

# Keyifli Okumalar Dileriz

Binlerce kategoride milyonlarca PDF e-kitap, ders kitapları, dergiler ve romanlara platformumuz üzerinden ücretsiz ulaşabilirsiniz.

## RESMİ WEB SİTEMİZ

<https://rantey.org>

### Yedek ve Duyuru Kanallarımız

Sitemize erişim engeli gelmesi veya adres değişikliği durumunda aşağıdaki kanallardan güncel giriş adresine erişebilirsiniz:

- Telegram: <https://t.me/birkitapbir>
- WhatsApp Kanalımız : <https://whatsapp.com/channel/0029VbDHv8uE50Us4lvMoc0Y>

# Bir Nefeste MATEMATİK

CHRIS WARING



Bir Nefeste  
Matematik

Maya Kitap: 205, İnceleme: 54  
2. Baskı, İstanbul Şubat 2020

ISBN: 978-605-7605-16-0

Orijinal Adı: Maths in Bite-Sized Chunks

Copyright © Michael O'Mara Books Limited 2018.

Türkçe yayın hakları Nurcihan Kesim Telif ve Lisans Hakları Ajansı aracılığıyla Maya Kitap'a aittir. Telif hakları sahibinin izni olmaksızın, hiçbir yolla çoğaltılamaz, kopyalanamaz, dağıtılamaz.

Yayın Yönetmeni: Tahir Malkoç

Editör: Selin Saraçoğlu Bayraklı

Son Okuma: Alara Ergin

Mizanpaj: Mehmet Büyükturna

Kapak Uyarlama: Mehmet Büyükturna

Maya Kitap \* Sertifika: 14079

Gürsel Mah. Erzincan Sok. No: 36B Kağıthane / İstanbul Tel: 0212 296 97 12  
e-posta: info@mayayayinlari.com / www.mayayayinlari.com

Mutlu Basım Yayın - Bahri Mutlu \* Sertifika: 18569

Davutpaşa Cad. Güven İş Merkezi C Blok No: 256

Topkapı / İstanbul Tel: 0212 577 72 08

# Bir Nefeste Matematik

Chris Waring

*Çevirmen*

İnönü Korkmaz





## İçindekiler

|                                              |     |
|----------------------------------------------|-----|
| GİRİŞ                                        | 9   |
| <b>1 - SAYI KAVRAMI</b>                      |     |
| 1. Bölüm SAYI TÜRLERİ                        | 13  |
| 2. Bölüm CANTOR İLE SAYMAK                   | 19  |
| 3. Bölüm ARİTMETİK                           | 22  |
| 4. Bölüm TOPLAMA VE ÇARPMA                   | 28  |
| 5. Bölüm ÇIKARMA VE BÖLME                    | 36  |
| 6. Bölüm BAYAĞI KESİRLER VE ASAL SAYILAR     | 42  |
| 7. Bölüm İKİLİ SİSTEM                        | 50  |
| 8. Bölüm DOĞRULUK                            | 56  |
| 9. Bölüm KUVVETLER VE İNDİSLER               | 60  |
| <b>2 - ORAN, ORANTI ve DEĞİŞİM YÜZDELERİ</b> |     |
| 10. Bölüm YÜZDELİKLER                        | 71  |
| 11. Bölüm BİLEŞİK ÖLÇÜLER                    | 78  |
| 12. Bölüm ORANTI                             | 85  |
| 13. Bölüm ORAN                               | 93  |
| <b>3 - CEBİR</b>                             |     |
| 14. Bölüm TEMELLER                           | 97  |
| 15. Bölüm OPTİMİZASYON                       | 110 |
| 16. Bölüm ALGORİTMALAR                       | 117 |
| 17. Bölüm FORMÜLLER                          | 125 |

#### **4 - GEOMETRİ**

|           |                        |     |
|-----------|------------------------|-----|
| 18. Bölüm | ALAN VE ÇEVRE UZUNLUĞU | 137 |
| 19. Bölüm | PİSAGOR TEOREMİ        | 150 |
| 20. Bölüm | HACİM                  | 157 |

#### **5 - İSTATİSTİK**

|           |                   |     |
|-----------|-------------------|-----|
| 21. Bölüm | ORTALAMALAR       | 163 |
| 22. Bölüm | DAĞILIM ÖLÇÜTLERİ | 166 |
| 23. Bölüm | NORMAL DAĞILIM    | 171 |
| 24. Bölüm | KORELASYON        | 174 |

#### **6 - OLASILIK**

|           |                            |     |
|-----------|----------------------------|-----|
| 25. Bölüm | ŞANS                       | 179 |
| 26. Bölüm | KOMBİNASYON VE PERMÜTASYON | 184 |
| 27. Bölüm | NİSPİ FREKANS              | 187 |
|           | SON SÖZ                    | 190 |
|           | Dizin                      | 191 |





Yazarın diğerk kitapları:

*I Used to Know That: Maths*  
(Eskiden Matematiğı Böyle Bilirdik)

*Sıfırdan Sonsuza Matematiğın Öyküsü*

# GİRİŞ

Bu kitaba, matematiğin her yerde olmasına rağmen öneminin yeteri kadar anlaşılmadığı hakkında sızlanarak başlayabildim. Bu doğru, ancak bana kalırsa bunu zaten daha önce de duymuşsunuzdur ve bu kitabı seçme nedeniniz de muhtemelen bu değildir.

Ya da matematikten anlamanın veyahut matematikte iyi olmanın, özellikle de teknoloji hayatlarımızda her geçen gün daha baskın bir rol oynadığı için, iş piyasasında müthiş bir avantaj sağladığından da bahsederek söze başlayabilirdim. Matematiğe kafası basan insanlar için harikulade mesleklerin olduğu doğrudur, ancak dürüst olmak gerekirse bu kitap size bunlardan birini sağlamayacaktır.

Bunun yerine, sizlere matematik alanındaki becerinin öğrenilebileceğinden bahsederek başlamak istiyorum. Çoğumuzda bir matematik korkusu vardır. Bu bir hastalık gibidir ve bu korkuyu daha önce kendilerine bulaşmış diğer insanlardan kapmaktayız. Ebeveynimiz, arkadaşlarımız ve hatta öğretmenlerimiz bile olası taşıyıcılar olup matematiğin sadece şanslı ve bu işe yatkın bir beyinle doğmuş bir grup seçkin insan için anlaşılabilir bir şey olduğunu düşünmemize neden olmaktadır. Bu seçkin bireyler hiçbir çaba sarf etmeden matematiksel işlemleri yapabilirler ve genellikle de bizim kendimizi aptalmış gibi hissetmemize neden olurlar.

İşte bu doğru değil.

Eğer isterse, herkes matematik öğrenebilir. Evet, doğru, bu iş herhangi bir beceri gibi biraz zaman ve çaba gerektirir.

Evet, bazıları diğerlerine göre daha hızlıdır, ancak bu durum öğrenmeye değer çoğu şey için de geçerlidir. Meşgul olduğunuzu biliyorum, bu yüzden de kitabın önceliği size kolayca yutulur lokmalar sunmak. Konuları kademeli olarak öğrenebilir, her birini bir öncekinin üzerine inşa edebilir ve böylece de etrafımızı çevreleyen dünyayı gerçekten de izah eden kavramları çok çaba sarf etmeden belleğinize yerleştirebilirsiniz.

Kitabı birkaç bölüme ayırdım. Temel konuların birçoğunu zaten okulda eğitim aldığınız dönemlerden hatırlayacaksınız, ancak asıl amacım matematiğin muhtemelen daha önce görmediğiniz gerçek anlamda lezzetli parçacıklarının tadına hızlı lokmalarla varmanızı sağlamak. Kitabı en başından başlayıp sonuna dek okuyup bitirebilir ya da dilediğiniz zaman, belki de canınız çektikçe arada bir göz atabilirsiniz. Yani kısacası kitabı aynı zamanda hem altı çeşitlik bir yemek hem de açık büfe bir öğün olarak görebilirsiniz.

Ayrıca arada yemeğinizin tadı tuzu olsun diye ile keşiflerin nasıl ve kimler tarafından yapıldığına, bu sırada nelerin ters gittiğine dair kısa hikâyeler de ekledim. İlginç ve eğlenceli olmasının yanı sıra bu hikâyeler, bize matematiğin atalarımızın hayata nasıl yaklaştıkları konusunda birçok şey anlatan hayat dolu bir alan olduğunu anımsatmaktadır. Kitap ayrıca meşhur ve dâhi matematikçilerin ulaştıkları yere varabilmek için tıpkı bizler gibi çok çalışmak zorunda kaldıklarını göstermektedir.

Ziyafete hazırlanın. Umarım acıkmışsınızdır.

1

# SAYI KAVRAMI



# SAYI TÜRLERİ

İnsanların yüzde altmış dördü bir süper bilgisayara erişim sağlayabiliyor.

2017 yılında toplam insan nüfusunun 7,5 milyara ulaşmasıyla birlikte cep telefonu olan insanların sayısının da tahminen 4,8 milyara ulaştığı hesaplanmıştır. Japon asıllı Amerikalı fizikçi Michio Kaku'nun (doğumu 1947) belirttiği üzere “Bugün elinizdeki cep telefonlarının programlama gücü 1969 yılında Ay’a iki astronot indiren NASA’ dan çok daha fazladır.”

İhtiyaç duyduğumuz herhangi bir aritmetik işlemi parmağımızı ekranda hafifçe gezdirerek cep telefonlarımız üzerinden yapabiliriz. O halde neden aritmetik öğrenmeyi dert edinelim ki?

Çünkü herhangi bir aritmetik işlemi yapabilirseniz sayıların nasıl işlediğini anlamaya başlarsınız. Matematğin, sayıların nasıl işlediğini inceleyen dalına aritmetik denirdi ancak günümüzde bu sözcüğün hesaplama yapmak anlamında kullanıldığını görüyoruz. Sayıların doğasını inceleyen matematikçilere ise sayı kuramcıları ismi veriliyor ve onlar da evrenimizin matematiksel temelleriyle sonsuzluğun doğasını anlamaya çalışıyorlar.

Çok büyük iş.

Başlarken sizi bir hayvanat bahçesi gezisine götürmek istiyorum.

İnsanlar *nesneleri* saymaya ilk önce tek bir şeyle başlayıp sonrasında tüm sayıları (ya da *tam sayılar*) üst üste eklediler. Bu sayılara *doğal* sayılar denir. Şayet bu sayıları sonsuz sayıda

parmaklığı olan bir matematik hayvanat bahçesine koyacak olsaydım her bir sayı için bir parmaklığa ihtiyaç duyardık:

1, 2, 3, 4, 5, 6...

Antik Yunanlar sıfır elmadan oluşan bir kümeye sahip olamayacağımız için sıfırın doğal olmadığını düşündüler ancak biz negatif tam sayılar, yani eksi sayılarla pozitif olanlar arasındaki boşluğu doldurduğu için sıfırın doğal sayılar arasına girmesine izin veriyoruz. Şayet sıfır ile negatif tam sayıları da hayvanat bahçeme dahil edersem, şu şekilde görünecektir:

...-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6...

Artık hayvanat bahçem tüm negatif tam sayıları da içermektedir ve bu da doğal sayılarla birleştğinde *tam sayı* olarak isimlendirilen, hayali bir sayı grubunu oluşturmaktadır. Her bir pozitif tam sayıya karşılık negatif bir tam sayı bulunduğundan hayvanat bahçemin öncekine göre iki kat fazla parmaklığa bir de sıfır için ekstra yere ihtiyacı olacaktır. Bununla birlikte sonsuz matematiksel hayvanat bahçemin daha fazla büyümesine gerek yoktur çünkü zaten sonsuz büyüklüktedir. Bu durum daha önce bahsettiğim çok büyük iş için basit bir örnektir.

Tam sayı olmayan diğer sayı türleri de vardır. Elma kümeleri Yunanlara yetiyordu ancak biz bir elmanın bölünüp belirli bir sayıdaki insan grubu arasında paylaşılabileceğini biliyoruz. Bu gruptaki her bir birey elmanın bir bölümünü alacaktır; ben de hayvanat bahçeme her bir bölümden (kesir) örnek almak istiyorum.

Şayet sıfır ile bir arasındaki bütün kesirleri listelemek istersem yarımlar, üçte birler, sonra çeyrekler vs. ile başlamak mantıklı olacaktır. Bu sistemli yaklaşım hiçbirini kaçırmadan bütün kesirleri elde etmemi sağlayacaktır. Bu sebeple bütün doğal sayıları payda olarak (kesir çizgisinin altındaki sayılar) kullanmak zorunda kalacağımı kabul edebilirsiniz. Her bir farklı payda için de sıfırdan başlayıp paydanın değerine ula-



şana dek artacak olan sayıda farklı paya (kesir çizgisinin üstündeki sayı) ihtiyaç duyacağım.

### Kesirler

Kesirler, tam sayıların arasındaki sayıları belirtir; bir kesir çizgisinin üstünde bir sayı (pay) ve altında bir sayı (payda) olacak biçimde yazılırlar. Örneğin “yarım” ifadesi şu şekilde gösterilir:

$$\frac{1}{2}$$

Burada “1” pay, “2” ise paydadır. Bu biçimde yazılmasının nedeni, değerinin birin ikiye bölünmesi ile elde edilen değere eşit olmasıdır. Bir şeyi iki kişi arasında paylaşırsanız size o şeyden elde edeceğiniz kesri göstermektedir.  $\frac{3}{4}$  ise üç şeyin dört kişi arasında bölüştürülmesidir. Yani her bir birey üç tane çeyrek bölüm elde etmektedir.

Sıfır ile bir arasındaki tüm kesirleri hallettikten sonra tüm doğal sayılar arasındaki tüm kesirleri yazmak için bunu kullanabilirim. Şayet sıfır ile bir arasındaki tüm kesirlere bir eklersem bu bana bir ile iki arasındaki tüm kesirleri verecektir. Şayet onlara da bir eklersem bu sefer iki ile üç arasındaki tüm kesirlere ulaşırım. Bunu tüm doğal sayılar arasındaki kesirleri tamamlamak için yapabilirim ve negatif tam sayılar arasındaki kesirlerin tümünü tamamlamak için de birer tane çıkarabilirim.

Böylece sonsuz sayıda tam sayım olur ve artık kesirler için her birinin arasında sonsuz sayıda parmaklığa ihtiyacım var. Bu da toplamda sonsuz çarpı sonsuz sayıda parmaklığa ihtiyacım var demektir. Çok büyük bir iş gibi görünüyor ancak neyse ki hâlâ yeterli sayıda parmaklığım var.

Kesirleri oran olarak da yazmak mümkündür, dolayısıyla kesirler ayrıca *orantısal* (*rasyonel*) sayılar olarak da nitelendirilebilir. Artık doğal sayıların da içinde bulunduğu tam sayıları (tam sayılar bire bölünerek kesirler olarak da yazıldığı için) içeren tüm rasyonel sayıları hayvanat bahçeme koymuş durumdayım. Bitti.

Bir saniye! Bundan 2500 yıl önce Hindistan’da bazı matematikçiler, kesir olarak yazılamayan bazı sayıların varlığından bahsetmekteydi ve tabii ki “bazı” sayılar derken aslında sonsuz sayıda olduklarını kastediyorlardı. Karesi (kendisiyle çarpımı) iki olan bir sayı olmadığını keşfettiler, böylece ikinin karekökünün rasyonel bir sayı olmadığı anlaşıldı. Aslında ikinin karesini yuvarlamadan bir sayı olarak yazamıyoruz, bu sebeple de ikiye yaptığımız şeyi *kök* sembolünü kullanarak gösterebiliriz:  $\sqrt{2}$ . Yazılamayan bir sayıyı yazmaya çalışmak biraz beyhude bir iş olduğundan bunun yerine sembol kullandığımız gerçekten önemli diğer sayılar da mevcuttur:  $\pi$ ,  $e$ ,  $\varphi$  gibi sayılar daha sonra bakacağımız bu tip sayılara verilebilecek üç örnektir. Bu tip sayılara *irrasyonel* sayılar deriz ve bunları da hayvanat bahçeme koymam gerekir. Peki, ardışık rasyonel sayılar arasında kaç tane irrasyonel sayı olduğunu tahmin edebilir misiniz? Doğrusu, sonsuz sayıda! Her ne kadar bu konuda Cantor’un (bkz. sayfa 17) söyleyecek birkaç şeyi olsa da ekstra parmaklık inşa etmek zorunda kalmadan bu sayıları da sonsuz hayvanat bahçeme sıkıştırabilirim.

### Kareler ve Karekökler

Bir sayıyı kendisiyle çarptığımızda bu sayının karesini elde etmiş oluruz. Bu durumu üst ya da kök üssü olarak adlandırılan küçük bir iki ile gösteririz.

$$3 \times 3 = 3^2$$

Üçün karesi dokuzdur. Bu da üçü, dokuzun karekökü yapar. Karekök almak bir sayının karesinin alınmasının tam tersidir. On altının karekökü dördtür, çünkü dördün karesi on altıdır.

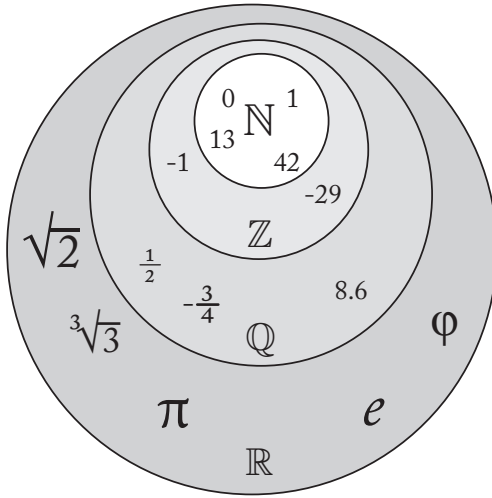
$$\sqrt{16} = 4$$

Dokuz ve on altı gibi sayılar tam karedirler çünkü bu gibi sayıların karekökü bir tamsayıdır. Kesirler ve ondalık sayılar dahil olmak üzere her sayının karesi alınabilir. Her pozitif sayının da karekökü alınabilir.

(Bu konu hakkında daha fazla bilgi için bkz. sayfa 58)

İrrasyonel sayılar ile rasyonel sayıları bir araya getirdiğimizde matematikçilerin *gerçek* (*reel*) sayılar olarak nitelendirdiği sayıları elde ederiz. Daha önce bahsettiğimiz sayıların bir örüntü oluşturduğunu (rasyonel-irrasyonel) fark ettiyseniz gerçek olmayan sayıların da var olabileceğinden şüphelenebilirsiniz ve haklısınız da. Ancak burada durup hayvanat bahçeme “Sonsuz Gerçek Sayılar Hayvanat Bahçesi” ismini vereceğim. Çoğu hayvanat bahçesi hayvanlarını türlerine göre ayırır, bu yüzden de kendi bahçemi örtüşen sayı türlerine göre organize edebilirim. Haritası şu şekilde görünebilir ve hayvanat bahçesinde geçireceğiniz gününüzü planlamanıza yardımcı olması için mutlaka görülmesi gereken birkaç yer de ekledim:

## Sonsuz Gerçek Sayılar Hayvanat Bahçesi



*Anahtar:*

$\mathbb{N}$  Doğal Sayılar

$\mathbb{Z}$  Tamsayılar

$\mathbb{Q}$  Rasyonel Sayılar

$\mathbb{R}$  Reel Sayılar

Hayvanat bahçemin Alman matematikçi David Hilbert'e (1862-1943) çok şey borçlu olduğu gerçeğini kabul etmem gerekir. Matematiğe çok büyük katkısı olmuştur ancak en çok da bu konunun lideri ve savunucusu olmasıyla bilinir. 1900 yılında Uluslararası Matematik Kongresi için -günümüzde Hilbert problemleri olarak bilinen- yirmi üç çözülmemiş problemden oluşan bir liste çıkarmıştır ve bu problemlerden üçü hâlâ çözülememiştir. Hayvanat bahçemin kaynağını oluşturan *Hilbert Oteli* düşünce deneyi, Hilbert'in sonsuz sayıda misafirin doldurduğu sonsuz sayıda odası bulunan bir otel hakkındaki derin düşünceleriyle ilgilidir. Hilbert'e göre otelin ilk müşterilerini oda numaralarını ikiyle çarpıp elde ettiğimiz yeni numarayı taşıyan odaya yerleşmeye ikna edersek, otele sonsuz sayıda müşteriye yerleştirebiliriz. Mevcut müşteriler artık çift sayılı odalarda kalacaktır ve tek sayılı odalar da (bunların sayısı da sonsuz olacaktır) yeni gelenlere kalacaktır.

# CANTOR İLE SAYMAK

Galileo Galilei (1564-1642), gezegenimizin Güneş'in etrafında döndüğüne dair kâfir inancından dolayı İtalya'da ev hapsindeyken Galileo paradoksu olarak bilinen hoş bir bulmaca ortaya atmıştır.

Bulmacaya göre bazı doğal sayılar mükemmel kareyken (bkz. Sayfa 15) çoğu değildir ve bu yüzden de kare olmayanların sayısı karelerden daha fazla olmalıdır. Ancak her doğal sayının mükemmel bir kare oluşturmak üzere karesi alınabilir. Dolayısıyla karelerin sayısı, doğal sayıların sayısına eşit olmalıdır. Bu da bir paradokstur; yani aynı anda ikisinin birden doğru olamayacağı iki mantıklı önerme sözkonusudur.

Daha önce de belirttiğim gibi sayı kuramcıları sonsuzluğun doğası ve onun tuhaf aritmetiğini ele alırlar. Sonsuz Matematik Hayvanat Bahçesi'ni gözden geçirirken kullandığımız şey olan kümeler kuramı Alman matematikçi Georg Cantor (1845-1918) tarafından icat edilmiştir. Aslında farklı türlerde sonsuzluk olduğunu bulmuştur. Kümelerin *niceliği* üzerinde çalışmıştır. Bu da kümenin kaç tane üyesi olduğu anlamına gelir. Örneğin, A kümesini Güneş sisteminin gezegenleri olarak tanımlarsam A kümesinin niceliği sekiz olur (Plüton'un neden artık bir gezegen olmadığına dair daha fazla bilgi için bkz. sayfa 132).

Cantor, sonsuz kümeleri de incelemiştir. Doğal sayılar sonsuzdur ancak Cantor bunların sayılabilir sonsuz olduğunu söyler; çünkü birden yukarı doğru saydıkça sonsuza doğru

hareket eder ve ilerleme kaydederiz. Asla sonsuzluğa varamayız ancak ona yaklaşabiliriz. Cantor doğal sayılar kümesinin bir alef sıfır ya da  $\aleph_0$  (alef, İbrani alfabesinin ilk harfidir) niceliğine sahip olduğunu belirtmiştir. İlerleme kaydettiğiniz diğer her sayı kümesinin niceliği de  $\aleph_0$  olur. Bu sebeple doğal sayılara negatif tam sayıları eklersem, onları da sayarak ilerleme kaydedeceğimden tam sayılar kümesi de  $\aleph_0$  niceliğine sahip olur.

Şayet kümem sıfırdan bire kadar tüm rasyonel sayılar olsaydı sıfırdan başlayabilir ve bire kadar giden bütün kesirleri ele almaya çalışabilirdim. Bu kesirler için tüm olası paydaları ele alırsam yine doğal sayıları elde ederim. Kesirlerin payları da ayrıca doğal sayıların çeşitli kısımları olacaktı ve sıfırdan bire kadar olan rasyonel sayılar bile  $\aleph_0$  niceliğine sahip olurdu. Bu durum bütün rasyonel sayılar kümesinin de  $\aleph_0$  niceliğine sahip olduğunu gösterecek biçimde genişletilebilir.

Galileo'nun paradoksuna geri dönecek olursak doğal sayılar kümesi ile mükemmel kare sayılar kümesinin her ikisinin de  $\aleph_0$  niceliğine sahip olduğunu ve bu yüzden de aslında aynı büyüklükte olduklarını anlayabiliriz. Artık durum bir paradoks değildir. Teşekkürler Cantor!

Gerçekte  $\aleph_0$  niceliğine sahip kümeler, her ne kadar bu liste sonsuz derecede uzun olsa da, düzenli biçimde listelenebilir. Cantor, irrasyonel sayıları incelediğinde düzenli olarak listelenemeyen kümelerin olduğunu akıl edebildi. Onun *köşegen argümanı* şayet tüm irrasyonel sayıları ondalık sayı olarak yazarsanız, yazdığınız sayılardan yeni bir irrasyonel sayı yaratabileceğinizi göstermektedir. Bunu kümeye eklediğinizde yeni kümeden yeni bir irrasyonel yaratabilirsiniz. Bu döngü asla tüm irrasyonel sayıları düzenli biçimde listeleyemeyeceğiniz anlamına gelir çünkü sürekli hariç bırakılanlar olduğunu keşfedersiniz. Cantor bu gibi kümelerin sayılamayacak derecede sonsuz olduklarını ve niceliklerinin de  $\aleph_1$  olduğunu

belirtmiştir.

Cantor ve onu takip eden çoğu matematikçi  $\aleph_0$  ile  $\aleph_1$  arasındaki bağıntıyı anlamak için çok vakit harcamışlardır. Cantor,  $\aleph_0$  ile  $\aleph_1$  arasında bir niceliğe sahip hiçbir kümenin var olmadığını belirten *süreklilik hipotezini* ileri sürmüştür; yani sayılabilen ve sayılamayan kümeler arasında hiçbir şey yoktur. Bu durum o zamandan beri süreklilik hipotezinin kümeler teorisi ile kanıtlanamadığını ya da çürütülemediğini göstermektedir.

Burada ispatlanabilen şey ise Cantor'un o zamana dek sadece düşünürler ve tanrıbilimciler tarafından ciddiye alınan bir kavramı (sonsuzluk) böylesi bir noktaya taşıdığı ve matematiğin yegâne temeli hakkında yeni bir düşünceyi harekete geçirmiş olmasıdır. Ne var ki düşüncelerinin yol açtığı anlaşmazlıklar ve tartışmalar Cantor'a büyük sıkıntılar vermiş ve hayatının ikinci yarısında başına bela olan bunalım krizlerine neden olmuştur. Süreklilik hipotezinin Hilbert problemlerinin arasına dahil edilmesi (bkz. sayfa 16), umuyoruz ki ne kadar büyük bir başarı elde ettiğini görmesini sağlamıştır. Sonsuzlukların farklı olabilecekleri düşüncesi bile hayret uyandırıcı bir şeydir doğrusu.

# ARİTMETİK

Saymayı bildiğinizi düşünerek devam edeceğim. Hayatım boyunca sayı saymayı bilmeyen bir yetişkinle hiç karşılaşmadım. Matematiğin ilk kısmını çoğunlukla daha okula gitmeden önce öğreniriz. Küçük yaştaki pek çok çocuk, daha sayıların ne anlama geldiğini öğrenmeden önce papağan gibi birden ona kadar saymayı öğrenir.

Matematiği inceleme yollarından birinin hedeflenen sonuçlara ulaşmak için kullanılabilecek belli başlı ilkeleri anlamaya dayandığı söylenebilir. Önce anlamak sonra da öğrenme süreci gelir. Buna rağmen çoğumuz anlama kısmına neredeyse hiç ulaşamaz (ya da böyle bir fırsatımız olmaz) ve sadece öğrenme süreciyle baş başa kalırız. Bu durumda ortaya çıkan asıl sorun, herhangi bir beceride olduğu gibi, ihmal ettikçe bilgilerin unutulmasıdır. İhmalle birlikte anlama süreci de zayıflar. Matematik hakkında sevdiğim şey, kuzey yarımkürede küçük bir adada yaşayan sıradan bir insan olarak benim, kökeni binlerce yıl, halk ve kültür öncesine dayanan bir akıl piramidinin tepesinde bulunuyor olmamdır. Matematik piramidinin benden çok daha yükseklerinde bulunan birçok insan var; ancak ben kariyerimi diğer insanların kendi piramitlerini kurmasına yardım etmekle geçirmeyi seçtim. Deneyimlerimden hareketle gerçekleri, algoritmaları ve işlemleri ezberlemede ne kadar iyi olduğunuzun önemli olmadığını biliyorum. Gerçek manada anlamadığınız sürece, bir noktada piramidiniz yıkılmaya mahkûmdur.

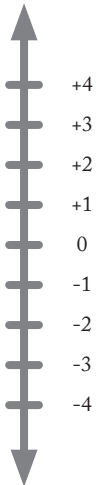
Aritmetiğin akademik yöntemlerine girmeden önce  $+$  ve  $-$  sembollerinin iki yönlü doğasına kısaca bir göz atmak istiyorum. Bu semboller Batı dünyasına ilk kez Almanya'da,



1400'lerin sonlarından itibaren takdim edilmiştir. Johannes Widmann (yaklaşık 1460-98) 1489 yılında bu sembollerin kullanıldığı en eski İngilizce yazılı kaynak olan *Neat and Nimble Calculation in All Trades* (Tüm Ticaret İşlerindeki Zekice ve Hünherli Hesaplamalar) başlıklı kitabı yazdı.

En başından itibaren sembollerin her birinin insanların birbirinden ayırmakta zorlandığı iki anlamı vardı. Sembollerin ikisi de toplamak ya da çıkarmak üzere bir *işlemi* belirtebilir veyahut pozitif ile negatif göstermek adına bir *işaret* olabilir. Semboller bir yandan komut ve tanımlama işlevi görürken bir yandan da bir eylemi ve ismi belirtir. Örneğin +3, hem “3 ekleyin,” hem de “pozitif 3” anlamına gelebilir. O halde hangi anlamda kullanıldığını nereden bileceğiz?

Matematik eğitiminde zihin aritmetiği yapmaya ya da “büyüktür” ve “küçüktür” kavramlarını anlamaya yardımcı olmak üzere sayı doğrusu kavramını kullanmak oldukça yaygındır. Sık sık öğrencilerime sayı doğrularını yatay mı yoksa dikey mi gördüklerini ve sayıların hangi doğrultuda sıralandıklarını sorarım. Eminim bu konu üzerine de çok ilginç araştırmalar yapılabilir. Yaptığım benzetme adına burada kullanacağımız sayı doğrusu tıpkı bir termometre gibi dikey olacaktır.



Burada + ve – işaretlerinin bize yanındaki sayının pozitif mi yoksa negatif mi olduğunu gösterecek biçimde tanımlayıcı olarak kullanıldıklarını görebiliriz. Genellikle pozitif sayıların başında tanımlayıcı olarak + işaretini kullanmayız ancak burada sayı doğrusunun pozitif kısmını vurgulamak üzere kullandım. Sıfır ise görebileceğimiz üzere doğrunun tam ortasındadır ve ne pozitif ne de negatiftir.

Şimdi matematiksel bir sıcak hava balonunun pilotu olduğunuzu hayal edin. Balonun ir-

tifasını değiştirmenin iki yolu vardır: balondaki ısının miktarını değiştirmek ve balondaki kum torbalarının miktarını değiştirmek. Balonun yukarıya doğru çıkmasını sağladığı için ısıyı pozitif olarak ele alacağız. Balondaki ısı miktarını da iki biçimde değiştirebilirsiniz. Brölörü kullanarak daha fazla ısı ekleyebilir ya da balonun tepesine bir delik açıp sıcak havanın dışarı çıkmasına izin vererek ısıyı azaltabilirsiniz. Balonun aşağı doğru inmesine neden olduğu için kum torbalarını da negatif olarak ele alacağız. Kum torbalarının miktarını da birazını balonun kenarından aşağı atarak ya da arkadaşınızın bir drone ile sepetinize biraz daha eklemesiyle değiştirebilirsiniz. Bu dört önerinin her birini matematiksel bir işlemlle ifade edebiliriz:

| Eylem               | Etki          |                  | Balonun hareket yönü |
|---------------------|---------------|------------------|----------------------|
| Brölörü kullanmak   | Eklemek<br>+  | Isı<br>+         | ↑                    |
| Delik açmak         | ıkarmak<br>- | Isı<br>+         | ↓                    |
| Kum torbası eklemek | Eklemek<br>+  | Kum torbası<br>- | ↓                    |
| Kum torbası atmak   | ıkarmak<br>- | Kum torbası<br>- | ↑                    |

## Hint-Arap Rakamları

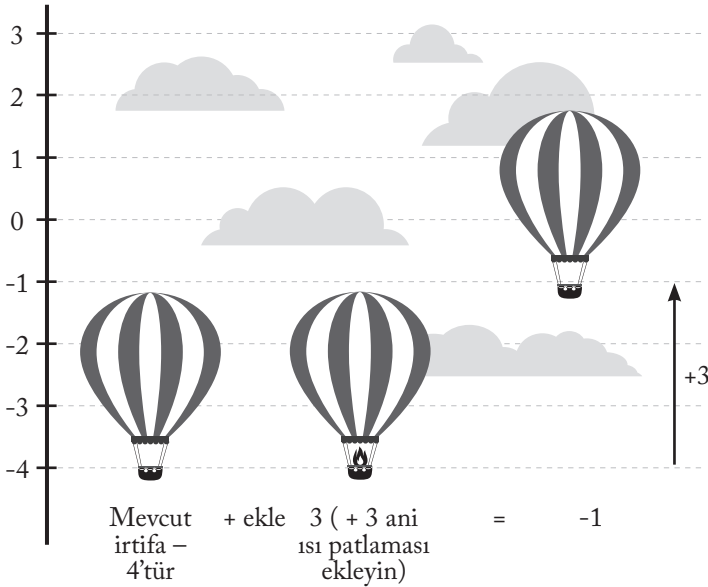
Sayıları yazma biçimimiz Hint-Arap sistemi olarak adlandırılır çünkü bu iki kültürden de birkaç önemli buluşu birleştirmektedir. Her bir basamağın bir öncekine göre on katı değerde olduğu ondalık bir sisteme dayanan sayma sistemini MS 500 yılında ilk kez kullananlar arasında Aryabhata (475-550) isimli Hintli bir gökbilimci bulunuyordu. Bir başka Hintli gökbilimci Brahmagupta ise sayılar için dokuz sembol ve boş basamağı temsil etmek için de bir nokta kullanarak (ki daha sonra bu sembol sıfır için kullandığımız 0'a dönüşmüştür) bu sistemi güzelleştirmiştir.

Yeni sistemin hesaplamada sağladığı verimlilik, sistemi popüler kılmış ve dünyanın her yerine yayılmasına neden olmuştur. Dokuzuncu yüzyıla varmadan sistem, “algoritma” sözcüğünü borçlu olduğumuz ve bu konu üzerine ilmi bir eser yazan Muhammed el Hârizmî (yaklaşık 780-850) isimli bir Arap matematikçiye ulaştı. Çalışma daha sonra Latinceye çevrildi ve bu da Batı dünyasının ilk kez bu sayılara erişmesine imkân sağladı.

Ne yazık ki sistem Avrupa’da çok fazla ilgi görmedi. Arap dünyasında eğitim gören ve ayrıca Fibonacci olarak da bilinen Pisa’lı Leonardo (yaklaşık 1175-1240) bu konuyu 1202 yılında kitabı *Liber abaci*’de kullandı. Kitap, esnaf ve matematikçileri abaküs kullanmayı bırakıp Hint-Arap sisteminin potansiyel gücünü kabul etmeye ikna etme konusunda etkili oldu. Ancak o da Latince yazılmış olduğundan birçok kişi anlamıyordu. 1522 yılında, Adam Ries (1492-1559) bu rakamların nasıl kullanılacağını izah ettiği bir kitabı anadilinde (Almanca) kaleme aldı. Bu da sonunda okuryazar olan ancak klasik eğitim almamış halkın sistemden yararlanmasını mümkün kıldı.

Tablonun son sırası çoğu insanın kabul ettiği (ya da ezberle öğrendiği) ancak nedenini gerçekten anlamadığı kısımdır. Neyse ki balon benzetmesinin biraz yardımı dokunacaktır.

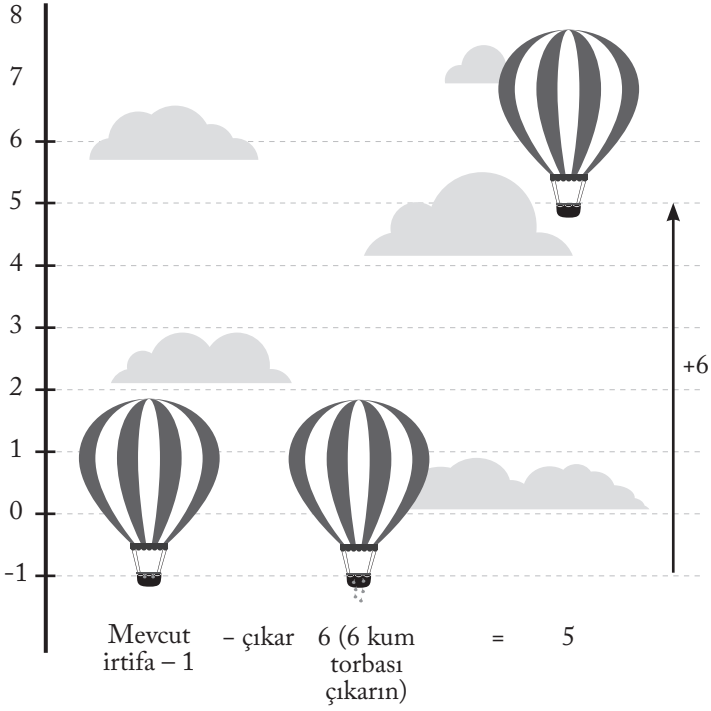
Artık balonumuzun yukarı ve aşağı nasıl hareket ettirildiğini, yani matematikçilerin işlem dediği şeyi aydınlığa kavuşturmuş oluyoruz. Şayet irtifamızı, yani sayı doğrusunda konumumuzu, hesaplamak istiyorsak bir hesaplama yapmamız gerekir. Hesaplamadaki ilk sayı mevcut irtifamızı ve hesaplamamızın geri kalanı ise hangi eylemin yerine getirileceğini göstermektedir. Örneğin,  $-4 + 3$ 'ü şu şekilde yorumlayabiliriz:



Burada balon sayı doğrusunda üç sıra yükselip  $-4$ 'ten  $-1$ 'e çıkacaktır<sup>1</sup>. Bu yüzden  $-4 + 3 = -1$  olur.

İçinde bir sürü negatfin bulunduğu birazcık daha hileli bir örnek  $-1 - 6$  olacaktır ve şu şekilde yorumlayabiliriz:

<sup>1</sup> Gerçek bir sıcak hava balonunun yükselmeye devam edeceğinin tamamıyla farkındayım. Bu yüzden de bu balonun fiziksel değil matematiksel bir balon olduğunu belirttim.



Altı kum torbasının sepetin kenarından atılması balonun altı basamak yükselmesine neden olur, böylece  $-1 - -6 = 5$ .

Mademki balonumuzun ne zaman yükselip ne zaman alçalacağını biliyoruz artık daha karmaşık aritmetik hesaplara ve dört işlemin geri kalanına bakabiliriz.

# TOPLAMA VE ÇARPMA

Konu daha büyük sayıları kâğıt üstünde toplama işlemi olduğunda kullandığımız yöntemlerin hepsi basamak değeri ile sayıya kodlanan bilgiye dayanmaktadır. Bildiğimiz üzere 1234 rakamları ile bin iki yüz otuz dört sayısı temsil edilmektedir. Bunun nedeni ise sayıdaki her bir basamağın buna karşılık gelen bir değeri olmasıdır. Bunlar sağdan başlayarak birler (genellikle bu şekilde isimlendirilir), onlar, yüzler, binler, on binler vs. biçimindedir ve sola doğru ilerledikçe her basamakta on kat büyürler. Bu sebeple 1234 sayısı dört tane bir (4), üç tane on (30), iki tane yüz (200) ve bir tane bin (1000) içerir. Yani 1234'ü şu şekilde yazabilirim;

$$1234 = 4 + 30 + 200 + 1000$$

Buna matematik öğretmenleri tarafından “uzatılmış biçim” adı verilmektedir ve toplamaların nasıl işlediğini anlamakta gerçekten işe yaramaktadır. Örneğin  $1234 + 5678$ 'i düşünün. Şayet her bir sayıyı uzatılmış biçimde yazarsam:

$$1234 = 4 + 30 + 200 + 1000$$

$$5678 = 8 + 70 + 600 + 5000$$

Her bir eşleşen basamak değerini kolayca birlikte toplayabilirim:

$$\begin{aligned} 1234 + 5678 : \quad & 4 + 8 = 12 \text{ (birler)} \\ & 30 + 70 = 100 \text{ (onlar)} \\ & 200 + 600 = 800 \text{ (yüzler)} \\ & 1000 + 5000 = 6000 \text{ (binler)} \end{aligned}$$

Buradan  $1234 + 5678 = 12 + 100 + 800 + 6000 = 6912$  olduğunu anlayabilirim.

Okulda bize öğretilen yöntem ise bu sürecin kısaltılmış biçimiydi. Birbirine karşılık gelen basamakları alt alta yazıp sağdan sola doğru topluyoruz:

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ + & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline \end{array}$$

İlk toplama işlemi  $4 + 8 = 12$  olur. Tek basamaklı yanıt kutusuna 12 yazamayız ancak  $12 = 10 + 2$ 'dir bu yüzden 2'yi bu kutuda bırakıp 10'u bir sonraki hesaplama taşıyoruz.

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ + & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline & & & & 2 \end{array}$$

Teknik olarak bir sonraki basamağın toplamı  $10 + 30 + 70 = 110$ 'dur, ancak burada onlar basamağında işlem yaptığımız için kaç tane onumuz olduğuna bakmalıyız; toplamda  $1 + 3 + 7 = 11$  tane onumuz vardır. Bu yüzden yine bu basamağa sığamayacak kadar rakamımız bulunmaktadır.  $11 = 10 + 1$ , yani onlar basamağına bir tane 1 yazıp diğer 1'i yüzler basamağına taşıyoruz:

$$\begin{array}{rcccc}
 & & 1 & & 1 \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 + & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 \hline
 & & & 1 & 2
 \end{array}$$

$$100 + 200 + 600 = 900:$$

$$\begin{array}{rcccc}
 & & 1 & & 1 \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 + & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 \hline
 & & 9 & 1 & 2
 \end{array}$$

$$\text{Ve son olarak da } 1000 + 5000 = 6000:$$

$$\begin{array}{rcccc}
 & & 1 & & 1 \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 + & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 \hline
 & 6 & 9 & 1 & 2
 \end{array}$$

Çarpma işlemi ise tekrarlayarak toplama işlemi yapmanın hızlı bir yoludur.  $12 \times 17$  sorusu aslında “On iki çarpı on yedi kaç eder?” diye sormaktadır. Yanıtı on iki tane on yediyi ya da on yedi tane on ikiyi toplayarak bulabilirim; ancak çarpım tablosunu önceden öğrenmişseniz çarpma işlemi çok daha hızlıdır.

Elimde birçok marka olduğunu düşünün.  $12 \times 17$  problemini her biri on yedi tane marka içeren on iki sıra oluşturarak ve sonra da bunları toplayarak çözebilirim:



|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |

Bununla birlikte şayet 12'yi  $10 + 2$  ve 17'yi de  $10 + 7$  olarak düşünürsem, o halde markaları şu şekilde gruplandırabilirim:

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • | • |

Çarpım tablosunu bildiğim için her bir alt bölümde kaç

tane markanın olması gerektiğini biliyorum:

|    |                      |                    |
|----|----------------------|--------------------|
|    | 10                   | 7                  |
| 10 | $10 \times 10 = 100$ | $10 \times 7 = 70$ |
| 2  | $2 \times 10 = 20$   | $2 \times 7 = 14$  |

Dolayısıyla  $12 \times 17 = 100 + 70 + 20 + 14 = 204$  olduğunu artık biliyorum. Bu yöntemle (204 markayı çıkarma) “ızgara yöntemi” adı verilir. Şimdi ise  $293 \times 157$  problemini çözmek için biraz daha gelişmiş bir modeli görelim:

|     |                          |                        |                      |
|-----|--------------------------|------------------------|----------------------|
|     | 200                      | 90                     | 3                    |
| 100 | $100 \times 200 = 20000$ | $100 \times 90 = 9000$ | $100 \times 3 = 300$ |
| 50  | $50 \times 200 = 10000$  | $50 \times 90 = 4500$  | $50 \times 3 = 150$  |
| 7   | $7 \times 200 = 1400$    | $7 \times 90 = 630$    | $7 \times 3 = 21$    |
|     | 31400                    | 14130                  | 471                  |

Muhtemelen bütün bu çarpma işlemlerini, özellikle çarpım tablomuzdaki sayılardan çok büyük olan bu sayılar için nasıl kafamdan yaptığımı merak ediyorsunuzdur. Aslında çok havalı bir hilesi var. Herhangi bir tam sayıyı on ile çarptığım zaman sayının sonuna bir sıfır ekliyorum. Yani  $100 \times 200$  için 100’ün  $1 \times 10 \times 10$  ve 200’ün de  $2 \times 10 \times 10$  olması gerektiği-

## Ondalık Sistem

Basamak değerinin tasarımının her iki yönde de genişletilebileceğine dikkat etmek gerekir. Birler basamağından sağa doğru ilerledikçe her adımda basamak değeri on kat düşer ve onlar, yüzler, binler vs. basamağı elde ederim. Artık en sağdaki basamağın birler olmadığını göstermek adına bir ondalık virgülü kullanıyorum. Bu da ondalık sayıları veriyor. Burada, örneğin  $45,3 + 27,15$ 'i toplamak için yukarıdakiyle aynı kuralları kullanabilirim:

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 4 \quad 5 \quad . \quad 3 \quad 0 \\
 + \quad 2 \quad 7 \quad . \quad 1 \quad 5 \\
 \hline
 7 \quad 2 \quad . \quad 4 \quad 5
 \end{array}$$

$45,3$ 'ün sonuna basamakları eşleştirip toplamayı daha belirgin bir şekilde yapmak üzere bir sıfır eklediğime dikkat ediniz (bu durum, özellikle çıkarma işlemi için önemlidir). Bunu  $45,3$  ile  $45,30$  aynı olduğu için yapabiliyorum: üç tane ona, sıfır tane yüz eklediğimizde sonuç hâlâ üç tane ondur. Bu yüzden matematikçiler  $45,30$  için kırk beş virgöl otuz yerine kırk beş virgöl üç sıfır ifadesini kullanırlar.

ni biliyorum. Bunların hepsini bir araya getirirsem:

$$\begin{aligned}
 100 \times 200 &= 1 \times 10 \times 10 \times 2 \times 10 \times 10 \\
 &= 1 \times 2 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \\
 &= 2 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10
 \end{aligned}$$

Her bir  $\times 10$ 'un, 2'den sonra bir sıfır anlamına geldiğini hatırlayacak olursam  $100 \times 200 = 20000$  sonucunu elde ederim. Ne zaman bir ızgara çarpımı yapsam bu sürecin tamamını gerçekleştiriyorum. Sadece ilk basamakları çarpıp daha sonra hesaplamada ne kadar çok sıfır varsa bunun sağına ekliyorum. Bu yüzden  $50 \times 200$  için düşünce yöntemime göre  $5 \times 2 = 10$  ve daha sonra üç tane sıfır eklemeliyim. Böylece  $50 \times 200 = 10000$ . Tam isabet!

Izgarama geri dönecek olursam, her bir basamağı topladığımı görebilirsiniz. Nihai yanıtlım  $31400 + 14130 + 471$  olacaktır ki bunu da toplayacak olursak:

$$\begin{array}{r}
 \phantom{00000} \phantom{00} 1 \phantom{00} 1 \\
 \phantom{00000} 3 \phantom{00} 1 \phantom{00} 4 \phantom{00} 0 \phantom{00} 0 \\
 \phantom{00000} 1 \phantom{00} 4 \phantom{00} 1 \phantom{00} 3 \phantom{00} 0 \\
 + \phantom{00000} \phantom{00} \phantom{00} 4 \phantom{00} 7 \phantom{00} 1 \\
 \hline
 \phantom{00000} 4 \phantom{00} 6 \phantom{00} 0 \phantom{00} 0 \phantom{00} 1
 \end{array}$$

Son olarak cevap:  $293 \times 157 = 46001$  olur.

Uzun çarpım yöntemi dahil olmak üzere başka yöntemleri de vardır ancak işe yarar bir yönteminiz varsa bırakmayın sakın. Şimdi toplama ve çarpmanın çok yakın dostları çıkarma ve bölmeye geçelim.

## Napier'in Kemikleri

John Napier (1550-1617), çarpma işlemi için Napier'in kemikleri olarak bilinen bir dizi çubuk icat eden İskoçyalı bir matematikçi, gökbilimci ve simyacıydı. Bu sistem her bir çarpım tablosu için bir çubuk içeriyordu. Örneğin 3 için çarpım tablosu çubuğu şu şekilde olacaktır:

|       |
|-------|
| 3     |
| 0 / 3 |
| 0 / 6 |
| 0 / 9 |
| 1 / 2 |
| 1 / 5 |
| 1 / 8 |
| 2 / 1 |
| 2 / 4 |
| 2 / 7 |
| 3 / 0 |

Örneğin, şayet  $9 \times 371$ 'i hesaplamak istiyorsanız üç, yedi ve bir için çarpım tablosu çubuklarını yan yana koyup dokuzuncu sıraya kadar okuyorsunuz ki bu da şu şekilde görünür:

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| 2 / 7 | 6 / 3 | 0 / 9 |
|-------|-------|-------|

Daha sonra sağdan başlayarak her bir çapraz çizgi-deki sayıları topluyorsunuz. Şayet toplam dokuzdan büyükse bir sonraki çizgiye devam ediyorum:

|   |       |       |       |
|---|-------|-------|-------|
|   | 1     |       |       |
| 3 | 2 / 7 | 6 / 3 | 0 / 9 |
| 3 | 3     | 3     | 9     |

Böylece  $9 \times 371 = 3339$  eder.

Napier'in sihirbazlığa merak saldığı üzerine söylentiler vardı. Belirli aralıklarla hizmetçilerine, içinde bir kuş bulunan bir odaya yalnız başına girmelerini ve kuşu okşamalarını emredermiş. Kuşun onların sadakatini hissettiğini de söylemiş. Aslında Napier kuşun tüylerine is sürermiş. Vicdanen suçluluk hissedenden kuşu okşamazlar ve ellerine is bulaşmadan dışarı çıkarlarmış. Böylece de kurnaz Napier tarafından suçlu bulunurlarmış.

## 5. Bölüm

# ÇIKARMA VE BÖLME

Çıkarma işlemi toplama ile çok benzer biçimde gerçekleştirilir. Örneğin  $6543 - 5678$  şöyle hesaplanır:

$$\begin{array}{rcl} 6543 - 5678 : & 3 - 8 = - 5 \\ & 40 - 70 = - 30 \\ & 500 - 600 = - 100 \\ & 6000 - 5000 = 1000 \end{array}$$

Buradan ise  $- 5 + - 30 + - 100 + 1000 = - 135 + 1000 = 865$  sonucuna ulaşırım. Yine basamak yöntemimizi kullanabilirsiniz ancak toplamada bir basamakta çok fazla sayı olmasını önlemek için kullandığımız diğer basamağa taşıma sisteminin tersine ihtiyacımız var. Daha önce yaptığım gibi devam edecek olursam:

$$\begin{array}{rcccc} & 6 & 5 & 4 & 3 \\ - & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & -5 \end{array}$$

Pek de mantıklı görünmüyor, değil mi? Burada *ödünç almaya* ihtiyaç duyuyorum. Aslında öğrencilerimden birinin işaret ettiği üzere ödünç alınan miktar asla geri dönmediği için bu işlem için *çalmak* çok daha doğru bir kelime olacaktır.

$3 - 8$ 'in bir negatif sayı verdiğini fark ettiğimde bir sonraki basamaktan ödünç alarak 3'ü artırıyorum. Soldaki basa-

maktaki 4'ün üstünü çizip onun değerini bir düşürüyorum. Ödünç almış olduğum “bir” aslında on değerinde olduğu için birler basamağındaki 3 aslında 13'e yükselir. Böylece  $13 - 8 = 5$  olur:

$$\begin{array}{r} \phantom{-}\phantom{6}\phantom{5}\phantom{4}\phantom{^{13}} \\ -\phantom{6}\phantom{5}\phantom{4}\phantom{7}\phantom{8} \\ \hline \phantom{6}\phantom{5}\phantom{4}\phantom{7}\phantom{8} \end{array}$$

Bir sonraki basamak da  $3 - 7 = -4$  şeklinde negatif bir sonuç verecektir. Yine kapı komşusu yüzler basamağından bir ödünç alırım. Yüzün değeri on tane on olduğu için elimdeki 3 tane onu 13 tane ona yükseltir böylece şu şekilde devam edebilirim:

$$\begin{array}{r} \phantom{-}\phantom{6}\phantom{5}\phantom{7}\phantom{8} \\ \phantom{-}\phantom{6}\phantom{5}\phantom{7}\phantom{8} \\ -\phantom{6}\phantom{5}\phantom{7}\phantom{8} \\ \hline \phantom{6}\phantom{5}\phantom{7}\phantom{8} \end{array}$$

Ancak devam etmeden önce yüzler basamağı için de bir başka ödünç alma işlemine ihtiyacım var ve görünüşe bakılırsa binler basamağımın değeri sıfıra düşecektir:

$$\begin{array}{r} \phantom{0}5 \phantom{0}^{14} \phantom{0}^{13} \\ \phantom{0}6 \phantom{0}^5 \phantom{0}^4 \phantom{0}^{13} \\ - \phantom{0}5 \phantom{0}^6 \phantom{0}^7 \phantom{0}^8 \\ \hline \phantom{0}0 \phantom{0}^8 \phantom{0}^6 \phantom{0}^5 \end{array}$$

Böylece  $6543 - 5678 = 865$  olduğunu anlayabiliriz.

Önceki bölümde toplama ile çarpmanın birbiriyle yakından bağıntılı olduğunu görmüştük. Benzeri, çıkarma ve bölme için de geçerlidir.  $3780 \div 15$  işlemi bize aslında “3780’de kaç tane on beşin olduğunu” yani “3780’den kaç kez on beşin çıkarılabileceğini” sormaktadır. Aslında bu düşünce biçimi *yığma* adı verilen bir bölme yönteminin anahtarıdır. Bu yöntemde sıfıra ulaşana dek bölenin katlarını çıkarmayı sürdürüyorum.

$2 \times 15 = 30$  olduğunu buradan da  $200 \times 15$ ’in de 3000 olması gerektiğini biliyorum. Bunu 3780’den çıkararak başlıyorum:

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 7 \quad 8 \quad 0 \\
 - \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 200 \\
 \hline
 7 \quad 8 \quad 0
 \end{array}$$

Buradan elimde 780 kalır.  $4 \times 15 = 60$  yani  $40 \times 15 = 600$  eder. Daha sonra bunu da çıkarırım:

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 7 \quad 8 \quad 0 \\
 - \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 200 \\
 \hline
 7 \quad 8 \quad 0 \\
 - \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 40 \\
 \hline
 1 \quad 8 \quad 0
 \end{array}$$



Son olarak on iki tane daha on beşi iki işlemle çıkarırım:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 3 \quad 7 \quad 8 \quad 0 \\
 - \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 200 \\
 \hline
 \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 7 \quad 8 \quad 0 \\
 - \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 40 \\
 \hline
 \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad 8 \quad 0 \\
 - \quad 1 \quad 5 \quad 0 \quad 10 \\
 \hline
 \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 3 \quad 0 \\
 - \quad 3 \quad 0 \quad 2 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Artık  $200 + 40 + 10 + 2 = 252$  tane 15 çıkardığımı biliyorum. Yani  $3780 \div 15 = 252$  olur. Çarpmada ne kadar iyiyseniz burada o kadar az sayıda yığın alma basamağından geçebileceğinizi anlayabilirsiniz.

Çok korkulan uzun bölme (kalanlı bölme) yöntemi de çok benzer ilkelerle çalışmaktadır. Burada problemi *otobüs durağı* ismini verdiğim bir düzende kurguluyorum:

$$15 \overline{) 3 \quad 7 \quad 8 \quad 0}$$

Soldan başlıyorum. 15 sayısı iki haneli olduğu için 3 ve 7'ye bakıyorum – 37 sayısında kaç tane 15 vardır? İki kez. Bu da bize 30'u verir ve sonra geriye kalanı çıkarma işlemini kullanarak hesaplıyorum:

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 15 \overline{) 3 \quad 7 \quad 8 \quad 0} \\
 - \quad 3 \quad 0 \\
 \hline
 7
 \end{array}$$

Dikkatimi şimdi elde ettiğim 7'ye ve bu 7'nin yanına yazacağım 8'e çeviriyorum. 78'de kaç tane on beş var? Bildiğim kadarıyla beş tane on beş 75 eder:

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 15 \overline{) 3780} \\
 - \underline{30} \quad \downarrow \\
 78 \\
 - \underline{75} \\
 3
 \end{array}$$

Son olarak sıfırı elde ettiğim sayının yanına indiriyorum ve 30 sayısında kaç tane on beşin bulunduğuna dikkat ediyorum:

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 15 \overline{) 3780} \\
 - \underline{30} \quad \downarrow \quad | \\
 78 \\
 - \underline{75} \quad \downarrow \\
 30 \\
 - \underline{30} \\
 0
 \end{array}$$

Kısa bölme işlemi de tıpkı uzun bölme gibidir ancak tek farkı kalanları kafamızdan hesaplayıp bunları elde sayıları olarak yazarız. Kısa bölme işlemi kesirleri ondalık sayılara çevirmekte kullanışlıdır. Şayet  $\frac{5}{8}$ 'in bir ondalık sayı olarak ne olduğunu öğrenmek istiyorsam  $5 \div 8$ 'i hesaplayabilirim:

$$8 \overline{) 5}$$

Sekiz sayısı 5'in içinde sıfır kez vardır ve geriye 5 kalır. Bu geriye kalanı bir ondalık virgülü ve bir başka sıfır yazana dek koyabileceğim herhangi bir yer yoktur. Bunu yapabiliyorum çünkü  $5 = 5,0$  ve buna karşılık gelen bir sıfırı yukarı yazıyorum:

$$\begin{array}{r} 0, \\ 8 \overline{) 5, \text{ } ^50} \end{array}$$

50 içinde 8 ise 6 kez vardır ve kalan da 2'dir (ondalık virgülden sonra gerektiği kadar sıfır ekleyebilirim):

$$\begin{array}{r} 0, \quad 6 \\ 8 \overline{) 5, \text{ } ^50 \text{ } ^20} \end{array}$$

20 içinde 8 ise iki kez vardır ve geriye 4 kalır:

$$\begin{array}{r} 0, \quad 6 \quad 2 \\ 8 \overline{) 5, \text{ } ^50 \text{ } ^20 \text{ } ^40} \end{array}$$

Ve 40 sayısında ise tam olarak beş tane sekiz vardır:

$$\begin{array}{r} 0, \quad 6 \quad 2 \quad 5 \\ 8 \overline{) 5, \text{ } ^50 \text{ } ^20 \text{ } ^40} \end{array}$$

Yani artık  $\frac{5}{8} = 5 \div 8 = 0,625$  olduğunu biliyoruz. Her ne kadar daha zor olanları için uzun bölmeyi kullanmayı tercih edebilirsiniz de bu yöntem her bayağı kesir için işe yarayacaktır. Bir sonraki bölümde bu kadar kolay hesaplanamayan bazı bayağı kesirleri inceleyeceğiz.

# BAYAĞI KESİRLER VE ASAL SAYILAR

Bir bayağı kesrin nasıl ondalık sayı olarak ifade edildiğini az önce öğrendik. Şimdi  $\frac{1}{3}$ 'e bir bakalım çünkü burada ilginç bir şeyler oluyor:

$$3 \overline{) \begin{array}{r} 0, 3 \ 3 \ 3 \ \dots \\ 1, \ 10 \ 10 \ 10 \ \dots \end{array}}$$

Hemen bir döngünün gerçekleştiğini fark ediyoruz; on sayısında üç, üç kere vardır ve geriye bir kalır ve bu durum sonsuza dek tekrarlanır. Bu durumun görüldüğü ondalık sayılara *tekrarlanan* denir ve tekrar eden hanenin üstüne bir devir çizgisi ekleriz:

$$\frac{1}{3} = 0,\bar{3}$$

Durum yedide bir için çok daha ilginç bir hal alır:

$$7 \overline{) \begin{array}{r} 0, \ 1 \ 4 \ 2 \ 8 \ 5 \ 7 \ 1 \ 4 \ 2 \ 8 \ 5 \ 7 \ 1 \ 4 \ 2 \ 8 \ 5 \ 7 \ \dots \\ 1, \ 10 \ 30 \ 20 \ 60 \ 40 \ 50 \ 10 \ 30 \ 20 \ 60 \ 40 \ 50 \ 10 \ 30 \ 20 \ 60 \ 40 \ 50 \ \dots \end{array}}$$

Burada elimde tekrarlanan bir haneler dizisi bulunmaktadır. Bunu tüm dizinin üstüne bir devir çizgisi ekleyerek gösterebilirim:

$$\frac{1}{7} = 0,\bar{142857}$$

Dahası paydası 7 olan diğer kesirler de benzer diziyi kul-  
lanır, yalnızca farklı başlangıç ve bitiş noktalarına sahiptir.

$$\begin{aligned}\frac{2}{7} &= 0,\bar{2}8571\bar{4} \\ \frac{3}{7} &= 0,\bar{4}2857\bar{1} \\ \frac{4}{7} &= 0,\bar{5}7142\bar{8} \\ \frac{5}{7} &= 0,\bar{7}1428\bar{5} \\ \frac{6}{7} &= 0,\bar{8}5714\bar{2}\end{aligned}$$

Canınız biraz daha zorlu bir şey çektiyse dokuzları bir deneyin!

Bir bayağı kesrin paydasına bakarak tekrarlayıp tekrarlanmayacağını söyleyebilirim. Paydayı alıp onun katlarını (10, 100, 100 vs.) elde etmek üzere herhangi bir şeyle çarpabilirim. Şayet yapabiliyorsam dönüştürdüğümde ondalık sütunlarda sorunsuzca yerleşmesini sağlayabilirim.

Bunu yapmadan önce *denk kesirler* adı verilen çok önemli bir matematiksel kavrama göz atmamız iyi olur. Buna göre aynı değere sahip farklı bayağı kesirler elde edebiliriz. Bunu anlamının bir yolu konuyu pizza üzerinden somutlaştırmaktan geçer. Bir pizzayı iki kişi arasında yarıya bölerek paylaşabilir ve her birimiz de kendi yarımızı farklı sayıda dilimlere bölebilir ve yine de aynı miktarda pizzayı yiyebiliriz. Benzer biçimde hepimiz daha okul hayatımızın erken dönemlerinde bir yarımın iki çeyrek ve ayrıca üç bölü altı vesaire gibi kesirlerden oluştuğu düşüncesini kavramışızdır:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

Bir matematik öğretmeni size, “Kesir çizgisinin üzerinde ne yapıyorsan altında da aynısını yap,” demiştir muhtemelen. Ancak yüksek ihtimalle söylemedikleri şey, bunun denkliği koruduğudur.

Bu, bana bayağı kesirleri ondalıklara çevirmek için bir başka yöntem sunar. Örneğin  $\frac{51}{250}$  gibi bir kesir, pek de bölmek

için can atacağım bir şey değildir. Ancak pay ile paydayı dörtle çarparsam, şöyle bir şey elde ederim:

$$\frac{51}{250} = \frac{51 \times 4}{250 \times 4} = \frac{204}{1000} = 0,204$$

İşlem tamam. Kafa yoracağım bir sonraki şey ise paydayı, onun kuvvetini elde edebilecek şekilde çarpıp çarpamayacağımı nereden anlayacağımdır.

Bunu sınamak için *asal sayılar* kavramını anlamamız gerekir. Bu sayılar çok uzun bir zamandır matematikçileri büyülemiştir. Kısa ve öz bir şekilde ifade etmek gerekirse bir asal sayı tam olarak iki çarpanı olan bir doğal sayıdır. Örneğin sekiz sayısı sırasıyla bir, iki, dört ve sekizin kendisine bölünebilir ve dolayısıyla dört çarpanı olduğundan asal bir sayı değildir. Beş ise iki çarpana sahiptir, bir ve beş; bu yüzden de bir asal sayıdır. Bir ise tek bir çarpana sahiptir, o da birin kendisidir; bu sebeple de asal sayı değildir. Bu yüzden de “sadece kendisine ve bire bölünen sayı” diye açıklanan saçmalığı unutup gitsin. En baştan başlayarak asal sayıların birkaçını şöyle sıralayabiliriz; 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23...

Asal sayıların bu denli müthiş olmasının nedenlerinden biri aritmetiğin *asal çarpanlara ayırma* olarak adlandırılan kuramıdır. Bu kurama göre her bir doğal sayı asal sayıların çarpımı olarak yazılabilir, ancak sadece bir şekilde. Örneğin:

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

Asal sayıların 30’u elde etmek üzere çarpımının bundan başka hiçbir birleşimi yoktur. İki, üç ve beş sayıları otuzun *asal çarpanlarıdır*. Bana göre bu durum asal sayıları matematiksel DNA yapar; her sayı eşsizdir ve sayılar arasında endişelenmemizi gerektiren ikizler ya da klonlar bulunmaz! Hatta 223.092.870 gibi çok büyük bir sayı bile asal sayılar ile sadece bir şekilde yazılabilir (bu da aslında  $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23$ ’e eşittir).

Peki, bu durumun bayağı kesirlerde bana nasıl bir faydası olur? Aslında daha önce bir bayağı kesrin sonlandırılması için paydasını on sayısının bir katına dönüştürebilmem gerektiğinden bahsetmiştim. On sayısının asal çarpanları şöyledir:

$$10 = 2 \times 5$$

Yüz sayısının asal çarpanlarını elde etmek için ise şunu hatırlamak yeterlidir:

$$\begin{aligned} 100 &= 10 \times 10 \\ &= \underline{2 \times 5} \times \underline{2 \times 5} \end{aligned}$$

Böylece on sayısının asal çarpanları iki ile beş olur ve aynı şey yüz sayısı için de geçerlidir (sadece biraz fazla sayıda iki ve beş gerekir). Buradan on sayısının herhangi bir katının asal çarpanlarının sadece iki ve beş olduğunu anlayabiliriz. Bu yüzden şayet paydamın asal çarpanları herhangi bir şekilde ikiler ya da beşlerin birleşiminden oluşuyorsa o halde bunu on sayısının katını elde edebilecek şekilde çarpmanın da bir yolu vardır demektir. Yukarıda verdiğim bayağı kesir 250 gibi bir paydaya sahipti ve bu da şu şekilde yazılabilir:

$$250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5$$

Bu birleşim sadece ikiler ve beşlerden oluşmaktadır. Yukarıda bu sayıyı 1000'i elde edecek şekilde  $2 \times 2$  olan dört ile çarpmıştım. Şayet payda 240 olsaydı:

$$240 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

olurdu. Bu sefer çarpım birleşiminde bir tane üç var. Yani en basit haliyle paydası 240 olan herhangi bir bayağı kesir tekrarlanacaktır. Örneğin:

$$\frac{73}{240} = 0,3041\bar{6}$$

Diğer yandan ise:

$$\frac{120}{240} = \frac{120 \div 120}{240 \div 120} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Bu bayağı kesir en basit haliyle artık iki ya da beşten başka bir paydaya sahip olamaz ve bu yüzden de sonlanır.

## Bayağı Kesirleri Toplama ve Çıkarma

Hazır bayağı kesirler konusundayken aritmetik hesaplamalarını yeniden özetlemek yerinde olacaktır. Toplama ya da çıkarma yapmak için bayağı kesirleri aynı paydaya sahip olacak şekilde dönüştürmek gerekir. Bunu en etkili biçimde yapmak için de her iki paydanın da çarpanı olduğu en düşük sayıyı aramamız gerekir: *en küçük ortak çarpan*. Örneğin sekizde beş ile on ikide yediyi toplamak istersem, sekiz ile on ikinin her ikisinin birden çarpanı olduğu en küçük sayıyı belirlemem gerekir. Çarpım tablosundan hemen hem sekiz hem de on ikinin içinde bulunduğu yirmi dördü belirleriz:

$$\begin{aligned} & \frac{5}{8} + \frac{7}{12} \\ &= \frac{5 \times 3}{8 \times 3} + \frac{7 \times 2}{12 \times 2} \\ &= \frac{15}{24} + \frac{14}{24} \\ &= \frac{29}{24} \end{aligned}$$

Buna payı paydasından büyük olduğu için en ağır ya da *bileşik* kesir denir. Bu, matematikte lise seviyesine ya da eş-değerine ulaşana dek kabul edilmez bir durumdur nedense. Bence bunun nedeni her ne kadar bileşik kesirlerle hesaplamalar yapmak daha kolay olsa da ilk bakışta tam sayılı kesirleri anlamının daha kolay olmasıdır. Bileşik bir kesri karma kesre çevirmek için  $\frac{24}{24} = 1$  olduğunu fark etmem gerekir. Bu da şu anlama gelir:

$$\frac{29}{24} = \frac{24}{24} + \frac{5}{24} = 1 \frac{5}{24}$$

Çıkarma işlemi de benzer biçimde gerçekleştirilir:

$$\begin{aligned} & \frac{5}{9} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{5 \times 4}{9 \times 4} - \frac{1 \times 9}{4 \times 9} \\ &= \frac{20}{36} - \frac{9}{36} \\ &= \frac{11}{36} \end{aligned}$$

En küçük ortak çarpan 36'dır. Denkliği, paydası 36 olan kesirlere dönüştürmek üzere kullanın.



## Bayağı Kesirleri Çarpma ve Bölme

Çarpma işlemi çok kolaydır; payları ve paydaları birbirleriyle çarpalım. Örneğin:

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{5 \times 2} = \frac{3}{10}$$

Bir bayağı kesir ile çarpım yaptığınızda toplam değerin küçüldüğünü belirtmekte yarar vardır. Ayrıca burada bir yarım değeri ( $1/2$ ) bayağı kesirleri bölmeye bize yardımcı olacak bir şeyi vurgulamak üzere özellikle seçtim. Yukarıda bir yarım değer ile çarpımın aslında ikiye bölmeye eşdeğer olduğunu görebiliyoruz. Ve benzer biçimde üçte bir değerle çarpım da aslında üçe bölmeye eş olacaktır. Bu ilişkiye bir sayının *tersi* denir. İki ile yarım ( $1/2$ ) birbirlerinin tersidir ve şayet iki sayısını bayağı bir kesir olarak yazacak olursam bu durumun nasıl işlediği açıklığa kavuşur:

$$\frac{1}{2} \text{ tam olarak } \frac{2}{1} \text{ 'in tersidir.}$$

Herhangi bir sayıya bölmek, onun tersi ile çarpmanın aynı olmasından dolayı aslında bu oldukça kullanışlıdır.

$$5 \div 3 = 5 \times \frac{1}{3}$$

Bu bilgiyi bayağı kesirleri bölmek için kullanabilirim:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \div \frac{5}{8} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{8}{5} \\ &= \frac{2 \times 8}{3 \times 5} \\ &= \frac{16}{15} \\ &= 1\frac{1}{15} \end{aligned}$$

On beşin asal çarpanları üç ile beştir ve bu yüzden  $1\frac{1}{15}$  bir ondalık sayı olarak devirli sayı olacaktır.

## Asal Sayıların Bulunması

Asal sayıların matematikçiler tarafından bu denli ilgi odağı olmasının nedenlerinden biri de şimdiye dek hiç kimsenin asal sayılar için belirli bir model ya da formülü keşfetmemiş olmasıdır. Birçok kişi denemiş ancak başarıya henüz ulaşamamıştır. Örneğin Fransız rahip Marin Mersenne (1588-1648) şu formülü kullanarak bir dizi sayıyı hesaplamıştır:

$$M_n = 2^n - 1$$

İlk sayıyı belirlemek için n'yi bir olarak alırsınız, ikinci sayı için de n'yi iki olarak alırsınız ve bu şekilde devam eder. Buradan hareketle şöyle bir dizi oluşur:

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 2047...$$

Mersenne bu formülle elde edilen sayıların bazılarının 3, 7, 31 ve 127 gibi asal sayılar olduklarını fark etmiştir. Bu sayılar da dizideki ikinci, üçüncü, beşinci ve yedinci sayılardır. İki, üç, beş ve yedinin kendisi de ayrıca asal sayılardır. Dolayısıyla görünüşe göre n yerine bir asal sayı koyduğumuzda formülden bir asal sayı elde edersiniz. Ancak yediden sonraki asal sayı on birdir ve formüle göre  $M_{11} = 2047$  eder. Ne var ki 2047 bir asal sayı değildir çünkü  $2047 = 23 \times 89$  eder.

Büyük asal sayıları makine yardımı olmaksızın belirlemek zordur. Örneğin,  $M_{107}$  ile 33 haneli bir sayı elde edilir ve herhangi bir sayının bunun bölüneni olup olmadığını ve bu sebeple de bu sayının bir çarpan olup olmadığını kontrol etmek oldukça zaman alıcı bir uğraş olur.

Kusursuzca ve hiç usanmadan hesaplamalar yapabilen bilgisayarların bulunduğu dijital çağa buyurun. 1950'li yıllardaki ilk bilgisayarlar yüzlerce haneleri olan ve bilindikleri ismiyle Mersenne asal sayılarını bulabiliyorlardı. 1999 yılına gelindiğinde ise ilk milyon haneli Mersenne asal sayısı keşfedildi. Günümüzdeki rekor ise  $M_{74,207,281}$  için belirlenen 22 milyondan fazla basamağı olan bir sayıdır.

### Uzuuun Çarpım

Amerikalı matematikçi Frank Nelson Cole (1861-1926), 1903 yılında, bir dersi esnasında asal sayı olduğu düşünülen  $M_{67}$  hakkında aşağıdaki çarpımı yazmıştı:

$$147.573.952.589.676.412.927 = 193.707.721 \times 761.838.257.287$$

Daha sonra sonucun doğruluğunu ispatlamak için bu çarpım işlemini elle yapmaya koyulmuştu. Bunu yapması bir saatini almış ve çarpım işlemini tam bir sessizlik içinde gerçekleştirmişti. Cole, “dersinin” sonunda yerine tek kelime etmeden geçmiş ve bu sırada meslektaşları tarafından ayakta alkışlanmıştı.

Ne gerek vardı? Aslında matematikçiler oldum olası mesleklerine duydukları katıksız sevgiden dolayı hemen her şeyi araştırırlar. Öte yandan asal sayılar modern zamanın şifreleme yöntemlerinin omurgasını oluştururlar. Örneğin kredi kartımın detayları gibi bir sayıyı internet aracılığı ile iletmek istersem ne yaptıklarını bilen insanlar için bu sayıyı yakalayıp paramı harcamak çok kolaydır.

Buna engel olmak adına internet, iletilmekte olan sayıyı değiştirmek için bir *ortak anahtar*ın kullanıldığı şifreleme yönteminden yararlanır. Bu anahtar ise aslında çok büyük asal sayılardan yaratılmış olan çok büyük ve açıkçası rasgele bir araya getirilmiş sayıların birleşimidir. Sadece *özel anahtara* sahip olan planlanan alıcı bu süreci belirli bir zaman dilimi içerisinde geriye çevirebilir.

Ağ adresinin başındaki “https”, bu ağ sitesinin bilgisayaraınıza gelen ve ondan giden bilgiyi şifrelemek üzere Hypertext Transfer Protocol with Transport Layer Security (Güvenli Bağlantılı Metin Aktarım Protokolü) kullandığı anlamına gelir. Böylece bazı çok akıllı matematikçiler sayesinde çevrimiçi olarak istediklerinizi güvenle sipariş edebilirsiniz.

# İKİLİ SİSTEM

İlk bölümde bilgisayarlardan ve kolayca gerçekleştirdikleri aritmetik işlemlerden nasıl faydalanabileceğimizden bahsetmiştim. Bununla birlikte bilgisayarlar çoğunlukla insan zekâsının ürünüdür. En nihayetinde elektronik bilimden yararlanıp ikili sistemle hesaplama yapabilen makineler meydana getiren, yani bilgisayarları dijitalleştiren de insan zekâsıdır. Bu, her basamak değerinin on sayısının katı olduğu (1, 10, 100, 1000 vs.) bizim kullandığımız ondalık sistemin aksine basamak değerlerinin iki sayısının katları olduğu (1, 2, 4, 8, 16 vs.) bir sayı sistemidir.

| Ondalık | İkili                          |
|---------|--------------------------------|
|         | <b>Basamak Değeri: 8 4 2 1</b> |
| 1       | 1                              |
| 2       | 1 0                            |
| 3       | 1 1                            |
| 4       | 1 0 0                          |
| 5       | 1 0 1                          |
| 6       | 1 1 0                          |
| 7       | 1 1 1                          |
| 8       | 1 0 0 0                        |

Bunun nedeni ise, elektronik bakış açısıyla, elektrik gerilimlerini ya sıfır ya da sıfır-değil (sıfır-değiller bir olarak sayılır) olarak görmenin daha kolay olmasıdır. Şayet sıfır volt değerindeki gerilimler için sıfır, bir volt için bir ve benzeri biçiminde bir analog ondalık sistem kurmaya çalışsaydık bilgisayar içindeki bileşenler arasındaki kablonun uzunluğuna

bağlı olarak gerilim değerlerinin düşmesinin yanı sıra bilgisayar ısındıkça içindeki bileşenlerin de direnci değişeceğinden bazı sorunlarla karşılaşmıştık.

Modern bilgisayarların hesaplama sisteminden dolayı ikili sistemin oldukça modern bir icat olduğunu düşünebilirsiniz. Ancak öyle değil. Dünyanın çeşitli yerlerindeki farklı kültürler, hemen hemen her türden farklı durumda ikili sistemi kullanmışlardır. Çin’de MÖ sekizinci yüzyıldan beri kehanetleri görmek için kullanılan *I Ching* (*Değişimler Kitabı*), ikili *yin yang* sembollerine dayanan *trigram* ve *heksagram* ve sembollerini kullanmaktadır. Büyük Alman matematikçi Gottfried Leibniz (1646-1716), *I Ching*’e hayran kalmış ve 1600’lerin sonlarında modern ikili sistemi tasarlamıştır.

Buradan sonra ise İngiliz mantıkçı George Boole (1815-64), *The Laws of Thought* (Düşünce Yasaları) isimli kitabında ikili sayıları kullanan bir mantık sistemi düzenlemiştir. Amerikalı matematikçi Claude Shannon (1916-2001) günümüzde Boolean mantığı olarak bilinen bu sistemi ilk kez 1937 yılında elektronik bir devrede kullanan ilk kişi olmuş ve sistemin aritmetik ve mantık işlemlerinde kullanılabileceğini de göstermiştir. Shannon ikili bilgiyi temsil etmek üzere anahtarlar kullanmıştır. Anahtar kapalı iken sıfırı, açık konumdayken birini temsil etmektedir.

Shannon, İkinci Dünya Savaşı sırasında Nazi şifrelerini kırmada bilgisayarların kullanımı üzerine tartışmak için İngiliz matematik kahramanı Alan Turing (1912-1954) ile buluşmuştur. Çalışmalarının aslında birbirlerinin çalışmalarını tamamladığını keşfetmişlerdir. Shannon’un 1948 tarihli, “İletişimin Matematiksel Kuramı” başlıklı makalesi onu bilfiil tüm modern dijital bilgisayarların babası kılmıştır.

Şayet bir bilgisayar gibi aritmetik işlem gerçekleştirmek isterseniz ikili sistemde  $1 + 1 = 10$  olduğunu unutmadığınız takdirde kuralların aynı kaldığını görmekten memnun ola-

caksınız. Örneğin  $101 + 110$  işlemi şu şekilde görünecektir:

$$\begin{array}{rcccc}
 & & 1 & 0 & 1 \\
 + & & 1 & 1 & 0 \\
 \hline
 & 1 & 0 & 1 & 1
 \end{array}$$

Şayet  $10 - 1 = 1$  olduğunu hatırlayacak olursak  $1010 - 111$  ise şöyle görünecektir:

$$\begin{array}{rcccc}
 & & 1 & & {}^10 \\
 & 1 & {}^10 & {}^10 & {}^10 \\
 - & & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 & 0 & 0 & 1 & 1
 \end{array}$$

$101 \times 110$  ise şöyle görünecektir (aslında ondalık çarpım tablosuna dair bütün o bilgiye ihtiyaç duymadığınızı dikkate alın!):

| x   | 100                      | 10                     | 0                  |
|-----|--------------------------|------------------------|--------------------|
| 100 | $100 \times 100 = 10000$ | $100 \times 10 = 1000$ | $100 \times 0 = 0$ |
| 0   | $0 \times 100 = 0$       | $0 \times 10 = 0$      | $0 \times 0 = 0$   |
| 1   | $1 \times 100 = 100$     | $1 \times 10 = 10$     | $1 \times 0 = 0$   |
|     | 10100                    | 1010                   | 0                  |

Buradan da  $10100 + 1010 = 11110$  olur.

Bölme işlemi için ise  $1010 \div 100$  şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{array}{rcccccc}
 & & & 1 & 0. & 1 \\
 100 \overline{) 10100} & 1 & 0 & 1 & 0. & 0 \\
 - & 1 & 0 & 0 & \downarrow & \downarrow \\
 & & & 1 & 0 & 0 \\
 & & - & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0
 \end{array}$$

İkili sistemde de bayağı kesirlerimiz olabildiğine ve ondalık virgölün sağındaki basamakların yarım, çeyrek, sekizde birler vs. şeklinde olacağına dikkat ediniz. Bu yüzden burada 0,1 yarım değeri temsil etmektedir.

Buradaki tüm hesaplamaları kontrol etmek üzere ondalık sayıya çevirmeyi okuyucular için bir alıştırmaya olarak bırakıyorum!

Bir bilgisayarın hesaplamaları ne kadar hızlı gerçekleş-tireceği konusundaki sınırlayıcı faktör, bir mikroçipin içine sığdırılabilecek anahtarların (ya da *transistörlerin*) sayısı ve ayrıca bunların ürettikleri ısıнын üstesinden gelebilmesidir. Şimdilik yedi milyar transistörü piyasada satılan küçük boyutlardaki bir bilgisayar yongasına sığdırmak mümkündür. İntel şirketinin kurucularından Amerikalı girişimci Gordon Moore, 1965 yılında mikroçiplerin teknolojik olarak gelişiminin üzerlerindeki transistör sayısının her iki yılda bir iki katına çıkmasına izin vereceğini belirtmiştir. Bu süreç Moore yasası olarak bilinir.

Moore yasası, yapabileceklerimizin fiziksel sınırına yaklaşırken son beş yılda hız kesmiştir. Günümüzde üretilen transistörlerin boyutu sadece nanometrelerle ölçülür. Bu da milyonlarcasını bu cümlemin sonundaki noktaya sığdırabileceğiniz anlamına gelir. Pekâlâ, buradan nereye gidiyoruz?

Olasılıklardan birisi, teorik olarak geleneksel dijital bilgisayarlardan çok daha hızlı çalışmalarını sağlayacak kuantum mekaniğinin tuhaf etkilerine dayanan *kuantum* bilgisayarları geliştirmektir.

Bilgisayarların sadece onları yaratan insanlar kadar etkili olduklarını ve bazen ikili ile ondalık sayı sistemi arasındaki farkın yaşam ile ölüm anlamına geldiğini belirtmek gerekir. 2 Ağustos 1990 tarihinde Irak daha sonra Körfez Savaşı olarak adlandırılacak olan çatışmayı başlatarak Kuveyt'i işgal etti. Saddam Hüseyin yönetimindeki Irak, İsrail "işgal edilmiş" çe-

şitli bölgeleri teslim edene dek Kuveyt'ten ayrılmayı reddetti ve bunun üzerine Birleşik Devletler ile Birleşik Krallık'ın dahil olduğu otuz dört üyeden oluşan bir koalisyon birliği Kuveyt'i özgür kılmak üzere Çöl Fırtınası Harekâtı'nı başlattı.

Irak'ın elindeki cephanenin bir kısmını Soğuk Savaş döneminde Sovyetler Birliği tarafından geliştirilen Scud balistik füzeleri oluşturuyordu. Balistik füzeler yakıtlarını, yeryüzünün atmosferinin dışına çıkmak için kullandıktan sonra hedeflerinin üzerine yerçekimiyle düşen roketlerdir. Birkaç yüz kilometrelik menzile sahiptirler ve Irak bunları İsrail, Suudi Arabistan ve diğer hedeflere saldırmak üzere kullanmıştır.

Birleşik Devletler ordusu da çeşitli mevkilere birkaç tane Patriot füze bataryası gönderdi. Patriot füzeleri çok hızlı ve çeviktirler ayrıca yüksek hassasiyetli radarıyla birleştirildiğinde teorik olarak Scud'ları havadayken yok edebilirlerdi.

Hareket etmekte olan bir Scud'u vurmak için Patriot sistemi Scud'un hızını ve istikametini tahmin etmek üzere radar bilgisini kullanır ve böylece uçuş güzergâhını hesaplayıp Patriot füzesini nereye göndereceğine karar verebilir. Bunu gerçekleştirmek aslında Patriot sistemi Scud'un yerini belirleyene dek Scud füzesi yerçekiminin etkisiyle düşmekte olduğundan o kadar da zor değildir.

Bunun düzgün bir şekilde çalışması için hassas bir zaman tutma işleminin gerçekleştirilmesi kritik derecede önemlidir.

Patriot yazılımının kullandığı saat, saniyenin onda birine denk gelen bir sisteme göre bölünmüştü. Bu ise yazılımın radar bilgisini Scud'un gitmekte olduğu yeri takip etmek ve tahmini uçuş güzergâhını güncellemek üzere saniyede on kez kullandığı anlamına gelmekteydi.

Daha önce bilgisayarların ikili sayı sistemini kullandığını görmüştük. İkili sistemde onda biri hesaplamak için  $1 \div 1010$  bölme işlemini yapmam gerekir. İkili sistemde kalanlı bölme işlemini size bırakıp bu sistemde onda birin devirli bir ondalık sayı olduğunu belirteyim:



Onda bir = 0,000110011001100110011001100110011...

Bu sayıyı daha önce gördüğümüz devir çizgisini kullanarak 0,00011 olarak yazabilirim.

Patriot sisteminin kullandığı bilgisayar yirmi dört haneli sayıları işleyebiliyordu. Bu size oldukça hassas gelebilir ancak ikili sistemdeki onda bir sayısı sonsuza dek devam ettiği için sayının son kısmını kesmek zorundaydılar. Ondalık sisteme geri dönecek olursak bu durum bir saniyenin onda birini (ya da 0,1'ini) ölçmediği, aslında geçen zamanın 0,00000009'luk bir hata ile saniyenin 0,09999991'i kadar olduğu anlamına geliyordu. Bu oldukça önemsiz görünebilir, ancak her saniye bu fark tekrarlandığı için geçen zaman içinde hata giderek büyüyordu.

25 Şubat 1991 tarihinde Suudi Arabistan'daki Patriot sistemini çalıştıran bilgisayar toplamda yaklaşık yüz saattir çalışmaktaydı. Yüz saat içinde 3,6 milyon saniyenin onda biri bulunur ve bu da toplamda saniyenin yaklaşık üçte biri büyüklüğünde bir hata anlamına gelir.

Yine de bu durum hâlâ çok büyük bir hata gibi görünmemektedir. Ancak uzaydan düşen bir Scud füzesi *saniyede* yaklaşık 1,5 kilometre hızla ulaşır ve bu da hata süresi boyunca bir Scud'un 500 metre yol katedebileceği anlamına gelir.

Bu durumsa radarın Scud'un nerede olması gerektiğini bulamayacağı ve yanlış bir tespitin gerçekleştiğini farz edeceği için bir Patriot füzesinin yanlış bir yere yerleştirilebileceği ya da daha kötüsü hiç yerleştirilemeyeceği anlamına gelmekteydi.

25 Şubat'ta Suudi Arabistan'da bunlardan ikincisi gerçekleşti. Scud füzelerinden biri Birleşik Devletler'e ait bir kıyıyı vurdu. Yirmi sekiz asker öldü ve çok daha fazlası da yaralandı. Bunların hepsi bir yuvarlama hatası yüzündendi.

Bu yüzden bir sonraki bölümde inceleyeceğimiz yuvarlamayı iyice kavramak oldukça önemlidir.

# DOĞRULUK

Şeytan ayrıntıda gizlidir ve içinde bulunduğumuz çağda elimizin altında çok fazla ayrıntı bulunmaktadır. Matematikçiler ile bilim insanları çoğunlukla yüksek derecede *hassasiyete* sahip veri ve ölçümlerle uğraşırlar.

Örneğin matematikteki  $\pi$  sabit sayısının, Alman atom fizikçisi Peter Trueb sayesinde (şimdilik) 22 trilyonun üstünde hanesi olduğu bilinmektedir. Bununla birlikte daire biçiminde bir çiçek tarhı için ne kadar gübreye ihtiyaç duyduğunuzu öğrenmeye çalışıyor olsaydınız böylesi bir hassasiyet derecesi tamamen gereksiz olacaktır. Akıllı telefonumdaki hesap makinesindeki  $\pi$  sayısının bile on iki tane ondalık basamağı vardır. Böylesi bir hassasiyet derecesi bana pratik anlamda kullanabileceğimden çok daha fazla ondalık basamağına sahip bir alan sağlamaktadır.

Öncelikle her ne kadar gündelik konuşmada her iki sözcüğü birbirinin yerine kullanma eğiliminde olsak da hassas olmanın doğru olmakla aynı şey olmadığını unutmayın. Şayet dün gece 2,7345 birim alkol içtiğimi söylersem bu oldukça kesin bir ifade olur ancak gerçekte 3,2 birim alkol içtiysem o halde bu ifade pek de doğru olmaz.

Matematikte hassasiyet derecesini düşürmek ancak yine de olabildiğince doğru olmak istiyorsak *yuvarlama* ismini verdiğimiz bir işlem kullanırız. Yuvarlamanın birkaç yöntemi bulunmaktadır.

Okulda öğrendiğimiz ilk yönteme göre *en yakın olana* yuvarlarız. Önce *neyin* en yakın olduğunu belirleriz. Örneğin, 43 sayısı onlar basamağında en yakın olan 40'a yuvarlanır.

2893 sayısı ise en yakın yüzler basamağı olan 2900'e ya da en yakın binler basamağı olan 3000'e yuvarlanır. Sayı büyüdükçe daha çok yuvarlama eğilimi gösteririz. Ev fiyatları genellikle en yakın binlere ya da beş bin ile on binlere yuvarlanır. "Trident nükleer denizaltıları 31 milyar £'a mal olacak," ifadesi "Trident nükleer denizaltıları 31.264.358.769,73 £'a mal olacak," ifadesine göre çok daha etkili olur.

Yuvarlamanın ardında yatan düşünce mümkün olabildiğince doğru olmaya çalışırken daha düşük bir hassasiyet derecesi sunmaktır. Şayet 57 sayısını en yakın onlar basamağına yuvarlayacaksam cevabımı 50 ile 60 olarak vermek arasında bir seçim yapmak zorundayımdır. 57'ye 50'den daha yakın olduğu için 60'ı seçeriz. Daha yakın olan 60 sayısı bu yuvarlama için daha doğru bir seçim olur.

Ancak 250 sayısını en yakın yüzler basamağına yuvarlıyorsam küçük bir sorunla karşı karşıyayım demektir. Seçeneklerim 200 ile 300'dür. Ancak 250 sayısı bu iki seçenek için tam olarak orta yolda durmaktadır. Öyleyse hangisini seçeyim? Geleneklere göre bu gibi durumlarda daima yukarı doğru yuvarlarız. Bu yüzden de burada 300 doğru yanıt olacaktır.

Peki, neden gelenek böyle? Bir iddiaya göre yukarı yuvarladığımda daha az kontrol etmek zorunda kalırım. Şayet 250 sayısını en yakın yüze yuvarlıyorsam, 5 sayısının bulunduğu haneyi kontrol ettiğimde yukarı doğru yuvarlayacağımı bilirim. Şayet aşağı doğru yuvarlasaydım bir sonraki hanenin sıfır olup olmadığını anlamak için bir daha kontrol etmek zorunda kalacaktım. Öyleyse işlem bu biçimde birazcık daha etkilidir.

En yakın olana yuvarlama işini çözdükten sonra genelde sıra belirli bir sayıdaki ondalık basamaklı sayıyı nasıl yuvarlayabileceğini öğrenmeye gelir. Bunun da daha öncekine benzer bir düşünce süreci vardır. Eğer 1,234'ü iki ondalık basamaklı bir sayıya yuvarlamak istiyorsam en doğru cevabı

seçtiğimden emin olmak isterim. 1,234 sayısı 1,23 ile 1,24 arasındadır (bazılarına 1,234'ün 1,230 ile 1,240 arasında olduğunu düşünmek daha kolay gelir). Ve 1,23'e daha yakındır.

Buradaki kısa yol üçüncü ondalık basamağa bakmaktır. Şayet bu basamak değeri 0, 1, 2, 3 ya da 4 ise aşağı doğru yuvarlarız ve bu da ikinci ondalık basamağı değiştirmeden bırakmak anlamına gelir. Eğer üçüncü ondalık basamak değeri 5, 6, 7, 8 ya da 9 ise yukarı doğru yuvarlarız ve ikinci ondalık basamağın değerini bir artırmış oluruz.

Eğer bir basamaktaki 9'u yuvarlıyorsanız bir önceki basamağı da değiştirmek zorunda kalırsınız. Örneğin 1,96 sayısını bir ondalık basamak değeri yuvarlarsam 6 sayısı 9'u yukarı doğru 10'a yuvarlamam gerektiğini söyler ve bu da bir sıfır yazıp biri taşımam gerektiği anlamına gelir. Bu da 2,0'ı elde etmemi sağlar. Kontrol edecek olursam 1,96'nın 1,9 ile 2,0 arasında olduğunu ve 2,0'a daha yakın olduğunu fark ediyorum.

Şimdiye kadar en yakın olana ve belirli bir ondalık basamak sayısına yuvarlıyorduk. Ancak, farklı büyüklüklerdeki sayıları içeren bir hesaplama gerçekleştirmem gerektiğinde kullanmakta olduğum bütün sayılar için aynı hassasiyet derecesinde olan bir yuvarlama kuralı henüz bulunmamaktadır. Örneğin  $5234 \times 0,726$  gibi bir işlemi gerçekleştiriyorsam her iki sayıyı da en yakın yüzler basamağına yuvarlayamam çünkü 0,726 bu durumda sıfır olurdu ve diğer yandan 5234'ü de herhangi bir ondalık basamak sayısına yuvarlayamam çünkü elimde bu sayı için böyle bir ondalık basamak değeri yok.

Dolayısıyla bu yuvarlama işlemini gerçekleştirmemizi sağlayan ve *anlamli sayılar* olarak isimlendirilen son bir kuralımız mevcut.

Ondalık sayılarda karşımıza çıkabilecek olan öndeki sıfırların hepsini göz ardı ederek bir sayı içindeki anlamli sayıları soldan başlayarak sayıyoruz. Böylece 5234 sayısındaki ilk

anamlı sayı 5 ve 0,726'daki ilk anlamlı sayı da 7 olur.

Eğer bu sayıları “anamlı tek bir sayıya” yuvarlarsam, yantımın içinde bir tane sıfırsız basamağa (başıta gelen sıfırları dikkate almayarak) sahip olmasını istiyorum demektir.

Bu ise 5234 sayısının durumunda 5 sayısını binler basamağında dikkate aldığım anlamına gelir. Bu yüzden de 5234 sayısını anlamlı tek bir sayıya yuvarlarken en yakın anlamlı sayının bulunduğu yer olduğundan bu sayıyı en yakın bine yuvarlıyorum. Böylece de 5234, anlamlı tek bir sayı olan 5000'e yuvarlanır.

Benzer biçimde 0,726'nın ilk anlamlı sayısı onlar basamağındaki 7'dir ve bu da sayıyı en yakın onlar hanesine yuvarlayacağımı bildirir. Bu sebeple 0,726 anlamlı bir sayı olan 0,7'ye yuvarlanmış olur. O halde hesaplamam ise şu şekilde gerçekleşir:

$$5234 \times 0,726 \approx 5000 \times 0,7 = 3500$$

Anamlı bir sayıya yuvarlama işleminin ayrıca hesaplamayı çok daha basit kıldığını görebilirsiniz. Bu yüzden bu işlem ayrıca *tahmin* sürecinde kullanılmaktadır. Tahmin işlemi, hesaplamaların kontrolünde özellikle kullanışlıdır. Örneğin, eğer  $5234 \times 0,726$  işlemini elle yapmış ve 379,9884 sonucunu elde etmiş olsaydım, tahminim bu sonucun yanlış olduğunu çünkü aslında sonucun 3500 civarında olmasını beklediğimi bildirirdi. Kontrol edecek olursam aslında  $5234 \times 0,726$  işleminin sonucunun 3799,884 olduğunu görürüm ve bu da ondalık virgülünü yanlış yere koyma hatasına düştüğüm anlamına gelir. Hesaplamadan önce tahminde bulunmak aslında hesap yapmanın bir tür otomatik düzeltmesidir!

# KUVVETLER VE İNDİSLER

Kuvvetler (diğer bir deyişle indisler) gündelik hayatta nadiren görünürler ancak sayıların büyüklükleri ve anlamları üzerinde çok kuvvetli bir etkileri (zaten bu yüzden bu isimle anılırlar) vardır. Kuvvetler, çok büyük (mesela sabit sürücünüzün ne kadar alana sahip olduğu) ya da çok küçük (mesela bir vitamin tabletinin içinde aktif bir içeriğin ne kadar bulunduğu) sayıları yazmamıza yardımcı olması için kullanılırlar.

Şayet  $5^3$  yazarsam, üst simge olan üç aslında beşi üç kez kendisiyle çarpmak istediğimi yazmanın kısa yoludur. Şöyle ki:

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

Aslında  $5^3$ 'ü “beşin üçüncü kuvveti” ya da “beşin küpü” olarak okuruz. Bu durumda yapılan en yaygın hata, ifadenin  $5 \times 3$  anlamına geldiğini düşünmektir çünkü sonucu on beş olan bu işlem çok daha küçük bir sayıdır. On sayısının kuvvetleri, Hint-Arap sayı sisteminde (bkz. Sayfa 23) kullandığımız basamak değerleri ile aynı olduğundan aslında bize tanıdık gelmektedir.

$$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1.000.000 \text{ (bir milyon)}$$

$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100.000 \text{ (yüz bin)}$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000 \text{ (on bin)}$$

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1.000 \text{ (bin)}$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100 \text{ (yüz)}$$

Şayet bu şablonu sürdürecektir olursak, şu şekilde devam eder:

$$10^1 = 10 \text{ (on)}$$

Bu durum kuvvetlerle ilgili genel bir kuralı gösterir; herhangi bir şeyin birinci kuvveti kendisine eşittir:

$$a^1 = a$$

On sayısının kuvvetleri o kadar çok kullanılır hale gelmiştir ki belirli bir kuvveti ifade ederken kolaylık olması adına bazı örnekler kullanmaya başlamışız. Bunlara örnek  $10^3$  ya da 1.000 anlamına gelen “kilo”dur. Böylece bir kilometre bin metre, bir kilogram bin gram ve bir kilovat ise bin vat anlamına gelir. Daha büyük sayılar için kullanılan örneklerin on sayısının her üç kuvvetinde bir değişme eğiliminde oldukları görülmektedir:

$$10^3: \text{binler} - \text{kilo (k)}$$

$$10^6: \text{milyonlar} - \text{mega (M)}$$

$$10^9: \text{milyarlar} - \text{giga (G)}$$

$$10^{12}: \text{trilyonlar} - \text{tera (T)}$$

Şimdilik bunlardan son birkaçını bilgisayarlarımızın gücünü tanımlamak üzere kullanmaktayız ancak çok da uzak olmayan bir gelecekte peta (P,  $10^{15}$ ) ve exa (E,  $10^{18}$ ) gibi örneklerin de genel kullanıma girmesini bekliyorum.

### Gerçekten Büyük Sayılar

1920 yılında  $10^{100}$  sayısına, alışılmadık ölçüde büyük bir sayıya bir isim vermek isteyen Amerikalı matematikçi Edward Kasner'in dokuz yaşındaki yeğeni tarafından gugol ismi verildi. Bu sayı gerçekten tuhaf derecede büyüktür; evrenimizin içinde "yalnızca"  $10^{80}$  tane atom bulunmaktadır ve bir gugol bu sayıdan 100.000.000.000.000.000.000 kat daha büyüktür. Şayet bu sizin için yeterince büyük bir sayı değilse ayrıca gugol<sup>80</sup> değerindeki gugolpleks olarak isimlendirilen bir başka sayı daha mevcuttur. Bir gugol toplamda yüz tane sifra sahipken bir gugolpleks ise gugol tane sifra sahiptir.

Matematikçiler, kuvveti olan sayıları çarpmaya ya da bölmeye çalışırken yardımcı olabilecek birkaç kısa yolun daha bulunduğu fark etmişlerdir. Şuna bir bakalım:

$$5^3 \times 5^4 = (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5)$$

Kullanılan parantezler sadece  $5^3$  ile  $5^4$ 'ni oluşturan beşleri göstermek için kullanılmıştır. Yanıtın toplamda yedi tane beş sayısının bir arada çarpıldığı ya da  $5^7$  olduğunu görebiliyoruz. Bu kadar fazla sayıda beş yazmadan yedinin aslında kuvvetlerin toplamından geldiğini hemen fark edebiliriz:

$$5^3 \times 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$$

Bir genelleme yapacak olursak, şayet aynı sayının kuvvetlerini çarpıyorsanız, kural şudur:

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

Bölme işlemi yaparken de çok benzer bir sistem geçerlidir. Örneğin:

$$8^5 \div 8^2 = \frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8}{8 \times 8}$$



Şimdi eğer sekizleri dengelemeye başlarsam:

$$\frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8}{8 \times 8} = \frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8}{8 \times 8} = \frac{8 \times 8 \times 8}{1} = 8^3$$

Sonuçta kuvvetlerin farkını aldığımızı görüyoruz:

$$8^5 \div 8^2 = 8^{5-2} = 8^3$$

Ya da genel bir kural çıkaracak olursak:

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

Bu kural bir sayının sıfır kuvvetinin ne anlama geldiğini anlamamıza yardımcı olur. Şayet  $3^4 \div 3^4$  gibi bir bölme işlemi yaparsam, kuvvetlerin farkı bize şunu gösterir:

$$3^4 \div 3^4 = 3^{4-4} = 3^0$$

Ancak ayrıca bir sayının kendisine bölünmesinin bir sayısına eşit olduğunu bildiğimiz için  $3^0$ 'nin bir sayısına eşit olması gerekir. Bu da bize başka bir kural verir; herhangi bir sayının sıfır kuvveti bir sayısına eşittir:

$$a^0 = 1$$

## Negatif Kuvvetler

Şayet bu kuralı kuvveti daha küçük bir sayıyı, kuvveti daha büyük olan bir sayıya bölmek için kullanırsam sonuçta negatif bir kuvvet elde ederim:

$$7^4 \div 7^9 = 7^{4-9} = 7^{-5}$$

Eğer bu sayıyı bir bayağı kesir olarak ele alırsam (bayağı kesirlerin sadeleştirilmesi hakkında daha fazla bilgi için bkz. sayfa 41):

$$\begin{aligned} 7^4 \div 7^9 &= \frac{7^4}{7^9} = \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7} \\ &= \frac{\cancel{7} \times \cancel{7} \times \cancel{7} \times \cancel{7}}{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7} = \frac{1}{7^5} \end{aligned}$$

Bu da  $7^{-5} = \frac{1}{7^5}$  ya da 1'in  $7^5$  parçaya bölünmesi demektir. Yani çok küçük bir sayı değeri anlamına gelir. Genel kuralı verecek olursam:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Eğer on sayısının kuvvetlerine geri dönecek olursak:

$$10^0 = 1 \text{ (bir)}$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10} \text{ (onda bir)}$$

$$10^{-2} = \frac{1}{100} \text{ (yüzde bir)}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{1000} \text{ (binde bir)}$$

Yine benzer biçimde on sayısının daha yaygın biçimde kullanılan negatif kuvvetlerinin kendileriyle ilişkilendirilmiş örnekleri bulunmaktadır:

$$10^{-2}: \text{Yüzde bir} - \text{santi (c)}$$

$$10^{-3}: \text{Binde bir} - \text{mili (m)}$$

$$10^{-6}: \text{Milyonda bir} - \text{mikro } (\mu)$$

$$10^{-9}: \text{Trilyonda bir} - \text{nano (n)}$$

Eğer bir vitamin şişesinin dibine bakacak olursanız belli başlı minerallerin mikrogram miktarında olduklarını görürsünüz. Bir nanometre ise bir molekülün boyutundadır ve “nanoteknoloji” kelimesi de buradan gelmektedir. Burada negatif kuvvetlerin negatif sayılar verdiğini düşünmemek gerekir. Aslında bize sıfırdan daha küçük pozitif sayılar sunmaktadırlar.

## Kesirli Kuvvetler

Şayet negatif kuvvetlerin olabildiğince hileli olduğunu düşünüyorsanız, bir kez daha düşünün derim. Sırada kesirli kuvvetler var! Şuna bir bakalım:

### Asam (Rasyonel olmayan) Sayılar

$\sqrt{6}$ 'nın tam sayı olarak bir karşılığı bulunmaz (aslında karşılığı yaklaşık olarak 2,44948974'tür). Tam sayı olmayan kare-kökler hiç sonu gelmeyen, devirli olmayan ondalık basamak dizileri oluştururlar ve bunlara asam ya da *rasyonel olmayan* (Lat. *surd*) sayı ismi verilir. İsmi Latince sağır ve dilsiz anlamına gelen sözcükten gelmektedir ve muhtemelen de bu sayıların tam olarak okunamayacakları düşüncesini yansıtmaktadır. Çelişkili bir matematiksel ya da mantıksal düşünceye de bu yüzden *absürt* denmektedir.

$a^n \times a^m = a^{n+m}$  olduğunu hatırlayacak olursak:

$$6^{\frac{1}{2}} \times 6^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 6^1 = 6$$

Ancak burada durup bir düşünelim. Altı sayısının bir bölü iki kuvveti kendisiyle çarpıldığında altı sayısına eşit oluyor. Bu bize sayıların karesiyle kökleri hakkındaki bölümü hatırlatıyor (bkz. sayfa 15). Madem  $6^{\frac{1}{2}}$ 'nin kendisiyle çarpımı altı sayısına eşit, o halde bu sayı altının karekökü olmalıdır.

$$6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$$

Buradan genel bir kural çıkaracak olursak:

$$a^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{a}$$

Yukarıdaki  $\pm$  sembolü ustaca bir ayırım yapmak üzere konulmuştur. Karekök işareti tek başına yazıldığında (yani  $\pm$  olmadan) sadece pozitif kareköke işaret etmektedir. Ancak sayıların negatif karekökleri de olabilir çünkü negatif bir sayıyı yine negatif bir sayı ile çarptığınızda pozitif bir sayı elde edersiniz.

$$4 \times 4 = 16$$

$$-4 \times -4 = 16$$

Bu yüzden hem 4 hem de  $-4$  sayıları on altının kareköküdür ve “artı ya da eksi” sembolü  $\pm$  bu işlemin negatif bir yanının olduğunu da belirtmek üzere burada bulunmaktadır.

Buradan şu sonuç çıkmaktadır: diğer kesirli kuvvetler de başka kök türlerini vermektedir. Şayet bir sayının üçte bir kuvvetini alarak büyüttüğümüzü düşünürseniz o halde bunlardan üçünün birlikte çarpılması asıl sayıyı verecektir. Bu da üçte bir kuvvetinin küp köke eşit olduğunu gösterir.

$$4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

Burada  $\pm$  sembolünün bulunmadığına dikkat ediniz. Dört sayısının yalnızca pozitif bir küp kökü vardır. Çünkü üç negatif sayının birbirleriyle çarpımı yine negatif bir sonuç ortaya çıkaracaktır. Örneğin sekiz sayısının küp kökünün iki olduğunu biliyoruz (çünkü  $2 \times 2 \times 2 = 8$ ), ancak  $-2 \times -2 \times -2 = -8$  işleminin sonucu 8 değil de  $-8$  eder.

Genel formül de şudur:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

## Kuvvetler ve Bulundukları Yerler

Sayıların kuvvetleri çoğunlukla kendi başlarına tek bir birimleri olmayan miktarlar anlamına gelen bileşik birimli miktarları tanımlamak için kullanılır. Örneğin, uzunluğu metre birimleri ile tanımlarız (çoğu zaman on sayısının kuvvetlerine ait örnekleri kullanarak km, cm, mm vs. biçimlerde), ancak bir alanı metre kare cinsinden ( $m^2$ ) tanımlarız. Metre kareler bileşik bir birimdir çünkü her ne kadar bir sayı kuvveti kullanmaktan kaçınmak için dönüm ya da hektar gibi ifadeler kullansak da onlar için isimlendirilmiş başka hiçbir birim bulunmamaktadır.

### Arlar ve Süreler

Bir hektar bazen bir alan birimi olarak kullanılır ancak çok az kişi aslında bir hektarın gerçekte ne olduğunu bilir. Ar, her bir kenarı on metre uzunlukta olan kare biçimindeki alan için kullanılan eski (ancak yine de metrik) bir ölçü birimidir. On sekizinci yüzyılın sonundaki devrimden sonra diğer tüm metrik sistemle birlikte Fransızlar tarafından kullanılmaya başlanmıştır. Hekta ise  $10^2$  ya da 100 anlamına gelen ve neredeyse hiç kullanılmayan, on sayısının kuvveti için bir önektir. Bunları birleştirdiğinizde hektar birimini elde etmiş olursunuz. Yüz tane on çarpı on metre kare demektir ve bu da  $100 \times 10 \times 10 = 10.000 \text{ m}^2$  eder. İki buçuk dönüm ya da bir futbol sahasından biraz daha büyük bir alan demektir.

Bazen *per*<sup>2</sup> (“ile bölümü” anlamına gelen) sözcüğünün kullanılacağı yerlerde negatif indisleri görebilirsiniz. Hız birimi bileşik bir birimdir ve bazı arabaların gösterge panelinde bir saatte katedilen kilometre için kullanılan kph yerine  $\text{kmh}^{-1}$  yazıldığı görülmektedir. Bunlardan ilki (kph) matematiksel olarak anlamsızdır; kullanılan harfler sadece “kilometres per hour” (saatteki kilometre cinsinden hızı) ifadesini temsil etmenin basit bir yoludur. Ancak diğer yandan  $\text{kmh}^{-1}$  ise kilometrenin saatin eksi bir kuvveti ile çarpımı anlamına gelmektedir:

$$\begin{aligned}\text{kmh}^{-1} &= \text{km} \times \text{h}^{-1} \\ &= \text{km} \times \frac{1}{\text{h}} \\ &= \text{km} \div \text{h}\end{aligned}$$

Bir sayıyı üzerinde bir olan bir sayı ile çarpmak aslında o sayıya bölmeye eşittir (bkz. sayfa 45'teki Bayağı Kesirleri Çarpma ve Bölme başlıklı bölüm). Bu yüzden yukarıdaki ifade matematiksel anlamda arabanın hız birimini göstermenin en kestirme yoludur.

2 Per (İng.): Bileşik birimlerde “-de/-da” anlamına gelir. per minute = dakikada gibi (ç.n.)

Bildiğimiz pek çok önemli denklemde birimlerin kuvveti kullanılır. Einstein'ın  $E = mc^2$ 'si nükleer enerjinin önünü açmıştır ve Newton'ın  $F = Gm_1m_2r^{-2}$  denklemi ise gezegenlerin devinimini açıklamasına izin vermiştir. Fermat'ın son teoremi ise Diophantus isimli Yunan-Mısırlı matematikçinin denklemini içeriyordu:  $a^n + b^n = c^n$  (daha fazla bilgi için bkz. sayfa 150).

Bu bölümün başında sayıların kuvvetlerinin ya da indislerinin bize çok haneli sayıları gösterirken oldukça yardımcı olduğundan bahsetmiştim ve teknikle ilgilenen insanlar çoğunlukla bu gibi sayıları göstermek için *standart form* dedikleri bir şeyi kullanırlar. Standart form sayıları bir ile on arasındaki bir sayının, on sayısının herhangi bir kuvvetiyle çarpımı biçiminde gösterilir. Örneğin bir hava boşluğunda ışığın hızı (Einstein'ın denklemindeki  $c$ )  $299.792.458 \text{ ms}^{-1}$  (ya da saniyede bu kadar metredir). Anlamlı bir sayıya yuvarlandığında (bkz. sayfa 56) bu sayı 300.000.000 olur. Bunu da standart formda bir sayıya dönüştürmek üzere on sayısının kuvvetlerini kullanırız:

$$\begin{aligned} 300,000,000 &= 3 \times 100,000,000 \\ &= 3 \times 10^8 \end{aligned}$$

Bu sayının hesaplamalarda kullanımı çok daha kolaydır ve ayrıca orijinal sayıyı yazarken hata yapmamızı engeller. Aslında modern bilimsel hesap makinelerinin de tam olarak bu yüzden bir  $10^x$  butonu vardır.

Tam tersi yönde hareket edecek olursak Newton'ın denklemindeki  $G$ 'nin karşılığı  $0,0000000000667408 \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$  olarak yazılır ve bu da  $6.7 \times 10^{-11}$ 'ne eşittir.

Uzun lafın kisası, ister astronomik ya da mikroskobik boyutlarda hesaplamalar yapın isterseniz de mega örnekleriniz ile giga örneklerinizi birbirinden ayırmaya çalışın, ihtiyaç duyacağınız şey sadece indisler ya da sayıların kuvvetleri olacaktır.

## Vücut Kütle İndeksi

Vücut kütle indeksi (*Body Mass Index – BMI*) için kullanılan formül şöyledir:

$$BMI = \frac{\text{kütle}}{\text{boy}^2}$$

Bu formülde ağırlık kilogram, boy ise metre cinsinden alınır. Sağlıklı bir birey için tipik değerler 18,5 ile 25  $\text{kgm}^{-2}$  olarak belirlenmiştir. Örneğin 1,7 m boyunda ve 70 kg ağırlığında olan bir bireyin 24'ün biraz üstünde bir BMI değeri olacaktır. Aslında bir kişinin boyuna göre ne kadar ağır olduğu üzerine kabaca bir fikir vererek daha sağlıklı olabilmesi için kilo alması mı yoksa vermesi mi gerektiğini gösterir. Çoğu insan kendi BMI değerlerini bir dergide okuduktan ya da internetteki bir sayfada gördükten sonra hesaplar. Ancak boy değerlerinin karesini almak yerine kafaları karışıp bunu ikiyle çarpabilirler. Eğer boyunuz iki metre ya da daha fazla değilse bunlardan ikinci yöntem BMI değerinizin düşük çıkmasına neden olur ki boyunuz kısalдықça bu durum daha da kötüye gider. Yanlış hesap, havuç yemeniz gerekirken onun yerine pasta yemenize neden olabilir.

2

**ORAN,  
ORANTI VE  
DEĞİŞİM  
YÜZDELERİ**



# YÜZDELİKLER

Günümüzde yüzdelikler olmadan hareket bile edemiyoruz. Özel indirimler, faiz oranları, yıllık bileşik faizler, enflasyon, seçimsel salıncak analizi, vücut yağ oranı, vergi ve alkollü içecekler modern yaşamımızda yüzdeliklerin anlaşılmasını gerektiren alanlardan sadece birkaçı olarak sıralanabilir.

Bir yüzdelik ifadesi, paydasında Latince *per centum*'dan gelen ve “yüzde” anlamında kullanılan yüz sayısı bulunan bir bayağı kesirdir. Yüzdelik sembolü % ise İtalyan tüccarların *per cento* ifadesi için yazdıkları kısaltmadan ortaya çıkmıştır. Yüzdelikler iki temel nedenden dolayı popüler olmuşlardır. Birincisi çoğu para biriminin ondalık sisteme dönüştürülmesi ve böylece finansal hesaplamaların da yüzdeliklerin kullanılmasıyla daha anlaşılır olmasıdır. İkincisi ise yüzdelikleri birbirleriyle karşılaştırmanın kolay olmasıdır.

Yüzdeliklerin olmadığı bir dünya hayal edin. İki tasarruf hesabı arasında seçim yapmanız gerekiyor diyelim; birisi  $\frac{117}{997}$  oranında bir faiz oranı veriyor ve diğeri de  $\frac{59}{500}$  oranında. Hangisini seçerdiniz? Bayağı kesirlerin en kolayını bile karşılaştırmak zordur. Bununla birlikte oranların %11,74 ve %11,8 olduğunu söylesem kolayca karşılaştırabilirsiniz.

Yüzdelikler temelde ondalık kesirler olduklarından aritmetik işlemleri de aynı kuralları izler. Ancak yüzdeliklerle çalışırken bilhassa bölme işlemini kullanırız.

## Bir Meblağın Yüzdelik Değerlerini Bulmak

Maaş günümün gelmesinin ve maaş bordromu almamın verdiği keyif maaşımın bir kısmının vergi olarak gideceğini fark ettiğimde çoğunlukla kaybolup gidiyor. Eğer yılda 25.000 £ kazanıyorsam ve bunun %23'ünü vergi olarak vermek zorundayсам vergi memuru ne kadar alacaktır? Aslında maaşımın her 100 £'luk bölümünden 23 £ alıyorlar. Bu yüzden maaşımı 100'e bölüp kaç tane 100 £'luk kazandığımı bulup sonra da bunu 23'le çarpabilirim:

$$25000 \div 100 \times 23 = 5750 \text{ £}$$

Önce 100 sayısına mı böldüğüm yoksa önce 23'le mi çarp-tığım aslında fark etmez. Böylece bu durumu şu şekilde de belirtebilirim:

$$25000 \times 23 \div 100 = 5750 \text{ £}$$

Ayrıca şu şekilde de olabilir:

$$25000 \times \frac{23}{100} = 5750 \text{ £}$$

Gördüğünüz üzere bir meblağın yüzdesini bulmak için sadece bu yüzdelik oranıyla çarpıyorum. Elbette yüzdeliği bir ondalık sayı olarak da ifade edebilirsiniz:

$$25000 \times 0.23 = 5750 \text{ £}$$

## Yüzdelik Artış ve Düşüş

Yaşasın, maaşıma %5 zam aldım! Yeni yıllık maaşımı hesaplamak için önceki maaşımın %5'ini belirleyip maaşıma ekleyebilirim. Ancak yeni maaşımın eski maaşımın %105'i olduğunu görebiliyorum. Yani yeni maaşımı hesaplamak için şu işlemi gerçekleştiriyorum:

$$25000 \times \frac{105}{100} = 26,250 \text{ £}$$

Bu işlem eski maaşımın %5'ini hesaplayıp kendisine eklemenin aksine tek adımda gerçekleştirilir. Aynı sonuç, şayet ondalık sayıları bayağı kesirlere tercih ediyorsanız  $2500 \times 1,05$  işlemiyle de elde edilebilir.

Maaşımın düşüşünden bir örnek vermemeyi tercih ettiğimden bunun yerine bir indirim örneği verelim. Diyelim ki en çok sevdiğiniz kıyafet mağazası bir günlüğüne “işaretleli ürünlerin hepsinde %15 indirim” yapıyor, 23 £'luk bir tişörtün yeni fiyatını nasıl hesaplayabilirsiniz? Yine benzer biçimde meblağın %15'ini hesaplayıp eski fiyattan çıkarabilirsiniz. Ancak bu işlem iki adımda gerçekleşecektir. Şayet %15'lik düşüşün bana eski fiyatın %85'ini bıraktığını fark edecek olursam, işlemi şu şekilde yapabilirim:

$$23 \times 0.85 = 19.55 \text{ £}$$

### Bir Yüzdelik Değişimi Tersine Çevirme

Geçenlerde bir süpermarkette satılan yiyeceklerdeki fiyat artışının %35'i bulduğu hakkındaki yazılar ilgimi çekti. Yapmış olduğum 57,24 £'luk alışverişin bu fiyat artışından önceki ederini nasıl hesaplayabilirim?

Bunu yapabilmek için alışverişim için ödediğim fiyatın aslında eski fiyatın %135'i olduğunu fark etmem gerekir. Yani bu meblağı 135'e bölüp %1'ini bulmak ve bunu 100 ile çarpmak bana önceki ederini vermelidir:

$$57,24 \div 135 \times 100 = 42,40 \text{ £}$$

Yine bu işlemi ustalıkla şu şekilde de yapabilirim:

$$57,24 \times 100 \div 135 = 42,40 \text{ £}$$

Dolayısıyla:

$$57,24 \times \frac{100}{135} = 42,40 \text{ £}$$

Yüzdelik şimdi tersyüz olmuş durumda, ancak bir bayağı kesirle çarpma işleminin, onun tersine bölmekle aynı olduğunu unutmayın (bkz. sayfa 45):

$$57.24 \div \frac{135}{100} = 42.40 \text{ £}$$

Bu yüzden bir yüzdelik değişiminden önceki orijinal değeri bulmak için onu yüzdeliğe bölüyorum.

### Kredi Geri Ödemeleri

Çoğumuz mülk ve araba gibi büyük ve pahalı şeyleri satın almak için krediye ihtiyaç duyarız. Banka bu işten para kazanmak için genellikle bize yıllık bileşik faiz olarak adlandırılan bir faiz uygular.

Eğer bankadan %5 sabit oranla bir kredi çektiyseniz, borçlandığınız miktarın kredinin vadesi süresince eşit miktarlarda azalacağını umabilirsiniz. Ama öyle olmaz. Çünkü yaptığınız her bir ödeme iki parçaya bölünmektedir. Bir kısmı o ay birikmiş olan faizi geri ödemektedir ve geri kalanı ise ödenmemiş miktarı azaltmak için kullanılır.

Örneğin, yıllık %12 faiz oranıyla 20.000 £'luk bir kredi çektiğimi düşünelim. İlk ayın sonunda asıl borcum olan 20 bin poundun üstüne artı %1 faiz oranında borcum olur (çünkü yıllık %12 oranındaki faiz ayda %1 olur). Bu da yukarıda bahsedilen yüzdelik artışı tasarısını kullanarak:

$$20,000 \text{ £} \times 1.01 = 20,200 \text{ £}$$

Eğer ayda 500 £ ödeseyseniz, bu meblağın 200 £'u faizi ödüyor ve geri kalan 300 £'u ise borcum olan meblağı ödüyor olurdu. Bu yüzden birinci ayın sonunda borcum  $20.200 \text{ £} - 500 \text{ £} = 19.700 \text{ £}$  dur.

İkinci ayın sonunda ise faiz şöyle hesaplanırdı:

$$19,700 \text{ £} \times 1.01 = 19,897 \text{ £}$$

İkinci aydaki 500 £'luk ödememin 197 £'u faiz olur ve 303 £'u da kalan borcumdan düşer. Böylece geriye kalan toplam borcum artık 19.397 £'dur. Borçlanmış olduğum miktarı ikinci ayda daha çok azalttım ve bu eğilim toplam borcumu ödeyene dek artarak devam edecek.

Bu etki özellikle uzun vadeli bir ev kredisi çektiğinizde fark edilir. İlk birkaç yıllık hesap özetleri asıl borçtan ne kadar düşük meblağların ödenmiş olduğunu gördükçe çok can sıkıcı olabilir ancak zaman geçtikçe durum iyileşir.

Bankaların, vadenin sonunda borcunuzu tamamen ödemiş olabilesiniz diye kredi geri ödemelerini hesaplamak için kullandıkları formül oldukça korkutucudur:

$$\text{Aylık geri ödeme} = \frac{\text{aylık faiz oranı} \times \text{borç alınan miktar}}{1 - (1 + \text{aylık faiz oranı})^{-\text{ay sayısı}}}$$

Şayet yirmi beş yıllık vade ( $25 \times 12 = 300$  ay) ve %5 sabit faiz oranı ( $\%5 \div 12 = \%0.42$  aylık faiz) ile 150.000 £ ev kredisi çekmiş olsaydım, aylık ödemelerim şöyle olurdu:

$$\text{Aylık geri ödeme} = \frac{\frac{0.42}{100} \times 150000}{1 - (1 + \frac{0.42}{100})^{-300}}$$

Eğer <sup>-300</sup>ün ne olduğundan emin değilseniz sayfa 61'e bir göz atın. Bu verileri güvenilir bir hesap makinesine girdiğimde şu yanıtı alırım:

$$\text{Aylık geri ödeme} = \frac{630}{0.7155965} = 880.38 \text{ £}$$

Toplamda geri ödeyeceğim meblağ da  $880,38 \text{ £} \times 300 = 264,114 \text{ £}$  olur. Yani kredi çekmiş olduğum meblağdan 100 bin pounddan daha fazla bir miktarı geri öderim.

## Bernoulli, Euler ve e

Yıllar boyunca pek çok matematikçi faiz konusuyla ilgilenmiştir. Geri ödemeleri ve sonunda ödeyeceğiniz toplam meblağı etkileyen şeyin sadece faiz oranı olmadığını, ayrıca ne kadar sıklıkta hesaplandığının da bunu etkilediğini fark eden İsviçreli matematikçi Jacob Bernoulli (1654-1705) oldu.

Bunu göstermek için önceki sayfadaki örnekte bahsedilen bankanın, faizi günlük uyguladığını düşünelim. Günlük faiz oranım  $5 \div 365 = 0,0137$  olurdu. Bu da günlük geri ödememi 28,80 £ yapar ve aylık ödemem de 876 £'a denk gelirdi. Yani aylık faize göre birazcık daha iyidir. Ama daha kötüsü de olabilirdi! Eğer banka yıllık faiz uygulaysaydı, o zaman aylık geri ödemem 886,91 £ olacaktı.

Gördüğünüz gibi faizin sık hesaplanması sizin yararınıza olur. Bu durum yatırım yaparken de geçerlidir. Bernoulli şayet faiz sürekli olarak hesaplansaydı şu problemi gerçekten çözebileceğinizi ortaya koydu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Bu size oldukça caydırıcı görünebilir ancak birkaç önemli matematiksel kavramı sunmaktadır. “Lim”, limitin kısaltmasıdır ve “ $n \rightarrow \infty$ ” ise “n sonsuza giderken” anlamına gelir. Unutmayın ki sonsuz, bir sayı değildir ve hesaplamalarla formüllerde onu kullanamayız. Bu yüzden matematikçilerin asıl merak ettikleri şey şudur: n gerçekten çok ama çok büyük bir sayı olduğunda  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  değerine ne olur? n büyüdükçe kesir kısmı bize sunduğu artışı da azaltarak gittikçe küçülür ancak parantez dışındaki kuvvetin büyümesi değeri kendisiyle daha çok çarpmamız anlamına gelir. İşte faizli geri ödemelerde gördüğümüz şey de tam olarak dengelemedir; daha küçük meblağları daha sık ödemek toplam ödememizi azaltır.

Bernoulli bir banka hesabında işletilen faizi inceliyordu ve bir yılda alabileceğiniz en fazla faizin, faiz oranının 2,7 kuvveti ile

çarpılan başlangıç yatırımınız olduğunu keşfetti. Şayet yıllık %5 faiz oranıyla yatırım yapsaydım ve yıl boyunca sürekli faiz alsaydım, o halde şu meblağı alırdım:

$$100 \times 2.7^{0.05} = 105.09\text{£}$$

Bu miktar şayet faiz tek bir taksitte sene sonunda ödenmiş olsaydı elde edeceğim 105 £ ile kıyaslandığında devasa bir artış değildir ancak ne kadar az olursa olsun yine de işe yarar. Zaman ilerleyip insanlar daha hassas hesaplamalar yapabilir duruma geldiklerinde 2,7 daha fazla ondalık basamakla geliştirildi. 1978 yılında, Apple şirketinin kurucu ortaklarından olan Steve Wozniak ilk Apple bilgisayarlarından birini bu sayıyı 100.000'den daha çok basamakla hesaplamak için kullandı. Bu sayının da  $\pi$  gibi sonsuza dek devretmeden sürdüğünü biliyoruz:

$$2.71828182845904523536028747135266249 \dots$$

Bu değer matematiğin başlangıçta ilgisiz görünen her türden alanında ortaya çıkmaktadır. Oldukça tanınmış bir İsviçreli matematikçi olan Leonhard Euler (1707-83), mekanik bilimi (makinelerin nasıl tamir edildiğinden çok nasıl işlediği) üzerine çalışmasında bu sayıyı temsil etmek için uzun zamandır  $e$  harfini kullanmaktaydı ve bu yüzden bu sayı Euler sayısı olarak da bilinir. Ayrıca meşhur Euler denkleminde de bu sayıyı kullanmıştır:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Hesaplamanın ve tüm diğer sayıların temeli olduğu için sıfır ve bir sayısından bahsetmeye gerek yok.  $\pi$  sembolü bir dairenin varlığını tanımlayan sayı olarak geometriyi temsil eder.  $i$  ise eksi birin karekökü olup her türden çözülemeyen denklemleri çözmemize izin veren ve var olmayan hayali bir sayıdır. Bu kısa ve öz ifade en önemli beş sayıyı içermektedir ve birçok kişi tarafından tüm matematik dünyasındaki en mükemmel -bazılarına göre de en güzel- denklem olarak kabul edilmektedir.

# BİLEŞİK ÖLÇÜLER

Bilim insanlarının, mühendislerin ve matematikçilerin en son formüllerini kullanılan birimler bakımından kontrol ettikleri ve boyutsal analiz olarak adlandırılan bir teknik vardır. Bir karenin alan formülü şu şekildedir:

$$\text{karenin alanı} = \text{kenar uzunluğu} \times \text{kenar uzunluğu}$$

Alan, bildiğimiz gibi, metre kare birimleri ( $\text{m}^2$ ) ile ölçülür. Denklemin “kenar uzunluğu x kenar uzunluğu” kısmındaki ölçülere bakacak olursam her ikisinin de metre olduğunu ve metre çarpı metrenin ayrıca metre kareye eşit olduğunu görürüm. Böylece formülün iki tarafındaki ölçüler birbirine uymaktadır. Formülün boyutlarını incelemiş olduk. Bu durum formülün doğru olduğunu garanti etmez ancak yine de işe yarar bir araçtır.

Bir dairenin alanını düşünelim:

$$\text{dairenin alanı} = \text{yarıçap} \times \text{yarıçap}$$

İfade boyutsal anlamda tam olarak bir önceki örnekten dolayı doğrudur. Ancak burada doğru cevabı vermek üzere eski arkadaşımız pi sayısına ihtiyacımız vardır:

$$\text{dairenin alanı} = \pi r^2$$



Pi sayısının boyutsal analizimizi bozmaması için kendisinin hiçbir boyutunun olmaması gerekir. Pi, hiçbir birimi olmayan bir sabit sayıdır; pi'yi metre, kilogram ya da başka hiçbir şeyle ölçmeyiz. Bu yüzden pi boyutsuz bir sabittir ve yıllar boyunca bu gibi şeylerin değerlerini hesaplamak adına çok çaba sarf edilmiştir.

1700'lerin sonlarına doğru Fransız Devrimi'nden çıkan en iyi şeylerden biri *metrik sistem* olmuştur. Devrimciler yeni ve tutarlı bir ağırlık ve ölçü sistemi ile ondalık sayı sisteminin kullanım rahatlığını birleştirdiler. Rönesans döneminden beri doğa felsefecileri (modern bilim insanları ve matematikçilerin ataları) sürekli iletişim halindeydiler ve miktarları iletmenin daha evrensel bir yoluna ihtiyaç duyuyorlardı.

Sistem, yıllar içinde geliştirildi ancak temel düşünce diğer tüm ölçülerin türeyebileceği az sayıdaki en önemli temel ölçü birimlerini elde etmektir. Başlangıçta temel ölçü birimleri uzunluk için metre, ağırlık için kilogram ve zaman için de saniyeydi. Fransız devrimciler bir metreyi kuzey kutbundan başlayan ve Paris'ten geçip ekvatora kadar uzanan mesafenin on milyonda biri olarak tanımlamışlardı. Kilogram ise ilk başta donma noktasının hemen üzerindeki bin santimetre küp suyun kütlesiydi. 1899 yılında ise çok dikkatli bir şekilde üretilmiş inanılmaz derecede sağlam ve paslanmaya dayanıklı platinyum-iridyum alaşımının kütlesi olan Uluslararası Prototip Kilogram olarak yeniden tanımlandı. Bu tanımın da önümüzdeki birkaç yıl içinde temel fizik sabit sayılarını içeren çok daha kavramsal bir şeyle güncellenmesi bekleniyor. Saniye ise çok uzun zamandır kullanımda olan bir zaman birimiydi. Saatin altmışta biri oranına dayanan yapısı ise zamanı ilk ölçen antik kültürlerin sayı sistemlerinin kalıntısıydı. Günümüzde bir saniyenin tanımı sezyum olarak adlandırılan bir metalin atomunun aşırı derecede tutarlı titreşim frekansı ile ilişkilendirilmektedir. Tam olarak ifade etmek gerekirse, sezyum atomunun 9.192.631.770 kez titreşimi için geçen süredir.

Diğer temel ölçü birimleri de evrenimiz üzerine anlayışımız gelişip daha fazla şeyi ölçme ihtiyacı duydukça listeye eklendi. Örneğin, ısı ölçü birimi kelvin, elektrik akım birimi amper, belirli bir kütle içindeki madde miktarı birimi mol (ne yazık ki toprak altında tünel kazan şirin köstebeklerle bir ilgisi yok<sup>3</sup>) ve ışık yoğunluğu ya da parlaklığı birimi mum (kandela da denir) gibi. Artık SI<sup>4</sup> birimleri (Uluslararası Birimler Sistemi) olarak bilinen yedi temel birim, fiziksel dünyada ihtiyaç duyduğumuz her şeyi ölçmemize izin vermektedir.

Kullanmakta olduğumuz türetilmiş ya da bileşik birimlerin çoğuna da yeni isimler verilmiştir. Örneğin litre, bir hacim ölçü birimidir ve bir metre küpün binde birine eşittir ancak pazartesi sabahı mahmur gözlerle işe gitmekte olanlar için bir metre küpün binde biri benzini kafadan hesaplamak yerine bir litre demek çok daha kolaydır. Türetilmiş ölçü birimlerinin çoğu o alanda önemli olan bilim insanlarının adını taşımaktadır.

Isaac Newton (1642-1726), bir kuvvet olan yerçekimi kavramını geliştirmesiyle tanınan İngiliz bir dehaydı.

Newton'ın ikinci yasası: kuvvet = kütle x ivme

Temel bir SI birimi olan kütle, kilogramla ölçülür. İvme ise bir saniye karedeki metreyle ölçülür. Böylece kuvvetin birimleri de “kilogram çarpı saniye karedeki metre” olur. Bununla birlikte bu bileşik ölçüye artık newton (newton) ismini veriyoruz.

Blaise Pascal (1623-62) ise diğerlerinin yanı sıra sıvılar üzerine birçok çalışma yapmış ve su cenderesi ile şırıngayı icat etmiştir. Çalışmalarının çoğu basınç üzerine odaklanmıştır:

---

3 İngilizce “mole” sözcüğünün karşılığıdır. İngilizcede “mole” hem kitle ağırlık birimi hem de köstebek anlamına gelir. (ç.n.)

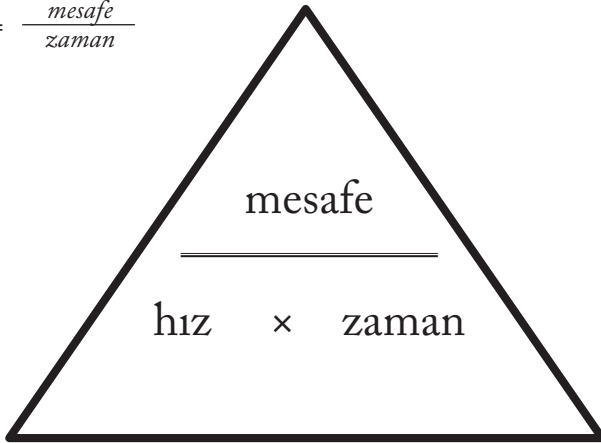
4 SI : Syst me international (Fra.): Uluslararası Birimler Sistemi (ç.n.)

$$\text{basınç} = \frac{\text{kuvvet}}{\text{alan}}$$

Şimdiye dek gördüğümüz kadarıyla kuvvetin kilogram ve saniye karedeki metre birimleri ve alanın da metre kare birimleri bulunmaktadır. Bu yüzden basıncın birimlerinin de “metre kare başına kilogram saniye kare başına metre” olması gerekir. Bunu da “saniye kare metre başına kilogram” olarak sadeleştirebiliriz. Ancak eminim basınç birimi olan paskalların çok daha kolay telaffuz edileceği konusunda hemfikirsinizdir.

Yukarıdaki tanımların her ikisi de nihayetinde içinde bir yerlerde “saniye başına” (ya da saniyede) ifadesini içermektedir. Bir şeyi belirli bir zaman birimine böldüğümüzde aslında o zaman birimi içinde onun nasıl değiştiğine bakıyoruz demektir. Bu durum bilim ve matematikte o kadar yaygındır ki bu düşünceye “değişim oranı” ismini veriyoruz. Gördüğümüz en yaygın değişim oranı hızdır. Bunu okulda öğrendiğinizi hatırlarsınız, muhtemelen aşağıdaki üçgenin de biraz yardımını olabilir:

$$\text{hız} = \frac{\text{mesafe}}{\text{zaman}}$$



Bir matematik öğretmeni olarak burada belirtmek istediğim ilk önemli nokta bu formülün *ortalama* hızı hesapladığıdır. Örneğin trenle York'tan Londra'ya olan 200 millik mesafeyi iki saatte alıyorsa bu formül bana hızımın  $200 \div 2 =$  saatte 100 mil olması gerektiğini söylemektedir. Ancak trenin beni alması için durmuş olması, hızlanıp diğer istasyonlara yaklaşırken yavaşlayıp yine durması ve sonunda Londra'ya varması gerektiğinden bu sadece benim ortalama hızım olur.

Hız bir değişim oranıdır. Bu durumda her bir saat içinde ortalama olarak 100 millik bir mesafe kadar yol aldığımı anlatmaktadır. Başlangıç noktama göre bulunduğum konum 100 mil oranında değişmiştir.

İvme de hızın değişim oranıdır, belirli bir süre içinde hızınızın ne kadar değiştiğini gösterir. Nesneleri düşürdüğümüzde yerçekiminden dolayı ivme kazanırlar; yeryüzünde bu, saniye kare başına 9,81 metredir. Saniye kare başına 9,81 metre ise her bir saniyede düşen nesnenin hızının saniye başına 9,81 metre kadar arttığı anlamına gelir. Bu oldukça yüksek bir hızdır ve kediler dışında, yeterince yüksek bir yerden düştüklerinde neden hemen her şeyin kırıldığını açıklar. Ay'da ise ivme saniye kare başına yalnızca 1,66 metredir ve bu yüzden de kendilerinden daha ağır uzay kıyafetleri giyen astronotlar uzay zıpzıpları olmadan etrafta sıçrayabiliyorlar.

Hayatlarımız boyunca saniye kare başına 9,81 metrelik ivmeyi tecrübe ettiğimiz için diğer ivmeleri bununla kıyaslama eğilimine gireriz ve bunlara "G-kuvvetler" adını veririz. Hızımızın yanı sıra hareket yönümüzü değiştirdiğimizde de ivme kazanırız. Dolayısıyla bir araba içinde virajı dönerken de bu kuvveti hissederiz. Lunaparklardaki hız trenlerinde yeryüzünün çekim kuvvetinin altı katı kadar büyüklükte, yani 6 g'lik bir ivmeye maruz kalırız. Elbette bu sadece çok kısa bir süreliğine gerçekleşir. Bu basınca çok daha uzun süre maruz kalan astronotlar ve savaş uçağı pilotları çoğunlukla vücutlarını sıkarak kanlarını beyinlerinde tutmaya yardımcı olan G-kıyafetleri giyerler.

## Yanlış Anlaşılmalar: Mars İklim Kâşifi

Metrik sistemin icadından birkaç yüzyıl sonra bile tüm dünyada hâlâ bazı eski sistemlerin kullanıldığına tanıklık etmekteyiz. Birleşik Krallık'ta hâlâ bira ve sütümüzü pint ile ölçüyoruz (568 mililitre o kadar etkileyici gelmiyor) ve yol işaretlerinde de hâlâ mil kullanıyoruz. Birleşik Devletler de aynı olmasa da benzer bir sistem kullanmaktadır.

Bu durum utanç verici birkaç sorunun yaşanmasına neden olmuştur. 1983 yılında, Kanada havayollarına ait bir Amerikan Boeing 767 uçağıyla gerçekleştirilen uçuşta yakıt yarı yolda bitti çünkü yer ekibi uçağa yakıtı kilogram yerine libre birimiyle doldurmuştu. Bir kilogram iki libreden daha fazla olduğu için, olması gerekenin yarısından daha az yakıt verildiği anlaşılıyordu. Bunun üstüne arızalı bir yakıt göstergesi de eklenince uçak, eskiden askeri bir havaalanı olarak kullanılan yarış pistine mecburi iniş yapmak zorunda kaldı. Neyse ki hiç kimse yaralanmadı. Pilotlar ise yakıtı doğru dürüst kontrol etmedikleri için rütbeleri düşürülerek cezalandırıldılar, ama aynı zamanda çabuk düşünüp karar vermeleri ile sıradışı pilotaj becerilerinden dolayı ödüllendirildiler.

1999 yılında ise Mars İklim Kâşifi'nin yeryüzünden dokuz ay sürecek bir yolculuk sonrasında iklimini incelemek üzere Mars'ın yörüngesine gitmesi bekleniyordu. Aracı yörüngeye sokacak olan motorlar kullanıldıktan hemen sonra irtibat kesildi. Ardından gerçekleştirilen inceleme sonucunda alt yüklenici firmalardan birinin, motor tarafından üretilecek itme gücünü hesaplamak üzere SI türevli newton birimi yerine libre kullandığı ortaya çıktı.

Bu elbette birkaç nedenden dolayı bilhassa kötü bir hataydı. Öncelikle boyutsal analiz, libre ile newtonun aynı şeyi ölçmek için bile kullanılmadığını gösteriyor. Newton, kuvvet ölçüm birimiyken libre kütle ölçüm birimidir. İkinci olarak motorların garip performansı daha en baştan dile getirilmiş ancak şikâyetler göz ardı edilmişti.

Her neyse, sonuçta Kâşif, Mars'ın atmosferine çok hızlı girmiş ve planlanan amacı için kullanılamadan parçalanmıştı. Projenin maliyeti 600 milyon doların üstündeydi.

İvmenin aksine hız düşmeleri de G-kuvveti yaratır ve otomobiller de kasıtlı olarak burkulma bölgeleri<sup>5</sup> olacak şekilde tasarlanırlar. Bu bölgeler hızdaki değişimin daha uzun bir zamana yayılmasına, toplam hız düşmesinin etkisinin azaltılmasına ve böylece de maruz kaldığımız kuvvetin azalmasına olanak sağlar. Hava yastıkları da hava yastiksız araçlara kıyasla hız düşmesi için vücudumuza daha çok zaman tanır.

---

5 Bir otomobilin trafik kazası esnasında sıkışıp çarpışmanın etkisini azaltacak biçimde tasarlanan yapısal özelliği (ç.n.)

# ORANTI

Orantı kavramı çok açık gibi görünmektedir ancak bu her zaman böyle olmamıştır. Diyelim ki dört kişilik bir yemek tarifiniz var ancak akşam yemeğe sekiz misafirinizin geleceğini öğrendiniz. Hiç düşünmeden misafir sayısı iki katına çıktığından malzemelerin hepsinin miktarını iki katına çıkarmanız gerektiğine karar verirsiniz. Bunun nedeni misafirlerin sayısı ile tarifteki malzemelerin miktarının orantılı olmasıdır. Ancak misafirlerden biri yanında bir arkadaşını getirip toplam misafir sayısını dokuza çıkarsaydı ne olurdu? Birdenbire işler öncekine göre epey zor hale gelirdi.

Bir matematikçiye göre orantı, misafir sayısı ile örneğin pişireceğimiz makarna miktarı arasındaki bağıntıyı ifade eder. Şayet asıl tarifte 300 g makarna gerektiği söyleniyorsa o halde misafirlerim için “eğer - ise, o zaman, bu yüzden” ya da birimsel yöntemden yararlanabilirim:

*Eğer 4 misafir için 300 g makarna gerekli ise,*

*O zaman 1 misafir için  $300 \div 4 = 75$  g makarna gereklidir.*

*Bu yüzden de 9 misafir için  $75 \times 9 = 675$  g makarna gereklidir.*

Bu yönteme birimsel yöntem denir çünkü yanıtı bulmada tek bir birey ya da birim için gerekeni anlamaya çalışırız. Buna bakmanın bir başka yolu ise ne kadar makarna gerektiğine dair bir formül çıkarmak olurdu. O zaman kaç tane misafiriniz olacağına bakılmaksızın rahatlıkla miktarı

belirleyebildiniz. Misafir sayısına  $n$  ve buna karşılık gelen makarna kütlesine de  $m$  diyelim. Matematikçiler formülü bulmaya şunu belirterek başladılar:

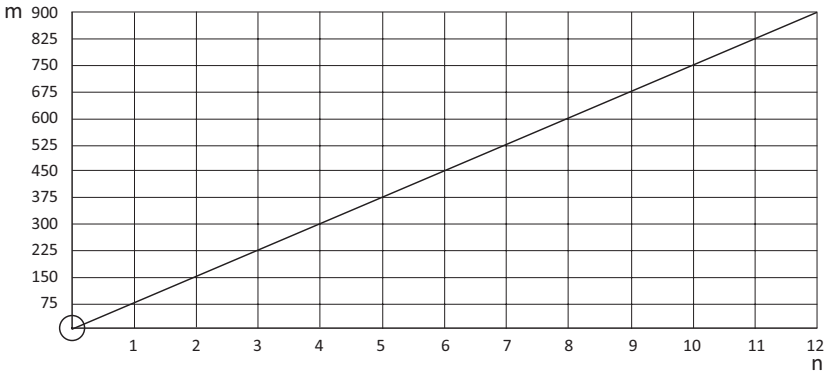
$$m \propto n$$

Bu sembol basitçe “orantılıdır” anlamına gelir. Henüz işe yarar bir formülümüz yok ancak en azından varsayımımızı belirtmiş olduk. Şimdi biraz sayısal bilgi eklememiz gerekiyor. Birimsel yöntemde her bir misafir için 75 g makarna gerektiğini görmüştük. Daha sonra ihtiyaç duyduğumuz miktarı bulmak üzere bu sayıyı toplam misafir sayısı ile çarptık. Şimdi misafir sayısı olarak elimizde  $n$  var, yani formülüm artık şöyledir:

$$m = 75 \times n$$

Bu durumda 75 sayısına *orantı sabiti* denir; bu sayı  $m$  ve  $n$  değişkenleri arasında bağ kurmamızı sağlayan sayıdır.

Makarna örneğimizde misafir sayısı ile makarna kütlesi *doğrusal* orantı içindedir. Bunun nedeni aradaki bağıntının başlangıç noktasından (grafik hem  $m$  hem de  $n$ 'nin sıfır olduğu sol alt köşesinden) geçerek düz bir çizgi oluşturacak biçimde grafiğinin çizilebilmesidir:





## **Yanlış Anlaşılmalar: Tarih Değiştirme Hattı Üzerindeki F-22'ler**

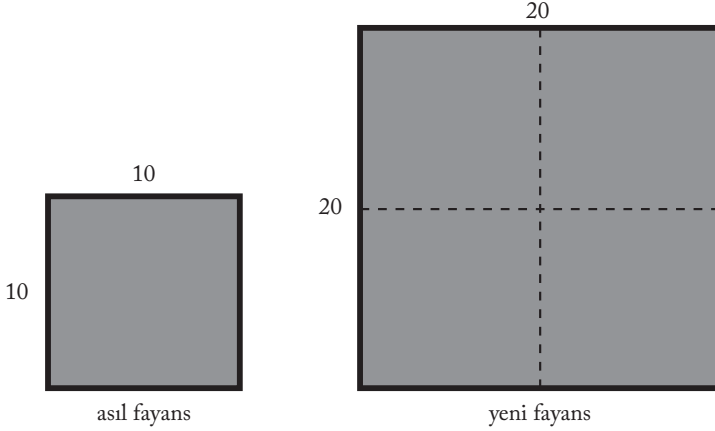
Birleşik Devletler ordusuna ait olan F-22, savaş uçakları arasında zirvede yer almaktadır. Radarda tespit edilmesi neredeyse imkânsız olan bu uçak aerodinamik, mühendislik ve havacılıktaki en son gelişmelerle bir savaş uçağının neredeyse her şeyini yönetebilecek güçteki yüksek performanslı bilgisayarların birleşiminden doğmuştur.

Bu durum bilgisayarların bozulması halinde büyük bir sorun yaratır.

2007 Şubat ayında tam da bu oldu. Toplam on iki F-22 Hawaii'deki bir üsten Japonya'daki bir başka üsse doğru uçuyordu. Bu yolculukta Uluslararası Tarih Değiştirme Çizgisi'ni geçtiler. Bu hat Alaska ile Doğu Rusya arasında, güneyde Pasifik Okyanusu'ndaki bir dizi ada grubunun üzerinden saparak Yeni Zelanda ve diğerlerini aşan hayali ve biraz da istikrarsız bir çizgidir. Uçakların yaptığı gibi doğudan batıya doğru giderken yirmi dört saat kayıp yaşarsınız.

Birleşik Devletler ordusu sorunun gerçek nedeni hakkında herhangi bir açıklama yapmadı ancak uçakların aniden çalışmaları için gereken hiçbir değişim oranını hesaplayamadıklarından şüpheleniyorum. Sistemlerin çoğu normal parametrelerinin dışında değerler verdiği için uçaklar navigasyon ve iletişim sistemlerini tamamen kaybettiler. Neyse ki o sırada uçaklar Hawaii'deki üslerine kadar gözle takip edebilecekleri nakit ikmal tankerlerinin yakınındaydılar. Bir uçak için 148 milyon Amerikan doları harcayacaksınız ve dünyanın etrafında bile dolaşamayacak!

Ancak orantılı olan her şey grafikte böylesine düz bir çizgi oluşturmaz. Diyelim ki sahibi olduğum şirket kare fayanslar üretip satıyor. Bir fayansın uzunluğu elbette alanını etkiler ancak doğrusal olacak biçimde değil. şayet bir fayansın uzunluğunu iki katına çıkarırsam alanını dört katına çıkarmış olurum:



Aslında fayansın alanı kenar uzunluğunun karesi olduğundan aradaki bağıntı da şöyle olur:

$$\text{alan} \propto \text{kenar uzunluğu}^2$$

Hem makarna hem de fayanslar *doğru* orantıya örnekler; yani bir değer artarken diğer değer de orantısal olarak artar. Dolaylı ya da ters orantıda ise bir değer yükselirken diğer değer orantılı olarak düşer. Örneğin müzik festivalinde çalışan bir çöp toplama ekibim olsa çöpleri toplama süresi çöp toplayıcılarımın sayısı arttıkça düşer. Bu durumda:

$$\text{çöp toplama süresi} \propto \frac{1}{\text{çöp toplayıcı sayısı}}$$

Diyelim ki 10 çöp toplayıcısı için çöpi toplamak 50 saat sürüyorsa bu bağıntıyı bir orantı sabiti kullanarak çözmek gereken bir formüle dönüştürebilirim. Şayet buna  $k$  dersem:

$$50 = k \times \frac{1}{10}$$

Buradan  $k = 500$  olduğunu görebiliyorum (çünkü 500 çarpı bir bölü on 50'ye eşittir), böylece formülüm şöyle olur:

$$t = 500 \times \frac{1}{n}$$

Burada  $t$  çöp toplamak için geçen zaman,  $n$  ise çöp toplayıcıların sayısıdır. Elbette eskiden sevilen hileli bilmece-  
lere dikkat etmek gerekir: “Eğer sekiz kazıcının sekiz çukuru kazması sekiz saat sürüyorsa bir kazıcının bir çukuru kazması kaç saat sürer?” Sanırım beynimizin şiirsel ritme meyilli tarafı bu soruya “bir” yanıtını vermeyi o kadar çok arzular ki beynimizin matematiksel tarafını bastırmaktadır. Doğru yanıt elbette sekiz saattir. Birimsel yöntem burada bize kişi-saat kavramını sunmaktadır, yani bir kişinin bir saatte ne kadar iş tamamladığını öğreniyoruz. Sekiz kazıcı, sekiz saat ve sekiz çukur açıkça bize her bir kazıcının bir çukuru sekiz saatte açtığını göstermektedir. Dolayısıyla bir çukur açmak sekiz kişi-saatlik iştir.

Günlük dilde orantı çoğunlukla bir nesnenin boyu ile genişliğinin kıyaslanması anlamına gelir. Belli başlı şeylerin bağli orantısı hakkında göze tabiatı gereği hoş görünen bir şey vardır. Yüzyıllar boyunca çoğu matematikçi, bilim insanı, düşünür, mimar, tasarımcı ve sanatçı bu olgu karşısında büyülenmiştir.

Geometrinin babası olarak kabul edilen Öklid (yaklaşık olarak MÖ 300 yıllarında yaşamış), nesneleri orantısal olarak hoş göstermek üzere kullanılabilen ve günümüzde *altın oran* olarak tanımlanan orantıyı ilk tanımlayan kişi olmuştur. Kendisi çizgileri göz önünde bulundurmuştur ancak bence dikdörtgenlere bakacak olursak bu orantıyı kavramamız daha kolay olur.



Yukarıdaki dikdörtgenin yüksekliği ve genişliği altın orana uymaktadır. Çoğu kişiye göre bu, göze en hoş gelen dikdörtgendir ve bu orantıdaki dikdörtgenler ortaçağdaki camilerden modern binalara kadar hemen her şeyin tasarımında kullanılmıştır. Daha çok Le Corbusier olarak tanınan İsviçreli mimar Charles-Édouard Jeanneret (1887-1965), bu oranı çalışmasında kapsamlı olarak kullanmıştır.

Bu dikdörtgenin en önemli özelliği ise şayet bu dikdörtgeni olası en büyük kare ve dikdörtgene bölecek şekilde kesersem küçük dikdörtgenin kenarlarının birbirine orantısının orijinal dikdörtgeninki ile aynı olmasıdır.



Bu durumu anlamak muhtemelen küçük dikdörtgen üzerinde aynı işlemi gerçekleştirdiğimde daha kolay olur:



Gri dikdörtgen ile orijinal dikdörtgenin kenarları da aynı orantıya sahiptir. Şayet bu diyagram geometrik şekillerle dolu soyut resimleriyle ünlü Hollandalı sanatçı Piet Mondrian'ın (1872-1944) çalışmalarını anımsatıyorsa bunun oldukça geçerli bir nedeni var: En çok hoşta giden resimleri yapmak istiyordu ve bu sebeple de çalışmaları altın orana uyuyordu.

Neden bu dikdörtgen insanların hoşuna gidiyor? Hiç kimse bu konudan tam olarak emin değil ancak Amerikalı mühendis Adrian Bejan gözlerimizin bir bakışta bu orantıları en kolay kavrayacak biçimde geliştiğine böylece beyinlerimizin bilgiyi kolayca işlemesine izin verdiğine inanıyor. Muhtemelen, görünüşe göre de bilinçsizce, altın orana uyan biçimleri, resimleri, binaları ve hatta yüzleri de en çekici bulmamızın nedeni budur.

Altın oran matematikte o kadar önemlidir ki  $\pi$  ve  $e$  gibi kendine has bir harf sembolü vardır:  $\phi$  (İngilizce okunuşu “phi” (fay), klasik Yunan mimarisinin kurucusu sayılan Yunan mimar ve heykeltıraş Phidas'ın (yaklaşık MÖ 480-430 yılları arasında yaşamış) isminin ilk harflerinden geliyor.  $\pi$  ve  $e$  gibi  $\phi$  da bir irrasyonel sayıdır:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.61803398 \dots$$

(Neden  $\varphi$ 'ın bu değeri aldığını gözden geçirmek istiyor-sanız bkz. sayfa 127.)

Güzel dikdörtgenlerimizin uzun kenarı kısa kenarının bir buçuk katından biraz fazladır. İnsanlar genel olarak yükseklik ve genişliği altın orana uyan yüzleri daha çekici bulmaktadır. Hatta sizin ya da arkadaşlarınızın ne kadar “güzel” olduğunu belirlemek üzere yüz teşhis teknolojisi ile fotoğrafları analiz eden uygulamaları indirebilirsiniz!

# ORAN

Genellikle bölme işareti ya da *obelus*'u ( $\div$ ), oran işareti olan “:” ve bir bayağı kesir çizmek için kullandığımız kesir çizgisinin birleşimi olarak düşünmüşümdür. Bu işareti ilk kez kullanan İsviçreli matematikçi Johan Rahn'ın (1622-76) bunu düşünüp düşünmediği hakkında hiçbir fikrim yok ancak yine de bu sembol bölme, oran ve bayağı kesirler arasındaki bağıntıyı vurgulamaktadır. Bölme ile bayağı kesirler arasındaki bağlantı oldukça açıktır:

$$5 \div 7 = \frac{5}{7}$$

Bununla birlikte 5:7 oranı tamamen bölme ve bayağı kesirle aynı anlamı taşımaz. Şayet iki nicelik 5:7 oranında ise bu niceliklerden birinin her beşi için diğerinden yedi tanesine sahiptir demektir.

Kuskus paketimin üzerindeki talimatlara göre her 100 gramlık kuru kuskus için 160 mililitre su kullanmam gerekiyor. Pratikte 160 mililitre suyun 160 gramlık bir kütlesi vardır. Yani bu oranı şu şekilde yazabilirim:

$$\begin{array}{l} \text{su: kuskus} \\ 160:100 \end{array}$$

Şayet bu miktarda leziz Akdeniz karbonhidrat deposunu pişirmiş olsaydım, su ile kuru kuskusun bayağı kesri ne olurdu? İşte burası oranların bayağı kesirlerden saptığı noktadır. Bu orantı bir bütünden daha büyük olduğu için suyun orantısının  $\frac{160}{100}$  olması mümkün değildir.

Aynı derecede kuru kuskus da bitmiş ürüne  $\frac{100}{160}$  kadar katkıda bulunamaz.

Bunun yerine kasemdeki pişmiş kuskusun  $160 + 100 = 260$  g içermesi gerekir. Bu orantıların su için  $\frac{160}{260}$  ve kuru kuskus için ise  $\frac{100}{260}$  olması gerektiği anlamına gelir. Bayağı kesrin paydasını bize veren şey oranlardaki iki sayının toplamıdır (bazen buna her iki kısmın toplam sayısı denir).

Bayağı kesirlerde olduğu gibi ihtiyaç halinde oranları azaltmak için eşdeğerliği kullanabiliriz. Orandaki her iki sayıyı 20'ye bölerek kuskus oranını en düşük ifadeye düşürsem:

$$160:100 = 8:5$$

Diyelim ki bir pişirmelik kuskus hazırlıyorum ve elimdeki kuskusu tarttığımda 250 g olduğunu fark ettim; bunun için ne kadar suya ihtiyaç duyarım? Şayet ilk oran olan 160:100 ile başlarsam ve kuskus miktarının da 2,5 katına çıktığını fark edecek olursam o halde suyun da 2,5 katı kadarına ihtiyacım olacaktır.  $2,5 \times 160 = 400$  g su gerekir.

İçinde oran barındıran birçok okul problemi paranın paylaştırılmasıyla ilgilidir: Eğer Anna Teyze yeğenleri Billy, Clara ve Daisy'ye 100 £'luk parasını 2:3:5 oranında dağıtırsa her biri ne kadar para alır?

Burada dikkatimizi çeken ilk şey oranların bayağı kesirlerde mümkün olmayan ikiden fazla niceliğe sahip olmalarıdır. Bu problemi çözmenin yolu Anna Teyze'nin önünde 100 £ değerinde bir bozuk para yığınının olduğunu ve bunları yeğenlerine dağıttığını hayal etmektir. Billy'ye iki, Clara'ya üç ve Daisy'ye beş tane bozukluk. Dağıtımın her turunda elinden 10 £ çıkmaktadır. Açıkça görüldüğü üzere 100 £ için toplamda on tur dağıtım yapacaktır. Böylece her bir yeğeni her turda kendilerine düşen oranın on katı ka-



dar, yani sırasıyla 20 £, 30 £ ve 50 £ alır:

| B  | C  | D  | Toplam Bölüm Sayısı |
|----|----|----|---------------------|
| 2  | 3  | 5  | 10                  |
| 20 | 30 | 50 | 100                 |

Oranın kullanıldığını gördüğümüz diğer alanlardan biri de harita ölçekleridir. Basit haritaların “1 cm 100 km’yi temsil eder” ya da benzeri bir ölçeği vardır. Ancak diğer haritalar ya da atlaslar 1:50.000 gibi bir oran kullanırlar. İşte bu haritadaki herhangi bir şeyin, gerçek hayattaki boyutuna oranıdır.

Örneğin, haritada evimle bahis salonu arasındaki mesafe 5 santimetre ise gerçekte bu uzaklık ne kadardır?

Oranın bana söylediğine göre gerçek mesafe 50.000 kat daha büyüktür.  $5 \text{ cm} \times 50.000 = 250.000 \text{ cm}$ . Peki bu ne kadar uzaktır? Sayıyı 100’e bölmek santimetreyi metreye çevirir. Bu da 2500 m ya da 2,5 km anlamına gelir. O kadar da uzak değilmiş.

Bahis salonuna vardığımda ise bahisler adı altında daha fazla oranla karşı karşıya kalırım. Her ne kadar bahisler oran olsalar da geleneksel olarak “-e ya da -a” ekiyle ya da “-” işareti ile ifade edilirler. Her ne biçimde yazılırsa yazılsın bahisler bize ortaya koyduğumuz paranın kazancımıza oranını gösterir. Örneğin, ikiye *karşı* beş (2-5 ya da 2/5) bahis oranı her iki poundluk bahse karşılık beş pound kazanacağınız anlamına gelir. Ortaya koyduğunuz para da geri dönecektir. Yani 2 £’luk başarılı bir bahisten sonra 7 £ para alırsınız. Beş *üstüne* iki bahis oranı ise 5 £’luk bir bahis üstüne 2 £ kazanacağınız yani yine elinizde 7 £ olacağı anlamına gelir.

Bu bahisler bir ölçüye kadar olasılıkları temsil etse de tam olarak olasılık olmadıklarını belirtmekte yarar var.

Olasılıklar üzerine daha fazla bilgi için sayfa 177'ye bakınız.

# 3 CEBİR

# TEMELLER

Cebir konusunun ardında yatan kavram aslında son derece basittir: Ya bilmediğimiz (bilinmeyenler) ya da değiştirebilmek isteyeceğimiz (değişkenler) sayıların yerine geçmek üzere harfler kullanırız.

İşte bu kadar basit. İnsanlar uzun zamandır cebirle uğraşmaktadır. İlkokul çocukları bile yapabiliyor:

*Aklımda bir sayı var. Sayımın iki katı ondur. Peki, aklımdaki sayı kaçtır?*

Bu, dünyadaki herhangi bir matematik dersi için bir başlangıç sorusu olarak kabul edilebilir. Çözmek için hangi yolu kullanırsanız kullanın bilinmeyen bir sayı yani bir soyut terimle uğraşıyorsunuz demektir. Cebir, normal aritmetikte tam olarak aynı kuralları izler. Cebir aracılığıyla insanoğlu önceki dinsel ve felsefi yorumlamalarla kıyaslandığında evreni hiç görülmemiş bir detayla kuramlaştırabilmiştir. Cebir kendi alanı içinde olduğu kadar matematiğin diğer tüm alanlarında da kullanışlıdır.

Yukarıdaki problemi nasıl çözdünüz? Tahminde bulunmadıysanız eğer sanırım kendi kendinize şöyle düşünmüşsünüzdür: eğer sayının iki katı on ise o halde bu sayı onun yarısı olmalıdır. Onun yarısı da beş eder!

Böylece iki misline çıkarma ya da ikiyle çarpma işlemini anladığınızı, ayrıca ikiye bölmenin de bu işlemin zıddı ya da tersi olduğunu fark ettiğinizi göstermiş oldunuz. Bravo!

Harflerin cebirde kullanımına dair modern sistemi ilk

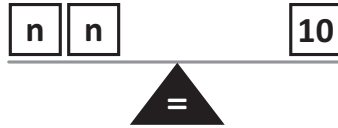
kez kullanan Fransız filozof ve matematikçi René (“Düşünüyorum, öyleyse varım,” diyen) Descartes (1596-1650) olmuştur. Muhtemelen bu probleme şu şekilde bakmıştır:

$$2n = 10$$

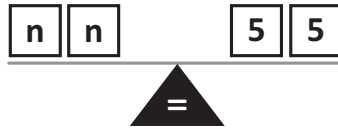
Bu kısa belirtke bize bilinmeyen sayı olan “n”yi verir.  $2n$  ise “iki kere n” demektir. Burada  $2 \times n$  de yazabilirdik ancak çarpı işareti sıkça kullanılan  $\times$  ile karıştırılabileceğinden gelenek gereği bu sembolü çıkarırız, sadece harfleri sayılarla değiştirdiğimizde yerine geri koyarız. Son olarak da sadece “ $= 10$ ” kastettiği anlama sahiptir.

### Doğrusal (Linear) Denklemler (Birinci Derece Denklemler)

Yukarıdaki gibi bir probleme denklem denir. Çoğunlukla (ancak her zaman değil) denklemleri çözebiliriz. Bunun bir yolu bir tartı ya da tahterevalliyi hayal etmektir. Eşittir işareti dayanak noktası ya da eksenini temsil eder. Problemimiz için hazırladığımız tahterevalli şöyledir:



Problemdeki n’ler ile on sayısını eşleştirmek için on sayısını iki eşit kutuya bölmemiz (yani ikiye bölmemiz) gerekir:

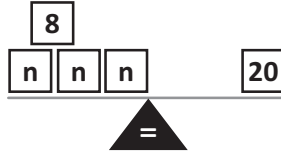


Böylece n’in beşe eşit olması gerekir.

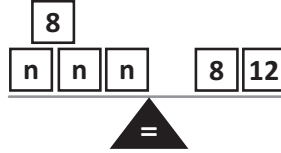
Tahterevalli benzetmesi işe yarar çünkü deneyimlerimize dayanarak tahterevalliye dengede tutmak için her iki tarafta da aynı ağırlığın olması gerektiğini biliyoruz. Şayet bir tarafı değiştirirsem sistemi dengede ya da eşit tutmak için diğer tarafı da aynı biçimde değiştirmeliyim.

*Aklımda bir sayı var. Sayımın üç katı artı sekiz yirmi ediyor. O halde aklımdaki sayı kaç?*

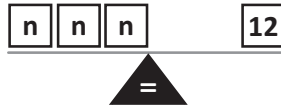
Bu biraz daha zor ancak yine  $n$ 'yi kullanırsak denkleminiz şöyle olur;  $3n + 8 = 20$ . Tahterevalli şimdi şöyle görünecektir:



Burada 20 sayısını  $12 + 8$  olarak düşünebilirim:



Artık dengeyi etkilemeden her iki taraftan da 8'i çıkarabilirim:



Burada  $n$ 'leri eşleştirmek için 12'yi üçe bölmek zorundayım:



Bu sebeple de  $n$ 'in 4'e eşit olması gerekir. Eğer her bir adımı sırayla atıp tahterevalli yerine denkleme uygulayacak olursam, şöyle olur:

$$3n + 8 = 20$$

(her iki taraf için  $- 8$  uygularsam)

$$3n = 12$$

(her iki tarafı  $3$ 'e bölersem)

$$n = 4$$

Böyle bir denklemi çözmek aslında bir oyun oynamak gibidir. Sonunda bir tarafta bilinmeyen diğer tarafta da bir sayı kalana dek tahterevalliden ya da denklemden bir şeyleri saf dışı bırakırız. Saf dışı bırakmak için ise tersi işlemleri kullanırız. İçinde çıkarma ve bölme olan bir örnek şöyledir:

$$\frac{n}{5} - 2 = 4$$

(önce  $+ 2$ )

$$\frac{n}{5} = 6$$

(sonra  $\times 5$ )

$$n = 30$$

Denklemin her iki tarafına da bilinmeyen koyarsanız oyun biraz daha zorlaşır. Ancak sadece birazcık:

$$5n + 7 = 3 + n$$

( $- n$ )

$$4n + 7 = 3$$

( $- 7$ )

$$4n = -4$$

( $\div 4$ )

$$n = -1$$

Denklemlerin çözümlerini bulduğumuz sayıyı asıl denkleme geri koyarak kontrol edebileceğimizi her zaman

hatırlamak gerekir. Buna *yerine koyma* yöntemi denir:

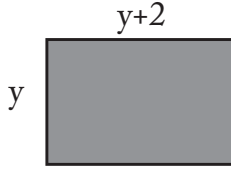
$$\begin{array}{rcl} 5 \times -1 + 7 & = & 3 + -1 \\ -5 + 7 & = & 2 \\ 2 & = & 2 \end{array}$$

Her şey yerine oturuyor. O halde cevabımız doğru.

## İkinci Dereceden Denklemler

Yukarıdaki denklemlere lineer denklemler denir çünkü hepsi de kendilerine herhangi bir kuvvetin bağlı olmadığı bilinmeyenler içermektedir. Karesi alınmış herhangi bir bilinmeyen içeren her denkleme ikinci derece denklem ismi verilir ve bunları çözmek için farklı stratejiler kullanırız.

Bir dikdörtgen düşünün ve bunun 15 m<sup>2</sup>'lik bir alanı var diyelim. Ancak kenarlarının uzunluklarının ne olduğundan emin değiliz. Bu bilgiden yararlanarak bu problemi çözebilir miyim?



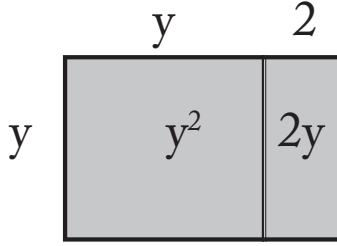
Dikdörtgenin alanını uzunluğu ile genişliğini çarparak bulabilirsiniz. Böylece çarpma işaretini hariç tutmayı unutmadan şöyle bir denklem kurabilirim:

$$y(y + 2) = 15$$

Öyleyse biri diğerinden iki fazla ve çarpımları da 15 eden iki sayıya ihtiyacım var.

Üç ile beş sayısı buraya tam da uyacak gibi görünüyor. İşlem tamam! Ancak daima bu şekilde kafamdan yürütebileceğimden emin olamam. Bu yüzden de bu ikinci dereceden denklemi çözmenin biraz daha cebirsel yollarına bir göz atalım.

Burada tahterevalli yöntemini kullanamam çünkü bilinmeyen sayı iki yerde bulunuyor ve onları birleştirmenin bir yolunu da bulamam. Dikdörtgeni bana yardımcı olacak biçimde bir kare ve daha küçük bir dikdörtgene bölebiliyim. Karenin alanı  $y \times y = y^2$ . Küçük dikdörtgenin alanı da aşağıda gösterildiği gibi  $2 \times y = 2y$  olur:



Artık  $y(y + 2) = y^2 + 2y$  olduğunu ve ayrıca kare ile küçük dikdörtgenin alanının büyük dikdörtgenin alanına eşit olduğunu bildiğim için bunun da  $15$ 'e eşit olması gerekir:

$$y^2 + 2y = 15$$

Yani parantez içindekileri çarpabildim ve muhbir  $y^2$  terimini görebiliyorum. İşte bu terim böyle bir denklemi ikinci derece yapan şeydir. İkinci derece denklemleri cebir kullanarak çözmenin üç yolu vardır: kareye tamamlama, çarpanlara ayırma ve ikinci derece formülü.

### Kareye Tamamlama

Bu yöntem parantezdekileri çarparak çıkardığında ya da parantezdekileri açık olarak yazdığında neler olduğunu bilmeyi gerektirir:

$$(x + 1)^2$$

Yine geometriden yararlanabilirim çünkü  $(x + 1)^2$  ifadesi  $(x + 1) \times (x + 1)$  anlamına gelir: bir sayının kendisi kadar katı yani karenin alanı. Şayet tarafları uzunluk  $x$  ve uzunluk  $1$  kısımlarına ayırırsam şunu elde ederim:



|   |   |   |
|---|---|---|
|   | x | 1 |
| x |   |   |
| 1 |   |   |

Her bir kısmın alanını hesaplırsam:

|   |       |      |
|---|-------|------|
|   | x     | 1    |
| x | $x^2$ | $1x$ |
| 1 | $1x$  | 1    |

Dolayısıyla  $(x + 1)^2 = x^2 + 1x + 1x + 1$  olur.  $1x$  terimlerini toplarsam da şu çıkar:

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Peki, ne oldu şimdi? Bu denklemin sağ tarafı ile çözmeye çalıştığım ikinci derece denklemin sol tarafını karşılaştıralım.  $x^2 + 2x + 1$  denklemi ile  $y^2 + 2y$  denklemi çok benzer terimler içeriyor.  $+ 1$  dışında bir farkları yok. O halde bu gerçekliği şunu ifade etmek için kullanabilirim:

$$y^2 + 2y = (y + 1)^2 - 1$$

Neden bu kadar çaba sarf ediyoruz? Çünkü artık ikinci derece denklemi,  $y$ 'yi tek bir yerde olacak şekilde yazmış oldum. Böylece lineer denklemlerle benzer biçimde çözebilmem gerekir. Önce tüm denklemi yazalım ve ne gibi değişiklikler yaptığımızı gösterelim:

$$y^2 + 2y = 15$$

$$(y + 1)^2 - 1 = 15$$

Her iki tarafa da bir eklediğimizde:

$$(y + 1)^2 = 16$$

Şimdi ise bir şeyi kare kuvvetinden nasıl kurtaracağımı hatırlamak için bir ara vermem gerekir. Sayfa 15'te yazılanlar her iki tarafın karekökünü almam gerektiğini söylüyor:

$$y + 1 = \pm\sqrt{16}$$

Burada  $\pm$  işaretini karesi on altı olan iki sayının olduğunu (dört ve eksi dört sayıları) hatırlatması için kullandım:

$$y + 1 = \pm 4$$

Her iki taraftan 1 çıkarırsam:

$$y = \pm 4 - 1$$

Bu da  $y$ 'nin  $y + 4 - 1 = 3$  ya da  $-4 - 1 = -5$  olduğu anlamına gelir. Her iki sonuç da ikinci derece denklem için geçerli çözümlerdir ancak sadece  $y = 3$  dikdörtgenler bağlamında bir anlam ifade eder. Artık  $y$ 'nin 3 olduğunu bildiğimize göre  $y + 2$  kısmını da çözebilirim. Böylece daha önce kontrolle yaptığımız gibi dikdörtgenin kenarlarının 3 m ve 5 m olması gerektiğini anlayabiliriz.

## Çarpanlara Ayırma

Çarpanlara ayırma yöntemi, çarpıldıklarında sonuç sıfır olan iki sayımız olduğunda bunlardan birinin ya da diğeri-  
nin sıfır olması gerektiği olgusuna dayanmaktadır:

Eğer  $m \times n = 0$  ise  
O halde ya  $m = 0$  ya da  $n = 0$ 'dır.

Denklemin  $y^2 + 2y = 15$ , dolayısıyla bundan yararlanmak için ilk yapmam gereken şey her iki taraftan 15 çıkararak iki tarafı da sıfıra eşitlemektir:

$$y^2 + 2y - 15 = 0$$

İkinci dereceden bir denklemin çarpanlarına ayırma denklemi, birbiriyle çarpılan iki paranteze alarak yazmayı gerektirir. Tıpkı şunun gibi:  $(y + n)(y + m)$ ; burada  $n$  ve  $m$  sayıdır. Yine dikdörtgenlerin yardımı olacaktır:

|     |       |      |
|-----|-------|------|
|     | $y$   | $n$  |
| $y$ | $y^2$ | $ny$ |
| $m$ | $my$  | $nm$ |

Burada  $(y + n)(y + m) = y^2 + my + ny + nm$  olduğunu görebiliyorum. Şayet bunu denklemlimle karşılaştırırsam,  $my + ny$ 'nin  $2y$  yapması ve  $nm$ 'nin de  $-15$  olması gerektiğini de görebilirim:

$$\begin{array}{rcl} y^2 & + 2y & - 15 \\ y^2 & + my + ny & + nm \end{array}$$

Yani toplamı iki eden ve çarpımı da  $-15$  eden iki sayıya ihtiyacım var. İki sayının çarpıldığında negatif ve toplan-  
dığında ise pozitif bir sayı vermesinin tek yolu büyüğünün  
bir pozitif sayı (toplamı pozitif yapmak için) ve küçüğünün

de negatif (çarpımı negatif yapmak için) olmasından geçer. Bu durumda  $m = -3$  ve  $n = 5$  olursa işe yarar. O halde  $m + n = -3 + 5 = 2$  ve  $mn = -3 \times 5 = -15$ .

Artık şunu biliyorum:

$$y^2 + 2y - 15 = (y - 3)(y + 5) = 0$$

Durum böyle olunca ya  $y - 3 = 0$  ya da  $y + 5 = 0$  olur. Bunlar da kafamdan çözebileceğim oldukça kolay lineer denklemlerin iki örneğidir: tıpkı kareye tamamlamada elde ettiğimiz gibi  $y$ 'nin ya 3 ya da -5 olması gerekir. Yine her ikisi de geçerli çözümlerdir ancak sadece  $y = 3$  seçeneği bir dikdörtgen için mantıklı olacaktır.

Genel olarak ikinci derece bir denklemi çarpanlara ayırarak çözmek için toplamı  $y$  teriminin önündeki sayıya, çarpımı da sabit terime ( $y$  olmayan sayı) eşit olan iki sayıyı arıyoruz. Bunları parantezlerinizin içinde kullanın, her birini sıfır olarak düşünün ve işte bu kadar.

## İkinci Derece Formülü

Kareye tamamlamak her zaman kolay değildir ve bir ikinci derece denklemi çarpanlarına nasıl ayıracağınız da her zaman bu kadar belli olmaz. Neyse ki insanlar kareye tamamlamayı genel anlamda ikinci derece denklemleri çözmeye yarayan bir formül verecek biçimde kullanmışlardır. Brahmagupta (597 - 668), ilk formüllerden birini bulan Hintli bir matematikçiydi ancak Descartes ve formülüne daha bin yıl uzakta olduğundan, onun formülü harflerden çok sözcükleri içeriyordu. Her neyse,  $ay^2 + by + c = 0$  biçimindeki ikinci dereceden bir denklem için:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bu biraz korkutucu görünüyor ancak gerçekte kullanılması oldukça basit. Denklemimiz  $y^2 + 2y = 15$  idi. Yani  $a = 1$ ,  $b = 2$  ve  $c = -15$  olduğunu görebiliyoruz. Bunları formülde yerine koyarsak:

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times -15}}{2 \times 1}$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - -60}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$y = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$y = \frac{-2 + 8}{2} = 3 \text{ ya da } y = \frac{-2 - 8}{2} = -5$$

Burada bahsedilmesi gereken bir iki şey var. Öncelikle bu formül karesi alınan terimin bir sayı ile başladığı ikinci derece denklemleri çözmemizi sağlar. Bunu kareye tamamlama ya da çarpanlara ayırma ile de yapmak mümkündür ancak durumu biraz daha karmaşık bir hale sokar. İkinci olarak ise şayet  $b^2 - 4ac$  kısmı negatif ise bunun karekökünü alamazsınız ve bu da ikinci derece denklemin hiçbir çözümünün olmadığı anlamına gelir. Yani reel çözümleri bulunmaz. Matematikçiler  $-1$ 'in karekökünün hayali bir sayı olan  $i$  olduğu fikrini ortaya atmışlardır. Bunu kullanmak elektronik ve kuantum fiziği gibi alanlarda oldukça şaşırtıcı sayıda, hayali olmayan uygulamaları olan her türden ilginç sonuçlar doğurmuştur.

## Kısa Sözlük

Cebir konusunda biraz daha ilerlemeden önce şu anahtar sözcükleri açıklamak yerinde olacak. Bazıları yukarıda zaten geçmişti ancak özetleyecek olursak:

| Anahtar Sözcük | Tanımı                                                                                                                                           | Örnek                                                                                 |
|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| katsayı        | Bir bilinmeyenin önündeki sayı                                                                                                                   | $3x^2$ : 3 sayısı $x^2$ 'nin katsayısıdır.                                            |
| ifade          | = içermeyen cebir işlemi                                                                                                                         | $3x^2 + 2x - 5$                                                                       |
| terim          | Bir ifadenin herhangi bir kısmı                                                                                                                  | $2x$ , yukarıdaki ifadenin bir terimidir.                                             |
| denklem        | = içeren cebir işlemi. Çözüm bulabileceğimiz bir işlemdir.                                                                                       | $3x^2 + 2x - 15 = 0$ , ikinci derece bir denklemdir.                                  |
| formül         | Genelde bir fizik kanununu temsil eden ve değerler yerleştirebileceğimiz denklemdir.                                                             | $E = mc^2$ , enerji (E), kütle (m) ve ışık hızı (c) arasında bağ kuran bir formüldür. |
| birim          | İçindeki değişkenlerin her değeri için doğru olan bir denklemdir. Bir birimi göstermek üzere üç çizgili eşittir ( $\equiv$ ) işareti kullanılır. | $a(b + c) \equiv ab + ac$ .<br>Bu durum a, b ve c'nin her değeri için doğrudur.       |

### Descartes'ın Harfleri

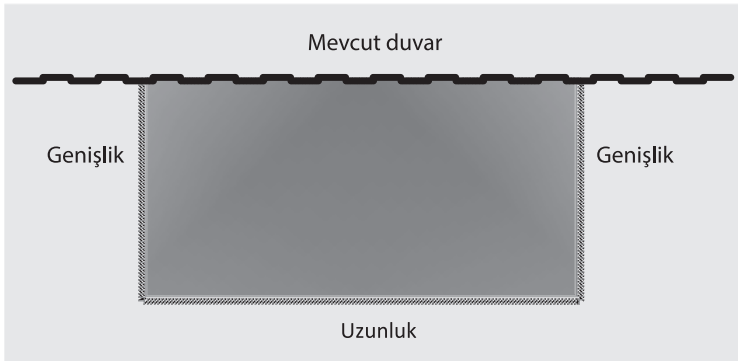
Bilinmeyenleri temsil etmek üzere harfleri ilk kullanan Descartes değildi ancak 1637 basımlı *La Géométri* başlıklı eserinde cebir hesabı yapmanın modern yolunu ilk kullanan o oldu. Bu çalışmasında ayrıca matematiğin iki farklı alanı olan geometri ile cebir arasında (ilk kez) bağ kurmayı başarmıştır. Bu durum geometrik şekiller ve çizgilerin cebirsel denklemler olarak ifade edilmesini mümkün kılmıştır. Efsaneye göre Descartes ilk kez  $x - y$  koordinatlar sistemini (ayrıca isminden dolayı Kartezyen koordinatları olarak da bilinir) yatayda yatmış tavadaki bir sineğin hareketlerini izlerken ileri sürmüştür. Sineğin konumunu doğru bir şekilde belirlemek istemiş ve bu yüzden de tavanın bir köşesini başlangıç noktası (ya da orijin) olarak seçmiş ve sineğin yerini belirlemek için koordinatlar olarak da iki sayıyı kullanmıştır. Tıpkı Amiral Battı oyunu gibi.

# OPTİMİZASYON

Gerçek hayatta karşılaşılan problemlerin çoğu optimizasyonla ilgilidir. Bazı şeyleri olabildiğince büyük kılmaya çalışırken (çoğunlukla kazanç, satışlar, görüşler ve hit şarkılar gibi) diğerlerini olabildiğince azaltmaya çalışırız (maliyetler, zaman gibi). Şayet problem cebir kullanarak matematiksel olarak ifade edilebiliyorsa o halde cebirsel teknikleri kullanarak ideal bir çözüm bulma şansı yüksektir.

Eski bir efsaneye göre bir sürü oğlu olan bir şövalye, oğullarına düğün hediyesi olarak 100 metrelik bir halatla kuşatabilecekleri en büyük toprak parçasını vermeyi vaat etmiş. Arazinin mevcut çitlerinden birini sınır çizgisi olarak kullanmayı ve alanın da dikdörtgen olmasını şart koşmuş.

Oğullarından matematikte daha yetenekli olanı nasıl en büyük parçayı alabilirdi? Durumu şu şekilde modelleyebiliriz:





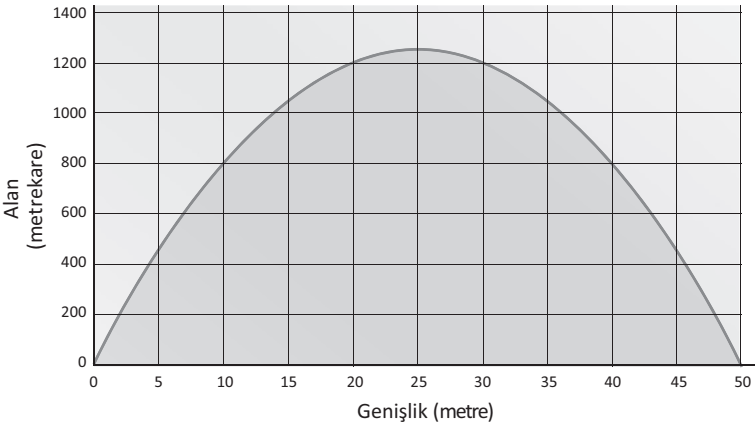
Halatın 100 metre uzunluğunda olduğunu biliyoruz. Yani genişlik + uzunluk + genişlik = 100 metre. Şayet genişlik için  $g$  ve uzunluk için de  $u$  kullanırsam  $2g + u = 100$ 'ü elde ederim. Ayrıca uzunluğun  $100 - 2g$  olduğunu da söyleyebilirim. Bu da birazdan işime yarayacak.

Ayrıca alanı maksimuma çıkarmak istediğimi de biliyorum. Alan formülü genişlik çarpı uzunluktur. Eğer alan için  $A$  kullanırsam:

$$A = gl' \text{ dir ancak } l = 100 - 2g \text{ yani}$$

$$A = g(100 - 2g) \text{ olur.}$$

Belirlediğim genişliğe bağlı olan bir alan formülümüz var. Bu noktada en büyük alanı sağlayacak olan  $g$ 'nin değerlerini denemeye başlayabilirim ancak her olasılığı denemeden maksimum değeri elde ettiğimden emin olamam. Seçeneklerden biri bir grafik çizmektir:



Grafikte alan için kesinlikle bir maksimum değer bulunmaktadır:  $g$ 'nin 25 olduğu durumda 1250 metrekare. Buna grafik çözümü denir. Ancak acaba yanıtı analitik olarak bulmanın bir yolu var mı?

## Yeniden Kareye Tamamlama

Eğer alan formülündeki  $A = g(100 - 2g)$ 'de parantezi açacak olursam:

$$A = 100g - 2g^2$$

Bu bir ikinci derece denklemdir. Dolayısıyla bunu kareye tamamlayabilirim ancak önce denklemi birazcık yeniden düzenlemek istiyorum:

$$A = -2g^2 + 100g$$

$$A = -2(g^2 - 50g)$$

Böylece parantez içindekiler önceki bölümde geçen örneklerle daha çok benziyor:

$$g^2 - 50g = (g - 25)^2 + c$$

Buraya bir "+ c" yazdım çünkü denklemi doğru kılacak şekilde hesaplamak için herhangi bir sayıya ihtiyacım olduğunu biliyorum.

$$(g - 25)^2 = (g - 25)(g + 25) = g^2 - 50g + 625$$

Parantezin karesini almak denklemin sağ tarafında istemediğim bir 625 sonucunu verdi ancak  $c = -625$  yaparsam bu durumu telafi edecektir:

$$g^2 - 50g = (g - 25)^2 - 625$$

Eğer bunu alan denklemimize geri koyup (daha açık kılmak adına köşeli parantezleri kullanarak) birazcık yeniden düzenlersem:

$$A = -2[g^2 - 50g]$$

$$A = -2[(g - 25)^2 - 625]$$

$$A = -2(g - 25)^2 + 1250$$

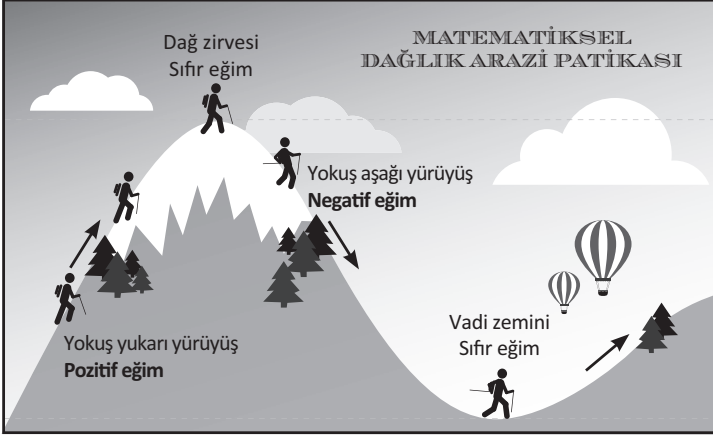
Şimdi sihir gerçekleşebilir. İkinci derece bir denklemi tam kareye aldığınızda size maksimum ve minimum noktasını söyleyebilir. Alan formülü bir negatif kısımdan yani  $-2(g - 25)^2$  ve bir pozitif kısım yani 1250'den oluşur. Bu sebeple alanı maksimum değere taşımak için negatif kısmı olabildiğince minimum hale getirmem gerekir çünkü pozitif kısmı artırmanın hiçbir yolu yoktur. Parantezin karesi alındığı ve tüm karesi alınan sayılar pozitif sonuç verdiği için karesi alındığında parantez içini en küçük yapabileceğim değer sıfırdır ve bu da  $g = 25$  olduğunda gerçekleşir. Bu durumda mümkün olan en büyük alan  $g = 25$  olduğunda elde ettiğimiz  $1250 \text{ m}^2$ 'dir. Yani şövalyenin oğlu en büyük araziye genişliği 25 metre ve uzunluğu 50 metre olan bir dikdörtgen ile elde edebilir.

Bu işlem biraz hilelidir ancak umarım sonuçtaki mantığı anlıyorsunuzdur. Kareye tamamlama sadece ikinci derece denklemlerde işe yarar. Peki, ya optimize etmek istediğim formül ikiden büyük kuvvetler içeriyorsa?

## Kalkülüs

Matematiğin *kalkülüs* adı verilen bir alanı değerlerin nasıl değiştiğini görmemizi sağlar. *Türev alma* işlemi ise bir değerın değişim oranını hesaplamamızı sağlayıp grafik çizmeden maksimum ve minimum noktaları gösterebilir. Türev almanın anahtar noktası ise eğim<sup>6</sup> kavramı ile maksimum ve minimum noktalarda eğiminin ne olduğudur. Bütün tepelerin pürüzsüz eğriler olduğu matematiksel dağlık arazide yürüyüşe çıktığınızı düşünün. Zamanınızın çoğu yokuş yukarı doğru ya da pozitif bir eğime doğru yürüyerek geçecektir. Ayrıca seyahat doğrultunuza göre eğimin negatif olduğu yokuş aşağı doğru yürüyerek de zaman geçireceksiniz. Dağların zirvesinde ve vadilerin zemininde -yani yolculuğunuzun maksimum ve minimum irtifalarında- çıkıştan inişe ya da tam tersine doğru değişen bir yer seviyesinde olacaksınız. Türev alma işte bu sıfır eğim noktalarını bulmamızı sağlar.

6 Gradient (İng.): Eğim ya da gradyan (Tr.) (ç.n.)



Türev almanın neden ve nasıl çalıştığı bu kitabın konusu değildir; bu yüzden daha fazla detay istiyorsanız en yakındaki kitapçıdan bir lise son sınıf matematik kitabı edinebilirsiniz.

Diyelim ki bugün üçüncü derece (küçük) dağlardan geçen 10 km'lik bir yürüyüş planladınız. Üçüncü derece denklemler, içinde  $x^3$  terimi barındıran denklemler olup bu özel dağlarımız aşağıdaki formülle tanımlanmaktadır. Formüldeki  $x$ , başlangıç noktasına yatay olarak uzaklığınız ve  $y$  ise dikey olarak uzaklığınızdır:

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 10$$

Dağın zirvesinin nerede olduğunu ve ayrıca vadinin zemininin de neresi olduğunu hesaplamak üzere türev almayı kullanacağız.

Türev alma, en basit haliyle, bir denklemin bir eğim denklemine dönüşür. Bunu yapabilmek için aşağıdaki kuralı kullanarak  $x$  terimlerini yeniden düzenlerim:

$x^n$  terimi  $nx^{n-1}$ 'e dönüşür

Bu kalıbı kullanarak artık  $x^3$  terimimiz  $3x^2$ 'ye ve  $x^2$  terimimiz ise  $2x$ 'e dönüşür. Burada  $x$  teriminin ayrıca  $x^1$ 'e eşit olduğunu ve türevini aldığımızda ise  $1x^0$ 'a dönüştüğünü

unutmayın. Denklemden herhangi bir  $x$  terimi içermeyen 10 sayısı ise sıfır olur. Bunları tüm denkleme uygularsam (sayfa 61'de söz ettiğimiz üzere  $x^0 = 1$  olduğunu da unutmadan):

$$\text{eğim} = 2 \times 3x^2 - 15 \times 2x^1 + 24 \times x^0 + 0$$

$$\text{eğim} = 6x^2 - 30x + 24$$

Şimdi de zirve noktası ile vadi zemininin, eğimin sıfır olduğu yerler olacağını hatırlarsak:

$$6x^2 - 30x + 24 = 0$$

Bu bizim eski dostlardan biri: birden fazla çözümü olan ikinci derece denklemler. Hangi yoldan çözerseniz çözün denklemin  $x = 1$  ve  $4$  iken doğru olduğunu bulmanız gerekir. Bunlardan hangisinin zirve ve hangisinin vadi zemini olduğunu nereden bileceğim? Bu değerleri asıl denklemden yerine koyarsam hangisinin en yüksek olduğunu görmek için karşılaştırabilirim:

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 10$$

$$\text{eğer } x = 1, \quad y = 2 \times 1^3 - 15 \times 1^2 + 24 \times 1 + 10$$

$$y = 2 - 15 + 24 + 10$$

$$y = 21$$

$$\text{eğer } x = 4, \quad y = 2 \times 4^3 - 15 \times 4^2 + 24 \times 4 + 10$$

$$y = 128 - 240 + 96 + 10$$

$$y = -6$$

Böylece ilk sıfır-eğim yerinin zirve ve ikincisinin de vadi zemini olduğunu anlayabiliriz.

## Newton – Leibniz<sup>7</sup> Kavgası

Kalkülüsün yürüyüş tatilleri planlamanın dışında birçok kullanım alanı bulunmaktadır ve 1600’lerde icadından bu yana çoğu problemin çözülmesini sağlayarak matematiğin en önemli alanlarından biri olmuştur. Bununla birlikte zamanında dünyanın iki dev matematikçisi önce hangisinin bunu icat ettiği üzerine tartışmışlar ve bu da İngiliz ile Avrupalı matematikçiler arasında uzun süreli bir ayrılığa neden olmuştur.

İngilizlerin köşesinde -aslında tanıtıma gerek bile duymayan bir beyefendi- Sör Isaac Newton bulunmaktadır. Düşen elma gözlemcisi, simyacı, Cambridge profesörü, Parlamento üyesi, Kraliyet darphanesinin patronu ve Royal Society’nin başkanı.

Almanların köşesinde ise Gottfried Leibniz bulunmaktadır. Çocuk deha, filozof, diplomat, mekanik hesap makinesinin mucidi, ikili sistem destekçisi ve ebedi iyimser.

Bu iki beyefendi de yaklaşık aynı dönemde birbirlerinden bağımsız olarak kalkülüsü icat ettiler. Fikirlerini ilk yayınlayan Leibniz oldu ancak Newton, Leibniz’in bu düşüncüyü üyesi olduğu Royal Society’de Newton’ın etrafa dağıttığı makalelerinden çaldığını iddia etti. İyi tanınan iki akademisyen arasında gerçekleştiği için bu çekişme çoğunlukla sert üslupta yazılmış mektuplar ve karşı tarafı yeren broşürlerin yayılmasına neden oldu.

Leibniz, çekişme sona ermeden önce öldü. Günümüzde açıkça görülüyor ki her iki beyefendi de kalkülüsü icat edebilecek derecede matematiksel hünere sahipti ve yine her ikisi de diğer matematikçilerin çalışmalarını ilham kaynağı olarak okumuşlardı. Ancak şunu söylemeliyim ki, günümüze kadar hayatta kalan Leibniz’in formülü olmuştur.

<sup>7</sup> Aslında incirli Newton’lar ve çikolatalı Leibniz’ler en sevdiğim iki bisküvi markasıdır. Çikolatalı Leibniz, ismini ünlü matematikçiden alır ve onun yaşayıp çalışmalarını yürüttüğü Hanover’de yapılmaktadır. Diğer yandan incirli Newton’lar ise ismini Birleşik Devletler’deki bir kasabadan almaktadır.

# ALGORİTMALAR

Algoritmalar bilgisayar bilimi ile sıkı sıkıya bağıntılıdır ancak kökenleri bilgisayarlardan çok daha eskidir. Algoritma aslında bir komutlar kümesidir. Bir girdi alırsınız -genellikle seçtiğiniz bir sayı ya da sayılardan oluşur- ve belirli bir çıktı elde etmek üzere bir dizi işlemi takip edersiniz. Her ne kadar algoritmalar cebir alanının mutlak bir parçası olmasa da çoğu algoritma girdi olarak değişkenler düşüncesini kullandığı için algoritmaları da buraya ekledim.

## Rus Çiftçiler

Her ne kadar çiftçileri olan bir Rusya daha var olmadan çok önceleri kullanıldığına dair bazı ipuçları bulunsa da bu örneğe, bazen “Rus çiftçi” ismi verilmektedir. Eğer 35 ile 47 sayısını çarpmak istiyorsam algoritma bana önce küçük sayıyı alıp geriye kalanları göz ardı ederek sürekli ikiye bölmemi söyler:

35

17

8

4

2

1

Bir sonraki adım ise büyük olan sayıyı kullanıp her seferinde ikiye katlayarak başka bir sütun yapmaktır:

|    |      |
|----|------|
| 35 | 47   |
| 17 | 94   |
| 8  | 188  |
| 4  | 376  |
| 2  | 752  |
| 1  | 1504 |

Daha sonra sol taraftaki sütunda çift bir sayı içeren tüm sıraları silin:

|              |                |
|--------------|----------------|
| 35           | 47             |
| 17           | 94             |
| <del>8</del> | <del>188</del> |
| <del>4</del> | <del>376</del> |
| <del>2</del> | <del>752</del> |
| 1            | 1504           |

Yanıtı bulmak için sağ sütunda geriye kalan sayıların tümünü toplayın:

$$47 + 94 + 1504 = 1645$$

$$\text{Dolayısıyla } 35 \times 47 = 1645$$

İşte bu! Bu algoritma sayıların sadece iki katını alabilme, ikiye bölebilme ve toplayabilme becerisine sahip olmasına karşın iki farklı sayıyı çarpmanın bir yoludur. Muhtemelen çarpım tablosunu bilmeyen bir Rus çiftçi için ideal bir yol.



Karmaşık bir görevi basit bir dizi işleme bölen algoritmalar ayrıca bilgisayarları programlama görevi için de idealdirler. Aslında çoğu bilgisayar programcısı zamanının çoğunu, ister sayıları çarpmak olsun isterse bir liste siparişi ya da sizi daha genç göstermek üzere fotoğrafınızı filtrelemek olsun, belli başlı çıktıları elde etmek üzere bilgisayarlara algoritmaları öğretmekle geçirir.

## Bilgisayar Programları

Gerçek anlamda ilk bilgisayar programı aslında elle hesaplanması çok zor olan ve Bernoulli sayıları olarak bilinen (Jacob Bernoulli'nin adından geliyor, bkz. sayfa 74) sayı dizisini hesaplayan bir algoritmaydı. İşin ilginç program onu kullanacak bilgisayar yapılmadan çok önce yaratılmıştı. Ada Lovelace (1815-52), yurttası mühendis Charles Babbage (1791-1871) ile birlikte yapılması mümkün olmamış buharlı bilgisayar Analitik Makine'nin tasarımı üzerine çalışırken bu fikri ortaya atan sıradışı İngiliz hanımefendiydi. Lovelace ayrıca Makine'nin salt hesaplama yapan bir makineden öte bir şey olduğunu görüp müzik, resimler ve harfler de dahil olmak üzere sayısal olarak kodlanabilen her şeyin ondan etkilenebileceğini de fark etmişti. Bir anlamda günümüzde bilgisayarımızla keyfini sürdüğümüz şeyleri çok önceden görmüştü.

Elektronik bilgisayarların icat edilip üretilmesiyle insanlar için çok uzun zaman süren problemlerin çözülmesinde kullanılabilir hale geldiler. Bunun güzel bir örneği Alan Turing'in *Bomba'sıydı* (Bletchley Park'taki ekibin İkinci Dünya Savaşı'nda Enigma cihazı üzerinden kodlanmış Nazi mesajlarını çözmek için kullandığı bilgisayar).

İşin temelinde yatan ilkeler aslında nispeten basitti. Enigma süper şarjlı bir kod çarkı gibiydi. Mesajınızdan bir harfi klavye vasıtasıyla yazıyordunuz ve makine harfinizi üç kod çarkından (döner miller deniyordu) geçirerek harfinizin şifrelenmiş biçimini yakıyordu. İşin hileli kısmı ise döner milin her harften sonra dönebilmesiydi. Böyle-

ce mesajınızın, her harfi etkin bir şekilde farklı bir şifre kullanılarak kodlanması mümkün oluyordu. Her bir döner milin başlangıç konumunu bilmedikçe mesajı okumanızın en ufak bir ihtimali dahi yoktu.

Bomba ise bu sistemdeki tek hatadan yararlandı. O da bir harfin asla kendisine şifrelenememesiydi. Bomba, döner millerin başlangıç konumlarını her bir kombinasyonu kendisi ile şifrelenen bir harf verip vermediğini deneyerek hesaplıyordu. Şayet böyle bir sonuç veriyorsa o belirli ayarı eliyordu. Çok doğrudan bir algoritma, ancak olası başlangıç konumunun sayısı, farklı döner millerin kullanımı ve Enigma cihazı üzerindeki bazı diğer hilelerden dolayı makinede 159 kentilyon ayar bulunuyordu. Bir insandan çok daha hızlı ve mükemmel bir şekilde çalışabilen bir bilgisayar için mükemmel bir iş.

Günümüzde algoritmalar kanıksadığımız birçok alanda sahne arkasında çalışmaktadır. Bulunduğunuz yerden gitmek istediğiniz yere yol tarifi alırken bilgisayar, sonuçları sizin için en uygun hale getirmek üzere birçok hesaplama yaparak sizi oraya götürecek en kısa rotayı (ya mesafe ya da zaman olarak) bulmaya çalışan bir algoritma kullanır. Böyle bir kısa yol algoritması Dijkstra olarak tanınır ve ismini Hollandalı bilgisayar bilimci Edsger Dijkstra'dan (1930–2002) almaktadır. İnternet üzerinden ne zaman bir bilgi gönderseniz onu korumak üzere bir algoritma kullanılır. Ne zaman telefonda ya da internet üzerinde birisiyle konuşsanız, henüz sera etkisinin bilinmediği zamanlarda titreşimlerin matematiği üzerine çok sayıda çalışma yapan Fransız Joseph Fourier'nin (1768–1830) ismiyle anılan bir Fourier dönüşüm algoritması sesleri ve görüntüleri sayısallaştırır. Bağlantı analizi veriler arasında bağlantılar kurmak üzere çeşitli algoritmaları kullanan bir tekniktir. Bu teknik sizin için en uygun sonuçları seçen arama motorlarından hangi reklamları size göstereceğine karar veren sosyal medya uygulamalarına, pazarlama ve tıbbi araştırmalara ve hatta kanıtları karşılaştırıp çapraz başvurularını çıkaran

güvenlik kuvvetlerine kadar birçok alanı etkiler.

Bilgisayar bilimcileri ile matematikçilerin işi henüz bitmedi çünkü hâlâ çözülebilmesi için etkili bir algoritmanın bulunmadığı birkaç problem mevcut.

### Bidon Paketleme ve Gezgin Satıcı

Her geçen gün daha fazla şeyi internetten satın alıp kapımıza kadar teslim edilmesini talep ettiğimizden dolayı bir eşyayı bir yerden bir başka yere etkin ve ucuz bir şekilde göndermek modern perakendeciliğin temel taşıdır. Bu yüzden perakendeciler için dağıtım kamyonunu doldurmanın en iyi yolunu söyleyebilen ya da şoföre en kısa rotayı verebilen işleri hızlandıracak bir algoritmanın bulunmaması oldukça sinir bozucudur.

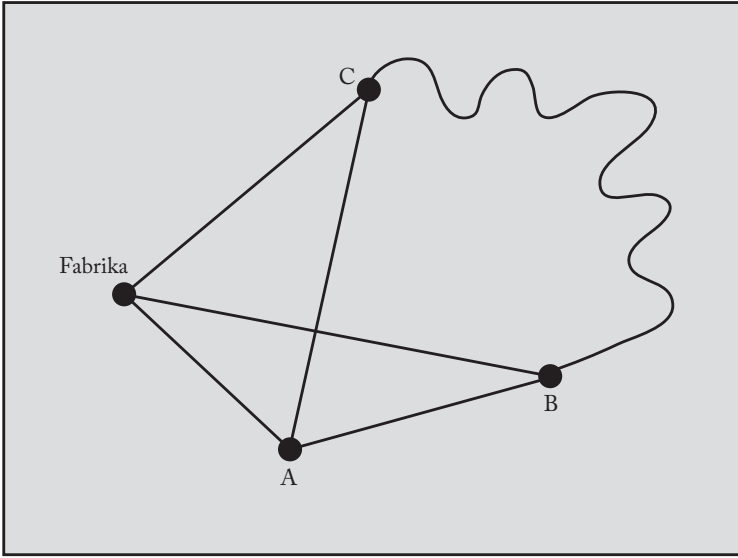
Bidon paketleme problemi, bilinen hacmi olan belirli sayıdaki paketi belirli bir yere sığdırmanın, örneğin kolileri teslimat kamyonunun kasasına yüklemenin en iyi yolunu bulmakla ilgilidir. Buradaki sorun hangi yaklaşımın uygun olacağına karar vermenin basit bir yolunun olmamasıdır. En büyük koli mi yoksa en küçük koli mi ilk yüklenecek? Yoksa başka ölçütler de var mı? Olası her kombinasyonu analiz edip en iyisini bulmak mümkün ancak çoğu zaman bu hesaplama çok zaman alır.

Diyelim ki kamyonetinizi mantıklı bir şekilde yükleyebildiniz, bütün kolileri götüreceğiniz en iyi rotayı nasıl belirlersiniz?

İlk olarak ele alındığı dönemde bu probleme İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton (1805-65) ve İngiliz rahip Thomas Kirkman (1806-95) tarafından *gezgin satıcı problemi* adı verildi. Hamilton ve Kirkman, belli başlı kasabaları gezip daha sonra hiçbirine tekrar uğramadan en kısa yol üzerinden fabrikasına ulaşması gereken bir satıcıyı göz önünde bulundurdular. Hatta Hamilton 1857'de bu problemi gösteren Icosian oyunu isimli bir masa oyunu da

yarattı. Oyunu günümüzde bir uygulama olarak edinmek mümkün.

Kısa süre içinde mevcut algoritmaların bu problem için doğru rotayı veremeyebileceği anlaşıldı. Örneğin, isminden de anlaşılacağı üzere en yakın komşu algoritma sizi ziyaret edilmemiş en yakın kasabaya götürebilir ancak bu durumda daha sonra gitmeniz gereken çok uzun bir yol çıkar.



Yukarıdaki örnekte en yakın komşu algoritma sizi fabrikadan A'ya, sonra B'ye götürür ve sonrasında ise C'ye gitmek üzere dolambaçlı yoldan başka bir seçeneğiniz kalmaz. “Fabrika – C – A – B – fabrika” rotası ise çok daha kısa olacaktır.

Öyleyse en kısa rotayı bulmanın tek yolu bütün rotaları listelemek olacaktır. Örneğimizde ziyaret edilecek üç kasaba olduğu için bu çok zor değil:

fabrika – A – B – C – fabrika

fabrika – A – C – B – fabrika

fabrika – B – A – C – fabrika

fabrika – B – C – A – fabrika

fabrika – C – A – B – fabrika

fabrika – C – B – A – fabrika

Bunu bir düşündüğünüzde rotaların bazılarının birbirinin tam tersi olduğunu (örneğin listede ilk ve son rota gibi) görebilirsiniz. Bu yüzden bunları ayrı birer rota olarak saymayız. Bu durum listeyi her iki yönde de kullanabileceğim üç olası rotaya düşürür.

Rota sayısını daha doğrudan hesaplamak için fabrikadan üç kasaba seçeneğim olduğunu, sonra oradan iki ziyaret edilmemiş kasaba, sonra oradan da bir ziyaret edilmemiş kasaba ve son olarak da fabrikaya geri dönüş seçeneğim olduğunu düşünebilirim. Bu da  $3 \times 2 \times 1 = 6$  rota seçeneği demektir sonra da ileriye doğru ya da geriye doğru gidiş hesabından dolayı ikiye bölünür.

Böyle bir durumda  $3 \times 2 \times 1$ 'in matematiksel olarak kısa yazılışı  $3!$ 'dir ve "üç faktöriyel" olarak okunur. Yukarıdaki örnekte  $3! \div 2$  rotam olduğunu görebilirsiniz. Şayet ziyaret edeceğim 20 kasaba olsaydı, o zaman kontrol edeceğim  $20! \div 2$  rota olurdu:

$$\frac{20!}{2} = \frac{20 \times 19 \times 18 \dots \times 3 \times 2 \times 1}{2} \approx 1,216,451,000,000,000,000$$

Bu rakam Enigma cihazındaki ayar sayısıyla benzer özelliklere sahiptir. Gördüğünüz gibi faktöriyel değerleri çok hızlı bir şekilde artmaktadır. Matematikçiler bu gibi bir probleme NP ismini verirler. NP, İngilizcede *non-deterministic polynomial time*'ın (belirleyici olmayan polinom zaman) kısaltması olup matematik dilinde hesaba kattığınız şeylerin sayısı arttıkça kombinasyonların sayısının da bunun kuvveti olarak arttığı, hesaba katılacak kombinasyon sayısı arttıkça da en iyi yanıtı hesaplamamız için gerekecek sürenin korkunç derecede arttığı anlamına gelir.

Makul bir süre içinde en yakın sonuca yakın bir şeyler verebilecek birkaç algoritma bulunmaktadır. Bu *sezgisel* algoritmalar bir haritaya bakıp kendi kendimize rota belirlediğimizde yaptıklarımıza benzerdir. Mükemmel rotayı bulup bulmadığımızı bilemeyiz ancak yine de işe yarar ve hesaplaması çok uzun sürmemiştir.

Şayet kendi başınıza etkili bir algoritma bulup gelseydiniz (elbette olası her kombinasyona bakmadan en iyi çözümü bulan bir algoritmadan bahsediyorum) bunu kullanma hakkı için size tonlarca para verebilecek oldukça fazla şirket ismi verebilirim.

# FORMÜLLER

Bu kitabın hemen her yerinde formül bulunuyor. Formüller, matematiğin öylesine temel bir parçasıdır ki onlardan kaçmak neredeyse olanaksızdır. Bu bölümde birkaç tanesine daha yakından bakmak ve nasıl işledikleri üzerine düşünmek istiyorum.

## Formülleri Yeniden Düzenlemek

Santigrat (Celsius) cinsinden verilen bir ısı derecesini (C ile gösterilir) Fahrenheit (Fahrenheit) cinsinden ısı derecesine (F ile gösterilir) dönüştürmenin formülü şu şekildedir:

$$F = \frac{9C}{5} + 32$$

Şimdi burada F, C için herhangi bir değer girildiğinde elde edeceğiniz çıktı olduğundan formülde *özne* konumundadır. Peki ya ısı derecesini tam tersine yani Fahrenheit'tan Santigrat derecesine dönüştürmek isteseydim ne olurdu? Şayet elinizde eski bir yemek tarifi kitabı varsa bu işlem oldukça yararlı olacaktır.

Bir formülün öznesini değiştirmek bir denklemi çözmeye çok benzer. Aynı süreci izlerim ancak bu sefer çözdüğüm denklemlerde olduğu gibi işlemin sonunda bir değer elde etmek yerine yeniden düzenlenmiş bir formül elde ederim:

$$\begin{aligned} F &= \frac{9C}{5} + 32 \\ (-32) \\ F - 32 &= \frac{9C}{5} \\ (\times 5) \\ 5(F - 32) &= 9C \\ (\div 9) \\ \frac{5(F - 32)}{9} &= C \end{aligned}$$

Yeni formülümüz ilkinin *tersidir* çünkü birbirlerine göre tam tersi şeyi yapmaktadırlar. Yani eğer  $C = 25^0$  Santigrat derece dersem:

$$F = \frac{9 \times 25}{5} + 32 = 77 \text{ olur.}$$

Böylece  $25^0$  C derecesi  $77^0$  F derecesine eşittir. Eğer bunu da yeni formülümle gerçekleştiresem:

$$C = \frac{5(77 - 32)}{9} = 25 \text{ olur.}$$

$77^0$  F derecesi de  $25^0$  C derecesine eşittir; başladığımız yere geri geldik.

### Geç Olsun da Güç Olmasın

Amerikalı matematikçi George Dantzig (1914-2005) üniversitede öğrenciyken derslerinden birine geç kalmış. Tahtaya iki problemin yazıldığını görmüş ve bunu hocasının verdiği ödev zannetmiş. Kendisinden beklendiği üzere görevi tamamlamış ve sonra hocası tarafından soruların ödev değil de aslında matematikte çözilemeyen iki problem olduğu söylendiğinde çok şaşırılmış. Daha sonra problemler için sunduğu çözümlerin kendisine doktora tezi için yeterli olacağı bildirilmiş.



## Diziler

Matematikçilerin yapmaya çalıştığı şeylerden biri özel bir durumdan genele ulaşmaktır. Yukarıdaki örnekte  $25^0$  C'nin  $77^0$  F derecesine eşdeğer olması özel bir örnektir, oysaki formüller istediğim herhangi bir genel değeri hesaplamama izin verir.

Matematikçiler çoğunlukla sayı örüntüleriyle ilgilenirler. İşte gerçekten basit bir tanesi:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20...$$

Bunlar çift sayılardır ya da ikinin katlarıdır demeyi de tercih edebilirsiniz. Herhangi bir sorun yaşamadan bu diziye dilediğiniz sürece devam edebilirsiniz çünkü fark ettiğiniz üzere bir sonraki sayıya geçmenin yolu üzerine iki eklemektir. Dizideki her sayıya *terim* denir. Dizideki ilk terim iki olup bir matematikçi bunu  $t_1 = 2$  olarak yazar. Terim için  $t$ 'yi seçtim ancak başka herhangi bir sembol de seçebilirdim. İkinci terim 4 yani  $t_2 = 4$  olur. Buradan hareketle  $t_3 = 6$  ve  $t_4 = 8$  olur.

Şimdi özelden genele ulaşma zamanı. Daha önce dizide bir sonraki terimi bulmak için mevcut terime iki eklemem gerektiğinden bahsetmiştim. Şayet mevcut terimim dizide  $n$  sıradaki terim yani  $t_n$  ise bir sonraki terimi aşağıdaki formül ile bulabilirim:

$$\text{bir sonraki terim} = \text{mevcut terim} + 2$$

$$t_{n+1} = t_n + 2$$

Buna dizinin *tümevarım* tanımlaması denir. Ancak bize sunduğu dizi ilk terim olarak neyi belirlediğimize bağlıdır. Şayet  $t_1 = 2$  ise gördüğümüz gibi çift sayılar elde ederiz ancak eğer  $t_1 = 1$  olarak belirlersem bunun yerine 1, 3, 5, 7 vs. yani tek sayıları elde ederim.

Çok meşhur dizilerden biri Fibonacci sayılarıdır:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...

Dizinin ismi matematikçi Fibonacci'den (bkz. sayfa 23) gelmektedir ve kural bir sonraki terime ulaşmak için önceki iki terimin toplanmasını gerektirmektedir. Tümevarım yöntemi ile yazacak olursak:

$$t_{n+1} = t_{n-1} + t_n \text{ formülü ile } t_1 = 1 \text{ ve } t_2 = 1 \text{ olur.}$$

Bu sayılar doğada oldukça fazla görülürler. Özellikle de bitkilerde. Çiçeklerin tohum başlarındaki ve ananaslar ile çam kozalaklarının üzerindeki spiral örüntülerin yanı sıra bitki sapları ile kökleri üzerindeki filizlerin sayıları çoğu zaman Fibonacci sayılarını oluşturur.

Bu tümevarım formülleri, dizileri genel terimlerle tanımlamak için faydalı olsa da aradaki bütün terimleri belirlemeden daha ilerideki terimleri hesaplayamayız. Örneğin 1000. terimi bilmek istersem ne yapacağım? Bunun için  $n$  sıradaki bir terimin formülüne ihtiyacım olur.

Çift sayılara geri dönecek olursak terim sayısı ile terimin kendisi arasında bir örüntünün olduğunu görebiliriz:  $t_1 = 2, t_2 = 4, t_3 = 6, t_4 = 8$ ; terim daima terim sayısının iki katıdır:

$$t_n = 2n$$

Bu formül de doğrudan 1000. terimi hesaplamamı sağlar:  $t_{1000} = 2 \times 1000 = 2000$ . Fibonacci sayıları söz konusu olduğunda  $n$  sırasındaki terim için bir formül bulabilir miyiz?

Aslında bir tane var ancak biraz daha karmaşık. Çift sayılardan oluşan dizimizin çözümü görece kolaydır çünkü dizi, her terim için aynı miktarda artmaktadır. Fibonacci sayıları ise her seferinde farklı miktarlarda artmaktadır.

## $\varphi$ 'a (Altın Oran) Geri Dönüş

Daha önce sayfa 90'da  $\varphi = 1,61803398\dots$  olduğunu görmüştük. Bunun Fibonacci sayıları ile alakası nedir? Şayet Fibonacci dizisinin ardışık terimlerini birbirine bölecek olursak karşımıza şöyle bir şey çıkar:

$$1 \div 1 = 1$$

$$2 \div 1 = 2$$

$$3 \div 2 = 1,5$$

$$5 \div 3 = 1,66666\dots$$

$$8 \div 5 = 1,6$$

$$13 \div 8 = 1,625$$

$$21 \div 13 = 1,61538\dots$$

$$34 \div 21 = 1,61905\dots$$

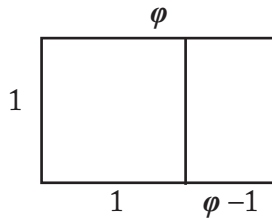
$$55 \div 34 = 1.61764\dots$$

Elde edilen değerler  $\varphi$  civarında gezinmektedir. Fibonacci sayılarında biraz ileri doğru atlayıp on dokuzuncu ve yirminci değerlere gidersem:

$$6765 \div 4181 = 1,61803398\dots$$

Bu sayı yedinci ondalık basamağa kadar  $\varphi$  ile aynıdır. Böylece Fibonacci sayıları ile altın oran arasında bir bağlantı olduğu açıkça görülmektedir.

$\varphi$  sayısının değerini açıklamak için tekrar güzel görünen dikdörtgenimize bakabiliriz. Eğer dikdörtgenin uzun kenarını  $\varphi$  uzunluğunda ve kısa kenarını da bir uzunluğunda belirlersem o halde dikdörtgenin sınırlarını aşağıdaki gibi çizebilirim:



Altın oranın kurallarından biri küçük dikdörtgenin büyüğü ile aynı orantılara sahip olmasıdır. Büyük dikdörtgenin  $\varphi$  ve 1 uzunluğunda kenarları bulunmaktadır. Küçük dikdörtgenin ise 1 ve  $\varphi - 1$  uzunluğunda kenarları vardır. O halde her iki dikdörtgenin uzun kenarını kısa kenarına bölersem eşdeğer iki kesir elde etmem gerekir:

$$\frac{\varphi}{1} = \frac{1}{\varphi - 1}$$

Bir sayısına bölünen her şey kendisine eşittir. O halde:

$$\varphi = \frac{1}{\varphi - 1}$$

Bu ise çözebileceğim bir denklemdir. Bütün  $\varphi$ 'ları bir araya toplamam gerekir bu yüzden her iki tarafı da kesrin paydası ile çarparım:

$$\varphi (\varphi - 1) = 1$$

Parantez içindekileri çarparak dışarı alırsam:

$$\varphi^2 - \varphi = 1$$

Alın size ikinci derece bir denklem (bkz. sayfa 99). Bunu çözmek için sıfıra eşitlemem gerekir. Bu yüzden de her iki taraftan bir çıkarırım

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Bu ikinci derece denklem kolayca çarpanlarına ayrılmaz bu yüzden elimde, kareye tamamlama ya da ikinci derece formülünü kullanmak seçenekleri kalıyor. Kitapta Formüller bölümünde olduğumuz için de ikinciye sececeğim:

$$\varphi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times -1}}{2 \times 1}$$

$$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Bu da bana  $\varphi = 1.6180339887\dots$  ve  $-0.6180339887\dots$  değerlerini verir. Negatif sonucu kabul etmiyorum çünkü negatif uzunlukta kenara sahip bir dikdörtgenim olamaz.

Öyleyse  $n$  sıradaki Fibonacci sayısı için formülümüze geri dönelim. Abraham de Moivre (1667–1754) işkence-den kaçmak için Londra'ya taşınan bir Fransız Protestandı. Londra'dayken Isaac Newton ile tanıştı ve bu ikili arkadaş oldu; hatta Abraham, Isaac'ın matematikle ilgili bazı konularda çıkmaza girdiğinde başvuracağı bir kişi oldu. Her neyse, Moivre önce Fibonacci sayıları için bu formülü yayınladı:

$$F_n = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

Formülün şaşırtıcı kısmı bir Fibonacci tam sayısı elde etmek için iki irrasyonel sayı ( $\varphi$  ve  $\sqrt{5}$ ) kullanmasıdır.

### De Moivre'in Kehaneti

De Moivre o zamanlar çok büyük sayılan, torun torba sahibi olacağı seksen yedi yaşına dek yaşadı. Ancak söylentiye göre her gece daha uzun süre uyumakta olduğunu fark etmiş ve bir günün saatlerinden daha fazla uykuya ihtiyacı olduğunda öleceği kehanetinde bulunmuş. Bunun gerçekleşeceği tarihi hesaplamış ve tam o gün de ölmüş.

## Üç Cisim Problemi

Matematikçilerin asırlar boyunca incelediği gökbiliminde başarılı olmak istiyorsanız formülleri anlamak çok önemlidir. Problem her ne kadar daha önce ele alınmış olsa da üç cisim problemini *Matematiksel İlkeler* adlı başyapıtında resmen açıklayan Isaac Newton oldu. Problem üç nesneyi ya da cismi, uzaydaki devinimlerini ve kütle çekimlerinin birbirini nasıl etkilediğini içermektedir. Tüm bunların temelini oluşturan formülü kuvvetler hakkındaki tartışmamızda (sayfa 66) görmüştük ancak yine de tekrarlayalım:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

Bilindiği üzere Newton'ın evrensel kütle çekim yasası (ya da yerçekimi yasası) iki cisim arasındaki kütle çekim kuvvetinin, cisimlerin kütlelerinin çarpımının ( $m_1 \times m_2$ ) aralarındaki mesafenin karesine bölünmesi ( $r^2$ ) ve *yerçekimi sabiti* ( $G$ ) ile çarpımına eşit olduğunu söylemektedir. Anlaşılan tıpkı Güneş'in etrafında dönen Dünya gibi iki cismin devinimini hesaplamak hayli kolay görünüyor. Eğer üçüncü bir cisim eklerseniz, mesela Dünya'nın yörüngesinde gezen Ay gibi, matematik çok ama çok alengirli bir hal alıyor. Şayet sisteme cisim eklemeyi sürdürürseniz geçerli denklemler öylesine karmaşıklaşır ki analitik olarak çözümleri imkânsız olabilir. Bu durum denklemleri cebir kullanarak çözemeyeceğiniz anlamına gelir ancak denklemlere uyan sayılar bulacak teknikler kullanarak denklemleri sayısal olarak çözmeniz mümkün olabilir. Bu genelde çok zaman alır ve bu da günümüzde bilgisayarlara yüklediğimiz işlerden biridir.

Neticede ister gezegenler, aylar, asteroidler ister uydular olsun Güneş sistemimizdeki cisimler, nesneler birbirlerine yaklaşıp uzaklaşırken Güneş sistemimizdeki diğer cisimlerin kütle çekim kuvvetlerinden dolayı biraz yalpalar.

Gökbilimciler gezegenlerin yörüngelerindeki bu yalpalanmayı inceleyip bundan Güneş sisteminde diğer cisimlerin var olduğu sonucuna varmıştır. 1846 yılında Paris Rasathanesi'nde çalışan Fransız Urbain Le Verrier (1811-77) aylarca sürdürdüğü hesaplamaların ardından Uranüs'ün mevcut Güneş sistemi modelinde tahmin edilen gerçek yörüngesindeki sapmadan, Neptün'ün var olduğu sonucuna vardı. Hesaplamaları daha sonra gezegenin gözlemlenmesinde kullanıldı. Neptün'ün matematiksel olarak keşfi on dokuzuncu yüzyılın en büyük bilimsel başarılarından biri olarak kabul edildi.

İşin ilginç yanı Le Verrier gözlemlerine devam edip Merkür'ün yörüngesindeki yalpalanmayı fark etti ve bu da bir başka gezegenin varlığını öngörüyordu. Bu gezegene de *Vulkan* ismi verildi ancak hiç kimse bu gezegeni bulamadı. Aslında 1916 yılında Albert Einstein, Merkür'ün yörüngesindeki yalpalanmanın yakınlarda bulunan Güneş'in genel izafiyetinin etkilerinden kaynaklandığını öne sürdü.

Her neyse, gökbilimciler Neptün'ü izlemeyi sürdürdüler, hesaplamaları yaptılar ve onun da henüz keşfedilmemiş bir cisimden etkilendiğini ortaya çıkardılar. Amerikalı Clyde Tombaugh (1906-97) 1930 yılında Plüton'u iki hafta arayla gece çekilmiş gökyüzü fotoğraflarını karşılaştırarak keşfedene dek bu gezegen de tanımlanamadı. Çok küçüktü ve boyutları ise Neptün'ün kütlelerinin fazla hesaplanmasının bir sonucu olarak ortaya çıkarılan Neptün ve Uranüs'ün yörüngelerindeki titreşimlerin sorumlusu olamazdı.

Plüton'un keşfinden itibaren kütle bakımından Güneş sisteminde on yedinci sıraya itildi; öyle ki dünyanın uydusu Ay bile ondan daha ağırdı. 2006 yılında Uluslararası Astronomi Birliği, kriterlerini Plüton'un karşılayamadığı resmi bir gezegen tanımı hazırladı. Bundan dolayı da Eris ve Sedna gibi birkaç rakibi ile birlikte cüce gezegen statüsüne düşürüldü.

Bu durum Clyde Tombaugh'un küllerinin bir kısmının 2015 yılında Plüton'a varan *New Horizons* uzay aracında taşınmasına engel olamadı.

Sedna çok tuhaf bir yörüngeye sahiptir. Bu ve diğer birkaç uzak cüce gezegenin matematiksel analizi bazı bilim insanlarının Gezegen Dokuz'un varlığına inanmasına neden olmuştur. Bu farazi gezegen yeryüzünün dört katı büyüklükte olup yörüngesi Güneş sistemindeki diğer gezegenlere dik açıdadır. Sayılar işlerini yapıyor; bizim yapmamız gereken tek şeyse bulmak.



## Noether ve Mirzakhani

Matematik, tarih boyunca erkek egemenliğinde bir alan olmuştur. Bunun cinsiyetler arasındaki birtakım sinirsel farklılıktan ziyade şüphesiz eğitim ve fırsatlardaki eşitsizlikten kaynaklandığına inanıyorum. Neyse ki bu durum yavaş yavaş değişiyor. Yine de bu şartlar altında matematik alanında isim yapabilmek, sözkonusu kadınların olağanüstü olduğunu gösteriyor.

Alman Emmy Noether (1882-1935) çoğu kişi tarafından (Einstein da dahil) gelmiş geçmiş, erkek ya da kadın fark etmez, en iyi matematikçilerden biri olarak düşünülüyordu. Yeteneklerine ve referanslarına rağmen üniversitelerde verdiği dersler karşılığında maaş almıyordu ve erkek meslektaşlarının adı altında, bir asistan olarak ders vermek zorundaydı. Öğretmenlik yaparken günümüzde Noether teoremi olarak bilinen ve fizik alanında kapsamlı sonuçları olan kuramı geliştirdi.

Meryem Mirzakhani (1977-2017) ise İranlı bir matematikçiydi ve matematik alanında en yüksek ödül olan Fields madalyasını (matematik alanında herhangi bir Nobel Ödülü olmadığı için) kazanan ilk kadındı. Lisans eğitimini İran'da tamamladıktan sonra geometri alanındaki çalışmalarının kendisine büyük şöhret kazandırdığı Birleşik Devletler'e taşındı. Kırk yaşında kanserden öldü ve fotoğrafları İran basınında başörtüsüz olarak yayımlanan az sayıdaki kadından biri oldu.

4

# GEOMETRI

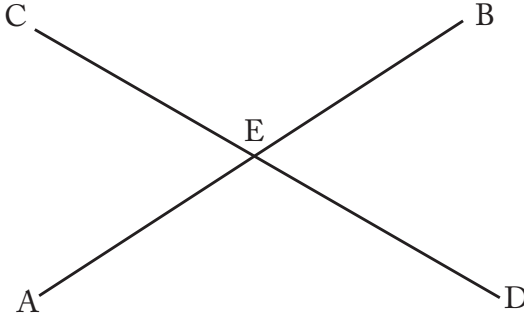
# ALAN VE ÇEVRE UZUNLUĞU

Antik Yunancada “yer ölçümü” anlamına gelen geometri çok uzun bir zamandır matematiğin en yararlı alanlarından biri olmuştur. Çoğu zaman antik kültürleri, geride bıraktıkları anıtlarla ilişkilendiririz. İşte geometri de onların bu eserleri tasarlamak için kullandıkları şeydir.

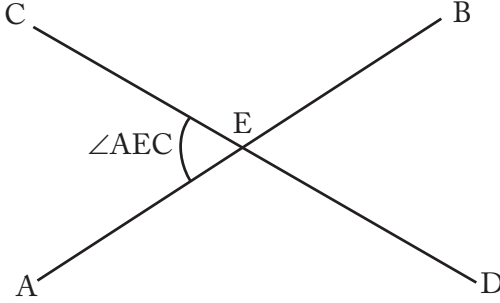
İşte hafızamızı hızlıca tazeleyecek kısa bir basit geometri turu.

## Açı Gerçekleri

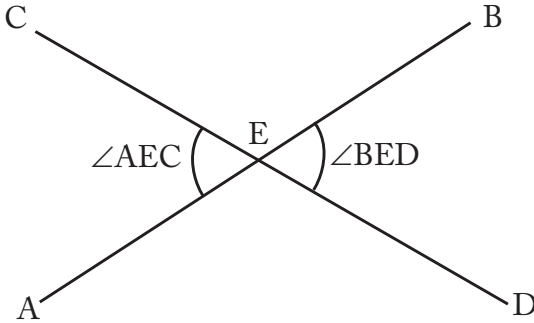
Genellikle bir diyagram üzerindeki doğruları uçlarındaki noktalarla adlandırırız. Örneğin, eğer AB ve CD doğruları bir E noktasında kesişirse, bu durumu şöyle gösterebilirim:



Bu ise E noktasında dört tane açı yaratır. Bir açığı nitelemek için onu oluşturan iki doğruyu kullanırsınız. Bu yüzden aşağıda işaretlenmiş olan açığı nitelemek için A'dan E'ye ve sonra da E'den C'ye doğru gittiğimde oluşan bir açı olduğunu görüyorum. Bu yüzden buna AEC açısı ya da  $\angle AEC$  denir.  $\angle CEA$  ile aynı şeydir.



Antik Mezopotamyalıların temeli altmış olan sayı sistemi sayesinde bir noktanın etrafında 360 derecemiz bulunmaktadır. Düz bir çizgi herhangi bir noktayı ya da köşeyi ya da tepeyi (örneğin E gibi) her iki tarafta  $180^0$  bırakacak şekilde tam olarak ikiye böler. Böyle bir köşenin karşılıklı her iki tarafında birbirine eşit açılar bulunur. Bu gibi çift açılara dikine ters açı denir. Burada “dikine” olarak ifade edilen “dikey” sözcüğünden ziyade “tepe”, “köşe” anlamındaki sözcükle ilintilidir<sup>8</sup>.

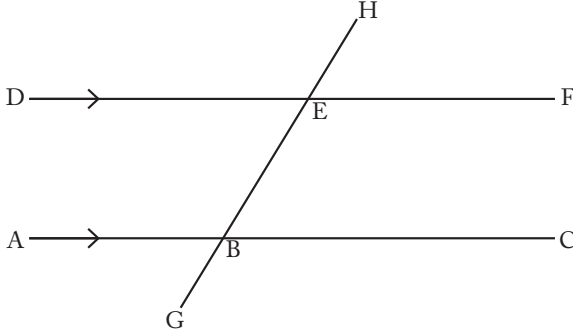


Diyagramımdaki açılarının değerlerini bilmiyoruz ancak  $\angle AEC$  ile  $\angle BED$ 'nin  $90^0$ 'den küçük oldukları için *dar açı*, diğer yandan  $\angle CEB$  ve  $\angle AED$ 'nin ise  $90^0$  ile  $180^0$  arasında oldukları için de *geniş açı* olduklarını söyleyebilirim.  $180^0$ 'den büyük açılara ise *yansık açı* denir.

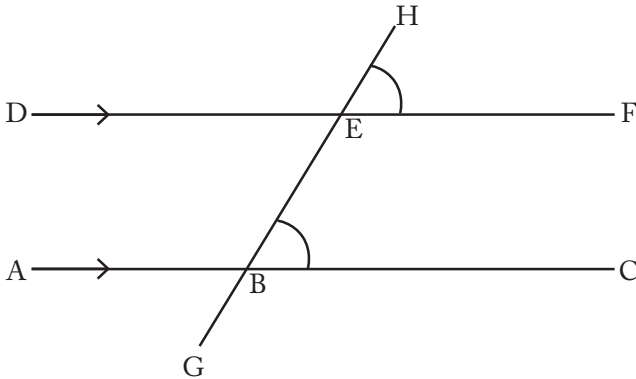
<sup>8</sup> “Dikine” tabiriyle İngilizce “vertex” sözcüğünün zarf hali olan “vertically” sözcüğünden bahsediliyor. Dikey anlamına gelen “vertical”la bir alakasının olmadığı kastediliyor (ç.n.)

## Paralel Doğru Gerçekleri

Paralel doğrular her zaman birbirlerine eşit mesafede olup asla kesişmezler. Şayet paralel doğruları (açık oklarla gösterilmiş) kesen bir doğru çizersem birkaç bağıntı daha görebiliriz:



GH doğrusu DF ve AC paralel doğrularını aynı açıyla kesmekte olup B ve E'de birbirinin aynısı iki kesişim oluşturmaktadır. Her bir kesişimde aynı açıyı kaplayan açılar eşittir ve *yöndeş açılar* olarak bilinirler. Örneğin  $\angle HEF$  ve  $\angle HBC$  açıları gibi:



Ayrıca  $\angle HEF$  ve  $\angle BED$  açıları da dikine terstirler ve bu yüzden de eşit olmaları gerekir. O halde bu da  $\angle BED$  ve  $\angle HBC$  açılarının eşit olması gerektiği anlamına gelir ve bunlara da *ters eş açılar* denir.

## Buna Aklım Ermiyor!

Önceleri uygulamalı ve mühendislik temelli bir inceleme alanı olarak başlayan şey kısa süre içinde, özellikle de felsefi konulara kafası yatan Yunanların eli değdikten sonra kendi başına teorik bir alana dönüştü. Thales (yaklaşık MÖ 624-526), Pisagor (yaklaşık MÖ 570-495) ve Evdoksus (yaklaşık MÖ 390-337), matematiğe büyük katkılar sağlamıştır ancak geometrinin babası olarak nitelendirilen kişi işgal altındaki Mısır'da yaşayan bir Yunan olan Öklid (yaklaşık MÖ 300 civarında yaşamış) olmuştur.

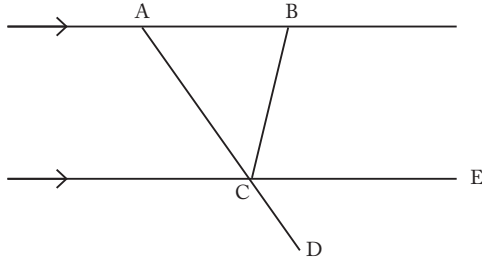
Neden diğerleri değil de o? Yanıtı, kendisinin bu konuda çok okunan bir eser yazmış olmasıdır.

*Elemanlar* başlıklı eseri, yazılan en büyük ders kitabı olarak kabul edildi ve yirminci yüzyıla değin, entelektüel olarak kabul edilmek isteyen herkes için olmazsa olmaz bir kitaptı. Günümüzde bu kitabın içeriğinin büyük bir kısmı okulda öğrendiğimiz matematik aracılığıyla yayılmaktadır. Matematikçiler bu esere epeydir her şey için kıstas belirleyen kesin ve esaslı kanıtların ilk örneklerinden biri olarak saygı duymaktadır.

Öklid önce açıkça doğru olan, kanıt gerektirmeyen şeylerle başladı. Bunlara *aksiyom* (belit) ismini verdi. Örneğin herhangi iki noktayı düz bir doğru ile birleştirebileceğiniz ya da dilererseniz herhangi düz bir doğruyu uzatabileceğiniz gibi. Daha sonra bu aksiyomları ilerledikçe ispatlayarak geometrik teoremler ve sayı teoremlerini ispatlamak üzere kullandı.

Örnek olarak Öklid, sadece yöndeş ve ters eş açıları kullanarak bir üçgen içindeki açılar toplamda  $180^0$  olması gerektiğini göstermiştir. Paralel doğrular arasına bir ABC üçgenini çizdiğimizizi düşünelim:

## Geometri

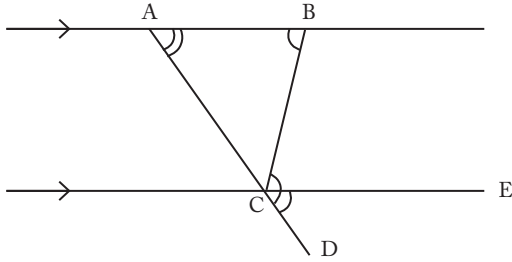


Öklid'e göre:

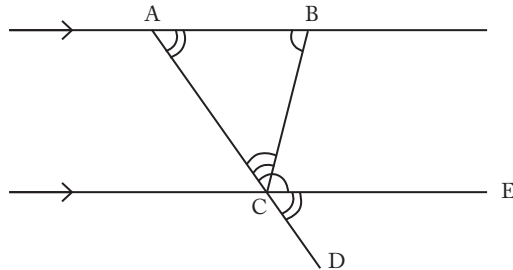
$\angle ABC$  ve  $\angle BCE$  açıları ters eş açılarıdır ve bu yüzden de eşittirler.

$\angle BAC$  ve  $\angle ECD$  açıları da yöndeş açılarıdır ve dolayısıyla onlar da eşittir.

Böylece  $\angle ABC + \angle BAC = \angle BCE + \angle ECD$ :



Eğer üçgenin üçüncü açısı olan  $\angle ACB$ 'yi bu denklemin her iki tarafına eklersem şunu elde ederim:



$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle BCE + \angle ECD + \angle ACB$  olur.

Bir üçgendeki açılar = düz bir doğru üzerindeki açılar

Bu sebeple de bir üçgen içindeki açılar toplamı  $180^\circ$  olur.

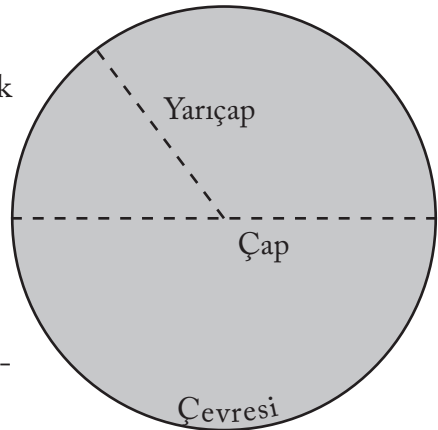
## Çevre Uzunluğu

Çevre uzunluğu iki anlamda kullanılabilir: iki boyutlu bir şeklin dışını çevreleyen mesafe ya da şeklin kendi dış kısmı. Örneğin bir kara parçasının çevresinin 210 metre uzunlukta olduğunu ya da çevresinin dikdörtgen biçiminde olduğunu söyleyebilirim. İlk avcı toplayıcı toplulukların çiftçiliğe alışmasından bu yana insanlar şekillerle ilgilenir olmuştur. Elimizde bazı antik kültürlerin tarlaların boyutları ve biçimleri hakkında matematik problemleri çözdüklerine dair kanıtlar bulunmaktadır; elbette bu problemler çoğunlukla çiftçilerin vergilendirilebilmesi içindi.

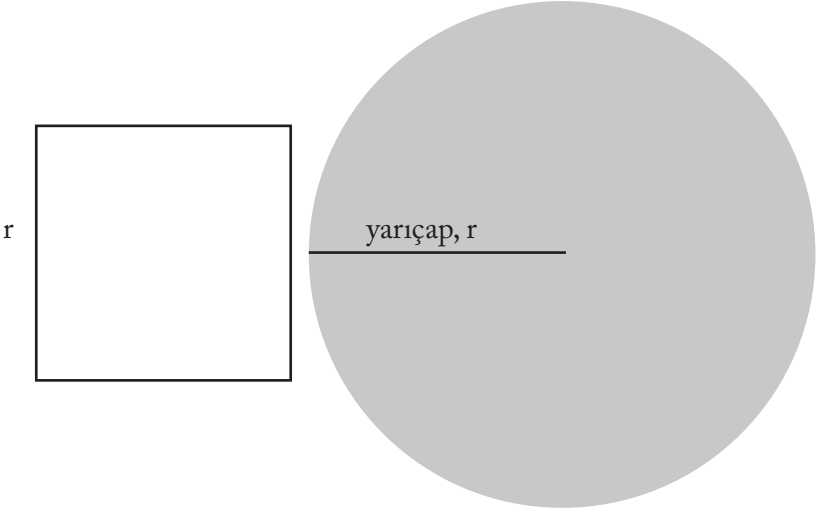
Kenarları düz herhangi bir biçimin ya da poligonun (çokgen) çevresini hesaplamak basittir. Şekle kıvrım ya da eğriler eklerseniz hesaplamak güçleşir. Halat ya da ip gibi esnek bir şeyi kıvrımın üzerine koyup daha sonra da eğrinin uzunluğunu ölçmek için düz hale getirmek mümkündür. Ancak matematikçiler formülleri severler ve bu yüzden de çemberin çevresi için gereken formül arayışı antik matematikçilerin epey zamanını almıştır.

## Çemberler

Çemberin çevresi olarak adlandırılan bir çemberin çevre uzunluğunu hesaplamak için antik matematikçiler yarıçapı bir karenin kenarına eşit olan çemberin çevre uzunluğu ile karenin kenar uzunluğu arasında bir ilişki olduğunu fark etmişlerdir:







Çemberin çevre uzunluğu karenin kenar uzunluğunun altı ve bir *bit* (pi sayısının yaklaşık iki katı) katıdır:

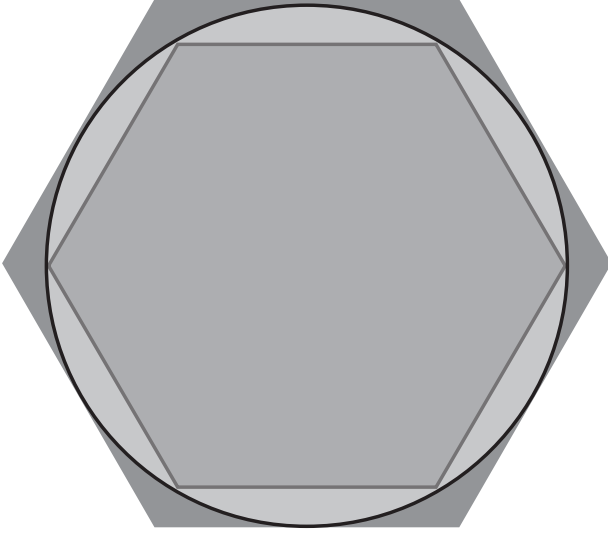
$$\text{çemberin çevresi} = \text{altı ve bir bit} \times \text{yarıçap}$$

Bazı matematikçiler bu “altı ve bir bit” sayısı için bir sembol önerdiler:  $\tau$  yani tau, Yunancadaki t harfi. Şayet yarıçap yerine çap ile hesaplarsanız:

$$\text{çemberin çevresi} = \text{üç ve bir bit} \times \text{çap}$$

Antik Babilliler ve Mısırlılar bu sayıyı içinde çember ve kemer olan şeyleri inşa edebilecek hassasiyetle saptayabildiler ancak bu sayının değerlerini artan bir hassasiyetle belirlemenin ilk sistematik yolunu bulan Yunan matematik sihirbazı Arşimet (yaklaşık olarak MÖ 287 – 212 arasında yaşamıştır) oldu.

Kullandığı yöntem çemberi aşağıdaki gibi iki altıgene yaklaştırmaktı:



Kenarları düz olduğu için altıgenin çevresini hesaplamak kolaydır. Arşimet çemberin çevre uzunluğunu içteki, *içine çizilmiş* altıgenin çevresi ile dıştaki, *dışına çizilmiş* altıgenin çevresi arasında bir yerlerde olması gerektiğini düşünüyordu. Arşimet daha sonra çemberin çevre uzunluğu tahminini giderek daha doğru kılmak adına çokgenlerin kenar sayısını iki katına çıkardı. Kenar sayısı 96'ya ulaştığında elde ettiği sonuçlar çemberin çevresinin yaklaşık olarak çapının  $\frac{22}{7}$  katı olduğunu gösteriyordu.

Bu değer uzun bir süre “Arşimet sabiti” olarak bilindi ancak daha sonra Yunanca çevre (periferi) sözcüğünün ilk harfi olan  $\pi$  sembolü kullanıma girdi. Arşimet’in değeri gerçek değere oldukça yakındır ve günümüzde hesap makinesi kullanılmayan işlemlerde tahmini bir değer olarak hâlâ kullanılmaktadır.

Böylece yarıçapı  $r$  ya da çapı  $R$  olan bir çemberin çevre uzunluğu için formülümüz:

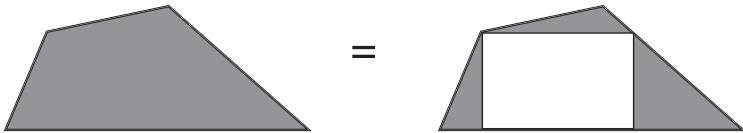
$$\text{çemberin çevresi} = \pi R = 2\pi r$$

Daha sonra yürütülen çalışmalar  $\pi$ 'nin irrasyonel bir sayı olduğunu (bkz. sayfa 14) ve bu yüzden de yapabileceğimiz en iyi şeyin yaklaşık değerini almak olabileceğini göstermiştir. Ayrıca  $\pi$  sayısının bir *aşkın* sayı olduğu da gösterilmiştir. Ancak bunun maneviyatla bir alakası olmayıp sadece  $\pi$ 'nin "terimlerinin katsayıları ve kuvvetleri tam sayı olan bir denklemin zm olan bir sayı olmadığı" anlamına gelir. Bir sayının aşkın bir sayı olduğunu göstermek oldukça zordur ve  $\pi$  sayısı için bu, ilk kez Alman matematikçi Ferdinand von Lindemann (1852-1939) tarafından gösterilmiştir.

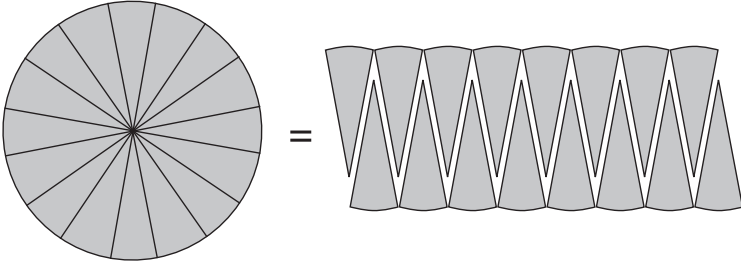
## Alan

Alan, bir şeklin kapladđı düz boşluk (uzay) miktarıdır. Von Lindemann'ın çalışması bir *emberi kareye almanın* yani sadece bir pergel ve mastar kullanarak bir çemberle aynı alana sahip kare çizmenin mümkün olmadđđını göstermiştir. Geometriciler antik çağlardan beri bunu yapmaya çalışıyor.

Çoğu zaman duvarlarımız ya da ofis meknımız için boya alırken alanla orantılı bir şekilde para deriz. Çokgenlerin alanını hesaplamanın püf noktası bir dikdörtgenin (uzunluk x genişlik) ve bir üçgenin ( $\frac{1}{2} \times$  taban kenarı x yükseklik) alanını hesaplayabilmektir. Bundan sonra ise herhangi bir okgeni, alanını bulmak üzere dikdörtgenlere ve üçgenlere ayırabilirsiniz. Örneğin:



Buradaki *dörtgen* (dört kenarlı çokgen) üç üçgen ve bir dikdörtgene bölünebilir. Ancak kavisli bir alanı hesaplamak isteseydik, durum biraz daha zor bir hal alır. Daha önce sayfa 76-77’de bir dairenin alan formülünü görmüştük. Ancak sıfırdan bu formülü nasıl çıkarırım? Peki ya dairemi üçgen parçalara bölüp yeniden düzenlemeyi dene-  
sem ne olur acaba?



Burada daireyi eşit pizza dilimlerine bölüp bir dikdörtgene yakın görünecek biçimde yeniden düzenledim. Dilim sayısı ne kadar artarsa, yeniden düzenlediğim şekil o kadar dikdörtgene benzeyecektir. Sonunda ise dilimlerimin kendileri çok ince dikdörtgenler olana dek bu sürecektir. Dikdörtgenin alanının genişlik x uzunluk olduğunu biliyoruz. Düzenlediğim dikdörtgenin genişliği dairenin merkezinden ucuna kadar olan mesafe, yani yarıçaptır. Dikdörtgenin uzunluğu ise çemberin çevresinin yarısı kadardır, çünkü dikdörtgenin her iki tarafında “pizza kenarlarının” yarısı var. O halde dikdörtgenin alanı yarıçap x (çemberin çevresi ÷ 2). Yani:

$$\text{dairenin alanı} = \text{yarıçap} \times (\text{çemberin çevresi} \div 2)$$

$$= r \times (2\pi r \div 2)$$

$$= r \times \pi r$$

$$= \pi r^2$$

Mahallemdeki pizza lokantası çap uzunluğuna göre sattığı farklı boyutlarda pizzalar pişiriyor. Küçük bir pizzanın çapı 24 cm ve fiyatı da 13,99 £. Tek kişilik pizzanın ise yaklaşık 18 cm çapı var ve fiyatı da 6,99 £. Acaba ödediğim para karşılığında en fazla pizzayı hangi seçenekte yerim?

Şayet pizzaların alanlarını tek ondalık basamakta karşılaştırırsam:

$$Alan_{küçük\ pizza} = \pi \times \left(\frac{9.5}{2}\right)^2 = 70.9 \text{ santimetre kare}$$

$$Alan_{kişisel\ pizza} = \pi \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 38.5 \text{ santimetre kare}$$

Görebildiğim kadarıyla 13,99 £'a alacağım iki tane tek kişilik pizzanın toplamda  $248,2 \times 2 = 496,4$  santimetre karelik alanı olacaktır. Yani bir tane küçük pizza almaktan daha ucuza geliyor. Pizzacılarınızın menülerinden bu bilgiyi teyit unutmayın!

## Kalkülüs, Yeniden

Dairelerin alanlarını hesaplayabilmek küçük dairelerden oluşan şekillerin alanını hesaplamamıza yardımcı olur. Diğer eğrilerle yapılmış şekiller ise türev almanın (sayfa 111) tersi olan *integral alma* ile bulunabilir. Şayet eğriyi bir denklem kullanarak tanımlayabilirsek eğrinin altındaki alanı bize veren bir başka denklem elde etmek üzere integralini alabiliriz.

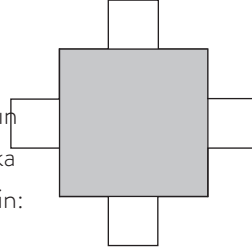
Kalkülüs ayrıca küre gibi kavisli bir şeklin hacmini hesaplamak üzere üç boyutta da kullanılabilir. Ancak öncelikle hiçbir geometri bölümü Pisagor'a değinmeden tamamlanmış sayılmaz.

## Fraktallar – Sonlu Alan, Sonsuz Çevre

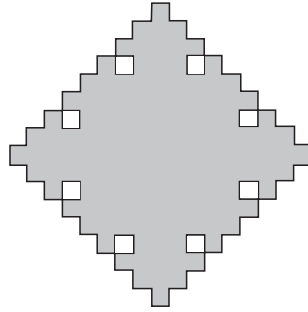
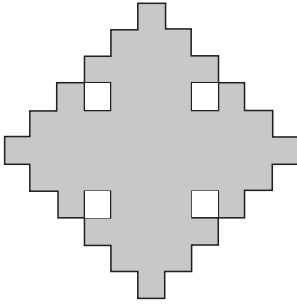
İşte bir şekli oluşturmak için kullanılabilen algoritma. Önce bir kareyle başlayın:



Daha sonra  
her bir kenarın  
ortasına başka  
bir kare ekleyin:



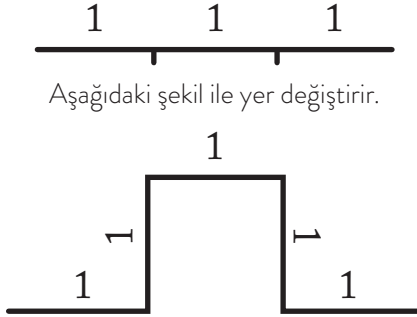
Bıkana kadar devam edin:



Birbirini tekrarlayan bu desenler fraktallar olarak bilinir ve bazı ilginç özellikleri vardır.

Şayet bir şeklin kenarlarının uzunluklarını iki katına çıkarırsam buna ölçek katsayısı 2 ile büyüme deriz. Normal olarak alan, ölçek katsayısının karesi kadar artacaktır. Yani bu durumda  $2^2 = 4$  katı artacaktır (bunu gözünüzün önünde daha iyi canlandırabilmek için sayfa 86'daki fayanslara bakınız). Acaba bu durum yukarıdaki fraktal için de geçerli midir?

İlk kez daha fazla kare eklediğimde (buna yineleme denir), her bir kenarın uzunluğu ölçek katsayısı  $\frac{5}{3}$  kadar artar. Bu durumu asıl kenarın üç birim uzunluğunda olduğunu ve bunun beş birim uzunluktaki bir şekille yer değiştirdiğini hayal ederseniz anlayabilirsiniz:



Alan ise 9'dan  $(3 \times 3)$  13'e yükselir. Şimdi, eğer genel büyüme kuralları geçerli olursa şu sonuca varmamız gerekir:

$$9 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 13$$

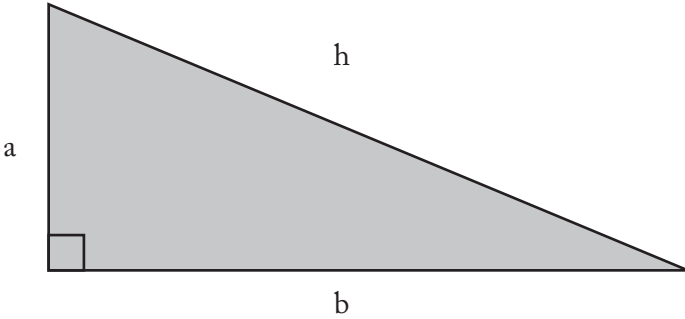
Demek ki alan, ölçek katsayısının karesi kadar artmaktadır. Bu hesaplamanın sol tarafı aslında bize 25 gibi bir yanıt verir. Gerçekleştirdiğimiz her bir yineleme şeklin kenarlarının uzunluğunu şeklin alanında olmasını beklediğimiz artıştan daha fazla artırmaktadır.

Bunun neticesinde, yinelemeleri sonsuza dek sürdürürsem ortaya çıkan şeklin çevre uzunluğu sonsuzluğa doğru gitme eğilimindeyken şeklin alanı sonlu olarak kalır. Benzer bir durum üç boyutta çalışırsak gerçekleşir. Sonlu bir hacmi, ancak sonsuz yüzey alanı olan katı cisimler mevcuttur. Çoğu bitki ve hayvan yüzey alanı en önemli gereksinim olduğunda (örneğin akciğerler ve yapraklar gibi) bundan yararlanır.

# PİSAGOR TEOREMİ

Pisagor'un (yaklaşık MÖ 570-495 arasında yaşamıştır) adıyla anılan teorem aslında kendisi tarafından icat edilmemiştir. Dünyanın çeşitli yerlerindeki kültürlerden elde edilen kayıtlar teoremin Pisagor'dan önce kullanıldığını göstermektedir. Ancak Pisagor bu teoremi ilk ispatlayanlardan biriydi.

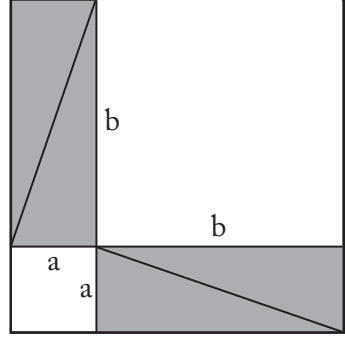
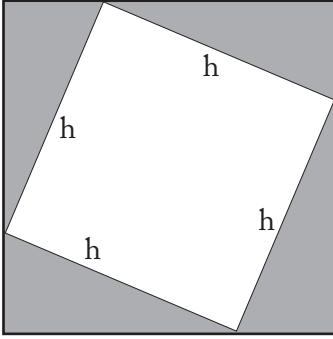
Pisagor teoremi dik açılı üçgenlerle ilgilidir:



Birbirlerine dik açıda bulunan iki kenara  $a$  ve  $b$  ismini verdim. Üçüncü kenarı ise dik açılı bir üçgenin uzun kenarı olan, daima dik açının karşısındaki kenara verilen isim olan *hipotenüs*ten dolayı  $h$  olarak isimlendirdim. Pisagor'un ispatı özellikle zekicedir çünkü sadece üçgenlerin yeniden düzenlenmesiyle gerçekleştirilir.

Bu üçgenlerden dört tanesini alıp eşit alan ölçüsüne sahip iki kare oluşturacak biçimde düzenleyebilirim:

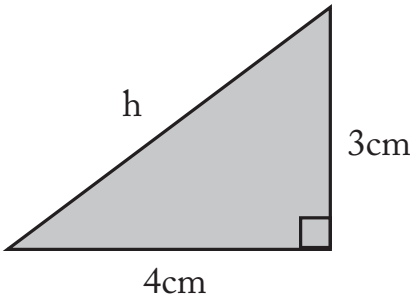




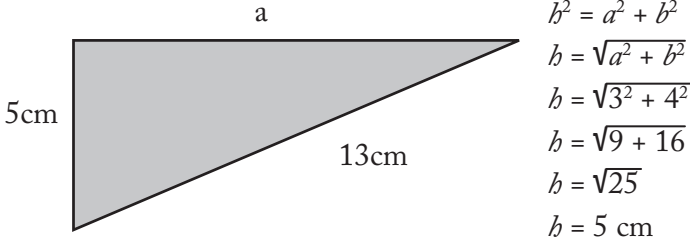
Pisagor soldaki iç karenin  $h \times h = h^2$  değerinde bir alana sahip olması gerektiğini belirtmektedir. Sağdaki iki karenin alanları da  $a^2$  ve  $b^2$  olmalıdır. Her iki büyük karenin alanları aynı olduğundan ve üçgenlerin de ebatları değişmediğinden şunun da doğru olması gerekir:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Pisagor teoremi, aşağıdaki örneklerde görüldüğü gibi dik açılı bir üçgenin bilinmeyen bir kenarının uzunluğunu bulmamızı sağlar:



$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 + b^2 \\ h &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ h &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ h &= \sqrt{9 + 16} \\ h &= \sqrt{25} \\ h &= 5 \text{ cm} \end{aligned}$$



Her iki örnekte, üçgenlerin üç kenar uzunlukları da tam sayıdır. Pisagor teoreminde bu şekilde işleyen tam sayılara *Pisagor üçlüleri* denir. 7, 24 ve 25 ile 8, 15 ve 17 gibi üçlü setler de diğer örnekler arasındadır.

### Fermat'ın Son Teoremi

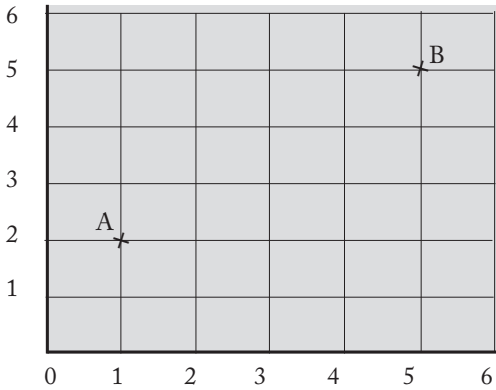
Diophantus (yaklaşık 210-290), Mısır'da yaşayan bir Yunan matematikçiydi. *Arithmetika* isimli kitap serisinde tıpkı Pisagor'un teoremine benzeyen denklemleri ele almıştır. Vakit öldürmek için matematikle ilgilenen Fransız bir avukat olan Pierre de Fermat (1607-65) elinde bulunan bir *Arithmetika* kopyasının içine sadece  $n$ 'nin iki olduğu durumda  $x^n + y^n = z^n$  biçimindeki denklemlerin (Yani Pisagor üçlülerinin) doğru olduğuna dair elinde "gerçekten mükemmel bir kanıt" bulunduğunu belirten bir not yazmıştı. Bu kanıt bulunamadı ve İngiliz matematikçi Andrew Wiles'in (d. 1953) kesin olarak kanıtlamasına dek 400 yıla yakın bir zaman geçmesi gerekecekti. Bunu gerçekleştirirken ayrıca ispatı *Guinness Rekorlar Kitabı*'na "en çok başarısızlıkla sonuçlanmış girişim" olarak geçen modülerlik teoreminin ispatının da yolunu açmış oldu.

Fermat'ın kendi ispatının ne olduğunu ise hiç kimse bilmiyor.

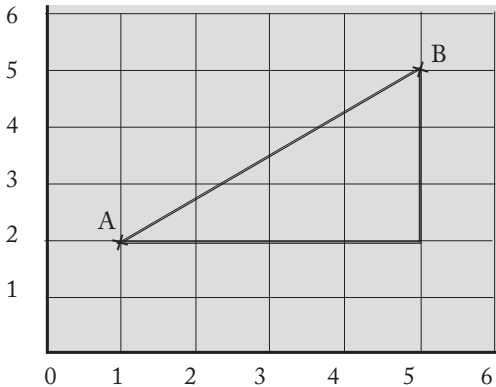
Peki, bu Pisagor teoremi neden bu kadar önemli? Aslında hipotenüsün uzunluğunun hesaplanması, koordinat geometrisinde iki nokta arasındaki mesafenin hesaplanmasında çok işe yarar.

### A Noktasından B Noktasına

Descartes'ın (bkz. sayfa 107) x-y koordinatlar sistemi konumları, doğruları ve şekilleri betimlememize yardımcı olur. Diyelim ki iki nokta var: Aşağıda gösterildiği gibi A (1,2), B ise (5,5) konumunda bulunsun:

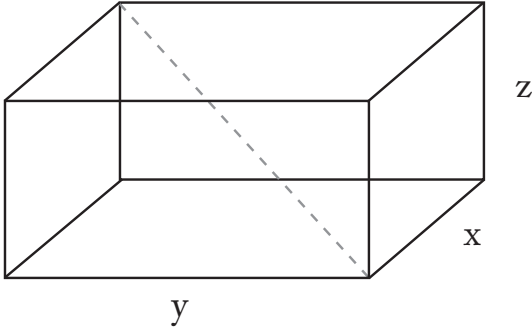


Bu iki nokta arasındaki mesafeyi tam olarak nasıl bulurum? Bir dik açılı üçgen oluşturursam:

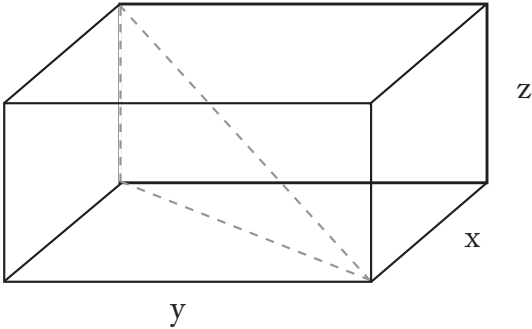


Gördüğümüz gibi üçgenin alt kenarı 4 birim ve yüksekliği ise 3 birimdir. Bu ise daha önce sayfa 149'daki örnekte bulunan üçgenin aynısıdır ve böylece  $AB'$ 'nin 5 birim olduğunu biliyoruz.

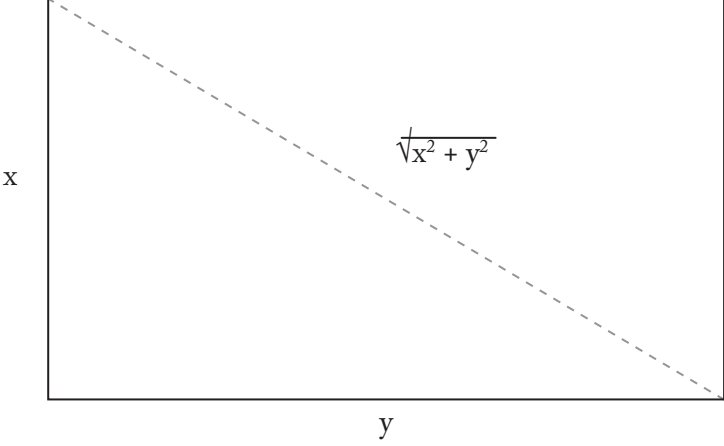
Pisagor teoremi ayrıca üç boyutlularda da işe yarar. Diyelim ki genişliği  $x$ , uzunluğu  $y$  ve yüksekliği  $z$  olan bir kutumuz var ve kutunun köşegeninin uzunluğunu hesaplamak istiyoruz:



Bunu bulmak için Pisagor teoremini iki kez kullanabilirim. Önce dik açılı bir üçgen yapıyorum:



Uzunluğunu bulmak istediğim köşegen bu üçgenin hipotenüsüdür. Üçgenin yüksekliğinin  $z$  olduğunu biliyorum ancak henüz tabandaki kenarı bilmiyorum. Şayet kutunun alt yüzeyini oluşturan dikdörtgene bakacak olursam, gerçekten bu mesafeyi de Pisagor teoremini kullanarak bulmanın bir yolunu görebilirim:



Şimdi buradaki üçgenin alt kenarını ve yüksekliğini bildiğim için artık  $d$  olarak nitelendireceğim köşegenin uzunluğunu hesaplayabilirim:

$$d^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2$$

Kare almanın ve karekök almanın aslında birbirlerinin tersi olduğunu hatırlayana kadar bu durum çok korkunç gibi görünebilir. Böylece bunlar birbirlerini yok eder ve bize de şu sonuç kalır:

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Burada genel terimler kullandığımız için üç boyutlularda Pisagor teoremi için formülü türetmiş olduk. Çoğu matematikçi ve bilim insanı çalışmalarında üçten fazla boyutu ele alır ve Pisagor teoremi istendiği kadar çok boyuta kadar genişletilebilir. Kuantum teorisi aslında on bir boyutlu bir evrende yaşadığımızı ileri sürmektedir ancak ben şimdilik bu bölüm için üç boyutta kalacağım.

## Pisagor – Sıradan Bir İnsan ve Bir Efsane

Pisagor çok olağanüstü bir matematikçi ve düşünür olabilir ancak düşüncelerinden çok azını yazıya dökmüştür. Hayatı hakkındaki bildiklerimiz Pisagor'u süper güçlerle donatan ve çok mistik bir havaya bürünmüş daha ileriki dönemlere ait kaynaklardan gelmektedir.

Daha makbul detayları elde etmek adına bu bilgileri elden geçirirken Pisagor'un o zamanlar Yunan İmparatorluğu'nun parçası olan Güney İtalya'ya yerleşmiş bir Yunan olduğunu görüyoruz. Matematik, bilim, din ve siyaset alanlarını bir-biriyle harmanlayan ve kendi adını taşıyan bir felsefe okulu kurdu. Okul iki gruba bölünmüştü: *mathematikoi* olarak bilinen öğretmenler ve *akoustikoi* olarak bilinen dinleyiciler. O dönem için birtakım radikal fikirleri vardı: kadınların erkeklerle eşit statüde olması, katı bir diyetin hem akıl hem de vücut sağlığına iyi geldiği ve sayılarla şekillerin kutsal olduğu gibi. Ayrıca rakamların gizli gücünün bilimi olarak bilinen numerolojiye inanıyordu. Bu inanca göre bir kişinin doğum yeri ya da doğum tarihi veyahut ismiyle ilgili sayıların o kişinin hayatı üzerinde etkisi vardı.

Pisagorcuların bağnaz yaşam tarzları ve siyasi duruşları çoğunlukla pek sevilmedikleri ve ayrıca gizemli kalmaları gerektiği anlamına geliyordu. Pisagor ve onun müritleri birkaç kez kasabadan kovulmuş ve başka yerlere taşınmak üzere kaçmışlardı.

Pisagor'un ölümü de hayatı hakkındaki detaylar kadar şüpheli; bazı tarihçilere göre içinde bulunduğu tapınağın etrafı barikatlarla çevrilip yakılmış ve yanarak burada ölmüştür. Diğerlerine göreyse yangından sonra kaçmış ancak açıklıktan ölmüştür ve üçüncü bir grup tarihçi yakalandıktan sonra bir fasulye tarlasından geçerek kaçmayı reddettiği için öldürüldüğünden bahsetmektedir.

Asıl doğru olan ise Pisagor ve okulunun Batı felsefesinin kurulmasını derinden etkilediğidir.

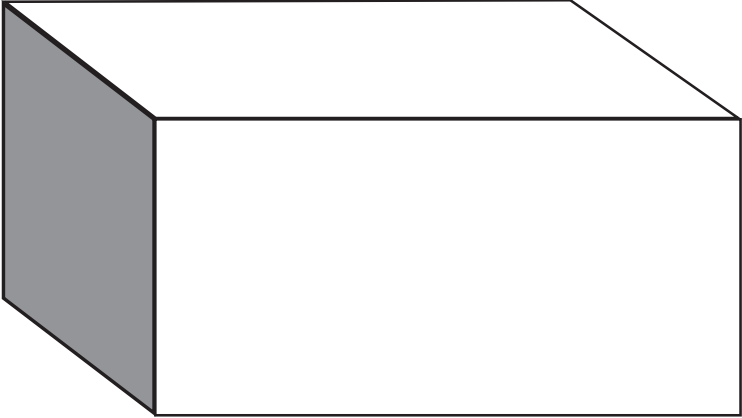
# HACİM

Bir nesnenin hacmi üç boyutta ne kadar alan kapladığı ya da çevrelediğidir. Düz kenarları olan herhangi bir katı cisme *çokyüzlü* şekil denir. Küboid, hacmi en kolay bulunan çokyüzlülerden biridir çünkü basitçe uzunluk, genişlik ve yüksekliğini çarpıyoruz. Bunu akılda canlandırmanın bir başka yolu da küboidin bir yüzünün alanını uzunlukla çarptığımızı düşünmektir.

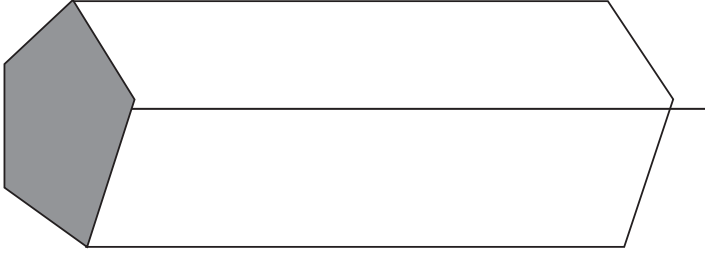
## Prizmalar ve Küreler

Bu prensibi sabit bir dik kesiti olan her türlü şekil için genişletebiliriz. Bu tür şekillere *prizma* adı verilir:

prizmanın hacmi = bir yüzün alanı x uzunluk



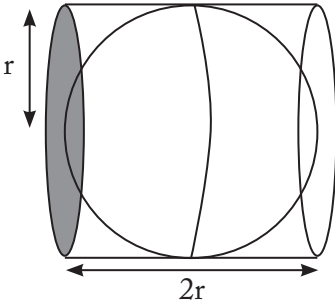
Küboid  
(dikdörtgen prizma)



Beşgen Prizma

Yukarıdaki iki şekil de prizma olduğundan hacimlerini gri yüzlerinin alanını bulup prizmaların uzunluklarıyla çarparak hesaplayabiliriz. Bir önceki bölümden alanı hesaplamakla ilgili her şeyi biliyoruz, bu yüzden prizmaların hacmi genellikle çok zorlanmadan hesaplanabilir.

Sözkonusu eğrili nesneler olduğunda ise yine Arşimet'e başvurmak durumundayız (bkz. sayfa 141). Arşimet, bir kürenin hacminin mükemmel bir şekilde etrafını çevreleyen silindirin hacminin üçte ikisi olduğunu hesaplamıştı:



Resimdeki silindiri bir prizma olarak görebiliriz. Gri dairesel yüzün alanı  $\pi r^2$  ve bunu prizmanın uzunluğu, yani bu durumda  $2r$  ile çarpmamız gerekiyor:

$$\begin{aligned} \text{silindirin hacmi} &= \pi r^2 \times 2r \\ &= 2\pi r^3 \end{aligned}$$

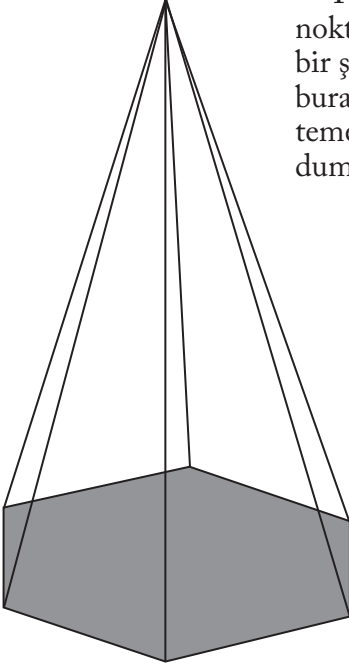
O halde kürenin hacmini bulmak için bunu üçte ikiyle çarpmam gerekir:

$$\begin{aligned} \text{kürenin hacmi} &= \frac{2}{3} \times 2\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3} \times \pi r^3 \end{aligned}$$

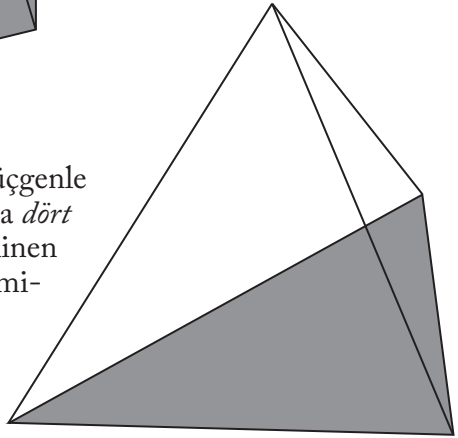


## Piramitler

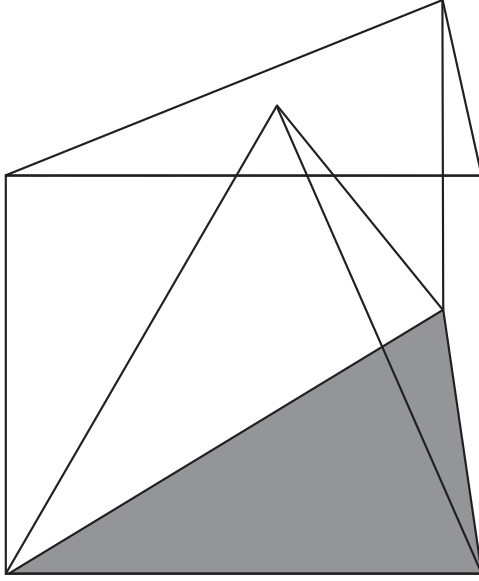
Piramit, tüm köşeleri tek bir noktayla birleştirilmiş iki boyutlu bir şekilden meydana gelir. Örneğin burada altıgenle başlayıp altı köşeli temele dayanan bir piramit oluşturdum.



Şayet eşkenar bir üçgenle başlamış olsaydım ayrıca *dört üçgen yüzlü* olarak da bilinen üçgen temelli bir piramit olurdu:



Tıpkı küredeki gibi bir piramidin hacmiyle onun kenarlarını çevreleyen prizmanın hacmi arasında benzer bir ilişki mevcuttur:



Piramidin hacminin prizmanın hacminin üçte biri olduğunu ilk bulanlardan biri Aryabhata'ydı (bkz. sayfa 23).

$$\text{piramidin hacmi} = \frac{1}{3} \times \text{yüzey alanı} \times \text{uzunluk}$$

Burada prizmanın yüzeyi piramidimizin tabanı ve uzunluğu da aslında yüksekliğidir. Bu sebeple formülü yeniden şu şekilde yazabiliriz:

$$\text{piramidin hacmi} = \frac{1}{3} \times \text{tabanın alanı} \times \text{yükseklik}$$

Giza piramitleri kare tabanlıdır ve Büyük Piramit (Keops) olarak bilinen en büyüğü gerçekten devasa boyutlardadır. Kare tabanının her bir kenarı 230 metre uzunlukta olup ilk inşa edildiğinde yüksekliği 147 metreydi. Formülümüzü kullanarak hacmini hesaplarsak:

$$\begin{aligned} \text{Büyük Piramit'in hacmi} &= \frac{1}{3} \times \text{taban alanı} \times \text{yükseklik} \\ &= \frac{1}{3} \times 230^2 \times 147 \\ &= 2,592,100 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Piramidin hacminin büyüklüğünü anlamak için şöyle bir kıyaslama gerekebilir: Dünyanın en yüksek gökdele- ni olan *Burj Khalifa* yaklaşık olarak 1,6 milyon m<sup>3</sup>lük bir hacme sahiptir. Büyük Piramit'in Burj'dan 4500 yıl daha eski olduğunu ve hiçbir makine kullanmadan inşa edildiği- ni düşünecek olursak boyutlarına hayran kalmamak müm- kün değil.

Eureka! (Buldum!)

Daha düzensiz katı cisimlere gelince birkaç farklı se- çeneğimiz bulunmaktadır. Ya hakkında bilgi sahibi oldu- ğumuz bir dizi şekil kullanarak katı cismin hacmini he- saplarız ya da *Arşimet prensibini* kullanırız. Efsaneye göre Arşimet'ten Siraküza Kralı için yapılan altın tacın yapımı için verilen altının tamamını içerip içermediğini bulması istenmiş. Kral, altının bir kısmının kurşun ya da gümüşle değiştirilmesinden böylece de kuyumcunun tacın kütlesini düşürmeden kendisine ekstra kazanç sağlamasından şüp- heleniyormuş.

Bunun en basit yolu tacın eritilmesi, hacminin de daha önce verilen altının hacmi ile karşılaştırılması olurdu. An- cak Arşimet'in taca herhangi bir şekilde zarar vermesine izin verilmemiş.

Arşimet, bu problem üzerine çok çalıştığı yorucu bir günün ardından yıkanmak üzere küvete girdiğinde vücu- dunun küvetin içindeki suyun bir kısmını dışarı taşırdığını fark etmiş. Öyleyse tacı suya batırıp ne kadar su taşırdığına bakarak hacmini hesaplayabileceğini fark etmiş. Bu duru- ma o kadar sevinmiş ki "*Eureka!*" (Yunancada 'Buldum!' anlamında) diye bağırarak sokağa fırlamış. Yalnız heyecan- dan kıyafetlerini giymeyi unutmuş.

Deneyi ertesi gün gerçekleştirmiş ve kuyumcu suçlu çıkmış.

5

# İSTATİSTİK

# ORTALAMALAR

İstatistikçiler aslında veriler toplayıp analiz eden ve bunları özetleyen istatistikler çıkaran ve sonra da istatistiklerin kendilerine ifade ettikleri hakkında sonuçlar çıkaran matematikçilerdir. Hayatlarımızın her yanı istatistiğe bağlıdır; kıyafetlerimizin beden ölçüsünden arabamızın kasko bedeline ya da hastalandığımızda aldığımız ilaçlara kadar.

İstatistikleri hesaplarken ya da analiz ederken verilerin bir *ana kitle*den mi yoksa bir *örnek*ten mi geldiğini bilmek gerekir.

Ana kitle, belirli bir grubun tüm üyeleridir. Örneğin, eğer yetişkin Arktik deniz kırlangıçlarının kanat açıklıklarıyla ilgileniyor olsaydım ana kitle tüm Arktik deniz kırlangıçları olurdu. Şayet tüm Arktik deniz kırlangıçlarının kanat açıklıklarını hesaplasaydım ana kitlenin doğru istatistiğini hesaplayabilirdim.

Gerçek hayatta her bir yetişkin Arktik deniz kırlangıcını ölçmem mümkün olamazdı. Bu yüzden bunun yerine bir örnek alır ve örnek istatistiğinin ana kitle istatistiğine benzer olmasını umut ederdim. Asıl önemli olan nasıl örnek aldığım, çünkü önyargılardan kaçınmak istiyorum. Mesela, örneğimi belirli bir adada yakalayabildiğim tüm deniz kırlangıçlarından alırsam örneğimdeki tüm deniz kırlangıçlarının birbirleriyle bir şekilde akraba olmaları mümkün. Bu da kanat açıklıklarını etkileyebilir. Diğer adalarda daha uzun ya da daha kısa kanatlı diğer gruplar da olabilir.

Ne kadar zaman, çaba ve para harcamaya hazırlıklı olduğunuzu yansıtan çeşitli örnekleme yöntemleri bulun-

maktadır. Örnekleme yöntemleri elimize günlük ulaşan istatistiklerle birlikte nadiren sunulur. Şişirme örnekleme yöntemleri kasıtlı olarak taraflı istatistikler vermesi için kullanılabilir. Bunu özetleyen meşhur alıntı İngiliz Başbakanı Benjamin Disraeli'ye (1804-81) atfedilmiştir: “Üç çeşit yalan vardır: yalanlar, iğrenç yalanlar ve istatistikler.”

En yaygın kullanılan istatistiklerin bir kısmı *aritmetik ortalama*dır. Ortalamalar genellikle sayısal verinin istatistikçilerin *merkezi eğilim* olarak adlandırdıkları merkezi bir alanda yığılması varsayımı üzerine çalışır. Örneğin İngiliz kız arkadaşlarınızın çoğunun boyu, aşağı yukarı 164 cm, yani genel aritmetik *ortalama* kadar olacaktır.

Ortalama, bütün verileri toplayıp veri sayısına böldüğümüzde elde ettiğimiz aritmetik ortalama değildir; Ortaya çıkan ortalama veri, örnek veriye ait her bir üye arasında eşit olarak paylaşılır. Örneğin bir futbol takımımın ortalama boyunu öğrenmek istiyorum. Önce boylarını santimetre olarak ölçüyorum:

167, 168, 175, 184, 191

Bunları toplayacak olursak  $167 + 168 + 175 + 184 + 191 = 885$  elde ederiz. Bunu da veri sayısına (5) böleriz:  $885 \div 5 = 177$  cm. Takımdaki hiç kimsenin boyunun bu uzunlukta olmadığına dikkat ediniz. İşte bu yüzden ortalama değer, kullanılabilecek uygun bir değer olmayabilir. Bir keresinde Birleşik Krallık'ta hane başına düşen ortalama çocuk sayısının 2,4 olduğu bildirildi ve tam sayıdan farklı bir çocuk sayısına sahip olmanın imkânsızlığından dolayı bu konuyla epey dalga geçildi. Sayısal veriler iki türe bölünebilir: belirli bir dağılımda herhangi bir değeri alabilen *sürekli* veri (boy ve ağırlık gibi) ve dağılım içinde sadece belirli değerleri alabilen (örneğin çocuk sayısı ya da ayakkabı numarası gibi) *kesikli* veri.

*Ortanca* (medyan) ise sayısal bir sıraya dizildiğinde orta veri olur, tıpkı örneğinizi boy ya da kilo (ya da her ne ise) sırasına sokup ortadakini seçmeniz gibi. Futbol takımım için ise ortanca değer 175 cm'dir. Şayet yedek oyuncumuzu örneğimize dahil etseydik, o zaman veri sayısı altıya çıkacaktı, ortanca olarak üçüncü ve dördüncü verinin ortalamasını alacaktık.

Eğer veriniz sayısal değilse, o zaman da tepe değeri kullanabilirsiniz. Bu da merkezi eğilimin ölçülmesi olmayıp basitçe en yaygın ya da popüler veriyi gösterir.

Aslında ortalamalar başlı başına çok açıklayıcı olabilir ancak çoğu zaman verilerin nasıl dağıldığı hakkında da fikir sahibi olmak isteriz. Acaba verilerin hepsi ortalama civarında mı yoksa ortalama en uzak uçlarda bulunan iki verinin ortasında mı? Bir sonraki bölümde bunu analiz etmenin yollarını inceleyeceğiz.

### **Yanlış Anlaşılmalar: Ortalamanın Altında**

2012 yılında, Birleşik Krallık'ta okullardan sorumlu başmüfettiş beş ilkokul çocuğundan birinin İngilizcede ulusal standarda ulaşmadığını ve bu yüzden standartların yükseltilmesi gerektiğini bildirdi.

Birleşik Devletler vatandaşlarının yarısının ortalama IQ'nun altında olduğuna şaşırdığını bildiren Dwight Eisenhower (1890-1969) hakkında da benzer bir hikâye anlatılmaktadır.

Ortalamalar konusunu daha iyi anlamak, bu iki beyefendinin standartlarını yükseltmelerine yararlı olurdu.

# DAĞILIM ÖLÇÜTLERİ

Bir dizi matematik sınav kâğıdına not verdiğimde genellikle ortalama notu da hesaplarım. Bu bana sınıfın ortalama olarak ne kadar başarılı olduğunu söyler ve öğrenciler de çoğu kez bu ortalamaya kıyasla nasıl bir performans sergilediklerini öğrenmek isterler. Şayet ortalama not 100 üzerinden 75 ise, bu durum çoğu öğrencinin ya 75'in biraz altında, ya tam bu değerde veya da bunun biraz üstünde not aldığı anlamına gelebilir; yani öğrencilerin notları 75 civarında kümelenmiştir. Bu da öğrencilerimin benzer becerilere sahip oldukları ve öğrettiklerime benzer tepkiler vermiş olduklarını ifade etmektedir. Buna karşılık, sınav notları bundan daha çok dağılmış olabilir. Yani çok daha düşük not almış öğrencilerim çok yüksek not almış öğrencilerimle dengelenmiş olabilir. Okul müdürünün bütün sınav notlarını didiklemeden bunu öğrenmesini nasıl sağlayabilirim?

Bunun yanıtı bir dağılım ölçütü göstermektir. Zorluk dereceleri giderek artan birkaç dağılım ölçütü mevcuttur.

## Dağılım Aralığı

En basiti verilerin dağılım aralığını hesaplamaktır; yani en yüksek skor eksi en düşük skor. Eğer öğrencilerin sınav notlarının dağılım aralığı 20 olsaydı, sınav notlarının yaklaşık olarak 65'ten başlayıp 85'e kadar çıktığı anlaşıldı. Aralık ne kadar yüksek çıkarsa veriler o kadar çok dağılmış demektir.

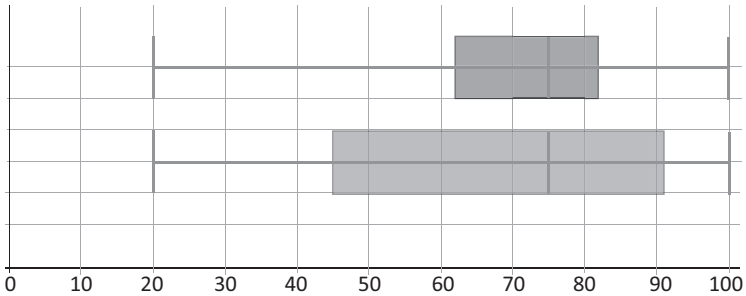


Dağılım aralığı sadece en yüksek ve en düşük veriyi kullandığı için gerçekte ne olup bittiğinde dair yanlış bir fikir verebilir. Eğer tek bir öğrenci 20 puan almış ve geri kalan ortalamanın %10'u dahilinde kümelenmişse, bu durum, verileri düzgün bir şekilde temsil etmektedir. Yüz üzerinden alınan 20 puan bir *uç değer* olacaktır (aşağıda daha detaylı olarak açıklanacaktır).

### Çeyrekler Aralığı

Bu sorunu aşmak için verilerin %50'sinin orta dağılımını veren *çeyrekler aralığını* kullanabiliriz. Bunu yapmak içinse “dörtte birlikleri” hesaplamam gerekir. Orta değer sınavdaki orta not olan verilerin çeyrekleri yüz üzerinden %50 değeri yani ortasındaki veridir. Eğer verilerin bunun altındaki kısmına bakıp onun orta değerini hesaplırsam toplam veriler için %25'e karşılık gelen veriye ulaşırım. Buna *alt çeyrek* denir. Verilerin üstteki yarısı için benzer işlemi gerçekleştirirsem üst çeyreğe ulaşırım. O da bütün veriler için %75'e karşılık gelecektir. Buna bağlı olarak çeyrekler aralığı ise üst çeyrek eksi alt çeyrek olacaktır.

Aşağıdaki kutu-bıyık grafikleri ortaokul düzeyinde bir matematik sınavına giren iki grup için hazırlanmıştır:



Her bir kutu-bıyık grafiği altı dikey çizgi içermektedir. Her iki uçtaki çizgiler maksimum ve minimum veriler olup grafiğin bıyık kısmını oluşturmaktadır. Ortadaki üç çizgi ise alt çeyrek, medyan (ortanca değer) ve üst çeyreklerdir. Bunlar da kutuyu oluştururlar.

Kutu bize alınan notların %50 orta değeri hakkında bilgi verirken bıyıklar ise geri kalanların dağılımını göstermektedir. Bu grafiklerden her iki grup için dağılım aralığının  $100 - 20 = 80$  olduğunu görebiliyorum. Üstteki grafiğin  $82 - 62 = 20$ 'lik bir ara çeyrek dağılımı vardır. Yani öğrencilerin yarısı birbirlerine göre %20 civarında puanlar almıştır.

Altındaki gruptaki öğrencilerse (bıyıktan da anlaşılacağı üzere) benzer dağılım aralığına ve medyana sahiptir ancak kutudan orta çeyreklerinin çok daha geniş olduğunu ( $91 - 45 = 46$ ) görebiliyoruz. Buradan hareketle ikinci gruptaki öğrencilerin performansının ortalama olarak aynı başarıyı göstermelerine karşın ilk gruba oranla daha çok çeşitlilik gösterdiği sonucuna varabiliriz.

## Standart Sapma

Standart sapma, verilerin ortalamadan ne kadar uzakta olduklarının ölçütüdür. Ortalama değerden aritmetik ortalama uzaklığı anlamına gelmez ancak birazdan değineceğimiz birtakım çok yararlı özellikleri vardır.

Standart sapmayı hesaplamak için her veriden ortalamayı çıkarırız. Bu durum verilerin ortalamadan daha düşük olduğu durumlarda bize negatif değerler verecektir. Ancak burada negatif ya da pozitif olmasıyla değil sadece ortalama olan mesafeye ilgileniyoruz. Bunu halletmek için de bütün verilerin karesini alıyoruz çünkü negatif değerlerin karesi alındığında sonuç pozitif olacaktır (bkz. sayfa 63).

Karesi alınan tüm değerleri toplayıp veri sayısına bölüyoruz ve sonra da daha önce gerçekleştirdiğimiz karesini alma işlemini telafi etmek üzere sonucun karekökünü alıyoruz. Bu da bize standart sapmayı verir. Örnek verecek olursak:

Cebir sınavı notları

Ortalama not = 57,45

Öğrenci sayısı = 11

| Not     | Not - Ortalama | (Not - Ortalama) <sup>2</sup> |
|---------|----------------|-------------------------------|
| 74      | 16.55          | 273.9025                      |
| 44      | -13.45         | 180.9025                      |
| 45      | -12.45         | 155.0025                      |
| 42      | -15.45         | 238.7025                      |
| 45      | -12.45         | 155.0025                      |
| 76      | 18.55          | 344.1025                      |
| 79      | 21.55          | 464.4025                      |
| 40      | -17.45         | 304.5025                      |
| 38      | -19.45         | 378.3025                      |
| 83      | 25.55          | 652.8025                      |
| 66      | 8.55           | 73.1025                       |
| Toplam: |                | 3220,7275                     |

Standart sapma =

$$\sqrt{\frac{3220,7275}{11}}$$

= 17,11 (2 ondalık basamağa kadar)

Bu durum öğrencilerimin notlarının oldukça dağılmış ve çok tutarlı olmadığını göstermektedir. Farklı bir grup, daha düşük bir standart sapmayla aynı ortalamaya ve dağılım aralığına sahip olabilir. Bu durum da sınav notlarının aritmetik ortalama üzerinden ortalama değere daha yakın olduğu anlamına gelecektir.

## Uç Değerler

Bir uç değer çok yüksek ya da çok düşük olmasından dolayı verilerin geri kalanına uymayan veridir. Uç değerler için birkaç varsayımsal kistas bulunmaktadır. Bir değer için uç değeri olabilmesi için:

Ortalamadan standart sapmanın iki katı kadar daha büyük olması

Ortalamadan standart sapmanın iki katı kadar daha düşük olması

Üst çeyreğin 1,5 ara çeyrek kadar mesafeden daha yüksek olması

Alt çeyreğin 1,5 ara çeyrek kadar mesafeden daha düşük olması beklenir.

Örneğin, 2001 yılında Avusturyalı bir kadının ortalama boyu 5,6 santimlik bir standart sapma ile 167,6 cm olarak belirlenmiştir. Buna göre üst uç değeri  $167,6 + (2 \times 5,6) = 178,8$  cm olur. Yani boyu bu değerin üstünde olan herhangi bir Avusturyalı kadın aşırı derecede uzun boylu olacaktır. Alt limit ise  $167,6 - (2 \times 5,6) = 156,4$  cm'dir. O halde boyu bu değerin altında olan herhangi bir Avusturyalı kadın da aşırı derecede kısa olarak kabul edilir.

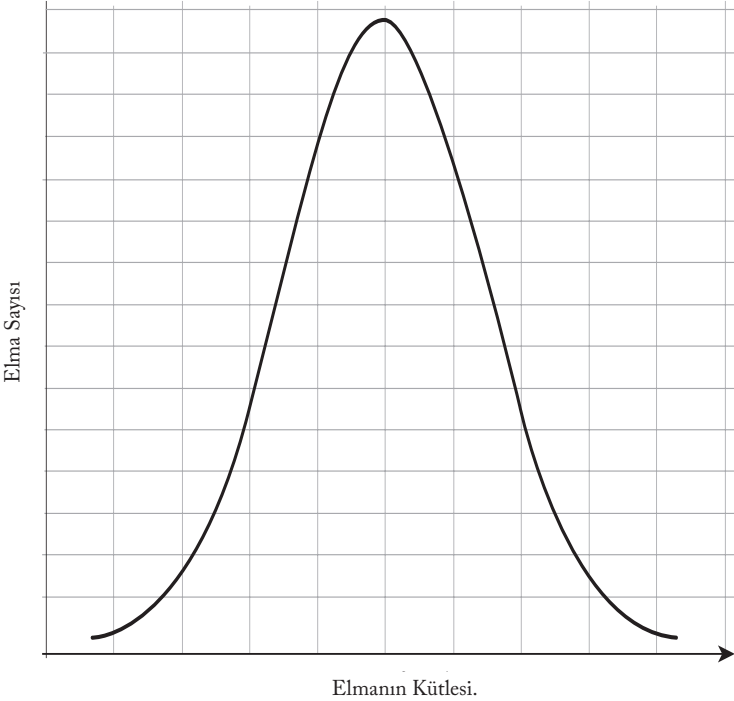
Bilim insanlarının gözlem ve kümesinde tutulması gereken gerçek bir değer midir yoksa silinmesi gereken bir hata mı? Bilim insanları ürettikleri istatistikler üzerinde herhangi bir uç değerin etkisini düşürmek adına çoğu kez deneyleri tekrar ederler.

1970'lerde NASA'ya bağlı uçaklar üst atmosferdeki ozon miktarını düzenli olarak ölçmekteydi. Antarktika üzerindeki uçuşlar çoğunlukla analiz yazılımlarının uç değeri olarak belirlendiği çok düşük değerler elde ediyordu. On yıl geçmeden Antarktika'da çalışan bilim insanları ozon tabakasındaki deliği keşfettiler. Ozon tabakası güneş tarafından salınan zararlı ultraviyole radyasyonun büyük bir kısmının dünya yüzeyine ulaşmasını engeller ve bu yüzden de yeryüzü için çok önemlidir. Neyse ki, ozon tabakasına zararlı CFC (kloroflorokarbon) gazlarının yasaklanması sayesinde ozon tabakasının durumu iyileşmekte. Ancak yine de deliğin tamamen kapatılması için yıllar geçmesi gerekiyor.

Bir uç değeri gerçek ya da bir hata olabilir. Her iki durumda da çok dikkatlice incelenmesi gerekiyor.

# NORMAL DAĞILIM

Veri toplarken çoğunlukla sonuçların bir tertip içinde derlenmesiyle çan eğrisi elde edersiniz. Örneğin elma ağacındaki elmaların kütlelerini ölçerseniz aşağıdaki gibi bir şey elde edebilirsiniz:



Bu durum aslında gerçekleşmesini beklediğimiz gibidir; elmaların çoğu merkezi bir değere (ortalama) yakındır ve ortalamadan uzaklaştıkça elma sayısının düştüğünü gözlemliyoruz.

Bu eğri o kadar sıkça görülür ki, *normal dağılım* olarak adlandırılmasının giderek bundan kaynaklandığı düşünülmektedir. Oysa adlandırmanın gerçek nedeni, istatistikçilerin verileri hakkında istatistikleri hesaplamak üzere “ortalama değeri sıfır ve standart sapması bir” anlamına gelen normalleştirilmiş bir versiyonu kullanmalarıdır. Bu da daha sonra bir ana kitlenin hangi yüzdesinin belirli miktardan büyük olduğunu hesaplamak için kullanılabilir. Standart sapmanın bu denli yaygın bir dağılım ölçütü olmasının nedeni de budur.

Normal dağılımda verilerin %68’i ortalamanın bir standart sapma, %95’i iki ve %99,7’si ise üç standart sapma dahilindedir. Büyük Hadron Çarpıştırıcısı’nda<sup>9</sup> görevli bilim insanları 2013 yılında Higgs bozonunu<sup>10</sup> keşfettiklerini ilan ettiklerinde “beş sigma”dan bahsediyorlardı. Sigma, standart sapmayı temsil etmek üzere kullanılan Yunanca harftir. Beş sigma, verilerinin başka herhangi yeni parçacık karışmadan tesadüfi olarak gerçekleşme şansının ortalamadan beş standart sapma uzaklıkta olduğu anlamına geliyordu. Bu da yaklaşık 0,0000003’lük bir olasılık demekti.

Normal dağılımın hemen her türlü biçimde bize yararı vardır. Antropometri insan vücudunu ölçme bilimidir ve kıyafet, mobilya ve teknolojiye tutun da tren, uçak ve binarlara kadar her şeyi üreten tasarımcılar, ürünlerinin hangi büyüklükte olması gerektiğine karar vermek üzere bu veriyi kullanırlar. İnsanların bu ölçüleri normal olarak dağılım gösterdiğinden ana kitlenin yüzde kaçının M beden bir tişörtte sığacağını ya da giriş kapısından girebileceğini hesaplayabilirler.

---

9 LHC (Large Hadron Collider) İsviçre’nin Cern kentinde yer altında bulunan dünyanın en büyük parçacık çarpıştırıcısıdır. (ç.n.)

10 Boson (İng.) - Bozon (Tr.): Bose-Einstein istatistik kurallarına uygun temel parçacıklara verilen isim. (ç.n.)

## IQ – Matematikçilerin Düzeyi Nasıl Belirlenir?

IQ (*intelligence quotient*) ya da zekâ katsayısı nedense tartışmalı bir zekâ ölçütüdür. IQ'nun internetten yapılabilen on dakikalık bir testle doğru ve kesin bir biçimde ölçülmesi çok zordur. Belirli bir ana kitle için IQ, ortalaması 100 ("ortalama zekâ") ve 15'lik bir standart sapma ile normal biçimde dağılmıştır. Yüksek IQ'lu kişilerden oluşan Mensa topluluğuyasa kurumun, aşağı yukarı 135'e karşılık gelen yüzde ikilik en üst zekâlı insanlardan oluştuğunu ilan etmektedir.

1926 yılında Amerikalı psikolog Catharine Morris Cox (1890-1984) çok ilginç bir çalışma yayımladı. Çalışmasının bir kısmı, çeşitli önemli tarihsel dehaların IQ'sunun ölçülmesine ayrılmıştı.

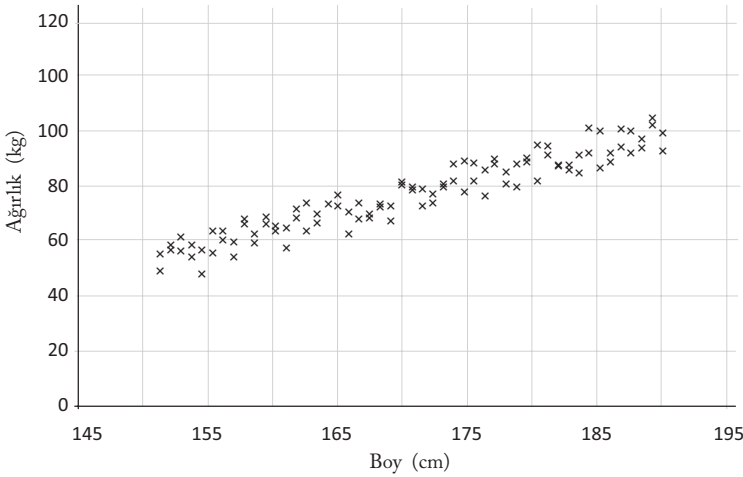
Listesinin başında tahminen 188 IQ derecesi ile felsefe, siyaset, bilim ve edebiyat alanlarına müthiş katkılarda bulunmuş çok yönlü düşünür Johann von Goethe (1749-1832) bulunuyordu. 183 skoru ile Leibniz (bkz. sayfa 114) gümüş madalyanın sahibiydi ve Fransız Pierre-Simon Laplace (1749-1827) ile Newton (bkz. sayfa 78) ise 168'lik skorlarıyla bronz madalyayı paylaşıyorlardı.

Günümüzdeyse Fields madalyası sahibi Avustralyalı matematikçi Terence Tao'nun (d. 1975) 200'ün üzerinde bir IQ'ya sahip olduğu söyleniyor.

Şayet bir şekilde kendinizi sıradan hissediyorsanız görünüşe göre IQ'nun zaman geçtikçe yukarı doğru çıktığını bilmek biraz rahatlatıcı olabilir.

# KORELASYON

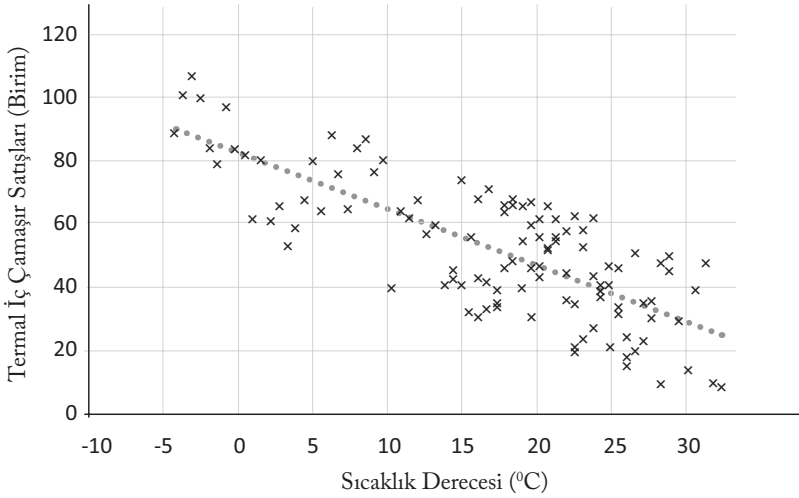
İstatistiği verileri özetlemeye çalışmanın yanı sıra ayrıca veriler arasındaki bağıntıları aramak için de kullanabiliriz. Şayet bir örneğin ya da ana kitlenin her bir üyesinden iki tip veri toplarsam, bunları bir dağılım grafiği üzerinde birbirleriyle karşılaştırarak çizebilirim. Aşağıda bir spor salonundaki insanların boy ve ağırlık için hazırlanmış dağılım grafiği bulunmaktadır:



Grafikte kişinin boyu arttıkça ağırlığının da arttığına dair genel bir eğilimin olduğunu görebilirsiniz. Bu beklediğimiz türden bir şeydir. Çünkü kısa boylu insanlardan çok, uzun boylu insan bulunmaktadır. Gerçi insanların farklı yapıları ve vücut biçimleri olmasıyla bu durum telafi edilmektedir. İstatistikçiler bunu güçlü pozitif korelasyon olarak adlandırırlar. Güçlüdür çünkü grafikteki noktalar düz bir doğruya yakındır ve pozitifdir çünkü iki değişken de birbiriyle birlikte artmaktadır.



Aşağıdaki grafikse negatif korelasyona bir örnektir:

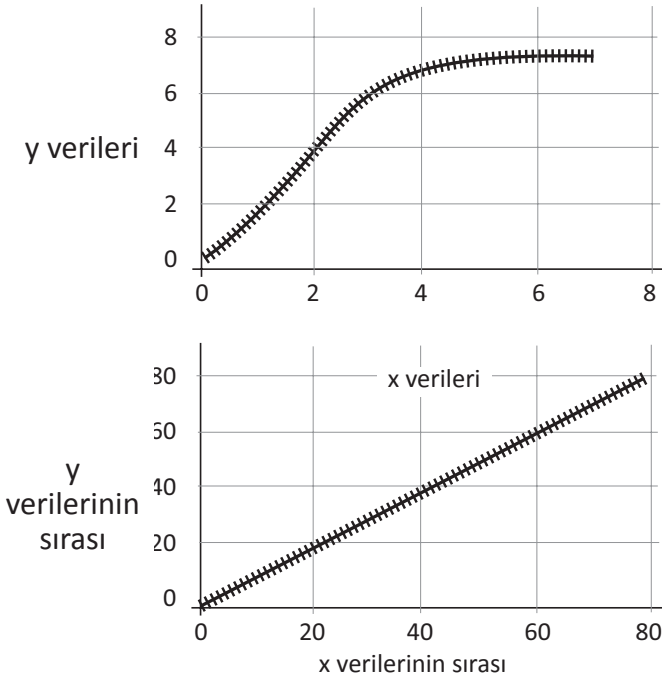


Bu korelasyon negatiftir çünkü grafiğin gösterdiğine göre termal iç çamaşırların satışı sıcaklık yükseldikçe düşmektedir. Negatiftir çünkü her ne kadar bir eğilim gösterse de noktalar grafikteki görünen doğruya yakın durmamaktadır. Bu doğruya en iyi uyum doğrusu ismi verilir ve mümkün olabildiğince çok sayıda noktaya olabildiğince yakından geçen doğrudur.

İngiliz Francis Galton (1822-1911) standart sapmayı bulmakla kalmadı ayrıca korelasyon üzerinde ilk kez düşünüp ölçme girişiminde bulunanlardan biri oldu. Nesneleri ölçme ve veri toplama takıntısı vardı ve özellikle de insan ırkını geliştirmeye hevesli biri olduğu için de antropometriyle ilgileniyordu. İnsanların; sağlık ve zekâlarını geliştirecek, ayrıca sakatlıklar ve diğer “istenmeyen” özelliklerin kökünü kurutacak şekilde büyük bir dikkatle çoğaltılması gerektiğine inanıyordu. Çalışması korelasyonun ölçülmesi (PMCC - Pearson çarpım momenti korelasyon katsayısı olarak bilinir) ile en

iyi uyum doğrusunu çizmenin matematiksel bir yöntemini bulan vatandaşı Karl Pearson (1857-1936) tarafından şans eseri bulundu. PMCC, mükemmel bir negatif korelasyon olan  $-1$ 'den başlayıp  $0$ 'dan geçerek (hiçbir korelasyonun bulunmaması anlamına gelir) mükemmel bir pozitif korelasyon olan  $1$ 'e kadar değişiklik göstermektedir.

Pearson katsayısı sadece doğrusal, düz bir doğru ilişkisi üreten dağılım grafiklerinde işe yarar. Charles Spearman (1863-1945) bu sorunun üstesinden korelasyonu araştırmak için verileri sıraya koyup gerçek sayının kendisi yerine verinin sırasını kullanarak gelmiştir. Dolayısıyla da *Spearman sıra korelasyon katsayısı* da doğmuş oldu ve o zamandan beri hiçbir ortaokul coğrafya ödevi de artık aynı değildir. Aşağıdaki diyagramlarda açıkça bir ilişkisi olan ancak doğrusal olmayan bazı veriler için bir dağılım grafiği görülmektedir.

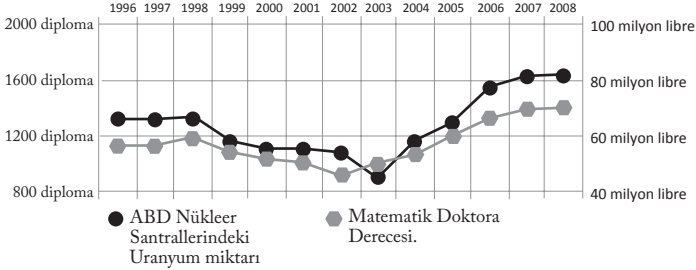


## Korelasyon, Nedensellik Değildir

İki ayrı şeyin birbiriyle korelasyon içinde (bağlantılı) olması birbirleri arasında nedensellik olmasını gerektirmez. Boyu uzun insanların daha kilolu olması kilo alınca boyunuzun uzayacağı anlamına gelmez. Dondurma satışları ile suda boğulma vakaları arasında bir korelasyon vardır ancak dondurma insanların boğulmasına neden olmaz; havanın ısınması daha fazla insanın dondurma yemek istemesine ve ayrıca yüzmeye gitmesine neden olur ve bu da ne yazık ki boğulma vakalarının sayısını artırır.

Amerikalı Tyler Vigen tarafından kurulmuş, kendi tabiriyle, her türden yapay korelasyonun karşılaştırıldığı mükemmel bir internet sitesi var. Favorilerim arasında şu korelasyon bulunuyor:

Matematik alanındaki verilen doktora unvanı sayısı ile Birleşik Devletler'deki nükleer santrallerde bulunan Uranyum miktarı arasında bir korelasyon bulunmaktadır.



Bu grafik, korelasyonu göstermek için çok harika bir örnek gibi görünmektedir ancak açıkçası ABD nükleer santralleri ne daha fazla uranyum stoklamak matematik alanında PhD derecelerinin ortaya çıkıvermesine neden olmaz.

6

# OLASILIK

# ŞANS

İster bilerek isterse de bilmeden daima şansımız olup olmadığını ölçüp biçeriz. Hemen her türden faaliyet belirli bir dereceye kadar riske yol açar ve risk de şans demenin birazcık daha tekinsiz bir yoludur. Şans oyunları hayret verici derecede popülerdir. Gerek müşterek bahis bayisi olsun gerekse loto oynamak olsun ya da internette poker oynamak veyahut da kumar makinesine para atmak olsun İngiliz halkının yüzde ellisi kumar oynamaktadır.

## Olasılık

Matematikçiler *gerçekleşmekte olan bir şeylerin neticesi olan sonuçlardan* bahsederler. Örneğin normal bir zarı atarsam gelebilecek altı sonuç vardır. Şayet iki zarı atıp sayılarını toplarsam o zaman on bir olası sonuç çıkar (iki ile on iki arası).

Her bir sonucun kesin bir olasılığı vardır. Olasılığı sıfır (olanaksız) ile bir (kesin) arasında bir miktar olarak ölçeriz. Bu durum olasılıkların bayağı kesirler, ondalık sayılar ya da yüzdelikler (bkz. sayfa 69) olarak gösterilebileceği anlamına gelir. Yarım değer üzerinde olasılığı olan her şeyi muhtemel ya da olası olarak niteleyebiliriz. Yarımın altında ise muhtemel olmayan ya da olasılıksız olarak nitelendiririz. Tam yarım değerde ise yarı yarıya ya da eşit şanstır.

Sonuç (ya da sonuçlar kümesi) için hesaplamak istediğiniz olasılığa olay denir. Örneğin aynı zarı atarsam, altı çıkması bir olay olarak adlandırılır. Bazı olaylar *birbiriyle ayrıktır* yani aynı zamanda asla gerçekleşemezler. Örneğin bir deste iskambil kâğıdı arasından bir kart seçersem aynı

anda bir karo ve kupa seçemem. Bunlara birbiriyle ayrıık olaylar denir. Bununla birlikte hem bir karo hem de bir papaz seçebilirim. Bunlar birbiriyle ayrıık değildir çünkü deste içerisinde bir karo papazı bulunmaktadır.

Olasılık hesaplarırken çoğunlukla varsayımda bulunuruz. Örneğin attığımız zarın genellikle *adil* ya da *tarafsız* olduğunu varsayalım. Bu da her bir sonucun gerçekleşme şansının eşit olduğu anlamına gelir. Ayrıca bir olaylar dizisinin *bağımsız* olduğu varsayımında da bulunuruz. Bir zarı attığımızda altı gelmesi bir sonraki zar atışında herhangi bir sonucun gelme olasılığını değiştirmez.

Olasılık için sihirli formül şöyledir:

$$P(\text{olayın gerçekleşmesi}) = \frac{\text{başarılı sonuçların sayısı}}{\text{toplam sonuç sayısı}}$$

$P()$ , İngilizce “*probability of*” (Türkçe “*olasılığı*” anlamında) ifadesinin kısaltmasıdır. Normal bir zarı salladığınızda tam kare sayı gelme olasılığını bulmak istediğinizde, altı olası sonucun (1, 2, 3, 4, 5, 6) içinde iki tam kare sayının (1 ve 4) yani başarılı iki sonucun olduğunu anlayabilirsiniz. Bunu şu şekilde yazabilirim:

$$P(\text{tam kare sayı atma olasılığı}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Bayağı kesri işlemin sonunda en basit haline sadeleştirdim. Artık tam kare sayı gelme olasılığını bildiğim için iki olasılığın toplamının bir etmesi gerektiği gerçeğini kullanarak bir tam kare sayı gelmeme olasılığını hesaplayabilirim.

$$\begin{aligned} P(\text{tam kare sayı gelmeme olasılığı}) &= 1 - P(\text{tam kare sayı gelme olasılığı}) \\ &= 1 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

1650’li yıllarda, iki matematikçi Pierre de Fermat (bkz. sayfa 150) ile Blaise Pascal (bkz. sayfa 79) şansı matematisel bir bakış açısıyla incelemeye başladılar. Fermat’a profesyonel bir kumarbaz aşağıdakilerden hangisinin kazanma şansının daha yüksek olduğunu sormuş:

Tek zarın dört kez atılmasında en az bir kez altı-altı gelmesi

Çift zarın yirmi dört kez atılmasında en az bir kez altı-altı gelmesi

İçgüdüsel olarak ilk bahse göre çok daha fazla kez zar atıldığı için ikinci alternatifi en olası olduğu düşünülebilir. Sırayla bu iki bahsin her birine bir göz atalım.

### **Tek zarın dört kez atılmasında en az bir kez altı gelmesi**

Bir olayı tekrarladığımda her bir olayın olası sonuçlarının sayısı, tekrar sayısı kadar kendisiyle çarpılarak (kuvveti olarak) çoğalır. Yazı tura atmamın iki sonucu vardır ancak bunu iki kez gerçekleştirirsem dört sonuç ortaya çıkar: yazı-yazı, yazı-tura, tura-yazı, tura-tura. Şayet üç kez yazı tura atarsam o halde  $2 \times 2 \times 2 = 8$  olası sonuç olacaktır. Bu durumda bir zarı dört kez atmamın  $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$  olası sonucu olacaktır. Ancak bunların kaç tanesi başarılı sayılır? Bir, iki, üç ya da dört tane altı ile başarılı olabilirim ancak hesaplanacak çok fazla sayıda farklı kombinasyon bulunmaktadır.

Bunu belirlemek için gerçekten işe yarayacak olan şeyse “en az bir kez” yani bu bağlamda “sıfır olmayan” ile aynı anlama gelen ifadedir. Yukarıda bir şeyin gerçekleşmeme olasılığının bir eksi gerçekleşme olasılığı olduğunu görmüştük. Yani:

$$\begin{aligned} P(\text{dört atışta en az bir kez} &= P(\text{dört atışta sıfır kez altı gelmeme olasılığı}) \\ \text{altı gelme olasılığı}) &= 1 - P(\text{dört atışta sıfır kez altı gelme olasılığı}) \end{aligned}$$

Bir zarı atıp altı elde etmemenin beş yolu vardır bu yüz-

den zarı dört kez attığımda altı gelmemesi için  $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$  başarılı sonuç olmalıdır.

$$1 - P(\text{dört atışta sıfır kez altı gelme olasılığı}) = 1 - \frac{625}{1296} \\ = \frac{671}{1296}$$

Bu da dört kez zar atıldığında en az bir kez altı gelme olasılığının %51,8 olduğunu gösterir.

### Çift zarın yirmi dört kez atılmasında en az bir kez altı-altı gelmesi

İki zarın atılması ve skorlarının toplanması çoğu kumar oyunun başlıca dayanağıdır. Belirli bir toplam elde edecek şekilde zarın atılması olasılığının ne olduğu hemen anlaşılır bir şey değildir. Bu yüzden elde edilecek bütün toplam sonuçların bir tablosunu çıkarmak yararlı olacaktır:

| + | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Bu tablo *olasılık uzay diyagramı* olarak bilinir. Görebildiğimiz kadarıyla toplamda 36 eşit derecede olası sonuç bulunmaktadır. Yedi toplamı en çok kendisine ulaştıran kombinasyona sahip olduğu için en olası sonuçtur. Altı-altı ya da on iki toplamı ise sadece bir olasılığa sahiptir ve bu yüzden de gerçekleşmesi olasılığı 36' da birdir.

Tıpkı bir önceki örnekte olduğu gibi “en az bir kez” ifadesi “sıfır değil” anlamına gelir. Bu yüzden 24 zar atışında hiç altı-altı gelmeme olasılığına bakabilirim. Şayet bir kez altı-altı gelmesi olasılığı  $\frac{1}{36}$  ise o halde hiç altı-altı gelmeme olasılığının  $\frac{35}{36}$  olması gerekir çünkü  $\frac{1}{36} + \frac{35}{36} = 1$  eder.



$$\begin{aligned}
 P(24 \text{ zar atışında en az bir kez altı-altı gelme olasılığı}) &= 1 - P(24 \text{ zar atışında hiç altı-altı gelmemesi olasılığı}) \\
 &= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \\
 &= 0.491 \text{ (üç ondalık basamağa kadar)}
 \end{aligned}$$

Bu sebeple de 24 zar atışında en az bir kez altı-altı gelmesi olasılığı %49,1 olur. Kumarbaz ilk bahse girerek çok fazla olmasa da daha kazançlı olacaktır. Genel kanının aksine gerçekleşen bu sonuç en azından kumarbazın neden barbut masasında şansının olmadığını anlamasına yardımcı olmuştur.

### Bu Ne Tesadüf!

Doğum günü problemi ilk olarak Ukraynalı mühendis Richard von Mises (1883-1953) tarafından ortaya atılmıştır. Olasılık problemleri çoğu zaman genel kanının aksine sonuçlar doğurur ve bu problemin de pek istisna olduğu söylenemez. Bir kafeye gittiğinizde yılda 365 gün olduğu için içeride yüzlerce kişi olmadığı sürece herhangi iki kişinin aynı doğum gününe sahip olması pek muhtemel görünmemektedir. Ancak çok sayıda farklı olası insan çiftine baktığımız için herhangi ikisinin içeride sadece 23 kişi varken aynı doğum gününü paylaşması olasılığı aslında %50'ye kadar ulaşır. Şayet içeride 70 kişi varsa bu olasılık %99,9'a yükselir.

# KOMBİNASYON VE PERMÜTASYON

Eşit derecede zeki yirmi dört matematik öğrencisinden oluşan bir sınıfım var. Bir matematik yarışması için dört tanesini seçmem gerekiyor ve aralarında seçim yapmak çok zor olduğu için rasgele bir seçim yapmaya karar verdim. Kaç tane olası takım sözkonusu acaba?

Bu durum seçim sırasının önem taşıyıp taşımadığına bağlıdır. Örneğin, ilk kişi kaptan, ikincisi hesap makinesi kullanacak, üçüncü kişi not alacak ve dördüncüsü ise çay yapacaksa sıralama önemlidir.

Eğer isimleri bir şapkadan çekersem, takımın ilk üyesi için 24 olasılık, ikincisi 23 ve diğerleri için de benzer biçimde olasılık olacaktır; böylece toplamda:

$$24 \times 23 \times 22 \times 21 = 255024$$

Yani takımım için 255.024 *permütasyonum* var demektir. Bu durum aslında şununla aynıdır:

$$24 \times 23 \times 22 \times 21 =$$

$$\frac{24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

Neden bu şekilde yazıyoruz? Pekâlâ, eğer faktöriyel formülünü kullanırsam (s. 121) hesap makineme daha kolay bir şekilde girebileceğim bir şeye sadeleştirebilirim:

$$24 \times 23 \times 22 \times 21 = \frac{24!}{20!}$$

Genel kural olarak eğer toplamda  $n$  tane şey içinden  $k$  tane şey seçiyorsanız:

$$\text{permütasyon sayısı} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Böylece dört yerine altı kişilik bir takım seçiyor olsaydım,  $k = 6$  ve  $n = 24$  olurdu:

$$\text{olası takım sayısı} = \frac{24!}{(24-6)!} = \frac{24!}{18!} = 96909120$$

Şapkadan çekeceğim dört kişilik takımların çoğu aynı kişilerden oluşurdu, sadece farklı bir seçim sırasında olacak şekilde. Şayet sıra önemli olmasaydı (bu durum etkin bir şekilde aynı takımı oluştururdu) Amy, Billy, Cara ve Dan'ı bu sırada seçmek Dan, Cara, Billy ve sonra da Amy'yi seçerek oluşturacağım takımla aynı olurdu. Dört kişiyi  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$  kadar farklı biçimde düzenleyebilirim. Böylece olası *kombinasyon* sayısını elde etmek üzere permütasyon sayısını buna bölmem gerekir:

$$\text{kombinasyon sayısı} = \frac{24!}{20!4!} = 10626$$

Yine genel kural olarak şayet  $n$  tane şey içinden sıranın önemli olmadığı bir durumda  $k$  tane şey seçiyorsanız:

$$\text{kombinasyon sayısı} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Eğer sıranın önemli olmadığı altı kişilik bir takım seçiyor olsaydım, o zaman şöyle olurdu:

$$\text{olası takım sayısı} = \frac{24!}{(24-6)!6!} = \frac{24!}{18!6!} = 134596$$

Şayet yukarıda olup biteni dikkatlice izlediyseniz, kombinasyon kilitlerinin yanlış adlandırıldığını fark edeceksiniz. Sıralama önemli olduğu için aslında teknik olarak permütasyon kilitleri biçiminde isimlendirilmesi gerekirdi.

Permütasyonlar ile kombinasyonlar olasılık problemlerini çözmemize yardımcı olurlar. Birleşik Krallık milli piyangosu birden kırk ikiye kadar sayılar içinden altı sayıyı seçmenizi talep ediyor. Büyük ikramiyeyi kazanmak için rasgele çekilen altı sayıyı tutturmanız gerekiyor. Sıralama piyangoda önemli değildir bu yüzden anahtar kombinasyonlardır:

$$\begin{array}{c} \text{Olası altı sayı} \\ \text{kombinasyonun} \\ \text{sayısı} \end{array} = \frac{49!}{(49-6)!6!} = \frac{49!}{43!6!} = 13983816$$

Yani ortada 14 milyonun hemen altında olası kombinasyon bulunmaktadır. Bu da büyük ikramiyeyi kazanma şansınızın 14 milyonda bir olduğu anlamına gelir. Pek o kadar da büyük değil yani!

# NİSPİ FREKANS

Önceki örneklerde olası sonuçların toplam sayısını ve böylece de olasılıklarımızı sadece teori kullanarak hesaplayabiliyorduk. Bununla birlikte birçok koşulda bunu yapmak mümkün değildir. Şayet bana bugün bir fincan kahve içme olasılığımın ne olduğunu sorsaydınız, bunun oldukça yüksek olduğunu söyler hatta size bir rakam bile verebilirdim. Ancak önce biraz veri toplamadan matematiksel olarak bunu hesaplayamazdım.

Haftalık bir kahve günlüğü tutabilir ve bunu da bir olasılık hesaplamak üzere kullanabilirim. Diyelim ki ilk hafta boyunca yedi günün beşinde kahve içtim. O halde bu kanıta dayanarak herhangi bir günde kahve içme olasılığımın  $\frac{5}{7}$  olduğunu söyleyebilirdim. Teorik olarak elde edilmiş bir olasılık olmadığı için matematikçiler buna *nispi frekans* ismini vermektedir. Herhangi bir günde kahve içmemin bağımsız olduğunu, yani eğer bir gün önce kahve içmişsem o gün kahve içmemin neredeyse olası olmadığını varsaymam gerekir.

Ertesi hafta her gün kahve içiyorum. Ve nispi frekansım artık:

$$\text{nispi frekans} = \frac{5 + 7}{7 + 7} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

Daha fazla zaman geçtikçe nispi frekans daha doğru bir şekilde herhangi bir günde kahve içeceğime dair olasılığı temsil etmektedir.

Peki bu ne işe yarayacak? Aslında bahisçiler bahis oranlarını belirleyip bahis oynayanlar da bahislerini oynadıklarında genellikle kararları için yakın geçmişteki performanslarını gözden geçirecektir. Sigorta şirketleri de müşterilerini sigortalama riskini ortaya çıkarıp buna uygun sigorta primlerini belirlemek adına onları sınıflandırmak için benzer bir işlemi kullanırlar. Hasarsızlık indiriminin ardında yatan düşünce ise ne kadar uzun süre tazminat talebinde bulunmazsanız tazminat talebinde bulunmanıza dair nispi frekansın bir o kadar düşmesidir. Böylece sigortacı üzerine daha az risk yüklemiş olursunuz ve size sunacakları prim miktarı da düşer.

### Olasılık Yanılgıları

Şayet yazı tura atmış olsam ve arka arkaya sekiz kez tura gelseydi muhtemelen çoğu kişi evrenin dengesinin bir şekilde bozulmuş olduğunu düşünürdü ve sonuç olarak da tura gelme olasılığının daha yüksek olduğuna inanmaya başladırı. Ancak aslında tura gelme şansı hala %50'dir. Her ne kadar arka arkaya sekiz kez tura gelmesi ihtimal dışı olsa da (yaklaşık olarak %0,4) sekiz kez yazı tura atmanın diğer herhangi bir kombinasyonu ile aynı olasılığa sahiptir.

Bu hata *kumarbaz yanılgısı* olarak bilinir. Monte Carlo kumarhanesinde 1913 yılında çok meşhur bir olay gerçekleşti. Rulet tekerleklerinden biri tamamen şans eseri yirmi üç kez arka arkaya siyah üzerinde durdu. Bu olay gerçekleşirken haber çabucak yayıldı ve insanlar çok büyük meblağlarda parayı bunun gerçekleşme şansının daha yüksek olduğuna inanarak bir sonraki turda kırmızıya yatırdılar.

Bazı insanlar çocuk sahibi olurken aynı hatayı yaparlar; birkaç tane oğulları varsa bu sefer kız olacağını ya da tam tersi düşünerek yeniden çocuk sahibi olurlar.

*Savcı yanılgısı* ise bir davada iddia edilen olayın gerçekleşme olasılığının sanığın uygun görüldüğü şekilde suçlu ya da suçsuz olma olasılığı ile aynı olduğuna dair yanlış inanıştır. Sally Clark (1964-2007), iki çocuğunu öldürmekten dolayı hüküm giymiş bir İngiliz kadındı. Aslında çocukların ikisi de ani bebek ölümü sendromundan (SIDS sendromu) ölmüştü. SIDS ölümlerinin birbirinden bağımsız oldukları farz edilerek bu olayın gerçekleşme ihtimali yanlış bir şekilde 73 milyonda bir olarak hesaplanmıştı. Aslında bu kardeşler için düşünülemezdi çünkü bu durumun altında yatan genetik bir durum da olabilirdi. Beraat edene dek cezasının üç yılını geçirmişti ve benzer birçok dava yeniden gözden geçirildi.

Aslında istatistikleri yanlış hesaplamak çok ciddi sonuçlara neden olabilir.

# SON SÖZ

Şayet buraya kadar bu kitabı okuduysanız altı çeşitten oluşan muazzam bir ziyafet çekmişsiniz demektir. Umarım bu ziyafet matematiğin aslında her seviyeden insanlar için kolaylıkla anlaşılır bir şey olduğunu fark etmenizi sağlamıştır.

Eğer çok istekliyseniz daha ileri düzeyde incelemek için kullanabileceğiniz çok fazla sayıda ders kitabı mevcut. Ayrıca internet birçok harika ücretsiz kaynakla dolu. Eğer matematiğin arka planı hakkında bilgi edinmek adına matematik bilginizi daha fazla zorlamak istemiyorsanız kütüphaneniz, kitapçınız ya da arama motorunuz sizi doğru yola yönlendirecektir.

Bu ufak lokmalar halindeki yemek hoşunuza gittiyse lütfen matematiği düzenli diyetinize ekleyin. Matematik gerçekten dünyanın dönmesini sağlar ve matematik konusunda ne kadar kültürlü olursak dünyamızı da o kadar iyi bir hale getirebiliriz.

Kitabın başlarında matematiksel kaygının bulaşıcı olduğundan bahsetmiştim. Aynı şey matematiksel anlamda güven için de geçerlidir. Eğer bu konuda güveniniz biraz olsun yerine geldiyse, bunu etrafınızdakilerle paylaşın ve matematiği anlama yetilerinin okuyup öğrenmeye vakit ayırdıklarında gelişebileceğini öğrenmelerini sağlayın.

Bu kitapla sınırlı kalmayıp yolculuğunuza devam edin ve orada bir yerde sizi bekleyen leziz matematik tatlısını keşfedin. Hatta bir matematik gurmesi olun. Bir yemeği pişirenlerin becerisini takdir etmek ve tabağınıza konulan şeyin hazzına varmak için tam olarak nasıl pişirildiğini anlamanıza gerek yok.

*Afiyet olsun!*



# Dizin

## A

açılar 138, 139, 141  
alan 10, 56, 67, 78, 81, 87,  
88, 111, 112, 113,  
135, 146, 148, 149,  
150, 157  
Algoritmalar 117  
altın oran 89, 129  
Anahtar Sözcük 108  
aritmetik 13, 27, 46, 50, 51,  
71, 164, 168, 169  
Arşimet 143, 144, 158, 161  
Aryabhata 25, 160  
asal sayılar 44, 48, 49  
aşkın 145

## B

Babbage, Charles 119  
bahisler 95  
basamak 27, 28, 29, 33, 36,  
37, 50, 58, 60, 65  
basamak değeri 28, 33, 58  
bayağı kesirler 43, 46, 93,  
179  
belirleyici olmayan polinom  
zaman 124  
Bernouilli, Jacob 76, 119  
Bernouilli sayıları 119  
bileşik kesir 46  
bilgisayarlar 48, 50  
Bomba 119, 120  
Boolean mantığı 51  
boyutsal analiz 78, 83  
bölme 38, 39, 40, 54, 63, 71,  
93, 100  
bölme işareti 93  
Brahmagupta 25, 106  
büyük 13, 14, 15, 18, 21, 28,  
32, 44, 46, 49, 55, 60,  
61, 62, 63, 67, 74, 76,  
87, 90, 93, 102, 110,  
111, 113, 118, 121,  
131, 133, 135, 138,  
140, 151, 170, 172,  
175, 186, 188

## C

Cantor, George 16, 19,  
20, 21  
cebir 102, 108, 109, 110,  
117, 132  
Cole, Frank Nelson 49

## Ç

çarpanlara ayırma 44, 102,  
107  
çarpma 30, 32, 35, 74, 97,  
101  
çevre uzunluğu 142, 143,  
144, 149  
çeyrekler aralığı 167  
çıkarma 32, 33, 34, 38, 39,  
46, 97, 100  
çokyüzlü 157

## D

dağılım aralığı 166  
dağılım grafiği 174, 176  
Dantzig, George 126  
data 176  
denk kesirler 43  
denklemler 101, 109, 114,  
115, 132  
Descartes, René 98, 106,  
109, 153  
Dijkstra, Edsger 120  
Diophantus 68, 152  
doğal 13, 14, 15, 16, 19,  
20, 44  
doğrusal orantı 86  
dört üçgen yüzü 159

## E

Einstein, Albert 68, 133,  
135, 172  
Enigma cihazı 119, 120  
en yakın olana 56, 58  
Euler sayısı 77  
Evdoksus 140

## F

fay 91  
Fermat, Pierre de 152,  
181  
Fibonacci sayıları 128,  
129, 131  
formül 69, 75, 82, 85,  
106, 107, 108, 113,  
125, 127, 128, 142,  
180  
formüller 127  
Fourier, Joseph 120  
Fourier dönüşüm  
algoritması 120  
fraktallar 148

## G

Galileo paradoksu 19  
Galton, Francis 175  
geometri 109, 135, 137,  
147  
gezgin satıcı problemi  
121  
Goethe, Johann von 173  
gugol 62  
gugolpleks 62

## H

hacim 80  
Hamilton, William Rowan  
121  
hassasiyet 56, 57, 58  
hektar 66, 67, 87  
hesaplama 13, 26, 50, 51,  
58, 119, 120, 121  
hız 53, 67, 81, 82, 84  
Hilbert problemleri 18

## I

I Ching (Değişimler Kitabı)  
51  
Icosian oyunu 121  
ızgara yöntemi 32

## İ

ikili 50, 51, 53, 54, 55, 116,  
131  
ikinci derece 101, 102, 103,  
104, 106, 107, 108,  
112, 113, 115, 130  
ikinci derece denklemler  
115  
ikinci derece formülü 102  
indisler 60, 68  
integral alma 147  
irrasyonel 16, 17, 20, 91,  
131, 145  
istatistik 172  
ivme 80, 82

## K

kalkülüs 113  
Kartezyen koordinatları  
109  
kesikli 164  
kesirli kuvvetler 64, 66  
Kirkman, Thomas 121

korelasyon 174, 175, 176,  
177  
Körfez Savaşı 53  
kuantum bilgisayarları 53  
kumarbaz yanılması 188  
kuvvet 63, 80, 81, 83  
kuvvetler 64, 66, 82, 113,  
132  
kümeler kuramı 19  
kütle 69, 80, 83, 108, 132,  
133

## L

Laplace, Pierre-Simon 173  
Le Corbusier 90  
Leibniz, Gottfried 51, 116,  
173  
Le Verrier, Urbain 133  
Lindemann, Ferdinand  
von 145  
lineer denklemler 101  
Lovelace, Ada 119

## M

merkezi eğilim 164  
Mersenne, Marin 48  
Meryem Mirzakhani 135  
metrik sistem 79  
Mises, Richard von 183  
Moivre, Abraham de 131  
Mondrian, Piet 91  
Moore yasası 53  
Muhammed el Hârizmi 25  
mükemmel kare sayılar 20

## N

Napier'in kemikleri 35  
negatif 14, 15, 20, 23, 24,  
36, 37, 63, 64, 65, 66,  
67, 105, 106, 107,  
113, 131, 168, 175,  
176  
newton 80, 83  
Newton, Isaac 68, 80, 116,  
131, 132, 173  
nispi frekans 187, 188  
Noether, Emmy 135  
normal dağılım 172

## O

olasılık 95, 172, 182, 183,  
184, 186, 187  
olaylar 179, 180  
ondalık sistem 50  
orantı sabiti 86, 88

ortalama 82, 164, 165, 166,  
168, 169, 170, 171,  
172, 173

ortanca 165, 168

## Ö

ödünç alma 37  
Öklid 89, 140, 141

## P

Pascal, Blaise 80, 181  
pay 15, 44  
Pearson, Karl 175, 176  
Pearson çarpım momenti  
korelasyon katsayısı  
175  
pi 78, 79, 143  
Pisagor 140, 147, 150, 151,  
152, 153, 154, 155,  
156  
Pisagor teoremi 150, 151,  
153, 154, 155  
Pisagor üçlülere 152  
Pisa'lı Leonardo 25

## R

Rahn, Johan 93  
rasyonel 16, 17, 20, 65  
reel 17, 107  
Ries, Adam 25

## S

sayı doğrusu 23  
sayılabilir sonsuz 19  
sayılar 13, 14, 15, 16, 17,  
19, 20, 25, 32, 44,  
48, 49, 58, 61, 64,  
113, 127, 128, 132,  
179, 186  
sezgisel algoritmalar 124  
Shannon, George 51  
sıfır 14, 15, 20, 25, 32, 33,  
34, 41, 50, 57, 58,  
63, 77, 86, 105, 106,  
113, 115, 172, 179,  
181, 182  
sıfır kuvveti 63  
sonsuz 13, 14, 15, 16, 18,  
19, 20, 76, 149  
sonuçlar 107, 144, 163,  
179, 183  
Spearman, Charles 176  
Spearman sıra korelasyon  
katsayısı 176  
standart sapma 170, 172,

173

sürekli 20, 76, 77, 79, 117,  
164

## Ş

şans 176, 179, 188  
şifreleme 49

## T

Tao, Terence 173  
Thales 140  
Tombaugh, Clyde 133, 134  
toplama 28, 29, 30, 34, 36,  
38, 88, 175  
Trueb, Peter 56  
Turing, Alan 51, 119

## U

uç değer 167, 170  
uzatılmış biçim 28  
uzay diyagramı 182  
uzun bölme 39, 40

## V

veri 56, 164, 165, 169, 174,  
175, 187

## W

Widmann, Johannes 23  
Wiles, Andrew 152  
Wozniak, Steve 77

## X

x-y koordinatlar sistemi  
153

## Y

yeniden düzenlemek 112  
yığma 38  
yineleme 149  
yinelene 47, 54  
yuvarlama 55, 56, 57, 58, 59  
yuvarlamak 58  
yüzdelikler 71, 179  
yüzdelikleri 71

## Z

zekâ katsayısı 173

**Bırakın bu kitap  
size matematiğin dünyasında  
rehber olsun ve bu büyüleyici alanın  
gizemini çözmenize yardım etsin.**

Chris Waring matematiği herkesin  
erişebileceği, anlayabileceği ve aynı  
zamanda eğlenebileceği bir hale getiriyor.

En önemli konuları, etraflıca düşünülmüş  
problemler ve gerçek hayattan alınan  
örneklerle anlatıyor.

Kitap ayrıca ünlü matematikçilerin kısa  
hayat hikâyelerine de yer veriyor.

ISBN 978-605-7605-16-0



9 786057 605160

www.mayayayinlari.com

/mayakitap  
/mayakitap  
@mayakitap

$$S_1 = \frac{r^2}{2} \left( \frac{\pi \varphi}{180} - \sin \varphi \right) = \frac{1}{2} [lr - a(r-h)]$$