

# Keyifli Okumalar Dileriz

Binlerce kategoride milyonlarca PDF e-kitap, ders kitapları, dergiler ve romanlara platformumuz üzerinden ücretsiz ulaşabilirsiniz.

## RESMİ WEB SİTEMİZ

<https://rantey.org>

### Yedek ve Duyuru Kanallarımız

Sitemize erişim engeli gelmesi veya adres değişikliği durumunda aşağıdaki kanallardan güncel giriş adresine erişebilirsiniz:

- Telegram: <https://t.me/birkitapbir>
- WhatsApp Kanalımız : <https://whatsapp.com/channel/0029VbDHv8uE50Us4lvMoc0Y>



# İSTATİSTİKSEL ANALİZ

SOSYOLOJİ LİSANS PROGRAMI

**PROF. DR. ENİS SİNİKSARAN**

**DOÇ. DR. L. AYLİN AKTÜKÜN**

**YRD. DOÇ. DR. OYA EKİCİ**

**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ AÇIK VE UZAKTAN EĞİTİM FAKÜLTESİ**

**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ AÇIK VE UZAKTAN EĞİTİM FAKÜLTESİ**

**SOSYOLOJİ LİSANS PROGRAMI**



# **İSTATİSTİKSEL ANALİZ**

**Prof. Dr. Enis Sınıksaran**

**Doç. Dr. L. Aylin Aktükün**

**Yrd. Doç. Dr. Oya Ekici**

## ÖN SÖZ

Günümüz bilim ve teknolojisinin parlak düşüncelerine ve göz kamaştırıcı teknik başarılarına bakıldığında, çok düzenli bir dünyada yaşadığımızı, doğanın her zaman kesin ve değişmez yasalara göre işlediğini düşünebiliriz. Oysa XX. yüzyıl fiziği bunun tersini çoktan kanıtlamış, geçmişe bakıp geleceği kesin olarak bilmenin olanaksızlığını, şansın, rastlantının fizikte bile yer alabileceğini göstermiştir. Gerçekten de her şeyin belirli olduğu ve kontrol altında tutulduğu bir dünyada yaşamıyoruz ve bu durum gelecekte de değişecek gibi görünmüyor. Önümüzdeki hafta sayısal lotoda büyük ikramiyeyi kimin kazanacağını, yarınki borsa genel endeksini, ÖSYM sınavlarında kaç puan alacağımızı, gelecek sezon ligde kimin şampiyon olacağını, seçimlerde hangi partinin ne kadar oy alacağını, bindiğimiz uçağın düşüp düşmeyeceğini, gelecek ayın su faturasını, beş yıl içinde kaç kere grip olacağımızı, evliliğimizin yürüyüp yürümeyeceğini kesin olarak asla bilemeyeceğiz. Ancak kesin olarak bilememek, tamamen belirsiz, gelişigüzel bir dünya anlamına da gelmemelidir. Olasılık ve istatistiğin yasaları belirsizliğin karanlığında önümüzü görmemizi sağlayan birer kılavuz olarak gelişigüzel görünen pek çok olayın arkasında aslında bir düzen bulunduğunu bize gösterebilir. Bu yasaların penceresinden bakıldığında, daha önce çok şaşırdığımız, tuhaf ve açıklanamaz gibi görünen bazı olayların aslında sıradan ve açıklanabilir; daha önce sıradan bulduğumuz ya da farkına bile varmadığımız olayların ise aslında çok ilginç olduklarını keşfedebiliriz.

Bundan önceki derste olasılık ve istatistiğin temellerini öğrenmiştik. Bu derste ise bu temeller üzerinden pek çok farklı uygulama alanında istatistik yöntemlerle sonuç çıkarsama süreçlerini göreceğiz.

Prof. Dr. Enis Sınıksaran

Doç. Dr. L. Aylin Aktükün

Yrd. Doç. Dr. Oya Ekici

# İÇİNDEKİLER

|                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ÖN SÖZ .....                                                                           | i   |
| KISALTMALAR.....                                                                       | 1   |
| YAZAR NOTU.....                                                                        | 2   |
| 1. ÖRNEKLEMENİN TEMEL KAVRAMLARI .....                                                 | 3   |
| 1.1. Kitle ve Parametre.....                                                           | 9   |
| 1.2. Örneklem ve İstatistik.....                                                       | 10  |
| 1.3. Bir İstatistiğin Örneklem Dağılımının Oluşturulması.....                          | 12  |
| 1.4. Örneklem Ortalaması ve Varyansı.....                                              | 12  |
| 1.5. Örneklem Ortalamasının Örneklem Dağılımı .....                                    | 13  |
| 1.6. Örneklem Varyansının Örneklem Dağılımı .....                                      | 23  |
| 1.7. Örneklem Oranının Örneklem Dağılımı .....                                         | 25  |
| 2. ÖRNEKLEME YÖNTEMLERİ.....                                                           | 42  |
| 2.1. Örneklem Yöntemleri.....                                                          | 48  |
| 2.1.1. Basit Rastlantısal Örneklem .....                                               | 49  |
| 2.1.2. Kümeli Örneklem.....                                                            | 50  |
| 2.1.3. Tabakalı Örneklem.....                                                          | 52  |
| 2.1.4. Sistematiik Örneklem.....                                                       | 53  |
| 3. NOKTA VE ARALIK TAHMİNİ KAVRAMLARI, KİTLE ORTALAMASI İÇİN<br>GÜVEN ARALIKLARI ..... | 67  |
| 3.1. Nokta Tahmini .....                                                               | 73  |
| 3.2. Aralık Tahmini.....                                                               | 74  |
| 3.3. Kitle Ortalaması için Güven Aralığı .....                                         | 76  |
| 4. KİTLE VARYANSI VE ORANI İÇİN GÜVEN ARALIKLARI.....                                  | 95  |
| 4.1. Kitle Varyansı için Güven Aralığı .....                                           | 101 |

|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.2. Kitle Oranı için Güven Aralığı .....                                        | 103 |
| 4.3. Örneklem Büyüklüğünün Belirlenmesi .....                                    | 104 |
| 4.4. Bir Tahmincinin Yansızlık ve Etkinlik Özelliği .....                        | 109 |
| 5. HİPOTEZ TESTİ KAVRAMLARI VE KİTLE ORTALAMASINA İLİŞKİN HİPOTEZ TESTLERİ ..... | 126 |
| 5.1. Sıfır Hipotezi ve Alternatif Hipotez.....                                   | 132 |
| 5.2. Karar Kuralı .....                                                          | 133 |
| 5.3. Hipotez Testi Adımları .....                                                | 139 |
| 5.4. Kitle Ortalamasının Testi.....                                              | 139 |
| 6. KİTLE ORANI VE VARYANSI İÇİN HİPOTEZ TESTLERİ .....                           | 157 |
| 6.1. Kitle Varyansının Testi .....                                               | 163 |
| 6.2. Kitle Oranının Testi .....                                                  | 166 |
| 6.3. p-değeri .....                                                              | 169 |
| 7. İKİ KİTLE ORTALAMASININ KARŞILAŞTIRILMASINA İLİŞKİN HİPOTEZ TESTLERİ .....    | 179 |
| 7.1. Kitle Dağılımları Normal - Kitle Varyansları Biliniyor .....                | 185 |
| 7.2 Kitle Dağılımları Normal - Kitle Varyansları Bilinmiyor .....                | 187 |
| 7.3 Diğer Durumlar .....                                                         | 190 |
| 8.1. İki Kitle Varyansının Eşitliğinin Testi.....                                | 206 |
| 8.2. İki Kitle Oranının Farkının Testi .....                                     | 208 |
| 8.3. Güven Aralığı ve Hipotez Testi İlişkisi .....                               | 210 |
| 9. Kİ-KARE BAĞIMSIZLIK TESTLERİ.....                                             | 219 |
| 9.1. Kontenjans Tabloları ve Bağımsızlık Testi.....                              | 225 |
| 10.1. Basit Doğrusal Regresyon.....                                              | 243 |
| 11.1. Doğrusal Regresyon Modeli .....                                            | 266 |
| 11.2 Model Parametreleri için Güven Aralıkları ve Hipotez Testleri.....          | 269 |

|                                                 |     |
|-------------------------------------------------|-----|
| 11.2.1 Güven Aralıkları .....                   | 272 |
| 12.1. Çoklu Regresyon.....                      | 293 |
| 12.2. Bilgisayar Programlarıyla Regresyon ..... | 294 |
| 13.1. Doğrusal Korelasyon .....                 | 310 |
| 13.2. Kısmi Korelasyon .....                    | 313 |
| 14. VARYANS ANALİZİ.....                        | 325 |
| 14.1. Tek Yönlü Varyans Analizi .....           | 331 |
| KAYNAKÇA.....                                   | 348 |

## **KISALTMALAR**

- ANOVA: Varyans Analizi
- E.K.K.Y: En küçük kareler yöntemi



## YAZAR NOTU

Kitapta konular olabildiğince özlü sunulmaya çalışılmış, matematiksel ayrıntılar atlanmıştır. Konuların pekişmesi için dört farklı formatta sorular mevcuttur. Bunlardan **Uygulamalar** başlığında yer alan çözümlü problemlerde, bölüm içinde anlatılan kavram ve nosyonların pekişmesi olanağını bulacaksınız. **Uygulama Soruları** başlığındaki grupta ise **Uygulamalara** benzer ancak bizzat kendinizin de araştıracağı somut verilere ilişkin sorular söz konusudur. **Bölüm soruları** başlığında kendinizi deneme fırsatı bulacağınız çoktan seçmeli onar adet soru bulunmaktadır. **Bölüm hakkında ilgi oluşturan sorular** kısmında ise daha ziyade öğrendiğiniz bilgileri pratik yaşama uygulama olanaklarını düşündürten soruları bulacaksınız.

Kitapta yer alan **Aplet** ismi verdiğimiz interaktif bilgisayar uygulamalarıyla, elle yapılması güç ya da olanaksız süreçleri gerçekleştirebilir, bazı kavramları daha kolay anlayabilirsiniz.

Prof. Dr. Enis Sınıksaran

Doç. Dr. L. Aylin Aktükün

Yrd. Doç. Dr. Oya Ekici

## **1. ÖRNEKLEMENİN TEMEL KAVRAMLARI**

## **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

Bu bölümde örnekleme teorisine ilişkin bazı önemli kavramlar açıklanacak, kavramların tanıtılması üzerine, örnekleme dağılımının oluşturulması aşaması anlatılacaktır. Örneklem istatistiklerinden örneklem ortalaması ve varyansı tanımlanarak, örneklem ortalamasının örnekleme dağılımı, örneklem varyansının örnekleme dağılımı ve örneklem oranının örnekleme dağılımına yer verilecektir.

### **Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular**

- 1) Kitle parametrelerini keşfetmek için neden kitlenin tamamını gözlemlemek yerine örneklem çekmeyi tercih ediyoruz?
- 2) Reyting ölçüm cihazları, çeşitli evlere hangi parametre ya da parametreleri öğrenme amacıyla yerleştirilir? Burada kitle ve örneklem nedir?
- 3) Bir meşrubat şişesinin üzerinde yazan 75 cl neyi ifade etmektedir? Parametre ve istatistik kavramları bağlamında düşününüz.

### Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

| Konu                                                                                                  | Kazanım                                                                                                                                                                                                             | Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Örneklemenin temel kavramlarına ve örneklem istatistiklerinin örnekleme dağılımlarına değinilecektir. | Örneklemede kullanılacak kavramlar ile örnekleme dağılımı oluşturma süreçleri tanıtılacak ve örneklem istatistiklerinin örnekleme dağılımları kavranarak ilgilenilen olasılıkları hesaplama yolları öğrenilecektir. | Metinler, çözümlü problemler, alıştırmalar ve apletler ile konuların daha kolay anlaşılması sağlanacaktır. |

## **Anahtar Kavramlar**

- Kitle
- Parametre
- Örneklem
- Örnekleme
- Örneklem istatistiği
- Örnekleme dağılımı
- Tüm mümkün örneklemeler
- Örneklem ortalaması
- Örneklem varyansı
- Örneklem ortalamasının örneklem dağılımı
- Ortalamanın standart hatası
- Örneklem varyansının örneklem dağılımı
- Örneklem oranının örneklem dağılımı
- Büyük sayılar yasası
- t dağılımı
- $\chi^2$  dağılımı

## Giriş

İstatistiksel bir araştırmanın ham maddesi olarak görülebilecek “veri” bazen çok büyük olabilmektedir. Dolayısıyla ilgilenilen bir topluluğun tamamının gözlenmesinin zor ve hatta olanaksız olduğu durumlarda “örnekleme” ye ihtiyaç duyulur. Bu topluluktan yapılacak bir seçim ile oluşturulacak alt küme, topluluğun tamamı incelenmeden, daha az maliyetle, ona ilişkin fikir sahibi olmayı sağlayabilmektedir.

İstatistiksel sürece dayalı, kurallı bir biçimde gerçekleştirilen örnekleme, sözü edilen topluluğu daha iyi temsil etmeye yardımcı, aynı zamanda analiz aşamasında topluluğun sayılabilir ve ölçülebilir özelliklerini daha iyi yansıtır nitelikte olacaktır. Bu nedenle örneklemede geçen kavramların anlaşılması önemlidir. Kurallı bir biçimde sürecin gerçekleştirilmesinden kasıt ise seçilen alt kümelerden olasılık dağılımlarının oluşturulabileceği ve bilinen olasılık dağılımlarından yararlanarak değerlendirme yapma olanağına kavuşulacağıdır.

### 1.1. Kitle ve Parametre

Belirli bir topluluk ve bu topluluğun sayılabilir ya da ölçülebilir bir özelliği ile ilgilenilsin. Topluluk, yüksek öğrenim gören erkek öğrenciler, ilgilenilen özellik ise öğrencilerin boyları olsun. Bu durumda yüksek öğrenim gören tüm erkek öğrencilerin boyları bir kitle oluşturur. İlgilenilen özellik, öğrencilerin ağırlıkları ise kitle, öğrencilerin ağırlıklardan oluşacaktır. Bir bilgisayar firmasının ürettiği görüntü kartlarının ömürleri ile ilgileniliyorsa bu kez kitle, firmanın ürettiği tüm görüntü kartlarının ömürlerinden oluşur. Örneklerden anlaşılacağı gibi istatistik anlamıyla **kitle**, ilgilenilen topluluğun kendisi (öğrenciler, görüntü kartları vs.) değil, topluluğun birimlerine ilişkin ölçüm ve sayımlardan oluşur.

Bir kitleyi betimlerken ya da özetlerken ortalama, oran, standart sapma ya da varyans gibi sayısal değerlere başvururuz. Örneğin yüksek öğrenim gören öğrencilerin boylarının ortalamasının 174 cm olması ya da boyları 185 cm'den uzun olanların oranının yüzde 10 olması bu kitleyi özetleyen, bilgi veren sayısal ölçülerdir. Kitleyi betimleyen ya da özetleyen bu tür nicelikler **kitle parametresi** ya da kısaca **parametre** olarak adlandırılır.

Genellikle parametreler bilinmeyen sabitler olarak düşünülürler. Rastlantısal olarak seçilecek bir öğrencinin boyunun ya da yine rastlantısal olarak seçilecek bir görüntü kartının ömrünün ne kadar olacağını önceden bilemeyiz. Genel olarak ifade edersek, bir topluluğun ilgilenilen bir özelliğinin topluluktan rastlantısal olarak seçilecek bir biriminde hangi değeri alacağı önceden kontrol edilemeyen, rastlantıya bağlı bir durumdur. Öyleyse ilgilenilen özellik bir rastlantı değişkeni, bu rastlantı değişkeninin olasılık dağılımı da ilgilenilen kitlenin dağılımı olarak düşünülebilir. Bu anlamda kitle, genellikle ilgilenilen topluluğun birimlerine ait somut ölçümlerden değil, daha çok bir olasılık dağılımı ile ilişkili varsayımsal ölçümlerden ya da sayımlardan oluşur.

İlgilenilen özellik (rastlantı değişkeni) sonlu ya da sayılabilir sonsuz değer alıyorsa, diğer bir deyişle kesikli bir rastlantı değişkeni söz konusuysa, kitle **kesikli** bir olasılık dağılımı ile temsil edilir. Örneğin günün belirli bir saatinde bir süper markete gelecek müşterilerin sayıları ile ilgilenilsin. Bu durumda kitle her gün söz konusu saatte süper markete gelecek müşterilerin sayılarından oluşacaktır. Şüphesiz bu sayılar birer rastlantı değişkenidir ve bu tip bir rastlantı değişkeninin genellikle Poisson dağıldığı varsayılır. Bu durumda Poisson dağılan bir kitle ile ilgileniyoruz demektir. Araştırmanın amacı günde ortalama kaç müşterinin geldiğini tahmin etmek ise bu amaç kitlenin ortalama parametresini, diğer bir deyişle Poisson dağılımının ortalamasını simgeleyen  $\lambda$  parametresini tahmin etmek olarak düşünülmelidir.

İlgilenilen özellik sayılamayan sonsuz sayıda değer alabiliyorsa, yani sürekli bir rastlantı değişkeni söz konusuysa kitle dağılımı da **sürekli** bir olasılık fonksiyonu olacaktır. Örneğin boy belirli bir aralıkta teorik olarak her değeri alabilen sürekli bir değişkendir ve genellikle normal dağıldığı varsayılır. Öyleyse yüksek öğrenim gören erkek öğrencilerin



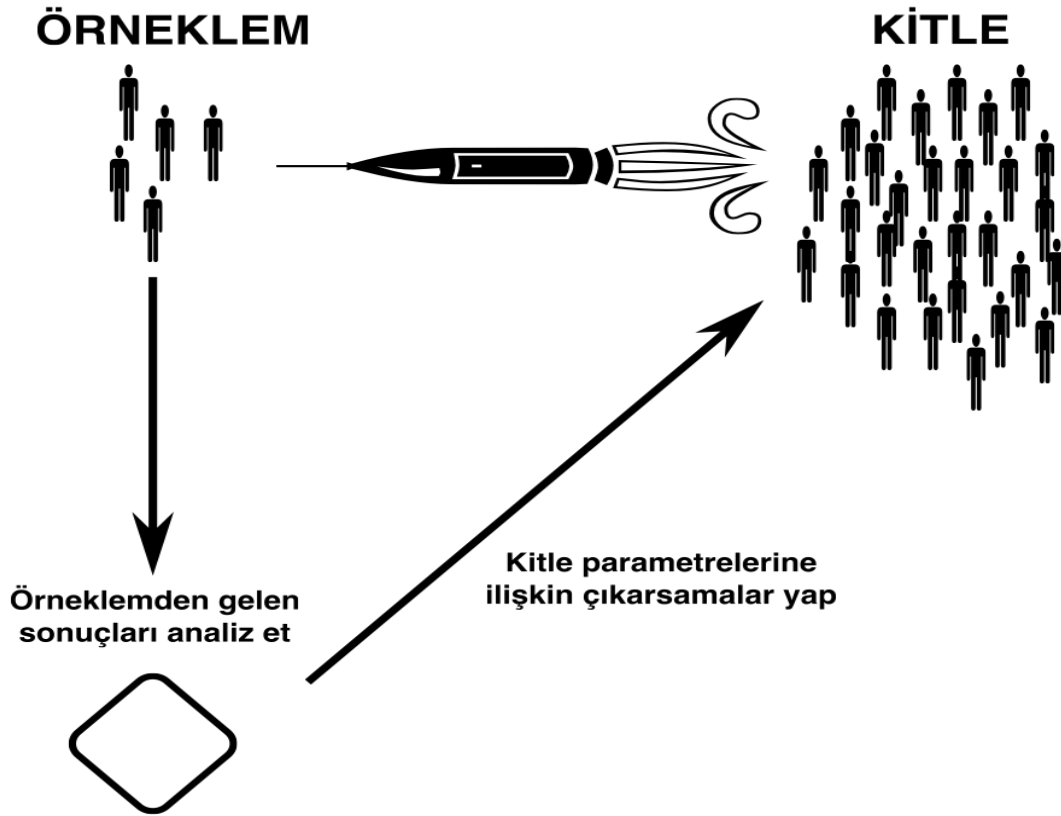
boylarından oluşan kitle bir normal dağılım ile temsil edilebilir. Boyların ortalama ve varyansı, yani kitle parametreleri, normal dağılımın parametreleri  $\mu$  ve  $\sigma^2$  olacaktır.

## 1.2. Örneklem ve İstatistik

Kitlenin tamamının gözlenmesi çok maliyetli, çok zaman alıcı ve genellikle de olanaksızdır. Bu yüzden kitle parametrelerine ilişkin çıkarsamalar yapmak amacıyla, ilgili kitleden çekilecek daha küçük bir alt kümeye başvurulur. Bu alt küme **örneklem** olarak adlandırılır. **Örneklem istatistiği** ya da kısaca **istatistik** ise parametrenin örneklemdeki karşılığı olarak düşünülebilir. Örneğin ortalama ve varyans parametreleri ile ilgileniliyorsa, örneklem ortalama ve varyansı bu parametrelere ilişkin çıkarsamalarda kullanılacak istatistikler olacaktır.

Örneklemin elde edilme sürecine **örnekleme** denir. Seçilecek örneklemin kitleyi iyi yansıtması yapılacak çıkarsamaların güvenilirliği açısından çok önemlidir. Bu anlamda birçok örnekleme tekniği geliştirilmiş olup, bu tekniklerden hangisine başvurulacağı araştırmanın niteliğine bağlı olarak değişir.

Kitleden örneklemini çektikten sonra elde edilen veri olasılık kurallarının sunduğu araçlarla analiz edildikten sonra kitleye, daha doğrusu kitle parametrelerine ilişkin çıkarsamalar yapılır. Aşağıdaki şema, ayrıntılarına daha sonra değineceğimiz bu süreci özetlemektedir:



Örnekleme teknikleri içinde **basit rastlantısal örnekleme**, özellikle teorik açıdan en fazla öneme sahip olanıdır. Bu yöntemin esası, kitleyi oluşturan her bir birime eşit çekilme şansı tanınmasına dayanır. Bu süreçte elde edilecek örneklem ise **rastlantısal örneklem** olarak adlandırılır. Ancak kitle kavramı gibi rastlantısal örneklem kavramını da matematiksel bir kavram olarak düşünmek istatistiksel çıkarsama teorisinin temellerini anlamak açısından önemlidir.

$X$ , kitle dağılımını belirleyen rastlantı değişkeni ise bu kitleden yani  $X$ 'in olasılık dağılımı  $f(x)$  'ten çekilecek  $n$  birimlik bir rastlantısal örneklem  $X_1, X_2, \dots, X_n$  olarak gösterilebilir.  $X_1$  örneklemin birinci elemanını,  $X_2$  ikinci elemanını ve  $X_n$  ise  $n$ . elemanını gösterir. Bu elemanların hangi değeri alacaklarını örneklemini çekmeden önce bilemeyeceğimiz için rastlantısal örneklemini oluşturan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  elemanlarının her biri birer rastlantı değişkeni olarak düşünülür; ayrıca dağılımlarının kitle dağılımı ile aynı olduğu ve de birbirlerinden bağımsız oldukları varsayılır.

Öyleyse örneğin  $\mu$  ortalamalı ve  $\sigma^2$  varyanslı normal dağılan bir kitleden çekilecek 10 birimlik bir rastlantısal örneklem denildiğinde, birbirinden bağımsız, ortalaması  $\mu$ , varyansı  $\sigma^2$  olan ve normal dağılan 10 tane rastlantı değişkeni düşünülmelidir. Örneklem gerçekten çekildikten, ölçümler ya da sayımlar yapıldıktan sonra gerçekleşen değerler ise  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ile gösterilir ve  $X_1, X_2, \dots, X_n$  rastlantı değişkenlerinin birer görüntüsü olarak düşünülürler,  $x_1 = 173$  cm,  $x_2 = 183$  cm gibi.

Daha önce parametrenin örneklemdaki karşılığı olarak tanımladığımız istatistik kavramı ise matematiksel olarak tanımlanırsa, rastlantısal örneklemin parametreden bağımsız bir fonksiyonudur denilebilir. Öyleyse bir örneklem istatistiği genel biçimiyle  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  olarak gösterilebilir.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  bir rastlantı değişkeni olduğuna göre, örneklem istatistikleri de birer rastlantı değişkenidir. Kitle parametrelerine ilişkin yapılan çıkarsamaların önemli bir bölümü örneklem istatistiklerine ve örneklem istatistiklerinin örnekleme dağılımlarına dayandırılır.

Konuda ilerlemeden, örneklemede en sık kullanılan üç ölçü için parametre ve istatistik notasyonunu özetlemek yerinde olacaktır:

|                | Kitle<br><u>Parametre</u> | Örneklem<br><u>İstatistik</u> |
|----------------|---------------------------|-------------------------------|
| Ortalama       | $\mu$                     | $\bar{X}$                     |
| Standart Sapma | $\sigma$                  | $S$                           |
| Oran           | $P$                       | $\hat{P}_x$                   |

### 1.3. Bir İstatistiğin Örneklem Dağılımının Oluşturulması

Bir istatistiğin örneklem dağılımı sonlu bir kitle için aşağıdaki süreçte elde edilebilir:

1. Kitle ve kitleye ilişkin çıkarsama yapılacak kitle parametresi belirlenir. Kitle ortalaması, varyansı ya da belirli bir değere sahip olanların kitledeki oranı en sık başvuru parametrelerdir.

2. N birimlik kitleden  $n$  birimlik tüm mümkün örneklem çekilir ve ilgilenilen parametreye karşılık gelen örneklem istatistiğinin değeri her bir örneklem için hesaplanır. Çekiliş iadeli yapılıyorsa tüm mümkün örneklem sayısı  $N^n$  tane olurken, iadesiz durumda  $\binom{N}{n}$  olacaktır.

3. İkinci adımda elde edilen değerlerin frekansları hesaplanır. Oluşturulacak frekans ya da frekans oranı dağılımı, ilgili istatistiğin örneklem dağılımı olacaktır.

Burada dikkat edilmesi gereken nokta şudur: pratikte örneklem bir kez çekilir ve kitle parametrelerine ilişkin çıkarsama yapmak için bu örneklem sonuçlarına güvenilir. Ancak çıkarsamaların güvenilir olabilmesi için çekilen örneklem nasıl bir dağılımdan geldiği ve dolayısıyla ne kadar olasılıkla gerçekleşmiş olabileceğini bilmeye ihtiyaç duyulur.

Bu bağlamda, yukarıdaki adımlarda tanımlandığı gibi, pratikte çekilen örneklem kaç birimse, o kadar birimlik tüm mümkün örneklem çekilmesi ile oluşturulacak örneklem dağılımının bilinmesi önemlidir. Ancak gerek  $N^n$  gerekse  $\binom{N}{n}$ ,  $N$ 'den büyüktür:

Örneğin, 50 birimlik bir kitleden 4 birimlik tüm örneklem sayısının iadesiz durumda  $\binom{50}{4} = 230.300$ , iadeli durumda  $50^4 = 6.250.000$  olacaktır.

Dolayısıyla tüm mümkün örneklem (iadeli ya da iadesiz çekilen) oluşturacağı küme, kitlenin kendisinden daha büyük olup, örneklem dağılımının bu yolla oluşturulması kitlenin kendisini gözlemekten daha zahmetli bir iştir. Sonsuz bir kitle içinse bu sürecin gerçekleşmesi zaten olanaksızdır. Bu yüzden istatistiklerin örneklem dağılımlarına ilişkin teorik sonuçları elde etmede daha çok olasılık teorisinin teoremlerine ve sonuçlarına başvurulur.

### 1.4. Örneklem Ortalaması ve Varyansı

Örneklem istatistikleri içinde en sık karşılaşılanları örneklem ortalaması ve varyansıdır.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  bir rastlantısal örnekleme göstermek üzere, örneklem ortalaması ( $\bar{X}$ ) ve varyansı ( $S^2$ )

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}$$

fonksiyonları (formülleri) ile tanımlanır. Yansız bir tahminci elde etmek için,  $S^2$ 'nin paydasında  $n$  yerine  $n - 1$ 'in kullanılır. İstatistik bir rastlantı değişkenidir. Ancak örnekleme yapıldıktan, istatistiğin değeri hesaplandıktan sonra gerçekleşen bu özel değer artık rastlantı değişkeni değil, bir sabit olacaktır. Dolayısıyla farklı iki kavram olan "istatistik" ve "istatistiğin gerçekleşen değeri" için farklı notasyonlar kullanmak gereklidir. Dolayısıyla istatistikler için büyük harfler (indisler dâhil), istatistiklerin gerçekleşen değerleri için küçük harfler kullanılacaktır. Öyleyse bir uygulama söz konusu ise örneklem ortalaması ve varyansı için

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \qquad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

formülleri kullanılacaktır.

### 1.5. Örneklem Ortalamasının Örneklem Dağılımı

Sonlu bir kitle için örneklem ortalamasının örneklem dağılımı oluşturulabilir:  $N$  birimlik bir kitleden  $n$  birimlik tüm mümkün örneklemler çekilir, her bir örneklem ortalaması hesaplanır ve karşılık gelen frekanslar ve frekans oranları oluşturulursa, elde edilecek frekans oranları dağılımı **örneklem ortalamasının örneklem dağılımı**dır. Bu dağılımın ortalaması ve standart sapması iadesiz örnekleme için

$$E(\bar{X}) = \mu \quad \text{ve} \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

iadeli örnekleme için

$$E(\bar{X}) = \mu \quad \text{ve} \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

formülleri ile tanımlıdır. Burada  $\mu$  kitle ortalamasını,  $\sigma$  ise kitle standart sapmasını gösterirken, örnekleme dağılımının standart sapması  $\sigma_{\bar{X}}$ , aynı zamanda **ortalamanın standart hatası** olarak da adlandırılır. Buradan anlaşılacağı gibi örneklem büyüklüğü  $n$  artarken,  $\sigma_{\bar{X}}$  azalır.

Öte yandan yine görüldüğü gibi gerek iadeli gerekse iadesiz örnekleme için örneklem ortalamasının beklenen değerinin, yani örnekleme dağılımının ortalamasının her zaman kitle ortalamasına eşit olduğunu görüyoruz. İki dağılım arasındaki tek farklılık iadesiz örneklemede, standart hata formülünde yer alan  $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$  çarpanıdır. **Sonlu kitle düzeltme faktörü** olarak da adlandırılan bu çarpanın  $N \rightarrow \infty$  iken 1'e yaklaşacağı açıktır. Öyleyse

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

yazılabilir. Dolayısıyla sonsuz kitle söz konusuysa ya da örneklem büyüklüğü ( $n$ ), kitle büyüklüğünün ( $N$ ) küçük bir oranı ise (pratikte bu sınır  $n \leq 0,05N$  kabul edilebilir) iadesiz örnekleme yapılsa da (genellikle de iadesiz örnekleme yapılır) iadeli örnekleme formülleri kullanılabilir.

Örneğin 2, 4, 10, 12 ve 18 sayılarından oluşan bir kitle için  $n = 3$  birimlik tüm mümkün örneklem iadesiz olarak çekilsin. Örnekleme dağılımını oluşturup, dağılımın ortalama ve standart sapmasını hesaplamak istesek izlenecek yol şöyle olur:

Kitle ortalama ve varyansı

$$\mu = \frac{2 + 4 + 10 + 12 + 18}{5} = 9,2$$

$$\sigma^2 = \frac{(2 - 9,2)^2}{5} + \frac{(4 - 9,2)^2}{5} + \frac{(10 - 9,2)^2}{5} + \frac{(12 - 9,2)^2}{5} + \frac{(18 - 9,2)^2}{5} = 32,96$$

olacaktır. Buradan kitle standart sapması

$$\sigma = 5,74$$

olarak bulunur. 5 birimlik bir kitleden çekilebilecek tüm mümkün üç birimlik örneklem sayısının sayısı  $\binom{5}{3} = 10$  olacaktır. Bu örneklem ve örneklem ortalamalarının frekans oranları dağılımı aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

| Tüm Mümkin Örneklemeler | Örneklem Ortalamaları | Örneklem Ortalamaları ( $\bar{x}$ ) | Frekanslar Oranları (Olasılıklar) |
|-------------------------|-----------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|
| 2, 4, 10                | 16/3                  | 16/3                                | 1/10                              |
| 2, 4, 12                | 18/3                  | 18/3                                | 1/10                              |
| 2, 4, 18                | 24/3                  | 24/3                                | 2/10                              |
| 2, 10, 12               | 24/3                  | 26/3                                | 1/10                              |
| 2, 10, 18               | 30/3                  | 30/3                                | 1/10                              |
| 2, 12, 18               | 32/3                  | 32/3                                | 2/10                              |
| 4, 10, 12               | 26/3                  | 34/3                                | 1/10                              |
| 4, 10, 18               | 32/3                  | 40/3                                | 1/10                              |
| 4, 12, 18               | 34/3                  | Örneklem dağılımının ortalaması     | 10/10                             |
| 10, 12, 18              | 40/3                  |                                     |                                   |

$$E(\bar{X}) = \left( \frac{16/3 + 18/3 + 48/3 + 26/3 + 30/3 + 64/3 + 34/3 + 40/3}{10} \right)$$

$$E(\bar{X}) = 9,2$$

olacaktır. Elde edilen değerin beklendiği gibi kitle ortalamasına eşit olduğunu görüyoruz. Dağılımın standart sapması ise

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{(16/3 - 9,2)^2 + (18/3 - 9,2)^2 + \dots + (40/3 - 9,2)^2}{10}}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = 2,34$$

olarak hesaplanır. Bu değer de beklendiği gibi  $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$  formülünden elde edilecek değere eşit olacaktır:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{5,74}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{5-3}{5-1}} = 2,34$$

Şimdi  $n = 3$  için gerçekleştirilen süreci,  $n = 1, 2, 4$  ve  $5$  için tekrarlayalım. Örneklem dağılımlarının ortalama, standart sapma ve grafiklerine bakıldığında, dağılımların ortalamalarının her zaman kitle ortalamasına eşit olduğu ve  $n$  artarken dağılımın standart sapmasının gittikçe küçüldüğü ve  $n = 5$  için sıfır olduğu görülmektedir.

$$n = 1 \text{ için tüm mümkün örneklemelerin sayısı } \binom{5}{1} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = 5$$

$$E(\bar{X}) = 9,2 \quad \sigma_{\bar{X}} = 5,74$$

$$n = 2 \text{ için tüm mümkün örneklemelerin sayısı } \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

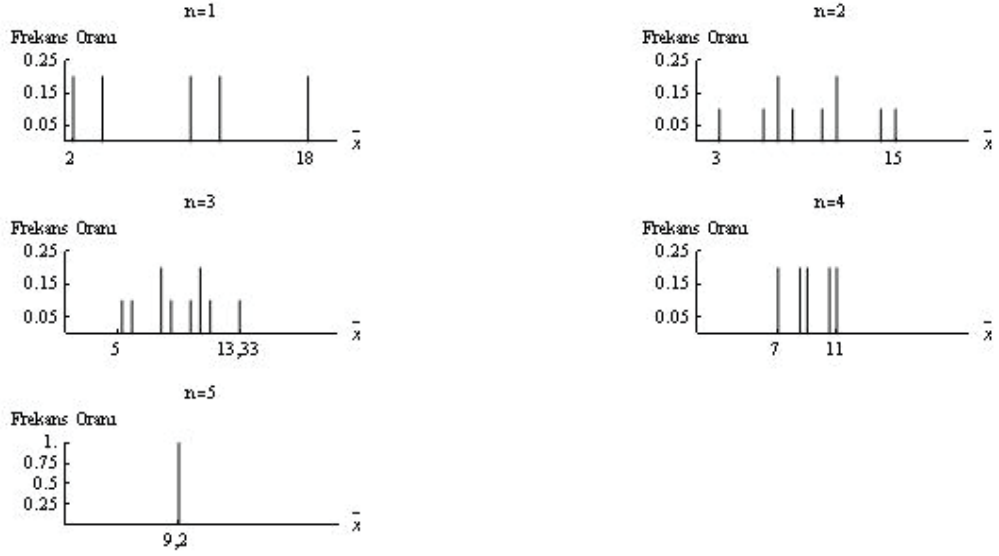
$$E(\bar{X}) = 9,2 \quad \sigma_{\bar{X}} = 3,51$$

$$n = 4 \text{ için tüm mümkün örneklemelerin sayısı } \binom{5}{4} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5$$

$$E(\bar{X}) = 9,2 \quad \sigma_{\bar{X}} = 1,44$$

$$n = 5 \text{ için tüm mümkün örneklemelerin sayısı } \binom{5}{5} = \frac{5!}{5! \cdot 0!} = 1$$

$$E(\bar{X}) = 9,2 \quad \sigma_{\bar{X}} = 0$$



Şekil 1.1:  $n = 1, 2, 3, 4$  ve  $5$  için örnekleme ortalamasının örnekleme dağılımları

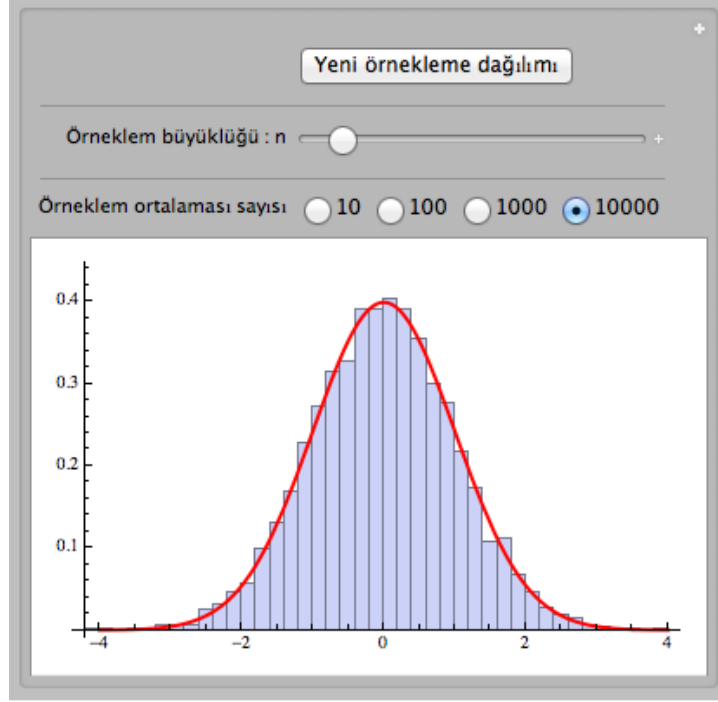
Pedagojik amaçlarla gerçekleştirilen bu tür bir uygulamaya pratikte rastlanmaz. Çünkü daha önce belirtildiği gibi, kitleler gerçekte bu uygulamadaki gibi küçük ve belirli olmayıp, daha çok bir olasılık dağılımı ile temsil edilirler. Dolayısıyla, ortalamanın örnekleme dağılımının bu örnekteki gibi oluşturulması yerine olasılık teorisinin teoremlerine başvurulur.

**Teorem 1.1:** Kitlenin dağılımı  $\mu$  ortalamalı ve  $\sigma$  standart sapmalı bir normal dağılımsa,  $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  rastlantı değişkeni standart normal dağılır.

**Örneklem ortalamalarının dağılımı ve Standart Normal Dağılım** aleti ile söz konusu sonucu gözlemleyebilirsiniz. Özellikle örneklem ortalaması sayısı artırıldıkça ve ortalaması  $\mu$  ortalamalı  $\sigma^2$  varyanslı, Normal dağılımdan çekilen rastlantısal sayılarla hesaplanmış  $z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  değerlerinin histogramının gerçekten de Standart Normal dağılıma (Kırmızı eğri) yaklaştığını görebiliyoruz.

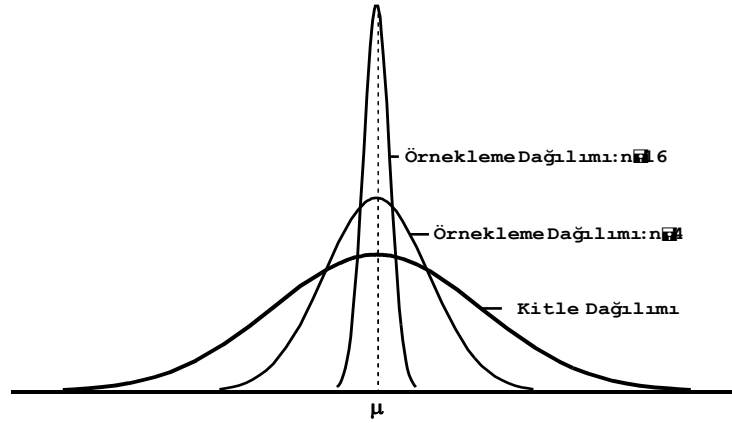


### Örneklem ortalamalarının dağılımı ve Standart Normal dağılım



Bu teoremden çıkarılacak sonuç şudur: normal dağılan bir kitle söz konusu ise, çekilen örneklem büyüklüğü  $n$  ne olursa olsun  $\bar{X}$ 'nin örneklem dağılımı da normaldir. Bu örneklem dağılımının ortalaması  $\mu$ , standart sapması ise  $\sigma/\sqrt{n}$ 'dir.

Şekil 1.2 normal dağılan bir kitle ve iki farklı  $n$  değerinde  $\bar{X}$ 'nin örneklem dağılımlarını göstermektedir. Görüldüğü gibi kitle ve örneklem dağılımlarının ortalaması aynıdır. Ancak  $n = 16$  için örneklem dağılımının standart sapması  $\sigma/\sqrt{16}$ ,  $n = 4$  içinse  $\sigma/\sqrt{4}$  olacaktır.



**Şekil 1.2:** Normal dağılan bir kitle ve bu kitleden çekilen örneklemelerin ortalamalarının dağılımları

Diyelim ki bir üniversitedeki erkek öğrencilerin boyları, varyansı 19 olan bir normal dağılım göstermektedir. Bu topluluktan 25 erkek öğrenci seçilirse örneklem ortalaması ile kitle ortalaması arasındaki farkın 2 cm'den fazla olmama olasılığının ne olacağını şu şekilde bulabiliriz:

Hesaplayacağımız olasılık  $P[|\bar{X} - \mu| \leq 2]$  olarak ifade edilebilir. Eşitsizliğin her iki tarafı  $\sigma/\sqrt{n}$ 'ye bölünür ve düzenlenirse

$$P\left[\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \leq \frac{2}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right] = P\left[\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}\right| \leq \frac{\sqrt{n} \cdot 2}{\sigma}\right] = P\left[|z| \leq \frac{\sqrt{n} \cdot 2}{\sigma}\right] = P\left[|z| \leq \frac{\sqrt{25} \cdot 2}{\sqrt{19}}\right]$$

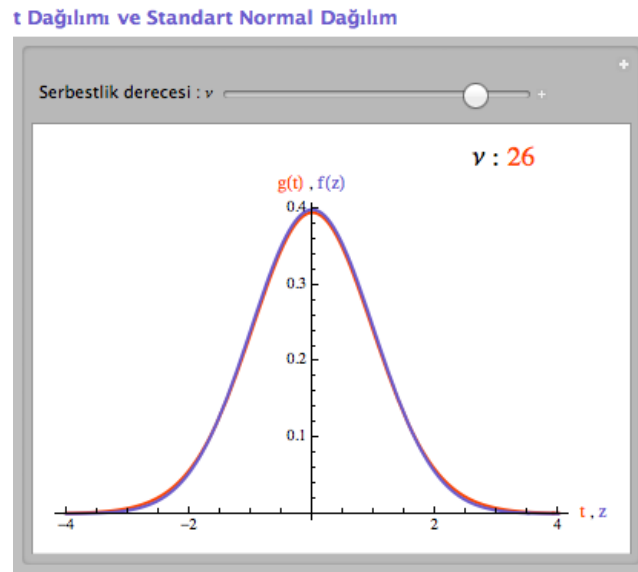
$$= P[|z| \leq 2,29]$$

$$P[-2,29 < z < 2,29] = 2 \cdot 0,4890 = 0,9780$$

sonucu bulunur.

Bu aşamada Standart normal dağılım ile Student t dağılım arasındaki ilişkiye değinmek yerinde olacaktır.

***t* dağılımı ve Standart Normal Dağılım** aleti ile Standart normal dağılım ile (Student) t dağılım arasındaki ilişkiyi keşfedebilirsiniz. t dağılımının tek parametresi olan  $\nu$  arttıkça, Standart Normal dağılıma yaklaştığını gözlemleyebilirsiniz.



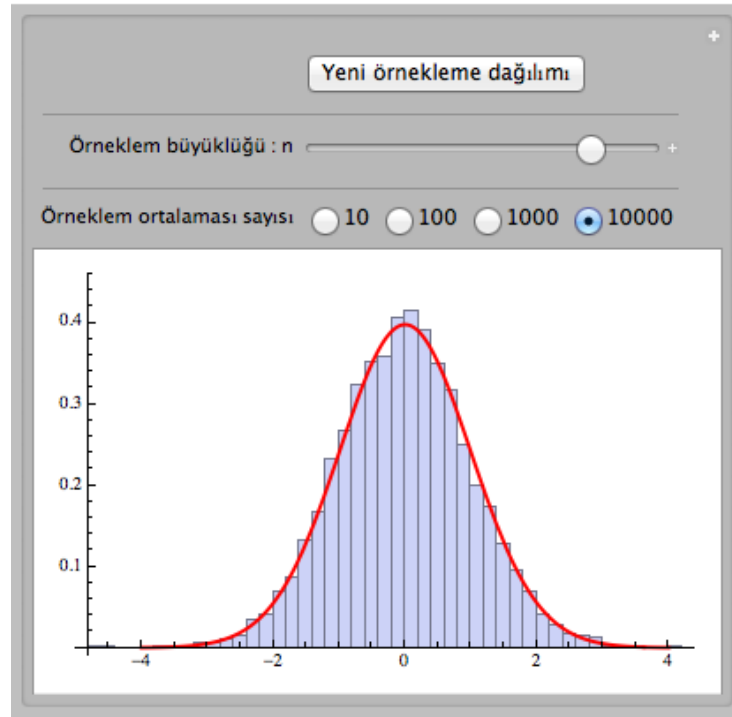
Teorem 1.1'de kitle varyansının bilindiği varsayılmaktadır. Kitle varyansının bilinmediği durumda ise Teorem 1.2 'ye başvurulabilir.

**Teorem 1.2:** Kitlenin dağılımı  $\mu$  ortalamalı bir normal dağılımsa,  $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$  rastlantı değişkeni  $(n - 1)$  serbestlik derecesiyle  $t$  dağılır.

Bir olasılık dağılımı olarak ele alınan  $t$  dağılımının tek parametresi serbestlik derecesidir. Dolayısıyla  $t$  dağılımını belirlemek için serbestlik derecesini bilmek yeterlidir.

**Örneklerin ortalamalarının dağılımı ve  $t$  dağılımı apleti ile söz konusu sonucu gözlemleyebilirsiniz.** Özellikle örneklem ortalaması sayısı artırıldıkça ve ortalaması  $\mu$  ortalamalı  $\sigma^2$  varyanslı, Normal dağılımdan çekilen rastlantısal sayılarla hesaplanmış  $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$  değerlerinin histogramının gerçekten de  $(n - 1)$  serbestlik dereceli  $t$  dağılımına (Kırmızı eğri) yaklaştığını görebiliyoruz.

Örneklerin ortalamalarının dağılımı ve  $t$  dağılımı



Diyelim ki, Normal dağılan bir kitleden on altı birimlik rastlantısal örneklem çekiliyor ve ortalama 75, standart sapma 8,5 olarak hesaplanıyor. Kitle ortalamasının 78,5'ten büyük olma olasılığını bulmak istiyorsak,

İstenen olasılık  $P(\mu > 78,5)$  olarak ifade edilebilir.

$$P(\mu > 78,5) = P(-\mu < -78,5) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X} - 78,5}{S/\sqrt{n}}\right)$$

Teorem 1.2'den

$$P(\mu > 78,5) = P\left(t < \frac{\bar{X} - 78,5}{S/\sqrt{n}}\right)$$

yazabiliriz.  $\bar{x} = 75$ ,  $s = 8,5$ ,  $n = 16$  değerleri yerine konulursa

$$P(\mu > 78,5) = P\left(t < \frac{75 - 78,5}{8,5/\sqrt{16}}\right) = P(t < -1,647)$$

elde edilir. t Tablosu'na  $(16 - 1) = 15$  serbestlik derecesi için bakıldığında  $t = 1,647$  değerini göremiyoruz. Ancak aynı serbestlik derecesinde 1,647 değerinin aralarına düştüğü iki değer için

$$P(t < -1,341) = 0,10$$

$$P(t < -1,753) = 0,05$$

olasılıklarını yazabiliriz. Doğrusal oranla

|      |     |
|------|-----|
| ,341 | ,10 |
| ,647 | $x$ |
| ,753 | ,05 |

$$\frac{1,753 - 1,341}{1,647 - 1,341} = \frac{0,05 - 0,10}{x - 0,10} \Rightarrow x = 0,0629$$

elde edilir. Öyleyse kitle ortalamasının 78,5'ten fazla olma olasılığı

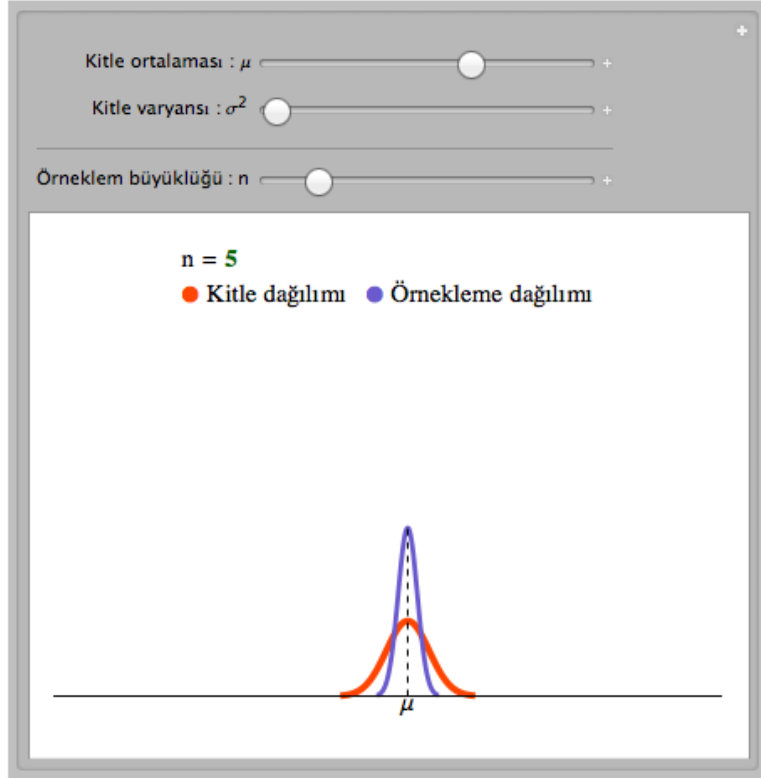
$$P(\mu > 78,5) = 0,0629$$

olacaktır.

$\mu$  ortalamalı ve  $\sigma^2$  varyanslı normal dağılan bir kitleden çekilen  $n$  birimlik örneklemelerin ortalamalarının dağılımı yine Normaldir. Bu örneklem dağılımının ortalaması yine  $\mu$ , varyansı ise  $\sigma^2/n$ 'dir.

**Normal dağılan bir kitle ve örneklem ortalamasının örneklem dağılımı** aleti ile söz konusu sonucu gözlemleyebilirsiniz.

Normal dağılan bir kitle ve örneklem ortalamasının örneklem dağılımı



Gerek Teorem 1.1 gerekse Teorem 1.2'de kitle dağılımının normal olduğu varsayılmaktadır. Kitle dağılımının normal olmadığı durumda ise istatistik teorisinin en çok bilinen teoremlerinden biri olan merkezi limit teoremine başvurulabilir. Merkezi limit

teoremine göre kitle dağılımı ne olursa olsun,  $n$  yeterince büyükse  $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  rastlantı değişkeni yaklaşık olarak standart normal dağılır. Pratikte  $n \geq 30$  için merkezi limit teoreminin geçerli olduğunu söyleyebiliriz. Ancak merkezi limit teoreminin zayıf noktasının da kitle varyansının bilindiğinin varsayılması olduğunu hatırlatalım.

Şöyle bir örnek ele alalım: Bir gazoz fabrikasındaki bir makine, şişelere ortalama 75 cl gazoz dolduracak şekilde ayarlanmıştır. Şişelerdeki gazoz miktarlarının standart sapmasının ise 4,8 cl olduğu bilinmektedir. 42 birimlik bir rastlantısal örneklem çekilirse, örneklem ortalamasının 77 cl'den büyük olma olasılığı nedir?

Kitle dağılımını bilmiyoruz, ancak kitle varyansını bildiğimiz ve  $n \geq 30$  olduğu için merkezi limit teoremine başvurabiliriz. İstenen olasılığı  $P(\bar{X} > 77)$  olarak ifade edebiliriz. Her iki taraftan  $\mu$ 'yü çıkartıp,  $\sigma/\sqrt{n}$  'ye bölersek

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{77 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(z > \frac{77 - 75}{4,8/\sqrt{42}}\right) = P(z > 2,7)$$

elde ederiz. Normal Dağılım Tablosu'ndan aranan olasılık

$$P(z > 2,7) = 0,0035$$

olarak bulunur.

## 1.6. Örneklem Varyansının Örneklem Dağılımı

$\bar{X}$  gibi bir örneklem istatistiği ve dolayısıyla bir rastlantı değişkeni olan örneklem varyansı  $S^2$ 'nin örneklem dağılımına ilişkin teorik sonuçları elde etmek için de yine bir teoreme başvuracağız.

**Teorem 1.3:**  $S^2$ , varyansı  $\sigma^2$  olan bir normal dağılımdan çekilen  $n$  birimlik bir rastlantısal örneklem varyansı ise rastlantı değişkeni  $(n-1)S^2/\sigma^2$ ,  $(n-1)$  serbestlik dereceli  $\chi^2$  (Ki-Kare) dağılır.

$\chi^2$  dağılımının tek parametresi olan  $\nu$ ,  $t$  dağılımında olduğu gibi serbestlik derecesini gösterir ve aynı zamanda bu dağılımın ortalamasıdır.

Örneğin, Normal dağılan bir kitleden çekilen on altı birimlik rastlantısal örneklemin varyansı 27,6 olarak hesaplanmış olsun. Kitle varyansının 29'dan büyük olma olasılığının ne olacağını bulurken;

İstenen olasılık  $P(\sigma^2 > 29)$  olarak ifade edilebilir. Buradan

$$P\left(\frac{1}{\sigma^2} < \frac{1}{29}\right) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{(n-1)S^2}{29}\right)$$

elde ederiz. Teorem 1.3'ten ise

$$P\left(\chi^2 < \frac{(n-1)S^2}{29}\right) = P\left(\chi^2 < \frac{(16-1)27,6}{29}\right) = P(\chi^2 < 14,3)$$

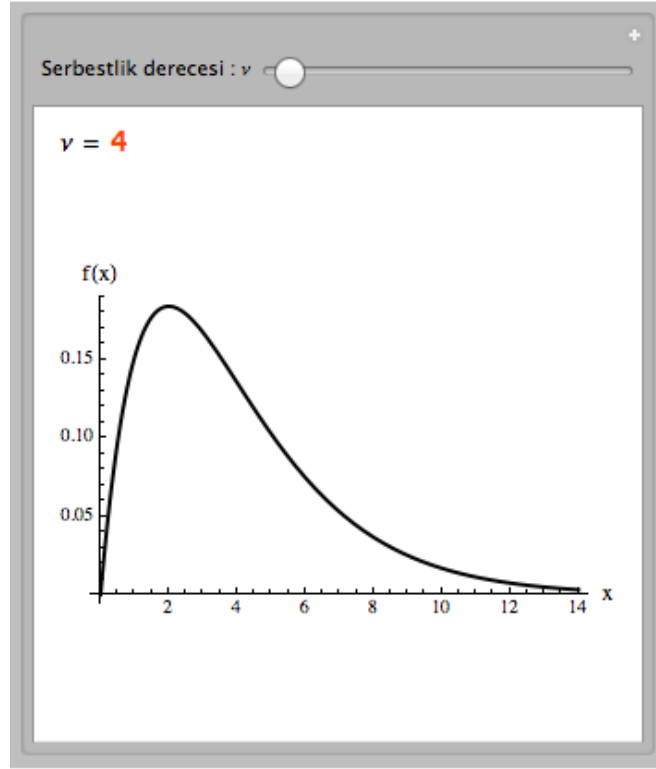
yazabiliriz. Ki-Kare Tablosu'nda 15 serbestlik derecesine bakıldığında  $P(\chi^2 < 14,3) = 0,50$  olduğu görülür. Öyleyse aranan olasılık

$$P(\sigma^2 > 29) = 0,50$$

olacaktır.

**Ki-Kare ( $\chi^2$ ) Dağılımı** apleti ile **Ki-Kare ( $\chi^2$ ) dağılımının özelliklerini keşfedebilirsiniz.**  $\chi^2$  dağılımının tek parametresi olan,  $\nu$  artırıldıkça, dağılımın ekseninin sağ tarafına doğru hareket ettiğini ve simetrikleştğini gözlemleyebilirsiniz.

### Ki-Kare ( $\chi^2$ ) Dağılımı



## 1.7. Örneklem Oranının Örnekleme Dağılımı

Uygulamada belirli bir topluluğu betimlerken, o topluluktaki belirli bir özelliğe sahip olanların yüzdesini ya da oranını bilmek isteyebiliriz. Örneğin bir firmanın ürettiği elektrotların defoluluk yüzdesini, bir genel seçim öncesi belirli bir partinin oy oranını, bir nükleer santrali kurmadan önce kurulmasına karşı olanların ülke içindeki yüzdesini, hilesiz olduğuna emin olmadığımız bir zarda 5 gelme olasılığını ya da piyasaya henüz çıkmamış bir ilacın ilgilenilen hastalığı iyileştirme oranını bilmek isteyebiliriz. Ancak bu oranın ya da yüzdenin kesin olarak bilinmesi; bazen topluluğun tamamının sayılmasını gerektirdiği ve bazen de doğallıkla olanaksız (zar ve ilaç örneklerindeki gibi) olduğu için ilgilenilen topluluktan çekilecek örnekleme dayanarak bu parametrenin tahmin edilmesine ya da genel olarak ifade edersek parametreye ilişkin çıkarsamalar yapılmaya çalışılır.

Bilindiği gibi bir topluluktan iadeli çekilişlerde ya da büyük bir topluluktan iadesiz çekilişlerde binom dağılımına başvuruluyordu. Öyleyse büyük örneklem için  $p$  ile göstereceğimiz kitle oranına (burada oran sözcüğü yüzde ya da olasılık sözcüklerini de kapsamaktadır) ilişkin çıkarsamalar yapmak amacıyla çekilecek rastlantısal örneklemin binom dağılan bir kitleden geldiğini ve  $p$  parametresinin binom olasılık fonksiyonundaki başarı olasılığı  $p$  ile eşdeğer olduğunu düşünmek gerekir.

Binom dağılımında rastlantı değişkeni  $X$ ,  $n$  denemedeki başarı sayısını gösterdiğine göre  $n$  birimlik bir örneklemde ilgilenilen özelliğe sahip birimlerin sayısı  $X$  ise  $\hat{p} = X/n$  ("^" şapka olarak okunur) oranı örneklemdeki başarı oranı olacağı için kitledeki gerçek oranı simgeleyen  $p$  parametresine karşılık gelen örneklem istatistiği olarak kullanılabilir.



$X$  bir rastlantı değişkeni olduğu için  $\hat{p}$  da diğer örneklem istatistikleri gibi bir rastlantı değişkenidir. Şüphesiz  $p$  'ye ilişkin çıkarsama yapmak için  $\hat{p}$  'nın örnekleme dağılımının bilinmesine ihtiyaç vardır. Öncelikle  $\hat{p}$  'nın ortalama ve varyansını tanımlayalım. Hatırlanacağı gibi binom dağılımının ortalama ve varyansı  $E(X) = np$  ,  $Var(X) = npq$  'dur. Öyleyse  $\hat{p}$  'nın ortalama ve varyansı

$$E(\hat{p}) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}(np)$$

$$E(\hat{p}) = p$$

$$Var(\hat{p}) = Var\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}Var(X) = \frac{1}{n^2}(npq)$$

$$Var(\hat{p}) = \frac{pq}{n}$$

olur.  $\hat{p}$  'nın standart hatası olarak da adlandırılan  $\sigma_{\hat{p}}$  ise dolayısıyla

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

olacaktır. Merkezi limit teoreminin bir sonucu olarak  $n$  'nin büyük değerlerinde binom dağılımına normal dağılım yaklaşımı uygulanabilir. Öyleyse büyük örneklem için

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}}$$

rastlantı değişkeninin yaklaşık olarak standart normal dağıldığını söyleyebiliriz.

Daha önce örneklem ortalaması ve varyansını anlatırken istatistiğin kendisi ve örneklemden elde edilen değeri için ayrı notasyonlar kullanmıştık. Aynı ayrımı örneklem oranı için de yapmak amacıyla,  $\hat{p}$ 'nin örneklemekten elde edilecek sayısal değeri için  $\hat{p}$  notasyonu kullanılacaktır.

Örneğin, hilesiz bir zar 1500 kez atılıyor olsun. Beş noktalı yüzün frekans oranı ile zarın beş gelme olasılığı arasındaki farkın 0,02'den az olması olasılığının kaç olduğunu bulmak istiyoruz.

Bu deneyi, binom dağılan bir kitleden 1500 birimlik rastlantısal bir örneklem çekilişi olarak düşünebiliriz. Zarın hilesiz olduğu belirtilerek zarın beş gelme olasılığı, diğer bir deyişle beşin gerçek frekans oranı  $p = 1/6$  olarak verilmiştir. Şüphesiz bu zar gerçekten atılsa ve beşin frekans oranı hesaplansa bu değer tam olarak  $1/6$  olmasını beklemeyiz. Sorulan, deneyden sonra elde edilecek frekans oranı ile deneyden önce belirtilen gerçek (olması gereken) oran arasındaki farkın 0,02'den az olması olasılığıdır:

$$P(|\hat{p} - p| < 0,02)$$

Eşitsizliği  $\sqrt{\frac{pq}{n}}$ 'ye bölersek

$$P\left(\left|\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}}\right| < \frac{0,02}{\sqrt{pq/n}}\right) = P\left(|z| < \frac{0,02}{\sqrt{(1/6)(5/6)/1500}}\right)$$

$$P(|z| < 2,08) = P(-2,08 < z < 2,08)$$

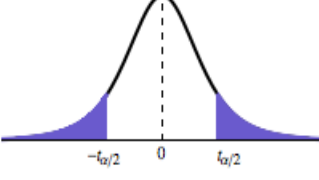
elde edilir. Normal Dağılım Tablosu'ndan istenilen olasılık  $P(-2,08 < z < 2,08) = 0,9624$  olacaktır.

***t* tablosu** aleti ile ***t*** tablo değerlerini hesaplayabilirsiniz.

#### **t tablosu**

Serbestlik derecesi :  $\nu$ 
 $\alpha$

Tablodaki sayılar kuyruklarda toplam  $\alpha$  kadar alan bırakan  $t_{\alpha/2}$  değerleridir.



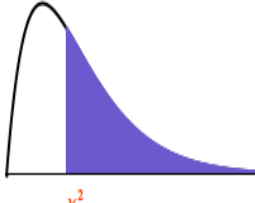
| $\nu$ *, $\alpha$ | 0.500 | 0.400 | <b>0.200</b> | 0.100 | 0.050  | 0.025  | 0.020  | 0.010  | 0.005   | 0.001   |
|-------------------|-------|-------|--------------|-------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|
| 1                 | 1.000 | 1.376 | 3.078        | 6.314 | 12.706 | 25.452 | 31.821 | 63.657 | 127.320 | 636.620 |
| 2                 | 0.816 | 1.061 | 1.886        | 2.920 | 4.303  | 6.205  | 6.965  | 9.925  | 14.089  | 31.599  |
| 3                 | 0.765 | 0.978 | 1.638        | 2.353 | 3.182  | 4.177  | 4.541  | 5.841  | 7.453   | 12.924  |
| <b>4</b>          | 0.741 | 0.941 | <b>1.533</b> | 2.132 | 2.776  | 3.495  | 3.747  | 4.604  | 5.598   | 8.610   |
| 5                 | 0.727 | 0.920 | 1.476        | 2.015 | 2.571  | 3.163  | 3.365  | 4.032  | 4.773   | 6.869   |
| 6                 | 0.718 | 0.906 | 1.440        | 1.943 | 2.447  | 2.969  | 3.143  | 3.707  | 4.317   | 5.959   |
| 7                 | 0.711 | 0.896 | 1.415        | 1.895 | 2.365  | 2.841  | 2.998  | 3.499  | 4.029   | 5.408   |
| 8                 | 0.706 | 0.889 | 1.397        | 1.860 | 2.306  | 2.752  | 2.896  | 3.355  | 3.833   | 5.041   |
| 9                 | 0.703 | 0.883 | 1.383        | 1.833 | 2.262  | 2.685  | 2.821  | 3.250  | 3.690   | 4.781   |
| 10                | 0.700 | 0.879 | 1.372        | 1.812 | 2.228  | 2.634  | 2.764  | 3.169  | 3.581   | 4.587   |
| 11                | 0.697 | 0.876 | 1.363        | 1.796 | 2.201  | 2.593  | 2.718  | 3.106  | 3.497   | 4.437   |
| 12                | 0.695 | 0.873 | 1.356        | 1.782 | 2.179  | 2.560  | 2.681  | 3.055  | 3.428   | 4.318   |
| 13                | 0.694 | 0.870 | 1.350        | 1.771 | 2.160  | 2.533  | 2.650  | 3.012  | 3.372   | 4.221   |
| 14                | 0.692 | 0.868 | 1.345        | 1.761 | 2.145  | 2.510  | 2.624  | 2.977  | 3.326   | 4.140   |
| 15                | 0.691 | 0.866 | 1.341        | 1.753 | 2.131  | 2.490  | 2.602  | 2.947  | 3.286   | 4.073   |
| 16                | 0.690 | 0.865 | 1.337        | 1.746 | 2.120  | 2.473  | 2.583  | 2.921  | 3.252   | 4.015   |
| 17                | 0.689 | 0.863 | 1.333        | 1.740 | 2.110  | 2.458  | 2.567  | 2.898  | 3.222   | 3.965   |
| 18                | 0.688 | 0.862 | 1.330        | 1.734 | 2.101  | 2.445  | 2.552  | 2.878  | 3.197   | 3.922   |
| 19                | 0.688 | 0.861 | 1.328        | 1.729 | 2.093  | 2.433  | 2.539  | 2.861  | 3.174   | 3.883   |
| 20                | 0.687 | 0.860 | 1.325        | 1.725 | 2.086  | 2.423  | 2.528  | 2.845  | 3.153   | 3.850   |
| 21                | 0.686 | 0.859 | 1.323        | 1.721 | 2.080  | 2.414  | 2.518  | 2.831  | 3.135   | 3.819   |
| 22                | 0.686 | 0.858 | 1.321        | 1.717 | 2.074  | 2.405  | 2.508  | 2.819  | 3.119   | 3.792   |
| 23                | 0.685 | 0.858 | 1.319        | 1.714 | 2.069  | 2.398  | 2.500  | 2.807  | 3.104   | 3.768   |
| 24                | 0.685 | 0.857 | 1.318        | 1.711 | 2.064  | 2.391  | 2.492  | 2.797  | 3.091   | 3.745   |
| 25                | 0.684 | 0.856 | 1.316        | 1.708 | 2.060  | 2.385  | 2.485  | 2.787  | 3.078   | 3.725   |
| 26                | 0.684 | 0.856 | 1.315        | 1.706 | 2.056  | 2.379  | 2.479  | 2.779  | 3.067   | 3.707   |
| 27                | 0.684 | 0.855 | 1.314        | 1.703 | 2.052  | 2.373  | 2.473  | 2.771  | 3.057   | 3.690   |
| 28                | 0.683 | 0.855 | 1.313        | 1.701 | 2.048  | 2.368  | 2.467  | 2.763  | 3.047   | 3.674   |
| 29                | 0.683 | 0.854 | 1.311        | 1.699 | 2.045  | 2.364  | 2.462  | 2.756  | 3.038   | 3.659   |
| 30                | 0.683 | 0.854 | 1.310        | 1.697 | 2.042  | 2.360  | 2.457  | 2.750  | 3.030   | 3.646   |
| 40                | 0.681 | 0.851 | 1.303        | 1.684 | 2.021  | 2.329  | 2.423  | 2.704  | 2.971   | 3.551   |
| 60                | 0.679 | 0.848 | 1.296        | 1.671 | 2.000  | 2.299  | 2.390  | 2.660  | 2.915   | 3.460   |
| 120               | 0.677 | 0.845 | 1.289        | 1.658 | 1.980  | 2.270  | 2.358  | 2.617  | 2.860   | 3.373   |
| $\infty$          | 0.674 | 0.842 | 1.282        | 1.645 | 1.960  | 2.241  | 2.326  | 2.576  | 2.807   | 3.291   |

**Ki-Kare tablosu aleti ile  $\chi^2$  tablo değerlerini hesaplayabilirsiniz.**

#### Ki-Kare tablosu

Serbestlik derecesi :  $\nu$    $\alpha$

Tablodaki sayılar sağ tarafta  $\alpha$  kadar alan bırakan  $\chi^2_\alpha$  değerleridir.



| $\nu$ \ $\alpha$ | 0.995  | 0.990  | 0.975  | 0.950  | 0.900  | 0.750  | <b>0.500</b> | 0.250   | 0.100   | 0.050   | 0.025   | 0.010   | 0.005   |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1                | 0.000  | 0.000  | 0.001  | 0.004  | 0.016  | 0.102  | 0.455        | 1.323   | 2.706   | 3.841   | 5.024   | 6.635   | 7.879   |
| 2                | 0.010  | 0.020  | 0.051  | 0.103  | 0.211  | 0.575  | 1.386        | 2.773   | 4.605   | 5.991   | 7.378   | 9.210   | 10.597  |
| 3                | 0.072  | 0.115  | 0.216  | 0.352  | 0.584  | 1.213  | 2.366        | 4.108   | 6.251   | 7.815   | 9.348   | 11.345  | 12.838  |
| <b>4</b>         | 0.207  | 0.297  | 0.484  | 0.711  | 1.064  | 1.923  | <b>3.357</b> | 5.385   | 7.779   | 9.488   | 11.143  | 13.277  | 14.860  |
| 5                | 0.412  | 0.554  | 0.831  | 1.145  | 1.610  | 2.675  | 4.351        | 6.626   | 9.236   | 11.070  | 12.833  | 15.086  | 16.750  |
| 6                | 0.676  | 0.872  | 1.237  | 1.635  | 2.204  | 3.455  | 5.348        | 7.841   | 10.645  | 12.592  | 14.449  | 16.812  | 18.548  |
| 7                | 0.989  | 1.239  | 1.690  | 2.167  | 2.833  | 4.255  | 6.346        | 9.037   | 12.017  | 14.067  | 16.013  | 18.475  | 20.278  |
| 8                | 1.344  | 1.646  | 2.180  | 2.733  | 3.490  | 5.071  | 7.344        | 10.219  | 13.362  | 15.507  | 17.535  | 20.090  | 21.955  |
| 9                | 1.735  | 2.088  | 2.700  | 3.325  | 4.168  | 5.899  | 8.343        | 11.389  | 14.684  | 16.919  | 19.023  | 21.666  | 23.589  |
| 10               | 2.156  | 2.558  | 3.247  | 3.940  | 4.865  | 6.737  | 9.342        | 12.549  | 15.987  | 18.307  | 20.483  | 23.209  | 25.188  |
| 11               | 2.603  | 3.053  | 3.816  | 4.575  | 5.578  | 7.584  | 10.341       | 13.701  | 17.275  | 19.675  | 21.920  | 24.725  | 26.757  |
| 12               | 3.074  | 3.571  | 4.404  | 5.226  | 6.304  | 8.438  | 11.340       | 14.845  | 18.549  | 21.026  | 23.337  | 26.217  | 28.300  |
| 13               | 3.565  | 4.107  | 5.009  | 5.892  | 7.042  | 9.299  | 12.340       | 15.984  | 19.812  | 22.362  | 24.736  | 27.688  | 29.819  |
| 14               | 4.075  | 4.660  | 5.629  | 6.571  | 7.790  | 10.165 | 13.339       | 17.117  | 21.064  | 23.685  | 26.119  | 29.141  | 31.319  |
| 15               | 4.601  | 5.229  | 6.262  | 7.261  | 8.547  | 11.037 | 14.339       | 18.245  | 22.307  | 24.996  | 27.488  | 30.578  | 32.801  |
| 16               | 5.142  | 5.812  | 6.908  | 7.962  | 9.312  | 11.912 | 15.338       | 19.369  | 23.542  | 26.296  | 28.845  | 32.000  | 34.267  |
| 17               | 5.697  | 6.408  | 7.564  | 8.672  | 10.085 | 12.792 | 16.338       | 20.489  | 24.769  | 27.587  | 30.191  | 33.409  | 35.718  |
| 18               | 6.265  | 7.015  | 8.231  | 9.390  | 10.865 | 13.675 | 17.338       | 21.605  | 25.989  | 28.869  | 31.526  | 34.805  | 37.156  |
| 19               | 6.844  | 7.633  | 8.907  | 10.117 | 11.651 | 14.562 | 18.338       | 22.718  | 27.204  | 30.144  | 32.852  | 36.191  | 38.582  |
| 20               | 7.434  | 8.260  | 9.591  | 10.851 | 12.443 | 15.452 | 19.337       | 23.828  | 28.412  | 31.410  | 34.170  | 37.566  | 39.997  |
| 21               | 8.034  | 8.897  | 10.283 | 11.591 | 13.240 | 16.344 | 20.337       | 24.935  | 29.615  | 32.671  | 35.479  | 38.932  | 41.401  |
| 22               | 8.643  | 9.542  | 10.982 | 12.338 | 14.041 | 17.240 | 21.337       | 26.039  | 30.813  | 33.924  | 36.781  | 40.289  | 42.796  |
| 23               | 9.260  | 10.196 | 11.689 | 13.091 | 14.848 | 18.137 | 22.337       | 27.141  | 32.007  | 35.172  | 38.076  | 41.638  | 44.181  |
| 24               | 9.886  | 10.856 | 12.401 | 13.848 | 15.659 | 19.037 | 23.337       | 28.241  | 33.196  | 36.415  | 39.364  | 42.980  | 45.559  |
| 25               | 10.520 | 11.524 | 13.120 | 14.611 | 16.473 | 19.939 | 24.337       | 29.339  | 34.382  | 37.652  | 40.646  | 44.314  | 46.928  |
| 26               | 11.160 | 12.198 | 13.844 | 15.379 | 17.292 | 20.843 | 25.336       | 30.435  | 35.563  | 38.885  | 41.923  | 45.642  | 48.290  |
| 27               | 11.808 | 12.879 | 14.573 | 16.151 | 18.114 | 21.749 | 26.336       | 31.528  | 36.741  | 40.113  | 43.195  | 46.963  | 49.645  |
| 28               | 12.461 | 13.565 | 15.308 | 16.928 | 18.939 | 22.657 | 27.336       | 32.620  | 37.916  | 41.337  | 44.461  | 48.278  | 50.993  |
| 29               | 13.121 | 14.256 | 16.047 | 17.708 | 19.768 | 23.567 | 28.336       | 33.711  | 39.087  | 42.557  | 45.722  | 49.588  | 52.336  |
| 30               | 13.787 | 14.953 | 16.791 | 18.493 | 20.599 | 24.478 | 29.336       | 34.800  | 40.256  | 43.773  | 46.979  | 50.892  | 53.672  |
| 40               | 20.707 | 22.164 | 24.433 | 26.509 | 29.051 | 33.660 | 39.335       | 45.616  | 51.805  | 55.758  | 59.342  | 63.691  | 66.766  |
| 50               | 27.991 | 29.707 | 32.357 | 34.764 | 37.689 | 42.942 | 49.335       | 56.334  | 63.167  | 67.505  | 71.420  | 76.154  | 79.490  |
| 60               | 35.534 | 37.485 | 40.482 | 43.188 | 46.459 | 52.294 | 59.335       | 66.981  | 74.397  | 79.082  | 83.298  | 88.379  | 91.952  |
| 70               | 43.275 | 45.442 | 48.758 | 51.739 | 55.329 | 61.698 | 69.334       | 77.577  | 85.527  | 90.531  | 95.023  | 100.430 | 104.210 |
| 80               | 51.172 | 53.540 | 57.153 | 60.391 | 64.278 | 71.145 | 79.334       | 88.130  | 96.578  | 101.880 | 106.630 | 112.330 | 116.320 |
| 90               | 59.196 | 61.754 | 65.647 | 69.126 | 73.291 | 80.625 | 89.334       | 98.650  | 107.570 | 113.150 | 118.140 | 124.120 | 128.300 |
| 100              | 67.328 | 70.065 | 74.222 | 77.929 | 82.358 | 90.133 | 99.334       | 109.140 | 118.500 | 124.340 | 129.560 | 135.810 | 140.170 |

## Uygulamalar

1) 2, 6, 8 ve 12 sayılarından oluşan dört birimlik bir kitleden tüm mümkün iki birimlik örneklemler iadeli olarak çekilsin.

(a) Kitle ortalaması ve standart sapmasını hesaplayınız.

(b) Ortalamaların örnekleme dağılımını oluşturunuz.

(c) Ortalamaların örnekleme dağılımının ortalama ve standart sapmasını hesaplayınız.

### Cözüm:

(a) Kitle ortalaması

$$\mu = \frac{2 + 6 + 8 + 12}{4} = 7$$

ve standart sapması

$$\sigma = \sqrt{\frac{(2 - 7)^2 + (6 - 7)^2 + (8 - 7)^2 + (12 - 7)^2}{4}} \cong 3,61$$

olur.

(b) Tüm mümkün örneklemlerin sayısı  $N^n = 4^2 = 16$  olacaktır.

| Tüm Mümkün Örneklem | Örneklem Ortalamaları | Tüm Mümkün Örneklem | Örneklem Ortalamaları |
|---------------------|-----------------------|---------------------|-----------------------|
| 2, 2                | 2                     | 8, 2                | 5                     |
| 2, 6                | 4                     | 8, 6                | 7                     |
| 2, 8                | 5                     | 8, 8                | 8                     |
| 2, 12               | 7                     | 8, 12               | 10                    |
| 6, 2                | 4                     | 12, 2               | 7                     |
| 6, 6                | 6                     | 12, 6               | 9                     |
| 6, 8                | 7                     | 12, 8               | 10                    |
| 6, 12               | 9                     | 12, 12              | 12                    |

Örneklem ortalamalarının frekans ve frekans oranı dağılımları aşağıda verilmiştir:

| Örneklem<br>Ortalamaları<br>$\bar{x}$ | Frekanslar | Frekans<br>Oranları<br>(Olasılıklar) |
|---------------------------------------|------------|--------------------------------------|
| 2                                     | 1          | 1/16                                 |
| 4                                     | 2          | 2/16                                 |
| 5                                     | 2          | 2/16                                 |
| 6                                     | 1          | 1/16                                 |
| 7                                     | 4          | 4/16                                 |
| 8                                     | 1          | 1/16                                 |
| 9                                     | 2          | 2/16                                 |
| 10                                    | 2          | 2/16                                 |
| 12                                    | 1          | 1/16                                 |
|                                       | 16         | 16/16 =1                             |

(c) Ortalamaların örnekleme dağılımının ortalaması

$$E(\bar{X}) = \frac{2}{16} + \frac{8}{16} + \frac{10}{16} + \frac{6}{16} + \frac{28}{16} + \frac{8}{16} + \frac{18}{16} + \frac{20}{16} + \frac{12}{16} = 7$$

ve standart sapması

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{(2-7)^2 + \dots + (12-7)^2}{16}} = \sqrt{\frac{104}{16}} = 2,55$$

olur. Beklendiği gibi elde edilen sonuçlar  $E(\bar{X}) = \mu$  ve  $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  formülleri ile tutarlıdır:

$$E(\bar{X}) = \mu = 7, \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{3,61}{\sqrt{2}} = 2,55$$

2) Bir kitle 2, 3 ve 4 sayılarından oluşsun. Bu kitleden iadeli olarak çekilen iki birimlik tüm mümkün örneklemeleri oluşturup, her örneklemın varyansını ( $S^2$ ) hesaplayıp,  $E(S^2) = \sigma^2$  olduğunu gösteriniz.

**Cözüm:**

$N = 3$  ,  $n = 2$  olduğuna göre  $N^n = 3^2 = 9$  mümkün örneklem söz konusudur.

$$\mu = \frac{2 + 3 + 4}{3} = 3$$

$$\sigma^2 = \frac{(2 - 3)^2 + (3 - 3)^2 + (4 - 3)^2}{3} = \frac{2}{3}$$

| Tüm Mümkün Örneklemeler | Örneklem Ortalamaları ( $\bar{x}$ ) | $s^2$ |
|-------------------------|-------------------------------------|-------|
| 2 , 2                   | 2,0                                 | 0,0   |
| 2 , 3                   | 2,5                                 | 0,5   |
| 2 , 4                   | 3,0                                 | 2,0   |
| 3 , 2                   | 2,5                                 | 0,5   |
| 3 , 3                   | 3,0                                 | 0,0   |
| 3 , 4                   | 3,5                                 | 0,5   |
| 4 , 2                   | 3,0                                 | 2,0   |
| 4 , 3                   | 3,5                                 | 0,5   |
| 4 , 4                   | 4,0                                 | 0,0   |
|                         |                                     | 6,0   |

$$E(S^2) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

elde edilir.

**3)** Bir fabrikadaki 1000 erkek işçinin ağırlıklarının, ortalaması 70 kg, standart sapması 3,5 kg olan bir normal dağılıma sahip olduğu varsayalım. 25 birimlik tüm mümkün rastlantısal örneklem

(a) İadeli,

(b) İadesiz çekilirse ortalamanın örneklem dağılımının ortalama ve standart sapması ne olur

**Cözüm:**

(a)  $E(\bar{X}) = \mu = 70 \text{ kg}$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3,5}{\sqrt{25}} = 0,7 \text{ kg}$$

(b)  $E(\bar{X}) = \mu = 70 \text{ kg}$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = 0,7 \sqrt{\frac{1000-25}{1000-1}} = 0,69 \text{ kg}$$

**4)** Bir iş yerinde çalışanların maaşlarının yıllık yüzde artışları %10 ortalama ve %2,5 standart sapma ile normal dağılmaktadır. Maaş artışlarının yüzdesinden oluşan bu kitleden 15 birimlik bir rastlantısal örneklem çekilirse, örneklem ortalamasının %8'den az olma olasılığı nedir?

**Cözüm:**

$\sigma = 2,5$  ve  $n = 15$  değerlerinden örneklem ortalamasının standart sapmasını

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2,5}{\sqrt{15}} = 0,65$$

olarak elde ederiz. Buradan

$$P(\bar{X} < 8) = P\left(z < \frac{8 - 10}{0,65}\right) = P(z < -3,08)$$

$$P(\bar{X} < 8) = 0,5 - 0,4990 = 0,001$$



sonucu bulunur. Öyleyse çekilecek 15 birimlik bir rastlantısal örneklemin ortalamasının %8'den daha küçük bir değer alma olasılığı 0,001'dir.

5) Varyansı  $\sigma^2 = 49$  olan bir kitleden çekilen 40 birimlik bir örneklemin ortalaması  $\bar{x} = 179,2$ 'dir. Merkezi limit teoremini kullanarak kitle ortalamasının 181,6 birimden büyük olma olasılığını bulunuz.

**Cözüm:**

Aranan olasılık  $P(\mu > 181,6)$ 'dır. Buradan  $P(-\mu < -181,6)$  yazabiliriz.

$$P(\bar{X} - \mu < \bar{X} - 181,6) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} < \frac{\bar{X} - 181,6}{\sigma_{\bar{X}}}\right) = P\left(z < \frac{\bar{X} - 181,6}{\sigma_{\bar{X}}}\right)$$

$\bar{x} = 179,2$  ve  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{7}{\sqrt{40}}$  değerleri yerlerine konulursa

$$P\left(z < \frac{179,2 - 181,6}{7/\sqrt{40}}\right) = P(z < -2,17) = 0,0150$$

elde edilir.

6) Bir nükleer santralin yapılmasına bir ülkede yaşayanların %25'inin karşı olduğunu varsayalım. 40 birimlik bir rastlantısal örnekleme santralin yapılmasına karşı olanların oranının %27'den fazla olma olasılığını bulunuz.

**Cözüm:**

Aranan olasılık  $P(\hat{p} > 0,27)$  olarak ifade edilebilir. Eşitsizliğin her iki yanından  $p$  çıkartılır ve  $\sqrt{pq/n}$ 'ye bölünürse

$$P\left(\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}} > \frac{0,27 - p}{\sqrt{pq/n}}\right) = P\left(z > \frac{0,27 - 0,25}{\sqrt{(0,25)(0,75)/40}}\right) = P(z > 0,29) = 0,3859$$

sonucu elde edilir.

7)  $\sigma^2 = 32$  varyans ile normal dağılan bir kitleden, 16 birimlik rastlantısal bir örneklem çekilmiştir. Örneklemin varyansının 13,355'ten küçük olması olasılığı nedir?

**Cözüm:**

$P(S^2 < 13,355)$  ifadesinde parantezin içi  $(n - 1)$  ile çarpılır ve  $\sigma^2$ 'ye bölünürse

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{(n-1)13,355}{\sigma^2}\right) = P\left(\chi^2 < \frac{(16-1)13,355}{32}\right) = P(\chi^2 < 6,26)$$

elde edilir. Ki-Kare Tablosunda 15 serbestlik derecesine bakıldığında

$$P(\chi^2 < 6,26) = 0,025$$

olduğu görülür.

## Uygulama Soruları

1) 10 birimden oluşan bir kitlenin olduğunu düşünelim. Bu kitleden iadeli ve iadesiz çekilişle 6 birim seçilecek olsa, tüm mümkün örneklemelerin büyüklüğü kaç olacaktır? Bunu uygulanabilir görüyor musunuz? Açıklayınız.

2) Kitle birim sayısının doğal olarak büyük veya sonsuz olduğu, gerçek bir araştırma sürecinde örnekleme dağılımı nasıl oluşturulabilir?

3) Ekonomik İşbirliği ve Kalkınma Örgütü (OECD), 2012 yılı için ülkelere göre yenı bir eğitim alanına katılan öğrencilerin istatistiklerini yayınlamıştır. Burada 29 ülkedeki, eğitime yeni başlayan veya bir üst eğitime geçen öğrenci sayılarına ulaşabilmektedir. Ülkelerin 29'unun verilerine ulaşmanın maliyetli olduğunu düşünürsek, örnekleme ile, eğitime yeni katılan ortalama öğrenci sayısının kaç olduğu incelenebilir. Bunun için, 29 veriyi kitle kabul ederek,

a) Kitle ortalamasını ve varyansını hesaplayınız.

b) Kitleden rastlantısal olarak çekilen 5 ve 15 birimlik iki örneklem için, örneklem ortalamalarını ve standart sapmalarını hesaplayınız.

c) Nokta tahminde bu örneklemlerden hangisini daha fazla güvenilir bulduğunuzu sonuçlara dayanarak yorumlayınız. Bulduğunuz sonucu hangi eşitlikle destekleyebilirsiniz?

d) Her biri 10 birim olan örneklem seçimi 1000 defa yapılırsa, örnekleme dağılımı elde edilebilir mi?

| Ülkeler    | Öğrenci sayıları |
|------------|------------------|
| Avustralya | 318575           |
| Avusturya  | 55900.47         |
| Belçika    | 44437            |
| Çek Cumh.  | 79874            |
| Denimarka  | 51939            |
| Finlandiya | 44473            |
| Fransa     | 325212           |
| Almanya    | 498854           |
| Yunanistan | 46226            |
| Macaristan | 68779            |
| İzlanda    | 3738             |
| İrlanda    | 29844            |
| İtalya     | 290961           |
| Japonya    | 627264           |

|               |           |
|---------------|-----------|
| Kore          | 481676    |
| Luksemburg    | 1807      |
| Meksiko       | 726585    |
| Hollanda      | 134504    |
| Yeni Zellanda | 48858.68  |
| Norveç        | 50975     |
| Polonya       | 424776    |
| Portekiz      | 76215     |
| Slovakya      | 47775     |
| İspanya       | 256568    |
| İsveç         | 77534     |
| İsviçre       | 44008     |
| Tükiye        | 507155    |
| İngiltere     | 553951.67 |
| Amerika       | 3093077   |

4) Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK) *İşgücü İstatistikleri* verilerinden, *İl Bazında Temel İşgücü (2013)* göstergelerine göre işgücüne katılma oranı iller bazında verilmiştir. 81 ile ilişkin bu oranları kitle birimi kabul ederek,

- a. Kitlenin ortalama iş gücüne katılım oranını hesaplayınız.
- b. Kitleden rastlantısal olarak çekilen 10 ve 50 birimlik iki örneklem için, örneklem ortalamasını hesaplayınız.

5) Bir dijital fotoğraf makinesi, 30TL standart sapma ile ortalama 480TL'ye satılmaktadır. Farklı perakende zincirlerinde satılan bu makineden, rastlantısal olarak seçilen 50'sinde, fiyatının (örneklem ortalamasının) 500TL'nin üzerinde olma olasılığı kaçtır?

6) Fiziksel aktivite sırasındaki bazı bilgiler spor bir bileklikte kaydedilebilmektedir. Her gün bu bilekliği taşıyan bir kişinin rastgele seçilen iki hafta için attığı adım sayısı (cihazın tahmini ile) aşağıdaki gibidir:

9833, 3825, 6613, 7682, 4734, 10625, 3307, 9356, 11603, 4053, 6676, 5985, 6190, 4945

- a) Buna göre 14 gün için örneklem ortalamasını ve örneklem standart sapmasını hesaplayınız.
- b) Söz edilen kişi 100 gündür bu bilekliği kullanıyorsa ve bu 100 gün için kalori harcamalarının standart sapması 120 ise, ortalamanın standart hatası kaç olur?
- c) Ortalama günlük adım sayısı için örnekleme dağılımı oluşturmak üzere tüm mümkün örneklem çekilse örneklem sayısı kaç olur? 100 gün için ortalama adım sayısının kaç eşi olması beklenir? Neden?

## **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Kitlenin tamamının gözlenmesinin mümkün olmadığı durumlarda örneklemeye başvurmak kaçınılmazdır. Seçilen örneklemden gelen bilgiye dayanarak kitleye ilişkin bir yargıya varmak için istatistiksel sürece uygun bir yol izlenir. Bunun için öncelikle, ilerideki bölümlerde ele alınacak konulara da temel oluşturmak üzere, örnekleme ve istatistiksel çıkarsamada geçen temel kavramlar ve kullanılan notasyona ilişkin tanımlama ve açıklamalara yer verildi. Bir istatistiksel çıkarsama sürecinde örnekleme konu olabilecek çeşitli örnekler verilmiş ve bu örnekler üzerinden, okuyucuya bu tür incelemenin özellikleri, gereksinimleri sezdirilmek istenmiştir. Örnekleme söz konusu olduğunda bilimsel araştırmanın adımlarının neler olduğu, hangi kurallarla analiz yapıldığı ana hatlarıyla ortaya kondu. Örnekleme dağılımı kavramı tanıtıldı ve en yaygın kullanılan örneklem istatistiklerinden örneklem ortalaması, oranı ve varyansı için örnekleme dağılımının özellikleri açıklandı. Buradan yola çıkarak kitle parametrelerine dair nasıl değerlendirme yapılabileceğinin ilk işaretleri verildi.

## Bölüm Soruları

1) Bir holdingde çalışan 178 kişinin aylıklarının, ortalaması 3200, standart sapması 700 TL olan bir normal dağılıma sahip olduğu varsayalım. 16 birimlik tüm mümkün rastlantısal örneklem iadeli olarak çekilirse ortalamanın örnekleme dağılımının ortalaması ne olur?

- a) 3200
- b) 2400
- c) 1200
- d) 200

2) Bir holdingde çalışan 178 kişinin aylıklarının, ortalaması 3200, standart sapması 700 TL olan bir normal dağılıma sahip olduğu varsayalım. 16 birimlik tüm mümkün rastlantısal örneklem iadesiz olarak çekilirse ortalamanın örnekleme dağılımının ortalaması ne olur?

- a) 200
- b) 240
- c) 700
- d) 3200

3) Bir holdingde çalışan 178 kişinin aylıklarının, ortalaması 3200, standart sapması 700 TL olan bir normal dağılıma sahip olduğu varsayalım. 16 birimlik tüm mümkün rastlantısal örneklem iadeli olarak çekilirse ortalamanın örnekleme dağılımının standart sapması ne olur?

- a) 700
- b) 200
- c) 175
- d) 100

4) Bir holdingde çalışan 178 kişinin aylıklarının, ortalaması 3200, standart sapması 700 TL olan bir normal dağılıma sahip olduğu varsayalım. 16 birimlik tüm mümkün rastlantısal örneklem iyadesiz olarak çekilirse ortalamasının örneklem dağılımının standart sapması ne olur?

- a) 658,3
- b) 334,2
- c) 167,4
- d) 125,1

5) Bir ülkede yaşayanların %35'inin sigara kullandığını varsayalım. 121 birimlik bir rastlantısal örneklemde sigara içenlerin oranının %40'dan fazla olma olasılığını bulunuz.

- a) 0,3500
- b) 0,1244
- c) 0,1165
- d) 0,0961

6) Türkiye'de bir futbol takımını destekleyenlerin içindeki Fenerbahçelilerin oranının %25 olduğunu varsayalım. 150 birimlik bir rastlantısal örneklemde Fenerbahçelilerin oranının %20'den az olma olasılığını bulunuz.

- a) 0,0786
- b) 0,1453
- c) 0,1861
- d) 0,2869

7) Türkiye'de yüksek öğrenim gören kadınların IQ'larının varyansının 154 olduğu varsayalım. 36 kadına uygulanan IQ testinin skorlarının varyansının 140'dan küçük olma olasılığı kaçtır?

- a) 0,0657
- b) 0,3775
- c) 0,4679
- d) 0,6239

8) Bir fırındaki ekmeklerin ağırlıklarının varyansının 45 olduğu varsayılın. Rastlantısal olarak çekilen 25 ekmeğin varyansının 50'den büyük olma olasılığı kaçtır?

- a) 0,2607
- b) 0,3202
- c) 0,3519
- d) 0,4776

9) Türkiye'de yüksek öğrenim gören kadınların IQ'larının varyansının 154, ortalamasının 105 olduğu varsayılın. 36 kadına uygulanan IQ testinin skorlarının ortalamasının 100'den küçük olma olasılığı kaçtır?

- a) 0,5481
- b) 0,3406
- c) 0,1125
- d) 0,0078

10) Bir fırındaki ekmeklerin ağırlıklarının varyansının 45 ,ortalamasının 500 gram olduğu varsayılın. Rastlantısal olarak çekilen 16 ekmeğin ortalamasının 450'den büyük olma olasılığı kaçtır?

- a) 0,8003
- b) 0,8201
- c) 0,9632
- d) 0,9802

### Cevaplar

1) a , 2) d , 3) c , 4) a , 5) b , 6) a , 7) b , 8) b , 9) d , 10) c



## **2. ÖRNEKLEME YÖNTEMLERİ**

### **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

Bu bölümde örnekleme yöntemlerinden basit rastlantısal örnekleme, kümeli örnekleme, tabakalı örnekleme, sistematik örnekleme konuları öğrenilecektir.

### **Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular**

- 1) Facebook, Twitter, Instagram vb. gibi bir sosyal medya platformundaki listenizde yer alan kişilerin ortalama yaşını tahmin etmek için hangi örnekleme yöntemini kullanırsınız?
- 2) Birinci sorunun yanıtı için örneklem büyüklüğü listenizin yüzde kaçından oluşmalıdır?
- 3) Rastlantısal örnekleme için neden bilgisayarlara ihtiyaç duyarız?

### **Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri**

| <b>Konu</b>                                                                                                   | <b>Kazanım</b>                                                                                                                                      | <b>Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği</b>                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Örnekleme yöntemleri, basit rastlantısal, kümeli, tabakalı ve sistematik örnekleme konularına değinilecektir. | Çeşitli örnekleme tekniklerine göre örneklem seçiminin nasıl gerçekleştiği öğrenilecek, bu yöntemlerin üstün ve zayıf tarafları bilinmiş olacaktır. | Metinler, çözümlü problemler, alıştırımlar ve apletler ile konuların daha kolay anlaşılması sağlanacaktır. |

### **Anahtar Kavramlar**

- Olasılıklı örnekleme
- Olasılıklı olmayan örnekleme
- Örneklem çerçevesi
- Örneklem hatası
- Basit rastlantısal örnekleme
- Kümeli örnekleme
- Tabakalı örnekleme
- Sistematiik örnekleme

## Giriş

Eğitim, işsizlik, sağlık, ekonomi, tarım, pazarlama, suç, iş memnuniyeti, seçim gibi alanlardaki, hipotetik değil de gerçek yaşama dair, gerçek bir araştırmada, sürecin kendisi deney olarak düşünülebilir ve güvenilir bilgi edinecek sonuca ulaştırması için, bir tasarım gerektirir: ilk adımda problem belirlenir, bilimsel soru netleştirilir. Sonraki adımda ilgili kitle ve araçlar belirlenir. Sonrasında örnekleme gerekliliği olup olmadığına, varsa örnek seçiminin nasıl olması gerektiğine ve elde edilen veriye dayalı gerçekleştirilecek analiz yönteminin ne olması gerektiğine karar verilir.

Demek ki, bir açıdan örnekleme yönteminin seçilmesi ve uygulanması tasarlanan deneyin araştırma adımlarından biridir. Örneklemenin temel kavramları bölümünde, bazı kavramlara açıklık getirmiştik. Örnekleme, araştırmacının kitlenin tamamını gözlemeden, kitleyi temsil eden bir resmine ulaşmasını sağlar. Peki bu işlem nasıl gerçekleştirilecektir? Yani örnekleme yöntemi ne olacaktır?

## 2.1. Örneklem Yöntemleri

Bir araştırmada, verinin yani kitlenin doğasını yansıtacak bilgiyi elde etmek için ya tam sayım yapılır ya da örneklem elde edilir. Söz gelimi çok nadir görülen bir psikolojik eğilime ilişkin bir araştırmada örneklem yapmak elbette gereksiz olacaktır. Onun yerine gözlemleyebildiğiniz her birimi incelemek daha yerinde bir tercih olur. Öte yandan diyelim ki özel sektörde çalışan memnuniyetine verilen öneme ilişkin bir araştırmada gözlenecek birim sayısının çok olması, maliyeti ve süreyi artıracığından, hatta belki yapılmasını olanaksız kılacağından örneklemeye başvurmak kaçınılmaz olacaktır. Böylelikle örneklem sayesinde zaman ve maliyetten tasarruf yapılabilir ve örneklem daha geniş bir perspektif sunabilir, yapılan incelemenin kalitesini artırabilir.

Örneklemin detaylarına ineceğimize göre, bir önceki bölümünde açıkladığımız kavramlara bir ilave de bu bölümde yaparak bazı kavramlara açıklık getirelim. **Örneklem çerçevesi** basitçe ilgili kitledeki tüm birimlerin yer aldığı listedir. Örneğin bir işyerinde çalışanların listesi veya tüm belediyelerde çalışanların listesi birer örneklem çerçevesidir. **Örneklem hatası** ise kitle yerine örneklem kullanılması nedeniyle ortaya çıkan hatadır. O halde bir örneklem sürecindeki adımları sıralayabiliriz:

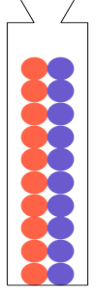
- 1) Kitlenin tanımlanması
- 2) Örneklem çerçevesinin tespiti
- 3) Örneklem büyüklüğünün belirlenmesi
- 4) **Örneklem yönteminin seçilmesi**
- 5) Örneklem seçimi

Şimdi özellikle örneklem sürecindeki dördüncü adım olan ve önemli ayrıntılar içeren örneklem yöntemlerine odaklanalım. Örneklem yöntemleri, olasılıklı (ya da rastlantısal) ve olasılıklı olmayan (ya da rastlantısal olmayan) örneklem biçiminde iki ana gruba ayrılır. **Olasılıklı örneklem** yönteminde kitledeki her birimin örneklem dahil olma olasılığı sıfırdan büyüktür, yani seçilmeme olasılığı yoktur ve olasılık kurallarına göre elde edilir. Yani örneğin belirli bir hastalığı taşıyan belirli yaş grubundakilere uygulanacak ilaç tedavisi üzerine yapılan araştırmada, örneklem bu yaş grubundaki bu hastalığı taşıyanlar içinden yapılacaktır. Dolayısıyla tüm bu yaş grubundaki hasta kişilere ulaşılabilir ve herhangi birini atlamadan eşit seçilme şansı tanınabilir ve edinilenlere dayanarak genelleme yapılabilir durumdadır. **Olasılıklı-olmayan örneklem** yönteminde ise kitleden örneklemin seçilmesi olasılık kurallarıyla yürütülmez. Bazı birimleri seçmek olanaksızdır, zira kitlenin tamamının ne olduğunu ve büyüklüğünü tespit etmek imkansızdır. Dolayısıyla tamamen rastlantısal bir örneklem gerçekleştirilemez.

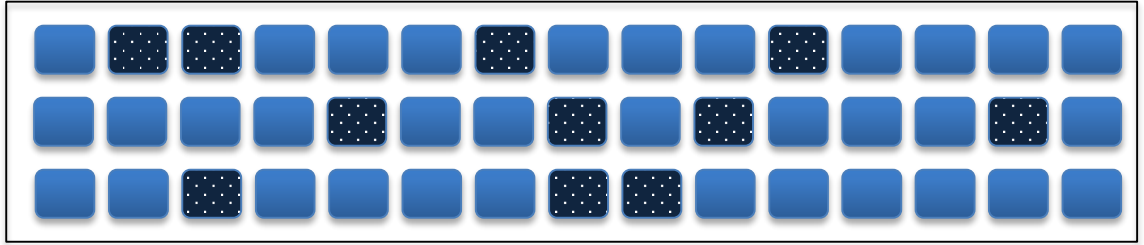
Sözünü ettiğimiz örneklem sınıflandırmasına göre olasılıklı örneklem türündeki dört örneklem yöntemini detaylı olarak ele alacağız; basit rastlantısal, kümeli, tabakalı ve sistematik örneklem.

### 2.1.1. Basit Rastlantısal Örneklem

Basit rastlantısal örneklem yönteminde, seçme işlemi tamamen rastlantısal ve her birimin eşit seçilme olasılığı vardır. Aynı zamanda seçilen birimlerden oluşacak her kombinasyonun da seçilme olasılığı eşittir. Böylelikle seçilen birimlere, örneklemin her birimine eşit ağırlık verilmiş olur. Bir kavanozdan yapılan çekilişler veya sıralı bir listeden Monte Carlo simülasyon ile yapılan rastlantısal çekilişler birer basit rastlantısal örneklem yöntemidir.



Kitle homojen olduğunda ve çok büyük olmadığında başvurulabilir. Örneklem çerçevesindeki her birime bir sayı tayin edilir. Daha sonra rastlantısal sayı tablosundan veya çekiliş yöntemi ile seçim işlemi gerçekleştirilir. Aşağıdaki şekildeki gibi birimler rastlantısal olarak seçilir.



#### *Kitle ortalamasının, varyansının ve bütünüünün tahmini*

Kitle ortalaması ve varyansının en yaygın başvuru betimleyici ölçüler olduğunu biliyoruz. Toplam harcamalar, gelir gibi kitlenin bütünüünün değeri ile ilgilendiğimiz durumlar olduğundan, ortalama ve varyansa ilave olarak kitle bütünüünün tahminini de ele almak önemlidir. Şimdi bu ölçülerin tahminlerinin nasıl bulunduğuna değinelim. Bilindiği gibi iadeli ve iadesiz olmak üzere 2 çekiliş yapılabilir. Burada konu, iadesiz seçim durumu için ele alınmıştır. Kullanacağımız notasyon şöyledir:

$N$  : kitledeki birim sayısı

$n$  : örneklem büyüklüğü

$X_1, \dots, X_N$  : ilgilenilen değişken

Kitle ortalaması  $\mu = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$

$\tau$  : kitle bütünü  $\tau = x_1 + x_2 + \dots + x_N = \mu \times N$

Örneklem ortalaması  $\bar{x} = \hat{\mu} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

Kitle bütünüünün tahmini  $\hat{\tau} = \bar{x} \times N$

Kitle varyansı  $\sigma^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \mu)^2}{N}$



Örneklem varyansı

$$s^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Son olarak basit rastlantısal örnekleme yönteminin üstün ve zayıf yönlerini değerlendirelim; basit rastlantısal örnekleme ile, örnekleme sonrası tahminleri elde etmek işlemleri zor değildir. Örnek çekilecek örneklem çerçevesi çok büyükse yöntemi gerçekleştirmek güçleşir.

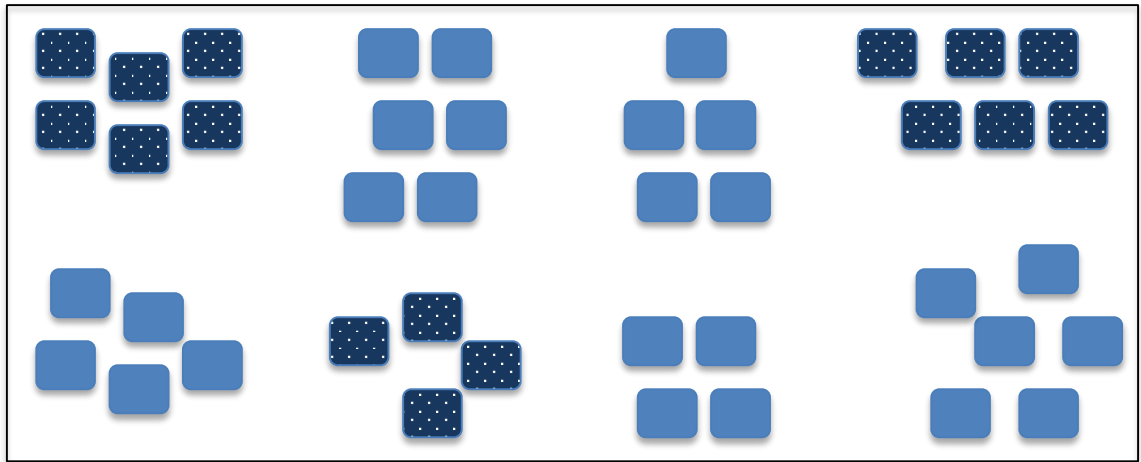
### 2.1.2. Kümeli Örnekleme

Kümeli örnekleme, ilk aşamada örneklemin alanının seçildiği, ikinci aşamada ise bu alandaki gruplanmış kümelerden seçimin yapıldığı, iki aşamalı bir örneklemedir. Yani kitle coğrafi veya başka çeşitli özelliklere göre gruplara ayrılır. Sonra bu oluşturulan kümeler arasından, kümeler birer birim gibi seçilir.

Kitle birimlerinin bir listesi oluşturulamıyorsa veya bu listeyi hazırlamak çok maliyetli oluyorsa kümeli örnekleme başvurulabilir. Liste mevcut olsa bile, kitledeki birimlere ulaşmak güç ise yine kümeli örnekleme uygulanabilir.

Kitle, genellikle coğrafi yakınlığına göre birbiriyle aynı nitelikte birimleri olan kümlere ayrılır. Örneğin şehirlere veya okullara göre. Daha sonra bu kümeler seçilerek, örneklem oluşturulur. Böylelikle seçilen kümlerdeki tüm birimler analizde dikkate alınır.

Kümeler şöyle oluşturulur. Öncelikle diyelim ki ilgilenilen bölgedeki tüm köy, kasaba, il nüfusu listelenir. Daha sonra birikimli nüfus hesaplanarak 30'a bölünür ki bu bize örneklem büyüklüğünü verir. Sonra bu örneklem büyüklüğüne eşit veya ondan küçük, aynı haneli rastlantısal sayı seçilir. Bu ilk kümedir. Rastlantısal sayıya örneklem büyüklüğü eklenerek bulunan değer 2. kümenin büyüklüğünü verir. 2. kümeye örneklem büyüklüğü eklenirse 3. küme bulunur ve bu 30. kümeye kadar devam eder.



Yukarıdaki şekilde temsili olarak açıklayıcı olabilir; belirlenen kümeler arasından kümeler seçilerek (koyu renkliler) kümeli örnekleme gerçekleştirilir.

### ***Kitle ortalamasının ve bütününün tahmini***

Kullanacağımız notasyon şöyledir:

$N$  : kitledeki küme sayısı

$n$  : örneklemden küme sayısı

$M_i$ :  $i$ . kümedeki birim sayısı

Kitledeki birim sayısı  $M = \sum_{i=1}^N M_i$

$x_{ij}$  : ilgilenilen değişkenin  $i$ . kümedeki  $j$ . biriminin değeri

$x_i = \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij}$  :  $i$ . kümedeki tüm  $x$  değerlerinin toplamı

$\tau$  = kitle bütünü  $\tau = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij} = \sum_{i=1}^N x_i$

Kitle ortalaması küme başına  $\mu_1 = \frac{\tau}{N}$

Kitle ortalaması birim başına  $\mu = \frac{\tau}{M}$

Kitle bütününün tahmini  $\hat{\tau} = \bar{x} \times N = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \times N$

Kitle bütününün varyansı  $Var(\hat{\tau}) = N \cdot (N - n) \cdot \frac{s_u^2}{n}$   $s_u^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

Küme başına ortalamanın tahmini  $\bar{x} = \frac{\hat{\tau}}{N}$   $Var(\bar{x}) = \frac{1}{N^2} Var(\hat{\tau})$

Birim başına ortalamanın tahmini  $\hat{\mu} = \frac{\hat{\tau}}{M}$   $Var(\hat{\mu}) = \frac{1}{M^2} Var(\hat{\tau})$

Son olarak kümeli örnekleme yönteminin avantaj ve dezavantajlarını değerlendirirsek; kümeli örnekleme sayesinde, örneklem çerçevesinin hazırlanması işlemi ortadan kalkar. Bu da pek çok bakımdan maliyetin düşmesini sağlar. Kümeler birbirine benzer olduğunda hata daha düşük olur ve birbirine benzer olmayan kümelerden oluşan kümeli örneklemede hata yüksek olur. Öte yandan aynı büyüklükte seçilecek basit rastlantısal örnekleme göre örneklem hatası daha büyük olur. Örneklem büyük olduğunda

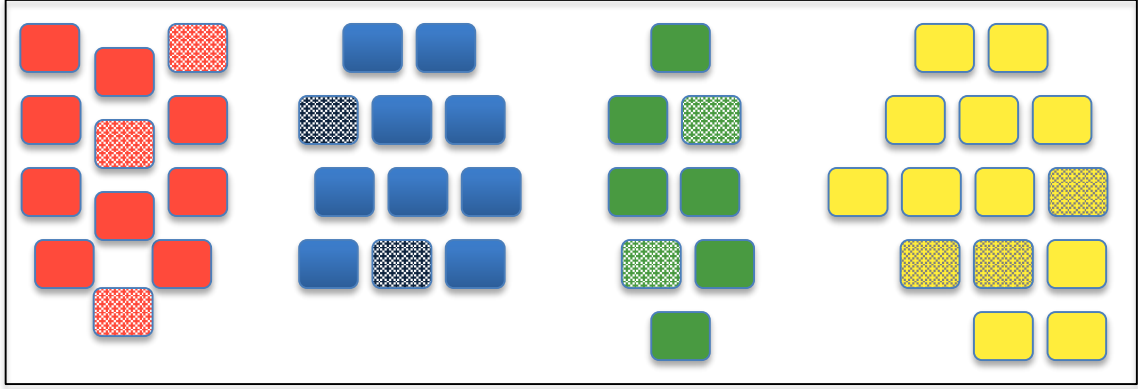
kümelemenin maliyeti daha da düşebilir. Ancak tabi birimleri ayıran farklar arttıkça, gözlemleri elde etmenin maliyeti de artar.

### 2.1.3. Tabakalı Örneklem

Eğer kitle farklı kategorilerden oluşuyorsa, örneklem çerçevesi ayrı tabakalara bölünür. Örneğin yaş veya cinsiyet gibi. Her tabakadan bağımsız rastlantısal örneklem seçilir. Dolayısıyla bir tabakadaki her birimin seçilme şansı eşittir. Ayrıca her bir tabaka, ayrı bir kitle gibi kabul edilebileceğinden, başka bir örneklem yöntemi ile seçim yapmak da mümkün olabilir.

Sadece kitleye ilişkin tahminlerin değil, alt gruplarının da (yani tabakalarının da) tahmini önemli olduğu zaman tabakalı örnekleme başvurmak yararlı olabilir.

Tabakalı örnekleme aşağıdaki gibi temsili bir şekilde açıklanabilir.



#### ***Kitle ortalamasının ve bütünüünün tahmini***

Kullanacağımız notasyon şöyledir:

$L$  : Tabaka sayısı

$N_h$  :  $h$ . tabakadaki birim sayısı

$n_h$  :  $h$ . tabakadan seçilen örneklem sayısı

$N = N_1 + N_2 + \dots + N_L$  : kitledeki toplam birim sayısı

$n = n_1 + n_2 + \dots + n_L$  : örneklemdeki toplam birim sayısı

$x_{hj}$  : ilgilenilen değişkenin  $h$ . tabakadaki  $j$ . biriminin değeri

Kitle bütünüünün tahmini  $\hat{t}_{tab} = \sum_{h=1}^L \hat{t}_h$   $\hat{t}_h = N_h \bar{x}_h$

Kitle bütününün varyansı  $Var(\hat{\tau}_{tab}) = \sum_{h=1}^L Var(\hat{\tau}_h)$

Kitle bütününün varyansının tahmini  $\widehat{Var}(\hat{\tau}_{tab}) = \sum_{h=1}^L \widehat{Var}(\hat{\tau}_h)$

$$\widehat{Var}(\hat{\tau}_{tab}) = \sum_{h=1}^L N_h \cdot (N_h - n_h) \cdot \frac{s_h^2}{n_h} \quad \text{ve} \quad s_h^2 = \sum_{i=1}^{n_h} \frac{(x_{hi} - \bar{x}_h)^2}{n_h - 1}$$

$$\text{Örneklem ortalaması } \bar{x}_{tab} = \sum_{h=1}^L \frac{N_h \bar{x}_h}{N} \quad \text{ve} \quad Var(\bar{x}_{tab}) = \sum_{h=1}^L \left( \frac{N_h}{N} \right)^2 \cdot \left( \frac{N_h - n_h}{N_h} \right) \cdot \frac{s_h^2}{n_h}$$

$$\text{Kitle ortalamasının tahmini} \quad \hat{\mu}_{tab} = \frac{\hat{\tau}_{tab}}{N} \quad Var(\hat{\mu}_{tab}) = \frac{1}{N^2} Var(\hat{\tau}_{tab})$$

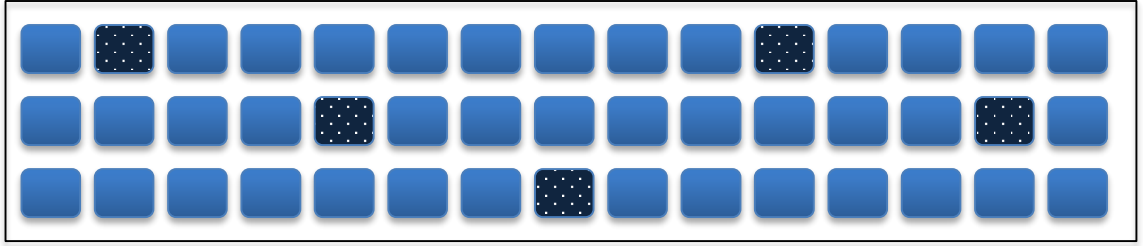
Tabakalı örnekleme yönteminin avantaj ve dezavantajlarını değerlendirirsek; bu yöntemle, verinin doğasında olan farklı kategoriler, eşit biçimde temsil edilmiş olunur. Basit tesadüfî örnekleme yapmak yerine birbirinden farklı grupları içeren bir kitleden tabakalı örnekleme yapmak hatayı azaltabilir. Çok sayıda küçük grup seçilmesi, gruplar arası karşılaştırmayı daha iyi hale getirebilir. Öteye yandan girift bir şekilde tasarlanan tabakalı örnekleme, tabakalara ayırmanın faydasını azaltabilir. Ayrıca tabaka sayısı arttıkça, tabakalı örneklemede örneklem sayısının büyük olması ihtiyacı ortaya çıkar. Örnekleme öncesinde kitleyi tabakalara ayırmak maliyeti arttırabilir.

#### 2.1.4. Sistematik Örnekleme

Sistematik örnekleme yönteminde ilgilenilen kitleden belirli bir sisteme göre çekiliş yapılır. Kitle elemanlarına bir sıra verilir ve belirli aralıklarla bu sıralanan listeden elemanlar seçilir. Aslında yine her birimin eşit seçilme olasılığı vardır ancak basit rastlantısal örneklemeden farklıdır. Çünkü aynı büyüklükteki farklı örneklemelerin seçilme olasılıkları aynı değildir. Yani birimlerin kombinasyonları farklı olasılığa sahiptir. Diyelim ki elimizdeki listeden 1'den başlayarak her 5 elemanda bir tane seçeceksek; {1, 6, 11, 16, 21, 26} şeklinde bir alt kümeyi elde etme olasılığı 1/5 iken, {1, 6, 10, 16, 21, 26} elde etmenin olasılığı sıfır olacaktır.

Sık olarak başvuru olan bir yöntemdir. Özellikle iyi bir örneklem çerçevesi belirlenemiyorsa, uygulamada kolaylık sağlar.

Rastlantısal olarak bir elemandan başlanır ve her  $i$ . elemanda bir eleman seçilir. Bu durumda  $i$  şöyle hesaplanabilir:  $i = \frac{\text{kitledeki birim sayısı}}{\text{örneklem büyüklüğü}}$  Örneğin ticaret odasına kayıtlı firmaların listesinde her 20. firma isminin seçilmesi gibi, yani sırayla 20 firmada birinin seçilmesi. Şu şekilde gösterebiliriz; kitledeki birim sayısı ( $N$ ) = 45, örneklem büyüklüğü ( $n$ ) = 5 ise  $i = 9$  olur. 1 ile 10 arasındaki sayılardan rastlantısal olarak 2 seçilirse, 2'den başlayarak aşağıdaki şekildeki birimler seçilir.



Başlangıç noktasına  $k$  dersek örneklem;  $k, (k + i), (k + 2i), \dots, (k + (n - 1)i)$  sırasındaki birimleri içerecektir. Dolayısıyla örnekteki sıralama; 2, 11, 20, 29 ve 38'inci birimlerin seçildiğini gösterir.

### ***Kitle ortalamasının ve bütünü'nün tahmini***

Kullanacağımız notasyon şöyledir:

$N$  : kitledeki birim sayısı

$n$  : örneklem büyüklüğü

$X_1, \dots, X_N$  : ilgilenilen değişken

Kitle ortalaması  $\mu = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$

Örneklem ortalaması  $\bar{x} = \hat{\mu} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$  ve  $\widehat{Var}(\bar{x}) = \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{s^2}{n}$

$\tau$  : kitle bütünü  $\tau = x_1 + x_2 + \dots + x_N = \mu \times N$

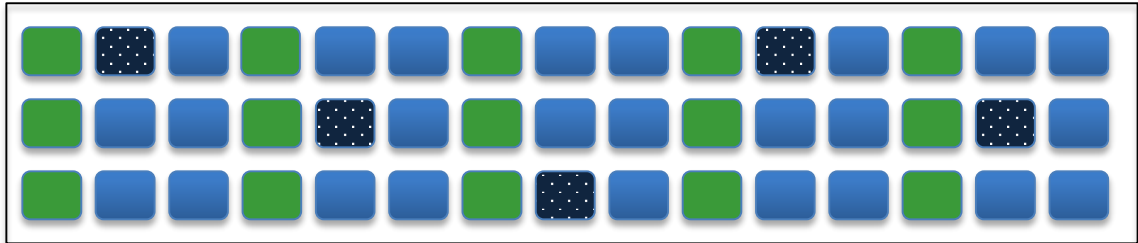
Kitle bütünü tahmini  $\hat{t} = \bar{x} \times N$  ve  $\widehat{Var}(\bar{x}) = N^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{s^2}{n}$

Kitle varyansı  $\sigma^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \mu)^2}{N}$

Örneklem varyansı  $s^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

Burada  $n = 1$  olduğu durumda örneklem varyansının hesaplanamayacağına dikkat etmek gerekir.

Sistemik örnekleme yönteminin avantaj ve dezavantajlarını değerlendirirsek; örneklem çerçevesi rahatlıkla belirlenebilir ve örnekleme işlemi kolayca gerçekleştirilebilir. Kitle içerisinde bir yere yığılmış değil de eşit yayılmış birimlerden seçim gerçekleştirilir. Liste gruplanmış şekilde hazırlanırsa farkında olmadan tabakalı örnekleme yapılmış olur. Öte yandan, listede farkında olmadan bazı elemanlar aynı aralıklarla tekrar ediyorsa, ve bunlar seçilmiyorsa, örneklem yanlı olabilir. Örneğin aşağıdaki şekilde yeşil karakterde olanlar aynı aralıkta yer alıyor ve seçilenlerden olamıyor.



Ayrıca bir tek araştırmaya dayanarak tahminin kesinliğini değerlendirmek zordur. Çok fazla eksik gözlem olması durumunda işe yaramayabilir.

## Uygulamalar

1) Bir büyük hastanede 2500 hastanın kaydı vardır. Kayıtlara göz atmak isteyen bir uzman 200 kaydı rastlantısal olarak nasıl seçer?

### Cözüm:

Kayıtlı hasta listesinde her bir kayda 1'den 2500'e bir sayı verilir. Daha sonra bilgisayar ile 1'den 2500'e kadar olan sayılar arasından 200 tane rastlantısal çekiliş yaptırılır.

2) Bir ilçedeki başıboş dolaşan sokak kedisi sayısını tahmin etmek için, ilçedeki alanı 50 eşit birime böldüğünüzü düşünün. Basit rastlantısal örneklemeyle, 6 birim çektiğinizde, bulduğunuz kedi sayısı 13, 10, 34, 50, 78 ve 43 ise kitle bütünü tahmini (yani ilçedeki sokak kedisi sayısı toplam) kaç olur?

### Cözüm:

Örneklem ortalaması

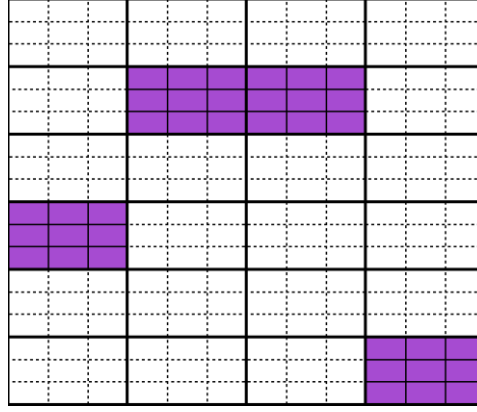
$$\bar{x} = \hat{\mu} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{13 + \dots + 43}{6} = 38$$

ise, kitle bütünü

$$\hat{t} = \bar{x} \times N = 38 \times 50 = 1900$$

olarak bulunur.

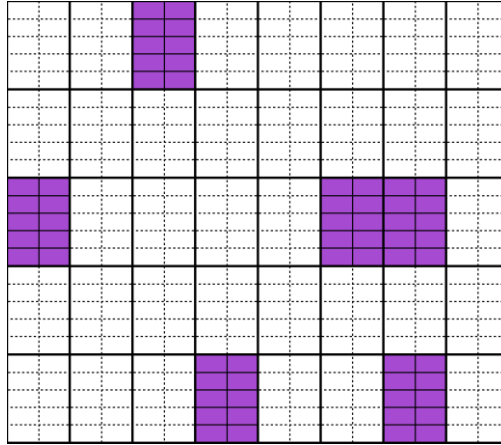
3) Aşağıdaki şekle göre kitledeki küme sayısı  $N = 24$ , örnekleme ile seçilen küme sayısı  $n = 4$  ve her bir kümedeki birim sayısı  $M_i = 9$  verilmiştir.



Buna göre,  $N = 40$ ,  $n = 6$  ve  $M_i = 10$  için küme örneklemesini temsili olarak gösteriniz.

**Cözüm:**

Soruda verilen örneğe benzer biçimde aşağıdaki gibi temsil edilebilir.



4) Kitle 6480 öğrenciden oluşuyorsa, 180 öğrenciyi sistematik örnekleme yöntemi ile nasıl seçilir? Açıklayınız.

**Cözüm:**

Öncelikle

$$i = \frac{6480}{180} = 36$$

hesaplanır. Daha sonra örneklemeye başlanacak nokta rastlantısal olarak belirlenir. Bu başlangıç noktasının 14 olduğunu düşünelim. Örneklemeye başladığımız bu 14. sıradan itibaren, her 36. öğrencide bir olan öğrenci seçilir. Seçilen öğrenci sayısı 180'e ulaşıncaya örnekleme bitmiş olur. Seçilenler şu sıradadır:

$$14, 50, 86, 122, 158, 194, 230, 266, 302, 338, \dots, 6422, 6458$$



5) Sistematik örnekleme yöntemi ile 400 öğrenci arasından seçilen 8 öğrencinin, evlerindeki bilgisayar sayılarına ilişkin verdikleri bilgi aşağıdaki tabloda verilmiştir. Rastlantısal olarak belirlenen başlangıç noktası 3'tür. Her  $i = \frac{400}{8} = 50$ 'inci öğrencide bir seçim yapılırca 3, 53, 103, 153, 203, 253, 303, 353 sırasındaki öğrenciler seçilmiş olunur.

| Başlangıç noktası | İkinci birim | Üçüncü birim | Dördüncü birim | Beşinci birim | Altıncı birim | Yedinci birim | Sekizinci birim |
|-------------------|--------------|--------------|----------------|---------------|---------------|---------------|-----------------|
| 3                 | 53           | 103          | 153            | 203           | 253           | 303           | 353             |
| 2                 | 3            | 4            | 1              | 0             | 2             | 3             | 3               |

Buna göre kitle ortalamasının tahmini kaçtır?

**Cözüm:**

Sistematik örnekleme için kitle ortalamasının tahmini

$$\bar{x} = \hat{\mu} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{2 + 3 + \dots + 3}{8} = 2.25$$

olarak bulunur.

6) Bir ildeki huzurevlerinde 60 ile 90 yaş arasındaki yaşlıların boy ortalamasını bulmak için tabakalı örnekleme yöntemi nasıl uygulanır?

**Cözüm:**

Yaş ilerledikçe ortaya çıkan fizyolojik değişim, boy kısalmasına yol açabilmektedir. O nedenle 60-90 yaş arası yaşlıları 3 tabakaya ayırıp, her tabakanın ortalamasını elde etmek yerinde olacaktır:

60-70 yaş arası yaşlılar: Tabaka 1

70-80 yaş arası yaşlılar: Tabaka 2

80-90 yaş arası yaşlılar: Tabaka 3

olarak ayrılır. Artık belirlenen tabakalardan basit rastlantısal örnekleme yapılabilir. Seçilen örneklemler en son birleştirilir.

7) Bir şehirde hizmet veren internet sağlayıcısı bir firma, pazarlama politikasını belirlemek adına, internet başında geçirilen ortalama süreyi tahmin etmek istiyor. 3 ilçeden oluşan şehir, ilçeleri bazında farklılaşmaktadır. Birinde hanehalkı yerleşim özelliği gereği iş sahalarına yakın olduğundan fabrikada çalışanları ağırlıkta, diğeri kırsal bölgeye yakın olduğundan çiftçilik yapmakta, üçüncüsünde ise ağırlıklı olarak emekli kesimin ikamet ettiği bilinmektedir. Şehirdeki bu üç ilçedeki hanehalkı sayıları ile seçilen birimlerin internet başında geçirdikleri zaman bilgisi (günde saat) aşağıdaki tabloda verilmiştir:

|                                          |                     |             |
|------------------------------------------|---------------------|-------------|
| 1. İlçe fabrika çalışanları (ilk tabaka) | 2,3,1,5,6,4,3,5,2,2 | $N_1 = 100$ |
| 2. İlçe çiftçiler (ikinci tabaka)        | 2,5,3,2,3,3,4       | $N_2 = 70$  |
| 3. İlçe emekliler (üçüncü tabaka)        | 6,2,8,5             | $N_3 = 40$  |

Buna göre kitle ortalamasının ve kitle bütünüünün tahmini kaç olur?

**Cözüm:**

$$L = 3 \quad N_1 = 100 \quad N_2 = 70 \quad N_3 = 40 \quad N = 100 + 70 + 40 = 210$$

$$n_1 = 10 \quad n_2 = 7 \quad n_3 = 4$$

Kitle bütünüünün tahmini  $\hat{t}_h = N_h \bar{x}_h$

$$\bar{x}_1 = 3,3 \quad \hat{t}_1 = N_1 \bar{x}_1 = 100.3,3 = 330$$

$$\bar{x}_2 = 3,14 \quad \hat{t}_2 = N_2 \bar{x}_2 = 70.3,14 = 220$$

$$\bar{x}_3 = 5,25 \quad \hat{t}_3 = N_3 \bar{x}_3 = 40.5,25 = 210$$

$$\hat{t}_{tab} = \sum_{h=1}^L \hat{t}_h$$

$$\hat{t}_{tab} = \sum_{h=1}^3 \hat{t}_h = 330 + 220 + 210 = 760 \text{ iken,}$$

Kitle ortalamasının tahmini  $\hat{\mu}_{tab} = \frac{\hat{t}_{tab}}{N} = \frac{760}{210} = 3.62$  olarak bulunur.

## Uygulama Soruları

1) Bir şehirde hanehalkı başına, yıllık ortalama eğlence ve kültür harcamasının ne olduğunu tahmin etmek üzere bir araştırma yapılmıştır. Toplam 2400 hanehalkının yaşadığı bu yerde, araştırmacı şehri 340 kümeye ayırmıştır. Bu 340 küme içinden 7 küme rastlantısal olarak seçilmiştir. Elde edilen bilgi tablodaki gibidir:

| Küme                                               | 1    | 2     | 3    | 4     | 5    | 6     | 7    |       |
|----------------------------------------------------|------|-------|------|-------|------|-------|------|-------|
| Hanehalkı sayısı $M_i$                             | 4    | 7     | 5    | 8     | 6    | 12    | 3    | 45    |
| Küme $x_i$ için toplam eğlence ve kültür harcaması | 5000 | 10000 | 7000 | 12000 | 8200 | 16000 | 3000 | 61200 |

Verilenlere göre, şehirde hanehalkı başına, yıllık ortalama eğlence ve kültür harcaması ne kadardır? Hesaplayınız.

2) Diyelim ki Türkiye’de Japon marka arabalara ilişkin tüketici eğilimleri konusunda bir araştırma yapmanız gerekiyor. Örneklem çerçeveniz ve örnekleme yöntemi tercihiniz ne olur? Nedenleriyle açıklayınız.

3) Psikolojik travma geçiren kişilerde, hafıza performansının nasıl etkilendiği, kadın ve erkekler arasında farklılık olup olmadığı araştırılmak isteniyor olsun. Hafıza performansını ölçmede hafıza endeksi kullanılabilmektedir. Bu tür bir araştırmada kitle, örneklem çerçevesi ne olur? Hangi örnekleme yöntemi tercih edilebilir? Açıklayınız.

a) Araştırma yaş grupları bakımından farklılık olup olmadığını incelemek üzere tasarlanırsa örnekleme sürecinde tercih edilecek örneklem yöntemi değişir mi ne olur?

b) Yaşanılan çevrenin, örneğin kent ve kır hayatı olması durumuna göre etkilemesi araştırılıyor olsa örnekleme yöntemi tercihi ne olmalıdır?

4) Yeni bir düzenleme yapmayı düşünen bir büyük firma, çalışanlar ile bu konuyu görüşmek istemektedir. Tamamına ulaşmak zaman bakımından oldukça maliyetli ve hatta belki imkansız olduğundan, örneklem oluşturulacaktır. Çalışanlar hizmet sürelerine göre gruptandırılırsa hangi örnekleme yönteminin adımını gerçekleştirmiş olur?

5) TÜİK 2013 yılı [yaşam memnuniyeti araştırması](#)nda iki aşamalı tabakalı küme örnekleme yöntemi kullanılmaktadır. Birinci aşamada ortalama 100 haneden oluşan kümeler örnekleme seçilmiş, ikinci aşamada ise örnekleme seçilen kümelerden sistematik örnekleme yöntemi kullanılarak seçilecek adresler belirlenmiştir.

Kır yerleşim yerlerinden toplam 3810 küme, kent yerleşim yerlerinden ise 5000 küme olmak üzere toplam 8810 küme örnekleme seçilmiştir. Kır yerleşim yerlerinden 45720 hane (her kümeden 12 hane), kent yerleşim yerlerinden ise 80 000 hane (her kümeden 16

hane) olmak üzere toplam 125720 hane örnekleme seçilmiştir. Örneklemdaki bu hanelerden 103312 hane ile görüşme yapılmıştır.

Araştırma sonucu elde edilen özet tablolara göre neden bu tür örnekleme yapıldığını değerlendiriniz.

6) TÜİK 2012’de gerçekleştirdiği [Türkiye sağlık araştırması](#)nda sağlık göstergelerine ilişkin bilgileri edinmek amacıyla çalışma yapmıştır. Araştırmada, tabakalı iki aşamalı küme örnekleme yöntemi kullanmıştır. Tabakalama kriteri olarak kır–kent ayrımı kullanılmıştır. (Nüfusu 20 000 ve altında olan yerleşim yerleri kır, nüfusu 20 001 ve üstünde olan yerleşim yerleri kent olarak ele alınmıştır). Birinci aşama örnekleme birimi ortalama 100 hane adresi ihtiva eden kümeler (bloklar) içerisinde seçilen bloklar; ikinci aşama örnekleme birimi ise seçilen her kümeden sistematik olarak seçilen hanehalklarıdır.

Uygulanan anketi, araştırma sonucu elde edilen özet tabloları inceleyerek, neden bu tür örnekleme yapıldığını değerlendiriniz.

7) TÜİK 2010’da gerçekleştirdiği [Girişimlerde mesleki eğitim araştırması](#) ile, girişimlerin çalışanlarına yönelik verdiği mesleki eğitim hakkında ayrıntılı bilgi edinmiştir. Araştırmada tabakalı örnekleme yöntemi kullanmıştır.

Uygulanan anketi ve araştırma sonucu elde edilen özet tabloları inceleyerek, tabakalı örnekleme yöntemi kullanmalarını gerektiren koşulları değerlendiriniz.

## **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Başka alanlarda olduğu gibi sosyal bilimlerde de, ilgilenilen kitleye ilişkin istatistiksel çıkarsama yapmak sık başvurulan araştırma adımlarındandır. İzlenecek istatistiksel süreçte örnekleme yönteminin seçimi oldukça önemlidir. O nedenle bu konuda, daha önceki bölümde verilen kavramsal alt yapının üzerine, örnekleme yöntemlerinde geçen ilave bazı kavramlar açıklanmıştır. Olasılıklı örnekleme yöntemlerinden basit rastlantısal örnekleme, kümeli örnekleme, tabakalı örnekleme ve sistematik örnekleme yöntemleri anlatılmıştır. Sürecin pratiğinde kitleden örnekleme oluşturan birimlerin elde edilmesi, kurallar çerçevesinde yapılır. Saydığımız bu dört örnekleme yönteminde temel olarak ne yaptığımız, hangi durumlarda başvurduğumuz açıklanmıştır. Örneklem birimlerini seçme işleminin nasıl yapıldığının ayrıntısı üzerinde durularak, kitle ortalaması ve kitle bütünü tahminine yer verilmiştir. Son olarak yöntemlerin üstün ve zayıf yönlerine değinilmiştir.

## Bölüm Soruları

1) Kitlenin tüm birimlerine ulaşılabilir olduğu durumda, kitleden eşit çekilme şansı ile örnekleme yapılırsa hangi örnekleme yöntemi uygulanmış olur?

- a) Kümeli örnekleme
- b) Tabakalı örnekleme
- c) Basit rastlantısal örnekleme
- d) Sistematik örnekleme

2) Eğer araştırmacı rastlantısal olarak 10 üniversite seçip, bu 10 üniversitedeki tüm öğretim görevlileri ile görüşürse, araştırmacının kullandığı örnekleme yöntemi aşağıdakilerden hangisidir?

- a) Basit rastlantısal örnekleme
- b) Kümeli örnekleme
- c) Sistematik örnekleme
- d) Tabakalı örnekleme

3) Bir araştırmacı yeni bir istatistik öğrenme tekniğinin faydasını belirlemek üzere çalışma yapmak istemektedir. Bunun için rastlantısal olarak üniversite kampüsünden 100 öğrenci seçmiş, bunlardan 50'sine yeni teknik ile, diğer 50'sine geleneksel yöntem ile istatistik eğitimi verilmiştir. Bu çalışmada muhtemel örneklem çerçevesi hangisidir?

- a) Tüm istatistik öğrencileri
- b) Kampüsteki tüm öğrenciler
- c) Kampüsteki istatistik öğrencileri
- d) Yeni tekniğin uygulandığı 50 öğrenci

**4)** Soru 3'teki çalışmada kullanılan örnekleme yöntemi aşağıdakilerden hangisidir?

- a)** Basit rastlantısal örnekleme
- b)** Kümeli örnekleme
- c)** Sistematiik örnekleme
- d)** Tabakalı örnekleme

**5)** Aşağıdaki örnekleme yöntemlerinden hangisinde basit rastlantısal örnekleme kullanılmaz?

- a)** Kümeli örnekleme
- b)** Sistematiik örnekleme
- c)** Tabakalı örnekleme
- d)** Olasılıklı olmayan örnekleme

**6)** Diyelim ki bir süpermarket, müşterilerinin satınalma davranışları üzerine bir araştırma yapmak istiyor. Bunun için sistematiik örnekleme yöntemini kullanarak o gün gelen 165 faturadan 15'ini seçtiğinde, rastlantısal olarak belirlenen başlangıç noktası 4 iken örneklemdaki diğer birimlerden ilk 5'i aşağıdaki hangi sırada olur?

- a)** 8, 12, 16, 20, 24
- b)** 9, 14, 19, 24, 29
- c)** 19, 34, 49, 64, 79
- d)** 15, 26, 37, 48, 59

7) Soru 6'daki sistematik örnekleme yöntemine göre seçilen 15 birimlik örneklemin değerleri (fatura tutarı) aşağıdaki gibi ise kitle ortalamasının tahmini kaç olarak bulunur?

5, 21, 45, 93, 32, 218, 84, 27, 49, 58, 184, 44, 37, 19, 302

a) 76,5

b) 78

c) 81,2

d) 86,5

8) Yapılan bir araştırmada, kitle 4050 evden oluşuyorken, 225 ev sistematik örnekleme yöntemi ile seçilmiştir. Bu süreçte kaç elemanda bir olan birim seçilir?

a) 10

b) 15

c) 18

d) 225

9) Bir firma kendi teknoloji ürünlerine yapılan harcamalar üzerine bir araştırma yapmak istiyor. Bunun için kayıtlarından 2100 tüketici arasından, tabakalı örnekleme yöntemiyle kadın (800) ve erkek (1300) tüketicilerin harcamaları şeklinde iki tabaka oluşturup, tabakalardan rastlantısal örnekleme ile çekiliş yapmıştır. Örnekleme sonucu görüşülen 8 kadın, 13 erkek tüketicinin yıllık ortalama harcama tutarları (TL) şöyle özetlenmiştir.

|                                                            |                                                                          |              |
|------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|--------------|
| <b>Kadın tüketicilerin harcamaları<br/>(ilk tabaka)</b>    | 210, 3000, 1200, 500, 5400, 480, 750, 2500                               | $N_1 = 800$  |
| <b>Erkek tüketicilerin harcamaları<br/>(ikinci tabaka)</b> | 370, 560, 4300, 2450, 6350, 1300, 2700, 1600, 900, 1050, 2100, 3250, 830 | $N_2 = 1300$ |



Buna göre kitle bütününün tahmini kaç olur?

- a) 3989808
- b) 4180000
- c) 3890,385
- d) 41800

10) Soru 9'daki örnekleme sonuçlara göre kitle ortalamasının tahmini kaç olur?

- a) 19,90476
- b) 2100
- c) 2776,669
- d) 1990,476

### **Cevaplar**

1) c, 2) b, 3) a, 4) a, 5) b, 6) d, 7) c, 8) c, 9) b, 10) d

### **3. NOKTA VE ARALIK TAHMİNİ KAVRAMLARI, KİTLE ORTALAMASI İÇİN GÜVEN ARALIKLARI**

### **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

Bu bölümde İstatistiksel çıkarsama, Nokta Tahmini, Aralık Tahmini açıklanacak ve çeşitli durumlarda Kitle Ortalaması için Güven Aralığı oluşturulması konuları ele alınacaktır.

### **Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular**

- 1) Yaklaşan bir genel seçimdeki belirli bir partinin oy oranını ( $p$ ) tahmin ettiğini söyleyen iki arkadaşınızdan birincisi  $0,10 < p < 0,60$  olan aralık tahminine %99,9 güvendiğini, ikincisi ise  $p=0,1913$  olan nokta tahminine %0 güvendiğini söylemektedir. Her iki tahminin de kusurlarını açıklayınız.
- 2) Bir kitle parametresini %95 yerine %99 güven aralığı ile tahmin etmenin bedeli nedir?
- 3) Neden nokta tahminlerinin güven düzeyi 0'dır?

### Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

| Konu                                                                                            | Kazanım                                                                                                                                                                                  | Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Nokta ve aralık tahmini kavramı ve kitle ortalaması için güven aralığı konusuna değinilecektir. | İstatistiksel çıkarsamanın adımlarından nokta ve aralık tahmini kavramları öğrenilecek, güven aralığı mantığını anlayarak, kitle ortalaması için güven aralığı oluşturma öğrenilecektir. | Metinler, çözümlü problemler, alıştırmalar ve apletler ile konuların daha kolay anlaşılması sağlanacaktır. |

### **Anahtar Kavramlar**

- İstatistiksel çıkarsama
- Nokta tahmini
- Nokta tahminci
- Aralık tahmini
- Güven aralığı
- Kitle ortalaması için güven aralığı
- Güven sınırları
- Güven düzeyi

## Giriş

*İstatistiksel çıkarsama*, örneklemden edinilen bilgiye dayanarak kitleye ilişkin sonuçların çıkarıldığı bir süreçtir. İstatistik teorisinin önemli bir bölümünü oluşturan bu süreç, geleneksel olarak iki temel alanda ele alınır: Tahmin ve Hipotez testi.

Tahmin sürecinde kitle parametrelerinin alabilecekleri sayısal değerlere ilişkin çıkarsamalar yapılırken, hipotez testi sürecinde kitle parametrelerine ya da kitle dağılımına ilişkin karşıt iki hipotezden birinin seçimi problemi ile ilgilenilir. Birbirleriyle yakından ilişkili olan her iki süreçte de yapılacak çıkarsamalarda ve verilecek kararlarda örneklemden gelecek bilgiler ile olasılık teorisinin örnekleme bölümünde tartışılan kavram ve sonuçları esas alınır.

Bu bölümün konusu olan tahmin süreci iki aşamada ele alınabilir: Nokta tahmini ve aralık tahmini.

### 3.1. Nokta Tahmini

Bir kitle parametresinin tahmini örneklemden edinilen bilgiye dayanarak tek bir sayısal değer (nokta) ile ifade ediliyorsa bu değer bir **nokta tahmini**dir. Kitle parametresini tahmin etmek amacıyla kullanılan örneklem istatistiği ise ilgili parametrenin **nokta tahmincisi**dir. Örneğin bir fabrikada günde 14.000 adet üretilen floresanların ortalama ömrü ( $\mu$ ) tahmin edilmek istenilsin. Sezgisel olarak kitle parametresi  $\mu$ 'nün tahmininde kullanılmaya en uygun örneklem istatistiğinin örneklem ortalaması ( $\bar{X}$ ) olduğu söylenebilir. Bu durumda  $\bar{X}$ ,  $\mu$ 'nün nokta tahmincisi olacaktır. İlgili kitleden çekilecek bir rastlantısal örneklemin ortalaması  $\bar{x} = 2200$  saat bulunursa bu durumda  $\bar{x} = 2200$  saat,  $\mu$ 'nün bir nokta tahmini olur.

Örnekleme bölümünde örneklem istatistikleri ile örneklem istatistiklerinin gerçekleşen değerleri için farklı notasyonlar kullanılmıştı. Öyleyse bir örneklem istatistiği yani bir rastlantı değişkeni olan nokta tahmincisi ile nokta tahmincisinin sayısal değeri yani bir sabit olan nokta tahmini için örnekleme bölümündeki notasyon benimsenebilir. Aşağıdaki tablo yaygın olarak kullanılan kitle parametrelerini ve karşılık gelen nokta tahminleri ile nokta tahminlerini göstermektedir.

| Kitle Parametresi      | Nokta Tahmincisi | Nokta Tahmini |
|------------------------|------------------|---------------|
| Ortalama ( $\mu$ )     | $\bar{X}$        | $\bar{x}$     |
| Varyans ( $\sigma^2$ ) | $S^2$            | $s^2$         |
| Oran ( $p$ )           | $\hat{P}$        | $\hat{p}$     |

Örneğin, bir bilgisayar şirketinin ürettiği ekran kartlarından rastlantısal olarak seçilen beş tanesinin ömürleri 8, 11, 5, 7 ve 19 ay olarak bulunuyor. Bu bilgiye dayanarak, şirketin ürettiği tüm ekran kartlarının ortalama ömrü için nokta tahmini hesaplanmak istenebilir. Bunun için,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{n} = \frac{50}{5} = 10$$

Öyleyse kitle ortalamasının nokta tahmini 10 aydır.



### 3.2. Aralık Tahmini

$\theta$  bir kitle parametresini,  $\hat{\theta}$  bu kitle parametresinin nokta tahmincisini ve  $\hat{\theta}$  ise aynı kitle parametresinin bir nokta tahminini gösterebilir. Örneklem büyüklüğü ne olursa olsun, örnekleme yapıldıktan sonra  $\hat{\theta}$ 'nin alacağı değerin yani nokta tahmini  $\hat{\theta}$ 'nin kitle parametresi  $\theta$ 'ya tam olarak eşit olması beklenmez. Çünkü nokta tahmincisi bir örneklem istatistiğidir ve örnekleme bölümünden hatırlanacağı gibi örneklem istatistiklerinin dağılımları normal,  $t$  ya da  $\chi^2$  gibi genellikle sürekli dağılımlar olup, sayılamayan sonsuz sayıda noktadan oluştuğu düşünülen bir sürekli dağılımda tek bir noktanın gerçekleşme olasılığı teorik olarak sıfır kabul edilir. Kısaca  $P[\theta = \hat{\theta}] = 0$  yazabiliriz. Öyleyse bir kitle parametresi tahmininin tek bir değer ile ifade edilmesi güvenilir bir çıkarıma olamaz. Diğer bir deyişle bu türden bir çıkarıma "sıfır" güvenle ifade edilebilir. Çıkarımanın güven düzeyini yükseltmenin tek yolu tahminin belirli bir hata payı ( $e$ ) içereceğini kabul etmek ve  $\hat{\theta}$  etrafında bir hata aralığı oluşturmaktır. Böyle bir  $[\hat{\theta} - e, \hat{\theta} + e]$  aralığı  $\theta$  'nın *aralık tahmincisi* olarak adlandırılırken, aralık tahmininin örneklemeden sonra gerçekleşen değeri yani  $[\theta - e, \theta + e]$  aralığı ise  $\theta$  'nın *aralık tahmini* olacaktır.  $\theta$  'nın  $[\hat{\theta} - e, \hat{\theta} + e]$  aralığına düşme olasılığı  $e$ 'nin alacağı değere bağlı olup,  $\hat{\theta}$ 'nin örnekleme dağılımı bilindiğinde bu olasılık hesaplanabilir.

Nokta tahmini kısmında verilen floresan örneğine dönelim. Fabrikada üretilen floresanların ömürlerinin yani kitlenin normal dağıldığı ve kitle standart sapmasının  $\sigma = 180$  saat olduğunu varsayalım. Bu durumda  $\bar{X}$ 'nin dağılımının  $\mu$  ortalamalı ve  $\sigma/\sqrt{n}$  standart sapmalı bir normal dağılım olacağını Teorem 1.1'den biliyoruz. Öyleyse örneklem çekilmeden önce bizim belirleyeceğimiz bir hata miktarı ile  $\mu$ 'nün  $[\bar{X} - e, \bar{X} + e]$  aralığına düşme olasılığını hesaplayabiliriz. Örneğin  $e = 100$  saat olsun ve 16 birimlik bir örneklem çekmeye karar verelim. Bu durumda

$$P[\bar{X} - 100 \leq \mu \leq \bar{X} + 100] = P[-100 \leq \bar{X} - \mu \leq 100]$$

yazabiliriz. Eşitsizlik  $\sigma/\sqrt{n}$ 'ye bölünürse

$$P\left[-\frac{100}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{100}{\sigma/\sqrt{n}}\right]$$

elde edilir.  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  rastlantı değişkeni standart normal dağıldığına göre

$$P\left[-\frac{100}{180/\sqrt{16}} \leq z \leq \frac{100}{180/\sqrt{16}}\right] = P[-2,22 \leq z \leq 2,22]$$

yazılabilir. Normal Dağılım Tablosu'ndan istenilen olasılık

$$P[-2,22 \leq z \leq 2,22] = 0,9736$$

olarak bulunur. Öyleyse kitle parametresi  $\mu$ 'ye ilişkin çıkarsama yaparken,  $\mu$ 'nün tek bir değer ( $\bar{X}$ ) alacağını sıfır güvenle  $P[\mu = \bar{X}] = 0$  ifade ederken, 100 birimlik bir hatanın katılmasıyla %97,36 güvenle ifade edebileceğimiz bir çıkarsama elde ettik:

$$P[\mu = \bar{X} \pm 100] = 0,9736$$

Öyleyse genel olarak ifade edildiğinde

$$P[\hat{\theta} - e \leq \theta \leq \hat{\theta} + e] = (1 - \alpha) \quad (3.1)$$

eşitliğinde  $(1 - \alpha)$ ,  $\theta$ 'nın  $[\hat{\theta} - e, \hat{\theta} + e]$  aralığına düşme olasılığını gösterecektir. Buradan parantezin içi nokta tahmini  $\theta$  için yazılırsa

$$\theta - e \leq \theta \leq \theta + e \quad (3.2)$$

$\theta$  için %100 $(1 - \alpha)$  güven aralığı elde edilir.  $(1 - \alpha)$ ,  $\theta - e, \theta + e$  aralık tahminine olan güvenin düzeyini gösterir. Ancak  $\theta, \hat{\theta}$  gibi bir rastlantı değişkeni olmayıp  $\hat{\theta}$ 'nın gerçekleşecek özel bir değerini yani bir sabiti temsil ettiği için (3.1) eşitliğinde  $\hat{\theta}$  yerine  $\theta$ 'nın da yazılabileceğini düşünmek yanlış olur.

Şüphesiz ideal bir güven aralığı  $e$ 'nin minimum,  $(1 - \alpha)$ 'nın maksimum olduğu bir aralıktır. Ancak bu iki faktörün doğru orantılı olması, yani hata azaltıldığında güven

düzeyinin de azalması ya da güven düzeyi arttırıldığında hatanın da artması  $e$  ve  $(1 - \alpha)$ 'nın karşılıklı dengelenmesi zorunluluğunu getirir. Araştırmayı yapan kişi ya da karar verici bu iki faktörden hangisinin kendisi için daha önemli olduğuna karar verip, bir ölçüde diğerinden fedakârlık yapabilir. İki faktörü de istenilen düzeyde tutmanın tek yolu ise örneklem büyüklüğünü arttırmak olacaktır.

Şimdi ortalama parametresi için güven aralıklarının nasıl oluşturulacağını tartışalım.

### 3.3. Kitle Ortalaması için Güven Aralığı

Kitle ortalaması  $\mu$ 'nün güven aralığı oluşturulurken örneklem ortalaması  $\bar{X}$ 'ya ve  $\bar{X}$ 'nin örnekleme dağılımına başvurulacaktır. Örnekleme bölümünden hatırlanacağı gibi  $\bar{X}$ 'nin örnekleme dağılımını belirleyen faktörler; kitlenin dağılımı, kitle varyansının bilinip - bilinmemesi ve örneklem büyüklüğüdür. Doğal olarak güven aralıkları oluşturulurken de bu faktörler göz önüne alınacaktır.

#### Kitle Dağılımı Normal - Kitle Varyansı Biliniyor

Kitle dağılımının normal olduğu ve kitle varyansının bilindiği durumda Teorem 1.1'den  $z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  rastlantı değişkeninin normal dağıldığını biliyoruz. Öyleyse

$$P \left[ -z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2} \right] = 1 - \alpha$$

eşitliği yazılabilir. Burada  $z_{\alpha/2}$  standart normal dağılımın uçlarında  $\alpha/2$ 'lik alan bırakan  $z$  değerini göstermektedir. Eşitlik düzenlenirse,

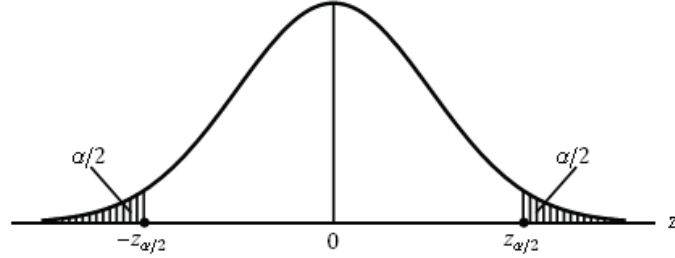
$$P \left[ \bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = 1 - \alpha \quad (3.3)$$

elde edilir. Parantezin içini nokta tahmini  $\bar{x}$  için yazarsak

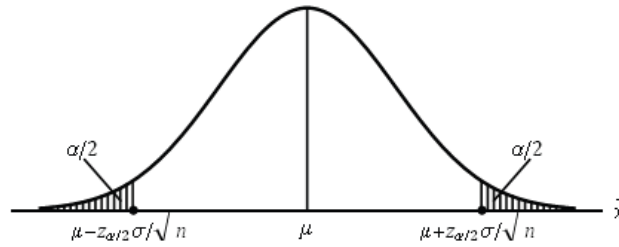
$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (3.4)$$

$\mu$  için %100(1 -  $\alpha$ ) **güven aralığını** elde ederiz.

Aynı aralık  $\left[ \bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$  şeklinde de ifade edilebilir.  $\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  değerleri ise **güven sınırları** olarak isimlendirilirler.



**Şekil 3.1:** Standart normal dağılımında  $\pm z_{\alpha/2}$  değerleri

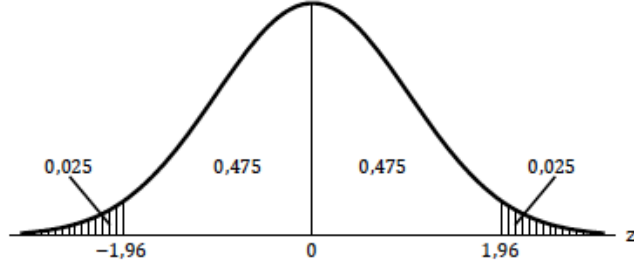


**Şekil 3.2:**  $\bar{X}$ 'nin örnekleme dağılımında güven sınırları

Uygulamada güven düzeyi (1 -  $\alpha$ ) için daha çok 0,90, 0,95 ve 0,99 değerleri kullanılır. Örneğin %95'lik güven aralığı oluşturalım. (1 -  $\alpha$ ) = **0,95** olduğu için  $\alpha/2 =$  **0,025** olur.  $z_{0,025}$  değeri standart normal dağılımın ucunda 0,025'lik alan bırakan  $z$  değeridir. Bu değer tablodan 1,96 olarak bulunur. Öyleyse  $\mu$  için %95'lik güven aralığı

$$\bar{x} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

olur.



**Şekil 3.3:** Standart normal dağılım ve  $\pm z_{0,025}$  değerleri

Aşağıdaki tablo çeşitli  $(1 - \alpha)$  değerlerine karşılık gelen  $z_{\alpha/2}$  değerlerini göstermektedir.

|                |      |      |      |      |      |      |
|----------------|------|------|------|------|------|------|
| $(1 - \alpha)$ | 0,75 | 0,80 | 0,85 | 0,90 | 0,95 | 0,99 |
| $z_{\alpha/2}$ | 1,15 | 1,28 | 1,44 | 1,64 | 1,96 | 2,58 |

Örneğin, Türkiye'deki yüksek öğrenim gören öğrencilerin IQ skorlarının normal dağıldığı ve dağılımın varyansının 160 olduğu varsayalım. Dağılımın ortalamasını ( $\mu$ ) tahmin etmek amacıyla rastlantısal olarak seçilen on iki kişiye test uygulanmış ve aşağıdaki skorlar elde edilmiştir.  $\mu$  için %95 güven aralığını oluşturmak üzere,

103 , 96 , 112 , 130 , 111 , 125 , 89 , 100 , 104 , 117 , 99 , 118

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{n} = \frac{1304}{12} = 108,67$ ,  $\sigma = \sqrt{160}$  ve  $z_{\alpha/2} = 1,96$  değerleri (3.4) eşitliğinde yerlerine konulursa

$$108,67 - 1,96 \cdot \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{12}} \leq \mu \leq 108,67 + 1,96 \cdot \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{12}}$$

$$108,67 - 7,16 \leq \mu \leq 108,67 + 7,16$$

$$101,51 \leq \mu \leq 115,83$$

olarak  $\mu$ 'nün %95 güven aralığı elde edilir. Öyleyse %95 güvenle iddia edebiliriz ki kitle ortalaması  $\mu$ , **[101, 51 , 115, 83]** aralığı içindedir.

Şimdi bu örnekteki kitleden rastlantısal olarak seçilen farklı on iki öğrenciye IQ testi uygulanmış ve aşağıdaki skorlar elde edilmiş olsun. Şüphesiz bazı farklı skorlar ve dolayısıyla farklı bir  $\bar{x}$  elde etmek bizi şaşırtmayacaktır.

101 , 99 , 98 , 115 , 121 , 124 , 99 , 115 , 106 , 137 , 110 , 100

Veriden bu kez  $\mu$ 'nün nokta tahmini olarak  $\bar{x} = \mathbf{110,42}$  elde edilir.  $\sigma$ ,  $n$  ve  $z_{\alpha/2}$  değerleri ise değişmeyecektir. Öyleyse bu veri için güven aralığı

$$\mathbf{110,42 - 7,16 \leq \mu \leq 110,42 + 7,16}$$

$$\mathbf{103,26 \leq \mu \leq 117,58}$$

olacaktır. Daha önce elde edilen **[101,51 , 115,83]** ile sonradan elde edilen **[103,26 , 117,58]** aralığının ortak yanları, ikisinin de  $\mu$ 'yü içereceğine %95 güvenmemiz ve her iki aralığın uzunluğunun da aynı olmasıdır:

$$\mathbf{115,83 - 101,51 = 117,58 - 103,26 = 14,32}$$

Değişim aralığının aynı olması şüphesiz bir rastlantı değildir. Çünkü aynı kitleden çekilen aynı büyüklükteki tüm örneklem için bu değer

$$\bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left( \bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 2z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

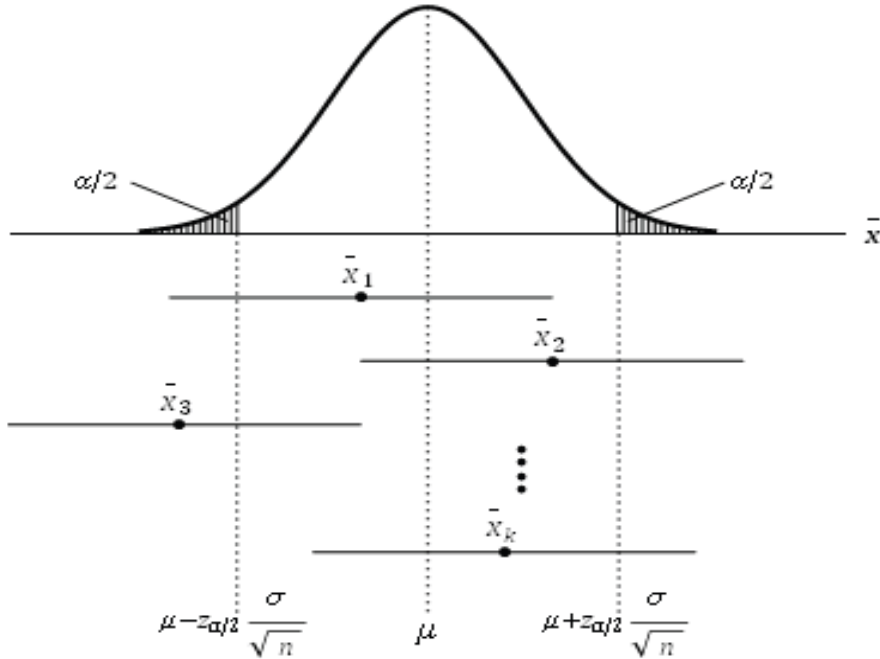
olup,  $\bar{x}$ 'dan bağımsızdır.

Öyleyse örnekleme işlemini  $k$  kez tekrarlırsak, yani  $k$  kez  $n$  birimlik örneklem çekersek büyük bir olasılıkla  $k$  farklı  $\bar{x}$  ve dolayısıyla  $k$  farklı güven aralığı elde etmeyi beklemeliyiz. Bu  $k$  farklı güven aralığının değişim aralığı aynı olacak ve hepsine eşit düzeyde güvenmemiz gerekecektir. Birbirinden farklı güven aralıklarına eşit düzeyde güvenmenin ne anlama geldiğini açıklayalım. Bu amaçla (3.3) eşitliğinden basit matematiksel düzenlemelerle (eşitsizliği  $(-1)$  ile çarpıp  $\bar{X}$  ile  $\mu$ 'yü yer değiştirmek gibi) elde edilebilecek

$$P\left[\mu - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha \quad (3.5)$$

eşitliğini yazalım.

(3.3) eşitliğine göre, sabit bir değer olan  $\mu$ 'nün rastlantısal bir aralık olan  $\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$  aralığı içine düşme olasılığı  $(1 - \alpha)$ 'dır. (3.5) eşitliğine göre ise, sabit bir aralık olan  $\left[\mu - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$  aralığı içine bir rastlantı değişkeni olan  $\bar{X}$ 'nin düşme olasılığı  $(1 - \alpha)$ 'dır. Sözlerle ifadelerinde farklılık olsa da matematiksel anlamda denk olan bu iki eşitliğin istatistiksel anlamda da denk olacağı açıktır. Şekil 3.4'e bakıldığında bu iki eşitliğin denkliği ve güven aralığı kavramı daha iyi anlaşılabilir.



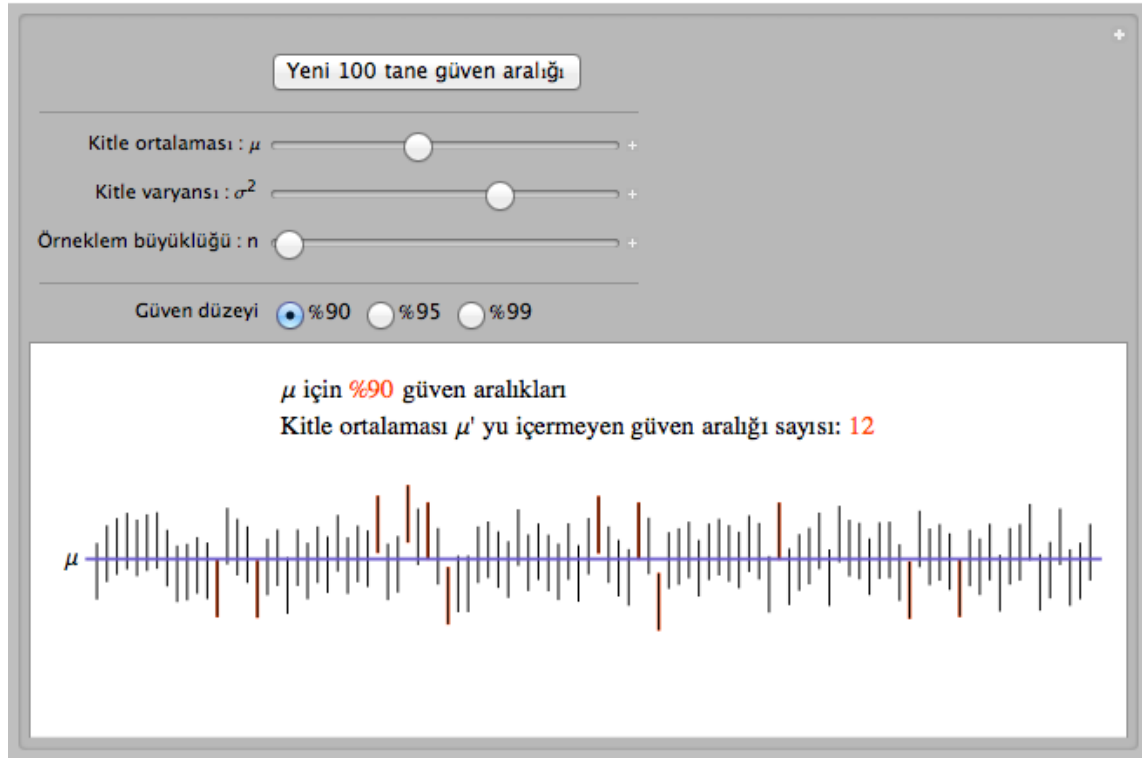
Şekil 3.4:  $\bar{X}$ 'nin örnekleme dağılımı ve güven aralıkları

Şekildeki fonksiyon  $\bar{X}$ 'nin örnekleme dağılımı olup, ortalamasının  $\mu$ 'ye eşit olduğunu biliyoruz. Şekilde  $k$  farklı güven aralığından bazıları  $\mu$ 'yü içerirken, bazısının (örneğin üçüncü aralığın) içermediği görülmektedir. Ancak üçüncü aralığa da diğer aralıklarla eşit düzeyde (örneğin %95) güvenmemiz gerekeceği hatırlanırsa, güven düzeyinin bir frekans oranı olarak düşünülmesi gerekeceği anlaşılır. Çünkü bir güven aralığına %95 güvenmek, aynı kitleden aynı büyüklükte bir çok örneklem çekilse ve her biri için güven aralığı oluşturulsa bunların yaklaşık %95'inin  $\mu$  'yü içermesini beklemek anlamına gelecektir. Ancak uygulamada örneklem bir kez çekileceği ve elimizde yalnızca bir tane güven aralığı olacağı için ve şüphesiz  $\mu$ 'yü bilemeyeceğimiz için oluşturduğumuz aralığın  $\mu$ 'yü gerçekten içeren %95'lik gruptan mı geldiğini yoksa geriye kalan %5'lik gruba mı ait olduğunu bilme şansımız yoktur.

Öte yandan  $\mu$ 'yü içeren bir aralıkta  $\bar{X}$ 'nin da  $\left[ \mu - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$  aralığına düşmek zorunda olduğu yani (3.4) ve (3.5) eşitliklerinin denk olduğu yine Şekil 3.4'ten anlaşılmaktadır.

**Kitle ortalaması için güven aralıkları: Kitle varyansı biliniyor** aleti ile kitle ortalaması için %90, %95 ve %99 güven düzeylerinde 100 tane rastlantısal güven aralığı oluşturabilirsiniz. Dikkat ederseniz, %100( $1 - \alpha$ ) güven düzeyinde yaklaşık  $\alpha$  tane güven aralığını kitle ortalaması  $\mu$ 'yü içermeyen geriye kalan ( $1 - \alpha$ ) tanesinde ise  $\mu$  yer almaktadır. Öyleyse %90 güven aralıklarında yaklaşık 90, %95 güven aralıklarında yaklaşık 95 ve %99 güven aralıklarında ise yaklaşık 99 tanesinin  $\mu$  'yü içermesini bekleyebiliriz.

#### Kitle ortalaması için güven aralıkları : Kitle varyansı biliniyor





### **Kitle Dağılımı Normal - Kitle Varyansı Bilinmiyor**

Kitlenin normal dağıldığı ancak kitle varyansının bilinmediği durumda Teorem 1.2'den  $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$  rastlantı değişkeninin  $(n - 1)$  serbestlik dereceli  $t$  dağıldığını biliyoruz. Öyleyse

$$P \left[ -t_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2} \right] = 1 - \alpha$$

eşitliğini yazabiliriz. Eşitlik düzenlenirse

$$P \left[ \bar{X} - t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right] = 1 - \alpha$$

elde edilir. Parantezin içini nokta tahminleri için yazarak

$$\bar{x} - t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (3.6)$$

$\mu$  için **%100(1 -  $\alpha$ ) güven aralığını** elde ederiz.

Örneğin, ele aldığımız Türkiye'deki yüksek öğrenim gören öğrencilerin IQ skorlarına ilişkin soruda, dağılımın varyansının bilinmediğini varsayarak yeniden çözersek aşağıdaki yolu izlemek gerekecektir:

$n = 12$  ve  $t_{11;0,05} = 2,201$ ,  $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 12,3$  ve  $\bar{x} = 108,67$  değerlerini (3.6) eşitliğinde yerlerine koyarsak

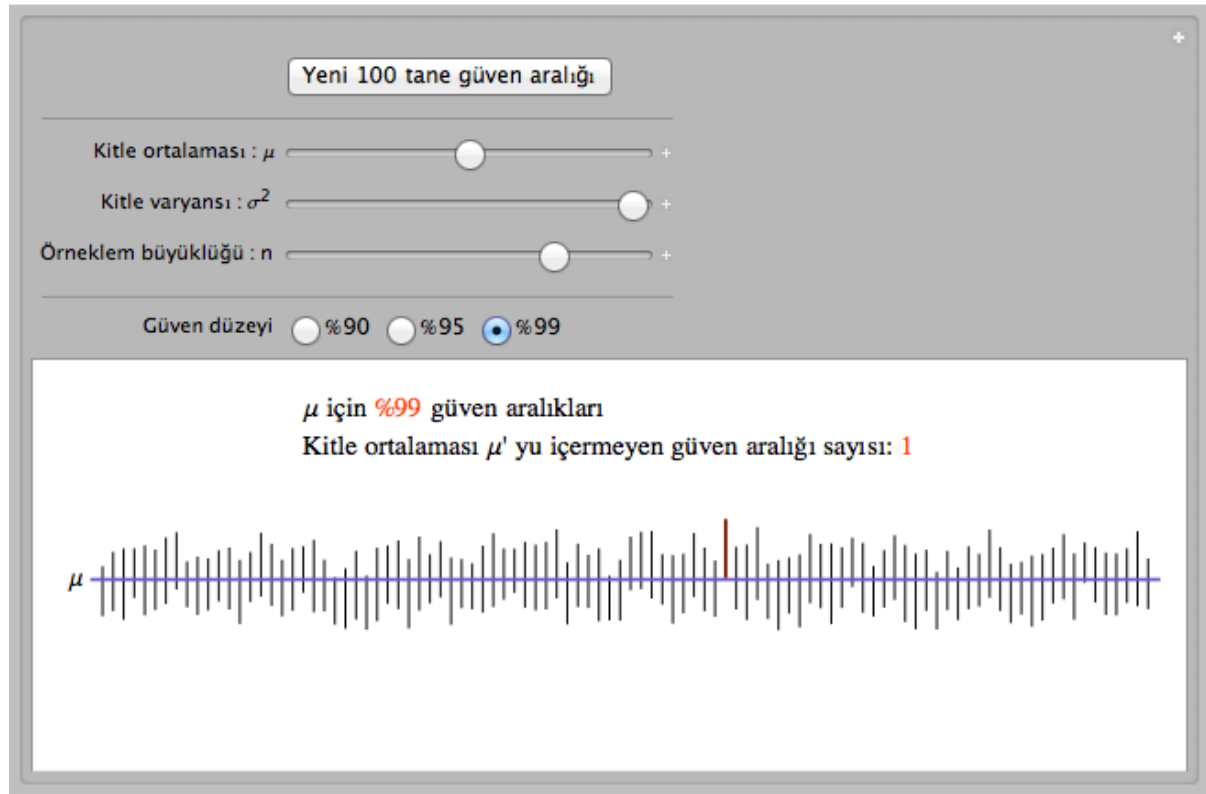
$$108,67 - 2,201 \cdot \frac{12,3}{\sqrt{12}} \leq \mu \leq 108,67 + 2,201 \cdot \frac{12,3}{\sqrt{12}}$$

$$100,85 \leq \mu \leq 116,49$$

güven aralığını elde ederiz.

**Kitle ortalaması için güven aralıkları: Kitle varyansı bilinmiyor** apleti ile kitle ortalaması için %90, %95 ve %99 güven düzeylerinde 100 tane rastlantısal güven aralığı oluşturabilirsiniz. Dikkat ederseniz, %100(1 -  $\alpha$ ) güven düzeyinde yaklaşık  $\alpha$  tane güven aralığını kitle ortalaması  $\mu$ 'yü içermeyen geriye kalan (1 -  $\alpha$ ) tanesinde ise  $\mu$  yer almaktadır. Öyleyse %90 güven aralıklarında yaklaşık 90, %95 güven aralıklarında yaklaşık 95 ve %99 güven aralıklarında ise yaklaşık 99 tanesinin  $\mu$ 'yü içermesini bekleyebiliriz. Dikkat edilirse kitle varyansının bilindiği durumdaki aplette güven aralıklarının boyları her zaman aynı iken, burada boylar farklı olmaktadır.

**Kitle ortalaması için güven aralıkları : Kitle varyansı bilinmiyor**



### Diğer Durumlar

Kitle dağılımının normal olmadığı durumda ise, kitlenin varyansı biliniyorsa ve örneklem yeterince büyükse (pratikte, bu sınır  $n \geq 30$  olarak alınır) merkezi limit teoremine dayanarak (3.4) eşitliğinin kullanılabileceğini söyleyebiliriz.

Kitle dağılımının normal olmadığı ve kitle varyansının da bilinmediği durumda ise  $n \geq 30$  için (3.4) eşitliğinde  $\sigma$  yerine  $s$  konularak  $\%100(1 - \alpha)$  güven aralığı

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (3.7)$$

elde edilir. Ancak bu güven aralığının teorik bir sonuca dayanmadığı ve "yaklaşık" bir güven aralığı olarak düşünüldüğü unutulmamalıdır.

Örneğin, belirli bir model arabanın ortalama yakıt tüketimini tahmin etmek amacıyla söz konusu modelden kırk araba denenmiş ve ortalama 8,1 litre/km, standart sapma 0,67 litre/km bulunmuş olsun. Gerçek (kitle) ortalama için %95 güven aralığını oluşturmak üzere,

$\bar{x} = 8,1$  litre/km ,  $s = 0,67$  litre/km ,  $n = 40$  ve  $z_{\alpha/2} = 1,96$  değerleri (3.7) eşitliğinde yerlerine konulursa

$$8,1 - 1,96 \cdot \frac{0,67}{\sqrt{40}} \leq \mu \leq 8,1 + 1,96 \cdot \frac{0,67}{\sqrt{40}}$$

$$7,89 \leq \mu \leq 8,31$$

elde edilir.

## Uygulamalar

1) Bir fabrikada üretilen cıvataların çap uzunluklarının, varyansı 3 olan bir normal dağılım gösterdiği bilinmektedir. Üretilen tüm cıvataların ortalamasını tahmin etmek amacıyla sekiz cıvata rastlantısal olarak çekiliyor ve çap uzunlukları 7 , 11 , 11 , 9 , 10 , 13 , 12 ve 10 mm olarak ölçülüyor. Tüm cıvataların ortalaması için %95 güven aralığını oluşturunuz.

### Cözüm:

$n = 8$  ,  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{n} = \frac{83}{8} = 10,375$  ,  $\sigma = \sqrt{3} = 1,732$  ve  $z_{\alpha/2} = 1,96$  değerleri eşitlik (3.4)'te yerlerine konulursa

$$10,375 - 1,96 \cdot \frac{1,732}{\sqrt{8}} \leq \mu \leq 10,375 + 1,96 \cdot \frac{1,732}{\sqrt{8}}$$

$$10,375 - 1,2 \leq \mu \leq 10,375 + 1,2$$

$$9,175 \leq \mu \leq 11,575$$

2) Otomobil üreten bir şirketin AR - GE bölümü yöneticileri otomobillerin belirli bir bölümünün montajı için harcanan ortalama süreyi bilmek istemektedirler. Bu amaçla şirkette çalışan teknisyenlerden otuz tanesinden söz konusu montajı yapmaları istenmiş ve süreler dakika olarak aşağıdaki gibi saptanmıştır. Sürelerin normal dağıldığını varsayarak, gerçek ortalama süre için %95 güven aralığı oluşturunuz.

|    |    |    |    |     |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|
| 45 | 45 | 30 | 82 | 100 | 15 | 40 | 30 | 25 | 60 |
| 22 | 35 | 45 | 40 | 80  | 60 | 15 | 37 | 35 | 40 |
| 72 | 85 | 28 | 35 | 40  | 25 | 62 | 50 | 70 | 20 |

**Cözüm:**

Veriden hesaplanan  $\bar{x} = 45,6$  ,  $s = 22,193$  değerleri ve  $t_{29,0,05} = 2,045$  eşitlik (3.6)'da yerlerine konulursa

$$45,6 - 2,045 \cdot \frac{22,193}{\sqrt{30}} \leq \mu \leq 45,6 + 2,045 \cdot \frac{22,193}{\sqrt{30}}$$

$$45,6 - 8,286 \leq \mu \leq 45,6 + 8,286$$

$$37,314 \leq \mu \leq 53,886$$

elde edilir.

3) Belirli bir ürünün yıllık tüketimini öğrenmek amacıyla rastlantısal olarak seçilen kırk beş kişiye tüketimleri sorulmuş ve kişi başına tüketimin ortalaması 28 kg, standart sapması 1,26 kg olarak bulunmuştur. Kişi başı gerçek ortalama tüketim için %99 güven aralığı oluşturunuz.

**Cözüm:**

Kitle dağılımı normal olmadığı için teorik olarak  $t$  dağılımına başvuramayız. Varyans bilinmediği için yine teorik olarak merkezi limit teoremini de kullanamayız. Ancak  $n \geq 30$  olduğu için ampirik bir güven aralığı olan (3.7) eşitliğini kullanabiliriz.

$$28 - 2,58 \cdot \frac{1,26}{\sqrt{45}} \leq \mu \leq 28 + 2,58 \cdot \frac{1,26}{\sqrt{45}}$$

$$28 - 0,485 \leq \mu \leq 28 + 0,485$$

$$27,515 \leq \mu \leq 28,485$$

elde edilir.

4) Bir otoyolun belirli bir noktasında sıkça meydana gelen trafik kazalarının en önemli nedeninin aşırı hız olduğu düşünülmektedir. Otoyolun bu noktasından geçecek tüm otomobillerin ortalama hızını tahmin etmek amacıyla rastlantısal olarak seçilen on iki otomobilin radar tarafından tespit edilen hızları km/saat olarak aşağıdadır:

90 , 75 , 103 , 82 , 106 , 93 , 87 , 92 , 94 , 115 , 96 , 88

Hızların normal dağıldığını varsayarak gerçek ortalama hız için %90 güven aralığı oluşturunuz.

**Cözüm:**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{n} = \frac{1121}{12} = 93,417 \quad , \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 10,774 \quad \text{ve} \quad t_{11;0,05} = 2,201$$
 değerleri (6.6) eşitliğinde yerlerine konulursa

$$93,417 - 2,201 \cdot \frac{10,774}{\sqrt{12}} \leq \mu \leq 93,417 + 2,201 \cdot \frac{10,774}{\sqrt{12}}$$

$$93,417 - 6,846 \leq \mu \leq 93,417 + 6,846$$

$$86,571 \leq \mu \leq 100,263$$

elde edilir.

5) Uygulamalardaki 1. soruda verilen bilgiye dayanarak, tüm cıvataların çap uzunluklarının ortalaması için nokta tahmini bulunuz.

**Cözüm:**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{n} = \frac{83}{8} = 10,375$$

Öyleyse kitle ortalamasının nokta tahmini 10,375 mm dir.

6) Uygulamalardaki 2. soruda verilen bilgiye dayanarak, montaj için harcanan ortalama süre için nokta tahmini bulunuz.

**Cözüm:**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{n} = \frac{1368}{30} = 45,6$$

Öyleyse kitle ortalamasının nokta tahmini 45,6 dakikadır.

## Uygulama Soruları

1) Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK) *Temel istatistik* verilerinden *Eğitim, Kültür, Spor ve Turizm* başlığına ait *Eğitim istatistikleri* konusunda [Ulusal Eğitim İstatistikleri Veri tabanı](#)nda 2013 yılı için, illere göre doktora mezun sayısını derleyiniz. 81 ildeki doktora mezun sayıları, kitleniz olsun.

a) Kitle ortalama ve varyansını hesaplayınız.

b) 10 birimlik bir örneklem seçerek, kitle ortalaması için %95 güven aralığını oluşturun. (kitlenin bilinmediğini farz ederek)

c) b şikkında bulduğunuz güven aralığı genişliğini yarıya indirmek için, kaç birim örneklem seçmeniz gerekir?

d) Her biri 10 birim olan örneklem seçimini 100 defa yaptığınızda, örneklem ortalamasının  $\left[ \mu \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$  aralığına düşme olasılığı yüzde kaç olur? Bu olasılık hangi kavramı ifade eder?

2) “Geçen dönemde sınav zamanı İstatistik dersine çalıştığınız ortalama süre ne kadardır?” sorusuna yer veren tek soruluk bir anketi, sınıfınızdaki arkadaşlarınızdan 50 kişiye uygulayınız. (Ortalama çalışma saatinin normal dağıldığını varsayarak süreci ele alınız)

a) Elde ettiğiniz sonuca dayanarak, İstatistik dersine çalışılan ortalama süre için %95 güven aralığını oluşturunuz.

b) Örneklem büyüklüğünü yarıya indirip 25 kişiden bilgi alsanız, yine %95 güven düzeyi için, güven aralığı değişir mi? Bu durumdan nasıl etkilenir? Açıklayınız.

c) 25 kişiden oluşan başka bir örneklem sonucuna göre aynı güven düzeyinde (%95) güven aralığı oluştursanız, güven aralığı kitle ortalamasını içerir mi? Bir önceki b şikkında bulunan güven aralığına göre daha fazla mı güvenirsiniz? Yorumlayınız.

d) c şikkında bulunan güven aralığı için, “%95 olasılıkla kitle ortalaması bu aralıkta yer alacaktır” demek mi yoksa “aynı büyüklükte pek çok örneklem çekilse ve her biri için güven aralığı oluşturulsa, bunların yaklaşık %95’inin kitle ortalamasını içermesi beklenir” demek mi daha doğrudur? Yorumlayınız.



**3)** “Geçen dönemde (ders kitapları hariç) kitaba ne kadar para harcadınız?” sorusuna yer veren tek soruluk bir anketi, etrafınızdaki arkadaşlarınızdan 20 kişiye uygulayınız. (Ortalama kitap harcamasının normal dağıldığını varsayarak süreci ele alınız)

**a)** Elde edilen sonuca dayanarak, gençler içinde bir dönemdeki ortalama kitap harcaması için %95 güven aralığını oluşturunuz.

**b)** Örneklem büyüklüğünü arttırıp 50 kişi ile görüşseniz ve güven düzeyini %98’e çıkarsanız güven aralığı bu durumdan nasıl etkilenir? Açıklayınız.

**4)** Bir araştırmada 120 örneklem seçilerek, örneklem ortalaması 90, örneklem standart sapması 15 olarak hesaplanmıştır. Kitle standart sapmasının 12 olduğu bilindiğine göre

**a)** Kitle ortalaması için %90 güven aralığını oluşturunuz. Bu güven aralığının elde edilmesine hangi teorem dayanak sağlar? Açıklayınız.

**b)** Kitle standart sapması bilinmeseydi, güven aralığında hangi değişkenler değişirdi? ve %90 güven aralığı ne olurdu?

**5)** Bir araştırmada normal dağılan bir kitleden 24 örneklem seçilerek, örneklem ortalaması 610, standart sapması 45 olarak hesaplanmıştır.

**a)** Kitle ortalaması için %95 güven aralığını oluşturunuz.

**b)** Örneklem 60 birim olduğunda test istatistiği değişir mi? Açıklayınız.

## **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Kitleyi daha iyi yansıtacak, genel yapısını daha doğru temsil edecek sayısal ölçülerin elde edilmesinde tahminin önemine değinerek, nokta ve aralık tahminin nasıl hesaplandığı anlatıldı. Tahmin yönteminin seçimine vurgu yaparak tek bir sayısal değer ile ifade etmek yerine aralık elde edilmesiyle, güven aralığı tahmininin gerekliliğine işaret edildi. Güven aralığının mantığının anlaşılmasını sağlamak üzere örnek üzerinden açıklamalar yapıldı. Yanı sıra güven aralığını oluşturan bileşenlerdeki değişimin aralığı nasıl etkelediği yorumlandı. Kitle ortalaması için güven aralığının bulunması üzerinde duruldu. Bunu yaparken, çeşitli durumlarda yani, kitlenin normal dağılması veya dağılmaması durumu ile kitle varyansının bilinip bilinmediği durumlarda, kitle ortalaması için güven aralığının nasıl oluşturulacağı, hangi teoremlerin izleneceği anlatıldı.

## Bölüm Soruları

1) Türkiye'deki üniversite mezunu kadınların IQ'larının varyansının 154 olduğu varsayılın. 16 kadına uygulanan IQ testinin skorları aşağıdaki gibidir:

108, 77, 114, 112, 90, 103, 114, 112, 116, 92, 100, 81, 96, 123, 95, 99

Türkiye'deki üniversite mezunu tüm kadınların ortalaması için %95 güven aralığı nedir?

a)  $85,7 < \mu < 103,2$

b)  $91,1 < \mu < 105,0$

c)  $95,9 < \mu < 108,1$

d)  $97,2 < \mu < 111,5$

2) Birinci sorudaki verilene göre %99 güven aralığı nedir?

a)  $85,2 < \mu < 105,4$

b)  $94,0 < \mu < 110,0$

c)  $97,9 < \mu < 111,1$

d)  $100,2 < \mu < 117,5$

3) Birinci soruyu kitle varyansının 154 olması gibi bir bilginin olmadığı durum için yanıtlayın

a)  $86,4 < \mu < 99,2$

b)  $90,5 < \mu < 103,2$

c)  $95,0 < \mu < 109,0$

d)  $98,2 < \mu < 114,4$

4) İkinci soruyu kitle varyansının 154 olması gibi bir bilginin olmadığı durum için yanıtlayın

a)  $83,2 < \mu < 100,7$

b)  $86,5 < \mu < 104,3$

c)  $88,8 < \mu < 108,3$

d)  $92,3 < \mu < 111,6$

5) Birinci sorudaki verilene göre %90 güven aralığı nedir?

a)  $96,9 < \mu < 107,1$

b)  $98,0 < \mu < 112,5$

c)  $94,9 < \mu < 101,2$

d)  $100,4 < \mu < 117,5$

6) Zonguldak'ın Devrek ilçesinde 7 yıl boyunca Şubat ayları için metrekaresine düşen ortalama yağış miktarları kilogram olarak aşağıdaki gibidir:

1,4 , 3,0 , 2,4 , 2,4 , 1,2 , 1,6 , 1,9 , 1,4

Söz konusu ilçede yağış miktarlarının varyansının 0,80 olduğunu varsayarsak Şubat ayı ortalaması için %95 güven aralığı nedir?

a)  $0,8 < \mu < 2,9$

b)  $1,0 < \mu < 1,9$

c)  $1,3 < \mu < 2,5$

d)  $1,7 < \mu < 2,9$

7) Altıncı sorudaki verilene göre %99 güven aralığı nedir?

a)  $0,8 < \mu < 1,5$

b)  $1,1 < \mu < 2,7$

c)  $1,4 < \mu < 2,6$

d)  $1,4 < \mu < 2,9$

**8)** Altıncı soruyu kitle varyansının 0,80 olması gibi bir bilginin olmadığı durum için yanıtlayın

**a)**  $1,1 < \mu < 2,0$

**b)**  $1,4 < \mu < 2,4$

**c)**  $1,6 < \mu < 2,8$

**d)**  $1,8 < \mu < 3,0$

**9)** Yedinci soruyu kitle varyansının 0,80 olması gibi bir bilginin olmadığı durum için yanıtlayın.

**a)**  $1,1 < \mu < 2,7$

**b)**  $1,3 < \mu < 3,0$

**c)**  $1,6 < \mu < 3,2$

**d)**  $1,4 < \mu < 3,2$

**10)** Altıncı sorudaki verilenlere göre **%90** güven aralığı nedir?

**a)**  $1,4 < \mu < 2,4$

**b)**  $1,2 < \mu < 2,9$

**c)**  $1,5 < \mu < 3,2$

**d)**  $1,8 < \mu < 3,1$

### **Cevaplar**

1) c, 2) b, 3) c , 4) d, 5) a, 6) c, 7) b, 8) b, 9) a, 10) a

#### **4. KİTLE VARYANSI VE ORANI İÇİN GÜVEN ARALIKLARI**

### **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

Bu bölümde kitle varyansı ve oranı için güven aralıklarının oluşturulmasını, örneklem büyüklüğünün belirlenmesini ve tahmincinin bazı özelliklerini öğreneceğiz.

### **Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular**

- 1) Türkiye'deki sigara içme oranını aynı güven düzeyinde tahmin etmek isteyen iki kamuoyu araştırma şirketinden birincisi 500 birimlik örneklem ile çalışırken, ikincisi 2000 birimlik örneklemi tercih etmektedir. Tahminlerindeki hataların oranı ne olur?
- 2) Bir parametrenin tahmini için yanlış bir tahminci kullanmanın uzun vadedeki sakıncaları ne olabilir?



### Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

| Konu                                                                                                                                       | Kazanım                                                                                                                                                                                                             | Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Kitle varyansı ve oranı için güven aralığı oluşturma, örneklem büyüklüğünün belirlenmesi ve tahmincinin bazı özelliklerine değinilecektir. | Kitle varyansı ve oranı için güven aralığının nasıl oluşturulduğu, farklı parametrelerin tahmininde örneklem büyüklüğüne karar vermede hangi yolun izlendiği ve tahmincinin bazı önemli özellikleri öğrenilecektir. | Metinler, çözümlü problemler, alıştırma ve aletler ile konuların daha kolay anlaşılması sağlanacaktır. |

### **Anahtar Kavramlar**

- Kitle varyansı için güven aralığı
- Kitle oranı için güven aralığı
- Örneklem büyüklüğü
- Tahmincinin özellikleri
- Yansızlık (Yansız tahminci)
- Etkinlik (Etkin Tahminci)
- Görece etkinlik

## **Giriş**

İlgilenilen duruma göre değişmekle birlikte, varyans ve oran kitleyi betimleyen diğer önemli iki sayısal ölçümdür. Söz konusu olan değişkendeki değişim veya oran olduğunda, kitlenin bu parametrelerini tahmin ederken güven aralığı yaklaşımı ile, istenilen güven düzeyinde parametrenin hangi aralıklarda olabileceği hesaplanabilir. Bu süreçte daha önce bahsedilen teoremlere başvurmak gerekli olmaktadır.

#### 4.1. Kitle Varyansı için Güven Aralığı

Kitle varyansı için güven aralığı oluştururken kitle dağılımının normal olduğu varsayılarak Teorem 1.3'e başvurulabilir. Teoreme göre normal dağılan bir kitle söz konusu ise  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$  rastlantı değişkeni  $(n - 1)$  serbestlik dereceli  $\chi^2$  dağılır. Öyleyse

$$P \left[ \chi_{1-\alpha/2}^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{\alpha/2}^2 \right] = 1 - \alpha$$

eşitliğini yazabiliriz. Eşitlik düzenlenirse

$$P \left[ \frac{1}{\chi_{\alpha/2}^2} \leq \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \leq \frac{1}{\chi_{1-\alpha/2}^2} \right] = 1 - \alpha$$

$$P \left[ \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2} \right] = 1 - \alpha$$

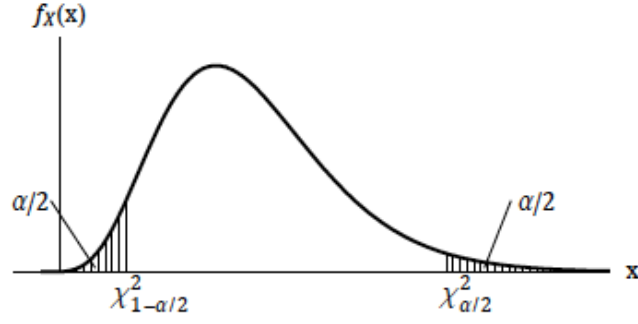
elde edilir. Parantezin içini nokta tahmini  $s^2$  için yazarak

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} \quad (4.1)$$

$\sigma^2$  için **%100(1 -  $\alpha$ ) güven aralığı**nı elde ederiz. Kitle standart sapması için güven aralığı ise

$$\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2}} s \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}} s \quad (4.2)$$

olur.



Şekil 4.1: Ki-kare dağılımında  $\chi^2_{1-\alpha/2}$  ve  $\chi^2_{\alpha/2}$  değerleri

Örneğin, bir bilgisayar şirketinin ürettiği ekran kartlarından rastlantısal olarak seçilen beş tanesinin ömürleri 8, 11, 5, 7 ve 19 ay olarak bulunmuş olsun. Buna göre ekran kartlarının varyansı için nokta tahmini hesaplayabiliriz.

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{(8 - 10)^2 + (11 - 10)^2 + (5 - 10)^2 + (7 - 10)^2 + (19 - 10)^2}{5 - 1} = 30$$

Diyelim ki normal dağılan bir kitleden çekilen on iki birimlik örneklemin standart sapması 16,8 olarak hesaplanmış olsun. Kitle varyansı için %90 güven aralığını oluşturmak üzere;

$n = 12$  ,  $s = 16,8$  ,  $\chi^2_{11;0,95} = 4,57$  ve  $\chi^2_{11;0,05} = 19,7$  değerleri (4.1) eşitliğinde yerlerine konulursa

$$\frac{11(16,8)^2}{19,7} \leq \sigma^2 \leq \frac{11(16,8)^2}{4,57}$$

$$157,6 \leq \sigma^2 \leq 679,4$$

aralığını elde ederiz.

## 4.2. Kitle Oranı için Güven Aralığı

Ortalama ve varyans gibi, oran da kitleyi betimlemede sıkça başvuru alan bir parametredir. Örneğin bir fabrikada üretilen cıvatalardaki defoluluk oranını, belirli bir partiye oy verenlerin yüzdesini ya da bir firmanın ürettiği otomobil lastiklerinden ömrü 20.000 km'den az olanların oranını tahmin etmek isteyebiliriz. Örneklem bölümünden hatırlanacağı gibi oran parametresinin tahmininde, çekilen rastlantısal örneklem binom dağılımı bir kitleden geldiği varsayılır ve tahmin edilmek istenen oran binom dağılımının parametresi  $p$  olarak düşünülür.

Yine örneklem bölümünden  $\hat{p}$  rastlantısal örneklem oranını göstermek üzere,  $n$ 'nin büyük değerleri için  $\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{pq/n}}$  rastlantı değişkeninin standart normal dağıldığını biliyoruz. Buradan

$$P \left[ -z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}} \leq z_{\alpha/2} \right] = 1 - \alpha$$

eşitliği yazılabilir. Eşitlik düzenlenirse

$$P \left[ \hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{pq/n} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{pq/n} \right] = 1 - \alpha$$

elde edilir.  $n$ 'nin büyük değerleri için  $p$  yerine  $\hat{p}$  yazabiliriz. Dolayısıyla yukarıdaki eşitlik büyük  $n$  değerleri için

$$P \left[ \hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{p} \hat{q}/n} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{p} \hat{q}/n} \right] = 1 - \alpha$$

olarak ifade edilebilir. Parantezin içi nokta tahmini  $\hat{p}$  için yazılarak

$$\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \hat{q}}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \hat{q}}{n}} \quad (4.3)$$

**$p$  için %100(1 -  $\alpha$ ) güven aralığı** elde edilir.

Örneğin, bir kamuoyu araştırmasında rastlantısal olarak seçilen 225 kişiden 72 kişinin **A** partisine oy vereceği belirlenmiş olsun. Bu bilgiyi esas alarak, tüm seçmenler içinde **A** partisine oy vereceklerin oranı için %99 güven aralığı oluşturmak üzere:

$\hat{p} = \frac{72}{225} = 0,32$  ,  $\hat{q} = 0,68$  ,  $n = 225$  ve  $z_{\alpha/2} = 2,58$  değerlerini eşitlik (4.3)'te yerlerine koyarsak

$$0,32 - 2,58\sqrt{(0,32) \cdot (0,68)/225} \leq p \leq 0,32 + 2,58\sqrt{(0,32) \cdot (0,68)/225}$$

$$0,24 \leq p \leq 0,40$$

güven aralığı elde edilir.

### 4.3. Örneklem Büyüklüğünün Belirlenmesi

Örneklem büyüklüğü artırıldıkça kitle parametresine ilişkin bilginin de artacağı açıktır. Ancak örneklem büyüklüğünün artırılması araştırmanın maliyetini de artıracak için, araştırmacı çalışmasından beklediği sonuçlara ve bütçesine bağlı olarak uygun örneklem büyüklüğünü bulmak zorundadır.

Bir tahmin sürecinde araştırmacının elde edeceği bilgiye ilişkin iki temel sorusu olmalıdır:

1. Tahmin edilecek değer ile gerçek değer (parametrenin değeri) arasındaki fark (hata) ne kadar olmalıdır?
2. Birinci soruda belirtilen farkı ne ölçüde garantileyebilirim?

Aynı soruların istatistiksel söylemde denklemleri sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

1. Güven aralığındaki hata terimi kaç olmalıdır (güven aralığının genişliği ne kadar olmalıdır)?
2. Güven aralığının güven düzeyi kaç olmalıdır?

Her iki soru da araştırmacının sübjektif olarak vereceği yanıtlardır. Bu kararlar örnekleme sürecinden önce verildikten sonra istenen koşulları sağlayacak örneklem büyüklüğü hesaplanır ve daha sonra örnekleme geręekleřtirilir ve güven aralığı elde edilir.

şimdi bazı durumlar için örneklem büyüklüğünün belirlenmesini ele alalım.

### **Kitle Ortalamasının Tahmininde Örneklem Büyüklüğü**

***e*** hatayı göstermek üzere kitle ortalamasına ilişkin güven aralığı genel biçimiyle

$$\bar{x} - e \leq \mu \leq \bar{x} + e$$

olarak yazılabilir. Burada ***e***, tahmin edilen değer ile geręek değer arasında olması istenen farkı (hatayı) gösterir.  $z_{\alpha/2}$  ise güven aralığında istenen güven düzeyini belirleyecek olan değerdir. Kitle varyansının bilindiği ve kitlenin normal dağıldığı durumu ele alalım. Bu durumda eşitlik (3.4)'ü kullanmamız gerektiğini biliyoruz:

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Buradan

$$e = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (4.4)$$

yazabiliriz. (4.4) eşitliğinden ***n***'yi çekersek

$$n = z_{\alpha/2}^2 \frac{\sigma^2}{e^2} = \left[ z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{e} \right]^2 \quad (4.5)$$

elde edilir. Öyleyse örneğin  $\sigma = 4$  iken  $e = 0,3$ 'lük bir hata ile ve %95'lik bir güven düzeyi istiyorsak ihtiyacımız olan örneklem büyüklüğü



$$n = \left[ 1,96 \cdot \frac{4}{0,3} \right]^2 = 682,95 \sim 683$$

olacaktır.

Örneğin, bir fabrikada üretilen cıvataların çapları 0,38 cm standart sapmalı bir normal dağılıma uyuyor olsun. Cıvata çaplarının ortalamasını tahmin etmek amacıyla rastlantısal olarak seçilen on iki cıvatanın çapları ölçülmüş ve %95'lik güven aralığı

$$1,64 \leq \mu \leq 2,36$$

olarak bulunmuştur. Güven aralığını geniş bulan diğer bir deyişle daha kesin bir tahmin isteyen fabrika müdürü gerçek değer ile tahmin edilecek değer arasındaki farkın 0,08 cm'den büyük olmamasını istemektedir.

(a) Güven düzeyini yine %95,

(b) Güven düzeyini %99 kabul ederek gerekli örneklem büyüklüğünü hesaplamak üzere:

(a)  $z_{\alpha/2} = 1,96$  ,  $\sigma = 0,38$  ve  $e = 0,08$  değerleri eşitlik (4.5)'te yerlerine konulursa

$$n = \left[ 1,96 \cdot \frac{0,38}{0,08} \right]^2 = 86,676 \sim 87$$

elde edilir. Öyleyse örneklem büyüklüğü 87 olacaktır.

(b) Bu kez eşitlik (4.5)'te  $z_{\alpha/2} = 2,58$  ,  $\sigma = 0,38$  ve  $e = 0,08$  değerleri yerlerine konulursa

$$n = \left[ 2,58 \cdot \frac{0,38}{0,08} \right]^2 = 150,185 \sim 151$$

sonucu bulunur. Bu durumda gerekli örneklem büyüklüğü 151'dir.

### **Kitle Oranının Tahmininde Örneklem Büyüklüğü**

Kitle oranı için kullandığımız güven aralığı eşitlik (4.3)'te tanımlanmıştı:

$$\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \hat{q}}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \hat{q}}{n}}$$

Öyleyse bu kez hata terimi

$$e = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \hat{q}}{n}}$$

olacaktır. Buradan  $n$  çekilirse

$$n = z_{\alpha/2}^2 \frac{\hat{p} \hat{q}}{e^2} \quad (4.6)$$

olur. Eğer araştırmacının  $\hat{p}$ 'ya ilişkin geçmiş bilgilere ya da kişisel tecrübesine dayanan yaklaşık bir tahmini varsa örneklem büyüklüğünü saptamada (4.6) eşitliği kullanılabilir. Ancak böyle bir başlangıç tahmini olanaksızsa bu durumda  $n$ 'yi maksimum yapacak  $\hat{p}$  değeri başlangıç tahmini olarak seçilir. Bu değer  $\hat{p} \hat{q} = \hat{p}(1 - \hat{p})$  çarpımını maksimum yapacak olan değerdir. Bu amaca  $\hat{p} \hat{q} = \hat{p}(1 - \hat{p})$  fonksiyonunun  $\hat{p}$ 'ya göre türevi alınarak ulaşılabilir:

$$\frac{d[\hat{p}(1 - \hat{p})]}{d\hat{p}} = 1 - 2\hat{p} = 0 \Rightarrow \hat{p} = \frac{1}{2}$$

Öyleyse (4.6) eşitliğinde  $\hat{p} = \frac{1}{2}$  ve  $\hat{p} = \frac{1}{2}$  konulursa

$$n_{maksimum} = \frac{z_{\alpha/2}^2}{4e^2} \quad (4.7)$$

elde edilir.

Diyelim ki, bir fabrikada üretilen ampullerin defoluluk yüzdesi tahmin edilmek isteniyor. Elde edilecek tahmin değeri ile gerçek defoluluk yüzdesi arasındaki farkın 0,03'ten fazla olması istenmediğine göre, %95'lik güven aralığını oluşturacak örneklem büyüklüğünü

(a) Defoluluk oranının geçmiş tecrübelerden yaklaşık 0,05 olduğu tahmin ediliyorsa,

(b) Defoluluk oranına ilişkin yaklaşık bir ön tahmin yapılamıyorsa aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz:

(a) (4.6) eşitliğinde  $z_{\alpha/2} = 1,96$  ,  $\hat{p} = 0,05$  ,  $\hat{q} = 0,95$  ve  $e = 0,03$  değerleri yerlerine konursa

$$n_{maksimum} = 1,96^2 \cdot \frac{(0,05)(0,95)}{0,03^2} = 202,751 \sim 203$$

elde edilir. Öyleyse 203 birimlik bir örnekleme ihtiyaç vardır.

(b) (4.7) eşitliğinde  $z_{\alpha/2} = 1,96$  ve  $e = 0,03$  değerleri yerlerine konursa

$$n_{maksimum} = \frac{1,96^2}{4 \cdot 0,03^2} = 1067,11 \sim 1068$$

elde edilir. Öyleyse bu durumda da 1068 birimlik bir örneklem gereklidir.

#### 4.4. Bir Tahmincinin Yansızlık ve Etkinlik Özelliği

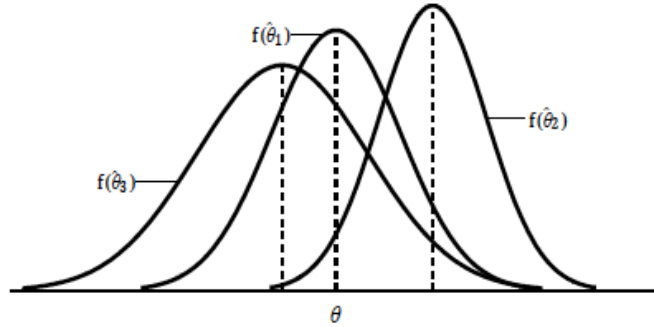
Bir parametrenin tahmini sürecinde hangi örneklem istatistiğinin tahminci olarak kullanılacağı büyük ölçüde o örneklem istatistiğinin teorik özelliklerine bağlıdır. Şimdi bu özelliklerden yansızlık ve etkinlik özelliklerini inceleyelim.

$\theta$  bir kitle parametresi,  $\hat{\theta}$  ise bu kitle parametresinin bir tahmincisi olsun.  $\hat{\theta}$ 'dan elde edilecek bir tahmin değerinin  $\theta$ 'ya eşit olması beklenmese de, tahmin değerlerinin  $\theta$ 'nın merkezinde dağılması, diğer bir deyişle  $\hat{\theta}$ 'nın örneklem dağılımının ortalamasının  $\theta$  olması arzu edilir ve böyle bir nokta tahmincisi **yansız** olarak nitelenir.

Tanımlarsak

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

ise  $\hat{\theta}$ ,  $\theta$ 'nın **yansız bir tahmincisidir** denir.



Şekil 4.2:  $\theta$ 'nın yansız tahmincisi  $\hat{\theta}_1$  ile yanlı tahmincileri  $\hat{\theta}_2$  ve  $\hat{\theta}_3$ 'nin örneklem dağılımları

Şekil (4.2)'de üç ayrı tahmincinin örnekleme dağılımları görülmektedir. Her üç tahmincinin örnekleme dağılımı da  $\theta$ 'yı içermektedir. Ancak bunlardan yalnızca  $\hat{\theta}_1$ 'nin örnekleme dağılımının ortalaması  $\theta$ 'ya eşittir. Merkezi eğilim  $\theta$ 'ya doğru olduğu için bu tahminden elde edilecek tahmin değerlerinin sistematik bir biçimde  $\theta$ 'dan büyük ya da yine sistematik bir biçimde  $\theta$ 'dan küçük olması beklenmeyip, farklılıklarının her iki yönde yaklaşık olarak eşit dağılması beklenir.  $\hat{\theta}_2$ 'nin örnekleme dağılımının ortalaması ise  $\theta$ 'dan büyük bir değer olduğu için, bu tahminden elde edilecek tahmin değerlerinin genellikle  $\theta$ 'dan büyük olacak şekilde yanlı olması  $\hat{\theta}_3$ 'dan elde edilecek değerlerin ise, genellikle  $\theta$ 'dan küçük olacak şekilde yanlı olması beklenir.

Şimdi  $\bar{X}$  ve  $S^2$ 'nin,  $\mu$  ve  $\sigma^2$ 'nin yansız birer tahmincisi olduklarını ispatlayalım.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  rastlantı değişkenleri, ortalaması  $\mu$  ve varyansı  $\sigma^2$  olan bir kitleden çekilecek rastlantısal örnekleme gösterebilir.

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} [E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)]$$

$$E(X_i) = \mu \text{ olduğu için}$$

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n} [\mu + \mu + \dots + \mu] = \frac{1}{n} n\mu$$

$$E(\bar{X}) = \mu$$

elde edilir. Öyleyse  $\bar{X}$ ,  $\mu$ 'nün yansız bir tahmincisidir. Benzer özelliği  $S^2$  için elde edelim:

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) = E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X} + \mu - \mu)^2]\right)$$

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)]^2\right)$$

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2\right]\right)$$

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n E[(X_i - \mu)^2] - nE[(\bar{X} - \mu)^2]\right)$$

$E[(X_i - \mu)^2] = \sigma^2$  ve  $E[(\bar{X} - \mu)^2] = \frac{\sigma^2}{n}$  değerleri eşitlikte yerlerine konulursa

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$E(S^2) = \sigma^2$$

sonucu elde edilir. Böylece  $S^2$ 'nin formülünde paydada neden  $n$  değil de  $(n - 1)$ 'in yer aldığı da anlaşılmış olur. Eğer  $n$  kullanılsaydı  $E(S^2) = \frac{1}{n}(n - 1)\sigma^2$  olurdu ve  $\frac{n-1}{n} < 1$  olacağı için  $S^2$ 'nin,  $\sigma^2$ 'yi gerçek değerinden daha küçük olacak şekilde yanıltıcı tahmin etmesi beklenenecekti.

Örnekleme dağılımının ortalamasının kitle parametresi olmasının, yani tahmin değerlerinin kitle parametresi merkezli (yansız) dağılımlarının yanı sıra bu dağılımın dar bir aralıkta gerçekleşmesi yani tahmin değerlerinin kitle parametresine yakın olması da şüphesiz istenilen bir durumdur. Açıktır ki tahmincinin örnekleme dağılımının varyansı ne kadar küçükse, tahmin değerlerinin kitle parametresine o kadar yakın olmasını bekleriz.

Tahmincinin örnekleme dağılımının varyansına ilişkin bir özelliği olan **etkinlik**, özellikle bir parametrenin birden fazla yansız tahmincisi arasında seçim yapma konusunda başvurulabilecek bir kriterdir.

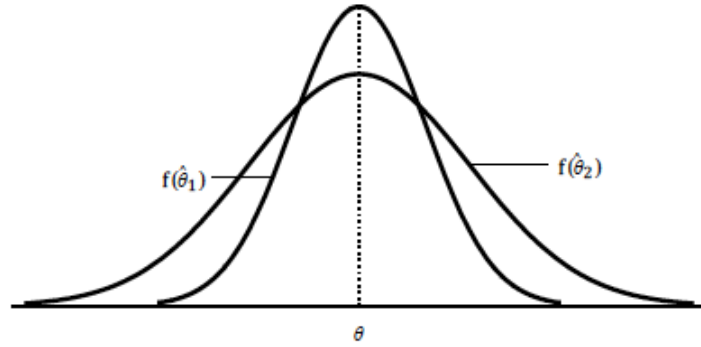
$\hat{\theta}_1$  ve  $\hat{\theta}_2$ ,  $\theta$ 'nın yansız tahmincileriye ve

$$Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$$

ise  $\hat{\theta}_1$ ,  $\hat{\theta}_2$ 'dan daha **etkindir** denir.  $\hat{\theta}_1$ 'nın,  $\hat{\theta}_2$ 'ya görece etkinliği ise

$$\text{Görece Etkinlik} = \frac{Var(\hat{\theta}_2)}{Var(\hat{\theta}_1)}$$

olarak tanımlanır.



Şekil 3.7  $\theta$ 'nın iki yansız tahmincisi  $\hat{\theta}_1$  ve  $\hat{\theta}_2$ 'nin örneklem dağılımları

Şekil 3.7'de  $\hat{\theta}_1$  ve  $\hat{\theta}_2$ 'nin örneklem dağılımları görülmektedir. Her iki örneklem dağılımının da ortalaması  $\theta$ 'ya eşit olduğu için  $\hat{\theta}_1$  ve  $\hat{\theta}_2$ ,  $\theta$ 'nın yansız tahmincileridir. Ancak ortalamaları aynı olan bu iki dağılımdan varyansı küçük olan  $\hat{\theta}_1$ ,  $\hat{\theta}_2$ 'ya tercih edilir.

Diyelim ki,  $\mu$  ortalamalı ve  $\sigma^2$  varyanslı normal dağılan bir kitleden çekilen rastlantısal örneklemin medyanının örneklem dağılımının ortalaması  $\mu$ , varyansı  $\frac{\pi \sigma^2}{2n}$ 'dir. Kitle ortalaması  $\mu$  'nün tahmininde örneklem medyanı mı örneklem ortalaması mı kullanılmalıdır? Şeklindeki bir soru şöyle irdelenebilir:

$\bar{X}$ 'nin da örneklem medyanının da beklenen değeri kitle ortalaması  $\mu$ 'dür. Yani iki tahminci de yansızdır. İki yansız tahminci arasında seçim yapmamız gerektiğine göre bu tahmincilerin varyanslarına bakmalıyız.  $\bar{X}$  'nin varyansının  $\frac{\sigma^2}{n}$  olduğunu daha önceki kısımlardan biliyoruz. Örneklem medyanının varyansı ise soruda tanımlandığı gibi  $\frac{\pi \sigma^2}{2n}$ 'dir.

$$\frac{\sigma^2}{n} < \frac{\pi \sigma^2}{2 n}$$

olduğu için  $\bar{X}$ , örneklem medyanına tercih edilir.  $\bar{X}$ 'nin medyana görece etkinliği ise

$$\text{Görece Etkinlik} = \frac{\pi \sigma^2}{2 n} / \frac{\sigma^2}{n} = 1,57$$

olur. Örneklem medyanının varyansı, örneklem ortalamasının varyansından %57 daha büyük olduğuna göre her iki tahmincinin varyanslarının eşit olması için, medyanla tahmin yapılacaksa çekilecek örneklemin büyüklüğünün %57 daha fazla olması, dolayısıyla daha yüksek maliyete katlanması gerekecektir.

$\hat{\theta}$ ,  $\theta$ 'nin yansız bir tahmincisi ise ve  $\hat{\theta}$ 'nin varyansı,  $\theta$ 'nin diğer tüm mümkün yansız tahmincilerinin varyansından küçükse  $\hat{\theta}$ ,  $\theta$ 'nin **en etkin tahmincisi** ya da **minimum varyanslı yansız tahmincisi** olarak adlandırılır. Kitle normal dağılıyorsa  $\bar{X}$  ve  $S^2$ ,  $\mu$  ve  $\sigma^2$ 'nin en etkin tahmincileridir.  $\hat{p}$  da  $p$ 'nin yine en etkin tahmincisidir.



## Uygulamalar

**1)** Bir otoyolun belirli bir noktasında sıkça meydana gelen trafik kazalarının en önemli nedeninin aşırı hız olduğu düşünülmektedir. Otoyolun bu noktasından geçecek tüm otomobillerin ortalama hızını tahmin etmek amacıyla rastlantısal olarak seçilen on iki otomobilin radar tarafından tespit edilen hızları km/saat olarak aşağıdadır:

90 , 75 , 103 , 82 , 106 , 93 , 87 , 92 , 94 , 115 , 96 , 88

Hızların normal dağıldığını varsayarak, hızların varyansı ve standart sapması için %95 güven aralığı oluşturunuz.

### **Çözüm:**

$n = 12$  ,  $s^2 = (10,774)^2 = 116,079$  ,  $\chi_{11;0,025}^2 = 21,9$  ve  $\chi_{11;0,975}^2 = 3,82$  değerleri (4.1) eşitliğinde yerine konursa kitle varyansı için %95 güven aralığı

$$\frac{(12 - 1)116,079}{21,9} \leq \sigma^2 \leq \frac{(12 - 1)116,079}{3,82}$$

$$58,305 \leq \sigma^2 \leq 334,259$$

olarak elde edilir. Buradan standart sapma için güven aralığı

$$7,636 \leq \sigma \leq 18,283$$

olarak bulunur.

2) Bir fırının ürettiği ekmeklerin ağırlıklarının çok fazla değişkenlik gösterdiği iddia ediliyor. İddiayı araştırmak amacıyla bu fırının ürettiği ekmeklerden rastlantısal olarak seçilen on iki tanesinin ağırlıkları ölçülmüş ve standart sapma 33 gram olarak bulunmuştur. Ağırlıkların normal dağıldığını varsayarak ekmeklerin ağırlıklarının gerçek standart sapması için %90 güven aralığı oluşturunuz.

**Cözüm:**

$s = 33$  ,  $n = 12$  ,  $\chi_{11,0,05}^2 = 19,7$  ve  $\chi_{11,0,95}^2 = 4,57$  değerleri eşitlik (4.2)'de yerlerine konulursa

$$\sqrt{\frac{(12 - 1)}{19,7}} \cdot 33 \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(12 - 1)}{4,57}} \cdot 33$$

$$24,659 \leq \sigma \leq 51,198$$

elde ederiz.

3) Piyasaya sürülmesi tasarlanan bir yiyeceğe ilişkin yapılan araştırmanın sonuçlarına göre, bir süper markette bu yiyeceği tadan iki yüz elli kişiden kırk biri bu ürünü satın alacağını söylemiştir. Bu sonuca dayanarak tüm potansiyel müşteriler içinde bu ürünü satın alacakların gerçek oranına ilişkin %95 güven aralığını oluşturunuz.

**Cözüm:**

$n = 250$  ,  $\hat{p} = \frac{41}{250} = 0,164$  ,  $\hat{q} = 1 - 0,164 = 0,836$  ve  $z_{\alpha/2} = 1,96$  değerleri (4.3) eşitliğinde yerlerine konulursa %95 güven aralığı

$$0,164 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{(0,164)(0,836)}{250}} \leq p \leq 0,164 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{(0,164)(0,836)}{250}}$$

$$0,164 - 0,046 \leq p \leq 0,164 + 0,046$$

$$0,118 \leq p \leq 0,210$$

olur.

4) Yaklaşan bir genel seçimde bir partinin oy oranını tahmin etmek amacıyla iki yüz yetmiş beş birimlik bir örneklem çekilmiş ve yüz kırk sekizinin bu partiye oy vereceği saptanmıştır. Bu bilgiye dayanarak bu partinin oy oranı için %95 ve %99 güven aralığı oluşturunuz.

**Cözüm:**

$n = 275$ ,  $\hat{p} = \frac{148}{275} = 0,538$ ,  $\hat{q} = 1 - 0,538 = 0,462$  ve  $z_{\alpha/2} = 1,96$  değerleri (4.3) eşitliğinde yerlerine konulursa %95 güven aralığı

$$0,538 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{(0,538)(0,462)}{275}} \leq p \leq 0,538 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{(0,538)(0,462)}{275}}$$

$$0,538 - 0,059 \leq p \leq 0,538 + 0,059$$

$$0,479 \leq p \leq 0,597$$

olarak elde edilir. %99 güven aralığı ise  $z_{\alpha/2} = 2,58$  konularak

$$0,538 - 2,58 \cdot \sqrt{\frac{(0,538)(0,462)}{275}} \leq p \leq 0,538 + 2,58 \cdot \sqrt{\frac{(0,538)(0,462)}{275}}$$

$$0,538 - 0,078 \leq p \leq 0,538 + 0,078$$

$$0,460 \leq p \leq 0,616$$

olacaktır. %99'luk güven aralığının beklendiği gibi daha geniş olduğu görülmektedir.

5) Rastlantısal olarak seçilen yüz kişiden yetmiş üçü sigara içmediğini söylemiştir. Tüm ülkede sigara içmeyenlerin oranı için %95 güven aralığı oluşturunuz. Elde edilen güven aralığı ne kadarlık bir hata içermektedir? Bu hatayı aynı güven düzeyinde 0,03'e indirmek için kaç birimlik örnekleme ihtiyaç vardır?

**Cözüm:**

$n = 100$ ,  $\hat{p} = 0,73$ ,  $\hat{q} = 0,37$  ve  $z_{\alpha/2} = 1,96$  değerleri (4.3) eşitliğinde yerlerine konulursa %95 güven aralığı

$$0,73 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{(0,73)(0,37)}{100}} \leq p \leq 0,73 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{(0,73)(0,37)}{100}}$$

$$0,73 - 0,102 \leq p \leq 0,73 + 0,102$$

$$0,628 \leq p \leq 0,832$$

olarak elde edilir. Hata miktarı 0,102'dir. Eşitlik (4.6)'dan bu hatayı 0,03'e indirmek için

$$n = \frac{1,96^2(0,73)(0,37)}{0,03^2} = 1152,907 \sim 1153$$

birimlik örnekleme ihtiyaç olduğunu söyleyebiliriz.

6) Bir firmanın ürettiği görüntü kartlarının ömürlerinin standart sapması 100 saattir ve kitle dağılımı normaldir. Kitle ortalaması ile örneklem ortalaması arasındaki farkın 25 saati aşmayacağını %95 güvenle iddia etmek için kaç birimlik bir örneklem çekilmelidir?

**Cözüm:**

Eşitlik (4.5)'te  $e = 25$  ,  $\sigma = 100$  ve  $z_{\alpha/2} = 1,96$  değerleri yerlerine konulursa

$$n = \left[ 1,96 \cdot \frac{100}{25} \right]^2 = 61,466 \sim 62$$

elde edilir. Öyleyse istenen koşulları sağlayacak 62 birimlik bir örnekleme ihtiyaç vardır.

7) Bir ilacın yan etkilerine ilişkin bir araştırma yapmak amacıyla belirli sayıda kişiye klinik bir test uygulanacaktır. Araştırmacı yan etkinin görülme oranını 0,03'ten daha az bir hata ve %90 güvenle tahmin etmek istemektedir. Araştırmacı tahmin etmek istediği oranın 0,60 civarında olduğunu düşünmektedir. İstenen koşulları sağlayacak örneklem büyüklüğünü hesaplayınız.

**Cözüm:**

$e = 0,03$  ,  $p = 0,60$  ,  $q = 0,40$  ,  $z_{\alpha/2} = 1,645$  değerleri eşitlik (4.6)'da yerlerine konulursa

$$n = (1,645)^2 \frac{(0,60)(0,40)}{0,03^2} = 721,6 \sim 722$$

elde edilir. Öyleyse testin en az 722 kişiye uygulanması gerekir.

Bu soruda araştırmacı tahmin etmek istediği oran üzerine  $p = 0,60$  gibi bir önsel tahmin yapamıyorsa, bu durumda örneklem büyüklüğü, eşitlik (4.7)'den

$$n = \frac{1,645^2}{4(0,03)^2} = 751,6 \sim 752$$

olacaktır. Öyleyse bu durumda 752 kişiye ihtiyaç vardır.

8)  $\hat{\theta}_1$  ,  $\hat{\theta}_2$  ve  $\hat{\theta}_3$  ,  $\theta$  parametresinin tahmincileri olsun.  $E(\hat{\theta}_1) = 0,8\theta$  ,  $E(\hat{\theta}_2) = \theta$  ve  $E(\hat{\theta}_3) = 1,4\theta$  ise yalnızca bu bilgiye dayanarak hangi tahminciye daha çok güvenilir? Açıklayınız.

**Cözüm:**

Tahmincilerden yalnızca  $\hat{\theta}_2$ 'nin beklenen değeri  $\theta$ 'ya eşittir. Diğer bir deyişle tek yansız tahminci  $\hat{\theta}_2$ 'dir ve bu yüzden diğerlerine tercih edilmelidir.

9)  $\hat{\theta}_1$  ,  $\hat{\theta}_2$  ve  $\hat{\theta}_3$  ,  $\theta$  parametresinin yansız tahmincileri olsun:

$Var(\hat{\theta}_1) = 0,30\theta^2$  ,  $Var(\hat{\theta}_2) = 0,45\theta^2$  ve  $Var(\hat{\theta}_3) = 1,20\theta^2$  ise hangi tahminciyi tercih edersiniz?

**Cözüm:**

Her üçü de yansız tahminci olduğuna göre en etkin olanı yani varyansı en küçük olanı seçmek gerekir. Bu nedenle  $\hat{\theta}_1$  tercih edilmelidir.

## Uygulama Soruları

1) Türkiye'nin Avrupa Birliği üyeliğine ilişkin, bireylerin üyeliğe bakışlarını tahmin etmek üzere bir araştırma yapınız. "Türkiye'nin Avrupa Birliğine üye olmasının faydalı olacağı" görüşünde olanların oranı için %95 ve %99 güven aralığını oluşturunuz.

2) "İdam cezasına karşı mısınız?" sorusuna yer veren tek soruluk bir anketi çevrenizdeki 30 kişiye uygulayınız.

a) Elde ettiğiniz sonuca dayanarak, idam cezasına karşı olmayanların oranı için %99 güven aralığını oluşturunuz.

b) Oluşturduğunuz güven aralığını yarıya indirmek için örneklem sayısında nasıl bir değişiklik yapmak gerekir?

3) "Sayısal dersler sizde anksiyeteye neden oluyor mu?" sorusunun yer aldığı tek soruluk bir anketi çevrenizdeki 100 kişiye uygulayınız.

a) Elde ettiğiniz sonuçlara göre, sayısal ders anksiyetesine sahip olanların oranı için %95 güven aralığını oluşturunuz. Bulunan güven aralığı ne kadarlık bir hata içermektedir? Bu hatayı aynı güven düzeyinde %10 oranında azaltmak için kaç birimlik örnekleme ihtiyaç vardır?

b) Güven düzeyini %95'den %99'e çıkardığınızda güven aralığı nasıl etkilenir? Açıklayınız.

4) Telefon konuşma sürelerinizdeki değişkenliği tahmin etmek istediğinizi düşünelim. Telefon konuşma kayıtlarınızdan son yaptığınız 15 telefon konuşmasına bakarak, bu konuşma sürelerindeki değişkenliği (örneklem varyansı  $s^2$ 'yi) hesaplayıp, %95 güven aralığını oluşturunuz. Bu güven aralığını oluştururken hangi varsayımı yaptınız? Açıklayınız.

5) Şehir dışı bir üniversitede kampüse araba ile gelen öğrencilerden 35 tanesi rastlantısal olarak seçilmiş ve kampüse gelme süreleri (dakika olarak) kaydedilmiştir. Normal dağılan bu sürelerden oluşan örneklem varyansı 2,12 dakika olarak hesaplandığına göre, öğrencilerin varış süresindeki değişkenliğe ilişkin %95 güven aralığını oluşturunuz.

6) Bir sendika haftada 20 saatin üzerinde çalışıp part-time statüde olan 14 yaş altı çocuk çalışanların oranını tahmin etmek için, rastlantısal bir örnekleme ile görüşme yapmaya karar vermiştir. %95 güven aralığının 0.1'den fazla olmaması için örnek büyüklüğü kaç olmalıdır?

7) Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK) **Temel istatistik** verilerinden **Eğitim, Kültür, Spor ve Turizm** başlığına ait **Eğitim istatistikleri** konusunda [Ulusal Eğitim İstatistikleri Veri tabanı](#)nda sırasıyla 2013 yılı, illere göre, okuma yazma durumu, il-ilçe merkezi, 15+ yaş grubunu tercihlerini yaparak, rapor oluşturunuz. Böylelikle artık elinizde illere göre okuma yazma bilmeyen kadın sayıları mevcut olur.

a) Toplam sayıya oranlayarak, illere göre okuma yazma bilmeyen kadın oranını bulunuz. (Örneğin Adana’da  $69722/795786 = 0,0876$  ’dır.)

b) 81 ildeki okuma yazma bilmeyen kadın oranı kitleniz olsun. 10 birimlik bir örneklem seçerek, kitle oranı için %95 güven aralığını oluşturunuz. (kitlenin bilinmediğini farz ederek)

c) Gerçekleştirilen örnekleme yöntemi hangisidir? Sizce kitle oranını temsil etmesi bakımından doğru bir örnekleme yöntemi midir?



### **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Bu bölümde sık başvurulanan kitle parametrelerinden varyans ve oran için güven aralıklarının nasıl oluşturulduğu anlatıldı ve bu süreçte hangi teoremlerin izlendiği açıklandı. Bu aşamada farklı bir bakış açısıyla, aslında araştırmacının güven aralığı tahmini yapıyor olsa da öncelikle analiz için ihtiyacı olanın, gözlemesi gereken örnek büyüklüğünü belirlemesi olduğu vurgulandı. Bu sebeple, doğal bir tahmin sürecinin başında yanıtlaması gereken sorular açığa çıkarılarak, örnek büyüklüğünün nasıl belirleneceği anlatıldı. Kitle parametrelerinden kitle ortalaması ve kitle oranının tahmininde örneklem büyüklüğünün nasıl bulunduğu örnekler üzerinde de açıklandı. Esasen örnek büyüklüğünün belirlenmesinde olduğu gibi, doğal istatistiksel bir süreçte parametrenin tahmini aşamasında hangi örneklem istatistiğinin tahminci olarak seçildiği de önemli olduğundan, tahminciler öncelikle özelliklerine göre değerlendirilmelidirler. Bu sebepten yansızlık ve etkinlik özellikleri anlatılmıştır.

## Bölüm Soruları

1) Türkiye'deki üniversite mezunu 16 kadına uygulanan IQ testinin skorları aşağıdaki gibidir:

108, 77, 114, 112, 90, 103, 114, 112, 116, 92, 100, 81, 96, 123, 95, 99

Türkiye'deki üniversite mezunu tüm kadınların varyansı için **%95** güven aralığı nedir?

- a)  $93,5 \leq \sigma^2 \leq 410,4$
- b)  $105,7 \leq \sigma^2 \leq 482,5$
- c)  $116,7 \leq \sigma^2 \leq 517,2$
- d)  $125,2 \leq \sigma^2 \leq 553,9$

2) Birinci soru için **%99** güven aralığı nedir?

- a)  $63,5 \leq \sigma^2 \leq 622,3$
- b)  $78,3 \leq \sigma^2 \leq 558,6$
- c)  $82,2 \leq \sigma^2 \leq 499,0$
- d)  $85,3 \leq \sigma^2 \leq 475,2$

3) Zonguldak'ın Devrek ilçesinde 7 yıl boyunca Şubat ayları için metrekareye düşen ortalama yağış miktarları kilogram olarak aşağıdaki gibidir:

1,4 , 3,0 , 2,4 , 2,4 , 1,2 , 1,6 , 1,9 , 1,4

Söz konusu ilçede yağış miktarlarının varyansı için **%95** güven aralığı nedir?

- a)  $4,23 \leq \sigma^2 \leq 18,56$
- b)  $2,45 \leq \sigma^2 \leq 12,54$
- c)  $1,23 \leq \sigma^2 \leq 3,97$

d)  $0,17 \leq \sigma^2 \leq 1,65$

4) Üçüncü soru için %99 güven aralığı nedir?

a)  $0,04 \leq \sigma^2 \leq 1,54$

b)  $0,09 \leq \sigma^2 \leq 1,73$

c)  $0,14 \leq \sigma^2 \leq 2,82$

d)  $1,23 \leq \sigma^2 \leq 3,65$

5) Bir kamuoyu şirketi 400 kişiye uygulanan bir ankette 82 kişinin kürtaja karşı olduğu görülmüştür. Bu sonuca göre kürtaja karşı olanların gerçek oranı (p) için %95 güven aralığı nedir?

a)  $0,08 \leq p \leq 0,82$

b)  $0,12 \leq p \leq 0,20$

c)  $0,16 \leq p \leq 0,24$

d)  $0,34 \leq p \leq 0,45$

6) Beşinci soru için %99 güven aralığı nedir?

a)  $0,10 \leq p \leq 0,22$

b)  $0,15 \leq p \leq 0,26$

c)  $0,19 \leq p \leq 0,29$

d)  $0,24 \leq p \leq 0,35$

7) Bir ilacın yan etkilerine ilişkin bir araştırma yapmak amacıyla belirli sayıda kişiye klinik bir test uygulanacaktır. Araştırmacı yan etkinin görülme oranını 0,02'ten daha az bir hata ve %95 güvenle tahmin etmek istemektedir. Araştırmacı tahmin etmek istediği oranın 0,10 civarında olduğunu düşünmektedir. İstenen koşulları sağlayacak örneklem büyüklüğünü hesaplayınız.

a) 150

b) 384

c) 628

d) 721

**8)** Yedinci soruda hata değerini 0,01 alırsak örneklem büyüklüğü ne olur?

**a)** 691

**b)** 1230

**c)** 3458

**d)** 4035

**9)** Yedinci soruda hata değerini 0,01 , güven düzeyini ise %99 alırsak örneklem büyüklüğü ne olur?

**a)** 3840

**b)** 4371

**c)** 4437

**d)** 5991

**10)** Yedinci soruda araştırmacı tahmin etmek istediği oranın 0,10 civarında olduğunu düşünmekteydi. Araştırmacının bu tür bir önsel tahmini olmadığı durumda örneklem büyüklüğü ne olmalıdır? (Hata değerini yine 0,02 , güven düzeyini ise %95 alınız)

**a)** 2401

**b)** 3371

**c)** 4025

**d)** 5332

### **Cevaplar**

1) a, 2) b, 3)d , 4) c, 5) c, 6) b, 7) d, 8) c, 9) d, 10) a

## **5. HİPOTEZ TESTİ KAVRAMLARI VE KİTLE ORTALAMASINA İLİŞKİN HİPOTEZ TESTLERİ**

### **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

Bu bölümde hipotez testi kavramları tanıtılarak, bir hipotez testi sürecindeki adımlar, karar kuralı anlatılacak, ayrıca çeşitli durumlarda kitle ortalamasının hipotez testi sürecinin gerçekleştirilmesi konuları öğrenilecektir.

### **Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular**

- 1) Bir evlenme teklifi karşısında düşünmekte olan bir kişinin yapabileceği birinci ve ikinci tip hatalar nelerdir?
- 2) Uluslararası Futbol Federasyonu (FIFA) hakemlere emin olmadıkları pozisyonlarda karşılaşmayı devam ettirmelerini önermektedir. Bu durumda FIFA birinci tip hatayı mı yoksa ikinci tip hatayı mı daha ciddi görmektedir?
- 3) Bir yargıç açısından suçlu birini salıvermesi mi, suçsuz birini hapse göndermesi mi daha ciddi bir hatadır? İki tip hata bağlamında değerlendiriniz.
- 4) Vereceğiniz kararlarda iki tip hata olasılığını da düşük kılmanın yolu nedir?

### Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

| Konu                                                                                         | Kazanım                                                                                                                                                                                                                                                            | Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Hipotez testi kavramlarına ve kitle ortalaması için hipotez testi konularına değinilecektir. | Hipotez testi kavramları öğrenilecek, hipotez testinin mantığını anlayarak, kitle ortalaması için hipotez testi sürecini oluşturma öğrenilecektir. Böylelikle bir iddiayı istatistiksel hipotez testi sürecinden geçirerek sınamanın yolları öğrenilmiş olacaktır. | Metinler, çözümlü problemler, alıştırmalar ve apletler ile konuların daha kolay anlaşılması sağlanacaktır. |



## **Anahtar Kavramlar**

- Hipotez
- Hipotez testi
- Sıfır hipotezi
- Alternatif hipotez
- Çift yönlü test
- Tek yönlü test
- Testin yönü
- Karar kuralı
- Birinci tip hata
- Önem düzeyi
- İkinci tip hata
- Testin gücü
- Test istatistiği
- Kritik bölge
- Ret bölgesi
- Kitle ortalamasının testi

## Giriş

Bilimsel araştırmaların temel amaçlarından biri; ekonomik, sosyal ya da fiziksel süreçlere ilişkin önermelerin, çıkarımların ya da bütünüyle bir teorinin doğrulanması ya da çürütülmesidir. Aşağıdaki örnekleri inceleyelim:

1. A şirketinin ürettiği TV tüplerinin ortalama ömürleri 30.000 saattir.
2. A marka sigaradaki nikotin miktarı, B marka sigaradakinden daha azdır.
3. Piyasaya yeni sürülecek ilaç eskisinden daha etkilidir.

Bu iddiaların, önermelerin istatistiksel olarak test edilebilmeleri için her şeyden önce birer istatistiksel hipoteze dönüştürülmeleri gerekir. İstatistik anlamıyla **hipotez**, bir kitlenin dağılımına ya da parametrelerine ilişkin bir önerme olarak tanımlanır. Öyleyse belirli bir iddianın istatistiksel bir hipoteze dönüştürülmesinde ilk adım, iddianın bir kitle parametresi ile ilişkilendirilmesi olacaktır. Bir kitle parametresinin test edilebilmesi için ilgili kitlenin dağılımının ve diğer parametrelerinin bilindikleri varsayılabilir. Örneğin kitlenin ortalamasının testi söz konusu ise, kitlenin normal dağıldığı ve varyansının bilindiği varsayılabilir. Kitlenin dağılımına ve varyansına ilişkin hipotez testleri de ayrıca gerçekleştirilebilir.

Yukarıda verilen örneklerden birincisinde TV tüplerinin ömürlerinin oluşturacağı kitlenin belirli bir olasılık dağılımına, örneğin üstel dağılıma, uyduğu varsayılır. Böylece kitle ortalamasına ilişkin iddia üstel dağılımın ortalamasına (parametresine) ilişkin bir istatistiksel hipotez olarak düşünülebilir. Olasılık dağılımları bölümünde üstel dağılımın ortalaması için  $\theta$  notasyonunu kullanmıştık. Öyleyse hipotezimiz  $H: \theta = 30.000$  saat olarak ifade edilebilir.

İkinci örnekte ise iki kitlenin karşılaştırılması söz konusudur. Nikotin miktarlarının dağılımlarının, örneğin normal dağılıma uyduğu varsayılarak, ilgili iddia iki normal dağılımın ortalamalarının karşılaştırılması olarak ele alınabilir. Öyleyse hipotez  $H: \mu_A < \mu_B$  olarak ifade edilebilir.

Üçüncü örnekte ise yeni ilacın eskisinden daha etkili olduğu iddia edilmektedir. Bir ilacın etkinliğini ölçmede o ilacı kullanıp iyileşenlerin oranı ( $p$ ) kriter olarak kullanılabilir. Oran parametresi söz konusu olduğuna göre, binom dağılan bir kitlenin varsayılabilirliğini önceki bölümlerden biliyoruz. Eski ilaç için iyileşme oranı, örneğin  $p = 0,75$  ise yeni ilacın daha etkili olduğu düşünüldüğü için hipotez  $H: p > 0,75$  olarak ifade edilebilir. Buradaki  $p$ , binom dağılımının parametresi  $p$ 'ye denk olacaktır.

## 5.1. Sıfır Hipotezi ve Alternatif Hipotez

Belirli bir hipotez doğru ya da yanlıştır. Buna karşın karar verici, hipoteze ilişkin gerçek durumu bilmeden kararını vermek, hipotezi kabul ya da reddetmek durumundadır. Bilimsel süreçlerde bir düşüncenin, bir iddianın ya da bir teorinin doğrulanması karşısının çürütülmesi ya da reddedilmesi olarak da ele alınabilir. Bu anlamda, istatistiksel hipotez testi süreci tek başına bir hipotezin testi olarak değil, karşıt düşüncüyü simgeleyen iki hipotez arasında seçim yapmak olarak tasarlanır.

Bu hipotezlerden birisi  $H_0$  notasyonu ile gösterilip **sıfır hipotezi** olarak adlandırılırken, diğeri  $H_a$  notasyonu ile gösterilip **alternatif hipotez** olarak adlandırılır. Hipotezlerden hangisinin  $H_0$ , hangisinin  $H_a$  olarak seçileceği duruma ve araştırmacının amacına bağlı olarak değişirse de, genellikle araştırmalardan gelen yeni sonuçlar, bulgular  $H_a$  olarak düşünülürken,  $H_0$  hipotezi  $H_a$ 'nın karşıtı olacak şekilde kurulur.

Hipotezler kurulduktan sonra araştırmacı örneklemini çekip, örneklemden gelecek bilgilere dayanarak  $H_0$  hipotezinin reddedilmesini ümit eder. Ancak örneklemden gelecek bilgiler  $H_0$  'ın reddedilmesini sağlayacak kadar güçlü, önemli istatistiksel kanıtlar içermiyorsa, bu durumda  $H_0$ 'ın benimsenmesi gerekecektir.

$\theta$  kitle parametresini,  $\theta_0$  ise bu kitle parametresinin aldığı iddia edilen değeri göstermek üzere uygulamada genellikle  $H_0$  ve  $H_a$  hipotezleri aşağıdaki üç kategoriden birinde oluşturulur:

$$1) H_0: \theta = \theta_0 \quad 2) H_0: \theta = \theta_0 \text{ ya da } H_0: \theta \leq \theta_0 \quad 3) H_0: \theta = \theta_0 \text{ ya da } H_0: \theta \geq \theta_0$$

$$H_a: \theta \neq \theta_0 \quad H_a: \theta > \theta_0 \quad H_a: \theta < \theta_0$$

Dikkat edilmesi gereken,  $H_0$  ve  $H_a$ 'da belirtilen bölgelerin her zaman ayrık olduğu (kesişmediği) ve  $=, <, >$  işaretlerinin mutlaka  $H_0$ 'da yer alması gerektiridir.

Bilinmesi gereken diğeri bir kavram da testin yönüdür. Testin yönünü  $H_a$  hipotezi belirleyecektir. Birinci kategorideki  $H_a$ 'da  $\theta$ 'nın  $\theta_0$ 'dan farklı olduğu ileri sürülürken, bu farklılığın yönü belirtilmemiştir. Yani  $\theta$ 'nın  $\theta_0$ 'dan büyük ya da küçük olmasının önemi olmayıp, yalnızca farklılığı araştırılmaktadır. Bu nedenle bu tip testlere **çift yönlü test** adı verilir. İkinci ve üçüncü kategorilerdeki testlerde ise  $H_a$ 'da  $\theta$ 'nın  $\theta_0$ 'dan belirli bir yönde (küçük ya da büyük) farklı olduğu iddia edildiği için bu tip testler **tek yönlü test** olarak adlandırılırlar.  $H_0$  ve  $H_a$  hipotezlerinin oluşturulmasını ve diğeri kavramları bir örnek ile ele alalım.

Bir şirkete bağlı bir fabrikada üretilen otomobil lastiklerinin ortalama ömürlerinin 20.000 km olduğu geçmiş verilerden bilinsin. Şirketin araştırma bölümündeki mühendisler üretim sürecine uygulanabilecek yeni bir teknoloji ile lastiklerin ortalama ömürlerinin arttırılabileceğini iddia etmektedirler. Bu iddia alternatif hipotez olarak seçilebilir. İddiaya karşıt olarak yeni teknoloji uygulansa da lastiklerin ortalama ömürlerinin değişmeyeceği, yine 20.000 km olacağı iddiası ise sıfır hipotezi olarak seçilebilir. Öyleyse  $\mu$  yeni teknolojinin uygulanacağı süreçte elde edilecek lastiklerin ortalama ömrünü göstermek üzere,  $H_0$  ve  $H_a$  hipotezleri

$H_0: \mu = 20.000$  km (yeni teknoloji lastiklerin ortalama ömürlerini arttırmaz.)

$H_a: \mu > 20.000$  km (yeni teknoloji ile lastiklerin ortalama ömürleri arttırılabilir.)

olarak kurulabilir.

$H_0$  ve  $H_a$  hipotezlerinden hangisini benimseyeceğimiz **test istatistiğinin** örneklemden elde edilecek sayısal değerine bağlı olacaktır. Test istatistikleri ise genellikle kitle parametrelerini tahmin etmek amacıyla kullanılan örneklem istatistikleri ya da örneklem istatistiklerinin fonksiyonları olacaktır. Bu örnekte kitle ortalaması  $\mu$ 'nün testi ile ilgilendiğimize göre örneklem ortalaması  $\bar{X}$ 'yü test istatistiğı olarak kullanabiliriz. Yapılacak olan, yeni teknoloji ile deneme amacıyla üretilecek lastiklerden çekilen rastlantısal bir örneklemin ortalamasını hesaplamak ve bulunan değere göre  $H_0$  hipotezini reddetmek ya da kabul etmektir.

Sezgisel olarak söylenebilir ki  $\bar{X}$ 'nin alacağı değeri 20.000'den ne kadar büyükse  $H_0$  hipotezine olan güvenimiz o denli azalacak ve  $H_0$ 'ı reddedip,  $H_a$ 'yü benimseme olasılığımız artacaktır. Peki,  $\bar{X}$  hangi değeri alınca  $H_0$  hipotezini reddetmeliyiz?  $H_0$ 'ı reddetmekle ya da kabul etmekle yaptığımız hatayı (göze aldığımız riski) önceden hesaplamak mümkün müdür? Bu soruların yanıtlarını tartışmadan önce bir karar sürecinde karşılaşılabilecek dört mümkün durumu ve karar kuralı kavramını ele alalım.

## 5.2. Karar Kuralı

Örneklemden gelen bilgiye dayanarak gerçekleşecek hipotez testinin sonucunda  $H_0$  reddedilir ya da reddedilmez. Öte yandan karar verici bu karara ulaşırken  $H_0$  ve  $H_a$  hipotezlerine ilişkin gerçek durumu, yani bu iki hipotezden hangisinin doğru olduğunu bilme şansına sahip değildir. Öyleyse bir hipotez testi sürecinde dört farklı sonuca ulaşmak mümkündür. Aşağıdaki tablo bu sonuçları göstermektedir:

|                      | <u>Gerçek Durum</u>                    |                                       |
|----------------------|----------------------------------------|---------------------------------------|
|                      | $H_0$ Doğru                            | $H_0$ Yanlış                          |
| <u>Testin sonucu</u> | $H_0$ 'ı kabul et<br>(1) Doğru Karar   | (3) Yanlış Karar<br>(İkinci Tip Hata) |
|                      | (2) Yanlış Karar<br>(Birinci Tip Hata) | (4) Doğru Karar                       |

Tablodaki ikisi doğru, ikisi de yanlış karardan oluşan bu dört mümkün durum, sonuçları ve gerçekleşme olasılıkları açısından birbirinden farklı dört ayrı kavram olarak ele alınırlar.

Tablodaki birinci göz  $H_0$  hipotezinin reddedilmemesi ve gerçekten de  $H_0$ 'ın doğru olması durumu, yani bir doğru kararı göstermektedir.

İkinci göz ise  $H_0$ 'ın reddedilmesi, ancak gerçekte  $H_0$ 'ın doğru olması durumunu yani bir hatayı simgelemektedir. İstatistikte **birinci tip hata** olarak isimlendirilen bu hatanın gerçekleşme olasılığı  $\alpha$  ile gösterilir ve bu olasılık testin **önem düzeyini** gösterir. İkinci gözün gerçekleşme olasılığı  $\alpha$  olduğuna göre, birinci gözün gerçekleşme olasılığının  $1 - \alpha$  olacağı açıktır.

Tablonun üçüncü gözü ise kabul edilen  $H_0$ 'ın yanlış olduğu durumu, yani yine bir hatayı göstermektedir. **İkinci tip hata** olarak isimlendirilen bu hatanın olasılığı ise  $\beta$  ile gösterilir.

Dördüncü göz ise  $H_0$  hipotezinin reddedilmesi ve gerçekten de  $H_0$ 'ın yanlış, dolayısıyla  $H_a$ 'nın doğru olduğu durumu yani doğru bir kararı göstermektedir. Bu gözün gerçekleşme olasılığı ise  $1 - \beta$  olacaktır.  $1 - \beta$ , uygulanan **testin gücünü** simgeler.

Bu dört mümkün durum aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

1.  $P(H_0 \text{ Doğru} \cap H_0 \text{'ı reddet}) = \alpha$
2.  $P(H_0 \text{ Doğru} \cap H_0 \text{'ı kabul et}) = 1 - \alpha$
3.  $P(H_0 \text{ Yanlış} \cap H_0 \text{'ı kabul et}) = \beta$
4.  $P(H_0 \text{ Yanlış} \cap H_0 \text{'ı reddet}) = 1 - \beta$

$H_0$  ve  $H_a$  hipotezlerinden gerçekte hangisinin doğru olduğu bilinemeyeceği için, test uygulanmadan önce potansiyel olarak hem birinci tip hem de ikinci tip hatanın yapılabileceği kabul edilmelidir. Önemli olan her ikisini de en aza indirgeyecek testi uygulayabilmektir. Şimdi bu iki tip hatayı, birbirleriyle olan ilişkisini ve nasıl hesaplanacaklarını Bölüm 5.1’de söz ettiğimiz örnek yardımıyla açıklayalım. Lastiklerin ömürlerinin normal dağıldığını ve standart sapmasının 4700 km olduğunu varsayalım. Hipotezler

$$H_0: \mu = 20.000 \text{ km}$$

$$H_a: \mu > 20.000 \text{ km}$$

olarak kurulmuştu. Örneklem ve güven aralığı bölümlerinden hatırlanacağı gibi, varyansı bilinen ve normal dağılan bir kitle söz konusu ise  $z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  istatistiği standart normal dağılır. Dolayısıyla  $H_0$  hipotezi doğru ise  $\frac{\bar{X} - 20.000}{\sigma/\sqrt{n}}$  istatistiği de standart normal dağılır. Öyleyse  $\frac{\bar{X} - 20.000}{\sigma/\sqrt{n}}$  istatistiğinin, dolayısıyla  $\bar{X}$ ’nın hangi aralığa ne kadar olasılıkla düşeceğini hesaplayabiliriz. Örneğin on altı birimlik örneklem çekileceği varsayılsa, örneklemden hesaplanacak  $\bar{X}$  değerinin, diyelim 22.000’den büyük olma olasılığını örneklemi çekmeden önce hesaplayabiliriz. Bu olasılık

$$P(\bar{X} > 22.000) = P\left(\frac{\bar{X} - 20.000}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{22.000 - 20.000}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$P(\bar{X} > 22.000) = P\left(\frac{\bar{X} - 20.000}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{22.000 - 20.000}{4700/\sqrt{16}}\right)$$

$$P(\bar{X} > 22.000) = P(z > 1,702) = 0,045$$

olarak hesaplanır. 0,045 sayısı  $H_0$  doğru ise yani gerçekten kitle ortalaması 20.000 ise, 22.000’den daha büyük bir örneklem ortalaması bulunması olarak yorumlanabilir. Öyleyse, örneklemi çekip 22.000’den daha büyük bir örneklem ortalaması elde edip,

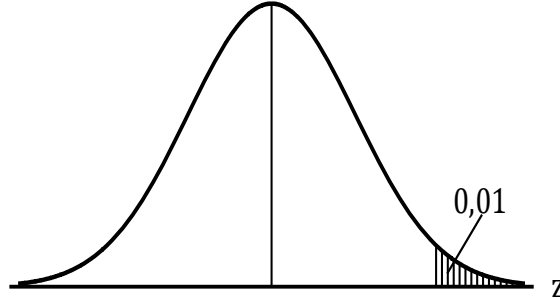
sonucunda  $H_0$ 'ı reddettiğimizde aslında  $H_0$ 'ın doğru olması olasılığının, yani birinci tip hatanın gerçekleşme olasılığının en fazla 0,045 olduğunu biliriz.

Şüphesiz burada yapılanın tersi bir yol da izlenebilir. Yani  $\alpha$  olasılığını önceden belirleyip, belirlenen olasılığın gerçekleşeceği örneklem ortalamasının en az kaç olacağı hesaplanabilir. Örneğin  $H_0$  hipotezini reddederken yapacağımız hatayı  $\alpha = 0,01$  olarak önceden belirleyelim.

$$P\left(z > \frac{\bar{x} - 20.000}{4700/\sqrt{16}}\right) = 0,01$$

eşitliğinden aranan  $\bar{x}$  değeri bulunabilir. Normal eğri tablosunda sağ tarafta 0,01'lik alanı bırakan z değeri 2,33 olduğuna göre aranan değer

$$\frac{\bar{x} - 20.000}{4700/\sqrt{16}} = 2,33 \Rightarrow \bar{x} = 22.737,75$$



olacaktır. Öyleyse, örneklem gerçekten çekilir ve  $\bar{x} = 22.737,75$  bulunursa ve  $H_0$ 'ı reddetme kararı alırsak yapacağımız hatanın  $\alpha = 0,01$  olacağını biliriz. Örneklem ortalaması  $\bar{X}$ , 22.737,75'ten daha büyük bir değerse, yapılacak hata daha da küçük olacaktır. Öyleyse, testi uygulayan kişi,  $H_0$ 'ı reddetmenin kendine getireceği maliyete ya da riske bağlı olarak  $\alpha$ 'yı testten önce belirleyip örneklem istatistiğinin hangi değerlerinde  $H_0$  hipotezini reddedip hangi değerinde kabul edeceğini önceden belirleyebilir. Bu belirlenim **karar kuralı** olarak adlandırılır. Bu örnek için  $\alpha = 0,01$ 'de karar kuralı

$\bar{X} > 22.737,75$  ise  $H_0$ 'ı reddet

$\bar{X} \leq 22.737,75$  ise  $H_0$ 'ı kabul et

olarak belirlenebilir. Aynı kural eşdeğer olarak

$z > 2,33$  ise  $H_0$ 'ı reddet

$z \leq 2,33$  ise  $H_0$ 'ı kabul et

şeklinde de ifade edilebilir.  $H_0$ 'ın reddedildiği bölge **kritik bölge** ya da **ret bölgesi** olarak adlandırılırken, kabul edildiği bölge **kabul bölgesi** ismini alır. Genel olarak ifade edersek

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_a: \mu > \mu_0$$

hipotezinin testi için

$$P\left(z > \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

eşitliği ya da eşdeğer olarak,  $z_\alpha$  standart normal dağılımın sağ tarafında  $\alpha$  alanını veren tablo değerini göstermek üzere  $P(z > z_\alpha) = \alpha$  eşitliği bize testin karar kuralını ve kritik bölgesini verir. Bu kural



$z > z_\alpha$  ise  $H_0$ 'ı reddet

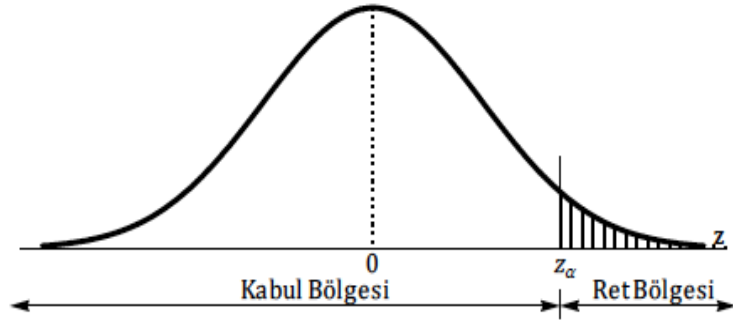
$z \leq z_\alpha$  ise  $H_0$ 'ı kabul et

ya da eşdeğer olarak  $z_\alpha = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$  eşitliğinden

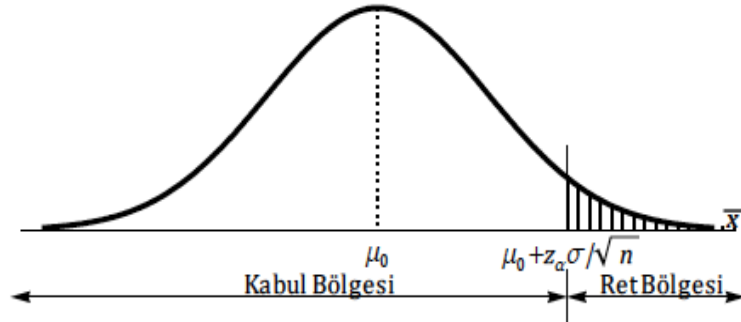
$\bar{X} > \mu_0 + z_\alpha \sigma/\sqrt{n}$  ise  $H_0$ 'ı reddet

$\bar{X} \leq \mu_0 + z_\alpha \sigma/\sqrt{n}$  ise  $H_0$ 'ı kabul et

olacaktır. Şekil 5.1 ve 5.2'de standart normal dağılımda ve  $\bar{X}$ 'nin örnekleme dağılımında kabul ve ret bölgeleri görülmektedir.



Şekil 5.1: Standart normal dağılımda kabul ve ret bölgeleri



Şekil 5.2:  $\bar{X}$ 'nin örnekleme dağılımında kabul ve ret bölgeleri

### 5.3. Hipotez Testi Adımları

Güven aralığının tahmin bölümünde çeşitli kitle parametreleri (ortalama, varyans, oran vs.) için güven aralıkları oluşturmuştuk. Şimdi bu parametreler için hipotez testleri uygulayalım.

Test edilecek parametre ne olursa olsun bir hipotez testi sürecinde genel olarak aşağıdaki adımlar izlenir:

1.  $H_0$  ve  $H_a$  hipotezleri belirlenir.
2.  $\alpha$ 'nın kaç olacağına karar verilir.
3. Testte başvurulacak test istatistiği belirlenir.
4. Karar kuralı ( $H_0$ 'ın ret ve kabul bölgeleri) saptanır.
5. Örneklemden gelen bilgilerle test istatistiği hesaplanır.
6.  $H_0$ 'ın ret ya da kabul edilmesine karar verilir.

### 5.4. Kitle Ortalamasının Testi

Güven aralıklarının tahmini bölümünde güven aralıkları incelenirken kitlenin dağılımı, kitle varyansının bilinip bilinmemesi ve örneklem büyüklüğü faktörleri rol oynuyordu. Aynı faktörler ya da kategoriler hipotez testleri için de uygulanacaktır.

#### **Kitle Dağılımı Normal - Kitle Varyansı Biliniyor**

Kitle ortalaması  $\mu$ 'ye ilişkin aşağıdaki çift taraflı hipotez testini ele alalım:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_a: \mu \neq \mu_0$$

Kitle ortalamasının testi söz konusu olduğuna göre testimiz örneklem istatistiği  $\bar{X}$ 'nin örnekleme dağılımına ve örneklemden elde edilecek sayısal sonuçlara bağlı olacaktır. Kısaca test istatistiğimiz  $\bar{X}$  olacaktır. Normal dağılan ve varyansı bilinen bir kitle için  $z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  rastlantı değişkeninin standart normal dağıldığını örnekleme ve tahmin bölümlerinden biliyoruz. Öyleyse  $H_0$  hipotezi doğruysa  $z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$  rastlantı değişkeni de standart normal dağılır. Dolayısıyla dağılımını bildiğimiz ve test istatistiği  $\bar{X}$ 'nin fonksiyonu olan  $z_0$ 'ın kendisi bir test istatistiği olarak kullanılabilir.

$z_0$  standart normal dağıldığına göre

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \quad (5.2)$$

eşitliğini yazabiliriz. Öyleyse  $\alpha$ 'yı testten önce belirleyerek,  $z_0$  test istatistiğinin  $(-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2})$  aralığına kaç olasılıkla düşeceğini hesaplayabiliriz. Örneğin  $\alpha = 0,05$  için  $z_{\alpha/2} = 1,96$  olduğuna göre (5.2) eşitliği

$$P\left(-1,96 < \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < 1,96\right) = 0,95$$

olarak yazılabilir. Öyleyse  $H_0$  doğru ise  $z_0$  %95 olasılıkla  $(-1,96, 1,96)$  aralığına düşecektir. Başka bir biçimde ifade edilirse,  $H_0$  doğru ise, birbirinden bağımsız  $n$  birimlik birçok örneklem çekilse ve  $z_0$  istatistiği hesaplanırsa, bunların yaklaşık %95'inin  $(-1,96, 1,96)$  aralığına düşmesini bekleriz.  $H_0$ 'ın doğru olduğu ancak  $z_0$ 'ın  $(-1,96, 1,96)$  aralığına düşmediği durumların oranı ise yaklaşık %5 olacaktır.

Öyleyse örneklem çekildikten ve  $z_0$ 'ın değeri hesaplandıktan sonra bulunan değer  $(-1,96, 1,96)$  aralığının dışındaysa  $H_0$  reddedilebilir. Bu yapılırken de gerçekleşebilecek hatanın (aslında  $H_0$ 'ın doğru olması hatası) en fazla 0,05 olduğu bilinir. Genel olarak ifade edilirse  $z_0$  istatistiği  $(-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2})$  aralığının dışına düşerse  $H_0$  reddedilir ve  $H_0$  'ı reddetmekle yapılacak hatanın  $\alpha$  kadar olacağı bilinir. Aksi durumda ise  $H_0$  hipotezi kabul edilir.

$H_0$ 'ın reddedildiği  $|z_0| > z_{\alpha/2}$  aralığı ya da açık şekliyle  $z_0 < -z_{\alpha/2}$  ve  $z_0 > z_{\alpha/2}$  aralıkları **kritik bölge** ya da **ret bölgesi** olarak adlandırılırken, bu aralıkları tümleyen  $-z_{\alpha/2} \leq z_0 \leq z_{\alpha/2}$  aralığı **kabul bölgesi** olarak adlandırılır.

$H_a$  hipotezinin tek yönlü kurulduğu durumda da Bölüm 5.3'teki adımlar aynen geçerlidir. Yalnızca ret bölgeleri standart normal dağılımın iki ucunda birden olmayıp,  $H_a$ 'da belirtilen yönde olacaktır. Hipotezler

$$H_0: \mu = \mu_0 \text{ ya da } \mu \geq \mu_0$$

$$H_a: \mu < \mu_0$$

ise ret bölgesi  $z_0 < -z_\alpha$

$$H_0: \mu = \mu_0 \text{ ya da } \mu \leq \mu_0$$

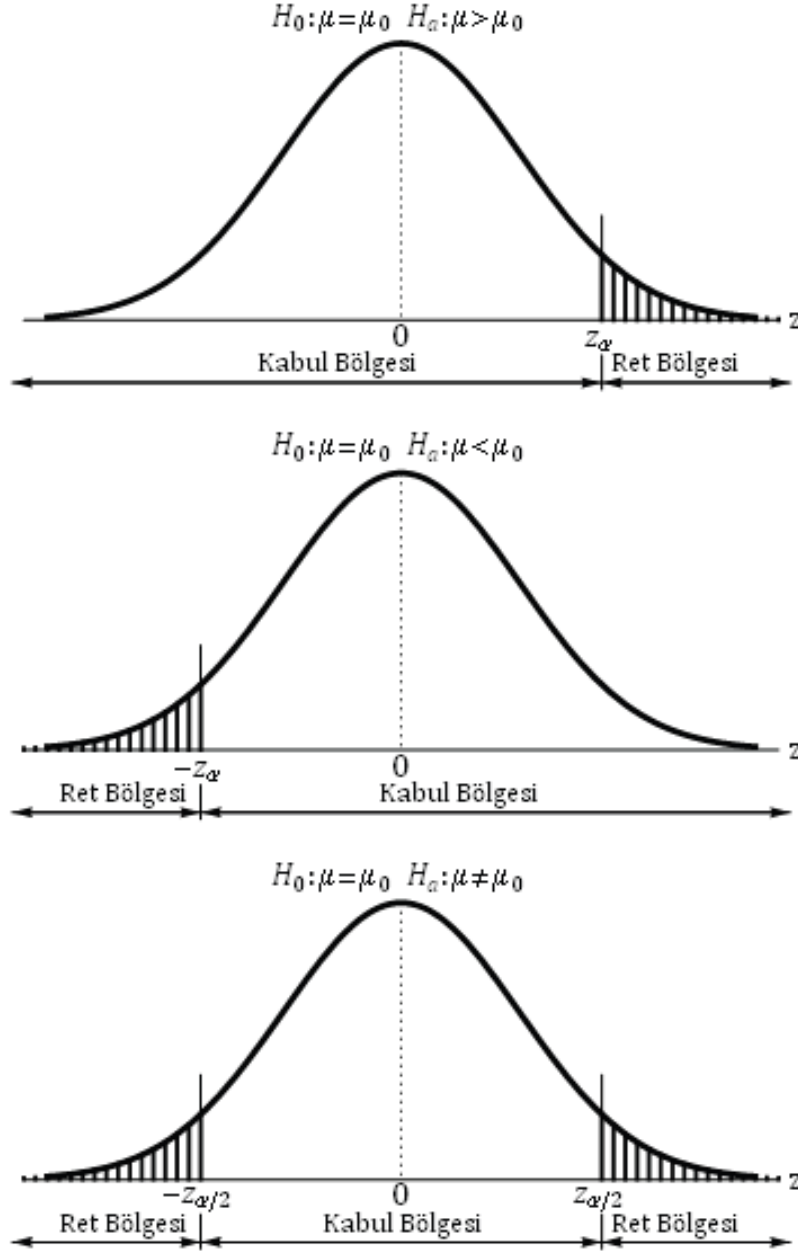
$$H_a: \mu > \mu_0$$

ise ret bölgesi  $z_0 > z_\alpha$  olacaktır. Şekil 5.5 ortalamaya ilişkin çift ve tek yönlü hipotez testleri için kabul ve ret bölgelerini göstermektedir.

Normal dağılan ve varyansı bilinen bir kitlenin ortalamasının testi süreci Tablo 5.1'de özetlenmiştir. Tabloda test istatistiği olarak  $z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$  rastlantı değişkeninin örneklemden elde edilecek sayısal karşılığı olan  $z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$  yazılmıştır.

| <u>Test İstatistiği</u><br>$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ |                                                                           |
|----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| Hipotezler                                                                 | Karar Kuralı                                                              |
| <b>1)</b> $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_a: \mu \neq \mu_0$                      | $z_0 > z_{\alpha/2}$ ya da $z_0 < -z_{\alpha/2}$ ise<br>$H_0$ reddedilir. |
| <b>2)</b> $H_0: \mu = \mu_0$ ya da $\mu \geq \mu_0$<br>$H_a: \mu < \mu_0$  | $z_0 < -z_\alpha$ ise $H_0$ reddedilir.                                   |
| <b>3)</b> $H_0: \mu = \mu_0$ ya da $\mu \leq \mu_0$<br>$H_a: \mu > \mu_0$  | $z_0 > z_\alpha$ ise $H_0$ reddedilir.                                    |

**Tablo 5.1:** Varyansı bilinen ve normal dağılan kitlenin ortalamasının test süreci



**Şekil 5.5:** Varyansı bilinen ve normal dağılan bir kitlenin ortalamasının testinde  $H_0$ 'ın ret ve kabul bölgeleri

Örneğin, ülkemizdeki yüksek öğrenim gören öğrencilerin IQ skorlarının normal dağıldığı ve bu dağılımın ortalamasının 117, varyansının 160 olduğu iddia ediliyor. İddiayı araştırmak amacıyla rastlantısal olarak seçilen on iki kişiye IQ testi uygulanmış ve aşağıdaki skorlar elde edilmiştir:

103 , 96 , 112 , 130 , 111 , 125 , 89 , 100 , 104 , 117 , 99 , 118

Kitle ortalamasının 117 olduğu hipotezini Bölüm 5.3'teki süreci, yani hipotez testi adımlarını izleyerek test ederiz:

**1)** Kitle ortalaması  $\mu$ 'nün belirli bir yönde (büyük ya da küçük) farklı olduğunu düşündüren bir neden yoksa alternatif hipotezi çift yönlü kurmak uygundur. Öyleyse hipotezlerimiz

$$H_0: \mu = 117$$

$$H_a: \mu \neq 117$$

olarak kurulabilir.

**2)** Doğru  $H_0$ 'ı reddetme hatası ya da diğer adıyla testin önem düzeyi  $\alpha$  için uygulamada daha çok 0,10, 0,05 ve 0,01 değerleri kullanılırsa da,  $\alpha$ 'nın seçimi bir ölçüde sübjektiftir. Daha önce belirttiğimiz gibi  $H_0$  hipotezini reddetmenin, dolayısıyla  $H_a$ 'yı kabul etmenin maliyeti (yeni yatırımlar, üretim sürecinde köklü değişiklikler gibi) ne denli yüksekse, karar verici  $\alpha$ 'yı o ölçüde küçük tutmak isteyebilir. Bu örnek için  $\alpha = 0,05$  seçelim. Demek ki  $H_0$ 'ı reddetmek için önemli bir istatistik kanıt arıyoruz.

**3)** Test istatistiğimiz  $z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$  olacaktır.

**4)** Testi  $\alpha = 0,05$  için uygulayacağımıza göre  $z_{\alpha/2} = 1,96$  olacaktır. Öyleyse kritik bölge  $|z| > 1,96$  olur. Buna göre açık biçimiyle karar kuralımız

$$z_0 > 1,96 \text{ ya da } z_0 < -1,96 \text{ ise } H_0'ı \text{ reddet}$$

$$-1,96 \leq z_0 \leq 1,96 \text{ ise } H_0'ı \text{ kabul et}$$

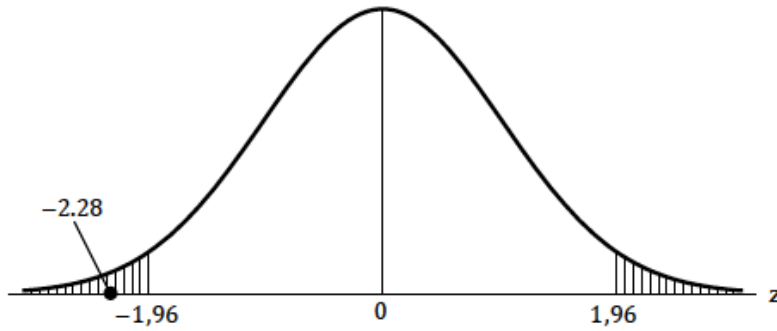
olacaktır.

5)  $n = 12$  değerinin Bölüm 3.3'teki süreçte hesaplandığını varsayarak ve  $\bar{x} = 108,67$ ,  $\sigma = \sqrt{160}$  ve  $\mu_0 = 117$  değerleri  $z_0$ 'da yerlerine konulursa

$$z_0 = \frac{108,67 - 117}{\sqrt{160}/\sqrt{12}} = -2,28$$

sonucu elde edilir.

6)  $z_0 = -2,28$  değeri karar kuralımıza göre ret bölgesine düştüğü için  $H_0$  reddedilir. Diğer bir deyişle  $H_0$ 'ın doğru olmadığını düşünmemiz için önemli istatistiksel kanıtlar vardır.



### **Kitle Dağılımı Normal - Kitle Varyansı Bilinmiyor**

$\mu$ , normal dağılan ancak varyansını bilmediğimiz bir kitlenin ortalaması olsun. Bu ortalamaya ilişkin

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_a: \mu \neq \mu_0$$

hipotezlerini ele alalım. Normal dağılan bir kitlede,  $S$  örneklem standart sapmasını göstermek üzere  $t = \frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n}}$  rastlantı değişkeninin  $(n - 1)$  serbestlik dereceli  $t$  dağıldığını



önceki bölümlerden biliyoruz.  $H_0$  hipotezi doğru ise  $t_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$  rastlantı değişkeni de  $(n - 1)$  serbestlik dereceli  $t$  dağılacaktır. Öyleyse  $\bar{X}$ 'nin fonksiyonu olan  $t_0$  bir test istatistiği olarak kullanılabilir.  $t_0$ ,  $(n - 1)$  serbestlik dereceli  $t$  dağıldığına göre

$$P\left(-t_{n-1;\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < t_{n-1;\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

eşitliğini yazabiliriz. Öyleyse  $t_0$  değeri örneklemden elde edilen bilgilerle hesaplanır ve hesaplanan bu değer  $(-t_{\alpha/2}, t_{\alpha/2})$  aralığı dışına düşerse  $H_0$  reddedilir ve  $H_0$ 'ın reddedilmesiyle yapılacak hatanın en fazla  $\alpha/2$  olduğu bilinir. Şekil 5.6'da üç kategorideki test için ret ve kabul bölgeleri görülmektedir. Kitle dağılımının normal olduğu ve kitle varyansının bilindiği durumda tartışılan süreçler bu durumda da geçerlidir. Farklılık yalnızca test istatistiğindedir. Bu nedenle aynı ayrıntılara girmeksizin aşağıda Tablo 5.2'de test süreci özetlenmiştir. Test istatistiği bölümündeki  $t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ ,  $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$  rastlantı değişkeninin örneklemden elde edilecek sayısal karşılığını göstermektedir.

| <p style="text-align: center;"><b><u>Test İstatistiği</u></b></p> <p style="text-align: center;"><math>t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}</math></p> |                                                                                                                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Hipotezler</b>                                                                                                                                          | <b>Karar Kuralı</b>                                                                                                                 |
| <p><b>1)</b> <math>H_0: \mu = \mu_0</math></p> <p style="text-align: center;"><math>H_a: \mu \neq \mu_0</math></p>                                         | <p><math>t_0 &gt; t_{n-1;\alpha/2}</math> ya da <math>t_0 &lt; -t_{n-1;\alpha/2}</math></p> <p>ise <math>H_0</math> reddedilir.</p> |
| <p><b>2)</b> <math>H_0: \mu = \mu_0</math> ya da <math>\mu \geq \mu_0</math></p> <p style="text-align: center;"><math>H_a: \mu &lt; \mu_0</math></p>       | <p><math>t_0 &lt; -t_{n-1;\alpha}</math> ise <math>H_0</math> reddedilir.</p>                                                       |
| <p><b>3)</b> <math>H_0: \mu = \mu_0</math> ya da <math>\mu \leq \mu_0</math></p> <p style="text-align: center;"><math>H_a: \mu &gt; \mu_0</math></p>       | <p><math>t_0 &gt; t_{n-1;\alpha}</math> ise <math>H_0</math> reddedilir.</p>                                                        |

**Tablo 5.2:** Varyansı bilinmeyen ve normal dağılan kitlenin ortalamasının test süreci

Ele aldığımız, ülkemizdeki yüksek öğrenim gören öğrencilerin IQ skorlarına ilişkin örnekteki hipotez testini kitle varyansının bilinmediğini varsayarak yeniden uygulayabiliriz.

1) Hipotezlerimiz

$$H_0: \mu = 117$$

$$H_a: \mu \neq 117$$

olarak kurulabilir.

2)  $\alpha = 0,05$  seçelim.

3) Test istatistiğimiz  $t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$  olacaktır.

4)  $t_{11;0,025} = 2,201$  olduğuna göre karar kuralımız:

$$t_0 > 2,201 \text{ ya da } t_0 < -2,201 \text{ ise } H_0 \text{'ı reddet.}$$

$$-2,201 \leq t_0 \leq 2,201 \text{ ise } H_0 \text{'ı kabul et.}$$

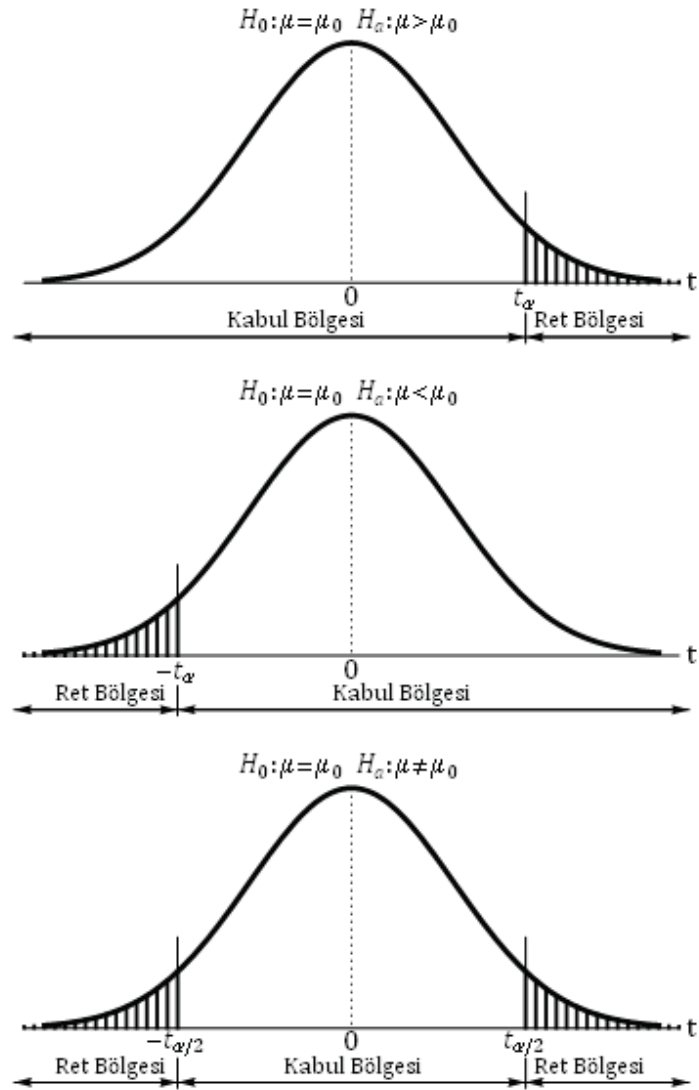
olacaktır.

5)  $\bar{x} = 108,67$  ,  $n = 12$  ,  $\mu_0 = 117$  ve  $s = 12,3$  değerlerini  $t_0$  'da yerlerine koyarsak

$$t_0 = \frac{108,67 - 117}{12,3/\sqrt{12}} = -2,35$$

sonucunu elde ederiz.

- 6) Karar kuralına göre  $t_0 < -2,201$  olduğundan  $H_0$ 'ı reddederiz.



**Şekil 5.6:** Varyansı bilinmeyen ve normal dağılan bir kitlenin ortalamasının testinde

$H_0$ 'ın kabul ve ret bölgeleri

### **Diğer Durumlar**

Kitlenin normal dağılmadığı ancak kitle varyansının bilindiği durumda  $n \geq 30$  için merkezi limit teoremine dayanarak  $z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$  test istatistiğinin kullanılabileceğini söyleyebiliriz.

Kitlenin normal dağılmadığı ve kitle varyansının bilinmediği durumda ise  $n \geq 30$  için  $z = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$  rastlantı değişkeninin yaklaşık olarak standart normal dağıldığı ampirik bir gerçektir. Öyleyse  $H_0$  doğru ise  $z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$  rastlantı değişkeninin de yaklaşık olarak standart normal dağılacakını dolayısıyla,  $z_0$ 'ın test istatistiği olarak kullanılabileceği söylenebilir.

## Uygulamalar

1) Bir seyahat şirketi kullandıkları belirli bir marka lastiğin ortalama ömrünün en az 30.000 km olduğu iddiasından şüphelenmektedir. Bu nedenle denedikleri kırk beş lastiğin ortalama ömrünü 27.400 km ve standart sapmayı 1251 km bulurlarsa, şüphelerinde haklı olurlar mı?

### Cözüm:

Hipotezler

$$H_0: \mu \geq 30.000$$

$$H_a: \mu < 30.000$$

olarak ifade edilebilir.  $n = 45$  ,  $\bar{x} = 27.400$  ,  $s = 1251$  değerleri  $z_0$  test istatistiğinde yerlerine konursa

$$z_0 = \frac{27.400 - 30.000}{1251/\sqrt{45}} = -13,94$$

$\alpha = 0,01$  alırsak  $z_0 = -13,94 < -2,33$  olduğu için  $H_0$  hipotezi kolayca reddedilebilir. Öyleyse seyahat şirketi yöneticilerinin şüpheleri desteklenebilir.

2) Belirli bir gübre kullanılırsa 120 metrekarelik bir tarladan ortalama 8 ton ürün elde edileceği iddia ediliyor. 120 metrekarelik sekiz tarlaya söz konusu gübre uygulanmış ve 6,7 , 7,8 , 6,9 , 8,3 , 7,2 , 8,1 , 6,9 , 7,9 ton ürün elde edilmiştir. Örneklemeden elde edilen bu sonuçlara dayanarak iddia desteklenmeli midir? Testi gerçekleştirirken yaptığınız varsayımları açıklayınız

### Cözüm:

Hipotezler

$$H_0: \mu = 8$$

$$H_a: \mu \neq 8$$

olarak ifade edilebilir. Elde edilen ürün miktarlarının normal dağıldığı varsayılarak  $n = 8$  ,  $\bar{x} = 7,475$  ,  $s = 0,6205$  değerleri  $t_0$  test istatistiğinde yerlerine konursa

$$t_0 = \frac{7,475 - 8}{0,6205/\sqrt{8}} = -2,393$$

elde edilir.  $t_0 = -2,393 < -t_{7;0,025} = -2,365$  olduğu için  $H_0$  hipotezi  $\alpha = 0,05$ 'te reddedilebilir; ancak  $-2,393 > -t_{7;0,005} = -3,499$  olduğu için  $\alpha = 0,01$  'de  $H_0$  'ı reddedemeyiz. Öyleyse oldukça önemli olmasa da, iddia ( $H_0$ ) aleyhine önemli kanıt söz konusudur.

**3)** Meşrubat üreten bir fabrikadaki bir makine şişelere 75 cl meşrubat dolduracak şekilde ayarlanmıştır. Şişelerdeki meşrubat miktarının standart sapmasının 6,2 cl olduğu geçmiş kalite kontrollerinden bilinmektedir. Yeni bir kalite kontrolünde bu makinenin doldurduğu otuz şişedeki meşrubat miktarlarının ortalaması 78 cl olarak bulunursa,  $H_0: \mu = 75$  cl hipotezi mi yoksa  $H_a: \mu > 75$  cl hipotezi mi benimsenmelidir?  $\alpha = 0,01$  seçiniz.

### **Cözüm:**

Hipotezler soruda belirtildiği gibi

$$H_0: \mu = 75$$

$$H_a: \mu > 75$$

olacaktır.  $n = 30$  ,  $\bar{x} = 78$  ,  $s = 6,2$  değerleri  $z_0$  test istatistiğinde yerlerine konulursa

$$z_0 = \frac{78 - 75}{6,2/\sqrt{30}} = 2,65$$

elde edilir.  $2,65 > 2,33$  olduğu için  $H_0$  hipotezi  $\alpha = 0,01$ 'de reddedilip,  $H_a$  hipotezi benimsenebilir.

## Uygulama Soruları

1) İnsanların akıllı telefonlarını 2 yıldan uzun kullanmadıkları iddia ediliyor olsun. Çevrenizdeki 20 yaş üstü kişilere bir anket uygulayarak, akıllı telefonlarını en son ne zaman değiştirdiklerini sorunuz. Buradan derlediğiniz veriden elde edilen sonuçlar, sözü edilen iddia aleyhine kanıt oluşturmakta mıdır? İstatistiksel hipotez testi sürecine göre iddiayı test ediniz. (telefonlarını kullanma sürelerinin normal dağıldığı varsayımıyla)

2) TÜİK'in meslek gruplandırmasına göre, [Profesyonel meslek mensuplarının 2013'deki yıllık ortalama geliri](#) 30564 TL'dir. Bu değere eşit olmadığı iddia ediliyor olsun. Etrafınızdaki profesyonel meslek grubundan 50 kişiyi seçerek, yıllık ortalama gelirlerinin ne kadar olduğunu kaydediniz. Buradan elde ettiğiniz sonuçlar, sözü edilen iddia aleyhine kanıt oluşturmakta mıdır? İstatistiksel hipotez testi sürecine göre iddiayı test ediniz. (yıllık ortalama gelirin normal dağıldığı varsayımıyla)

3) Bir kişinin kış mevsiminde, aylık ortalama sinema ve tiyatro harcamalarının 200TL'nin altında olduğu iddia ediliyor olsun. Etrafınızdaki rastlantısal olarak seçtiğiniz 40 kişiye, kış mevsimindeki aylık ortalama sinema ve tiyatro harcamalarının ne kadar olduğunu sorunuz. Bu sonuçlara göre yaptığınız araştırma bu iddia aleyhine kanıt oluşturmakta mıdır? İstatistiksel hipotez testi sürecine göre iddiayı test ediniz. (aylık ortalama sinema-tiyatro harcamalarının normal dağıldığı varsayımıyla)

4) [Ulusal Süt Konseyinin 2013 yılı tahminlerine](#) göre kişi başına düşen yıllık beyaz peynir tüketim miktarı 16,5 kg'dır. Bir iddiaya göre kişi başı yıllık beyaz peynir tüketim miktarı bu tahminin altındadır. Rastlantısal olarak seçtiğiniz 20 kişiden edindiğiniz bilgiye göre, sonuçları derleyiniz. Bu sonuçlar, sözü edilen iddia aleyhine kanıt oluşturmakta mıdır? İstatistiksel hipotez testi sürecine göre iddiayı test ediniz. (peynir tüketim miktarının normal dağıldığı varsayımıyla)

5) Yukarıdaki 4 soru için de yapılabilecek iki tip hata nedir? Ve bu dört soruda iddiayı reddetmekle yapılacak hatanın olasılığı kaçtır?

### **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Kitleyi yansıtmak üzere çekilen örneklemden bazı sayısal ölçümler hesaplanır. Bu ölçümlerin de kullanılmasıyla gerçekleştirilen istatistiksel çıkarsama sürecinin sunduğu bir olanak da hipotez testidir. Hipotez testinde bu ölçümlerden elde edilen bilgi sayesinde ilgilenilen kitle parametresine ilişkin iddiaların, hipotez testi adımlarının da uygulanmasıyla nasıl sınındığı, nasıl karara varıldığı ana hatlarıyla ele alındı. Hipotez testinde geçen testin önem düzeyi, birinci ve ikinci tip hata gibi kavramlar tanıtıldı. Özellikle bu bölüm kapsamında kitle ortalamasına ait hipotez testi süreci nasıl gerçekleştirilir? sorusunun yanıtı örnekler üzerinde açıklandı. Daha önce örnekleme ve güven aralığı tahmininde ortaya çıkan, kitlenin normal dağılması- dağılmaması ile kitle varyansının bilinmesi- bilinmemesi durumlarına karşı hipotez testi sürecinin nasıl uygulandığı yine örnekler üzerinde gösterildi.



## Bölüm Soruları

1) Türkiye'deki üniversite mezunu kadınların IQ' larının varyansının 154 olduğu varsayılın. 16 kadına uygulanan IQ testinin skorları aşağıdaki gibidir:

108, 77, 114, 112, 90, 103, 114, 112, 116, 92, 100, 81, 96, 123, 95, 99

Türkiye'deki tüm üniversite mezunu kadınların IQ ortalamasının 110 olduğu iddiası araştırılmaktadır. Buna göre  $\alpha = 0,05$  önem düzeyinde bu hipotez testinin sonucu nedir?

- a)  $H_0: \mu = 110$  hipotezi reddedilir
- b)  $H_0: \mu = 110$  hipotezi reddedilmez

2) Birinci soruyu kitle varyansının 154 olması gibi bir bilginin olmadığı durum için yanıtlayınız.

- a)  $H_0: \mu = 110$  hipotezi reddedilir
- b)  $H_0: \mu = 110$  hipotezi reddedilmez

3) Birinci soruyu  $\alpha = 0,01$  önem düzeyi için yanıtlayınız.

- a)  $H_0: \mu = 110$  hipotezi reddedilir
- b)  $H_0: \mu = 110$  hipotezi reddedilmez

4) İkinci soruyu  $\alpha = 0,01$  önem düzeyi için yanıtlayınız.

- a)  $H_0: \mu = 110$  hipotezi reddedilir
- b)  $H_0: \mu = 110$  hipotezi reddedilmez

5) Zonguldak'ın Devrek ilçesinde 7 yıl boyunca Şubat ayları için metrekareye düşen ortalama yağış miktarları kilogram olarak aşağıdaki gibidir:

1,4 , 3,0 , 2,4 , 2,4 , 1,2 , 1,6 , 1,9 , 1,4

Söz konusu ilçede yağış miktarlarının varyansının 0,80 olduğunu varsayarsak Şubat ayı ortalaması  $\mu$  için aşağıdaki hangi hipotez  $\alpha = 0,05$  önem düzeyinde **reddedilebilir**?

a)  $H_0: \mu = 1,50$

b)  $H_0: \mu = 1,70$

c)  $H_0: \mu = 2,40$

d)  $H_0: \mu = 2,75$

**6)** Beşinci soruyu kitle varyansının 0,80 olması gibi bir bilginin olmadığı durum için yanıtlayınız.

a)  $H_0: \mu = 1,60$

b)  $H_0: \mu = 1,75$

c)  $H_0: \mu = 2,25$

d)  $H_0: \mu = 2,65$

**7)** Bir seyahat şirketi kullandıkları belirli bir marka lastiğin ortalama ömrünü belirlemek için 7 lastiği test etmiş ve km olarak ömürleri aşağıdaki gibi bulmuştur:

24979, 24522, 24116, 25550, 22992, 26229, 24328

Kitle ortalaması  $\mu$  için aşağıdaki hangi hipotez  $\alpha = 0,05$  önem düzeyinde **reddedilemez**?

a)  $H_0: \mu = 20000$

b)  $H_0: \mu = 22000$

c)  $H_0: \mu = 24000$

d)  $H_0: \mu = 26000$

**8)** Yedinci soruyu  $\alpha = 0,10$  için yanıtlayınız.

a)  $H_0: \mu = 20000$

b)  $H_0: \mu = 22000$

c)  $H_0: \mu = 24000$

d)  $H_0: \mu = 26000$

9) Etiketinde 100 gram yazan bir bisküviden 10 tanesi tartılıp aşağıdaki sonuçlar elde ediliyor:

103, 67, 89, 104, 92, 93, 74, 70, 96, 102

Buna göre  $\alpha = 0,05$  önem düzeyinde bu hipotez testinin sonucu nedir?

a)  $H_0: \mu = 100$  reddedilir

b)  $H_0: \mu = 100$  reddedilmez

10) Dokuzuncu soruyu  $\alpha = 0,01$  için yanıtlayınız.

a)  $H_0: \mu = 100$  reddedilir

b)  $H_0: \mu = 100$  reddedilmez

### Cevaplar

1) a, 2) a, 3) a, 4) b, 5) d, 6) d, 7) c, 8) c, 9) a, 10) b

## **6. KİTLE ORANI VE VARYANSI İÇİN HİPOTEZ TESTLERİ**

### **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

Bu bölümde kitle varyansı ve oranı için hipotez testi sürecinin gerçekleştirilmesi, p-değerinin anlamı ve hesaplanması konuları öğrenilecektir.

### **Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular**

1) Ortalama 400 gramlık ekmek üretmesi gereken bir fırına kontrol amacıyla giren zabıtarlar rastgele seçtikleri ekmeklerin ağırlıklarını 300, 400 ve 500 gram olarak bulunca, fırın sahibi “Gördüğünüz gibi ekmeklerimizin ortalama ağırlığı belediyenin saptadığı üzere 400 gram standardına uymaktadır. ” demiştir. Fırıncıya yanıtınız ne olurdu, varyans parametresini göz önüne alarak yanıtlayınız.

2) p-değerini 0,032 olarak hesaplayan bir araştırmacı  $\alpha = 0,05$  önem düzeyinde sıfır hipotezini reddetmiş sayılır mı?

### Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

| Konu                                                                                     | Kazanım                                                                                                                                                  | Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Kitle varyansı ve oranı için hipotez testi süreci ile p-değeri konuları ele alınacaktır. | Kitle varyansı ve oranına ilişkin bir iddia söz konusu olduğunda, istatistiksel hipotez testi sürecini izleyerek karara varmanın yolları öğrenilecektir. | Metinler, çözümlü problemler, alıştırmalar ve apletler ile konuların daha kolay anlaşılması sağlanacaktır. |

### **Anahtar Kavramlar**

- Kitle varyansı için hipotez testi
- Kitle oranı için hipotez testi
- p-değeri



## **Giriş**

Hipotez testinde ileri sürülen iddia kitle varyans ve oranına ilişkin olduğunda, hipotez testi sürecinin adımları yine aynıdır. Amaç yine bilinmeyen sabit olarak kabul edilen bu kitle parametrelerinin değerine ilişkin bilgi edinmektir. O nedenle kitle varyans ve oranına ait iki karşı hipotez karşılaştırılır, varyans ve orana uygun test istatistikleri belirlenir ve hesaplanır. Belirlenen önem düzeyine göre ileri sürülen iddia sınanarak karar verme yoluna gidilir. Bu aşamada yürütülen istatistiksel sürecin dayanağı, olasılık teorisine dayanan teoremlerdir.

## 6.1. Kitle Varyansının Testi

Kitle ortalamasının testinde uygulanan süreçler kitle varyansı için de geçerli olacaktır. Tek farklılık kullanılacak olan test istatistiğidir. Aşağıdaki hipotezleri ele alalım:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

Örnekleme ve güven aralığı bölümlerinden normal dağılan bir kitle için  $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$  rastlantı değişkeninin  $(n - 1)$  serbestlik dereceli  $\chi^2$  dağıldığını biliyoruz. Öyleyse  $H_0$  hipotezi doğru ise  $\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$  rastlantı değişkeni de  $(n - 1)$  serbestlik dereceli  $\chi^2$  dağılır. Dolayısıyla  $H_0$  doğru ise

$$P\left(\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi_{n-1;\alpha/2}^2\right) = 1 - \alpha$$

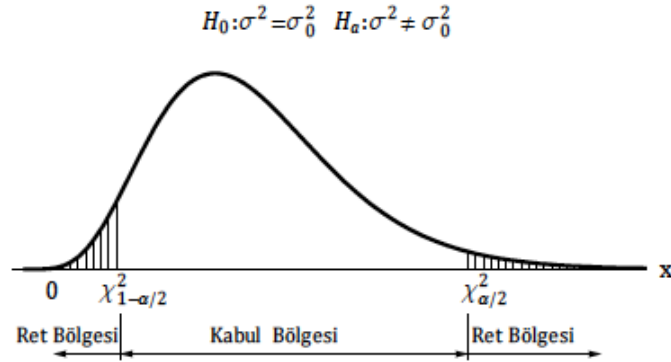
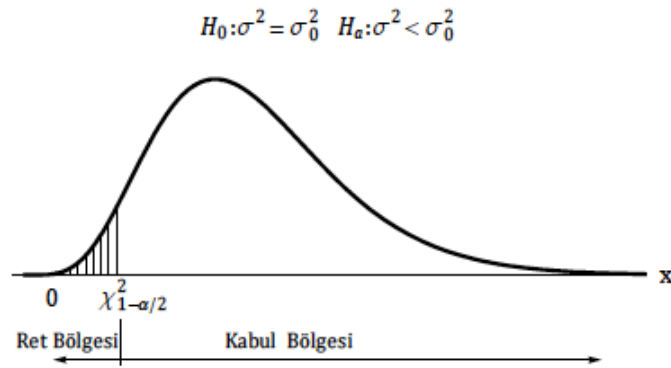
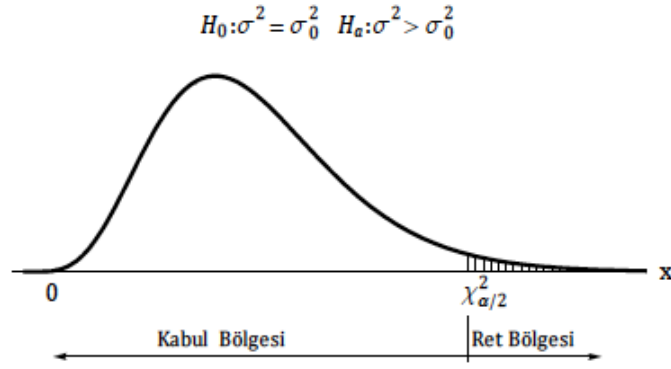
eşitliği yazılabilir. Öyleyse  $\chi_0^2$  'ın gerçekleşen değeri hesaplanır ve değer  $(\chi_{1-\alpha/2}^2, \chi_{\alpha/2}^2)$  aralığının dışına düşerse  $H_0$  reddedilir, aksi durumda ise kabul edilir. Reddedilerek yapılan hatanın da  $\alpha$  olduğu bilinir.

Aşağıdaki tablo normal dağılan bir kitlenin varyansına ilişkin hipotez testi sürecini göstermektedir. Tablodaki test istatistiği  $\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$  ,  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$  rastlantı değişkeninin örneklemden elde edilecek sayısal karşılığıdır.

| <p style="text-align: center;"><b>Test İstatistiği</b></p> $\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$     |                                                                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Hipotezler</b>                                                                                       | <b>Karar Kuralı</b>                                                                                    |
| <b>1)</b> $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$<br>$H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$                               | $\chi_0^2 > \chi_{n-1;\alpha/2}^2$ ya da $\chi_0^2 < \chi_{n-1;1-\alpha/2}^2$<br>ise $H_0$ reddedilir. |
| <b>2)</b> $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ ya da $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$<br>$H_a: \sigma^2 < \sigma_0^2$ | $\chi_0^2 < \chi_{n-1;1-\alpha}^2$ ise $H_0$ reddedilir.                                               |
| <b>3)</b> $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ ya da $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$<br>$H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2$ | $\chi_0^2 > \chi_{n-1;\alpha}^2$ ise $H_0$ reddedilir.                                                 |

**Tablo 6.1:** Normal dağılan kitlenin varyansına ilişkin test süreci

Şekil 6.1'de her üç test için ret ve kabul bölgeleri görülmektedir.



**Şekil 6.1:** Normal dağılan bir kitlede varyansın testinde  $H_0$ 'ın ret ve kabul bölgeleri

Şöyle bir örnek ele alalım; 4 cm çaplı krank mili üreten bir fabrikanın yöneticileri, standartlarını korumak amacıyla millerin çap uzunluklarının varyansının 0,25'ten büyük olmasını istememekte ve varyansın bu değerden büyük olması durumunda üretim sürecinde yeniden yapılanma planlanmaktadır. Rastlantısal olarak seçilen 20 milin varyansı 0,32 bulunursa ve millerin çap uzunluklarının normal dağıldığı varsayılırsa örneklemden elde

edilen bu sonuç üretim sürecinde yenilenmeyi gerektirecek kadar önemli bir istatistik kanıt sayılır mı?

Bu soruyu değerlendirmede izlenecek adımlar aşağıdaki gibi olacaktır.

1) Varyansın 0,25'ten büyük olması iddiası alternatif hipotez olarak düşünülerek hipotezler

$$H_0: \sigma^2 \leq 0,25$$

$$H_a: \sigma^2 > 0,25$$

olarak kurulabilir.

2)  $\alpha = 0,05$  seçelim.

3) Test istatistiği  $\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$  olacaktır.

4)  $\chi_{19;0,05}^2 = 30,1$ 'dir. Öyleyse  $\chi_0^2 > 30,1$  ise hipotez reddedilecektir.

5)  $\chi_0^2 = 24,32$

6)  $24,32 < 30,1$  olduğu için karar kuralımıza göre  $H_0$  hipotezi kabul edilecektir. Dolayısıyla üretim sürecinde değişiklik yapmaya gerek yoktur.

## 6.2. Kitle Oranının Testi

Ortalama ve varyans gibi, bir topluluktaki belirli bir özelliğe sahip olanların (defolu ampuller, bir partiye oy verecek seçmenler vs.) oranına ilişkin hipotez testlerine de uygulamada sıkça başvurulur.  $p$  bu oranı göstermek üzere aşağıdaki hipotezleri ele alalım:

$$H_0: p = p_0$$

$$H_a: p \neq p_0$$

Örnekleme ve tahmin bölümlerinden hatırlanacağı gibi kitle oranı  $p$ 'ye ilişkin çıkarsama yapmak amacıyla çekilecek rastlantısal örneklemin binom dağılım bir kitleden geldiği varsayılıyor ve dolayısıyla kitle oranı  $p$  binom dağılımının parametresi  $p$ 'ye denk düşüyordu. Yine  $\hat{p}$ , örneklem oranını göstermek üzere  $z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{pq/n}}$  rastlantı değişkeninin büyük örneklem için standart normal dağıldığını önceki bölümlerden biliyoruz. Öyleyse  $H_0$  hipotezi doğru ise  $z_0 = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0q_0/n}}$  rastlantı değişkeni de standart normal dağılır. Dolayısıyla  $\hat{p}$ 'nin fonksiyonu olan ve dağılımı bilinen bu rastlantı değişkeni test istatistiği olarak kullanılabilir.

Kitle oranı  $p$ 'ye ilişkin hipotez testleri ve karşılık gelen karar kuralları aşağıdaki tabloda verilmiştir. Tablodaki test istatistiği  $z_0 = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0q_0/n}}$ ,  $\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0q_0/n}}$  rastlantı değişkeninin örneklemden elde edilecek sayısal değerini simgelemektedir.

| <p style="text-align: center;"><b><u>Test İstatistiği</u></b></p> $z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0q_0/n}}$ |                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Hipotezler</b>                                                                                               | <b>Karar Kuralı</b>                                                                                                       |
| <p>1) <math>H_0: p = p_0</math><br/> <math>H_a: p \neq p_0</math></p>                                           | <p><math>z_0 &gt; z_{\alpha/2}</math> ya da <math>z_0 &lt; -z_{\alpha/2}</math> ise<br/> <math>H_0</math> reddedilir.</p> |
| <p>2) <math>H_0: p = p_0</math> ya da <math>p \geq p_0</math><br/> <math>H_a: p &lt; p_0</math></p>             | <p><math>z_0 &lt; -z_{\alpha}</math> ise <math>H_0</math> reddedilir.</p>                                                 |
| <p>3) <math>H_0: p = p_0</math> ya da <math>p \leq p_0</math><br/> <math>H_a: p &gt; p_0</math></p>             | <p><math>z_0 &gt; z_{\alpha}</math> ise <math>H_0</math> reddedilir.</p>                                                  |

**Tablo 6.2:** Kitle oranının test süreci

Kitle oranının testini de şu örnekle ele alalım: Piyasaya yeni sürülecek bir ilacın hastaların en fazla 0,10'unda bir yan etkiye yol açacağı şirket tarafından iddia ediliyor. İlaç üç yüz hasta üzerinde deneniyor ve kırk beş hastada yan etki görülüyor. Bu sonuç şirketin iddiasının doğru olmadığını düşünmemiz için çok önemli bir kanıt sayılabilir mi?

Bu soruyu değerlendirmede izlenecek adımlar aşağıdaki gibi olacaktır.

1) Hipotezler

$$H_0: p \leq 0,10$$

$$H_a: p > 0,10$$

olarak kurulabilir.

2)  $H_0$ 'ı reddetmek için çok önemli bir istatistiksel kanıt aradığımıza göre  $\alpha = 0,01$  seçelim.

3) Test istatistiği  $z_0 = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0q_0/n}}$  olacaktır.

4) Karar kuralı:  $z_0 > z_{0,01} = 2,33$  ise  $H_0$  reddedilecek.

5)  $\hat{p} = \frac{45}{300} = 0,15$  ,  $p_0 = 0,10$  ,  $q_0 = 0,90$  ,  $n = 300$  değerleri test istatistiğinde yerlerine konulduğunda

$$z_0 = \frac{0,15 - 0,10}{\sqrt{(0,10)(0,90)/300}} = 2,89$$

6)  $2,89 > 2,33$  olduğu için  $H_0$  hipotezi  $\alpha = 0,01$ 'de reddedilebilir. Öyleyse üç yüz hasta içinde kırk beş hastada yan etkinin görölmesi şirket iddiasının aleyhine oldukça önemli bir istatistik kanıt kabul edilebilir.

### 6.3. p-değeri

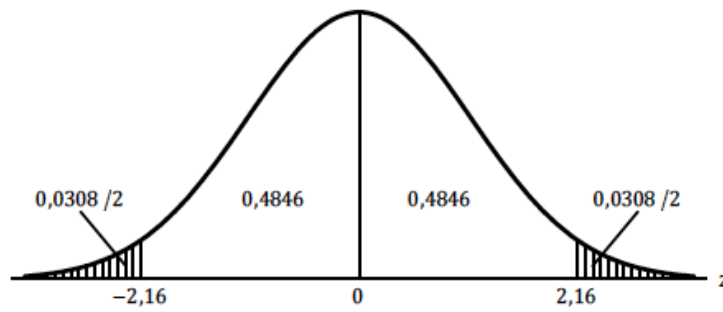
Daha önce  $\alpha$  değerinin seçiminin bir ölçüde subjektif olduğunu ve seçimin genellikle  $H_0$  hipotezinin reddinin getireceği maliyete ya da riske bağlı olduğunu belirtmiştik. Bu yüzden pratikte aynı araştırmayı yapan iki kişiden biri  $H_0$ 'ı reddetmek için  $\alpha = 0,05$ 'i yeterli bulurken, diğer araştırmacı  $\alpha = 0,01$ 'de ısrar edebilir. Bu türden bir karışıklık testin  $p$ -değerinin hesaplanmasıyla bir ölçüde çözülebilir.

Kitle ortalamasına ilişkin çift yönlü bir hipotez testi uygulandığını ve örneklemden test istatistiği değerinin  $z_0 = 2,16$  olarak bulunduğunu varsayalım. Eğer böyle bir testin başlangıcında  $\alpha = 0,05$  seçilmişse  $2,16 > 1,96$  olduğu için  $H_0$  reddedilecektir. Ancak burada  $H_0$ 'ı reddederken yapılacak hata tam olarak 0,05 olmayıp, en fazla 0,05'tir. Eğer  $\alpha = 0,01$  seçilmiş olsaydı bu kez  $2,16 < 2,58$  olduğu için  $H_0$  reddedilmeyecekti. Bu iki sonuca bakarak araştırmacının,  $H_0$ 'ı reddetmeye karar verirse 0,05'ten daha küçük ancak 0,01'den daha büyük bir hata yapacağını söyleyebiliriz.

Bu noktada araştırmacı  $H_0$ 'ı reddetmesi durumunda ne kadarlık  $\alpha$  hatası yapacağını tam olarak hesaplamak isteyecektir.  $p$ -değeri olarak adlandırılan bu değer bu örnek için normal eğri alanlarından kolayca hesaplanabilir.

$$p - \text{değeri} = 2 (0,5 - 0,4846)$$

$$p - \text{değeri} = 0,0308$$



Öyleyse bir testin  **$p$ -değeri** örneklemden sayısal sonuçlar elde edildikten sonra hesaplanan ve  $H_0$ 'ı reddetmekle yapılacak en küçük hatanın (birinci tip hata) olasılığını veren değerdir. Yani aslında  $p$ -değeri, en azından gerçekte gözlenen kadar uç bir test istatistiğine ulaşmanın olasılığıdır.



Yukarıdaki örnekteki hipotez testi tek yönlü olsaydı,  $p$ -değerinin  $0,5 - 0,4846 = 0,0154$  olacağını belirtelim.

Şimdi daha önce ele aldığımız örneklerde uygulanan testler için  $p$ -değerini bularak alıştırma yapabiliriz.

(a) Ülkemizdeki yüksek öğrenim gören öğrencilerin IQ skorlarıyla ilgili örnek,

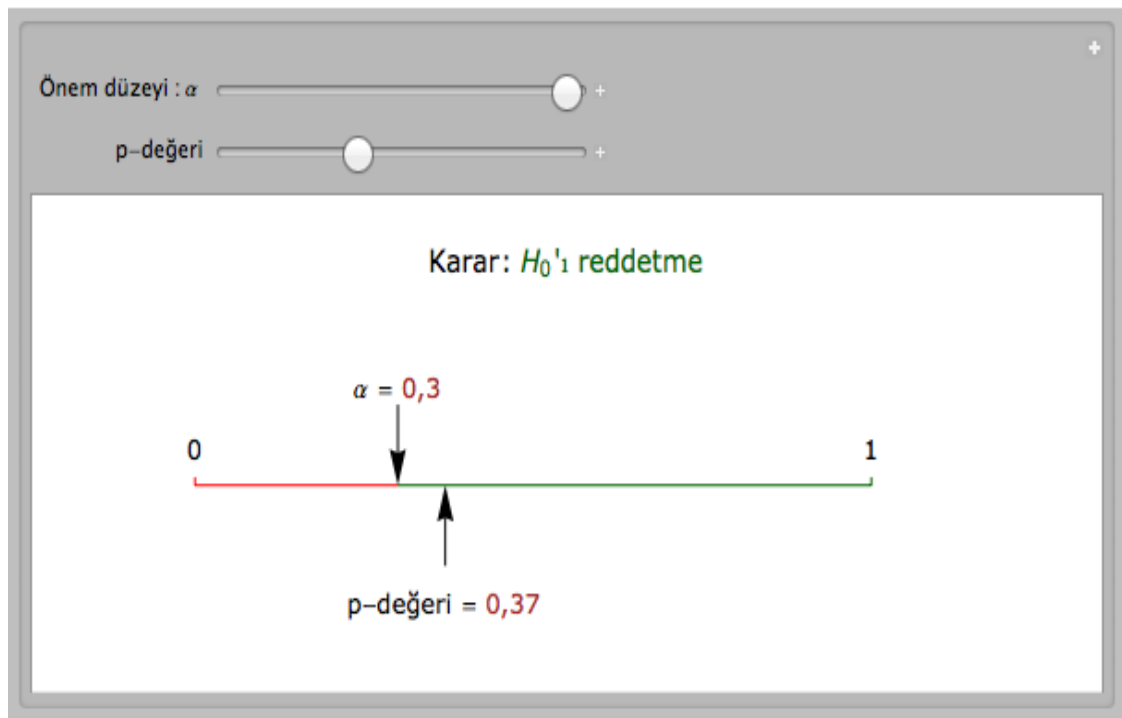
(b) Piyasaya yeni sürülecek bir ilacın yan etkisiyle ilgili örnek için testlerin  $p$ -değerleri şöyle bulunur:

(a)  $p$ -değeri  $= 2(0,5 - 0,4887) = 0,0226$

(b)  $p$ -değeri  $= 0,5 - 0,4981 = 0,0019$

**Testin önem düzeyi ve  $p$ -değeri** aleti ile testin önem düzeyi ve testin  $p$ -değeri kavramlarının ilişkisini keşfedebilirsiniz. Bir testin önem düzeyi  $\alpha$ , karar verici tarafından önceden belirlenen bir değer olup,  $H_0$  hipotezini reddetmekle göze alınan riski temsil eder. Bir eşik değer olan bu riski önceden belirleyen karar verici örneklerden  $p$ -değerini yani riskin tam değerini hesaplar. Eğer  $p$ -değeri,  $\alpha$ 'dan küçük ise hipotezini reddeder.

#### Testin önem düzeyi ve $p$ -değeri



## Uygulamalar

1) Bir firmanın ürettiği ekmeklerin çok fazla değişkenlik gösterdiği fark ediliyor. Fırın sahibi ise ekmeklerin ağırlıklarının standart sapmasının 20 gram olduğunu iddia ediyor. İddiayı araştırmak amacıyla on iki ekmeğin ağırlığı ölçülmüş ve standart sapma 33 gram bulunmuştur. Bu sonuç  $\alpha = 0,01$  için fırıncının iddiasını çürütür mü?

### Cözüm:

Hipotezler

$$H_0: \sigma = 0,20$$

$$H_a: \sigma \neq 0,20$$

olarak ifade edilebilir.  $n = 12$  ,  $s = 33$  değerleri test istatistiğinde yerlerine konulursa

$$\chi_0^2 = \frac{11(33)^2}{(20)^2} = 29,95$$

değeri bulunur.  $\chi_0^2 = 29,95 > \chi_{11;0,005}^2 = 26,80$  olduğundan  $H_0$  hipotezi  $\alpha = 0,01$ 'de reddedilebilir.

2) Belirli bir marka arabanın emniyet standartlarını geliştirme projesinden sorumlu bir mühendis, planladığı dizayn için, sürücülerin ani bir değişikliğe verdikleri refleks sürelerinin standart sapmasının 0,025 saniyeden fazla olmadığını varsayacaktır. Bu varsayımın gerçekçi olup olmayacağını araştırmak amacıyla otuz sürücüye yol testleri uygulanmış ve refleks sürelerinin standart sapması 0,037 saniye olarak bulunmuştur. Mühendis varsayımını değiştirmeli midir?

**Cözüm:**

Hipotezler

$$H_0: \sigma \leq 0,025$$

$$H_a: \sigma > 0,025$$

olarak ifade edilebilir.  $n = 30$  ,  $s = 0,037$  değerleri test istatistiğinde yerlerine konulursa

$$\chi_0^2 = \frac{29(0,037)^2}{(0,025)^2} = 63,52$$

değeri bulunur.  $\chi_0^2 = 63,52 > \chi_{29;0,01}^2 = 49,6$  olduğu için  $H_0$  hipotezi  $\alpha = 0,01$ 'de reddedilebilir. Öyleyse  $H_0$  aleyhine çok önemli kanıtlar söz konusudur. Mühendise varsayımını değiştirmesi önerilmelidir.

3) Yaklaşan bir genel seçimde bir partinin oy oranının 0,50 olacağı iddia ediliyor. İddiayı araştırmak amacıyla iki yüz yetmiş beş birimlik bir örneklem çekilmiş ve yüz kırk sekiz kişi bu partiye oy vereceğini söylemiştir. Bu bilgiye dayanarak iddia desteklenmeli midir?

**Cözüm:**

Hipotezler

$$H_0: p = 0,50$$

$$H_a: p \neq 0,50$$

olarak ifade edilebilir.  $\hat{p}_x = \frac{148}{275} = 0,538$  ,  $n = 275$  ,  $p_0 = 0,50$  ve  $q_0 = 0,50$  değerleri test istatistiğinde yerlerine konulursa

$$z_0 = \frac{0,538 - 0,50}{\sqrt{\frac{0,50 \cdot 0,50}{275}}} = 1,26$$

$\alpha = 0,05$  seçersek  $1,26 < 1,96$  olduğu için  $H_0$  hipotezi kabul edilir.

4) Yıllık ders sisteminden, yarıyıllık sisteme geçmeyi planlayan bir üniversitede öğrencilerin 0,70'ten daha fazlasının yeni sisteme karşı olduğu iddia ediliyor. Rastlantısal olarak seçilen altmış beş öğrenciden elli ikisi yeni sisteme karşı olduğunu söylüyorsa, bu durum iddiaya karşı ne ölçüde önemli kanıt oluşturur?

**Cözüm:**

İddiayı alternatif hipoteze alalım:

$$H_0: p = 0,70$$

$$H_a: p > 0,70$$

$\hat{p}_x = \frac{52}{65} = 0,80$  ,  $n = 65$  ,  $p_0 = 0,70$  ve  $q_0 = 0,30$  değerleri test istatistiğinde yerlerine konulursa

$$z_0 = \frac{0,80 - 0,70}{\sqrt{\frac{0,70 \cdot 0,30}{65}}} = 1,759$$

$z_{0,05} = 1,65$  ve  $z_{0,01} = 2,33$  olduğuna göre  $H_0$  hipotezi  $\alpha = 0,05$ 'te reddedilebilir, ancak  $\alpha = 0,01$ 'de reddedilemez. Testin  $p$ -değeri 0,039'dur.

## Uygulama Soruları

1) Bir zarın hileli olup olmadığına ilişkin bir hipotez testi gerçekleştirmek isteyelim. Zar elli kez atılmak ve doğru hipotezi reddetmekle göze aldığımız risk 0,05 olmak üzere hipotezlerinizi ve karar kuralınızı oluşturunuz.

2) Soru 1'deki zarın gerçekten 50 kez atıldığını (elli birimlik örneklem çekildiğini) ve on kez 6 geldiğini varsayarsak, zarın hileli olduğu iddiasını destekler misiniz?

3) Aylık doğalgaz tüketim harcamalarının, yakın bölgelerde yaşayan tüketicilerde çok fazla değişkenlik göstermediği düşünülüyor ve bu değişkenliğin (varyansın) 20TL'yi aşmayacağı iddia ediliyor olsun. Öncelikle yaşadığınız yerde, yakın komşuluktaki (eşit sayıda bireyin yaşadığı) 10 evin, aylık doğalgaz harcamasını kaydederek örneklem varyansını hesaplayınız. Süreç için gerekli örneklem bilgisi elde edildiğine göre, yaptığınız araştırma bu iddia aleyhine kanıt oluşturmakta mıdır? Bu iddiayı reddetmekle yapılacak hata ne kadardır?

4) Bir araştırmada iddia edilene göre insanların %10'u *öncelikle* sol elini kullanmaktadır. Rastlantısal olarak seçtiğiniz 100 kişiye öncelikle kullandıkları elin hangisi olduğunu sorarak, cevaplarını kaydediniz. Alınan cevaplara göre öncelikle sol elini kullananların oranını hesaplayınız. 100 kişiye dayanan bu örneklem sonucunuza göre, ileri sürülen iddia aleyhine yeterli kanıt var mıdır?

5) Hızlı ve anlayarak okumak için eğitimlerin verildiği bir dernek sayfasında, [Hızlı Okuma Testi](#) uygulanabilmektedir. Rastlantısal olarak seçtiğiniz 30 kişiye bu testi uygulayarak, her birinin dakikada kaç kelime okuduğunu kaydediniz. Daha sonra 200 kelimeyi aşanların oranını hesaplayınız. Bulduğunuz değer, seçtiğiniz örneklemin oranını verecektir.

Yapılan araştırmalara göre Türkiye'de okuma hızı ortalamasının dakikada 160-200 kelime arasında olduğu iddia edilmektedir. 30 kişiye uyguladığınız testin sonucuna göre ileri sürülen bu iddia aleyhine yeterli kanıt var mıdır? İstatistiksel hipotez testi sürecine göre iddiayı test ediniz. İddiayı reddetmekle yapılacak hatanın olasılığı kaçtır?

6) Kitle ortalamasının 50'ye eşit olup olmadığının test edildiği bir istatistiksel süreçte, çekilen 100 örneklemden elde edilen ortalama 48, standart sapma 10 ise, p-değeri kaç olur? 0,05 ( $\alpha$ ) önem düzeyinde bulduğunuz p-değerini yorumlayınız.

## **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Kitle parametrelerinden kitle varyansı ve kitle oranına ilişkin hipotez testi süreçlerinin gerçekleştirilmesi konusu ele alınmıştır. Dolayısıyla kitle varyans ve oranının hipotez testi sürecinden geçirilmesiyle, istatistiksel çıkarsamadaki faydalı yaklaşımlardan biri olduğu konusuna vurgu yapılmıştır. Bunun için sıfır ve alternatif hipotez oluşturulması, varyans ve oran için uygun olan test istatistiklerinin belirlenmesi aşamaları anlatılmıştır. Çizim ve tablolar ile, karar aşamasında öne çıkan hipotez ret-kabul bölgeleri gösterilmiştir. İlk iki alt bölümde bu konulara yer verirken, son bölümde p-değeri ele alınmıştır. Karar sürecinde yeni bir bilgi olmamakla birlikte, farklı bir bakış açısıyla, hesaplanan test istatistiğinden yola çıkarak sıfır hipotezini reddetmekle yapılacak hatanın olasılığının nasıl bulunduğu gösterilmiştir. Bu da karar sürecinde alternatif bir değerlendirme ölçütü olarak kullanılmıştır.

## Bölüm Soruları

1) Bir seyahat şirketi kullandıkları belirli bir marka lastiğin ortalama ömrünü belirlemek için 7 lastiği test etmiş ve km olarak ömürleri aşağıdaki gibi bulmuştur:

24979, 24522, 24116, 25550, 22992, 26229, 24328

kitle varyansı  $\sigma^2$  için aşağıdaki hangi hipotez  $\alpha = 0,05$  önem düzeyinde **reddedilemez**?

a)  $H_0: \sigma^2 = 100000$

b)  $H_0: \sigma^2 = 225000$

c)  $H_0: \sigma^2 = 400000$

d)  $H_0: \sigma^2 = 600000$

2) Birinci sorudaki veriyi göz önüne alarak kitle varyansı  $\sigma^2$  için aşağıdaki hangi hipotez  $\alpha = 0,01$  önem düzeyinde **reddedilebilir**?

a)  $H_0: \sigma^2 = 200000$

b)  $H_0: \sigma^2 = 400000$

c)  $H_0: \sigma^2 = 600000$

d)  $H_0: \sigma^2 = 900000$

3) Bir ülkede kürtaja karşı olanların oranının  $p = 0,25$  olduğu iddia ediliyor. Bu iddiayı araştırmak amacıyla yapılan araştırmada 400 kişiye uygulanan bir ankette 82 kişinin kürtaja karşı olduğu görülmüştür. Buna göre  $\alpha = 0,05$  önem düzeyinde hipotez testinin sonucu nedir?

a)  $H_0: p = 0,25$  hipotezi reddedilir

b)  $H_0: p = 0,25$  hipotezi reddedilmez.

4) Üçüncü soruyu  $\alpha = 0,01$  için yanıtlayınız.

a)  $H_0: p = 0,25$  hipotezi reddedilir

b)  $H_0: p = 0,25$  hipotezi reddedilmez

5) Üçüncü sorudaki veriyi göz önüne alarak kitle oranı  $p$  için aşağıdaki hangi hipotez  $\alpha = 0,05$  önem düzeyinde **reddedilebilir**?

a)  $H_0: p = 0,23$

b)  $H_0: p = 0,20$

c)  $H_0: p = 0,18$

d)  $H_0: p = 0,15$

6) Üçüncü sorudaki veriyi göz önüne alarak kitle oranı  $p$  için aşağıdaki hangi hipotez  $\alpha = 0,01$  önem düzeyinde **reddedilemez**?

a)  $H_0: p = 0,10$

b)  $H_0: p = 0,13$

c)  $H_0: p = 0,21$

d)  $H_0: p = 0,28$

7) Bir ilacın belirli bir yan etki oranının  $p = 0,10$  olduğu düşünülüyor. Bu oranı araştırmak amacıyla yapılan klinik çalışmalarda ilacın uygulandığı 200 kişiden 33 tanesinde söz konusu yan etki görülmüş ise  $\alpha = 0,05$  önem düzeyinde hipotez testinin sonucu nedir?

a)  $H_0: p = 0,10$  hipotezi reddedilir

b)  $H_0: p = 0,10$  hipotezi reddedilmez

8) Üçüncü soruyu  $\alpha = 0,01$  için yanıtlayınız.

a)  $H_0: p = 0,10$  hipotezi reddedilir

b)  $H_0: p = 0,10$  hipotezi reddedilmez



9) Üçüncü sorudaki veriyi göz önüne alarak kitle oranı  $p$  için aşağıdaki hangi hipotez  $\alpha = 0,05$  önem düzeyinde **reddedilemez**?

a)  $H_0: p = 0,10$

b)  $H_0: p = 0,15$

c)  $H_0: p = 0,25$

d)  $H_0: p = 0,30$

10) Üçüncü sorudaki veriyi göz önüne alarak kitle oranı  $p$  için aşağıdaki hangi hipotez  $\alpha = 0,01$  önem düzeyinde **reddedilebilir**?

a)  $H_0: p = 0,10$

b)  $H_0: p = 0,15$

c)  $H_0: p = 0,18$

d)  $H_0: p = 0,20$

### Cevaplar

1) d, 2) a, 3) a, 4) b, 5) d, 6) c, 7) a, 8) a, 9) b, 10) a

## **7. İKİ KİTLE ORTALAMASININ KARŞILAŞTIRILMASINA İLİŞKİN HİPOTEZ TESTLERİ**

### **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

Bu bölümde iki kitle ortalamasının farkına ilişkin testler ve iki kitle varyansının eşitliğinin testi öğrenilecektir. Ayrıca hipotez testindeki gibi bir iddiaya ilişkin karar verirken, güven aralığı sürecinin de alternatif olarak kullanılabileceği konusu öğrenilecektir.

### **Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular**

1) “Ortalama olarak kadınlar erkeklerden daha akıllıdır” diyen Nihal’e Sinan’ın yanıtı, “Belki haklısın, ancak tarihe yön veren büyük isimlerin çoğu erkeklerden çıkar” olur. Nihal ve Sinan görüşlerini desteklemek için hangi parametreleri karşılaştırmalı ve hipotezlerini nasıl kurmalıdırlar?

2) İki kitleyi parametreleriyle karşılaştırırken önceliği ortalamalara mı varyanslara mı verirsiniz, neden?

### Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

| Konu                                                                                                                                                                        | Kazanım                                                                                                                        | Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| İki kitle ortalamasının farkına ilişkin ve iki kitle varyansının eşitliğine ilişkin testler ele alınacak, hipotez testinde güven aralığı yaklaşımı konusuna değinilecektir. | İki kitlenin ortalamalarının ve varyanslarının karşılaştırılmasında hipotez testi sürecinin nasıl uygulanacağı öğrenilecektir. | Metinler, çözümlü problemler, alıştırma ve apletler ile konuların daha kolay anlaşılması sağlanacaktır. |

### **Anahtar Kavramlar**

- İki kitle ortalamasının farkına ilişkin hipotez testleri

## Giriş

Bu bölümde, uygulamada sıkça karşılaşılan iki kitle parametresinin karşılaştırılması problemi ile ilgileneceğiz. Örneğin bir fabrikadaki iki makine defolu parça üretme oranları açısından, kadın ve erkekler zekâ ortalamaları açısından, iki tip boya ortalama kuruma süreleri ya da iki farklı markada otomobil ortalama benzin sarfiyatları açısından karşılaştırılmak istenebilir. Tek kitle parametresine ilişkin testlerde olduğu gibi burada da kullanacağımız araçlar, örneklem istatistikleri ve onların dağılımlarına ilişkin teorik sonuçlar ile örneklemde elde edilen sayısal değerler olacaktır. Testleri, kitle dağılımının normal olup olmamasına, kitle varyansına ilişkin bilgiye ve örneklem büyüklüğüne bağlı kategorilerde inceleyeceğiz.

## 7.1. Kitle Dağılımları Normal - Kitle Varyansları Biliniyor

İki kitle ortalamasını, örneğin kadın ve erkeklerin zekâ ortalamalarını, karşılaştırmak istediğimizi düşünelim.  $\mu_1$  birinci kitlenin,  $\mu_2$  ise ikinci kitlenin ortalamasını göstermek üzere  $H_0$  ve  $H_a$  hipotezleri

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$$

şeklinde ya da eşdeğer olarak

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

şeklinde kurulabilir. Şüphesiz alternatif hipotez tek taraflı da kurulabilir. Daha genel olarak ise  $H_0$  hipotezinde ortalamalar arasındaki farkın sıfır değil, belirli bir  $\delta_0$  değerine eşit olduğu ifade edilebilir:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$$

$$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$$

Sezgisel olarak  $\delta_0 = (\mu_1 - \mu_2)$  farkına dayalı bir test istatistiğine ihtiyacımız olduğu söylenebilir.  $\bar{X}_1$  ve  $\bar{X}_2$ , varyansları  $\sigma_1^2$  ve  $\sigma_2^2$  olan ve normal dağılan iki kitleden çekilen  $n_1$  ve  $n_2$  birimlik bağımsız rastlantısal örneklemelerin ortalamalarını göstermek üzere tahmin bölümünden

$$z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$



rastlantı değişkeninin standart normal dağıldığını biliyoruz. Öyleyse  $H_0$  hipotezi doğru ise

$$z_0 = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

rastlantı değişkeni de standart normal dağılacaktır. Dolayısıyla test sürecinde  $z_0$  test istatistiği olarak kullanılabilir. Süreç Tablo 7.1'de özetlenmiştir. Tablodaki  $z_0 = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$  test istatistiği,  $\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$  rastlantı değişkeninin örneklemden elde edilecek sayısal değerini simgelemektedir.

| <p style="text-align: center;"><b><u>Test İstatistiği</u></b></p> $z_0 = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ |                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Hipotezler</b>                                                                                                                                                           | <b>Karar Kuralı</b>                                                                                                         |
| <p><b>1)</b> <math>H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0</math></p> <p><math>H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0</math></p>                                                            | <p><math>z_0 &gt; z_{\alpha/2}</math> ya da <math>z_0 &lt; -z_{\alpha/2}</math> ise</p> <p><math>H_0</math> reddedilir.</p> |
| <p><b>2)</b> <math>H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0</math> ya da <math>\mu_1 - \mu_2 \geq \delta_0</math></p> <p><math>H_a: \mu_1 - \mu_2 &lt; \delta_0</math></p>             | <p><math>z_0 &lt; -z_\alpha</math> ise <math>H_0</math> reddedilir.</p>                                                     |
| <p><b>3)</b> <math>H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0</math> ya da <math>\mu_1 - \mu_2 \leq \delta_0</math></p> <p><math>H_a: \mu_1 - \mu_2 &gt; \delta_0</math></p>             | <p><math>z_0 &gt; z_\alpha</math> ise <math>H_0</math> reddedilir.</p>                                                      |

**Tablo 7.1:** Varyansları bilinen ve normal dağılan iki kitlenin ortalamalarının karşılaştırılması

## 7.2 Kitle Dağılımları Normal - Kitle Varyansları Bilinmiyor

Bu durumda başvuracağımız rastlantı değişkeni  $t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$  olacaktır. Kitle

varyanslarının eşit olduğu varsayımı altında bu rastlantı değişkeninin  $n_1 + n_2 - 2$  serbestlik dereceli  $t$  dağıldığını tahmin bölümünden biliyoruz. Öyleyse  $H_0$  hipotezi doğru ise  $t_0 = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \delta_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$  rastlantı değişkeni de  $n_1 + n_2 - 2$  serbestlik dereceli  $t$  dağılır. Dolayısıyla bu rastlantı değişkenini test istatistiği olarak kullanabiliriz. Burada  $S_p^2$  eşit kabul ettiğimiz kitle varyanslarının yansız bir tahmincisi olup  $S_1^2$  ve  $S_2^2$ , örneklem varyanslarını göstermek üzere

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

olarak tanımlanır. Test süreci aşağıdaki tabloda özetlenmiştir. Tablodaki  $t_0 = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$  test istatistiği,  $\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \delta_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$  rastlantı değişkeninin örneklemde elde edilecek sayısal değerini simgelemektedir.

| <p style="text-align: center;"><b>Test İstatistiği</b></p> $t_0 = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$   |                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Hipotezler                                                                                                                                               | Karar Kuralı                                                                                                                    |
| <p>1) <math>H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0</math></p> <p><math>H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0</math></p>                                                | <p><math>t_0 &gt; t_{v;\alpha/2}</math> ya da <math>t_0 &lt; -t_{v;\alpha/2}</math> ise</p> <p><math>H_0</math> reddedilir.</p> |
| <p>2) <math>H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0</math> ya da <math>\mu_1 - \mu_2 \geq \delta_0</math></p> <p><math>H_a: \mu_1 - \mu_2 &lt; \delta_0</math></p> | <p><math>t_0 &lt; -t_{v;\alpha}</math> ise <math>H_0</math> reddedilir.</p>                                                     |
| <p>3) <math>H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0</math> ya da <math>\mu_1 - \mu_2 \leq \delta_0</math></p> <p><math>H_a: \mu_1 - \mu_2 &gt; \delta_0</math></p> | <p><math>t_0 &gt; t_{v;\alpha}</math> ise <math>H_0</math> reddedilir.</p>                                                      |

**Tablo 7.2:** Varyansları bilinmeyen ve normal dağılan eşit varyanslı iki kitlenin ortalamalarının karşılaştırılması

Kitle varyanslarının eşit varsayılmadığı durumda ise

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

rastlantı değişkenine başvurabiliriz. Bu rastlantı değişkeni yaklaşık olarak

$$\frac{\left[ \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} \right]^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2-1}} \text{ serbestlik dereceli } t \text{ dağılır. Dolayısıyla } H_0 \text{ hipotezi doğru ise } t_0 = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

rastlantı değişkeni de yukarıda belirtilen serbestlik derecesiyle  $t$  dağılır. Öyleyse  $t_0$ 'ı test istatistiği olarak kullanabiliriz.

Örneğin, iki farklı diyet programını karşılaştırmak amacıyla dokuz kişilik bir gruba birinci diyet, on iki kişilik bir gruba ise ikinci diyet bir ay süre ile uygulanmış ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiş olsun.

| Ortalama<br>kilo kaybı | Kilo<br>kayıplarının<br>standart<br>sapmaları |
|------------------------|-----------------------------------------------|
| $\bar{x}_1 = 7,2$      | $s_1 = 0,59$<br>kg                            |
| $\bar{x}_2 = 6,9$      | $s_2 = 0,82$<br>kg                            |

İki diyet programı arasında önemli bir fark olmadığı hipotezine karşılık, birinci diyet programının daha etkili olduğu hipotezini, kitle dağılımlarını normal varsayarak  $\alpha = 0,05$  için test edersek,

Hipotezler

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

olarak kurulabilir.  $\bar{x}_1 = 7,2$  ,  $s_1 = 0,59$  kg ,  $n_1 = 9$  ,  $\bar{x}_2 = 6,9$  ,  $s_2 = 0,82$  kg ve  $n_2 = 12$  değerleri test istatistiğinde yerlerine konursa

$$t_0 = \frac{(7,2 - 6,9) - 0}{\sqrt{\frac{0,59^2}{9} + \frac{0,82^2}{12}}} = 0,97$$

bulunur. Serbestlik derecesini hesaplayalım:

$$\frac{\left[\frac{0,59^2}{9} + \frac{0,82^2}{12}\right]^2}{\frac{(0,59^2/12)^2}{9-1} + \frac{(0,82^2/12)^2}{12-1}} = 18,94 \sim 19$$

$t_0 = 0,97 < t_{19;0,05} = 2,043$  için  $H_0$  kabul edilir.

### 7.3 Diğer Durumlar

Kitle dağılımları normal değilse ancak kitle varyansları biliniyorsa,  $n_1$  ve  $n_2$ 'yi 30'dan büyük seçersek merkezi limit teoremine göre

$$z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

rastlantı değişkeninin yaklaşık olarak standart normal dağılacığı söylenebilir. Dolayısıyla bu durumda  $z_0 = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$  test istatistiği kullanılabilir.

Kitle dağılımının normal olmadığı ya da bilinmediği ve kitle varyanslarının da bilinmediği durumda yine  $n_1$  ve  $n_2$ 'nin 30'dan büyük değerlerinde  $\sigma_1^2$  ve  $\sigma_2^2$  yerine  $S_1^2$  ve  $S_2^2$  kullanılabilir. Bu durumda ampirik bir gerçeklik olarak  $z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$  rastlantı değişkeninin yaklaşık olarak standart normal dağılacığı kabul edilir. Öyleyse bu durumda

$$z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

rastlantı değişkeni test istatistiği olarak kullanılabilir.

Örnek olarak şu soruyu ele alalım: İki farklı ağrı kesicinin etki sürelerini araştırmak amacıyla altmış kişilik iki farklı gruba söz konusu ilaçlar verilmiş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

| I. ilaç                  | II. ilaç                 |
|--------------------------|--------------------------|
| $n_1 = 60$               | $n_2 = 60$               |
| $\bar{x}_1 =$<br>22,8 dk | $\bar{x}_2 =$<br>25,4 dk |
| $s_1 =$<br>2,9 dk        | $s_2 =$<br>2,4 dk        |

Eldeki sonuçlar birinci ilacın ortalama etki süresinin, ikinciden daha küçük olduğunu iddia etmek için istatistiksel kanıt olarak kabul edilebilir mi?

Çözümü için Hipotezler

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_a: \mu_1 - \mu_2 < 0$$

olarak kurulabilir. Değerler yerlerine konulursa

$$z_0 = \frac{(22,8 - 25,4) - 0}{\sqrt{\frac{2,9^2}{60} + \frac{2,4^2}{60}}} = -5,35$$

elde edilir.  $\alpha = 0,01$  seçilirse  $-5,35 < -2,33$  olduğu için  $H_0$  hipotezi reddedilebilir.  $z_0$  değerine bakıldığında doğru  $H_0$ 'ı reddetme riskinin 0,01'den çok daha küçük olduğu anlaşılmaktadır. Öyleyse  $H_0$  aleyhine oldukça önemli kanıtlar söz konusudur.

## Uygulamalar

1) İki ülkedeki erkeklerin ortalama boylarını karşılaştırmak amacıyla çekilen bağımsız örneklemelerden aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

$$n_1 = 130 \quad \bar{x}_1 = 173,6 \quad s_1 = 2,46$$

$$n_2 = 140 \quad \bar{x}_2 = 172,8 \quad s_2 = 2,34$$

Kitle ortalamalarının eşitliğine ilişkin hipotez testinin sonucu  $\alpha = 0,01$  önem düzeyinde nedir?

### **Çözüm:**

Hipotezler

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$$

olarak ifade edilebilir. Örneklemeler yeterince büyük oldukları için  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  yerlerine  $s_1$  ve  $s_2$  kullanılabilir. Dolayısıyla test istatistiği olarak

$$z_0 = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

kullanılabilir. Değerler yerlerine konulursa

$$z_0 = \frac{(173,6 - 172,8) - 0}{\sqrt{\frac{(2,46)^2}{130} + \frac{(2,34)^2}{140}}} = 2,73$$

elde edilir.  $2,73 > 2,58$  olduğu için  $H_0$  hipotezi  $\alpha = 0,01$ 'de reddedilebilir.

2) Bir psikoloji araştırmasında, iki farklı yaş grubunun tepki sürelerini karşılaştırmak amacıyla çekilen bağımsız örneklemelerden aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

$$n_1 = 50 \quad \bar{x}_1 = 2,61 \quad s_1 = 0,12$$

$$n_2 = 40 \quad \bar{x}_2 = 2,38 \quad s_2 = 0,14$$

Buna göre ilk kitlenin ortalamasının ikinci kitle ortalamasına eşit olduğu hipotezine karşı ilk kitlenin ortalamasının ikinci kitle ortalamasından küçük olduğu hipotezini  $\alpha = 0,05$  için test ediniz.

### **Cözüm:**

Hipotezler

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_a: \mu_1 - \mu_2 < 0$$

olarak ifade edilebilir. Örneklemeler yeterince büyük oldukları için  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  yerlerine  $s_1$  ve  $s_2$  kullanılabilir. Dolayısıyla test istatistiği olarak

$$z_0 = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

kullanılabilir. Değerler yerlerine konulursa

$$z_0 = \frac{(2,61 - 2,38) - 0,20}{\sqrt{\frac{(0,12)^2}{50} + \frac{(0,14)^2}{40}}} = 1,08$$



elde edilir.  $1,08 < 1,645$  olduğu için  $H_0$  hipotezi  $\alpha = 0,05$ 'de reddedilemez. Yani ilk yaşı grubunun tepki sürelerinin daha düşük olduğu iddiası geçersizdir.

### Uygulama Soruları

1) TÜİK'in ortalama esas iş gelirleri istatistiklerinde, meslek gruplarına göre kadın ve erkeklerin yıllık ortalama gelir bilgileri yer almaktadır. Bu istatistiklere dayanarak kadın çalışanların ortalama yıllık gelirlerinin, erkek çalışanlardan az olduğu iddiasını test ediniz.

2) TÜİK'in ortalama esas iş gelirleri istatistiklerinde, meslek gruplarına göre Türkiye'nin kent ve kırsal kesiminde ait yıllık ortalama gelir bilgileri yer almaktadır. Bu istatistiklere dayanarak kırsal kesiminde çalışanların ortalama yıllık gelirlerinin, kent kesiminde çalışanlardan az olduğu iddiasını test ediniz. Aynı hipotezi test etmek amacıyla, aynı kitle üzerinde birbirinden bağımsız iki çalışma yapılsa, büyük örneklem ile yapılan çalışmanın p-değeri, küçük örneklem ile yapılan çalışmanınkinden düşük olması daha muhtemeldir midir? Yorumlayınız.

### **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Pek çok alanda olduğu gibi sosyal bilimler alanındaki araştırmalarda da, iki kitlenin karşılaştırılması, buradan çıkan sonuca göre analiz yapmak bilgi verici olmaktadır. O nedenle hipotez testi sürecinden geçirerek, iki kitlenin ortalamalarının ve varyanslarının karşılaştırılması konusu anlatıldı. Diğer hipotez testlerine benzer biçimde sürecin adımları anlatıldı. İki kitlenin karşılaştırılması söz konusu olduğunda uygun test istatistiğinin nasıl elde edildiği açıklandı. Devamında karar aşamasında kuralın ne olduğu ile nasıl uygulandığı tablo ve çizimler yardımıyla açıklandı. Bu bölümün son kısmında ise hipotez testi sürecinde güven aralığı yaklaşımının nasıl kullanıldığı anlatıldı. Bunu yaparken iki sürecin ilişkisi bir kitle parametresi üzerinden ele alındı. Güven aralığı oluşturarak, bulunan aralık üzerinden yapılacak değerlendirme sayesinde, bir iddiaya ilişkin karara varılabileceği gösterilmiş oldu.

## Bölüm Soruları

1) İki ülkedeki kadınların ortalama boylarını karşılaştırmak amacıyla çekilen bağımsız örneklemelerden aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

$$n_1 = 65 \quad \bar{x}_1 = 168,2 \quad s_1 = 3,26$$

$$n_2 = 72 \quad \bar{x}_2 = 169,4 \quad s_2 = 2,71$$

$\alpha = 0,05$  önem düzeyinde kitle ortalamaları arasında farka ilişkin hipotez testinin sonucu nedir?

a)  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  hipotezi reddedilir

b)  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  hipotezi reddedilmez

2) Birinci soruyu  $\alpha = 0,01$  için yanıtlayınız.

a)  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  hipotezi reddedilir

b)  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  hipotezi reddedilmez

3) Birinci soruda test istatistiğinin değeri nedir?

c)  $z_0 = -2,71$

d)  $z_0 = -2,33$

e)  $z_0 = -1,43$

f)  $z_0 = -1,21$

4) Öğrenme modelleri farklı iki tipte çocukların geometri sorularını çözme hızlarını karşılaştırmak amacıyla 34 ve 32 öğrenciye belirli bir geometri testi uygulanmış ve testi tamamlama sürelerinin ortalama ve standart sapmaları dakika olarak aşağıdaki gibi bulunmuştur :

$$n_1 = 34 \quad \bar{x}_1 = 22,3 \quad s_1 = 3,66$$

$$n_2 = 32 \quad \bar{x}_2 = 20,1 \quad s_2 = 4,60$$

$\alpha = 0,05$  önem düzeyinde kitle ortalamaları arasında farka ilişkin hipotez testinin sonucu nedir?

a)  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  hipotezi reddedilir

b)  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  hipotezi reddedilmez

5) Dördüncü soruyu  $\alpha = 0,01$  için yanıtlayınız.

a)  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  hipotezi reddedilir

b)  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  hipotezi reddedilmez

6) Dördüncü soruda test istatistiğinin değeri nedir?

a)  $z_0 = 2,71$

b)  $z_0 = 2,47$

c)  $z_0 = 2,14$

d)  $z_0 = 1,88$

7) İki şehirdeki mevsimlik yağış miktarlarını karşılaştırmak amacıyla 12 yıllık kayıtlar incelenmiş metrekaresine düşen yağış miktarlarının ortalama ve standart sapmaları kg olarak aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$n_1 = 12 \quad \bar{x}_1 = 3,6 \quad s_1 = 0,75$$

$$n_2 = 12 \quad \bar{x}_2 = 2,9 \quad s_2 = 1,20$$

$\alpha = 0,10$  önem düzeyinde kitle ortalamaları arasında farka ilişkin hipotez testinin sonucu nedir?

a)  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  hipotezi reddedilir

b)  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  hipotezi reddedilmez

8) Yedinci soruyu  $\alpha = 0,05$  için yanıtlayınız.

a)  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  hipotezi reddedilir

b)  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  hipotezi reddedilmez

9) Yedinci soruyu  $\alpha = 0,01$  için yanıtlayınız.

a)  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  hipotezi reddedilir

b)  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  hipotezi reddedilmez

10) Yedinci soruda test istatistiğinin değeri nedir?

a)  $z_0 = 2,13$

b)  $z_0 = 2,07$

c)  $z_0 = 1,99$

d)  $z_0 = 1,71$

### Cevaplar

1) a, 2) b, 3) b, 4) a, 5) b, 6) c, 7) a, 8) b, 9) b, 10) d

## **8. İKİ KİTLE ORAN VE VARYANSININ KARŞILAŞTIRILMASINA İLİŞKİN HİPOTEZ TESTLERİ**

### **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

Bu bölümde iki kitle oran ve varyansının karşılaştırılmasına ilişkin hipotez testlerinin yanı sıra güven aralığı ve hipotez testi ilişkisine yer verilecektir.



### **Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular**

**1)** Bir margarinin etiketinde  $200 \pm 20 \text{ gram}$  yazısını görüp, “Demek ki bu marka margarinlerin olabileceği en düşük ağırlık 180, en büyüğü ise 220 gram” diyen bir kişiye yanıtınız ne olurdu?

### Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

| Konu                                                                                                                                                       | Kazanım                                                                                                                                                                                                                                           | Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| İki kitle oran ve varyansının karşılaştırılmasına ilişkin test süreçleri tanıtılacak, güven aralığı-hipotez testi süreçlerinin ilişkileri tartışılacaktır. | İki kitle oran ve varyansının karşılaştırılması sürecinde yer alan kavramların yanı sıra, hipotezlerin oluşturulması, test edilmesi ve yorumlanması konuları öğrenilecektir. Ayrıca güven aralığı ve hipotez testi ilişkisi içselleştirilecektir. | Metinler, çözümlü problemler, alıştırmalar ve apletler ile konuların daha kolay anlaşılması sağlanacaktır. |

### **Anahtar Kavramlar**

- Kitle ve örneklem oranları
- Kitle ve örneklem varyansları
- F dağılımı

## **Giriş**

İki kitle karşılaştırılırken her zaman ortalamaları bağlamında düşünölmeyebilir ve oranlar ve varyansları da karşılaştırılmak istenebilir. Örneğın, kadın ve erkekler zekâ varyansları açısından ya da sigara içme oranları açısından karşılaştırılmak istenebilir. Bu bölümde uygulamada sıkça karşılaşılan iki kitle oran ve varyansının karşılaştırılması konusuna değineceğiz. Tek kitle parametresine ilişkin testlerde olduğı gibi burada da kullanacağımız araçlar, örneklem istatistikleri ve onların dağılımlarına ilişkin teorik sonuçlar ile örneklemden elde edilen sayısal değerler olacaktır.

## 8.1. İki Kitle Varyansının Eşitliğinin Testi

Daha önceki bölümlerde iki kitle ortalaması karşılaştırılırken kitle varyanslarının bilinmediği durumda,  $t_0$  test istatistiğini kullanmak için kitle varyanslarının eşit olduğunu varsaymıştık. Teorik olarak zorunlu olan bu varsayımın geçerli olmaması durumunda kitle ortalamalarının testinin güvenilirliği de tehlikeye gireceği için bu durumda öncelikle varyansların eşitliği testi gerçekleştirilebilir. Ayrıca hemen belirtelim, iki kitlenin varyanslarının eşitliği testi her zaman bir varsayımın araştırılması olarak değil, bağımsız olarak da incelenme konusu olabilir.

Kitle varyanslarının eşitliğine ilişkin  $H_0$  ve  $H_a$  hipotezleri

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

olarak kurulabilir.  $H_a$ 'nın istenirse tek yönlü de kurulabileceğini yine belirtelim.

Kitlelerin normal dağıldığını varsayarsak (bu varsayımın testi de önceki bölümlerde anlatılan yöntemlerle olanaklıdır.)  $\chi_1^2$  ve  $\chi_2^2$  bağımsız rastlantı değişkenleri olmak üzere

$$F = \frac{\chi_1^2/v_1}{\chi_2^2/v_2} \quad (7.1)$$

rastlantı değişkeninin payı  $v_1$ , paydası  $v_2$  serbestlik dereceli  $F$  dağılır. Öte yandan  $\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}$  ve  $\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}$  rastlantı değişkenlerinin sırasıyla  $(n_1 - 1)$  ve  $(n_2 - 1)$  serbestlik dereceli  $\chi^2$  dağıldığını da biliyoruz. Bu sonuçları eşitlik (7.1)'e uygularsak

$$F = \frac{(n_1 - 1)S_1^2/\sigma_1^2(n_1 - 1)}{(n_2 - 1)S_2^2/\sigma_2^2(n_2 - 1)} = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$$

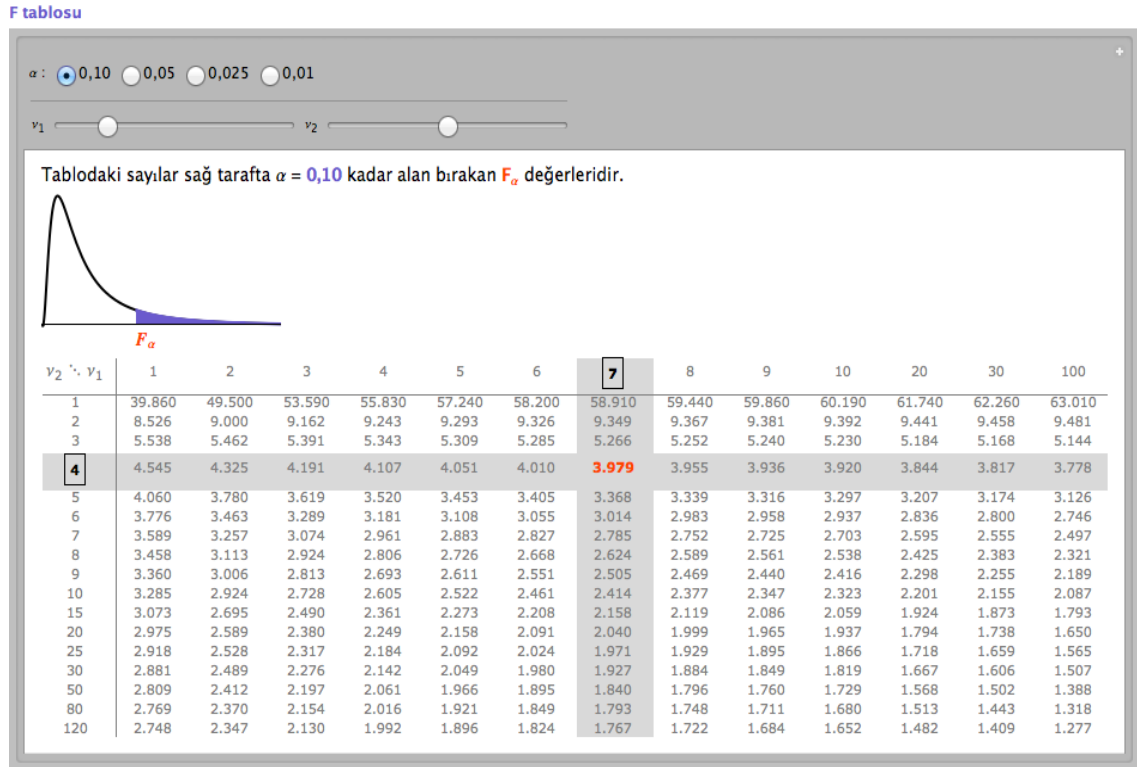
elde edilir. Öyleyse  $H_0$  hipotezi doğru ise yani  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  ise  $F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$  rastlantı değişkeni de  $F$  dağılacaktır. Dolayısıyla  $F_0$  bu süreçte test istatistiği olarak kullanılabilir.

Burada büyük olan örneklem varyansının  $S_1^2$  olarak seçileceğini belirtelim. Test süreci aşağıdaki tabloda özetlenmiştir. Tabloda test istatistiği  $F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ ,  $F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$  rastlantı değişkeninin örneklemden elde edilen sayısal karşılığını göstermektedir.

| <b>Test İstatistiği</b>                                                                                |                                                          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$                                                                            |                                                          |
| <b>Hipotezler</b>                                                                                      | <b>Karar Kuralı</b>                                      |
| 1) $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$<br>$H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$                                 | $F_0 > F_{n_1-1, n_2-1; \alpha/2}$ ise $H_0$ reddedilir. |
| 2) $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ya da $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$<br>$H_a: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ | $F_0 > F_{n_1-1, n_2-1; \alpha}$ ise $H_0$ reddedilir.   |

**Tablo 8.1:** İki kitle varyansının eşitliğine ilişkin test süreci

**F tablosu** apleti ile F tablo değerlerini hesaplayabilirsiniz.



Örnek bir soru ile konuyu ele alalım: Sabun tozu üreten bir fabrikada sabun tozlarını 300 gramlık kutulara doldurmak üzere ayarlanmış iki makine vardır. Bu makineler tarafından doldurulmuş onar tane sabun tozu kutusu tartılmış ve standart sapmaları  $s_1 = 19$  gr,  $s_2 = 12$  gr olarak bulunmuştur. İki makine arasında değişkenlik açısından bir fark olmadığı hipotezini, birinci makinede daha fazla değişkenlik olduğu hipotezine karşı test ediniz.

Çözümünde hipotezler

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_a: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

olarak kurulabilir. Kitlelerin normal dağıldığını varsayarak  $F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$  test istatistiğine başvurabiliriz. Hesaplanırsa

$$F_0 = \frac{19^2}{12^2} = 2,51$$

değeri elde edilir.  $2,51 < F_{9,9;0,05} = 3,18$  olduğu için  $H_0$  hipotezi  $\alpha = 0,05$  'te reddedilmez. Öyleyse kitle varyanslarının eşit olduğunu söyleyebiliriz, diğer bir deyişle makineler arasında değişkenlik açısından bir fark olmadığı iddiasına karşı istatistiksel bir kanıt söz konusu değildir.

## 8.2. İki Kitle Oranının Farkının Testi

$p_1$  ve  $p_2$  kitle oranlarını göstermek üzere, kitle oranlarının karşılaştırılmasına ilişkin  $H_0$  ve  $H_a$  hipotezleri

$$H_0: p_1 - p_2 = \delta_0$$

$$H_a: p_1 - p_2 \neq \delta_0$$

olarak kurulabilir.  $\hat{p}_1$  ve  $\hat{p}_2$  her iki kitleden bağımsız olarak çekilen örneklem oranlarını göstermek üzere

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}}$$

rastlantı değişkeni  $n_1$  ve  $n_2$ 'nin büyük değerleri için standart normal dağılır. Öte yandan  $n_1$  ve  $n_2$  yeterince büyük ise  $p_1$  yerine  $\hat{p}_1$ ,  $p_2$  yerine  $\hat{p}_2$ 'yi kullanabiliriz. Öyleyse bu durumda

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}}}$$

rastlantı değişkeninin de yaklaşık olarak standart normal dağıldığı söylenebilir. Bu rastlantı değişkeninde  $\hat{p}_1$  ve  $\hat{p}_2$  yerine bunların tartılı ortalamasını

$$\hat{p}_w = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

kullanırsak rastlantı değişkeni

$$z_0 = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\hat{p}_w \hat{q}_w \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

olarak ifade edilebilir.  $z_0$ , oranların farkına ilişkin test sürecinde test istatistiği olarak kullanılabilir. Test süreci Tablo 8.2'te özetlenmiştir:



| Test İstatistiği                                                                                                              |                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| $z_0 = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\hat{p}_w \hat{q}_w \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$ |                                                                           |
| Hipotezler                                                                                                                    | Karar Kuralı                                                              |
| <b>1)</b> $H_0: p_1 - p_2 = \delta_0$<br>$H_a: p_1 - p_2 \neq \delta_0$                                                       | $z_0 > z_{\alpha/2}$ ya da $z_0 < -z_{\alpha/2}$ ise<br>$H_0$ reddedilir. |
| <b>2)</b> $H_0: p_1 - p_2 = \delta_0$ ya da $p_1 - p_2 \geq \delta_0$<br>$H_a: p_1 - p_2 < \delta_0$                          | $z_0 < -z_{\alpha}$ ise $H_0$ reddedilir.                                 |
| <b>3)</b> $H_0: p_1 - p_2 = \delta_0$ ya da $p_1 - p_2 \leq \delta_0$<br>$H_a: p_1 - p_2 > \delta_0$                          | $z_0 > z_{\alpha}$ ise $H_0$ reddedilir.                                  |

**Tablo 8.2:** İki kitle oranının farkına ilişkin test süreci

### 8.3. Güven Aralığı ve Hipotez Testi İlişkisi

Aralarındaki benzerlik sezgisel olarak kolayca fark edilen güven aralığı ve hipotez testi süreçlerinin ilişkisini ortalama parametresi için ele alalım. Varyansı bilinmeyen ve normal dağılan bir kitle için  $\%100(1 - \alpha)$  güven aralığını aşağıdaki eşitlik ile vermiştik:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Öte yandan bu test için karar kuralında

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{n-1; \alpha/2}$$

ise ya da

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_{n-1; \alpha/2}$$

ise  $H_0$ 'ın reddedileceğini belirtmiştik. Başka bir biçimde ifade edilirse

$$-t_{n-1;\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq t_{n-1;\alpha/2}$$

ise  $H_0$  hipotezi kabul edilecektir. Son eşitsizlik düzenlenirse

$$\bar{x} - t_{n-1;\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu_0 \leq \bar{x} + t_{n-1;\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğe ve %100  $(1 - \alpha)$  güven aralığına bakıldığında yapılacak olan yorum açıktır:  $\mu_0$  değeri %100  $(1 - \alpha)$  güven aralığının dışına düşüyorsa  $\alpha$  önem düzeyinde  $H_0$  hipotezini reddet, aksi durumda kabul et. Öyleyse elimizde bir parametreye ilişkin %100  $(1 - \alpha)$  güven aralığı varsa  $\alpha$  önem düzeyinde sonsuz sayıda  $H_0$  hipotezi test edilebilir. Başka bir biçimde ifade edersek: %100  $(1 - \alpha)$  güven aralığı,  $\alpha$  önem düzeyinde kabul edilebilecek tüm  $H_0$  hipotezlerini simgeler. Örneğin  $\mu$ ' için bir %95 güven aralığı

$$124,4 \leq \mu \leq 147,8$$

gibi olsun. Bu parametreye ilişkin  $H_0: \mu = 140$  ,  $H_0: \mu = 123$  gibi iki tane de sıfır hipotezini düşünelim. Güven aralığına baktığımızda 140 değerinin aralığın içinde 123 değerinin ise dışında olduğunu görüyoruz. Bu durumda  $H_0: \mu = 123$  hipotezini reddederken,  $H_0: \mu = 140$  hipotezini reddedemeyeceğimizi derhal söyleyebiliriz. Ayrıca  $H_0: \mu = 123$  hipotezini reddederken göze aldığımız riskin (birinci tip hatanın)  $1 - 0,95 = 0,05$  olduğunu ekleyelim.

## Uygulamalar

1) İstanbul'da rastlantısal olarak seçilen iki yüz yirmi aileden yirmi birinin, Ankara'dan rastlantısal olarak seçilen yüz yetmiş yedi aileden ise on sekizinin oturdukları evin kendilerine ait olduğu görülmüştür. Ev sahibi olma oranı arasında iki il arasında önemli bir farklılık olduğu söylenebilir mi?

### Cözüm:

$p_1$ , İstanbul'daki kitle oranını,  $p_2$  ise Ankara'daki kitle oranını göstermek üzere hipotezler

$$H_0: p_1 - p_2 = 0$$

$$H_a: p_1 - p_2 \neq 0$$

olarak kurulabilir.  $n_1 = 220$ ,  $\hat{p}_1 = \frac{21}{220} = 0,095$ ,  $n_2 = 177$ ,  $\hat{p}_2 = \frac{18}{177} = 0,102$  değerleri yerlerine konursa

$$\hat{p}_w = \frac{220 \cdot 0,095 + 177 \cdot 0,102}{220 + 177} = 0,098$$

elde edilir. Buradan

$$z_0 = \frac{(0,095 - 0,102) - 0}{\sqrt{(0,098)(0,902) \left( \frac{1}{220} + \frac{1}{177} \right)}} = -0,23$$

olarak bulunur.  $\alpha = 0,05$  seçersek  $-0,23 > -1,96$  olduğu için  $H_0$  kabul edilecektir. Öyleyse iki il arasında ev sahibi olma oranı açısından önemli bir farklılık olduğu iddiası desteklenemez.

2) Bir araştırmacı devlet üniversitesi ile özel üniversitelerde okuyan öğrencilerin başarı notu varyanslarının birbirinden farklı olduğunu iddia etmektedir. Her iki gruptan 20'şer öğrenci seçilerek test uygulanmıştır. Devlet üniversitesi öğrencilerinin notlarının varyansı 103, özel üniversite öğrencilerinin notlarının varyansı 73 bulunmuştur. İddiayı  $\alpha = 0,05$  için test ediniz.

**Cözüm:**

Hipotezler

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

olarak ifade edilebilir.

$s_1^2 > s_2^2$  olduğuna göre, kitlelerin normal dağıldığını varsayarak  $F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$  test istatistiğine başvurabiliriz. Hesaplanırsa

$$F_0 = \frac{103}{73} = 1,41$$

değeri elde edilir.  $1,41 < F_{19,19;0.025} = 2,53$  olduğu için  $H_0$  hipotezi  $\alpha = 0,05$ 'te reddedilmez. Öyleyse kitle varyanslarının eşit olduğunu diğer bir deyişle özel ve devlet üniversiteleri arasında başarı notlarındaki değişkenlik açısından bir fark olmadığı iddiasına karşı istatistiksel bir kanıt söz konusu değildir.

## Uygulama Soruları

1) TÜİK'in Tüketim Harcamaları İstatistiklerinden, [hanehalkı tipine göre hane halkı tüketim harcaması tablolarında](#), Türkiye'nin farklı hanehalkı yapılarında, farklı harcama gruplarına göre harcama oranları verilmiştir. Bunlardan tek çocuklu aile ile üç veya daha fazla çocuklu ailelerin, eğlence ve kültür harcamaları oranları bakımından fark olmadığı iddiasını, tablodaki bilgilere dayanarak test ediniz.

2) Aylık elektrik tüketim harcamalarının, bir tüketicide gösterdiği değişkenlik ile diğer bir tüketicide gösterdiği değişkenlik arasında fark olmadığı düşünülüyor olsun. Öncelikle yaşadığınız yerde, eşit sayıda bireyin yaşadığı 2 evin, 12 aylık elektrik harcamasını (TL) kaydederek örneklem varyanslarını hesaplayınız. Süreç için gerekli örneklem bilgisi elde edildiğine göre, yaptığınız araştırma bu iddia aleyhine kanıt oluşturmakta mıdır? Bu iddiayı reddetmekle yapılacak hata ne kadardır?

3) Bir araştırmacı devlet üniversiteleri ile özel üniversitelerde okuyan öğrencilerin genel başarı notu varyanslarının birbirinden farklı olduğunu iddia etmektedir. Her iki gruptan 30'ar öğrenci seçilerek test uygulanmıştır. Devlet üniversiteleri öğrencilerinin notlarının varyansı 98, özel üniversite öğrencilerinin notlarının varyansı 69 olarak bulunmuştur. İddiayı 0,05 önem düzeyinde test ediniz. İddiayı reddetmekle yapılacak hata nedir?

### **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Bu bölümde iki kitle oran ve varyansının farkına ilişkin testleri ele aldık. Yanı sıra güven aralığı ile hipotez testi arasındaki ilişki üzerinde durduk.

## Bölüm Soruları

1) İki fırındaki ekmeklerin gramajlarının varyanslarını karşılaştırmak amacıyla çekilen bağımsız örneklemelerden aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

$$n_1 = 15 \quad s_1^2 = 19,67$$

$$n_2 = 17 \quad s_2^2 = 7,34$$

$\alpha = 0,10$  önem düzeyinde kitle varyanslarının eşitliğine ilişkin hipotez testinin sonucu nedir?

- a)  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  hipotezi reddedilir.
  - b)  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  hipotezi reddedilmez.
- 2) Birinci soruyu  $\alpha = 0,05$  için yanıtlayınız.
- a)  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  hipotezi reddedilir.
  - b)  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  hipotezi reddedilmez.
- 3) Birinci soruyu  $\alpha = 0,01$  için yanıtlayınız.
- a)  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  hipotezi reddedilir.
  - b)  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  hipotezi reddedilmez.
- 4) Birinci soruda test istatistiğinin değeri nedir?
- a)  $F_0 = 4,83$
  - b)  $F_0 = 3,56$
  - c)  $F_0 = 2,68$
  - d)  $F_0 = 1,34$

5) İki şehirdeki mevsimlik yağış miktarlarını karşılaştırmak amacıyla 12 yıllık kayıtlar incelenmiş ve metrekareye düşen yağış miktarlarının standart sapmaları  $s_1 = 0,75$  ,  $s_2 = 1,20$  olarak bulunmuştur.

$\alpha = 0,10$  önem düzeyinde kitle ortalamaları arasındaki farka ilişkin hipotez testinin sonucu nedir?

a)  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  hipotezi reddedilir

b)  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  hipotezi reddedilmez

6) Beşinci soruyu  $\alpha = 0,05$  için yanıtlayınız.

a)  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  hipotezi reddedilir

b)  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  hipotezi reddedilmez

7) Beşinci soruda test istatistiğinin değeri nedir?

a)  $z_0 = 3,79$

b)  $z_0 = 3,05$

c)  $z_0 = 2,98$

d)  $z_0 = 2,56$

8) Kadın ve erkeklerdeki sigara içme oranlarını karşılaştırmak amacıyla 150 kadın ve 145 erkeğe alışkanlıkları sorulmuş , 22 kadın ve 38 erkeğin sigara kullandığı saptanmıştır.

$\alpha = 0,05$  önem düzeyinde kitle oranları arasında farka ilişkin hipotez testinin sonucu nedir?

a)  $H_0: p_1 = p_2$  hipotezi reddedilir.

b)  $H_0: p_1 = p_2$  hipotezi reddedilmez.

9) Sekizinci soruyu  $\alpha = 0,01$  için yanıtlayınız.

a)  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  hipotezi reddedilir.

b)  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  hipotezi reddedilmez.



**10)** Sekizinci soruda test istatistiğinin değeri nedir?

a)  $z_0 = -3,56$

b)  $z_0 = -3,11$

c)  $z_0 = -2,46$

d)  $z_0 = -1,44$

### **Cevaplar**

1) a, 2) b, 3) b, 4) c, 5) b, 6) b, 7) d, 8) a, 9) b, 10) c

## **9. Kİ-KARE BAĞIMSIZLIK TESTLERİ**

### **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

Bu bölümde araştırmalarda sıkça başvurulan bir topluluğu oluşturan birimlerin iki ya da daha fazla özelliğinin birbirlerinden bağımsızlığının testi konusu öğrenilecektir. Ayrıca bu özelliklere ilişkin gözlem değerlerinin gösterildiği kontenjans tablolarının oluşturulması ve yorumlanması da bu bölümde gösterilecektir.

### **Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular**

- 1) Yaşlıların daha az uykuya ihtiyaç hissettiği yönündeki yaygın kanıyı Ki-Kare bağımsızlık testleriyle sınamak için bir kontenjans tablosu dizaynı düşününüz.
- 2) Bekarlık sultanlıktır! Siz de böyle düşünüyorsanız, bu iddiayı test etmek için nasıl bir veri toplamayı düşünürdünüz?

### **Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri**

| <b>Konu</b>                                                                         | <b>Kazanım</b>                                                                                            | <b>Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği</b>                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Kategorik değişkenlerin birbirlerinden bağımsızlığının testi konusu öğrenilecektir. | Kontenjans tablosu oluşturarak ve Ki-Kare bağımsızlık testlerini gerçekleştirme süreçleri öğrenilecektir. | Metinler, çözümlü problemler, alıştırmalar ve apletler ile konuların daha kolay anlaşılması sağlanacaktır. |

### **Anahtar Kavramlar**

- Kontenjans tablosu
- Bağımsızlık testi
- Ki-kare test istatistiği

## **Giriş**

Bu bölümde belirli bir topluluğu oluşturan birimlere ilişkin cinsiyet ya da eğitim düzeyi gibi kategorik değişkenlerin birbirlerinden bağımsızlığının testi ile ilgileneceğiz.

## 9.1. Kontenjans Tabloları ve Bağımsızlık Testi

Araştırma konumuz örneğin bir TV programını izlemede eğitim düzeyinin rol oynayıp oynamadığı ya da çalışanların işyeri verimliliğinin cinsiyetten bağımsız olup olmadığı olabilir. Bu tür araştırmalarda örnekleme oluşturan birimlerin her iki özelliği de birlikte gözlenir ve sonuçlar **kontenjans tablosu** adı verilen çift girişli bir tabloda gösterilir.  $n$  birimlik bir örnekleme birimlere ait birinci özelliğin (Özellik  $A$ )  $c$ , ikinci özelliğin (Özellik  $B$ ) ise  $r$  kategoriden oluştuğu bir kontenjans tablosu aşağıdaki gibi oluşturulabilir:

ÖZELLİK B

| ÖZELLİK A |          |          |          |          |           |
|-----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
|           | 1        | 2        | ...      | $c$      | Toplamlar |
| 1         | $G_{11}$ | $G_{12}$ | ...      | $G_{1c}$ | $R_1$     |
| 2         | $G_{21}$ | $G_{22}$ | ...      | $G_{2c}$ | $R_2$     |
| $\vdots$  | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$  |
| $r$       | $G_{r1}$ | $G_{r2}$ | ...      | $G_{rc}$ | $R_r$     |
| Toplamlar | $C_1$    | $C_2$    | ...      | $C_c$    | $n$       |

**Tablo 9.1: Kontenjans tablosu**

$H_0$  ve  $H_a$  hipotezleri ise

$H_0$ :  $A$  ve  $B$  özellikleri bağımsızdır.

$H_a$ :  $A$  ve  $B$  özellikleri bağımlıdır.

şeklinde ifade edilebilir. Rastlantısal olarak seçilecek bir birimin  $i$ . satıra düşme olasılığı  $p_{i.}$ ,  $j$ . sütuna düşme olasılığı  $p_{.j}$ ,  $i$ . satıra ve  $j$ . sütuna düşme olasılığı ise  $p_{ij}$  ile gösterilsin.

$$p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$$



ise  $A$  ve  $B$  özelliklerinin bağımsız olacağını olasılık bölümünden biliyoruz. Öte yandan  $i$ . satıra ve  $j$ . sütuna düşmesi beklenen frekans ise

$$E_{ij} = np_{i.}p_{.j}$$

olacaktır. Tablo 9.1 örneklemden elde edilecek değerleri gösterdiğine göre  $p_{i.}$ ,  $p_{.j}$  ve  $p_{ij}$  olasılıklarının (oranlarının) tahminleri

$$\hat{p}_{i.} = \frac{R_i}{n}, \quad \hat{p}_{.j} = \frac{C_j}{n}, \quad \hat{p}_{ij} = \frac{R_i}{n} \frac{C_j}{n}$$

olarak yazılabilir. Buradan beklenen frekansların tahmini

$$\hat{E}_{ij} = \frac{\hat{R}_i \hat{C}_j}{n} \quad (9.1)$$

olarak elde edilir.  $H_0$  hipotezi doğru ise

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(G_{ij} - \hat{E}_{ij})^2}{\hat{E}_{ij}} \quad (9.2)$$

istatistiği  $(r - 1)(c - 1)$  serbestlik dereceli  $\chi^2$  dağılır. Öyleyse

$$\chi_0^2 > \chi_{(r-1)(c-1); \alpha}^2$$

ise  $H_0$  hipotezi reddedilecektir.

## Uygulamalar

1) 60 bekâr, 110 evli ve 100 boşanmış kişiye mutluluklarını en çok neyin arttırdığı sorulmuş ve aşağıdaki veri elde edilmiştir. Mutlulukları etkileyen faktörlerin medeni duruma göre değiştiği iddia edilebilir mi?

|                            | Bekâr | Evli | Boşanmış | Toplamlar |
|----------------------------|-------|------|----------|-----------|
| Arkadaşlar ve sosyal çevre | 20    | 28   | 30       | 78        |
| İş yerindeki başarı        | 17    | 68   | 59       | 144       |
| Kişisel uğraşlar           | 23    | 14   | 11       | 48        |
| Toplam                     | 60    | 110  | 100      | 270       |

### Cözüm:

Hipotezler

$H_0$ : Kişilerin mutluluklarını etkileyen faktörler medeni durumlarına göre farklılık göstermez: Faktörler ve medeni durum bağımsızdır.

$H_a$ : Kişilerin mutluluklarını etkileyen faktörler medeni durumlarına göre farklılık gösterir: Faktörler ve medeni durum bağımlıdır.

olarak ifade edilebilir. Her bir hücredeki beklenen frekansların tahminleri (9.1) eşitliğinden

$$\hat{E}_{11} = \frac{78 \cdot 60}{270} = 17,33 \quad \hat{E}_{12} = \frac{78 \cdot 110}{270} = 31,78 \quad \hat{E}_{13} = \frac{78 \cdot 100}{270} = 28,89$$

$$\hat{E}_{21} = \frac{144 \cdot 60}{270} = 32 \quad \hat{E}_{22} = \frac{144 \cdot 110}{270} = 58,67 \quad \hat{E}_{23} = \frac{144 \cdot 100}{270} = 53,33$$

$$\hat{E}_{31} = \frac{48 \cdot 60}{270} = 10,67 \quad \hat{E}_{32} = \frac{48 \cdot 110}{270} = 19,56 \quad \hat{E}_{33} = \frac{48 \cdot 100}{270} = 17,78$$

olarak hesaplanır. Buradan  $\chi_0^2$  istatistiği

$$\chi_0^2 = \frac{(20 - 17,33)^2}{17,33} + \frac{(28 - 31,78)^2}{31,78} + \dots + \frac{(11 - 17,78)^2}{17,78} = 28,436$$

olur. Ki-Kare tablosundan  $\chi_{4;0,01}^2 = 13,3$ 'tür.  $28,443 > 13,3$  olduğu için  $H_0$  hipotezi  $\alpha = 0,01$ 'de reddedilebilir. Yani mutluluğu etkileyen faktörler ile medeni durumun birbirine bağımlı olduğuna ilişkin oldukça önemli istatistiksel kanıtlar vardır.

2) Uykuya ayrılan süre ve yaşın ilişkisini araştırmak amacıyla üç kategoriden üç yüzer kişiye günde kaç saat uyudukları sorulmuş ve aşağıdaki veri elde edilmiştir. Veriye dayanarak uykuya ayrılan sürenin yaştan bağımsız olduğu iddia edilebilir mi?

| Yaş     | 8 saatten az | 8 saatten çok | Toplam |
|---------|--------------|---------------|--------|
| 18 – 30 | 178          | 122           | 300    |
| 31 – 45 | 134          | 166           | 300    |
| 46 – 60 | 105          | 195           | 300    |
| Toplam  | 417          | 483           | 900    |

### Cözüm:

Hipotezler

$H_0$ : Uykuya ayrılan süre yaştan bağımsızdır.

$H_a$ : Uykuya ayrılan süre yaşa bağımlıdır.

olarak ifade edilebilir. Beklenen frekansların tahminleri

$$\hat{E}_{11} = \frac{300 \cdot 417}{900} = 139$$

$$\hat{E}_{12} = \frac{300 \cdot 483}{900} = 161$$

$$\hat{E}_{21} = \frac{300 \cdot 417}{900} = 139$$

$$\hat{E}_{22} = \frac{300 \cdot 483}{900} = 161$$

$$\hat{E}_{31} = \frac{300 \cdot 417}{900} = 139$$

$$\hat{E}_{32} = \frac{300 \cdot 483}{900} = 161$$

ve buradan  $\chi_0^2$  istatistiği

$$\chi_0^2 = \frac{(178 - 139)^2}{139} + \frac{(122 - 161)^2}{161} + \dots + \frac{(195 - 161)^2}{161} = 36,22$$

olur. Ki-Kare tablosundan  $\chi_{2;0,01}^2 = 9,21$ 'dir.  $36,22 > 9,22$  olduğu için  $H_0$  hipotezi  $\alpha = 0,01$ 'de reddedilebilir. Uykuya ayrılan sürenin yaştan bağımsız olduğu iddiasına karşı oldukça önemli istatistiksel kanıtlar söz konusudur.

**3)** Alkol alışkanlığına ilişkin bir araştırmada dört yüz erkek ve dört yüz kadından oluşan örnekleme ilişkin aşağıdaki veri elde edilmiştir. Alkol kullanımının her iki cinsiyet için de aynı olduğu iddiasını desteklenmeli midir?

|        | Kullanmıyor | Az<br>kullanıyor | Sık<br>kullanıyor | Toplam |
|--------|-------------|------------------|-------------------|--------|
| Kadın  | 175         | 163              | 62                | 400    |
| Erkek  | 162         | 158              | 80                | 400    |
| Toplam | 337         | 321              | 142               | 800    |

**Cözüm:**

Hipotezler

$H_0$ : Alkol kullanımı ile cinsiyet bağımsızdır: Alkol kullanımı açısından cinsiyetler arasında fark yoktur.

$H_a$ : Alkol kullanımı ile cinsiyet bağımlıdır: Alkol kullanımı cinsiyete göre farklılık gösterir.

olarak ifade edilebilir. Beklenen frekansların tahminleri

$$\hat{E}_{11} = \frac{400 \cdot 337}{800} = 168,5 \quad \hat{E}_{12} = \frac{400 \cdot 321}{800} = 160,5 \quad \hat{E}_{13} = \frac{400 \cdot 142}{800} = 71$$

$$\hat{E}_{21} = \frac{400 \cdot 337}{800} = 168,5 \quad \hat{E}_{22} = \frac{400 \cdot 321}{800} = 160,5 \quad \hat{E}_{23} = \frac{400 \cdot 142}{800} = 71$$

ve buradan  $\chi_0^2$  istatistiği

$$\chi_0^2 = \frac{(175 - 168,5)^2}{168,5} + \frac{(163 - 160,5)^2}{160,5} + \dots + \frac{(80 - 71)^2}{71} = 2,86$$

olur. Ki-Kare tablosundan  $\chi_{2;0,05}^2 = 5,99$ 'dur.  $2,86 < 5,99$  olduğu için  $H_0$  hipotezi  $\alpha = 0,05$ 'te reddedilemez. Alkol kullanımı açısından cinsiyetler arasında fark olmadığı iddiasını benimsemek durumundayız.

## Uygulama Soruları

1) Lokum üreten bir şirket piyasaya bir ay önce sürdükleri yeni ürünlerine ilişkin araştırmada üç büyük ilden 250, 200 ve 300 birimlik rastlantısal örneklemeler çekmiş ve aşağıdaki kontenjans tablosunu oluşturmuştur. Bu veriden elde edilen sonuçlar ürünün söz konusu üç ilde aynı oranda tutundurulduğuna ilişkin iddia aleyhine istatistiksel bir kanıt olarak kabul edilebilir mi?

|                 | Ürünün ismini duymayanlar | Duyup henüz denemeyenler | Bir kez satın alanlar | Toplam |
|-----------------|---------------------------|--------------------------|-----------------------|--------|
| <b>İstanbul</b> | 93                        | 74                       | 83                    | 250    |
| <b>Ankara</b>   | 88                        | 60                       | 52                    | 200    |
| <b>İzmir</b>    | 97                        | 65                       | 138                   | 300    |
| <b>Toplam</b>   | 278                       | 199                      | 273                   | 750    |

2) Çocuklarda davranışları düzenleyen faktörler üzerine yapılan klinik çalışmalar sonucunda üç kategori oluşturulmuştur: Çekingenler, normaller ve bağımsızlar. Çocuklara el becerisine dayalı bir iş verilmiş ve sıkıldıkları zaman bırakabilecekleri söylenmiştir. İş bırakacağını söyleyen her çocuğa psikolog "Bırakmak istediğine emin misin?" diye sorduğunda çocukların bazıları devam ederken, bazıları ise işi gerçekten bırakmak istediğini yinelemiştir. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki kontenjans tablosunda gösterilmiştir. Buna göre psikoloğun sorusuna verilen tepki açısından kategoriler arasında bir farklılık olup olmadığını  $\alpha = 0,05$  için test ediniz.

|                    | Devam edenler | Devam etmeyenler | Toplam |
|--------------------|---------------|------------------|--------|
| <b>Çekingenler</b> | 13            | 9                | 22     |
| <b>Normaller</b>   | 8             | 12               | 20     |
| <b>Bağımsızlar</b> | 3             | 16               | 19     |
| <b>Toplam</b>      | 24            | 37               | 61     |

3) TV izlemede cinsiyetin rolüne ilişkin yapılan bir araştırmada yüz erkek ve yüz kadına günlük TV izleme süreleri sorulmuş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir. TV izleme sürelerinin cinsiyetten bağımsız olduğu hipotezini test ettiğinizde hesapladığınız  $\chi^2_0$  test istatistiği aşağıdakilerden hangisidir?

|               | 2 saatten az | 2 - 4 saat arası | 4 saatten fazla | Toplam |
|---------------|--------------|------------------|-----------------|--------|
| <b>Erkek</b>  | 42           | 37               | 21              | 100    |
| <b>Kadın</b>  | 26           | 28               | 46              | 100    |
| <b>Toplam</b> | 68           | 65               | 67              | 200    |

4) Yakın çevrenizden 40 arkadaşınıza 4 siyasal partiden hangisine destek verdiğini sorun ve siyasal tercih ile cinsiyetin bağımsızlığını araştırın.

### **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Bu bölümde bir topluluktaki birimlere ait kategorik özelliklerin bağımsızlığının test edilmesi konusunu inceledik. Özelliklere ilişkin gözlemler için kontenjans tablosunu ve test istatistiği olarak Ki-Kare test istatistiğini kullandık.



## Bölüm Soruları

1) TV izleme alışkanlığının cinsiyet ile ilişkisini araştırmak amacıyla veri toplanmış ve aşağıdaki kontenjans tablosu oluşturulmuştur.

|        | 3 saatten az | 3 ya da daha fazla saat | Toplam |
|--------|--------------|-------------------------|--------|
| Kadın  | 18           | 10                      | 28     |
| Erkek  | 17           | 13                      | 30     |
| Toplam | 35           | 23                      | 58     |

Araştırmaya kaç kadın katılmıştır?

- a) 18
- b) 23
- c) 28
- d) 35

2) 3 ya da daha fazla saat TV izleyen kaç erkek vardır?

- a) 23
- b) 18
- c) 17
- d) 13

3) Araştırmaya katılan toplam kaç kişi 3 saatten az TV izlemektedir?

- a) 58
- b) 35
- c) 28
- d) 23

4) TV izleme alışkanlığının cinsiyetten bağımsızlığını  $\alpha = 0,05$  önem düzeyindeki testinin sonucu nedir?

- a)  $H_0$  :TV izleme alışkanlığı cinsiyetten bağımsızdır hipotezi reddedilir  
b)  $H_0$  :TV izleme alışkanlığı cinsiyetten bağımsızdır hipotezi reddedilmez.

5) Birinci sorudaki Ki-Kare test istatistiğinin değeri nedir?

- a)  $\chi_0^2 = 15,83$   
b)  $\chi_0^2 = 2,56$   
c)  $\chi_0^2 = 3,68$   
d)  $\chi_0^2 = 0,35$

6) Bir kamuoyu araştırma anketinde katılımcılara “Türkiye’nin enerji problemini nükleer santrallerle çözmelidir” önermesine ilişkin yargıları sorulmuştur. Katılımcılar üniversite mezunu olup olmamalarına göre de 2 gruba ayrılmışlar ve sonuçta aşağıdaki kontenjans tablosu oluşturulmuştur.

|                         | Katılıyorum | Katılmıyorum | Toplam |
|-------------------------|-------------|--------------|--------|
| Üniversite mezunu       | 21          | 14           | 35     |
| Üniversite mezunu değil | 39          | 11           | 50     |
| Toplam                  | 60          | 25           | 85     |

Araştırmaya kaç üniversite mezunu katılmıştır?

- a) 18  
b) 23  
c) 28  
d) 35

- 7) Önermeye katılan kaç üniversite mezunu vardır?
- a) 21
- b) 14
- c) 17
- d) 11
- 8) Araştırmaya katılan toplam kaç kişi önermeye olumlu bakmamaktadır?
- a) 38
- b) 35
- c) 25
- d) 21
- 9) TV izleme alışkanlığının cinsiyetten bağımsızlığını  $\alpha = 0,10$  önem düzeyindeki testinin sonucu nedir
- a)  $H_0$  :TV izleme alışkanlığı cinsiyetten bağımsızdır hipotezi reddedilir
- b)  $H_0$  :TV izleme alışkanlığı cinsiyetten bağımsızdır hipotezi reddedilmez.
- 10) Altıncı sorudaki Ki-Kare test istatistiğinin değeri nedir?
- a)  $\chi_0^2 = 11,10$
- b)  $\chi_0^2 = 4,56$
- c)  $\chi_0^2 = 3,21$
- d)  $\chi_0^2 = 1,35$

### Cevaplar

1) c, 2) d, 3)b , 4) b, 5) d, 6) d, 7) a, 8) c, 9) a, 10) c

## **10. BASİT DOĞRUSAL REGRESYON VE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ (E.K.K.Y.)**

### **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

Bu bölümün konusu olan regresyon analizinde temel amaç, aralarında deterministik ilişki olmayan değişkenlerden birinin diğerine olan bağımlılığının matematiksel biçimini ortaya çıkarmak ve bu biçimi analiz etmektir.

### **Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular**

**1)** Sir Francis Galton regresyon düşüncesini oluştururken babalar ve oğullarının boylarını veri olarak kullanmıştır. Siz de “oğlan dayıya kız halaya çeker” düşüncesini test etmek için bir veri tasarlayın.

### Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

| Konu                           | Kazanım                                                                                                                                                                    | Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği                                                    |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Regresyon konusu görülecektir. | İki değişken arasında neden-sonuç ilişkisi olduğunda bağımlı değişkeni bağımsız değişken yoluyla tahmin etme süreci olarak isimlendirilen regresyon konusu öğrenilecektir. | Metinler, çözümlü problemler, alıştırma ve aletler ile konuların daha kolay anlaşılması sağlanacaktır. |

### **Anahtar Kavramlar**

- Bağımlı değişken
- Bağımsız değişken
- Açıklayıcı değişken
- Serpilme diyagramı
- Doğrusal regresyon
- En küçük kareler yöntemi (E.K.K.Y.)



## Giriş

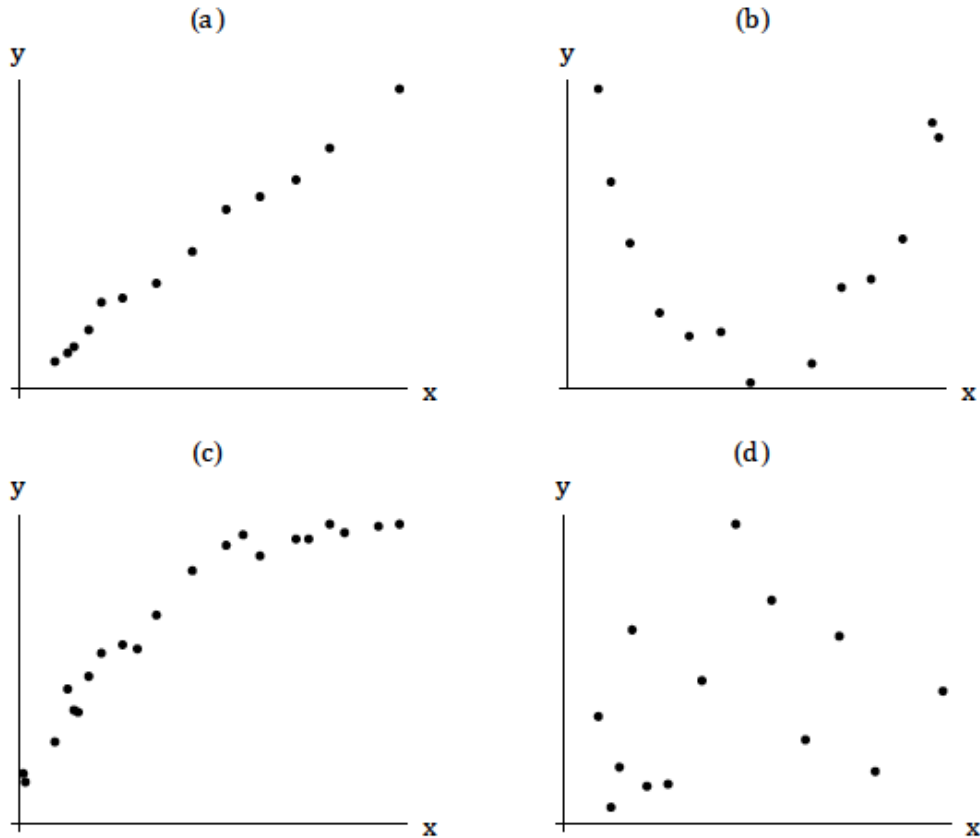
$y$  değişkeni  $x$  değişkeni tarafından deterministik bir ilişki ile açıklanıyorsa matematik anlamına uyması nedeniyle  $y$ ,  $x$ 'in bir ***fonksiyon***udur denir. Ancak istatistiksel bir ilişkide matematiksel anlamda bir fonksiyon oluşturmak olanaksız olduğu, değişkenlerin arasındaki ilişkinin matematiksel biçimi kesinliği değil bir yaklaşımı gösterdiği için  $y$ ,  $x$ 'in bir fonksiyonudur yerine,  $y$ ,  $x$  üzerine bir ***regresyon***dur denir. Öyleyse örneğin bir ürün için talep edilen miktar, fiyatın fonksiyonu değil, fiyat üzerine bir regresyon olacaktır. Burada  $y$  ***bağımlı değişken***,  $x$  ise ***bağımsız*** ya da ***açıklayıcı değişken*** olarak isimlendirilecektir.

## 10.1. Basit Doğrusal Regresyon

$y$ 'nin  $x$ 'e olan bağımlılığının matematiksel biçimini gösterecek olan regresyon eğrisini elde etmede ilk adım bu iki değişkene ilişkin gözlemler yapmaktır. Çeşitli  $x$  değerlerine karşılık,  $y$  değerlerinin saptandığını ve aşağıdaki gibi bir tablo ile gösterildiğini varsayalım:

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_n$ |
|-----|-------|-------|-------|
| $y$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_n$ |

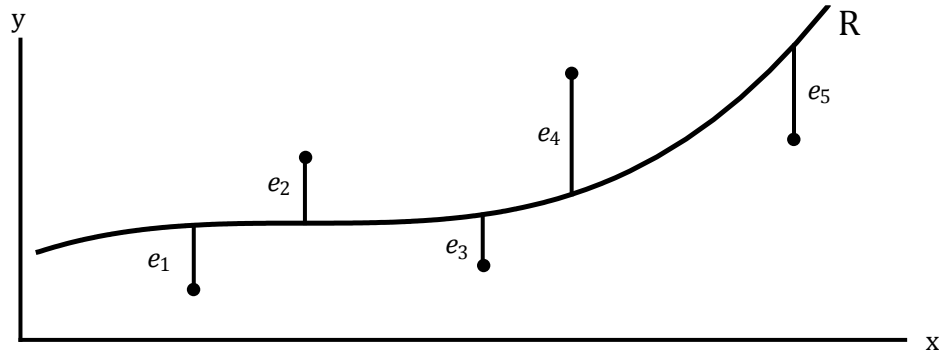
$(x_i, y_i)$  ikililerinin birer nokta ile temsil edildiği *serpilme diyagramı* adı verilen grafikler süreçteki ikinci adımdır. Özellikle, ilişkinin biçimine (birinci derece, ikinci derece, üstel, logaritmik vs.) ilişkin önsel bir tahminimiz yoksa bu grafikler yol gösterici olabilir. Şekil 10.1'de dört farklı serpilme diyagramı gösterilmiştir.



Şekil 10.1 Çeşitli serpilme diyagramları

Sezgisel olarak söylenebilir ki bu noktaları en iyi temsil edecek yaklaşım, nokta bulutunun ortasından geçecek olan eğridir. Öyleyse, regresyon eğrisinin (a)'daki serpilme diyagramı için birinci derece (doğrusal):  $y \approx \beta_0 + \beta_1 x$ , (b)'deki serpilme diyagramı için ikinci derece (parabol):  $y \approx \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ , (c)'deki serpilme diyagramı için üstel:  $y \approx \beta_0 x^{\beta_1}$  olduğu söylenebilir. (d)'deki serpilme diyagramı içinse bir yaklaşım eğrisinin oluşturulması olanaksız görünmektedir.

Regresyon eğrisinin biçimine karar verildikten sonra üçüncü adım bu fonksiyonu elde etmektir. Bu aşamada aradaki ilişkinin biçimi ne olursa olsun, analitik bir çözüm verecek ve en iyi yaklaşımı sağlayacak bir kritere ihtiyaç vardır. Şekil 10.2'deki serpilme diyagramını ele alalım. Regresyon eğrisi  $R$  ile gösterilsin:



**Şekil 10.2** Gözlem değerleri ve Regresyon eğrisine farklar

$y$  değerlerinin  $R$  eğrisine olan dikey mesafelerini gösteren tüm  $e_i = y_i - R$  değerlerinin deterministik durumda **sıfır** olacağı açıktır. Öyleyse,  $\sum e_i$ ,  $\sum |e_i|$  ya da  $\sum e_i^2$  toplamlarını **minimum** yapacak eğrinin ideal olacağını sezgisel olarak söyleyebiliriz. Ancak  $\sum e_i$  ve  $\sum |e_i|$  toplamaları her zaman tek ve analitik çözüm vermezlerken,  $\sum e_i^2$  toplamı matematiksel işlemlere elverişli olup, analitik bir çözüm elde etmek de olanaklıdır. Öyleyse gözlem değerleri ile arasındaki **farkların kareleri toplamını minimum** yapacak olan eğri regresyon eğrisi olarak seçilebilir. **En küçük kareler yöntemi** olarak adlandırılan ve bundan sonra kısaca E.K.K.Y. olarak isimlendirilecek olan bu basit matematiksel yaklaşımın sonuçları istatistiksel açıdan bazı koşullarda en iyi çözümü sağlar.

Şimdi en basit durumda yani regresyon eğrisinin birinci derece olduğu ve tek bağımsız değişken için E.K.K.Y.'nin sonuçlarını elde edelim ( $\beta_0$  ve  $\beta_1$ 'in özel değerleri  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$  olsun.) Buna göre

$$\sum y = \hat{\beta}_0 n + \hat{\beta}_1 \sum x \quad (10.1)$$

$$\sum xy = \hat{\beta}_0 \sum x + \hat{\beta}_1 \sum x^2 \quad (10.2)$$

olur. (10.1) ve (10.2) denklemleri birlikte bir denklem sistemi oluştururlar. **Normal denklemler** olarak adlandırılan bu denklem sistemi Cramer yöntemiyle çözümlerse  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum y & \sum x \\ \sum xy & \sum x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum y \sum x^2 - \sum x \sum xy}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad (10.3)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum y \\ \sum x & \sum xy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{vmatrix}} = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad (10.4)$$

olarak elde edilir. Öyleyse  $y \approx \beta_0 + \beta_1 x$  yaklaşımını sağlayacak

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \quad (10.5)$$

regresyon doğrusunu (10.3) ve (10.4) formülleri yardımıyla elde edebiliriz.

Bazı teorik ispatlarda ve hesaplamalarda kolaylık sağlaması açısından  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$ 'nin formülleri ortalamadan sapmalarla ifade edilirler. Bu formülleri elde edelim:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \Rightarrow \sum x = n\bar{x} \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{n} \Rightarrow \sum y = n\bar{y}$$

eşitlikleri (10.4)'de yerlerine konur ve düzenlenirse

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sum(x - \bar{x})^2} \quad (10.6)$$

elde edilir. Eşitlik (10.1)'in her iki tarafı  $n$  ile bölünürse

$$\bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\bar{x} \quad (10.7)$$

olur. Buradan

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x} \quad (10.8)$$

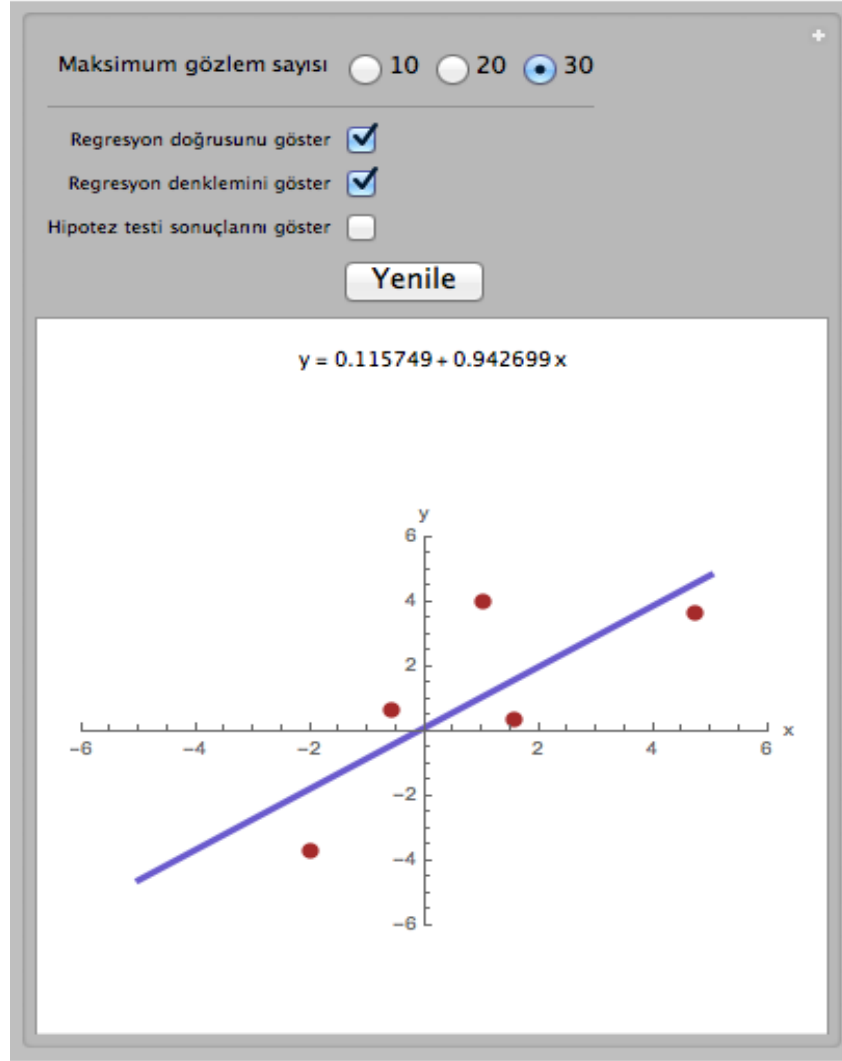
eşitliği elde edilir. Öyleyse  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$  'nın hesaplanmasında (10.1) ve (10.2)'ye alternatif olarak (10.6) ve (10.8) eşitlikleri kullanılabilir. Dolayısıyla regresyon doğrusu eşitlik (10.5)'e alternatif olarak

$$\hat{y} = \bar{y} + \hat{\beta}_1(x - \bar{x}) \quad (10.9)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

**Basit doğrusal regresyon apletinde** Alt+Sol Klik ile dilediğiniz gibi noktalar (gözlemler) oluşturup, bu noktalardan geçen regresyon doğrusunu oluşturabilirsiniz. Noktaları hareket ettirdiğinizde, regresyon doğrusunun da hareket ettiğini gözlemleyebilirsiniz.

### Basit doğrusal regresyon



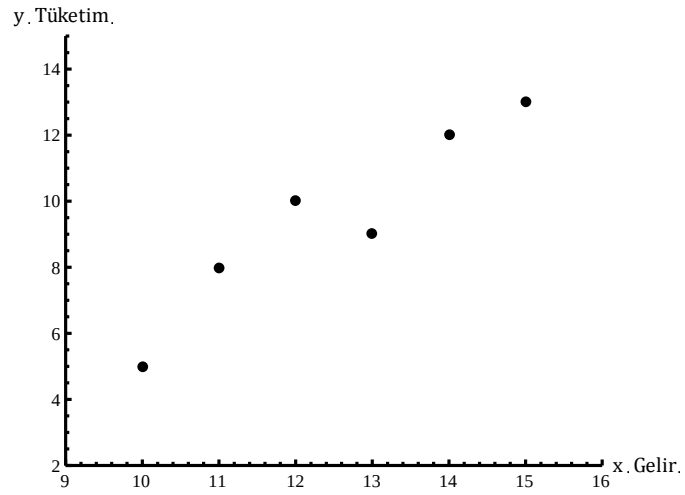
## Uygulamalar

1) Yıllık gelirleri 10, 11, 12, 13, 14, 15 bin dolar olan altı aileye tüketimleri sorulmuş ve aşağıdaki veri elde edilmiştir. Bu veriye dayanarak tüketimin ( $y$ ), gelir ( $x$ ) üzerine regresyon doğrusunu elde ediniz.

|                        |    |    |    |    |    |    |
|------------------------|----|----|----|----|----|----|
| $x$ : Gelir (1000\$)   | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| $y$ : Tüketim (1000\$) | 5  | 8  | 10 | 9  | 12 | 13 |

### Cözüm:

Verinin serpilme grafiğinden doğrusal bir yaklaşımın uygun olduğu görülmektedir.



| $x$ | $y$ | $xy$ | $x^2$ |
|-----|-----|------|-------|
| 10  | 5   | 50   | 100   |
| 11  | 8   | 88   | 121   |
| 12  | 10  | 120  | 144   |
| 13  | 9   | 117  | 169   |
| 14  | 12  | 168  | 196   |
| 15  | 13  | 195  | 225   |
| 75  | 57  | 738  | 955   |

$\sum x = 75$  ,  $\sum y = 57$  ,  $\sum xy = 738$  ,  $\sum x^2 = 955$  ve  $n = 6$  değerleri (10.3) ve (10.4) eşitliklerinde yerlerine konulursa

$$\hat{\beta}_0 = \frac{57(955) - 75(738)}{6(955) - 75^2} = -8,714 \quad \hat{\beta}_1 = \frac{6(738) - 75(57)}{6(955) - 75^2} = 1,457$$

elde edilir. Öyleyse bu veriden elde edilen tüketimin gelir üzerine regresyon doğrusu

$$\hat{y} = -8,714 + 1,457x$$

olur.

2) Uygulama 1'i (10.6) ve (10.8) eşitliklerini kullanarak yeniden çözünüz.

**Cözüm:**

Ortalamalar  $\bar{x} = \frac{75}{6} = 12,5$   $\bar{y} = \frac{57}{6} = 9,5$  olur.



| $x - \bar{x}$ | $y - \bar{y}$ | $(x - \bar{x})^2$ | $(x - \bar{x})(y - \bar{y})$ |
|---------------|---------------|-------------------|------------------------------|
| -2,5          | -4,5          | 6,25              | 11,25                        |
| -1,5          | -1,5          | 2,25              | 2,25                         |
| -0,5          | 0,5           | 0,25              | -0,25                        |
| 0,5           | -0,5          | 0,25              | -0,25                        |
| 1,5           | 2,5           | 2,25              | 3,75                         |
| 2,5           | 3,5           | 6,25              | 8,75                         |
|               |               | 17,50             | 25,50                        |

Eşitlik (10.6)'da değerler yerlerine konursa

$$\hat{\beta}_1 = \frac{25,50}{17,50} = 1,457$$

elde edilir. (10.8)'den ise

$$\hat{\beta}_0 = 9,5 - \frac{25,50}{17,50} \cdot 12,50 = -8,714$$

sonucu bulunur.

**3)**  $Y$  'nin  $x$  üzerine regresyonu  $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$  olarak varsayıldığına göre, aşağıdaki veriyi kullanarak şıkları yanıtlayınız.

| $x$ | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $y$ | 4,7 | 4,5 | 4,5 | 4,2 | 4,0 | 3,9 | 3,5 | 3,3 | 3,4 | 3,0 |

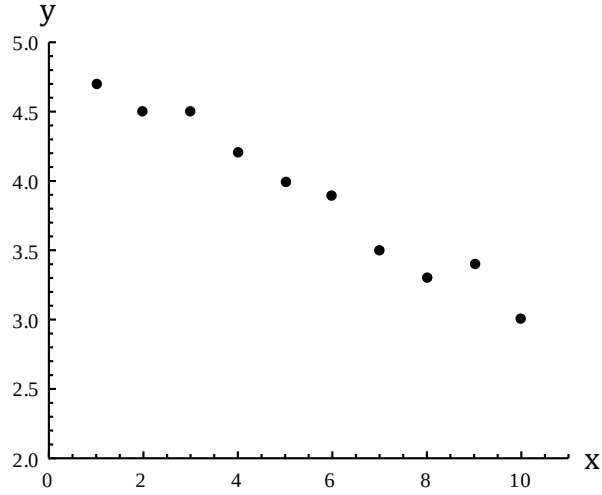
**a)** Verinin serpilme diyagramını çizerek varsayılan modelin uygunluğunu kontrol ediniz.

**b)**  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$ 'yi hesaplayınız.

**d)**  $\hat{y}$  değerlerini hesaplayınız

**Cözüm:**

a) Verinin serpilme diyagramına bakıldığında seçilen doğrusal modelin uygun olduğu görülmektedir.



b)  $n = 10$  ,  $\sum x = 55$  ,  $\sum y = 39$  ,  $\sum xy = 198,9$  ve  $\sum x^2 = 385$  değerleri (10.3) ve (10.4) denklemlerinde yerlerine konursa

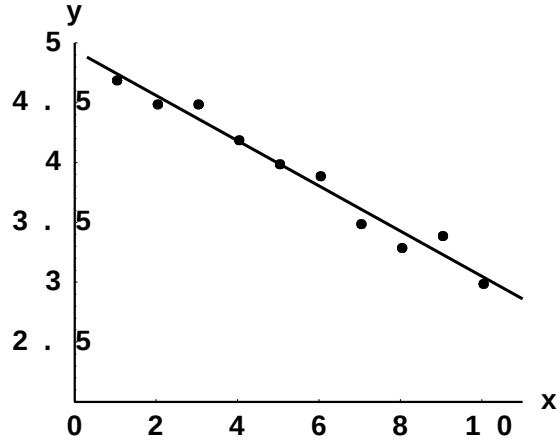
$$\hat{\beta}_0 = \frac{39 \cdot 385 - 55 \cdot 198,9}{10 \cdot 385 - 55^2} = 4,940 \quad \hat{\beta}_1 = \frac{10 \cdot 198,9 - 55 \cdot 39}{10 \cdot 385 - 55^2} = -0,189$$

elde edilir. Öyleyse tahmin denklemi

$$\hat{y} = 4,940 - 0,189x$$

olur.

c)



d)  $\hat{y} = 4,940 - 0,189x$  denkleminde  $x$  yerine  $x = 1, 2, \dots, 10$  değerleri yerine konulursa  $\hat{y}$  tahmin değerleri elde edilir.  $y$  ve  $\hat{y}$  değerlerinin birbirlerine oldukça yakın oldukları diğer bir deyişle regresyondan elde edilen tahminlerin başarılı görüldüğünü söyleyebiliriz. Bu başarının ya da diğer bir deyişle uyumun iyiliğinin ölçülerini ise bir sonraki bölümde göreceğiz.

| $x$       | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $y$       | 4,7 | 4,5 | 4,5 | 4,2 | 4,0 | 3,9 | 3,5 | 3,3 | 3,4 | 3,0 |
| $\hat{y}$ | 4,8 | 4,6 | 4,4 | 4,2 | 4,0 | 3,8 | 3,6 | 3,4 | 3,2 | 3,0 |

4) Aşağıdaki veri AMATEM'e tedavi olmak amacıyla başvuran kişilerin yıllara göre dağılımını göstermektedir.

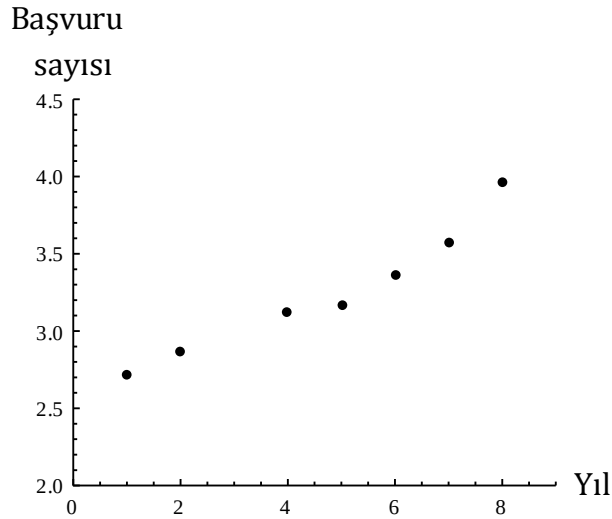
| Yıllar                   | 1981 | 1982 | 1984 | 1985 | 1986 | 1987 | 1988 |
|--------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| Başvurular<br>(bin kişi) | 2,71 | 2,86 | 3,12 | 3,17 | 3,36 | 3,58 | 3,96 |

a) Verinin serpilme diyagramını çiziniz.

b) Başvuru sayılarının, yıllar üzerine doğrusal regresyonunu tahmin ediniz.

**Cözüm:**

a) Serpilme diyagramına bakarak doğrusal bir modelin uygun olabileceğini söyleyebiliriz.



b) Hesaplamalarda kolaylık sağlamaı açısından yılların ilk üç rakamları atılabilir.

| $x$<br>(kodlanmış<br>yıllar) |                             |
|------------------------------|-----------------------------|
| $y$<br>(bin kişi)            | ,71 ,86 ,12 ,17 ,36 ,58 ,96 |

$n = 7$  ,  $\sum x = 33$  ,  $\sum y = 22,76$  ,  $\sum xy = 113,66$  ve  $\sum x^2 = 195$  değerleri (10.3) ve (10.4) denklemlerinde yerlerine konursa

$$\hat{\beta}_0 = \frac{22,76 \cdot 195 - 33 \cdot 113,66}{7 \cdot 195 - 33^2} = 2,491 , \quad \hat{\beta}_1 = \frac{7 \cdot 113,66 - 33 \cdot 22,76}{7 \cdot 195 - 33^2} = 0,161$$

değerleri elde edilir. Öyleyse tahmin denklemi

$$\hat{y} = 2,491 + 0,161x$$

olur.

## Uygulama Soruları

1) Aşağıdaki veri gelişmekte olan sekiz ülkedeki nüfus yoğunluğu ( $X$ ) ile ekonomik büyüme oranlarını ( $Y$ ) göstermektedir.

| Nüfus<br>Yoğunluğu<br>(kişi/km <sup>2</sup> )<br>$x$ | Kişi başına düşen<br>milli gelirdeki yıllık<br>% değişim<br>$y$ |
|------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| 35                                                   | 0,8                                                             |
| 117                                                  | 2,8                                                             |
| 62                                                   | 1,1                                                             |
| 58                                                   | 1,2                                                             |
| 22                                                   | 0,4                                                             |
| 135                                                  | 4,6                                                             |
| 90                                                   | 2,5                                                             |
| 43                                                   | 0,9                                                             |

$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$  regresyon denklemini tahmin ediniz.

2) Sekiz arkadaşınıza aylık tüketim ve gelirlerini sorunuz. Daha sonra bu veriyi kullanarak tüketimin gelir üzerine regresyon denklemini tahmin ediniz.

3) Sabun tozu üreten bir firma reklamın satışlar üzerine etkisini araştırmaktadır. Firma, önceki kayıtlarından aşağıdaki veriyi oluşturmuştur.

| Reklamdaki yüzde artış   | 0   | 1   | 5   | 6   | 8   | 10  | 18  | 20   | 23  |
|--------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|
| Satışlardaki yüzde artış | 1,6 | 4,2 | 3,4 | 5,6 | 6,2 | 5,8 | 8,9 | 10,2 | 9,8 |

(a) Verinin serpilme diyagramını çiziniz.

(b) Serpilme diyagramı reklamdaki yüzde artışlar ile satışlardaki yüzde artışlar arasında doğrusal bir ilişkiye işaret ediyor mu?

(c) Satışlardaki yüzde artışın, reklamdaki yüzde artış üzerine doğrusal regresyonunu tahmin ediniz.

### **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Bu bölümde bağımlı/bağımsız değişken kavramlarını, basit doğrusal regresyon, serpilme diyagramı ve en küçük kareler yöntemi konularını ele aldık.

## Bölüm Soruları

1) Bir firma satış elemanlarına 2 aylık bir eğitim uygulamış, eğitimin sonunda da bir sınav gerçekleştirmiştir. Elemanlarının haftalık satış miktarlarında aldıkları eğitimin rol oynayıp oynamadığını merak eden bir yönetici satış miktarlarının sınav notları üzerine  $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$  regresyonunu hesaplamak için aşağıdaki veriyi kullanmaya karar verir:

|                           |    |    |   |    |   |
|---------------------------|----|----|---|----|---|
| $x$<br>(Sınav notları)    | 6  | 8  | 4 | 9  | 5 |
| $y$<br>(Satış miktarları) | 12 | 15 | 6 | 20 | 6 |

$\hat{\beta}_0$  kaçtır?

- a) -6,21
- b) -4,73
- c) 1,45
- d) 5,44

2) Birinci sorudaki regresyon için  $\hat{\beta}_1$  kaçtır?

- a) -0,25
- b) 1,28
- c) 2,81
- d) 3,02

3) Birinci soruda sınavdan 7 alan bir elemanın satış miktarını tahmin ediniz.

- a) 11
- b) 14
- c) 16
- d) 21



4) Birinci soruda sınavdan 3 alan bir elemanın satış miktarını tahmin ediniz.

a) 1

b) 2

c) 4

d) 7

5) Birinci soruda sınavdan 10 alan bir elemanın satış miktarını tahmin ediniz.

a) 15

b) 18

c) 19

d) 22

6)  $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$  regresyonunu hesaplamak isteyen bir araştırmacı topladığı veriden şu değerleri hesaplamıştır:

$$n = 10, \sum x = 55, \sum y = 39, \sum xy = 198,9 \text{ ve } \sum x^2 = 385$$

$\hat{\beta}_0$  kaçtır?

a) 1,34

b) 2,28

c) 4,94

d) 5,72

7) Altıncı sorudaki regresyon için  $\hat{\beta}_1$  kaçtır?

a) -3,21

b) -0,19

c) 1,81

d) 3,14

**8)** Altıncı soruda  $x = 5$  için  $y$ 'yi tahmin ediniz.

**a)** 2,34

**b)** 3,16

**c)** 3,99

**d)** 5,08

**9)** Altıncı soruda  $x = 2$  için  $y$ 'yi tahmin ediniz.

**a)** 2,34

**b)** 4,56

**c)** 5,17

**d)** 6,08

**10)** Altıncı soruda  $x = 13$  için  $y$ 'yi tahmin ediniz.

**a)** 5,19

**b)** 3,56

**c)** 3,14

**d)** 2,47

### **Cevaplar**

1) a, 2) c, 3)b, 4) b, 5) z, 6) c, 7) b, 8) c, 9) b, 10) d

## **11. BASİT DOĞRUSAL REGRESYONA İLİŞKİN İSTATİSTİKSEL ANALİZLER**

### **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

Bu bölümde veriden elde edilen eğriden istatistiksel çıkarsama yapma olanağını sağlayacak teorik araçları öğreneceğiz. Kitle regresyon doğrusu ve parametrelerinin tahminlerini ele alacağız. Örneklem regresyon doğrusu, kalıntı kavramlarının yanı sıra basit doğrusal regresyon modelinin varsayımlarına yer verilecektir.

### **Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular**

- 1) İki değişken arasında neden-sonuç ilişkisini ters kurmanın maliyeti ne olabilir?
- 2) İnsanların tüketimleri neden farklıdır diye düşünürken aklınıza gelen en makul neden nedir?

### Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

| Konu                                                                       | Kazanım                                                                                                                                                                                                                        | Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Regresyon konusuna ilişkin tahmin ve hipotez testi süreçleri görülecektir. | İki değişken arasında neden-sonuç ilişkisi olduğunda bağımlı değişkeni bağımsız değişken yoluyla tahmin etme süreci olarak isimlendirilen regresyon başlığı altında yer alan istatistiksel çıkarsama süreçleri öğrenilecektir. | Metinler, çözümlü problemler, alıştırma ve aletler ile konuların daha kolay anlaşılması sağlanacaktır. |

### **Anahtar Kavramlar**

- Kitle regresyon doğrusu
- Teorik hata payı/disturbans
- En küçük kareler yöntemi (E.K.K.Y.)
- Kalıntı
- Model parametreleri
- Parametrelerin testleri

## **Giriş**

Bundan önceki bölümde, elimizdeki veriye uyacak regresyon eğrisini oluşturma sürecini tartıştık. Bu aşamada, veriden elde edilen eğriden istatistiksel çıkarsama yapma olanağını sağlayacak teorik araçları ele alacağız.



## 11.1. Doğrusal Regresyon Modeli

Regresyon analizinde bağımsız değişken genellikle araştırmacının belirlediği, kontrol edebildiği bir değişken olarak ele alınırken, bağımlı değişken bir rastlantı değişkeni olarak düşünülür.  $Y$  ile  $x$  arasındaki doğrusal ilişkinin matematiksel ifadesi

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x \quad (11.1)$$

olarak tanımlanmalıdır.  $Y$  rastlantı değişkeninin, ortalamasından farkı  $Y - E(Y) = \varepsilon$  ise  $Y$ 'nin alabileceği değerlerin varsayılan ilişkiden sapmalarını gösterecektir.  $Y$  bir rastlantı değişkeni olduğu için, **teorik hata payı** ya da **disturbans** olarak adlandırılan  $\varepsilon$  da bir rastlantı değişkeni olacaktır. Artık basit doğrusal regresyon modelini tanımlayabiliriz. Model

$$Y = E(Y) + \varepsilon \quad (11.2)$$

genel biçiminde  $E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x$  konularak

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \quad (11.3)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\beta_0$  ve  $\beta_1$  modelin bilinmeyen parametreleri olup,  $E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x$  doğrusu **gerçek** ya da **kitle regresyon doğrusu** olarak adlandırılır.

$Y$  ile  $x$  arasındaki gerçek ilişkiyi gösterdiği varsayılan  $\mu_Y = E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x$  doğrusu, bilinmeyen parametrelerin fonksiyonu olduğu için teorik bir doğrudur. Dolayısıyla (11.1) eşitliğinin pratikte tam olarak gerçekleşmesini beklemeyip  $E(Y) \approx \beta_0 + \beta_1 x$  yaklaşımının en iyi olarak gerçekleşmesini istemeliyiz. Yapılacak olan  $Y$  ve  $x$ 'e ilişkin belirli sayıda gözleme dayanarak parametrelerin, dolayısıyla gerçek regresyon doğrusunun tahmin edilmesidir.

$E(Y) \approx \beta_0 + \beta_1 x$  yaklaşımını matematiksel açıdan en iyi gerçekleyecek yöntemin E.K.K.Y. olduğunu geçen haftadan biliyoruz. E.K.K.Y. ile elde edilecek doğru denklemi

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \quad (11.4)$$

ile gösterebiliriz. Burada  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$ ,  $\beta_0$  ile  $\beta_1$ 'in E.K.K.Y. tahmincileri ve  $\hat{Y}$ ,  $Y$ 'nin tahmincisi olarak adlandırılır. Eşitlik (11.4) **örneklem regresyon doğrusu** olarak adlandırılır.

$\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$  tahmincileri, veriden veriye farklı sonuçlar alabilecekleri için  $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$  doğrusu gerçek (kitle) regresyon doğrusu gibi tek bir doğru olmayıp, birçok mümkün tahmin doğrusunun simgesi olarak düşünülmelidir.

Daha önceki bölümlerde "tahminci" ve "tahmin" kavramlarının ayırt edilmesinin önemini belirtmiş ve bu iki kavram için her zaman farklı notasyon kullanmıştık.  $\bar{X}$ ,  $\mu$ 'nün tahmincisi iken,  $\bar{x}$ ,  $\bar{X}$ 'nin bir veriden elde edilen sayısal değerini, yani  $\mu$ 'nün bir tahminini gösteriyordu.  $\bar{X}$  bir rastlantı değişkeni iken  $\bar{x}$  bu rastlantı değişkeninin gerçekleşen bir değerini simgeliyordu. Şüphesiz aynı ayrımlar regresyon için de yapılmalıdır.  $Y$  bir rastlantı değişkeni olduğuna göre  $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$  denklemi veriden veriye farklı değerler alabilir. Diğer bir deyişle denklemde yer alan  $Y$ 'nin tahmincisi  $\hat{Y}$  ve  $\beta_0$  ile  $\beta_1$ 'in tahmincileri  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$  da birer rastlantı değişkenidir. Bağımlı ve bağımsız değişkene ilişkin gözlemler yapıldıktan sonra ise bağımlı değişkene ilişkin gözlemler artık belirlenmiş sayılardan oluştuğu için " $Y$ " yerine " $y$ " kullanılacaktır. Dolayısıyla veriden elde edilen ve **tahmin edilen regresyon doğrusu** olarak isimlendirilen denklem

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \quad (11.5)$$

olarak gösterilecektir. Öyleyse (11.4) ve (11.5) de aynı notasyonla gösterilseler de,  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$  (11.4)'te  $\beta_0$  ile  $\beta_1$ 'in tahmincilerini, (11.5)'te ise veriden hesaplanan sayısal değerleri yani  $\beta_0$  ile  $\beta_1$ 'in nokta tahminlerini gösterecektir.

Belirli bir veriye ilişkin  $y$  değerleri ile bu veriden elde edilen  $\hat{y}$  değerleri arasındaki farklar ise

$$y - \hat{y} = y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x = e \quad (11.6)$$

**kalıntılar** olarak adlandırılır.

Kalıntılar ( $e$ ) ile daha önce söz edilen disturbanslar ( $\varepsilon = Y - E(Y) = Y - \beta_0 + \beta_1 x$ ) karıştırılmamalıdır. Kalıntılar veriden elde edilecek yani gözlenebilen hatalardır. Disturbanslar ise modelde rastlantı değişkeni olarak varsayılan ve gözlenemeyen teorik hatalardır.

$Y$  'lerin rastlantısal değişken,  $x$  'lerin ise değerlerini bizim belirleyeceğimiz bir değişken olarak varsayılmasının yanı sıra, basit doğrusal regresyon modelinin tanımını tamamlamak için aşağıdaki üç varsayıma ihtiyaç vardır:

1.  $Y$  rastlantı değişkenlerinin dağılımları ve varyansları ( $\sigma^2$ ) her  $x$  değeri için aynıdır. Diğer bir deyişle her  $x$  değeri için  $Y$ 'ler özdeşdir.
2.  $Y$  rastlantı değişkenlerinin dağılımlarının ortalaması, gerçek regresyon doğrusu  $E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x$ 'in üzerindedir.
3.  $Y$  rastlantı değişkenleri bağımsızdır.

Aslında bu üç varsayım tek bir cümlede ifade edilebilir:  $Y$ 'ler her  $x$  değeri için ortalaması  $\beta_0 + \beta_1 x$ , varyansı  $\sigma^2$  olan özdeş ve bağımsız rastlantı değişkenleridir.

Birbirlerinin lineer kombinasyonu olan  $Y$  ile  $\varepsilon$ 'nın dağılımları ve varyansları aynı olup yalnızca beklenen değerleri farklıdır. (11.3) eşitliğinin her iki tarafının beklenen değeri alınarak

$$E(Y) = E(\beta_0 + \beta_1 x) + E(\varepsilon)$$

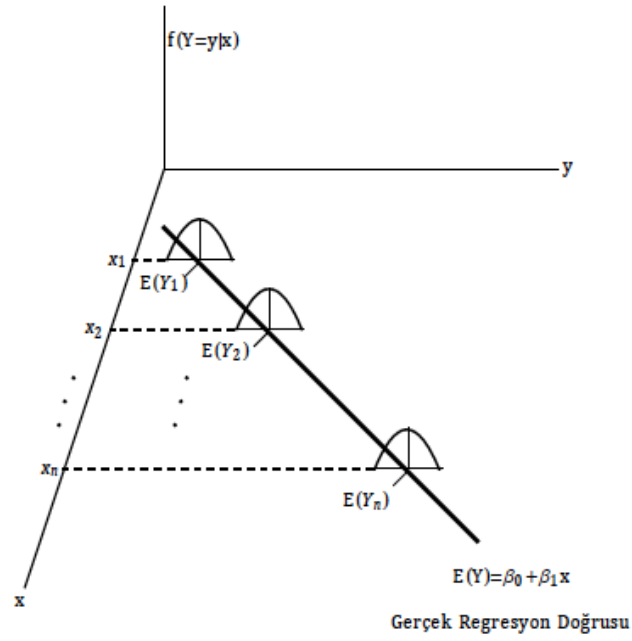
ve (11.5) eşitliğinden

$$E(\varepsilon) = E(Y) - E(Y)$$

$$E(\varepsilon) = 0$$

sonucu elde edilir. Öyleyse modelin varsayımları,  $Y$ 'ler yerine istenirse  $\varepsilon$ 'lar üzerine de açıklanabilir. Kısaca söylenirse;  $\varepsilon$ 'lar her  $x$  değeri için ortalaması sıfır, varyansı  $\sigma^2$  olan özdeş ve bağımsız rastlantı değişkenleridir.

Şekil 11.1'de görüldüğü gibi her  $Y$ 'nin dağılımı aynı (özdeş) olup, varyansı  $\sigma^2$  olan bu dağılımların ortalamaları gerçek regresyon doğrusu  $E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x$ 'in üzerindedir.



**Şekil 11.1** Doğrusal Regresyon Modeli

## 11.2 Model Parametreleri için Güven Aralıkları ve Hipotez Testleri

Daha önce belirtildiği gibi, E.K.K.Y. tahmincileri  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$  'nın alacağı değerler örneklemden örnekleme değişebileceğine göre her ikisi de tıpkı bağımlı değişken  $Y$  ya da teorik hata terimi  $\varepsilon$  gibi birer rastlantı değişkeni olarak düşünülmelidir. Bu rastlantı değişkenlerinin ortalama ve varyansı ise

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0 \quad , \quad Var(\hat{\beta}_0) = \frac{\sum x^2}{n \sum (x - \bar{x})^2} \sigma^2 \quad (11.7)$$

ve

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 \quad , \quad Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum (x - \bar{x})^2} \quad (11.8)$$

olarak tanımlanır. Burada  $\sigma^2$  ,  $Y$  'nin varyansını göstermektedir.  $Var(\hat{\beta}_0)$  ve  $Var(\hat{\beta}_1)$  'nin karekökleri ise  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$  'nin standart sapmalarını gösterir ve  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$  'nin

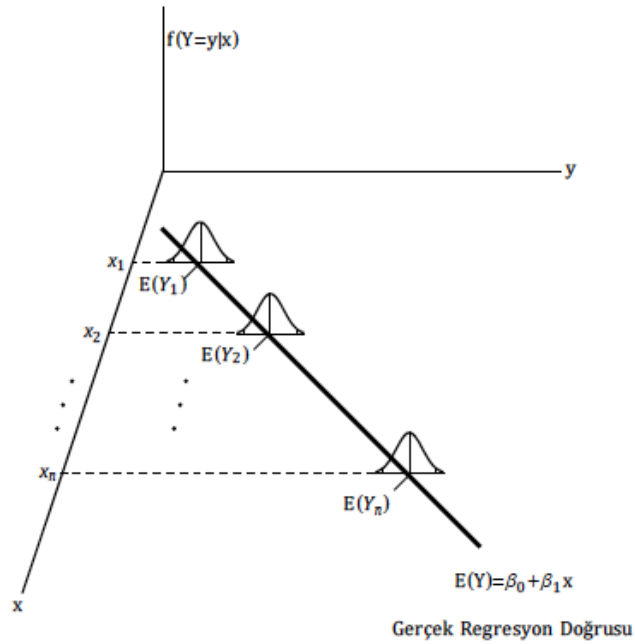
standart hataları olarak da adlandırılırlar.  $E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$  ve  $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$  olduğu için  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$ 'nin yansız birer tahminci olduğu anlaşılmaktadır.

Gauss-Markov teoremine göre, E.K.K.Y. tahmincileri ayrıca diğer tüm doğrusal ve yansız tahminciler arasında minimum varyansa sahip olma özelliği de taşırlar. Kısım 6.9'dan hatırlanacağı gibi, bir tahmincinin yansız olmasının yanı sıra, varyansının küçük olması da tahminciyi güvenilir yapan bir özelliktir. Yine bu kısımda belirtildiği gibi yansız bir tahmincinin varyansı minimum ise bu tahminci ilgili parametrenin en etkin tahmincisi olarak nitelendirilir. Öyleyse  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$ ,  $\beta_0$  ve  $\beta_1$ 'in en etkin tahmincileridir.

Gauss-Markov teoremi farkların karesinin minimum yapılması gibi salt matematiksel bir esasa dayanan E.K.K.Y.'nin istatistiksel açıdan da uygunluğunun onaylanması olarak yorumlanabilir. Ancak regresyon modelinin varsayımlarının sağlanmaması durumunda Gauss-Markov teoreminin her zaman geçerli olmayacağını da belirtmek gerekir.

$\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$ 'ya dayanarak  $\beta_0$  ve  $\beta_1$ 'e ilişkin güven aralıkları ve hipotez testleri ya da genel olarak ifade edersek istatistiksel çıkarsama yapabilmemiz için her iki tahmincinin örnekleme dağılımının bilinmesine ihtiyaç vardır. Bu aşamada modelde daha önce yapılan varsayımlara ek olarak,  $Y$  rastlantı değişkeninin normal dağıldığı varsayımı yapılmalıdır. Bu varsayımla birlikte klasik doğrusal regresyon modelinin varsayımları tamamlanmış olur. Şekil 11.2 son varsayımla birlikte modeli yansıtmaktadır.

$\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$ ,  $Y$ 'nin doğrusal kombinasyonu oldukları için,  $Y$ 'nin normal dağılması durumunda ispatlanabilir ki,  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$  da normal dağılır. Bu sonuç da bize  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$ 'ya dayanarak istatistiksel çıkarsama yapma olanağı sunar. Son varsayımın yapılma nedeni kısaca budur.



**Şekil 11.2** Doğrusal Regresyon Modeli:  $Y_i$ 'lerin dağılımı normal

$\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$  normal dağılıyorsa biliyoruz ki

$$z = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sigma_{\hat{\beta}_0}} \quad \text{ve} \quad z = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} \quad (11.9)$$

rastlantı değişkenleri standart normal dağılır. Dolayısıyla bu rastlantı değişkenlerinin hangi aralığa, ne kadar olasılıkla düşeceklerini hesaplayabiliriz. Diğer bir deyişle  $\beta_0$  ve  $\beta_1$  için güven aralıkları oluşturabiliriz. Ancak formüllerinden anlaşılacağı gibi  $\sigma_{\hat{\beta}_0}$  ve  $\sigma_{\hat{\beta}_1}$ 'yi hesaplayabilmemiz için  $\sigma^2$ 'nin bilinmesi gerekeceğinden ve genellikle de bu olanaksız olduğundan,  $\sigma^2$  yerine örneklemde elde edilecek  $S^2$  kullanılır.  $\sigma^2$ 'nin yansız tahmincisi olan  $S^2$  ise

$$S^2 = \frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n - 2} \quad (11.10)$$

olarak tanımlanır.  $S^2$ 'nin pozitif karekökü  $S$  ise **tahminin standart hatası** olarak adlandırılır.  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$ 'nin örneklemde elde edilecek standart sapmaları ya da diğer adıyla  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$ 'nin tahmin edilen standart hataları (9.19) ve (9.20) eşitliklerinde  $\sigma$  yerine  $S$  konularak ve karekök alınarak elde edilir:

$$S_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n \sum (x - \bar{x})^2}} S \quad (11.11)$$

ve

$$S_{\hat{\beta}_1} = \frac{S}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2}} \quad (11.12)$$

Öyleyse varyansın bilinmediği durumda ve  $Y$ 'nin normal dağıldığı varsayımı altında (9.21) eşitliğinde tanımlanan  $z$  yerine  $t$  istatistiklerine başvurabiliriz.

$$t = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{S_{\hat{\beta}_0}} \quad \text{ve} \quad t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{S_{\hat{\beta}_1}} \quad (11.13)$$

Her iki istatistik de  $(n - 2)$  serbestlik derecesiyle  $t$  dağılır. Artık model parametreleri  $\beta_0$  ve  $\beta_1$  için güven aralıkları ve hipotez testlerinin formülasyonlarını gerçekleştirebiliriz.

### 11.2.1 Güven Aralıkları

#### **$\beta_0$ için güven aralığı:**

Eşitlik (11.13)'te verilen  $t = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{S_{\hat{\beta}_0}}$  istatistiğinin  $(n - 2)$  serbestlik dereceli  $t$  dağıldığını biliyoruz. Dolayısıyla

$$P \left[ -t_{n-2;\alpha/2} < \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{S_{\hat{\beta}_0}} < t_{n-2;\alpha/2} \right] = 1 - \alpha$$

eşitliğini yazabiliriz. Eşitlik düzenlenirse

$$P[\hat{\beta}_0 - t_{n-2;\alpha/2} S_{\hat{\beta}_0} \leq \beta_0 \leq \hat{\beta}_0 + t_{n-2;\alpha/2} S_{\hat{\beta}_0}] = 1 - \alpha \quad (11.14)$$

elde edilir. Öyleyse  **$\beta_0$  için %100(1 -  $\alpha$ ) güven aralığı**

$$\hat{\beta}_0 - t_{n-2;\alpha/2} S_{\hat{\beta}_0} \leq \beta_0 \leq \hat{\beta}_0 + t_{n-2;\alpha/2} S_{\hat{\beta}_0} \quad (11.15)$$

olacaktır. Eşitlik (11.15), yani  $\beta_0$  için %100(1 -  $\alpha$ ) güven aralığı eşdeğer olarak

$$\beta_0 = \hat{\beta}_0 \pm t_{n-2;\alpha/2} S_{\hat{\beta}_0} \quad (11.16)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

**$\beta_1$  için güven aralığı:**

$\beta_1$  için güven aralığı oluşturulurken başvurulacak test istatistiği  $t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{S_{\hat{\beta}_1}}$  olacaktır.

Bu istatistik de  $(n - 2)$  serbestlik dereceli  $t$  dağıldığına göre  $\beta_0$  için gerçekleştirilen süreç izlenerek  **$\beta_1$  için %100(1 -  $\alpha$ ) güven aralığı**

$$\hat{\beta}_1 - t_{n-2; \alpha/2} S_{\hat{\beta}_1} \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1 + t_{n-2; \frac{\alpha}{2}} S_{\hat{\beta}_1} \quad (11.17)$$

olarak elde edilir. Aralık

$$\beta_1 = \hat{\beta}_1 \pm t_{n-2; \alpha/2} S_{\hat{\beta}_1} \quad (11.18)$$

biçiminde de ifade edilebilir.

### 11.2.2 Hipotez Testleri

**$\beta_0$  için hipotez testleri:**

Elimizde bir parametreye ilişkin güven aralığı varken, hipotez testi yapabileceğimizi önceki bölümlerde görmüştük. Basitçe ifade edersek güven aralığı kabul edilebilir tüm  $H_0$ 'ları simgelediği için, test edilen değer güven aralığının dışındaysa  $H_0$  reddedilir, aksi durumda kabul edilir. Öyleyse

$$H_0: \beta_0 = \beta'_0$$

$$H_a: \beta_0 \neq \beta'_0$$

hipotezlerinin testinde  $\beta'_0$  değeri,  $\beta_0$  için oluşturulan %100(1 -  $\alpha$ ) güven aralığının dışındaysa,  $H_0$  hipotezi  $\alpha$  önem düzeyinde reddedilebilir. Aksi durumda ise  $H_0$  kabul edilir. Örneğin  $\beta_0$  için %95 güven aralığı  $[-17,436, 0,008]$  olarak elde edilmiş olsun. Örneğin



$$H_0: \beta_0 = 0$$

$$H_a: \beta_0 \neq 0$$

hipotezlerinin testinde, "0" değeri güven aralığının içine düştüğü için  $\alpha = 0,05$ 'te  $H_0$  reddedilemez.

Ancak genellikle hipotez testi süreci güven aralığından bağımsız olarak gerçekleştirildiği için, test sürecini kısaca tartışalım.

$$H_0: \beta_0 = \beta'_0$$

$$H_a: \beta_0 \neq \beta'_0$$

hipotezlerinin testi ile ilgileniyorsak, başvuracağımız test istatistiği  $t_0 = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta'_0}{s_{\hat{\beta}_0}}$  olacaktır. Çünkü  $H_0$  hipotezi doğru ise, yani  $\beta_0 = \beta'_0$  ise,  $t_0$  istatistiği  $(n - 2)$  serbestlik dereceli  $t$  dağılacaktır. Dolayısıyla, örneklemden gelen bilgilerle  $t_0$  hesaplanır ve  $|t_0| > t_{\alpha/2; n-2}$  bulunursa  $H_0$  reddedilebilir. Aksi durumda ise  $H_0$  kabul edilir.

Uygulamada genellikle  $H_a$  çift taraflı oluşturulursa da bu ilgilenilen duruma göre değişir. Aşağıdaki tablo  $\beta_0$  için hipotez testi sürecini göstermektedir.

| <b>Test İstatistiği</b>                                                                 |                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| $t_0 = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta'_0}{S_{\hat{\beta}_0}}$                              |                                                                                   |
| <b>Hipotezler</b>                                                                       | <b>Karar Kuralı</b>                                                               |
| 1) $H_0: \beta_0 = \beta'_0$<br>$H_a: \beta_0 \neq \beta'_0$                            | $t_0 > t_{n-2;\alpha/2}$ ya da $t_0 < -t_{n-2;\alpha/2}$<br>ise $H_0$ reddedilir. |
| 2) $H_0: \beta_0 = \beta'_0$ ya da $\beta_0 \geq \beta'_0$<br>$H_a: \beta_0 < \beta'_0$ | $t_0 < -t_{n-2;\alpha}$ ise $H_0$ reddedilir.                                     |
| 3) $H_0: \beta_0 = \beta'_0$ ya da $\beta_0 \leq \beta'_0$<br>$H_a: \beta_0 > \beta'_0$ | $t_0 > t_{n-2;\alpha}$ ise $H_0$ reddedilir.                                      |

**Tablo 11.1:  $\beta_0$  için hipotez testi süreci**

**$\beta_1$  için hipotez testleri:**

Şüphesiz  $\beta_1$  parametresi bağımsız değişkene ait olduğu için  $\beta_0$ 'a göre daha fazla önem taşır.  $\beta_1$ 'e ilişkin hipotez testleri çift taraflı olarak

$$H_0: \beta_1 = \beta'_1$$

$$H_a: \beta_1 \neq \beta'_1$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\beta'_1$ ,  $\beta_1$ 'in alabileceği herhangi bir özel değeri göstermektedir.  $H_a$ 'nın çift ya da tek taraflı olması yine ilgilenilen duruma göre değişir. Örneğin tüketimin gelire bağılılığının pozitif yönde olduğu açıktır. Bu yüzden  $\beta_1$ 'in tahmininin kaç olacağını örnekleme çekmeden önce bilmesek de, en azından negatif çıkmasını beklemeyiz. Dolayısıyla  $H_0: \beta_1 = 0$  hipotezine karşı alternatif hipotezin  $H_a: \beta_1 \neq 0$  yerine  $H_a: \beta_1 > 0$  olarak kurulması daha mantıklıdır.

Uygulamada genellikle  $\beta'_1$  'nün sıfır değerini alıp almamasıyla yani  $H_0: \beta_1 = 0$  hipoteziyle ilgilenilir. Çünkü bu hipotezin reddedilmemesi,  $x$ 'in katsayısının "0" olduğunun

kabul edilmesi diğer bir deyişle regresyon denkleminde  $x$ 'e ihtiyaç duyulmadığının kabul edilmesi anlamını taşıyacaktır. Ancak şunu belirtmekte yarar var; alternatif hipotez tek ya da çift taraflı olsun,  $H_0 : \beta_1 = 0$  hipotezinin kabul edilmesi,  $Y$  ile  $x$  arasında bir ilişkinin olmadığı anlamına gelmeyebilir. Böyle bir sonuç yalnızca  $Y$  'nin  $x$  üzerine doğrusal regresyonunun anlamlı olmadığı anlamına gelir. Başka bir fonksiyonel ilişkide örneğin 2. derece bir polinomda  $Y$  ile  $x$  arasında bir ilişki mümkün olabilir.

$\beta_1$ 'in hipotez testi sürecinde başvurulacak istatistik  $t_0 = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta'_1}{S_{\hat{\beta}_1}}$ 'dir. Çünkü  $H_0 : \beta_1 = \beta'_1$  hipotezi doğru ise  $t_0$  rastlantı değişkeninin  $(n - 2)$  serbestlik dereceli  $t$  dağıldığını biliyoruz. Böylelikle örneklemden gelen bilgilerle  $t_0$  istatistiği hesaplanır ve alternatif hipoteze bağlı olarak  $H_0$ 'ın reddine ya da kabulüne karar verilir.

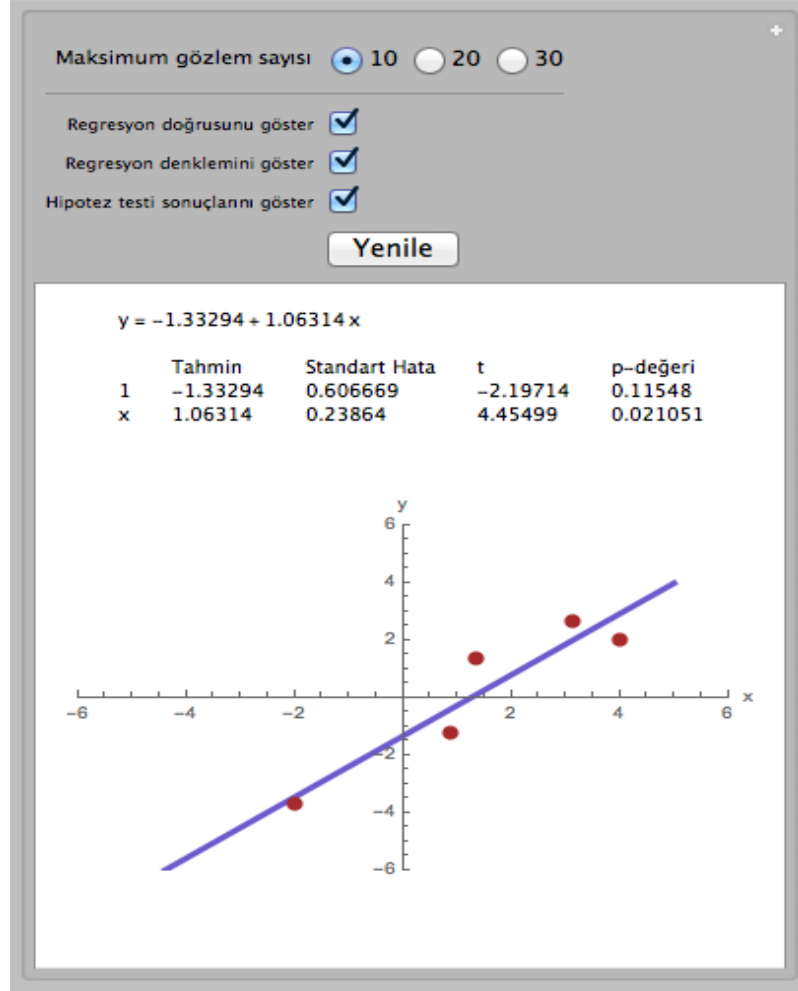
Tablo 11.2 bu süreci özetlemektedir. Açıkthat ki  $\beta'_1 = 0$  olduğunda  $t_0 = \frac{\hat{\beta}_1}{S_{\hat{\beta}_1}}$  olur. Daha sonra yapacağımız analizler açısından bu sonuca dikkat edilmelidir.

| <b>Test İstatistiği</b>                                                                                                |                                                                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $t_0 = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta'_1}{S_{\hat{\beta}_1}}$                                                             |                                                                                     |
| <b>Hipotezler</b>                                                                                                      | <b>Karar Kuralı</b>                                                                 |
| <b>1) <math>H_0 : \beta_1 = \beta'_1</math></b><br>$H_a : \beta_1 \neq \beta'_1$                                       | $t_0 > t_{n-2; \alpha/2}$ ya da $t_0 < -t_{n-2; \alpha/2}$<br>ise $H_0$ reddedilir. |
| <b>2) <math>H_0 : \beta_1 = \beta'_1</math> ya da <math>\beta_1 \geq \beta'_1</math></b><br>$H_a : \beta_1 < \beta'_1$ | $t_0 < -t_{n-2; \alpha}$ ise $H_0$ reddedilir.                                      |
| <b>3) <math>H_0 : \beta_1 = \beta'_1</math> ya da <math>\beta_1 \leq \beta'_1</math></b><br>$H_a : \beta_1 > \beta'_1$ | $t_0 > t_{n-2; \alpha}$ ise $H_0$ reddedilir.                                       |

**Tablo 11.2:  $\beta_1$ 'e ilişkin hipotez testi süreci**

**Basit doğrusal regresyon** apletinde Alt+ Sol Klik ile noktalar oluşturup, bu noktalardan geçecek regresyon doğrusunu belirleyebilir ayrıca parametrelere ilişkin hipotez testlerini gerçekleştirebilirsiniz. Ayrıca noktaları fare ile hareket ettirerek regresyon doğrusunun ve bağlı olarak istatistiklerin değişimini gözlemleyebilirsiniz.

#### Basit doğrusal regresyon



## Uygulamalar

1) Yıllık gelirleri 10, 11, 12, 13, 14, 15 bin dolar olan altı aileye tüketimleri sorulmuş ve aşağıdaki veri elde edilmiştir

|                        |    |    |    |    |    |    |
|------------------------|----|----|----|----|----|----|
| $x$ : Gelir (1000\$)   | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| $y$ : Tüketim (1000\$) | 5  | 8  | 10 | 9  | 12 | 13 |

Bu veriden

$$\hat{y} = -8,714 + 1,457x$$

tahmin denklemi bulunmuştur. Bu veriye dayanarak  $\beta_0$  ve  $\beta_1$  için %95 güven aralıklarını oluşturunuz.

### Cözüm:

Tahmin denklemi

$$\hat{y} = -8,714 + 1,457x$$

olarak elde edilmişti.

| $x$ | $y$ | $\hat{y}$ | $(y - \hat{y})^2$ |
|-----|-----|-----------|-------------------|
| 10  | 5   | 5,857     | 0,734             |
| 11  | 8   | 7,314     | 0,471             |
| 12  | 10  | 8,771     | 1,510             |
| 13  | 9   | 10,229    | 1,510             |
| 14  | 12  | 11,686    | 0,099             |
| 15  | 13  | 13,143    | 0,020             |
| 75  | 57  | 57        | 4,344             |

(11.10) eşitliğinden tahminin standart hatası

$$s^2 = \frac{4,344}{4} = 1,086 \Rightarrow s = 1,042$$

olarak bulunur.

**$\beta_0$  için güven aralığı**

(11.11) eşitliğinden

$$s_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{\frac{955}{6 \cdot 17,5}} \cdot 1,042 = 3,142$$

olur.  $\hat{\beta}_0 = -8,714$  ,  $s = 1,042$  ,  $s_{\hat{\beta}_0} = 3,142$  ,  $t_{4;0,025} = 2,776$  değerlerini (11.15) eşitliğinde yerlerine koyarsak

$$-8,714 - 2,776 \cdot 3,142 \leq \beta_0 \leq -8,714 + 2,776 \cdot 3,142$$

$$-17,436 \leq \beta_0 \leq 0,008$$

olarak elde edilir.

**$\beta_1$  için güven aralığı**

(11.12) eşitliğinden  $\hat{\beta}_1$ 'nin standart hatası

$$s_{\hat{\beta}_1} = \frac{1,042}{\sqrt{17,5}} = 0,249$$

olur.  $\hat{\beta}_1 = 1,457$  ,  $s_{\hat{\beta}_1} = 0,249$  ,  $t_{4;0,025} = 2,776$  değerlerini (11.16) eşitliğinde yerlerine koyarsak

$$1,457 - 2,776 \cdot 0,249 \leq \beta_1 \leq 1,457 + 2,776 \cdot 0,249$$

$$0,766 \leq \beta_1 \leq 2,148$$

elde edilir. Bu aralıkları elde ederken  $Y$  rastlantı değişkeninin normal dağıldığını varsaydığımız unutulmamalıdır.

2)  $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$  regresyon denklemini tahmin etmek amacıyla aşağıdaki verinin elde edildiğini varsayalım.  $H_0: \beta_1 = 0$  ,  $H_a: \beta_1 \neq 0$  hipotez testini  $\alpha = 0,05$  için gerçekleştirip, yorumlayınız.

|     |      |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|------|
| $x$ | 0,15 | 0,25 | 0,43 | 0,62 | 0,81 | 0,95 |
| $y$ | 1,08 | 1,81 | 2,58 | 2,31 | 1,54 | 0,45 |

### **Cözüm:**

$\sum x = 3,210$  ,  $\sum y = 9,770$  ,  $\sum xy = 4,831$  ,  $\sum x^2 = 2,213$  ve  $n = 6$  değerleri (10.3) ve (10.4) eşitliklerinde yerlerine konulursa

$$\hat{\beta}_0 = \frac{9,770 \cdot 2,213 - 3,210 \cdot 4,831}{6 \cdot 2,213 - 3,210^2} = 2,056 \quad \hat{\beta}_1 = \frac{6 \cdot 4,831 - 3,210 \cdot 9,770}{6 \cdot 2,213 - 3,210^2} = -0,799$$

elde edilir. Öyleyse tahmin edilen regresyon doğrusu

$$\hat{y} = 2,056 - 0,799x$$

olur. (11.10) eşitliğinden tahminin standart hatası

$$s^2 = \frac{2,7842}{4} = 0,6961 \Rightarrow s = 0,8343$$

olarak bulunur. (11.12) eşitliğinden  $\hat{\beta}_1$ 'nin standart hatası ise

$$s_{\hat{\beta}_1} = \frac{0,8343}{\sqrt{0,4957}} = 1,185$$

olur. Hipotezlerimiz

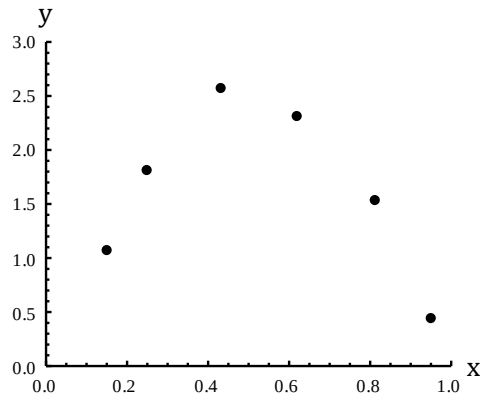
$$H_0: \beta_1 = 0$$

$$H_a: \beta_1 \neq 0$$

olduğuna göre test istatistiği

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_1}{s_{\hat{\beta}_1}} = \frac{-0,799}{1,185} = -0,674$$

olarak hesaplanır.  $-0,674 > -2,776$  olduğundan  $H_0$  hipotezi,  $\alpha = 0,05$  'te kabul edilir. Daha önce belirtildiği gibi  $H_0: \beta_1 = 0$  hipotezinin kabul edilmesi her zaman  $Y$ 'nin  $x$ 'e bağlı olmadığı anlamına gelmeyebilir. Çıkarılması gereken sonuç yalnızca  $Y$  ile  $x$  arasında doğrusal ilişkinin olmadığıdır. Gerçekten de aşağıdaki serpilme diyagramına bakıldığında  $Y$  ile  $x$  arasında doğrusal bir ilişkinin olmadığı, ancak ikinci derece bir regresyon denkleminin olanaklı olduğu görülmektedir.





## Uygulama Soruları

1) Aşağıdaki veri gelişmekte olan sekiz ülkedeki nüfus yoğunluğu ( $X$ ) ile ekonomik büyüme oranlarını ( $Y$ ) göstermektedir.

| Nüfus<br>Yoğunluğu<br>(kişi/km <sup>2</sup> )<br>$x$ | Kişi başına düşen<br>milli gelirdeki yıllık<br>% değişim<br>$y$ |
|------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| 35                                                   | 0,8                                                             |
| 117                                                  | 2,8                                                             |
| 62                                                   | 1,1                                                             |
| 58                                                   | 1,2                                                             |
| 22                                                   | 0,4                                                             |
| 135                                                  | 4,6                                                             |
| 90                                                   | 2,5                                                             |
| 43                                                   | 0,9                                                             |

$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$  regresyon denklemini tahmin edip ardından  $\beta_0$  ve  $\beta_1$  için %95 güven aralıklarını oluşturunuz.

2) Sekiz arkadaşınıza aylık tüketim ve gelirlerini sorunuz. Daha sonra bu veriyi kullanarak tüketimin gelir üzerine regresyon denklemini tahmin ediniz. Daha sonra elde ettiğiniz regresyon denklemindeki parametrelerin istatistik açıdan anlamlı olup olmadığını test ediniz.

3) Sabun tozu üreten bir firma reklamın satışlar üzerine etkisini araştırmaktadır. Firma, önceki kayıtlarından aşağıdaki veriyi oluşturmuştur.

| Reklamdaki yüzde artış   | 0   | 1   | 5   | 6   | 8   | 10  | 18  | 20   | 23  |
|--------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|
| Satışlardaki yüzde artış | 1,6 | 4,2 | 3,4 | 5,6 | 6,2 | 5,8 | 8,9 | 10,2 | 9,8 |

Satışlardaki yüzde artışın, reklamdaki yüzde artış üzerine doğrusal regresyonunu elde ettikten sonra parametrelerin istatistik açıdan anlamlı olup olmadığını test ediniz.

### **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Bu bölümde veriden elde edilen eğriden istatistiksel çıkarsama yapma olanağını sağlayacak teorik araçları ele aldık. Bu araçları basit (tek bağımsız değişkenli) ve doğrusal durum için inceledik.

## Bölüm Soruları

1) Bir firma satış elemanlarına 2 aylık bir eğitim uygulamış, eğitimin sonunda da bir sınav gerçekleştirmiştir. Elemanlarının haftalık satış miktarlarında aldıkları eğitimin rol oynayıp oynamadığını merak eden bir yönetici satış miktarlarının sınav notları üzerine  $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$  regresyonunu  $\hat{y} = -6,21 + 2,81x$  olarak hesaplamıştır.

|                           |    |    |   |    |   |
|---------------------------|----|----|---|----|---|
| $x$<br>(Sınav notları)    | 6  | 8  | 4 | 9  | 5 |
| $y$<br>(Satış miktarları) | 12 | 15 | 6 | 20 | 6 |

$s_{\hat{\beta}_0}$  kaçtır?

- a) 1,21
- b) 2,72
- c) 3,45
- d) 3,44

2) Birinci sorudaki regresyonda  $s_{\hat{\beta}_1}$  kaçtır?

- a) 0,15
- b) 0,41
- c) 1,23
- d) 2,92

3) Birinci sorudaki regresyonda  $\beta_0$  için %95 güven aralığı nedir?

- a)  $-14,9 \leq \beta_0 \leq 2,45$
- b)  $-2,56 \leq \beta_0 \leq 4,47$
- c)  $1,23 \leq \beta_0 \leq 8,75$
- d)  $4,35 \leq \beta_0 \leq 12,75$

4) Birinci sorudaki regresyonda  $\beta_1$  için %95 güven aralığı nedir?

a)  $-2,9 \leq \beta_1 \leq -0,45$

b)  $-1,56 \leq \beta_1 \leq 2,47$

c)  $1,51 \leq \beta_1 \leq 4,11$

d)  $2,35 \leq \beta_1 \leq 5,75$

5) Birinci sorudaki regresyonda  $H_0: \beta_0 = 0$  ,  $H_a: \beta_0 \neq 0$  hipotez testinde  $t_0$  test istatistiğinin değeri nedir?

a)  $t_0 = -4,56$

b)  $t_0 = -2,28$

c)  $t_0 = 1,24$

d)  $t_0 = 3,44$

6) Birinci sorudaki regresyonda  $H_0: \beta_0 = 0$  ,  $H_a: \beta_0 \neq 0$  hipotez testinin sonucu nedir?

a) Reddedilir

b) Reddedilmez

7) Birinci sorudaki regresyonda  $H_0: \beta_1 = 0$  ,  $H_a: \beta_1 \neq 0$  hipotez testinde  $t_0$  test istatistiğinin değeri nedir?

a)  $t_0 = 4,56$

b)  $t_0 = 5,28$

c)  $t_0 = 6,89$

d)  $t_0 = 7,71$

8) Birinci sorudaki regresyonda  $H_0: \beta_1 = 0$  ,  $H_a: \beta_1 \neq 0$  hipotez testinin sonucu nedir?

a) Reddedilir

b) Reddedilmez

**9)** Birinci sorudaki regresyonda  $H_0: \beta_0 = 0$  ,  $H_a: \beta_0 \neq 0$  hipotez testinin p-değeri kaçtır?

- a) 0,78
- b) 0,65
- c) 0,11
- d) 0,05

**10)** Birinci sorudaki regresyonda  $H_0: \beta_1 = 0$  ,  $H_a: \beta_1 \neq 0$  hipotez testinin p-değeri kaçtır?

- a) 0,01
- b) 0,05
- c) 0,12
- d) 0,19

### **Cevaplar**

1) b, 2) b, 3) a, 4) c, 5) a , 6) b, 7) c, 8) a, 9) c, 10) a

## **12. ÇOKLU REGRESYON VE BİLGİSAYAR PROGRAMLARIYLA HESAPLAMA**

### **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

Önceki bölümlerde basit doğrusal regresyon ve buna ilişkin istatistiksel analizleri görmüştük. Bu bölümde ise, bağımlı değişkenin birden çok bağımsız değişken tarafından açıklandığı çoklu regresyon süreci ile bunu elde etmek için kullanılan bilgisayar programları ve bu programların çıktılarının nasıl yorumlanacağı ele alınacaktır.

### **Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular**

1) Daha önce gitmediğiniz bir şehre arabanızla giderken nasıl bir harita tercih edersiniz, yalnızca otoyolları gösteren bir harita mı yoksa yol üzerindeki tüm otelleri, lokantaları vs gösteren ayrıntılı bir harita mı? Bu soruyu çoklu regresyon bağlamında düşününüz, bağımsız değişken sayısının az olması mı iyidir çok olması mı?

2) İstanbul'da yıllık kola tüketimiyle, her yıl işlenen cinayet sayısına bakıldığında her ikisinde de artış olduğu görülmektedir. Bu durumda cinayetlerin önlenmesi için kola tüketimini yasaklamak sizce iyi bir fikir olabilir mi?



### **Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri**

| <b>Konu</b>                                                                                                            | <b>Kazanım</b>                                                                                        | <b>Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği</b>                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| İstatistiksel analiz için temel kavram, test istatistikleri ve karar kurallarının ne olduğu konularına değinilecektir. | İstatistiksel analizde kullanılacak olan hesaplamalarda için formül, işlem ve testler öğrenilecektir. | Metinler, çözümlü problemler, alıştırma ve aletler ile konuların daha kolay anlaşılması sağlanacaktır. |

### **Anahtar Kavramlar**

- Çoklu regresyon
- Kısmi regresyon katsayısı
- Hata terimi

## **Giriş**

Birçok durumda bağımlı değişken tek bağımsız değişken tarafından önemli ölçüde açıklanabilir ve başarılı tahminler yapılabilir. Ancak özellikle sosyal olgularda, bağımlı değişkeni tek bağımsız değişkenle açıklamak gerçekçi olmaz ve birden fazla bağımsız değişkenin yer aldığı bir modele başvurulur.

## 12.1. Çoklu Regresyon

İki ya da daha fazla bağımsız değişkenin yer aldığı ve **çoklu regresyon** ismini alan regresyon modeli genel biçimiyle

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon \quad (12.1)$$

olarak ifade edilir. Burada  $Y$  bağımlı değişkeni,  $x_1, x_2, \dots, x_k$  bağımsız değişkenleri,  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$  model parametrelerini diğer adıyla **kısmi regresyon katsayılarını** ve  $\varepsilon$  ise hata terimini göstermektedir. Tek bağımsız değişkenli regresyon modelinde yapılan tüm varsayımlar bu model için de geçerli olacaktır.

Amaç yine E.K.K.Y. ile model parametrelerinin tahminlerini ve dolayısıyla

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \quad (12.2)$$

tahmin denklemini elde edip parametrelere ve gerçek regresyon denklemine ilişkin istatistiksel çıkarsamalar yapmaktır.  $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k$  denkleminde, örneğin  $\hat{\beta}_2$  katsayısı şöyle yorumlanabilir:  $x_2$  dışındaki tüm bağımsız değişkenler sabit tutulursa,  $x_2$ 'deki bir birim artışın,  $Y$ 'de ortalama  $\hat{\beta}_2$  birimlik bir artışa yol açmasını bekleriz.

Regresyon denkleminde yer alan parametrelerin herhangi bir  $\beta_i$  parametresine ilişkin çift taraflı bir hipotez testi

$$H_0: \beta_i = \beta'_i$$

$$H_a: \beta_i \neq \beta'_i$$

genel biçimiyle ifade edilir ve test istatistiği olarak  $t_0 = \frac{\hat{\beta}_i - \beta'_i}{s_{\hat{\beta}_i}}$  kullanılır.

Parametrelere ilişkin hipotez testlerine daha çok o parametreye ilişkin bağımsız değişkenlerin  $Y$ 'deki değişimi açıklamaya önemli bir katkısı olup olmadığını ölçmek için başvurulduğundan  $\beta'_i = 0$  alınır.

$H_0: \beta_i = 0$  ( $Y'$  nin  $x_i'$  ye bağımlılığı yoktur. )

$H_a: \beta_i \neq 0$  ( $Y'$  nin  $x_i'$  ye bağımlılığı vardır. )

Test süreci Tablo 12.1’de özetlenmiştir:

| <b>Test İstatistiği</b>                                                                 |                                                                                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| $t_0 = \frac{\hat{\beta}_i - \beta'_i}{s_{\hat{\beta}_i}}$                              |                                                                                         |
| <b>Hipotezler</b>                                                                       | <b>Karar Kuralı</b>                                                                     |
| 1) $H_0: \beta_i = \beta'_i$<br>$H_a: \beta_i \neq \beta'_i$                            | $t_0 > t_{n-k-1; \alpha/2}$ ya da<br>$t_0 < -t_{n-k-1; \alpha/2}$ ise $H_0$ reddedilir. |
| 2) $H_0: \beta_i = \beta'_i$ ya da $\beta_i \geq \beta'_i$<br>$H_a: \beta_i < \beta'_i$ | $t_0 < -t_{n-k-1; \alpha}$ ise $H_0$ reddedilir.                                        |
| 3) $H_0: \beta_i = \beta'_i$ ya da $\beta_i \leq \beta'_i$<br>$H_a: \beta_i > \beta'_i$ | $t_0 > t_{n-k-1; \alpha}$ ise $H_0$ reddedilir.                                         |

**Tablo 12.1: Çoklu regresyonda  $\beta_i$  parametresine ilişkin hipotez testi süreci**

## 12.2. Bilgisayar Programlarıyla Regresyon

Şüphesiz değişken sayısı arttıkça çoklu regresyonda elle yapılacak hesaplamalar gittikçe güçleşecektir. Bu anlamda çoklu regresyon problemlerinin çözümünde bir bilgisayar programına başvurmak kaçınılmaz olacaktır. Bilgisayar programlarıyla tahmin denkleminin elde edilmesi, parametreler için güven aralıkları ve hipotez testlerinin yapılması gibi tüm regresyon süreçlerini gerçekleştirebiliriz. Günümüzde SPSS, Minitab, R yada Mathematica gibi pek çok istatistik ve matematik paket programları ile yalnızca regresyon değil hemen tüm istatistik süreçleri bilgisayar ortamında gerçekleştirebiliriz.

## Uygulamalar

1) Elde edilecek tahıl miktarının ( $Y$ ) kullanılan gübre miktarına ( $x_1$ ) ve o bölgeye düşen yağış miktarına ( $x_2$ ) bağlı olduğu bilinir.  $Y$ 'nin  $x_1$  ve  $x_2$ 'ye olan bağıllığının matematiksel ifadesi olarak  $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$  denklemi öngörüldüğüne göre aşağıdaki veriyi kullanarak  $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2$  tahmin denklemini ve denkleme ilişkin parametrelerin hipotez testi süreçlerini bir bilgisayara programı ile gerçekleştirip, sonuçları yorumlayınız.

| $y$<br>( $ton/m^2$ ) | $x_1$<br>( $kg/m^2$ ) | $x_2$<br>( $cm$ ) |
|----------------------|-----------------------|-------------------|
| 65                   | 2                     | 23                |
| 70                   | 3                     | 26                |
| 72                   | 4                     | 27                |
| 80                   | 5                     | 31                |
| 88                   | 6                     | 38                |
| 86                   | 7                     | 37                |
| 90                   | 9                     | 38                |
| 98                   | 11                    | 40                |

### Cözüm:

Söz konusu verinin SPSS programından elde edilen regresyon çıktısı aşağıdaki gibidir:

| Coefficients <sup>a</sup> |            |                             |            |       |      |
|---------------------------|------------|-----------------------------|------------|-------|------|
| Model                     |            | Unstandardized Coefficients |            | t     | Sig. |
|                           |            | B                           | Std. Error |       |      |
| 1                         | (Constant) | 37,715                      | 4,632      | 8,142 | ,000 |
|                           | x1         | 1,476                       | ,463       | 3,191 | ,024 |
|                           | x2         | 1,069                       | ,214       | 4,983 | ,004 |

a. Dependent Variable: y

Tablodaki Unstandardized Coefficients sütunundaki B değerleri parametre tahminlerini göstermektedir. Dolayısıyla tahmin denklemimizi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\hat{y} = 37,715 + 1,476x_1 + 1,069x_2$$

olur.

Parametre tahminlerini (B sütunundaki değerleri) parametrelerin standart hatalarına (Std. Error değerleri) böldüğümüzde t değerlerini elde ederiz. Bu değerler yardımıyla da  $H_0: \beta_i = 0$  hipotezlerini test edebiliriz. Bu testlerin p-değerleri ise Sig. Sütununda verilmiştir. Aslında tek bakmamız gereken bu değerlerin 0,05 değerinden küçük olup olmadıklarıdır. Eğer küçükse ilgili  $H_0$  hipotezi reddedilecek büyük ya da eşitse reddedilmeyecektir.

Bu soruda test edilecek 3 parametre vardır:  $\beta_0, \beta_1$  ve  $\beta_2$ .  $H_0: \beta_0 = 0$  hipotezine ilişkin p-değeri tabloda 0,000 olarak görülmektedir. 0,05'ten küçük bir değer olduğuna göre  $H_0: \beta_0 = 0$  hipotezi reddedilebilir. Yani modeldeki  $\beta_0$  parametresi anlamlıdır. Benzer şekilde 0,024 değeri 0,05'den küçük bir değer olduğuna göre  $H_0: \beta_1 = 0$  hipotezi ve yine 0,004 değeri 0,05'den küçük bir değer olduğuna göre  $H_0: \beta_2 = 0$  hipotezi reddedilebilir. Öyleyse  $\beta_1$  ve  $\beta_2$  parametreleri de anlamlıdır. Kısaca modelde yer alan tüm parametreler dolayısıyla değişkenler anlamlıdır.

**2)** Bir önceki bölümde çözdüğümüz bir problemi hatırlayalım.  $Y = \beta_0 + \beta_1x + \varepsilon$  regresyon denklemini tahmin etmek amacıyla aşağıdaki veri elde edilmişti.

|          |      |      |      |      |      |      |
|----------|------|------|------|------|------|------|
| <b>x</b> | 0,15 | 0,25 | 0,43 | 0,62 | 0,81 | 0,95 |
| <b>y</b> | 1,08 | 1,81 | 2,58 | 2,31 | 1,54 | 0,45 |

Buradan tahmin edilen regresyon doğrusu

$$\hat{y} = 2,056 - 0,799x$$

olarak bulunmuştu. Daha sonra  $H_0: \beta_1 = 0$  hipotezini test etmek için

$$s^2 = \frac{2,7842}{4} = 0,6961 \Rightarrow s = 0,8343$$

ve  $\hat{\beta}_1$ 'nin standart hatası ise

$$s_{\hat{\beta}_1} = \frac{0,8343}{\sqrt{0,4957}} = 1,185$$

olarak hesaplanmış, buradan t istatistiğinin değeri

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_1}{s_{\hat{\beta}_1}} = \frac{-0,799}{1,185} = -0,674$$

olarak bulunmuş.  $-0,674 > -2,776$  olduğundan  $H_0$  hipotezi,  $\alpha = 0,05$ 'te reddedilememiştir. Şimdi aynı sonuçları SPSS çıktısı üzerinden tartışalım. t istatistiğinin değeri tabloda gerçekten de  $-0,674$  olarak görülmektedir. Karşılık gelen p-değeri ise 0,537 olup, 0,05'ten büyüktür. Dolayısıyla  $H_0: \beta_1 = 0$  hipotezi reddedilemez, diğer bir deyişle modeldeki  $\beta_1$  parametresi dolayısıyla  $X$  değişkeni kurulan modelde anlamlı değildir.

**Coefficients<sup>a</sup>**

| Model        | Unstandardized Coefficients |            | t     | Sig. |
|--------------|-----------------------------|------------|-------|------|
|              | B                           | Std. Error |       |      |
| 1 (Constant) | 2,056                       | ,720       | 2,856 | ,046 |
| x            | -,799                       | 1,185      | -,674 | ,537 |

a. Dependent Variable: y

3) Aşağıdaki SPSS çıktısı  $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \varepsilon$  modeline ilişkin tahminleri göstermektedir. Sadece p -değerlerine bakarak modelde hangi değişkenlerin anlamlı olduğunu belirtiniz.



**Coefficients**

|   |            | Unstandardized Coefficients |            | t      | Sig. |
|---|------------|-----------------------------|------------|--------|------|
|   |            | B                           | Std. Error |        |      |
| 1 | (Constant) | -12.716                     | 8.241      | -1.543 | .161 |
|   | X1         | 3.056                       | .814       | 3.752  | .006 |
|   | X2         | .730                        | .539       | 1.353  | .213 |
|   | X3         | .483                        | .179       | 2.701  | .027 |
|   | X4         | -2.89E-02                   | .060       | -.479  | .645 |

**Cözüm:**

$p$ -değerleri (Sig.)  $H_0: \beta_i = 0$  hipotezinin reddedilmesi ile yapılacak en küçük hatayı verdiği göre  $p$ -değeri küçük olan testlere ilişkin katsayıların anlamlı olduğu söylenebilir.  $p$ -değerlerine bakıldığında yalnızca  $x_1$  ve  $x_3$ 'e ait  $p$ -değerlerinin 0,05'ten küçük olduğu görülmektedir. Bu sonuca dayanarak modelde  $x_1$  ve  $x_3$  'ün anlamlı görüldüğünü söyleyebiliriz.

### **Uygulama Soruları**

**1)** TUIK'in internet sitesi hanehalkı istatistiklerinden tüketicinin gelir ve tasarruf üzerine regresyonuna ilişkin veriler oluşturup bir bilgisayar programında çözünüz ve sonuçları yorumlayınız.

### **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Bu bölümde çoklu regresyon ve SPSS çıktılarının yorumlanması ele alındı.

## Bölüm Soruları

Y'nin  $x_1$  ,  $x_2$  ve  $x_3$  üzerine regresyonu  $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$  'a ilişkin belirli bir veriden elde edilen sonuçlar aşağıdaki SPSS çıktısında verilmiştir. Bu bölüm sorularını bu çıktı üzerinden yanıtlayınız.

| Model |            | Unstandardized Coefficients |            | t      | Sig. |
|-------|------------|-----------------------------|------------|--------|------|
|       |            | B                           | Std. Error |        |      |
| 1     | (Constant) | 7,952                       | 8,098      | ,982   | ,346 |
|       | X1         | 2,398                       | ,155       | 15,433 | ,000 |
|       | X2         | -,065                       | ,057       | -1,126 | ,282 |
|       | X3         | ,335                        | ,111       | 3,033  | ,010 |

1)  $\hat{\beta}_0$  kaçtır?

a) 7,952

b) 8,098

c) 0,335

d) 0,010

2)  $\hat{\beta}_1$  kaçtır?

a) 7,952

b) 8,098

c) 2,398

d) 0,982

3)  $\hat{\beta}_2$  kaçtır?

a) 0,057

b) -0,065

c) 0,155

d) 3,033

4)  $\hat{\beta}_3$  kaçtır?

a) -1,126

b) -0,065

c) 0,335

d) 0,010

5)  $s_{\hat{\beta}_1}$  kaçtır?

a) 0,155

b) 0,982

c) 0,335

d) 0,282

6)  $s_{\hat{\beta}_3}$  kaçtır?

a) 0,111

b) 0,982

c) 0,335

d) 0,282

- 7)  $H_0: \beta_1 = 0$  ,  $H_a: \beta_1 \neq 0$  hipotez testinin p-değeri kaçtır?
- a) 0,000
- b) 0,050
- c) 0,282
- d) 0,010
- 8)  $H_0: \beta_2 = 0$  ,  $H_a: \beta_2 \neq 0$  hipotez testinin p-değeri kaçtır?
- a) 0,000
- b) 0,050
- c) 0,282
- d) 0,010
- 9)  $H_0: \beta_1 = 0$  ,  $H_a: \beta_1 \neq 0$  hipotez testinin sonucu nedir?
- a) Reddedilir
- b) Reddedilmez
- 10)  $H_0: \beta_2 = 0$  ,  $H_a: \beta_2 \neq 0$  hipotez testinin sonucu nedir?
- a) Reddedilir
- b) Reddedilmez

### Cevaplar

1) a, 2) c, 3)b, 4) c, 5) a , 6) a, 7) a, 8) c, 9) a, 10) b

### **13. BASİT VE KİSMİ KORELASYON**

### **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

Geçen bölümde regresyon analizinde değişkenler arasındaki ilişkinin matematiksel ifadesini tahmin etmeyi ve analizini görmüştük. Bu bölümde ise değişkenler arasındaki ilişkinin yönünü ve derecesini gösteren bir sayının yani **korelasyon**un tahmini ve analizi ile ilgileneceğiz. Korelasyon analizi regresyon analizinde olduğu gibi bir neden-sonuç ilişkisi üzerine kurulu olmayıp amaç yalnızca değişkenler arasındaki ilişkileri ortaya çıkarmaktır.



### **Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular**

1) Memur maaşlarına yapılan yıllık zamlar ile yıllık içki satışları arasında bulunabilecek pozitif ve yüksek bir korelasyon, memurların maaşlarına yapılan zamları içkiye harcadıkları şeklinde yorumlanabilir mi? Açıklamanız ne olurdu?

2) Tıp ve teknolojideki gelişmeler sonucunda ortalama insan ömrünün her geçen yıl arttığını istatistikler göstermektedir. Öte yandan fillerin sayısında da her geçen yıl azalma olduğu saptanmıştır. Bu iki değişkenin korelasyonu hesaplanırsa negatif ve yine muhtemelen yüksek bir korelasyon bulunabilir. Bu yüksek korelasyonu bir nedensel ilişkiye bağlayıp, örneğin filleri öldürmenin ortalama insan ömrünü uzatacağını söyleyebilir miyiz. Açıklamanız ne olurdu?

### Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

| Konu                                                      | Kazanım                                                                                                                              | Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği                                                    |
|-----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Korelasyon ve kısmi korelasyon kavramları tanıtılacaktır. | Değişkenlerde ilişkinin yönünü ve gücünü ölçen basit korelasyon ve kısmi korelasyonları hesaplama ve yorumlama süreçleri öğrenilecek | Metinler, çözümlü problemler, alıştırma ve aletler ile konuların daha kolay anlaşılması sağlanacaktır. |

### **Anahtar Kavramlar**

- Korelasyon
- Kovaryans
- Korelasyon katsayısı
- Örneklem kovaryansı
- Örneklem korelasyon katsayısı

## Giriş

Bu bölümde değişkenler arasındaki ilişkinin yönünü ve derecesini gösteren bir sayının yani ***korelasyon***un tahmini ve analizi ile ilgileneceğiz.

### 13.1. Doğrusal Korelasyon

$X$  ve  $Y$  rastlantı değişkenleri arasındaki doğrusal ilişkinin yönüne ilişkin başvurulabilecek en basit sayısal ölçü **kovaryanstır**.  $\mu_X$ ,  $X$ 'in,  $\mu_Y$  ise  $Y$ 'nin ortalamasını göstermek üzere  $X$  ve  $Y$ 'nin kovaryansı

$$Kov(X, Y) = \sigma_{XY} = E [(X - \mu_X) (Y - \mu_Y)]$$

olarak tanımlanır. Tanımdan anlaşılacağı gibi  $X$  ve  $Y$  arasında pozitif doğrusal bir ilişki varsa, yani  $X$ 'in değerleri artarken  $Y$  de artıyorsa ya da  $X$ 'in değerleri azalırken  $Y$  de azalıyorsa kovaryans pozitif olur. Buna karşın değişkenlerden biri artarken diğeri azalıyorsa kovaryansın negatif olması beklenir.  $X$  ve  $Y$  arasında doğrusal bir ilişki yoksa bu durumda da kovaryans sıfıra yakın olacaktır. Öyleyse kovaryansın işaretine bakıp  $X$  ve  $Y$  arasındaki ilişkinin yönü hakkında bilgi sahibi olabiliriz.

Ancak formülünden de anlaşılacağı gibi kovaryans  $X$  ve  $Y$ 'ye ilişkin ölçü birimlerine (kg, cm, vs.) bağlı olduğu için, hesaplanan sayının mutlak değerine bakıp, ilişkinin gücü hakkında yorum yapmak doğru olmayabilir. Bu anlamda hem ilişkinin yönünü hem de gücünü gösteren ölçü birimlerinden bağımsız, standart bir sayısal ölçüme ihtiyaç vardır. Bu amaca  $Kov(X, Y)$ 'yi  $\sigma_X \sigma_Y$ 'ye bölerek ulaşabiliriz:

$$\frac{Kov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Bu durumda pay ve paydanın ölçü birimleri aynı olur; dolayısıyla oranın kendisi boyutsuz bir niceliğe dönüşür. Ayrıca ispatlanabilir ki bu oran, ölçü birimleri ne olursa olsun her zaman  $[-1, 1]$  aralığında değer alır. **Pearson korelasyon katsayısı** ya da kısaca **korelasyon katsayısı** ismi verilen bu değer, ilişkinin gücünü ölçmede en yaygın kullanılan ölçüdür.

$$\rho_{XY} = Kor(X, Y) = \frac{Kov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sqrt{E[(X - \mu_X)^2]E[(Y - \mu_Y)^2]}} \quad (13.1)$$

Korelasyon katsayısı  $\rho$  için aşağıdaki yorumlar yapılabilir:

1.  $\rho_{XY} = -1$  ise  $X$  ve  $Y$  arasında tam negatif doğrusal bir ilişki vardır.
2.  $\rho_{XY} = 1$  ise  $X$  ve  $Y$  arasında tam pozitif doğrusal bir ilişki vardır.
3.  $\rho_{XY} = 0$  ise  $X$  ve  $Y$  arasında doğrusal ilişki yoktur.
4.  $|\rho_{XY}|$  , 1'e ne kadar yakınsa  $X$  ve  $Y$  arasındaki doğrusal ilişki o denli güçlüdür.

$X$  ve  $Y$  rastlantı değişkenleri arasındaki gerçek ilişkiyi simgeleyen  $\rho_{XY}$  şüphesiz bir kitle parametresi olarak düşünülmeli ve örneklem istatistiği yardımıyla tahmin edilmelidir.  $\rho_{XY}$  yerine kısaca  $\rho$  notasyonu kullanılabilir.  $\rho$ 'nun tahmincisini elde etmek için (13.1) eşitliğinin sağ tarafındaki kitle parametrelerinin yerine karşılık gelen örneklem istatistiklerini (tahmincilerini) yazalım.  $\sigma_X$  ve  $\sigma_Y$ 'nin tahmincileri olan örneklem standart sapmalarının

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum(X - \bar{X})^2}{n - 1}} \quad \text{ve} \quad S_Y = \sqrt{\frac{\sum(Y - \bar{Y})^2}{n - 1}}$$

olarak tanımlandığını biliyoruz.  $Kov(X, Y)$ 'nin tahmincisi ise **örneklem kovaryansı** olarak adlandırılır ve

$$S_{XY} = \frac{\sum(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{n - 1} \quad (13.2)$$

eşitliği ile tanımlanır. Öyleyse  $\rho$ 'nun tahmincisi olan ve **örneklem korelasyon katsayısı** olarak adlandırılan  $r_{XY}$

$$r_{XY} = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y} = \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) / n - 1}{\sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n - 1}} \sqrt{\frac{\sum (Y - \bar{Y})^2}{n - 1}}}$$

$$r_{XY} = \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2} \sqrt{\sum (Y - \bar{Y})^2}} \quad (13.3)$$

olarak tanımlanabilir.

$X$  ve  $Y$  birer rastlantı değişkeni olduğu için  $r_{XY}$  de bir rastlantı değişkeni olarak düşünülmelidir. Bu anlamda bir örneklemden hesaplama söz konusu olduğunda (13.3) eşitliği yerine

$$r_{xy} = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2} \sqrt{\sum (y - \bar{y})^2}} \quad (13.4)$$

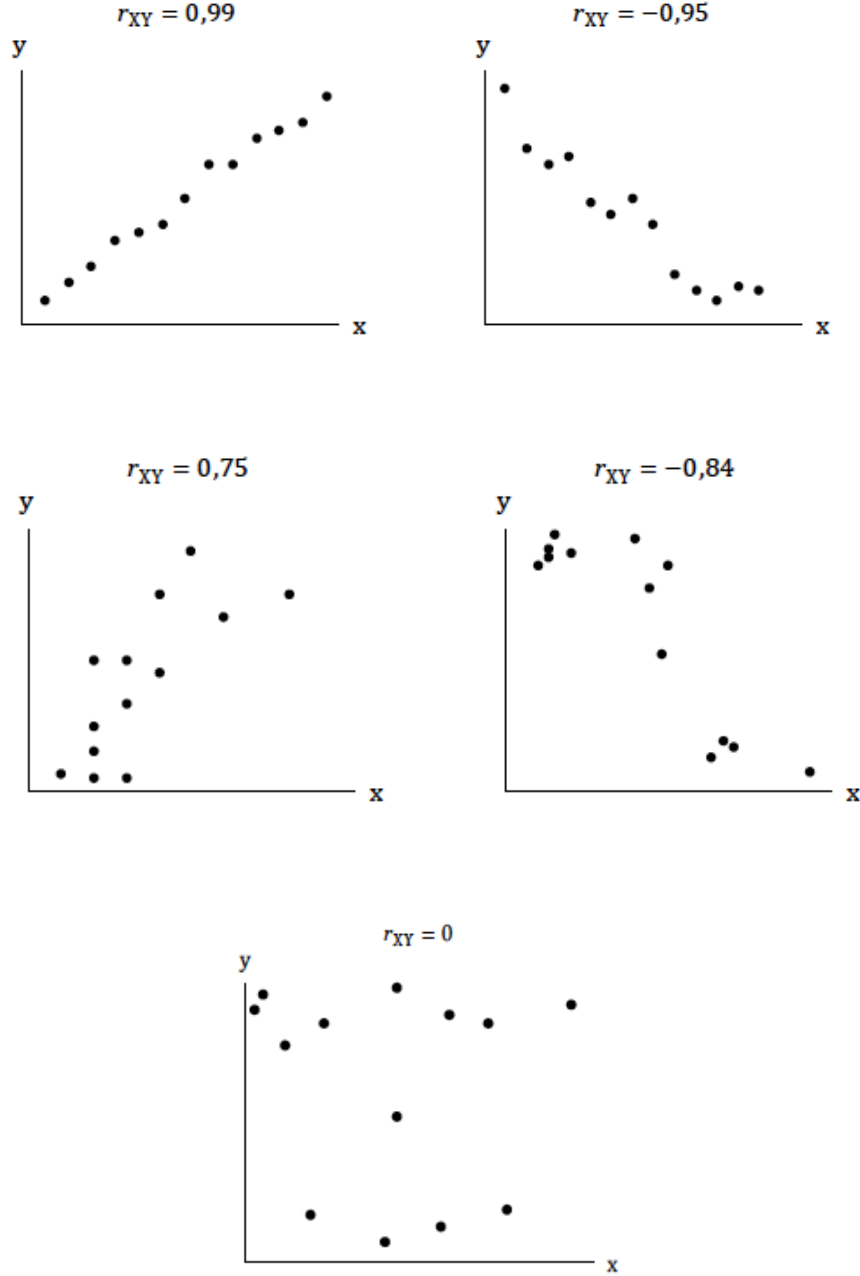
eşitliği kullanılacaktır. (13.3) eşitliğindeki  $r_{XY}$ ,  $\rho$ 'nun tahmincisini yani bir rastlantı değişkenini gösterirken, (13.4) eşitliğindeki  $r_{xy}$  ise  $r_{XY}$ 'nin gerçekleşen değerini yani  $\rho$ 'nun herhangi bir nokta tahminini simgeler.  $r_{xy}$  yerine kısaca  $r$  notasyonu da kullanılabilir.

Eşitlik (13.4) basit cebrik işlemler sonucunda

$$r_{xy} = \frac{\sum xy - \sum x \sum y / n}{\sqrt{\sum x^2 - (\sum x)^2 / n} \sqrt{\sum y^2 - (\sum y)^2 / n}} \quad (13.5)$$

eşitliğine dönüştürülebilir. Elle yapılan işlemlerde eşitlik (13.5), eşitlik (13.4)'e kıyasla daha uygundur.

Aşağıda çeşitli örneklemeler için hesaplanan  $r$  değerleri ve serpilme diyagramları görülmektedir:



**Şekil 13.1** Çeşitli serpilme diyagramları ve korelasyonlar

### 13.2. Kısmi Korelasyon

İki değişken ( $X_1$  ve  $X_2$ ) arasındaki ilişki incelenirken üçüncü bir değişkenin ( $X_3$ ) varlığı söz konusuysa  $r_{X_1X_2}$ ,  $X_1$  ve  $X_2$  arasındaki ilişkiyi ölçmede yanıltıcı olabilir. Örneğin kan basıncı ( $X_1$ ) ve kandaki kolesterol düzeyinin ( $X_2$ ) yaşla ( $X_3$ ) birlikte arttığı bilinir. Öte yandan kolesterol düzeyi yüksek kişilerde, kan basıncının da yüksek olması bir diğer olgudur. Öyleyse kan basıncı ile kolesterol düzeyi gerçekten ilişkili midir, yoksa salt yaşla olan ilişkileri nedeniyle mi birbirleriyle ilişkili görünmektedirler sorusu sorulabilir. Bu noktada çözüm, yaş faktörünün kan basıncı ve kolesterol düzeyi üzerindeki etkisini



gidermek, diğer bir deyişle  $X_3$  sabit iken  $X_1$  ve  $X_2$ 'nin korelasyonunu hesaplamaktır. Bu amaca

$$r_{X_1X_2.X_3} = \frac{r_{X_1X_2} - r_{X_1X_3}r_{X_2X_3}}{\sqrt{1 - r_{X_1X_3}^2}\sqrt{1 - r_{X_2X_3}^2}} \quad (13.6)$$

formülü ile ulaşılabilir.  $X_3$ 'ün  $X_1$  ve  $X_2$  üzerine doğrusal etkisinin sabitleştirildiği bu yeni korelasyon katsayısı  $r_{X_1X_2.X_3}$  **kısmi korelasyon katsayısı** olarak adlandırılır. Şüphesiz üç değişken söz konusuysa üç tane de kısmi korelasyon katsayısı yazılabilir. Yukarıda  $X_3$ 'ü sabit tuttuk.  $X_1$  sabit tutuluyorsa,

$$r_{X_2X_3.X_1} = \frac{r_{X_2X_3} - r_{X_1X_2}r_{X_1X_3}}{\sqrt{1 - r_{X_1X_2}^2}\sqrt{1 - r_{X_1X_3}^2}}$$

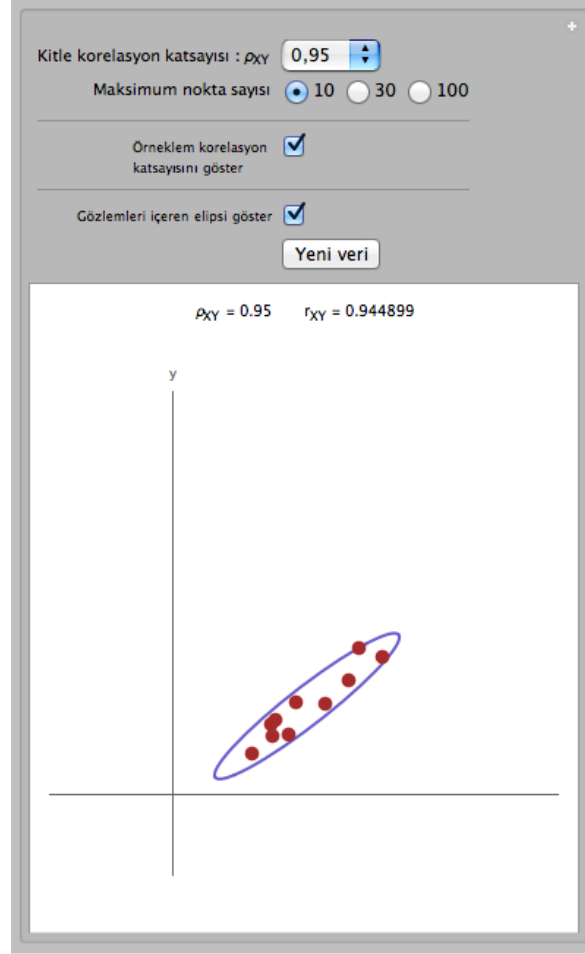
$X_2$  sabit tutuluyorsa,

$$r_{X_1X_3.X_2} = \frac{r_{X_1X_3} - r_{X_1X_2}r_{X_2X_3}}{\sqrt{1 - r_{X_1X_2}^2}\sqrt{1 - r_{X_2X_3}^2}}$$

kısmi korelasyonları da hesaplanabilir.

**Basit korelasyon** aleti ile iki boyutlu Normal dağılımdan rastlantısal veriler oluşturup, basit korelasyonları hesaplayabilirsiniz. Dikkat edilirse rastlantısal verilerin çekildiği kitlenin korelasyon katsayısı ne denli yüksekse, verileri içeren elips o denli dar olmakta ve tersine korelasyon katsayısı düştükçe elips şişkinleşmektedir.

### Basit korelasyon



## Uygulamalar

1) Aşağıdaki veri on iki erkek öğrencinin boy ve ağırlıklarına ilişkin ölçümleri göstermektedir.  $r_{xy}$  korelasyon katsayısını hesaplayınız.

|                       |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| <b>y: Boylar (cm)</b> | 167 | 171 | 175 | 180 | 164 | 172 | 175 | 188 | 173 | 176 | 178 | 167 |
| <b>x: Ağırlıklar</b>  | 75  | 68  | 70  | 66  | 59  | 78  | 69  | 82  | 67  | 72  | 73  | 60  |

**Cözüm:**

| $x$ | $y$  | $x - \bar{x}$ | $y - \bar{y}$ | $(x - \bar{x})^2$ | $(y - \bar{y})^2$ | $(x - \bar{x})(y - \bar{y})$ |
|-----|------|---------------|---------------|-------------------|-------------------|------------------------------|
| 75  | 167  | 5,083         | -6,833        | 25,840            | 46,694            | -34,736                      |
| 68  | 171  | -1,917        | -2,833        | 3,674             | 8,028             | 5,431                        |
| 70  | 175  | 0,083         | 1,167         | 0,007             | 1,361             | 0,097                        |
| 66  | 180  | -3,917        | 6,167         | 15,340            | 38,028            | -24,153                      |
| 59  | 164  | -10,917       | -9,833        | 119,174           | 96,694            | 107,347                      |
| 78  | 172  | 8,083         | -1,833        | 65,340            | 3,361             | -14,819                      |
| 69  | 175  | -0,917        | 1,167         | 0,840             | 1,361             | -1,069                       |
| 82  | 188  | 12,083        | 14,167        | 146,007           | 200,695           | 171,181                      |
| 67  | 173  | -2,917        | -0,833        | 8,507             | 0,694             | 2,431                        |
| 72  | 176  | 2,083         | 2,167         | 4,340             | 4,694             | 4,514                        |
| 73  | 178  | 3,083         | 4,167         | 9,507             | 17,361            | 12,847                       |
| 60  | 167  | -9,917        | -6,833        | 98,340            | 46,694            | 67,764                       |
| 839 | 2086 | 0,000         | 0,000         | 496,917           | 465,667           | 296,833                      |

$\bar{x} = 69,917$  ,  $\bar{y} = 173,833$  ,  $\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y}) = 296,833$  ,  $\sum(x - \bar{x})^2 = 496,917$  ve  $\sum(y - \bar{y})^2 = 465,667$  Eşitlik (13.5)'te değerler yerlerine konulursa

$$r_{xy} = \frac{296,833}{\sqrt{496,917} \cdot \sqrt{465,667}} = 0,617$$

sonucu bulunur. Aynı sonuç Eşitlik (10.5)'ten de elde edilebilir.

| $x$ | $y$  | $x^2$  | $y^2$   | $xy$    |
|-----|------|--------|---------|---------|
| 75  | 167  | 5625   | 27.889  | 12.525  |
| 68  | 171  | 4624   | 29.241  | 11.628  |
| 70  | 175  | 4900   | 30.625  | 12.250  |
| 66  | 180  | 4356   | 32.400  | 11.880  |
| 59  | 164  | 3481   | 26.896  | 9676    |
| 78  | 172  | 6084   | 29.584  | 13.416  |
| 69  | 175  | 4761   | 30.625  | 12.075  |
| 82  | 188  | 6724   | 35.344  | 15.416  |
| 67  | 173  | 4489   | 29.929  | 11.591  |
| 72  | 176  | 5184   | 30.976  | 12.672  |
| 73  | 178  | 5329   | 31.684  | 12.994  |
| 60  | 167  | 3600   | 27.889  | 10.020  |
| 839 | 2086 | 59.157 | 363.082 | 146.143 |

$n = 12$  ,  $\sum x = 839$  ,  $\sum y = 2086$  ,  $\sum x^2 = 59.157$  ,  $\sum y^2 = 363.082$  ,  $\sum xy = 146.143$  değerleri (10.5) eşitliğinde yerlerine konursa

$$r_{xy} = \frac{146.143 - (839)(2086)/12}{\sqrt{59.157 - (839)^2/12} \sqrt{363.082 - (2086)^2/12}} = 0,617$$

elde edilir.

2) Aşağıda dokuz öğrencinin matematik ve istatistik derslerinden aldıkları notlar verilmiştir:

|                      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| <b>x: Matematik</b>  | 76 | 68 | 44 | 63 | 87 | 25 | 55 | 37 | 58 |
| <b>y: İstatistik</b> | 81 | 64 | 57 | 55 | 75 | 40 | 50 | 39 | 70 |

$r_{xy}$ 'yi hesaplayınız.

**Cözüm:**

| $x$ | $y$ | $x - \bar{x}$ | $y - \bar{y}$ | $(x - \bar{x})^2$ | $(y - \bar{y})^2$ | $(x - \bar{x})(y - \bar{y})$ |
|-----|-----|---------------|---------------|-------------------|-------------------|------------------------------|
| 76  | 81  | 19            | 22            | 361               | 484               | 418                          |
| 68  | 64  | 11            | 5             | 121               | 25                | 55                           |
| 44  | 57  | -13           | -2            | 169               | 4                 | 26                           |
| 63  | 55  | 6             | -4            | 36                | 16                | -24                          |
| 87  | 75  | 30            | 16            | 900               | 256               | 480                          |
| 25  | 40  | -32           | -19           | 1024              | 361               | 608                          |
| 55  | 50  | -2            | -9            | 4                 | 81                | 18                           |
| 37  | 39  | -20           | -20           | 400               | 400               | 400                          |
| 58  | 70  | 1             | 11            | 1                 | 121               | 11                           |
| 513 | 531 | 0             | 0             | 3016              | 1748              | 1992                         |

$\bar{x} = 57$  ,  $\bar{y} = 59$  ,  $\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y}) = 1992$  ,  $\sum(x - \bar{x})^2 = 3016$  ,  $\sum(y - \bar{y})^2 = 1748$  Eşitlik (13.4)'te değerler yerlerine konulursa

$$r_{xy} = \frac{1992}{\sqrt{3016} \cdot \sqrt{1748}} = 0,87$$

olur.

3) On üç hastanın yaş, kan basıncı ve kolesterol düzeyine ilişkin veri aşağıdadır:

|                                       |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| <b>Kan Basıncı (<math>X_1</math>)</b> | 13  | 12  | 12  | 11  | 13  | 14  | 15  | 13  | 14  | 16  | 12  | 11  | 15  |
| <b>Kolesterol Düzeyi</b>              | 240 | 198 | 186 | 188 | 220 | 270 | 290 | 186 | 234 | 270 | 240 | 210 | 260 |
| <b>Yaş (<math>X_3</math>)</b>         | 41  | 38  | 24  | 27  | 33  | 48  | 61  | 37  | 58  | 56  | 44  | 47  | 54  |

Kan basıncı ve kolesterol düzeyi arasındaki basit korelasyon katsayısını hesaplayınız.

**Cözüm:**

$n = 13$  ,  $\sum x_1 = 171$  ,  $\sum x_2 = 2992$  ,  $\sum x_1^2 = 2279$  ,  $\sum x_2^2 = 703.696$  ,  $\sum x_1x_2 = 39.890$  değerleri yerine konulduğunda basit korelasyon katsayısı

$$r_{x_1x_2} = \frac{39.890 - (171)(2992)/13}{\sqrt{2279 - 171^2/13} \cdot \sqrt{703.696 - 2992^2/13}} = 0,798$$

olarak bulunur.

**4)** Soru 3'teki verilere göre Yaş ( $X_3$ ) etkisini sabit tutarak kan basıncı ( $X_1$ ) ve kolesterol düzeyi ( $X_2$ ) arasındaki korelasyonu (kısmi korelasyonu) hesaplayınız.

**Cözüm:**

$r_{x_1x_2} = 0,798$  ,  $r_{x_1x_3} = 0,733$  ,  $r_{x_2x_3} = 0,827$  değerleri yerine konulduğunda kısmi korelasyon katsayısı

$$r_{x_1x_2.x_3} = \frac{0,798 - (0,733)(0,827)}{\sqrt{1 - 0,733^2} \cdot \sqrt{1 - 0,827^2}} = 0,501$$

olarak bulunur.  $r_{x_1x_2}$  ile  $r_{x_1x_2.x_3}$  arasındaki farkın büyüklüğü yaş değişkeninin her iki değişkenin üzerindeki etkisinin güçlülüğünü göstermektedir.

## Uygulama Soruları

1) Aşağıdaki veri gelişmekte olan sekiz ülkedeki nüfus yoğunluğu ( $X$ ) ile ekonomik büyüme oranlarını ( $Y$ ) göstermektedir.

| Nüfus Yoğunluğu (kişi/km <sup>2</sup> )<br>$x$ | Kişi başına düşen milli gelirdeki yıllık % değişim<br>$y$ |
|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 35                                             | 0,8                                                       |
| 117                                            | 2,8                                                       |
| 62                                             | 1,1                                                       |
| 58                                             | 1,2                                                       |
| 22                                             | 0,4                                                       |
| 135                                            | 4,6                                                       |
| 90                                             | 2,5                                                       |
| 43                                             | 0,9                                                       |

Korelasyon katsayısını hesaplayınız.

2) Aşağıda yedi kişinin yaş, gelir ve eğitim süreleri yer almaktadır.

|                             |    |    |    |    |    |    |    |
|-----------------------------|----|----|----|----|----|----|----|
| $x$ : Yaş                   | 26 | 41 | 34 | 37 | 29 | 33 | 40 |
| $y$ : Eğitim Süreleri (yıl) | 15 | 11 | 8  | 17 | 5  | 8  | 11 |
| $z$ : Gelir (1000\$)        | 12 | 27 | 9  | 16 | 8  | 10 | 22 |

a) Üç değişken arasındaki tüm ikili basit korelasyonları hesaplayınız.

b) Yaşı sabit tutarak eğitim süresi ile gelir arasındaki kısmi korelasyonu hesaplayınız.

c) Eğitime ayrılan süreyi sabit tutarak yaş ile gelir arasındaki kısmi korelasyonu hesaplayınız.

3) Meteorolojik değişkenlerle bazı kanser türleri arasında ilişki olduğu söylenir. Gerçek verilerle bu olguyu araştırınız.

### **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Bu bölümde değişkenler arasındaki ilişkinin yönünü ve derecesini gösteren korelasyon kavramı ile tahmini ve analizinin nasıl gerçekleştirildiği öğrenildi. Yanı sıra, kısmi korelasyon da anlatıldı.



## Bölüm Soruları

Aşağıda altı kişinin yaş, yıllık gelir ve eğitim süreleri (yıl) yer almaktadır. İlk beş soruyu bu veri üzerinden yanıtlayınız.

|                                 |    |    |    |    |    |    |
|---------------------------------|----|----|----|----|----|----|
| <b>x: Yaş</b>                   | 37 | 45 | 44 | 23 | 34 | 55 |
| <b>y: Eğitim Süreleri (yıl)</b> | 15 | 17 | 11 | 11 | 15 | 17 |
| <b>z: Gelir (1000 TL)</b>       | 45 | 89 | 75 | 23 | 44 | 80 |

- 1) Yaş ve eğitim süreleri arasındaki basit korelasyon kaçtır?
  - a) 0,879
  - b) 0,772
  - c) 0,606
  - d) 0,498
- 2) Yaş ve gelir arasındaki basit korelasyon kaçtır?
  - a) 0,904
  - b) 0,782
  - c) 0,706
  - d) 0,598
- 3) Gelir ve eğitim süreleri arasındaki basit korelasyon kaçtır?
  - a) 0,803
  - b) 0,742
  - c) 0,686
  - d) 0,521

4) Yaş sabit tutulursa eğitim süresi ile gelir arasındaki kısmi korelasyon kaç olur?

- a)  $-0,078$
- b)  $0,144$
- c)  $0,486$
- d)  $0,721$

5) Eğitim sabit tutulursa yaş ile gelir arasındaki kısmi korelasyon kaç olur?

- a)  $-0,078$
- b)  $0,433$
- c)  $0,577$
- d)  $0,866$

Aşağıda  $x_1, x_2$  ve  $x_3$  değişkenlerine ilişkin değerler yer almaktadır. Son beş soruyu bu veri üzerinden yanıtlayınız.

|       |    |    |    |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|
| $x_1$ | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| $x_2$ | 9  | 7  | 6  | 5  | 3  | 2  | 1  |
| $x_3$ | 23 | 32 | 34 | 27 | 45 | 52 | 62 |

6)  $x_1$  ve  $x_2$  arasındaki basit korelasyon kaçtır?

- a)  $-0,995$
- b)  $-0,874$
- c)  $-0,543$
- d)  $0,128$

7)  $x_1$  ve  $x_3$  arasındaki basit korelasyon kaçtır?

- a)  $0,504$
- b)  $0,682$
- c)  $0,706$
- d)  $0,914$

- 8)  $x_2$  ve  $x_3$  süreleri arasındaki basit korelasyon kaçtır?
- a)  $-0,985$
- b)  $-0,923$
- c)  $-0,872$
- d)  $0,228$
- 9)  $x_1$  sabit tutulursa  $x_2$  ile  $x_3$  arasındaki kısmi korelasyon kaç olur?
- a)  $-0,678$
- b)  $-0,544$
- c)  $-0,332$
- d)  $-0,241$
- 10)  $x_3$  sabit tutulursa  $x_1$  ile  $x_2$  arasındaki kısmi korelasyon kaç olur?
- a)  $-0,967$
- b)  $-0,841$
- c)  $-0,538$
- d)  $-0,341$

**Cevaplar**

1) c, 2) a, 3) d, 4) a, 5) d, 6) a, 7) d, 8) b, 9) c, 10) a

## **14. VARYANS ANALİZİ**

### **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

Önceki bölümlerde iki kitle ortalamasının karşılaştırılması sürecini görmüştük. İki den fazla kitle ortalamasının karşılaştırılmasına olanak sağlayan bir istatistik yöntem olan Varyans Analizi konusunu ise bu bölümde göreceğiz. Yalnızca elle yapılan hesaplamaları değil bilgisayar programları çıktılarını yorumlamayı da öğreneceğiz.

### **Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular**

- 1) Aynı dersi veren üç öğretim üyesinden hangisinin daha iyi bir öğretici olduğunu sınamak için bir veri dizaynı düşününüz.
- 2) Dört farklı araştırma şirketi arasında seçim tahminleri açısından önemli bir olup olmadığını test etmek için bir veri dizaynı düşününüz.

### Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

| Konu                                           | Kazanım                                                                                                    | Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği                                                        |
|------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Tek yönlü varyans analizi konusu görülecektir. | İkiden fazla kitle ortalamasının karşılaştırılmasına olanak sağlayan varyans analizi konusu öğrenilecektir | Metinler, çözümlü problemler, alıştırmalar ve apletler ile konuların daha kolay anlaşılması sağlanacaktır. |

### **Anahtar Kavramlar**

- Tek yönlü varyans analizi
- Gruplar içi toplam değişim
- Gruplar arası toplam değişim
- Toplam değişim



## Giriş

Tahmin ve hipotez testi bölümlerinde iki kitle ortalamasının karşılaştırılması problemini incelemiştik. Bu bölümde ise problemi genelleştirerek ikiden fazla kitle ortalamasının birlikte karşılaştırılması ele alınacaktır. Örneğin bir yabancı dilin öğretilmesinde kullanılan üç yöntem, verimlilikleri açısından, dört farklı marka otomobil, benzin sarfiyatları açısından ya da üç farklı tarımsal teknik, ürün miktarları açısından karşılaştırılmak istenebilir. Şüphesiz bir eğitim yönteminin ne kadar verimli olacağını, bir arabanın kaç km'de ne kadar benzin tüketeceğini ya da belirli bir tekniğin uygulandığı bir tarım alanından ne kadar ton ürün alınacağını kesin olarak önceden bilmeye olanak yoktur. Dolayısıyla burada örnek verilen süreçleri birer rastlantısal deney olarak ve deneylerde ilgilenilen özellikleri de birer rastlantı değişkeni olarak düşünmeliyiz. Araba örneğine dönersek; dört farklı arabanın benzin sarfiyatlarını ölçmek için çeşitli sürücülerle yol testlerinin yapıldığını ve ölçümlerin kaydedildiğini düşünelim. Şüphesiz aynı araba için aynı sürücü ile birden fazla test yapılırsa, şans faktörü nedeniyle hep aynı ölçümün gerçekleşmesini beklemeyiz. Başka bir deyişle, benzin sarfiyatı dört araba için de bir rastlantı değişkenidir. Bu rastlantı değişkenlerinin dağılımlarının (kitle dağılımları) aynı (örneğin normal) olduğunu ve varyanslarının da eşit olduğunu varsayalım. O zaman sorulacak olan soru şudur: Kitle dağılımlarının ortalamaları aynı mıdır? Her bir araba için elde edilen ölçümleri örneklem değerleri olarak düşünürsek, "kitle dağılımlarının ortalamaları aynı mıdır" sorusu eşdeğer olarak "rastlantısal örneklemelerin ortalamaları aynı örneklem dağılımından mı yoksa farklı örneklem dağılımından mı gelmektedir?" diye sorulabilir. ANOVA olarak da isimlendirilen varyans analizi yönteminde temel problem bu sorunun yanıtını aramaktır.

## 14.1. Tek Yönlü Varyans Analizi

$k$  tane kitlenin ortalamaları arasında önemli bir fark olup olmadığı problemi ile ilgileniyorsak;  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  söz konusu kitlelerin ortalamalarını göstermek üzere test edeceğimiz  $H_0$  ve  $H_a$  hipotezleri

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k: \text{Kitle ortalamaları eşittir.} \quad (14.1)$$

$$H_a: \mu_i \neq \mu_j, \text{ bazı } i \text{ ve } j \text{ için: En az iki kitle ortalaması eşit değildir.}$$

olarak kurulabilir. Hipotezler eşdeğer olarak

$$H_0: \text{Örneklem ortalamaları aynı örnekleme dağılımından gelmektedir.}$$

$$H_a: \text{Örneklem ortalamaları farklı örnekleme dağılımından gelmektedir.}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Kitle ortalamalarının karşılaştırılması probleminde verideki gruplar arası değişim kadar, gruplar içi değişimin de önemli olduğu, dolayısıyla hipotez testi sürecinde her iki değişimi de ölçen bir test istatistiğinin kullanılmasının yerinde olacağıdır.

Gruplar içi değişimin ölçüsü olarak gruptaki her bir elemanın kendi grup ortalamasından farklarının kareleri toplamını alabiliriz. Öyleyse  $n_1, n_2, \dots, n_k$  birimlik gözlemlerden oluşan  $k$  gruplu bir veri için  $x_{ij}$ ,  $i$ . grubun  $j$ . elemanını göstermek üzere grup içi değişimler

$$SSW_1 = \sum_{j=1}^{n_1} (x_{1j} - \bar{x}_1)^2$$

$$SSW_2 = \sum_{j=1}^{n_2} (x_{2j} - \bar{x}_2)^2$$

$$SSW_k = \sum_{j=1}^{n_k} (x_{kj} - \bar{x}_k)^2$$

eşitlikleri ile ölçülebilir. **Gruplar içi toplam değişim** ise

$$SSW = SSW_1 + SSW_2 + \dots + SSW_k$$

olacaktır. Bu toplam

$$SSW = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

notasyonu ile de gösterilebilir.

Gruplar arası değişimin ölçüsü olarak da her bir grup ortalamasının ( $\bar{x}_i$ ) genel ortalamadan ( $\bar{x}$ ) farklarının kareleri alınabilir:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x})^2, (\bar{x}_2 - \bar{x})^2, \dots, (\bar{x}_k - \bar{x})^2$$

Burada genel ortalama ( $\bar{x}$ ) verideki tüm gözlemlerin ortalamasını ya da eşdeğer olarak grup ortalamalarının ortalamasını göstermektedir. Gruplardaki gözlem sayılarının tartı olarak hesaba katılmasıyla **gruplar arası toplam değişim** ise

$$SSG = n_1(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + n_2(\bar{x}_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(\bar{x}_k - \bar{x})^2$$

olarak tanımlanabilir. Bu toplam gruplar içi toplam değişime benzer şekilde

$$SSG = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

notasyonu ile de gösterilir.

Şüphesiz verideki tüm gözlem değerlerinin genel ortalamadan farklarının kareleri toplamı ise **toplam değişimi** verecektir:

$$SST = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2$$

$SST$  aynı zamanda  $SSW$  ve  $SSG$ 'nin toplamına eşittir.

$$SST = SSG + SSW$$

Toplam değişimin, gruplar içi ve gruplar arası değişim olmak üzere iki ayrı toplam cinsinden ifade edilmesi varyans analizinde test sürecinin temelini oluşturur.

Sürecin temel varsayımlarından biri kitle varyanslarının aynı  $\sigma^2$  değerine eşit olduğudur. Kitle ortalamasının eşitliğini ifade eden  $H_0$  hipotezi doğru ise  $SSW$  kitle varyansı  $\sigma^2$ 'nin tahmininde kullanılabilir.  $\sigma^2$ 'nin yansız bir tahmincisini elde etmek için  $SSW$ 'yi  $(n - k)$ 'ya bölmek yeterlidir:

$$MSW = \frac{SSW}{n - k}$$

**$MSW$ , gruplar içi kareler ortalaması** olarak isimlendirilir ve yukarıda belirtildiği gibi  $\sigma^2$ 'nin yansız bir tahmincisidir. Öte yandan yine  $H_0$  hipotezi doğru ise  $SSG$ 'yi  $(k - 1)$ 'e bölerek  $\sigma^2$ 'nin diğer bir yansız tahmincisini elde ederiz:

$$MSG = \frac{SSG}{k - 1}$$

Öyleyse  $H_0$  hipotezi doğru ise

$$\frac{MSG}{MSW}$$

oranının yani  $\sigma^2$ 'nin yansız iki tahmincisinin oranının "1"e yakın bir değer olmasını bekleriz. Dolayısıyla örneklemden hesaplanacak bu oran 1'e ne kadar yakın ise  $H_0$  'a duyduğumuz güven o denli fazla olur. Ancak gruplar arası değişim gruplar içi değişime kıyasla ne denli büyükse söz konusu oran o denli büyüyecek ve  $H_0$  'a olan güvenimiz azalacaktır.

Bu aşamada modelin son varsayımı olan kitlelerin normal dağıldığı varsayımı yapılacaktır. Çünkü bu varsayım altında

$$F_G = \frac{MSG}{MSW}$$

rastlantı değişkeni payı  $(k - 1)$ , paydası  $(n - k)$  serbestlik dereceli bir  $F$  dağılımı izler. Dolayısıyla örneklemden hesaplanacak  $F_G$  değeri  $F$  tablosundaki  $F_{k-1, n-k; 1-\alpha}$  değerinden büyükse  $H_0$  hipotezi  $\alpha$  önem düzeyinde reddedilebilir.

Test süreci ve varsayımlar aşağıdaki tabloda özetlenmiştir:

| <b>Test İstatistiği</b>                                                                                                                         |                                                    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| $F_G = \frac{MSG}{MSW} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 / k - 1}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 / n - k}$ |                                                    |
| <b>Hipotezler</b>                                                                                                                               | <b>Karar Kuralı</b>                                |
| $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$<br>$H_a$ : En az iki kitle ortalaması eşit değildir                                                        | $F_G > F_{k-1, n-1; \alpha}$ ise $H_0$ reddedilir. |
| <b>Varsayımlar</b>                                                                                                                              |                                                    |
| 1) Örneklemeler bağımsızdır.<br>2) Kitle varyansları eşittir.<br>3) Kitle dağılımları normaldir.                                                |                                                    |

**Tablo 14.1: Varyans analizinde test süreci**

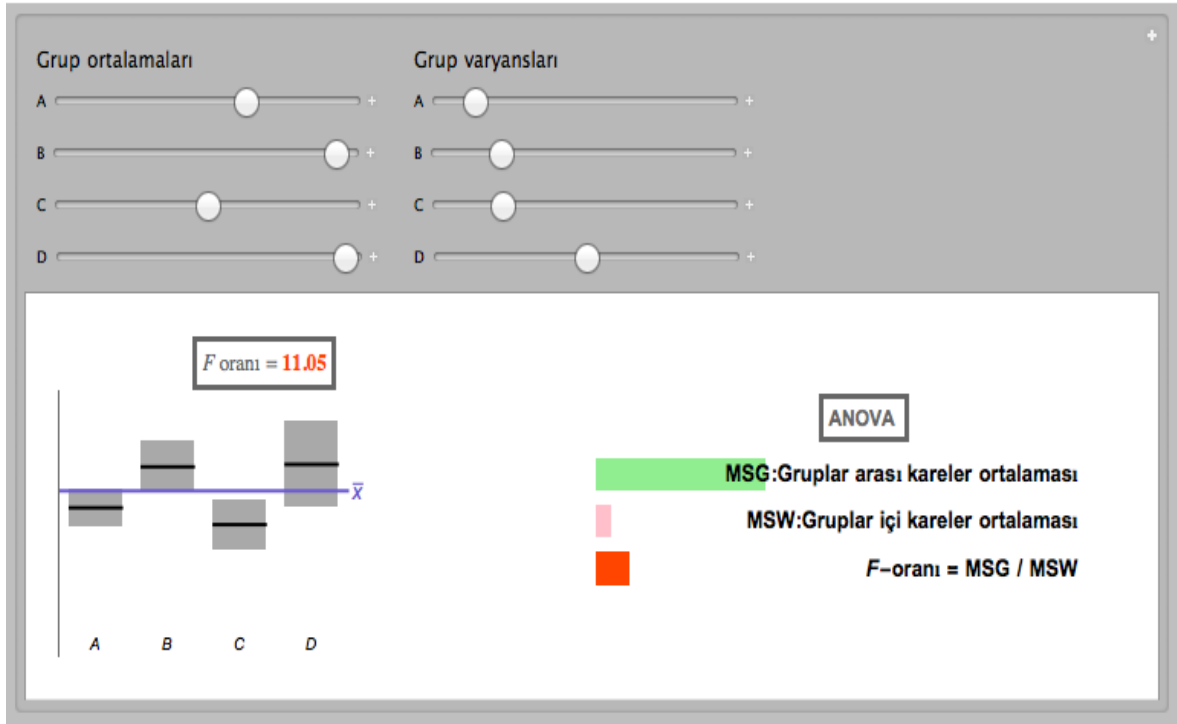
Sonuçlar Varyans Analizi Tablosu ismi verilen aşağıdaki gibi bir tabloda da özetlenebilir:

| <b>Değişim Kaynağı</b>       | <b>Kareler Toplamı</b> | <b>Serbestlik Derecesi</b> | <b>Ortalama Kare</b> | <b>F Oranı</b>          |
|------------------------------|------------------------|----------------------------|----------------------|-------------------------|
| <b>Gruplar arası değişim</b> | $SSG$                  | $k - 1$                    | $MSG = SSG / k - 1$  | $F_G = \frac{MSG}{MSW}$ |
| <b>Gruplar içi değişim</b>   | $SSW$                  | $n - k$                    | $MSW = SSW / n - k$  |                         |
| <b>Toplam değişim</b>        | $SST$                  | $n - 1$                    |                      |                         |

**Tek yönlü varyans analizi** apletinde varyans analizi yönteminin ardında yatan mantığı keşfedebilirsiniz. F-oranı ne denli yüksekse, grup ortalamaları arasında fark olmadığını ifade eden sıfır hipotezinin reddi olasılığının artacağını biliyoruz. Dikkat edilirse grup varyansları küçükken grup ortalamaları farklılaştırıldığında (gruplar arası değişim artırıldığında) gerçekten de F-oranı artmaktadır. Ancak grup varyansları büyütüldüğünde (gruplar içi değişim artırıldığında) grup ortalamaları farklılaştırılrsa bile F-oranı artmamaktadır. Bunun nedeni F oranının bu iki değişimin oranı olarak tanımlanmasındadır.

Özetle grup ortalamaları arasında farkın tesadüften kaynaklanmadığına emin olmamız için grupların kendi iç değişimlerinin küçük olması gerektiğini söyleyebiliriz.

#### Tek yönlü varyans analizi



## Uygulamalar

1) Bir şirketteki üç farklı markadaki yirmi üç fotokopi makinesinin son bir yıl içinde tamir ya da hizmet dışı geçen süreleri dakika olarak tespit edilmiş ve aşağıdaki veri elde edilmiştir. Ortalama servis dışı kalma süreleri açısından üç makine arasında istatistik açıdan önemli bir fark olduğunu söyleyebilir miyiz?

| A marka<br>makine | B marka<br>makine | C marka<br>makine |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| 64                | 45                | 75                |
| 72                | 62                | 85                |
| 81                | 73                | 83                |
| 92                | 58                | 78                |
| 80                | 50                | 96                |
| 73                | 68                | 88                |
|                   | 48                | 83                |
|                   | 52                | 84                |
|                   | 66                |                   |

### Cözüm:

Hipotezler

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ : Makinelerin tamir nedeniyle servis dışı geçen ortalama süreleri arasında farklılık yoktur.

$H_a$ : En az iki makinenin servis dışı ortalama süreleri eşit değildir (En az bir makinenin servis dışı ortalama süresi farklıdır.)

olarak ifade edilebilir. Genel ortalama



$$\bar{x}_1 = \frac{64 + 72 + 81 + 92 + 80 + 73}{6} = 77$$

$$\bar{x}_2 = \frac{45 + 62 + 73 + 58 + 50 + 68 + 48 + 52 + 66}{9} = 58$$

$$\bar{x}_3 = \frac{75 + 85 + 83 + 78 + 96 + 88 + 83 + 84}{8} = 84$$

$$\bar{x} = \frac{77 + 58 + 84}{3} = 73$$

olarak hesaplanır. Buradan grup içi ortalamalar

$$\begin{aligned} SSW = & (64 - 77)^2 + (72 - 77)^2 + (81 - 77)^2 + (92 - 77)^2 + (80 - 77)^2 \\ & + (73 - 77)^2 + (45 - 58)^2 + (62 - 58)^2 + (73 - 58)^2 + (58 - 58)^2 \\ & + (50 - 58)^2 + (68 - 58)^2 + (48 - 58)^2 + (52 - 58)^2 + (66 - 58)^2 \\ & + (75 - 84)^2 + (85 - 84)^2 + (83 - 84)^2 + (78 - 84)^2 + (96 - 84)^2 \\ & + (88 - 84)^2 + (83 - 84)^2 + (84 - 84)^2 \end{aligned}$$

$$SSW = 1514$$

olarak bulunur. Gruplar arası ortalamalar ise

$$SSG = 6(77 - 73)^2 + 9(58 - 73)^2 + 8(84 - 73)^2$$

$$SSG = 3089$$

olur.

Buradan

$$F_G = \frac{3089/2}{1514/20} = 20,40$$

olarak elde edilir.  $F_G = 20,40 > F_{2,20;0,05} = 3,49$  olduğu için  $H_0$  hipotezi  $\alpha = 0,05$ 'te reddedilir.

2) Bir diş fırçası üreticisi ürünlerinin tercih edilmesinde renk faktörünün etkili olup olmadığının araştırılması amacıyla İstanbul'da eşit büyüklükte yirmi üç süper marketten yedisine yeşil, beşine sarı, altısına eflatun ve beşine kırmızı renkte diş fırçaları göndermiştir. Aşağıdaki tablo iki hafta sonra marketlerden elde edilen satış miktarlarını göstermektedir:

| Yeşil | Sarı | Eflatun | Kırmızı |
|-------|------|---------|---------|
| 37    | 43   | 36      | 44      |
| 30    | 46   | 39      | 40      |
| 41    | 45   | 33      | 41      |
| 44    | 39   | 38      | 46      |
| 47    | 40   | 38      | 39      |
| 36    |      | 40      |         |
| 38    |      |         |         |

(a) Varyans analiz tablosunu oluşturunuz.

(b) Kitle satış ortalamalarının her renk için aynı olduğu hipotezini test ediniz.

**Çözüm:**

(a) Grup içi ortalamalar ve genel ortalama

$$\bar{x}_1 = \frac{37 + 30 + 41 + 44 + 47 + 36 + 38}{7} = 39$$

$$\bar{x}_2 = \frac{43 + 46 + 45 + 39 + 40}{5} = 42,6$$

$$\bar{x}_3 = \frac{36 + 39 + 33 + 38 + 38 + 40}{6} = 37,3$$

$$\bar{x}_4 = \frac{44 + 40 + 41 + 46 + 39}{5} = 42$$

$$\bar{x} = \frac{39 + 42,6 + 37,3 + 42}{4} = 40,23$$

olarak hesaplanır. Buradan

$$SSG = 7(39 - 40,233)^2 + 5(42,6 - 40,233)^2 + 6(37,33 - 40,233)^2 + 5(42 - 40,233)^2$$

$$SSG = 104,831$$

$$SSW = (37 - 39)^2 + \dots + (39 - 42)^2 = 290,533$$

olur.

| Değişim<br>Kaynağı    | Kareler<br>Toplamı | Serbestlik<br>Derecesi | Ortalama<br>Kare  | <i>F</i><br>Oranı |
|-----------------------|--------------------|------------------------|-------------------|-------------------|
| Gruplar arası değişim | $SSG$<br>= 104,831 | 3                      | $MSG = 34,944$    | $F_G = 2,285$     |
| Gruplar içi değişim   | $SSW$<br>= 290,533 | 19                     | $MSW$<br>= 15,291 |                   |
| Toplam değişim        | $SST$<br>= 395,364 | 22                     |                   |                   |

**(b) Hipotezler**

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ : Dört renk için de ortalama satış miktarları aynıdır.

$H_a$ : En az bir renk için satış miktarı farklıdır.

olarak ifade edilebilir.  $F_G$  test istatistiği

$$F_G = \frac{34,944}{15,291} = 2,285$$

olarak elde edilir.  $F_G = 2,285 < F_{3,19;0,05} = 3,13$  olduğu için  $H_0$  hipotezi  $\alpha = 0,05$ 'te reddedilemez. Öyleyse söz konusu ürünün tercih edilmesinde renk faktörünün etkili olduğu söylenemez.

**3)** Bir otomobil dergisi beş farklı otomobili benzin tüketimleri açısından karşılaştırmak amacıyla, testler uygulamış ve aşağıdaki veriyi elde etmiş,

| Otomobil<br><i>A</i> | Otomobil<br><i>B</i> | Otomobil<br><i>C</i> | Otomobil<br><i>D</i> | Otomobil<br><i>E</i> |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 18                   | 22                   | 21                   | 20                   | 18                   |
| 21                   | 18                   | 23                   | 20                   | 19                   |
| 22                   | 16                   | 22                   | 22                   | 22                   |
| 20                   | 20                   | 22                   | 19                   | 21                   |
|                      |                      | 19                   | 21                   |                      |
|                      |                      |                      | 23                   |                      |

ve buradan aşağıdaki varyans analizi tablosunu aşağıdaki gibi hesaplamıştır:

| Değişim<br>Kaynağı    | Kareler<br>Toplamı | Serbestlik<br>Derecesi | Ortalama<br>Kare | <i>F</i><br>Oranı |
|-----------------------|--------------------|------------------------|------------------|-------------------|
| Gruplar arası değişim | $SSG = 14,9009$    | 4                      | $MSG = 3,725$    | $F_G = 1,1407$    |
| Gruplar içi değişim   | $SSW = 58,7833$    | 18                     | $MSW = 3,266$    |                   |
| Toplam değişim        | $SST = 73,6843$    | 22                     |                  |                   |

Bu sonuçlara dayanarak arabaların ortalama benzin tüketimlerinin eşit olduğunu söyleyebilir miyiz?

### Cözüm:

Hipotezler

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$ : Arabaların ortalama benzin tüketimi eşittir.

$H_a$ : En az bir arabanın benzin tüketimi farklıdır.

olarak ifade edilebilir. Varyans analizi tablosunda  $F_G$  test istatistiğinin  $F_G = 1,1407$  olduğunu görüyoruz.  $F_G = 1,1407 < F_{4,18;0,05} = 2,93$  olduğu için  $H_0$  hipotezi  $\alpha = 0,05$ 'te reddedilemez. Öyleyse arabaların ortalama benzin tüketimlerinin eşit olduğu iddiası desteklenebilir.

## Uygulama Soruları

1) Türkiye’den bir coğrafi bölge seçip buradan da 4 il seçiniz (örneğin, Ege bölgesinden İzmir, Manisa, Muğla, Aydın) Daha sonra Meteoroloji Genel Müdürlüğü’nün internet sitesinden elde edebileceğiniz beşer yıllık ortalama yağış miktarlarını kullanarak seçtiğiniz dört il arasında yağış miktarları açısından önemli bir fark olup olmadığını varyans analizi sürecini kullanarak test ediniz. Bunu gerçekleştirirken varsayımlarınızı belirtiniz.

2) Aşağıdaki veri elektrot üreten bir şirketin satış bölümünde çalışan üç elemanın altı hafta boyunca yaptıkları satış miktarlarını koli (1000 birim) olarak göstermektedir.

| Haftalar | 1.<br>Eleman | 2.<br>Eleman | 3.<br>Eleman |
|----------|--------------|--------------|--------------|
| 1        | 15           | 14           | 22           |
| 2        | 18           | 20           | 19           |
| 3        | 21           | 23           | 21           |
| 4        | 19           | 22           | 24           |
| 5        | 20           | 26           | 27           |
| 6        | 22           | 21           | 24           |

Satış elemanlarının ortalama satışlarının eşit olduğu hipotezini varyans analizini uygulayarak test ediniz.

### **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

İkiden fazla kitle ortalamasının karşılaştırılmasına olanak sağlayan varyans analizi konusunda hipotezlerin oluşturulması ve test edilip yorumlanması süreçleri öğrenilmiştir.

## Bölüm Soruları

Aşağıda bir tarladan dört farklı yöntemle elde edilen ürün miktarları (Ton) görülmektedir. Amaç varyans analizi (ANOVA) kullanarak yöntemler arasında istatistiksel açıdan fark olup olmadığını test etmektir. Bu bölümdeki soruları bu veri üzerinden yanıtlayınız.

| Yöntem 1 | Yöntem 2 | Yöntem 3 | Yöntem 4 |
|----------|----------|----------|----------|
| 12       | 11       | 11       | 10       |
| 14       | 11       | 12       | 11       |
| 16       | 12       | 10       | 10       |
| 14       | 10       | 10       | 10       |
| 11       |          | 13       |          |
| 12       |          |          |          |

- 1) Gruplar arası toplam değişim (SSG) kaçtır?
  - a) 14,65
  - b) 24,25
  - c) 42,34
  - d) 50,08
- 2) Gruplar içi toplam değişim (SSW) kaçtır?
  - a) 14,65
  - b) 24,25
  - c) 26,83
  - d) 53,08
- 3) Toplam değişim (SST) kaçtır?
  - a) 50,63
  - b) 43,11
  - c) 26,83
  - d) 13,08



- 4) Gruplar içi kareler ortalaması (MSW) kaçtır?
- a) 9,25
  - b) 8,77
  - c) 1,76
  - d) 2,34
- 5) Gruplar arası kareler ortalaması (MSG) kaçtır?
- a) 8,08
  - b) 7,23
  - c) 5,43
  - d) 3,07
- 6) Gruplar arası değişimin serbestlik derecesi kaçtır?
- a) 1
  - b) 3
  - c) 15
  - d) 18
- 7) Gruplar içi değişimin serbestlik derecesi kaçtır?
- a) 1
  - b) 3
  - c) 15
  - d) 18
- 8) Toplam serbestlik derecesi kaçtır?
- a) 1
  - b) 3
  - c) 15
  - d) 18

**9)** F oranı ( $F_G$ ) kaçtır?

**a)** 2,34

**b)** 3,44

**c)** 4,59

**d)** 5,62

**10)** Hipotez testinin sonucu nedir?

**a)**  $H_0$ : Gruplar arasında fark yoktur hipotezi reddedilir

**b)**  $H_0$  : Gruplar arasında fark vardır hipotezi reddedilmez

### **Cevaplar**

1) b, 2) c, 3)a, 4) c, 5) a , 6) b, 7) c, 8) d, 9) c, 10) a

## KAYNAKÇA

Cochran, W., (1977), Sampling Techniques, 3rd Edition, John Wiley & Sons.

Sınıksaran, E. (2011). *İstatistiksel Yöntemler*. İstanbul: Türkmen, 3. Baskı.

Sınıksaran, E. (2011). *Şansın Matematiği*. İstanbul: Türkmen, 2. Baskı.

Sınıksaran, E., Aktükün, A. (2009). *Matematik ve İstatistik Uygulamalarıyla Mathematica*. İstanbul: Türkmen.