeki konumlar teşhis edilebilir veya ayırt edilebilir; çünkü onu barındıran yapı veya model bunu yapabilmemiz için gerekli olan ortamı sağlar. Lâkin, modeller arasında fevkalade mühim olan, yapısal benzerlik (eşlik ve denklik aşağıda açıklanmıştır) ve yapısal içerme (oluşum ve alt-model) bağıntılarıdır. Müsaadenizle, bu analojiyi doğal sayılara (N, S) uygulayalım. Bunu, tek bir ikili (ardışık olma) bağıntısı olan bir model olarak ve doğal sayıları da bunun konumları olarak algılıyorum. Böylece, doğal sayıların model tarafından tanımlanabilen ayırt edici özelliklerden başka bir özelliğe sahip olmadığı olgusunun, ABC üçgeninin noktaları hakkındaki buna karşılık gelen olgudan daha fazla muğlaklık taşımadığı görülür.

Modeller birbirleriyle *eş* veya yapısal olarak izomorfik* olarak bağlantılıdır. Eşlik, *hem* soyut yapıları *hem de* somut nesnelerin

---

ki bu, S ardışık bağıntısı kullanılarak bulunabilir. Ancak (Ras, <, 0)'daki ayırt edilmiş 0, bu modelin 0'ın 'içsel' olarak ayırt edilebildiği bir alt yapı modelinde görülebilmesine bağlıdır.

* Matematikte izomorfizm, nesneler arasındaki bir tür haritalamadır. İki kompleks yapı düşünün; öyle ki, bu iki yapı içindeki her bir eleman ile öteki yapıdaki karşılığı olan elemanın, ait oldukları yapı içindeki rolleri benzer olsun. Teknik olarak ifade edersek, bir fonksiyon ve tersi homomorfik olduğunda, izomorfik olur. Ç.N.

8 Eğer ikinci dereceden veya küme kuramsal tanımlanabilirlik kullanılacaksa,

dizilişini içeren bir alanda geçerli bir denklik bağıntısıdır. Bunları biçimsel sistemlerin modelleri olarak düşünürsek, denklik, biçimsel sistemlerin *izomorfik modelleri* arasındaki bağıntıdır. Örneğin, tek bir R iki değerli yüklemini içeren, S birinci dereceden sistemi ile R'nin bir total sıralama olduğunu söyleyen aksiyomları göz önüne alalım. Bu sistemin birçok modeli vardır –bütün total sıralamalar gibi. Ancak, bunların hepsinin tanım kümeleri birbirine denktir. Doğal sırasındaki birden ona kadar olan sayılar kümesi ile doğum sırasına göre alınmış bir kafesteki on köpek yavrusu S sisteminin izomorfik modelleridir; bu nedenle soyut sayısal yapı ile köpek yavrularının dizilişini eş addediyorum.

Bir model, köpek yavruları gibi somut olarak tabir edilen nesnelerin sıralamasıyla eş ise sıralamanın, modeli *örneklediğini* söyleriz. Öyleyse başlangıç, eşliğin özel bir durumu olup buradaki modelin "konumlarında yer alan" nesnelerin, ait oldukları sıralamanın verdiğinden daha başka ayırt edici özellikleri de vardır. Böylelikle köpek yavruları, birden ona modelini başlatır.

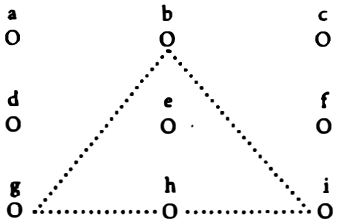
Modellerin birbirlerinin içinde ortaya çıkması düşüncemde başlangıçtan daha esaslı bir rol oynadı. "Bir kedi, kediyi yiyen kediyi ısırdı" cümlesini dilin bir modeli olarak düşünürsek "kedi" kelimesi bunun içinde üç defa ortaya çıkan bir model olur. Doğal sayılar reel sayılar içinde doğal sıralarıyla ortaya çıkar; ayrıca, hem kümelerin tekrarlı hiyerarşisinde hem de kendi içinde ortaya çıkar. Beş köşeli yıldız modeli hem Birleşik Devletler bayrağında hem de Kaliforniya bayrağında görülür. Ortaya çıkma bağıntısı ile eşliğin etki alanları aynıdır; dolayısıyla, somut sıralamalar modellerde veya başka somut sıralamalarda ortaya çıkabilir. Lâkin ben daha çok modeller içinde ortaya çıkan modellerle ilgileneceğim. Daha düzgün ifade edersek, ortaya çıkma, Q ile Q içinde tanımlanabilir bir yapıya izomorfik olan P yapıları arasında geçerli, yansıyan ve geçişli bir bağıntıdır. Dolayısıyla, (N,S) hem (N,<) hem de çeşitli küme kuramlarının

modellerinde ortaya çıkar. Rasyonel sayılardaki (Ras,+,.) cisminde (N,S) ortaya çıkar; ancak, (Ras,<) sayılabilir sıralamasında ortaya çıkmaz; çünkü, 0 ve ardışık olma bu tür yapılarda tanımlanamaz.

Modelin ortaya çıktığı bir başka özel durum ise alt model bağıntısıdır. A modeli B'de ortaya çıkıyor ve A'nın her konumu B'nin de konumu oluyor ise A, B'nin *alt modelidir*. Bu da A, B'nin bir alt modeline eş ise A modeli B modelinde ortaya çıkar demektir.

Özel durumlarında bu bağıntının bir benzerini içerse de, dikkat ederseniz alt model ilişkisi, model kuramındaki alt model bağıntısından daha karmaşıktır. Bu daha karmaşık yaklaşıma dair sebeplerim matematikte indirgeme üzerine bir görüş bildirebilme amacıma ve modeller hakkındaki sezgilerime dayanır.

Sezgisel görüşleri şimdi ele alırken indirgeme tartışmalarını sonraya bırakacağım. Farz edelim ki, model a, b, c, d, e, f, g, h, i, gibi dokuz belirli konuma ve aLb, bLc, dLe, eLf, gLh, hLi, aAd, dAg, bAe, eAh, cAf, fAi: olarak tanımlanmış A ve L bağıntılarına sahip olarak nitelendirilmiş olsun. Modeli daha iyi kavrayabilmemiz için A bağıntısının *bir birim yukarısında* olarak L bağıntısının ise *bir birim solunda* olarak tanımladığı aşağıdaki şekli çizdik:



Benim şekli nasıl kavradığımı anladıysanız (ki, olayları *benim* gördüğüm gibi göremeyebileceğinizi kabul ediyorum), dikdörtgenin noktalarının, *gbi* üçgeninin noktalarını içerdiğini görürsünüz.

(Bu, tabiî ki, diğer üçgenlerin noktalarını da içermektedir.) Şimdi, çizimimi uzamsal bir modelin bir temsili olarak düşünürsek (ki bu asıl modelden çok daha karmaşıktır), uzamsal üçgenin, bütün uzamsal sıranın bir alt modeli olduğu sonucuna varınız. Bunu da g, b ve i konumlarını içeren asıl modelin alt modellerinin, bu üçgene karşılık geldiğine dair bir kanıt olarak kabul ediyorum. Uzamsal üçgen *yukarıda ve solunda* terimleriyle tanımlanabilen bağıntılar yardımıyla tarif edilebileceği gibi, bu modeller de A ve L yardımıyla tanımlanabilen bağıntılarla nitelendirilebilir. Aslında ilk tanımlar, ikincilerinden doğrudan doğruya çıkarılabilir. Buna rağmen ne uzamsal olan ne de uzamsal olmayan alt modellerin bağıntıları, asıl modelin bağıntılarının basit birer sınırlandırılmış hâli değildir. Dolayısıyla uzamsal üçgeni ve onun benzerlerini asıl modelin alt modelleri olarak kabul edeceksek –ki bence etmeliyiz- o zaman alt model bağıntısını benim önerdiğim çizgiler doğrultusunda tanımlamalıyız.

Benim alt modeller ve modellerin ortaya çıkışına dair görsel sezgilerim, bazı model kuramı durumlarına da aktarılabilir. Müsaadenizle, doğal sayıları, sonu olmayan noktalar dizisi olarak temsil edelim.

o o o o o o o o o o o o o o o o . . . .

Soldan n. noktadan başlayarak elde ettiğimiz noktalar dizisi açıkça asıl modelin bir alt modelidir. Bunlar, (N,S)'de S'nin, N'nin bir alt kümesine sınırlandırılmasıyla elde edilebilen bütün dizilere karşılık gelmektedir. Ancak, sayı kuramının (N, S)'den elde edilebilen, bunların art arda olma bağıntısı, ardışık olma bağıntısının bir alt bağıntısı olmadığından, karışmadığımız sonsuz sayıda modeli vardır. Bunlardan biri çift sayıların; diğeri, tek sayıların; bir diğeri de, asal sayıların oluşturduğu dizilerdir. Bunların hepsi asıl noktalar dizisinden bazı nokta dizilerinin seçimine karşılık gelmektedir. Bu diziler –en azından benim gördüğüm kadarıyla- asıl dizinin içinde

ortaya çıkarlar. Dolayısıyla bunu desteklemek için hem alt modelleri hem de modellerin ortaya çıkma bağıntıları tanımlanabilirlik terimleriyle nitelendirilmelidir.

(N,S) doğal sayılar serisi, (N,<) küçük olma bağıntısına göre dizilmiş doğal sayıların içinde ortaya çıkar; çünkü,

$$Sxy \equiv x < y \,.\; (\exists z)\,(x < z \,.\, z < y\,).$$

Ve ikinci dereceden veya küme kuramsal tanımlanabilirliğe müsaade edersek bu bağıntının tersi de geçerlidir; çünkü,

$$x \leq y \equiv (z)\,(x \in z \,.\; (u)(v)(u \in z \,.\, Suv \supset v \in z) \supset y \in z).^{8}$$

Çoğu matematikçi ve mantıkçı, ardışık olma sembolünün temel alındığı bir dilde geliştirilen sayı kuramını, küçük olma sembolünü temel alan bir gelişmeyle öz itibariyle aynı değerde kabul edecektir. Sayı kuramını belli bir model veya modellerin bilimi olarak gördüğümden, burada (N,S) ve (N,<) aynı olmalı veya öz itibariyle aynı modelde olmalıdırlar. Öyleyse bundan sonraki problem, bu bağıntıya tatmin edici bir vasıf bulmaktır. Bu iki yapı izomorfik olmadığından model eşliği çok katı bir koşuldur. Dahası bunlar, matematikçilerin öz itibariyle aynı olarak gördükleri izomorfik olmayan yapıların tek başına örnekleri de değildir; bir halka olan ikili taban aritmetiği aynı zamanda kafes biçimindedir, grupların ve topolojilerin farklı tanımları mevcuttur, vesaire.

Bu durumlarda modellerinin birbiri içerisinde ortaya çıktığı kuramların olduğu doğru olsa da, modelin karşılıklı ortaya çıkışı, modellerin denkliği için oldukça zayıf bir koşul olarak görünmektedir. Bunun bir sebebi, (N,S) ve (Ras,+,.)'ın öz itibariyle aynı kabul

küme kuramsal veya daha yüksek dereceden varlıkların asıl modele yeni konumlar olarak eklenemeyecekleri bir tipler kuramı aranmalıdır. Aksi hâlde, Mark Wilson'ın dikkatimi çektiği gibi, sonsuz yapılar sonlu yapıların içerisinde ortaya çıkacaktır.

9 (Ras, +, .) içinde 0 ve 1'i

edilmese de birbirlerinin içerisinde ortaya çıkmalarıdır.[9] Buna ikinci bir sebep de modellerin ortaya çıkma bağıntısının, kuramların (tanımlar yardımıyla) karşılıklı *yorumlanabilirliği* kavramına karşılık gelmesidir. Matematiksel bakış açısına göre öz itibariyle aynı olmasa da karşılıklı yorumlanabilen kuramlar da vardır.[10]

"Öz itibariyle aynı" kuramların bilinen örneklerine iyice bakarsak bunların karşılıklı yorumlanabilirlikten daha kuvvetli bir koşulu sağladıklarını görürüz. Bunlar *tanım itibariyle denktir*. Bu demek oluyor ki, S + DTS'nin hem T'yi hem de DST'yi, T + DST'nin ise hem S'yi hem de DTS'yi verdiği DST+DTS gibi bir tanımlar kümesi vardır. Başka bir deyişle, kuramlarla birlikte yorumlayıcı tanımlar,

---

$$(y)(0 = y \equiv y + y = y)$$
$$(y)(1 = y \equiv y \,.\, y = y),$$

ile tanımlayabiliriz ve ardından N ve S'yi tanımlarız. (N,S) içerisinde (Ras,-,.)'yı elde ederken toplama, çarpma ve doğal sayılar üzerinde kuvvet almayı tanımlamak için ikinci dereceden tanımları kullanır ve $2^a.3^b$ de olduğu gibi (a,b) sıralı ikililerini tanımlarız. Bundan sonra rasyonel sayıları, doğal sayıların sıralı ikilileri olarak normal yoldan elde edebiliriz.

10 Bir S kuramı, bir T kuramı içinde aynı temel mantıkla, T içerisinde S'nin ana elemanlarının tanımlarının bulunduğu bir küme varsa, buna DST diyelim; yorumlanabilir. Bu küme T'ye eklendiğinde S'nin teoremlerini (T + DST'nin teoremleri gibi) oluşturur. Ana elemanları sırasıyla "0", "'" ve "1", "+" olan ikinci dereceden N' ve N+ teoremlerini ele alalım. N''nün aksiyomları:

$$(x)(x' \neq 0)$$
$$(x)(y)(x' = y' \supset x = y)$$
$$(F)[F0 \,.\, (x)(Fx \supset Fx') \supset (x)Fx],$$

iken N+ nunkiler bunun tamamen aynısı olup sadece "'" yerine "+1" gelecektir. N', x'=x+1 tanımı ile N+ içerisinde yorumlanabilir. N+ ise aşağıdaki tanımlar vasıtasıyla N' içerisinde yorumlanabilir:

1) $1 = 0'$

2) $x + y = z \equiv (F)[(x)Fx0x \,.\, (u)(v)(w)(Fuvw \supset Fuv'w' \supset Fxyz]$.

Bu da N' nün her modelinin içinde ortaya çıkan N+'nın bir modeli vardır demektir. Bunun tersi de doğrudur. Ama bu iki kuram öz itibariyle hâlâ aynı değildir: N', sonuçlarına kadar bütün olup kesindir, N+'nın ise değildir; N'+DN+N' sebebiyle "0+0=0" dır; fakat bu teorem ne N+ nın ne de N+DN'N 'nindir. Bu tespitler John Corcoran'a aittir.

11 Aklıma gelmişken, N' ve N+ kuramları tanım itibariyle denk olmaktan uzak-

sadece birbirlerini değil, aynı zamanda birbirlerinin yorumlayıcı tanımlarını da verir. Tanımları özel bir aksiyom olarak, kuramın dilini ise tanımlar ile tarifi yapılmış sembolleri içerir şekilde düşünün. O zaman, tanım itibariyle denk kuramlar, aynı teorem kümesinin eşdeğer olarak aksiyomlarla işlenmiş hâllerinin özel bir durumu olmaktadır.[11]

Öz itibariyle aynı olan modeller kavramını kavrayabilmek için tanım itibariyle denklik gibi bağıntıya ihtiyaç duyarız. Model kuramının tekniklerini kullanarak, model kuramlarını tamamlamaya geçebiliriz; ancak bunun da bize faydası, ancak modelin kuramını kategorik olarak oluşturabildiğimiz zaman dokunur. Çünkü modeller, kuramların –en azından izomorfizme kadar- özel örnekleri olup çokça izomorfik olmayan modelleri bulunan bütün bir kuram vardır. Buna rağmen ortak bir teorem kümesinin farklı yorumlanışları da, tanım itibariyle denk kuramlar kavramına modeller açısından benzer bir yaklaşım getirir.

İki model sezgisel olarak, "daha büyük" bir modelin bazı bağıntılarının silinmesiyle elde edilebiliyorsa bunlar "öz itibariyle aynı" sayılırlar. Daha düzgün bir şekilde ifade edersek, her konumu, her özelliği ve her bağıntısı aynı zamanda Q'nun da olduğu bir P modeline, Q modelinin *kısıtlanmışı* diyelim. Bu durumda hem P'nin hem de Q'nun alt modeli olan bir R modeli varsa ve P ile Q karşılıklı kısıtlanmış hâlleri ise P'nin Q'ya *denk* olduğu söylenecektir. Bu kavramı göstermek için, müsaadenizle, (N,S) ve (N,<) sıralamalarına dönelim. Bunlar (N,S,<)'nin kısıtlanmış halleri olup bu, ikisinde de ortaya çıkar. Dolayısıyla tanım gereği bunlar denkti. Diğer taraftan (N,S) ve (Ras,+,.) birbiri içinde ortaya çıksa da (Ras,S,+,.) genel genişletilmiş

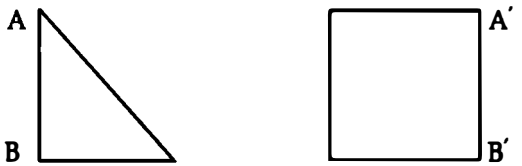
tır; çünkü (2), n+ nın bir teoremi olarak gösterilemez. "x+y"yi, f(x,1) = x + 1, y ≠ 1 ise f(x,y)=1 şeklinde bir f fonksiyonu gibi yorumlarsak bir karşı model elde edebiliriz. Daha geniş bilgi için Corcoran [3]'e bakınız.

12 Mark Wilson [14]'te iki kuramın aynı ontolojiye sahip olduğu durumda

hâlinden kısıtlama yoluyla elde edilemez; çünkü (Ras,S,+,.)'nın (N,-S)'ye indirgenebilmesi için bazı konumlarının ve bazı bağıntılarının silinmesi gerekir.

Modeller arasındaki denklik bağıntıları arasında en kuvvetlisi eşlik, ondan sonraki denkliktir; en zayıfı ise müşterek ortaya çıkmadır. Matematiğin bu bağıntılarını bundan daha ileriye götürmeyeceğim.

Modeller arasındaki denklik bağıntılarından -eşlik, müşterek ortaya çıkma, denklik gibi- modeller için herhangi bir ayniyet koşulu ortaya koyamadım.[12] Yapmayacağım, bu da beni kuramımdaki en müşkül noktaya –modeller içerisindeki ayniyet şartları konusuna getirir. Modellerin geometrik noktalar gibi, bir modelde bulunmalarından dolayı sahip olduklarından başka hiçbir tanımlayıcı özelliğe sahip olmadıklarını hatırlayın. Şimdi, aşağıdaki şekli kullanarak üçgendeki bir A noktasını ve dikdörtgendeki bir A′ noktasını ele aldığımızı farz edelim.



A ile A′ aynı mıdır? Ayrı şekillere ait oldukları için bunların aynı olamayacakları cevabı verilebilir. Pekâlâ, bunların ayrı olduklarını nasıl biliyoruz? Çünkü bunlar uzamsal olarak ayrık çizilmişlerdir.

---

tanımlama problemiyle uğraşır ve çözüm olarak tanım itibariyle denkliği önerir. Benim izleyeceğim yol çok genel olarak ontolojinin kuramlar arası karşılaştırmaları olacaktır. Örneğin, iki modelin aynı konumlara sahip olup olmadığını sormanın pek bir anlamı yoktur; ancak, birinin veya her ikisinin de sonsuz sayıda konum içerip içermediğini sormak çok şey ifade eder.

13 Örneğin, sayılar hakkındaki soru, küme kuramı diline "0" ve "′ " ile "0 =

Şimdi de çizimin bu yönünü göz ardı edelim ve bunları uzamsal bağlantılarından kaynaklanan bilgileri olmayan bağımsız şekiller olarak ele alalım. Şu durumda şekiller uzamsal olarak bağımsız olabilirler veya bitişik olabilirler; A da A' olabilir –AB ve A'B' doğru parçalarının özdeş olmaları hâlinde olacağı gibi. Tabiî ki, burada A ve A' noktalarının özdeşliği ile ilgili bir gerçeğin olmaması sonucuna varmak için, bu bir sebep teşkil etmez. Her şeyin ötesinde bunlar uzamsal noktalar olup –aynı doğru üzerinde olmak gibi- yeterli bir vasfa sahiptirler. Bu örnekte, bu olguları belirlemek için yeterli bilgiye sahip değiliz.

Bu çok doğru. Fakat geometrimizin bir *uzay* kuramı olarak gelişimi için oldukça önemlidir. Geometri, *figür* ve *şekil* kuramlarının topluluğu veya kuramı olarak değil de, bu şekilde geliştirilirse noktalar, kapladıkları uzayda bulundukları yeri işaret etme rolleri olmaksızın sadece bulundukları şekildeki yerlerini işaret etme rollerini üstlenebilirler. Bu da bizim yukarıdaki üçgen ve dikdörtgeni (çizimle belirtilen uzamsal bağlantılarıyla birlikte) tek bir birleşik şekil olarak görmemizi ve geometrik şekillerin diğer bileşenlerini aynı açıdan ele almamızı gerektirir; ancak ben bunu yapmakta veya temel geometrinin büyük bir kısmını bu çizgiler üzerinde yorumlamada bir sakınca görmüyorum. Bu şekilde gelişecek bir geometri, noktalara içinde bulundukları şekillerden bağımsız hiçbir oluşum atfetmeyecektir. Özdeşlik aynı şeklin bileşenleriyle ilişkilendirilebilir veya her şekil (şekil çeşidi), evrenin bütün elemanları için geçerli, ilişkilendirilmemiş bir özdeşlik yüklemi ile birlikte ayrı bir kuram aracılığıyla ele alınabilir.

Diğer bir seçenek de matematiğin, kuramlarının ele aldığı yapılara göre irdelendiği durumdur. Örneğin, doğal sayılar kuramı belli bir modelle uğraşır; sayıların özdeşliğiyle ilgili soruları yöneltecek ve cevaplayacak araçlara sahiptir; ancak bir sayısının *π olup olmadığı gibi bir soruyu dahi oluşturamaz.* Diğer taraftan sayı kuramı içerisinde

özdeşlik kat'îdir: "(x)(y) (x=y V x≠y)" teoremlerinden biridir. Benzer ifadeler reel sayılar ve reel sayılar kuramı, fonksiyon ve analiz, kümeler ve küme kuramı için de geçerlidir. Her durumda kuram sadece belli bir yapının bileşenlerinden bahseder ve bunları diğer yapıların bileşenlerinden ayıracak veya özdeşliğini gösterecek bir araç yoktur. Farklı şekillerin farklı kuramlarının bulunduğu geometrideki çeşitlilik gibi matematik de her birinin kendi yapısıyla veya modeliyle ilgilendiği ve her birinin önde gelen özelliğinin, modelin dışında bulunduğu kuramların ortak bir birleşimidir.

Ancak, farklı modellerin konumlarını içeren özdeşlikleri çıkarırsak (bu, alt modelleri kapsamamaktadır) modeller için özdeşlik koşulları olarak daha önceden ortaya koyduğumuz denklik bağıntılarının hiçbirini kullanamayız. Niçin olduğunu anlamak için, eşliği ele alalım. Bu bağıntılar arasındaki en kuvvetlisi olduğundan dikkatimizi bununla sınırlandırabiliriz. Doğal sayılar ile çift sayılar eştir. Bunların eşliğini özdeşlikleri için de kabul edersek karşılıklı konumlarının da özdeş olması gerekir. O zaman ise 1, 2 olurdu! Birin ikinci doğal sayı, ikinin de ikinci çift sayı oluşunu dikkate alarak ve özdeşlik yüklemlerini $2 \neq_N 1$, $2 =_E 1$ gibi ilişkilendirerek bundan kaçınmaya çalışabiliriz. 4'ün doğal sayılardan 2 ile eşleşen çift sayı olması, çift sayılar açısından bunların farklı olması ve dolayısıyla $4 =_E 2$, $4 \neq_E 2$ sonucunu elde etmemiz buradaki sorunumuz olmaktadır. Eş, denk veya karşılıklı ortaya çıkan farklı modelleri belirlerken benzer güçlüklerin esiri olmayan başka bir araç bilmiyorum.

Buradan, bizim, sadece modeller; aynı konumlara, aynı bağıntılara, vesaireye sahip olduklarında, bunları tanımlayabileceğimiz sonucu çıkar. Bu yolda ilerleyeceksek genişletilmiş özdeşlik koşullarını ve özelliklerini kullanabiliriz (ki ben kullanırdım). Ancak bu bile benim nazarımda açık değildir. Çünkü bu,

$P_1 = P_2 \equiv$ (x) (x, P_1'in bir konumudur $\equiv$ x, P_2'nin bir konumudur) & vs.

gibi bir şeyi gerektirir ve bu da benim önceki hareketlerime ters bir şekilde farklı modellerin konumlarını tek bir evren içerisinde kabul etmemizi gerektirir. Bu nedenle, ne modeller arasında ne de farklı modellerin konumları arasında özdeşlik (her yerde) tanımlanabilmiş değildir.

Modellerin özdeşlik alanından çıkarılması matematiğin uygulamalarıyla da uyuşmaktadır. Sayı kuramı, sayı kuramsal yapı üzerinde değil, sadece sayılar üzerinde; küme kuramı ise, küme kuramsal hiyerarşi üzerinde değil, kümeler üzerinde çalışır. Her tür matematiksel yapıyla uğraşan model kuramı bile bunu, bunların konumlarını belirleyerek, yani yapıları kümelerle veya sıralı n-lilerle tanımlayarak yapar. Lâkin aynı model içerisinde özdeşliğin konumlarla sınırlandırılmasıyla başlayan muhakeme, benim bütün kuramımı altüst etme tehlikesini içinde barındırmaktadır. Çünkü öyle görünüyor ki, aynı modellerdeki konumlar hakkında aynı anda bahsedemezsek modeller arasındaki birçok denkliği de iptal etmemiz gerekir. Ben model eşliği için, yapısal veya model kuramsal izomorfizmi esas olarak almakla başladım; ancak bu tür izomorfizmler, bir modelin konumlarından diğerlerininkilere olan fonksiyonlardır. Bu da farklı modellerin konumlarını içeren bir evrenin bulunmasını gerektirir.

Birçok model arasındaki bağıntılardan bahsederken farklı modellerin konumlarını aynı anda ele alabilen kapsamlı bir kuram kullanmalıyız. Böyle kapsamlı bir kuram için birkaç seçenek vardır. Birincisi, her model için ayrı evrenleri olan çok çeşitli kuramlar kullanılabilir ve bu evrenler arasındaki sınırlandırılmamış fonksiyonlar izomorfizmler olarak kullanılabilir. Bu benim ortaya koyuş tarzıma en yakın olanıdır.

(Ontolojik olarak daha açık) ikinci bir yaklaşım, modellerin oluşturulabildiği konumlar uzayını yerleştirerek geometri doğrul-

tusunda bir model kuramı oluşturmaktır. Özdeşlik, uzayının bütün konumlarına uygulanacağından bu kuram, farklı modellerinin konumlarını ilgilendiren özdeşlik meseleleri hakkında olgular meydana getirir. Ancak bu kuramın geometrideki gibi belli konumlarla ilgilenen teoremlerinin olmasını beklemeyiniz. Üçüncü yaklaşım, ikincisini bir adım daha ileri götürerek, model kuramında modellerin kendi tanım kümelerinde oluşturulan kümeler olarak izah edilmesi gibi, modelleri konumlar kümesine indirgeyerek iyileştirir. Bu, konumların soyut kümeler olarak izah edilmesi, böylelikle model kuramının küme kuramına indirgenmesiyle bir adım daha ileri götürülebilir.

Bu son üç hareket, modelleri bir kenara atmamaktadır. Matematiğin değişik alanlarının ilgilendiği çeşit çeşit modeller ve benim modellere olan başlangıç yaklaşımım yerine büyük bir model ve bunun konumlarını yerleştirerek matematiğin bununla iyi geçinmesini ister. Çünkü benim görüşüme göre, örneğin, küme kuramsal hiyerarşi diğerleri gibi bir modeldir. Görünürdeki içsel yapıları hiyerarşi içerisindeki diğer konumlarla olan bağıntılarının bir ürünü olan konumlar soyut kümelerdir.

Bütün konumları ve "içsel" modelleri (üçüncü ve dördüncü yaklaşımlarda modeller küme olmaktadır) özdeşliğin etki alanına giren bir büyük modele yönelmek, benim özdeşlik hakkındaki iddialarımı geri çekmek gibi görünür. Ancak bunun böyle olmadığını açıklayabileceğimi düşünüyorum. İkinci, üçüncü ve dördüncü yaklaşımları tartışırken bu kapsamlı görüşlerden birinde geliştirilen modellerle matematiğin çeşitli modellerinin *özdeş* olduğunu söylemeye çalışmıyorum; sadece, bunların bunlara indirgenebileceğini söylemeye çalışıyorum. Aradaki ayrımı takdir edebilmek için matematikteki indirgeme konusuna dönmeliyiz.

3. İNDİRGEME

Verdiğim tanımlara göre, doğal sayıların bir model içerisinde çoklu ortaya çıkışları söz konusudur ki, ben buna *tekrarlı küme kuramsal hiyerarşi* diyeceğim. Buradan, sayı kuramının kati versiyonlarının, bu modellerin herhangi biriyle ve bunun doğru ifadelerinin kümeleri ile uğraştığı şeklinde yorumlanabilmesinin bile dokunulmadan bırakıldığı sonucu çıkmaktadır. Bu, olması gerektiği gibi, modeller hakkında konuştuğumuz zaman geçerlidir. Bir geometrik şekildeki noktalar kümesinin bağıntılarını tamamen tanımlarsak, bu şekli daha büyüğü içerisine eklemlemiş olarak düşünsek de bu tanımlar geçerliliğini koruyacaktır. Aradaki fark bu tanımın bu noktalarla bunu kapsayan şeklin yeni noktaları arasındaki bağıntıları kapsayamayacak olması ve *bu* yeni şekli niteleyemeyecek olmasıdır. Fakat bu neden asıl tanımdan talep edilir ki?

Küme kuramsal hiyerarşi, doğal sayıların ortaya çıkmalarını kapsaması sebebiyle sonraki modelin genişletilmişi olarak görülebilir. Ortaya çıkma ve genişleme arasındaki bu karşılıklı ilişki küme kuramının gelişimini yönlendirmede faydalı olmuştur. Küme kuramsal modelin bir kısmının tanımlanması için sayı kuramının aksiyomlarının ve notasyonlarının ödünç alınması küme kuramında bir yanlışlığa sebebiyet vermeyecektir; dahası, bu, doğal sayıların ortaya çıkma meselesine de dikkat çekecektir. Böyle bir ortaya çıkma, hiç şüphesiz, matematiksel olduğu kadar felsefî olarak da ilginçtir. Sayı kuramını kullanmak –sayı kuramının transfinit genelleştirmeleri gibi- küme kuramında da gelişmelere yol açar. Dolayısıyla küme kuramında, belli kümelerin oluşumunda sayıların standart kullanımları, pragmatik bir bakış açısıyla değerlendirilmektedir.

Küme kuramı içindeki sayı kuramının gelişiminde, doğal dizinin birçok ortaya çıkışından sadece birine atıfta bulunulmuş olsa da, matematik açısından bunda çekinilecek bir taraf yoktur. Bir ortaya

çıkma yerine diğerini seçmek, elbette bilimsel çalışmalarımızda kullandığımız küme kuramsal teoremleri etkileyecektir; ancak küme kuramının kendi teoremlerini değiştirmeyecektir. Sayı kuramının küme kuramı içinde yapılabildiğini göstermek önemlidir. Bunun yapılabildiği birkaç yol olsa da içlerinden en basiti, en zarifi veya en yenisi dikkati hak eder. Matematiği iyi yapmak seçiciliği gerektirir.

Sayı kuramının küme kuramı içindeki gelişimi, sayı kuramının küme kuramına indirgenmesi olarak bilinir. Daha genel bir ifade ile, bir kuramın model veya modelleri diğer birinin model veya modelleri içinde ortaya çıkıyorsa, birincisi ikincisine indirgenebilir. İndirgemenin varlığı matematiksel olarak ilginç olsa da, genel matematiğin pratiği üzerinde az etkisi vardır. Küme kuramı üzerine yazılan kitapların çoğu, doğal sayıları kümelerle ifade eder; fakat, sayı kuramı, topoloji, cebir veya analizle ilgili kitaplar, hem sayılar hem de kümelerle giriş yapar. Küme kuramı uzmanlarının da, bazıları muhtemelen felsefî yaklaşımlardan arınmış olsa da, ontolojik tutumluluğa karşı olağandışı bir ilgileri yoktur. Yine de küme kuramında sayıların kümelere indirgendiğini görürüz; çünkü, önce de belirtildiği gibi, böyle yapmak küme kuramında işe yaramaktadır.

Matematiği büyük ölçüde değiştiren ve indirgeme olarak adlandırılabilecek bir başka olgu daha vardır. Bu, matematiğin kümelerle kuramlaştırılmasıdır. Küme kuramı dilinin şimdiki matematikte ve matematiksel yapıların mevcut nesnelleştirilmesinde (veya, benim ifademle, konumlandırmada) altyapı dili olarak kullanıldığını düşünüyorum. Bu, matematiğin küme kuramsal öncesi ve küme kuramsal sonrası değişik safhalarında görülmektedir. Courant ve Robbins'in, *Matematik Nedir?* adlı meşhur kitabı (kümeler konusunu ele almasına rağmen) matematiğin küme kuramsal öncesi yaklaşımlarına açıklık getirmektedir. Bu kitapta ele alınan konular neredeyse tamamen geleneksel matematik yapılarının elemanları –sayılar, geometrik nesneler ve fonksiyonlar- hakkındadır. Teoremlerinin çoğu

bu nesnelerin birinci dereceden kuramı ile biçimselleştirilebilir. Bunu topoloji ve cebir hakkındaki son kitaplarla karşılaştırabiliriz. Bu kitaplarda çeşitli yapılar, bunların altyapılarının neler olduğu, nasıl genişletilebilecekleri ve neye izomorfik oldukları üzerinde durulmaktadır. Bu teoremleri biçimselleştirebilmek için, yapıların tekil olarak ele alınabildiği kuramların kullanılması zorunludur; ki, bu da küme kuramsal metotların kullanımıyla büyük ölçüde gerçekleşmektedir. Buna rağmen her matematiksel kuram, her elemanın *içsel olarak* nasıl ilişkili olduğunu belirleyen bir veya daha çok yapı ile uğraşır. Küme kuramsal sonrası matematik, bunun bir istisnası değildir; bunları sadece "daha büyük" yapıların elemanları -kümelerin hiyerarşisi- olarak ele alır.

Şimdi elimizde iki çeşit indirgeme var. Birincisinde, bir model diğerinde ortaya çıkar ve birincisinin kuramı ikincisinin kuramında tekrarlanır. İkincisinde, modeller diğer modelin elemanlarıyla tanımlanır; böylelikle bu modeller hakkında önceden söylenmesi dahi mümkün olmayan sonuçlara varmamız mümkün olur. Matematiğin uygulamalarına ikinci indirgemenin gerçek bir etkisi olmuştur.

Filozoflar birinci indirgemeden etkilenmişlerdir. Bunların bazılarında sayıların kümelerden oluştuğuna dair bir şeyin ortaya konup konmadığını bilmek istemişlerdir. Şimdi ise doğal sayıların bir küme olup olmadığını merak ettiklerini görürüz.

Her iki soru da muğlaktır. Bir açıdan bakıldığında onlar sadece belli kümelerin küme olup olmadıklarını sormaktadırlar. Mantıklı olması açısından onların, küme kuramının keşfinden evvel bildiğimiz belli şeylerin küme olup olmadıklarını sorduklarını düşünebiliriz. Bana göre, kümeler belli bir modeldeki konumlar olduklarından, bu modelin konumları olarak bilinmeyen şeylerin bunun içindeki konumlar olup olmadığını sormaktadırlar. Mevzubahis varlıklar, mevzubahis modelin konumları olarak görülebileceğinden soru, *prima facie* [ilk bakışta -Ç.N.] bir anlam ifade etmektedir. Fakat bunu

nasıl ortaya çıkarabiliriz? Matematiksel yollarla olmaz. Ne yeni teoremler ne de yeni aksiyomlar bunları tespit edebilir. Bu sorular, dilbilgisi açısından benzerliklerine rağmen, genelleştirilmiş süreklilik hipotezinin "Her kuvvet kümesinin eleman sayısı kendinden öncekini geçer mi?" sorusu gibi değildir. Mecburiyet durumlarını bir kenara bırakırsak, bunlar, tek bir matematiksel kuramın dili içerisinde değildi. Emin olmak gerekirse bunlar, küme kuramı kavramının genişletilmesi ve bu dile aksiyom olarak yeni özelliklerin veya özellik–olmayanların eklenmesiyle "çözülebilir".[13] Ancak, küme kuramı sayı kuramının üzerinde mi yapılacak veya şöyle dersek, sayı kuramı ona indirgenmiş olarak mı yapılacak gibi matematiğin içeriğinde bir değişiklik yapmadığından, bu çözümlemeler dahi matematiksel kanıtlarla aydınlatılamaz.

Elbette ki bu, matematiksel kuramlarımızın zarafetinde bir değişiklik meydana getirmektedir. Zarafet, matematikte oldukça değerlidir; ancak bunun matematiksel doğruluk ile bir ilgisi yoktur; matematiksel bir sorunun üstesinden geldikten *sonra* bunun daha zarif bir şekilde yapılıp yapılamayacağını sormak uygundur. Matematiksel açıdan bakıldığında, sayılar ve kümeler hakkındaki sorular olgular hakkında değildir; bunlar daha ziyade, matematiksel kuramları nasıl ortaya koyabileceğimizle ilgilidir.[14] Benim görüşüme göre bu, bu sorulara verilebilecek mecburiyet arz etmeyen biricik durumdur. Elimizde konu hakkında bir olgu olduğu görüşü ile herhangi bir x nesnesi ve bir model içerisindeki y konumu verildiğinde x = y veya x

---

Ø", "(x)(x' = x U { x })" aksiyomunun eklenmesiyle müspet olarak; aynı semboller ve N, "0" ve " ' " terimleri kullanılarak her zamanki küme kuramsal tanımında olmak üzere, "(x) (x ∈ N ⊃ ~ (∃ y) (y ∈ x.x ≠ Ø)" aksiyomunun eklenmesiyle menfi yönde "cevaplandırılabilir".

14 Elimizde, konu hakkında bir olgu olmadığından yorumlama yoluyla da başka bir olguya ulaşılamaz.

15 Amerikan Bayrağı Modelinden birçok yıldız seçebileceğiniz gibi daha bü-

≠ y olduğunu kabul etmek aynıdır. Modelleri ele alış biçimime göre bu varsayım geçersiz olmaktadır.

Matematiksel indirgemeler sayıların, fonksiyonların, kümelerin, vs. gerçek anlamda ne olduklarını söyleyemez; ama bunlar belli bir tür matematiksel nesnenin noksan kavramlaştırılmasından veya kuramından daha yeterli olanlarına doğru yönlendirebilir. Örneğin, kurallar gibi amaçlı kavramlar içerdiği için fonksiyonlara itiraz eden birine, fonksiyonların sıralı ikililerden oluşan kümelerden başka bir şey olmadıkları şeklinde karşılık verilebilir. Kurallar olarak algılanan fonksiyonlar ile kümeler olarak algılanan fonksiyonların aynı olduğu iddiasında bulunmadığımızın farkında olduğumuz sürece, bu cevapta yanlış bir şey yoktur. Burada yaptığımız şey, asıl kuramın matematiksel işlerini görebilecek genişletilmiş bir kuram kullanarak, fonksiyonların amaçlı olmaları hakkındaki endişeleri bertaraf edebileceğimizi göstermektir.

Kendi görüşümü matematiksel bir kuram olarak düşünmesem de bunun gibi bir şey benim model kuramı hakkındaki önermelerim için de söylenebilir. Modelleri ve konumları gizemli bulanlar, bunların soyut kümelere indirgenmesini ikna edici bulabilirler. Matematiksel nesnelerin modellerdeki konumlar olduğu görüşüm kabul görürse, tabiî ki, bu da matematiğin küme kuramına indirgenmesinin başka bir yüzünü oluşturacaktır. Her iki durumda da kuramları, eski ve yeni kuramların aynı ontolojiye sahip olup olmadıkları meselesinde hiçbir olgunun bulunmayışıyla değiştirebiliriz. Diğer yandan, ben hâlâ modellerin soyut kümelere indirgenmesinin hem gereksiz hem de istenmeyen bir durum olduğu düşüncesini korumaktayım. Gereksizdir; çünkü konumlar ve modeller hakkındaki kavramsallaştırmam olabildiğince açıktır. İstenmeyen bir durumdur; çünkü bir "büyük" modele indirgenmesi, modeller ve bunların konumları arasındaki bağıntıları ilgi alanı olmaktan çıkaracaktır. Ve bir şekilde engellenemeyecektir. Çünkü bunun eski modellerle

nasıl ilişkili olduğuna veya gelecekte keşfedilecek modellerle nasıl bir ilişki içerisinde olacağına dair endişelerimiz yine devam edecektir. Modeller konusunda ben haklıysam, bu endişeler yersizdir. Matematiksel nesnelerin modeller içerisindeki konumlar olduğu konusunda haklıysam, sayıların gerçekten küme olup olmadıkları hakkındaki endişeler de yersizdir.

4. REFERANS

Modelleri birçok yolla tarif edebiliriz. Bir yol, modelin kaç konumu olduğunun ve bunların nasıl ilişkili olduğunun belirtilmesidir. Başka bir yol, modelin bir örneğinin ortaya konması ve bu başlangıç modelinin zihnimizdeki model olduğunun söylenmesidir. Üçüncü bir yol, konumlara isimlerin verilmesi ve bunlar yardımıyla konumların nasıl ilişkili olduklarının belirtilmesidir. Hiçbir model tarifi -sınıflandırılmış aksiyom kümeleri aracılığıyla yapılanlar bile- modeli diğer modellerde ortaya çıkanlardan veya tek başına çıkanlardan ayırt edemez. Aynı şekilde, bir kare tarifi, bunu eş olduğu diğer karelerden ayırt edemez. Bu benim düşüncemle de tamamen uyuşmaktadır. Çünkü, hangisi olduğunu söyleyemesek de bu, bir veya birkaç modelin tarif edilip edilmeyeceği konusuna dair bir soru değildir. Kaç model olduğuna dair de sadece bir olgu vardır.[15]

Matematiksel kuramlar çeşitli matematiksel modelleri tarif ederler.[16] Bunların doğrulukları kesinliklerinde yatmaktadır. Lâkin mo-

yük bir model içerisinden de, tabiî ki, bir modelin birçok değişik oluşunu seçebiliriz. Bunu ancak daha büyük bir model ***içerisindeki*** konumları belirleyerek yapabiliriz.

16 Kafamda sayı kuramı, analiz ve küme kuramı gibi "somut" matematiksel kuramlar var. Grup kuramı, topoloji ve belki de modern geometri gibi "soyut" kuramlar tek bir yapıyı tarif etmeye teşebbüs etmezler; ancak yapı sınıflarıyla ilgilenirler. "ise ... o zaman" veya tümdengelim yaklaşımı bu kuramlar için uygundur.

17 Sınıflandırılmamış kuramlar birtakım sorunlar yaratır. Birinci dereceden

deller ve konumları tamamıyla belirlenemezse uygunluk, bir kuram ve onun modelleri arasında kurulan doğruluk için nasıl yeterli olabilir ki?[17] Düşüncelerimizi sabitleştirmek için sayı kuramının doğal sayıları nasıl tarif ettiğini bir soralım.

Referansa ve doğruluğa olan standart yaklaşım, her rakama sadece bir konum (sayı) tahsis etmeyi dahası bunu vasıflandırma olmaksızın yamanın mümkün olduğunu kabul etmektedir. O zaman da doğruluk Tarski'nin yaptığı gibi dönüşlü olarak tanımlanmaktadır. Bu yaklaşım, modeller açısından geçersizdir; çünkü bu, konumların vasıflandırılmamış tanımlarının yapılabileceğini öngörmektedir; hâlbuki ben, tanımlamaların sadece model içerisinde yapılabileceğini iddia etmekteyim.

Nicholas White [13]'te rakamları, gerçekte ilerleme anlamında araçları olan fonksiyon terimleri olarak işleyen bir görüş ortaya koymaktadır. "3" yerine P'nin bir değeriyle belirlenen, herhangi bir ilerlemedeki dördüncü nesne anlamına gelen "3(P)" vardır. Örneğin, 1(P) = {∅}(S) olan P ilerlemeleri ve S küme kuramsal hiyerarşileri vardır; fakat başka P ve S için bu geçersizdir sonucuyla birlikte bu görüş, diğer türdeki yapılara genişletilebilir. Bu yaklaşım, bütün matematiksel yapılar ve üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar için ortak bir evren -ya da en azından bütün ilerlemeler için bir evren-

sayı kuramı, modeller hakkında açık bir fikre sahip olduğumuz ve kuramın bunu bütünüyle tarif edemediğinin farkına vardığımız bir durum gibi görünmektedir. Dolayısıyla, istenmeyen modelleri ele alırken başka araçlar kullandık. Küme kuramında ise küme kuramsal hiyerarşinin tam bir tarifinden yoksun olduğumuzun farkındayız; ancak küme kuramı ile tarifi mümkün yapılardan hangisinin "istendiği" konusunda emin değiliz. Dikkat ederseniz, sayı kuramı ve küme kuramının istenen veya istenmeyen modelleri denk esaslar içermektedir. Sayı kuramının başlangıç versiyonunu ve şimdiki küme kuramını bu esasları tarif etme girişimi olarak görüyorum. Bunların, esasların muhtelif genişlemeleriyle karşılanmış olduğu başlangıçta gözümüzden kaçmıştı.

18 Hem Field'in hem de White'ın yaklaşımları Kitcher [6]'da irdelenmiştir.

gerektirir. Böylece ben hiçbirini göremediğim hâlde, o meselenin gerçeklerini görmektedir.

Hartry Field [4]'te benim görüşüme oldukça yaklaşmaktadır. Kısmî yüklem kavramını kullanarak rakamların, birkaçının birden yerine geçtiğini kabul eder. Örneğin, "0" rakamı kısmen 0, Ø, {Ø} ve her ilerlemenin birinci elemanı yerine geçmektedir. Diğer rakamların kısmî olarak eşleştikleri belirlenirken, farklı rakamların aynı ilerlemenin farklı elemanları yerine geçecek şekilde bağlantılı olması gerekliliğiyle beraber, bunlar ilerlemenin karşılık gelen elemanları yerine geçmektedir. Dolayısıyla "2", (Ø, {Ø}, {{Ø}}, ...) ifadesinde {{Ø}} yerine ve ({Ø}, {{Ø}}, {{{Ø}}}, ...) ifadesinde {{{Ø}}} yerine kısmen işaret etse de, belirgin çelişkilerin önüne geçilmiştir. Sayı kuramının bağıntı sembolleri, bunların kısmî işaretleri olarak, bir ilerlemede karşılık gelen bağıntılarla eşlenmiştir. Bunun geçerli olduğu bir yapının, sayı kuramının anlambilimiyle, kısmen uyum içerisinde olduğu söylenebilir. Sayı kuramına ait bir ifade doğrudur (veya yanlıştır); ancak ve ancak o ifade, sayı kuramının anlambilimiyle kısmen uyum içerisinde olan ***her*** yapıda doğrudur (yanlıştır). Doğruluk, Tarski'nin anladığı şekilde kullanılmıştır. Buradan, sayı kuramına ait dilin doğrularının sadece her ilerlemede geçerli olanlar olduğu ortaya çıkmaktadır. Dahası sayı kuramsal ile küme kuramsal karışımı bir dilde –ikisinin de terimleri primitif olarak alındığı sürece– "1={Ø}" gibi ifadelere, anlambilimi ne doğru ne de yanlış diyebilecektir. Dolayısıyla, Field doğruluğu, yanlışlığı ***ve*** doğruluk-değerinin olmayışını tam da benim gibi görmektedir.

Buna rağmen Field, ben hiçbirini görmediğim hâlde meselenin gerçeklerini görmektedir. Kısmî referans bağıntısı bunlardan biri olup tamamen rakam ile ilerlemenin elemanları arasındadır. Farz edelim ki, "2", P_1 ilerlemesinin bir x elemanını, "3" ise P_2 ilerlemesinin bir y elemanını kısmen işaret etsin. Field'in anlambilimine göre, P_1 ve P_2 aynı ilerlemeler ise x'in 6'dan farklı olması gerekmektedir.

Bu da, P_1 ve P_2 bir ve aynı yapı içerisinde olmasalar bile, x = y olup olmadığı meselesine ait bir olgunun bulunmasını gerektirir. Bu bakımdan görüşlerimiz ayrışmaktadır.[18]

Geriye, bildiğim kadarıyla, sadece göreceli referansın bir çeşidi kaldı. Quine'ın görüşünün değişik bir hâlinin, benimkiyle uyuştuğunu düşünüyorum. Ama bundan önce görüşün tamamlanabilmesi için bir referans kuramının neden gerekli olduğu sorusuna nasıl bir cevap vermek istediğimi açıklayayım. Cevap bence son derece açıktır. Realizmi benimsediğimden matematiksel ifadelerin nesnel gerçeklik itibariyle doğru veya yanlış olduklarına inanıyorum. Şimdiye dek bu gerçekliğin ne olduğuna dair bir görüş ortaya koydum. Bir referans "kuramı" matematiksel ifadeler ile bu gerçeklik arasındaki bağlantının açıklanabilmesi için gereklidir.[19]

Müsaadenizle, doğal sayıların bir *ortaya çıkışını sabitleyelim.* Şimdi, sabitlediğimiz bu ortaya çıkış itibariyle referans ve doğruluğa standart bir Tarskici yaklaşım mümkündür. "0" sembolü dizideki birinci konuma, ardışık olma sembolü ardışık olma bağıntısına, nicelik belirleyiciler değer kümeleri olarak dizideki konumlar bütünlüğüyle eşlenmiştir, vesaire. Doğruluk aşina olduğumuz şekilde dönüşlü olarak tanımlanır. Doğal sayılar hangi ortaya çıkışlarıyla sabitlenirse sabitlensin, bu şekilde doğrulanan sayı kuramsal ifadeler kümesi aynı kalacaktır. Dolayısıyla, mevzubahis doğal sayı dizisinden bir veya birkaç tane olup olmadığı hariçte tutulmak kaydıyla, sayı kuramsal doğruluğun bir ortaya çıkış *yoluyla* belirlenmesi, bütün ortaya çıkışlar için geçerli olmaktadır.

---

19 "Kuram" kelimesini tırnak içine aldım; çünkü benim görüşüme göre, matematiksel terimlerin referansı meselesine ait bir olgu yoktur. "Modeller içindeki konumlara atıfta bulunmamız nasıl mümkün olmaktadır?" gibi referans hakkındaki epistemolojik sorulara cevap aramayacağım. Bunları 4. notta belirtilen makalede ele almayı umuyorum.

* Bir 'urelement' hiçbir eleman içermeyen ve bazı kümelere ait olan kümeye

Şimdi de sayı kuramsal dilin eklemlenmiş olduğu bir dili göz önüne alalım. Ayırt edilmesi gereken iki durum söz konusudur. Birincisi, sayı kuramsal semboller daha geniş olan dilin primitif sembolleridir. Ardından, doğal sayıların urelementler* olacak şekilde "esasında" ortaya çıktığı küme kuramsal hiyerarşinin bir ortaya çıkışını sabitlemeliyiz. Daha sonra konumları rakamlara ve diğerlerini küme sembollerine eşleyerek alışılmış şekilde devam ederiz. Bu, "3 ∈ {2,3,4}" gibi sayı kuramının ve küme kuramının birleşik doğrularına yol açmaktadır; ancak "2 ∈ 3"gibi sadece sayılara işaret eden yenilerini oluşturamamaktadır. Bundan da kimsenin şikâyeti olmamıştır.

İkinci durumda, sayı kuramsal semboller tanımlanmaktadır. Dolayısıyla, rakamlar sabitlenmiş küme kuramsal hiyerarşinin ortaya çıkışına tekabül etmektedir.[20] Böylece –"2 ∈ 3" gibi- sadece sayıları içeren bazı doğrular oluşturulmuş olmaktadır. Bu durumu, sayı kuramının küme kuramına indirgenmesinin bir takviyesi olarak değerlendiriyorum. Dolayısıyla, bunların sadece sayıları içeren yeni doğrular olduğu sonucuna varmamalıyız. Bunlar, doğal sayıların bir ortaya çıkışının konumları hakkındaki doğrular yerine, küme kuramsal hiyerarşinin bir ortaya çıkışının konumları hakkındaki doğrulardır; dolayısıyla, tamamen kümeler hakkındaki doğrulardır.

Şimdiye dek, doğal sayıların bir ortaya çıkışı sabitlendiği vakit sayı kuramı için bir anlambilimi oluşturma üzerinde açık bir şekilde

---

denir ve bu, boş küme ile aynı değildir. Pür küme kuramında bütün elementler kümedir ve urelementler yoktur. Bazen, küme kuramının aksiyomlarında urelementlerin bulunması için teknik olarak küçük değişiklik yapılır. (http://mathworld.wolfram.com.Urelement.htlm, Kasım 2002) Ç.N.

20 Mark Wilson [14]'te doğal sayıları içeren küme kuramını asıl elemanlar olarak, soyut küme kuramını ise ontolojik denk olarak görmektedir. Bana göre, bunlar denk ama eş olmayan modellerin örnekleridir. Fark ettiyseniz, bir kuramın ontolojisi hakkındaki sorular görüşümde yer bulamamaktadır.

21 Quine'a göre tam ve kesin bir kuram bile başka kuramlar içerisinde yeniden

söz sarf ettim. Fakat bir modelin ortaya çıkışının sabitlenmesi için ne kadar uğraşırsak uğraşalım, genel olarak, sabitlendiği düşünülenin diğer bazı ortaya çıkışlarla aynı olup olmadığı meselesine dair bir olgu yoktur. Doğal sayıların bir ortaya çıkışını, daha kapsamlı bir modelin belli bir alt modeli olarak tanımlayarak sabitlersek, daha geniş model içerisinde bunu diğer ortaya çıkışlardan ayırt edebiliriz. Küme kuramsal taslak içerisinde sayı kuramı için biçimsel bir anlambilimi oluşturmanın sebebi, rakamları mutlak surette işaret etmek gibi görünüyor. Şunu da unutmamalıyız ki, bu, küme kuramsal hiyerarşinin sabitlenmiş bir ortaya çıkışını varsaymaktadır.

Modeli seçebilmek için onun bir ortaya çıkışını temsilî bir şema –diyagram, tarif veya kuram– kullanarak sabitlemeye çalışırız. Modelin örneklerine dahi yönelebiliriz. Ancak bu noktada göreceli referans devreye girmektedir; çünkü bütün çabalarımıza rağmen sabitlenmiş ortaya çıkışın (muhtemelen daha kapsamlı bir model içerisinde) diğer ortaya çıkışlarla aynı olup olmadığı meselesiyle ilgili soruların önüne geçememekteyiz.[21] Dolayısıyla referans, *bir modelin ortaya çıkışının sabitlenmesiyle* ilgilidir. Bunun anlamı, bir modelin kuramına ait anlambilimimiz, modelin bir ortaya çıkışını sabitleme yoluyla oluşturduğumuz temsilî şemanın önemli addedilmesine dayanmaktadır.[22] Mutlak referansı, modellerin tamamıyla sabitlenmesiyle başarma isteği bana göre yapılacak daha fazla şeyin olmadığı noktasını kaçırmaktadır. Çünkü, her ikisinin de aynı modelin alt

---

yorumlanabilir.

22 Karşılaştırınız; Quine: "Uygulamada, tabiî ki, koordinat sisteminin gerilemesini noktalama gibi bir şeyle sonlandırınız. Ve yine uygulamada, referans konusunu ele alırken, arka plândaki dilin gerilemesini ana dilimiz içerisinde kabul ederek ve kelimelerine önem göstererek sonlandırınız." [8] sayfa 49.

23 Referansın, "x, y'ye tekabül eder" ikili bir bağıntı olması yerine "x, AD' ye

modeli oldukları durum haricinde, bir modelin ortaya çıkışıyla bir diğerinin aynı olup olmadığı meselesine dair bir olgu yoktur.[23]

Bir dil için referans "kuramının" bir kısmı, nicelik belirleyicilerinin bir silsilesini sabitlemeyi içerdiğinden dolayı, göreceli referansın bir sonucu, göreceli ontolojinin de bir sonucudur. Benim durumumda bu şu doktrine kayar: Sadece modelin bir ortaya çıkışının sabitlendiği durumda, bir modelin kuramının ontolojisi (konumları) hakkında konuşmak bir anlam ifade etmektedir. Quine'ın, bir kuramın diğeri tarafından nasıl yorumlanabileceği ile ilgili ifadeler bir anlam ifade etmektedir dediği yerde, ben de buna paralel olarak bir modelin diğeri içerisinde ortaya çıkışıyla ilgili ifadeler bir anlam ifade etmektedir iddiasını savunmaktayım.[24]

---

bağlı olarak y'ye tekabül eder" üçlü bağıntısı olarak anlaşıldığı Quine'ın "referans arka plân diliyle ilişkilidir" tertibine dayanarak Hartry Field, Quine'ın göreceli referansına itiraz etmektedir. (Aslında Field, Quine'ın, referans "x, M dönüştürme aracına bağlı olarak y'ye tekabül eder" biçimindedir cümlesini okumuştur. Bakınız [4] sayfa 206-208) Bence bu itiraz bir yanlış anlamaya dayanmaktadır. Quine ve ben, bir modelin (arka plân dilinin) ortaya çıkışı sabitlenmediği (önemli addedilmediği) zaman referansın bir anlam ifade etmediğini savunmaktayız. Bu, belli bir yaşa gelmemiş birinin yasal olarak bir anlaşmaya göre sorumlu tutulamayacağını göstermek gibidir. Her iki durumda da "... ile ilişkili" kullanılabilir; örneğin, "bulunduğun yaş ile ilişkili olarak Jones'a yasal olarak 100$ vermek durumundasın" veya "İngilizce'yi önemli addetmeyle ilişkili olarak Fransızca 'deux' ifadesi ikiye tekabül etmektedir." Bunların hiçbirinde istenilen ilişki seviyesinde bir artış meydana gelmez. "başkandır" yüklemindeki vurgu derecesini ortaya koymak açıklayıcı olabilir; ancak, Quine'ın "'deux' ikiye tekabül eder" ["'deux' refers to two"] ifadesini "'deux' İngilizce'de ikiye tekabül eder" ifadesi şeklinde okumasını talep ederseniz, bu işe yaramazdır. Çünkü, eğer İngilizce olarak yazılan "'deux' refers to two" ifadesini anlamadıysanız, bu cümleye "İngilizce'de" kelimesini eklemek sizin için yine açıklayıcı olmayacaktı.

24 Quine'a göre bir kuramın zaten yorumlanmış olduğu hatırlanırsa görüşlerimiz arasındaki farkın, modelleri ortaya koyuşumun yönlendirdiği düşünce kadar büyük olmadığı görülür. Gerçekten de bu makalenin önceki karalamalarına dair görüşmelerimizde ve yorumlarında Quine, modeller içerisindeki konumların ile kendi kuramının nesneleri arasındaki benzerliğe dikkat çekmişti. Matematiksel olmayan nesnelerin vasıflarının sadece diğer nesne-

Dünyayı ya da doğruluğu dünyanın içinde bulunduğu durum ile ilgili bir mesele olarak ele alan görüşü bir kenara atmış gibi görünebilirim. Ancak ben ne modellerin varlığını inkâr etmekteyim ne de bir modelin, kuramlarının içerisinde neyin doğru olduğunu belirlemede nasıl başarısız olduğunu söylemekteyim. Benim iddiam, modellerin kuramları ile modeller arasında referansı etkileyebilecek, yeterli bir etkileşimin olduğudur. Fakat bu, doğruluğu etkilemez; bir modelin kuramının doğruları, bu modele eş olan modeller içerisindeki yeniden yorumlanışları altında değişken değildir.

5. SONUÇ

Frege –ve Dedekind da– sayıların ne olduğunu sorduğunda, matematikte ne doğal sayılar yeterince vasıflandırılmıştı ne de sayı kuramının aksiyomatik bir temeli vardı. Onların bu sorusu, aslında, matematikten sayılar hakkında yeterli bir gelişim göstermesini isteyen bir talepti. Bunu yapmanın bir yolu, sayı kuramının temellerini sadeleştirmektir. Zaten bu onların çalışmalarının doğrudan bir sonucuydu. Diğer bir yol ise sayıları, hakkında yeterince bilgi sahibi olduğumuz varlıklarla tanımlamaktır. Frege onları kümelerle tanımlayarak bunu da denedi; ancak kümeler üzerinde zaten yeterince şüphe varken böyle bir tanımlama kendi içinde kavramsal olarak sade görülmemektedir.

---

lerle olan ilişkilerinden kaynaklandığını gösteren düşünceleri delil olarak sunmak ve ardından bunların da modeller içerisindeki konumlar olduğunu tartışmak mümkündür. Bu sonuca giden yol Quine'ınkinden biraz farklı olsa da, görüşlerimin bütün bir görèceli referans kuramını içerecek şekilde genişletilmesine yol açacaktır. Çünkü tavşanların referansına dair endişeler karşısında tavşanın evrelerinin referansına dair endişeler; bir modelin çoklu ortaya çıkışlarına dair endişeler bir değildir. Tavşan kısımları, tavşan evreleri ve tavşanlar birbiri içerisinde ortaya çıkan veya denk olan ve bu sayede görecelilik olgusunu ortaya çıkaran, eş olmayan modeller içerisindeki konumlar olabilir.

25 Bu makale, büyük gayretlerle birkaç yıl içerisinde hazırlandı; dolayısıyla,

Bu makale matematiksel nesnelerin ne olduğu sorusuna başka bir yaklaşım getirmiştir. Mesele artık matematiksel kavramların sadeleştirilmesi meselesi değildir. Mesele bunlara felsefî yorumların bulunmasıdır. Matematiksel nesnelerin bir model içerisindeki konumlar olduğuna dair önerim, ontolojik indirgeme amaçlı değildir. (Elbette böyle bir şeye yol açabilir; ancak, modelleri kümelere indirgeseydik bu, eski olan yola sapa bir yol eklemek olurdu.) Bunun yerine benim niyetim çoklu indirgeme, göreceli ontoloji ve sayı kuramını ele alan başka bir yol önermekti. Umudum odur ki, bunların modeller nazarında çok daha açık bir şekilde ortaya çıkmasıyla bunlar, matematiksel yapılara göre daha anlaşılır görünecektir.[25]

---

büyük miktarda teşekkür borcum birikti. Oswaldo Chateaubriand, Benacerraf [2] hakkındaki sözlü yorumlarında, belli soyut varlıkları, örnekleri aracılığıyla algılayabileceğimize işaret etti. Matematiğin çeşitli kaynaklardan oluşan yapılar hakkında olduğu görüşüne aşina olduğum hâlde bu yorumlar Platonculuğun bir epistemolojisi için bana zemin hazırladı. Benacerraf matematiğin çoklu indirgemeler meselesiyle uğraşan bir yapı olabileceğini ima etmişti. Sanıyorum Platonculuğun epistemolojik ve ontolojik zorluklarına [10]'da yapısal bir yaklaşım öneren ilk kişi bendim. O zamandan beri birçok insanın yorumlarından, teşviklerinden ve tartışmalarından faydalandım: James Anderson, Catherine Anderson, Charles Chihara, James Fetzer, Jane Fleener, Nicholas Goodman, Richard E. Grandy, Gilbert Harman, Penelope Maddy, Vann McGee, Richard Nunan, W.V.O. Quine, Jay F. Rosenberg, Frederick Schmitt, La Verne Shelton, Brian Skyrms, Mark Steiner, Mark Wilson, Paul Ziff ve National Endowment for the Humanities Summer Seminar üyeleri. Mektuplarının ve görüşmelerimizin büyük yararını gördüğüm John Corcoran ve Philip Kitcher'a hususî şükranlarımı sunuyorum. Şunu da eklemeliyim ki, bildiğim kadarıyla bu saydıklarımdan çok azı, benim, meseleleri doğru-dürüst algıladığımı düşünüyor. Bu düşüncelerin önceki versiyonları; Buffalo Mantık Kolokyumu'nda, Davidson Koleji'nde, Kuzey Carolina Felsefe Topluluğu'nda, Greensboro'daki Kuzey Carolina Üniversitelerinde, Matematiğin Felsefesi konulu Chapel Hill Konferansı'nda, Chapel Hill'deki Kuzey Carolina ve San Diego'daki California Üniversitelerindeki felsefî oturumlarda sunulmuştur.

KAYNAKÇA

[1] Benacerraf, P., "What Numbers Could Not Be", *Philosophical Review*, 74(1965):47-73
[2] ———, "Mathematical Truth", *Journal of Philosophy*, 70(1973): 661-79
[3] Corcoran, J., "On Definitional Equivalence and Related Topics", *History and Philosophy of Logic*, 1(1980): 23-34.
[4] Field, L., "Quine and the Correspondence Theory", *Philosophical Review*, 84(1975): 23-50
[5] Jubien, M., "Ontology and Mathematical Truth", *Nous*, 11(1977): 133-50
[6] Kitcher, P., "The Plight of the Platonist", *Nous*, 12(1978): 119-36
[7] Parsons, C., "Ontology and Mathematics", *Philosophical Review*, 80(1971): 151-76
[8] Quine, W.V., "Ontological Relativity" in *Ontological Relativity and Other Essays* (New York: Columbia University Press, 1969).
[9] Resnik, M., "More on Skolem's Paradox", *Nous*, 3(1969): 185-96
[10] ———, "Mathematical Knowledge and Pattern Cognition", *Canadian Journal of Philosophy*, 5(1975): 25-39
[11] ———, Frege and the Philosophy of Mathematics (Ithaca: Cornell University Press, 1980)
[12] Steiner, M., Mathematical Knowledge (Othaca: Cornell University Press, 1980).
[13] White, N., "What Numbers Are", *Synthese*, 27(1974): 111-24
[14] Winson, M., "The Double Standard in Ontology", *Philosophical Studies*, forthcoming in 1981.

IV. ÖZGÜN YÖNELİMLER

MATEMATİĞİN TEMELLERİ ÜZERİNE UYUŞMAZLIK YÜZYILI*

Gregory J. Chaitin
Çev. Bekir S. Gür

Evet, bazı çılgınca şeylerden bahsedeceğim. Genel kanı fikirlerin bazen çok güçlü olduğudur. Bir kavram, felsefî bir kavram olarak bilgisayar hakkında bir kuramdan bahsedeceğim.

Hepimiz biliyoruz ki, bilgisayar gerçek dünyada çok kullanışlı bir nesnedir! Maaşlarımızı öder; öyle değil mi? Fakat insanların

---

* **Finite versus Infinite** [Sonlu versus Sonsuz]; *C. Calude ve G. Paun*, Springer-Verlag London, 2000, sayfa 75-100. 30 Nisan 1999 Cuma günü Lowell'daki Massachusetts Universitesi'nde verilmiş bir konferansın video kayıtlarının transkriptidir. Bu yazının başka bir versiyonu için bkz. Complexity_5, No. 5 (May /June 2000), s. 12-21. http: www.umcs.maine.edu/~chaitin/lowell.html, 11.8.2000

çoğu zaman hatırlamadığı şey, —abartmış olacağım, lâkin söyleyeceğim— bilgisayarın gerçekte matematiğin temelleri ile ilgili felsefî bir sorunu aydınlatmak için icat edilmiş olduğudur.

Şimdi, bu fikir saçma gibi görünüyor; ancak bunun doğru tarafları var. Aslında, bilgisayara, bilgisayar teknolojisine yol açan birçok fikir silsilesi vardır. Bu fikirler, matematiksel mantık ile matematiğin sınırları ve gücü hakkındaki felsefî sorunlardan türemiştir.

Bu tür sorunlardan ilham alan, oyuncak bir bilgisayarın matematiksel bir modeli olan Turing makinesini icat etmiş olan bilgisayar öncüsü Turing'dir. Turing bu makineyi Hilbert'in matematik felsefesi ile ilgili bir sorusunu çözmeye çalışırken icat etmiştir. Turing, bunu herhangi gerçek bir bilgisayar henüz icat edilmeden önce yaptı ve sonra da sahiden bilgisayar yapmaya koyuldu. İngiltere'deki ilk bilgisayarlar Turing tarafından yapıldı.

Buna ilâveten, Birleşik Devletler'de bir teknoloji olarak bilgisayarların icadını, (maalesef savaş çalışmalarının ve atom bombası inşa etme çalışmalarının bir parçası olarak) üretilmesini teşvik etmede faydalı olan von Neumann, Turing'in çalışmalarını çok iyi biliyordu. Ben Turing'i, Turing'in çalışmalarının öneminden bahseden von Neumann'ı okuyarak öğrendim.

Demek ki, benim bilgisayarların kökeni hakkında söylediklerim tümüyle bir uydurma değildir. Lâkin bu mevzu entelektüel tarihin unutulmuş bir parçasıdır. Bu konuşmanın bitiş yargısı ile başlayayım: Bunların çoğu bir bakıma Hilbert'in çalışmalarından türemiştir. Bu yüzyılın başlarında çok iyi bilinen bir Alman matematikçi olan Hilbert, matematiğin tümünü, bütün matematiksel akıl yürütmeleri —sonuç çıkarmaları— biçimselleştirmeyi önerdi. Ve Hilbert'in bu önerisi çok büyük, görkemli bir fiyaskodur!

Bir bakıma, bu, büyük bir başarısızlıktır. Çünkü, matematiksel akıl yürütmenin biçimselleştirilemeyeceği açığa çıkmıştır. Bu, benim

bugün üzerinde konuşacağım, 1931'de Gödel tarafından yapılan çalışmanın meşhur bir sonucudur.

Fakat bir başka yönden, Hilbert gerçekten haklıydı; çünkü biçimcilik (formalizm) bu yüzyılın en büyük başarısı olmuştur. Akıl yürütme veya mantıksal çıkarım için değil de, programlama ve hesaplamada biçimcilik son derece başarılı olmuştur. Eğer bu yüzyılın başındaki mantıkçıların çalışmalarına bakarsanız, onlar akıl yürütme, mantıksal çıkarım ile matematik yapma ve sembolik mantık için biçimsel diller üzerine konuşuyorlardı; bununla beraber onlar aynı zamanda programlama dillerinin ilk versiyonlarından bazılarını da icat etmişlerdi. Dahası, bu programlama dilleri, bizim her zaman birlikte yaşadığımız ve beraber çalıştığımız biçimciliklerdir! Bunlar çok önemli teknolojilerdir.

Böylece, akıl yürütmek için biçimcilik işlemedi. Matematikçiler biçimsel diller içinde akıl yürütmezler. Fakat hesaplama, programlama dilleri için biçimcilik, kökü bu yüzyılın başında Hilbert'e dayanan, matematik ile ilgili epistemolojik, felsefî soruları açıklamaya çalışan biçimci görüş için de bir bakıma doğrudur.

Şimdi size şaşırtıcı bir sonucu olan bu öyküyü anlatıp, entelektüel tarihin bu şaşırtıcı parçasından bahsedeceğim.

Küme Kuramında Kriz

Müsaadenizle, yaklaşık bir yüzyıl öncesine gidip, Cantor ile başlayalım...

Georg Cantor

Mesele şudur: Normalde matematiğin statik, değişmeyen, mükemmel, mutlak doğru, mutlak gerçek vs. olduğunu düşünürsünüz; değil mi? Fizik değişken olabilir; fakat matematikte nesneler kesindir! Hâlbuki durumun tam olarak böyle olmadığı açığa çıktı.

Geçen yüzyılda matematiğin temelleri, matematiğin nasıl yapılması gerektiği, neyin doğru olup olmadığı, matematikte geçerli bir

ispatın ne olduğu gibi konular üzerine birçok uyuşmazlık yaşandı. Bunun üzerine neredeyse kan akıtılıyordu... İnsanların korkunç kavgaları oldu ve bu öykü akıl hastanesinde son buldu. Bu, oldukça önemli bir uyuşmazlıktı. Bu uyuşmazlık çok iyi bilinmiyor ama bunun entelektüel tarihimizin ilginç bir parçası olduğunu düşünüyorum.

Birçok insan görelilik kuramı hakkındaki uyuşmazlıktan haberdardır. Einstein, başta çok tartışıldı. Ve sonra kuantum mekaniği üzerine olan uyuşmazlık... Bunlar, yüzyıl fiziğinin iki önemli devrimidir. Fakat daha az bilinen şey, pür (katıksız) matematikte de müthiş devrimlerin ve uyuşmazlıkların olduğudur. Bu, gerçekte Cantor ile başladı.

Cantor'un yaptığı şey, bir sonsuz kümeler kuramı icat etmekti.

Sonsuz Kümeler

Cantor bunu yaklaşık yüzyıl önce icat etti; hatta, yüzyıldan biraz daha uzun bir süre öncedir. Bu kuram çok büyük bir devrim niteliğinde olup, aşırı derecede maceralı bir iştir. Niçin böyle olduğunu açıklayayım.

Cantor şöyle dedi: 1, 2, 3 ...'u ele alalım.

1, 2, 3, ...

Hepimiz bu sayıları görmüşüzdür; değil mi? Cantor, bu dizinin ardına sonsuz bir sayı eklemeyi teklif etti.

1, 2, 3, ... omega

Cantor, bu sayıyı da Yunan alfabesindeki küçük omega (ω) ile gösterdi. Sonra da, niye burada duralım, yolumuza devam edip sayı serisini genişletelim önerisinde bulundu.

1, 2, 3, ... omega, omega+1, omega+2, ...

Omega artı bir, omega artı iki, sonra sonsuz miktarda bir zaman bu işleme devam edin. Bundan sonra ne ekleyeceksiniz? Peki, iki omega? (Aslında, teknik sebeplerden ötürü omega çarpı ikidir.)

1, 2, 3, ... omega ... 2omega

Sonra iki omega artı bir, iki omega artı iki, iki omega artı üç, iki

omega artı dört...

1, 2, 3, ... 2omega, 2omega+1, 2omega+2, 2omega+3, 2omega+4, ...

Sonra, ne gelir? Üç omega, dört omega, beş omega, altı omega, ...

1, 2, 3, ... 3omega ... 4omega ... 5omega ... 6omega ...

Peki, bütün bunlardan sonra ne gelecek? Omega'nın karesi! Ve böylece devam edin, Omega kare artı bir, omega kare artı altı omega artı sekiz... Pekâlâ, uzun bir süre bu şekilde devam edin ve omega kareden sonra gelen ilginç şey? Omega'nın küpü! Ve sonra siz omega'nın dördüncü kuvvetini sonra beşinci kuvvetini elde edersiniz ve çok sonra?

1, 2, 3, ... $omega$ ... $omega^2$ ... $omega^3$ ... $omega^4$ ... $omega^5$

Omega üzeri omega!

1, 2, 3, ... $omega$ ... $omega^2$ ... $omega^{omega}$

Ve çok sonra, omega üzeri omega üzeri omega, sonsuz kere!

1, 2, 3, ... $omega$ ... $omega^2$ ... $omega^{omega^{omega}}$ ... $\mathrm{omega}^{\mathrm{omega}^{\mathrm{omeg-}}}$

Buna genellikle epsilon-sıfır denildiğini zannediyorum.

$\mathrm{epsilon}_0 = \mathrm{omega}^{\mathrm{omega}^{\mathrm{omeg-}}}$

İnsanı hayrete düşürecek hoş bir sayı! Bu noktadan sonra işler biraz zorlaşıyor...

Bu, Cantor'un asıl hüneri olan sonsuz kümelerin boyutunu ölçmek için yaptığı ısınma turu niteliğinde harikulâde hayalî ve üretici bir şeydi; dahası bu, çok aşırı tepkiler aldı. Cantor'un yaptığı şeyi bazıları sevdi, bazıları ise onun bir akıl hastanesine konulması gerektiğini düşündü! Gerçekten de bu eleştirilerden sonra Cantor'da sinir bozukluğu (nevrasteni) başladı. Cantor'un çalışmaları, çok etkili olup nokta-küme topolojisi ve yirminci yüzyıl matematiğinin diğer soyut alanlarına zemin açtı. Fakat çalışmaları, aynı zamanda tartışmalıydı. Bazıları, bunun, gerçek değil hayalî bir dünya olduğunu, ciddî matematikle bir alâkâsı olmayıp teoloji olduğunu söyledi!

Dahası, Cantor asla iyi bir mevki elde edemedi ve hayatının geri kalanını da ikinci sınıf bir enstitüde harcadı.

Bertrand Russell'ın Mantıksal Paradoksları

Sonra işler, çocukluk kahramanlarımdan olan Bertrand Russell'dan dolayı daha da kötüleşti.

Bertrand Russell

İngiliz bir filozof olan Bertrand Russell, güzel ve kendine has denemeler yazmış ve zannediyorum ki, bu harika denemelerden dolayı Nobel edebiyat ödülünü almıştır. Matematikçi olarak başlayan Bertrand Russell, yozlaşarak, önce filozof sonra hümanist olmuş ve hızlıca baş aşağı gitmiştir! [Gülüşmeler] Neyse, Bertrand Russell, önce Cantor kuramında, sonra mantığın kendisinde rahatsız edici bir paradoks demeti keşfetmiştir. Bunlar öyle durumlardır ki, orada akıl yürütmeler doğru gözükürken aynı zamanda çelişki doğurmuştur.

Ve öyle zannediyorum ki, Bertrand Russell, bunun ciddî bir kriz olduğu ve bu çelişkilerin bir şekilde çözülmesi gerektiği düşüncesinin yayılmasında çok etkili olmuştur. Russell'ın keşfettiği paradokslar çok dikkat çekti; asıl garip olan ise, onlardan sadece bir tanesinin Russell adıyla son bulmasıdır! Bu paradokslardan bir tanesi de Burali-Forti paradoksu diye adlandırılır. Çünkü Russell bu paradoksu yayınladığında bir dipnotta, Burali-Forti'nin makalesinden fikir aldığını belirtmişti. Hâlbuki, Burali-Forti'nin makalesine bakarsanız öyle bir paradoks göremezsiniz!

Fakat öyle zannediyorum ki, bazı şeylerin ciddî şekilde yanlış olduğu Danimarka'da bazı şeylerin çürümüş olduğu*, muhakemelerin iflas ettiği ve bu hususta derhal bir şeyler yapılması gerektiğinin fark edilmesi temelde Russell'a dayanır. Meksikalı bir matematik ta-

* Bazı şeylerin yerli yerine oturmadığı, rahatsızlık verdiği manasında *"Danimarka'da bazı şeylerin çürümüş olduğu"* deyimi Amerikan İngilizce'sinde kullanılmaktadır. Ç.N.

rihçisi olan Alejandro Garciadiego, Bertrand Russell'ın matematikte bilinenden çok daha büyük bir rol oynadığını dile getiren bir kitap yazdı: Russell, sadece kendi adını taşıyan Russell paradoksunu değil, aynı zamanda adını taşımayan Burali-Forti ve Berry paradokslarını formüle etmede kilit bir rol oynamıştır. Russell, herkese bu paradoksların önemli olduğunu ve bunların çocukça kelime-oyunları olmadığını anlatmıştır.

Herneyse, bu paradokslardan en çok bilineni bugünlerde Russell paradoksu olarak anılanıdır. Kendi kendisinin elemanı olmayan bütün kümelerin kümesini düşünün. Ve sonra şunu sorun: "Bu küme, kendisinin bir elemanı mıdır yoksa değil midir?" Eğer kendisinin bir elemanı ise, o hâlde kendisinin elemanı olmamalıdır, ve tersi! Bu paradoks, küçük ve uzak bir kasabada kendisini tıraş etmeyen adamları tıraş eden bir berberin durumuna benzer. Paradoks, "Berber kendi kendini tıraş eder mi?" sorusunu sorana kadar çok mantıklı görünüyor. Berber, kendi kendini tıraş eder ancak ve ancak kendi kendini tıraş etmez. Böylece berber, bu kuralı kendine uygulayamaz!

Şöyle diyebilirsiniz: "Bu berberden kime ne!" Bu, her hâlükarda aptalca bir kuraldır ve her kuralın istisnası vardır! Fakat bir küme ile, matematiksel bir kavram ile ilgileniyorsanız, bu sorunu halletmek o kadar da kolay değildir. O hâlde, doğru görünen akıl yürütmeler sizi zora sokuyorsa öyle kolay omuz silkemezsiniz!

Sırası gelmişken, Russell paradoksu, aslında antik Yunanlılarca bilinen ve bazı filozoflar tarafından Epimenides paradoksu olarak anılan bir paradoksun küme-kuramcı yansımasıdır. Bu, yalancı paradoksudur: "Bu cümle yanlıştır!" "Şimdi söylediğim şey bir yanlış, bir yalandır." Pekâlâ, bu cümlenin kendisi yanlış mı? Eğer yanlış ise, eğer bir şey yanlış ise, o şeyin doğrulukla bir alâkası yoktur. Öyleyse, eğer ben bu cümlenin yanlış olduğunu söylüyorsam, bu onun yanlış olmadığı manasına gelir —bu da onun doğru olduğu

manasına gelir. Fakat eğer bu doğru ise ve ben onun yanlış olduğunu söylüyorsam, o hâlde onun yanlış olması gerekir! Gördüğünüz gibi, her hâlükarda başınız belada!

Sonuçta tam bir mantıksal doğruluk değeri elde edemezsiniz; her şey takla atar. O ne doğrudur ne de yanlıştır. Ve siz bunları dikkate almayıp bunların sadece anlamsız kelime oyunları olduğunu, ciddiyetten yoksun olduğunu söyleyerek bunları defedebilirsiniz. Oysa Kurt Gödel daha sonra çalışmalarını bu paradokslara dayayarak çok farklı bir görüş ileri sürdü.

Kurt Gödel

Gödel, Bertrand Russell'ın hayret verici bir keşif yaptığını söyler; bizim mantıksal sezgilerimiz veya matematiksel sezgilerimiz kendi kendileriyle çelişir, birbiriyle uyuşturulamaz! Gödel, Russell'ın söylediklerinin büyük bir şaka olduğunu düşünmek yerine Russell'ı çok ciddiye aldı.

Şimdi David Hilbert'e geçip onun, Cantor'un küme kuramı ve Russell'ın paradokslarının sebep olduğu krizin üstesinden gelecek kurtarma plânından bahsedeceğim.

David Hilbert Biçimsel Aksiyomatik Kuramlarla [Matematiği] Kurtarma Yolunda

Cantor'un sonsuz kümeler kuramının ateşlendirdiği krize tepkilerden biri biçimciliğe sığınmak olmuştur. Eğer kusursuz görünen akıl yürütmeler sonucunda sıkıntıya düşüyorsak, o hâlde çözüm, sembolik mantığı kullanmaktır. Yapay bir dil oluşturarak o dilin içinde çok dikkatli olup, oyunun kuralları neyse onu söyleyerek çelişkilere düşmediğimizden emin olabiliriz. Çünkü, burada kusursuz görünen bir parça akıl yürütme var ki, bu çelişkilere yol açmaktadır. İşte biz bu sorunun üstesinden gelmek istiyoruz. Fakat, doğal dil muğlaktır —bir zamirin kime işaret ettiğini asla bilemezsiniz. Bundan dolayı, gelin bir yapay dil oluşturalım ve her şeyi çok net kılalım ve bütün çelişkilerinden kurtulduğumuza emin olalım! Bu

biçimcilik düşüncesiydi.

Biçimcilik

Şimdi ben, Hilbert'in matematikçilerin böyle mükemmel bir yapay dil içinde çalışmak zorunda olduklarını kastettiğini zannetmiyorum. Bu yapay dil daha çok bir programlama diline benzeyecektir; fakat amaç hesap yapmak değil, akıl yürütmek, matematik yapmak ve çıkarım yapmaktır. Bu, Hilbert'in düşüncesidir. Fakat Hilbet, düşüncesini hiçbir zaman bu şekilde ifade etmedi. Çünkü, o zaman programlama dilleri yoktu.

Peki, buradaki düşünceler nelerdir? Her şeyden önce, Hilbert aksiyomatik yöntemin önemini vurguladı.

Aksiyomatik Yöntem

Bu şekilde matematik yapma fikri, antik Yunanlılara kadar ve özellikle güzel ve açık bir matematiksel sistem olan Öklit geometrisine kadar dayanır. Lâkin, bu yeterli değildir; Hilbert aynı zamanda sembolik mantığı kullanmanız gerektiğini söylüyordu.

Sembolik Mantık

Sembolik mantığın da uzun bir geçmişi vardır: Leibniz, Boole, Frege, Peano... Bu matematikçiler akıl yürütmeyi cebire benzetmek istediler. İşte Leibniz: Kimin haklı olduğunu tartışma yerine hesaplama ile münakaşadan kaçınmayı önerdi—ve münakaşadan kastı muhtemelen siyasî ve dinî münakaşalardı! Kavga yerine masaya oturabilmeli ve "Beyler, buyurun hesaplayalım.." demelisiniz diyordu. Ne güzel bir düş!...

Dolayısıyla fikir şudur: Matematiksel mantık aritmetik gibi belirsizlik ve yorum soruları olmaksızın, sonuç içinden çıkarılabilir olmalıdır. Sembolik bir dil ile yapay bir matematik dili kullanarak *kusursuz rigor* [titiz, kesin, kat'î, katı, sert -Ç.N.] bir sonuca ulaşabilmelisiniz. Matematikte 'rigor' kelimesinin "rigor mortis"* şeklinde kullanıldığını duydunuz mu? [Gülüşmeler] Buradaki katılık, o ka-

tılık değildir. Fakat fikir şudur: Bir önerme ya tamamıyla doğrudur ya da tamamıyla saçmadır; ikisinin arasında bir şey yoktur. Biçimsel aksiyomatik sistem içerisinde formüle edilen bir ispat mutlak olarak açık ve tamamıyla pürüzsüz olmalıdır!

Başka bir deyişle, Hilbert, oyunun kuralları, tanımlar, temel kavramlar, gramer ve dil —oyunun bütün kuralları— konusunda tamamıyla net olmalıyız ki, matematiğin nasıl yapılacağı üzerinde uzlaşabilelim diyordu. Pratikte, bu tür bir biçimsel aksiyomatik sistemi kullanmak çok zahmetli bir iş olacaktır; fakat bu sistem felsefî olarak önemlidir. Çünkü böylece matematiksel akıl yürütmenin herhangi bir parçasının bütün sorularının doğruluğu bir defada çözülecektir.

Tamam mı? Öyleyse Hilbert'in fikri oldukça açıktır. Hilbert sadece matematikteki aksiyomatik ve biçimci geleneği takip ediyordu. Biçimcilik içindeki, formül kullanmadaki, hesaplamadaki hâliyle biçim! O, yolun tamamını gitmek ve matematiğin tümünü biçimselleştirmek istiyordu; bu yeterince makul bir plâna benziyordu. Hilbert devrimci değil, muhafazakâr biriydi... İşin ilginç tarafı, daha önce belirttiğim gibi, Hilbert'in kurtarma plânının **işleyemeyeceği** ve başarılamayacağı dahası bu plânı işler kılmanın **imkânsız** olduğu açığa çıktı!

Hilbert, sadece bütün matematik geleneğini şu noktaya kadar takip ediyordu: Aksiyomatik metot, sembolik mantık, biçimcilik... Hilbert, tamamen net olma ile bütünüyle biçimsel bir aksiyomatik sistem oluşturmayı, yapay bir dil üreterek de paradokslardan kaçınmayı hedefledi. Bunlar paradoksları imkânsız kılacak, paradoksları **yasaklayacaktı!** Buna ek olarak, çoğu matematikçi muhtemelen Hilbert'in haklı olduğunu, bunun *elbette* yapılabileceğini düşündü —bu

* Yazar, burada, İngilizce bir tabir olan "rigor mortis" (ölümden sonra vücudun katılaşması)'i kullanarak, matematikteki rigor, yani kesin, kat'î, katı yapıya göndermede bulunuyor. Ç.N.

ise matematikteki şeylerin mutlak net olduğu, siyah veya beyaz olduğu, doğru veya yanlış olduğu düşüncesidir.

Öyleyse Hilbert'in düşüncesi, matematiğin bütünüyle neyle alâkalı olduğuna ilişkin mutedil düşüncenin uç ve abartılmış bir versiyonudur: Oyunun kurallarının tümünü bir kez ve tamamıyla belirleyip üzerinde anlaşabiliriz. Bunun yapılamayacağının açığa çıkması büyük bir sürprizdir. Hilbert'in yanıldığı açığa çıkmıştır; ama o çok verimli bir yolda yanılmıştır. Çünkü Hilbert çok güzel bir soru sormuştu. Aslında, bu soruyu sormakla gerçekten de metamatematik denilen, matematiğin tümüyle yeni bir alanını kurmuş oluyordu.

Matematiğin kendi içine döndüğü, kendi kendini araştırdığı bir alan olan metamatematikte, matematiğin neyi başarabileceğini veya neyi başaramayacağını araştırırsınız.

Metamatematik nedir?

Bu benim alanım —metamatematik! Metamatematikte, matematiğe yukarıdan bakarsınız ve matematiksel akıl yürütmeyi, matematiksel akıl yürütmenin neyi başarıp başaramayacağını tartışmak için kullanırsınız. Temel düşünce: *à la* Hilbert (Hilbert tarzı) matematiği bir kez yapay bir dil içine gömüp, tümüyle biçimsel bir aksiyomatik sistem kurarak matematiğin herhangi bir manası olduğunu unutabilirsiniz. O zaman, matematiğe, sadece kağıt üzerine işaretler koyarak oynadığınız aksiyomlardan teorem çıkarmanıza yarayan bir oyun gözüyle bakabilirsiniz!

Bu matematiksel akıl yürütme oyununun manasını unutabilirsiniz. O sadece sembollerle birleştirme oyunudur! Belli kurallar vardır ve siz bu kuralları çalışıp bu kuralların herhangi bir manası olduğunu unutabilirsiniz!

Biçimsel bir aksiyomatik sistemi inceleyip yukarıdan, dışarıdan baktığınızda neyi araştırırsınız? Ne tür sorular sorarsınız?

Pekâlâ sorabileceğiniz bir soru şudur: "0 eşittir 1"i ispatlayabilir misiniz?

0=1 ?

Neyse ki, yapamazsınız; fakat bundan nasıl emin olacaksınız? Emin olmak zordur!

Ve herhangi bir A sorusu için, A'nın doğrulanması için, durumun doğru olup olmadığını, A'yı veya A'nın karşıtını (A'nın değilini) ispatlamanın mümkün olup olmadığını sorabilirsiniz.

A ? ¬A?

Buna *bütünlük* denir.

Bütünlük

Herhangi bir A sorusunu, ya onun doğruluğunu (A) ispatlayarak ya da onun yanlışını (¬A) ispatlayarak çözebiliyorsanız, böyle bir biçimsel aksiyomatik sisteme bütün denir. Güzel bir şey olmalı! Başka ilginç bir soru da şudur: Bir önermeyi (A) ispatlayabiliyorsanız ve bunun tersini (¬A) de ispatlayabiliyorsanız, buna *tutarsızlık* denir; dahası, eğer bu gerçekleşirse, durum çok fena! *Tutarlılık, tutarsızlıktan* çok iyidir!

Tutarlılık

Öyleyse Hilbert'in düşüncesi, matematik içinde konusu matematiğin kendisi olan, yeni bir alan oluşturmaktı. Fakat bunu, tamamıyla biçimsel bir aksiyomatik sistem olmadan yapamazsınız. Çünkü herhangi bir "anlam", matematiksel bir akıl yürütmeye içkin olduğu müddetçe bu matematiksel akıl yürütme tümüyle öznel olacaktır. Matematik yapmamızın sebebi elbetteki, onun anlamlara sahip olmasıdır; değil mi? Fakat eğer matematiksel yöntemleri kullanarak matematiği ve matematiğin gücünü araştırmak istiyorsanız, anlamı "billurlaştırmak" için onu "kurutma"lı, kesin kurallar ile birlikte onu, yapay bir dil ile baş başa bırakmalısınız. Gerçekten de bu yapay dil, öyle bir dil olmalı ki, **mekanik bir ispat-kontrol algoritmasına** sahip olsun.

İspat-Kontrol Algoritması

Hilbert'in sahip olduğu kilit düşünce, bu mükemmel kurutul-

muş veya billurlaşmış aksiyomatik sistemi bütün matematik için tasavvur etmesiydi. Hilbert'in düşündüğü bu sistemde kurallar o kadar katî olacaktı ki, eğer herhangi bir matematikçi bir ispata sahip ise, orada mekanik bir hakem, bir prosedür olacak ve "Bu ispat kurallara uyar." veya "Bu ispat yanlıştır, kurallara aykırıdır." diyebilecektir. İşte bu, anlama veya öznel anlamalara bağlı olmayan ve tamamıyla objektif matematiksel gerçekliği elde etmenin yolu, onu tamamıyla hesaplamaya indirgemektir. Bazıları "Bu bir ispattır." diye iddia ettikleri makaleyi, doğruluğuna karar vermesi iki yıl süren beşer bir hakeme sunmak yerine, bir makineye verebilir. Makine en sonunda, "Bu, kurallara uyar." veya "4. satırda bir yazım yanlışı vardır." veya "3. satırın sonucu olduğu zannedilen 4. satırdaki şeyler, aslında sonuç değil." der. Ayrıca, bu nihaî bir karar olacaktır; temyize gitmek yok!

Ana fikir, gerçekte matematiğin bu şekilde yapılması gerektiği değildir. Ben bunun bir iftira ve yanlış bir suçlama olduğunu düşünüyorum. Hilbert'in gerçekten matematikçileri makinelere dönüştürmek istediğini zannetmiyorum. Fakat Hilbert'in düşüncesi şöyleydi: Eğer matematiği alır ve bu şekilde işleyebilirseniz, matematiği matematiğin gücünü araştırmak için kullanabilirsiniz. Hilbert'in bulduğu **bu** çözüm önemli ve yeni bir şeydi. Hilbert, bunu matematiğin geleneksel görüşünü yeniden doğrulamak, kendini haklı çıkarmak için istemekteydi...

Hilbert bir aksiyomlar kümesine ve bu biçimsel dile sahip olmayı önerdi. Bu biçimsel sistem, hepimizin üzerinde anlaşabileceği ve bütün matematiksel akıl yürütmeleri içerecek **mükemmel** bir sistem olacaktı! Bundan sonra oyunun bütün kurallarını bileceğiz. Hilbert, bu biçimsel aksiyomatik sistemin iyi olduğunu —yani tutarlı ve bütün olduğunu— göstermek ve insanlara bunu kabul ettirmek için sadece metamatematiği kullanmak istiyordu. Böylece, felsefî sorunlar için, "Bir ispat ne zaman doğrudur?" ve "Matematiksel

gerçeklik nedir?" soruları bir defada çözümlenecekti. Bunun gibi, herkes matematiksel bir ispatın doğru olup olmadığı konusunda anlaşabilecekti. Ve gerçekten de biz bunun objektif bir şey olduğunu düşünüyorduk.

Başka bir deyişle, Hilbert yalnızca diyordu ki, eğer matematik gerçekten nesnel ise ve öznel elemanlar yok ise, matematiksel bir ispat ya doğru ya da yanlış ise, o durumda orada bunu belirlemek için kesin kurallar olmalı ve siz bütün detayları doldurduysanız yoruma bağlı olmamalıdır. Bütün detayları doldurmanız önemlidir —bu matematiksel mantığın görüşüdür; matematiksel akıl yürütmeleri hayale yer kalmayacak, **hiçbir şey** dışarıda kalmayacak şekilde çok küçük basamaklara "atomize" etme düşüncesi! Eğer hiçbir şey dışarıda kalmadıysa, bir ispat otomatik olarak kontrol edilebilir. Bu gerçekte sembolik mantığın ta kendisi ve Hilbert'in düşüncesidir.

Hilbert gerçekten de bunun yapabileceğine inanıyordu. Böylelikle Hilbert bütün matematiği biçimselleştirecek ve hepimiz de bu biçimselliğin oyunun kuralları olduğunu kabul edecektik. O zaman, matematiksel gerçekliğin çok çeşitleri değil, yalnızca bir versiyonu olacaktı. Bir Alman matematiğine, bir Fransız matematiğine, bir İsveç matematiğine ve bir Amerikan matematiğine sahip olmak istemiyoruz. Hayır, biz **evrensel** bir matematik, matematiksel gerçeklik için evrensel bir kriter istiyoruz! O zaman, herhangi bir ülkedeki bir matematikçi tarafından yazılan bir makale başka ülkelerdeki matematikçiler tarafından anlaşılabilir. Mantıklı gelmiyor mu?! Neticede, 1931'de Kurt Gödel bunun tamamen mantıksız olduğunu, **asla** yapılamayacağını gösterdiği zaman, bunun ne kadar şok edici olduğunu hayal edebilirsiniz!

Kurt Gödel Eksikliği Keşfeder (1931)

Gödel bunu Viyana'da yaptı. Fakat öyle zannediyorum ki, Gödel, şimdiki Çek Cumhuriyeti'nin Brünn veya Brno şehrinden. O zamanlar Brünn, Avusturya-Macaristan İmparatorluğu'nun bir parçasıydı. Gödel, daha sonra Princeton'daki İleri Araştırmalar

Enstitüsü'ndeydi. Ben birkaç hafta önce Gödel'in Princeton'daki mezarını ziyaret ettim. Gödel'in evinin şimdiki sahibi, beni evini incelerken görünce [Gülüşmeler] polisi aramak yerine, beni evini ziyaret etmem için davet edecek kadar nazik biri! Onlar, bazı insanların tarihsel sebeplerden ötürü ilgilendikleri bir evin içinde olduklarını biliyor.

Peki öyleyse Kurt Gödel ne yaptı? Evet, Gödel matematiğin ne ile alâkalı olduğu hakkındaki bu görüşü aşağı yukarı çürüttü. Gödel, meşhur sonucuna ulaştı: "Gödel'in eksiklik teoremi".

Eksiklik

Gödel'in ulaştığı sonucu, Gödel'in orijinal yoluyla açıklayan sevimli bir kitap var. *Gödel'in İspatı* diye adlandırılan bu kitap, Nagel ve Newman tarafından yazılmıştır. Bu kitabı çocukken okumuştum; kırk yıl geçti kitap hâlâ satılmakta!

Gödel'in bu şaşırtıcı sonucu nedir? Gödel'in umulmadık keşfi, Hilbert'in **yanıldığı**, biçimciliğin yapılamayacağıdır. Yani, içinde bir şeyin doğru olup olmadığını duru ve açık kılacak, bütün matematiksel gerçekliği kapsayacak, bir kurallar kümesi üzerine anlaşıp matematiğin tümü için biçimsel bir aksiyomatik sisteme sahip olacak **hiçbir yol** yoktur!

Daha net bir ifadeyle, Gödel'in keşfettiği şey şuydu: Sadece temel aritmetik ile, 0, 1, 2, 3, 4... ile ve toplama ve çarpma ile ilgilenin –bu "temel sayı kuramı" veya "aritmetik"tir— ve bunun için sadece bir aksiyomlar kümesini elde etmeye çalışın—bildik aksiyomlar Peano aritmetik diye adlandırılır—, bu durumda bile başaramazsınız! Toplama, çarpma, ve 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10... hakkındaki **bütün gerçeği ve sadece gerçeği** elde etmeye çalışan herhangi bir aksiyomlar kümesi eksik olmaya mahkumdur. Daha net bir ifadeyle, bu aksiyomatik sistem ya tutarsız olacak veya eksik olacaktır. Dolayısıyla, eğer siz bir aksiyomatik sistemin yalnızca doğruyu söylediğini kabul ederseniz, o zaman bu sistem size bütün doğruları söylemeyecektir.

Toplama, çarpma ve 0, 1, 2, 3, 4... hakkındaki bütün doğruları elde etmenin hiçbir yolu yoktur! Özelde, eğer aksiyomların sizin yanlış teoremler ispatlamanıza izin vermediğini kabul ederseniz, bu durumda aksiyomatik sistem eksik olacaktır; yani bu aksiyomlardan çıkan fakat ispatlayamayacağınız doğru teoremler olacaktır!

Bu kesinlikle harap edici bir sonuçtur ve bütün matematik felsefesi geleneği yere serilmiştir! Bu sonuç o zaman kesinlikle yıkıcı olarak düşünüldü. Fakat, belki siz 1931'de, hakkında endişelenilecek başka birkaç problemin olduğuna dikkat ettiniz. Avrupa'nın içinde bulunduğu durum kötüydü. Önemli bir ekonomik kriz vardı ve bir savaş tertipleniyordu. Bütün problemlerin matematiksel olmadığına katılıyorum! Yaşamda epistemolojiden çok daha başka şeyler de vardır! Fakat, merak etmeye başladınız. Pekâlâ, eğer matematiğin geleneksel görüşü doğru değilse, o zaman **doğru olan ne?** Gödel'in eksiklik teoremi şaşırtıcıydı ve aynı zamanda korkunç bir şoktu.

Gödel bunu nasıl başardı? Evet, Gödel'in ispatı çok zekicedir. Nerdeyse çılgınca bir şeye benzeyen ispat, oldukça paradoksaldır. Gödel yalancı paradoksu ile başlar ("Ben yanlışım!"); ki bu, ne doğru ne de yanlıştır.

"Bu cümle yanlıştır!"

Dahası, Gödel'in yaptığı şey kendi kendine "Ben ispatlanamam!" diyen bir cümle üretmektir.

"Bu cümle ispatlanamaz!"

Eğer siz temel sayı kuramında, aritmetikte, böyle bir cümle yazabilirseniz - ispatlanamaz olduğunu ifade eden matematiksel bir cümleyi nasıl yaparsınız bilmiyorum, bunu yapabilmeniz için çok zeki olmanız gerekir- fakat eğer bunu başarabilirseniz, bir çıkmazda olduğunuzu görmek kolaydır. Sadece üzerinde biraz düşünün. Başınızın belâda olduğunu görmeniz kolaydır. Çünkü eğer ispatlanabilirse, cümle yanlıştır; değil mi? O hâlde siz çıkmazdasınız; siz yanlış sonuçları ispatlamaktasınız. Dahası, eğer cümle ispatlanamazsa ve

ispatlanamaz olduğunu söylüyorsa, bu durumda o cümle doğrudur ve matematik eksiktir (tamamlanamazdır). Dolayısıyla her hâlükârda başınız belâdadır! Hem de büyük bir belâda!

Gödel'in orijinal ispatı çok çok zekicedir ve anlaşılması güçtür. İçinde yığınla karmaşık teknik detay vardır. Fakat eğer onun orijinal makalesine bakarsanız, bana öyle geliyor ki, içinde çok sayıda LISP* programlaması var veya en azından LISP programlamasına bayağı benzeyen bir şeyler var. Neyse, şimdi biz onu LISP programlaması diye adlandıracağız. Gödel'in ispatı çok fazla sayıda yinelenen fonksiyon içerir ve bu fonksiyonlar listelerle ilgilenen fonksiyonlardır; ki bunlar, LISP'in tam olarak ne olduğudur. O hâlde, 1931'de programlama dilleri olmasa bile, olayın gerçekleşmesinden programlama dilinin önemini kavramanın etkisiyle Gödel'in orijinal makalesinde açıkça bir programlama dili görürüz. Ve bu programlama diline bildiğim en yakın programlama dili LISP'dir; katıksız LISP'dir; yeterince ilginç olarak yan etkileri olmayan LISP'dir. Ki bu, LISP'in kalbidir.

Neticede, bu çok çok etkileyici bir sonuçtu ve insanlar gerçekte bunun ne anlama geldiğini bilmiyorlardı.

Şimdi ileriye dönük ikinci önemli adım Alan Turing tarafından yalnızca beş yıl sonra, 1936'da meydana geliyordu.

Alan Turing Hesaplanamazlığı keşfeder (1936)

Turing'in bütün bu sorunlara yaklaşımı Gödel'inkinden tamamen farklı ve daha derindir; çünkü Turing onu klozetten çıkarmıştır! [Gülüşmeler] Onun klozetten çıkardığı şey bilgisayardı! Bilgisayar Gödel'in makalesinde zımnîdir. Fakat gerçekte bu, sıradan bir faniye görünür değildir; sadece o zaman değil, ancak ehemmiyetini fark ettikten sonra geriye dönük bakışlarla görülebilir. Dahası Turing

* LISP (List Processing): 1959'da John McCarthy tarafından geliştirilen ve özellikle yapay zekâ programlamasında kullanılan bir tür bilgisayar dili. Ç.N.

gerçekte onu açığa çıkarmıştır.

Hilbert bir ispatın kurallara uygun olup olmadığına karar verecek "mekanik bir prosedür" olması gerektiğinden bahsetmişti. Ancak Hilbert mekanik bir prosedür ile ne kastettiğini hiçbir zaman netleştirmedi; bu tez kelimelerle sınırlı kaldı. Fakat Turing aslında kastedilen şeyin bir makine olduğunu söyledi ve bir çeşit makine ki, biz şimdi buna bir Turing makinesi diyoruz —fakat Turing'in orijinal makalesinde bu şekilde adlandırılmamaktaydı. Doğrusu, Turing'in makalesi, aynen Gödel'in makalesi gibi, bizim şimdi bir programlama dili ile kastettiğimiz şeyi içeriyordu. Fakat bu iki programlama dili birbirinden çok farklıydı. Turing'in programlama dili LISP gibi yüksek-seviyeli bir dil olmaktan çok bir makine diline benziyordu. Aslında o, çok basit olduğundan, bugün hiç kimsenin kullanmak istemeyeceği türden berbat bir makine dilidir.

Fakat Turing şu noktaya işaret eder: Turing makinesi çok basit olmasına ve makine dili oldukça ilkel olmasına rağmen, o çok esnek ve oldukça genel-amaçlı bir makinedir. Gerçekte, Turing, bir insan varlığının yapabileceği herhangi bir hesaplamayı, böyle bir makineyi kullanarak yapmak **mümkün** olmalıdır diyordu. Turing'in düşünce alıştırmaları şimdi çok önemli bir safhaya ulaşıyordu. Onun sorduğu şey böyle bir makine için neyin **imkânsız** olduğudur? O makine ne yapamaz? Dahası, hemen, o hiçbir Turing makinesinin halledemeyeceği bir soru buldu; öyle bir problem ki, hiçbir Turing makinesi çözemez. Bu duraksama (*halting*: bocalama, Ç.N.) problemidir; bir Turing makinesinin veya bir bilgisayar probleminin en sonunda duraksayıp duraksamayacağına önceden karar verme problemi.

Duraksama Problemi

Turing'in 1936 makalesi hakkındaki şaşırtıcı şey şudur. Her şeyden önce Turing, herhangi bir makinenin yapabileceği şeyi yapabilen esnek bir makineye, evrensel veya genel-amaçlı bir bilgisayar düşüncesine ulaştı. Herhangi bir hesaplamayı yapabilen bir hesap

makinesi; ki biz şimdi buna genel-amaçlı bir bilgisayar [*computer*: hesaplayıcı, hesap yapıcı -Ç.N.] diyoruz. Turing hemen ardından böyle bir makinenin yapabileceklerinin sınırlı olduğunu gösterdi. Bu tür herhangi bir makine ile yapılamayacak şeyleri Turing nasıl buldu? Evet, çok kolay! Bu, bir bilgisayar programının süre sınırlaması olmaksızın en sonunda duraksayıp duraksamayacağı sorusudur.

Eğer süre sınırlaması koyarsak, bu çok kolaydır. Bir programın bir yıl içinde duraksayıp duraksamayacağını öğrenmek isterseniz, programı sadece bir yıllığına çalıştırır, neticede, duraksayıp duraksamayacağını görürsünüz. Turing, süre sınırlaması yok ise başımızın büyük bir belâda olduğunu göstermiştir. Şimdi şöyle diyebilirsiniz: "Bir yıldan fazla süre alan bir bilgisayar programı ne kadar hoştur?! Her zaman bir süre sınırlaması vardır!" Kabul ediyorum; bu pür matematiktir, gerçek dünya değildir. Yalnızca **sonsuzlukla** başınız belâda! Fakat Turing şunu gösterdi ki, eğer süre sınırı koymazsanız, o durumda siz gerçek zorlukların içindesiniz.

Bu *duraksama problemi* olarak anılır. Dahası, Turing bir programın en sonunda duraksayıp duraksamayacağına önceden karar vermenin herhangi bir yolu olmadığını gösterdi.

Sadece sabırlı olup, onu çalıştırarak, neticede onun duraksayıp duraksamayacağını keşfedebilirsiniz. Sorun onu ne zaman bırakacağınızı kestirememenizdir. Turing, —bir şekilde Cantor'un sonsuz kümeler kuramından alınan— çok basit bir argüman olan Cantor'un köşegen argümanıyla (bunların tamamını açıklayacak zamanım yok) bu problemin çözülemeyeceğini gösterebildi.

Hiçbir bilgisayar programı size başka bir bilgisayar programının neticede duraksayıp duraksamayacağını peşinen söyleyemez. Ve sorun, duraksamayanlardır. Bu, gerçekten bir sorundur. Sorun, ne zaman sona erdireceğimizi bilmemektir.

Şimdi bu konuda ilginç olan şey, Turing'in hemen sonuç olarak şu çıkarımı yapmasıdır. Eğer **hesaplama** öncesi bir programın du-

raksayıp duraksamayacağına karar vermenin hiçbir yolu yok ise, akıl yürütme öncesi de çıkarım yapmanın herhangi bir yolu yoktur. O hâlde hiçbir biçimsel aksiyomatik sistem, bir programın duraksayıp duraksamayacağını önceden kestiremez.

Çünkü eğer siz bir programın duraksayıp duraksamayacağı sonucunu çıkarmak için her zaman biçimsel bir aksiyomatik sistem kullanabiliyorsanız, o hâlde, bu size sonucu önceden hesaplamanın bir yolunu peşin olarak verecektir. Siz, sadece olası çıkarımları tüketerek —bunu pratikte yapamazsınız— fakat prensipte programın en sonunda duraksayacağının ya da hiçbir zaman duraksamayacağının ispatını bulana kadar, hangilerinin doğru olduğunu kontrol ederek olası ispatları büyüklük sırasına göre tüketebilirsiniz.

Bu tamamıyla biçimsel bir aksiyomatik sistem fikrini kullanmaktır ki, bunun için matematikçi olmanız gerekmez —sadece bu hesaplamayı bir bilgisayarda tüketirsiniz. Bir ispatın doğruluğunu kontrol etmek mekanik bir şeydir. Öyleyse bir programın duraksayıp duraksamayacağını her zaman ispat edebilen ve sonuç çıkarabilen biçimsel bir aksiyomatik sistem bulunsaydı, o zaman bu size bir programın duraksayıp duraksamayacağını önceden tahmin edebilen bir yol verecekti. Fakat bu imkânsızdır; çünkü siz, "Bu cümle yanlıştır!" gibi bir paradoksun içine düşersiniz. Şöyle bir program elde ettiniz: Bu program duraksar ancak ve ancak bu program duraksamaz. Temelde problem budur. Russell paradoksundaki ile aynı tada sahip bir argümanla karşılaştık.

Böylelikle Turing bu sorunlara Gödel'den daha derin dalmıştır. Bir öğrenci olarak Gödel'in ispatını okuduğumda, ispatı basamak basamak takip edebiliyordum. İspatı, hoş bir çalışma olan Nagel ve Newman'ın kitabından okudum. Hayli anlaşılır, mükemmel bir kitap! 1958'de basılmış ve hâlâ yayında... Fakat ben, Gödel'in ispatıyla gerçekten kapıştığımı, onu anladığımı hakikaten hissedemiyordum. Her şey çok nazik, çok kırılgan ve çok yapay görünüyordu... Dahası

hesaplama konusundaki bu işler klozetteydi, Gödel'in içindeydi, fakat açıkta değil, gizliydi. Biz gerçekten onunla mutabık değiliz.

Turing, şimdi, gerçekten ilerliyordu. Bence, bütün mesele hakkında daha derinlere iniyordu. Sırası gelmişken, Turing, sadece, Gödel'in üzerinde çalıştığı aksiyomatik sistemin değil, **hiçbir** biçimsel aksiyomatik sistemin işleyemeyeceğini gösteriyordu. Fakat bu biraz farklı bir bağlamda gerçekleşiyordu. Gerçekte Gödel 0, 1, 2, 3, 4 ... toplama ve çarpmaya bakıyordu. Turing ise daha tuhaf bir matematiksel sorunla ilgileniyordu. O, bir programın duraksayıp duraksamayacağı sorunu ile ilgileniyordu. Bu ise, Gödel'in orijinal makalesinin zamanında **varolmayan** matematiksel bir problemdi. Görüyorsunuz ki, Turing tamamıyla yeni kavramlarla çalışmıştır...

Fakat Gödel'in son derece zekice makalesi, Hilbert'in yanılmış olabileceğini hayal etme cesaretine sahip olan tek makale değildi. O zamanın başka ünlü bir matematikçisi vardı: von Neumann —yeri gelmişken, onun mezarını Princeton'da Gödel'in mezarının yakınında bulduğumu belirteyim. Von Neumann, her hâlde Gödel veya herhangi biri kadar zekiydi. Fakat von Neumann, Hilbert'in yanılmış olabileceğini hiçbir zaman aklına getirmemişti. Ve Gödel'in sonuçlarını açıkladığını duyduğu zaman von Neumann, hemen onu takdir etti ve sonuçlarını çıkarmaya koyuldu. Lâkin von Neumann, "Onu kaçırdım, gemiyi kaçırdım, onu doğru olarak anlamadım!" diyordu. Dahası Gödel yaptı, öyleyse Gödel çok daha derindi...

Gödel'in makalesi gibi, Turing'in makalesi de teknik detaylarla doludur. Çünkü Turing'in makalesinde bir programlama dili vardır; dahası, Turing nispeten daha büyük bir program verir. Tabî ki, verdiği bu programın hataları vardı; çünkü bu programı —evrensel Turing makinesi için hazırlanmış bir programdır— önce çalıştırıp sonra hataları düzeltemiyordur. Ancak, temel şey fikirlerdir ve Turing'in çalışmasındaki yeni fikirler sadece hayli heyecan vericidir! Bu nedenle ben Turing'in, Gödel'in ötesine geçtiğini düşünüyorum;

fakat Gödel'in ilk adımı attığını hatırlamalısınız. Ve ilk adım tarihsel olarak en zordur ve en çok cesaret isteyen adımdır. Von Neumann'ın hiçbir zaman aklına gelmeyen, Hilbert'in yanılmış olabileceğini düşünme gibi bir şey!

Pür Matematikteki Rastgeleliği Keşfettim

Peki, sonra ne oldu? II. Dünya Savaşı başladı. Turing kriptografi çalışmalarına koyuldu, von Neumann atom bombası patlamalarının nasıl hesaplanacağı üzerine çalışmaya başladı ve insanlar bir süreliğine eksiklik teoremini unuttu.

Burası benim sahnede göründüğüm yerdir. Bu sorunlarla ilgilenen matematikçiler nesli II. Dünya Savaşı ile birlikte sahneden çekildiler. 1950'lerde ben Birleşik Devletler'de, daha sonra Nagel ve Newman'ın kitabı olacak *Scientific American*'daki orijinal makaleleri okuyan bir çocuktum.

Ben, matematikçilerin Gödel'i unutup, kendi favori problemleri üzerine çalışmaya koyulduklarının farkına varmadım. Kendimi eksikliğe kaptırmıştım ve onu anlamakta ısrar ediyordum. Gödel'in eksiklik sonucu, ilgimi çekmişti. Fakat ben onu gerçekten anlayamamıştım; zannımca orada bir bityeniği vardı... Turing'in yaklaşımında olduğu gibi, bunun daha derinlere indiğini düşünüyorum; fakat hâlâ tatmin olmuş değildim, onu daha iyi anlamak istiyordum.

Daha sonra ben rastgelelik hakkında tuhaf bir görüşe vardım... Ben çocukken başka meşhur bir entelektüel mevzu hakkında bayağı bir tartışma okumuştum -matematiğin temelleri konusunda değil, **fiziğin** temelleri konusundaki bir sorun! Bunlar, görelilik kuramı ve kozmoloji ve daha çok kuantum mekaniği ve atomda neler olduğu üzerineydi. Öyle görünüyor ki, nesneler küçüldüğü zaman fiziksel dünya, bu sııuftaki nesnelerin davranışına tümüyle benzemeyen davranışlar gösteriyor. Orada nesneler bütünüyle çılgın gibi davranıyorlar. Gerçekte atomdaki nesneler **rastgeledir** -özünde önceden tahmin edilemezdir.

Einstein bu düşünceden nefret ederdi. O, "Tanrı zar atmaz!" derdi. Yeri gelmişken belirtelim, Einstein ve Gödel, Princeton'da arkadaşlardı ve başkaları ile çok fazla konuşmazlardı. Birinden, Einstein'ın, Gödel'in beynini kuantum mekaniği aleyhine yıkadığını duymuştum! [Gülüşmeler] Fizikçi John Wheeler, bana, Gödel'e kuantum belirsizliği ile Gödel'in eksiklik teoremi arasında herhangi bir bağ olup olmadığını sorduğunu fakat Gödel'in tartışmayı kabul etmediğini anlatmıştı...

Bunların tümü hakkında okuyordum ve şunu merak etmeye başladım - zihnimin bir köşesinde şöyle bir soru belirdi - pür matematikte de rastgelelik olabilir mi?

Kuantum mekaniğindeki görüş: Gelişigüzelliğin temel olduğu ve rastgeleliğin evrenin temel bir parçası olduğudur. Gündelik hayatta nesnelerin önceden tahmin edilemez olduğunu biliyoruz. Hâlbuki kuramda, Newton fiziğinde ve hatta Einstein'ın görelilik kuramında bile - bunların tümü *kuantum* fiziği karşısında *klâsik* olarak adlandırılır- geleceği önceden tahmin edebilirsiniz. Denklemler *ihtimalî* değil *deterministtir*. Eğer başlangıç koşullarını sonsuz hassasiyetle tam olarak bilir, denklemleri uygularsanız, herhangi bir gelecek zamanı ve geçmişi bile sonsuz hassasiyetle önceden tahmin edebilirsiniz. Çünkü denklemler her iki yöne, her iki istikamete de çalışır. Denklemler zamanın istikametini umursamaz...

Bu şahane şey, bazen *Laplasçı determinizm* olarak anılır. Öyle zannediyorum ki, böyle anılmasının sebebi, Laplace'ın nerdeyse iki asır önce basılan *Essai Philosophique sur les Probabilités* adlı kitabıdır. Bu kitabın başında Laplace, prensipte Newton'un kanunlarını uygulayıp, şu anki şartları tam olarak bilen habis birinin, gelişigüzel bir uzaklıkla geleceği veya geçmişi tahmin edebileceğini açıklar. Bu tür dünya, hür irade ve ahlâkî sorumluluk hakkında konuşabileceğiniz bir yer değildir; fakat fiziksel hesaplamalar yapıyorsanız büyük bir dünyadır; çünkü her şeyi hesaplayabilirsiniz!

Hâlbuki, 1920'lerde kuantum mekaniği ile birlikte, Tanrı, atomda zar atıyor gibi görünmeye başladı. Çünkü, kuantum mekaniğinin temel denklemi Schrödinger denklemidir ve bu denklem, elektronun ne yapacağının **olasılığı** hakkındadır. Temel nicelik bir olasılıktır ve bu bir dalga denklemidir. Bu denklem, nasıl bir olasılıkla dalganın kendisi üzerine tesir ettiğini söyler. Dolayısıyla, tümüyle değişik bir denklemdir; çünkü Newton fiziğinde bir parçacığın doğrultusunu tam olarak hesaplayabilir ve nasıl davranacağını tam olarak bilebilirsiniz; oysa kuantum mekaniğinde temel denklem, olasılıklardan bahseden bir denklemdir! Hepsi bu, var olan her şey budur!

Bir elektronun nerede olduğunu ve hız vektörünün ne olduğunu -tam olarak hangi yönde ve ne kadar hızla gittiğini— harfiyen **bilemezsiniz.** Klâsik fizikte olduğu gibi bir atomun, sonsuz hassasiyetle bilinen belli bir durumu yoktur. Bir elektronun nerede olduğunu tam olarak bilirseniz, o zaman onun hızı – momentumu - çılgınca belirsizleşecektir. Eğer siz elektronun hangi yönde ve hangi hızda gittiğini bilirseniz, o zaman onun konumu sonsuz belirsizleşecektir. Bu iyi bilinen *Heisenberg belirsizlik prensibi*dir. Burada bir şeyi elde etmek için başka bir şeyi feda etmek gerekir; fiziksel evrenin bu şekilde çalıştığı görünüyor...

İlginç tarihsel bir gerçek olarak insanlar bu fikirden nefret etti. - Einstein nefret etti.- Fakat şimdi bunu **kullanabileceklerini** düşünüyorlar! *Kuantum hesaplama* olarak adlandırılan yeni bir çılgın alan vardır; buradaki düşünce onunla dövüşmeye bir son vermektir. Eğer ona üstün gelemiyorsanız, ona katılın! Yani siz, *kuantum paralelizm* olarak adlandırılan bir şeyi kullanarak belki de yepyeni bir teknoloji üretebilirsiniz. Eğer bir kuantum bilgisayarı belirsiz ise, belki siz aynı anda belirsiz olarak çok işlem yaptırabilirsiniz! Dolayısıyla, amaç onunla dövüşmek değil onu kullanmaktır; ki bu, büyük bir fikirdir.

Fakat ben henüz çocukken insanlar hâlâ bunun üzerinde tartışıyorlardı. Kuantum mekaniğinin inşasına yardım etmesine rağmen

Einstein bununla hâlâ savaşıyordu. Ve insanlar "Zavallı adam. Hayatının en önemli devrini tamamladı!" diyordu.

Bundan dolayı ben pür matematikte de bir rastgelelik olabilir diye düşünmeye başladım. **Eksiklik için gerçek sebepler var** olabilir diye şüphelenmeye başladım. Bu noktaya bir örnek, temel sayı kuramıdır ki, orada çok zor bazı sorular vardır. Bireysel asal sayıları ele alalım. Eğer onların detaylı yapılarını merak ediyorsanız, asal sayılar önceden tahmin edilemez bir şekilde davranırlar. **İstatistiksel** modellerin olduğu doğrudur. *Asal sayı teoremi* adı verilen ve genel olarak asal sayıların ortalama dağılımını oldukça doğru olarak tahmin eden bir şey vardır. Fakat bireysel asal sayıların detaylı bir dağılımına gelince, bu oldukça rastgele görünüyor!

Böylece ben rastgelelik hakkında düşünmeye başladım... Belki de bu, gerçekte neler olduğudur ve bütün bu eksiklik için daha derin bir sebep var diye düşünmeye başladım. Böylece 1960'larda ben ve benden bağımsız olarak başka bazı insanlar, yeni fikirlere ulaştı. Bu yeni fikirler kümesini *algoritmik bilgi kuramı* olarak adlandırmayı seviyorum.

Algoritmik Bilgi Kuramı

Bu isim onu çok etkileyici kılıyor; ama temel fikir yalnızca bilgisayar programlarının boyutuna bakmaktır. Gördüğünüz üzere, bu sadece bir *karmaşıklık ölçütüdür*, sadece *hesabî karmaşıklığın* bir türüdür...

Öyle zannediyorum ki, hesabî karmaşıklık fikrini ilk duyduğum kişilerden biri von Neumann'dır. Turing, matematiksel bir kavram olarak bilgisayar fikrini bulmuştur. Bu asla hata yapmayan, çalışması için ne kadar zaman ve yer lazımsa ona sahip olan mükemmel bir bilgisayardır. Her zaman sonludur; fakat hesaplamalar ne kadar uzarsa o kadar gidebilir. Turing bu fikre ulaştıktan sonra, bir matematikçi için sonraki mantıksal basamak, bir hesaplama yapması için gereken süreyi - onun karmaşıklığını - araştırmaktır. Gerçekten

de von Neumann, zannediyorum 1950 civarında, bir yerde, hesaplamaların **zamansal** karmaşıklığı ile ilgili yeni bir alanın olması gerektiğini tavsiye etmiştir. Bu alan şimdi çok gelişmiş bir alandır. Dolayısıyla, insanların çoğu bununla uğraşıyorsa, o hâlde ben başka bir şeyle uğraşacağım!

Pratik açıdan süre çok önemli olsa bile, hedefim, **süreye** bakmak değil, bilgisayar programlarının **büyüklüğüne,** verilen bir hedefi gerçekleştirmesi için bilgisayara vermeniz gereken bilgi miktarına bakmaktı. Pratik bir bakış açısından, gerekli bilgi miktarı çalışma süresi kadar ilginç değildir. Tabî ki, bilgisayarlar için işlemleri mümkün olduğunca hızlı yapmak çok önemlidir... Hâlbuki kavramsal bir bakış açısıyla açığa çıktı ki, bu yol hiç önemli değil. Temel bir felsefî bakış açısıyla, doğru olan, **süreye** bakmak değil, bilgisayar programının **büyüklüğüne** bakmaktır. Niçin? –Açıkçası şunu da ifade etmekte fayda var, bu fikir şahsıma ait olduğu için bu fikri kayıracağım! Çünkü, program-büyüklüğü karmaşıklığı fizikteki birçok temel madde ile bağlantılıdır.

Biliyorsunuz, fizikte *entropi* denen bir kavram vardır. Entropi, bir sistemin ne kadar düzensiz olduğunun bir ölçütüdür. Entropi, özellikle meşhur 19. yüzyıl fizikçisi Boltzmann'ın çalışmalarında çok önemli bir rol oynamış ve entropi, istatistiksel mekanik ve termodinamik alanlarını kurmuştur. Entropi fiziksel bir sistemin ne kadar düzensiz olduğunu, ne kadar kaotik olduğunu ölçer. Bir kristal düşük bir entropiye sahiptir; yüksek sıcaklıktaki bir gaz ise yüksek entropiye sahiptir. Entropi, kaos veya düzensizliğin miktarıdır ve fizikçilerin sevdiği bir rastgelelik kavramıdır.

Dahası, entropi bazı temel felsefî sorularla ilintilidir -başka bir meşhur tartışma olan, *zamanın oku* sorunu ile de alâkalıdır. Boltzmann, istatistiksel mekanik denen bu harika şeyi keşfettiğinde - onun kuramı, bugün 19. yüzyılın şaheserlerinden kabul edilir ve şimdiki fizik, istatistiksel mekaniktir—, hayatına, intihar ederek son

verdi; çünkü insanlar onun kuramının **açıkça** yanlış olduğunu söylüyorlardı! Niçin açıkça yanlıştı? Çünkü, Boltzmann'ın kuramında entropi artmalıydı ve bundan dolayı, zamanın bir oku bulunuyordu. Fakat Newtoncu fiziğin denklemlerine bakarsanız, orada zaman ters döndürülebilirdir. Gelecek hakkında kehanette bulunma ile geçmişi tahmin etme arasında fark yoktur. Eğer siz bir anda her şeyin tam olarak nasıl olduğunu bilirseniz, her iki yöne de hareket edebilirsiniz. Denklemler yönlere aldırmazlar. Zamanın yönü yoktur; geriye doğru gitme aynen ileriye doğru gitme gibidir.

Fakat günlük hayatta ve Boltzmann'ın istatistiksel mekaniğinde, ileriye gitme ve geriye gitme arasında fark vardır. Cam bardaklar kırılır, hâlbuki kendiliğinden yeniden birleşmezler! Ve Boltzmann'ın kuramına göre, entropi artmalı ve sistem daha da düzensizleşmelidir. Fakat, insanlar "bunu Newtoncu fiziğin sonuçlarından çıkaramazsınız!" diyordu. Boltzmann buna aldırış etmiyor, gazı inceliyordu. Bir gazın atomları bilardo topları gibi sıçrarlar. Bilardo topları modeli, bir gazın nasıl çalıştığının modelidir. Ve her etkileşim ters döndürülebilirdir. Eğer bir filmi geriye doğru çalıştırırsanız aynı görünür. Eğer bir gazın küçük bir bölümüne kısa süreli bakarsanız, filmi doğru yönde mi yanlış yönde mi izlediğinizi söyleyemezsiniz.

Fakat Boltzmann'ın kuramı zamanın bir oku bulunduğunu söylüyor - Bir sistem düzenli bir hâlde başlar ve çok karışık bir düzensiz hâl ile son bulur. Almanca'da korkunç bir ifade bile vardır: *Isı ölümü*. İnsanlar, Boltzmann'ın kuramına göre evrenin korkunç, çirkin bir maksimum hâl ile veya ısı ölümü ile son bulacağını söylüyorlardı! Bu korkunç bir tahmindi! Bundan ötürü Boltzmann'ın kuramı çokça tartışıldı. Ve belki de Boltzmann'ın intihar etmesinin sebeplerinden biri de budur.

Benim görüşlerim ile Boltzmann'ın görüşleri arasında bağlantılar var. Çünkü bilgisayar programlarının büyüklüğüne bakmak,

fiziksel bir sistemin düzensizlik ölçüsü ile bayağı benzeşir. Bir gazın bütün atomlarının yerini söylemek için büyük bir program gerekir. Fakat bir kristal, düzenli yapısından dolayı o kadar büyük bir program gerektirmez. Entropi ile program-büyüklüğü karmaşıklığı kavramı yakından alâkalıdır...

Program-büyüklüğünün karmaşıklığı fikri, aynı zamanda bilimsel metot felsefesi ile de alâkalıdır. En basit kuramın en iyi olduğunu söyleyen *Ockhamlı'nın usturası* fikrini duymuşsunuzdur. Pekâlâ, kuram nedir? Kuram, gözlemleri önceden tahmin etmek için hazırlanan bir bilgisayar programıdır. Ve en basit kuramın en iyi olduğunu söyleyen kuram fikri, kısa bir bilgisayar programı en iyi kuramdır şekline dönüşür. Ya kısa bir kuram yoksa? Ya deneysel bilgilerin verili bir kümesini yeniden üretmek için en kısa program veya en iyi kuram, bilgilerin çokluğuyla aynı olursa? O zaman kısa bir program işe yaramaz, uydurulmuş demektir. Oysa bilgiler sıkıştırılamaz, rastgeledir. Bu durumda kuram faydalı bir iş görmez. Bir kuram, bilgileri çok daha küçük kuramsal varsayımlar kümesine sıkıştırabildiği ölçüde iyidir. Ne kadar sıkıştırma olursa o kadar iyidir! Fikir budur...

Dolayısıyla, program büyüklüğü fikrinin büyük felsefî ehemmiyeti vardır ve siz rastgeleliği veya maksimum entropiyi, hiç sıkıştırılamayan bir şey olarak tanımlayabilirsiniz. Bu, öyle bir nesnedir ki, esasen onu başkalarına tanımlayabilmek için, onlara o nesneyi gösterip, "Bu budur" demekten başka çıkar yolunuz yoktur. Çünkü bir yapı veya model (pattern: örüntü, Ç.N.) yoktur. Kısa bir tanımlama yoktur. Ve bir şey, "bizatihi kendisi" olarak anlaşılmalıdır, indirgenemezdir.

Rastgelelik=Sıkıştırılamazlık

Öteki uç, çok düzenli bir modeli bulunan nesnedir. Böylece siz sadece şöyle diyebilirsiniz: 0, "milyon tane 0" veya "01'in yarım milyon defa tekrarı", 01,01,01 çiftlerinin yarım milyon kez tekrarını içerir. Bunlar çok kısa bir tanıma sahip, çok uzun nesnelerdir. Çok kısa

bir tanıma sahip uzun nesnelerden biri *efemeris*'tir. Zannediyorum, böyle adlandırılıyordu. Bu, gökte görüldüğü gibi, gezegenlerin günlük ve yıllık mevkilerini tayin eden bir tablodur. Gezegenlerin gökte her akşam nerede görüneceğini hesaplamak istiyorsanız, bütün bu astronomik bilgileri Newtoncu fiziği kullanan küçük bir FORTRAN programına sıkıştırabilirsiniz.

Fakat eğer bir rulet çarkının nasıl işlediğine bakıyorsanız, o zaman ortada bir model yoktur ve bu durumda sonuçlar dizisi sıkıştırılamaz. Çünkü, orada bir model bulunsaydı, o zaman insanlar bunu, kazanmak için kullanacak ve kumarhane sahibi olmak öyle iyi bir iş olmayacaktı! Kumarhanelerin çok para kazanmaları, bir rulet çarkının ne yapacağı hakkında kehanette bulunmanın gerçekte yolu olmadığını gösteriyor. Herhangi bir model yoktur - kumarhaneler bunu sağlama almak için işlerini icra ediyorlar!

Böylece bu yeni fikre vardım. Bu görüş, rastgeleliği tanımlamak için program-büyüklüğü karmaşıklığını kullanır; bilgisayar programlarının büyüklüğüne bakıp —çalışma-süresi kavramı yerine, program-büyüklüğü kavramını düşünmeye başlarsanız—; ortaya ilginç bir şey çıkar ve ne tarafa yüzünüzü çevirirseniz hemen eksiklikle karşılaşırsınız! Hemen matematiksel akıl yürütmenin veya herhangi bir bilgisayar programının gücünü aşan şeylerle karşılaşırsınız. Onlar her yerde açığa çıkar!

Bu sonuç çok dramatiktir! Gödel'den bu yana sadece üç adım attık. Gödel'de çok ilginç olarak akıl yürütmenin önünde sınırlar vardır; Turing'de bu çok daha doğal gelir ve sonra, program büyüklüğüne bakmaya başladığınızda doğal olarak, eksiklik, matematiğin sınırları hemen yüzünüze çarpar! Niçin?! Pekâlâ, benim kuramımda, **soracağınız ilk soru** başınızı belâya sokar. O soru nedir? Bir şeyin karmaşıklığını, o şeyi hesaplayan en küçük bilgisayar programının büyüklüğüyle ölçüyorum. Fakat, en küçük bilgisayar programına sahip olduğumdan nasıl emin olabilirim?

Diyelim ki, belirli bir hesaplamaya, bir çıktıya sahibim. Öyle ki, bunu merak ediyorum ve bunu hesaplayan şirin, küçük bir bilgisayar programım var. Ve bu programın bu çıktıyı üreten eldeki olası en küçük, en kısa program olduğuna inanıyorum. Ben ve birkaç arkadaşımın uzun uğraşlar sonucu ulaştığı bu programın iyi program olduğunu ve kimsenin daha iyisini bulamadığını farz edelim. Peki, biz bu düşüncenin doğruluğundan nasıl **emin** olacağız? Cevap: **Emin olamayacağız. Asla emin olamayacağımız** ortaya çıkmıştır! Siz benim *zarif* diye nitelediğim bir bilgisayar programının, o programın ürettiği çıktıya bakarak, bu çıktıyı üretebilecek en kısa programın bu program olup olmadığını **hiçbir zaman** bilemezsiniz. Asla! Bu, yeterince şaşırtıcı olarak matematiksel akıl yürütmenin gücünü aşar.

Fakat herhangi bir hesabî amaç için bir kez bilgisayar programlama dilini sabitlediğinizde, bilgisayar programlama dilinde karar kıldığınızda ve eğer kafanızda belirli bir çıktı var ise, en azından bunun için mümkün olan en küçük bir program var olmalıdır. Arada bir bağ olabilir; belki birkaç tane vardır, değil mi? Fakat en azından diğerlerinden daha küçük **bir** tane olmalıdır. Ama siz asla onu bulduğunuzdan emin olamazsınız!

Ve kesin sonuç, ki benim gözde eksiklik sonuçlarımdan biridir, şudur: Eğer N bit(parça) aksiyomunuz var ise ve herhangi bir program N bitten daha uzun ise, siz bu programın zarif, yani olası en küçük program olup olmadığını asla ispatlayamazsınız. Bu, temelde işin nasıl yürüdüğüdür. Dolayısıyla herhangi bir verili matematiksel aksiyomlar kümesi, Hilbert'in tarzında herhangi bir formel aksiyomatik sistem; yalnızca **sonlu, çok sayıda** programın zarif olduğunu ispatlayabilir ve onların çıktısı için olası en kısa program olduğunu ispatlayabilir.

Daha kesin olarak, eğer program aksiyomların bilgisayarlaşmış biçiminden –bu, gerçekte sizin aksiyomlarınız için ispat-kontrol

programının büyüklüğüdür- daha büyük ise, başınız zarif bir program ile derttedir. Aslında, bu, bütün olası teoremleri üreten ve bütün olası ispatları çalıştıran programın büyüklüğüdür. Eğer kafanızda belirli bir programlama dili varsa ve formel bir aksiyomatik sistemi yürürlüğe koymak için belirli büyüklükteki bir programa ihtiyacınız varsa, bu, ispat-kontrol algoritmasını yazmak ve bütün teoremleri süzüp bütün olası ispatları elde etmek yoluyla çalışan bir program yazmak demektir. Eğer bu program belli bir dil ve büyüklükte ise ve eğer siz bu programı, aynı dildeki daha büyük programlarla kıyaslayarak böyle bir programın zarif olup olmadığını anlamaya çalışıyorsanız, bu programın zarif olduğundan hiçbir zaman emin olamazsınız. Aynı dilde daha küçük bir program yoluyla aksiyomların kullanıldığı bir programın zarif olduğunu hiçbir zaman ispatlayamazsınız. Bu, temelde onun nasıl çalıştığıdır.

Öyleyse, sonsuz sayıda zarif program vardır. Herhangi bir hesabî amaç için en azından bir tane zarif program bulunmalıdır ve belki de birkaç tane vardır. Fakat siz sonlu sayıdaki durumlar haricinde bundan hiçbir zaman emin olamazsınız. Bu benim ulaştığım sonuçtur ve ben bununla iftihar ediyorum! –Bir kutu soda alabilir miyim? Çok teşekkürler! Bu şarap veya bira olsaydı konuşmam daha ilginç olurdu! [Gülüşmeler]

Dolayısıyla, program-büyüklüğü karmaşıklığını hesaplayamayacağınız açığa çıktı. Herhangi bir şeyin program-büyüklüğü karmaşıklığının ne olduğundan asla emin olamazsınız. Çünkü bir şeyin program-büyüklüğü karmaşıklığına karar vermek demek, onu hesaplayan en kısa programın büyüklüğünü bilmek demektir; fakat bu, şu demek: —temelde bu aynı problemdir— o hâlde benim bileceğim bu programın olası en kısa program olduğu ve bu programın zarif bir program olduğudur. Fakat program aksiyomlardan büyük ise bunu yapamazsınız. Öyleyse, eğer aksiyomlar N bit ise, siz karmaşıklığı N bit'ten büyük olan herhangi bir şeyin, ki bu nere-

deyse her şeydir, çünkü neredeyse her şeyin karmaşıklığı N bit'ten fazladır, program-büyüklüğü karmaşıklığını asla belirleyemezsiniz. Neredeyse her şeyin sizin kullandığınız aksiyomlardan daha fazla karmaşıklığı vardır.

Ben bunları neden söylüyorum? Aksiyomların kullanılma sebebi: Basit ve inanılır olmalarıdır. Bundan dolayı, matematikçilerin normalde kullandıkları aksiyomlar kümesi yeterince özdür; aksi takdirde kimse onlara inanmazdı! Bu şu demek: Pratik olarak sonsuz miktarda bilgi içeren matematiksel gerçekliğin bu geniş dünyası oradadır, fakat herhangi verili bir aksiyomlar kümesi bu bilginin sadece küçük sonlu bir miktarını zaptedebilir! Ve bu bizim başımızın neden belâda olduğunu açıklar. Bu benim son kararımdır. Bu gerçek ikilemdir.

Böylece özetle, bana göre, Gödel'in eksikliğini gizemli ve kaçınılmaz olmaktan çok, doğal ve kaçınılmaz kılan iki yol vardır: Bazı şeylerin mantığı olmadığını söyleyen fizikteki rastgelelik fikri, aynı zamanda pür matematikte de vardır. Bu, onu söylemenin bir cihetidir. Fakat onu söylemenin daha iyi bir yolu vardır: Matematiksel gerçeklik sonsuz miktarda bir bilgidir; hâlbuki, herhangi belirli bir aksiyomlar kümesi sadece sonlu miktarda bir bilgiye sahiptir. Çünkü oyunun kuralları olarak üzerinde anlaştığınız sadece sonlu sayıda prensip olacaktır. Ve ne zaman herhangi bir cümle, herhangi bir matematiksel iddia bu aksiyomlardan daha fazla bilgi içerse, o durumda doğal olarak, bu aksiyomların yeteneklerini aşacaktır.

Görüyorsunuz ki, matematik her şeyi bayağılaştırmakla ilerler! Matematiğin ilerlediği yol şudur: Orijinali çok büyük gayret gerektiren bir sonucu elde edip bunu daha genel bir kuramın bayağı bir sonucu hâline dönüştürmek!

Fermat'nın "son teoremi"ni içeren bir örnek vereyim: x, y, z, n pozitif tamsayı olmak üzere ve n, 2'den büyük olmak üzere

$$x^n + y^n = z^n$$

iddiasının çözümü yoktur. Bu iddianın, Andrew Wiles tarafından yakın zamanda verilen ispatı yüzlerce sayfa uzunluktadır; fakat belki de bir veya iki yüz yıl sonra bir sayfalık ispatı olacaktır! Fakat bu bir sayfalık ispat, kavramlarıyla bir kuram icat eden bütün bir kitap gerektirecektir. Fermat'nın son teoremi hakkında düşünmek için bu kavramlar doğal kavramlar olacaktır. Ve siz bu kavramları kullandığınızda, o hemen aşikâr olacaktır. Wiles'ın ispatı bu düşünceden sonra aşikâr olacaktır; çünkü siz onu uygun bir kuramsal bağlama oturtmuş olacaksınız.

Ve eksiklikte, aynı şey oluyor.

Uzun ve çözülemeyen bir ispat ile birlikte Gödel'in sonucu da herhangi esaslı bir temel sonuç gibi, çok gizemli ve karmaşık olarak başlar. Gödel'in orijinal makalesi ile Einstein'ın görelilik kuramı hakkında insanlar aynı şeyleri söylemişlerdi. Dedikleri: Bütün gezegen üzerinde bu kuramı beşten daha az kişinin anladığıydı. Eddington hakkındaki espri şudur: Kraliyet hanedanından bir astronom olan Sör Arthur Eddington resmî bir akşam yemeği partisindeymiş —I. Dünya Savaşı'ndan hemen sonra— ve Einstein'ın kuramını anlayan üç kişiden biri olarak tanıtılmış. Eddington: "Görelim, Einstein ve ben varız fakat öbür adam kim?" demiş. Ben bu espriyle yıkılıyorum! [Gülüşmeler]

1931'de Gödel'in ispatı buna benziyordu. Onun orijinal makalesine bakarsanız, çok karmaşık olduğunu görürsünüz. Detaylar, bizim şimdi programlama detayları dediğimiz detaylardır - gerçekte o makale, öyle komplikeydi ki, şimdi hepimiz nasıl ele alacağımızı biliyoruz- fakat o zaman için bu çok gizemli görünüyordu. Ayrıca bu 1931'deki bir matematik makalesidir. Ve siz LISP'in icat edilmesinden 30 yıl önce birdenbire LISP programlaması ile aynı kapıya çıkan şeyleri yapıyorsunuz! Dahası, o zaman bilgisayar bile yoktu!

Fakat Turing, Gödel'in sonucunu çok daha doğal görünür kılmıştır. Bence, benim program-büyüklüğü karmaşıklığı ve bilgi -gerçek-

te, algoritmik bilgi içeriği- Gödel'in sonucunu daha doğal görünür ve hatta görünür kılmıştır. Ben buna aşikâr, kaçınılmaz diyeceğim. Fakat elbette ki, onun çalıştığı bu yol bizim nasıl ilerlediğimizdir.

Buradan Nereye Gideceğiz?!

Yine de şunu söylemeliyim: Burada anlatılanlar gerçekten doğru ve bu kadar basit olsaydı, o zaman bu, metamatematik alanının sonu olurdu; ki böyle bir son acıklı olurdu. Çünkü bu durum bütün alanın ölmüş olduğu manasına gelirdi ki, ben bunun böyle olduğuna inanmıyorum!

Biliyorsunuz, bu konuşmanın benzer birçok biçimini yıllardır veriyorum ve bu sayede bir kariyer elde ettim, bir meslek sahibi oldum! Bu, dünyayı görmeye başladığım bir yol, bir turizmdir! Seyahat etmenin de güzel bir yoludur!... Bu konuşmalarımda normal matematiksel akıl yürütmenin gücünü aşan konulara değinmekten hoşlanıyorum. Benim favori örneklerim ise Fermat'nın son teoremi, Riemann hipotezi ve dört-renk sanısıdır. Ben çocukken, bunlar matematikteki çözülmemiş en seçkin üç soruydu.

Fakat eğlenceli bir şey oldu: Önce dört-renk problemi bilgisayar ispatıyla çözüldü ve bu ispat yakın zamanda bayağı geliştirildi. En son biçimi daha çok fikir ve daha az hesaplamaya dayanıyor; dolayısıyla, bu ileriye dönük büyük bir adımdır. Daha sonra Wiles, Fermat'nın son teoremini çözdü. İspatta yanlış bir basamak vardı; fakat şimdilerde herkes yeni ispatın doğruluğu hakkında ikna olmuştur.

Aslında, Wiles, Haziran 1993'te Cambridge'de ispatını sunduğunda ben orada değil, Fransa'da bir toplantıdaydım. Ve Wiles'ın ispatını sunduğu haberi e-postalarda dolaşıyordu. O kadar hızlı gerçekleşti ki, ben toplantının o bölümünde başkanlık yapıyordum, toplantının organizatörü, "Evet, bu şaka ortalıkta dolaşıyor, niçin bir anons yapmıyoruz. Sen bu bölümün başkanısın, bu anonsu sen yap!" dedi. Böylece ben ayağı kalktım: "Bazılarınızın duymuş olabileceği üzere, Andrew Wiles, Fermat'nın son teoremini henüz ispat-

ladı." dedim ve ortalığa bir **sessizlik** hakim oldu! Ama daha sonra iki kişi geldi ve: "Şaka yapıyorsunuz, değil mi?" dedi. [Gülüşmeler] "Hayır, şaka yapmıyorum." dedim. O gün 1 Nisan değildi!

Neyse ki, bildiğim kadarıyla Riemann hipotezi hâlâ çözülememiştir!

Hâlbuki, ben, Fermat'nın son teoremini, normal matematiksel metotların gücünün belki de ötesinde bir şeylere, eksikliğe olası bir örnek olsun diye kullanıyordum. Güzel bir örneğe ihtiyacım vardı; çünkü insanlar bana, "Peki, bunların tümü iyi ve güzel, ABT (Algoritmik Bilgi Kuramı) güzel bir kuram, fakat bize, gündelik aksiyomların gücünü aştığına inandığın bir matematiksel sonuç örneği ver." diyorlardı. Ve ben, pekâlâ, Fermat'nın son teoremi olabilir derdim!

Dolayısıyla ortada şöyle bir sorun var. Algoritmik bilgi kuramı çok hoştur ve bu kuram, ispatlayamayacağınız yığınla şey olduğunu göstermiştir; peki ya bireysel matematiksel sorulara ne demeli? Doğal bir matematiksel soru için ne demeli? Bu metotlar uygulanabilir mi? Cevap hayırdır. Benim metotlarım göründükleri gibi genel değildir. Ortada teknik sıkıntılar vardır. Ben Fermat'nın son teoremini bu metotlar ile analiz edemem. Bereket versin ki, durum böyle! Çünkü eğer kendi metodumun, Fermat'nın son teoreminin çözümsüzlüğünü gösterdiğini iddia etmiş olsaydım, biri onu çözdüğünde bu durum çok can sıkıcı olurdu!

Dolayısıyla sorun şudur: Bu olumsuz sonuçlara rağmen, matematikçiler bu kadar ilerlemeyi nasıl başardılar ve eksikliğe rağmen, matematik bu kadar güzel nasıl işliyor? Biliyorsunuz, ben karamsar değilim; fakat benim sonuçlarım matematik ve matematikçiler hakkında yanlış kanaatlere sahip. Fazla karamsar olan ben değil, vardığım sonuçlardır!

Dolayısıyla, ilginç bir soru, olumlu sonuçlara bakmaktır diye düşünüyorum... Zaten çok fazla olumsuz sonuç vardır! Eğer yü-

zeysel değerlerine bakarsanız, matematik yapmanın hiçbir yolu yoktur; matematik yapmak imkânsız gibi görünmektedir. Neyse ki, matematik yapan bizler için, durum böyle görünmüyor. Dolayısıyla, olumlu sonuçlara bakmalıyız diye düşünüyorum... Temel sorunlar, felsefî sorunlar gibi büyüktür. Çünkü hiçbir zaman onları tüketemezsiniz. Her nesil ileriye doğru birkaç adım atar... Bundan dolayı ben bu alanda çok daha ilginç çalışmaların yapılacağını düşünüyorum.

Burada ilginç olan bir başka sorun da şudur: Program büyüklüğü, karmaşıklığın bir ölçütüdür ve biliyoruz ki, bu, metamatematikte iyi çalışıyor; fakat bunun gerçek dünyadaki karmaşıklık ile herhangi bir alâkası var mı? Sözgelimi, biyolojik organizmaların karmaşıklığına ne demeli? Bir evrim kuramına ne demeli?

Von Neumann hayat evriminin genel kuramı hakkında konuştu ve ilk basamağın karmaşıklığı tanımlamak olacağını belirtti. Burada karmaşıklığın bir tanımı yapılmış; fakat bu, kuramsal biyolojide insanların kullanması için doğru gözükmüyor. Ve kuramsal biyolojide böyle bir şey yoktur, henüz yoktur!

Bir matematikçi olarak birileri genel şartlar altında yaşamın evrimleşmesi gerektiğini belirten genel bir sonuç ispatlarsa, bu benim hoşuma gider. Fakat genel matematiksel ortamda yaşamı nasıl tanımlayabileceğimizi bilmiyorum. Biz ona rastladığımız zaman onu tanırız; değil mi? Eğer arabanızla canlı bir şeye çarparsanız, bunu bilirsiniz! Fakat bir matematikçi olarak ben, caddede koşan güzel bir geyik ile komşumun sokağa koyduğu çöp yığını arasındaki farkı nasıl açıklayacağımı bilmiyorum! Evet, gerçekte bu çöp yaşam ile bağlantılıdır ve yaşam tarafından üretilen bir enkazdır...

Gelin öyleyse bunun yerine bir geyik ile bir taşı kıyaslayalım. Pekâlâ, taş daha serttir; fakat bu geyiğin canlı bir varlık, taşın ise güzel bir pasif nesne olması arasındaki temel farkı açıklıyor gibi görünmüyor. Pratikte, bizim için bunlar arasındaki farkı söylemek,

elbette ki, çok kolay olacaktır. Fakat esas fark nedir? İnsanlar bunu matematiksel olarak anlayabilir mi?

Böylelikle, von Neumann'ın soruşturduğu şey matematiksel genel bir kuramdı. Von Neumann yeni matematiksel kuramlar icat etmeyi seviyordu ve bunu alışkanlık hâline getirmişti. Her gün kahvaltıdan önce bir şey icat ediyordu: Oyunlar kuramı, kendini yeniden üreten makine (otomata), kuantum mekaniğinin Hilbert uzay formülasyonu.... Von Neumann, Hilbert uzay formülasyonunu kullanarak kuantum mekaniği üzerine bir kitap yazdı. Von Neumann, Hilbert'in yanında eğitimini aldı. Ve o, bu uzayların, kuantum mekaniğini inşa etmenin doğru matematiksel iskeleti olduğunu söyledi.

Von Neumann her zaman matematiğin yeni alanlarını icat etmiştir. Ayrıca o benim çocukluk kahramanlarımdan biri olduğundan ve Gödel ve Turing hakkında konuşmuş olduğundan kendi kendime: "von Neumann bunu yapabildiyse, ben de bunu deneyebilirim." derdim. Von Neumann hesaplamaların karmaşıklığının bir kuramı olması gerektiğini bile teklif etmişti. O, bu yönde hiçbir adım atmadı; fakat ben öyle zannediyorum ki, von Neumann'ın bunun gelişmekte olan ilginç yeni bir alan olması gerektiğinden bahsettiği bir yazısını bulabilirsiniz. Ve von Nuemann kesinlikle haklıydı.

Von Neumann yaşamın genel bir matematiksel kuramına sahip olmamız gerektiğini de belirtti... Biz bunun çok genel bir kuram olmasını istiyoruz fakat biyokimya veya jeoloji gibi düşük-seviyeli sorularla uğraşmak istemiyoruz... Onun ısrar ettiği konu, bizim nesneleri daha genel bir yoldan yapmamız gerektiğiydi. Çünkü von Neumann şuna inanıyordu: Eğer Darvin haklıysa, o zaman bu muhtemelen çok genel bir şeydir ve ben de bunu yaptığıma inanıyorum.

Örneğin, bir *genetik programlama* düşüncesi var; bu, o düşüncenin bilgisayarlaşmış biçimidir. Bir programın bir şeyleri yapması için yazmak yerine, onu deneme yanılma yolu ile iyi bir şekilde yavaş

yavaş geliştirirsiniz. Ve bu, dikkate değer bir güzellikte çalışır gibi görünür; fakat siz bunun bu şekilde davranacağını ispatlayabilir misiniz? Veya Tom Ray'in *Tierra*'sına bir göz atın... Biyoloji bilgisayar modellerinin bir kısmı neredeyse çok güzel çalışır gibi görünür — problem, bu programların neden bu kadar güzel çalıştıklarının kuramsal bilgisinin olmayışıdır. Eğer Ray'in modelini bilgisayarınızda çalıştırırsanız, bu parazit ve hiper-parazitleri elde edersiniz, bütün bir ekolojiyi elde edersiniz. Bu yalnızca müthiş bir şeydir; fakat bir pür matematikçi olarak ben bunun kuramsal anlamını arıyorum. Ben bir organizmanın ne olduğunu tanımlama ile başlayan ve bu organizmanın karmaşıklığını nasıl ölçeceğimizi belirten, organizmaların evrimleşmeye mecbur olduklarını ve karmaşıklıkta artıklarını **ispatlayabilen** genel bir kuram arıyorum. Benim istediğim budur; hoş olmaz mıydı?

Bunu başarırsanız, evrim fenomeninin ne kadar genel olduğu ve evrende başka bir yerlerde yaşamın mümkün olup olmadığı konularını aydınlatırsınız. Elbette ki, biz matematikçiler hiçbir zaman böyle bir kurama ulaşamazsak bile, belki başka yerleri ziyaret ederek orada yaşamın olup olmadığını keşfedebileceğiz... Fakat her nasılsa von Neumann bunu ilginç bir soru olarak öne sürdü ve aldatıcı gençliğim zamanında bana program-büyüklüğü karmaşıklığının evrim ile bir ilgisi olabileceğini düşündürdü. Fakat artık böyle düşünmüyorum; çünkü bu düşünceye herhangi bir yerde asla rastlamadım...

Dolayısıyla yapılabilecek çok ilginç çalışmalar olduğunu düşünüyorum! Ve heyecan verici bir zamanda yaşadığımıza inanıyorum. Aslında, bazen biraz daha fazla heyecan verici şeylerin bile olabileceğini de düşünüyorum!... Ve öyle tahmin ediyorum ki, bu konuşma bundan yüz yıl sonra 2099'da verilseydi, orada matematiğin temelleri hakkında özetlenebilecek heyecan verici farklı kaygılar ve meşguliyetler ile birlikte **başka bir** tartışma olacaktı... Bundan yüzyıl sonra yapılacak konuşmanın neye benzeyeceğini bilmek ilginç

olurdu! Belki bazılarınız burada olacaksınız! Veya hatta konuşmayı siz sunarsınız! Çok teşekkürler! [Gülüşmeler & Alkışlar]

İlâve Okumalar

1. G. J. Chaitin, *The Unknowable*, Springer-Verlag, 1999.
2. G. J. Chaitin, *The Limits of Mathematics*, Springer-Verlag, 1998.

MATEMATİK FELSEFESİNİN İHYASI İÇİN BAZI ÖNERİLER*

Reuben Hersh
Çev. Muharrem Özlük & Bekir S. Gür

'Matematik felsefesi' ile; uzman matematikçilerin süregelen felsefeleri ve araştırmacı, öğretmen veya matematik kullanıcısının kabul ettiği, işine yönelik felsefî yaklaşımları kastediyorum. İddiam, çalışan matematikçilerin özellikle matematiksel söylemde anlam ve doğruluğun analizi gibi felsefî konulardaki merkezî tartışmalarının yeniden hayat bulmaya ihtiyacı olduğu şeklindedir.

Bu makalenin birinci amacı, çalışan matematikçilerin felsefî durumunu belirlemek. İkinci amacı, bu duruma nasıl gelindiğinin bir açıklamasını sunmak. Üçüncü olarak, çok kısa da olsa, çıkış yolunun mümkün olabileceği bir yön önermektir. Özet itibariyle, tartışmamız aşağıdaki gibi ilerleyecektir.

---

* Tymoczko, Thomas (1998), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Princeton: Princeton University Press. 9-28. Yazının orijinali için bkz. *Advances in Mathematics*, vol. 31, 1979, 31-50

(1) Çalışan matematikçilerin, matematik hakkında taşıdıkları genel felsefî kanaatleri, birbirleriyle, hâlihazırdaki deneyimlerle ve matematiksel çalışmanın pratiği ile uyuşmamaktadır. Bugün matematiğin pratikte karşılaştığı engel ve problemlerin, felsefî cihetleri vardır. Alt yapısı sağlam bir felsefî söylemin matematikte olmayışı; öğretim, araştırma ve kurumlarımızın fiilî ilişkilerinde gözle görülür zararlı sonuçlar doğurmuştur.

(2) Matematiksel felsefenin şu anda önündeki engel; Frege ve Russell'dan Brouwer, Hilbert ve Gödel'e kadar temelci tartışmaların yaşandığı görkemli dönemden arta kalmıştır. Şimdi gereken; mantıkçılık, biçimcilik veya sezgicilik gibi çeşitli 'ekollerin' devamını getirmek değil, yeni bir başlangıçtır. Bu ekollerin ötesine geçmek için, aralarında nelerin ortak olduğunu ve o günlerin matematik ve felsefesinde nasıl yerleştiklerini görmek için tarihteki özlerine doğru geri gitmek gerekmektedir.

(3) Matematik felsefesindeki güçlükler ve zorlu engellerin birçoğu, öyle yapmayı tercih edersek eğer, ıskartaya çıkarmakta serbest olduğumuz geçmişten gelen felsefî önyargılardan kaynaklanmaktadır. Felsefî güçlüklerimizin bazıları o zaman kolayca aşılacak; diğerleri ise, sistematik olarak incelenebilecek, ilerisi için makul umutlar vaat eden, elle tutulur problemler hâline geleceklerdir.

Aşağıda, her ifade biraz genişletilecek ve belli bir uzunlukta tartışılacaktır.

1. ÇALIŞAN MATEMATİKÇİNİN FELSEFÎ DURUMU

Konu ile ilgili çoğu yazar, tipik bir "çalışan matematikçinin" hafta içi Platoncu, hafta sonları biçimci olduğu noktasında hemfikirdir. Yani, matematikçi matematik yaparken, özelliklerini belirlemeye niyetlendiği, uğraştığı şeyin nesnel bir gerçeklik olduğundan emindir. Ancak daha sonra kendisinden bu gerçekliğin felsefî yönü istendi-

ğinde ise, beklenenin aksine ona inanmıyormuş gibi davranmayı en kolayı olarak görmektedir.

İki tanınmış yazardan alıntı yapalım:

> Temellere gelince, matematiğin gerçekliğine inanırız; fakat ne zaman filozoflar bize paradokslarıyla saldırsalar, biçimciliğin arkasına hızla saklanır ve "Matematik yalnızca anlamsız sembollerin birleşimidir." deriz ve akabinde [bir matematik kitabının] küme kuramı hakkındaki birinci ve ikinci bölümlerini çıkarırız. Nihayetinde, matematiğimize huzur içinde döner ve her matematikçide olduğu gibi gerçek bir şey ile çalışıyor olma hissiyle matematiği her zaman yaptığımız gibi yapmaya devam ederiz. Bu his, muhtemelen bir yanılsamadır; ancak gayet münasiptir. Bu görüşler, Bourbaki'nin temellere yaklaşımıdır. (Dieudonné [8].)

> Yaptığı işin sağlam temelleri olup olmadığını bilmek isteyen ortalama bir matematikçinin en cazip seçeneği, Hilbert'in programı yardımıyla güçlüklerden kaçınmaktır. Burada kimi, matematiği biçimsel bir oyun olarak görürken, kimi de sadece tutarlılık sorunuyla ilgilenir... Realist duruş, muhtemelen çoğu matematikçinin tercih edeceği duruş olacaktır. Matematikçi, küme kuramında birtakım güçlüklerin farkına vardıktan sonradır ki, sorgulama bile anca başlar. Bu güçlükler kısmen de olsa onu rahatsız ederse, hemen biçimciliğin çatısı altına sığınacaktır, aslında matematikçinin normal yeri, her iki dünyanın keyfini sürmek ister vaziyette, ikisinin arasında bir yerlerdedir. (Cohen [4].)

(Yazı boyunca 'biçimcilik' terimi, Dieudonné ve Cohen'den yaptığımız alıntılarda olduğu gibi, pür matematiğin büyük bir kısmının ya da tamamının anlamsız bir oyun olduğunu ifade eden felsefî konumu ifade etmek için kullanılmıştır. Biçimciliği, matematik felsefesi olarak kabul etmemenin hiçbir şekilde matematiksel mantığın bir eleştirisi manasına gelmeyeceği gayet açıktır. Aksine, matematiksel faaliyetleri biçimsel sistemlerin araştırılması olan mantıkçılar, matematiğin yapılışı ile matematiğin biçimsel bir matematiksel sistem kavramı içerisinde sistematize edilişi arasındaki farkı takdir edebilecek en iyi konumdadırlar.)

Platonculuk ve biçimciliğin olası alternatifi olarak gördüğümüz yaklaşımın kısa bir incelemesini sunacağız. Şimdilik, bugünün matematik dünyası hakkında genel itibarla kabul edilmiş bir durum olarak şunu kayıt altına alalım: Çoğu matematikçi yaptıkları işin mahiyeti ve anlamı üzere çelişkili iki görüşe sahiptir. Bu gerilimin, her şeyden çok çelişkiden nefret ettiği düşünülen kimselerin, özgüven ve onurları üzerinde hiçbir etkisi olmadığı görüşüne itibar edilebilir mi?

Matematikte neyin ilginç olduğu sorusu, araştırmada faal olan ve araştırma yapanları çalıştıran veya destekleme işiyle ilgilenen herkes için hayatî öneme haiz, pratiğe dönük bir sorundur. Bu soru üzerinde herhangi bir kamuoyu tartışmasının olmaması, bunun için herhangi bir aracın olmaması, hatta böyle bir tartışma için kullanılabilecek bir dil ve bakış açısının dahi olmaması şaşırtıcı değil midir?

Bu, matematiksel tat üzerinde uzlaşılmış standartların kesin olabileceği veya olması gerektiği anlamına gelmemektedir. Aksine, şurası muhakkak ki, tatlar çeşitli olduğu için tat hakkındaki mevzuların tartışılması mümkün ve gerekli olmuştur. Bizim, başlı başına bir alan olarak bulunmamız ve matematiğin belli başarılarının yüksek bir övgü ve ödülü hak etmiş olması üzerinde bulunan uzlaşı yeteneğimiz, yaptığımız işi değerlendirmede kriter olarak kullandığımız ortak mükemmellik standartlarının bulunduğunu kanıtlamaktadır. Bu kriterleri sarih kılmak, tartışma, itiraz ve ihtilafa açık kılmak, matematikçiler için önemli bir felsefî faaliyet olacaktır. Matematiğin değerleri üzerine bir kamuoyu tartışmasını sağlamadaki kabiliyetsizliğimiz, felsefî duyarsızlık ve yetersizliğin bir sonucudur.

Küme kuramı veya mantığın bazı güç anlaşılır bölümlerindeki doğruluk ve anlam sorunları, teknik konular değildir. Bunlar matematiği kullanan veya öğreten herkesin karşına çıkar. Eğer istersek bunları göz ardı edebiliriz. Böyle yapmak ise, kişiyi, başka bir kişinin incelenmemiş felsefî önyargılarına mahkum etmektir. Bunun pratik hiçbir sonucunun olmaması şaşırtıcı olurdu.

Şimdi bu pratik sonuçların iki olası örneğini irdelemek için biraz duralım. Son yarım yüzyıl gibi bir süre, matematiksel felsefenin en çok savunulan bakış açısı olarak biçimciliğin yükselişine şahit olundu.[1] Aynı dönemde matematik dergilerinde, hatta araştırma ve metinlerde dahi, sunumun en baskın tarzı, bir problemin neden ilginç olduğu veya neden belirli bir ispat yönteminin kullanıldığı tartışmasını yapmayarak veya en düşük düzeyde yaparak, tanımların ve ispatların en küçük ayrıntıları üzerinde ısrarla durmak olmuştur.

Sunum tarzındaki biçimcilik ile felsefî tavırdaki biçimcilik arasındaki ilişkiyi belgelendirmek zor, hatta imkânsızdır. Yine de, fikirlerin etkileri söz konusudur. Kişinin matematiğin ne olduğuna dair anlayışı, onun nasıl sunulması gerektiğine dair anlayışını etkilemektedir. Ferdin bir şeyi sunum tarzı, içinde neyin en önemli olduğuna dair inancının bir belirtisidir.

Bir başka örnek, 60'lar boyunca, lise müfredatlarına küme kuramının sembolik gösterimlerinin ve aksiyomlarının taşınmasıdır. Bazı eleştirmenlerin ara sıra tasavvur ettiğinin aksine, bu açıklanamayacak bir sapkınlık değildir. Bu, bütün matematiğin küme kuramı dilinde ifade edilmiş aksiyomatik sistemlere indirgeyen felsefî öğretinin tahmin edilebilir bir sonucudur.

Liselerde biçimciliğin eleştirisi özünde pedagojik temellidir: "Bu, öğretilmek için uygun değildir ya da bunun öğretim yolu yanlıştır." Gerçek matematik biçimsel olarak ifade edilmiş aksiyomların tamamen biçimsel çıkarımlarıdır dogması sorgusuz bırakılırsa, bu şekildeki bütün tartışmalar sonuçsuz kalacaktır. Bu felsefî dogma, irdelenmeksizin devam ederse, okullardaki biçimciliğin eleştirmenleri kaliteden verilecek bir ödünü savunur hâle gelecektir: O, öğrencilere "gerçek şeyden" daha azını öneren, bir tür fırsat düşkünü bir eğitim-bilimcidir. O hâlde mesele, "en iyi öğretim yolu hangisidir?" sorusu değil, "matematik sahiden ne ile ilgilidir?" sorusudur. Biçimciliğin pedagojideki itibarını azaltmak için, felsefî alt yapısı, yani

matematik doğasının biçimsel tasviri ile uğraşmak gerekir. Lise öğretimindeki tartışmalar, matematiğin doğası üzerine problemlerle yüzleşmeden çözümlenemez. Nihayetinde, biçimciliğin eleştirisi ancak matematiğin doğasına dair daha ikna edici ve tatmin edici bir felsefî seçeneğin geliştirilmesiyle başarılı olabilir.[2]

Matematikçilerin kendileri nadiren matematiği saran felsefî konuları tartışırlar; onlar başkalarının bu işi üstlendiğini düşünürler. Bunu uzmanlara havale ederiz.

Fakat uzman filozofların, ender istisnalar haricinde, uzman matematikçilere söyleyecekleri çok az şey vardır. Hakikaten onlar, uzman matematikçilerin ne yaptığı konusunda hayli uzak ve yetersiz bir anlayışa sahiptirler. Tabiî ki, böyle bir olgu kabul edilebilecek bir şeydir. Bu, ne yaptığınızın anlaşılması babından, heybetli teknik gereklilikler ışığında ancak beklenebilir.

Şu hâlde dahi söylenebilir ki, felsefî şaşkınlığından rahatsız bir matematikçi, kütüphanesindeki kitap ve dergilerden medet umuyorsa çok kötü bir hayal kırıklığına uğrayacaktır. Matematik hakkında yazan bazı filozoflar, aritmetik ve temel geometriden daha ileri matematiği tanımıyor görünmektedir. Diğerleri ise mantıkta veya aksiyomatik küme kuramında uzman olup, çalışmaları, teknik olarak başka herhangi bir matematiksel ihtisas alanındaki gibi dardır.

Kuantum mekaniği ve genel görelilikte makul seviyede bilgili olan bilim filozofları vardır. Fakat fonksiyonel analizde veya cebirsel topolojide veya stokastik (ihtimalî) süreçlerde çok sayıda uzman filozofun olmadığı görülmektedir. Eğer matematik gerçekten mantık ve aritmetiğe veya küme kuramına indirgenebiliyorsa, bekli de bu tür şeyler bilmeye gerek yoktur. Fakat böyle bir ön-kabulün kendisi felsefî bir duruş olup (nazikçe ortaya koyarsak) itiraza açıktır.

Polanyi'nin "Personal Knowledge" [Şahsî Bilgi] adlı çalışmasında matematik üzerinde bir kısım ayırıcı yorumlar mevcuttur. Lâkin, Polanyi aslında bir kimyagerdir. Ayrıca, I.M. Lakatos'un "Proofs

and Refutations" [İspatlar ve Çürütmeler] adlı güzel bir çalışması vardır [17]. Bu tez, Karl Popper ve George Polya'nın etkisi altında matematik felsefesi üzerinde son yıllarda yazılmış en ilginç ve özgün katkıdır. Lakatos'un bu çalışmasını Amerikan matematikçilerin hemen hemen hiç bilmemesi olgusu, entelektüel körlüğümüzün çarpıcı bir örneğidir.

Aslında, alanları küme kuramı ve mantıkla sınırlı olmayan öncü matematikçilerin de ara sıra felsefî yorumları olmuştur. Fakat bugün matematikçiler arasında hatta en parlak olanları arasında bile felsefî söylem sanatı yeterince gelişmemiştir. Felsefî mevzular aynen matematiksel olanları gibi, titiz argümanlar, tam geliştirilmiş analizleri hak eder ve de itirazları dikkate almak gerekir. Kişinin kendisine ait kel bir ifade, felsefede bile, bir argüman olamaz.

Üniversitenin bildik matematik müfredatında dikkate alınan, sadece bundan elli sene önceki çeşitli temelci ekollerin ortaya attıkları felsefî sorunlar olmuştur. Bu bakış açısından, onların hiçbiri kendi programını yönetebilecek kabiliyete sahip değildi ve onların hiçbirinin 'temeller' problemini çözebilecek gerçek bir reçetesi yoktu denilmektedir.

Bu nedenle eğer biz öğrencilerimize matematik felsefesi hakkında herhangi bir şey öğreteceksek, o zaman, ilgilenilmesi gereken sadece bir problem (yani gerçek sayı sisteminin temelleri problemi) vardır ve bu da tamamen çözülemeyecek bir problem olarak görülmektedir.

Buna rağmen, tabiî ki, matematikten vazgeçecek değiliz. Basitçe üzerinde düşünmeyi bırakacağız. Yalnızca işimizi *yapacağız*. Bu, matematik felsefesinin, az çok, şu anki durumudur.

2. BURAYA NASIL GELDİK?

Platonculuğa karşı biçimcilik ikilemi, iki kabul edilemez felsefe arasındaki gidip gelmeler, kendi tarihsel çağımızın bir karakteristiğidir.

Bu nasıl meydana geldi?

Uygun nitelikli bir tarihçi tarafından incelenebilecek bir tarihsel şema ve bir sanıdan bahsetmek istiyorum.

İzlenimci bir sanı olsa da, şimdiki durumunuza dair hazırlık babından yardımcı olabilir.

19. yüzyıla kadar geometri, *matematikçiler de dahil* herkes tarafından bilginin en kat'î ve en güvenilir dalı olarak kabul görülüyordu. Analiz, anlam ve meşruiyetini geometri ile olan bağlantısından çıkarıyordu.

"Öklit geometrisi" demiyorum; çünkü tamlayanın kullanımı ancak birden çok geometrinin olabilirliğinin farkına varıldıktan sonra gerekli ve anlamlı olur. Ondan önce geometri sadece geometriydi - uzayın özelliklerinin bir araştırması. Bu özellikler, mutlak ve bağımsız olarak vardı; nesnel olarak verilmiş, evren özelliklerinin kesin, ezelî ve insan zihni tarafından kesinlikle bilinebilen en mükemmel örnekleriydi.

19. yüzyılda birkaç felaket meydana geldi.

Felaketlerden biri, birden fazla makul geometrinin bulunduğunu gösteren Öklit–dışı geometrilerin keşfiydi.

Daha büyük felaket, geometrik sezginin yerini alan analizin gelişimiydi. Uzayı-kaplayan eğrilerin ve hiçbir noktada türevlenemeyen sürekli eğrilerin keşfi, matematiğin üzerine kurulduğu düşünülen sağlam temelin -geometrik sezginin- güvenilirliğini yitirmesine yol açan, çarpıcı gelişmelerdir.

Bu tahammül edilemez bir durumdu; çünkü, Platon'dan beri geometri insan bilgisindeki kesinlik ihtimalinin fevkalâde örneği olarak addediliyordu. Newton'un da hareket ve yerçekimi ilkelerinin tespitinde kullandığı gibi, Spinoza ve Descartes, Tanrı'nın varlığının ispatında "*more geometrico* –daha fazla geometri" kullanmışlardı. Geometri'de kesinliğin yitirilmesi felsefî olarak da tahammül edilemezdi; çünkü bu, insan bilgisindeki bütün kesinliğin yitirilmesi anlamına geliyordu.

19. yüzyıl matematikçileri, tabiî ki, gerçek muhalif olduklarını ispatladılar. Dedekind ve Weierstrass liderliğinde, matematiğin temeli geometri, aritmetik ile değiştirildi.

Sürekliliği aritmetiğe indirgerken, şimdiye dek dikkat edilmemiş bir çeşit matematiğe – küme kuramına- ihtiyaç olduğu yavaş yavaş açığa çıktı.

İlk başta küme kuramı, mantık ile aynı olarak görülüyordu ve bu nedenle bütün matematiğin temeli olarak aritmetiğin yerine küme kuramı–mantığın kullanılma umudu belirdi. Öyle olmadı. Frege'nin ünlü notunda belirttiği gibi, "bina tamamlanır tamamlanmaz, temel çöktü." Bu, Russell'ın ona naklettiği Russell paradoksuydu.

Bu yüzyılın ilk çeyreğindeki ünlü tartışmalarının esas konusu olan, bu "temeller krizi"ydi. Üç temel çözüm öne sürüldü:

Frege ve Russell ekolü, yani "mantıkçılık" programı, Russell paradoksunu önleyebilecek ve böylelikle Frege–Russell–Whitehead'in matematiği mantığın üzerine kurma plânlarını kurtarabilecek şekilde küme kuramına yeni bir düzen verecekti.

Bu program üzerindeki çalışmalar, mantığın gelişiminde büyük rol oynadı. Fakat asıl niyeti dikkate alındığında bu bir başarısızlıktı. Küme kuramı, paradoksları ortadan kaldırmak için kaba taslak tamamlandığında öyle karmaşık bir yapı arz ediyordu ki, "mantık" ile felsefî manadaki "doğru muhakemenin kurallarını" ayırt etmekte, insan güçlük çekerdi. Bu nedenle matematiğin mantıktan başka bir şey olmadığını –matematiğin geniş bir totoloji olduğunu- savunmak imkânsız hâle geldi.

> Ben insanların dinî inanışta aradıkları türden bir kesinlik arayışındaydım ve bu kesinliğin başka alanda değil matematikte bulunacağını düşünüyordum. Fakat fark ettim ki, öğretmenlerimin benden kabul etmemi beklediği çoğu matematiksel ispat yanlışlıklarla doluydu. Ayrıca, eğer kesinlik gerçekten matematik içerisinde bulunabilecekse bu, matematiğin bundan önce düşünülen alanlarından daha sağlam temelleri olan yeni bir alanında olacaktır diye

> düşündüm. Fakat araştırmalarım ilerledikçe aklıma sürekli fil ile kaplumbağa hakkındaki masal geliyordu. Matematik dünyasının üzerinde durabileceği bir fil inşa ettiğim vakit filin sendelediğini gördüm ve filin düşmesini engellemek için bir kaplumbağa inşa ettim. Fakat kaplumbağa, filden daha güvenli değildi ve çetin ve zahmetli geçen yaklaşık yirmi yıldan sonra şu kanaate vardım ki, matematiksel bilgiyi şüphesiz kılmak için bu yolda yapabileceğim hiçbir şey yoktur. (Bertrand Russell, "Portraits from Memory.")

Hilbert'in bu ikileme cevabı, "ispat kuramı"nı ortaya atmak oluşmuştur. Temel fikir, matematiksel ispatları, matematiksel muhakeme kurallarına karşılık gelen belli kurallara göre yeniden-sıralanmış ve dönüştürülmüş biçimsel semboller dizisi olarak görmekti. Daha sonra küme kuramının aksiyomlarının hiçbir zaman çelişkiye yol açmayacaklarını göstermek için, tamamen sonlu ve terkibî (kombinatoryal) düşünce kalıpları bulunabilecekti. Bu şekilde tutarlılığı garanti etmek babından, matematiğe güvenli bir temel oluşabilirdi.

Bu tür bir temel, doğru olarak bilinen bir kuramın üzerine kurulu temellere tam olarak benzememektedir; örneğin, geometri doğru olarak veya en azından şüphe götürmez olarak bilinirdi veya temel mantıktaki çelişki kuralı hakkında şüphe duymanın imkânsız olduğu beklenirdi.

Biçimci temel, mantıkçı temel gibi, kesinlik ve güvenilirliği bir değer karşılığında satın almak istemişti. Matematiği güvenli hâle getirmek için mantıkçı anlayışın onu bir totolojiye dönüştürmesi gibi, biçimci anlayış da matematiği güvenli kılmak için onu anlamsız bir oyuna dönüştürmüştür. "İspat–kuramcı program", matematik biçimsel bir dil içerisinde kodlandığı vakit uygulamaya geçmiştir ve onun ispatları makine ile kontrol edilebilir bir şekilde yazılmıştır. Sembollerin *anlamına* gelince, bu biraz matematiksel-dışı bir şey olmuştur.

Hilbert'in yazı ve konuşmalarının, matematiksel problemlerin gerçek nesnelerle ilgili sorular olduğunu ve gerçeklik hakkındaki

herhangi bir ibarenin doğru olduğu anlamda, anlamlı cevapları bulunan doğrular olduğunu tam bir kanaatle sergilemesi dikkate değerdir. O her şeye rağmen matematiğin biçimci bir anlayışını savunduysa bu, kesinliği elde etmek uğrunda onun gerekli gördüğü diyetti.

> Kuramının amacı, matematiksel metotların kesinliğini temelinden sağlamaktır. ... Bizi paradokslarla karşı karşıya bırakan şu anki durumumuz tahammül edilecek gibi değildir. Bir düşünün herkesin öğrendiği, öğrettiği, gerçekliğin ve kesinliğin mükemmel örneği olan matematiğin kullandığı tanımlar ve tümdengelim yöntemleri saçmalıklara yol açıyor. Eğer matematiksel düşünce kusurlu ise biz kesinliği ve doğruluğu nerede bulacağız? (Hilbert [12].)

Bu diyete rağmen, gerçekte olduğu gibi, kesinlik elde edilemezdi. Gödel'in eksiklik teoremleri Hilbert'in programının gerçekleştirilemez olduğunu gösterdi. Yani temel aritmetiği kapsayacak derecede güçlü herhangi bir biçimsel sistem, kendi tutarlılığını kanıtlayamaz.

Russell'ın mantığı ve Hilbert'in ispat kuramı, matematiğe temel oluşturmaktan ziyade matematiğin yeni alanları için başlangıç noktası olmuştur. Model kuramı ve matematiksel mantığın diğer dalları çağdaş matematiğin bütün yapısının içkin bir parçası olmuştur -ve bu dallar, yapının geri kalanının duyduğu kadar az veya çok temele ihtiyaç duymaktadır.

Mantıkçı ve biçimcilerle rekabet eden üçüncü ünlü ekol sezgiciliktir. Brouwer'ın konumu, doğal sayıların güvenilir olduğu ve daha derin bir temele ihtiyacı olmadığıydı; ayrıca matematiğin doğal sayılardan "inşacı tarzda" elde edilmiş kısımları sadece kabul edilebilirdi. Brouwer'ın inşa edilebilirlik kavramı, normalde anlaşıldığı üzere reel sayı sistemini dışarıda bırakacak kadar katıdır. Bunun sonucunda görüşlerinin en azından bir kısmı Hermann Weyl ve Henry Poincaré gibi kişiler tarafından kabul görmüşse de, mate-

matikçilerin büyük çoğunluğu çalışmalarına inşacı olmayan tarzda devam etmişlerdir.

(Sezgici görüşün bazı yönleri, Platonculuk ve biçimciliğe bir alternatif arayanlar için hâlâ çekicidir. Özellikle, matematiğin anlamlı olmasında ısrar eden ve matematiğin insanın belli bir zihnî faaliyeti olarak görülmesi düşünceleri. Doğal sayılardan inşacı olmayan tarzda elde edilen matematiğin anlam olarak eksik olduğu dogmasını reddederek, sezgiciliğin bu düşünceleri benimsenebilir.)

Bu hikâye çok uzundur ve muhtemelen çoğu okuyucu da buna aşinadır. Fakat mesele şudur: Üç temelci ekolun hepsi aynı ön kabulü paylaşmıştır. Bugün bizim için, onların ortak başarısızlıkları ışığında, ekollerin ortak ön kabulleri, fazlaca vurgu yapılmış farklılıklardan daha önemlidir. Bu ön kabulü ortaya çıkarmak ve tartışmaya açmakla, matematiksel felsefenin elli yıldır saplandığı bataktan kurtulabiliriz.

Ortak ön kabul, matematiğe mutlak bir güvenilir temel sağlanması zorunluluğuydu. Anlaşmazlık, stratejideydi ve üzerinde uzlaşılmış amaç için neyin feda edileceğiydi. Fakat amaca hiçbir zaman ulaşılamadı ve onun başarısı için umutlu olanlar hâlâ az sayıda vardır.

Bu noktada "çalışan matematikçilerin" biçimcilik ve Platonculuk arasında kolay olmayan gidip gelmelerinin sebebini görebiliriz. Bize miras kalan *ve sorgulanmayan* felsefî dogma, matematiksel doğrunun mutlak kesinliğe sahip olması gerekliliğidir. Matematiksel çalışmalardaki hâlihazırdaki deneyimlerimizin, kesin olmayan sonuçlar doğurması sayısızdır. Platonculuk ve biçimcilik, her biri kendi yolunda, mutlak kesinliğin hayal edilebildiği bir yerde gayri-insanî bir "gerçeklik" önermektedir.

Tanıdık birkaç teoremi, meselâ, sürekliliğin sayılamazlığı, Cauchy integral formülü ve cebirin temel teoremini ele alalım.

Bu dünya hakkında doğru bir ibare midir? Böyle bir teorem *keşfedilir* mi? Böyle bir keşif bilgimizi *artırır* mı?

Eğer bu tip sorulara cevabınız evet ise, size Platoncu (veya "realist") denilebilir. Sonra akabindeki soruyla karşılaşırsınız: Bu tip ibareler hangi nesnelere veya dünyanın hangi özelliklerine tekabül etmektedir? Kimse yolda yürürken ve hatta uzayda gezinirken bile, polinomların kökleri (veya sayılamayan kümeler) veya analitik fonksiyon integralleri ile karşılaşmaz. Düşüncemiz haricinde polinomların kökleri veya sayılamayan kümelerle kim karşılaşabilir?

Beklentilerimize rağmen, bekli de böyle şeylerin gerçek bir varlıkları yoktur ve bunların varlığına ve nesnel olarak bilineceğine dair kanaat, kendimizi içine hapsettiğimiz bir yanılsamadır. Belki de bir teorem, eldeki bir formül kümesinden (isterseniz, *aksiyomlar* deyin) mantığın kuralları ile çıkarılabilen bir formülden başka bir şey değildir.

Eğer bu mütevazı feragate ricat etmeyi tercih ederseniz, formalist (biçimci) olarak adlandırılabilirisiniz. Bundan böyle, matematiğin anlamlı olduğuna dair bir iddiayı reddettiğiniz için artık onun anlamını incelemenin zorluğu altında değilsiniz. Fakat bu sizi felsefî güçlüklerden azade kılmayacaktır. Tam aksine, şimdi size şu sorulabilir: Nasıl oluyor da, verdiğimiz üç örneğin hepsi de temellerini oluşturan aksiyomların ifade edilişlerinin oldukça evvelinde biliniyor, anlaşılıyor ve kullanılıyordu? Eğer biz bir teoremin aksiyomların sonucu olması haricinde bir anlamı olmadığını söylersek, Gauss'un, cebirin temel teoremini; Cauchy'nin, Cauchy integral formülünü ve Cantor'un, Cantor teoremini bilmediğini söylemiş olmaz mıyız?

Platonculuğun temeli, matematiğin kavram ve problemlerinin, bireyler olarak bizden bağımsız varoluşunun farkında oluşumuzdur. Zeta fonksiyonunun kökleri, her neredeyse, benim bu konuda ne bildiğime veya ne düşündüğüme bağlı değildir. Bunun sonrasında, nesnelliğin bütünüyle insan kavrayışının, tarihin ve kül-

türün dışında olduğunu düşünmek benim için kolay olmaktadır. Bu, Platonculuk mitidir. Bu, varlığını devam ettirmektedir; çünkü matematikçinin günlük yaşamında gerçek bir şeylere tekabül etmektedir. Ancak, varlığını gönülsüz ve çekingen bir Platonculuk olarak sürdürmektedir. Çünkü matematikçiler de dahil olmak üzere, çoğu bilim adamının dünya görüşüyle veya genel felsefesiyle uyuşmamaktadır.[3] Platonculuk tam anlamıyla –insan kavrayışından bağımsız veya bunu önceleyen, ideal varlıkların varlığına olan inanç–, tabiî ki, dinî bir dünya görüşü (ilahî varlığa olan inanç) içerisinde sağlam bir görüştür. Genel dünya görüşlerinde mistisizme yer vermeyenler için, üzerine bir kez bilimsel şüphecilik bütün gücüyle odaklandı mı, tam anlamı ile Platonculuğu savunmak çok zor hâle gelmektedir.[4]

Bu noktada biçimcilik alternatif olmaktadır. Teoremlerimizin ezelî, gayri insanî idealler hakkında doğrular olduğuna (veya olması gerektiğine) inanmak yerine, bunların sadece sembollerin dönüşümleri (biçimsel çıkarımları) hakkında iddialar olduğunu söyleriz. Bu bakış açışı da, aynı zamanda, bir inanç eylemini kapsar. Gerçekten de biz manifoldlardaki (çok-katlı) difüzyon hakkındaki şu son teoremimizin, Zermelo-Fraenkel küme kuramından çıkarılabileceğini nasıl biliyoruz? Böyle bir biçimsel tümdengelim hiç yazılmamıştır. Eğer yazılmış olsaydı ve bir insan tarafından kontrol edilmiş olsaydı, hata ihtimali sıradan (biçimsel olmayan) bir matematiksel ispattakinden daha büyük olurdu.

Platonculuk ve biçimcilik, her biri kendi yolunda, günlük deneyimlerimizin gerçekliğinin bir kısmıyla çelişir. Bu nedenle Platoncu idealizmin bilim-karşıtı, mistik özüyle karşılaşmak zorunda olduğumuzda, biçimci olarak konuşuyor; matematiğin betimlemesi olarak biçimciliğin şu anki matematik bilgimize sadece uzaktan benzeyişinin farkına vardığımızda, Platonculuğa dönüyoruz.

Benim bu yazıda açmak istediğim şey şudur: Matematiksel doğrulardaki mutlak kesinlik arayışına son verirsek eğer, her ikisinden

de vazgeçebiliriz. Bunun yerine, eski felsefî dogmaları çiğneme pahasına, matematiksel deneyimlerin gerçekliğine göre doğru olan bir felsefeye sahip olabiliriz.

3. ANEKDOTLAR VE DEDİKODU

Şimdi zihnimizi alışkın olduğumuz felsefî alternatiflerden arındıralım ve bunun yerine gerçek deneyimlerimize dönelim.

Matematikle az birazcık ilgilenmiş biri veya ilgilenen başka birini gözlemleyen bir kimse şunun farkındadır ki, matematiksel çalışma, düşünce (idea) çalışmasıdır. Nasıl ki, notalar müzikte yardımcı elemanlar olarak kullanılıyorsa, semboller de düşünmeye yardımcı olarak kullanılmaktadır. Önce müzik sonra nota gelir. Dahası notalar hiçbir zaman bestekârın müziksel düşüncelerine tam olarak vücut veremez. Azamî hassasiyetle, tanımların ve bir aksiyom kümesinin matematiksel fikirlerin ana özelliklerini tanımlama girişimi olduğunu biliyoruz. Fakat her zaman için dolaylı olarak kullandığımız ancak şimdiye kadar şüphe etmek ihtimalini farkına vardıracak bir karşı örneğe rastlamadığımız için, fikirlerin biçimselleştirmediğimiz bir yönü bulunmaktadır.

Gerçek şu ki, matematikte açıklığı, kesinliği ve anlamayı sağlamak bazen aşırı derecede zor olmaktadır.

Çağdaş matematiğin bütün dallarında, aşağıdaki hikayenin bir benzeri duyulur (tabiî ki, yazılı değil, şifahen).

"Konumuzun en önemli teoremlerinin çoğu, ilk olarak büyük Profesör İsimsiz tarafından bulunmuştur. Onun sezgisi o kadar güçlüdür ki, başka hiç kimsenin anlayamadığı yöntemleri kullanarak sonuçlara ulaşmıştır. Yıllar sonra başkaları, disiplinde çalışanların hepsinin anlayabileceği argümanları kullanarak ispatlar bulabildi. Tabiî ki, (belki bir iki istisna ile) İsimsiz'in bütün formül ve teoremleri doğru çıktı. Yine de hiç kimse onun bunları nasıl bulduğuna

dair açıklamalarını tam olarak anlayamamaktadır." Ben de kayıp ismi yazmayıp geleneği kesinlikle bozmayacağım. Aynı hikaye olasılıkçılar, kısmî diferansiyel denklemciler, cebirciler ve topolojiciler tarafından söylenmektedir –yalnızca kahramanın adı değişmektedir. Tam ispatın öncesinde bu tür bir bilgi, matematiğin biçimci görüşünü savunanlar tarafından açıklanamamaktadır.

Başka bir örnek verirsek, Uluslararası Matematikçiler Kongresi'nde davetiyeli bir konuşmada, ünlü bir profesör bir kısım son bulgularını açıklamaktadır. Şunu da eklemektedir ki, bu sonuçların doğruluğu kesin değildir. Çünkü alanındaki diğer uzmanlar bunu kontrol etmek için henüz vakit bulamamışlardır ve tabiî ki, başka insanlar tarafından kontrol edilmedikçe bir şeyleri gözden kaçırmadığınızdan tam anlamıyla emin olamazsınız.

Büyük matematikçiler dahi hatalar ve bazen ciddî hatalar yapar. Ayrıca bu hatalar, uzun zamandan beri gayet iyi bilinen ünlü yazılarda da bulunabilir.

Eylül 1963'te *Proceedings of the American Mathematical Society* [Amerikan Matematik Topluluğu Tutanakları] adlı dergide Dreben, Andrews ve Aandreaa tarafından "Herbrand'ın Yanlış Sonuçları" başlıklı bir makale çıktı. Bu makalede, Herbrand'ın 1929'da yayınlanan bir tezindeki bazı sonuçların yanlış olduğunu gösterdiler. Bu sonuçlar mantıkta 50 yıl boyunca önemli ve iyi bilinen bir teoremin ispatında kullanılmıştır. Yazarlar, yanlış sonuçların yerine doğrularını koyarak Herbrand teoreminin nasıl ispatlanacağını gösterdiler.[5]

1975 Mart'ında *Bulletin of the American Matematical Society* [Amerikan Matematik Topluluğu Bülteni] adlı dergide, S. Hellerstein ve J. Williamson tarafından "Bütün Fonksiyonların Türevleri ve Polya'nın bir Sorusu" başlıklı bir makale yayınlandı. Şöyle yazmışlar: "1914'te Polya şunu sordu: Eğer bir bütün fonksiyon f ve bütün türevleri, sadece reel sıfırlara (köklere) sahipse; f, U_0'da mıdır? (Polya–Laguerre sınıfı) [1,2]'de M. Alander, $p \leq 2$ olmak üzere U_{2p}'deki

bütün *f*'ler için Polya'nın sorusunun cevabının olumlu olduğunu ispatladı ve [3]'te bu sonucu herhangi bir *p* için genişletti. Hâlbuki, ardışık türevlerin sıfırları (kökleri) hakkındaki ünlü bir incelemesinde Polya, Alander'in [1]. ve [2]. sonuçlarına atıfta bulunurken daha genel olan [3]. sonuca atıfta bulunmaz. Bu durumu ilk duyuran, A. Edrei'nin danışmanlığındaki bir yüksek lisans öğrencisi, bu tuhaf ayrıntı kendinden sonrakilerin dikkatine sunmuştur. Edrei'nin müteakip sorgulamalarına karşılık Polya bir mektupta, Alander'in daha genel "ispatının" farkında olduğunu, fakat ispatla hiçbir zaman ikna olmadığını, lâkin ispatın hatalı olduğunu da gösteremediğini belirtmiştir! Alander'in ispatı, U_p'deki fonksiyonlarla bağlantılı olarak harmonik fonksiyonların düzlem eğrilerinin bir çalışmasını içermektedir. Bu tip geometrik kavramlardan kaçınarak ve yerine doğrudan analitik kavramları kullanarak Alander'in 'teoreminin' daha kuvvetli bir biçimini ispatlamış bulunuyoruz".

Dikkat ederseniz Alander'in ve Herbrand'ın teoremleri, ispatları hatalı olmasına rağmen doğruydu. Bu çok tipik bir durumdur. Neden böyle ki?

Philip Davis'in ilginç bir makalesi [6], başka şeylerle beraber, ünlü isimlerin ve örneklerin de bulunduğu, matematiksel yayınlardaki hataların bir tartışmasını içermektedir.

Davis, matematiksel ispatın birbiriyle bağlantılı olmasının ve uzunluğunun, matematikte doğruluğun ihtimalî olduğu anlamına geldiğini ortaya atmıştır. Bence onun bu argümanı başka bir şeyi göstermektedir: Matematiksel *bilgi* yanılabilir ve bu açıdan diğer tür bilgilere benzer.

"Sezgisel çıkarım" veya "biçimsel olmayan çıkarım" ile matematikte belli bir anlama gizil altyapısına dayanan, sembollerden ziyade kavramlarla ilgilenen çıkarımı ayrıca sembollerle ilişkili ve mekanize edilebilen hesaplamalardan ayırt edilebilen çıkarımı kastedelim. Bundan sonra, şu anda matematikçiler tarafından yapıldığı gibi,

analitik–cebirsel bir ispatın kontrolü, temelde bir parça sezgisel çıkarımlardan ibaret olacaktır. Bir Öklit üçgeninin açılarının toplamının iki dik açıya eşitliği ispatı, biçimsel bir dille yazılabilir ve sadece *modus ponens** kullanılarak çıkarımda bulunulabilir. Böyle bir ispatı *anlamak* için, okuyucu bu ifadelere bir anlam yüklemek zorundadır; yani sezgisel olarak çıkarımda bulunmalıdır. Diğer taraftan eğer ispat, tanıdık bir şekil çizilerek yapılmışsa, sembolik ispatın birkaç adımının tek bir kavrayışta birleştirildiği farklı bir tür sezgi vardır. Başka bir seçeneğimiz de vardır; bu, sezgisel yanılabilir bir çıkarım yöntemi ile biçimsel, yanılmaz yöntem, arasında değil de; her ikisi de sezgisel ve yanılabilir olan iki çıkarım yöntemi (sözlü ve şekilsel) arasında bir yerdedir. (Parantez notu: Sözlü çıkarım biçimselleştirilebilir. Ve bu, kendi başına belli amaçlar için çalışılabilir. Fakat şu da tamamen mümkündür ki, şekil çizimleri de biçimselleştirilebilir; bakınız [7].)

Bütün bunlar, çalışan matematikçiye ait sezgisel seviyede kişilerarası doğrulanabilir bir "doğru ispat" kavramının varlığını inkâr etmek değildir. Bu, tamamen bu kavramın, doğruluğu her zaman mekanik bir prosedür ile sağlanabilen biçimsel ispat modeline öyle çok benzemediğini göstermek içindir.

Matematikte mutlak kesinliğe sahip değiliz; hayatın diğer alanlarında olduğu gibi, ancak sanal (virtual: zahirî, -mış gibi Ç.N.) kesinliğe sahip olabiliriz. Matematikçiler anlaşamaz, hata yapar ve bunları düzeltir; bir ispatın doğru olup olmadığından da emin değillerdir.

Bu açık gerçeklerle karşılaştığında kişinin üç seçeneği vardır. En yaygını ikiyüzlülüktür. Şöyle ki, söylenenlerle yapılanlar arasındaki boşluğa dikkat etmez görünürler.

---

* Önermeler mantığındaki doğrulama yöntemi. A→B önermesinde, A'nın doğru olması durumunda, B'nin de doğru olduğu sonucuna varma. Ç.N.

İkiyüzlülükten vazgeçersek, ya miti ya da gerçekliği terk edeceğiz. İkisi şunu söyler: Matematiksel ispatın sahiden (veya yaklaşık olarak veya prensipte) mekanik bir işlem olduğu kuramı tam anlamıyla doğru değildir; veya bunun yerine, matematikçiler tarafından her gün tecrübe edilen matematik gerçekte olması gereken matematik değildir.

Ortak bir karşılık diyor ki: "Doğrudur, biz olması gerektiği gibi her zaman dikkatli ve kusursuz değiliz. Fakat bu, idealden bir şey kaybettirmez."

Bir açıdan bu, tartışmaya mahal vermez. Elbette hata yapmamak için elimizden gelenin en iyisini yapmalıyız. Fakat eğer amaçlanan, gerçekten ispatları bir bilgisayar tarafından kontrol edilebilecek bir biçimde yazmamız ise (zaman ve enerjimiz olsaydı), o zaman bu nokta çok su götürür. Özellikle de yazılımlardaki hataları düzeltme işinde deneyimli kişiler tarafından!

Şüpheli bir ispat biçimselleştirildiğinde kesin hâle gelecek diye bir durum *söz konusu değildir*. Aksine, ispattaki şüphelerin yerini kodlama ve programlamadaki şüpheler alacaktır.

Gerçekte her gün yapılan şey, biçimsel bir ispatın (yani bilgisayar için yazılmış bir kodun) doğruluğunun, onun biçimsel doğruluğunu göstermek için hesaplama adımlarının *anlamı* üzerindeki kavrayışını kullanan bir insanoğlu tarafından kontrol edilmesidir.

Çok uzun ve karmaşık programların kullanımı yaygınlaştıkça, anlaşıldı ki, bu programların insanoğlu tarafından okunabilir -yani sadece biçimsel olarak doğru değil aynı zamanda anlaşılabilir- biçimde yazılması esastır. Doğrudur; "anlaşılabilir"in biçimsel bir tanımını veremiyoruz. Buna rağmen, pratikte *biçimsel hesaplamaların doğruluğunun gösterilebilmesini sağlayan anlamadan başka bir şey olmadığı* açığa çıkmıştır.

4. BURADAN NEREYE GİDİYORUZ?

2. ve 3. bölümlerdeki tartışmalar iki noktayı açığa kavuşturmak içindi:

(1) Bütün temelci görüşlerdeki irdelenmemiş kabul; matematiğin, sarsılmaz doğrunun bir kaynağı olması gerektiğidir.

(2) Bütün ekollerin hâlihazırdaki tecrübeleri –ve matematikçilerin gerçek günlük deneyimleri- matematiksel doğrunun, diğer doğrular gibi, yanılabilir ve düzeltilebilir olduğunu göstermektedir.

Gerçekten biz günlük deneyimlerimizle çelişen bir biçimcilik ile, Tanrı'nın yeterince iyi bir sezgi bahşettiği bir matematikçi tarafından incelenmeyi bekleyen, içinde sayılamayan ve erişilmezin bulunduğu mitik bir periler ülkesi öneren Platonculuk arasında bir yer seçmek zorunda mıyız? Matematik felsefesi için yeni bir amaç önermek makuldür: Sarsılmaz doğruyu aramak yerine, matematiksel bilgiye gerçekte olduğu gibi, yani beşerin diğer bütün bilgilerinde olduğu gibi yanılabilir, düzeltilebilir, kesin olmayan ve evrilebilir bir paye verilmedir. Hiç uğruna temeller aramayı sürdürmek veya temelsizlikten kendi yolunu kaybetmiş ve gayrimeşru hissetmek yerine, matematiğin gerçekten ne olduğuna bakmaya çabalayabilir ve genel itibariyle insan bilgisinin bir parçası olarak onu izah etmeyi deneyebiliriz. Yani; tarihi inceleyerek, iç gözlem yaparak, bir Marslının veya antropoloğun tarafsız gözüyle kendimizi ve birbirimizi gözlemleyerek; matematiği kullanırken, öğretirken, icat ederken veya keşfederken ne yaptığımızı dürüstçe yansıtmalıyız.

Bu tip bir programın, üç klâsik bakış açısından (biçimci, Platoncu, sezgici) tamamıyla farklı bir felsefî konuma ihtiyacı vardır. Sunmaya çalışacağım bu konu aşağıdaki bağlamda diğer üçünden farklıdır. Buna göre, *hiçbir apriori* felsefî dogmaya, matematikçilere kendilerine rağmen veya onu bilmeksizin, ne yapmaları gerektiğini veya gerçekten ne yapıyor olduklarını söyleme hakkını vermez.

Bundan ziyade, şimdiki yapıldığı hâliyle ve tarihte şekillendiği hâliyle matematiği, başlangıç noktası olarak kabul eder; ki bu matematik, gerekçelendirmeye veya yeniden yorumlanmaya ihtiyacı olmayan bir realitedir. Matematik felsefesinde yapılması gereken, matematikçinin ne yaptığının (matematiksel terimlerle içeriden değil, genel insan kültürünün bir parçası olarak dışarıdan) yorumlanmasıdır. Eğer bu deneme başarılı olursa, sonuç, matematikçilerin doğru olarak kabul edeceği matematiğin bir tanımı olacaktır. Bir kez söylendiğinde doğruluğu bayağı (aşikâr) olan, fakat o zamana kadar belki de herkes için belirtilmesi rahatsızlık verecek kadar çok bayağı olacak bir doğruluk türü olacaktır.

Bilim felsefesi ile bir karşılaştırma vardır. Bir zamanlar bilim felsefecileri, bilim adamlarının takip ettiği zannedilen tümevarımla keşfin ayrıntılı kurallarını yazmışlardı. Gerçek şu ki, bu tür bir yolla keşif yapmış bir bilim adamını bulmak hayli zordur ve bu kurallar onlara oldukça alâkasız görünmüştür. Yakın zamanda K. Popper ve M. Polanyi; Francis Bacon veya John Stuart Mill'in geleneksel kavramsallaştırmalarına çok fazla dayanmayan, bilimin nasıl geliştiğinin asıl bilgisine daha yakın şekilde bilimi farklı bir tarzda tanımlamışlardır. Popper ve Polanyi'nin bu yazıları çalışan bilim adamları tarafından tamamen göz ardı edilmiş değildir. Aksine, bazı bilim adamları, çalışmalarının bilim felsefesindeki bu çalışmalardan edindikleri sezgi ile olumlu yönde etkilendiklerini belirtmişlerdir.

Matematiği olmasını tasavvur ettiğimiz kendi kalıtsal önyargılarımız olarak değil de, gerçek deneyimlerimizin bize söylediği gibi tanımlamayı denemeliyiz. Tabiî ki deneyimlerimiz, matematiğin ne sembollerle oynanan bir oyun (biçimcilik) ne de ideal nesnelerin doğrudan algılanışı (platon idealizmi) olduğunu söylemektedir.

'Matematik nedir?' sorusuna, hiç uzatmadan verilebilecek olağan cevap ne olurdu?

Bu cevap, matematik, düşüncelerle (idea) ilgilenir olacaktır. Kalem işaretleri veya tebeşir izleri değil, fiziksel üçgenler veya fiziksel kümeler değil, lâkin (fizikî nesnelerle temsil edilebilen veya sunulabilen) düşünceler. Herkesin günlük deneyimlerinden bildiği matematiksel bilginin veya matematiksel faaliyetlerin temel özellikleri nelerdir?

1. Matematiksel nesneler insanlar tarafından var edilmiş veya icat edilmiştir.

2. Bunlar keyfî değil, hâlihazırda varolan matematiksel nesnelerle yapılan faaliyetlerden ayrıca bilimin ve günlük yaşamın ihtiyaçlarından doğmuştur.

3. Matematiksel nesneler bir kez var olmalarından itibaren, bizim keşfetmekte büyük zorlukla karşılaşabileceğimiz, lâkin, bizim onlar hakkındaki bilgimizden bağımsız olarak bulunan iyi-belirlenmiş özelliklere sahip olmaktadırlar. (Sözgelimi, belli bir sınır-değer probleminin çözümü olarak bir fonksiyon tanımlayayım. Daha sonra, bu fonksiyonun değeri, bir kısım iç noktalarda, benim o değerleri bulacak etkili bir yöntemimin olmamasına rağmen belirlenmiş olmaktadır.)

Bu üç nokta, tespit edilmesi gereken felsefî tezler değildir. Bunlar, anlaşılması gereken deneyim olgularıdır. Yapılması gereken, bunların paradokslarını incelemek ve felsefî sonuçlarını irdelemektir.

Matematiksel nesnelerin insan tarafından var edildiği veya icat edildiğini söylemek onları taşlar, x-ışınları veya dinozorlar gibi tabiî nesnelerden ayırmaktır.

Yakın zamanlarda, bazı filozoflar (Körner, Putnam) pür matematiğin konusunun fiziksel dünya olduğunun –bilfiil değil de, olanaklar olarak– bir münakaşasını yapmışlardı. Matematikte var olmak demek, fiziksel dünyada *potansiyel* olarak var olmaktır diye öneriyorlardı. Bu görüş matematiksel ifadelerin anlamlı olduğunu, doğru veya yanlış olabileceğini söyleyebilme hakkını kendinde görür. Lâ-

kin, şu kusuru var ki, açık olanı anlaşılması güç olanla açıklamaya çalışır. $2^c < 2^{(2^c)}$ ya da homolojik cebirdeki herhangi bir teoremi göz önüne alalım. Henüz hiçbir filozof bu tip teoremlerin hangi açıdan fiziksel "olanaklara" karşılık gelmesi gerektiğini açıklayamamıştır.

Çalışan matematikçilerdeki yaygın kanıya göre, cebirin veya küme kuramının nesneleri sadece -bir kuramın- parçasıdır. Bunlar, beşerin yakın zamandaki buluşlarıdır. Bunlar, Platoncu düşünceler veya fiziksel dünyada saklı "olanaklar" gibi ebedî veya ezelî değildirler.

Kendi oluşturduğumuz bu nesnelerin nasıl olup da çoğu zaman doğanın veçhelerini tanımlamada işe yaradığını sorabiliriz. Bunu bilhassa ayrıntılı olarak cevaplamak önemli ve karmaşıktır. Bu, matematik tarihi veya Piaget ve kendi ekolünün çalışmalarından kaynaklandığı söylenebilecek matematiksel bilişin psikolojisi için önemli konulardır. Bununla beraber, genel itibariyle, cevap kolay ve açıktır. Beşerî varlıklar dünyada yaşamaktadırlar ve onların bütün düşünceleri nihaî olarak yaşadıkları bu dünyadan kaynaklanır -sırasıyla kendi kültür ve tarihlerinin içinden yansımışlardır, ki tabi bunların nihaî kökü kişinin biyolojik doğası ve kendi fiziki çevresinde yatar. Matematiksel düşüncelerimiz, ciğerlerimizin gezegenin atmosferine uyumuyla aynı sebepten bu dünya ile uyuşmaktadır.[6]

Bir kere oluşturulduktan ve iletişim kurulduktan sonra matematiksel nesneler artık *oradadır*. Kaynağından bağımsız, insan kültürünün bir parçası hâline gelirler. Böyle olmakla, şimdi bizim keşfedebileceğimiz veya edemeyeceğimiz, kendilerine has iyi-belirlenmiş özelliklere sahip olmaları bağlamında nesneler olmuşlardır.

Bu görüşler paradoksal görünüyorsa, bunun sebebi dünyada sadece iki tür gerçekliği gören düşünce alışkanlığımızdır: Bir tarafta (yalıtılmış ego) bireysel özne, diğer tarafta doğanın dış dünyası.

Matematiğin varoluşu, bu tür bir görüşün yetersizliğini göstermek için yeterlidir. Toplumumuzun gelenek, görenek ve kurumları

–maddî olmayan kültürümüzün tümü– dünyanın, ne özel "iç" ne de beşer-dışı "dış" dünyada bulunan veçheleridir.[7] Matematik bununla birlikte, bir bütün olarak toplum açısından "içeride" ancak toplumun elemanı her bir bireyin bakış açısından "dışarıda" olan, üçüncü tür bir gerçekliktir.

Matematiksel nesnelerin iyi belirlenmiş özelliklerinin olması, matematiksel problemlerin çoğunlukla iyi-belirlenmiş cevaplarının olması olgusu kadar tanıdıktır.

Bunun nasıl olduğunun kapsamlı bir açıklaması, tahmin işi değil, gerçek bir araştırmanın konusudur. Bununla beraber, matematikle uğraşan ve onu öğreten herhangi biri için, kaba hatları görünür vaziyettedir.

Sayma fikrine sahip olabilmesi için kişinin madenî para, kutular veya çakıl taşları ile uğraşmış olma deneyimine ihtiyacı vardır. Açı fikrine sahip olabilmek için, kişinin kağıt üzerinde veya kumda, kesişen doğrular çizme deneyimine ihtiyacı vardır. Daha sonra fikrî taslaklar veya hesap numuneleri, başka yeni kavramların oluşmasına zemin hazırlayacaktır.[8] Faaliyetlerin müşterek tecrübelerinden uygun olanı –ilkin fiziksel uyarlama daha sonra kağıt kalem hesabı– yaygın bir etki yapar.

Tabiî ki, herkes arzulanan sonucu tecrübe edememektedir. Cebirsel ifadelerdeki parantezlerle hiçbir zaman istediğimiz biçimde başa çıkamayan bir öğrenci, basitçe dersten geçemeyecektir.

Cebir hakkında birbirimizle konuşabilmemiz nedendir? *Bu amaç için geliştirilmiş bir eğitimle, böyle yapabilmek için eğitildik.* Bunu polinomların formel tanımını sözlü ifade *edemesek* de yapabiliriz. Biz bilsek de bilmesek de belli özelliklere sahip olması bakımından polinomlar nesneldir. Yani ortak kavramımız, örtük özelliklere sahiptir. Bunun nasıl böyle olduğunu çözmek, dilbiliminin problemleriyle karşılaştırılabilecek derecede derin bir sorundur. Dillerin o dili konuşanlarca bilinmeyen gizemli, karmaşık özelliklere sahip olmasını

kimse bütünüyle anlayamamaktadır. Buna rağmen bu özelliklerin mahâllinin, ne dış dünyada ne de diğer ideal dünyada olmadığı, fakat dili konuşanın kültürü içinde olduğundan kimse şüphe duymamaktadır. Matematiksel nesnelerin özellikleri de müşterek düşüncelerin özellikleridir.

Matematiğin gözlemlenebilir gerçeği olarak, çeşitli muhakemeler ve argümanlarla pekiştirilmiş nesnel özelliklere sahip gelişen müşterek fikirlerin gelişen ağını görürüz. "İspat" denilen bu tür gerçekli çıkarımlar evrensel değildir; matematiğin bir dalından diğerine ve tarihî çağların birinden diğerine göre değişmektedir.

İnsan deneyimlerinin bu olgusuna bakarak, şüphesiz, izahı gereken konular vardır.

Matematiksel nesneler nasıl icat edilir?

Varolan matematik, düşünce ve ihtiyaçlar ile diğer bilim dalları ve fizikî gerçekliğin doğrudan yansımasının birbiriyle etkileşimi nasıldır?

İspat kavramı yeni tehlikeler ve hata kaynakları keşfedildikçe daha zarif ve mahir hâle gelip nasıl gelişiyor?[9]

Müşterek bilincimizin bir parçası olarak matematiksel düşünce ve çıkarımlar şebekesi, çıkarımdaki herhangi bir bağlantının kuvvetinden daha etkili, bir bütün olarak birlikteliğe sahip midir; öyle ki, herhangi bir parçasının çökmesi sadece ona çok yakın kısımları etkileyebilir?

Bu tür felsefî sorular matematik tarihçileri tarafından araştırılabilir -müsaade edersek, ki etmeliyiz, çalışma alanı dünü ve bugünü kapsayacak şekilde genişletilmelidir. Thomas Kuhn'un ünlü çalışması, bilim felsefesinde bir çeşit anlayış paradigmasıdır; ki sadece tarihî çalışmalar temelinde mümkündür. Böyle çalışmalar matematik tarihi ve felsefesinde hâlâ yapılmayı beklemektedir.[10]

Bu tip çalışmalar matematiksel doğruları asla şüphesiz kılamaz. Hem neden matematiksel doğrular şüphesiz olmak zorunda ki?

Günlük hayatta gayet iyi biliyoruz ki, bilgimiz düzeltilmeye muhtaç, kısmî ve eksiktir. Doğa bilimlerinde, bilimsel sürecin; genişlemeyi, düzeltilmeyi ve bazen geçmişin bilgisinin değiştirilmesini ve hatta reddini içerdiği kabul edilmiştir. Bu bilimsel bilgiyi karakterize eden, tecrübeyle karşı karşıya kalarak hataları düzeltme olasılığıdır. Bu, tam anlamıyla, fikirlerimizi paylaşmamızın ve birbirimizin çalışmalarını kontrol etmemizin neden önemli olduğunun cevabıdır.

Matematiğin bu beyanı, yeni hiçbir şey içermemektedir. Bu yalnızca hâlihazırda matematikçilerin ne yaptığı ve yüzyıllardır ne yaptıklarını betimleme girişimidir.

Varsa eğer bir yenilik; tahrifat veya idealleştirmeyi önlemedeki bilinçli girişimdedir.

ÖZET VE SONUÇ

Platonculuk ve biçimciliğin alternatifi, matematiği gayriinsanî bir gerçeklikte kökleştirme çabasından doğar. Matematiği sarsılmaz doğruluğun kaynağı olarak tespit etme zorunluluğunu terk edersek, matematiğin doğasını, insanın zihinsel etkinliğinin belli bir türü olarak kabul edebiliriz.

Bunu yaparak, yıllanmış bazı umutları terk edip, ne yaptığımız ve niçin yaptığımız hakkında daha berrak bir fikir sahibi olabiliriz.

> Matematikte de yeni bir Bilince ihtiyaç duyuyor olmayalım? ... Matematiksel bilginin mübadelesini, iletişimini ve devrenmişliğini vurgulayan yeni bir bilinç; matematiğin sadece tanıtıldıktan sonra anlaşılabilen bir semboller kütlesinden ziyade, insan kelimeleriyle ifade edildiği bir Bilinç; alâkasız görünen çok sayıdaki vazifeyi aynı anda gayretle işleyen nerdeyse tam otomatik mantık robotundan ziyade, matematiğin aydınlatıcı bir zihnî faaliyet olarak tecrübe edildiği bir Bilinç. (P. Henrici, *Quart. Appl. Math.* (Nisan 1972), 38.)

Beşerî varlıklar tarafından oluşturulmuş, müşterek bilinçlerinde varolan bir düşünce dünyası vardır. Bu düşüncelerin, özdek nesne-

lerin kendi özeliklerine sahip olmalarıyla aynı anlamda, nesnel olarak kendilerine ait olan özelikleri mevcuttur. Karşıt-örnek ve ispatın kuruluşu, bu düşüncelerin özeliklerinin keşfediliş yöntemidir. İşte bu, bilginin matematik dediğimiz dalıdır.

BİBLİYOGRAFYA ÜZERİNE YORUMLAR

Bu makale, Lakatos'un [17]'sinin ilk birkaç sayfasında yer alan, biçimcilik eleştirisinden oldukça etkilenmiştir ve [15]'teki "modern matematiksel felsefenin, genel epistemolojinin derinlerinde gömülü olduğunu ve sadece bu bağlamda anlaşılabileceğini göstermek" şeklindeki amacını kabul etmiştir.

Burada sezgicilik ve inşacılıktan doğan konuların ayrıntılı olarak tartışılması için bir girişimde bulunulmamıştır. Bunlar, Bishop, Stolzenberg ve Kopell tarafından bir bilimsel toplantıda sunulmuş ve *Historia Mathematica* 2'de (Kasım 1975) yayınlanmıştır. Bu bilimsel toplantıda "klâsik" bakış açısının konuşmacıları, Bishop tarafından ortaya atılan felsefi mevzulara değinmekte oldukça isteksizdirler. Sezgiciliğin, klâsik bakış açısından bir değerlendirmesi bir fizikçi tarafından hayli titizlikle yapılmıştır; bakınız Bunge [3].

"Platoncu" bir bakış açısı Steiner [25] tarafından benimsenmiştir; biçimci bakış açısı ise Dieudonné [8] tarafından. Monk [18], Cohen [4] ve Robinson [22]; Cohen'in süreklilik hipotezi hakkındaki sonuçları ve tercih aksiyomları ışığında Platoncu-biçimci ikiliğini tartışır. Putnam'ın realizmin "kipler-mantığı" uyarlaması son kitabında sunulmuştur [21].

NOTLAR

1. Bakınız, meselâ [8].
2. Bu konular Thom [26,27] ve Dieudonné [10] tarafından geliştirilmiştir.
3. İki saf-kan Platoncudan biri R. Thom, ("Her şey göz önüne alındığında, matematikçiler, en derin kanaatlerine sahip çıkma cesaretine sahip olmalı ve matematiksel biçimlerin onları inceleyen akıldan gerçekten bağımsız olduğunu kabul etmelidirler. ... Ancak, ne zaman olursa olsun, matematikçilerin bu düşünceler dünyası hakkındaki görüşleri eksik ve parçalı olacaktır." [26].) öteki ise K. Gödel'dir ("Yine de duyu tecrübelerimizden uzaklıklarına rağmen, aksiyomların kendilerini bize doğru gibi kabul ettirmeleri olgusunda görüldüğü üzere, küme kuramının nesnelerinin bir algısına benzeyen bir şeye de sahibiz. Bu tür bir algıya, yani matematiksel sezgiye ... duyu algısından daha az güvenmemiz için bir sebep göremiyorum. ... Bunlar da nesnel gerçekliğin bir veçhini gösterebilirler." [11]). Thom'un düşünce dünyası geometriktir; hâlbuki Gödel'inki küme-kuramcı evrendir.
4. "Gerçek sonsuzlar dünyasının, kendinden önce varlığı kapladığı ve anlaşılmazı anlayabileceğine inanan, gerçek bir Platoncunun akidesine tekrar dönebileceğimi asla hayal edemiyorum." (Robinson [22])
5. Herbrand'ın tezinin uzun yıllar boyunca çoğu mantıkçıya, fiziksel olarak ulaşamadığı bilgisi için Rohit Parikh'e minnettarım. Muhtemelen onun hataları normal şartlarda çok daha önce düzeltilebilirdi.
6. "Kedilerin, tam da gözlerinin bulunduğu yerlerde kürklerinin delikli olmasını hayretle karşılayan kimselerle karşılaştım." (Göttingen'de bir 18. yüzyıl fizik profesörü olan Linctenberg'ten yapılan alıntı için Wilhelm Magnus'a teşekkürü bir borç bilirim.)
7. Benzer düşünceler Popper [20] ve özellikle White [28] tarafından savunulmuştur. Bunlar, kültürel bir fenomen olarak matematik üzerine tanınmış yazıları ile R.L. Wilder'de örtüktür. Bunlar başka bir bağlamda, ayrıca, George Polya'nın 'heuristik'* üzerine yazılarında ve bunların Imre Lakatos tarafından özenle yapılmış felsefî çalışmalarında örtüktür.
8. Piaget'nin [19] çalışmaları, uzman matematikçiler tarafından -belki de Piaget'nin, gruplar ve diğer soyut matematiksel yapılar üzerine yorumları biraz nahif veya yanlış bilgilendirildiğine işaret ettiğinden- pek okunmamıştır. Buna

---

* Kesin olmayan, fakat izlendiğinde doğru sonuca ulaştırması muhtemel olan kurallar veya prensiplere genellikle 'heuristik (heuristic)' denir. Bilindiği üzere matematikçi Polya, 1-Problemi anlama, 2-Çözüm için plân geliştirme, 3-Planı uygulama, 4-Geri dönüp basamakları kontrol etme türü, dört basamaklı, matematiksel problemlerin çözümü için öğrencilere yardımcı olabilecek bir 'heuristic' önermiştir. Ç.N.

rağmen, kimse onun asıl görüşünün önemini göz ardı edemez: Matematiksel sezgi, doğanın pasif gözlemlerinden ziyade, nesneler ve sembollerin faal olarak maniplesiyle kazanılan tecrübeyle edinilir. Matematiksel epistemolojinin bu yönü, hâlâ gerçek değerinin anlaşılmasını beklemektedir.

9. "Tarihsel bağlamda, matematiğin çelişkiden beri olduğunu söylemek tabiî ki doğru değildir; gayri-çelişkilik, önceden lütfedilmiş Tanrı vergisi bir nitelik değil, ulaşılması gereken bir amaç olarak karşınıza çıkmaktadır. ... İster çaylak ister usta olsun, matematikçinin mesleğinde; günlük çalışma hayatında karşılaşılan ve aşağı yukarı kolaylıkla keşfedilen hatalar ile, mantıksal düşünceye on yıllarca hatta bazen yüz yıllarca besin sağlayan büyük çelişkiler arasında çizilebilecek keskin bir çizgi yoktur." (N. Bourbaki, "Foundations of Mathematics for the Working Mathematician," *J. Symbolic Logic* 14 (1949), 1-8.)
10. "Biçimciliğin kurduğu egemenliğe karşı, insanın Kant'ın tespitini yeniden söyleyesi gelir; Felsefenin yol göstericiliğinden yoksun matematik tarihi *körleşmekten*, matematik tarihindeki enteresan gelişmelere sırt çeviren matematik felsefesi de koflaşmaktan kurtulamaz." (Lakatos [17]). Ancak, matematik tarihinde yakın zamanda yapılan çalışmalarda felsefî konulara olan ilginin artığı görülmektedir. Örneğin *Historia Mathematica* 2 (Kasım 1975) deki histografi hakkındaki makalelere bakınız.

TEŞEKKÜR

Burada tartışılan konular hakkında eleştirel konuşmaları ve mektuplarından dolayı birçok arkadaşıma minnettarım: Jose-Luis Abreu, Gus Blaisdell, Mario Bunge, Chandler Davis, Martin Davis, Philip Davis, Harold Edwards, Fritz John, Joe Keller, Morris Kline, Peter Lax, Wilhelm Magnus, Robert Osserman, George Polya, Gian-Carlo Rota, Joel Smoller, Gabriel Stolzenberg ve Raymon Wilder. Buradaki fikirlerin bazıları ilk olarak Phyllis Hersh ile yaptığımız konuşmalarda şekillenmiştir. Ayrıca Joe Schatz'a yayınlanmamış makalesi için dahası George Polya, Imre Lakatos ve L.A. White'a yayınlanmış çalışmaları için teşekkürlerimi ifade etmek isterim.

Burada ifade edilene benzer bir bakış açısı da yakın zamanda üç bilgisayar bilimcisi; R.A. Demillo, R.J. Lipton ve A.J. Persil, tarafından "Teorem ve Programların Sosyal Süreç ve İspatları" adlı çok ilginç çalışmalarında ortaya konmuştur. (SIGPLAN Konferansı, Programlama Dilleri Prensipleri; Mayıs 1977, Los Angeles, Proceedings, 206-214.)

BİBLİYOGRAFYA

[1] P. Benacerraf ve H. Putnam (Ed.), *Philosophy of Mathematic; Selected Readings*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.

[2] E. Bishop, *Aspects of Constructivism*, New Mexico State University, Las Cruces, 1972.

[3] M. Bunge, *Intuition and Science*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.

[4] P. J. Cohen, "Comments on the foundations of set theory", *Axiomatic Set Theory* içinde (D. Scott, Ed.), 9-15, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971.

[5] C. Davis, "Materialist Mathematics", *Boston Studies in Philosophy of Science*, Vol. XV, D. Reidel, Boston, 1974.

[6] P. J. Davis, "Fidelity in mathematical discourse", *Amer. Math. Monthly* 79 (1972), 252-262.

[7] P. J. Davis, "Visual geometry, computer graphics, and theorems of perceived type", *Influence of Computing on Mathematical Research and Education*, içinde Proc. Symp. Appl. Math., Vol. 20, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1974.

[8] J. Dieudonné, "Modern axiomatic methods and the foundations of mathematics", *Great Currents of Mathematical Thought*, içinde Vol. II, 251-266, Dover, New York, 1971.

[9] J. Dieudonné, "The work of Nicholas Bourbaki", *Amer. Math. Monthly* 77 (1970), 134-145.

[10] J.A. Dieudonné, "Should we teach modern mathematics?" *Amer. Sci.* 61 (1973), 16-19. 1971.

[11] K. Gödel, "What is Cantor's continuum problem?" *Philosophy of Mathematics, Selected Readings* içinde (P. Benacerraf, H. Putnam, Ed.), 258-273, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.

[12] D. Hilbert, "On the Infinite", *Philosophy of Mathematics, Selected Readings* içinde (P. Benacerraf, H. Putnam, Ed.), 258-273, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.

[13] *Historia Mathematica* 2 (1975), 425-624.

[14] S. Korner, "On the relevance of post-Gödelian mathematics to philosophy", *Problems in the Philosophy of Mathematics* içinde (Lakatos, Ed.), 118-133, North-Holland, Amsterdam, 1967.

[15] I. Lakatos, "Infinite Regress and the Foundations of Mathematics", *Aristotelian Society Supplementary*, Volume 36, 155-184, 1962.

[16] I. Lakatos, "A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?" *Problems in the Philosophy of Mathematics* içinde (Lakatos, Ed.), 199-203, North-Holland, Amsterdam, 1967.
[17] I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge Univ. Press, London/New York, 1976.
[18] J. D. Monk, "On the foundations of set theory", *Amer. Math. Monthly* 77 (1970), 703-711.
[19] J. Piaget, *Genetic Epistemology*, Columbia Univ. Press, New York, 1970.
[20] K. R. Popper, *Objective Knowledge*, Oxford Univ. Press, London/New York, 1972.
[21] H. Putnam, *Mathematics, Matter and Method*, Cambridge Univ. Press, London/New York, 1975.
[22] A. Robinson, "From a formalist's points of view", *Dialectica* 23 (1969), 45-49.
[23] A. Robinson, "Formalism 64", *Proceedings, International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, 1964*, 228-246.
[24] J.A. Schatz, *The Nature of Truth*, yayınlanmamış çalışma.
[25] Mark Steiner, *Mathematical Knowledge*, Cornell Univ. Press, Ithaca, N.Y., 1975.
[26] R. Thom, "Modern mathematics: An educational and philosophical error?", *Amer. Sci.* 59 (1971), 695-699.
[27] R. Thom, "Modern mathematics: Does it exist?" *Developments in Mathematical Education* içinde (A.G. Howson, Ed.), 194-209, Cambridge Univ. Press, London/New York, 1973.
[28] L.A. White, "The locus of mathematical reality", *Philos. Sci.* 14 (1947), 289-303. Reprinted in "The World of Mathematics," Vol. 4, 2348-2364, Simon and Schuster, New York, 1956.

ŞAHIS DİZİNİ

-A-

Aandreaa, 414
Abreu, 428
Ackermann, 160, 192
Aczel, 28, 37, 69
Alander, 414, 415
Anderson C., 63, 356
Anderson J., 356
Andrews, 414
Aristo, 29, 30, 34, 35, 46, 95, 96, 97, 99, 109, 120, 133, 135, 138, 146, 152, 429
Arşimet, 174
Aspray, 27, 39, 53, 57, 58, 59, 61, 62, 63, 65, 70
Ayer, 61, 197
Azzouni, 64

-B-

Bacon, 419
Balaguer, 64
Balzano, 18
Barker, 8, 11, 28, 32, 37, 38, 39, 65
Barrow, 19, 20, 31, 41, 42, 43, 45, 46, 65
Bealer, 294
Bell, 22, 30, 65
Benacerraf, 9, 25, 43, 55, 56, 63, 65, 66, 103, 116, 117, 175, 217, 239, 241, 253, 259, 293, 300, 301, 307, 308, 309, 312, 313, 314, 317, 318, 321, 322, 326, 353, 354, 355, 426, 247
Berkeley, 29, 30, 32, 33
Bernal, 19
Bernays, 9, 25, 48, 59, 65, 103, 116, 140, 159, 175, 226, 227, 233, 236
Berry, 364
Betrami, 31,
Bishop, 44, 423, 426
Blaisdell, 425
Bloor, 59
Blumenthal, 231
Boltzman, 382, 383

Bolyai, 103, 116, 164, 184
Boole, 367
Borel, 157, 165, 221
Bourbaki, 48, 49, 401, 424, 427
Bunn, 294
Braun, 231
Brouwer, 9,37, 39, 44, 149, 151, 152, 153, 154, 155, 159, 163, 169, 180, 181, 182, 183, 184, 186, 222, 400, 408
Brown, 18, 23, 24, 25, 44, 50, 54, 65, 82, 83
Bunge, 423, 425, 426
Burali, 34, 369
Burgess, 55, 320

-C-

Calude, 359
Cantor, 26, 33, 34, 35, 36, 39, 43, 44, 46, 47, 102, 104, 107, 118, 119, 120, 121, 123, 124, 125, 126, 127, 133, 139, 141, 146, 147, 148, 149, 153, 154, 155, 156, 159, 164, 178, 217, 218, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 229, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 255, 293, 322, 361, 362, 363, 364, 365, 376, 410, 427
Cauchy, 58, 409, 410
Cayley, 156, 164
Chaitin, 10, 25, 359, 394
Chateaubriand, 354
Chihara, 53, 54, 63, 292, 302, 321, 355
Church, 18, 43, 45
Coffa, 63
Cohen, 39, 45, 47, 66, 236, 246, 401, 423,
Corcoran, 336, 337, 356, 357
Courant, 346, 356
Couturat, 164
Coxeter, 33
Craig, 269
Curry, 43, 47, 51

-D-

Davis C., 22, 23, 428, 429
Davis M., 428, 429
Davis P., 428, 429
Dedekind, 36, 37, 39, 125, 127, 129, 142, 152, 127, 164, 176, 188, 355, 407
Demillo, 428
Descartes, 7, 11, 14, 18, 19, 30, 31, 35, 406
Dicke, 297
Diderot, 31
Dieudonné, 401, 425, 426, 429
Diophantine, 228, 282
Dreben, 414
Dummett, 26, 47, 63, 64, 299, 323

-E-

Eddington, 391
Edrei, 415

Edwards, 428
Ellis, 311, 321
Erdös, 67, 70
Ernest, 15, 17, 18, 41, 32, 42, 44, 46, 48, 52, 53, 61, 62, 63, 70
Erreta, 234,
Euler, 31, 45, 62

-F-

Fermat157, 391, 392, 393
Fetzer, 356
Feynman, 54
Field, 10, 55, 57, 58, 70, 64, 262, 265, 350, 351, 357
Fleener, 356
Forti, 36, 364, 365
Fraenkel, 219, 225, 227, 269, 318, 412
Frege, 7, 19, 37, 59, 61, 64, 65, 79, 82, 105, 125, 127, 129, 142, 188, 240, 307, 308, 314, 315, 316, 317, 318, 320, 323, 324, 355, 357, 367, 400, 407

-G-

Galileo, 22, 55
Garciadiego, 365,
Gasking, 10, 195
Gentzen, 192, 193
Gödel, 10, 19, 24, 30, 41, 45, 48, 49, 50, 51, 53, 63, 64, 188, 193, 217, 225, 233, 256, 257, 258, 281, 284, 296, 300, 302, 303, 323, 324, 361, 366, 372, 373, 374, 375, 376, 378, 379, 380, 381, 387, 390, 391, 392, 395, 400, 409, 426, 429
Goldbach, 45, 237
Goldman, 263
Goodman, 356
Gottlieb, 57, 58
Grandy,356
Greenberg, 33, 70
Gür, 10, 11, 13, 57, 163, 175, 195, 217, 359, 399

-H-

Hahn, 164
Hajnal, 233
Hale, 63, 64
Hardy, 24, 54, 70
Harman, 253, 330, 356
Harrington, 45
Hausdorff, 220, 221
Heisenberg, 382
Hellerstein, 414,
Hellman, 45, 64
Hempel, 15, 70
Henrici, 424
Herbrand, 414, 415, 426
Hersh, 399, 428
Hilbert, 19, 24, 30, 37, 39, 43, 44, 47, 48, 49, 53, 58, 63, 70, 117, 136, 142, 143, 154, 164, 166, 174, 176, 182, 191, 192, 230, 232, 241, 243, 244, 251,

259, 299, 360, 361, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 376, 379, 380, 388, 395, 400, 401, 408, 409, 429
Hillel, 319, 356
Hobbes, 14, 35
Hoffman, 67, 70
Hume, 32, 34, 35
Hurewicz, 232
Husserl, 8, 19, 26

-İ-, -J-

İbn Haldun, 14
İbn Heysem, 29
Irvine, 64, 70
John, 44, 50, 60, 69, 71, 204, 323, 336, 356, 375, 381, 419, 428
Joseph, 20, 70
Jubien, 300, 323, 326, 327, 357

-K-

Kant, 19, 27, 30, 31, 32, 33, 34, 39, 56, 61, 114, 116, 129, 142, 153, 184, 236, 427
Kayan, 10, 143, 163
Keller, 310, 428
Kiraz, 10
Kitcher, 10, 27, 34, 39, 43, 53, 57, 58, 59, 61, 62, 65, 68, 69, 70, 296, 300, 323, 357
Klein, 33, 164
Kolmogorov, 187
König, 221, 224, 238
Kopell, 425
Körner, 16, 17, 27, 29, 70, 420
Kreisel, 63, 302, 324
Kripke, 202, 240
Kronecker, 134, 156, 159, 160, 181, 182, 187
Kuhn, 62, 423
Kummer, 134, 152
Kuratowski, 221, 233, 234
Kuyk, 7

-L-

Lacey, 32, 70
Laguerre, 414,
Lakatos, 425
Lasserre, 21
Lax, 418
Lear, 324
Lebesgue, 19
Leibniz, 8
Levi-Cività, 164
Lewis, 197,
Lipton, 428
Lobachevsky, 164
Locke, 34, 35
Lonergin, 19
Lucas, 49
Lukasiewicz, 46
Lusin, 231
Maddy, 10

-M-

Magnus, 426, 428
Mahlo, 227
Malement, 296
Mandelbrot, 25
McGee, 356
McGinn, 324
Mendleson, 324
Menger, 232
Mill, 416
Minkowski, 33
Monastyrsky, 55, 70
Monk, 425, 430

-N-

Nagel, 55
Napolyon, 96, 99
Newman, 373, 378, 380
Newton, 14, 15, 31, 406
Noel, 294

-O-,-Ö-

Olivier, 315
Oppenheimer, 20, 21
Osserman, 164
Öklit, 22, 28, 29, 32, 33, 35, 36, 41, 74
Özlük, 10, 73, 105,
Özoğlu, 10, 299

-P-

Parikh, 426
Paris, 37, 45, 232
Parsons, 65, 327, 357
Pascal, 18
Paun, 359
Peano, 45, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 105, 164, 192, 232, 234, 245, 306, 307
Peary, 294
Peirce, 22
Penrose, 25, 49, 70
Persil, 428
Piaget, 321, 324, 421, 426
Pisagor, 24, 27, 28, 31, 35, 54, 65, 77
Platon, 9, 19, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 31, 35, 50, 52, 53, 55, 57, 64, 66, 67, 68, 69, 94, 95, 109, 11, 176, 177, 179, 180, 183, 187, 188, 189, 190, 191, 203, 255, 259, 243, 245, 249, 258, 269, 296, 323, 356, 410, 411, 412, 418, 419, 424, 425, 426
Poincaré, 62, 71, 156, 160, 165, 176, 179, 223, 409
Polanyi, 404, 419
Polya, 405, 414, 415, 426, 428
Popper, 62, 430
Post, 46, 419
Priest, 16, 17

-R-

Resnik, 10, 60, 68, 71, 265, 302, 324, 325, 357
Richard, 54, 229, 356
Riemann, 164, 302, 356, 392, 393
Robbins, 344
Robinson, 83, 84, 229, 269, 425, 426, 430
Rolle, 51, 190, 208, 269, 309, 339,
Rosen, 58, 70, 356
Rosenberg, 356Rucker, 49, 71
Russell, 8, 9, 15, 19, 29, 32, 35, 36, 38, 40, 41, 42, 44, 49, 51, 54, 63, 73, 75, 94, 105, 127, 155, 156, 161, 164, 180, 181, 188, 191, 264, 323, 364, 365, 366, 378, 400, 407, 409
Rveff, 191, 194

-S-

Schmitt, 356
Schrödinger, 227, 352
Scott, 227
Shanker, 63
Shapiro, 20 24,
Shelton, 256
Sierpinski, 221, 231, 232, 233
Sikorski, 233
Skolem, 192, 357
Skyrms, 253, 356
Smoller, 428
Sokrates, 93, 95, 96, 97, 99, 102, 103, 109, 111, 112
Spinoza, 14, 30, 31, 35, 406
Steiner, 65, 255, 302, 305, 309, 324, 326, 327, 356, 357, 425, 430
Stolzenberg, 20, 71, 425, 428
Struik, 20, 71
Swift, 85, 103
Szeminska, 324

-T-,-U-

Tennant, 64
Thales, 20 ,28
Tarski, 19, 46, 222, 227, 245, 247, 249, 250, 251, 261, 262, 265, 300, 325, 349, 350, 351
Thom, 19, 61, 62, 71, 423, 426, 430,
Turing, 51, 360, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 383, 392, 395
Tymoczko, 13, 15, 16, 20, 61, 65, 70, 71, 399
Urysohn, 232

-V-,-W-,-Z-

van Heijenoort, 324
Vico, 32
Vogel, 317

von Neumann, 43, 44, 49, 60, 71, 192, 225, 234, 258, 307, 308, 314, 318, 360, 379, 380, 383, 384, 394, 395, 396
Wagner, 294, 296
Wavre, 194
Weierstrass, 36, 37, 117, 118, 119, 124, 157, 407
Weinberg, 54
Weyl, 48, 181, 189, 223, 409
White, 13, 15, 19, 40, 349, 357, 426, 428, 430
Whitehead, 13, 15, 19, 40, 75, 155, 164, 407
Wigner, 54
Wilder, 426, 428
Wiles, 391, 392, 393
Williamson, 414
Wilson, 335, 338, 352, 356
Winson, 357
Wisdom, 204
Wittgenstein, 8, 17, 18,

"Matematik olmaksızın, felsefenin derinliklerine nüfuz edemeyiz. Felsefe olmaksızın, matematiğin derinliklerine nüfuz edemeyiz. İkisi olmaksızın, herhangi bir şeye nüfuz edemeyiz."
Leibniz

Gözlem ve deneye dayanmadan matematik, felsefî bir soruşturma için biçilmiş bir kaftandır çoğu zaman: Matematik nedir? Matematiksel doğru, mutlak doğru mudur? Niçin ve nasıl? Matematiksel hakikatin doğası nedir? Matematikte de doğa bilimlerindeki gibi devrimler ve krizler var mıdır? Matematik nasıl oluyor da 'gerçek' dünyada işe yarıyor? Niçin onca filozof, yüzyıllar boyunca, matematiği takdir etmiş ve kendi felsefi sistemlerini matematiğe ve onun sunum tarzına benzetmeye çalışmıştır? Spinoza ve Descartes gibi onlarca filozof Tanrının varlığını ispat ederken neden more geometrico [daha fazla geometri] düşüncesiyle hareket etmişlerdir?

kadim yayınları, kısa sürede tükenen Matematik Felsefesi'nin ikinci baskısını sunuyor.
Matematiğe felsefi yaklaşımların ve matematiksel felsefenin örneklerinin bir araya getirildiği antolojide, entelektüel tarihin unutulmuş bir alanına hayat veriliyor.
Cevap aranan sorular ise matematik hakkındaki yargılarımızı gözden geçirmemiz gerektiğinin sinyallerini veriyor: "Genel kanıda yerini bulduğu şekliyle matematik, statik, değişmeyen, mutlak doğru, mutlak gerçek midir?", "Sayı nedir?", "Matematiksiz bilim mümkün mü?", "Matematik neden doğada karşılık bulur?", "Matematiğin sınırları nelerdir?", vesaire.

ISBN 975-9000-04-0

kadim

15 00

felsefe