DİJİTAL KÜTÜPHANE KANALI

Keyifli Okumalar Dileriz

Binlerce kategoride milyonlarca PDF e-kitap, ders kitapları, dergiler ve romanlara platformumuz üzerinden ücretsiz ulaşabilirsiniz.

RESMİ WEB SİTEMİZ

https://rantey.org

Yedek ve Duyuru Kanallarımız
Sitemize erişim engeli gelmesi veya adres değişikliği durumunda aşağıdaki kanallardan güncel giriş adresine erişebilirsiniz:

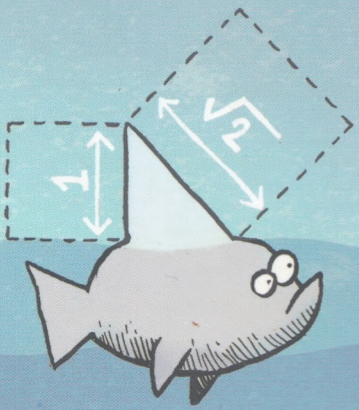
• Telegram: https://t.me/birkitapbir

• WhatsApp Kanalımız : https://whatsapp.com/channel/0029VbDHv8uE50Us4IvMoc0Y

ALEX BELLOS

ALEX SAYILAR DİYARINDA

Matematiğin
Harika Dünyasına
Eğlenceli
Bir Yolculuk



"Kendinizi sayılara kaptıracaksınız."
–Daily Telegraph

PEGASUS

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Alex Bellos bol eğlenceli ve kolay anlaşılır kitabında matematiğin sıradan okuyucular için olmadığı yönündeki hurafeyi çürütüyor. Toplamadan cebire, kümeler kuramından istatistiğe ve logaritmadan mantıksal paradokslara kadar geniş bir alana yayılan konuları ele alarak matematiğin nasıl da yaşantımızdaki her şeyin temelinde yer aldığını açıklıyor.

Alex şaşırtıcı geometri teorileri ve kumarhanede kazanmanın yolları hakkında stratejiler sunuyor. Doğanın matematiksel desenleri ve rastgele olayların olağandışı öngörülebilirliği üzerine ışık tutuyor. Antik Yunanlıların çalışmaları üzerine yoğunlaşıyor, matematik, din ve felsefe arasındaki derin bağlantıları gösteriyor.

Alex antik tarihten bilgisayar çağında ulaşılan son noktaya, ilkokul düzeyinden üniversite seviyesindeki matematiğe kadar geniş bir alanda yolculuk yapıyor. Almanya'da dünyanın en hızlı zihinsel hesaplamasını yapan kişiyle buluşuyor, ABD çöllerinde bir numeroloji uzmanına danışıyor, Japonya'da şaşırtıcı şekilde sayı sayabilen şempanzelerle bir araya geliyor, Hindistan'da saygın bir bilgeden tavsiyeler alıyor. Alex'in "sayılar diyarı"ndaki yazıları benzersiz fakat coşkulu bir tarih kokteyli sunmakta, matematik dünyasının hayal edebileceğinizden çok daha dostça ve renkli olduğunu gözler önüne sermekte...



Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

ALEX SAYILAR DİYARINDA

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Pegasus Yayınları: 564
Popüler Bilim: 3

ALEX SAYILAR DİYARINDA
ALEX BELLOS
Özgün Adı: Alex's Adventures in Numberland

Kitap Editörü: İbrahim Şener
Matematik Editörü: Şenay Parlak
Düzelti: Kemal Küçükgedik
Sayfa Tasarımı: Cansu Gümüş
Kapak Uygulama: Pınar Yıldız
Kapak Baskı: Zirve Ofset
Film-Grafik: Mat Grafik

Baskı-Cilt: Alioğlu Matbaacılık
Orta Mah. Fatin Rüştü Sok. No: 1/3-A
Bayrampaşa/İstanbul
Tel: 0212 612 95 59

1. Baskı: Eylül 2012
ISBN: 978-605-5289-90-4

Tüm hakları saklıdır.
Türkçe Yayın Hakları © PEGASUS YAYINLARI, 2012
Metin © Alex Bellos, 2010
İllüstrasyonlar © Andy Riley, 2010

Yayınevinden yazılı izin alınmaksızın hiçbir yolla çoğaltılamaz.

Yayıncı Sertifika No: 12177
Pegasus Yayıncılık Tic. San. Ltd. Şti
Gümüşsuyu Mah. Osmanlı Sk. Alara Han
No: 27/9 Taksim / İSTANBUL
Tel: 0212 244 23 50 (pbx) Faks: 0212 244 23 46
www.pegasusyayinlari.com / info@pegasusyayinlari.com

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

ALEX BELLOS

ALEX SAYILAR DİYARINDA

İllüstrasyonlar: Andy Riley

İngilizceden Çeviren:
KÖKSAL GÜLERKAYA

PEGASUS YAYINLARI
Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Annem ve babama

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

İçindekiler

Giriş • 11

BÖLÜM SIFIR

Sayılara Giriş • 17

Yazar bu bölümde, en başından beri ortada olmadıkları için sayıların nereden geldiğini bulmaya çalışıyor. Bir dönem ormanda yaşayan bir adamla ve her zaman şehirde yaşamış olan bir maymunla tanışıyor.

BÖLÜM BİR

Karşı Kültür • 51

Yazar bu bölümde çok sık tekrarlanan bir tiranlığı ve onu yıkmaya çalışan devrimcilerin varlığını öğreniyor. Tokyo'da boncukları düşünerek hesap yapan öğrencilerin bulunduğu bir okul sonrası kulübe gidiyor.

BÖLÜM İKİ

Vay Be! • 91

Yazar bu bölümde, Yunan mezhebi müridi yapması gerektiğini söylediği için neredeyse adını değiştiriyor. Ama bunun yerine başka bir Yunan düşünürün talimatlarına uyuyor, pergelinin tozunu temizliyor ve kartvizitlerden üçgen piramitler yapıyor.

BÖLÜM ÜÇ

Hiçbir Şey Hakkında Birkaç Şey • 133

Yazar bu bölümde bir Hindu kâhini dinlemek için Hindistan'a yolculuk yapıyor. Aritmetiğin çok yavaş ve çok hızlı bir çeşidini öğreniyor.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

BÖLÜM DÖRT

Pi'nin Hayatı • 169

Yazar bu bölümde Almanya'da dünyanın en hızlı zihinsel hesaplamalarına tanık oluyor. Bu dairelerin hikâyesini anlatmaya başlamak için dolambaçlı bir hikâye, transandantal bir masal onu New York'a ve 50 peninin değerlendirilmesine sürüklüyor.

BÖLÜM BEŞ

x-faktörü • 211

Yazar bu bölümde sayıların neden iyi ama harflerin daha iyi olduğunu açıklıyor. Braintree'de sürgülü cetvel koleksiyonu yapan bir adamı ziyaret ediyor ve yok oluşlarının trajik hikâyesini dinliyor. Logaritmanın, hesap makinesi sözlüğünün ve süper yumurta yapımının açıklamasını yapıyor.

BÖLÜM ALTI

Oyun Zamanı • 255

Yazar bu bölümde matematiksel bulmaca görevine çıkıyor. Biri ahmak bir keşiş ve diğeri dünyaya düşmüş olan iki Çinlinin mirasını soruşturuyor ve bir sihirbazla tanışmak için Oklahoma'ya uçuyor.

BÖLÜM YEDİ

Ardışıklığın Sırrı • 305

Yazar bu bölümde, ilk kez sonsuzla karşılaşıyor. Durdurulamayan bir salyangoz ve sayıların şeytani ailesiyle yüzleşiyor.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

BÖLÜM SEKİZ

Altın Parmak • 339

Yazar bu bölümde, güzel dişlerin sırrını keşfettiğini söyleyen kıskaçlı bir Londralı ile tanışıyor.

BÖLÜM DOKUZ

Şans İyi Bir Şey • 363

Yazar bu bölümde *Dukes of Hasard* filmini anımsıyor ve kumar oynamaya Reno'ya gidiyor. Rastgele bir yürüyüşe çıkıyor ve kendini Newport Beach, Kaliforniya'da okyanusa baksa Güney Pasifik'deki Desert Island'da bir piyango talihlisini görebileceği bir iş merkezinde buluyor.

BÖLÜM ON

Her Şey Normal • 417

Yazar bu bölümde istatistiğin doğumunun tadını çıkarmaya çalışıyor.

BÖLÜM ON BİR

Yolun Sonu • 455

Yazar bu bölümde cipsler ve tığ işleriyle yolculuğunu sona erdiriyor. Ve önce tekrar Öklid'e sonra da ani müşteri akınıyla başa çıkamayan sonsuz odalı bir otele bakıyor.

SÖZLÜKÇE • 491

EKLER • 499

BÖLÜMLER ÜZERİNE NOTLAR • 505

TEŞEKKÜR • 519

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

GİRİŞ

1992 yazında, Brighton'daki *Evening Argus* gazetesi için amatör muhabir olarak çalışıyordum. Günlerim yerel mahkemede görülen sabıkalı gençleri izleyerek, yaşanan ekonomik durgunluk hakkında dükkân sahipleriyle röportajlar yaparak ve gazetenin duyurular bölümü için haftada iki gün Bluebell demiryolu çalışma saatlerini güncelleyerek geçiyordu. Bunlar eğer küçük çapta hırsızlıklar yapan bir soyguncu ya da bir dükkân sahibiyseniz eğlenceli zamanlar değildi, ama benim hayatımın mutlu bir dönemiydi.

John Major tekrar başbakan olarak seçilmişti ve zaferinden havalara uçup, en çok hatırlanan (ve alay edilen) siyasi hamlesini gerçekleştirmişti. Bir başbakan ciddiyetiyle, trafik konileri hakkında bilgilendirme telefon hattının kurulduğunu açıklamış, bu sıradan tasarıyı sanki tüm ulusun geleceği buna bağlıymış gibi göstermişti.

Ancak Brighton'da koniler ciddi haberdi. Yol çalışmalarına takılmadan şehir merkezine gidemezdiniz. Crawley'den Preston Park'a kadar Londra ana yolu A23 (M), turuncu trafik konilerinin çizgi halinde sıralandığı bir koridor gibiydi. Argus, şaka yollu okuyucularından, A23 (M) yolu boyunca kilometrelerce dizilmiş olan konilerin sayısını tahmin etmesini istedi. İdare kadrosu böylesi harika bir fikir nedeniyle kendilerini tebrik ediyorlardı. Bu köy usulü neşeli görev hem olayı açıklıyor, hem de hükümete biraz dokunduruyordu: Mükemmel bir yerel gazete işiydi.

Ancak, yarışma açıklandıktan sadece birkaç saat sonra, ilk katılım gerçekleşti ve okuyucu konilerin doğru sayısını tahmin etmişti. Kıdemli editörlerin haber odasında, adeta şehrin önemli bir meclis üyesi ölmüş gibi keyifsiz bir biçimde nasıl oturduklarını hatırlıyorum.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Başbakanla dalga geçmek istemişlerdi ama bu durum kendilerini aptal durumuna düşürmüştü.

Editörler yaklaşık otuz kilometre boyunca dizilmiş konilerin sayısını hesaplamanın imkânsız bir iş olduğunu düşünmüşlerdi. İmkânsız olmadığı ise ortadaydı ve binada bunun nedenini görebilen tek kişi bendim. Her bir koninin eşit mesafede yerleştirildiğini var sayarak tek bir işlem yapmanız yeterliydi:

Konilerin sayısı = yolun uzunluğu / koniler arasındaki mesafe

Yolun uzunluğu arabayla üzerinden geçerek ya da harita kullanılarak ölçülebilir. Koniler arasındaki mesafeyi ölçmek içinse gereken tek şey bir şerit metre. Koniler arasındaki mesafelerde küçük farklılıklar olabilmesine ve yol uzunluğunun da hatalı hesaplanması ihtimaline rağmen, yerel gazetelerin düzenlediği yarışmaları kazanma amacıyla yapılan bu hesaplamadaki kesinlik oldukça yeterlidir (ve muhtemelen gazeteye doğru cevabı veren trafik polisi de bu yöntemi kullanmıştır). Olayı oldukça net hatırlıyorum, çünkü gazetecilik kariyerimde matematiksel bir zihne sahip olmanın değerini ilk kez o an fark etmiştim. Ayrıca birçok gazetecinin hesap yapamaması bana çok rahatsızlık vermişti. Yola dizilmiş konilerin sayısını hesaplamanın karmaşık bir tarafı yoktu, ama birçok meslektaşımın bu hesaplamayı yapması oldukça uzak bir ihtimaldi.

İki sene önce, bir taraftan fen bilimleri, diğer taraftan ise sosyal bilimlere bulaşmış bir biçimde hem matematik hem de felsefeden mezun olmuştum. Gazetecilik yapmaya başlamak ise bilimden uzaklaşıp sosyal bilimleri kucaklamak adına verilmiş yüzeysel bir karardı. Koni başarısızlığından kısa bir süre sonra Londra'daki gazetelerde çalışmak için Argus'dan ayrıldım. Sonunda ise, Rio de Janeiro'da dış haberler muhabirliğine başladım. Zaman zaman, sayılardan keyif alma eğilimi-

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

min bana yardımı da dokunuyordu. Örneğin hangi Avrupa ülkesinin yüzölçümünün, Amazon ormanlarının en son yok edilen alanına yakın olduğunu bulmak gibi ya da ekonomik krizlerin yaşandığı dönemlerde döviz kurunu hesaplamak gibi. Ama sanki matematiği arkamda bırakmış gibi hissediyordum.

Ardından, birkaç sene sonra, ne yapmak istediğimi bilmeyerek İngiltere'ye geri döndüm. Brezilyalı futbolcuların tişörtlerini sattım, bir blog açtım, yarı ciddi bir biçimde tropikal meyve ithal etmeyi düşündüm. Hiçbir iş yürümedi. Ve gençlik yıllarımda içimi yiyip bitiren konuya tekrar bir göz attım ve tam orada bu kitabı yazmamı sağlayan ilham kıvılcımlarını buldum.

Matematiğin dünyasına bir yetişkin olarak adım atmak, çocukken girmekten daha farklıydı, o zamanlarda sınavları geçme zorunluluğu merak edilen konuları yok saymak demekti. Artık, sadece kulağıma ilginç geldiği için ya da merak uyandırdığı için bile matematiğin caddelerini turlamakta özgürdüm. Farklı kültürlerin matematiğe yaklaşımlarını inceleyen 'Etnomatematik' ve dinlerin matematiği nasıl biçimlendirdiği hakkında bir şeyler öğrendim. Beynin nasıl ve neden sayıları düşündüğü konusunda yeni yapılan psikoloji ve nöroloji çalışmalarına karşı ilgi duymaya başladım.

Tıpkı bir görevde bulunan dış haberler muhabiri gibi davrandığımı fark ettim, tek fark ziyaret ettiğim ülke soyut bir ülkeydi—'Sayılar Diyarı.'

Matematiği gerçek dünyada tecrübe etmek istediğim için yolculuğum kısa sürede bölgesel bir hal aldı. Bu yüzden tarihin en büyük zihinsel buluşu olan 'Sıfır'ın icat edildiği ülke olan Hindistan'a uçtum. Olasılık hesaplarını iş üzerinde görmek için Reno'daki devasa bir kumarhanede kendime yer ayırttım. Ve Japonya'da, rakamları dünya üzerinde en iyi okuyabilen şempanzeyle tanıştım.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Araştırmam ilerlerken, kendimi hem bir uzman hem de bir amatör olarak gördüğüm tuhaf bir pozisyonda buldum. Okul matematiğini yeniden öğrenmek kendimi eski arkadaşlara tekrar takdim etmek gibiydi, ama arkadaşlarımın o zamanlar tanışmadığım çok fazla arkadaşı vardı ve mahalleye çok sayıda yeni çocuk taşınmıştı.

Bu kitabı yazmadan önce, mesela, onluk sayı sistemimize iki yeni sayı eklemek için yüzlerce yıldır yürütülen bir çalışma olduğunun farkında değildim. Neden İngiltere'nin yedi kenarlı parayı ilk icat eden ulus olduğunu bilmiyordum. Ve Sudoku'nun arkasındaki matematiksel fikrin ne olduğu konusunda bir fikrim yoktu (çünkü henüz icat edilmemişti).

Braintree, Essex ve Scottsdale, Arizona gibi hiç ummadığım mekânlara yolculuk yaptım ve kütüphanelerin hiç ummadığım raflarını ziyaret ettim. Pisagor'un yemek seçmedeki kötü şöhretinin nedenini anlayabilmek için, bitkilerle uygulanan ritüellerin tarihi üzerine bir kitabı okuduğum unutulmaz bir gün geçirdim.

Elinizdeki kitap bölüm sıfırdan başlıyor, çünkü ele alınan konunun matematik öncesi olduğunu vurgulamak istedim. Bölüm sayıların nasıl ortaya çıktıklarıyla alakalı. Birinci bölümün başında sayılar gerçekten de ortaya çıkıyorlar ve biz de işimize koyulabiliyoruz. Bu bölümün başı ve on birinci bölümün sonu arasında ise, aritmetik, cebir, geometri, istatistik ve birçok başka alanı 500 küsur sayfaya sığdırabileceğim kadar ele aldım. Teknik malzemeyi minimumda tutmaya çalıştım, buna rağmen bazen denklemleri ve ispatları ortaya dökmek zorunda kaldım. Eğer beyninizde karıncalanmalar hissederseniz, bir sonraki bölümün başlangıcına geçebilirsiniz, rahatladığınızı göreceksiniz. Her bir bölümün kendisine ait bir konusu vardır ve kişinin bir bölümü anlaması için öncekini okuması gerekmez. Bölümleri istediğiniz sırayla okuyabilirsiniz ama yine de ben, ciddi düşüncelerin kronolojik bir biçimde ele alınması ve daha önceki bölümlerde ele alınan noktalara göndermeler bulunduğu için baştan sona doğru okumanızı öneririm.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Kitabı matematik bilgisi olmayan okuyucuyu hedefleyerek yazdım, içinde ilkokul seviyesi kavramlardan üniversitenin son sınıfında öğretilen seviyeye kadar çeşitlilikte bilgiler var.

Matematik aynı zamanda matematiğin tarihini de içerdiğinden kitapta bir miktar tarihsel bilgi de var. Eski fikirlerin ve uygulamaların yenileriyle değiştirildiği, sürekli bir yeniden keşfetme sürecinde bulunan, uygarlık tarihi ve teorilerin düzenli olarak daha iyi hale getirildiği uygulamalı bilimlerin aksine, matematiğin çağları yoktur. Pisagor ve Öklid'in teoremleri her zaman oldukları gibi geçerliliklerini sürdürürler ki Pisagor ve Öklid, okulda öğrendiğimiz en eski isimlerdir. Orta öğretim müfredatında on yedinci yüzyılın ve aynı biçimde üniversite müfredatında ise on sekizinci yüzyılın ortalarında bilinmeyen herhangi bir matematik bilgisi neredeyse yoktur (ben üniversitedeyken okutulan en yeni teoremler 1920'lerde ortaya konmuştu).

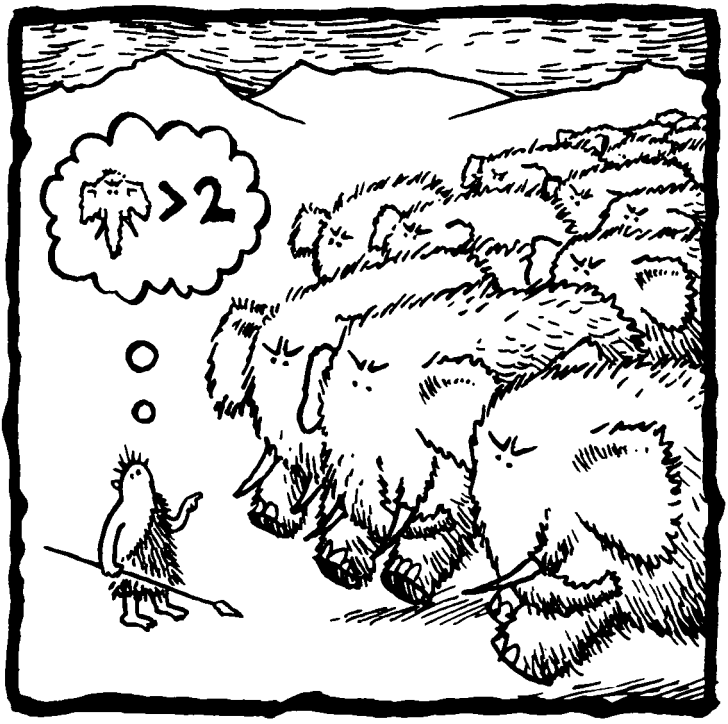
Bu kitabı yazarken amacım matematiksel keşiflerin büyüsünü ve heyecanını anlatmaktı (Ve matematikçilerin eğlenceli insanlar olduğunu göstermekti. Bizler mantık krallarıyızdır, bu da bize mantıksız olarak ayrımcı bir yaklaşım kazandırır). Matematik, zor olduğuna yönelik şöhretinden, çok sıkıntı çekmiştir. Çoğunlukla zordur. Ancak, ilham verici, erişilebilir ve hepsinin üzerinde olağanüstü yaratıcı olabilir. Soyut matematiksel düşünce insan soyunun elde ettiği en büyük kazanımlardan birisidir ve tüm insan gelişiminin temelinde yattığı kolaylıkla ortaya konabilir.

Sayılar Diyarı olağanüstü bir yerdir. Ziyaret etmenizi tavsiye ederim.

Alex Bellos

Ocak 2010

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org



Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

BÖLÜM SIFIR

Sayılara Giriş

Pierre Pica'nın Paris tarzı dar apartman dairesine girerken, sivrisinek kovucunun kötü kokusuyla kendimden geçtim. Pica, yerli bir kabileyle beş ayını geçirdiği Amazon yağmur ormanlarından henüz dönmüştü ve beraberinde getirdiği hediyeleri dezenfekte ediyordu. Çalışma odasının duvarları kabile maskeleri, tüylü başlıklar ve hasır sepetlerle dekore edilmişti. Akademik kitaplar raflardan taşıyordu. Tamamlanmamış tek bir Sabır Küpü rafın üzerinde duruyordu.

Pica'ya seyahatinin nasıl geçtiğini sordum.

"Zorlu" diye yanıtladı.

Pica bir dilbilimcidir ve sanırım bu yüzden özgün kelimeleri kullanmaya özen göstererek, tane tane ve özenle konuşur. Ellili yaşlardadır ama parlak mavi gözleri, kırmızı suratı ve yumuşak, dağınık gümüşi saçlarıyla çocuksu bir görünümü vardır. Ses tonu sakindir; tarzı ise çarpıcı.

Pica, ünlü Amerikalı dilbilimci Noam Chomsky'nin öğrencisiydi, şimdi Fransız Ulusal Bilimsel Araştırmalar Merkezi'nde çalışıyor. Son on yıldır çalışmalarının merkezinde, Brezilya Amazon ormanlarında yaşayan, 7000 nüfuslu Munduruku yerlileri olmuştu. Munduruku'lar, Galler'in iki katı büyüklüğündeki yağmur ormanlarına dağılmış küçük köylerde yaşayan avcı-toplayıcı bir topluluktur. Pica'nın ilgi alanı Munduruku'ların diliydi: Zamanlar, çoğullar ve beşe kadar olan rakamları dışında sayılar için kullandıkları kelimeleri yoktur.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Pica, bilimsel çalışmasına başlamak için, büyük maceralara bedel bir yolculuğa çıktı. Bu yerlilere en yakın büyük havaalanı, Atlantik Okyanusu'ndaki Amazon'lardan 500 mil mesafedeki Santarém şehrindeydi. Oradan, Tapajós Nehri'nden, neredeyse 200 mil boyunca 15 saatlik bir feribot yolculuğu onu, eskiden altın çıkarılan bir kasaba olan, oldukça çok miktarda yiyecek ve yakıt satın almak için son durağı olan İtaituba'ya götürür. Pica, en son yolculuğunda bir cip kiralayıp, içini bilgisayarlar, güneş panelleri, bataryalar, kitaplar ve 500 litre petrolden oluşan ekipmanlarıyla doldurdu. Sonra da, yer yer tehlikeli ve geçilmez şekilde çamurlu bir yola dönüşen, 1970'lerin milliyetçi altyapı saçmalığı olan Trans-Amazon Otobanı boyunca yola koyuldu.

Pica'nın istikameti, İtaituba'nın 200 mil güneybatısındaki küçük bir yerleşim birimi olan Jacareacanga'ydı. Ona, mesafenin ne kadar sürdüğünü sordum. "Değişir" diyerek omuz silkti. "Bir ömür boyu da sürebilir, iki gün de."

Bu gidişinde ne kadar sürdü diyerek yineledim.

"Yani, hiçbir zaman ne kadar süreceğini bilemezsin, çünkü asla aynı olmaz. Yağmur sezonunda on, on iki saat arası sürer. O da, her şey yolunda giderse."

Jacareacanga, Munduruku'ların sınırlarını çizdikleri bölgenin sınırındaydı. Pica, bölgeye girmek için yerlilerden birilerinin gelmesini bekledi, böylece onu kanoyla götürmeleri için onlarla anlaşabilecekti.

"Ne kadar bekledin?" diye sordum.

"Bir hayli bekledim. Ama bana yine kaç gün diye sorma."

"Peki, birkaç gün müydü?" dedim çekinerek.

Birkaç saniye kaşlarını çattı. "İki hafta olmak üzereydi."

Paris'ten ayrılalı bir aydan fazla olmuştu ki Pica nihayet varış yerine yaklaşıyordu. Kaçınılmaz şekilde, Jacareacanga'dan köylere olan mesafenin ne kadar olduğunu bilmek istiyordum.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Ancak Pica şu ana kadar benim soru yağmuruma karşı bariz bir biçimde tahammülsüzdü: "Cevabım aynı—*değişir!*"

Direndim. *Bu* defa ne kadar sürdü?

Kekeledi: "Bilmiyorum. Sanırım . . . belki . . . iki gün . . . bir gün bir gece . . ."

Pica'yı kesin veriler konusunda zorladıkça isteksizliği gittikçe arttı. Sıkıntıdan bunaldım. Cevaplarının altında Fransız uzlaşmazlığının mı, akademik bilgiçliğinin mi yoksa genel bir aksiliğin mi yattığı belirsizdi. Sorgulamamdan vazgeçtim ve konuyu değiştirdik. Ancak ıssızlığın ortasında o kadar uzun zaman geçirdikten sonra eve dönmenin nasıl bir şey olduğundan bahsettiğimiz birkaç saatin ardından açıldı. "Amazon'dan döndükten sonra, zaman ve sayı algımı ve muhtemelen mekân algımı kaybettim" dedi. Randevuları unutuyordu. Basit talimatları şaşırıyordu. "Köşeleri ve düz yollarıyla tekrar Paris'e uyum sağlamakta aşırı zorlanıyorum." Pica'nın bana nicel bir veri verme yetersizliği bu kültür şokunun bir parçasıydı. Zar zor sayabilen insanlarla uzun zaman geçirmesi yüzünden sayılar üzerinden dünyayı tanımlama yetisini kaybetmişti.

Kimse kesin olarak bilemez ama sayıların yaşı büyük olasılıkla 10.000 yıldan fazla değil. Bununla, kullanılan kelimeler ve semboller sistemini kastediyorum. Teorilerden bir tanesi, sayıların, stoklama ve kazıklanılmadığından emin olmak için vazgeçilmez araçlar olması nedeniyle böylesi bir uygulamanın tarım ve ticaretle ortaya çıktığını ileri sürer. Munduruku'lar geçimlerini sadece çiftçilikten kazanıyorlar ve para da sadece kısa süre önce köylerinde dolaşmaya başladı, bu nedenle sayma becerilerini henüz evrimleşmedi. Papua Yeni Gine, yerli kabileleri içinde, sayıların ortaya çıkışının karşılıklı özenli hediyeleşme sürecinin ardından ortaya çıktığı tartışılır. Buna karşılık, Amazonlar'da böyle bir gelenek yoktur.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Ancak, on binlerce yıl önce, sayıların da ortaya çıkışından uzun zaman önce, atalarımızın miktarlar konusunda bir anlayışa sahip olması gerekiyor. Bir mamutun iki mamuttan ve bir gecenin diğerinden farklı olduğunu ayırabiliyor olmalılardı. İki şey düşüncesinden, soyut iki kavramı için kelime ya da sembol üretme noktasına yapılan zihinsel sıçrayışın gerçekleşmesi için yüzyıllar geçmesi gerekti. Aslında bunun ortaya çıkışı bazı topluluklarda Amazonlar'daki kadar uzun sürdü. Sayı kelimeleri olarak sadece 'bir', 'iki' ve 'çok' olan kabileler vardır. Beşe kadar çıkan Munduruku, nispeten karmaşık topluluktur.

Sayılar yaşamlarımızda öylesine yer etmiştir ki onlar olmadan insanların nasıl hayatta kaldıklarını hayal bile edemeyiz. Ama Pierre Pica, Munduruku'ların içinde yaşarken sayıların olmadığı bir varlık durumunun içine kolayca girebilmişti. Bir hamakta uyudu. Ava çıktı, tapir armadillo ve yabani hayvanlar yedi. Saati güneşe bakarak söyledi. Eğer hava yağışlıysa dışarı çıkmadı, güneşliyse çıktı. Saymayı gerektirecek bir durumda bulunmadı.

Yine de, Amazonlar'ın tümünde beşten büyük bir sayının günlük yaşamda ortaya çıkmamış olmasını tuhaf buluyorum. Pica'ya bir yerlinin 'altı balık' ifadesini nasıl söylediğini sordum. Mesela yerli bir kadın veya erkek altı kişi için yemek hazırlıyor ve herkes için bir balık olmasını istiyor.

"Bu imkânsız" dedi Pica. "'Altı kişilik balık istiyorum' cümlesi dillerinde yok."

Peki ya altı çocuğu olan bir Munduruku'ya, "Kaç çocuğun var?" diye sorarsan.

Pica aynı tepkiyi verdi. "'Bilmiyorum'. diyecektir. Söylemesi imkânsız."

Ama bunun temel kültürel bir sorun olduğunu ifade etti. Munduruku'ların çocuklarını, bir, iki, üç, dört, beş diye sayıp altıncıda daha fazla ileri gidemediği için kafalarını kaşıyarak kalakalmaları gibi bir

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

durumun olmadığını söyledi. Munduruku için çocuklarını sayma fikri başlı başına saçmaydı. Aslına bakarsanız herhangi bir şeyi sayma fikri bile başlı başına saçmaydı.

"Yetişkin bir Munduruku neden çocuklarını saymak istesin ki?" diye sordu Pica. Çocukların bakımıyla toplumdaki yetişkinlerin tamamının ilgilendiğini ve kimsenin kimin kime ait olduğunu saymadıklarını söyledi. Bu sorumu Fransızca bir deyiş ile kıyasladı *'j'ai une grande famille'* ya da 'Büyük bir aileden geliyorum.' "Büyük bir aileden geldiğimi söylediğimde, size ailemin kaç üyesinin bulunduğunu bilmediğimi söylüyor olurum. Benim ailem nerede biter ve diğerleri nerede başlar? Bilemem. Kimse bana bunu anlatmaz. Aynı biçimde yetişkin bir Munduruku'ya kaç tane çocuğun sorumluluğuna sahip olduğunu sorarsanız verecek doğru bir cevabı yoktur. Size 'bilmiyorum' diyecektir ki durum da bundan ibarettir."

Munduruku'lar tarih içinde topluluklarının sayısını tutmama konusunda yalnız değiller. Kral Davut kendi halkını saydığında üç günlük salgın ve 77.000 kişilik ölümle cezalandırılmıştı. Yahudilerin sadece Yahudileri sayması gerekiyordu, bu nedenle sinagoglarda on kelimelik duanın her kelimesinin bir kişiye yöneldiğinden emin olmak için, bir minyan yani en az on kişinin ya da ibadetin yapılabilmesi için yeterli kişinin bulunması gerekir. İnsanları saymak, onları dışlamak anlamına gelir ve bu onları kötü etkilere daha çok maruz bırakır. Ortodoks bir hahambaşından çocuklarını saymasını istediğinizde bir Munduruku'ya sorduğunuzda alacağınız cevabı almanız oldukça muhtemeldir.

Çalışma zamanının çoğunu yerli topluluklarla geçiren Brezilyalı bir öğretmenle konuşmuştum. Yerlilerin, dışarıdan gelenlerin kibarlık için bile olsa kaç tane çocukları olduğunu sormalarının tuhaf bir dürtü olduğu düşündüklerini söyledi. Çocukları saymanın amacı neydi? Bunun yerlilerde şüphe duygusuna neden olduğunu söyledi.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

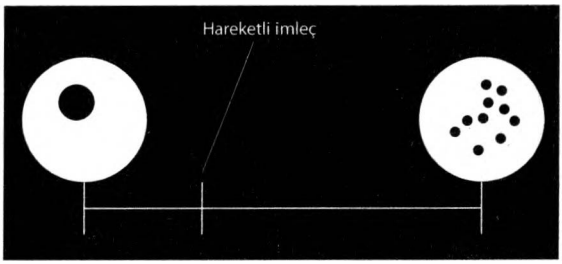
Munduruku'lardan bahseden ilk metin 1768 yılında birkaçını bir nehir yatağında gören bir yerleşimciye aittir. Yüzyıl sonra, Fransisken misyonerler Munduruku topraklarında üs kurdular ve on dokuzuncu yüzyılın sonlarındaki kauçuk toplayıcılarının bölgeye girişinin gerçekleştiği kauçuk hamlesi zamanında daha fazla temas kuruldu. Munduruku'ların çoğu günümüzde hâlâ nispeten soyutlanmış olarak yaşamaktadırlar ama teması uzun zamandan beri kurulmuş olduğu başka birçok yerli grup gibi tişört ve gömlek gibi batı giysileri giymektedirler. Kaçınılmaz olarak, modern yaşamın elektrik ve televizyon gibi diğer unsurları da yaşamlarına girecek. Ve sayılar. Aslında topraklarının sınırlarında yaşayan bazı Munduruku'lar Brezilya'nın resmi dili olan Portekizceyi öğrendiler ve Portekizce sayabiliyorlar. "*Um, dois, tres*, diye yüze kadar sayabiliyorlar" diyor Pica. "Onlara sorabilirsin 'Bu arada, beş eksi üç kaç eder?" dedi Gallerli umursamazlığının taklidini yaparak. Hiçbir fikirleri yok.

Pica yağmur ormanlarında araştırmasını pillerini güneş enerjisiyle doldurduğu dizüstü bilgisayarında sürdürdü. Her ne kadar asıl zorluk katılımcıları bir araya getirmek olsa da sıcaklık ve nem yüzünden bilgisayarın bakımını sağlamak lojistik bir kâbusa dönüşmüş. Bir keresinde köyün lideri Pica'dan bir çocukla görüşebilmesi için büyük kırmızı bir karınca yemesini istemiş. Bu çok gayretli dilbilimci kıpırdanan böceğe bakıp yüzünü buruşturmuş ve mideye indirmiş.

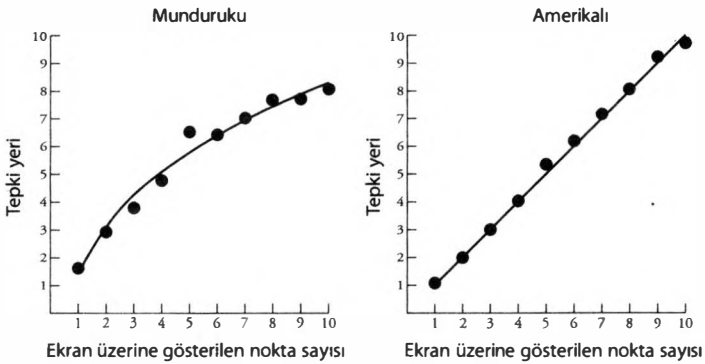
Sadece tek eliyle sayma kapasitesine sahip insanların matematiksel becerilerini araştırmanın amacı temel sayısal sezgilerimizin doğasını keşfetmek. Pica bütün insanlarda evrensel olanın ne olduğunu ve neyin kültürle biçimlendiğini öğrenmek istiyor. En heyecan verici deneylerden birinde sayıların uzamsal oluşlarını açıklamış. Modern dünyada cadde üzerinde sıralanan evlerde, metrelerde, cetvellerde, grafiklerde, sıkça gördüğümüz bir doğru üzerine yerleştirilmiş sayıları nasıl hayal etmişlerdi? Munduruku'larda sayı olmadığı için, Pica ekranda bulunan nokta kümelerinden faydalandı. Her bir gönüllüye diğer sayfada yer alan

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

işaretlenmemiş çizginin bulunduğu şekil gösterildi. Çizginin sol tarafında tek bir nokta ve sağında on adet nokta vardı. Her bir gönüllüye rastgele bir ila on arasında nokta gösterildi. Her birinde deneğin sayının doğru üzerinde nerede olması gerektiğini göstermesi gerekiyordu. Pica imleci hareket ettirip tıkladı. Tekrarlanan tıklamalarla Munduruku'ların bir ile on arasındaki sayıları nasıl yerleştirdiğini görebiliyordu.



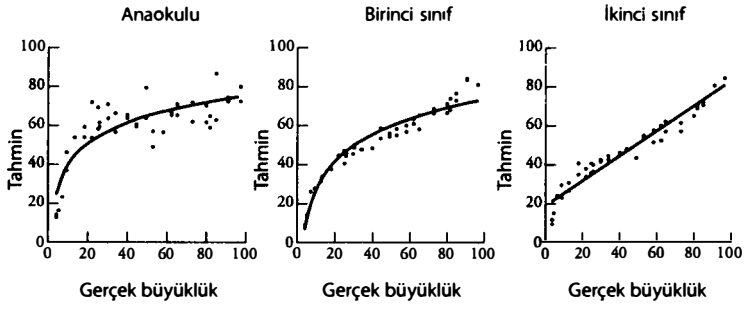
Amerikalı yetişkinler bu teste tabi tutulduğunda, doğru üzerinde eşit aralıklarla yerleştiriyorlar. Sayı doğrusunun okulda öğrendiğimiz biçimiyle ardışık sayıları bir cetvelle ölçülmüş gibi eşit aralıklarla yeniden oluşturuyorlar. Ama Munduruku'lar oldukça farklı bir biçimde tepki veriyorlar. Sayılar arasındaki aralığın başlangıçta çok geniş olduğunu ve ilerledikçe giderek küçüldüğünü düşünüyorlar. Örnek olarak, aşağıdaki grafikte görüldüğü gibi birinci nokta ile ikinci nokta ve ikinci ile üçüncü nokta arasındaki mesafe yedinci ve sekizinci nokta ile sekizinci ve dokuzuncu nokta arasındaki mesafeden çok daha büyük.



Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Sonuçlar çok şaşırtıcı. Bu genel olarak sayıların birbirinden eşit mesafelerde bulunduğunun kanıtı olarak kabul görülüyor. Bunu okulda öğreniyor ve kolayca kabul ediyoruz. Bu tüm ölçümler ve bilimlerin temeli. Ama Munduruku'lar dünyayı bu şekilde algılamıyorlar. Saymadan ve sayılardan yoksun bir dille büyüklükleri tamamen farklı algılıyorlar.

Sayıların cetvel üzerinde eşit olarak dağılmasına *doğrusal* adı verilir. Sayılar büyüdükçe mesafelerin kısalmasına ise *Logaritmik* adı verilir. Logaritmik yaklaşımın Amazonlu yerlilere özgü olmadığı anlaşılmıştır. Hepimiz sayıları bu biçimde hayal ederek doğarız. 2004 yılında, Pennsylvania Camegie Mellon Üniversitesi'nden Robert Siegler ve Julie Booth (5.8 yaş ortalamasıyla) anaokulu, birinci sınıf (6.9) ve ikinci sınıf (7.8) öğrencilerinin tabi olduğu benzer bir sayı doğrusu çalışması ortaya koydular. Sonuçlar saymadaki benzerliklerin algılarımızı şekillendirdiğini ortaya koyuyor. Daha önce matematik eğitimi almamış anaokulu öğrencileri sayıları logaritmik olarak yerleştiriyorlar. İlkokulun birinci yılında sayı kelimeleri ve sembollerle tanışan öğrenciler için eğim biraz daha düzleşiyor. Ve okulda ikinci yıldan itibaren sayılar sonunda doğru üzerine eşit aralıklarla yerleştiriliyor.



Neden yerliler ve çocuklar büyük sayıların birbirine küçük sayılardan daha yakın olduğunu düşünüyorlar? Bunun basit bir açıklaması var. Deneylerde gönüllülere nokta kümeleri gösterildi ve bu kümelerin tek

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

nokta solda ve on nokta sağda olacak biçimde gerekli yere yerleştirilmeleri istendi (Çocuklarla yapılan deneyde ise 100 nokta kullanıldı). Bir Munduruku'ya gösterilen beş noktayı hayal edin. Onu yakından inceleyecek ve beş noktanın bir noktadan beş kat daha büyük olduğunu, ama on noktanın beş noktadan sadece iki kat daha büyük olduğunu görecektir. Munduruku'lar ve çocukların sayıların bulunması gereken yer konusundaki kararlarını miktarlar arasındaki oranlar ile verdikleri görünüyor. Ve oranlar söz konusu olduğunda beş ile birin arasındaki oran on ila beşin arasındaki orandan büyük. Ve miktarlar hakkında oranlara bakarak karar veriyorsanız, daima logaritmik bir ölçek oluşturursunuz.

Pica'ya göre çokluğu yaklaşık oran tahmini ile anlamak evrensel insan sezgisidir. Aslında sayı kavramı bulunmayan –yerliler ve çocuklar gibi– insanların dünyayı anlamak için bunun dışında başka bir yolları yoktur. Buna karşılık, çoklukları kesin sayılar ile algılamak evrensel bir sezgi değil, kültürün bir ürünüdür. Tahminlerin önceliği ve oranların sayılara üstünlüğünden dolayı Pica vahşi yaşamda hayatta kalmak için oranların, sayma becerisinden daha önemli olduğunu ileri sürüyor. Ellerinde mızrakları olan bir grupla karşı karşıya geldiğimiz anda sayılarının bizden fazla olup olmadıklarını bilmek isteriz. İki ağaç gördüğümüzde hangisinde daha fazla meyve olduğunu bilmek isteriz. İki durumda da her bir düşmanı ya da meyveyi sayısal olarak bilmek gerekli midir? Hayati olan hızlıca karşılıklı oranları belirleyebilmek ve kıyaslamaktır, başka bir ifadeyle oranları hakkında tahminde bulunup bir yargıya varmaktır.

• Logaritmik ölçek aynı zamanda uzaklığın algılanmasında da sadık bir yoldur ve muhtemelen bu nedenle bu kadar sezgiseldir. Bakış açısını hesaba katar. Örneğin, eğer 100 m ileride bir ağaç görürsek ve onun da 100 m ilerisinde başka bir ağaç varsa, ikinci 100 m daha kısa görünür. Bir Munduruku için her bir 100 m eşit mesafe bildirir düşüncesi dünya algısında bir bozukluk demektir.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Tam sayılar bize logaritmik sezgilerimizle çelişen doğrusal bir çerçeve sağlarlar. Gerçekten de, tam sayılar konusundaki yeterliliğimiz, logaritmik algımızın geçersiz kalması anlamına gelir. Ama tamamen ortadan kaldırılmaz. Örneğin, zamanın akışına yönelik algımız logaritmik olmak zorundadır. Genellikle yaşlandıkça zamanın daha hızlı aktığını hissederiz. Ama tam tersinin de olduğu görülür: Dün haftanın tamamından daha da uzun görünür. Derinlerde bulunan logaritmik içgüdümüz çok büyük sayıları düşündüğümüzde ortaya açık bir biçimde çıkar. Örnek olarak, hepimiz bir ila on arasındaki farkı anlayabiliriz. Bir litre bira ile on litre bira arasında kafamızın karışması ihtimal dışıdır. Peki ya bir milyar galon ve on milyar galon su arasındaki fark? Miktarlar devasa ölçülerde olmasına rağmen iki niceliği de, çok büyük miktarlarda su olarak, aynı biçimde görme eğilimindeyizdir. Aynı şekilde, milyonerler ve milyarderler neredeyse aynı anlamda algılanırlar—sanki çok zengin olmakla çok çok zengin olmak arasında fark yokmuş gibi. Ama milyarder milyonerden bin kat daha zengindir. Sayılar büyüdükçe verdikleri hisler birbirine yaklaşır.

Pica'nın sadece ormanda geçirdiği birkaç ayın ardından sayıları nasıl kullanacağını unutması doğrusal anlayışımızın beynimize logaritmik anlayış kadar köklü bir biçimde yer etmediğinin göstergesidir. Sayı anlayışımız şaşırtıcı derecede kırılgandır, bu nedenle düzenli kullanmazsak tam sayıları kullanma becerimizi kaybedebilir ve çoklukları tahminler ve oranlarla ele almaya geri dönebiliriz.

Pica matematiksel sezgiler üzerine kendisinin ve diğerlerinin yaptığı araştırmaların –hem Amazonlar'da hem de batıdaki– matematik eğitimi için ciddi sonuçları olduğunu söylüyor. Modern toplumda iş görebilmemiz için doğrusal sayı çizgisi anlayışına sahip olmamız bekleniyor. Bu, ölçmenin temeli ve işlemlerini kolaylaştırıyor. Ama belki de doğrusallık üzerine bağımlılığımız hususunda çok ileri gittik ve logaritmik sezgilerimizi boğduk. Pica belki de bu nedenle birçok insanın matematiği zor bulduğunu söylüyor. Belki de kesin sayıları

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

dönüştürmek yerine oranlar üzerinden karar verme içgüdülerimize daha fazla önem vermeliyiz. Aynı şekilde, Munduruku'lara bizim yaptığımız gibi saymayı öğretmek yanlış olabilir çünkü bu onları hayatta kalmaları için ihtiyaç duydukları tüm matematiksel sezgiden ya da bilgiden mahrum bırakabilir.

Sayılar için kelime veya sembolleri olmayanların matematiksel becerileri üzerine duyulan ilgi geleneksel olarak hayvanlar üzerine odaklanmıştır. En çok tanınan deneklerden bir tanesi de Clever Hans isimli yarış atıdır. 1900'lü yılların başlarında, ata aritmetiksel toplama işlemleri yaptıran emekli matematik öğretmeni Hans'ın sahibi Wilhelm von Osten'ı izlemek için halk Berlin avlusuna toplanırdı. Hans cevabı toynağını cevap kadar yere vurarak verirdi. Repertuarında toplama ve çıkarmanın yanında, kesirler, karekökler ve faktör hesapları da vardı. Halkın ilgisi ve atın zekâsının bir çeşit numara olduğuna dair şüphesi, saygın bilim adamlarından oluşan bir komitenin atın becerilerini soruşturmasına neden olmuştu. Sonucun atın lehine olduğuna karar verdiler. Hans gerçekten de matematik işlemleri yapabiliyordu. Einstein gibi zeki olan bu kısrağın foyasını ortaya çıkarmak daha az saygın ama daha kararlı bir psikoloğa düşmüştü. Oscar Pfungst, Hans'ın, Osten'ın beden dilinden aldığı ipuçlarına göre tepki verdiğini fark etti. Hans toynaklarını yere vurmaya sadece Osten'ın yüzündeki belirli bir ifadeden sonra başlıyordu ve daha sonra doğru cevaba geldiğini gösteren gergin ifade değişince duruyordu. At, başın öne eğilmesi ve kaşların kalkması ve hatta burun deliklerinin genleşmesi gibi en küçük görsel işarete bile duyarlıydı. Von Osten'ın kendisi bile bu mimikleri yaptığının farkında değildi. Hans kesinlikle insanların reaksiyonlarını okuma konusunda zekiydi ama bir aritmetikçi değildi.

Geçtiğimiz yüzyılda hayvanlara saymayı öğretmek için daha birçok başka girişimde bulunuldu ve bunların hepsi sirk tarzı eğlenceler adına değildi. 1943 yılında Alman bilim adamı Otto Koehler kuzgunu

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Jakop'ı üzerlerinde çeşitli sayılarda birçok nokta bulunan değişik çömlekler arasından kapağında belirli bir sayıda nokta bulunan çömleği seçmesi için eğitti. Kuş bu görevi bir ila yedi arasındaki herhangi bir sayıda nokta bulunan çömlekler için gerçekleştirdi. Yakın bir tarihte kuş zekâsı daha etkileyici seviyelere çıktı. Harvard Üniversitesi'nden Irene Pepperberg, Alex adındaki Afrika gri papağanına 1 ila 6 arasındaki rakamları öğretti. Kendisine karmaşık renkli bloklar gösterilip örneğin kaç tane mavi blok var diye sorulduğunda cevabı ciyaklayarak verebiliyordu. Alex bilim adamları ve kuş severler arasında o kadar meşhur olmuştu ki, 2007 yılında beklenmedik bir biçimde öldüğünde ölüm ilanı *The Economist*'de yayınlandı.

Hayvanlara saymayı öğretmek konusunda Clever Hans'dan çıkarılan ders, istemsiz insani telkinlerin ortadan kaldırılması konusunda temkinli davranmaktı. Matematik eğitimi için 1970 yılında Afrika'dan Japonya'ya getirilen şempanze Ai için insan telkinleri tamamen ortadan kaldırıldı çünkü Ai eğitimini dokunmatik bilgisayar kullanarak aldı.

Ai şimdi 31 yaşında ve Japonya'nın ortasındaki küçük bir turist şehri olan Inuyama'daki Primat Araştırma Enstitüsü'nde yaşıyor. Alnı geniş ve kelleşmiş çenesinde kıllar beyaz ve orta yaşlı bir maymunun çökük gözlerine sahip. Orada bir 'denek' değil bir 'öğrenci' olarak biliniyor. Ai her gün kendisine görevlerin verildiği derslere katılıyor. Geceyi devasa bir ağaca benzeyen ahşap, metal ve ipten oluşan yapıda diğer şempanzelerle birlikte geçirdikten sonra dakikası dakikasına sabah 9'da ortaya çıkıyor. Onu gördüğüm gün, kafası bilgisayar ekranına yakın oturmuş ekranda gördüğü rakamlar dizisini giriyordu. Görevi doğru bir biçimde yerine getirdiğinde 8 mm küpler şeklinde doğranmış elmalar sağındaki bir tüpe vızıldayarak düşüyordu. Ai eliyle yakalayıp derhal iştahla ağzına atıyordu. Boş gözlerle bakışı, parlayan, bipleyen bilgisayar ekranına heyecansız bir biçimde basışı ve sürekli elde ettiği ödülün sıradanlığı bana ev işlerini yapan yaşlı bir kadını anımsattı.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Ai yavruyken Arap rakamlarıyla sayabilen ilk insan dışı varlık olarak kelimenin iki manasında da büyük bir maymun oldu (Arap sayıları 1, 2, 3 şeklinde devam eden sembollerdir ve ironik bir biçimde Arap dünyası dışında neredeyse tüm dünyada kullanılan sayı sembolleridir). Bunu tatmin edici bir biçimde gerçekleştirebilmek için Primat Araştırmalar Enstitüsü başkanı Tetsuro Matsuzawa'nın insani sayı algısının temelini oluşturan iki unsuru öğretmesi gerekiyordu: Nicelik ve sıra.

Sayılar bir miktar ve aynı zamanda bir sıra belirtir. Bunlar birbirleriyle ilişkilidirler ama farklı kavramlardır. Örneğin 'beş havuç' dediğimde grup içindeki havuçların niceliğinin 5 olduğunu kastederim. Matematikçiler sayıların bu özelliğine 'nicelik' diyorlar. Diğer yandan 1'den 20'ye kadar saydığımda sayıların sıralamaya denk gelen özelliğini kullanırım. 20 tane nesneden bahsetmiyorum, sadece bir diziyi ezberden söylüyorum. Matematikçiler sayıların bu özelliğine 'sıralama' diyorlar. Okulda bize nicelik ve sıralama özellikleri birlikte öğretilir ve bizler kolayca birinden diğerine geçebiliriz. Ama şempanzeler için bu o kadar belirgin değildir.

Matsuzawa, Ai'ye bir kırmızı kalemin '1' sembolüne iki kırmızı kalemin '2' sembolüne denk geldiğini öğretti. 1 ve 2'yi öğrendikten sonra 3 ve ardından da 9'a kadar olan diğer rakamların tamamını öğretti. Diyelim ki 5 rakamı gösterildiğinde beş parçalık nesneler dizisine basıyordu ve 5 parçalı bir nesne dizisi gösterildiğinde ise 5 rakamına basıyordu. Ona verilen eğitim bir ödüllendirmeye dayalıydı: Bilgisayar görevini ne zaman doğru bir şekilde yapsa, bilgisayarın yanındaki tüpte bir parça yemek veriliyordu.

Ai 1'den 9'a kadar olan sayılarda ustalaştıktan sonra Matsuzawa ona nasıl sıralandıklarını öğreteceği görevler vermeye başladı. Testleri ekranda meydana geliyordu ve Ai'nin onları artanlar biçiminde sıralaması gerekiyordu. Örneğin ekranda 4 ve 2 gözüktüyse, Ai'nin küp elmalarını kazanmak için önce 2'ye sonra 4'e basması gerekiyordu.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Bunu oldukça çabuk kavradı. Ai'nin hem nicelik hem de sıralamadaki yeterliliği Matsuzawa için öğrencisinin saymayı öğrendiği anlamına geliyordu. Bu başarısı onu Japonya'da ulusal bir kahraman haline getirdi ve kendi türü içinde dünya çapında bir ikon oldu.

Matsuzawa bunun sonrasında onu sıfır kavramıyla tanıştırdı. Ai, 0 sembolünün nicelikselliğini kolayca öğrendi. Ekranda ne zaman içi boş bir kare çıksa rakama basıyordu. Matsuzawa sıfırın sırası hakkında bir çıkarımda bulunup bulunamayacağını görmek istedi. Ai'ye tıpkı 1 ila 9 arasındaki sayıları sıralamayı öğrenirken olduğu gibi rastgele iki rakamın bulunduğu ekranlar gösterildi ama arada gösterilen rakamlardan birisi 0'dı. Sayıları sıralarken sıfırın yerinin neresi olduğunu düşünmüştü?

İlk seansta Ai 0'ı 6 ile 7'nin arasına yerleştirdi. Matsuzawa bunu Ai'nin hangi sayıların 0'dan önce ve hangi sayıların 0'dan sonra gelmesi gerektiğini konusunda tahminlerinin ortalamasını alarak hesapladı. Devam eden seanslarda Ai'nin sıfıra verdiği konum 6'nın altına indi, ardından 5'in ve 4'ün ve birkaç yüz denemenin ardından 0 birin altına yerleştirildi. Ai her ne kadar sayıları kullanmayı mükemmel bir biçimde öğrense de, derin insani sayısal anlayıştan yoksun.

Ancak öğrenerek edindiği bir alışkanlığı ise şovmenlik. Şimdi bir profesyonel ve bilgisayar başındaki görevlerini ziyaretçiler ve özellikle de kamera karşısında daha iyi yapma eğilimde.

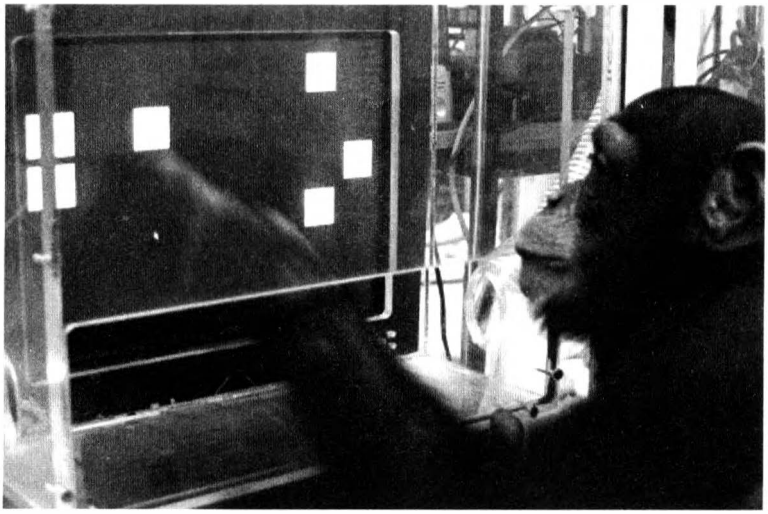
Hayvanlardaki sayısal hâkimiyeti araştırmak etkin akademik bir uğraş. Deneyler semenderler, fareler ve yunuslar gibi çeşitli türlerdeki hayvanlar arasındaki beklenmedik 'Niceliği ayırt etme' kapasitesinin olduğunu ortaya koyuyor. Her ne kadar atlar hâlâ karekök hesaplayamasalar da bilim insanları hayvanların sayısal becerilerinin daha evvel düşünülenden daha karmaşık olduğuna inanıyorlar. Tüm hayvanlar matematiğe eğilimli birer beyinle doğuyormuş gibi görünüyor.

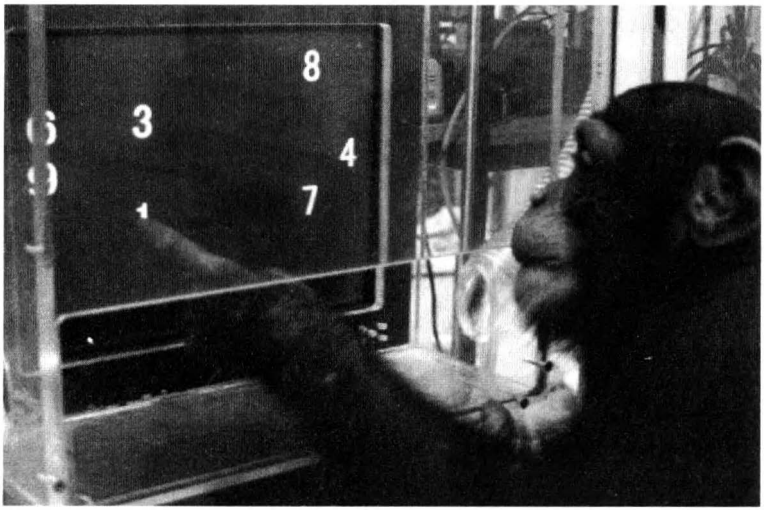
Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Nihayetinde vahşi yaşamda hayatta kalabilmek için sayısal bir yeterlilik çok önemli. Bir şempanze kafasını kaldırıp ağaca baktığında yiyebileceği olgunlaşmış meyve miktarını hesaplayabiliyorsa aç kalma ihtimali az demektir. Sussex Üniversitesi'nden Karen McComb, Serengeti'de aslanlar topluluğunun diğer aslanlara saldırırken sayısal duyumlarını kullanıp kullanmadıklarını ortaya koymak için gözlemlerde bulundu. Deneylerden birinde yalnız bir dişi aslan şafakta sürüsünün bulunduğu yere geri dönüyordu. McComb çalıların arkasına hoparlör gizlemişti ve tek bir kükreme sesi verdi. Dişi aslan bu sesi duydu ve evine doğru yürümeye devam etti. İkinci deneyde beş dişi aslan bir aradaydı. McComb üç aslanın kükremesini hoparlörden verdi. Beşli grup kükremeyi duydu ve sesin geldiği yöne doğru dikkatle baktılar. Dişi aslanlardan biri kükredi ve kısa bir süre sonra beş aslan saldırmak için çalılıklara doğru harekete geçmişlerdi. McComb'un vardığı sonuç, aslanların nicelikleri kafalarında tarttığı yönündeydi. Bire bir, saldırmak için çok riskli demekti, ama beşe üç avantajdı ve saldırı gerçekleşiyordu.

Elbette sayılar ile ilgili hayvan araştırmalarının tümü bir şempanzeyle ilişki kurmak ya da Serengeti'de kamp yapmak gibi büyüleyici değildir. Almanya'daki Ulm Üniversitesi'nde akademisyenler sahra çöl karıncalarını bir tünelin ucuna koydular ve onları yiyecek aramaya gönderdiler. Ancak yiyeceğe ulaştıklarında karıncalardan bazılarının ayaklarının altları kesildi ve bazılarının ayakları domuz kılı eklenerek uzatıldı (Bu işlem düşünüldüğü kadar acımasızca bir işlem değildir, çünkü çöl karıncalarının ayakları sahra güneşi nedeniyle hissizdir). Uzun bacaklılar yuvalarını geçerken kısa bacaklı karıncalar yuvalarından önce durdular, bu da karıncaların mesafeler için gözlerini kullanmak yerine içsel bir adım sayıcı mekanizma kullandıkları sonucunu ortaya çıkardı. Karıncaların o muhteşem saatlerce yürüyüp daima yuvalarına geri dönebilme becerileri belki de adımlarını sayabilme konusundaki becerilerinden kaynaklanmaktadır.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org





Ayumu bu görevde basıldığında beyaz karelere dönüşen 1'den 7'ye kadar olan sayılara dokunmaktadır. Ödül olarak yiyecek kazanabilmesi için karelere hafifçe vurarak sayıların konumlarını anımsamak zorundadır.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Hayvanların sayısal kabiliyetleri üzerine yapılan araştırmalar hiç beklenmeyen noktalara da ulaştı. Şempanzelerin matematiksel yeterliliği sınırlı olabilir, ama çalışmasını yürütürken Matsuzawa şempanzelerin bizlerden üstün olan başka bilişsel becerileri olduğunu keşfetti.

2000 yılında Ai, dünyaya Ayumu adında erkek bir yavru getirdi. Primat Araştırma Enstitüsü'nü ziyaret ettiğim gün Ayumu annesinin yanındaki sınıftaydı. Daha küçüktü ve yüzünde ve ellerinde pembe derisi ve daha siyah kıllar vardı. Ayumu bilgisayarının önüne oturmuş parıldayan rakamlara basıyor ve başarılı olduğundaysa elma küplerini hapur hupur yiyordu. Gruptaki baskın dişinin oğlu ve varisi olmanın sağladığı ayrıcalıklı statüsüyle kendisine güveni olan bir genç adamdı.

Ayumu'ya bilgisayarı nasıl kullanacağı hiçbir zaman öğretilmedi, ancak bebekken her gün sınıfta annesinin yanında oturuyordu. Matsuzawa bir gün sınıfın kapısını yarıya, sadece Ayumu'nun girebileceği ama Ai'nin ona katılması için dar olacak kadar açtı. Ayumu doğruca bilgisayar ekranının başına gitti. Araştırmacılar neler öğrendiğini görmek için heyecanla onu izlediler. Çalıştırmak için ekrana dokundu ve 1 ve 2 rakamları göründü. Bu basit bir sıralama göreviydi. Ayumu 2'ye dokundu. Yanlış. Tekrar ikiye bastı. Tekrar yanlış. Ardından 1 ve 2'ye aynı anda basmayı denedi. Yine yanlış. Nihayetinde doğruyu buldu: 1'e ve ardından 2'ye bastı ve avucuna bir elma küpü düştü. Kısa bir süre sonra Ayumu bilgisayar görevlerinin hepsinde annesinden daha iyiydi.

Birkaç sene önce Matsuzawa yeni bir bilgisayar görevi oluşturdu. Ekrandaki çalıştırma düğmesine basınca 1 ila 5 arasındaki sayılar rastgele bir sırayla görünüyordu. 0.65 saniye sonra sayılar küçük beyaz karelere dönüşüyorlar. Görev beyaz karelere hangi karenin hangi sayı olduğunu hatırlayarak doğru sırayla basmak.

Ayumu bu görevi yaklaşık % 80 doğrulukta tamamladı ve bu oran ortalama Japon çocukları ile aynıydı. Bunun ardından Matsu-

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

zawa sayıların görünür olduğu süreyi 0.43 saniyeye düşürdü ve bu durum Ayumu için neredeyse hiçbir fark oluşturmazken çocukların başarısında ciddi bir düşüş gerçekleşti ve % 60'lara indi. Matsuzawa sayıların gözüktüğü zaman dilimini tekrar azaltıp 0.21'e indirdiğinde, Ayumu hâlâ % 80 başarı gösterirken çocukların başarısı % 40'a düştü.

Deney, Inuyama'daki tüm şempanzelerle birlikte Ayumu'nun da sıradışı bir görsel hafızaya sahip olduğunu ortaya çıkardı ancak hiçbiri Ayumu kadar iyi değildi. Daha sonraki deneylere Matsuzawa gözüken rakam sayısını arttırdı ve şimdi Ayumu sadece 0.21 saniye gözüken sekiz rakamın sırasını hatırlayabiliyor. Matsuzawa ayrıca zaman aralığını da düşürdü, Ayumu artık sadece 0.09 saniye gözüken beş rakamın sırasını hatırlayabiliyor ki bu insanlar için bırakın hatırlamayı, rakamların ne olduğunu görebilmek için bile sınırda bir zaman. Bu şaşırtıcı aniden ezberleme yeteneği örneğin vahşi yaşamda düşmanların sayısını ezberlemenin hayatta kalmak için çok önemli olmasından kaynaklanıyor olabilir.

Hayvanların sayısal becerilerindeki sınırlar üzerine yapılan çalışmalar bizi doğal olarak insanın doğuştan gelen becerilerini sorgulamaya götürüyor. Bilim insanları bilgi edinme yöntemiyle saflığı bozulmamış olabildiğince genç zihinleri incelemek istiyorlar. Sonuç olarak, sadece birkaç aylık bebeklerin matematiksel becerileri düzenli olarak test ediliyor. Bu büyüklükteki bebekler doğru düzgün konuşamadıkları ve uzuvlarını kontrol edemedikleri için sayısal hünerlerinin test edilmesi için gözlerinden faydalanılıyor. İlginç buldukları resimlere daha uzun süre baktıklarına dair bir teori var. 1980 yılında Pennsylvania Üniversitesi'nden Prentice Starkey, 16 ve 30 haftalık arasındaki bebeklere üzerinde iki nokta bulunan bir ekran ve üzerinde iki nokta bulunan başka bir ekran gösterdi. Bebekler ekrana 1.9 saniye baktılar. Starkey testi iki noktalı ekranın ardından üç noktalı ekran göstererek tekrarladığında bebekler ekrana 2.5 saniye yani neredeyse üçte biri

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

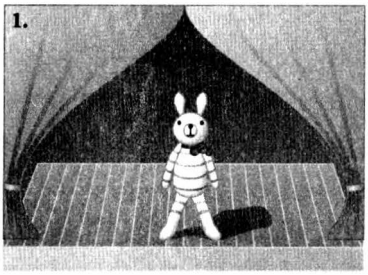
kadar daha uzun bir süre baktılar. Starkey bu ekstra bakma süresinin, bebeklerin iki noktalı ekran ile üç noktalı ekranı kıyaslayarak farklı bir şey gördüklerini ve dolayısıyla ilkel bir sayı algıları bulunduğunu ileri sürdü. Dikkat süresini temel alarak sayısal idrak üzerine karar verme yöntemi günümüzde standart bir yöntemdir. 2000 yılında Harvard Üniversitesi'nden Elizabeth Spelke altı aylık bebeklerin 8 ile 16 nokta arasındaki farkı anlayabildiklerini gösterdi ve 2005 yılında da 16 ila 32 arasındaki farkı anlayabildiklerini ortaya koydu.

Benzer bir deney de bebeklerde aritmetik kavrayışının bulunduğunu gösterdi. 1992 yılında Arizona Üniversitesi'nden Karen Wynn beş aylık bir bebeği küçük bir sahnenin önüne oturttu. Bir yetişkin sahneye bir Mickey Mouse bebeği koydu ve bebeği gizlemek için paravanı kaldırdı. Yetişkin sahneye bir tane daha Mickey Mouse bebeği yerleştirdi ve görünmeleri için paravanı indirdi. Wynn deneyi tekrarladığında, ekranda *yanlış* sayıda bebek gösterdi: Sadece bir bebek ya da üç tane. Cevabın iki olması gerektiği zamanlarda sadece bir ve üç tane bebek olduğu zamanlarda bebek sahneye daha uzun süre bakıyordu, bu da bebeğin işlemin yanlış olmasına şaşırdığı anlamına geliyordu. Wynn, bebeklerin bir bebek artı bir bebeğin iki bebek etmesi gerektiğini bildiklerini ileri sürüyor.

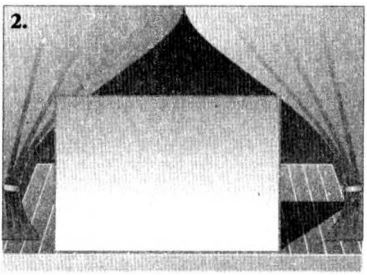
Mickey Mouse deneyi daha sonra susam sokağı karakterleri olan Elmo ve Ernie'yle tekrarlandı. Elmo sahneye yerleştirildi. Paravan indirildi. Sahne arkasındaki başka bir Elmo sahneye yerleştirildi. Paravan kaldırıldı. Bazen iki Elmo bazen de bir Elmo ve bir Ernie birlikte, bazen sadece bir Elmo ve sadece bir Ernie gösterildi. Bebekler sadece tek bir kukla gösterildiği zamanlarda yanlış iki kukla gösterildiği zamanlardan daha uzun süre sahneye baktılar. Başka bir ifadeyle 1 + 1 = 1'in aritmetiksel imkânsızlığı Elmo'ların Ernie'lere dönüşmesinden daha rahatsızlık vericiydi. Bebeklerin matematik yasaları konusundaki bilgileri fiziksel bilgilerinden daha köklü gözüküyor.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

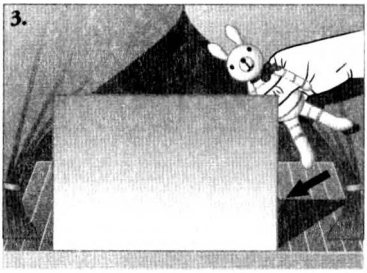
İsviçreli psikolog Jean Piaget (1896-1980) bebeklerin sayı kavrayışlarının tecrübeyle birlikte yavaş yavaş kurulduğunu söylüyordu, bu nedenle altı ya da yedi yaşın altındaki çocuklara aritmetik öğretmenin bir anlamı yoktu. Bu, nesiller boyunca eğitimcilerin ilkokuldaki çocuklara düzgün bir matematik eğitimi vermek yerine derslerde bloklarla oynamalarına izin vermelerine neden oldu. Öğrenciler Arap rakamlarıyla ilkokuldan sonra yüz yüze geldiler.



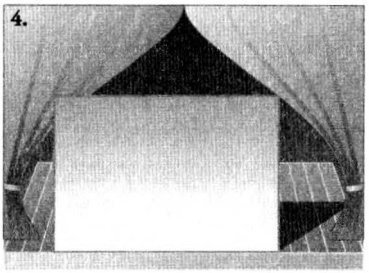
1. Karakter sahneye yerleştirilir.



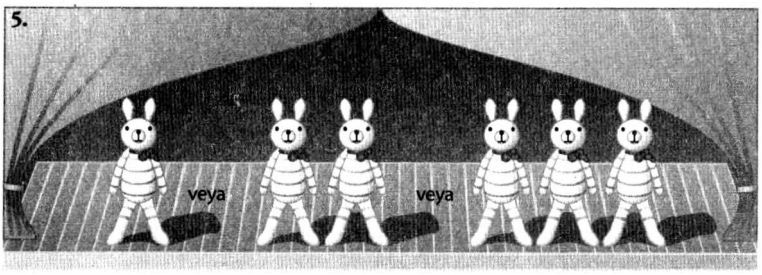
2. Paravan belirir ve karakteri gizler.



3. İkinci karakter paravanın arkasına yerleştirilir.



4. Paravan karakteri gizler.



5. Yukarıdaki durumlardan birinin gösterilmesi için paravan kaldırılır.

Karen Wynn'ın deneyinde bebekler, paravan arkasındaki oyuncak bebeklerin doğru sayısını ayırt etme becerileri üzerine test ediliyorlar.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

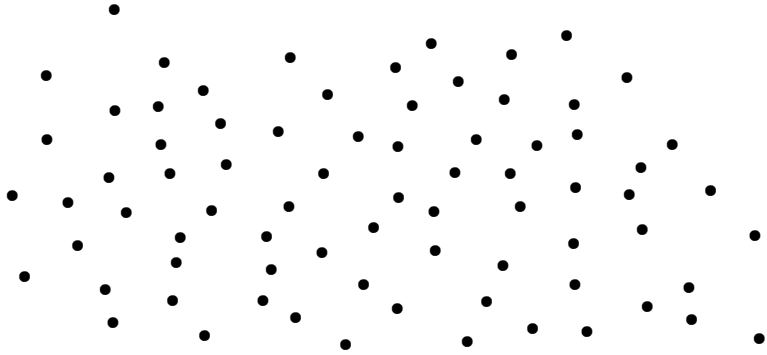
Nokta deneyler aynı zamanda yetişkinlerin sayısal kavrayış araştırmalarında da köşe taşıdır. Klasik bir deneyde kişiye ekranda noktalar gösterilir ve kaç tane nokta gördüğü sorulur. Bir, iki ya da üç nokta gösterildiğinde cevap neredeyse anında gelir. Dört nokta gösterildiğinde ise cevap ciddi ölçüde yavaşlar beş noktada ise daha da yavaşlar.

'Ne olmuş yani!' diyebilirsiniz. İşte bu, birçok kültürde 1, 2 ve 3 rakamlarının bir, iki ve üç çizgi ile ifade edildiğini ama 4 rakamının dört çizgiyle ifade edilmediğini açıklamaktadır. Üç ya da az çizgi bulunduğunda çizgilerin sayısını derhal söyleyebiliriz, ancak dört çizgi olduğu zaman beynimiz daha fazla iş yapmak zorundadır bu nedenle başka bir sembolün kullanılması gerekir. Bir ile dört arasındaki Çince semboller 一, 二, 三 ve 四 dır. Antik Hintçe ise 𑁒, 𑁓, 𑁔 ve 𑁕 . Eğer bu çizgileri birleştirirseniz modern rakamlar olan 1, 2, 3 ve 4'e nasıl dönüştüklerini görebilirsiniz.

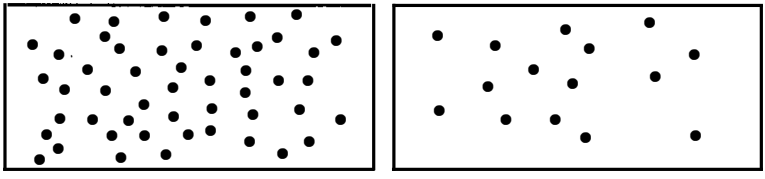
Aslında bir bakışta kavrayabileceğimiz çizgi sayısının üç ya da dört olduğu üzerine farklı görüşler vardır. Romalıların dört için IIII ve IV şeklinde alternatifleri vardı. IV bir bakışta daha kolay fark ediliyor, ama Romalılar –belki de estetik sebeplerden– IIII sembolün kullanılmasını istemediler. Hızlı, kendimize güvenerek ve kesin bir biçimde, sayabileceğimiz nokta, çizgi ya da kaplan dişi sayısı kesinlikle dörtten fazla değildir. 1, 2 ve 3'ü kesin bir biçimde algılayabiliriz ancak 4'ün ötesinde kesinlik duygumuz azalır ve sayılar hakkındaki yargılarımız yaklaşık değerler haline gelir. Örnek olarak bir sonraki sayfada üstte kaç tane nokta olduğunu hızlıca tahmin etmeye çalışın.

Bu imkânsızdır (Elbette *Yağmur Adam* filminde Dustin Hoffman'ın canlandırdığı karakter gibi birkaç saniye bakıp 'yetmiş beş' diye mırıldanan dahi bir otistik değilseniz). Tek stratejimiz tahmin etmek olacaktır ve muhtemelen yakın bir tahmin bile olmayacaktır.

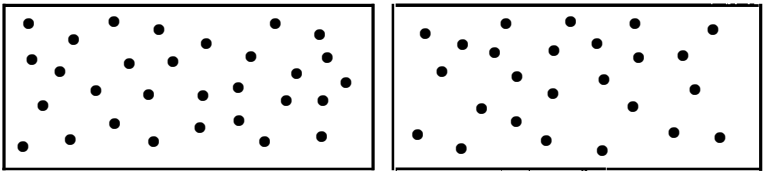
Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org



Araştırmacılar miktar algımızın uzamını belirlemek için testler yaptılar ve gönüllülere üzerlerinde farklı sayılarda noktalar bulunan imgeler gösterdiler ve noktaları ayırt etme becerimizin benzerlikler taşıdığı ortaya çıktı. Örneğin 80'li bir grupla 100'lü bir grup arasındaki farkı anlamak, 81'li ve 82'li bir grup arasındaki farkı anlamaktan daha kolay. Aynı biçimde 20 ve 40 arası noktadan oluşan grupların farkını söylemek 80 ile 100 arası noktadan oluşan grubun farkını söylemekten daha kolay. Aşağıda, hem A hem de B için sol kümedeki nokta sayısı sağ kümedeki nokta sayısından daha fazla, buna rağmen B grafiğinde bu bilgiyi edinmek için ihtiyaç duyduğumuz süre dikkat çekici bir miktarda daha uzun.



Kutu A



Kutu B

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Bilim insanları kıyaslama gücümüzün çarpma ilkesi gibi matematik yasalarına nasıl katı bir şekilde bağlı olduğu konusunda şaşkınlığa düştüler. *Sayı Duygusu* adlı kitabında Fransız Bilişsel bilimcisi Stanislas Dehaene 10 ila 13 nokta arasındaki farkı % 90 kesinlikle ayırt edebilen bir insan örneği veriyor. İlk küme iki katına çıkartılıp 20 nokta yapılırsa aynı kişinin tekrar % 90 kesinlikle bilebilmesi için ikinci kümeye kaç tane nokta eklenmesi gerekir? Cevap ilk kümenin *tam iki katı* olarak 26'dır.

Hayvanlar da noktalı kümeleri kıyaslayabiliyorlar. Bizler kadar yüksek sonuçlar elde edemeseler de, becerilerini yöneten aynı matematik yasalarıdır. Bu oldukça dikkat çekici. İnsanlar ayrıntılı bir sayma sistemine sahip olma konusunda eşsizdir. Hayatlarımız sayılarla dolu. Ama büyük sayıları algılama ve tahminlerde bulunma konusuna gelince beyinlerimiz tüylü ve kıllı dostlarımız gibi iş görüyor.

İnsanların nicelikler üzerine olan algıları, milyonlarca yılın ardından sayıların yaratılmasına yol açtı. Bunun tam olarak nasıl gerçekleştiğini bilmek imkânsız, ama ayların, dağların, yırtıcıların ya da davul ritimlerinin takip edilmesi arzusu ile ortaya çıktığını iddia etmek akla yatkın görünüyor. Başlangıçta izini sürdüğümüz şeyle birebir karşılığı sağlamak için parmaklarımız ya da bir odun üzerine atılmış çentikler gibi görsel semboller kullanmış olabiliriz, iki parmak ya da iki çentik iki mamut anlamına gelebilir ya da üç parmak ya da üç çentik sadece üç demektir. Daha sonra iki çentik ya da üç parmak kavramlarına karşılık gelen kelimeler ürettik.

Takip edecek daha fazla nesne olmaya başladıkça, sayılar için bulduğumuz kelimeler ve semboller giderek artan bir hızla genişledi ve günümüzde istediğimiz büyüklüklere kadar sayabileceğimiz tam olarak gelişmiş bir tam sayı sistemimiz var. Sayıları tam olarak ifade edebilme becerimiz, örneğin önceki sayfada üstteki resimde tam olarak 75 nokta

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

var diyebilmek, daha temel bir becerimiz olan bu tip nicelikleri tahmini algılama yeteneğimiz ile sıkı bir ilişki içindedir. İçinde bulunduğumuz koşula göre hangisini seçeceğimize karar veririz: Örneğin bir süpermarkette, ürünlerin fiyatlarına baktığımızda tam sayı algımızı kullanırız. Ama en kısa satış sırasına girmeye karar verdiğimizde içgüdüsel olan tahmin yürütme algımızı kullanırız. Tüm sıralardaki her bir insanı saymayız. Sıralara bir bakar ve hangisinin daha az olduğunu tahmin ederiz.

Gerçekte, sayılara karşı, kesin olmayan yaklaşımımızı sürekli kullanırız, hatta kesinlik belirten terimleri kullanırken bile. Birisine işe gitmesinin ne kadar sürdüğünü sorun, yanıtların çoğunun 'Otuz beş, kırk dakika' gibi ifadeler olduğunu göreceksiniz. Aslında ben nicelik gerektiren bu tip sorulara kesin bir sayı ile cevap veremediğimi keşfetmiştim. Partide kaç kişi vardı? 'Yirmi, otuz...' Ne kadar kaldın? 'Üç buçuk, dört saat...' Ne kadar içtin? 'Dört, beş . . . on . . .' eskiden kararsız bir kişi olduğumu düşünürdüm. Şimdi o kadar emin değilim. Artık sayılarla içimden gelen bu sezgisel ve hayvansal bir eğilim olan tahminlerle iş görme dürtüme göre hareket ettiğimi düşünmeyi tercih ediyorum.

Yaklaşık bir sayı algısı hayatta kalmak için temel bir gereklilik olduğu için, bütün insanlarda benzer eğilimlerin olması gerektiği düşünülebilir. 2008 yılında Johns Hopkins Üniversitesi ve Kennedy Krieger Enstitüsü'ndeki psikologlar 14 yaş grubunda bunun geçerli olup olmadığını araştırdılar. Gençlere bir ekranda 0.2 saniye süresince çeşitli sayılarda mavi sarı noktalar gösterildi. Sonuçlar araştırmacıları şaşkına çevirdi. Çünkü sonuçlar beklenmeyen bir çeşitlilik sergiliyordu. Bazı öğrenciler 9 mavi ve 10 sarı nokta arasındaki farkı kolayca anlayabilirken, diğerleri bebeklerle kıyaslanabilecek bir beceri sergileyip 5 sarı ve 3 mavi nokta arasındaki farkı zar zor anlayabiliyorlardı.

Gençlerin nokta kıyaslama becerileri ve anaokul aritmetik becerileri kıyaslandığında daha da şaşırtıcı bir bulgu gün ışığına çıktı. Araştır-

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

macılar daha önce sezgisel olan noktaları ayırt edebilme becerisinin denklem çözme ve üçgen çizme gibi görevleri yerine getirmek konusunda bir katkısı olmadığını düşünüyorlardı. Ama bu çalışma, hesaplama ve okullarda öğretilen matematik arasında güçlü bir karşılıklı ilişkinin varlığını tespit etti. Sayı tahmininde daha iyi olan öğrencinin okulda daha iyi bir not alma şansı daha yüksekti. Bu bulgunun eğitim adına ciddi sonuçları olabilirdi. Eğer tahmin etme kabiliyeti matematiksel beceriyi besliyorsa, belki de matematik derslerinde çarpım tablolarının daha az, nokta kümelerini kıyaslama becerisini geliştiren çalışmaların daha çok yer alması gerekir.

***

Stanislas Dehaene, türdeş sayısal kavrayış üzerine türdeş alanlı çalışmaların belki de öncüsü. İşe bir matematikçi olarak başladı, şimdi ise Collège de France'da nöroloji profesörü ve Paris yakınlarındaki son teknoloji NeuroSpin araştırma enstitüsünün yöneticisi. *Sayı Duygusu* kitabını 1997 yılında yayınladıktan kısa bir süre sonra, Paris bilim müzesinin kantininde Harvard'da gelişim psikologu olarak görev yapan Elizabeth Spelke ile bir yemek yedi. Şans eseri orada Pierre Pica'nın yanında oturmuşlardı. Heyecan verici bir tartışmadan sonra Pica, Munduruku'lar ile yaşadığı tecrübeleri paylaştı ve üçü ortaklaşa çalışmaya karar verdiler. Sayma sistemleri olmayan bir topluluk üzerine çalışmak mükemmel bir yeni çalışma alanı fırsatıydı.

Dehaene, Pica'nın Amazonlar'a götürebileceği türden deneyler geliştirdi ve bir tanesi oldukça basitti: Sayı kelimelerinden ne anladıklarını öğrenmek istiyordu. Yağmur ormanlarına geri döndüğünde Pica, gönüllülerden oluşan bir grup oluşturdu ve ekran üzerinde çeşitli sayılarda noktalar gösterdi ve yüksek sesle kaç tane nokta gördüklerini söylemelerini istedi.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Munduruku sayıları şu biçimdedir:

bir	*põg*
iki	*xep xep*
üç	*ebapug*
dört	*ebadipdip*
beş	*põg pogbi*

Ekranda sadece bir tane nokta olduğunda Munduruku *Põg* der. İki nokta olduğunda *xep xep*. Ama ikiden sonrası kesin değildir. Üç nokta gösterildiğinde *ebapug* deme oranları % 80'di. Dört noktaya verdikleri tepki % 70. Beş nokta gösterildiğinde cevap olarak *põg pogbi* sadece % 28 oranında ve *ebadipdip* % 15 oranında verilmişti. Başka bir ifadeyle üç ve yukarısı için Munduruku sayı kelimeleri gerçekten de tahminlerden ibaretti. 'Bir', 'iki', 'üçümsü', 'dördümsü', beşimsi' şeklinde sayıyorlardı. Pica kelime manası olarak 'Bir avuç' anlamına gelen *põg pogbi*'nin gerçekten bir sayı olarak nitelendirilip nitelendirilemeyeceğini merak ediyordu. Belki de beşe kadar değil de dördümsüye kadar sayıyorlardı?

Pica sayı kelimelerinin başka bir dilsel özelliğini daha keşfetti. Bir ile dört arasındaki kelimelerin hece sayısının karşılık geldiği rakam kadar olduğunu gösterdi. Bu gözlem onu gerçekten de heyecanlandırdı. 'Heceler adeta saymanın işitsel bir yolu gibi' dedi. Romalılar da aynı biçimde I, II, III ve IIII olarak sayıyorlar ama beşte V harfini kullanıyorlardı, Munduruku'lar bir heceyle başlıyor iki için bir tane daha ekliyor, üç için bir tane daha, dört için başka bir tane daha ekliyorlar ama beş için bir hece daha eklemiyorlardı. İki ve üç için kullanılan kelimeler kesin olarak kullanılmasa da kesin sayıda hece içeriyorlardı. Hece sayısı artık önemli olmadığında kelimenin kendisi belki de sayı kelimesi olmuyordu. 'Bu harika, çünkü insanların aynı anda sadece dört nesnenin izini sürebildikleri düşüncesiyle uyuşuyor' dedi Pica.

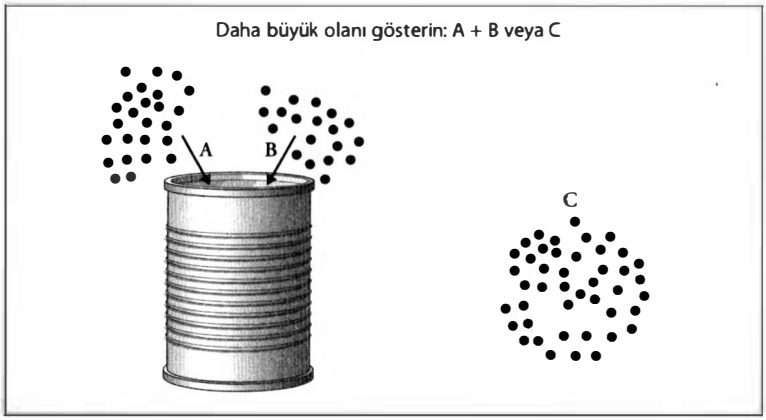
Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Pica, ayrıca Munduruku'ların büyük sayı tahminlerini de test etti. Testlerden birinde, deneklere arka sayfada gösterildiği gibi, bilgisayar ekranında boş bir teneke kutuya dolan iki nokta kümesinin animasyonu gösterildi. Deneklere bu iki nokta grubunun kutu içinde toplanıp toplanmadığı soruldu –noktalar kıyaslama için bu aşamada görünür değillerdi– ekranda üçüncü kümeden daha fazla nokta görünüyordu. Bu onların toplama işlemini de yaklaşık tahminler cinsinden yapıp yapmadığını test ediyordu. Testin sonucu aynı teste tutulan yetişkin Fransızlardan alınan sonuca benziyordu.

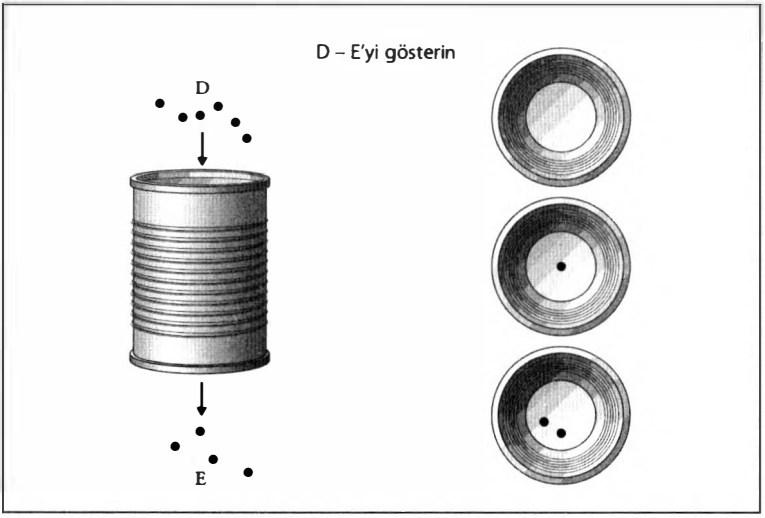
Benzer bir deneyde, aynı şekilde o da arka sayfada gösteriliyor, Pica'nın bilgisayarının ekranından altı noktanın bir teneke kutuya dolduğu ve kutudan dört noktanın çıktığı bir animasyon gösterildi. Ardından Munduruku'lara tenekede kaç tane nokta kaldığına dair üç seçenek sunuldu. Başka bir ifadeyle, 6 eksi 4'ün kaç olduğu? Bu görevi tamamlayamadılar. Test sayıların 6, 7 ya da 8 noktayla tekrarlandığında da cevap veremediler. 'En basit durumların hesabını bile yapamıyorlardı' dedi Pica.

Bu nokta deneylerinin sonucu, Munduruku'ların büyük miktarlar ile başa çıktıklarını ama beşin üstündeki sayılarda berbat olduklarını gösterdi. Pica, Munduruku'lar ve batılılar arasında ortaya çıkan bu benzerliklere hayran kalmıştı: Her iki toplulukta tam olarak iş gören, küçük sayıları takip ederken tam sayı sistemi, büyük sayıları takip ederken tahmini hesap sistemi vardı. En önemli fark ise beşten büyük sayılara ulaşmak için Munduruku'ların birbirinden bağımsız bu iki sistemi birleştirmeyi başaramamış olmasıydı. Pica, bunun sebebinin muhtemelen bu iki sistemi birbirinden ayrı tutmanın daha faydalı olması olduğunu söyledi. Kültürel farklılıklara duyulan ilgi içinde, Munduruku'ların sayma biçimlerini korumanın önemli olduğunu iddia ediyor çünkü Brezilyalı yerleşimciler ve yerlilerin kaçınılmaz olarak artan temasları bu durumu tehdit eder hale gelecek.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org



Tahmini toplama ve kıyaslama



Tam olarak çıkarma.

Aslına bakılırsa, bazı Munduruku'ların Portekizce saymayı öğrenmeleri ancak basit aritmetiği kavrayamamış olmaları gerçeği kendi matematiksel sistemlerinin ne kadar güçlü olduğunun ve kendi ihtiyaçlarına nasıl uygun geldiğinin bir göstergesi. Aynı zamanda beşten büyük tam sayıları kavrayabilmek için yapılması gereken kavramsal bir sıçramanın nasıl zor olduğunu da gösteriyor.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

İnsanlar sayıları tam olarak anlamak için dörtten yukarı sayı kelimelerine ihtiyaç duyuyor olabilirler mi? University College London'dan Profesör Brian Butterworth buna ihtiyaç olmadığına inanıyor. Beynin tam sayıları anlamak için doğumla gelen 'Tam sayı modülü' adını verdiği bir kapasitesinin bulunduğuna inanıyor. Çıkarımlarına göre insan küçük bir topluluk içindeki belirli sayıda nesneyi anlayabiliyor ve bu topluluğu tek tek yapılan eklemelerle daha büyük sayıların davranışlarını kavrayabiliyoruz. Araştırmalarını Amazon'un dışında, neredeyse hiçbir sayı kelimesi bulunmayan tek yerinde sürdürüyordu.

Warlpiri aborijin topluluğu Alice Springs civarında yaşıyorlar ve sayı kelimesi olarak dillerinde sadece bir, iki ve çok var ve Carpentaria Körfezi, Groote Eylande'da Anindilyakwa yerlilerinde ise sadece bir, iki, üç (bazen dört anlamına da geliyor) ve çok var. İki grubun çocuklarıyla yapılan bir deneyde bir tahta bloğunun üzerine bir çubukla en fazla yedi kez olacak şekilde vuruldu ve vurma sayısı kadar tahta parçası bir hasırın üzerine dizildi. Bazen vurma sayıları ve dizilen tahtalar birbirini tutuyor, bazense tutmuyorlardı. Çocuklar sayıların tutup tutmadığını mükemmel bir biçimde söyleyebiliyorlardı. Butterworth, doğru cevabı verebilmek için çocukların, hem işitsel hem de görsel numaralandırma için yeterli olacak ölçüde soyut zihinsel bir tam sayı tasarımı gerçekleştirebildiklerini ileri sürdü. Bu çocukların dört, beş, altı ve yedi için kullandıkları bir kelime yoktu, ama bu miktarları akıllarında mükemmel bir biçimde tutabiliyorlardı. Butterworth'un vardığı sonuç şuydu: Kelimeler kesinliği anlamak için kullanışlıdır ama zorunlu değildirler.

Butterworth'un –Stanislas Dehaene'nin– çalışmasının önemli bir başka noktası diskalkuli adı verilen bir durum ya da sayı algısının kusurlu olduğu sayı körlüğüydü. Tahmini olarak toplumun % 3 ila 6'sında görülmektedir. Diskalkuli'ler sayıları başkaları gibi anlamazlar. Örnek olarak, aşağıdaki sayılardan hangisi daha büyüktür?

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

65 24

Çok kolay, 65. Neredeyse hepimiz doğru cevabı yarın saniyede buluruz. Ama eğer sizde sayı körlüğü varsa cevabı vermek üç dakika sürebilir. Bu durumun biçimi kişiden kişiye değişmektedir, ama sayı körlüğü tanısı konan kişiler genellikle bir sayı kelimesi ile sayı sembolünü karşılıklı olarak ilişkilendirmekte zorluk çekerler, örnek olarak 5 sembolünü karşılık gelen nesne sayısıyla ilişkilendiremezler. Onlar için saymak da zordur. Sayı körü olmanız sayamayacağınız anlamına gelmez, ama temel sayı algısından yoksun olduğu için sıkıntılar yaşar ve günlük yaşamda sayılarla başa çıkmak için sayarken parmaklarını kullanmak gibi alternatif stratejiler kullanır. İleri derecede sayı körü olanlar saatin kaç olduğunu zar zor söylerler.

Eğer okuldaki bütün derslerinizde başarılıysanız ve sadece matematik sınavlarında başarısız oluyorsanız sayı körü olabilirsiniz (Ancak matematikten sürekli kaldıysanız bu kitabı muhtemelen okumazsınız). Bu durum düşük matematiksel becerinin başlıca sebebi olarak düşünülür. Sayı körlüğünü anlamanın toplumsal bir önemi var, çünkü matematiksel beceriden yoksun insanlar genellikle işsizdirler ve çevreleri tarafından baskı altına alınırlar. Ama sayı körlüğü az da olsa anlaşılmaya başlandı. Yazı körlüğünün sayı çeşidi olduğu düşünülüyor: İki durum da toplumda aşağı yukarı aynı oranda bulunuyor ve zekânın hiçbir çeşidiyle herhangi bir ilişkileri yok. Ama yazı körlüğü, sayı körlüğünden çok daha fazla biliniyor. Aslında yazı körlüğü hakkında bulunan akademik makalelerin sayısının sayı körlüğü hakkında yazılan makalelerden on kat fazla olduğu tahmin edilmekte. Sayı körlüğünün neden bu kadar geride olduğunun nedenlerinden birisinin matematikte başarısız olmak için başka nedenlerin de bulunması—ders okullarda genellikle kötü bir biçimde öğretiliyor ve eğer önemli kavramlardan birinin anlatıldığı bir dersi kaçırırsanız geri kalmanız çok kolay. Ayrıca toplumda

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

matematik konusunda başarısız olmak konusunda okumada başarısız olma hakkında daha az sosyal tabu bulunuyor.

Brian Butterworth, sürekli olarak potansiyel işverenlere sayı körlüğü çeken insanlar hakkında matematikteki başarısızlıklarının tembellik ya da zekâdaki bir kusurdan kaynaklanmadığını açıklayan başvuru yazıları yazıyor. Sayı körleri sayılar dışındaki tüm alanlarda yüksek başarılar elde edebilirler. Butterworth, sayı körlerinin matematikte bile başarı elde edebileceklerini söylüyor. Matematiğin sayılar ya da denklemler yerine tümdengelimsel akıl yürütmeyi ya da uzamsal farkındalığı ön plana çıkaran mantık ve geometri gibi birçok dalı bulunmaktadır. Ama sayı körleri genellikle matematikte başarılı değillerdir.

Sayı körlüğü testlerinin birçoğu davranışsaldır, bu testlerde okul çağındaki on binlerce çocuğa bilgisayar ekranında iki sayı gösterilerek hangisinin daha büyük olduğu sorulur. Bazıları nörolojiktir ve okuma körü olan ve olmayan deneklerin beyinlerinde, devresel farklılıkların görülmesi için manyetik titreşim taramaları yapılır. Bilişsel bilimde, zihinsel bir becerinin anlaşılması genellikle iş görmeyen bu becerilerin incelenmesi yoluyla gerçekleşir. Yavaş yavaş, sayı körlüğünün ne olduğuna ve sayı duygusunun beyinde nasıl iş gördüğüne dair daha net bir resim oluşmaktadır.

Aslında, sayısal idrak alanındaki en heyecan verici yeni keşifler nörobilim sayesinde olmaktadır. Günümüzde belirli sayıdaki noktayı düşünen bir maymunun beynindeki ilgili nöronlarda neler gerçekleştiğini görmek mümkündür.

Güney Almanya'daki Tübingen Üniversitesi'nden Andreas Nieder, rhesus maymununu bir sayıyı düşünecek biçimde eğitti. Bunu bilgisayar ekranında birer saniye aralıkla nokta kümeleri göstererek yaptı. Eğer maymunlar ilk dizinin, ikinci diziye eşit olduğunu düşünürlerse yandaki bir kolu çekip ödül olarak bir yudum meyve suyu kazanıyorlardı. Eğer ilk dizi ikinci diziye eşit değilse meyve suyu kazanamıyorlardı. Yaklaşık

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

bir yıl sonra maymunlar sadece birinci ve ikinci ekrandaki noktalar eşit olduğunda kolu çekmeyi öğrendiler. Nieder ve meslektaşları ekranlar arasındaki bir saniyelik aralıklarda maymunların az önce gördükleri nokta sayısını düşündüklerini varsaydılar.

Nieder, maymunların sayıları akıllarında tuttuklarında beyinlerinde neler olduğunu öğrenmek istediğine karar verdi. Bu nedenle iki mikron çapında bir elektrotu kafatasları içindeki bir delikten nöral doku üzerine yerleştirdi. Endişelenmeyin maymunların hiç birinin canı yanmadı. Bu ölçekteki bir elektrot beyin üzerinde herhangi bir acıya ya da hasara neden olmadan hareket edecek kadar küçüktür (Araştırmalar için insan beynine bu tip elektrot yerleştirme işlemleri, sara gibi hastalıkların tedavisi gibi tedavi amaçlı uygulamalara izin verilse de ahlaki ilkelerle çelişmektedir). Nieder, elektrotu maymunun pre-frontal korteksinin bir kısmına denk gelecek biçimde yerleştirdi ve deneye başladı.

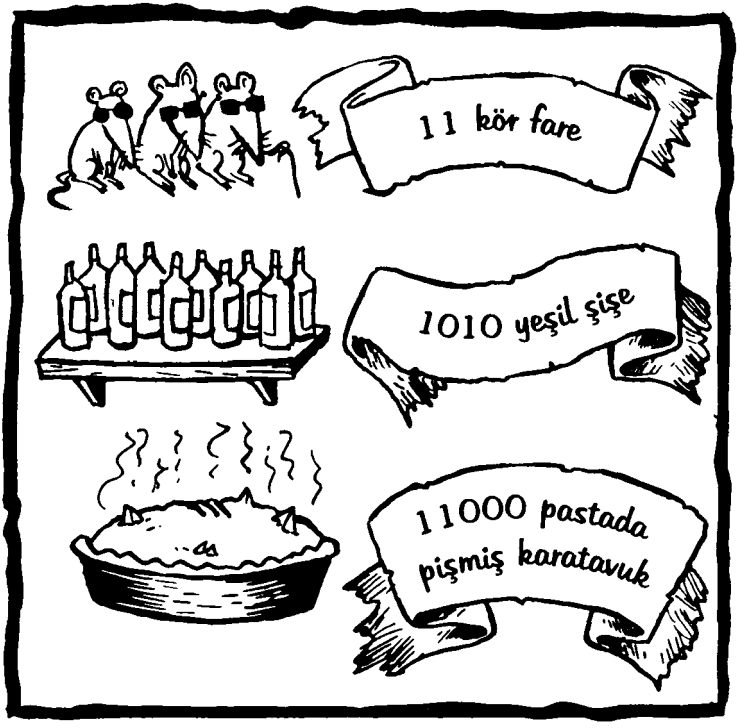
Elektrot o kadar hassastı ki herhangi bir nöronun elektriksel boşalımını tespit edebilirdi. Maymunlar sayıları düşündüğünde Nieder bazı nöronların oldukça hareketlendiğini gördü. Beyinlerinin bir bölümünü tamamen aydınlanmıştı.

Daha detaylı bir analizle Nieder muhteşem bir keşifte bulundu. Sayılara duyarlı nöronlar maymunların düşündüğü sayılara göre çeşitli yüklemelerde bulunuyordu. Ve her bir nöronun belirli bir sayısı, daha aktif hale geldiği 'tercih' ettiği bir sayı vardı. Örneğin bir rakamını tercih eden birkaç bin nöron bulunuyordu. Maymun bir rakamını düşündüğünde bu nöronlar pırıl pırıl oluyordu, ikiyi düşündüğünde daha az parlak ve üç, dört diğer sayılarda daha az parıldıyorlardı. İki rakamını da tercih eden başka bir nöron kümesi vardı. Bu nöronlar maymun iki rakamını düşündüğünde daha çok, bir ve üçü düşündüğünde daha az parıldıyorlardı. Ve üç rakamını ve dört rakamını da tercih eden başka nöron grupları vardı. Nieder deneyini 30 sayısına kadar sürdürdü ve her sayı için o sayıyı tercih eden bir nöron kümesi bulundu.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - https://rantey.org

Sonuçlar sezgilerimizin neden tahmini sayı anlayışını tercih ettiğini ortaya koyuyor. Bir maymun 'dört' sayısını düşündüğünde, elbette en hareketli nöronlar onu tercih eden nöronlardır. Ama aynı zamanda üçü ve beşi tercih eden nöronlar da aktif, ama daha az çünkü beyin aynı zamanda dördü çevreleyen sayıları da düşünüyor. 'Bu gürültülü bir sayı algısı' diye açıklıyor Nieder. Maymunlar nicelikselliği sadece yaklaşık olarak ifade edebiliyorlar.'

Aynı şeyin insan beyninde de gerçekleşiyor olması neredeyse kesin. Bu da ilginç bir soruyu ortaya çıkarıyor. Eğer beynimiz sayıları sadece tahmini yolla tasarımlayabiliyorsa, nasıl oldu da sayı denen şeyi icat edebildik. "'Tam sayı algısı' [benzersiz olarak] insana ait bir değer ve muhtemelen sayıları sembollerle oldukça kesin bir biçimde ifade edebilme becerimizden kaynaklanıyor' diye açıklıyor Nieder. Bu da sayıların kalıtsal olarak kazanılmış bir şey değil insanlar tarafından üretilen kültürel bir ölçüm nesnesi olduğu görüşünü pekiştiriyor.


11 kör fare
1010 yeşil şişe
11000 pastada pişmiş karatavuk

BÖLÜM BİR

Karşı Kültür

Orta çağda, Lincolnshire'da bir *pimp* ve bir *dik* toplandığı zaman bir *bumfit* elde edilirdi. Bunda ayıplanacak bir taraf yoktu. Bunlar sadece, koyunlarını saymak için çobanlar arasında kullanılan bir dildeki beş, on ve on beş anlamına gelen sayılardı. Tüm dizi şöyleydi:

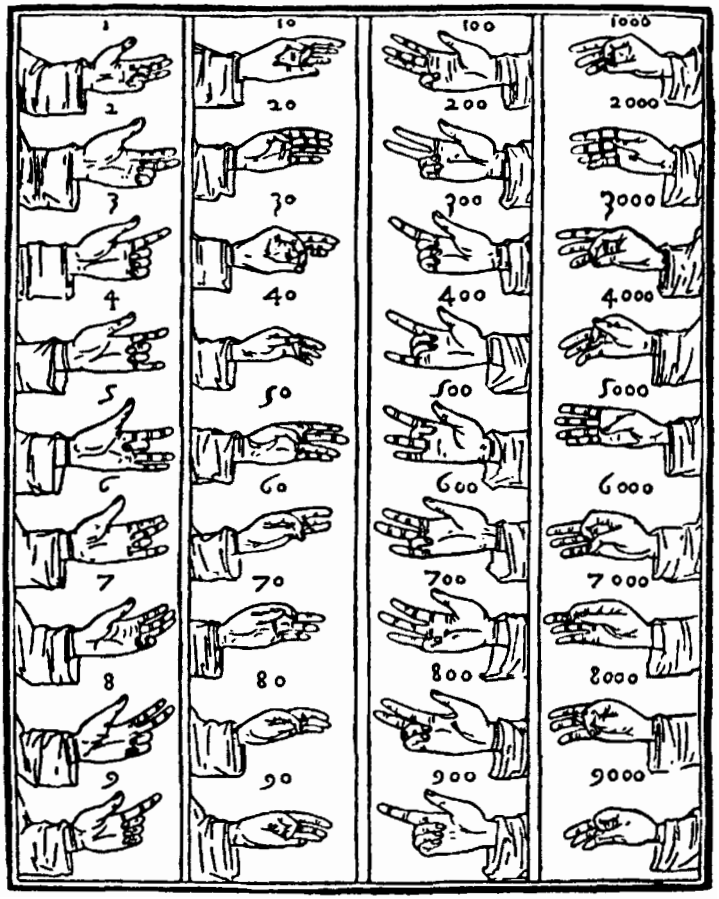
1. Yan
2. Tan
3. Tethera
4. Pethera
5. Pimp
6. Sethera
7. Lethera
8. Hovera
9. Covera
10. Dik
11. Yan-a-dik
12. Tan-a-dik
13. Tethera-dik
14. Pethera-dik
15. Bumfit
16. Yan-a-bumfit
17. Tan-a-bumfit
18. Tethera-bumfit
19. Pethera-bumfit
20. Figgit

Bu, bugün kullandığımız sayma sisteminden farklıdır ve tek farklılık kullanılan kelimelerin bize yabancı olması değildir. Lincolnshire çobanları, *yan* ile başlayan ve *figgit* ile biten, yirmişerli gruplar ile sayarlardı. Eğer çobanın yirmiden fazla koyunu varsa –ve uykusunun kaçtığını var sayarsak– bir döngüyü bitirdikten sonra cebine bir çakıl taşı koyarak, yere bir işaret çizerek ya da değneğine bir çentik atarak not tutması gerekirdi. Ve tekrar baştan başlardı: *'Yan, tan, tethera ...'* eğer 80 koyunu varsa, sayma işleminin sonunda cebinde dört çakıl taşı ya da yere çizilmiş dört işaret olmalıydı. Bu sistem çobanlar için oldukça kullanışlıydı, 80 hayvana karşılık cebinde dört tane küçük çakıl taşıyorlardı.

Modern dünyada sayı sistemimiz on rakamdan oluştuğu için –0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9– elbette onarlı gruplar halinde sayıyoruz. Sayma grubundaki rakamların sayısı ki, aynı zamanda kullanılan sembollerin sayısıdır bu, sayı sistemimizin tabanı adını alıyor, yani çobanlarınki yirmiyken, bizim ondalık sistemimiz on tabanındadır.

Mantıklı bir taban olmadan, sayıların kontrol edilmeleri güç şeylerdir. Çobanın birlik tabanda saydığını düşünün, bu da sadece tek bir sayısı var demektir, *yan,* yani bir. İki, o halde söyle olur, *yan yan*. 80 koyun seksen kez *yan* diyerek söylenebilir. Bu sistem üçün üzerindeki büyüklükleri saymak için oldukça kullanışsızdır. Buna karşılık her bir sayının başka bir kelimeyle ifade edildiğini düşünün, bunun için seksen ayrı kelime ezberlenmesi gerekir. Bu şekilde bine kadar saydığınızı bir düşünün!

Soyutlanmış birçok topluluk hâlâ alışılmamış sayı tabanları kullanmaktadırlar. Amazon'daki Tara, örneğin, çiftler halinde saymaktadırlar, rakamları birden sekize kadar söyledir: *anane, adak, adak anane, adak adak, adak adak anane, adak adak adak, adak adak adak anane, adak adak adak adak*. İkişerli saymak, tek tek saymak söz konusu olduğunda pek bir gelişme sayılmaz. 100 sayısını ifade edebilmek için 50 kere *adak* demek gerekmektedir—alışverişte pazarlık etmek



Luca Pacioli'nin Summa de arkhmetica, geometria, proportioni et proportionalita'sındaki parmak sayma istemi *(1494).*

oldukça zaman kaybettiren bir iş olur. Amazon'larda ayrıca üçlü ve dörtlü gruplar halinde sayma sistemleri de bulunmaktadır.

İyi bir taban sisteminin püf noktası, 100 gibi büyük sayıları nefesimizi tüketmeden söylemeye olanak verecek büyüklükte olmalıdır, ama bu büyüklük bizi, hafızamızı çok zorlamak zorunda bırakmamalıdır. Tarih içindeki en çok kullanılan sistemler beş, on ve yirmidir ve bunun apaçık bir sebebi vardır. Bu sayılar insan bedeninden alınmışlardır.

Bir elimizde beş parmağımız vardır, o halde birden saymaya başladığımızda beş ilk olarak nefes alacağımız yerdir. Ardından ikinci doğal durak diğer elimizden, yani onuncu parmaktan sonra gelir ve ardından ayak parmakları gelecektir. Yani toplamda yirmi el ve ayak parmağı sayılmış olacaktır (Bazı sistemler parçalıdırlar. Lincolnshire, koyun sayma sözlüğü, beşlik, onluk ve yirmilik tabanı içinde barındırır: İlk on sayı benzersizdir, sonraki on sayı beşlikler halinde gruplandırılmıştır. Parmakların sayma işinde oynadığı rol sayılara karşılık gelen kelimelerde de ortaya çıkar. Örneğin, Rusça beş, *piat*'tır. Uzatılan el için kullanılan kelime ise *piast*'tır. Benzer bir biçimde, Sanskritçedeki beş, *pantcha,* Farsçadaki el kelimesi *pentcha* ile ilişkilidir.

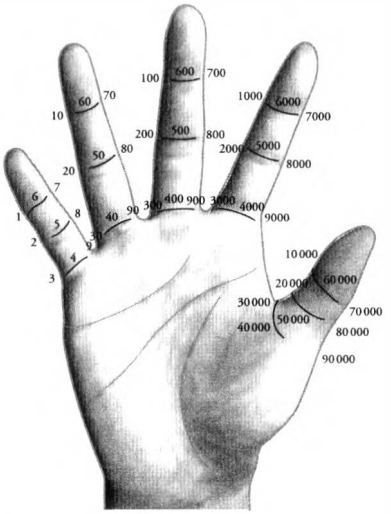
***

İnsanoğlu saymaya başladığı andan itibaren yardım olarak parmaklarını kullanmıştır ve büyük bilimsel gelişmelerin övgüsünü parmaklarımızın becerisine yüklemek abartı sayılmaz. Eğer insanoğlu ellerinin ve ayakların ucunda düz köklerle doğmuş olsaydı, taş çağından günümüze kadar zihinsel bir evrim geçirmediğimizi tartışmak normal olurdu. Rakamların yazılmasına olanak sağlayan kâğıt ve kalemin geniş çaplı faydalarından evvel, çoğu zaman detaylı parmakla sayma sistemine dayanan işaret dilleriyle anlaşıyorlardı. Sekizinci yüzyılda Northumbria'lı teolog Venerable Bede, bir tarafı aritmetik bir tarafı açık bir ele dayanan ve bir milyona kadar saymayı sağlayan bir sistem geliştirdi. Birler ve onlar sol elin parmaklarıyla belirtiliyordu, yüzlükler ve binlikler ise sağ elin parmaklarıyla. Daha yüksek rakamlar ise ellerin vücut üzerinde yukarı aşağı hareketiyle ifade ediliyordu—örneğin 90.000: bir papaza pek yakışmayan bir biçimde olan ifadesini Bede şöyle yazıyor, 'sol elinle belini kavra ve sağ elin başparmağını üreme organına çevir.' Daha da

akıllıca işaret bir milyonu temsil eden, başarmış olmanın verdiği tatmin jesti idi: Eller birbirine kenetlenmiş ve parmaklar birbirine geçmiş.

Sadece birkaç yüz yıl öncesine kadar, parmak hesabı diyagramları olmayan bir aritmetik kitabı hazırlanmamıştı. Günümüzde, çoğu kaybolmuş bir sanat olsa da, bu uygulama dünyanın bazı bölgelerinde devam etmektedir. Anlaştıkları fiyatı diğer müşterilerden gizlemek isteyen Hindistanlı tüccarlar, elbiselerinin ya da örtülerin arkasından parmak boğumlarına dokunma yöntemini kullanıyorlar. Çin'de kullanılan –oldukça karmaşık olsa da– kullanışlı bir teknik on milyardan bir eksiğine kadar –9.999.999.999– saymaya olanak sağlıyor. Arka sayfadaki şekilde işaretlendiği gibi her parmakta, her boğum çizgisi üzerinde üç tane olmak üzere, dokuz hayali nokta var. Sağ elin serçe parmağındaki noktalar 1 ile 9 arasındaki rakamları temsil ediyor. Sağ elin yüzük parmağındaki noktalar 10'dan 90'a kadar olan sayıları gösteriyor. 100 ile 900 arasındaki sayılar sağ elin orta parmağındaki noktalarda yer alıyor ve böyle devam ediyor, her parmak bir sonraki basamağı gösteriyor. Dolayısıyla teknik tüm dünya üzerinde yaşayan her insanı tek elinizle sayabilmenize olanak sağlıyor bu da tüm dünyayı ele almanıza olanak sağlayan tek yöntem.

Bazı kültürler el ve ayak parmakları yerine daha çok vücutlarının bölümlerini kullanmaktadırlar. On dokuzuncu yüzyılın sonunda İngiliz antropologlar yaptıkları keşif gezileri sırasında Avustralya'yı Papua Yeni Gine'den ayıran sulara yayılmış olan Torres Strait adalarına ulaştılar. Orada sağ elinin serçe parmağından saymaya başlayan bir kültürle karşılaştılar. Sağ el serçe parmağı 1, sağ el yüzük parmağı 2 anlamına geliyor ve parmaklardan devam ederek sağ bilek 6 sağ dirsek 7 omuzlardan devam ederek göğüs kafesi sol kol, sol el, ayak ve bacaklardan devam ederek sağ ayağın serçe parmağına denk gelen 33 son buluyor. Daha sonraki keşif gezileri ve araştırmalar bölgede benzer 'vücut hesabı' yapan birçok topluluk olduğunu ortaya çıkardı.



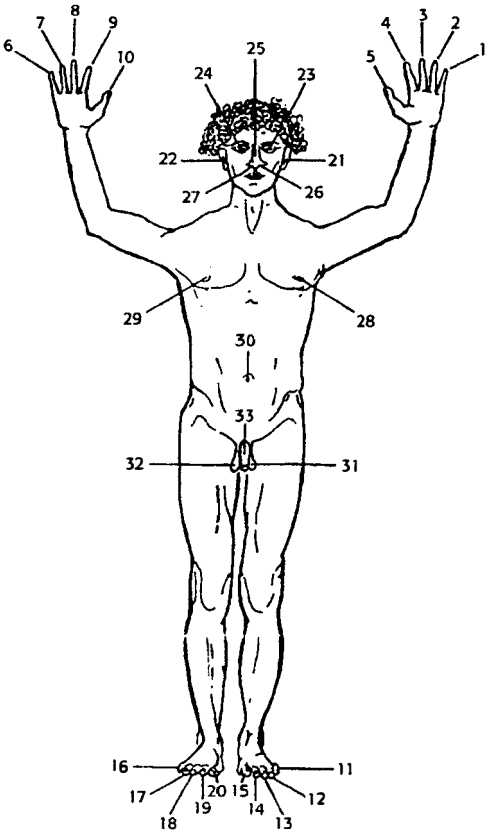
Bu Çin sisteminde her parmakta 1 ila 9 arasındaki rakamları temsil eden dokuz nokta vardır her parmak büyüklük sırasına göre dizilmiştir, böylelikle sağ el 10^5 – 1'e kadar tüm sayılar diğeri ile alakalı noktaya dokunarak gösterilebilir. Sıfır noktasının parmaklar üzerinde olması gerekmez, çünkü bu parmakla ilişkili hiçbir değer bulunmadığı için diğer ele bırakılmıştır.

Aralarında en ilgi çekici olanı belki de her birinin isim ya da imza gibi kendisine ait kısa bir melodisi olan Papualı Yupno halkıdır. Ayrıca burun delikleri, gözler, meme uçları, göbek deliği ve doruğa ulaşarak sağ testisi 31 sol testisi 32 ve penisi 33 olarak numaralandırdıkları bir sayma sistemleri vardır. Bir yandan insan üç büyük tek tanrılı dindeki 33 sayısının önemi üzerine düşünürken (İsa'nın öldüğü yaş, Kral Davut'un hüküm sürdüğü yılların sayısı ve Müslümanların tespihindeki boncukların sayısı), Yupno'ların erkeklik organıyla gösterilen sayılarının asıl ilginç yanı bu konuda mahcup olmaları. 33 sayısına geçiştirerek 'erkek şeyi' diyorlar. Araştırmacılar, sayıları bilmemeleri ve sorulan sorulara cevap vermeleri gerektiği için kadınların aynı kav-

rarılları kullanıp kullanmadığını keşfedemediler. Yupno'da üst sınır 'bir ölü adam' adını verdikleri 34'tür.

Onluk tabanlı sistemler batıda binlerce yıldır kullanılmaktadır. Bedenimizle uyumlu olmalarına rağmen, birçokları gerçekten saymaya en uygun sistemlerin bunlar olup olmadığını sorgulamaktadır. Aslında, bazıları tarafından fiziksel kökeninin onları bilfiil *kötü* yaptığı ileri sürülmektedir. İsviçre kralı XII. Charles, onluk sistemi kaba ve basit insanların beceriksizce parmaklarını kullanmaları gerekçesiyle kaldırmıştır. Modern İskandinavya'da taban sisteminin daha yararlı ve yüce amaçlar için kullanılması gerektiğine inanıyordu. Bu nedenle, 1716'da bilim adamı Emanuel Swedenborg'a 64'lük yeni bir sayı tabanı geliştirme emri verdi. Bu hayranlık uyandırıcı sayıya küpten yola çıkarak ulaşmıştı 4 x 4 x 4. Büyük Kuzey Savaşı 'nda çarpışan ve kaybeden Charles barut kutularının hacimleri gibi askeri hesaplamaların küp tabanlı bir sistemle daha kolay olacağına inanıyordu. Ama parlak fikirleri, diye yazıyor Voltaire, 'sadece sıradışı ve zor olan şeyleri sevdiğinin kanıtı oldu.' 64 tabanında bir sistem, sayılar için 64 benzersiz isim (ve sembol) gerektirir—saçmalık derecesinde kullanışsız bir sistemdir. Bu nedenle Swedenborg sistemi sekiz tabanına sadeleştirdi ve 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7'nin o, 1, s, n, m, t, f, u ile değiştirildiği yeni bir yazılım geliştirdi. Dolayısıyla bu yeni sistemde 1 + 1 = s ve m x m = so oluyordu (yeni sayılar yerine kullanılan kelimeler oldukça sıradışıydı. Sekizin, lo, loo, looo, loooo ve looooo, şeklinde yazılan katları, *lu, lo, li, le* ve *la* olarak seslendirilecek ya da mırıldanacaktı, ancak Swedenborg sistemini açıklamadan kısa bir süre önce kral vurularak öldürüldü ve sekiz tabanlı sistemi de ölüp gitti.

Ama XII. Charles'ın haklı olduğu bir nokta vardı. Neden ellerimiz ve ayaklarımızdaki parmakların sayısıyla uyuşuyor diye ondalık sistemi sürdürmemiz gereksin ki? Eğer insanlar Disney karakterlerindeki gibi dört parmaklı olsalardı, sekiz tabanlı bir matematik sistemi olan bir dünyada yaşıyor olmamız neredeyse kesin olurdu: Puanları sekiz



Bir ölü Yupno

üzerinden verir, en iyi sekizi seçer ve seksen kuruşu bir lira kabul ederdik. Farklı sayı gruplarımız olduğunda matematik değişmezdi. Savaşçı İsveçli, anatomik yapımıza en uygun olan yerine bilimsel ihtiyaçlarımız için hangi tabanın en iyisi olduğunu sorgulamakta haklıydı.

1970'lerin sonlarında, Michael de Vlieger cumartesi sabahı televizyonda çizgi film izliyordu. Kısa bir bölüm yayınlanıyordu. Müzikler rahatsız ediciydi, detone piyano akorları, wah-wah gitar ve tehdit edici bas. Dolunaylı ve yıldızlı gecede, tuhaf, insansı bir şey belirmişti.

Mavi beyaz çizgili silindir bir şapka ve frak giyiyordu, sarı saçları ve sivri burnu vardı, dönemin glam-rock modasına epeyce uygundu. Ellerinde altışar parmağı olması yeterince korkutucu, değilmiş gibi, değişik ayaklarında da altışar parmağı vardı. "Biraz korkutucu, biraz acayip" diye hatırlıyor Michael. Çizgi film, on ikilik taban hakkında bilgilendirmek için hazırlanmış olan *Little Twelvetoes'du.* "Amerikan toplumunun çoğunun neler döndüğü konusunda bir fikri yoktu. Ama ben harika olduğunu düşünmüştüm."

Michael şimdi 38 yaşında. Onunla St Louis, Missouri'deki yerleşim bölgesindeki dükkânların üst katında bulunan ofisinde buluştum. Yer yer kırlaşmış seyrek siyah saçları, yuvarlak bir yüzü, siyah gözleri ve soluk bir cildi var. Annesi Filipinli babası ise beyaz ve melez bir çocuk olduğu için alay edilmelere maruz kalmış. Faal bir hayal gücü olan zeki ve duyarlı bir çocuk olarak sınıf arkadaşları defterlerini okuyamasın diye kendine yeni bir dil icat etmeye karar vermiş. Aynı şeyi sayılarla yapması konusunda *Little Twelvetoes* ona ilham kaynağı olmuş ve on ikilik tabanı kişisel kullanıma uygulamış.

12'lik tabanda on iki rakam vardır: 0'dan 9'a kadar olan sayılar ve on bir ve on iki için ekstra yeni rakamlar. Bu onluk sonrası sistem için kullanılan rakamlar X ve Ɛ. Böylece 12'ye kadar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X, Ɛ şeklinde sayılıyor (Bir sonraki sayfada bulunan tabloya bakınız).

Karışıklığı engellemek için yeni rakamlara yeni isimler veriliyor, X *dek* ve Ɛ *el* olarak adlandırılıyor. Ayrıca 10'a do deniyor ve 10'lu sistemdekiyle karıştırılmasın diye düzinenin kısalması olan *doh* adı veriliyor. 12lik tabanda *do*'ya veya "düzine"den sonrasını sayarken 11 için *do bir* 12 için *do iki* ve 20 için de *iki do* sayılarını kullanıyoruz.

Michael 12 tabanını kullanarak kendine özel bir takvim geliştirmiş. Her tarih doğduğu günden itibaren, on ikilik sisteme göre sayılan günlerden birine geliyor. Hâlâ kullanıyor ve bana kendisini, doğumundan sonraki 80Ɛ9. günde ziyaret ettiğimi söyledi.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	X	Ɛ	10
one	*two*	*three*	*four*	*five*	*six*	*seven*	*eight*	*nine*	*dek*	*el*	*do*
11	12	13	14	15	16	17	18	19	1X	1Ɛ	20
do	*do*	*do*	*do*	*do*	*do*	*do*	*do*	*do*	*do*	*do*	*twodo*
one	*two*	*three*	*four*	*five*	*six*	*seven*	*eight*	*nine*	*dek*	*el*	
21	22	23	24	25	26	27	28	29	2X	2Ɛ	30
twodo	*twodo*	*twodo*	*twodo*	*twodo*	*twodo*	*twodo*	*twodo*	*twodo*	*twodo*	*twodo*	*threedo*
one	*two*	*three*	*four*	*five*	*six*	*seven*	*eight*	*nine*	*dek*	*el*	
31	32	33	34	35	36	37	38	39	3X	3Ɛ	40
threedo	*threedo*	*threedo*	*threedo*	*threedo*	*threedo*	*threedo*	*threedo*	*threedo*	*threedo*	*threedo*	*fourdo*
one	*two*	*three*	*four*	*five*	*six*	*seven*	*eight*	*nine*	*dek*	*el*	
41	42	43	44	45	46	47	48	49	4X	4Ɛ	50
fourdo	*fourdo*	*fourdo*	*fourdo*	*fourdo*	*fourdo*	*fourdo*	*fourdo*	*fourdo*	*fourdo*	*fourdo*	*fivedo*
one	*two*	*three*	*four*	*five*	*six*	*seven*	*eight*	*nine*	*dek*	*el*	
51	52	53	54	55	56	57	58	59	5X	5Ɛ	60
fivedo	*fivedo*	*fivedo*	*fivedo*	*fivedo*	*fivedo*	*fivedo*	*fivedo*	*fivedo*	*fivedo*	*fivedo*	*sixdo*
one	*two*	*three*	*four*	*five*	*six*	*seven*	*eight*	*nine*	*dek*	*el*	
61	62	63	64	65	66	67	68	69	6X	6Ɛ	70
sixdo	*sixdo*	*sixdo*	*sixdo*	*sixdo*	*sixdo*	*sixdo*	*sixdo*	*sixdo*	*sixdo*	*sixdo*	*sevendo*
one	*two*	*three*	*four*	*five*	*six*	*seven*	*eight*	*nine*	*dek*	*el*	
71	72	73	74	75	76	77	78	79	7X	7Ɛ	80
sevendo	*sevendo*	*sevendo*	*sevendo*	*sevendo*	*sevendo*	*sevendo*	*sevendo*	*sevendo*	*sevendo*	*sevendo*	*eightdo*
one	*two*	*three*	*four*	*five*	*six*	*seven*	*eight*	*nine*	*dek*	*el*	
81	82	83	84	85	86	87	88	89	8X	8Ɛ	90
eightdo	*eightdo*	*eightdo*	*eightdo*	*eightdo*	*eightdo*	*eightdo*	*eightdo*	*eightdo*	*eightdo*	*eightdo*	*ninedo*
one	*two*	*three*	*four*	*five*	*six*	*seven*	*eight*	*nine*	*dek*	*el*	
91	92	93	94	95	96	97	98	99	9X	9Ɛ	X0
ninedo	*ninedo*	*ninedo*	*ninedo*	*ninedo*	*ninedo*	*ninedo*	*ninedo*	*ninedo*	*ninedo*	*ninedo*	*dekdo*
one	*two*	*three*	*four*	*five*	*six*	*seven*	*eight*	*nine*	*dek*	*el*	
X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	XX	XƐ	Ɛ0
dekdo	*dekdo*	*dekdo*	*dekdo*	*dekdo*	*dekdo*	*dekdo*	*dekdo*	*dekdo*	*dekdo*	*dekdo*	*eldo*
one	*two*	*three*	*four*	*five*	*six*	*seven*	*eight*	*nine*	*dek*	*el*	
Ɛ1	Ɛ2	Ɛ3	Ɛ4	Ɛ5	Ɛ6	Ɛ7	Ɛ8	Ɛ9	ƐX	ƐƐ	100
eldo	*eldo*	*eldo*	*eldo*	*eldo*	*eldo*	*eldo*	*eldo*	*eldo*	*eldo*	*eldo*	*gro*
one	*two*	*three*	*four*	*five*	*six*	*seven*	*eight*	*nine*	*dek*	*el*	

Michael 12'lik tabanı kişisel güvenlik nedeniyle kullanmaya başladı, ancak 12'nin cazibesine kapılan tek kişi o değil. Birçok ciddi düşünür sayı sistemi için 12'nin 10'dan daha kullanışlı olduğunu tartışıyor. Aslında 12 tabanı bir sayı sisteminden fazlasıdır—bir siyasi-matematik gayedir. İlk savunuculardan birisi *Duodecimal Arithmetick* adlı kitabını kendisi basan Joshua Jordaine'dir. On ikiliklerle saymak kadar doğal ve eşsiz bir şey olmadığını ileri sürer. On sekizinci yüzyılın on ikilik sistemin oldukça iyi tanınan takipçilerinin arasında, icat ettiği ve dünyaya yayılan stenografi sistemiyle oldukça büyük bir üne kavuşan Isaac Pitman ve Viktorya dönemi sosyal teorisyenlerinden olan Herbert Spencer da vardı.

Spencer, çalışan insanlar, dar gelirliler ve kendi ihtiyaçlarını karşılayan küçük dükkân sahipleri adına taban sisteminde bir reform yapılması adına baskı yapmıştı. Amerikalı mucit ve mühendis John W. Nystrom da sistemin hayranlarından biriydi. 12'lik tabanı 'duodenal' –belki de bilim tarihindeki en talihsiz– çift anlamlılıktı.

12'nin onluk tabana göre daha iyi olmasının sebebi belki bölünebilirlik özelliğidir. On iki 2, 3, 4 ve 6'ya bölünebilirken on sadece 2 ve 5 ile bölünmektedir. 12 tabanının savunucuları, günlük yaşamda muhtemelen 5 yerine 3 ya da 4 ile bölmeyi daha çok tercih edeceğimizi savunuyorlar. Bir dükkân sahibini ele alalım. Eğer 12 elmanız varsa ikişer olarak 6 torbaya, üçerli olarak 4 torbaya, dörderli olarak 3 torbaya ve altışarlı olarak iki torbaya ayırabilirsiniz oysa on elmayı ikişerli olarak 5 ve beşerli olarak iki torbaya bölünebiliyor. Bakkal (grocer) kelimesi perakendecilerin 12 için kullanmayı tercih ettikleri, on iki düzine ya da 144 anlamına gelen 'gross' kelimesinin bir uzantısıdır. 12'nin daha çok çarpana sahip olması İmparatorluk ölçülerinin de faydalarını açıklıyor: Bir fit 12 inçtir, kolaylıkla 2, 3, 4 ile bölünebilir, bu da terziler ve marangozlar için bir artıdır.

Bölünebilirlik çarpım tablolarıyla da ilişkilidir. Herhangi bir tabanda öğrenilmesi en kolay olan sayılar tabanı bölen sayılardır. Bu

yüzden onluk tabanda, 2 ve 5'in çarpım tablosunu –sadece çift sayılar ve 5 ve 0 ile biten sayılardan oluşur– öğrenmesi en kolay olanlarıdır. Aynı biçimde 12'lik sistemde en basit çarpım tabloları 2, 3, 4 ve 6'ya bölünenlerdir.

2 x 1 = 2	**3 x 1 = 3**	**4 x 1 = 4**	**6 x 1 = 6**
2 x 2 = 4	**3 x 2 = 6**	**4 x 2 = 8**	**6 x 2 = 10**
2 x 3 = 6	**3 x 3 = 9**	**4 x 3 = 10**	**6 x 3 = 16**
2 x 4 = 8	**3 x 4= 10**	**4 x 4 = 14**	**6 x 4 = 20**
2 x 5 = X	**3 x 5 = 13**	**4 x 5 = 18**	**6 x 5 = 26**
2 x 6 = 10	**3 x 6 = 16**	**4 x 6 = 20**	**6 x 6 = 30**
2 x 7 = 12	**3 x 7= 19**	**4 x 7 = 24**	**6 x 7 = 36**
2 x 8 = 14	**3 x 8 = 20**	**4 x 8 = 28**	**6 x 8 = 40**
2 x 9 = 16	**3 x 9 = 23**	**4 x 9 = 30**	**6 x 9 = 46**
2 x X = 18	**3 x X = 26**	**4 x X = 34**	**6 x X = 50**
2 x Ɛ = 1X	**3 x Ɛ = 29**	**4 x Ɛ = 38**	**6 x Ɛ = 56**
2 x 10= 20	**3 x 10 = 30**	**4 x 10 = 40**	**6 x 10 = 60**

Eğer her bir satırın son iki basamağına bakarsanız, dikkat çekici bir şablonla ilerlediğini görürsünüz. 2'nin katları aynı biçimde çift sayılarla ilerlemektedir. Üçün katları ise 3, 6, 9 ve sıfır ile biten rakamlardır. Dördün katları aynı biçimde 4, 8 ve 0 ile bitmektedir ve altının katları 6 ve sıfırla biter. Başka bir deyişle, 12'lik tabanda 2, 3, 4 ve 6'nın çarpım tablosu ceptedir. Birçok öğrenci çarpım tablolarını öğrenmekte sıkıntı yaşadığı için, eğer 12'lik tabanı kullanmaya başlarsak büyük insani bir iş yapmış oluruz. Önerme böyle devam eder.

12'lik sistem kampanyasının İmparatorluk ölçüleri hayranlarının metrik sisteme açtığı savaş ile birleştirilmemelidir. Fit ve inç ölçülerini, metre ve santimetreye tercih eden bu insanların, 12'li sistemde olması gerektiği gibi bir fitin 10 ya da 12 inç olup olmamasıyla ilgili bir sorunları yoktur. Ancak, tarihsel olarak 12 tabanı çalışmalarının temelinde aşırı milliyetçi bir Fransız karşıtlığı bulunmaktadır. Belki

de bu görüşün en iyi örneği 1913 yılında mühendis Rear-Admiral G. Elbrow'un hazırladığı ve Fransız metrik sisteminin 'geri' olduğunu söylediği elkitabıdır. Bir liste halinde 12'li tabanda İngiltere'nin kralları ve kraliçelerinin tarihlerini yayınlamıştır. Ayrıca İngiltere'nin onluk tabandaki her milenyumdan kısa bir süre sonra Romalılar tarafından M.S. 43 yılında, Norman'lar tarafından 1066 yılında işgal edildiğini de eklemiştir. 'Peki ya üçüncü milenyumun başında, diye öngörüde bulunmuştur, 'bu ikisi [ülke] aynı niyetle tekrar ortaya çıkar ve birleşirlerse?' İtalya ve Fransa işgalinin yıllarını 12'lik tabanda 1913 yılını 1135 yazarak bertaraf edildiğini ileri sürmüştü ve böylelikle üçüncü milenyumu birkaç yüz yıl ertelemiş oluyordu.

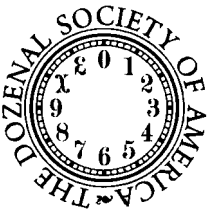
En meşhur 12'lik seferberlik çağrısı ise, yazar F. Emerson Andrew tarafından yazılan ve *The Atlantic Monthly*'nin Ekim 1934 sayısında yayınlanan Duodecimal Society of America, ya da DSA'nın oluşumuna yol açan bir makaledir. Daha sonra 'Duodecimal' kavramının değiştirmeyi istedikleri sistemi fazlasıyla hatırlattığı düşünüldüğünden ismi Dozenal Society of America olarak değiştirilmiştir. Andrews onluk tabanın 'bağışlanamaz bir öngörüsüzlük' nedeniyle kabul edildiğini ileri sürer ve ondan vazgeçmenin 'büyük bir fedakârlık' olup olmayacağını merak ettiğini belirtir. DSA başlarda olası üyelerinin dört 12'lik aritmetik testinden geçmesi konusunda ısrarcı davranmıştır, ancak bu talepten kısa sürede vazgeçilmiştir. Varlığını günümüzde de sürdüren *Duodecimal Bulletin* harika bir yayındır ve tıbbi yayınlar dışında altıparmaklılık durumu olan hekzadaktili üzerine makalelerin bulunduğu tek yayındır (Altıparmaklılık düşünüldüğünden daha yaygındır. Her 500 kişiden bir tanesi ellerinde ya da ayaklarında fazladan bir parmakla doğmaktadır). Kardeş bir topluluk olan Dozenal Society of Great Britain 1959 yılında kuruldu ve bir yıl sonra ilk uluslararası 12'lik sistem konferansı Fransa'da düzenlendi. Bu aynı zamanda sonuncusuydu da. Hâlâ iki topluluk da, onluk sistemle olan savaşlarını

sürdürmekteler ve kendilerini çoğunluğun zorbalığına maruz kalan ezilmiş kesim gibi görüyorlar.

Michael de Vlieger'ın 12'lik sisteme duyduğu hayranlık geçici bir gençlik aşkı değildi; şu an DSA'nın başkanlığını yapıyor. Aslında sisteme o kadar bağlı ki, dijital mimari modeller tasarımı yaptığı mesleğinde de bu sistemi kullanıyor.

12'lik sistemin çarpım tablosunu öğrenmede kolaylık sağlaması bir yana, en büyük avantajı kesirleri ortadan kaldırması. Onluk taban bölme yapmak istediğinizde genellikle sorun çıkartır. Örneğin 10'un üçte biri 3.33...,'tür ve üçler sonsuza kadar devam eder. 10'un dörde bölümü 2.5'tir ve ondalık bir basamak gerekir. 12 tabanında 10'un üçte biri 4'tür dörtte biri ise 3'tür. Çok hoş. Yüzdelik olarak ifade edersek üçte biri yüzde kırk, dörtte biri yüzde otuzdur (Elbette doğru telaffuzu yüzde 30 değil *gross* 30'dur). Aslında 100'ün 1 ile 12 arasındaki bölümlerine bakarsanız ('On ikilik' bölümlerin bulunduğu satırda) sayıların daha kesin sayılar olduğunu göreceksiniz.

100'lük bölümleri	**Onluk**	**On ikilik**
Bir	100	100
İki	50	60
Üç	33.333...	40
Dört	25	30
Beş	20	24;97...
Altı	16.666...	20
Yedi	14.285...	18;6X35...
Sekiz	12.5	16
Dokuz	11.111...	14
On	10	12;497...
On bir	9.09...	11;11...
On iki	8.333...	10



Bu yaklaşıklıktaki artış 12'lik tabanın Michael'ın ihtiyaçlarına daha uygun olmasını sağlıyor. Müşterileri ölçümleri onluk sisteme göre verseler de o bunları on ikilik sisteme çeviriyor. Henüz sadece oranlara bölerek çalıştığımda bana daha çok seçenek tanıyor' diyor.

'Karmaşık kesirlerden kurtulmak bir şeylerin daha uygun olmasını sağlıyor. Bazen, zaman kısıtlamaları veya son dakika gelişmeleri yüzünden daha önce ayarlamalarını yaptığım yerlerde değişiklikler yapmam gerekiyor. Bu nedenle önceden tahmin edilebilir basit oranların olması önemli. 12'lik sistemle daha net seçeneklere sahibim, üstelik daha hızlı.' Michael yüzücülerin ve bisikletçilerin bacaklarını tıraş etmesinin bile fayda sağlaması gibi 12'lik tabanı kullanmasının işine büyük katkı sağladığına inanıyor.

DSA eskiden onluk sistemi on ikilik sistemle değiştirmek istiyordu, radikal kısmı hâlâ istiyor, fakat Michael'ın arzuları daha mütevazı. O sadece insanlara onluk sistemin bir alternatifi olduğunu ve belki de daha kullanışlı olduğunu göstermek istiyor. Dünyanın *dix*'yi *douze* ile değiştirme şansının olmadığını biliyor. Değişim hem karmaşık hem de çok pahalı olur. Ve onluk sistem, özellikle de zihinsel aritmetik becerilerin daha az ihtiyaç duyulduğu bilgisayar çağında insanların çoğu için oldukça iyi iş görüyor. 'On ikilik sistemin genel hesaplamalar için en ideal sistem olduğunu söylemeliyim' diye ekliyor, 'ama burada insanları buna inandırmak için bulunmuyorum.'

DSA'nın temel amacı dek ve el'in bilgisayarların çoğunun kullandığı metin karakter dağarcığı olan Unicode içine dâhil edilmesi. Aslında topluluk arasındaki en büyük tartışma konusu hangi sembollerin

kullanılacağı. DSA standardı olan X ve Ɛ 1940'larda Amerika'nın en önemli font tasarımcılarından olan ve Caledonia ve Electra karakterlerini tasarlayan William Addison Dwiggins tarafından tasarlandı. Isaac Pitman Ƭ ve Ɛ karakterlerini tercih ediyordu. Coşkulu bir Fransız olan Jean Essig ∠ *ve* Ƭ karakterlerini tercih ediyordu. Deneyimli bazı üyeler, tuşlu telefonun 12 sayısının üzerinde bulunduğu için * ve # karakterlerini tercih ediyorlar. Rakamların isimleri de sorun. *On İkilik Sistem El Kitabı* (1960 ya da on ikilik sistemde 1174 yılında yazıldı) dek, el ve do'nun kullanımını öneriyor (100 için gro, 1000 için mo ve do'nun diğer katları için do-mo, gro-mo, bi-mo and tri-mo). Başka bir öneri ise on, on bir ve on ikiyi kullanmaya devam edip, on iki-bir, on iki-iki diye saymaya devam etmek. Bu DSA'nın herhangi bir sistemi zorla kullanmak istemediği hassas bir durum. Herhangi bir sembolün kullanılması nedeniyle diğer destekçilerin dışlanmaması için büyük bir dikkat gerekiyor.

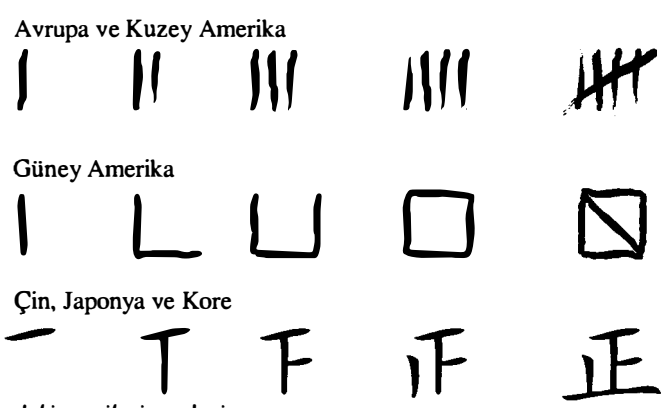
Michael'ın yenilikçi taban sevdası 12 ile sınırlı değil. Bazen evde kendi işlerini görürken sekiz tabanını da kullanıyor. 'Sekiz tabanını araç gereç gibi kullanıyorum' diyor. 60 tabanına kadar çalışmalar yapmış ve on rakamdan oluşan sistemimize 50 yeni sembol daha tasarlamak zorunda kalmış. Kullanmak amacıyla çalışmamış. 60 sistemiyle çalışmanın yüksek bir dağa tırmanmak gibi olduğunu söylüyor. 'Orada yaşayamam. Gruplandırmak için çok büyük. Vadisi desimal ve orada nefes alabiliyorum. Ama manzarası neye benziyor diye bu dağı ziyaret edebilirim.' 60'lık tabanın ya da sexagesimal Altmışlık sistemin tam bölen tablolarını hazırlamış ve ortaya çıkan modellere hayranlıkla bakmış. 'Gördüğüm tam bir güzellikti' diyor.

60 tabanı sıradışı üretken bir hayal gücünün ürünüymüş gibi gözükse de sexagesimal sistemin tarihsel bir geçmişi var. Aslında bildiğimiz en eski sistem.

En basit numaralandırma sistemi çentik sistemidir. Dünya üzerinde kullanılan birçok farklı çeşidi vardır. Mağara insanları kayaların üzerine işaretler çizerken, İnka'lar iplerin üzerine düğüm atarak sayıyorlardı ve ahşap mobilyanın icadından sonra karyola direklerinin üzerine –en azından desenli bir biçimde– çentikler atılmaya başlandı. Keşfedilen en eski insan yapımı 'matematiksel' objenin Swaziland mağarasında bulunan 35.000 yıllık babun kaval kemiğinden yapılma çetele olduğuna inanılıyor. 'Lebombo bone'un üzerinde muhtemelen ay döngüsünü gösteren 29 çizgi var.

Daha önceki bölümde gördüğümüz gibi insanlar, bir ve iki, iki ve üç obje arasındaki farkı derhal anlayabiliyorlar, ama dört ve sonrası zorlaşmaya başlıyor. Bu, düğümler için de geçerli. Uygun herhangi bir düğümleme sistemi için düğümlerin gruplandırılması gerekmektedir. İngiltere'de çentik atma geleneği, 'beş çubuklu kapı' tabir edilen dört dikey çentik ve onların üzerine atılan çapraz beşinci çentik biçimindeydi. Güney Amerika'da tercih edilen stil, kare oluşturacak dört çizgi çekmek ve beşinci çapraz atmak şeklindeydi.

Japon, Çin ve Koreliler, örneğin 'doğru ya da 'uygun' anlamına gelen 正 karakterini oluşturdukları, daha ayrıntılı bir yöntem kullanıyorlardı (gelecek sefer suşi yemeğe gittiğinizde garsondan suşinizi nasıl çentiklediğini göstermesini isteyin).



Dünyadaki çentik sistemleri.

M.Ö. 8000 yılları civarında antik dünya genelinde ortaya çıkan küçük kil parçaları kullanılarak nesneleri işaretleme uygulaması başladı. Bunlar, öncelikli olarak satılan ya da alınan koyunlar gibi şeylerin sayılarının sembolleriydi. Farklı kil parçaları farklı nesneleri ya da obje sayılarını gösteriyordu. O andan itibaren yanlarında olunmadan koyunlar sayılabilmeye başlandı ve bu da stok tutma ve ticareti daha kolay bir hale getirdi. Bu, şimdi sayıdan anladığımız şeylerin doğuşuydu.

M.Ö. dördüncü milenyumda, günümüzde Irak'ın bulunduğu yer olan Sümer'de bu sembol sistemi, sivri uçlu bir kamışın yumuşak kilin üzerine batırıldığı bir yazı sistemine dönüştürüldü. Sayılar, daireler ya da tırnak işaretleriyle temsil ediliyorlardı. M.Ö. 2700 civarında, kopya kalemlerinin sert keskin uçları vardı ve damgalar da kuş ayağı izine benziyordu. Farklı damgalar farklı sayıları gösteriyordu. Yazıya çivi yazısı adı verildi, batı yazı sistemlerinin uzun tarihinin başlangıcını işaretlemiş oldu. Edebiyatın Mezopotamyalı muhasebecilerin icat ettiği sayısal gösterim sisteminin yan ürünü olduğunu düşünmek kaderin bir cilvesi gibi gözüküyor.

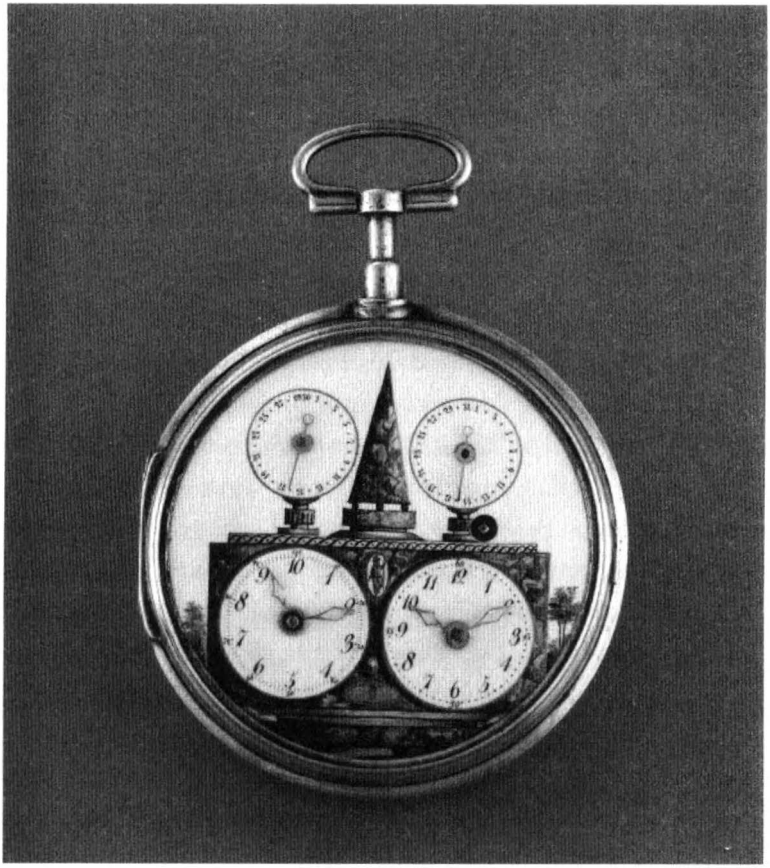
	1	10	60	3600
Eski dönem Sümer sayıları M.Ö. dördüncü yüzyıl				
Çiviyazısı sayıları M.Ö. üçüncü yüzyıl				

Çivi yazısı sisteminde sadece 1, 10, 60 ve 3600 için semboller vardır, bu da sistemin 60'lık onluk tabanın bir karışımı olduğu anlamına gelir, temel çivi yazısı kümesindeki rakamlar 1, 10, 60 ve 60 x 60 biçiminde tercüme edilir. Sümerlilerin sayılarını altmışarlı olarak gruplandırdıkları sorusu, aritmetik tarihinin en büyük çözülemeyen gizemi olarak ifade

edilmektedir. Bazıları daha önceki iki sistemin, beşlik ve on ikilik sistemin bir karışımı olduğunu iddia etse de bu konuda destekleyici bir kanıt henüz bulunamamıştır.

Matematik ve astronomide büyük ilerleme gerçekleştiren Babillliler, Sümerlerin Altmışlık tabanına kucak açtılar ve daha sonra Mısırlılar, ardından da Yunanlılar zamanlarını altmışlı sisteme göre biçimlendirdiler—bu yüzden bugün kullanılan 1 saatte 60 dakika ve bir dakikada 60 saniye vardır. Zamanı 60 tabanında söylemeye öyle alıştık ki hiç açıklanmamış olsa da nedenini asla sorgulamadık. Ancak, devrimci Fransa, onluk sistem için bir tutarsızlık olarak gördükleri bu durumu düzeltmek istediler. 1793 yılında Ulusal Kongre, ağırlık ve ölçümler için metrik sistemi ileri sürdüğünde zamanı da onlu sisteme çevirmeye çalıştı. Her bir günün on saat olduğu ve her saatin yüz dakika her dakikanın ise yüz saniye olarak kabul edileceği konusunda bir kararname imzalandı. Günde 100.000 saniye, 86.400 (60 x 60 x 24) saniyeye kıyasla daha çok işe yarar gibi görünüyordu. Devrimsel saniye, doğal olarak normal saniyeden bir parça daha kısaydı. Onluk zaman 1794 yılında zorunlu hale geldi ve üzerinde on'a kadar rakamlar bulunan saatler üretildi. Ama bu yeni sistem halk için tamamen kafa karıştırıcıydı ve altı ay gibi kısa bir süre sonra terk edildi. 100 dakikalık bir saat 60 dakikalık bir saat kadar kullanışlı değildi, çünkü 100'ü 1 2, 4, 5, 10, 20, 25 ve 50 ile bölebilirsiniz, fakat 60'ı 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 ve 30 ile. Onluk zamanın başarısızlığı on ikilik düşüncenin zaferiydi. Sadece 12, 60'a bölünebildiği için değil, bir gün içindeki saat sayısı olan 24'e de bölünebildiği için.

Yakın bir tarihte başka bir zamanı onluk hale getirme girişimi daha büyük başarısızlıkla sonuçlandı. 1998 yılında büyük bir İsviçre şirketi olan Swatch, Günü Beat adı verilen 100Q parçaya bölen (1 dakika 26.4 saniyeye eşit) Swatch Internet Time projesini piyasaya sürdü. Şirket zamanın devrimsel görüntüsünü gösteren saatlerden sattı, aşağı yukarı bir sene sonra kataloglarından bu saatleri geri çekmek zorunda kaldı.



Ancak yakın geçmişlerinde kafadan çatlak sayma yöntemleri olan batılı uluslar sadece Fransızlar ve İsviçreliler değiller. İlk Sümer çivi yazısı tableti basıldığında demode olan çentik çubuğu, 1826'ya kadar İngiltere'de para birimi olarak kullanılmaktaydı.

İngiltere bankası eskiden piyasaya, parasal değerin tabandan belli aralıklarla işaretlendiği çentik çubukları sürüyordu. 1186 yılında hazine müdürü Richard Fitzneal tarafından yazılan bir belgede değerler şu biçimde belirlenir:

1000 £ elin avuç içi kalınlığı

100 £ başparmak genişliği

20 £ serçe parmak genişliği

1 £ kalın bir arpa genişliği

Hazinenin kullandığı bu yöntem aslında "çift çentik" sistemiydi. Bir parça odun ortadan ikiye ayrılır bir tanesi hisse ve diğeri kıyas değeri olarak kullanılırdı. Hisse üzerine işlenen –çentiklenen– değer aynı zamanda bir nevi fatura görevi gören kıyas değeri üzerine de işlenirdi. Eğer İngiltere Bankası'na biraz para yatırmışsam bana üzerinde miktarı gösteren bir hisse verilirdi –bu da *Hissedar* ve *borsacı* (*stockholder* ve *stockbroker)* kelimelerinin kökeninin nereden geldiğini açıklamaktadır– bankada ise aynı çentikten bulunan kıyas değeri kalırdı.

Bu uygulamadan aşağı yukarı iki yüz sene kadar önce vazgeçildi. 1824 yılında hazine, İngiliz hükümetini adına Westminster Sarayı'nın altındaki bir fırında eski tahta parçalarını yakmaya karar verdi. Ancak ateş kontrolden çıkarak yayıldı. Charles Dickens şöyle anlatıyor: "Ocak bu saçma sapan çubukları aç bir hayvan gibi tüketti ve avam kamarasının ahşap kaplaması alev aldı, ahşap kaplama avam kamarasını ateşe verdi, [hükümete ait] iki ev yanıp kül oldu." Anlaşılması zor ekonomik dokümanlar hükümetlerin çalışmalarında hep etki sahibi olmuşlardır, ama sadece çentikli çubuklar parlamentoyu yerle bir etmiştir. Saray yeniden inşa edildiğinde yepyeni bir saat kulesi vardı, Big Ben hızlı bir biçimde Londra'nın tanınan bir sembolü haline geldi.

Metrik sistem yerine imparatorluk sisteminin daha iyi olduğunu belirtmek için sık sık kullanılan önermelerin birisi de kelimelerin kulağa daha hoş geldiğidir. Verilen tipik örnek şarap için kullanılan ölçümlerdir:

2 gill = 1 chopin

2 chopin = 1 pint

2 pint = 1 quart

2 quart = 1 pottle

2 pottle = 1galon

2 galon = 1 gaga

2 gaga =1 kasa

2 kasa = 1 kile

2 kile = 1 küçük fıçı

2 küçük fıçı = 1 varil

2 varil = 1 büyük fıçı

2 büyük fıçı = 1 pipo

2 pipo = 1 tun

Bu sistem genellikle 0 ve 1 rakamları kullanılarak ifade edilen ikili sistemdir ve iki tabanındadır. İkili sistemde sayılar onluk sistemde kullandığınız sayılardır ama sadece 0 ve 1 ile yazılırlar. Başka bir deyişle sayı dizisi şöyle başlar 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000. Yani 10 iki, 100 dört 1000 ise sekizdir ve bu biçimde devam eder ve sonda bulunan her 0 iki ile bölünebilirliği temsil eder (Tıpkı onluk sistemde olduğu gibi—sayının sonuna 0 eklemek onun katlarını temsil eder). Şarap ölçümlerinde kullanılan en küçük birim çeyrek pint'dir. İki gill bir chopin eder, 4 gill bir pint, 8 gill bir quart, 16 gills bir pottle, vb. Ölçüler mükemmel biçimde ikili rakamları çoğaltır. Eğer bir gill 1 ile temsil ediliyorsa bir pint 100, bir litre 1000 ile ifade edilir ve bu *10.000.000.000.000'la* temsil edilen tun'a kadar devam eder.

İkili sistem, standart dışı bir tabana âşık olan en büyük matematikçinin kendisine amigoluk yaptığını iddia edebilirdi. On yedinci yüzyılın

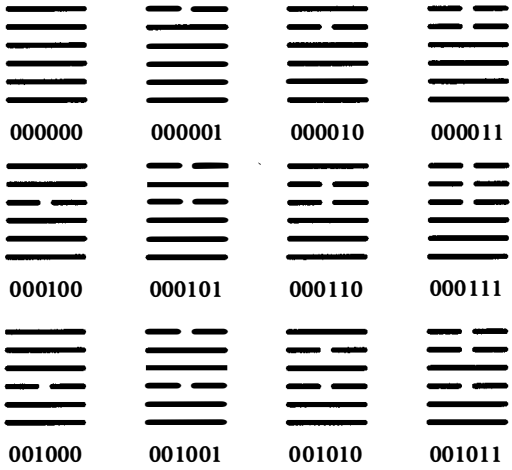
sonlarındaki en önemli düşünürlerden olan Gottfried Leibniz bir bilim adamı, filozof ve devlet adamıydı. Görevlerinden birisi de Hanover'deki Brunswick Dükü'nün saray kütüphaneciliğini yapmaktı. Leibniz o kadar heyecanlıydı ki bir keresinde Dük'e bir mektup yazarak ikili sistemin şerefine üzerinde *Imago Creationis* (dünyanın suretinde) yazılı gümüş bir madalyon yaptırmaya davet etmişti. Leibniz için, ikili sistemin pratik ve manevi önemi vardı. İlk olarak, her sayıyı çiftler halinde ifade edebilme kapasitesi birçok işlemi kolaylaştırıyordu. 1703'de söyle yazıyordu: "[İkili sistem] ölçüm yapan kişinin her türlü kütleyi birkaç ağırlıkla tartmasına olanak sağlıyor ve daha küçük parçalar daha büyük değer kazandıran bir icat olarak kullanılabilir." Leibniz ikili sistemin kullanımına dair birkaç çekincesi olduğunu da kabul ediyordu. Yazıldıklarında rakamlar daha uzun oluyordu: Örneğin, onluk sistemdeki 100 ikilik sistemde 1,111,101,000 olarak yazılıyordu. Ama şunu ekliyordu: "Uzunluğuna karşı, [ikili sistem] bilim için daha esaslı ve yeni keşiflere olanak sağlıyor." İkili yazımdaki simetriye ve şablonlara bakarak, yeni matematiksel anlayışların ortaya çıktığını ve onun sayesinde sayı teorisini daha zengin ve daha çok yönlü bir hale geldiğini iddia ediyordu.



Leibniz'in ikili madalyonu için tasarım, Johann Bernard Wiedeburg'un Dissertatio mathematica de praestantia arithmeticae binaria prae decimali (1718) koleksiyonu içinde. Imago Creationis'in yanı sıra Latince olarak, *"Hiçbir şeyden bir ve her şey gelir, fakat bir gereklidir"* yazmaktadır.

İkinci olarak, Leibniz, ikili sayı sisteminin kendi dini görüşleriyle nasıl uyum içinde olduğuna hayret ediyordu. Kâinatın var olan ya da töz ve var olmayan ya da hiçlikten meydana geldiğine inanıyordu. Bu ikilik 1 ve 0 rakamlarıyla mükemmel bir biçimde sembolleştirilebiliyordu. Aynı biçimde Tanrı tüm varlıkları bir hiçlikten yaratmıştı, tüm rakamlar 1'ler ve 0'lar şeklinde yazılabiliyordu. Leibniz'in ikili sistemin temel bir metafizik hakikati örneklediği inancı –kendisi için büyük bir keyif olarak– yaşamının ilerleyen dönemlerinde karşılaştığı mistik bir Çin metni olan *I Ching* ile daha da güçlendi. *I Ching* bir kehanet kitabıydı. İçinde her birine eşlik eden bir yorum bulunan 64 farklı sembol vardı. Okuyucu sembolleri rastgele (geleneksel olarak kandil çiçeği çubuklarını kullanarak) seçiyor ve ilişkili metinle yorumluyordu––tıpkı birisinin astroloji haritalarını okuması gibi. *I Ching*'de bulunan her bir sembol bir *hexagram*'dı yani altı yatay çizgiden oluşuyordu. Çizgiler bir *yin* ya da bir *yang*'a karşılık gelecek biçimde kesintiye uğruyor ya da uğramıyordu. *I Ching*'de bulunan 64 hexagram altılı gruplar haline alınmış *yin ve yang*'ların tam bir kombinasyonunu oluşturuyordu. Bir *hexagram*'ı özel olarak gruplandırmanın zarif bir biçimi karşı sayfadaki örnekte gösterilmiştir. Eğer her bir *yang* 0'la ve her bir *yin* 1'le yazılırsa dizilim kesinlikle ikili sistemdeki 0 ile 63 arasındaki yazılıma uymaktadır. Bu sıralama biçimi Fu Hsi dizisi olarak bilinir (Açıkçası, Hsi Fu tersidir, ama matematiksel olarak eşdeğeridir).

Leibniz, Fu Hsi ikili doğasının farkına vardığında, bu *I Ching*'e daha büyük bir önem vermesini sağladı. Çünkü ikili istemin yaradılışın aynası olduğuna inanıyordu, aynı zamanda keşfi, Taoist bilgeliğin, Doğu mistisizminin artık kendi Batı inançlarını desteklediği anlamına geliyordu. "Çin'in antik teolojisinin bozulmamış ve fazladan hatalardan temizlenmiş tözü, Hıristiyan dininin en büyük gerçeklerinden faydalanabilir," diye yazıyordu.



I Ching *ve onun ikili sisteme eşdeğer olan Fu Hsi dizisinin bir parçası.*

Leibniz'in iki tabanına düzdüğü methiyeler, bu rakipsiz bilgenin çağı için oldukça alışılmamış bir uğraştı. Ama yine de, sistemin önemine atıfta bulunarak, kendisinin bile hayal edebileceğinden büyük bir ileri görüşlülük sergilemişti. Bilgisayar teknolojisi en temel dilsel seviyedeki 0'lar ve 1'lerden oluşan binary (ikili) sistem üzerine kurulu olduğu için dijital çağ ikili sistem üzerinde iş görür. "Heyhat!" diye yazar matematikçi Tobias Dantzig. "Bir zamanlar tek tanrılı inançların abide gibi kutsadığı şey, bir robotun bağırsaklarında son buldu."

"Özgürlük, iki kere ikinin dört ettiğini söyleyebilme özgürlüğüdür" diye söylüyor George Orwell'ın *1984* adlı eserinin kahramanı Winston Smith. Orwell yalnızca Sovyetler Birliği'ndeki konuşma özgürlüğünü yorumlamıyordu, matematik hakkında da konuşuyordu. İki kere iki daima dört eder. Etmediğini size kimse söyleyemez. Matematiksel gerçekler kültürden ya da ideolojiden etkilenmezler.

Diğer taraftan, bizim matematiğe olan yaklaşımımız kültürden oldukça etkilenmiştir. Örneğin onluk tabanın seçilmesinin dayanağı matematiksel sebepler değil psikolojik sebeplerdir, el ve ayaklarımızdaki parmakların sayısıdır. Ayrıca dil de matematiksel anlayışı şaşırtıcı bir biçimde şekillendirmektedir. Örneğin, batıda sayıları ifade etmek için tercih ettiğimiz kelimeler nedeniyle geri kaldık.

Neredeyse tüm batı Avrupa dillerinde sayı kelimeleri düzenli bir kalıba uymaz. İngilizcede mesela twenty-one [21], twenty-two [22], twenty-three [23] deriz tenty-one [11], tenty-two[12], tenty-three [13] demeyiz—bunlar yerine eleven, twelve, thirteen deriz. Eleven [11] ve twelve [12] yegane sözcüklerdir. Ve her ne kadar thirteen, ten [10] ve three [3]'nin bir araya gelmesinden oluşsa da three kısmı ten kısmından önce gelmektedir. On ile yirmi arası İngilizce dağınık bir haldedir.

Buna karşılık Çince, Japonca ve Korece dillerinde sayılar düzenli bir kalıba uyarlar. 11, on ve birle yazılır, 12 on ve ikiyle ve bu şekilde devam eder, 13 on ve üç, 14 on ve dört, 19 için on ve dokuza kadar gider. 20, iki on ve 21 ise iki on ve birdir. Sayıları her durumda yazıldıklarını gördüğünüz biçimleriyle telaffuz edersiniz. Ne fark eder? Aslında genç yaşlar için fark ediyor. Deneyler defalarca Asyalı çocukların saymayı Avrupalı çocuklardan daha kolay öğrendiklerini ortaya koymuştur. Dört ve beş yaşındaki Amerikalı ve Çinli çocuklarla yapılan bir çalışma iki ulusun da 12'ye kadar sayma konusunda aynı başarıyı gösterdiğini ortaya koymaktadır, ama Çinliler daha büyük sayılarda bir sene ilerde oluyorlardı. Düzenli bir sistem aynı zamanda aritmetiği daha açık ve anlaşılır hale getirmektedir. Örneğin yirmi beş ile otuz ikinin toplamı iki on beş artı üç on iki biçiminde ifade edildiğinde cevaba bir adım daha yaklaşmış oluyoruz: beş on yedi.

Tüm Avrupa dilleri düzensiz değildir. Örneğin Galce tıpkı Çince gibidir. Galce on bir *un deg un* (bir on bir), on iki *un deg dau* (bir on iki) şeklindedir ve böyle devam eder. Ann Dowker ve Delyth Lloyd Oxford Üniversitesi'nde Aynı Gal köyündeki Galce ve İngilizce ko-

nuşan çocukların matematik becerilerini test ettiler. Asyalı çocuklar, çalışmak için ayırdıkları zaman ya da matematiğe yaklaşımları gibi kültürel etkenlerden ötürü Amerikalı çocuklardan daha başarılı olabilirler, eğer çocukların hepsi aynı yerde yaşıyorsa kültürel etkenlerin önüne geçilecektir. Dowker ve Lloyd, Galce ve İngilizce konuşan çocukların aritmetik becerileri aşağı yukarı benzerlik sergilerken Galce konuşan çocukların –iki basamaklı sayıların okunması, kıyaslanması ve şekillendirilmesi gibi– belirli alanlarda daha yüksek matematiksel becerileri sergiledikleri sonucuna vardılar.

Almanca İngilizceden daha da düzensizdir. Almanca yirmi bir *einundzwanzig* olarak telaffuz edilir yani bir ve yirmi, yirmi iki *zweiundzwanzig* yani iki ve yirmi ve bu böylece onun katları şeklinde 99'a kadar devam eder. Bu bir Almanın 100'den büyük sayıları telaffuz ettiğinde rakamların sıralı bir dizi içinde olmadığı anlamına gelir: Üç yüz kırk beş *dreihundertfünfundvierzig* ya da üç yüz beş ve kırk olur ve rakamlar karmakarışık olarak 3-5-4 biçiminde listelenir. İşte bu Almanya'da rakamların olmaları gerektiğinden daha karmaşık oldukları konusunda endişeler doğurmuştur. *Zwanzigeins* (yirmi bir) adlı daha düzenli bir sisteme geçilmesi için baskı oluşturan bir kampanya grubu oluşturulmuştur.

Ve Batı Avrupa dillerini konuşan insanları, bazı Asya dilleri konuşan insanlar karşısında dezavantajlı duruma düşüren sadece rakamları temsil eden kelimelerin yeri ya da 11 ila 19 arasındaki düzensizlik değildir. Sayıları söyleme süresi açısından da engelli durumundayız. *Sayı Algısı* adlı kitabında Stanislas Dehaene 4, 8, 5, 3, 9, 7, 6 rakamlarını yazıp bizden 20 saniyede ezberlememizi istiyor. İngilizce konuşan insanların bu yedi rakamı doğru olarak ezberleme şansı % 50. Buna karşılık Çince konuşan bir insan bu şekilde dokuz rakamı ezberleyebilmektedir. Dehaene, herhangi bir zamanda aklımızda tutabileceğimiz rakamların miktarının, iki saniyelik bir döngüde kaç rakam söyleyebildiğimizle belirlendiğini belirtiyor. Çince bir'den on'a kadar tüm rakamlar tek

heceden oluşuyor: *yi, er, san, si, wu, liu, qi, ba, jiu.* Çeyrek saniyelik bir süre içinde söylenebiliyorlar, yani iki saniyelik bir süre içinde Çince konuşan bir kişi dokuzunu da hızlıca söyleyebiliyor. Buna karşılık İngilizce rakam kelimelerini söylemek bir saniyenin üçte biri kadar sürüyor, (Hantal iki heceden oluşan 'Seven' (7) ve uzun bir hece ile söylenen 'three' (3) için içtenlikle teşekkürler), yani bizim iki saniyelik bir dilimde söyleyebildiğimiz rakam sayısı yedi. Ancak rekor, rakamları daha kısa şekillerde söylenebilen Kanton lehçesine ait. İki saniyelik bir zaman diliminde on rakam söyleyebiliyorlar.

Batı dilleri herhangi bir matematiksel anlayışı kolaylaştırmaya karşı iş görüyor olsa da, Japonya'da dil bir müttefik gibi iş görüyor. Kelimeler ve ifadeler çarpım tablosunu ezberlemeyi kolaylaştırılmaları için değiştirilmiş ve adına *kuku* diyorlar. Antik Çin'e ait olan bu tablo geleneği, sekizinci yüzyıl civarında Japonya'ya yayılmış. Japonca *Ku* dokuz demek ve ismi de, bu tabloların eskiden sondan 9 x 9 = 81 ile başlamasından geliyor,

400 yıl kadar önce değiştirildiler yani *kuku* bugün bir kere bir, bir ile başlıyor.

kuku kelimeleri basitçe şöyle:

Bir kere bir, bir
Bir kere iki, iki
Bir kere üç, üç...

Bu böylece bir kere dokuz dokuza kadar devam ediyor ve ikiler başlıyor:

İki kere bir, iki
İki kere iki, dört

Ve böyle devam ederek dokuz kere dokuz seksen bir'e kadar gidiyor.

Şu ana kadar her şey bizim çarpım tablomuzu ezberlerken kullandığımız sıradan yöntemimize benzer görünüyor. Ancak *kuku*'da bir kelimeyi telaffuz etmenin her zaman iki yolu var ve en akıcı olan kullanılıyor. Örneğin, bir için *in* ya da *ichi* kelimeleri kullanılabiliyor ve *kuku*'ya *in in* ya da *ichi ichi* ile başlamak yerine kulağa daha güzel gelen *in ichi* kullanılıyor. Sekiz için kullanılan kelime *ha,* sekiz sekiz için *ha ha* kullanılması gerekiyor. Ancak *kuku*'da 8 x 8 *happa* çünkü dil buna daha rahat dönüyor. Sonuç olarak *kuku* bir şiir, bir ninni gibi algılanıyor. Tokyo'da bir ilkokula yaptığım ziyaret sırasında yedi ve sekiz yaşındakilerin sınıflarında *kuku* çalışmalarını izlerken kulağa adeta bir rap şarkısı gibi gelmesine çok şaşırmıştım, kelimelerde senkron ve coşku vardı. Kesinlik benim okulda ezberlediğim yokuş yukarı çıkan bir trenin çıkardığı eşit zamanlı sesi andıran çarpım tablosuyla hiçbir benzerlik taşımıyordu. Öğretmen Makiko Kondo, *kuku*'yu öğrencilerine artan bir tempoyla öğretmeyi tercih ettiğini, çünkü bu şekilde öğrenmeyi daha eğlenceli bir hale getirdiğini söylemişti. 'Önce ezberlemelerini sağlıyoruz, gerçek anlamını biraz daha vakit geçtiğinde anlıyorlar. *Kuku* şiiri Japon beyinlerine iyice kazınmış görünüyor. Yetişkinler bana yedi kere yedinin 49 ettiğini matematiği hatırladıkları için değil, yedi yedi kırk dokuz'un müzikal olarak kulaklarına doğru geldiği için bildiklerini söylemişlerdi.

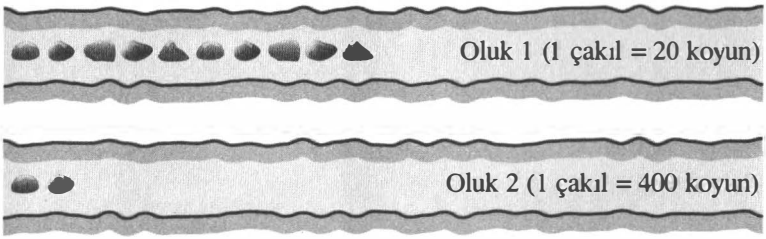
Batı sayı kelimelerindeki düzensizlikler büyüme çağındaki aritmetikçiler için talihsizlik olabilir fakat matematik tarihçilerine karşı yoğun bir ilgiye sahipler. Seksen'in Fransızcası *quatre-vingts* ya da dört-yirmi, bir zamanlar 20'lik sistem kullanan Fransız atalarına işaret etmektedir. Ayrıca 'nine' ve 'new' kelimelerinin birçok Hint Avrupa dil ailesinde, Fransızca *(neuf, neuf),* İspanyolca *(nueve, nuevo),* Almanca *(neun, neu)* ve Norveççe *(ni, ny),* benzer oluşunun sebebinin, uzun zaman önce unutulan ve dokuzun yeni bir küme elemanı olarak kabul gördüğü sekiz taban sisteminin mirası olduğu ileri sürülmektedir (Başparmakları saymazsanız sekiz parmağımız bulunur ki bu

da sekizlik sistemin dayanağı olabilir. Ya da muhtemelen parmaklar arasında kalan boşlukları saymışlardır). Sayı kelimeleri, ayrıca Amazon ve Avustralya'nın rakamsız kabilelerine ne kadar yakın olduğumuzun bir hatırlatıcısıdır. İngilizce *thrice* hem üç hem de birçok kez anlamına gelir, Fransızca *trots* üç demektir ve *tres* çok demektir: Belki, bize ait olan 'bir, iki, çok' geçmiş olan gölgeler.

Sayıların bazı yönleri –taban, tarz, numaralar ya da kullanılan kelimelerin biçimi gibi– kültürler arasında büyük farklılıklar gösterir, oysaki ilk medeniyetler sayma ve hesap yapma konusunda şaşırtıcı bir birlik içindeydiler. Genel olarak kullandıkları metot 'basamak değeri' olarak adlandırılır ve farklı pozisyonlar sayıların farklı kuvvetlerini temsil etmek için kullanılır. Gelin orta çağ sırasında Lincolnshire'da yaşayan bir çoban için bunun ne anlama geldiğine bir göz atalım. Daha önce yazdığım gibi *yan*'dan *figgit*'e kadar 20 sayıları vardı. Çoban yirmi tane koyunu saydıktan sonra, kenara bir çakıl taşı koyar ve *yan*'dan *figgit*'e kadar tekrar tekrar saymaya devam ederdi. Eğer 400 koyunu varsa, 20 tane çakıl taşı olurdu çünkü 20 x 20 = 400. Şimdi bu çobanın bin tane koyunu olduğunu düşünün. Hepsini saydığında 50 tane çakıl taşı olması gerekirdi çünkü 50 x 20 = 1000 eder. Ama 50 tane çakıl taşının olması şöyle bir sorun çıkıyordu; çobanın bunları saymasına olanak yoktu çünkü 20'den yukarı sayamazdı.

Bu sorunu çözmenin bir yolu yere karşı sayfadaki gibi paralel oluklar açmaktı. Çoban yirmi koyun saydığında ilk oluğa bir çakıl yerleştiriyordu. Yavaş yavaş ilk oluk çakıl taşlarıyla doluyordu. Ve sıra ikinci oluğa yirminci çakılı yerleştirmeye gelince ikinci oluğa ilk çakılı yerleştiriyor ve ilk oluğu temizliyordu. Başka bir ifadeyle, ikinci oluktaki bir çakıl tıpkı ilk oluktaki bir çakılın yirmi koyun anlamına geldiği gibi ilk oluktaki yirmi çakıl anlamına geliyordu. İkinci oluktaki bir çakıl 400 koyun demekti. Bu yöntemi kullanan bir çobanın ikinci olukta iki, birinci olukta on tane çakıl taşı olması gerekiyordu. Her

bir oluğun farklı değerleri temsil ettiği bu sistemi kullanarak çoban 50 çakıl yerine on iki çakılla 1000 koyunu sayabiliyordu.

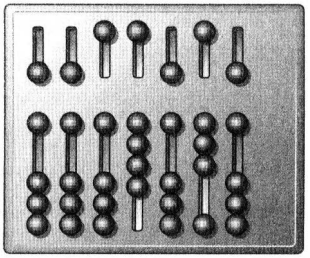


Toplam koyun = (10 x 20) + (2 x 400) = 1000

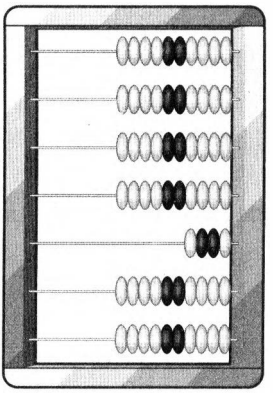
Basamak değeri hesap sistemleri tüm dünyada kullanıldı. Oluklar içindeki çakıl taşları yerine, İnka'lar tepsilerde fasulye veya mısır taneleri kullanıyorlardı. Kuzey Amerika yerlileri farklı renklerdeki iplerin üzerine inciler ya da kabuklar diziyorlardı. Yunanlılar ve Romalılar üzerlerinde farklı sütunların bulunduğu masalarda sayaç olarak kemik, fildişi ya da metal parçalar kullanıyorlardı. Hindistan'da kum üzerine çizilen işaretler kullanılıyordu.

Romalılar ayrıca yuvalarında hareket eden boncuklar kullanılan ve Abaküs adını verdikleri mekanik bir araç yapmışlardı. Bu taşınabilir türler medeni dünyaya yayıldı ve farklı ülkelerde farklı tipler kullanılmaya başlandı. Rus *schoty*'de her çubuk üzerinde on boncuk bulunuyordu (sadece bir çubukta kasiyerlerin, çeyrek rubleyi göstermesi için kullandığı dört boncuk bulunuyordu). Japon *soroban*'ında ve Roma *abaküs*'ünde beş boncuk varken, Çin *suan-pa*'sında yedi boncuk vardı.

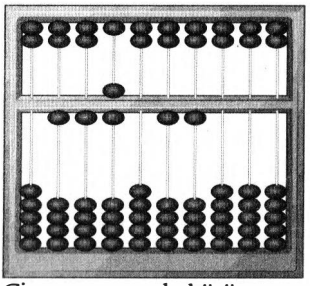
Japonya'da her sene bir milyon kadar çocuk 20.000 okul sonrası abaküs kulübünden birisine katılıyor. Bir akşam batı Tokyo banliyölerinden bir tanesindeki bir kulübü ziyaret etmiştim. Kulüp yerel tren istasyonundan kısa bir yürüyüş mesafesinde bir yerleşim bloğunun köşesindeydi. Dışarıda parlak renkleri olan otuz tane bisiklet vardı.



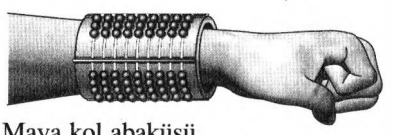
Roma abaküsü



Rus akabüsü



Çin suan-pan abaküsü



Maya kol abaküsü

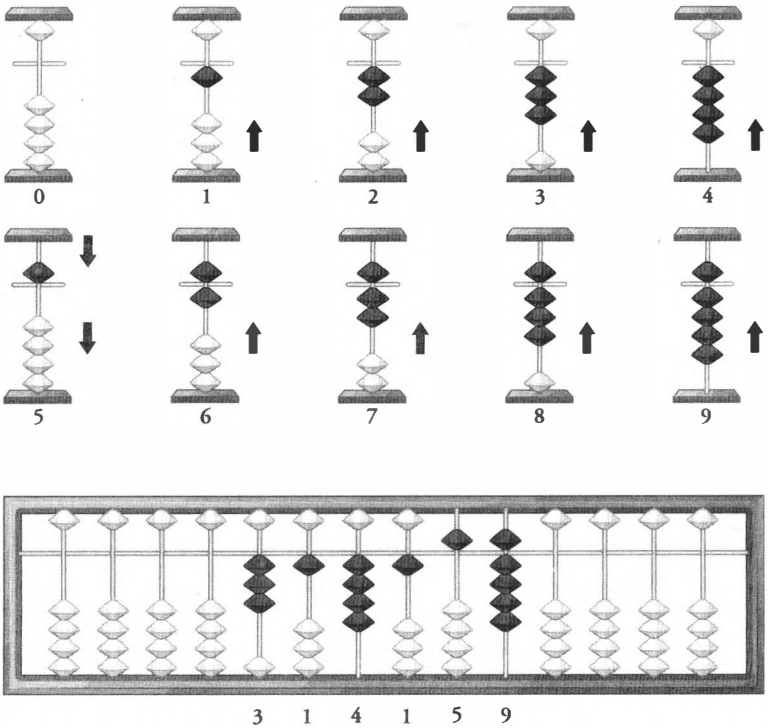
Geniş bir vitrinde ödüller, abaküsler ve üzerlerine yıldız öğrencilerin isimleri kazınmış ahşap çıtalar sergileniyordu.

Okuma yazma ve hesap yapmanın Japoncası *yomi*, *kaki*, *soroban* ya da başka bir deyişle okuma yazma ve abaküs. İfade Japon tarihinin on yedi ve on dokuzuncu yüzyılları arasında ülkenin neredeyse tüm dünyadan soyutlanmış olduğu dönemden kalmadır. Samuray kılıcında ustalık dışında başka beceriler gerektiren bir tüccar sınıfı ortaya çıkmıştı, bu nedenle özel topluluk kültürü –dil ve aritmetik öğretilen okullar kurarak– abaküs eğitimine odaklandı.

Yuji Miyamoto'nun abaküs kulübü eski *soroban* girişimlerinin modern torunlarından birisidir. İçeri girdiğimde, lacivert bir takım elbise ve beyaz gömlek giyen Miyamoto, beş kız ve dokuz erkek çocuktan oluşan bir sınıfın önünde duruyordu. Bir at yarışı yorumcusunun nefes nefese olan temposuyla sayıları Japonca okuyordu. Çocuklar işlemleri yaparken boncukların sesi kulağa ağustosböceği sürüsü gibi geliyordu.

Bir *soroban*'da, aşağıda gösterildiği gibi her sütundaki boncuklar için 0 ile 9 arasındaki rakamları temsil eden on konum vardır.

Soroban'da bir sayı gösterildiğinde, her rakam farklı sütunlardaki on pozisyondan birisiyle temsil edilir.



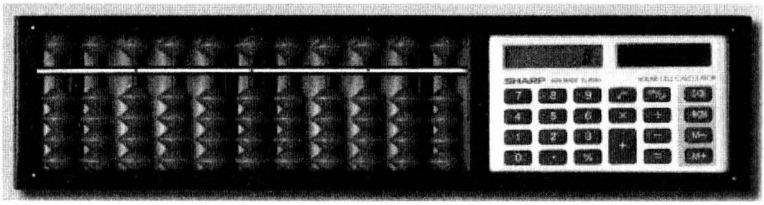
Soroban üzerindeki sayılar

Abaküs aslında bir sayma yöntemi olarak icat edilmiştir ama bir hesaplama yöntemi olarak kendini göstermiştir. Aritmetik, boncuklardan faydalanıldığında daha da kolay bir hale gelmiştir. Örneğin 3 artı 1'i hesaplamak için üç boncukla başlayın ve bir boncuğu daha hareket

ettirin, cevap gözlerinizin önündedir—4 boncuk. 31 artı 45'i hesaplamak için 3 ve 1 boncuk bulunan bir sütunla başlatın ve soldaki kolona 4 boncuk sağdaki sütuna 5 boncuk ekleyin. Son durumda kolonlarda 7 ve 6 boncuk bulunur, cevap da 76'dır.

Biraz pratik ve uygulamayla, rakam sayısına karşılık yeteri kadar sütun varsa herhangi bir uzunluktaki sayıyı toplamak gittikçe kolaylaşmaktadır. Eğer herhangi bir sütundaki iki rakamın toplamı onu aşarsa boncukları yandaki sütuna taşımanız gerekir. Örnek olarak, bir sütun üzerinde yapılan 9 artı 2 işleminde bir boncuk soldaki sütuna kayar ve ilk sütunda bir boncuk kalır, cevap 11'dir. Çıkarma, çarpma ve bölme biraz daha karmaşıktır, ama bir kere ustalaşıldığı zaman işlemler çok hızlı bir biçimde yapılabilmektedir.

Ucuz hesap makinelerinin 1980'lerde yaygınlaşmaya başlamasından önce Moskova'dan Tokyo'ya kadar abaküsler dükkânlarda hesaplama için kullanılıyordu. Aslında manüelden elektroniğe geçiş döneminde üzerinde hem hesap makinesi hem de abaküs bulunan bir ürün Japonya'da satılmıştı. Toplama işlemi abaküs üzerinde daha hızlı yapılır çünkü rakamları girer girmez sonuç ortaya çıkar. Çarpmada hesap makinesi size hafif bir avantaj sağlar (Abaküs ayrıca, şüpheci abaküs kullanıcısı için, hesap makinesine inanmadığı durumlarda sonucu kontrol edebilme olanağı sağlıyordu).



Sharp'ın abaküs hesap makinesi

Abaküs Japonya'da 1970'lerden bu yana düşüşe geçti, zirvesindeyken yılda 3,2 milyon insan *soroban* yeterlilik sınavına giriyordu. Ancak abaküs hâlâ gelişmeyi tanımlayan yönlerden biri olarak varlığını sürdürüyor, popüler okul dışı bir aktivite, yüzmek, keman çalmak veya judo gibi. Aslında abaküs eğitimi, tıpkı dövüş sanatları gibi. Beceri seviyeleri dan'larla ölçülüyor ve yerel, bölgesel ve ulusal yarışmalar düzenleniyor. Bir pazar günü bölgesel bir etkinliği görmeye gitmiştim. 5 ve 12 yaşlar arası yaklaşık 300 çocuk bir konferans salonunda gösterişli abaküs masalarını andıran, özel *soroban* aksesuarları olan sıralarda oturuyorlardı. Salonun önünde bir sunucu sabırsız bir müezzin tonuyla toplanması, çıkarılması ya da çarpılması gereken sayıları okuyordu. Bu birkaç saat süren eleme usulü bir yarışmaydı. Kazananlara her birinde elerinde abaküs tutan kanatlı figürlerin bulunduğu kupalar verilirken ses sisteminden askerî bir bando müziği çalınmaya başlamıştı.

Miyamoto beni okulundaki en iyi öğrencilerinden birisiyle tanıştırdı. 19 yaşındaki Naoki Furuyama eski *soroban* şampiyonuydu. Siyah bir tişörtün üzerine açık renk kareli bir gömlek giymişti ve oldukça sakin, uyumlu bir gence benziyordu, kesinlikle sosyal açıdan tuhaf aşırı inek klişelerinden biri değildi. Furuyama dört saniyede altı basamaklı iki sayıyı çarpabiliyordu ki problemi okumak bu kadar sürüyordu. Ona bu kadar hızlı hesap yapabilmenin ne manası olduğunu sordum çünkü günlük hayatta böyle bir yeteneğe ihtiyaç yoktu. Odaklanma gücüne ve kişisel disiplinine yardımcı olduğunu söyledi. Miyamoto yanımızdaydı ve söze karıştı. Bana, '26 mil koşmanın bir anlamı var mı?' diye sordu. 26 mil koşmanın bir anlamlı yoktu ama insanlar performanslarının sınırını zorlamak için koşuyorlardı. 'Aynı biçimde' diye ekledi, 'kişinin aritmetiksel beynini geliştirmenin asil bir yanı var.'

Bazı aileler çocuklarını abaküs kulüplerine, okul matematik sonuçlarında gelişme sağladığı için gönderiyorlar. Ancak bu, abaküsün popülerliğini tamamen açıklamaya yetmiyor.

Diğer okul sonrası kulüpler daha hedefe yönelik matematik eğitimi veriyorlar—örneğin 1950'lerde Osaka'da başlayan çalışma sayfaları kullanılarak sürdürülen yöntem olan Kumon şimdi dünya üzerinde dört milyon çocuk tarafından takip ediliyor. Abaküs kulüpleri eğlenceli. Bunu Miyamoto'nun okulundaki öğrencilerin yüzünde gördüm. Boncukları hızlı ve tam bir kesinlikle hareket ettirme hünerlerinden keyif alıyorlar. Bir Japon mirası olan *soroban* ulusal bir gurur sağlıyor. Ama yine de, abaküsün bence gerçek eğlencesi daha ilkel: Binlerce yıldır kullanılıyor ve bazı durumlar için hâlâ toplama yapmanın en hızlı yolu.

Birkaç yıl abaküs kullandıktan sonra, boncukların konumlarına oldukça alışınca, hesapları gözünüzün önüne bir abaküs getirerek yapmak da mümkün olabiliyor. Buna *anzan* deniyor ve Miyamoto'nun en iyi öğrencilerinin hepsi bunu biliyor. Bu yeteneği, her ne kadar görülecek bir şey sunmasa da izlemesi çok heyecan verici. Miyamoto tamamen sessiz ve hareketsiz bir sınıfta sayıları okuyor ve birkaç saniye içinde cevabı bulan öğrencilerin elleri havaya kalkmaya başlıyor. Naoki Furuyama bana sekiz sütunlu bir abaküsü gözünde canlandırabildiğini söyledi. Başka bir deyişle, hayali abaküsü 0 ile 99.999.999. arasındaki sayıları gösterebiliyor.

Miyamoto'nun abaküs kulübü, öğrencilerin dan'ları ve ülke çapındaki turnuvalarda aldıkları dereceler bakımından ülkedeki en iyi kulüplerden birisi. Özellikle de *anzan*'da. Birkaç sene önce Miyamoto sadece *anzan* ile cevaplanabilen bir aritmetik yarışması tipi tasarlamaya karar vermiş. Bir toplamı öğrenciye okuduğunuzda, bu birçok yolla cevaplanabilir: Hesap makinesi, kalem ve kâğıt, abaküs ya da *anzan* kullanılarak. Miyamoto sonuca ulaşmak için kullanılabilecek tek yolun *anzan* olduğu durumların var olduğunu göstermek istemiş.

Çözümü, bilgisayar oyunu *Flash Anzan* olmuş ve bana bir gösteri sundu. Sınıfa hazır olmalarını söyledi, başlat tuşuna bastı ve öğrenci-

ler sınıfın ön tarafında bulunan televizyon ekranına baktılar. Makine başladığını göstermek için üç kere bipledi ve aşağıdaki on beş sayı tek tek görünmeye başladı. Her sayı sadece 0,2 saniye göründü, yani her şey üç saniye içinde bitti.

164
597
320
872
913
450
568
370
619
482
749
123
310
809
561

Sayılar o kadar hızlı gözüktüler ki onları zar zor kaydedebildim. Ama son sayı göründüğü anda, Naoki Furuyama gülümsedi ve toplamın 7907 olduğunu söyledi.

Bir *Flash Anzan* sorusunu hesap makinesi ya da abaküs kullanarak çözmek imkânsız çünkü sayıları ezberlemek için zaman yok, kaldı ki bunları bir makineye girmek ya da boncukları hareket ettirmek gerekiyor.

Anzan'da sayıları hatırlamanız gerekmiyor. Tüm yapmanız gereken bir sayı gördüğünüzde beyninizdeki boncukları hareket ettirmek. 0 ile başlıyorsunuz ve sonra 164'ü gördüğünüzde anında abaküsü 164'e çeviriyorsunuz. 597'yi gördüğünüzde içsel abaküsünüz hareketlenerek toplamı gösteriyor yani 761'i. 15 toplama işleminden sonra gördüğünüz sayıları ya da ara toplamları hatırlamıyorsunuz, sadece aklınızdaki hayali abaküsün gösterdiği cevabı görüyorsunuz: 7907.

Flash Anzan'ın şaşkınlık yaratma etkisi onu ulusal bir çılgınlık haline getirdi ve Nintendo bile DS konsolu için *Flash Anzan* oyununu piyasaya sürdü. Miyamoto, bana genç *anzan* yıldızlarının hayranlarının karşısında birbirleriyle mücadele ettikleri televizyon programından klipler gösterdi. Miyamoto oyunun ülke genelinde abaküs kulüplerine birçok yeni öğrenci kazandırdığını söylüyor. 'İnsanlar *soroban* becerileriyle neler yapabileceklerinin farkında değillerdi' diyor. 'Tüm bu yayınlar sayesinde artık biliyorlar.'

Nöral görüntü taramaları abaküs ya da *anzan* ile harekete geçen beyin bölgelerinin normal aritmetik hesapları ve dil ile harekete geçen bölgelerinden farklı olduğunu gösteriyor. Klasik 'kâğıt ve kalem' aritmetiği dilsel işlemlerin yürütüldüğü nöral ağ ile bağlantılı. *Soroban* ise görsel bilgilendirme ağı ile bağlantılı. Miyamoto bunu şöyle basitleştiriyor: '*Soroban* sağ beyni kullanır, normal matematik ise sol beyni.'

Bu ayrımın sağladığı yararları ya da normal zekâ, odaklanma veya diğer beceriler ile nasıl bir ilişkisinin bulunduğunu anlamak için yapılmış yeterli araştırma yok. Ancak hayret verici bir fenomeni açıklıyor: *Soroban* uzmanları çoklu görevleri inanılmaz bir biçimde yapabiliyorlar.

Miyamoto, eski bir *soroban* şampiyonu olan eşiyle, gençken gittikleri abaküs kulübünde tanışmış. Kızları Rikako bir *soroban* dehası. Olmasa, şaşırtıcı olurdu. Sekiz yaşındayken en yüksek dan'a ulaşmış—sadece 100.000 insan hayatları boyunca bu seviye ulaşabilmiştir. Pastel mavisi

bir elbise giymişti ve kâkülleri gözlüklerinin üzerine düşüyordu. Çok dikkatli baktı ve bir odaklanma belirtisi olarak dudaklarını büktü.

Shiritori bir Japon kelime oyunu ve oyun kişi *Shiritori* dediği zaman başlıyor ve sıradaki her kişi bir önceki kelimenin son hecesiyle başlayan bir kelime söylemek zorunda. Yani sıradaki kelime *ringo* olabilir çünkü *ri* hecesiyle başlıyor. Miyamoto Rikako ve yanındaki kızdan birlikte *shiritori* ve aynı zamanda üç haneli 30 sayının 20 saniyede gösterildiği *Flash Anzan* oynamalarını istedi. Makine başlama biplerini yaptı ve kızların diyalogları şu şekilde devam etti:

Ringo

Gorira (goril)

Rappa (trompet)

Panda (panda)

Dachou (devekuşu)

Ushi (İnek)

Shika (geyik)

Karasu (karga)

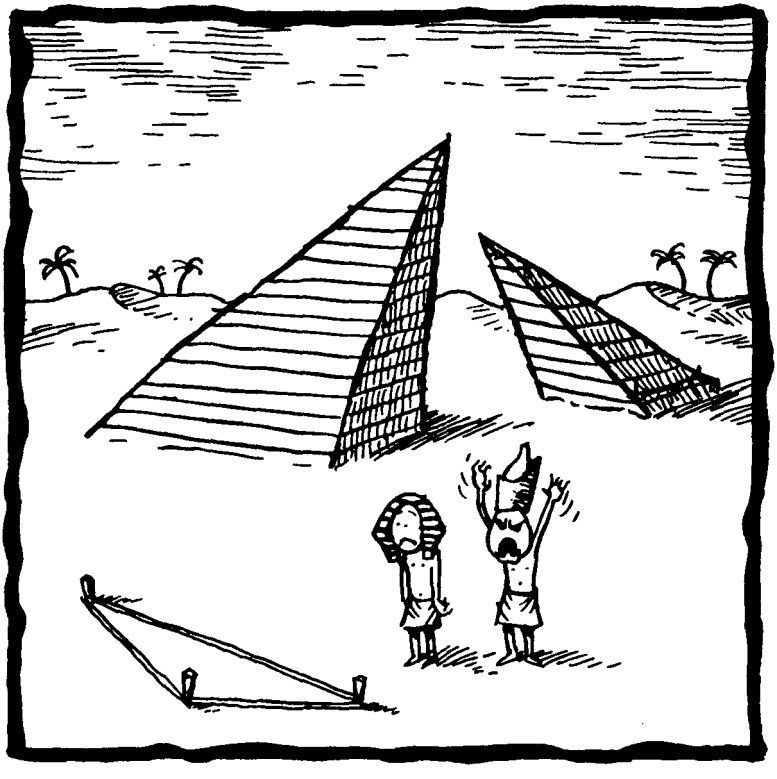
Suzume (serçe)

Medaka (yıllık balığı)

Kame (kaplumbağa)

Medamayaki (kızarmış yumurta)

20 saniyenin sonunda, Rikako 17.602 dedi. Aynı anda 30 sayıyı toplayıp *shiritori* oynayabiliyordu.



BÖLÜM İKİ

Vay Be!

Doğum tarihimin heyecan verici bir giriş konuşması olduğunu düşünmüyorum. Fakat bunun sebebi, Jerome Carter gibi insanlarla yeterince vakit geçirmemiş olmam olabilirdi. Scottsdale, Arizona'daki evlerinde o ve eşi Pamela ile öğle yemeği için oturmuştuk, konu o sırada açıldı: 22 Kasım.

'Vaaayyy!' dedi 57 yaşındaki eski bir uçuş hostesi olan Pamela, üzerinde pembe hoş bir bluz ve kot etek vardı.

Jerome bana baktı ve ciddi bir tonda eşinin coşkusuna ortak oldu: 'Oldukça iyi bir sayı yakalamışsın.'

Jerome 53 yaşındaydı ve sıradan bir mistik gibi görünmüyordu. Turuncu bir havai gömlek ve beyaz bir şort giymişti, sert hatları, karate şampiyonu olan ve uluslararası koruma görevi yapmış birinin eski kariyerinin izlerini taşıyordu. "22/11'in bu kadar iyi olmasını sağlayan ne?" diye sordum.

"22 bir üstün sayı. 11 de öyle. Sadece dört tane üstün sayı var: 11, 22, 33 ve 44."

Jerome'un güçlü gülümseme çizgileri ve bir kubbeyi andıran parlak kel kafasıyla farkı bir yüzü vardı. Olağanüstü müzikal bir ses tonu vardı, kısmen bir spor yorumcusu kısmen bir rapçi edasıyla, "Ayın yirmi ikisinde doğmuşsun" dedi. İlk başkanımızın ayın yirmi ikisinde doğması bir tesadüf değil. İki kere iki neye eşit? Dört. Biz başkanları kaç senede bir seçeriz. Dört senede bir. Vergilerimizi dördüncü ayda

öderiz. Birleşik devletlerde dört her şeydir. İlk deniz kuvvetlerimizde 13 gemi vardı, 1 artı 3 eşittir 4. Eskiden 13 sömürgemiz vardı, 1 artı 3 eşittir 4. Bağımsızlık Bildirgesi'ni imzalayanların sayısı 13. Dört. Nerede bulunuyorlardı 1300 Locust Caddesi. Dört!

'Parayı dört rakamı kontrol eder. Sen de bunun altında doğmuşsun. Çok güçlü bir rakamdır. 4 rakamı bir karedir, yani içinde hukuk, hükümet, organizasyon, gazetecilik ve yapı vardır.

Kendini kaptırmaya başlamıştı: "O. J.'e yürüyüp gideceğini bu şekilde söyledim. Avukatlarına baktım. Tüm avukatları dördün altında doğmuştu. Johnny Cochran ayın yirmi ikisinde doğmuştu 2 artı 2 eşittir 4. F. Lee Bailey ayın on üçünde doğmuştu, 1 artı 3 eşittir 4. Barry Scheck ayın dördünde doğmuştu. Robert Shapiro ayın otuz birinde doğmuştu; 3 artı 1 eşittir 4. Dördün altında doğan dört avukatı vardı. Hüküm kaçta açıklandı? Saat dört. Hitler bile çıkıp giderdi."

"Tıpkı sayılarına baktığım zaman Mike Tyson'ın söylediği gibi bu sayıların zamanı gelmişse hataların bile iyi sonuç verir."

Jerome profesyonel bir sayı uzmanı. Sayıların sadece nicelik değil nitelik de bildirdiğine inanıyor. Özel yeteneğinin, bu bilgiyi insanların kişilikleri hakkında görüş elde etmek hatta geleceği tahmin etmek için kullanabilmesi olduğunu söylüyor. Aktörler, müzisyenler, sporcular ve şirketler tavsiyeleri için iyi para ödüyorlar. 'Sayı uzmanlarının çoğu fakir, medyumların çoğu fakir. Bu çok anlamsız' diyor. Buna karşılık Jerome ise lüks bir apartman dairesinde oturuyor ve evinin garajında 25.000 $ değerinde 3 motosikleti var.

Doğum tarihleri, karakter özelliklerinin çıkarılabileceği sayılar için belirgin kaynaklar. İsimler de öyle, çünkü kelimeler her biri sayısal bir değer taşıyan harflere ayrılabiliyorlar. 'Puff Daddy hapse girmek üzereydi' dedi. 'Puff Daddy'nin kötü ilişkileri vardı. İsmini P. Daddy olarak değiştirdim. Daha sonra kalıcı olmak istediğinde ismini Diddy olarak değiştirdim. Benim tavsiyelerim bunlardı ve o da bunları din-

ledi. Jay-Z, Beyonce ile evlenmek istiyordu. Ona gerçek adına geri dönmesini söyledim. O da Shawn Carter'a geri döndü.'

Jerome'ye benim içim tavsiyesi olup olmadığını sordum.

"Tam adın ne?" dedi.

"Alexander Bellos, ama herkes bana Alex der."

"Çok yazık" dedi dramatik bir ifade ile.

"Alexander, daha mı iyi?" diye sordum.

Sesi yükseldi, "Şöyle diyelim, bu dünyaya gelmiş en büyük insanlardan birisinin adı Büyük Alex değildi."

"Sana söylemeliyim, daha önce adı Alex olan insanlarla konuştum. Daha basit bir ifadeyle: İsmin ilk harfi oldukça önemlidir. A, 1. Bu zaten Alex'de var. Ama Alexander 'r' ile bitiyor. 'R' dokuza eşittir. Yani isminin ilk ve son harfleri 1 ve 9. Alfa ve omega. Başlangıç ve bitiş. Şimdi Alex'in ilk ve son harflerine bakalım. Yalnızca 'x' sesi.' Adeta kusacakmış gibi suratını ekşiterek 'ekkss' diye telaffuz etti. "Bunu kullanmak ister misin? Ben kullanmazdım. Bu isimle çağırılmak istemezdim."

"Tanrı iyi bir ismin büyük zenginliklerden daha tercih edilir olduğunu söyler! Takma adların daha tercih edilebilir olduğunu değil!"

"Alex bir takma ad değil' diye itiraz ettim. "Bir kısaltma."

"Neden direniyorsun, Alexander?"

Jerome ardından defterimi istedi ve aşağıdaki tabloyu çizdi:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	B	C	D	E	F	G	H	I
J	K	L	M	N	O	P	Q	R
S	T	U	V	W	X	Y	Z	

Bu tablonun, hangi harfin hangi sayıya denk geldiğini gösterdiğini söyledi. Parmaklarını ilk sütuna götürdü. 1'e eşit olan harfler A, J, S. Allah, Jehovah (Yehova), Jesus (İsa), Saviour (Kurtarıcı), Salvation (Kurtuluş). İki diplomatların ve büyükelçilerin sayısıdır. İki iyi tavsiyeler verir, iki sevilir, takım oyuncususundur. B, K ve T, bu nedenle Burger King'e gider ne istersen alırsın. Üç radyo, TV, eğlence ve sayı bilimini kontrol eder. C, L, U elbette radyo ve televizyona çıkarsın, nasıl olduğuna dair fikrin bile yok.' Alaycı bir ifadeyle göz kırptı. 'Eğer sayı bilimini öğrenirsen, sana hayatın tüm ipuçlarını sunar. Dört: D, M, V bir arabada kaç tane tekerlek vardır? Ehliyetini nereden alırsın? Motorlu taşıtlar dairesinden (Department of Motor Vehicles). Beş 1 ile 10'un orta noktasıdır. E, N ve W. Beş değişimin sayısıdır. Eğer harflerin yerlerini değiştirirsen 'new' (yeni) elde edersin. Altı Venüs'ün, aşkın, ailenin ve topluluğun sayısıdır. Güzel bir kadın gördüğünde ne görürsün bir FOX (tilki). Yedi maneviyatın sayısıdır. İsa ayın yirmi beşinde doğmuştu. 2 ve 5 toplamda 7 eder. Sekiz işletme, finans, ticaret ve paranın sayısıdır. Paranı nerede saklarsın? Karargâhta (headquarters). 9 iki harf bulunan tek saydır I ve R. Daha önce bir Jamaikalıyla konuştun mu hiç? Her şey irie dostum.'

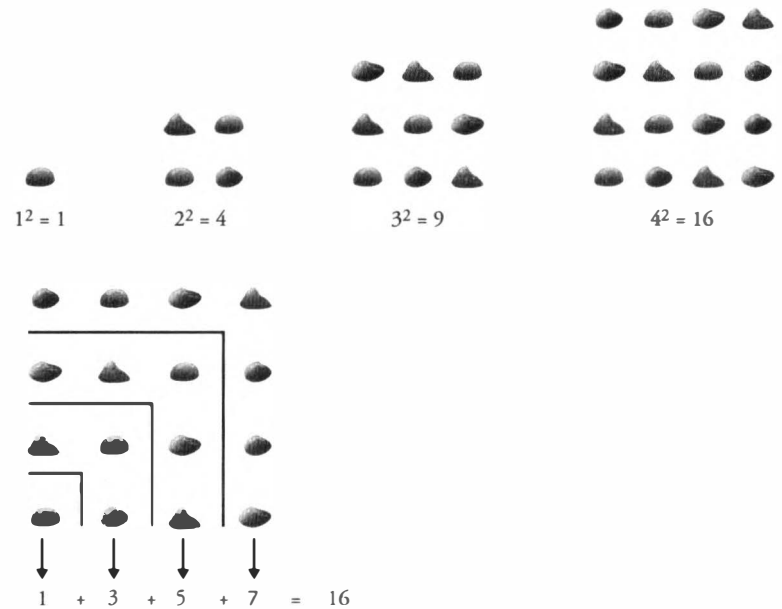
Sonuç olarak, kalemini bıraktı ve yüzüme baktı: 'Bu' dedi, 'Jerome Carter'ın Pisagor yöntemi.'

***

Pisagor, tam olarak üçgenlerle ilgili teoreminden dolayı matematikteki en ünlü isimlerden birisidir (İleride daha fazla ele alacağız). İtibar gören başka katkıları daha vardır, örneğin 'Tam kare' sayılar. Bir zamanlar geçerli bir uygulama olan çakıl taşlarıyla saydığınızı hayal edin (Çakıl taşının Latincesi hesap anlamına gelen *calculus*'tur bu da hesaplama [calculate] kelimesinin kökenini işaret etmektedir). Çakıl taşlarının

yatay ve dikey olarak eşit biçimde bir araya getirildiği kareler meydana getirdiğinizde, iki sıradan meydana gelen kareler için dört çakıl taşı ve üç sıralı kareler için dokuz çakıl gerekir. Başka bir deyişle n sayısını kendisiyle çarptığınızda, n sıralı karenin sütunlarında bulunması gereken çakıl taşı sayısını gösterir. Düşünce o kadar içgüdüseldir ki kendi kendiyle çarpma işlemi için 'kare' terimi hemen yerleşmiştir.

Pisagor, karelerinde sıradışı modeller gözlemledi. 2'li karede kullanılan çakıl sayısı 4'ün 1 ve 3'ün toplamı 3'lü karede kullanılan çakıl sayısı olan 9'un 1, 3 ve 5'in toplamı olduğunu gördü ve 4'li karede 16 çakıl taşı vardır ya da 1 + 3 + 5 + 7. Başka bir ifadeyle n sayısının karesi ilk n tane tek sayının toplamına eşittir. Bu, çakıl karelerin nasıl oluşturulduğuna bakılarak görülebilir.



Çakıl kareleri.

Pisagor'un keşfettiği başka bir model de müzikle alakalıdır. Anlatılanlara göre bir gün, bir demircinin yanından geçerken demire vuran çekicin sesini işitmiş, çınlama sesinin örgün ağırlığına göre değiştiğini fark etmiş. Bu da onu titreyen telin kalınlığının çıkardığı sesle olan ilişkisini araştırmaya yöneltmiş. Bu ise onun, telin boyu yarıya indiğinde sesin bir oktav arttığını keşfetmesini sağlamıştır. Diğer armoniler tel 3:2 ve 4:3, vb oranlarında bölündüğünde de ortaya çıkmaktadır.

Pisagor doğada keşfettiği şablonlar karşısında kendinden geçmişti, evrenin sırlarının sadece matematikle anlaşılacağına inanıyordu. Ancak matematiği doğayı açıklamanın bir aracı olarak görmek yerine, sayıların bir biçimde doğanın özü olarak görüyor ve öğrencilerine onlara saygı duymalarını öğretiyordu. Çünkü Pisagor sadece bir âlim değildi. Aynı zamanda felsefi ve matematiksel düşünmeye adanmış mistik bir tarikat olan ve bir çeşit şifa merkezi, eğitim kampı ve ashram karışımı olan Pisagor kardeşliğinin karizmatik lideriydi. Müritler, asla güneşe karşı işememek, altın süsler takan bir kadınla asla evlenmemek ve sokakta yatan bir ahmağın yanından asla geçmemek gibi belirli kurallara uymak zorundaydılar. Kardeşliğe katılması için seçilen grubun beş yıllık adaylık sürecinden geçmesi gerekiyordu ve bu süre içinde Pisagor'u sadece bir paravan arkasından görebiliyorlardı.

Pisagor'un manevi evreninde on, ilahi bir değere sahipti ve bunun sebebi sadece el ve ayak parmakları ile ilgili değil aynı zamanda her biri dört elementten birinin, ateş, hava, su ve toprağın sembolü olan ilk dört rakamın toplamı olduğu içindi ($1 + 2 + 3 + 4 = 10$). 2 rakamı dişil, 3 eril ve birleşimleri olan 5 kutsaldı. Kardeşliğin arması pentagram ya da beş uçlu yıldızdı. Sayılara tapınma düşüncesinin şimdi tuhaf görünmesine rağmen, belki de soyut matematiğin ilk keşiflerinin meydana getirdiği şaşkınlığın boyutlarını göstermektedir. Evrende daha önce var oldukları bilinmeyen bir düzenin bulunduğunu öğrenmenin verdiği heyecan dinsel bir uyanış gibi hissettirmiş olmalı.

Pisagor'un manevi öğretileri sayısal olmanın ötesindeydiler. Reenkarnasyon inancı da bunların arasındaydı ve muhtemelen kendisi vejetaryendi. Aslında beslenme konusundaki gereklilikleri 2000 yıldır hararetli bir biçimde tartışılmaktadır. Kardeşliğin meşhur küçük yuvarlak bakla yeme yasağı Pisagor'un anlatılan ölüm hikâyelerinden birinde kendisine saldıranlardan kaçarken bir bakla tarlasından geldiği söylenir. Hikâyenin ilerleyen bölümlerinde baklalara basmak yerine yakalanmayı ve öldürülmeyi tercih eder. Başka eski bir kaynağa göre baklaların kutsal olmasının sebebi insanın meydana geldiği ilk topraktan filizlenmiş olmalarıdır. Pisagor bunu, bir baklayı çiğnerken dişlerinizle ezip, bir süre güneş altında bekletildiğinde meni gibi kokmaya başladığını göstererek ispatlamıştır. Daha yakın zamanlarda ileri sürülen bir hipotez ise Kardeşliğin kalıtsal bakla alerjisi olan bir koloni olduğu yönündedir.

Pisagor M.Ö. altıncı yüzyılda yaşadı. Hiçbir kitap yazmadı. Onun hakkında tüm bildiklerimiz ölümünden yıllar sonra yazıldı. Her ne kadar Kardeşlik, Antik komedi tiyatrosu tarafından hicvedilerek kaleme alınmış olsa da, Hıristiyanlık döneminin başlamasıyla birlikte Pisagor faydalı bir ışık, eşsiz bir deha olarak görülmeye başlandı, matematik teoremleri onu Yunan filozoflarının düşünsel atası haline getirdi. Kendisine mucizeler yakıştırıldı, bazı yazarlar, oldukça tuhaf bir biçimde, altın kalçaları olduğunu ileri sürdüler. Başkaları bir keresinde bir nehirden karşıya geçtiğini ve geçtikten sonra nehrin herkesin duyabileceği bir sesle 'Selam sana Pisagor' diye seslendiğini yazar.

Bu, ölüm ardından efsaneleştirme hali başka bir Akdenizli ruhani lider ile paralellikler gösterir, aslında Pisagor ve İsa geçici bir süre için dinsel rakipler durumunda olmuşlardır. M.S. ikinci yüzyılda Hıristiyanlık Roma'da kök salmaya başladığında imparatoriçe Julia Roma halkını Pisagor'un reenkarnasyonu olduğunu iddia ettiği Tyna'lı Apollonius'a tapmaları için teşvik etti.

Pisagor'un çelişkili iki mirası vardır: Matematiği ve karşıt matematiği. Aslında belki de bazı akademisyenlerin iddia ettiği gibi hatasız olarak onunla ilişkilendirilebilecek tek düşünceler mistik olanlarıdır. Pisagorcu ezoterizm, ilk çağdan bu yana Batı düşüncesinde varlığını sürekli olarak korumuştur, fakat Pisagor'un Altın Mısraları adındaki 'kişisel gelişim' özdeyişlerinin bulunduğu şiirlerinin yeniden keşfedilmesi sayesinde Rönesans sırasında özellikle revaçtaydı. Pisagor Kardeşliği birçok esrarengiz gizli topluluk için bir modeldi ve ayrıntılı ritüelleri bulunan ve sadece İngiltere'de yarım milyon üyesi bulunduğuna inanılan bir kardeşlik örgütü olan özgür masonların yaratılmasında etkisi vardı. Pisagor aynı zamanda 1908'de yayınlanan *Sayıların Felsefesi* adlı eserin yazarı ve Batı Numerolojisinin 'kurucu annesi' olan Atlantic City'li bir ev hanımı L. Dow Balliett'e de ilham kaynağı olmuştur. 'Pisagor göklerin ve yerin tek sayılara ya da tek rakamlara titreştiğini söyler' diye yazar ve alfabedeki her harfin 1'den 9'a kadar bir sayıya karşılık geldiği bir falcılık sistemi geliştirir. Bir isimdeki her harfin değerlerini toplayarak, kişisel özellikler hakkında kehanette bulunulabileceğini ileri sürer. Bu görüşü kendi üzerimde denedim. 'Alex' 1 + 3 + 5 + 6 = 15'dir. İşlemi sonucun iki hanesini toplayarak sonlandırdım ve şu sonuca ulaştım 1 + 5 = 6. Bu bana 6 rakamının isim titreşimini verdi, bu da şu anlama geliyor: Daima özenli ve dikkatli bir biçimde giyinmeliyim, zarif etkilere ve renklere düşkün olmalıyım, özel renklerim turuncu, kızıl ve günebakanın açık tonları. Uğurlu taşlarım safir, elmas, oniks ve yeşim ve uğurlu mineralim boraks ve çiçeklerim sümbülteber, defne ve krizantem. Kokum ise japonica.

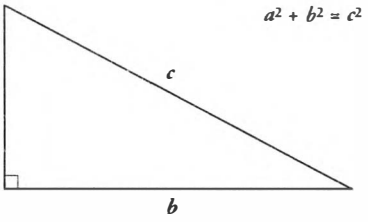
Numeroloji elbette modern mistisizm büfesinde servis edilen bir yemek tabağıdır, piyango sayıları hakkında tavsiyelerde bulunan ya da gelecekte her işin yolunda gideceği bir gün hakkında yorumlar yapan guruları hiç eksik olmaz. Zararsız bir eğlence gibi gözükür ve ben Jerome Carter ile yaptığım konuşmadan son derece keyif aldım—buna karşılık sayılara manevi bir anlam yüklemenin kötü sonuçları da vardır. Örneğin

1987'de Burma'daki askeri yönetim yazılı değeri dokuza bölünebilen banknotlar bastı—bunun tek nedeni yöneten generalin uğurlu sayısının dokuz olmasıydı. Yeni banknotlar ani ekonomik bir krizin çıkmasına neden oldu ve 8 Ağustos 1988'de bir isyan çıktı—88'in sekizinci ayının sekizinci günü (Sekiz diktatörlük karşıtı hareketin uğurlu sayısıydı). Protestolar şiddetli bir biçimde bastırıldı ve her nasılsa 18 Eylülde: dokuzuncu ayın dokuz ile bölünebilen bir gününde.

Pisagor teoremi şudur: *herhangi bir dik üçgende hipotenüsün karesi dik kenarların kareleri toplamına eşittir.* Bu sözler beynime eski bir çocuk tekerlemesi ya da bir Yılbaşı şarkısı gibi kazındı; sözlerin nostaljik bir anlamı var ve içeriğinden bağımsız bir rahatlama duygusu sağlıyor.

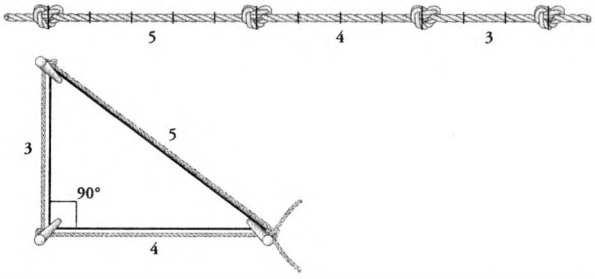
Hipotenüs dik açının karşısındaki kenardır ve dik açı ise çeyrek bir dönüştür. Teorem temel geometrinin en önde gelen teoremlerindendir ve okulda öğretilen ilk gerçek kışkırtıcı matematiksel kavramdır. Beni bu kadar heyecanlandıran şey ise sayılar ve uzay arasındaki derin ilişkiyi ortaya çıkarış biçimidir. Tüm üçgenler dik üçgen değildir, ancak dik olduklarında iki kenarın kareleri toplamı üçüncüye eşit olmalıdır. Aynı biçimde teoremin başka bir yönü daha vardır. Herhangi üç sayıyı alın. Eğer ikisinin kareleri toplamı üçüncüye eşitse bu uzunluklardan bir dik üçgen elde edebilirsiniz.

Pisagor hakkındaki bazı yorumlar, onun Kardeşliği kurmadan önce Mısır'a bilgi toplama üzerine gitmiş olduğu yönündedir. Eğer herhangi bir Mısır binasının içinde biraz zaman geçirdiyse işçilerin dik üçgen elde etmek için kullandıkları ve daha sonra kendi adıyla uygulanacak olan teoremin hilesini görmüş olabilir. 3, 4 ve 5 birim uzaklıklarla düğümlenmiş bir ip. Çünkü $3^2 + 4^2 = 5^2$'dir, eğer bu ip bu düğümlü noktalardan gerilirse dik açılı bir üçgen elde edilir.



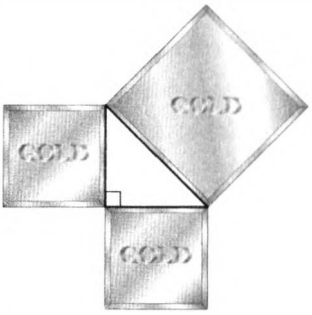
Pisagor teoremi.

İp germe, piramitler gibi yapıların inşasında birbiri üzerine ya da yanına yığmak için gerekli olan, taşlarda veya tuğlalarda kullanılmak üzere dik üçgen elde etmek için en uygun yöntemdi (Hipotenüs kelimesi Yunanca 'karşılıklı gerilen' kelimesinden gelmektedir). Mısırlılar dik üçgenler elde etmek için 3, 4 ve 5'e ek olarak birçok başka rakamlar kullanmış olabilirler. Aslında biçimine uyan sonsuz sayı bulunmaktadır. İplerini 5, 12 ve 13 noktalarından düğümlemiş olabilirler çünkü 25 + 144 = 169'dur, ya da 8, 15 ve 17, çünkü 64 + 225 = 289'dur, hatta 2772, 9605 ve 9997 (7.683.984 + 92.256.025 – 99.940.009) elbette bu sonuncu pek kullanışlı olmazdı. 3, 4 ve 5 sayıları bu görev için en uygun olanlarıdır. Sebebi sadece en düşük değerli üçlü olmaları değil, ardışık olan tek üçlü olmalarıdır. İp germe mirasından dolayı, 3:4:5 oranındaki dik üçgen Mısır üçgeni olarak bilinir. Matematiksel mirasımızın hazinesi cep boyunda dik üçgen üreten bir makinedir, büyük bir gücün, zarafetin elinden çıkmış bir sanat eseridir.



Gönyenin mısır versiyonu 3:4:5 oranlarından düğümlenmiş ve bu düğümlerden bağlandığında dik açı oluşturan bir ipti.

Pisagor teoreminde bahsi geçen kareler hem sayı olarak hem de gerçekten de üçgenin kenarlarında oluşturulmuş karelerin resmi olarak anlaşılabilir. Sıradaki imgede yer alan karelerin altından yapılmış olduğunu hayal edin. Pisagor Kardeşliği'ne katılmayı düşünmüyorsunuz, bu nedenle altın sizin için arzulanabilir bir şeydir. Ya iki küçük kareyi alabilirsiniz ya da büyük olan bir taneyi. Hangisini seçerdiniz?



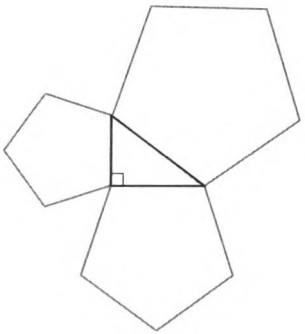
Matematikçi Raymond Smullyan bu soruyu öğrencilerine yönelttiğinde yarısının büyük olan tek parçayı diğer yarısının ise küçük olan iki parçayı tercih ettiğini ve aslında bir farkları olmadığını öğrendiklerinde hepsinin birden şaşkına döndüğünü söyledi.

Bu doğrudur çünkü teoremin de belirttiği gibi küçük karelerin kapladığı toplam alan büyük karenin alanına eşittir.

Tüm dik açılı üçgenler bu biçimde büyük olanın alanı küçük olan diğer ikisine eşit olan üç tane kare elde edilecek biçimde genişletilebilirler. Hipotenüsün karesinin diğer iki kenarın karesine bazen eşit olup bazen olmaması kesinlikle söz konusu değildir. Uyum, her zaman mükemmeldir.

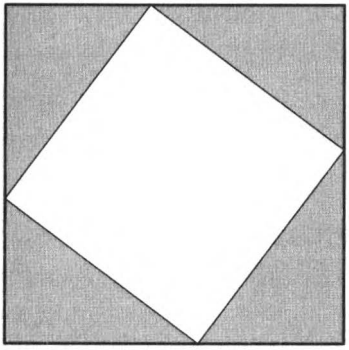
Her ne kadar klasik dönemde teoreme adı iliştirilmiş olsa da Pisagor'un kendi teoremini gerçekten keşfedip keşfetmediği bilinmemektedir. Öyle ya da böyle teorem matematiksel evrendeki olağanüstü uyumu ortaya koyarak onun dünya görüşünü sergilemektedir. Aslında teorem bir dik üçgendeki kenarların kareleri arasındaki ilişkiden daha

fazlasını ortaya koyar. Örneğin hipotenüsün üzerinde bulunan yarım dairenin alanı dik kenarların üzerinde bulunan yarım dairelerin toplamına eşittir. Hipotenüs üzerindeki bir beşgenin alanı diğer kenarlar üzerindeki beşgenlere eşittir ve bu kural altıgenler, sekizgenler ve aslında düzgün ya da değil tüm şekiller için geçerlidir.

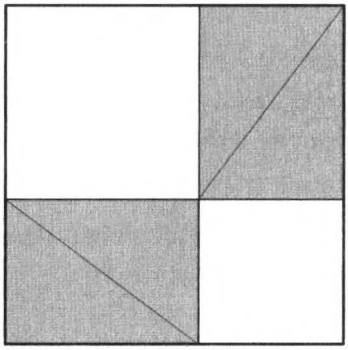




Benim için, Pisagor Teoremi'ndeki gerçek keyif, neden doğru olduğunun ortaya koyulmasındadır. En basit ispatı aşağıdaki gibidir. Çin kaynaklıdır ve muhtemelen Pisagor'un doğduğu tarihten bile öncesine dayanmaktadır ve bu da birçok kişinin teoremi ilk onun bulduğu hakkındaki şüphelerinin sebebidir.



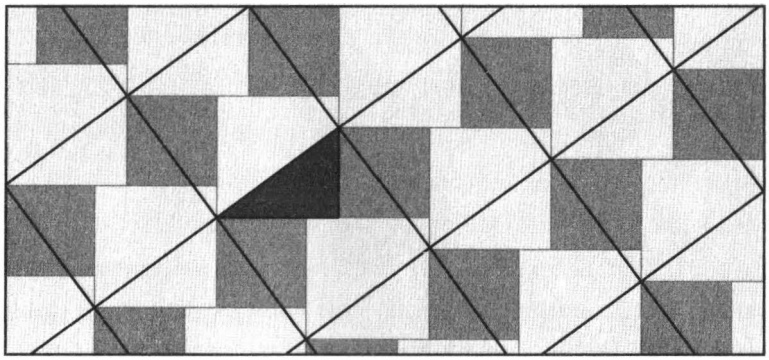
Kare A



Kare B

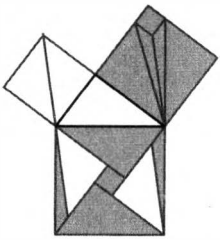
Okumaya devam etmeden önce bir süre için iki kareye bakın. Kare A kare B'yle aynı boyutta ve kareler içindeki tüm dik üçgenler de aynı ebatlardadır. Çünkü kareler eşit ve kapladıkları alanlar da eşit. Şimdi A karesindeki beyaz alanın dik üçgenin hipotenüsünün karesi olduğuna dikkat edin. Ve B karesindeki küçük kareler dik üçgenin diğer kenarlarının kareleri. Başka bir deyişle, hipotenüsün karesi dik kenarların kareleri toplamına eşit. İşte buyurun! Herhangi bir büyüklükte ya da biçimdeki dik açılı üçgenin kenarlarından bu biçimde A ve B kareleri oluşturabileceğimiz için teorem her durum için geçerlidir. Matematiğin heyecanı bunun gibi kanıtların kendilerini birdenbire açığa vurdukları, aniden her şeyin anlamlı gözüktüğü anlardadır. Son derece tatmin edicidir, neredeyse fiziksel bir keyif verir. Hintli matematikçi Bhaskara, benzer bir Pisagor kanıtı karşısında öyle hayranlık duymuştu ki, on ikinci yüzyılda yazdığı matematik kitabı *Lilavati*'de bir resmin altına hiçbir açıklamada bulunmadan sadece söyle yazmıştı, "Vay be!"

Pisagor teoremi için başka birçok kanıt bulunmaktadır ve Arap matematikçi Annairizi'ye ait olan M.S. 900 yıllarına ait olan ve özellikle de güzel olan bir tanesi aşağıda görülebilir. Teorem tekrar eden bir şablonda yer almaktadır. Görebiliyor musunuz? Eğer göremiyorsanız, kitabın sonundaki Ekler kısmında biraz yardım bulabilirsiniz.

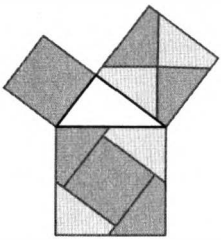


1940 yılında yayınlanan *Pisagor Önermeleri* adlı kitabında Elisha Scott Loomis, oldukça şaşırtıcı derecede farklı insanlar tarafından geliştirilen 371 ispat yayınladı. 1888 tarihli bir tanesi kör bir kız olan E. A. Coolidge'e, 1938 tarihli bir diğeri ise 16 yaşındaki bir lise öğrencisi olan Ann Condit'e aitti, diğerleri arasında ise da Vinci ve Birleşik Devletler başkanı James A. Garfield'a ait olan ispatlar vardı. Garfield ispatı, Cumhuriyetçi Parti'den milletvekilliği yaptığı dönemde meslektaşlarıyla matematiksel bir eğlence sırasında tesadüfen bulmuştu. İspat 1876 yılında ilk kez yayınlandığında; 'Biz bunun iki partinin üyelerinin parti ayrımı olmadan üzerinde birleşebilecekleri bir şey olduğunu düşünmüştük' demişti.

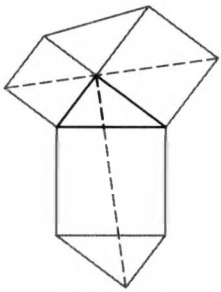
Delillerinin çeşitliliği matematiğin canlılığının bir kanıtıdır. Bir matematik problemine karşı hücuma geçmenin 'doğru' yolu diye bir şey hiçbir zaman olmamıştır. Farklı zihinlerin çözüm üretirken farklı rotalar çizmeleri ilginçtir. Karşıda üç farklı dönemde yapılmış üç farklı ispat görünmektedir: Bir tanesi üçüncü yüzyılda yaşayan Çinli matematikçi Liu Hui, diğeri Leonardo da Vinci (1452-1519) ve 1917 tarihli üçüncüsü ise İngiltere'nin en ünlü bulmaca hazırlayıcısı Henry Dudeney'ye aittir. Hem Liu Hui hem de Dudeney'in ispatları küçük karelerin büyüğün içine yerleştirildiği 'parçalara ayırma' ispatıdır. Leonardo'nun ispatı için biraz daha düşünmek gerekmektedir (Eğer yardıma ihtiyaç duyarsanız yine kitabın sonundaki Ekler kısmına bakın).



Liu Hui'nin ispatı.



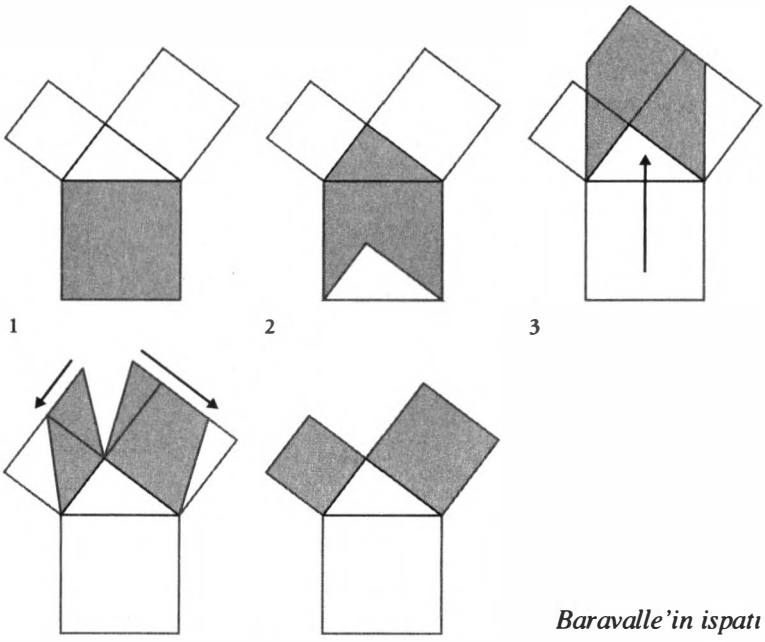
Dudeney'in ispatı



Leonardo'nun ispatı

Aşağıda gösterilen özellikle dinamik bir kanıtı matematikçi Hermann Baravalle tarafından geliştirilmiştir. Bunun organik bir yanı vardır—büyük karenin tıpkı bir amip gibi nasıl daha küçük iki kareye bölündüğünü göstermektedir. Her aşamada gölgeli alan aynıdır. Bariz olmayan tek aşama 4. Aşamadır. Yani paralelkenarın 'yamultulmuş' olduğu ya da taban ve yüksekliğin korunduğu ve alanın aynı kaldığı aşamadır.

Baravalle kanıtı matematik tarihindeki en köklü kanıt olan ve M.Ö. 300 yıllarında Öklid tarafından ortaya konan kanıta benzer.



Baravalle'in ispatı

Pisagor'dan sonraki en ünlü Yunan matematikçi olan Öklid ismi asla kısaltılmayan adam olan Büyük İskender tarafından kurulan İskenderiye'de yaşıyordu. Başyapıtı, *Elemanlar*'da dönemin Yunan

bilgisinin özetini veren 465 teorem bulunuyordu. Yunan matematiği neredeyse tamamen 'yer' ve 'ölçüm' kelimelerinden türeyen geometriydi—ancak *Elemanlar* gerçek dünyayla alakalı değildi.

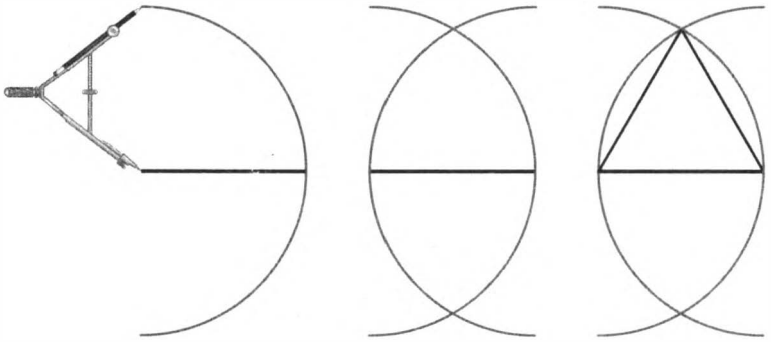
Öklid nokta ve çizgilerden oluşan soyut bir etki alanında faaliyet gösteriyordu. Alet çantasında bulunmasına izin verdiği araçlar sadece bir kalem, bir cetvel ve bir de pergeldi, bu nedenle çağlar boyunca öğrencilerin kalem kutularının temel parçaları bunlardan oluşmuştur.

Öklid'in ilk görevi (1. Kitap, 1. Önerme) verili herhangi bir doğruyla eşkenar üçgen çizilebileceğini göstermekti. Yani bir kenarı bu doğrudan oluşan ve eşit kenarlı bir üçgen:

1. Adım: Pergelin ucunu doğrunun bir tarafına yerleştir ve doğrunun diğer ucundan geçen bir çember çiz.

2. Adım: İlk adımda yaptığının aynısını doğrunun diğer ucundan başlayarak yap. Şimdi elinde kesişen iki çember var.

3. Adım: Çemberin kesişim noktasından ilk doğrunun iki ucuna yeni doğrular çiz.



Elemanlar 1. Önerme

Daha sonra doğruların, üçgenlerin ve dairelerin özellikleri bir dizi açıklama sunarak, titizlikle önermeden önermeye ilerlerler. Örneğin, 9. Önerme bir açının 'iki eşit parçaya nasıl bölündüğünü' yani tam olarak verilen bir açıdan yarım açı oluşturmayı gösterir. 32. Önerme bir üçgenin iç açılarının toplamının daima iki dik açıya ya da 180 dereceye eşit olduğunu ifade eder. *Elemanlar* titizlik ve bilgeliğin başyapıtıdır. Varsayılan hiçbir şey yoktur. Her satır mantıksal olarak kendinden önceki satırı takip eder. Ancak sadece birkaç temel aksiyomdan Öklid ilgi çekici sonuçları olan etkileyici bir bütün meydana getirmiştir.

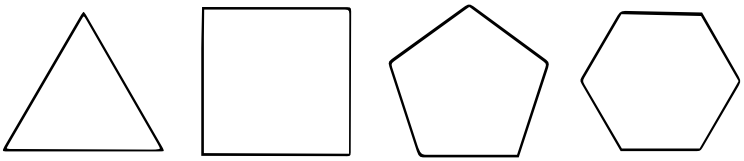
İlk kitabının büyük finali 47. Önermedir. 1570 yılında yapılan İngilizce ilk baskısında şöyle bir yorum bulunur: Bu, mükemmel ve çok dikkate değer teorem büyük filozof Pisagor tarafından geliştirilmiştir, Hierone, Proclus, Lycius, & Vitruvius bunun icat edilmesi ile bir öküz kurban edildiğini yazarlar. Ve bu Dulcamon zamanından sonraki barbar yazarlar tarafından çok iyi bilinir. Dulcamon iki boynuz ya da kafası allak bullak anlamına gelir, bunun sebebi muhtemelen ispatın iki boynuzu andıran bir biçimde ilerlemesi ya da anlaşılmasının gerçekten inanılmaz derecede zor olmasıdır.

Öklid'in Pisagor Teoremi ispatının güzel herhangi bir yanı yoktur. Uzun, titiz ve karışıktır ve üst üste çizilmiş doğrular ve üçgenler gerektirir. On dokuzuncu yüzyıl Alman filozoflarından olan Arthur Schopenhauer, ispatın gereksiz derecede karmaşık olduğunu ve bu yüzden 'olağanüstü bir huysuzluğun başyapıtı' olduğunu söyler. Öklid'e karşı dürüst olmak gerekirse, ispatı eğlenceli (Dudeney'inki gibi), estetik (Annairizi'ninki gibi) ya da sezgisel (Baravalle'ninki gibi) değildir. Öklid'in temel endişesi tümdengelim sistemindeki titizliktir.

Pisagor sayılarda mucize görürken, *Elemanlar* adlı yapıtında Öklid daha derin bir güzellik, matematiksel gerçekleri su geçirmez bir sistem ortaya koyar. Sayfalar ilerledikçe matematiksel bilginin diğer her şeyden başka bir düzene sahip olduğunu kanıtlar. *Elemanlar*'daki önermeler ebediyen gerçek olacaktır. Zamanla daha az kesin ve daha az alakalı

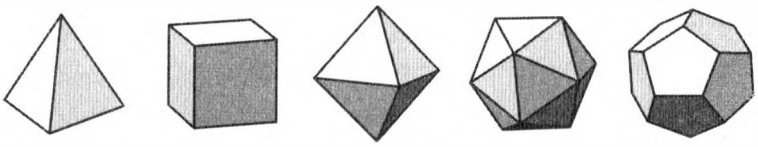
hale gelemezler, bu nedenle Öklid okullarda hâlâ okutulurken Yunan oyun yazarları şairleri ve tarihçileri okutulmamaktadır. Öklid yöntemi göz kamaştırıcıdır. On yedinci yüzyıl İngiliz bilginlerinden Thomas Hobbes'un, 40 yaşındayken, kütüphanede açık duran *Elemanlar*'ın bir kopyasına göz attığı söylenir. Önermelerden birini okuyup söyle demiştir: 'Tanrı aşkına bu mümkün değil!' Bu nedenle bir önceki önermeyi okumuş ardından ondan öncekini daha sonra her şeyin doğru olduğuna inanmış. Bu süreçte ortaya koyduğu kesinlik nedeniyle geometriye âşık olmuş bu tümdengelimsel yaklaşımı, en ünlü siyaset felsefesi çalışmalarını etkilemiş. Çünkü *Elemanlar*'daki mantıksal akıl yürütme tüm insani sorgulamalar için altın bir standarttır.

Öklid sadece doğrulardan oluşan ve çokgenler olarak bilinen şekillerin ailesini iki boyutlu uzamda taksim etmeye başladı. Pergel ve cetvel ile o, sadece bir eşkenar üçgen değil aynı zamanda kare beşgen ve altıgen de oluşturabiliyordu. Her kenarı eşit uzunlukta olan çokgenlere düzgün çokgenler denir. İlginçtir ama Öklid'in yöntemi tümü için geçerli değildir. Örneğin, yedigen cetvel ve pergel kullanılarak oluşturulamamaktadır. Sekizgen oluşturulabilirken, dokuzgen yine oluşturulmaz. Bu arada inanılmaz derecede karmaşık olan 65.537 kenarlı düzgün çokgen oluşturulabilmektedir ve gerçekte de oluşturulmuştur (Bu sayı $2^{16} + 1$'e eşit olduğu için tercih edilmiştir). 1894 yılında Alman matematikçi Johann Gustav Hermes'in on yıllık çalışması sonucunda tamamlanmıştır.



Düzgün çokgenler.

Öklid'in uğraşlarından biri de özdeş düzgün çokgenleri bir araya getirerek oluşturulabilir üç boyutlu şekiller araştırmaktı. Bu tasarısına uyan sadece beş şekil vardı: Üçgen piramit, küp, sekiz-yüzlü, yirmi-yüzlü ve oniki-yüzlü, bu beşliye platonik katılar deniyordu çünkü Platon Timaeus diyalogunda bunlardan bahsetmişti. Platon, evrendeki dört elementi, ek olarak da tüm bunları çevreleyen göksel alanı onlara eşdeğer kabul etmişti. Üçgen piramit, ateş; küp, toprak; sekiz-yüzlü, hava; yirmi-yüzlü, su ve oniki-yüzlü ise onları kuşatan kubbeydi. Platonik katılar özellikle ilginçtir çünkü mükemmel bir biçimde simetriktirler. Onları bükün, döndürün, evirip çevirin, her zaman aynı kalırlar.

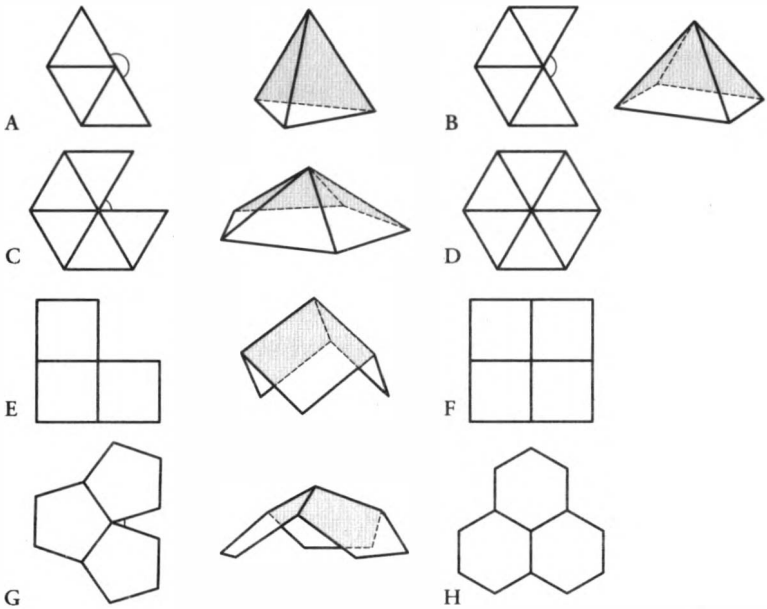


Üçgen piramit *Küp* *Sekiz-yüzlü* *Yirmi-yüzlü* *Oniki-yüzlü*

Platonik katılar

Elemanlar'ın on üçüncü ve son kitabında eşkenar üçgen ile başlayıp ve sonra kareler beşgenler, altıgenleri ele alıp, düzgün çokgenler ile yapılabilir olası tüm katı cisimleri ele alarak neden sadece beş platonik katının bulunduğunu ispatlar. Diğer sayfadaki diyagram sonuca nasıl ulaştığını göstermektedir. Çokgenler ile katı bir nesne yapmak için her zaman üç tarafın buluştuğu bir nokta, bir köşe ya da bir tepe noktası (verteks) olması gerekir. Örneğin üç eşkenar üçgeni tepe noktasında birleştirdiğinizde üçgen piramit elde edersiniz (A). Dört tanesini bir araya getirdiğinizde piramit elde edersiniz (B). Piramit bir platonik katı cisim değildir, çünkü tüm kenarları eşit değildir, ancak tabana ters bir piramit eklerseniz sekiz-yüzlü elde etmiş olursunuz. Beş eşkenar üçgeni birleştirdiğinizde yirmi-yüzlünün ilk parçasını elde etmiş olursunuz

(C). Ama altısını birleştirmek istediğinizde . . . elinizde düz bir kağıt parçası olur. Altı eşkenar üçgenle katı bir cisim elde edemezsiniz, yani bunlardan yapılmış başka herhangi bir platonik katı cisim yoktur. İşleme karelerle devam edilir, üç kareyi köşeden birleştirmenin sadece bir yolu olduğu çok açıktır (E). Bu işlemle küp elde edilir. Dört kareyi birleştirmek istediğinizde elinizde düz bir kâğıt parçası bulunur (F). Buradan hareketle de platonik katı cisim elde edilemez. Aynı şekilde üç beşgen birlikte oniki-yüzlü olacak olan katı cismin bir açısını oluşturur (G). Dört beşgeni birleştirmek imkânsızdır. Aynı noktada birleşmiş üç altıgen birbirlerinin yanında düz olarak dururlar (H), yani onlardan da katı bir cisim yapmak mümkün değildir. Başka Platonik katı cisim yoktur, altı kenardan fazla olan düzgün çokgenleri bir köşeden birleştirmenin olanağı yoktur.



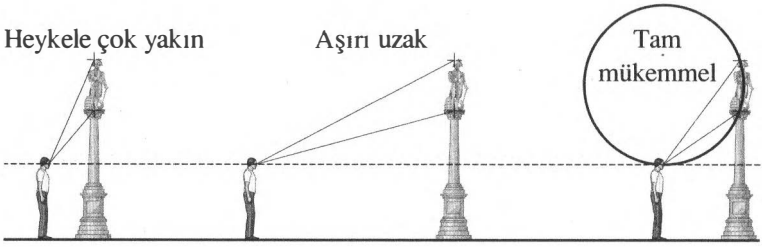
Sadece beş Platonik katı cisim olduğunun ispatı.

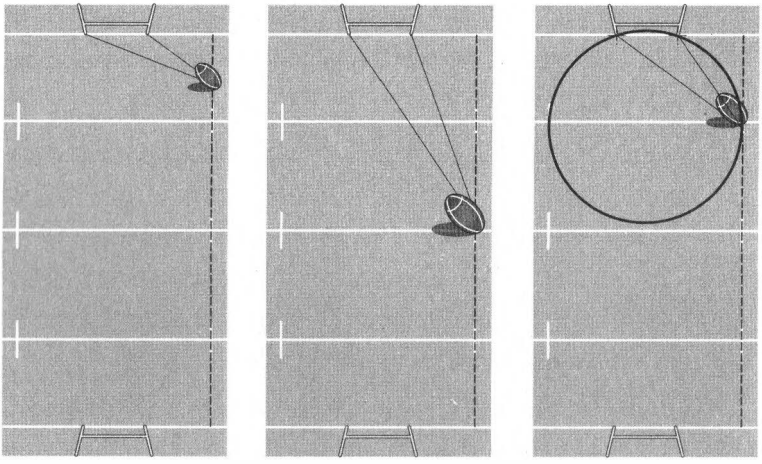
Kendisinden sonra Öklid geometrisini kullanan tüm matematikçiler yeni sorular sordular ve yeni keşiflerde bulundular. Örneğin, 1471'de Alman matematikçi Regiomontanus bir arkadaşına aşağıdaki soruyu yönelttiği bir mektup yazdı: 'Yer üzerindeki hangi noktadan yere dikili bir çubuk en büyük görünür?' Bu daha sonra 'heykel problemi' olarak yeniden ifade edildi. Önünüzde bir kaide üzerinde bir heykel olduğunu hayal edin. Çok yaklaştığınızda heykeli görmek için yukarı bakarken boynunuzu kaldırmanız gerekir ve görmek için çok dar bir açıya sahipsinizdir. Çok uzak olduğunuzda gözlerinizi çok zorlarsınız ve görmek için yine çok dar bir açınız vardır. Öyleyse görmek için en iyi yer neresidir?

Durumun bir sonraki diyagramda bulunan yandan görüntüsü üzerine biraz düşünün. Göz seviyesini gösteren noktalı alanda öyle bir nokta bulmak istiyoruz ki heykel en büyük haliyle gözüksün. Cevap *Elemanlar*'ın üçüncü kitabı olan Çemberler'de bulunmaktadır. Görme açımızın en büyük olduğu nokta çemberin noktalı çizgilerin ve heykelin üst ve alt noktası üzerinden geçtiği yerdir.

Sorun ragbi oyuncularının sayı yapmak için kaleye en iyi mesafenin neresi olduğunu bilmek istemeleriyle aynıdır. Eğer karşı kaleye çok yakınsanız açı çok dardır, fakat çok uzaksanız açı yine azalacaktır. En iyi pozisyon neresidir o halde? Burada sahaya havadan bakmamız ve diğerine benzer bir diyagram çizmemiz gerekir. Mümkün olan en net atış noktalarını gösteren noktalı çizgilerin en açık olduğu yer çemberin kalenin iki ucundan ve doğrunun geri kalan kısmından geçtiği yerdir.

Öklid geometrisinin belki de en nefes kesen sonucu, üçgenin olağanüstü özelliklerinin gösterilmesidir. Öncelikle üçgenin merkezi hakkında düşünelim. Bu, şaşırtıcı derecede belirsiz bir sorundur. Aslında, bir üçgenin merkezini belirlemek için dört yol vardır ve hepsi de farklı noktaları göstermektedir (elbette üçgen eş kenar değilse, bu durumda hepsi üst üste gelecektir). Birincisine *yükseklik merkezi* denmektedir ve her köşeden karşı kenara dik çizilen ve yükseklik adı verilen doğruların





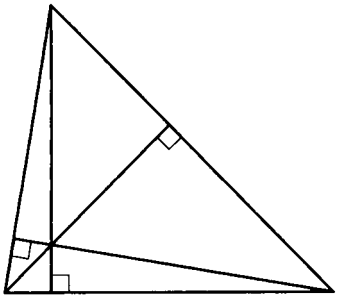
Direklere çok yakın Aşırı uzak Tam mükemmel

Regiomontanus'un heykel ve ragbi problemi

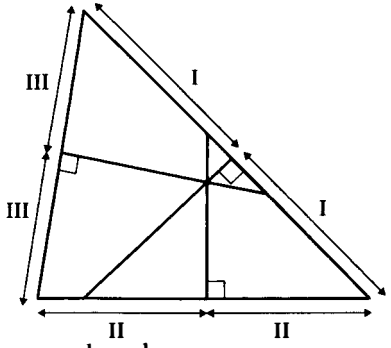
kesişim noktasıdır. Herhangi bir üçgenin yüksekliklerinin daima bir noktada birleştiğini düşünmek oldukça heyecan vericidir.

İkincisi çevrel merkezdir, yani kenarların orta noktalarından dik çizilen yüksekliklerin kesişim noktasıdır. Tekrar herhangi bir üçgende bu çizgilerin de birleşimleri muntazamdır.

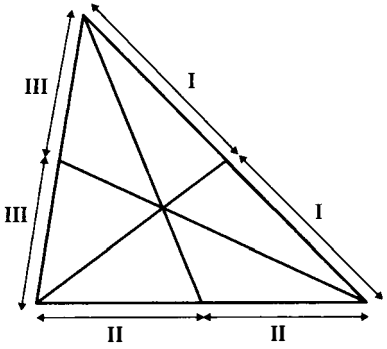
Üçüncüsü ağırlık merkezidir başka bir deyişle kenar ortayların kesişim noktasıdır. Bunlar da bir noktada buluşurlar. Son olarak, orta



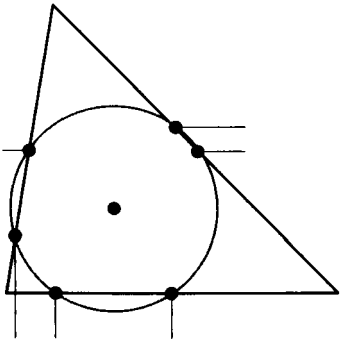
yükseklik merkezi



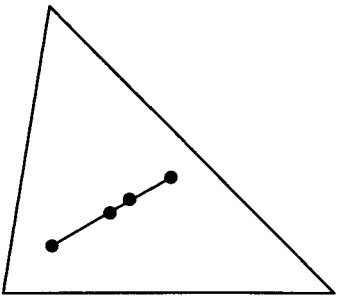
çevrel merkez



ağırlık merkezi



orta çember



Euler Çizgisi

Euler çizgisi yapımı.

çember her bir kenarın orta noktasından ve kenar yüksekliklerin kesişim noktalarından geçen bir çemberdir. Her üçgenin bir orta çemberi vardır ve bu çemberin merkezi üçgenin sahip olabileceği dördüncü tip orta noktasıdır—1767 yılında Leonhard Euler yükseklik merkezi, çevrel merkez, ağırlık merkezi ve orta çember merkezinin daima aynı doğru üzerinde olduğunu ispatladı. Bu akıllara durgunluk veren bir şey. Üçgenin şekli ne olursa olsun bu dört noktanın birbirleriyle göz kamaştırıcı tek tip bir ilişkisi var. Bu uyum gerçekten de mucizevî. Pisagor muhtemelen dehşete kapılırdı.

Bunu bugün anlamak zor olabilir ancak, *Elemanlar* yazınsal anlamda olay yarattı. Yirminci yüzyıla kadar İncil haricinde tüm kitaplardan daha fazla sayıda basıldığı söylenir. Bu *Elemanlar*'ı okumanın hiç de kolay olmadığı düşünüldüğünde daha da dikkat çekicidir. Ancak bir baskısından, metni ulaşılabilir yapmak yönündeki alışılmadık yaklaşımıyla bahsetmeye değer. İşi Kraliçenin Falkland'daki yerleşimi için yer ölçümleri yapmak olan Oliver Byrne, Öklid'i renklendirerek yeniden yazdı. Uzun uzun kanıtlar yerine, açıların, doğruların ve alanların; kırmızı, sarı, mavi ve siyah geometrik bloklar içinde yer aldığı çizimler yaptı. İçinde öğrenmede kolaylık sağlaması amacıyla harfler yerine diyagramlar semboller kullanılan kendi *Elemanlar*'ı 1847'de basıldı ve 'On dokuzuncu yüzyılın en tuhaf ve en güzel kitabı' olarak tarif edildi. 1851 yılında yapılan Büyük Sergi'de gösterilen birkaç İngiliz kitabından birisiydi, ancak halk duyduğu heyecanı kaybetmiş gibiydi. Gerçekten de, Byrne'nin yayıncıları, 1853 yılında kitabın % 75'lik satılmamış kopyalarıyla iflas etti. Kitabın yüksek üretim maliyetleri bu iflasa katkıda bulundu. Byrne'nin resimli delilleri Öklid'i daha anlaşılır hale getirerek son yıllarda hazırlanan renk koordineli ders kitaplarının öncüsü olmuştur. Sanatsal olarak da zamanından ilerideydi. Şatafatlı ana renkler, asimetrik düzeni açılı, soyut şekiller ve bol boş alan birçok

yirminci yüzyıl sanatçıların resimlerinde ortaya çıkmıştır. Byrne'nin kitabı, Piet Mondrian'a kendisi doğmadan 25 yıl önce yayınlanmış bir saygı duruşu gibi görünüyor.

***

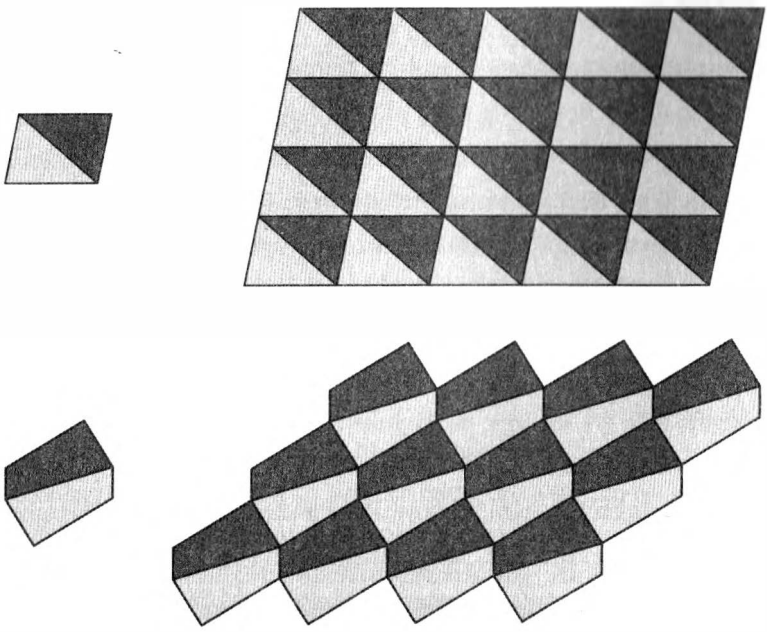
Öklid yöntemi gibi ustaca bir yöntem, tüm problemleri çözememektedir; oldukça basit olan bazı problemler bile gerçekten de sadece cetvel ve pergel kullanılarak çözülememektedir. Yunanlılar bunun acısını yaşadılar. M.Ö. 430 yılında Atina'da veba salgını baş gösterdi. Vatandaşlar Delos'taki kâhine danıştılar ve kendilerine Apollo'nun küp şeklinde olan sunağını iki katına çıkarmalarını söyledi. Böylesi kolay bir görevle kurtulacaklarını öğrenip rahatlayan halk, orijinal sunağın bir kenarını iki katına çıkarıp yeni bir sunak inşa ettiler. Ancak küpün bir kenarını iki katına çıkararak acaba ilk sunağı iki kat mı büyütmüşlerdi yoksa sekiz kat mı? Apollo mutlu olmamıştı ve salgını daha da beter yaptı. Tanrıların ileri sürdüğü bu sorun, yani verili bir kübün iki katı başka bir küp inşa etmeye Delian Problemi denmektedir ve antikçağda Öklid gereçleriyle çözülemeyen üç klasik problemden biridir. Diğer iki klasik problem çemberi karelemek yani verili bir çemberin alanına eşit kare yapmak ve bir açıyı üçe bölmek yani verili bir açının üçte birini elde etmektir. Bu problemlerin neden Öklid geometrisi ile çözülemeyip başka yöntemlerle çözüldüğünü anlamak matematiği çok uzun süre meşgul etti.

Geometrik şekillerin göz kamaştırıcılığına ilgisi olan tek millet Yunanlılar değildi. İslam'da en kutsal şekilli platonik cisim: Mekke kutsal Camisi'nin merkezinde bulunan siyah paladyum, küp ya da Kâbe'dir ve hacılar, hac sırasında saat yönünün tersine etrafında dönerler (Aslında biçim olarak mükemmel bir küptür). Kâbe aynı zamanda dünya üzerinde nerede olurlarsa olsunlar Müslümanların namaz kılarken

dönmesi gereken yönü de işaret eder. Matematik İslam dininde diğer tüm dinlerden fazla rol oynamıştır. Uydu ile yön belirleme teknolojisinden bin sene evvel, yüzünü Mekke'ye dönme gerekliliği karmaşık astronomik hesaplamaları gerektiriyordu, İslam bilimi ile neredeyse bin yıl boyunca aynı seviyeye gelinememesinin bir sebebi de budur.

İslam sanatı, kutsal mekânlarda insan ve hayvan imgelerinin bilinçli bir biçimde yasaklanmasıyla kutsal binaların duvarları, tavanları ve zeminine yerleştirilen dâhiyane mozaik biçimleriyle temsil edilmiştir. Geometrinin insani olanın ötesinde bulunan hakikatin ifadesi olduğu, Pisagorcu duruşa yakın bir biçimde evrenin kendisini matematik aracılığıyla açığa vurduğu düşünülüyordu. Müslüman zanaatkârların desenlerinde meydana getirdiği simetriler ve sonsuz döngüler bir sonsuzluk alegorisi, dünyanın kutsal matematiksel düzeninin bir ifadesiydiler.

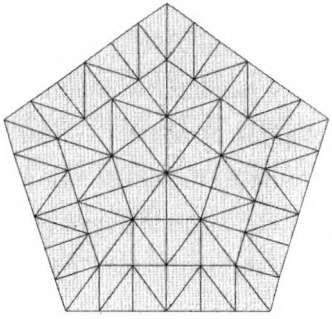
Tekrarlanan mozaik desenlerin güzelliğinin altında yatan unsur tekrarlanan deseni oluşturmanın kolaylığı yani desenlerin düzlemi mükemmel bir biçimde kaplaması değildir. Geometri geliştikçe sanat da gelişir. Hiç boşluk ya da üst üste binme olmadan duvarı hangi desenlerle kaplayacağını belirlemek tam bir matematiksel mücadeledir ve daha önce bir banyo kaplaması yapan her kişinin bildiği bir gerçektir. Sadece üç tane düzgün çokgen ile bir alanı herhangi bir yeri açıkta bırakmadan kaplamak ya da teknik ifadesiyle, mozaik döşeyebilmek mümkündür. Bunlar eşkenar üçgen kare ve altıgendir. Aslında mozaik döşemek için üçgenin eşkenar olması gerekmemektedir. Kenarlar herhangi bir ebatta olabilir. Herhangi bir tip üçgen için gerekli olan yan sayfadaki diyagramda gösterildiği gibi özdeş üçgeni tam ters biçimde birleştirmektir. Birleşmiş olan biçim paralelkenar olur. Paralelkenarlar özdeş olan başka paralelkenarlar ile aynı sırada birleşebilirler ve bu sıralar yan yana bir araya gelebilir. Aynı desenin sürekli bir araya geldiği bu tip mozaik işine periyodik denir.



Üçgen ve dörtgen mozaikler

Kare ile düz bir yüzey kaplanır. Bunda şüphe yok. O halde herhangi bir dikdörtgen biçim ile bu yapılabilir mi? Bu da önemsiz bir sorgulamadır, tuğladan yapılmış bir duvara baktığınızda, dikdörtgen parçalarla yapılmış aynı özenli çalışma görülür. Şaşırtıcı olan ise herhangi bir dörtgen ile periyodik mozaik işi yapılabilmesidir. Herhangi bir dört kenarlı cisim çizin ve parçaları birbirlerine daha evvel üçgenlerde yaptığımız gibi baş aşağı olarak birleştirin, şimdi altı kenarlı bir biçim, zıt kenarları eşit olan düzensiz bir altıgen elde edersiniz. Bu cisim bir sıraya kenarları mükemmel biçimde uygun gelecek bir biçimde yan yana dizilebilir. Yukarıdaki diyagramda gösterildiği gibi, birbirleri ile uygunluklar iki yanda da mevcuttur ve tekrar eden altıgenler bir düzlemi mükemmel biçimde kaplarlar.

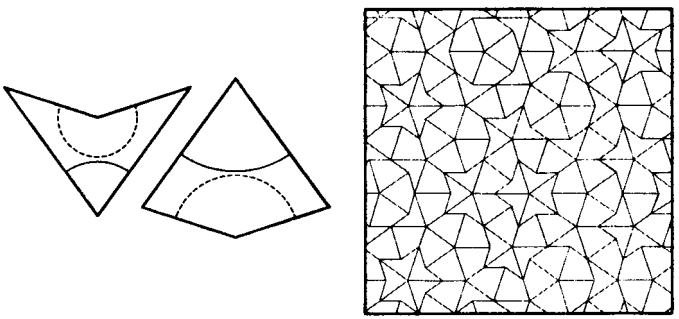
Periyodik mozaik işinin hiç bitmeden devam edebileceğini söyledim. Periyodik olmanın daha kullanışlı bir tanımı vardır. Bir önceki sayfada yer alan üçgen desenlerle kaplı olan ve her yöne sonsuz büyüklükte yayılmış bir düzlem hayal edin. Şimdi bir aydınger kâğıdına bu mozaik desenin özdeş bir kopyasını çıkardığınızı ve düzlem üzerine yerleştirdiğinizi hayal edin. Periyodiklik, bir kopyayı yukarı kaldırıp başka bir pozisyona getirmek ve sonrasında kopyalanan desenin orijinal desenle mükemmel bir uyum içinde olacağı biçimde tekrar düzleme yerleştirebilme kapasitesidir. Bu mozaik işini üçgenler ile yapabiliriz çünkü kopyayı sola (ya da sağa, ya da yukarı veya aşağı) doğru kaydırarak istediğimiz miktarda üçgen kullanarak tekrarlayabiliriz. Kopya yeni pozisyonuna hizalandığında kopya altta bulunan mozaik ile mükemmel bir uyum içinde bulunur. Periyodikliğin bu tanımı faydalıdır çünkü artık periyodik olmama durumunu açıklamak daha kolaydır. Periyodik olmayan mozaik işi kopya oluşturulduğunda, bu kopyanın düzlem üzerinde mükemmel bir biçimde yerleşebileceği sadece bir pozisyon olmasıdır—ilk pozisyon. Örneğin, aşağıda yer alan mozaik periyodik değildir (Mozaiğin sonsuza kadar eşmerkezli beşgenler oluşturarak devam ettiğini hayal edin). Eğer bir kopyasını çıkarırsanız, kopyanız alttaki mozaik ile sadece bir pozisyonda yerine oturacaktır.



Periyodik olmayan mozaik işi.

Periyodik olarak bir araya gelen birçok parça aynı zamanda periyodik olmayan biçimlerde de bir araya getirilebilir. Buna rağmen, periyodik olmayan bir biçimde dizilebilecek şekillerin bulunduğu herhangi bir kümenin olup olmadığı sorunu yirminci yüzyılın ikinci yarısında matematikçileri boşuna meşgul etmiştir. Bu parçaların bir yüzeyi kaplamaları ancak herhangi bir desen meydana getirmemeleri gerekir. Bu düşünce sezgilere aykırıydı, eğer parçalar o kadar uyumlu ve boşluk bırakmadan bir araya gelecek kadar iyi yerleştirilebiliyorsa, buna aynı biçimde düzenli bir tekrarlama ile devam edebilmeleri doğal gözükmekteydi. Uzun zaman boyunca periyodik olmayan parçaların var olmadığına inanılmıştı.

Daha sonra Roger Penrose ok ve uçurtmasıyla ortaya çıktı. 1970 yılında bir evrenbilimci olan Penrose periyodik olmayan birkaç parça geliştirerek matematik dünyasını heyecana boğdu. En basitiyle, eşkenar dörtgeni akıllıca adlarına ok ve uçurtma dediği iki farklı şekil elde edilecek biçimde ikiye böldü. Herhangi dörtkenarlı şekil ile periyodik mozaik işi yapılabileceği için, Penrose'un yapması gereken bu şekillerin bir araya gelerek oluşturdukları desenleri periyodik olmasını kısıtlayacak bir biçimde nasıl birleşebileceğine dair bir kural formüle etmekti. Bunu her uçurtma ve okun üzerine bir yay çizerek ve yayların daima benzerleriyle birleştirilmesini şart koşarak yaptı.

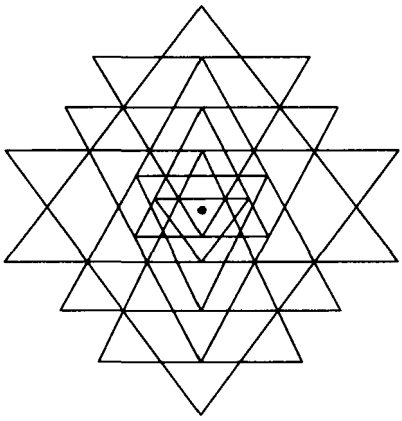


Penrose'un oku ve uçurtması sadece periyodik olmayan biçimde dizilebilmektedir.

Periyodik olmayan parçaların birleştirilebilmesi matematik için heyecan verici bir kırılma noktasıydı ancak daha sonra fizik ve kimyada olacağı kadar heyecan verici değildi. 1980'li yıllarda araştırmacılar var olduğuna inanmadıkları bir kristal keşfettiler. Bu küçük yapı periyodik olmayan bir desen sergiliyordu ve Penrose'un iki boyutlu yapısının üç boyutlu halini sergiliyordu. Bu yapıların varlığı –kristalimsiler– bilim insanlarının madde anlayışlarını değiştirdi, çünkü tüm kristallerin platonik katılardan çıkarılan simetrik örgüye sahip olmaları gerektiği yönündeki klasik görüşle çelişiyordu. Penrose belki kendi parçalarını eğlence olsun diye geliştirmişti ama doğal dünya hakkında gereğinden fazla isabetliydiler.

Beş yüz sene önce, Müslüman geometriciler, mozaik işlerinde periyodik olmayan parçaları anlamış olabilirler. 2007 yılında Harvard Üniversitesi'nden Peter J. Lu Princeton Üniversitesi'nden Paul J. Steinhardt Özbekistan, Afganistan, İran, Irak ve Türkiye'deki mozaikler üzerine yaptıkları çalışmaların, zanaatkârların 'batıdan beş yüz sene önce neredeyse mükemmel Penrose Kristalimsileri' kullandıklarını gösterdiğini ileri sürdüler. Dolayısıyla Müslüman matematikçilerinin, bilim tarihçilerinin düşündüğünden daha ileri bir matematik kullanmış olması mümkün gözükmektedir.

Hinduizm de tanrısal olanı ifade etmek için geometri kullanmıştır. Mandala'lar tanrısallığın ve kâinatın sembolik temsilcileriydiler. Bunların en karmaşık olanı hepsi ortak bir merkez ya da *Bindu* üzerinde bulunan aşağı dönük beş ve yukarı dönük dört üçgenden oluşan *Sri Yantra*'dır. Evrensel süreçler olan yayılma yeri nüfuz etmenin ana hatlarını temsil ettiği söylenir. Oluşturulması düzensizdir—yapısı uzun ve anlaşılması zor bir şiirde tarif edilmektedir, ama kutsal metinler yeterince detay vermezler. Bugün bile matematikçiler nasıl düzgün biçimde yapıldığına şaşırmaktadırlar.



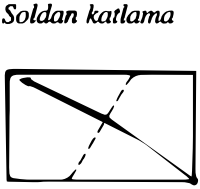
Sri Yantra.

Geometrik şekillerden uzunca bir süredir keyif almayı sürdüren başka bir doğu kültürü daha vardır. Kâğıt katlama sanatı olan Origami, ürünlerinin bir kısmını bir kâğıt üzerinde tanrılara minnettarlıkları için sunan Japon çiftçilerinin bir geleneğinden hareketle geliştirilmiştir. Ürünü düz bir kâğıt üzerine sermek yerine, insan dokunuşunu da sunmak için kâğıda köşelerinden bir kat veriyorlardı. Origami son birkaç yüz yıl içinde Japonya'da ailelerin çocuklarını eğlendirmek için yaptığı tipte gayri resmi bir eğlence olarak gelişti. Japonların anlatılmaz olan sanata sevgi, detaya olan ilgileri ve ekonomi biçimleriyle mükemmel bir uyum gösterdi.

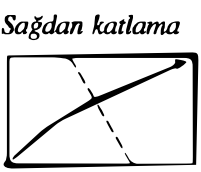
Kartvizit origami, iki ulusal tutkuyu bir araya getiren nihai Japon icadı hissi uyandırır. Aslında bu onlar için bir nefret uyandırmaktadır. Japonlar kartvizitleri kinin bir uzantısı olarak görürler, yani onları oyuncak olarak kullanmak oldukça onur kırıcıdır, origami niyetiyle bile olsa. Tokyo'daki bir restoranda bir tanesini katlamayı denediğim sırada neredeyse bu anti sosyal davranışım yüzünden dışarı atılıyordum. Ancak dünyanın geri kalanında kartvizit katlamak, kâğıt katlama sanatının modern bir alt türüdür. Kökeni (günümüzde demode olan) kişisel kartların origamisine dayanıyor.

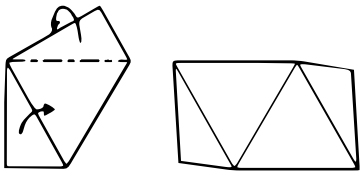
Basit bir örneği kartvizitin sağ alt köşesini sol üst köşeye birleşecek şekilde katlamaktır ve sonrada dışarıda kalan kısımlar aşağıda gösterildiği gibi katlanır. Aynısını başka bir kartvizit ile tekrarlayın ancak bu sefer alt solu üst sağa gelecek şekilde yapın. Şimdi elinizde birleştirildiğinde üçgen piramit oluşturacak olan iki parça var. Matematik konferanslarında kartlarınızı verirken cazip bir yöntem, en azından bana söylenen bu.

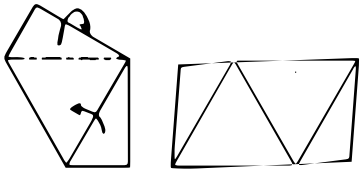
Soldan katlama

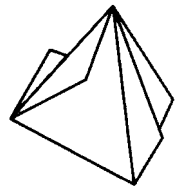


Sağdan katlama

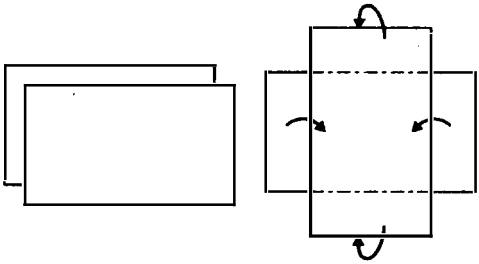


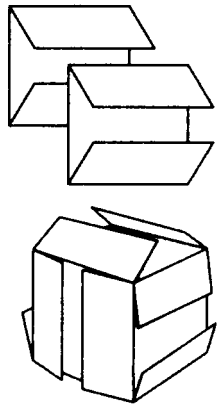






Kartvizit üçgen piramit.





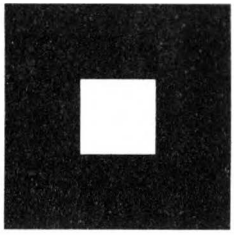
Kartvizit küp.

Dört kart kullanılarak sekiz-yüzlü yapılabilir. Ayrıca platonik bir katı olan küp de yapmak kolaydır. İki kartı artı işareti oluşturacak şekilde üst üste yerleştirin ve kanatları yukarıda gösterildiği gibi katlayın, bu bir kare şekli meydana getirecektir. Altı kart bu şekilde katlanır ve bir araya getirilerek kanatlar dışarıda da olsa bir küp şekli meydana getirilir. Tam bir küp yapmak istiyorsanız yüzleri kaplamak için altı karta daha ihtiyacınız var.

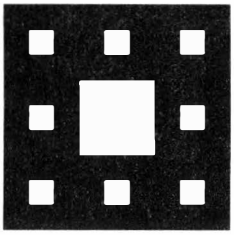
Kartvizit origamisinin zen ustası Massachussetts'li yazılımcı olan Jeannine Mosely'dir. Birkaç yıl önce kendini garajında 100.000 kart ile buldu—üç grup halinde toplu olarak iş arkadaşlarından kalmışlardı, ilkinde şirket adını değiştirmişti, ikincisinde şirket başka bir adrese taşınmıştı ve daha sonra da yeni kartlarda baskı hatası olduğunu keşfetmişlerdi. 100.000 kartvizitle oldukça çok üçgen piramit yapabilirsiniz. Ama Mosely'nin platonik katı cisimler yapmaktan daha büyük bir arzusu vardı. Kendini neden antik Yunan ile sınırlasın ki? 2000 yıl boyunca geometri daha heyecan verici üç boyutlu cisimler üretmemiş miydi? Edindiği kaynaklarla Mosely kendini sanatının en büyük zorluğuyla, Menger süngeriyle, mücadeleye girişmeye hazır hissetti.

Menger süngerine gelmeden önce, sizi Sierpinski halısıyla tanıştırmak istiyorum. Bu acayip şekil 1916 yılında Polonyalı matematikçi Waclaw Sierpinski tarafından geliştirildi. Siyah bir kareyle başlıyorsunuz. Bunun dokuz küçük kareden meydana geldiğini hayal edin ve merkezdekini çıkarın (şekil A). Şimdi sıra kalan küçük karelerde, aynı işlemi onlar için de tekrarlayın. Yani onların da dokuz daha küçük kareden meydana geldiğini hayal edin ve ortadakini çıkarın (B). Aynı işlemi tekrarlayın (C). Sierpinski halısı bu işlemi sonsuza kadar devam ettirdiğinizde elde ettiğiniz şekildir.

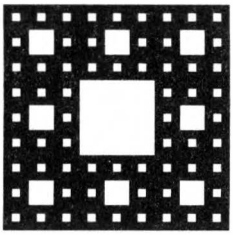
1926 yılında Avusturyalı matematikçi Karl Menger, Sierpinski halısının günümüzde Menger süngeri adıyla tanınan üç boyutlu versiyonu üzerine düşünmeye başladı. Bir küp ile işe başlarsınız. Küpümüzün 27 özdeş küpten oluştuğunu hayal edin ve merkezdeki küpü ve aynı



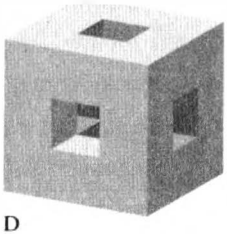
A



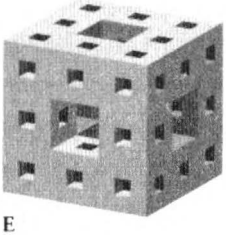
B



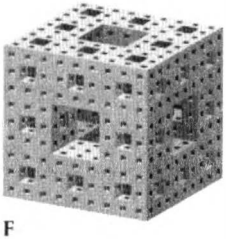
C



D

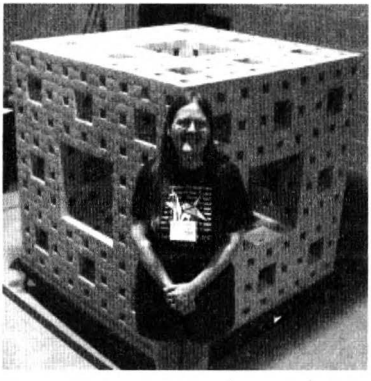


E



F

zamanda her kenarın ortasında bulunan altı küpü çıkarın. Şimdi elinizde üzerine bir uçtan diğerine üç adet kare şeklinde delik açılımış bir küp var (D). Kalan yirmi küpe ilk küpe uyguladığınız işlemin aynısını uygulayın ve kalan tüm küplerin 27 alt küpünün 7'sini çıkarın (E). Aynı işlemi tekrar uygulayın (F) ve blok geometri takıntılı bir tahta kurdunun yiyip bitirdiği bir küme olarak görünmeye başlayacaktır.





Kutunun içinde düşünme: Mosely Jeannine ve onun Menger Süngeri.

Menger süngeri göz alıcı paradoksal bir nesnedir. Küçük ve daha küçük küpler çıkarmaya devam ettikçe sünger parçaları iyice küçülür ve sonunda neredeyse görünmez hale gelir—sanki bizim tahtakurumuz artık ne varsa yemiş gibi gözükür. Ama aynı zamanda yaptığınız her yineleme süngerin yüzey alanını arttırır. Tekrarları daha da sürdürdükçe yüzey alanı istediğinizden daha büyük hale gelir, yani tekrarlar sonsuza giderken süngerin yüzey alanı da sonsuza yaklaşmaktadır. Limitte, Menger sünger sonsuz derecede büyük bir alana sahip bir nesnedir ve aynı zamanda görünmezdir.

Mosely, üçüncü derece bir Menger süngeri inşa etti, başka bir deyişle küp çıkarma işlemini üç kere tekrarladı (F). Projesini hayata geçirmesi on sene sürdü. Yaklaşık iki yüz kişiden yardım aldı ve 66.048 tane kart kullandı. Tamamlanan sünger 142.24 cm yüksekliğinde, eninde ve genişliğinde oldu.

'Uzun bir süre tamamen saçma bir şey yapıp yapmadığımı düşündüm' dedi bana. 'Ama tamamladığımda yanında durdum, ölçeklerin bir ihtişam verdiğini gördüm. Başka bir olağanüstü yanı ise modelin içine başınızı ve omuzlarınızı geçirip bu inanılmaz şekli daha evvel hiç görmediğiniz bir açıdan görebilmek.' Sonsuz derecede heyecan verici çünkü daha yakından inceledikçe kendini tekrarlayan desenleri daha net görebiliyor. 'Sadece bakmanız yeterli, açıklama yapılması gerekmiyor. Sadece bakarak onu anlayabiliyorsunuz. Bu varlığa bürünmüş bir düşünce; görünür hale getirilmiş matematik.' Kartvizit Menger süngeri, duygusal ve zihinsel bir tepki yaratan güzel bir biçimde biçimlendirilmiş bir nesne. Bir geometri ürünü olduğu kadar bir sanat ürünü de.

Her ne kadar origami bir Japon icadı olsa da, kâğıt katlama teknikleri ayrıca birbirlerinden bağımsız olarak farklı ülkelerde de geliştirildi. Avrupalı öncülerinden biri, on dokuzuncu yüzyılın ortalarında kâğıt katlama tekniğini çocuklara geometri öğretmek için kullanan Alman

eğitimci Friedrich Fröbel. Origami okul öncesi öğrencilerine geometrik şekilleri sadece çizimlerden tanımayı değil aynı zamanda hissetmeyi olanaklı hale getiriyor. Fröbel 1901 yılında kâğıt katlama tekniklerini yayınlamak için Hintli matematikçi T. Sundara Row'dan ilham almış, kitapta origaminin bazı durumlarda Öklid'inkinden daha etkili olan matematiksel bir yöntem olduğunu ileri sürüyor. Şöyle yazıyor: 'Birçok geometrik işlem, bir pergel ve bir cetvelden çok daha etkili olabilmektedir.' Ama o bile origaminin aslında ne kadar güçlü olabileceğini tahmin etmiyordu.

1936 yılında Ferrara Üniversitesi'nden İtalyan bir matematikçi Margherita P. Beloch L uzunluğunda bir kâğıt parçasını L karekökü oranında katlayabileceğini gösterdiği bir makale yayınladı. O zaman belki farkında değildi ama Yunanlıların kâhininin bir küpün iki katını almalarını istediği Delos problemini çözmüştü. Delos problemi verilen küpün –kübün kare kökü– uzunluğundaki bir küp meydana getirme biçiminde yorumlanabilir. Origami diliyle katlama işini 1 birim uzunluğunda katlanması durumuna indirgenir. 1 uzunluğunu kendi üzerine katlamak suretiyle 1 iki katını alarak 2'yi elde edebileceğimiz ve Beloch'un adımlarını takip ederek, yeni uzunluğun küp kökünü bulabildiğimiz için, problem çözülür. Aynı şekilde Beloch'un kanıtıyla herhangi bir açı üç eşit parçaya bölünebilir, bu da çözülemeyen ikinci antik problemin sonunu getirir. Ancak Beloch'un kâğıtları, ta ki 1970'lerde matematik dünyası origamiyi ciddiye alana kadar, onyıllar boyunca bilinmezlik içinde kaldı.

Delos problemi üzerine ilk origami ispatı 1980 yılında bir Japon matematikçi tarafından yayınlandı ve ardından da 1986 yılında bir Amerikalı matematikçinin açıyı üçe bölme yöntemi geldi. İlgi patlaması kısmen Öklid katılığının iki bin yıldan daha fazla zamandır yarattığı hayal kırıklığından kaynaklanıyordu. Sadece cetvel ve pergel ile çalışma ile Öklid'in getirdiği kısıtlamalar matematiksel soruşturmanın kapsamını daraltmıştı. Sonuçlarına bakıldığında, origami, örneğin çokgenlerin

yapılmasında bir cetvel ve pergelden daha çok yönlüydü. Öklid eşkenar üçgen, kare, beşgen ve altıgen çizebiliyordu, ama yedi ve dokuz kenarlı eşkenar çokgenlerin üstesinden gelemiyordu. Origami yedi ve dokuz kenarlı çokgenleri nispeten daha kolay katlayabiliyordu ama on bir kenara gelince o da dengiyle karşılaşıyordu (Açık bir ifadeyle bu durum tek bir katlama olduğunda söz konusudur. Eğer birden fazla katlamaya müsaade edilirse fiziksel olarak ortaya konması imkânsıza yakın da olsa herhangi bir çokgen yapımı mümkündür).

Bir çocuk oyunu olmanın çok ötesinde, origami günümüzde matematiğin sınırlarından birini oluşturmaktadır. Gerçekten. Henüz 17 yaşındayken Erik Demaine ve arkadaşları herhangi bir kâğıdı katlayarak ve sadece tek bir kesik atarak düzgün kenarlı herhangi bir şekli oluşturabilmenin mümkün olduğunu ispat ettiler. Oluşturmak istediğiniz şekle karar verdikten sonra, katlama biçimini belirliyorsunuz, kâğıdı katlıyor, tek bir kesik atıyor, kâğıdı açıyor ve uygun gelen kısmı ayırıyorsunuz. Böyle bir sonucun sadece okul çocuklarının yılbaşı süslemelerini ilgilendirdiği düşünülecek olsa bile Demaine'in buluşu endüstride kullanılmaya başlandı, özellikle de arabalardaki hava yastığı tasarımlarında. Origami'nin protein katmanlarıyla da ilişkisi bulunmaktadır ve atardamar stentleri, robot bilim ve uyduların güneş panellerinin yapımı gibi en beklenmedik alanlara uygulanmaktadır. Modern Origami'nin gurusu ve aynı zamanda kâğıt katlamanın arkasındaki teorinin geliştiricisi Robert Lang bu eğlenceyi heykelvari bir sanat niteliğine soktu. Eski bir NASA fizikçisi olan Lang, yeni ve daha da karmaşık tasarım biçimlerinin yaratılması için bilgisayar kullanımına öncülük etti. Kendine ait figürlerin arasında böcekler, akrepler, dinozorlar ve kuyruklu piyano çalan adamlar vardır. Katlama biçimleri, tamamlanmış tasarımlar kadar güzeldir.

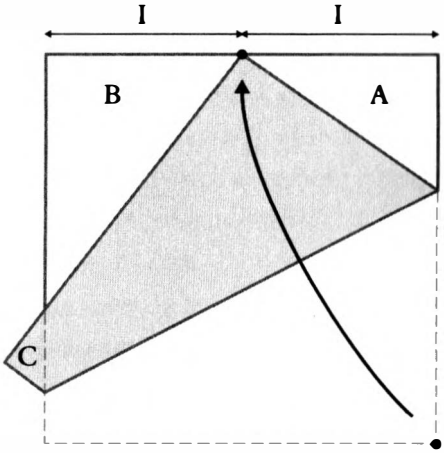
Amerika Birleşik Devletleri günümüzde origamide Japonya kadar ileride olma iddiasındadır, bunun sebebi kısmen origaminin resmî olmayan bir uğraş olarak Japon toplumunda köklü bir biçimde bu-

lunması nedeniyle bir bilim olarak ciddiye alınması noktasında daha çok engelin bulunmasıdır. Uluslararası Origami Birliği'nin başkanı Kazuo Kobayashi'nin, bir elitist olduğu gerekçesiyle Robert Lang'ın çalışmasını reddettiğini duyduğumda şaşırmıştım: 'Bunu kendisi için yapıyor' diye hayıflandı, 'Benim origamim ise çocukların eğitimi ve hastaların rehabilitasyonu için.'

Bununla birlikte ilginç yeni işler çıkaran birçok Origami meraklısı Japon var ve onlardan birisiyle tanışmak için ben Tokyo'nun kuzeyindeki modern bir üniversite şehri olan Tsukuba'ya gittim. Kazuo Haga emekli bir entomologdu yani böcek yumurtalarının embriyonik gelişmelerinde uzmandı. Küçük ofisi kitap ve kelebek vitrinleriyle doluydu. 74 yaşındaki Haga yüzünü geometrik bir şekilde çevreleyen ince çerçeveli büyük gözlükler takıyordu. Oldukça utangaç, yumuşak ve mütevazı bir kişi olduğu hemen gözüme çarpmıştı ve kendisiyle röportaj yaptığım için biraz gergindi.

Ama Haga sadece sosyal anlamda çekingendi. Origami söz konusu olduğunda bir isyankârdı. Popüler olan origami akımının dışında kalmayı tercih ederek, geleneksel üslupların sınırlamalarının sıkıntısını hiçbir zaman yaşamamıştı. Örneğin, geleneksel Japon origami kurallarına göre, ilk katlamayı yapmanın sadece iki yolu vardır. İkisi de yarıya katlama biçimindedir, ya karşılıklı kenarları birleştirecek şekilde ortadan ya da karşılıklı köşeleri bir araya getirecek biçimde çapraz katlama. Bu ikisi bir kareyi ortadan ya da çaprazlama olarak ikiye bölen 'Temel katlama' olarak bilinirler.

Haga başka bir biçimde yapmaya karar vermişti. Köşeyi karşıdaki kenarın orta noktasına katlarsa ne olur? Ker-azee! Bunu ilk kez 1978 yılında denedi. Bu basit katlama görkemli yeni bir dünyanın perdesini kaldırdı. Haga üç tane dik açılı üçgen yaratmıştı. Ama bunlar eski dik açılı üçgenler değildi. Hepsi de Mısır üçgenleriydi, tarihsel olarak en eski ve en çok bilinen üçgenler.

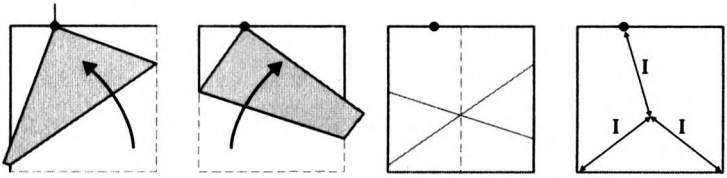


Haga teoremi: A, B ve C Mısır üçgenleri.

Bu keşfin verdiği heyecanla ve bunu paylaşacak kimsenin olmaması nedeniyle, origamiyle ilgilendiği bilinen teorik fizikçi Profesör Koji Fushimi'ye bir mektup yolladı. 'Mektubuma bir cevap almadım' dedi Haga, 'ama kısa süre içinde *Mathematics Seminar* isimli dergide Haga Teoremi isimli bir makale yayınladı. Bu cevap yerine geçiyordu. O zamandan sonra Haga iki teoreme daha kendi adını vermiş, ancak 50 tane daha teoremi olduğunu söylüyor. Bana bunun bir küstahlık göstergesi olmadığını, aksine bu alanın ne kadar zengin ve keşfedilmemiş oluşunun bir göstergesi olduğunu söylüyor.

Haga teoreminde köşe kenarın orta noktasına katlanır. Haga köşenin kenar üzerinde herhangi bir noktaya katlanması durumunda ilginç bir sonuç elde edilir mi diye merak etmiş. Bana bunu göstermek için mavi bir origami kâğıdı aldı ve kenar üzerinde rastgele bir noktayı kırmızı kalem ile işaretledi. Karşıdaki köşelerden birini bu noktaya katladı, katlama izi çıkardı ve kâğıdı açtı. Ardından ikinci katlama izini oluşturmak için diğer köşeyi aynı noktaya katladı ve karenin üzerinde birbirleriyle kesişen iki çizgi oluşturdu.

Rastgele seçilmiş bir nokta



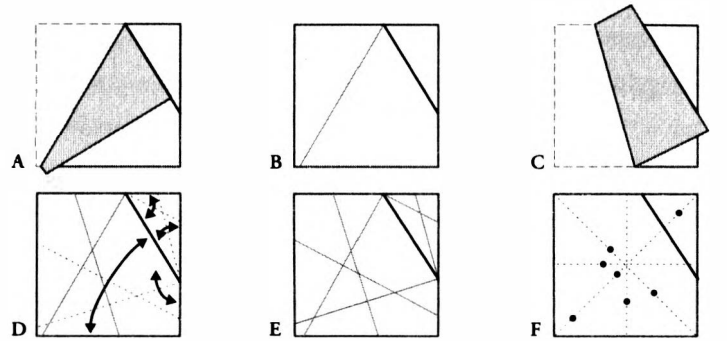
Haga'nın diğer teoremi

Haga bu iki kat izinin kesişiminin daima kâğıdın orta noktası üzerinde olduğunu ve rastgele seçilmiş noktanın kesişim noktasına olan uzaklığının kesişim noktasının karşı köşelere olan uzaklığına eşit olduğunu gösterdi. Haga'nın teoremini nefes kesici buldum. Nokta rastgele seçilmişti ve merkez üzerinde değildi. Ama katlama işlemi adeta kendini düzelten bir mekanizma gibi işliyordu.

Haga bana son bir katlama yöntemi daha gösterdi. Bu keşfi için verdiği isim haiku gibi bir şeydi: *Rastgele çizilmiş bir 'ana hat' dünyaya on bir muhteşem bebek getiriyordu.*

1. Adım: Kare bir kâğıdı rastgele bir noktadan katlayın.

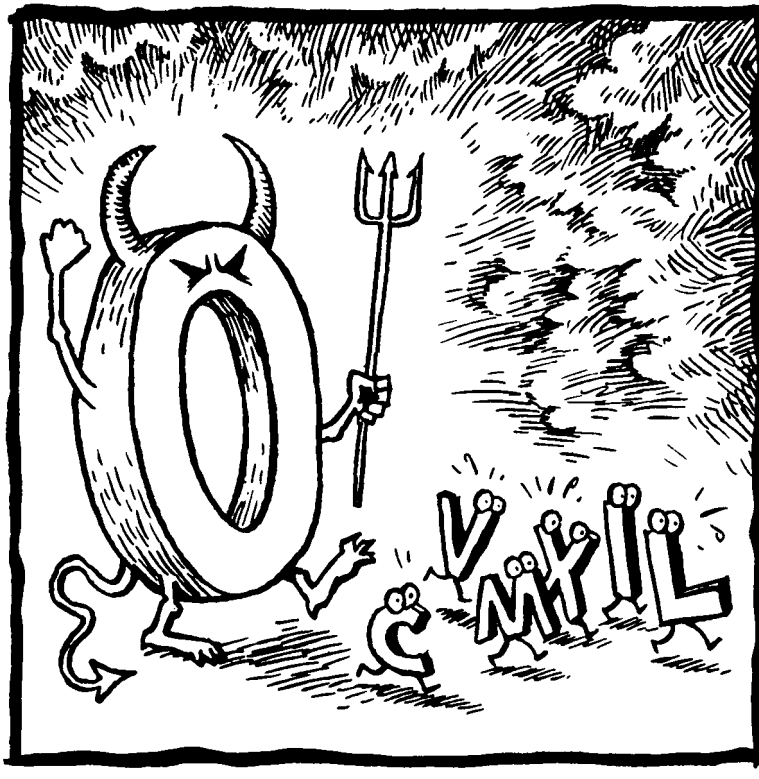
2. Adım: Her kenarı bu kat boyunca aşağıda A'dan E'ye kadar gösterildiği biçimde ayrı ayrı katlayın.



Ana hat on bir mucize bebeğinden yedisini gösterirken.

Bu da, yapması oldukça basit ve mükemmel geometrik bir düzeni açığa çıkarıyor. Tüm kesişimler F'de gösterildiği gibi ana kat çizgileri üzerindedir (Diyagramda yedi kesişim noktası orijinal kare üzerinde gösterilmektedir; diğer dördü katların uzamları üzerinde bulunmaktadır). İlk kat rastgeleydi, ama diğer tüm katlar orta çizgiler ve köşegenler üzerinde bir düzen halinde bulunmaktadır.

O zaman, eğer modern dünyada herhangi bir kişinin Pisagor'un ruhuna sahip olduğu söylenecekse onun Kazuo Haga olduğunu düşündüm. İkisi de geometrinin sadece uyumuna dayanan matematiksel keşifler için tutku besliyorlardı. Haga bu tecrübeyi tıpkı 2000 sene önce Pisagor'un hissettiği gibi ruhunda hissetmiş görünüyordu. 'Birçok Japon, origamide yeni şekiller yaratmaya çalışıyor' dedi Haga. 'Benim amacım fiziksel bir şey oluşturma fikrinden kaçarak matematiksel bir fenomen oluşturmaktı. Bu nedenle origamiyi bu kadar ilgi çekici buluyorum. Bunu çok çok basit bir dünyada büyüleyici şeyler keşfederek bulabilirsin.'


O
EVIL

BÖLÜM ÜÇ

Hiçbir Şey Hakkında Birkaç Şey

Her yıl bir Hint sahil kasabası olan *Puri*, bir milyon hacı ile dolar. Hindu takviminde en görkemli festivallerinden biri olan *Rath Yatra* için gelirler, bu festivalde üç büyük savaş arabası şehir merkezine çekilir. Ben ziyaret ettiğimde sokaklar çanlar çalan, mantralarını söyleyen dindarlarla, çıplak ayaklı, uzun sakallı din adamlarıyla ve modaya uygun tişörtleri ve neon sarileri bulunan orta sınıf Hintli turistlerle doluydu. Yaz ortasıydı, muson mevsiminin başlangıcıydı ve yağan yağmurlar arasında festival işçileri serinlemeleri için katılımcıların yüzüne su püskürtüyorlardı. Daha küçük *Rath Yatra* geçit törenleri aynı anda tüm Hindistan'da gerçekleşmektedir, ancak *Puri*'deki etkinliklere ve savaş arabalarına duyulan ilgi daha büyük.

Festival yerel din adamı, *Puri*'nin *Shankaracharya*'sı kalabalığın karşısında dikilip onları kutsadığında başlar. *Shankaracharya* Hinduizm'in en önemli bilgelerinden birisidir, binyıldan fazladır var olan manastır düzeninin başıdır. Aynı zamanda *Puri*'ye gitme sebebim de oydu. Ruhani bir lider oluşunun yanı sıra eserler yayınlamış bir matematikçiydi. Ben de aydınlanma arayışını sürdüren bir seyyahtım.

Hindistan'a ulaşır ulaşmaz, sayıları kullanışlarında alışılmadık bir şey fark ettim. Otelimin resepsiyonunda *The Times of India* gazetesini aldım. Çalışan metal vantilatörün şiddetli rüzgârı nedeniyle sayfalar kıpırdarken, ön sayfa başlığı gözüme takıldı:

Hükümetin düşündüğünden 5 crore daha fazla Hintli

Crore Hint İngilizcesinde on milyon yerine kullanılan kelimedir, yani hükümet daha evvel varlığından haberdar olmadığı 50 milyon vatandaştan haberdar olmuştu bu sayı kabaca İngiltere nüfusuyla kıyaslanabilirdi.

Tüm nüfusun yüzde beşinden daha az bir kısmını temsil etse de bir ülkenin bu büyüklükte bir sayıyı gözden kaçırması oldukça şaşırtıcıydı. Ama beni daha da şaşırtan *crore* kelimesi olmuştu. Hint İngilizcesinde büyük rakamlar için İngiliz ya da Amerikan İngilizcesinden farklı kelimeler kullanılır. Örnek olarak 'milyon' kelimesi kullanılmaz. Milyon on *lakh* ile ifade edilir. Bir *lakh* 100.000'dir. Milyon kelimesi Hindistan'da bilinmediği için Oscar ödüllü Slumdog Millionaire filmi Slumdog Crorepati ismiyle gösterime çıkmıştır. Çok zengin bir kişi milyonlarca değil *crore*'lerce doları ya da Rupi'si olan kişidir. İngiliz/Amerikan İngilizcesindeki sayı sözcüklerinin Hint İngilizcesindeki karşılığı aşağıdaki gibidir.

İngiliz/Amerikan	Yazım	Hint İngilizcesi	Yazım
On	10	On	10
Yüz	100	Yüz	100
Bin	1.000	Bin	1.000
On bin	10.000	On bin	10.000
Yüz bin	100.000	Lakh	1.00.000
Bir milyon	1.000.000	On lakh	10.00.000
On milyon	10.000.000	Crore	1.00.00.000
Yüz milyon	100.000.000	On crore	10.00.00.000

Bin'in üzerinde, tüm dünyada üç basamaktan sonra nokta olduğu halde Hintlilerin her iki basamaktan sonra nokta koyduğuna dikkat edin. *Lakh* ve *crore* kullanımı Antik Hindistan matematiğinden kalma

bir gelenektir. Kelimeler Hindu dilindeki *lakh* ve *karod* kelimelerinden gelir, bunlar da Sanskritçedeki *laksh* ve *koti* kelimelerinden. Antik Hindistan'da büyük sayılara kelimeler bulmak bilimsel ve dinsel bir uğraştı. Örneğin, dördüncü yüzyılın başlarına ait olan Sanskritçe bir metin olan *Lalitavistara Sutra*'da Budha'nın yüz *koti*'den büyük sayılara kelimeler bulması gerektiği anlatılır. Budha şöyle der:

> Yüz *koti*'ye *ayuta* denir, yüz *ayuta* bir *niyota* eder, yüz *niyota* bir *kankara* eder. Yüz *kankara* bir *vivara* eder, yüz *vivara* bir *kshobhya* eder, yüz *kshobhya* bir *vivaha* eder, yüz *vivaha* bir *utsanga* eder, yüz *utsanga* bir *bahula* eder, yüz *bahula* bir *ndgabala* eder, yüz *ndgabala* bir *titilambha* eder, yüz *titilambha* bir *vyavasthanaprajnapati* eder, yüz *vyavasthanaprajnapati* bir *hetuhila* eder, yüz *hetuhila* bir *karuhu* yapar, yüz *karuhu* bir *hetvindriya* eder, yüz *hetvindriya* bir *samdptalambha* yapar, yüz *samdptalambha* bir *gananagati* eder, yüz *gananagati* bir *niravadya* eder, yüz *niravadya* bir *mudrdbala* eder, yüz *mudrdbala* bir *sarvabala* yapar, yüz *sarvabala* bir *visamjnagati* eder, yüz *visamjnagati* bir *sarvajna* eder, yüz *sarvajna* bir *vibhutangamd* eder, yüz *vibhutangamd* bir *tallakshana* yapar.

Tıpkı bugünkü Hindistan'da olduğu gibi Budha listeye yüzün katları şeklinden devam etmişti. Bir koti on milyon değerinde olduğu için bir *tallakshanat*'nın değeri on milyonun yirmi üç kere yüzle çarpımına eşittir ve 10 ve arkasına yazılan 52 sıfır ya da 10^{53} ile gösterilir. Bu olağanüstü büyük bir sayıdır, o kadar büyüktür ki tüm evreni baştan sona metre ile ölçseniz ve bulduğunuz sonucun karesini alsanız aşağı yukarı 10^{53} civarı bir sayı elde edersiniz.

Fakat Budha burada da durmamıştı. Daha yeni ısınıyordu. Henüz sadece *tallakshana* sayma sistemini açıkladığını söylüyordu. Onun üzerinde bir başkası daha vardı, *dhvajdgravati* sistemi aynı çoklukta sayı için bulunmuştu. Ve bunun da üzerinde, bir diğeri olan *dhavjagranishamani* sistemi vardı ve tekrar 24 yeni sayı kelimesi kullanılıyordu. Aslında Budha'nın mükemmel bir biçimde listelediği altı sistem daha vardı, son sistemin son sayısı 10^{421}'e eşitti: Bir ve arkasında 421 sıfır.

Burada düşünmek için durup bir nefes almak iyi gelecektir. Evrende tahmini 10^{80} tane atom bulunmaktadır. Eğer Plank zamanı olarak bilinen ölçülebilir en küçük zaman birimini ele alırsak ki bu da bir saniyenin 10^{43}'te birine eşittir, Büyük Patlama'dan bu yana 10^{60} tane Plank zamanı var olmuş olur. Eğer atom sayısını Büyük Patlama'dan bu yana var olan Plank zamanlarının sayısı ile çarpacak olursak, elde ettiğimiz sayı 10^{140} eder ki bu sayı 10^{421}'den hâlâ oldukça küçük kalır. Budha'nın büyük sayılarının pratik anlamda kullanılabileceği bir yer yoktur—en azından var olan şeyleri sayabilme açısından.

Budha sadece inanılmayacak kadar büyük sayıları anlamakla kalmıyordu, akıl almayacak kadar küçük parçalar âleminde de yeterliydi, 10 km değerinde antik bir ölçü birimi olan bir *yojana*'da kaç tane atom olduğunu da söyleyebiliyordu, Budha'ya göre eşdeğeri şuydu:

Dört krosha, her birinin boyu bin yay değerindeydi

Bir yay, dört arşın değerindeydi

Bir arşın, iki karış değerindeydi

Bir karış, on iki parmak kemiği değerindeydi

Bir parmak kemiği, yedi arpa tanesi değerindeydi

Bir arpa tanesi, yedi hardal tohumu değerindeydi

Bir hardal tohumu, yedi haşhaş tohumu değerindeydi

Bir inek tarafından hareket ettirilen haşhaş tohumu, yedi toz parçacığı değerindeydi

Bir inek tarafından hareket ettirilen bir toz parçacığı, bir koç tarafından hareket ettirilen yedi toz zerresi değerindeydi

Bir koç tarafından hareket ettirilen bir toz zerresi, bir tavşan tarafından kaldırılan yedi toz zerresi değerindeydi

Bir tavşan tarafından kaldırılan bir toz zerresi, bir rüzgarın taşıdığı yedi toz zerresi değerindeydi

Bir rüzgarın taşıdığı bir toz zerresi, yedi küçük toz zerresi değerindeydi

Bir küçük toz zerresi, yedi çok ufak toz zerresi değerindeydi

Bir çok ufak toz zerresi, ilk atomların yedi parçacığı değerindeydi

Bu aslında oldukça iyi bir tahmindi. Bir parmağın yaklaşık 4 cm olduğunu belirtelim. Budha'nın ilk atomu dolayısıyla 4'ün on kere yediye bölümü yani 0.04 m x 7^{-10} ya da 0.0000000001416 m kadar olacaktır, bu da aşağı yukarı karbon atomunun büyüklüğü kadardır.

Budha antik Hindistan'da akıl almayacak kadar büyük ve imkânsız derecede sayılarla ilgilenen tek kişilik değildi. Sanskrit edebiyatı aşırı büyük sayılarla doludur. Hinduizm'in kardeş dini olan Cainizm dinine inananlar, *raju*'yu, bir tanrının her göz kırpmasında 100.000 *yojana* kat etmesi durumunda altı ayda alacağı mesafe olarak tanımlarlar. Bir *payla* içi yeni doğmuş kuzu yünleriyle dolu *yojana* boyutlu devasa bir küpün her yüzyılda bir ip teli çıkarılması durumunda boşalması için geçen sürenin ölçüsüdür. Çok büyük (ve çok küçük) sayılar üzerinde takıntı sahibi olmak doğası gereği metafizikseldir, hayatın büyük var oluş sorularına el yordamıyla gidip çengel atmaya çalışılan bir yoldur.

Arap sayıları uluslararası ortak kullanıma başlamadan önce, insanlar sayıları yazmak için çok çeşitli yöntemler kullanıyorlardı. Batıda ortaya çıkan ilk semboller çentikler, çivi yazısı ve hiyerogliflerdi. Diller kendi alfabelerini oluşturduklarında, değişik kültürler sayıları temsil eden harfler kullanmaya başlamışlardı. Yahudiler bir için İbranice alef'i (א) kullanıyorlardı iki için bet (ב) ve bu şekilde devam ediyorlardı. Onuncu harf olan yod (י) on yerine kullanılıyordu devam eden sayılar onlar halinde devam ediyordu. Ve yüze ulaştıklarında yüzlerle devam ediyorlardı. İbrani alfabesinin yirmi ikinci ve son harfi olan tav (ת) 400 anlamına geliyordu. Sayıların yerine harfler kullanmak kafa karıştırıyordu ve sayma konusunda sayısal bir yaklaşım oluşmasını da teşvik etti. Örneğin Gematria, İbranicedeki kelimelerin harflerinin sayılarını toplayıp bir değer bulma ve bu değerden yorumlar ve tahminler çıkarma uygulamasıydı.

Yunanlılar da benzer bir sistem kullanıyorlardı, bir için alfa (α), iki için beta (β) bu böylece yirmi yedinci ve son harf olan 900 yerine kullanılan sampi'ye (ϡ) kadar devam ediyordu. Antik çağdaki en ileri matematik kültürüne sahip olan Yunanlar Hintlilerle çok büyük sayılara duyulan açlığı paylaşmıyorlardı. En büyük sayıları olan myriad 10.000 anlamına geliyordu ve büyük M harfiyle yazılıyordu.

Her ne kadar kökenleri Yunanlardan ya da Yahudilerden daha eskilere dayansa da Roma rakamları da harflerden oluşuyordu. Bir için kullanılan sembol I idi ve muhtemelen çentik çubuğunun üzerinden bir kalıntıdır. 5, 10, 50, 100, 500 ve 1000 için kullanılan Diğer rakamlar sırayla V, X, L, C, D ve M idi. Diğer tüm sayılar kullanılan yedi büyük harften üretiliyordu.

Roma sisteminin çentik çubuğuna dayanan kökeni sayıların yazımını oldukça sezgisel bir hale getirmişti. Bu, aynı zamanda, İbrani alfabesinde 22 harf ve Yunan alfabesindeki 27 harfle kıyaslandığında

oldukça yeterli bir yazma sistemiydi ve bin yıldan uzun bir süre Avrupa'da hâkim olan yazma sistemi oldu.

Ancak Roma rakamlarının aritmetiğe uygunluk konusunda bazı sıkıntıları vardı. Gelin 57 x 43'ü hesaplamaya çalışalım, bunun için en iyi yöntem Mısır ya da çiftçi yöntemi olarak bilinen yöntemdir çünkü kökeni antik Mısır'a kadar dayanır. Çok yavaş olmasına karşın oldukça iş gören bir yöntemdir.

Öncelikle çarpılacak sayıların ilkini çift kuvvetlerine ayırıyorsunuz (1, 2, 4, 8, 16, 32... biçiminde her seferinde çiftini alarak) ardından diğerini. Yani 57 x 43 örneğindeki 57'yi ayrıştıralım. Ben nasıl yapıldığını göstermek için Arap numaralandırma sistemini kullanacağım ardından Roma rakamlarına çevireceğim.

Ayrıştırma: 57 = 32 + 16 + 8 + 1

Çiftler tablosu

1 x 43 = 43
2 x 43 = 86
4 x 43 = 172
8 x 43 = 344
16 x 43 = 688
32 x 43 = 1376

57 x 43 çarpımı çiftler tablosundaki ayrıştırılmış çift sayıların karşılıklarının toplamına eşittir. Göze uğraşması zor gibi gözükebilir ama oldukça basittir. Ayrışımda bir 32, bir 16, bir 8 ve bir 1 vardır. Tabloda 32'ye karşılık gelen sayı 1376, 16'ya karşılık gelen sayı 688, 8'e karşılık gelen sayı 344, ve 1'e karşılık gelen sayı 43'tür. O halde başlangıçtaki çarpımı 1376 + 688 + 344 + 43 = 2451 şeklinde yazabiliriz.

Şimdi aynı işlemi Roma rakamlarıyla yapalım 57, LVII ve 43 XLIII olarak yazılır. Ve ayrışma LVII = XXXII + XVI + VIII + I, olur

ve

XLIII
LXXXVI
CLXXII
CCCXLIV
DCLXXXVIII
MCCCLXXVI
Sonuç olarak,

LVII x XLIII = MCCCLXXVI + DCLXXXVIII + CCCXLIV + XLIII = MMCDLI, olur.

Oof! Hesaplamayı sindirilebilir parçalara ayırıp toplamalar ve çiftler biçiminde daha basit parçalara ayrıldığında Roma rakamları bu görevi yerine getirebilirler. Yine de yapmamız gerekenden daha fazla iş yaptık. Daha önce Roma sisteminin sezgisel ve yeterli olduğundan bahsetmiştim. Sözümü geri alıyorum. Sayıların değerleri uzunluklarıyla ilişkili olmadığından Roma rakamları hızlı bir biçimde sezgisel olmaktan çıktılar. MMCDLI, DCLXXXVIII sayısından daha büyüktür ama daha az rakam kullanılır ve bu sağduyuya aykırıdır. Ve sadece yedi sembol kullanarak kazanılan yeterlilik kullanımdaki yetersizlikler yüzünden kaybedilmiştir. Küçük rakamları göstermek için genellikle uzun dizilimler gerekmektedir: Arap yazımıyla kıyaslandığında sadece iki karakterle yazılan 86 Roma sisteminde altı karakter kullanılarak LXXXVI biçiminde yazılmaktadır.

Yukarıdaki hesabı okulda öğrendiğimiz çarpma yöntemiyle kıyaslayın:

57
x 43
0171
2280
2451

Bu sistemin daha hızlı ve kolay olmasının bir sebebi vardır. Ne Roma ne Yahudi ne de Yunan sisteminde sıfır için bir sembol bulunmaz. Ve iş toplamaya geldiğinde hiçbir şey daha büyük bir farkı yaratamaz.

Veda'lar Hinduizm'in kutsal metinleridir. 2000 sene önce Sanskritçe olarak yazıya aktarılmadan önce, ağızdan ağza nesiller boyu aktarılmışlardır. Veda'ların birinde sunaklarının inşası ile ilgili bir pasajda aşağıdaki sayıların karşılığı olan kelimeler listelenmiştir:

Dasa	10
Sata	100
Sahasra	1000
Ayuta	10.000
Niyuta	100.000
Prayuta	1.000.000
Arbuda	10.000.000
Nyarbuda	100.000.000
Samudra	1.000.000.000
Madhya	10.000.000.000
Anta	100.000.000.000
Parârdha	1.000.000.000.000

Bulunan bu isimlerle büyük sayılar etkili bir biçimde açıklanmaktadır, bu da astronomlar ve astrologlara (ve muhtemelen sunak yapımcılarına) hesaplamalarında gerekli olan çok büyük sayılar için uygun bir kelime

dağarcığı sağlar. Bu, Hint gökbiliminin çağın çok ötesinde olmasının sebeplerinden bir tanesidir. 422.396 sayısını düşünelim. Hintliler en sağdaki en küçük basamaktan başlayarak sırasıyla sola doğru numaralandırırlar: *altı ve dokuz dasa ve üç sata, iki sahasra ve iki ayuta ve son olarak dört niyuta*. Bu sayıların kuvvetlerine isim vermeyi bırakabileceğinizi anlamak için çok geç basamak değildir, çünkü listedeki sayıların konumu değerlerini de belirtir. Başka bir deyişle, yukarıdaki sayı altı, dokuz, üç, iki, iki, dört biçiminde yazılabilir.

Bu tip numaralandırma daha önce ele aldığımız gibi 'basamak değeri' olarak bilinir. Abaküs üzerindeki bir boncuk bulunduğu sütuna göre bir değer alır. Aynı biçimde yukarıdaki sayıda yer alan her rakamın listede bulunduğu pozisyona göre bir değeri vardır. Ancak basamak değer sistemleri bir 'yer tutucu' kavramını gerektirir. Örnek olarak, eğer sayı iki rakamdan ibaretse, bir *dasa* değeri yoksa ve üç *sata*'dan oluşuyorsa iki, üç biçiminde yazılamaz çünkü bu iki ve üç *dasa* anlamına gelir. Bir yer tutucu doğru pozisyonların sağlanması ve bir daha değerinin bulunmadığını açık bir biçimde gösterilmesi için gerekmektedir ve Hintliler bunun için 'boşluk' anlamına gelen ve yer tutucu görevini üstlenen *shunya* kelimesini kullanırlar. İki ve üç *sata*'dan oluşan sayı *iki shunya üç* biçiminde yazılır.

Yer tutucuyu ilk kullananlar Hintliler değillerdi. Bu şeref muhtemelen sayılarını altmışlık tabanda sütunlar halinde yazan Babillilere aittir. İlk sütun birler basamağı, ikincisi 60'lar üçüncüsü 3600'ler ve böyle devam eder. Eğer bir sütunun sayısı, herhangi bir sayı değeri yoksa sütun boş bırakılırdı. Ancak bu kafa karışıklıklarına neden oluyordu. Bu nedenle en sonunda bir değer olmadığını gösteren bir sembol geliştirdiler. Ancak bu sembol sadece bir belirteç olarak kullanılıyordu.

Shunya'yı bir yer tutucu olarak kabullendikten sonra Hintliler fikri alıp geliştirerek *shunya*'nın kendisini tastamam bir sayı haline getirdiler: Sıfır. Günümüzde sıfırın bir sayı olduğunu anlamak konusunda

herhangi bir sıkıntı yaşamıyoruz. Fikir apaçık ortadaydı. Örneğin batılı kültürler, binlerce yıllık matematiksel sorgulamanın ardından bile bunu ortaya koymayı başaramadı. Gerçekten de Hintlilerin gerçekleştirdiği kavramsal sıçramanın çapı, klasik dünyada sıfır ile yüz yüze gelindiği halde bir biçimde görülemediğini göstermektedir. Abaküste sıfır değer olarak vardı çünkü basamak değeri sistemine dayanıyordu. Örneğin bir Romalı 101 sayısını göstermek istediğinde, 100 değerini göstermek için birinci sütundaki boncuklardan birini hareket ettirirdi, onlar basamağında değer olmadığını göstermek için ikinci sütundaki boncuklara dokunmaz, bir sayısını göstermek için üçüncü sütundan bir boncuk oynatırdı. Dokunulmayan ikinci sütun herhangi bir değer göstermezdi. Abaküs kullanıcısı, hesaplamalarda dokunulmayan sütunların hareket etmiş olan boncuklar gibi değerlendirilmesi gerektiğini bilirdi. Ama dokunulmayan sütuna sayısal bir isim ya da sembol verme değerini asla göstermemişti.

Sıfır iyi niyetli bir sayı olarak ilk deneme adımlarını yedinci yüzyılda Shunya'nın kardeş rakamlar gibi davrandığını gösteren Brahmagupta gibi Hintli matematikçilerin himayesi altında gerçekleştirdi:

Bir borç eksi *shunya* bir borçtur
Bir servet eksi *shunya* bir servettir
Shunya eksi *shunya shunya*'dır
Shunya eksi bir borç bir servettir
Shunya eksi bir servet bir borçtur
Bir borç ya da servet çarpı *shunya*, *shunya*'dır
Shunya çarpı *shunya* ürünü *shunya*'dır

Eğer servet pozitif bir sayı, a ve borç negatif bir sayı $-a$ olarak anlaşılırsa Brahmagupta aşağıdaki ifadeleri yazmış olur:

$-a - 0 = -a$

$a - 0 = a$

$0 - 0 = 0$

$0 - (-a) = a$

$0 - a = -a$

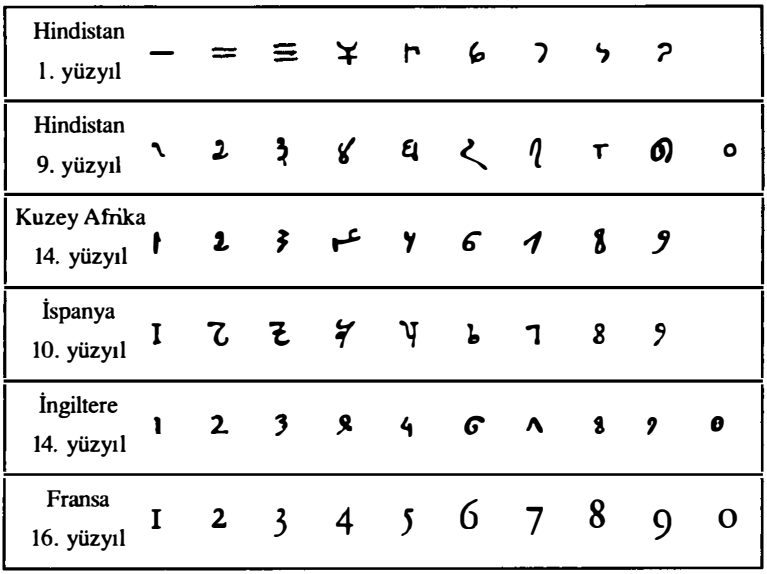
$0 \times a = 0, 0 \times -a = 0$

$0 \times 0 = 0$

Sayılar sayma araçları, belirli miktarları göstermeye yarayan soyut kavramlar olarak ortaya çıkmışlardı. Ama sıfır aynı biçimde bir sayma aracı değildi; değerini kavramak için daha ileri seviye bir soyutlama gerekiyordu. Ama matematik gerçek şeylerle ilişkisini ne kadar koparırsa o kadar güçlü bir hale geliyordu.

Sıfıra sayı gibi davranılması, abaküsü en iyi hesaplama aracı haline getirmiş olan basamak değeri sisteminin semboller kullanılarak yazılması halinde tam olarak kullanılabileceği anlamına geliyordu. Sıfırın matematiğe, okulda hiç sıkıntı çekmeden öğrendiğimiz ve günlük ihtiyaçlarımız için kaçınılmaz olan ama hiçbir biçimde apaçık ortada olmayan negatif sayıların keşfedilmesine olanak sağlayarak başka katkıları da oldu. Yunanlar sıfır, negatif sayılar ya da ondalık kesirler olmadan olağanüstü matematiksel keşiflerde bulundular. Bunun sebebi matematiği uzamsal olarak algılamalarıydı. Onlara göre hiçliğin bir şey olması anlamsızdı. Pisagor için negatif bir sayı düşünmek negatif bir üçgen düşünmekten daha mümkün değildi.

Sayıların gördüğü tüm yaratıcı muamelelerin belki de hiçbiri sıfır ile dokuz arasındaki rakamlara verilen isimler kadar ilginç değildi. Her bir rakama tek bir özgün isim vermek yerine renkli bir eşanlamlılar sözlüğü oluşturulmuştu. Örneğin sıfır *shunya* adını almıştı ama aynı zamanda 'eter', 'nokta', delik' ya da 'sonsuzluk yılanı' adlarını da alıyordu. Bir, 'yer', 'ay', 'kutup yıldızı' ya da 'kesilmiş süt' olabi-



Modern rakamların evrimi.

liyordu. İki 'kollar' ile karşılıklı kullanılabiliyordu, üç 'ateş', dört 'vulva' ile. Seçilen kelimeler içeriğe ve Sanskritçenin düz yazı ve vezin kurallarına bağlıydı. Örnek olarak aşağıdaki mısralar antik bir astroloji metninden bir parçadır:

Yuga içindeki bir ayın apsisleri
Ateş. Boşluk. Atlı. Vasu. Yılan. Okyanus,
Ve onun zayıflayan düğümü
Vasu. Ateş. İlk Çift. Atlı. Ateş. İkizler.

Tercümesi:
[Kozmik döngü içindeki] ayın apsislerinin [devirlerinin sayısı]
Üç. Sıfır. İki. Sekiz. Sekiz. Dört, [ya da 488.203]
ve azalan düğüm
Sekiz. Üç. İki. İki. Üç. İki. [veya 232.238]

Başlangıçta her bir rakam için böyle rengârenk alternatifler bulunması karmaşık gözükse de oldukça anlamlıdır. El yazmalarının dayanıksız ve çabucak bozulabildiği bir tarih evresinde gökbilimciler ve astrologlar önemli sayıları hatırlamak için yedek bir plana ihtiyaçları vardı. Sayı dizileri bir mısra içinde değişik isimlerle kullanıldığında tekrar eden rakamlardan daha kolay ezberlenebiliyordu.

Sayıların ağızdan ağza geçmesinin bir diğer nedeni, rakamlara karşılık gelen kelimelerin Hindistan'ın farklı bölgelerinde 1 ila 9 arasındaki (sıfırdan daha sonra bahsedeceğim) rakamların ortaya çıkışının farklı olmasıdır. Birbirinin sayı sembollerini anlamayan iki insan en azından rakamları, sayıları kullanarak anlaşabilirler. Milattan sonra 500 yıllarında ise kullanılan rakamlar arasında çok daha büyük bir benzerlik vardı ve Hindistan modern sayı sisteminin ihtiyaç duyduğu üç unsura sahipti: On rakam, basamak değeri ve şarkı söyleyen dans eden sıfır.

Kullanım kolaylığı sayesinde, Hint yöntemi, Orta Doğu'ya yayıldı ve İslam dünyası tarafından kabul edildi. Rakamların hatalı bir biçimde Araplara ait olduğu bilgisinin sebebi de budur. Oradan girişimci bir İtalyan olan ve soyadı "Bonacci'nin oğlu" anlamına gelen Leonardo Fibonacci tarafından Avrupa'ya getirildi. Büyüdüğü yıllarda babasının Pisa gümrük görevlisi olarak çalıştığı ve şimdi Cezayir'in Bejaia adıyla bilinen kentinde Hint rakamlarıyla ilk tanışan kişi Fibonacci olmuştu. Roma rakamlarından çok daha iyi olduğunu fark eden Fibonacci basamak değeri sistemi üzerine *Liber Abaci* isimli bir kitap yazdı ve 1202 yılında yayınladı. Kitap mutlu haberlerle başlıyordu.

Dokuz Hint rakamı:

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Bu dokuz rakam ve Arapların *zefir* adını verdiği 0 işaretiyle bütün sayılar hangisi olursa olsun yazılmakta ve ispatlanabilmektedir.

Liber Abaci Hint sistemini batıya diğer tüm kitaplardan daha fazla tanıttı. Kitapta Fibonacci, aritmetiğin Avrupalıların kullandığı tüm metotlardan daha hızlı, daha kolay, daha zarif bir biçimde gerçekleştirmenin yollarını gösteriyordu. Uzun çarpma ve bölme işlemleri şimdi bizlere sıkıcı görünebilir ama on üçüncü yüzyılın başlarında en son teknolojik yeniliktiler.

Ancak bu yeni sisteme hemen geçmek konusunda herkes ikna olmamıştı. Mesela profesyonel abaküs kullanıcıları bu daha kolay hesaplama yöntemi nedeniyle kendilerini tehdit altında hissetmişlerdi (onluk sistemin abaküsün sembollerle yazılan hali olduğunu ilk olarak onlar fark etmiş olmalı). En büyük sebebi de, Fibonacci'nin kitabının İslam üzerine haçlı seferlerinin düzenlendiği dönemde ortaya çıkmasıydı ve ruhban sınıfı Arapları çağrıştıran her şeye şüpheyle yaklaşıyordu. Aslında bazıları yeni aritmetiğin bu kadar kullanışlı olmasını tam olarak şeytan işi olmasına bağlamıştı. Arap rakamlarına duyulan korku bazı modern kelimelerin kökeninde ortaya çıkmaktadır. Zefir kelimesinden Sıfır [Zero] kelimesi türedi aynı zamanda Portekizce *chifre* '[Şeytanın] boynuzlar(ı)' ve İngilizce kod anlamına gelen *cipher* sözcüğü türetildi. Bunun sebebinin sayıların sıfırla kullanılmasının kilisenin iradesi dışında gizlice gerçekleştirilmesi olduğu tartışılmaktadır.

1299 yılında Floransa'da Arap rakamları yasaklandı, sebep olarak o küçük sembollerin Roma rakamlarındaki V'ler I'lardan daha kolay karıştırıldığı söylenmişti. 0 kolaylıkla 6 ya da 9 olabiliyordu 1 ise kolayca 7'ye çevrilebiliyordu. Sonuç olarak, on beşinci yüzyıl civarlarında Roma rakamları değiştirildi, ancak negatif sayıların kabulü daha uzun sürdü. On yedinci yüzyılda kabul gördü çünkü eskiden yasal olmayan



Arithmetica, aritmetiğin ruhu, Arap rakamları kullanan Boethius ile, hesaplama tahtası olan Pisagor arasında hüküm verir. Sevgi dolu bakışları ve elbisesi üzerindeki sayılar hangi yöntemi seçeceğinin ipuçlarını taşır. Üzerine Gregorius Reisch'ın Margarita Philosophica'sı kazınmış (1503) bir tahta parçasından.

para hesapları ve aşırı yüksek faiz hesaplarında kullanıldığı söyleniyordu, bu da kutsal değerlere karşı bir küfür kabul ediliyordu. Ancak hesaplamanın gerekmediği yerlerde, bazı yasal evraklarda, kitapların bölümlerinde ve BBC programlarının sonunda verilen tarihlerde, Roma Rakamları hâlâ kullanılmaktadır.

Arap rakamlarının kabulü ile aritmetik geometriye geçildi ve bu matematiğin ciddi bir parçası haline geldi. Arap rakamları daha evvel dükkân sahipleri tarafından kullanılan bir araç olmaktan çıkıp bilimsel devrimlere kapı aralayan yeni bir sistem haline geldi.

Hindistan'ın dünya sayılarına daha yeni katkısı toplamda Veda Matematiği olarak bilinen aritmetik numaralar dizisidir. Yirminci yüzyılın başında genç bir Hindu din adamı, Bharati Krishna Tirthaji tarafından keşfedildi. O, bu yöntemi vedalarda bulduğunu iddia etti. Bu, bir papazın dördüncü dereceden denklemlerin çözümünü İncil'de bulduğunu söylemesi gibi bir şeydir. Veda Matematiği aşağıda listelenen 16 özdeyiş ya da sutra'da temellendirilir, Tirthaji vedaların herhangi bir bölümünde bunların yazılmadığını, sadece sezgisel vahiy temelinde tespit edilebildiklerini söylemiştir.

1. Bir ile ve daha çok bir öncesiyle.
2. Hepsi 9'dan, sonuncusu 10'dan.
3. Dikey ve çapraz olarak.
4. Yerini değiştir ve uygula.
5. Eğer Samuccaya aynıysa sıfırdır.
6. Eğer bir oran içindeyse diğeri de sıfırdır.
7. Toplayarak ve çıkartarak.
8. Bütünleme ve bütünlememe kullanarak
9. Diferansiyel kalkülüs.
10. Eksilterek.

11. Özel ve genel.
12. Son basamağı kalanıyla.
13. Nihai ve sondan bir öncekinin iki katı.
14. Bir ile ve sondan bir öncekiyle.
15. Toplamın sonucu.
16. Çarpanların tümü.

Ciddi miydi? Evet, hem de oldukça. Tirthaji kendi döneminin en çok saygı gören din adamlarından birisiydi. Dahi bir çocuktu, 20 yaşında Sanskritçe, felsefe, İngilizce, matematik, tarih ve bilim diplomalarını aldı. Aynı zamanda yetenekli bir hatipti, bu özelliği yetişkinlik döneminin başlarında ortaya çıktığında Hint dini hayatında önemli bir rol üstlenmeye başlamıştı. 1925 yılında Tirthaji gerçekten de Hindu toplumunun kıdemli kademelerinden biri olan Shankaracharya'ya yükselmişti, Bengal Körfezi'nde bulunan Orissa, Puri'deki manastırın başına getirilmişti. Ziyaret ettiğim, Rath Yatra savaş arabasına odaklandığım ve Veda Matematiğinin o dönemki elçi olarak görevde bulunan Shankaracharya ile tanışmayı umduğum kasaba buydu.

Tirthaji Shankaracharya göreviyle 1930'lu ve 1940'lı yıllarda genellikle on binlerce kişiden olan kalabalıklara, genellikle dini rehberlik ama aynı zamanda kendi yeni matematiksel hesaplama yöntemi hakkında vaazlar vererek Hindistan'ı turladı. Öğrettiği 16 sutra adeta matematik formülleriymiş gibi kullanılmalıydı. Bir mühendislik kitabının bölüm başlıkları ya da ya da sayısal mantralar gibi kulağa muğlâk gelseler de gerçekte belirli kurallara göndermede bulunuyorlardı. En anlaşılanlardan birisi ikincisidir, *hepsi 9'dan sonuncusu 10'dan.* Bu kural ne zaman bir sayının kuvvetlerinden, örneğin 1000'den, bir sayıyı çıkarıldığından kullanılacaktır. Eğer 1000 – 456'yı hesaplamak istersem, 4'ü 9'dan, 5'i 9'dan ve 6'yı 10'dan çıkarmam gerekir. Başka bir deyişle ilk iki rakamı dokuzdan sonuncu rakamı 10'dan çıkarmalıyım cevap 544

olur (Diğer sutralar başka durumların uygulamalarıdır daha fazlasını ileride ele alacağım).

Tirthaji okul çağındaki çocukların matematiği on beş senede öğrendiklerini ama sutralarla sekiz ayda öğrenilebildiğini savunarak Veda Matematiği'ni ulusa bir armağan haline getirdi. Hatta daha da ileri giderek sistemin sadece aritmetiği değil cebir, geometri, kalkülüs ve astronomiyi de kapsayabileceğini ileri sürdü. Tirtharji'nin ahlaki otoritesi ve halk konuşmacısı olmasından kaynaklanan karizması nedeniyle dinleyenleri onu sevdi. Veda Matematiği karşısında Halk 'Oldukça etkilendi, karşı çıktı, heyecan duydu, hayran kaldı ve şaşkına döndü' diye yazdı. 'Metodun matematiksel bir yöntemi yoksa sihir mi?' diye soranlara söyle cevap verdi: 'İkisi de. Siz onu anlayana kadar sihir; anladıktan sonrası matematik.'

1958 yılında 82 yaşındayken döndüğünde büyük anlaşmazlıklar yaşayacağı Amerika ziyaretinde bulundu, çünkü ruhani liderlerin yurt dışına çıkmaları yasaktı ve ilk defa Shankaracharya Hindistan'dan ayrılmıştı. Amerika seyahati büyük merak uyandırdı. West Coast daha sonra Çiçek gücü, guruları ve meditasyon ile meşhur olacaktı ama daha o zamanlar hiç kimse ona benzer birini görmemişti. Tirthaji Kaliforniya'ya vardığında *Los Angeles Times* onun için 'dünyadaki en önemli –ve en az tanınan– insanlardan birisi' demişti.

Tirthaji'nin programı konuşmalar ve televizyon programlarıyla doluydu. Her ne kadar tamamen dünya barışı üzerine konuşsa da bir konuşmasını sadece Veda Matematiği'ne ayırdı. Yer dünyanın en saygın bilimsel kurumlarından biri olan Kaliforniya Teknoloji Enstitüsü'ydü. Elli kilodan fazla gelmeyen ve geleneksel kıyafetler giyen Tirthaji ahşap kaplamalı bir sınıfın ön tarafında bulunan bir sandalyeye oturdu. Sessiz bir tonda ama hükmeden bir duruşla dinleyenlerine şöyle söyledi: 'Çocukluğumdan bu yana bir yanda metafizik diğer yanda ise matematiğe eşit derecede düşkünüm. Ve herhangi bir zorlukla karşılaşmadım.'

Ve çoğu çift anlam barındıran Vedalarda gizli bilgiler dünyası bulunduğunu ve sutraları nasıl bulduğunu açıklayarak konuşmasına devam etti. Bu gizemli kelime oyunlarının batılı Hint bilimcilerinin gözünden tamamen kaçmış olduğunu ekledi. 'Matematiğin Veda literatürünün bir parçası olmadığı varsayılıyordu' dedi, 'fakat ben bulmayı başardığımda, nasıl desem, yolculuğa çıkmak kolaydı.'

Tirthaji'nin açılış numarası 9 x 8'i çarpım tablosunu kullanmadan nasıl çarpılacağını göstermek oldu. Bunun için *hepsi 9'dan sonuncusu 10'dan* sutrasını kullanıyordu ve bunun sebebi ise sonra anlaşıldı.

Önce kara tahtaya bir 9 çizdi ve yanına 10'dan farkı olan –1'i. Altına 8'i ve 10'dan farkı olan –2'yi çizdi

9 –1
8 –2

Cevabın ilk rakamı dört farklı yolla elde edilebilir. Ya ilk sütundaki rakamları toplar ve 10'dan çıkarırsınız (9 + 8 – 10 = 7). Ya da ikinci sütundaki rakamları toplar, 10'dan çıkarırsınız (–1 – 2 + 10 = 7) ya da iki taraftan birisini çaprazlama toplarsınız (9 – 2 = 7, ve 8 – 1 = 7). Cevap daima yedidir.

9 –1
8 –2
7

Cevabın ikinci kısmı ikinci sütundaki iki sayı çarpılarak elde edilir (–1 x –2 = 2). Tam cevap 72'dir.

9 –1
8 –2
7 2

Bu numarayı son derece tatmin edici buluyorum. Tek basamaklı bir sayının yanına 10'dan farkını yazmak bir biçimde içte saklı olan kişiliği açığa çıkarmaya, kişiliği ve ikinci kişiliği yan yana sıralamaya benziyor. Sayıların davranış biçimlerini daha derinlemesine kavrıyoruz. 9 x 8 gibi bir çarpımın değeri gözüktüğü gibi sıradan, ancak yüzeyi kazıdıkça beklenmedik bir zarafet ve düzenle karşı karşıyayız. Ve metot sadece 9 x 8 için geçerli değil. Tirthaji başka bir örnek daha çiziyor: 8 x 7.

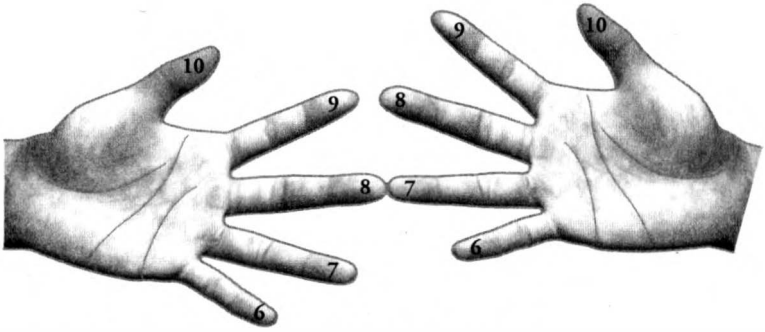
8 –2
7 –3
5 6

Aynı şekilde ilk rakam dört biçimde çıkarılabilir: 8 + 7 – 10 = 5, ya da –2 – 3 + 10 = 5, ya da 8 – 3 = 5 veya 7 – 2 = 5. İkinci rakam ikinci sütundaki rakamların ürünüdür –2 x –3 = 6.

Tirthaji'nin taktiği iki tek basamaklı sayının çarpımını toplama işlemine ve sayıların 10'dan farkının çarpımına indirgiyor. Başka bir deyişle, iki tek basamaklı sayının çarpımını beşten büyük iki sayının toplamına ve beşten küçük iki sayının çarpımına indirgiyor. Bu da beşli çarpım tablosunun üstüne çıkmadan beşle, altıyla, yediyle sekizle ve dokuzla çarpabilmek anlamına geliyor. Bu da çarpım tablosunu ezberlemekte güçlük çeken insanlar için oldukça kullanışlı.

Aslında, Tirthaji'nin açıkladığı teknik Avrupa'da, en azından Rönesans'tan bu yana kullanılan parmak hesaplama yöntemi ile aynıdır ve 1950'lerin sonlarına kadar Fransa ve Rusya'nın bazı bölgelerindeki çiftlik çalışanları tarafından kullanılmaya devam edilmiştir. Her eldeki parmaklar 6'dan 10'a kadar numaralandırılır. Diyelim ki, 8 ve 7 sayılarının çarpımı için

8 ve 7 parmakları birbirlerine dokundurulur. Dokunan parmakların sayısından karşıdaki eldeki yukarısında kalan parmak sayısı çıkarılır (7 – 2 ya da 8 – 3) ve 5 bulunur. Birleştirilen parmakların üstündeki parmak sayısı çarpılır 2 x 3, 6 elde edilir. Cevap yukarıda olduğu gibi 56'dır.



8 x 7'nin çiftçi parmak hesabı ile çarpılması.

Tirthaji yöntemin iki basamaklı sayıların çarpımında da işe yaradığını göstererek konuşmasına devam etti, bu sefer 77 x 97 örneğini kullandı. Tahtaya şunları yazdı:

77

97

Bu sefer her bir sayının 10'dan farkını bulmak yerine her sayının 100'den farkını yazdı. (ikinci sutranın işe karıştığı yer burasıdır. Bir sayının 100'den ya da onun herhangi bir kuvvetinden farkını alırken, son basamak 10'dan, son basamak dışında tüm basamaklar 9'dan çıkarılır):

77 –23

97 –3

Önceki durumda olduğu gibi cevabın ilk kısmını bulmak için dört seçenek vardır. Tirthaji çapraz olan sayılarının toplamını göstermeyi tercih eder: 77 – 3 = 97 – 23 = 74.

77 – 23
97 – 3
74

İkinci kısım sağdaki sütunda bulunan iki sayının çarpımından elde edilir. –23 x –3 = 69

77 –23
97 –3
74 69

Cevap 7469'dur.

Tirthaji ardından üç basamaklı sayılar için bir örnek vererek devam eder: 888 x 997. Bu sefer 1000 farklarını yazar.

888 –112
997 –003
885. 336

Çapraz toplama ilk kısmın sonucunun 885 olduğunu söyler ve sağ sütunun toplamı ikinci kısmın 336 olduğunu söyler, cevap 885.336'dır. Denklemler bu formüllerle daha kolay işlenmektedir' dedi Tirthaji. Öğrencilerin tepkisi içten bir kahkaha oldu. 82 yaşındaki bu cübbe

giymiş gurudan temel aritmetik dersi alan belki de Amerika'daki en zeki matematik öğrencilerinin gülüşmeleriydi. Ya da belki Tirthaji'nin aritmetiksel numaralarına duyulan yüksek takdir duygusuydu. Arap rakamları gizli şablon madenleri, iki tek basamaklı sayının çarpımı gibi basit bir seviye de bile. Tirthaji daha sonra kare alma, bölme ve cebir teknikleri ile ilgili konuşmaya devam etti. Ders notlarının dökümünden anlaşıldığı kadarıyla gördüğü tepki heyecan verici: 'Ders bitiminin hemen ardından bir öğrencinin yanında bulunan arkadaşa şunu sorduğu işitiliyor, 'Ne düşünüyorsun?' arkadaşı şöyle cevap veriyor. 'Sıradışı!''

Hindistan'a dönüşünde, Tirthaji kutsal şehir Varanasi'ye çağırıldı ve orada özel Hint yaşlılar meclisi yurt dışına çıkarak yaptığı protokol ihlalini ele aldılar. Yolculuğunun bir Shankaracharya'nın yurt dışına çıkmasına izin verilen ilk ve son yolculuk olduğuna karar verildi ve Tirthaji yolculuğu sırasında tükettiği Hindu kaynaklı olmayan gıdalar için bir arınma ritüeline başladı. İki yıl sonra hayata gözlerini yumdu.

Puri'deki otelde daha fazla bilgi sahibi olmak için Veda Matematiği'nin önce gelen iki savunucusuyla bir araya geldim. Eski bir matematik öğretmeni olan 62 yaşındaki güney İskoçyalı Kenneth Williams yöntem hakkında birkaç kitap yazmıştı. 'Çok güzel bir biçimde sunulmuş ve birleşik bir sistem' dedi. 'İlk karşılaştığımda matematiğin böyle bir şey olması gerektiğini düşünmüştüm.' Williams bir rahibi andıran tıraşlı kırçıllı sakalı ve ağır göz kapakları olan mavi gözlü ağırbaşlı bir beyefendiydi. Yanında daha konuşkan olan Kalküta'dan bembeyaz bir gömlek ve Armani güneş gözlükleri bulunan 29 yaşındaki eski borsacı Gaurav Tekriwal vardı. Tekriwal, internet sitesini yürüten konuşmalar düzenleyip DVD'ler satan bir organizasyon olan Veda Matematik Forum Hindistan'ın başkanıydı.

Tekriwal, Shankaracharya'nın huzuruna kabul edilmemi garanti altına alma konusunda bana yardımcı olmuştu. Bir araç çevirdik ve Govardhan Math'a doğru yola koyulduk, isim oldukça alakalı gözükse

de maalesef matematikle bir alakası yoktu. Manastır ya da tapınak manasına geliyordu. Sıra sıra yiyecek ve desenli ipek satan tezgâhların bulunduğu küçük caddelerden ve deniz kıyısından geçtik. Math düz tuğla ve betondan yapılma küçük bir köy kilisesi büyüklüğündeydi, çevresi palmiye ağaçlarıyla ve fesleğen, aloe vera ve mango dikilmiş bir kum bahçesiyle çevriliydi. Avluda, sekizinci yüzyılda tarikatı kuran Hint bilgesi Shankara'nın oturup meditasyon yaptığına inanılan yerde Hint inciri ağacı vardı gövdesi koyu sarı bir örtüyle süslenmişti. Ortamdaki tek modern dokunuş birinci kattaki parlak siyah ön cepheydi, burası teröristler tarafından ölüm tehdidi aldıktan sonra Shankaracharya'nın odasının önüne eklenmişti.

Puri'nin şimdiki Shankaracharya'sı Nischalananda Sarasvati görevini, Tirthaji'nin yerine geçen kişiden devralmıştı. Tirthaji'nin matematiksel mirasıyla gurur duyuyordu ve Veda Matematiği'nin sayılara ve hesaplamaya olan yaklaşımı üzerine beş kitap yazmıştı. Math'a vardığımızda bizi Shankaracharya'nın konuşmaları için kullandığı odaya aldılar. Odada mobilya olarak sadece koyu kırmızı kaplanmış antika bir kanepe ve hemen onun önünde bulunan geniş bir oturağı ve ahşap bir arkalığı bulunan kırmızı şal örtülü alçak bir sandalyeydi: Shankaracharya'nın tahtı. Yüzümüzü ona dönerek oturduk ve bu kutsal adamın gelmesini bekledik.

Sarasvati üzerinde pembe bir cübbeyle içeri girdi. Kıdemli bir müridi ayağa kalktı ve kutsal bir metinden alıntılar okumaya başladı ve ardından Sarasvati ellerini dua eder gibi birleştirerek duvardaki Shankara resmine dokundu. Mavi gözleri, beyaz sakalı, açık renk bir teni ve tıraşlanmış bir kafası vardı. Tahtına yarım lotus pozisyonunda oturarak huzurlu ve kasvetli arası bir ifade takındı. Oturum başlamak üzereyken mavi cüppeli bir adam önüme geçerek tahtın önünde ellerini uzatarak yere kapandı. Bezgin bir dede edasıyla Shankaracharya adama gitmesini işaret etti.

Dinsel kurallar Shankaracharya'nın Hindu dilinde konuşmasını gerektiriyordu, bu nedenle kıdemli müridini tercüman olarak kullandım. İlk sorum şu oldu: 'Matematiğin maneviyatla bağlantısı nedir?' Birkaç dakika sonra cevap geldi. 'Bana göre, evrenin yaratılması, varlığını sürdürmesi ve yok edilmesi matematiksel bir form içinde gerçekleşiyor. Biz matematik ve maneviyatı birbirinden ayrı şeyler olarak düşünmüyoruz. Biz matematiğin Hint felsefesinin çıkış kaynağı olduğunu düşünüyoruz.'

Ardından Sarasvati ormanda karşılaşan iki kralın hikâyesini anlattı. İlk kral diğerine sadece bir ağaca bakarak üzerindeki yaprakları sayabileceğini söyledi. İkinci kral ona inanmayarak ağacın yapraklarını tek tek koparıp saymaya başladı. Bitirdiğinde tam olarak birinci kralın verdiği sayıya ulaşmıştı. Sarasvati hikâyeyi kadim Hintlilerin büyük sayıları tek tek saymadan bir bakışta bütün olarak sayabilme yetenekleri olduğunu belirmek için anlattı. Bu ve o döneme ait daha başka birçok beceri kaybolmuştu. 'Tüm bu kayıp bilimler ciddi bir düşünme, ciddi bir meditasyon ve ciddi çabalarla yeniden elde edinilebilir' dedi. Eski bilgilere ulaşmak için antik metinler üzerine yürütülen çalışmaların tam olarak Tirthaji'nin matematikte yaptığı şey olduğunu ekledi.

Oturum sırasında odada sessizce oturup Shankaracharya'nın konuşmasını dinleyen yaklaşık 20 kişi vardı. Konuşmanın sonlarına doğru Bangalore'dan orta yaşlı bir yazılım uzmanı 10^{62} sayısının önemi üzerine bir soru sordu. 'Sayı Vedalarda geçiyordu' dedi, 'yani bir anlamı olmalı.' Shankaracharya adamın görüşlerine katıldı. Sayı Vedalarda yer alıyordu ve evet bir önemi olmalıydı. Bu Hint hükümetini ülkenin mirasını nasıl görmezden geldiği konusunda bir tartışmaya yol açtı ve Shankaracharya enerjisinin çoğunu geleneksel kültürü korumak için harcadığından ve kendini matematiğe veremediğinden yakındı. Bu sene sadece 15 gün ayırabilmişti.

Ertesi gün kahvaltıdan sonra yazılım uzmanına 10^{62} sayısı üzerine olan ilgisini sordum ve antik Hindistan'daki bilimsel kazanımlar konusunda bir ders vererek sorumu cevapladı. Binlerce yıl önce Hintlilerin dünya hakkında bu gün bilinenden daha çok şey anladıklarını söyledi. Bu söylediği için herhangi bir kanıt olup olmadığını sorduğumda bana bir hava aracının bin yıllık taşlara kazınmış bir gravürünün bulunduğunu söyledi. Bu uçaklar jet motorları kullanıyorlar mıydı? Hayır dedi, güçlerini dünyanın manyetik alanını kullanarak elde ediyorlardı. Kompozit bir maddeden yapılmışlardı ve saatte 100 ile 150 kilometre arası düşük hızlarda uçuyorlardı. Ardından sorduğum sorulardan giderek rahatsız oldu ve bilimsel açıklamalara karşı duyduğum arzuyu Hint mirasına bir hakaret olarak yorumladı. Ve en sonunda benimle konuşmayı reddetti.

Veda bilimi, fantastik, olağanüstü güçlere inanan ve zar zor inanılır bir şeyken Veda Matematiği, her ne kadar sutralar çoğunlukla belirsiz olsa da her türlü dikkatli incelemeye göğüs germiş ve İnançsızlık dürtüsünün askıya alınmasını gerektiren Vedalara ait kökenini kabul etmiştir. Bazı teknikler o kadar belirli alanlara yöneliktir ki, örneğin onluk tabanda kesir hesaplarına yönelik ipuçlarından ibaret olan ilginçliklerden öte şeyler değildir. Ama diğerleri gerçekten de çok açıktır.

Daha önceki 57 x 43 örneğini düşünün. Bu çarpımı hesaplamanın standart yolu iki ara basamağı yazıp ardından bunları toplamaktır:

57
x 43
0171
2280
2451

Üçüncü sutrayı kullanarak *dikey ve çaprazlama* cevabı oldukça basit bir biçimde aşağıdaki gibi buluruz.

Birinci adım: Sayıları üst üste yazın:

5 7
4 3

İkinci adım: İkinci sütundaki sayıları çarpın. Bulduğunuz sayının son basamağı cevabın son basamağıdır. Sağ sütunun altına yazın ve 2'yi sonraki basamağa geçirin.

5 7
|
4 3
$_2$1

Üçüncü adım: Çapraz çarpımların toplamını bulun: (5 x 3) + (7 x 4) = 15 + 28 = 43, bir önceki basamakta elde bulunan ikiyi ekleyin ve 45'i elde edin. Bu basamakta elde ettiğiniz sayının son basamağını soldaki sütunun altına yazın ve 4'ü sonraki basamağa geçirin.

5 7
4 3
$_4$5 1

Dördüncü adım: Sol sütundaki sayıları çarpın 5 x 4 = 20. Bir önceki basamaktan elde bulunan 4'ü ekleyin ve 24'ü bulun ve cevabın son şeklini oluşturun:

```
      5   7
      |
      4   3
-------------
2 4   5   1
```

Sayılar tam olarak sutranın söylediği gibi çapraz ve dikey olarak çarpıldı. Bu yöntem tüm büyüklerdeki çarpma işlemine uygulanabilir. Tüm değişiklik dikey ve çaprazlama olarak çarpılması gereken sayıların daha fazla olmasıdır. Örneğin 376 x 852:

```
3   7   6
8   5   2
```

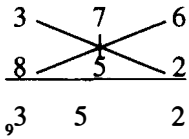
Birinci adım: Sağdaki sütundan başlıyoruz: 6 x 2 = 12

```
3   7   6
        |
8   5   2
-----------
        12
        1
```

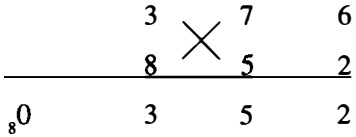
İkinci adım: Birler ve onlar basamağındaki sayıların çapraz çarpımının toplamı, (7 x 2) + (6 x 5) = 44, artı yukarıda elimizde kalan 1. Sonuç 45.

```
3   7   6
    X
8   5   2
-----------
 45 2
 4
```

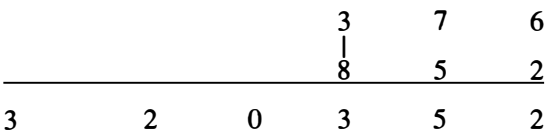
Üçüncü adım: Şimdi yapmanız gereken birler ve yüzler basamağının çapraz çarpımının toplamın onlar basamağın dikey çarpımını eklemek, (3 x 2) + (8 x 6) + (7 x 5) = 89 artı yukarıda elimizde kalan 4, sonuç 93.



Dördüncü adım: Sola doğru hareket edip ilk iki basamağın çapraz çarpımının toplamını almak: (3 x 5) + (7 x 8) = 71, artı bir önceki basamakta elimizde bulunan 9. Bu da 80 eder.



Beşinci adım: Son olarak soldaki sütunun çarpımı, 3 x 8 = 24, artı bir önceki basamakta elimizde bulunan 8. Son cevap 320.352.



Dikey ve çaprazlama ya da çapraz çarpma, daha hızlıdır ve uzun çarpma işleminden daha az yer kaplar ve daha az zahmetlidir. Kenneth Williams okulda ne zaman Veda Matematiği anlatsa öğrencilerinin kolayca anladığını söyledi. 'Daha önce bunu öğrenmediklerine inanamıyorlar.'

Okullarda uzun çarpma yöntemi tercih ediliyor çünkü her aşama tek tek yazılıyor. *Dikey ve çaprazlama* yönteminde ara aşamaların bazıları gizli kalıyor. Williams bunun kötü bir şey olmadığını hatta çok parlak olmayan öğrenciler için daha faydalı olduğunu düşünüyor. 'Çocuklara yol göstermeli ve her zaman her şeyi bilmeleri gerektiği konusunda ısrarcı olmamalıyız. Bazı çocukların [çarpmanın] nasıl yapıldığını bilmesi gerekir. Bazıları nasıl yapıldığını bilmek istemez. Sadece yapabilmek isterler.' Eğer bir çocuk, öğretmeni anlamadığı genel bir kuralı öğretmek konusunda ısrar ettiği için bir çarpma işlemini yapamadığı bir durumla karşılaşıyorsa çocuk eğitilmiyordur. Daha zeki çocuklar için Veda Matematiği aritmetiğin canlanması olduğunu söylüyor. 'Matematik yaratıcı bir konudur. Çeşitli metotları öğrendiğinizde kendi yöntemlerinizi icat edebiliyorsunuz, böylelikle çocuklar da yaratıcı olabiliyorlar. Matematik gerçekten keyifli, eğlenceli bir konudur ve matematiği [Veda Matematiği] bu şekilde öğretme yolu sağlıyor.'

Shankaracharya huzuruna ilk kabul edilişimde konuşmak istediğim tüm konuları ele alamamıştım, bu nedenle ikinci kez kabul edildim. Bu seansın başında, kıdemli müridin yapacağı bir anons vardı: 'Sıfır hakkında söylenmek istediğimiz şeyler var' dedi. Ardından Shankaracharya Hindu dilinde canlı bir ifadeyle yaklaşık on dakika konuştu, ardından müridi tercüme etti: 'Günümüz matematik sistemi sıfırı var olmayan bir nicelik olarak kabul etmekte' dedi. 'Bu anormalliği düzeltmek istiyoruz. Sıfır var olmayan bir nicelik olarak kabul edilemez. Bir nicelik bir yerde var kabul edilirken bir yerde yok kabul edilemez.' Shankaracharya'nın iddiası sanırım şöyleydi: İnsanlar sıfırı 10'da var kabul ederken kendi başına 0 olarak var olmayan kabul ediyorlar. Bu bir çelişkidir, bir şey ya vardır ya da yoktur. Yani sıfır vardır. 'Veda Matematiğinde sıfır hiç tükenmeyen sayıdır' dedi. 'Sıfır yok edilemez. Yok edilemeyen bir zemindir. Her şeyin zeminidir.'

Artık Shankaracharya'nın kendine özgü matematik ve metafizik karışımına alışmıştım. Belli noktalara açıklık getirmesi için sorular sormaktan vazgeçmiştim çünkü yorumların Hintçeye çevrilip tartışıldıktan ve tekrar tercüme edildiğinde kaçınılmaz olarak sadece kafa karışıklığıma katkıda bulunuyorlardı. Konuşmasındaki detaylara odaklanmayı bırakmaya karar verdim ve kendimi tercüme edilen cümlelerin akışına bıraktım. Shankaracharya'ya dikkatlice baktım. Bugün üzerinde turuncu bir cübbe vardı ve ensesinden büyük bir düğümle düğümlenmişti, alnı bej rengi bir boya ile boyanmıştı. Onun gibi bir yaşam sürmenin nasıl bir şey olduğunu merak ettim. Bana hiç mobilya bulunmayan boş bir odada uyuduğunu her gün aynı acı Hint baharatını yediğini ve herhangi bir sahip olma arzusu ya da ihtiyacı bulunmadığını söylediler. Gerçekten de, seansın başında bir keşiş ona yaklaşıp bir meyve kâsesi verdi ve kâseyi alır almaz bize dağıttı, bana ayağımın kenarında duran mango düştü.

Shankaracharya'nın bilgeliğini başka bir yoldan tecrübe edebilmek için, 'Sıfır var olan bir niceliktir' cümlesini düşündüm ve bir mantra gibi aklımın içinde tekrar ettim. Kendimi bıraktım. Neredeyse derhal düşüncelerin arasında kayboldum. Her şey anlam kazanmıştı. 'Sıfır var olan bir niceliktir' sadece Shankaracharya'nın matematiksel bakış açısı değil kendini özlü bir biçimde tanımlama biçimiydi. Önümde oturan Bay Sıfır, *shunya*'nın et ve kemiğe bürünmüş haliydi.

Bu bir açıklığa kavuşma, belki de aydınlanma ânıydı. Hindu düşüncesinde hiçlik hiç olmayandı. Hiçlik her şeydi. Bir keşiş ve özverili Shankaracharya kendi hiçliği için mükemmel bir elçiydi. Doğu maneviyatı ve matematik arasındaki derin bağlantıyı düşündüm. Hint felsefesi tıpkı Hint matematiğinin sıfırı kabul etmesi gibi hiçliği kabul etmişti. Sıfırın icadına yol açan kavramsal sıçrama, boşluğu evrenin özü olarak kabul eden bir toplumda meydana gelmişti.

Eski Hindistan'da ortaya çıkan Sıfır sembolü Shankaracharya'nın matematiğin maneviyattan ayrılamaz olduğuna dair verdiği bu önemli mesaj için mükemmel bir muhafaza olmuştu. Çember, 0 seçilmişti çünkü gökyüzünün döngüsel yüzünü resmediyordu. Sıfır hiçlik ve sonsuzluk demekti.

Sıfırı icat etmenin gururu matematiksel mükemmelliğin, ulusal Hint kimliğinin bir parçası haline gelmesine yardımcı oldu. Okul çağındaki çocukların çarpım tablosunu 20'ye kadar öğrenmeleri gerekir, bu benim büyüdüğüm sırada İngiltere'de öğrendiğimin iki katı. Daha önceki birkaç on sene içinde Hintlilerden çarpım tablosunu 30'a kadar öğrenmeleri isteniyordu. Hindistan'daki Veda dışı matematiğindeki en büyük isimlerden biri olan, S. G. Dani bunu onaylıyor: 'Çocukken matematiğin aşırı derecede önemli olduğu izlenimine sahiptim.' Yaşlıların çocuklara matematik soruları sormaları çok yaygınmış ve eğer doğru cevap verilirse büyük bit takdir görürlermiş. 'Hindistan'da, matematik kullanışlı olup olmadığına bakılmaksızın kişinin arkadaş çevresi ve yaşıtları arasında aşırı önemlidir.'

Dani Bombay'daki Tata Temel Araştırma Enstitüsü'nde kıdemli bir matematik profesörü. Akademisyenlere özgü keli kapatan saçlar kaplumbağa kabuğundan yapılmış gözlükler ve üst dudağını çevreleyen bir bıyığı var. Ve bir Veda Matematiği hayranı değil; ne Tirthaji'nin yönteminin vedalarda bulunabileceğine inanıyor ne de bulunduğuna inanmanın herhangi bir faydası olduğuna. 'Antik metinlere başvurmadan da matematiğe ilgi duyulmasını sağlamanın daha iyi birçok yolu var' diyor. 'Matematiği ilginçleştirdiklerine inanmıyorum. Algoritmaları daha hızlı yapabilmelerini sağlıyorlar, ama bu matematiği ilginç yapmıyor, ne olup bittiğini içselleştirmenizi de sağlamıyor. Tüm ilgi sonuca karşı duyuluyor, sürece değil.' Hesaplamaları daha hızlı yaptıkları konusunda da şüpheleri var, çünkü gerçek yaşam insanın karşısına onluk sistemin kırılma yaşadığı mükemmel bir biçimde biçimlenmiş

problemler çıkarmıyor. 'Her şey hesaba katıldığında geleneksel yöntem daha kullanışlı' diye ekliyor.

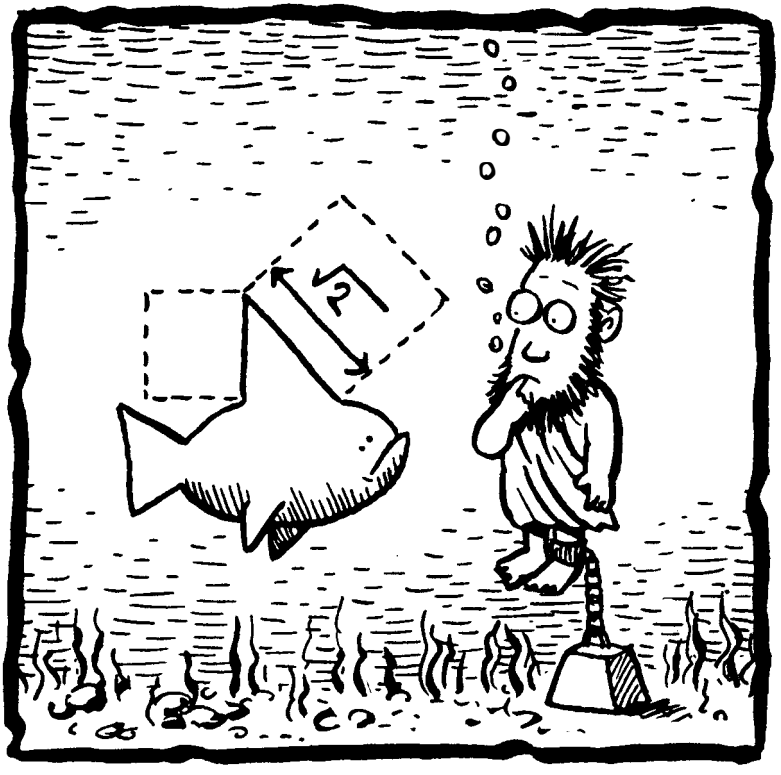
Dani'nin, Tirthaji'nin Veda Matematiği görevi hakkında anlayışlı bir biçimde konuşması beni şaşırttı. Dani, Tirthaji'ye duygusal bir zeminde bağlıydı. 'Ona karşı hissettiğim baskın duygu, fethetmeye çalıştığı aşağılık duygusuyla ilişkili. Çocukken benim de buna benzer bir tavrım vardı. O dönemlerde Hindistan'da [bağımsızlıktan kısa bir süre sonra] ne yapıp ne edip [İngilizlerden] kaybettiklerimizi geri almamız gerektiği hususunda güçlü bir hissiyat vardı. Bu çoğunlukla İngilizlerin alıp götürmüş olabileceği eserlerle alakalıydı. Çünkü çok fazlasını kaybettik, kaybettiğimiz kadarını geri almamız gerektiğini düşünürdüm.

'Veda Matematiği, aritmetiği Hindistan'a geri getirmek için yanlış yönlendirilmiş bir girişimden ibaret.'

Veda Matematiği'nin bazı numaraları o kadar basit ki, matematik kaynaklarında herhangi biriyle karşılaşabilir miyim merak ediyorum. Fibonacci'nin *Liber Abaci*'sinin başlamak için iyi bir kaynak olduğunu düşündüm. Londra'ya geri döndüğümde, kütüphaneden bir kopyasını buldum, çarpma ile ilgili bölümü açtım ve Fibonacci'nin ilk önerdiği yöntem *Dikey ve çaprazlama*'ydı. Biraz araştırma yaptım ve on altıncı yüzyıl Avrupa'sına ait kitaplarda *hepsi 9'dan sonuncusu 10'dan* yöntemini öneren çarpma işlemleri olduğunu keşfettim (Aslında iki yöntemin çarpma işleminin sembolü için X'in kabul edilmesinde etkisi olabileceği daha önce ileri sürülmüştü. 1631 yılında çarpma işlemi için x yazımı ilk kez ortaya çıktığında, iki çarpma yöntemindeki çaprazlama çizgilerini göstermek için büyük X'lerin çizildiği kitaplar çoktan yayınlanmıştı.

Tirthaji'nin Veda Matematiği, öyle görünüyor ki, en azından bir kısmı Rönesans matematik numaralarının yeniden keşfedilmesidir. Kökenleri Hindistan olabilir ya da olmayabilir, kaynağı ne olursa ol-

sun Veda Matematiği'nin çekiciliği benim için sayıların içinde bulunan şablonlar ve simetrilerden çocukça bir keyif almaya teşvik eden bir yol. Aritmetik günlük yaşamımızın bir parçası ve doğru düzgün yapılması önemli, bu nedenle okulda bu kadar sistemli bir biçimde öğretiliyor. Ancak kullanışlılığına odaklanarak Hint sayı sisteminin ne kadar muhteşem olduğunu göremiyoruz. Daha evvelki tüm sayma sistemlerinin çok ötesinde ve binlerce yıldır daha ilerisi bulunamadı. Onluk basamak değeri sistemini ne kadar maharetli, zarif ve yeterli olduğunu fark edemeden öylesine gözü kapalı bir şekilde kabul ettik.


r

BÖLÜM DÖRT

Pi'nin Hayatı

On dokuzuncu yüzyılın başlarında Kraliçe Charlotte'un kulağına Devonshire'lı bir duvar ustasının oğlu olan mucize çocuk George Parker Bidder'ın hikâyesi geldi. Kraliçenin ona sormak istediği bir soru vardı:

"Cornwall, Land'in sonundan, İskoçya Farret'in başı arası 838 mil olarak ölçülmüştür. Günde 8 fit yol alan bir salyangoz bu mesafeyi ne kadar zamanda alır?"

Cevap –553.080 gün– o dönemin popüler kitaplarından olan *A Short Account of George Bidder, the celebrated Mental Calculator: with a Variety of the most difficult Questions, Proposed to him at the principal Towns in the Kingdom and his surprising rapid Answers!*'da yer almaktadır. Kitabın sayfalarında, çocuğun yaptığı içinde 119.550.669.121'in karekökü nedir?' (345.761, yarım dakikada cevapladı) ve her biri 12cwt. lqr. 22 lbs ağırlıkta olan 232 fıçı kaç kilo şeker alır? (323.408 lbs, bunu da yarım dakikada cevapladı) sorularının da yer aldığı olağanüstü hesaplamaların listesi vardır.

Arap rakamları toplamayı herkes için kolaylaştırmıştı, ama beklenmeyen sonuç bazı insanlara gerçek anlamda nefes kesici aritmetik beceri bahşedildiğinin ortaya çıkması oldu. Genel olarak bu dâhiler sayısal becerileri dışında herhangi bir üstünlüğe sahip değildirler. İlk örneklerden, Derbyshire'lı bir çiftlik işçisi olan ve güçlükle okumasına rağmen çarpma konusundaki becerisiyle çevredekileri hayretlere dü-

şüren Jedediah Buxton. Örneğin, çeyrek eninin 140 kere iki çarpımını hesaplayabiliyordu (Cevap 39 rakam uzunluğunda ve sonu 2 şilin 8 peni ile bitiyor). 1754 yılında, Buxton'ın yeteneğine duyulan merak, onun Londra'ya davet edilmesini sağladı ve orada Royal Society üyeleri tarafından incelendi. Üst düzey otizm belirtileri gösteriyor gibiydi. Shakespeare'in, III. Richard oyununu izlemeye götürdüklerinde yaşadığı bu tecrübe nedeniyle ne yapacağını bilmez bir halde kalakalmıştı, buna rağmen davet sahiplerine oyuncuların 5202 adım atıp 14.445 kelime konuştukları belirtti.

On dokuzuncu yüzyılda 'Yıldırım hesapçıları' uluslararası yıldız haline gelmişlerdi. Bazıları bu yeteneği sıradışı genç bir dönemde gösterdiler. Vermont'dan Zerah Colburn, ilk gösterisini düzenlediğinde beş ve büyük başarı hayalleriyle İngiltere'ye yelken açtığında ise sekiz yaşındaydı (Colburn altıparmaklı doğmuştu, ama fazladan bir parmağın ona saymayı öğrenirken bir avantaj sağlayıp sağlamadığı bilinmiyor). Colburn'un çağdaşlarından olan bir diğeri, Devonshire'dan George Parker Bidder'dı. Bu iki dâhinin yolları 1818'de Colburn 14 ve Bidder 12 yaşındayken birleşti ve Londra'da bir barda meydana gelen bu karşılaşma kaçınılmaz olarak bir matematik düellosuna dönüştü.

Colburn'a dakikada 3878 fit hızla hareket eden bir balonun çevresi 24.912 mil olan dünyanın etrafında ne kadar sürede döneceği soruldu. Bu dünyanın resmî olmayan en bilmiş kişisi için uluslararası uygunlukta bir soruydu. Ancak dokuz dakikalık ölçüp biçme ardından Colburn cevap vermeyi başaramadı. Bir Londra gazetesi, rakibinin bu soruya sadece iki dakikada doğru cevabı verdiğini ballandırarak anlattı; cevap 23 gün 13 saat ve 18 dakikaydı ve büyük bir alkış almıştı. Amerikalı çocuğa birçok başka soru soruldu, genç Bidder hepsini cevaplarken, o hiçbirini cevaplamayı kabul etmedi. Kendisinin kaleme aldığı yaşam öyküsünde Zerah Colburn yarışmanın farklı bir versiyonunu anlatır. '[Bidder] aritmetiğin daha yüksek dallarında büyük bir kuvvet ve zihin gücü sergiledi' ardından ilgisizce ekler, 'ama kök alma ve sayıların

faktörlerini hesaplayamıyordu.' Şampiyonun kim olduğu belirlenemedi. Ardından Edinburgh Üniversitesi Bidder'ın eğitimini üstlenmeyi teklif etti. Ve Bidder başlangıçta demiryolları ve nihayetinde Victoria limanı inşasının denetiminin başına geleceği mühendislik hayatına giriş yapmış oldu. Öte yandan Colburn Amerika'ya geri döndü, vaiz oldu ve 35 yaşında öldü.

Çok hızlı bir biçimde hesap yapabilme yeteneğinin matematiksel öngörü ya da yaratıcılıkla büyük bir karşılıklı ilişkisi yoktur. Sadece birkaç büyük matematikçi yıldırım hesaplama yeteneği sergilemiştir ve birçok matematikçi şaşılacak biçimde aritmetikte zayıftır. Alexander Craig Aitken, yirminci yüzyılın ilk yarısında iyi tanınan bir yıldırım hesapçısıydı ve aynı zamanda alışılmadık bir biçimde Edinburgh Üniversitesi'nde matematik profesörüydü. 1954 yılında Aitken, Londra'da Mühendisler Birliği için repertuarında bulunan cebirsel kısa yollar ve hafızanın taşıdığı hayati önem gibi bazı tekniklerden bahsettiği bir konuşma yaptı. Ve ispat olarak $\frac{1}{97}$'nin 96 rakamdan oluşan ondalık açılımını ezberden söyledi.

Aitken konuşmasını, ilk kez bir masaüstü hesap makinesi edindiği günden bu yana hesap yapma becerisinde azalma olduğunu üzülerek belirterek tamamladı. 'Zihinden hesap yapanlar da tıpkı Tazmanya ya da Moriori gibi yok olmaya mahkûm olabilir' diye bir öngörüde bulundu. "Sonuç olarak böyle ilginç bir türü incelemek için neredeyse antropolojik bir ilgi duyabilirsiniz ve belki de burada beni dinleyenlerden bazıları 2000 yılında şöyle söyleyebilir, 'Evet, böyle birini tanıyordum.'"

Bu Aitken'nin yanlış hesaplarından biriydi.

'Nöronlar! Hazır! Başla!'

Beklenmeyen bir sesle, Dünya Zihinsel Hesaplama Şampiyonası yarışmacıları çarpma turu için sayfalarını çevirdiler. Leipzig Üniver-

sitesi'ndeki oda, 17 erkek ve 2 bayan yarışmacı ilk soruyu tamamladıklarında sessizdi: 29.513.736 x 92.842.033.

Aritmetik yine popüler. Ucuz elektronik hesap makinelerinin zihinsel hesap yeteneğinin çöküşünü yaymasından otuz sene sonra karşı tepki harekete geçti. Gazeteler günlük matematik bilmeceleri veriyor, aritmetik bulmacaları olan popüler bilgisayar oyunları zihnimizi törpülüyor ve –en önemlisi– yıldırım hesaplayıcılar düzenli olarak uluslararası turnuvalara katılıyorlar. Dünya Zihinsel Hesaplama Şampiyonası 2004 yılında bir Alman bilgisayarbilimci olan Ralf Laue tarafından kuruldu ve iki yılda bir düzenleniyor. Bu Laue'nin iki hobisinin kaçınılmaz doruk noktası: Aritmetik ve alışılmadık kayıtlar tutmak (Bir dakikada üç metre uzaktan atılan ve ağızla tutulan üzüm sayısı gibi ki, bu da 55). Kafa denkleriyle tanışmasına internet yardımcı olmuş—zihinden hesap yapan insanlar genellikle pek dışadönük kişiler değildirler. Peru, İran, Cezayir ve Avustralya gibi çeşitli ülkelerden gelen insanlar hesap makineleri ya da 'matematik sporcuları' uluslararası topluluğu, Leipzig'de iyi bir biçimde temsil ediliyorlar.

Hesap yapma becerisi nasıl ölçülür? Laue, Guinness Dünya Rekorları'nın belirlediği kategorileri kabul etmiş—iki sekiz basamaklı sayının çarpımı, on tane on basamaklı sayının toplamı, altı ile sekiz basamaklı sayıların karekökünü alma ve 1600 ve 2100 yılları arasında herhangi bir tarihteki günü bulma. Sonuncu takvim hesabı olarak biliniyor ve yıldırım hesaplamanın altın günlerine geri dönüşünü temsil ediyor. Yarışmacılar izleyicilerden birine doğum tarihini soruyorlar ve anında doğdukları günün haftanın günlerinden hangisi olduğunu söylüyorlar.

Düzenlemeler ve mücadele ruhunun etkisiyle ortaya teatral bir hava çıkmıştı. Dünya Kupası'nın en genç yarışmacısı Hindistan'dan gelen 11 yaşındaki bir çocuk, 'hava abaküs' gösterisi gerçekleştirdi, diğer herkes sessiz sedasız beklerken, ellerini hayali boncukları yeniden düzenliyor gibi etrafında çılgınca sallıyordu, ara sıra verilen cevapları not ediyordu (Kurallara göre sadece son cevap yazılabiliyor). 8 dakika

2 saniye sonra İspanya'dan Alberto Coto heyecanlı bir öğrenci gibi elini havaya kaldırdı. Bu süre içinde 38 yaşındaki yarışmacı on adet sekiz basamaklı iki sayının çarpımını hesaplayarak dünya rekorunu altüst etti. Bu gerçekten olağanüstü bir başarıydı ama onu izlemek bu sınava gözetmenlik yapmak kadar zorlayıcıydı.

Leipzig'deki şampiyonada yokluğu dikkat çekici bir biçimde gözlenen kişi belki de dünyanın en ünlü matematik sporcusu, hesaplama gücünün ölçülebilmesi için başka ölçüleri tercih eden Fransız bir öğrenci olan Alexis Lemaire'dı. 2007 yılında, 27 yaşındayken Londra'daki bilim müzesinde aşağıdaki sayının on üçüncü kuvvetten kökünü alarak dünya çapında gazetelerin baş sayfalarında yer almıştı:

85.877.066.894.718.045.602.549.144.850.158.599.202.771.
247.748.960.878.023.151.390.314.284.284.465.842.798.373
.290.242.826.571.823.153.045.030.300.932.591.615.405.92
9.429.773.640.895.967.991.430.381.763.526.613.357.308.6
74.592.650.724.521.841.103.664.923.661.204.223

Lemaire'nin başarısı hiç şüphesiz daha görkemliydi. Sayı 200 rakamdan oluşuyordu ve 70.2 saniyede zar zor okunuyordu. Ama bu becerisi kendisinin iddia ettiği gibi tüm zamanların en büyük yıldırım hesapçısı olduğu anlamına mı gelir? Bu, hesaplama çevreleri için ciddi bir tartışma konusudur ve her ikisi de kendi başlarına olağanüstü olan Zerah Colburn ve George Bidder arasında geçen savaşa da ayna tutar.

On üçüncü kuvvetten kök, bir sayının kendisiyle 13 defa çarpılmasıyla elde edilmiş olduğu anlamına gelir. Sadece belirli sayıların kendisiyle 13 kere çarpımının 200 basamaklı bir sonucu olabilir (Bu oldukça geniş belirli bir aralıktır. Cevap her biri 2 ile başlayan ve 16 haneli olan 400 trilyon ihtimal vardır). 13 asal sayı olduğu için ve uğursuz sayıldığı için Lemaire'nin hesabı daha da gizemli bir atmosferde

elde edilmiş olur. Aslında 13'ün getirdiği bazı avantajlar da vardır. Örneğin 2 kendisiyle 13 kere çarpıldığında cevap daima 2 rakamıyla biter. 3 kendisiyle 13 kere çarpıldığında cevap daima 3 ile biter. Aynısı 4, 5, 6, 7, 8 ve 9 için de geçerlidir. Başka bir deyişle bir sayının on üçüncü kuvvetten kökü kendisiyle aynı son basamağa sahiptir. Bu rakam herhangi bir hesaplama yapmadan bedavadan cebimizdedir.

Lemaire en son cevapta bulunan diğer 14 basamağı hesapladığı ve hiçbir zaman açıklamadığı bir algoritma yürüttü. Püristler, belki de haksız olarak, yeteneğinin pek de bir hesaplama becerisi olmadığını, aslında çok büyük sayıları ezberleme becerisi olduğunu söylüyorlar. Ve Lemaire'ın kendisine verilen herhangi bir 200 basamaklı sayının on üçüncü kuvvetten kökünü bulamayacağını iddia ediyorlar. Bilim müzesinde ona birkaç yüz sayı gösterildi ve aralarından hesaplayacağı sayıyı seçmesine izin verildi.

Yine de, Lemaire'in performansı geçmişteki sahne hesapçılarının performansına daha uygun. İzleyenler yürütülen işlemi anlamak yerine 'vay be' demeyi tercih ediyorlar. Buna karşılık, Dünya Zihinsel Hesaplama Şampiyonası'nda, Coto çözmesi gereken problem için 29.513.736 x 92.842.033 sayılarını çarparken 1'den 9'a kadarki çarpım tablosu dışında herhangi bir gizli teknik kullanmadı. Sekiz basamaklı bir sayıyı sekiz basamaklı başka bir sayıyla çarpmanın en hızlı yolu Veda matematiğinin *dikey ve çapraz* sutrasını kullanmaktır ki, bu da çarpımı 64 tek basamaklı sayının çarpımı haline getirir. Cevabı ortalama 51 saniyenin altında hesaplamayı başardı. Yaptığı şey ne kadar hayranlık verici olursa olsun, ne yaptığını bilmek daha az büyüleyici.

Leipzig'deki yarışmacılarla konuştuğumda birçoğunun 1970'li yıllarda meşhur olan Hollandalı yıldırım hesapçısı Wim Klein sayesinde hızlı aritmetik sevdasına tutulduklarını keşfettim. Cenevre'deki Avrupa'nın en önde gelen fizik enstitüsü olan European Organization for Nuclear Research (CERN)'de işe başladığında sirklerde ve müzik

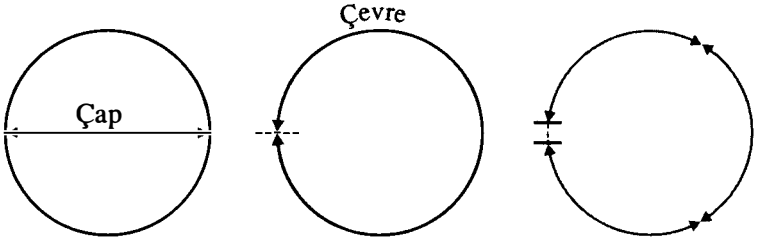
salonlarında tecrübeli bir kişiydi. Belki de insan hesap makinesi olarak işe alınan son kişiydi. Bilgisayarların gelişmesiyle birlikte becerileri gereksiz olmaya başladı ve emekliliğinde şov dünyasına geri döndü ve düzenli olarak televizyonlarda boy gösterdi (Aslında Klein on üçüncü kuvvetten kök hesapları seviyesine yükselen ilk hesapçıydı).

Klein'dan önceki yüzyılda başka bir insan hesap makinesi olan Johann Zacharias Dase'de bilimsel bir kuruluş tarafından hesaplarını yapmak için insan hesap makinesi olarak işe alınmıştı. Dase, Hamburg'da doğmuş ve gençlik yıllarında yıldırım hesapçısı gösterilerine başladığında saygın iki matematikçi onu kanatları altına almıştı. Elektronik ya da mekanik hesap makinelerinden önce bilim insanları karmaşık çarpma ve bölme işlemlerini yapabilmek için logaritma tablolarına güveniyorlardı. Daha sonra daha detaylı açıklayacağım gibi her sayının, zahmetli bir işlem kullanılarak kesirlerin toplanmasıyla hesaplanabilen bir logaritması vardır. Dase, her birinin yedi ondalık basamağı olan ilk 1.005.000 doğal sayının logaritmalarını hesaplamıştı. Bunu yapması üç sene sürmüştü ve bu görevden keyif aldığını söylemişti. Sonrasında matematikçi Carl Friedrich Gauss'un tavsiyesiyle başka devasa projeye yöneldi: 7.000.000 ve 10.000.000 arasındaki tüm sayıların çarpanlarının olduğu bir tablonun derlemesine. Bu, bahsi geçen aralıktaki tüm sayılara bakıp çarpanlarını, yani bu sayıyı tam bölen sayıları hesaplaması demekti. Örneğin, 7.877.433 sayısının sadece iki çarpanı vardır: 3 ve 2.625.811. Dase 27 yaşında öldüğünde, tablonun önemli bir kısmını tamamlamıştı.

Ama Dase'in hatırlanmasının sebebi yaptığı başka bir hesaplamadır. Gençlik dönemlerinde pi sayısının ondalık 200 basamağını hesaplamıştı ve bu o dönemde bir rekordu.

Doğal dünyada çember her yerdedir—dolunaya, insanların ya da hayvanların gözlerine ve yumurtanın yarı kesitine baktığınızda görürsünüz. Bir köpeği bir noktaya bağlayın, ip gerildiğince çizeceği devriye bir çemberdir. Çember en basit iki boyutlu geometrik biçimdir. Daire biçimindeki tarlaya kaç tane bitki dikileceğini hesaplamak isteyen Mısırlı bir çiftçi, ya da bir tekerlek için gereken ahşap miktarını hesaplamak isteyen Romalı bir teknisyen çemberleri içeren hesaplar yapmak zorundadır.

Antik topluluklar, bir dairenin çevresinin çapına oranının, daire ne kadar büyük ya da küçük olursa olsun, daima aynı olduğunu keşfettiler (dairenin çevresi etrafının uzunluğu, çapı ise dairenin merkezinden geçen doğrunun uzunluğudur). Oran, pi ya da π olarak bilinir ve üçten biraz büyüktür. Yani, eğer bir dairenin çapını alır ve çevresinin üzerine kıvıracak olursanız üç kerede dairenin çevresini kapladığını görürsünüz.



Her ne kadar pi dairenin sade oranları arasında basit bir kesir olsa da, tam değerini hesaplama görevinin basit olmaktan çok öte olduğu ispatlanmıştır. Bu hesaplanamazlık pi'yi hayranlık duyulan bir nesne haline getirmeye yetmiştir ve Kate Bush'un bir şarkısına ve Givenchy'nin ürettiği bir parfüme isim olan tek sayıdır. Aşağıdaki metni halkla ilişkiler bölümü gönderdi:

Π — Pi

SONSUZLUĞUN ÖTESİNDE

DÖRTBİN YIL geçti ve gizemini hâlâ koruyor.

Her ne kadar okul çağındaki her çocuk π'yi öğrense de, aşina olduğumuz bu sembol büyük bir karmaşıklık uçurumunu gizliyor.

Neden ebedi bir erkeksilik sembolü için π seçilmiştir?

Bu bir işaretler ve yönelimler meselesidir. Bu, ulaşılamaza ulaşmak için verilen mücadelenin uzun hikayesidir. Bu, aynı zamanda bilgiye ulaşmanın masalsı bir portresidir.

Pi, erkekleri anlatır, tüm erkekleri, bilimsel dehalarını, macera zevklerini, hareket etme istekliliğini ve aşırılığa karşı duydukları tutkularını.

***

Pi için en erken yaklaşımlar, ondalık sisteme çevrildiğinde sırasıyla 3.125 ve 3.160'a eşit olan, $3\frac{1}{8}$ değerini kullanan Babillilere ve $4(\frac{8}{9})^2$ değerini kullanan Mısırlılara aitti. İncil'de bir bölüm pi değerinin üç alındığı bir durumdan bahseder: 'Hiram, dökme tunçtan on arşın çapında, beş arşın derinliğinde, çevresi otuz arşın uzunluğunda yuvarlak bir havuz yaptı.' (I. Krallar 7.23).

Eğer havuzun biçimi çemberse ve çevresi 30, çapı on arşınsa, o halde pi sayısı $\frac{30}{10}$ ya da 3'tür. İncil'in kusurlu bu ölçümü için birçok

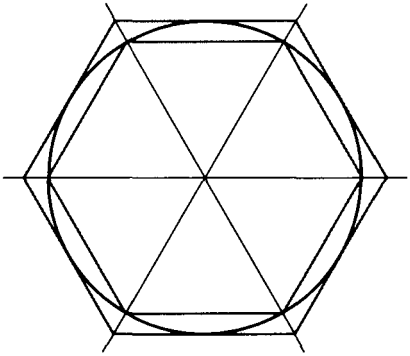
bahane gösterilebilir, örneğin havuzun kalın dairesel bir kasnağın içinde bulunduğu gibi. Bu durumda bahsi geçen 10 arşınlık mesafe, havuzu ve kasnağı kapsar (Havuzun çapını 10 arşından daha küçük hale getirir) bu arada havuzun çevresi kasnağın iç kısmında kalır. Mistik bir açıklama daha çok heyecan vericidir: İbranice telaffuzun özelliklerinden dolayı 'doğru' kelimesi, qwh ya da qw biçiminde telaffuz edilir. Harflerin sayısal değerlerinin toplamı qwh için 111 ve qw için 106 etmektedir. Üç'ü $\frac{111}{106}$ ile çarptığımızda pi sayısının ilk beş rakamı için doğru bir değer olan 3,1415'i buluruz.

Pi'nin keşfi konusunda aşırı bir tutkuya sahip olan ilk dahi ve Givenchy'nin tıraş losyonuna gereken hakkı veren ilk, aynı zamanda bilim tarihindeki en meşhur banyoyu yapan adamla aynıdır. Arşimet küvetin içine süzüldü ve taşan su miktarının suyun altında bulunan vücudunun ağırlığı kadar olduğunu keşfetti. O anda, doğal olarak herhangi bir nesneyi suya batırarak, özellikle de Siraküza kralının tacının ağırlığını hesaplayabileceğini ve böylelikle yoğunlukları sayesinde tacın saf altından olup olmadığını anlayabileceğini fark etmişti (Taç saf altından değildi). Sonuç olarak 'Evreka! [Buldum!]' diye bağırarak sokağa fırladı ve -en azından Siraküza halkına- ebedi erkeksiliğin ne olduğunu göstermiş oldu. Arşimet, benzersiz bir biçimde soyutlamalarla çalışan Öklid'in aksine, problemlerle mücadeleye girmeye bayılırdı. İcatlarının arasında devasa bir mancınık sisteminin ve Siraküza Kuşatması sırasında güneş ışınlarını büyük bir yoğunlukla yansıtıp Roma gemilerini ateşe veren bir aynalar sistemi olduğu söylenir. Aynı zamanda pi sayısını yakalayacak ilk düzeneği geliştiren kişidir de.

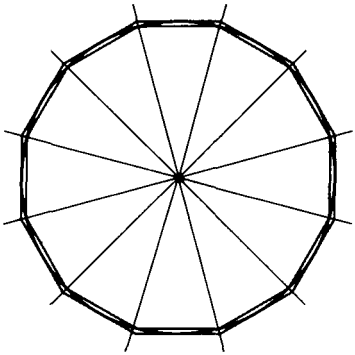
Bunu yapmak için önce bir çember çizer ve ardından sağdaki şekilde görüldüğü gibi biri dairenin içine, diğeri de dışına uygun olan iki altıgen inşa eder. Bu bile bize, altıgenin çevresinin hesaplanarak pi değerinin 3 ile 3.46 arasında olması gerektiğini söyler. Eğer dairenin çapını bir alırsak altıgenin çevresi 3 olur, bu da dıştaki altıgenin çevresinden yani 2 ya da iki ondalık basamağı olan 3.46'dan küçüktür

(Arşimet'in yaptığı pi değeri hesaplama yöntemi, daha çok dikkat gerektiren trigonometrinin habercisidir ve burada dile getirmek için çok karmaşıktır).

Sonuç olarak, $3 < pi < 3.46$.



Altıgenler



Onikigenler

Şimdi eğer altıdan fazla kenarı olan iki çokgen kullanarak bu hesabı tekrar ederseniz pi için daha dar bir aralık elde edersiniz. Bunun sebebi, yukarıdaki 12 kenarlı çokgen kullanılarak çizilen diyagramda gördüğümüz gibi, çokgenlerde kenar sayısı artıkça çokgenin çevre uzunluğunun dairenin çevresinin uzunluğuna yaklaşmasıdır. Çokgenler pi'nin çevresini saran duvarlar gibi davranır, aşağıdan ve yukarıdan sıkılınca sınırları gittikçe daralır. Arşimet altıgenle başladı ve sonunda 96 kenarlı bir çokgen kullanarak pi değerini şu şekilde hesapladı: $3\frac{10}{71} < pi < 3\frac{1}{7}$.

Bu değer şu biçime dönüştürülebilir: $3{,}14084 < pi < 3{,}14289$, ondalık iki kesinlik yakalanmıştır.

Ama pi avcıları burada duramazdı. Sayının gerçek değerine daha yaklaşmak için yapılması gereken şey, daha fazla kenarı olan bir çok-

gen yapmaktı. Üçüncü yüzyılda Çin'de Liu Hui, benzer bir yöntem uyguladı, 3072 kenarlı bir çokgenin alanını kullanarak pi sayısının beş ondalık basamağını tutturdu: 3,14159. İki yüzyıl sonra Tsu Chung-Chih ve oğlu Tsu Keng-Chih 12.288 kenarlı çokgen kullanarak bir basamak daha ileri gittiler ve 3,141592 değerini buldular. Yunanlılar ve Çinliler elverişsiz yazım nedeniyle geri kalmışlardı. Matematikçiler nihayet Arap rakamlarını kullanmaya başladığında rekor kırıldı. 1596 yılında Hollandalı bir eskrim ustası Ludolph van Ceulen güçlendirilmiş 60 x 2^{29}'lık bir çokgen kullanarak pi sayısının 20 ondalık değerini hesapladı. Sonucu bastırdığı kitapçık şu sözlerle bitiyordu, 'İsteyen her kişi daha da yaklaşabilir' ve kimse bunu onun kadar arzulamıyordu. Çalışmalarına devam ederek pi'nin mezartaşına kazılacak olan önce 32, ardından 35 basamağını hesaplamayı başardı. Almanya'da *die Ludolphsche Zahl* (Ludolph Sayısı) kavramı hâlâ pi sayısı için bir terim olarak kullanılır.

2000 senedir pi sayısını tam olarak belirleyebilmenin tek yolu çokgenler kullanmaktı. Ama on yedinci yüzyılda Gottfried Leibniz ve John Gregory, pi sayısının değerini bulmak konusunda aşağıdaki formülle yeni bir çağ başlattılar:

$$\frac{Pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \cdots$$

Başka bir deyişle pi sayısı 1 eksi bir bölü üç artı bir bölü beş eksi bir bölü yedi artı bir bölü dokuz . . . sonsuza giden tek sayıların toplama ve çıkarma şeklinde değişen değerine eşitti. Bu noktaya kadar bilim adamları pi sayısının ondalık kısmının rastgeleliğinin saçma ateşleyen bir tüfeğinki gibi olduğunun farkındaydılar. Ama işte matematiğin en zarif ve en karmaşık olmayan denklemi ellerindeydi. Pi düzensizliğin afişinde boy gösteren kahramanken, DNA'sında bir çeşit düzen olduğu ortaya çıktı.

Leibniz kendi keşfettiği güçlü bir matematik modeli olan ve içinde sonsuz küçük alanların kıvrımları ve içeriklerinin hesaplanması için kullanıldığı 'Kalkülüs'ü kullanarak bir formül geliştirdi. Isaac Newton da bağımsız olarak kalkülüs'ü geliştirmişti. Ve iki adam oldukça uzun bir zamanı bunu hangisi daha evvel geliştirdi diye ağız dalaşı yaparak geçirdiler (Yıllarca, yayınlama tarihi göz önüne alınarak tartışmayı kazananın Newton olduğu düşünüldü, şimdi ise aslında kalkülüsün bahsi geçen versiyonunun dördüncü yüzyılda yaşamış olan Madhava adında Hintli bir matematikçi tarafından geliştirilmiş olduğu görülüyor).

Leibniz'in pi için bulduğu formül *sonsuz seriler*, sonsuza giden toplamlar olarak bilinir ve pi'nin hesaplanması için olanak sağlar. Öncelikle pi sayısını elde edebilmek için eşitliğin her iki tarafını da dörtle çarpmamız gerekmektedir:

$$\text{Pi} = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} \cdots$$

İlk terimden başlayarak ardışık terimlerin toplamı (ondalık sisteme çevrilmiş olarak):

$$4 \rightarrow 2.667 \rightarrow 3.467 \rightarrow 2.896 \rightarrow 3.340 \rightarrow \ldots$$

Toplam giderek küçülen aralıklarla pi değerine yaklaşmaktadır. Ama bu metot ile pi sayısının ondalık iki basamağını tutturabilmek için 300'den fazla terim gerekir, yani pi sayısının ondalık açılımında daha fazla basamak bulmak isteyen kişiler için kullanışlı değildir.

Daha sonra kalkülüs, pi değerlerini daha etkili hesaplamak için daha az hoş ama daha etkili sonsuz seriler sağladı. 1705 yılında astronom Abraham Sharp, Ceulen'ın bir asır yaşındaki 35 basamaklık rekorunu kırarak pi sayısının 72 ondalık basamağını hesapladığı bir seri kullandı.

Bu oldukça büyük bir başarı olmasına rağmen işe yaramayan bir başarı oldu. Çünkü pi sayısının 35 ya da 72 basamağının bilinmesi için gerekli hiçbir neden yoktu. Mühendislerin hassas araçlarda kullanması için ondalık dört basamağı bilmeleri yeterliydi. Ondalık basamak dünyanın çevresinin santimetre ölçeğinde hesaplanabilmesi için yeterliydi. 39 ondalık basamakla, bilinen evreni çevreleyen dairenin, hidrojen atomunun çapı ölçeğinde hesaplamak mümkündür. Ama kullanışlılık kimsenin hedefi değildi. Uygulama aydınlanmanın pi insanlarının derdi değildi: Basamakların peşine düşmek bile başlı başına romantik bir görevdi. Sharp'ın çabalarının ardından bir sene sonra John Machin 100 basamağı hesapladı ve 1717 yılında Fransız Thomas de Lagny, 27 basamak daha ekledi, yüzyılın sonunda Slovenyalı Jurij Vega 140 basamakla liderdi.

Alman yıldırım hesapçısı Zacharias Dase, pi rekorunu yoğun iki aylık bir çalışmayla 200 basamak sınırına getirdi. Dase, yukarıdaki pi formülünden daha karışık görünen ama aslında kullanımı daha kolay olan aşağıdaki seriyi kullandı. Sebebi öncelikle pi sayısına daha hatırı sayılır bir oranla yaklaşmasıydı. Virgülden sonraki iki basamağın ölçüsüne dokuzuncu terimden sonra ulaşabiliyordu, ikinci olarak, her üç terimde bir görünen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ ve $\frac{1}{8}$ üzerinde oynamaya oldukça elverişliydi. $\frac{1}{5}$ sayısı $\frac{2}{10}$ olarak ve $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$ X $\frac{1}{2}$ X $\frac{1}{2}$ olarak yazıldığında bu terimlerin içerildiği tüm denklemler, iki katını ya da yarısını alma kombinasyonlarına indirgenebiliyordu.

Dase, yaptığı hesaplamalarda kendisine yardımcı olması için bir çiftler katlar referans tablosu hazırlamıştı, 2, 4, 8, 16, 32 sayılarıyla başlıyor ve ihtiyaç duyduğu değere kadar devam ediyordu, pi sayısının 200 ondalık basamağını hesaplamak istediği için son çift kat muhtemelen 200 basamak uzunluğunda olmalıydı. Bu, ardışık 667 çift kat alma işleminden sonra gerçekleşir.

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{(1/2)^3}{3} + \frac{(1/2)^5}{5} - \ldots$$

$$+ \frac{1}{5} - \frac{(1/5)^3}{3} + \frac{(1/5)^5}{5} - \ldots$$

$$+ \frac{1}{8} - \frac{(1/8)^3}{3} + \frac{(1/8)^5}{5} - \ldots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \left[\frac{(1/2)^3}{3} + \frac{(1/5)^3}{3} + \frac{(1/8)^3}{3}\right]$$

$$+ \left[\frac{(1/2)^5}{5} + \frac{(1/5)^5}{5} + \frac{(1/8)^5}{5}\right] - \ldots$$

Yani $\pi = 4(0.825 - 0.0449842 + 0.00632 - \ldots$

Bir terim sonra bu değer 3.3'dür.

İki terim sonra bu değer 3.1200'dir .

Üç terim sonra bu değer 3.1452'dir.

Dase'in şöhretinin rehavetine kapılacak zamanı neredeyse hiç olmadı, İngilizler başarısına gözlerini diktiler ve on sene içinde William Rutherford, pi sayısının 400 basamağını hesapladı. County Durham bölgesinde bir yatılı okulu işleten, himayesi altındaki amatör bir matematikçi olan William Shanks'i daha da ileri gitmesi için teşvik etti.1853 yılında 607 basamağa ulaştı ve 1874 yılında ise 707'ye ulaşmıştı. Chester'daki Royal Naval College'dan D. F. Ferguson, Shanks'in hesaplarında bir hata bulana kadar, rekoru 70 yıl boyunca elinde tuttu. 527. basamakta hata yapmıştı, bu nedenle ardından gelen bütün basamaklar yanlıştı. Ferguson, İkinci Dünya Savaşı'nın son senesini, pi sayısını elle hesaplayarak geçirdi. Bazıları savaşı çoktan kazandığını düşünebilir. 1945 yılının Mayıs ayında 530 basamağa, Temmuz'da ise 620'ye ulaşmıştı, sadece kalem ve kâğıt kullanarak daha uzununu hesaplayan hiç kimse olmadı.

Ferguson, elle hesap yapanların sonuncusu, mekanik hesap yapanların ilkiydi. Masaüstü hesap makinesi kullanarak sadece bir senede 200 basamak daha ekledi, yani 1947 yılının Eylül ayında 808 basamak biliniyordu. Daha sonra bilgisayarlar yarışın seyrini değiştirdiler. Pi savaşına giren ilk bilgisayar, Electronic Numerical Integrator and Computer, ya da ENIAC, İkinci Dünya Savaşı'nın sonlarında Maryland'deki Balistik Araştırma Laboratuarı'nda geliştirildi. 1949 yılının Eylül ayında ENIAC 70 saatte pi sayısının 2037 basamağını hesaplayarak, rekoru binden fazla basamakla kırdı.

Pi'nin daha da fazla basamağı bulundukça tek bir husus açık görünüyordu: Sayıların uyduğu herhangi bir şablon yoktu. Ama yine de 1767 yılında matematikçiler rakamların karman çorman diziliminin birbirini asla tekrar etmediğini ispatlayabildiler. Keşif, pi'nin nasıl bir sayı olduğu düşüncesinin ardından geldi.

En aşina olduğumuz sayı *tipi* belki de *doğal sayılar*. Bunlar bir'den başlayan sayma sayılarıdır:

1, 2, 3, 4, 5, 6 . . .

Ancak doğal sayılar kapsam açısından sınırlıdır çünkü tek bir yöne doğru ilerlerler. Tam sayılar daha kullanışlı, bunlar da sıfırdan başlayan doğal sayılar ve bunların negatiflerinden oluşuyorlar.

. . . –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 . . .

Tam sayılar eksi sonsuz ile artı sonsuz arasındaki tüm pozitif ve negatif sayıları kapsarlar. Sonsuz sayıda üst katı ve sonsuz sayıda bodrum katı olan bir otel olsaydı, asansördeki kat sayıları tam sayılar olurdu. Bir diğer temel sayı, a ve b birer tam sayı ve b'nin sıfırdan farklı olduğu durumlarda, $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılan sayılar yani

bayağı kesirlerdir. Kesirin üst kısmındaki sayıya *bölünen* ve alt kısmına yazılan sayıya *bölen* denir. Eğer birden fazla kesirimiz varsa, *en küçük ortak kat* herhangi bir kalan olmadan tüm bölenlere bölünebilen en küçük sayıdır. Eğer elimizde $\frac{1}{2}$ ve $\frac{3}{10}$ varsa, en küçük ortak kat 10'dur, çünkü hem 2 hem 10, 10'a bölünür. Peki ya $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{9}$ ve $\frac{7}{13}$ sayılarının en küçük ortak katı nedir? Başka bir deyişle 3, 4, 9 ve 13 sayılarına tam bölünen en küçük sayı hangisidir? Cevap şaşırtıcı biçimde büyüktür: 468! Bu örneği matematiksel değil semantik bir noktayı dile getirmek için veriyorum. En küçük ortak kat tabiri genellikle sade ya da karmaşık olmayan bir şeyi tarif etmek için kullanılır. Çağrıştırdığı bir şeyler vardır, ancak aritmetiğin yanlış sunulmasını sağlar. En küçük ortak kat genellikle büyük bir sayı olur: 468 oldukça etkileyici bir sayıdır. Daha popüler ve ucuz bir şey için kullanılan aritmetiksel manada daha anlamlı bir ifade de *en büyük ortak bölen* ifadesidir ve grup içindeki sayıların hepsine bölünebilen en büyük sayı anlamına gelir. 3, 4, 9 ve 13'ün en büyük ortak böleni 1'dir ve bundan daha sade ve karmaşık olmayanını bulamazsınız.

Kesirler, tamsayılar arasındaki orana eşit oldukları için, *rasyonel sayılar* adını da alırlar ve sayıca sonsuzdurlar. Aslında 0 ile 1 arasında da sayıca sonsuz rasyonel sayı bulunmaktadır. Örnek olarak, bölüneni 1, böleni doğal sayı ve 2 ya da 2'den büyük olan tüm kesirleri alalım. Kümemiz şöyledir:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \cdots$$

Daha da devam edip *herhangi iki* sayı arasında sonsuz sayıda rasyonel sayı olduğunu kanıtlayabiliriz. c ve d iki rasyonel sayı olsun ve c, d'den küçük olsun. c ve d rasyonel sayılarının orta noktası: $\frac{(c+d)}{2}$ olur. Buna e sayısı diyelim. Şimdi c ve e sayılarının orta noktasını hesaplayalım. Bu $\frac{(c+e)}{2}$'dir. Bu sayı da rasyonel bir sayıdır ve bu da c

ve *d* sayılarının arasındadır. Bu işlemi sonsuza kadar sürdürebiliriz ve *c* ile *d* arasında bölünen alan gitgide daha da küçülür. Başlangıçta *c* ve *d* arasındaki mesafe ne kadar küçük olsa da aralarında daima sonsuz sayıda rasyonel sayı bulunacaktır.

Herhangi iki sayı arasında daima sonsuz sayıda rasyonel sayı bulabileceğimiz için, rasyonel sayıların tüm sayıları kapsadığı düşünülebilir. Bu gerçekten de Pisagor'un umduğu şeydi. Onun metafiziği, dünyanın sayılarla kurulduğu ve bu sayılar arasında harmonik bir oranın bulunduğu inancı ile temelleniyordu. Bir oran ile tanımlanamayan bir sayının varlığı doğrudan çelişki oluşturmasa da, konumunu sarsıyordu. Ancak, Pisagor için üzücü olsa da kesirlerle ifade edilemeyen sayılar *vardır* ve Pisagor için biraz utanç verici olsa da bizi bu sayılara götüren kendine ait bir teoremdir. Eğer kenar uzunluğu 1 olan bir kareniz varsa köşelerden çizilen bir doğru ikinin karekökü'dür ve herhangi bir kesirli ifade biçiminde yazılamaz (Kanıtı Ekler 2 bölümüne ekledim).

Kesirler biçiminde yazılamayan sayılara *irrasyonel sayılar* denir. Bir efsaneye göre varlıklarını ilk olarak Pisagor'un müritlerinden biri olan Hippasus ispatlamıştır ve bu da Kardeşliğin takdirini kazanmamıştır; kâfir ilan edilip denizde boğulmuştur.

Rasyonel bir sayı ondalık biçiminde $\frac{1}{2}$ olarak yazıldığında ya sınırlı bir basamağı vardır, kesirinin 0.5 biçiminde yazılması gibi, ya da ondalık kısmı kendini tekrar etmeye devam eder; = 0.3333... örneğinde üçün sonsuza kadar devam ettiği gibi. Bazen kendini tekrarlayan değer, bir rakamdan fazladır; = 0.090909... örneğinde 09 sayısı sonsuza kadar devam eder ya da = 0.0526315789473684210... bu örnekte ise 052631578947368421 sayısı sonsuza kadar kendini tekrarlamayı sürdürür. Aksine ve burası önemli bir noktadır, sayı irrasyonel olduğunda ondalık kısmı asla kendini tekrar etmez.

1767 yılında İsviçreli matematikçi Johann Heinrich Lambert, pi sayısının irrasyonel bir sayı olduğunu ispatladı. Daha önceki pi insanları,

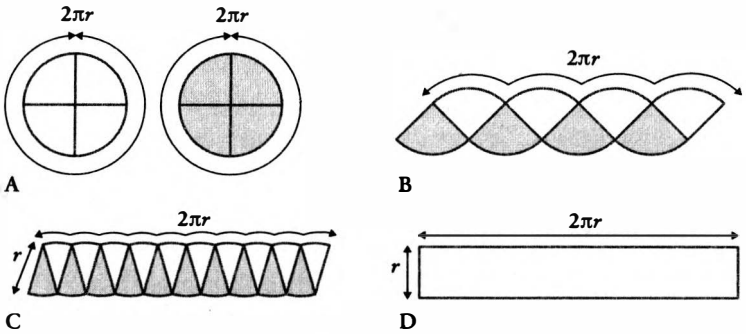
başlangıçtaki 3.14159... karmaşasının ardından gürültünün azalmasını ve bir şablon meydana gelmesini umdular. Lambert'ın keşfi, bunun imkânsız olduğunu ispatladı. Pi sayısının ondalık kısmı önceden belirlenmiş ama gelişigüzel bir biçimde sonsuza gitmekteydi.

İrrasyonel sayılarla ilgilenen matematikçiler, bu sayıları daha detaylı sınıflandırmak istiyorlardı. On sekizinci yüzyılda *transandantal sayılar* adı verilen bir tip sayı hakkında fikir yürütmeye başladılar. Bu sayılar öylesine gizemli ve ele avuca gelmeyen şeylerdi ki, sonlu matematiğin onları yakalaması mümkün görünmüyordu. İkinin karekökü, $\sqrt{2}$ örneğin irrasyonel bir sayıdır, ancak $x^2 = 2$ denkleminin çözümü olarak gösterilebilir. Transandantal sayı, sınırlı sayıda terimle ifade edilemeyen irrasyonel sayıdır. Transandantal sayılar kavramı ilk kez ileri sürüldüğünde, kimse gerçekte böyle sayıların var olup olmadığını bilmiyordu.

Böyle sayılar vardı, ama Fransız bir matematikçi olan Joseph Liouville'in birkaç örnek göstermesi yaklaşık bir yüzyıl sürdü. Aralarında pi yoktu. Ama sadece 40 yıl sonra, Alman Ferdinand von Lindemann pi sayısının aslında transandantal bir sayı olduğunu ispatladı. Sayı sonlu cebir gerçekliğinin sınırları ötesindeydi.

Lindemann'nın keşfi sayı teorisinin kilometre taşıydı. Ayrıca matematik tarihinin belki de en meşhur problemlerinden birisini tamamen çözmüştü: Bir daireden kare yapmanın mümkün olup olmadığı. Ancak bunun nasıl gerçekleştiğini açıklamadan önce size dairenin alanını hesaplamaya yarayan formülü takdim etmeliyim: πr^2, buradaki r dairenin yarıçapıdır (Yarıçap merkezden dairenin kenarına olan uzaklıktır ya da çapın yarısıdır). Bunun doğruluğuna görsel bir kanıt sunmak için pi yerine kullanılabilecek en iyi metafor bir pastadır. Aşağıdaki A örneğinde olduğu gibi aynı büyüklükte iki pastanız olduğunu hayal edin, biri beyaz diğeri gri olsun. Her bir pastanın daire çevresi çapın

pi katıdır ya da pi çarpı yarıçapın iki katı ya da $2\pi r$. Ve pasta eşit parçalara ayrıldığında pasta B şeklinde olduğu gibi çeyrek dilimlerle ya da C şeklinde olduğu gibi on dilimle yeniden düzenlenebilir. Her iki durumda da kenarların uzunluğu $2\pi r$ olmayı sürdürür. Eğer pastaları daha ufak dilimlere ayırmayı sürdürürsek, en sonunda elde edeceğimiz biçim D şeklinde göründüğü gibi kenarlar r ve $2\pi r$ uzunluğunda olan bir dikdörtgen olur. Sonuç olarak dikdörtgenin alanı –yani iki pastanın alanı– $2\pi r^2$ olur, yani tek pastanın alanı πr^2'dir.



Dairenin alanının πr^2'ye eşit olduğunun ispatı.

Bir daireden kare yapmak için (sadece cetvel ve pergel kullanarak) daire ile aynı alana sahip olan bir kare çizmemiz gerekir. Şimdi dairenin çapının r, alanının πr^2 olduğu biliyoruz ve ayrıca πr^2 alanına sahip bir karenin kenar uzunluğunun $r\sqrt{\pi}$ olması gerektiğini biliyoruz (çünkü $(r\sqrt{\pi})^2 = r^2(\sqrt{\pi})^2 = r^2\pi = \pi r^2$). Yani bir daireden kare yapma görevi $r\sqrt{\pi}$ uzunluğundan elde etmeye indirgenebilir. Ya da eğer r uzunluğunu elverişliliği açısından 1 alırsak elde etmemiz gereken değer olur.

Daha sonra ele alacağım analitik geometriyi kullanarak, çizginin cebirsel oluşturma sürecini sonlu bir denklem olarak tarif etmek mümkündür. Denklemin sonucu x olduğu sürece göstermek mümkündür,

ardından 1 uzunluğunda bir doğru çizerek başlayıp, x uzunluğunda bir doğru çizebiliriz. Ancak x sonlu bir denklemin sonucu değilse başka bir deyişle x transandantal bir sayıysa, x uzunluğunda bir doğru çizmenin bir olanağı yoktur. Şimdi π sayısının transandantal olması $\sqrt{\pi}$ sayısının da transandantal olduğu anlamına gelir (Bu konuda bana güvenmek zorundasınız). Sonuç olarak $\sqrt{\pi}$ uzunluğunda bir doğru oluşturulması olanaksızdır. Pi sayısının transandantal olması bir daireden kare yapılamayacağının ispatıdır.

Lindemann'ın pi sayısının transandantal olduğunu ispat etmesi, binlerce yıldır sayısız matematikçi tarafından kurulan bir hayali altüst etti. Belki de bir daireden kare yapmayı başardığını iddia eden kişilerin en saygını *Leviathan* adlı kitabıyla siyaset felsefesinin kurulmasını sağlayan on yedinci yüzyıl İngiliz filozofu Thomas Hobbes'tu. Yaşamının ilerleyen dönemlerinde keskin bir amatör geometrici olan Hobbes, çözümünü 67 yaşındayken yayınladı. Her ne kadar bir daireden kare yapmak o dönemde de açık bir soru olsa da, çözümü bilimsel çevreler tarafından şaşkınlıkla karşılandı. Oxford Üniversitesi'nde profesörlük yapan ve Isaac Newton'dan önceki en iyi matematikçi olan John Wallis bir kitapçık yayınlayıp Hobbes'un hatalarını gösterdi ve böylelikle İngiliz entelektüel yaşamındaki en eğlenceli ve en gereksiz düşmanlığı başlatmış oldu. Hobbes, *Matematik Profesörlerine Altı Ders* isimli bir ilave yayınlayarak Wallis'e cevap verdi. Wallis, *Bay Hobbes'a, Derslerinin Doğru Olduğunu Söylemeden Okul Disiplini İçinde Gereken Düzeltme* isimli kitabıyla hamlede bulundu. Bunu Hobbes'un *Absürt Geometrinin Alametleri, Kırsal Dil, İskoç Kilisesi Politikası ve John Wallis'in Barbarlığı* yayınları izledi. Bunun ardından da Wallis'in *Hobbiani Puncti Dispunctio*!'su geldi. Bu tartışma Hobbes 1679 yılında ölene kadar, neredeyse 25 yıl sürdü. Wallis bu savaş halinden memnundu, çünkü bu ona Hobbes'un iğrendiği dinsel ve politik görüşlerini karalama olanağı veriyordu. Ve elbette haklı olan taraf Wallis'ti. Birçok anlaşmazlıkta iki tarafın da haklı olduğu yanlar

vardır. Ama Hobbes ve Wallis arasında durum bu değildi. Hobbes daireden kare yapamadı, çünkü bu imkânsızdı.

Bir çemberden kare oluşturulamayacağının ispatı birçok kişiyi denemekten alıkoydu. 1897 yılında Indiana eyalet parlamentosu E. J. Goodwin'in bir daireden kare yapma ispatının yer aldığı beyanını ele aldı, E. J. Goodwin bir doktordu ve kanıtı 'Indiana eyaletine bir armağan' olarak sunmuştu. Elbette yanılıyordu. Çünkü 1882 yılında Ferdinand von Lindemann daireden kare yapmanın, akli dengesi olmayan bir kişinin matematiksel zirvesi olduğunu açıklamıştı.

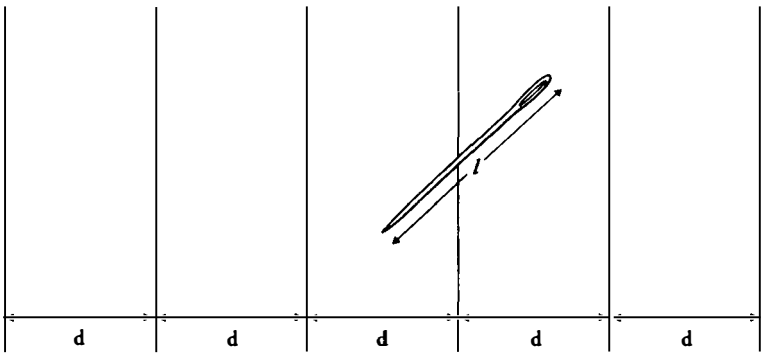
On sekizinci ve on dokuzuncu yüzyılda pi'nin anlaşılmaz özellikleri sadece antik geometri problemlerinin kalbinde açığa çıkmadı, aynı zamanda dairelerle yakın ilişkisi bulunmayan bilim dallarında da kök saldı. 'Gizemli 3,141592... her kapıdan pencereden ve bacadan içeri giriyor' diye yazdı İngiliz matematikçi Augustus De Morgan. Örneğin sarkacın salınımı için gereken süre pi sayısına bağlıdır. Toplumdaki ölümlerin dağılımı pi sayısının bir fonksiyonudur. Eğer bir bozuk parayı havaya 2n kere atarsanız, n sayısının çok büyük değerlerin % 50 yazı ve % 50 tura gelme ihtimali $\frac{1}{\sqrt{(n\pi)}}$'dir.

Pi'nin en sıradışı görünümlerinde adı belki de en çok geçen kişi Fransız bilge Comte de Buffon, Georges-Louis Leclerc'dir (1707-88). Buffon'un en renkli bilimsel girişimlerinin arasında belki de en hırslı olduğu, Arşimet'in gemileri ateşe verdiği söylenen ayna silahının çalışan bir versiyonunu yapmaktı. Buffon'un mekanizması 15 x 20 cm ebatlarında 168 düz aynadan oluşuyordu ve 45 metreden tahta bir levhayı ateşe verebiliyordu, Roma filosunu ateşe vermese de iyi bir çabaydı.

Pi konusunda ise Buffon, pi sayısının hesaplanmasını sağlayan bir denklem bulmuş olmasıyla hatırlanır, ama kendisi bu bağlantıyı kuramamıştı. Buffon denklemi madeni bir parayı parke bir zemin üzerine atıp paranın parkeler arasındaki çizgide mi yoksa parke üzerine

mi kalacağının tahmin edildiği on sekizinci yüzyıl bahis oyunlarından 'Clean tile' oyununu incelerken buldu. Buffon, alternatif bir senaryo geliştirdi: Zeminin birbirine paralel çizgilerle işaretlendiğini, üzerine iğne fırlatıldığını hayal edin. Buffon, iğnenin l uzunluğunda ve çizgiler arasındaki mesafenin *d* olması durumunda aşağıdaki denklemin geçerli olacağını doğru bir biçimde hesapladı:

$$\text{İğnenin çizgiye dokunma olasılığı} = \frac{2l}{\pi d}$$



Buffon öldükten birkaç sene sonra, Pierre Simon Laplace bu denklemin pi değerini hesaplamak için kullanılabileceğini fark etti. Eğer zemine çok büyük sayılarda iğne fırlattığımızda iğnenin çizgiye değme sayısının, fırlatma sayısına oranı, yaklaşık olarak iğnenin çizgiye matematiksel olarak değme oranına eşit olacaktır. Başka bir deyişle birçok atıştan sonra:

$$\frac{\text{iğnenin bir çizgiye değme sayısı}}{\text{toplam atış sayısı}} \approx \frac{2l}{\pi d}$$

$$\pi \approx \frac{2l}{d} \frac{\text{(toplam atış sayısı)}}{\textit{(iğnenin bir çizgiye değme sayısı)}}$$

(≈ sembolü yaklaşık olarak eşit anlamına gelir.)

Her ne kadar pi'nin bu biçimde hesaplanabileceğini ilk Laplace keşfetmiş olsa da bu çalışması Buffon'un denklemi sayesinde olduğu için hatırlanan kişi Buffon'dur. Bu başarısı ona Arşimet ve Leibniz gibi pi sayısı için yeni bir hesaplama yöntemi geliştiren matematikçiler arasında saygın bir yer kazandırdı.

Daha çok sayıda iğne atıldıkça, isabet oranı da daha iyi bir hale gelir ve iğneyi çizgilere denk getirme uğraşı matematikçilerin daha iyisini asla düşünemeyecekleri bir eğlence halini alır. Ancak ilginç bir sonuç yakalamadan önce oldukça uzun bir zaman geçirmeniz gerekebilir. Bu tekniği ilk benimseyenlerden biri olan Yüzbaşı Fox'un Amerikan İç Savaşı'nda aldığı savaş yaraları iyileşirken bir kablo parçasını paralel çizgiler olan yere on bir bin kere fırlattığı ve pi sayısının ondalık iki basamağını bulduğu söylenir.

Pi'nin özellikleri onu sayılar arasında meşhur bir yere getirdi ve daha da kültürel bir ikon oldu. Sayının basamakları birbirini asla tekrarlamadıkları için ezberlemek bayağı bir beceri gerektirir. Eğer ezberlemek sizin işinizse sayıların zirve noktası pi'deki sayılardır. Bu en azından 1838 yılından beri, *The Scotsman* 12 yaşındaki Hollandalı bir çocuğun bilim adamları ve soylular karşısında o zaman bilinen 155 hanesini ezberden okuduğu haberini yaptığından bu yana bir eğlence biçimi. 60 yaşındaki emekli mühendis Akira Haraguchi şu anki dünya rekorunu elinde bulunduruyor. 2006 yılında Tokyo yakınlarında halka açık bir salonda pi sayısının 100.000 hanesini ezberden okurken filme alındı.

Bu performans pirinç toplarından yemek için iki saatte bir beşer dakika olarak verdiği aralar ile birlikte 16 saat 28 dakika sürdü. Bir gazeteciye pi'nin yaşamı sembolize ettiğini çünkü sayıların asla birbirini tekrarlamadığını ve herhangi bir düzeni takip etmediğini söyledi. 'Pi'yi ezberlemek' diye ekledi, 'evrenin dinidir.'

Pi'yi ezberlemek zamanla sıkıcı hale gelir, ama hokkabazlık yaparken pi sayısını ezberden okumak, işte bu rağbet görecek bir spordur! Rekor üç top çevirirken 9778 basamağı ezberden okuyan ellili yaşlarında İsviçreli bir sigorta uzmanı olan Mats Bergsten'a ait. Ancak bana en gurur duyduğu başarısının, 14159 ile başlayan ilk 10.000 basamağın beşli 2000 gruba ayrıldığı 'Everest test' olduğunu söyledi. Test sırasında 50 grup rastgele okunuyor ve yarışmacının hangi beşlinin birbirinden önce ya da sonra geldiğini bilmesi gerekiyor. Mats Bergsten bunu dünyada hatasız başarabilen sadece dört kişiden birisi ve süre olarak 17 dakika 39 saniye ile en hızlısı. Bana 10.000 basamağı rastgele ezberlemenin sırayla ezberlemekten çok daha zor olduğunu söyledi.

Akira Haraguchi pi sayısının 100.000 basamağını ezberden okuduğunda sıfır ile dokuz arasındaki sayılara heceler atayarak pi'nin ondalık basamaklarını kelimelere çevirdiği bir hafıza tekniği kullanmış. İlk elli basamak için şöyle bir cümle çıkmış: 'Kadın ve çocuklar yurt dışına gittiler, koca korkmuyor.' Pi sayısının basamaklarını ezberlemek için kelimeleri kullanmak dünya üzerindeki çeşitli kültürlerin okul çağındaki çocukları tarafından kullanılıyor, fakat bu genellikle heceler kullanılarak değil ondalık kısımdaki her bir basamağa karşılık gelen bir cümlecik bulunarak yapılıyor. Çok iyi bilinen bir İngilizce örnek antropolog Sir James Jeans tarafından bulunan: '*How I need a drink, alcoholic in nature, after the heavy lectures involving quantum mechanics. All of thy geometry, Herr Planck, is fairly hard*' cümlesidir. How'da üç harf vardır. I'da bir, need'de dört ve bu şekilde devam eder.

Sayılar arasında hayranları bulunan sadece pi vardır. Kimse aynı derecede zor olan karekök iki sayısını ezberlemek istemez. Pi aynı zamanda kendi yazınsal alt türüne ilham kaynağı da olmuştur. Sınırlı yazım, belirli metinlerin kurallar ya da belirli kısıtlamalar kabul edilerek yazılmasıdır. Kullanılan kelimelerin harflerinin sayısı pi sayısının basamaklarına uygun olma kısıtlaması altında şiirler ya da "piirler" yazılmıştır, sıfır sayısı için on harfli bir kelime kullanılması ortak bir uzlaşımdır. En iddialı piir Mike Keith'in yazdığı pi sayısının 3835 basamağını takip eden ve Edgar Allan Poe'nun *Raven* adlı şiirine öykünme ile başlayan *Cadaeic Cadenza*'dır:

One; A poem
A Raven
Midnights so dreary, tired and weary,
Silently pondering volumes extolling all by-now obsolete lore.
During my rather long nap - the weirdest tap!
An ominous vibrating sound disturbing my chamber's antedoor. 'This' I whispered quietly, 'I ignore.'

Keith, belirli bir kısıtlama içinde yazmanın hem disiplin hem de keşfetme açısından egzersiz olduğundan bahsediyor. Pi'nin basamakları rastgele olduğu için, kısıtlama 'Karmaşanın içerisinde düzen oluşturmak gibi' olduğunu söyledi. 'Neden pi?' diye sorduğumda, pi'nin sonsuz ya da gizemli ya da öngörülemez ya da sonsuz merakla dolu olan her şey için bir metafor olduğu şeklinde cevap verdi.

Pi bu isme sadece 1706'dan beri sahip, Gallerli William Jones kitabında π sembolünü kullandı ve akıllı bir biçimde kitabına *Birçok Yazara Ve Birçok Ciddi Araştırmaya Ne Boş Zamanı Ne Uygun Koşulları Ve Belki de Sabrı Olmayan Arkadaşların Matematikte Gözle*

Görülür Biçimde İlerleyebilmeleri İçin Kaçınılmaz Olarak Gerekli Olan Matematiğe Yeni Bir Giriş adını verdi. Yunanca bu harf muhtemelen çevre [periphery] kelimesi için bir kısaltmaydı ve hemen kabul görmedi, standart bir sembol olarak kabul görmesi otuz yıl sonra Leonhard Euler'in kullanmasıyla gerçekleşti.

Euler, tüm zamanların en üretken matematikçisiydi (886 kitap yayınladı) ve pi'nin anlaşılmasına en çok katkıda bulunan kişiydi. On sekizinci ve on dokuzuncu yüzyılda basamak avcılarının sürekli eklemelerde bulunmasını sağlayan, onun geliştirdiği formüldü. Yirminci yüzyılın başlarında, Hintli matematikçi Srinivasa Ramanujan, Euler tarzı birçok sonsuz pi dizisi geliştirdi.

Ramanujan büyük oranda kendini yetiştirmiş bir matematikçiydi, Cambridge Üniversitesi profesörü G. H. Hardy'ye mektup yazmadan önce Madras'ta kâtiplik yapıyordu. Hardy, Ramanujan'ın elde edilmesi yüz sene süren sonuçlar elde ettiğini görünce çok şaşırdı ve onu İngiltere'ye davet etti ve Ramanujan 32 yaşında ölmeden önce, orada ortaklaşa çalışmalar yürüttüler. Çalışmaları, içinde pi'nin de bulunduğu sayılar hakkında olağanüstü bir görü ortaya koyuyordu ve en ünlü formülü aşağıdakiydi:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

$\sum_{n=0}^{\infty}$ sembolü bir dizi değerin toplandığını gösterir, n değerinin sıfıra eşit olduğu değerden başlar, $n = 1$ değerini ekler ve böylece sonsuza kadar devam eder. Yazımı anlamadan bile kişi böylesi bir formülün etkisini takdir edebilir. Ramanujan'ın formülü pi sayısına dikkat çekici bir hızla yaklaşmaktadır. Daha başlangıçta $n = 0$ ve formülde sadece bir terim varken bile pi sayısını altı ondalık basamağa kadar kesin-

likle belirler. n değerindeki her artış için, formül sekiz yeni basamak vermektedir. Bu endüstriyel anlamda güçlü bir pi üretme makinesidir.

Ramanujan'dan esinlenen Ukrayna doğumlu matematikçiler Gregory ve David Chudnovsky, daha da hünerli bir formül geliştirdiler. Her terim yaklaşık olarak 15 basamak ekliyordu.

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \frac{(6n)!}{(3n)!\ n!^3} \times \frac{163096908 + 6541681608n}{(262537412640768000)^{n+½}}$$

Chudnovsky formülünü ilk gördüğümde ayakta dikiliyordum. Gregory ve David kardeşler Brooklyn'deki Polytechnic Üniversitesi'nde aynı ofisi paylaşıyorlar. Ofisleri, köşede bir kanepe ve birkaç sandalye bulunan, düzinelerce pi formülü ile kaplı mavi zeminiyle açık bir alandan oluşuyor. 'Yere bir şeyler koymak istedik ama matematikle alakalı şeyler dışında yere ne koyabilirsiniz ki?' diye açıkladı Gregory.

Aslında pi desenli zemin ikinci tercihleriymiş. Asıl niyetleri Albrecht Dürer'in *Melencolia I* isimli eserinin dev bir reprodüksiyonunu yaptırmakmış. On altıncı yüzyıla ait olan bu gravür matematikçilerin gözdesidir, çünkü içinde eğlenceli sayı, geometri ve perspektif göndermeleri bulunur.

'Bir akşam zeminde hiçbir şey yokken *Melencolia I'in* 2000 ya da daha fazla sayfa çıktısını alıp yere serdik' dedi David. 'Ancak etrafında dolaştığında kusma isteği oluşuyor. Çünkü görme noktanda ani değişiklikler oluyor.' David daha sonra mide bulantısı dürtüsünü harekete geçirmeden zemini nasıl dekore edebileceklerini anlamak için Avrupa'daki şatoların ve katedrallerin zeminlerini incelemeye başlamış. "Gördüğüm zeminde kullanılanın sadece..."

"Basit bir geometrik stil" diye araya girdi Gregory.

"Siyah, beyaz, siyah, beyaz kareler..." dedi David.

"Anlıyor musun, çok karmaşık bir resmin üzerinde yürüdüğünde açı değişiklikleri o kadar keskin oluyor ki gözün bundan hoşlanmıyor" diye ekledi Gregory. "Yani böyle bir şeyi yapabilmenin tek yolu..."

"Tavandan sarkmak!" diye haykırdı David sol kulağıma ve ikisi birden kendilerini tutamayarak kahkahaya boğuldular.

Chudnovsky'lerle konuşmak iki kulağa da düzensizce ses veren stereo kulaklıklar takmak gibiydi. Beni kanepeye oturttular ve iki yanıma oturdular. Oldukça melodik bir Slav aksanıyla İngilizce konuşarak sürekli birbirlerinin lafına karışıp, birbirlerinin cümlesini tamamladılar. Kardeşler 1970'lerden beri Amerika'da yaşamalarına ve Amerikan vatandaşı olmalarına karşın Ukrayna Sovyet Cumhuriyeti döneminde Kiev'de doğmuşlardı. Beraber o kadar çok makale ve kitap yayınlamışlardı ki aslında iki ayrı değil tek bir matematikçi olduklarına inanmaya başlıyordunuz.

Tüm o genetik, konuşma tarzı ve mesleki ortak yönlere rağmen birbirlerinden farklı görünüyorlar. Bunun en önemli sebebi, 56 yaşında Gregory'nin bir çeşit kas otoimmun hastalığı olan myasthenia gravis mağduru olması. Öyle zayıf ve hassas ki zamanının çoğunu uzanarak geçirmesi gerekiyor. Yine de uzuvlarında bulunmayan enerji ne zaman matematikten konuşsa hayat fışkıran yüzünde ortaya çıkıyor. Sivri hatları, büyük kahverengi gözleri, beyaz bir sakalı ve bir tutam dağınık saçı var. Beş yaş büyük olan David'in mavi gözleri, daha toplu bir vücudu ve daha dolgun temiz tıraşlı bir yüzü var ve kısa saçları zeytin yeşili bir beysbol şapkasının altına gizlenmiş.

Chudnovsky'lerin pi sayısını popüler bir hale getirmek için en çok işi yapan matematikçiler olduğu kolaylıkla söylenebilir. 1990'lı yılların başında Gregory'nin Manhattan'daki dairesinde posta siparişiyle satın altıkları parçalardan süper bir bilgisayar yapıp, kendi formüllerini kullanarak sayının iki milyon kadar basamağını hesapladılar ve bu o dönemde bir rekordu.

Bu inanılmaz başarı *New Yorker*'daki bir makalede yer aldığında 1998 yapımı olan *Pi* adlı filme ilham kaynağı oldu. Asıl kahraman evde yaptığı süper bir bilgisayarla menkul kıymetler verilerinde gizli şablonlar arayan asi bir matematik dehasıydı. Chudnovsky'lerin olumlu eleştiriler almış ve düşük bütçeli siyah beyaz psiko-matematik gerilim filmleri için referans olmuş bu filmi izleyip izlemediklerini merak ediyordum. "Hayır, hayır, izlemedik" dedi Gregory.

"Şunu anlamalısın film yapımcıları genellikle kendi iç dünyalarını tekrar ederler" diye ekledi David.

Gördükleri ilgiden biraz koltuklarının kabarmış olabileceğini düşündüğümü söyledim.

"Hayır, hayır" diye sırıttı Gregory.

"Sana başka bir şey söyleyeyim" diye lafa karıştı David. 'İki sene önce Fransa'dan geldiğimde, ayrılmadan birkaç gün önce büyük bir kitap fuarı vardı. Üzerinde, detektiflik hikâyesi olan bir kitabın bulunduğu bir standın önünde durdum. Kitabı yazan bir mühendisti. Gizemli bir cinayet kitabıydı, bilirsin. Birçok ceset vardı, çoğu da otel odalarında bulunan kadınlar ve yaptığı her şeyin kaynağı pi sayısıydı.'

Gregory ağzı kulaklarında sırıtıyordu ve fısıldayarak şöyle dedi: "Tamam artık bu kitabı okumayacağımdan emin olabilirsin."

David devam etti: "Ben de yazarla konuştum. Eğitimli bir insandı." Durdu ve omuzlarını silkti ve sesini bir oktav yükselterek: "Dediğim gibi herhangi bir sorumluluk sahibi değilim."

David, Givenchy'nin reklam panolarındaki tanıtımları ilk gördüğünde çok şaşırdığını söyledi. "Tüm sokaklar doluydu pi... pi... pi...' şimdi inliyordu. 'Pi... pi... pi! Bunda benim bir sorumluluğum *var mı*?"

Gregory bana baktı ve şöyle dedi: "Bir sebepten ötürü halk bu şeye bayıldı. Bir anlamda yanlış çıkarımda bulunuyorlar." Pi sayısı üzerine çalışan birçok matematikçi olduğunu söyledi. Ve alaycı bir biçimde ekledi: 'Bu tip insanların genelde gün ışığını görmemesi gerekiyor.'

1950 ve 1960'lı yıllarda bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler pi sayısının basamaklarına da yansıdı. 1970'li yılların sonlarında rekor dokuz kere kırılmış ve bir milyonun üzerine çıkmıştı. Ancak 1980'li yıllarda daha da hızlı bilgisayarların bir araya gelmesiyle çılgın bir basamak avı dönemi başlamış oldu. Tokyo Üniversitesi'nden genç bir bilgisayar bilimci olan Yasumasa Kanada, Japonya ve Amerika arasındaki çift yönlü pi yarışını başlatan kişi oldu. 1981 yılında bir NEC bilgisayar kullanarak pi sayısının 2 milyon basamağını 147 saatte hesapladı. İki sene sonra 16 milyona ulaşmıştı. Liderliğe Kaliforniyalı bir matematikçi olan William Gosper 17.5 milyon ile geçtikten sonra, NASA'dan David H. Bailey, 29 milyon ile onu geçti. 1986 yılında Kanada ikisini de 33 milyon basamak ile geçti ve sonraki iki yıl içinde hesaplamayı altı saatin altında yapan yeni bir makineyle kendi rekorunu üç kere kırarak 201 milyona ulaştı.

Chudnovsky'ler, basamak avının parıldayan ışıklarından uzakta, pi üzerinde harıl harıl çalışıyorlardı. İnternet adı verilen yeni bir iletişim sistemini kullanarak başucu bilgisayarını Amerika'nın farklı yerlerindeki iki IBM süper bilgisayarına bağlamıştı. Ardından kardeşler, kendilerinin keşfettikleri bir süper hızlı bir formül üzerinde çalışan pi hesaplama programı geliştirdiler. Bu bilgisayarları sadece başkaları kullanmadığı zamanlarda, geceleri ve hafta sonları kullanmaya izinleri vardı.

'Harika bir şeydi' dedi Gregory geçmişi hatırlayarak. O dönemlerde kardeşlerin hesapladığı sayıları depolayabilecek bir bilgisayar hafızası yoktu. 'Pi'yi manyetik bantlara kaydediyorlardı' dedi.

'Mini bantlarla, ilgilenen adamı arayıp sorman gerekiyordu...' diye ekledi David.

'Ve bant numarasını falan söylemen gerekiyordu' diye devam etti Gregory. Ve bazen daha önemli başka biri olduğunda hesaplamanın

ortasında bantlarınız sökülüyordu.' Gözlerini sanki havaya yumruk savuracakmış gibi kıstı.

Engellere rağmen Chudnovsky'ler devam ettiler ve bir milyar basamak sınırına kadar zorladılar. O arada Kanada Chudnovsky'ler 1.13 milyara ulaşmadan kısa bir süre önce liderliği ele geçirdi. Daha sonra David ve Gregory eğer pi sayısını hesaplamaya devam edeceklerse kendi makinelerinin olması gerektiğine karar verdiler.

Chudnovsky süper bilgisayarı Gregory'nin dairesinde yaşıyordu. Birbirine kablolarla bağlı işlemcilerden oluşan tüm cihaz, kendi hesaplarına göre yaklaşık 70.000 dolara mal oldu. Aynı kapasitedeki bir bilgisayarı satın almanın onlara milyon dolarlara mal olacağı düşünüldüğünde tam anlamıyla kelepirdi ama yaşam tarzlarında kendine özgü sıkıntılarını da beraberinde getirdi. *M zero* adını verdikleri bilgisayar, kapama durumunda verilerin kaybolma ihtimaline karşı daima açık duruyor ve soğutulması için odada 25 fan bulunması gerekiyor. Kardeşler ek yükün tesisata yüklenmemesi için dairede çok fazla ışık açmamaya özen gösteriyorlardı.

1991 yılında David ve Gregory'nin ev yapımı mekanizması, pi sayısının 2 milyardan fazla basamağını hesapladı. Daha sonra başka sorunlar yüzünden ara verdiler. 1995 yılında Kanada tekrar öne geçti ve 2002 yılında 1.2 trilyon basamağa ulaştı. Bu rekoru sadece 2008 yılına kadar elinde tutabildi. Tsukuba Üniversitesi'nde hemşerileri 2.6 trilyon basamağa ulaştılar. 2009 yılının Aralık ayında Fransız Fabrice Bellard, Chudnovsky formülünü kullanarak 2.7 trilyon basamağa ulaştı ve yeni rekorun sahibi oldu. Hesaplama kendi masaüstü bilgisayarında 131 gün sürmüştü.

Eğer 1 trilyon rakamı çok küçük boyutlarda yazarsanız dünya ile güneş arasındaki mesafe kadar uzun olur. Eğer bir sayfaya 5000 rakam yazarsanız (Çok küçük olması gerekir) ve sayfaları üst üste yığarsanız göğe uzanan pi 10 km uzunluğunda olur. Peki, pi sayısını bu kadar

abartılı uzunluklarda hesaplamanın manası nedir? Sebeplerden biri oldukça insancıl: Rekorlar kırılmak için vardır.

Ancak başka bir sebebi var, daha önemli bir güdüleyici. Yeni basamaklar bulmak, bilgisayarların işlem yapma kapasitesini ve güvenilirliğini test etmek için ideal bir yöntemdir. 'Pi sayısının bir hobi olarak genişletmek konusunda herhangi bir ilgim yok' dedi Kanada bir seferinde. 'Esas ilgim hesaplama performansını geliştirmek.' Pi hesaplamaları süper bilgisayarları test etmek için vazgeçilmez bir yöntem çünkü 'büyük bir hafıza, çok büyük rakamlarla iş görmeyi ve cevabın doğruluğunu kontrol etmek için kolay bir yöntem sağlamayı gerektiren yüksek randımanlı bir iş. Karekök 2 ve gama gibi matematiksel sabitler de adaylardan birkaçı, ama en etkilisi pi.'

Pi'nin hikâyesinde harikulade bir akış var. Matematikteki en sade ve en eski oran ve bilgisayar teknolojisinin ön cephesinde kitlesel öneme sahip bir araç olarak yeniden icat edilmeye devam etmişti.

Gerçekte de Chudnovsky'lerin pi'ye olan ilgileri hâlâ içlerinde yanan süper bilgisayarlar yapma arzusunun önüne geçmiş. Kardeşler şimdilerde dünyanın en hızlısı olacağını sadece 2.7 cm genişliğinde olup 160.000 daha küçük çip ve 1.75 km kablo barındıracağını iddia ettikleri bir çip tasarlıyorlar.

Yeni çiplerinden bahsederken Gregory coşkuya kapıldı: 'Bilgisayarlar, sadece daha hızlı oldukları için değil daha fazla özelliğe sahip oldukları için her 18 ayda bir kapasitelerini ikiye katlıyorlar. Ama bunun bir kaybı var' dedi. Matematiksel anlamdaki mücadele, bölümlerin birbirleriyle en etkili biçimde iletişime geçebilmeleri için nasıl daha küçük parçalara bölümlendirileceğini bulmaktı. Dizüstü bilgisayarında çipin devre şemasını gösterdi. 'Bu çip sorununun kapitalist bir çip olduğunu söyleyebilirim' dedi. 'Sorun buradaki birçok parçanın hiçbir iş yapmaması. Burada çok fazla işçi yok.' Bir bölümü işaret etti. 'Burası çipin içindeki mağazaların idare kısmı' diye yakındı. 'Burada

çalışanların çoğu depolama ve hesaplama yapıyor. Bu korkunç bir şey! İmalat yapan kısım nerede?'

***

Carl Sagan'ın en çok satan kitaplarından *Mesaj*'da, dünya dışı bir varlık dünyadan bir kadını pi sayısının belirli bir basamağından sonra sıradanlığın sona erdiğini ve 0'lar ve 1'lerin içinde gizli bir mesaj olduğu bilgisini veriyor. Bu mesaj 10^{20}'nci (1 ve arkasında 20 sıfırla yazılıyor) basamaktan sonra ortaya çıkıyor. Şimdi 'sadece' 2.7 trilyon basamağı bildiğimize göre (27 ve 11 sıfır) bunun uydurma olup olmadığını bulabilmek için kat etmemiz gereken az bir mesafe daha var. Aslında gitmemiz gereken daha çok yol var çünkü mesaj belli ki 11'lik tabanda yazılmış.

Pi'nin içinde bir düzen bulunduğu düşüncesi heyecan verici. Ondalık basamakları olduğu zamandan bu yana matematikçiler bu basamaklarda bir düzenin işaretlerini arıyorlar. Pi sayısının irrasyonelliği rakamların tekrarlanan herhangi bir örneğe göre ortaya çıkmadığı anlamına geliyor, ama bu 0'lar ve 1'ler örneğinde olduğu gibi, düzen yamalarının bulunma olasılığını ortadan kaldırmıyor. Şu ana kadar hiç kimse önemli bir şey bulamadı. İlk sıfır 32. sırada karşımıza çıkıyor, bu da, eğer rakamlar rastgele dağılmışsa tahmin edilenden çok sonra. Ardışık olarak kendini altı kere tekrar eden rakam 999999, 762. sırada. Eğer rastgele çıkıyorlarsa, 9'ların ortaya bu kadar erken çıkma olasılığı % 0.1'den az. Bu sıralama Feynman noktası olarak biliniyor, çünkü bir keresinde Fizikçi Feynman pi sayısını bu noktaya kadar ezberleyip dokuz, dokuz, dokuz, dokuz, dokuz, dokuz, diyerek bitirmek istediğini söylemişti. Sonraki seferde Pi'nin karşımıza çıkardığı ardışık altı özdeş rakam 193.034. sırada çıkıyor ve bu sayılar da 9. Bu başka bir yerden bir mesaj mı, eğer öyleyse anlamı nedir?

Bir sayı, 0 ile 9 arasındaki her rakam ondalık basamaklarda eşit miktarda ortaya çıktığında *normal* kabul ediliyor. Pi sayısı normal mi? Kanada, ilk 200 milyar basamağa baktı ve aşağıdaki rakamların tekrarlanma frekansını buldu:

0	20.000.030.841	5	19.999.917.053
1	19.999.914.711	6	19.999.881.515
2	20.000.136.978	7	19.999.967.594
3	20.000.069.393	8	20.000.291.044
4	19.999.921.691	9	19.999.869.180

Sadece 8 rakamı biraz bol ama istatistiksel olarak önemli bir fark oluşturmuyor. Pi normal bir sayı gibi görünüyor ama henüz kimse bunu ispatlayamadı. Ve böyle bir ispatın mümkün olduğunu da ispatlayamadı. Yani pi sayısının normal olmaması mümkün. Belki de 10^{20}'den sonra gerçekten de sadece 0'lar ve 1'ler olacak. Farklı ama ilişkili bir sorun da sayıların konumlanması. Rastgele mi konumlanmışlar? Stan Wagon pi sayısının ilk on milyon basamağı 'poker testi' ile analiz etti: Ardışık beş rakamı aldı ve onları sanki bir poker eliymiş gibi inceledi.

Elin türü	**Gerçekte görünme sayısı**	**Umulan görünme sayısı**
Tüm rakamlar farklı	604.976	604.800
Bir çift diğerleri farklı	1.007.151	1.008.000
İki çift	216.520	216.000
Aynısından üçlü	144.375	144.000
Bir üçlü bir ikili	17.891	18.000
Aynısından dörtlü	8887	9000
Aynısından beşli	200	200

Sağdaki kolonda pi normal bir sayı olsa poker elinde kaç defa görünmesinin beklendiğini gösterir, her ondalık basamakta tüm rakamlar için

şans eşittir. Sonuçlar beklenen sınırlar içinde. Her bir sayı örgüsü, belli bir frekansla rastgele ortaya çıkan ondalık basamaklar gibi gözüküyor.

Doğum gününüzün pi sayısı üzerinde ortaya çıkışını gösteren siteler var. 0123456789 sıralamasının ilk ortaya çıktığı yer 17.387.594.880. basamak—bu basamak 1997 yılında Kanada bu kadar ileri gittiğinde keşfedildi.

Gregory'ye pi içinde bir düzen olduğuna inanıp inanmadığını sordum. 'Bir düzen yok' dedi ilgisizce. 'Eğer olsaydı bu tuhaf ve yanlış olurdu. Yani zaman kaybetmenin bir anlamı yok.'

Pi içindeki desenlere odaklanmak yerine, bazıları pi'deki rastgeleliği matematiksel güzelliğin olağanüstü ifadesi olarak görüyor. Pi önceden belirlenmiş bir sayıdır ama taklitçi rastgeleliği olağanüstü iyidir.

'Çok iyi bir rastgele sayı' diye katılıyor bu görüşe Gregory.

Chudnovsky'ler pi sayısını hesaplamaya başladıktan kısa süre sonra Amerikan hükümetinden telefonla aranmışlar. David sesini tizleştirerek hattın diğer ucundaki kişinin taklidini yaptı: 'Pi'yi gönderebilir misiniz lütfen?'

Tesadüfî sayılara sanayi ve ticarette ihtiyaç duyuluyor. Örneğin, diyelim ki bir pazar araştırması şirketi bir milyon kişi arasından bin kişilik bir seçme örneğine ihtiyaç duyuyor. Şirket grup örnekleri seçmek için rastgele sayı üreticileri kullanır. Üretici ne kadar rastgele sayı üretirse seçilen temsilciler ve seçimler de o kadar kesin olur. Aynı biçimde bilgisayar modellerini test ederken, öngörülemez durumlar yaratmak için rastgele sayılar gerekir. Sayılar ne kadar tesadüfî olursa test etme o kadar sağlam olur. Aslında projeler kullanılan sayıların yeterince tesadüfî olmaması nedeniyle başarısız olabilirler. 'Sayıların ne kadar tesadüfîyse o kadar iyisin' diye düşüncesini belirtti David. 'Eğer korkunç tesadüfî sayılar kullanırsan korkunç durumlara düşebilirsin' diye tamamladı Gregory. Tüm mümkün rastgele sayılar kümesi içinde en iyisi pi.

Ama felsefi bir paradoks söz konusu. Pi sayısı aşikâr bir biçimde rastgele değil. Basamaklarındaki rakamlar rastgele gibi davranabilirler, ama belirlidirler. Örneğin, eğer pi sayısındaki rakamlar gerçekten tesadüfî olsaydı, ilk ondalık basamağın 1 olması sadece % 10 ihtimal olurdu, ama ilk basamağın 1 olduğunu mutlak bir kesinlikle biliyoruz. Pi rastgele olmayan bir tesadüfîlik sergiliyor ki bu aynı zamanda hayranlık verici ve tuhaf.

Pi binlerce yıldır üzerinde çalışılan bir matematik kavramı, ama içinde yine de birçok sır barındırıyor. Transandantal oluşu nedeniyle neredeyse yüz elli yıldır doğasını anlamada herhangi bir ilerleme kaydetmedik.

'Aslında pi ile ilgili çok şeyi bilmiyoruz' dedi Gregory.

Ona pi'yi anlamada yeni herhangi bir ilerleme olup olmadığını sordum.

'Elbette, elbette' dedi Gregory, 'Her zaman ilerleme vardır. Matematik ilerliyor.'

'Daha da mucizevî olacak ama güzel olmayacak' dedi David.

1968 dünya çapında karşı kültürel başkaldırının yılıydı ve İngiltere böyle bir çalkantıya karşı bağışık değildi. Mayıs ayında hazine devrim yaratacak yeni bir madeni paranın kullanılacağını duyurdu.

50 peni, imparatorluk sisteminden onluk sisteme geçişin bir parçası olan eski on şilinin yerini alması için tasarlanmıştı. Ama parayı diğerlerinden ayıran değer birimi değil, biçimiydi.

'Bu sıradan bir madeni para değil' diye uyarmıştı *Daily Mirror*. 'Neden onluk para kurulu çok *kenarlı yay-yedigen* adını verecek kadar ileri gitti? Daha önce hiçbir ülke yedi kenarlı madeni bir parayı piyasaya sürmemişti. Ve daha önce hiçbir ulus geometrik bir şekil için bu kadar öfkelenmemişti. İsyana öncülük eden Anti-Heptagonist'lerin kurucusu

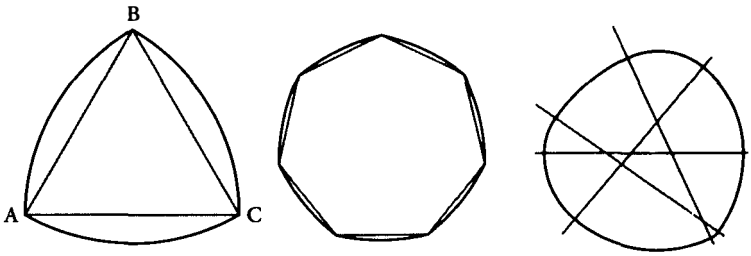
Derbyshire, Rosset'den emekli Albay Essex Moorcroft'tu. 'İlkemizi Cromwell'in kalpten haykırışından alıyoruz. 'Bu değersiz şeyi alın götürün.' Bu topluluğu kurdum, çünkü kraliçemizin bu yedi kenarlı canavarlıkla hakarete uğradığını düşünüyorum' demişti. 'Bu çirkin bir para ve üzerinde resmini taşıdığı en yüce değerimize bir hakarettir.'

Yine de 1969 yılının Ekim ayında 50 peni tedavüle girdi ve Albay Moorcroft engelleri kaldırmadı. Gerçekten de 1970 yılının Ocak ayında *The Times* kıvrımlı hatlara sahip yedigenin kendisine biraz ilgi toplamayı başardığını yazdı. Bugün yedi kenarlı 50 peninin ayırt edici olduğu ve İngiliz mirasının el üstünde tutulan bir parçası olduğu düşünülüyor. 1982 yılında piyasaya sürülen 20 peniler de yedi kenarlıydı.

50 ve 20 peniler gerçekten de tasarım klasikleriydi. Yedi kenarlı biçimleriyle yuvarlak madeni paralardan kolaylıkla ayırt edilebiliyorlardı ve özellikle körler ve kısmen gören kişiler için kullanışlıydılar. Ve düşünsel bağlamda tedavüle çıkan en kışkırtıcı madeni paraydılar. Daire, matematikteki ilgi gören tek şekil değildi.

Bir daire merkezden eşit uzaklıktaki noktalardan oluşan yay olarak tanımlanabilir. Bu biçimin birçok pratik kullanımı vardır. Tekerlek –genel anlamda insanlığın ilk büyük icadı kabul edilen– en belirgin olanıdır. Yerden belirli bir yükseklikte duracak şekilde merkezinden aks geçen bir daire ve belli bir yüzey boyunca düzgün bir biçimde döner, arabaların ve trenlerin aşağı yukarı sallanmadan hareket etmelerinin sebebi budur.

Ancak çok ağır yüklerin taşınması için bir tane aks yeterli olmayabilir. Alternatiflerden biri silindirlerdir. Silindir, dairesel kesiti yere konulmuş bir tüptür. Düzgün yüzeyli ağır bir nesne (piramit yapımı için kullanılacak devasa kübik bir taş parçası gibi) birkaç silindir üzerine konulur ve yavaşça itilebilir ve ilerledikçe önüne yeni silindirler konur.



Reuleaux üçgeninin (solda) de bulunduğu sabit genişlikteki yaylar ve 50 peni olarak bilinen çok kenarlı yay–yedigen (ortada)

Silindirin en önemli özelliği zemin ve silindirin üst kısmı arasındaki mesafenin her zaman aynı olmasıdır. Bu dairesel kesit için genel bir ilkedir, çünkü çemberin genişliği (çapı) daima aynıdır.

Bütün silindirlerin hepsinin dairesel kesiti olmak zorunda mıdır? İşe yarayacak başka şekiller yok mudur? Sezgilere aykırı görünebilir fakat vardır, aslında mükemmel silindirler olabilecek birçok şekil vardır. Bir örnek 50 penidir.

Eğer madeni paraları, dairesel kesiti 50 peni olan bir silindir oluşturmak için birbirine tutturursanız ve bu kitabı üzerine yerleştirirseniz, ittiğinizde kitap ilerlerken yukarı aşağı yükselip alçalmayacaktır. Dairesel bir silindir gibi düzgün hareket edecektir.

Böyle olmasının sebebi 50 peninin kenarlarının *sabit uzunluktaki yaylardan* meydana gelmiş olmasıdır. Neresinden ölçerseniz ölçün 50 peninin üzerindeki yayların genişliği aynıdır. Bu nedenle 50 peni zemin üzerinde yuvarlandığında yer ve paranın tepe noktası arasındaki yükseklik daima sabit kalır.

Şaşırtıcı bir biçimde sabit genişlikli birçok eğri vardır. En basiti Reuleaux üçgenidir. Eşkenar üçgenin köşelerine pergelin ucu yerleştirilerek diğer iki tepe noktasından geçen bir yay çizilerek elde edilir. Yukarıdaki diyagramda pergelin ucunu A noktasına koyun ve kalemi B

noktasından C noktasına hareket ettirin ve aynı işlemi diğer noktalarda da gerçekleştirin. Çok kenarlı yay-yedigen de aynı biçimde çizilir. Sabit genişlikteki yayların simetrik olması gerekmez. Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi birbirleriyle kesişen herhangi bir sayıdaki doğruyla çizilebilirler. Yaylar daima karşıdaki tepe noktasının merkez olduğu bir çemberin yayıdır.

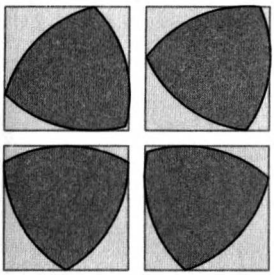
Eğrilerden oluşan üçgen ismini, uygulamalarını ilk kez 1876 yılında yayınladığı *Kinematics of Machinery* adlı kitabında kaleme alan Alman mühendis Franz Reuleaux'a borçludur. Kitap yıllar sonra Institution of Mechanical Engineers'ın eski başkanlarından olan ve ondalık para kurulunun başında bulunan H. G. Conway tarafından okundu. Conway, 50 peni için sabit genişlikteki yaylardan oluşan ve dairesel olmayan madeni para fikrini ortaya attı, çünkü özellikleri madeni parayla çalışan makineler için elverişliydi. Makineler paranın farkını çaplarının farkından ayırır ve 50 peni hangi konumda içeri atılırsa atılsın aynı çapa sahiptir. Kare olan bir madeni para, yuvarlak kenarları olsa bile sabit bir genişliğe sahip olamaz, bu nedenle dört-kenarlı madeni para yoktur. Yedi kenar seçilmesinin sebebi estetik anlamda en uygun bulunmuş olmasıdır.

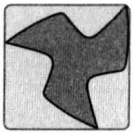
Reuleaux üçgeni silindirleri yeniden icat etmiş olsa da, tekerleği yeniden icat etmemiştir. Reuleaux üçgeninden tekerlek yapılamaz çünkü dairesel olmayan kıvrımların sabit bir merkezi –çevreye her noktadan eşit uzakta bulunan bir nokta– yoktur. Eğer bir Reuleaux üçgenine aks bağlayacak ve döndürecek olursanız şeklin yüksekliği daima aynı kalır ancak aks kendi çevresinde dönerken titrer.

Reuleaux üçgeninin kullanışlı bir özelliği ise, bir karenin içindeki kenarların karenin dörtkenarına da temas edecek biçimde döndürülebilmesidir. Bu özelliği 1914 yılında Pennsylvania'da yaşayan İngiliz mühendis Harry James Watts tarafından var olan en tuhaf aracı, kare

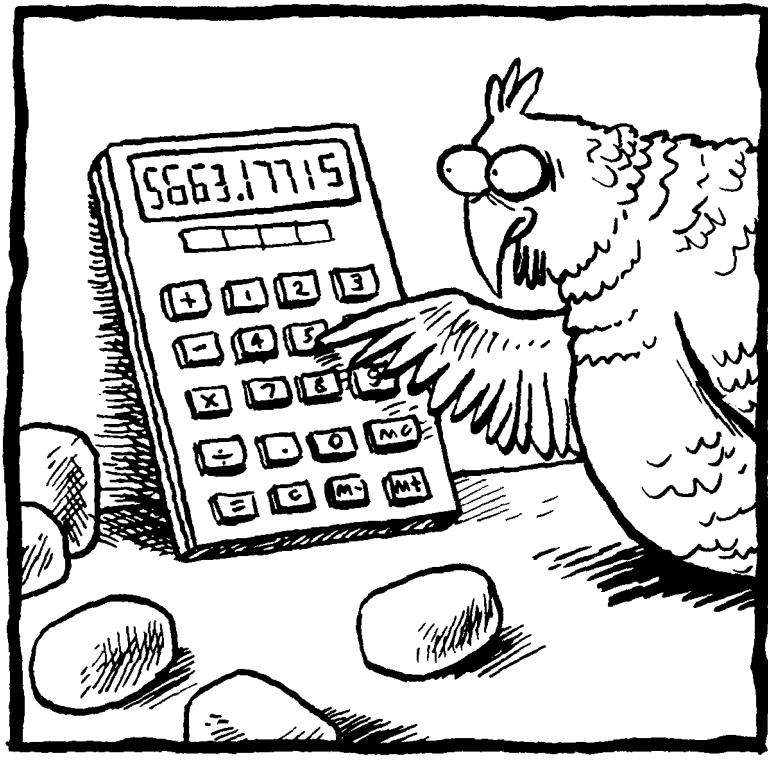
delikler açabilen bir matkap tasarlarken kullanıldı (Köşeler keskin değil kıvrımlıydı, tabiri caizse modifiye bir kareydi).

Watts'ın icadının kesiti basit olarak Reuleaux üçgeninin kesici kenar elde etmek için üç parçası çıkarılmış halidir. Döndüğünde merkezinde meydana gelen sarsıntıyı gidermek için özel bir matkap kovanı ile birlikte kullanılır. Watts kare delici matkap bugün hâlâ kullanılmaktadır.





Sol: Reuleaux üçgeninin kare içinde dönüşü.
Yukarıda: Watts'ın kare matkabının kesiti.


$663.1715
+ 1 2 3
- 4 5 6
x 7 8 9
÷ . 0 MC
= C M- M+

BÖLÜM BEŞ

x-faktörü

Matematikçiler sihir numaraları yapma eğilimindedirler. Eğlencelidirler ve içlerinde ilginç bir teoriyi saklarlar. İşte size klasik bir numara, bu aynı zamanda cebirin meziyetlerini göstermek için de iyi bir yol. İlk ve son basamağı arasında en az iki fark olan herhangi bir üç basamaklı sayı seçerek başlayın—mesela sayımız 753 olsun. Şimdi bu sayıyı ters çevirin, elde ettiğimiz yeni sayı 357. Büyük olandan küçük olanı çıkartın 753 – 357 = 396. Son olarak da bulduğunuz sayıyı tersi ile toplayın: 396 + 693. Elde ettiğiniz toplam 1089. Başka bir sayı ile yeniden deneyin, mesela 421 ile.

421 – 124 = 297

297 + 792 = 1089

Cevap aynı. Aslında üç basamaklı hangi sayıdan başlarsanız başlayın elde edeceğiniz sonuç 1089 olur. Sihir gibi, 1089 birden ortaya çıkar, tesadüfî seçilen sayıların değişen doğasında değişmeyen bir değer. Herhangi bir başlangıç noktasından sadece birkaç basit işlemle aynı sayıya ulaştığımızı düşünmek kafa karıştırıcı gibi gözükse de, bu durumun bir açıklaması var ve kısa süre içinde buna değineceğiz. Sürekli tekrarlanan 1089'un sırrı, problem, rakamlar yerine sembollerle yazıldığı an çözülür.

Eğlence amacıyla sayıların kullanılması matematiksel keşfin istikrarlı bir teması olsa da, matematik başlangıçta pratik problemlere çözüm aracı olarak kullanılmaya başlanmıştır. M.Ö. 1600 yıllarından kalma Rhind papirüsü, antik Mısır'dan günümüze ulaşmış en kapsamlı matematik dokümandır. İçinde arazi alan ölçümü, mali hesaplamalar ve belli sayıdaki ekmeği belli sayıdaki insan arasında bölüştürme gibi konular içeren 84 problem bulunmaktadır. Mısırlılar, problemlerini cümleler ile ifade ediyorlardı. Rhind papirüsünün sorduğu 30. problemi şöyledir: Kâtip $\frac{2}{3} + \frac{1}{10}$'u 10 eden yığın nedir dediğinde onu dinleyelim. 'Yığın' Mısır'da, modern cebirin temel sembollerinden biri olan ve bizim bugün x olarak kullandığımız *bilinmeyen nicelik* yerine kullanılan terimdir. Günümüzde 30. problemi şu şekilde sorarız: $\frac{2}{3} + \frac{1}{10}$'u çarptığımızda 10 eden x değeri nedir? Daha kısa ifade etmek gerekirse $(\frac{2}{3} + \frac{1}{10})x = 10$ sorusunda x değeri nedir?

Mısırlıların elinde bizim bugün sahip olduğumuz ayraçlar, eşit işaretleri ya da x'ler gibi sembolik araçlar olmadığı için yukarıdaki soruyu deneme yanılma yöntemi ile çözüyorlardı. Yığına değer verip çözüm üzerinde çalışıyorlardı. Bu kurala 'yanlış konum kuralı' denir ve golf oynamaya benzer. Çimlerin üzerine ulaştığınızda, topu deliğe nasıl sokacağınızı bilirsiniz. Aynı şekilde bir cevap bulduğunuzda, bulduğunuz cevap yanlış bile olsa doğru cevaba nasıl yaklaşacağınızı bilirsiniz. Buna karşılık modern çözüm yöntemi denklemdeki kesirleri x değişkeniyle birleştirir:

$$(\frac{2}{3} + \frac{1}{10})\,x = 10$$

Bu da şuna eşittir:

$$(\frac{20}{30} + \frac{3}{30})\,x = 10$$

Ya da:

$(\frac{23}{30})\ x = 10$

Daha sonra buna indirgenir:

$x = 10\ (\frac{30}{23})$

Ve sonuç olarak:

$x = \frac{300}{23}$

Sembolik yazım hayatı çok daha kolaylaştırır.

Toplama için kullanılan Mısır hiyeroglifi , sağdan sola doğru yürüyen bir çift ayaktı. Çıkarma için kullanılan hiyeroglif , soldan sağa doğru kullanılan bir çift ayaktı. Sayılar gibi semboller de çetele çubuğundan günümüze evrimleştiler, bununla birlikte aritmetik işlemler de evrimleşti.

Bilinmeyen bir nicelik için Mısırlıların bir sembolü olmadığı gibi, aynı şekilde Pisagor ve Öklid'in de sembolü yoktu. Onlar için matematik geometriydi, inşa edilebilir olanla sınırlıydı. Bilinmeyen bir nicelik daha ileri bir seviye soyutlamayı gerektiriyordu. Bilinmeyen için sembol kullanan ilk Yunan matematikçi Yunan harfi sigmayı ς kullanan Diophantus'tu. Bilinmeyen sayının karesi için Δ^{Y} sembolünü küpü için K^{Y} sembolünü kullandı. Kullandığı yazımı problemlerin daha net bir biçimde ifade edilmesini sağladığı için, matematik alanında bir kırılma noktası olmasıyla birlikte bir bakıma da kafa karıştırıcıydı, çünkü x, x^2 ve x^3 durumunun aksine ς ve kuvvetleri olan Δ^{Y} ve K^{Y}

arasında görsel bir bağlantı yoktu. Sembollerinin yetersizliğine rağmen, cebirin babası olarak tanındı.

Diophantus birinci ve üçüncü yüzyıl arasındaki bir tarihte İskenderiye'de yaşadı. Yunan bilmece koleksiyonunda ortaya çıkan ve mezartaşında yazdığı iddia edilen şu bilmece dışında özel hayatı hakkında bilinen hiçbir şey yoktur:

> *Tanrı ona hayatının altıda biri kadarında çocuk olmayı bağışladı; on ikide biri kadarı da eklenince sakal bıraktı; yedide biri kadar zaman geçince içinde evlilik ateşi yandı ve evlendikten beş yıl sonra bir oğul bahşedildi. Heyhat! Geç baba olmuş adam ve babasının yaşının yarısına kadar yaşadığında kendisini soğuk mezarların aldığı zavallı evlat. Kendisini sayıların ilmiyle teselli ettiği dört yılın ardından hayatı sonuna erdi.*

Kelimeler belki de, yukarıdaki gibi problemlere yenilikçi çözümler üreten adama saygı göstermenin ötesinde, Diophantus'un ailevi koşullarını tarif etmede bir kesinliğe sahip değildirler. Eksik, kafa karıştırıcı ve laf kalabalığından ibaret matematiksel soruları, açık bir biçimde ifade edebilme becerisi, yeni tekniklere kapı açtı. Bu mezar yazıtının çözümüne geçmeden önce bu tekniklerin bazılarına göz atalım.

Cebir, matematiğin denklemleri için kullanılan, sayıların ve işlemlerin sembollerle yazıldığı bir türün ismidir. Kelimenin kendisinin de merak uyandıran bir geçmişi vardır. Orta çağda berber dükkânlarında *Algebrista y Sangrador* yazılı tabelalar bulunurdu. "Çıkıkçı ve kan akıtıcı" anlamına gelen kelimeler eskiden berberlik mesleğinin parçası olan yan uğraşlara işaret ediyordu (Bu nedenle berber dükkânlarındaki çubuklarda kırmızı ve beyaz şeritler vardır, kırmız kanı beyaz ise sargı bezini sembolize eder).

Algebrista kelimesinin kökü, basit cerrahi tekniklere ek olarak, yeniden kurma anlamına gelen Arapça *al-jabr* kelimesidir. Dokuzuncu yüzyılda Bağdat'da Muhammed bin Musa Al-Harezmî, *Hisab al-jabr w'al-muqabala* ya da *Yeniden Kurma ve İndirgeme Yöntemiyle Hesaplama* adında bir matematik kitabı yazdı. Kitapta matematik problemlerini çözmek için kullanılan iki tekniği açıkladı. Al-Harezmî problemleri cümleler halinde yazıyor, ama burada anlamayı kolaylaştırmak için modern semboller ve terminolojiyle ifade edeceğiz.

A = B – C denklemini ele alalım.

Al-Harezmî, *al-jabr*, ya da yeniden kurmayı, denklemin A + C = B biçimine gelme süreci olarak tarif ediyor. Başka bir deyişle, eksi işaret eşitliğin diğer tarafına alındığında artıya dönüştürülebiliyor.

Şimdi A = B + C denklemini ele alalım.

İndirgeme A – C = B biçimine çevirme işlemidir.

Modern yazım sayesinde, denklemin bir tarafında ne yapıyorsan diğerinde de yapmalısın genel kuralını örnekleriyle yeniden kurma ve indirgemenin nasıl yapıldığını görelim. İlk denklemde iki tarafa da C *ekledik*. İkinci denklemde iki taraftan da C *çıkarttık*. Tanım gereği denklemdeki eşitliğin iki tarafı eşit olduğu için, aynı zamanda iki tarafta da aynı değerle toplama ya da çıkarma yapıldığında eşitlik bozulmaz. Aynı şekilde eğer bir tarafı bir değerle çarparsak diğer tarafı da aynı değerle çarpmamız gerekir ve bu bölme ve diğer işlemler için de geçerlidir.

Eşittir işaretleri, rakip iki ailenin bahçelerini birbirinden ayıran kazıklı çitler gibidirler. Jones'lar bahçeleri için ne yaparlarsa Smith'ler de tam olarak aynısını yapmak zorundadırlar.

Al-Harezmî indirgeme ve yeniden kurma tekniğini ilk kullanan kişi değildi—bu işlemler Diophantus'ta da bulunur; ancak Al-Harezmî'nin kitabı Latinceye tercüme dildiğinde *al-jabr* adı cebir [*algebra*] oldu. Al-Harezmî'nin cebir kitabı ve Hint onluk sistemi üzerine yazdığı başka

bir kitapla birlikte Avrupa çapında öyle bir yayıldı ki, Al-Harezmî ismi bilimsel bir terim olarak ölümsüzleşti. Al-Harezmî, önce Alchoarismi, sonra Algorismi ve en sonunda, algoritma oldu.

***

On beş ve on yedinci yüzyıllar arasında matematiksel ifadeler, cümlelerden sembolik ifadelere dönüştü. Yavaş yavaş kelimelerin yerini harfler aldı. Bilinmeyen nicelik için ς harfini kullanarak sembolleştirmeyi başlatan Diophantus olsa da, bu alışkanlığı etkili bir biçimde meşhur eden, on yedinci yüzyılda Fransa'da yaşayan Francois Viete'dir. Viete, -A, E, I, O, U- ve Y büyük harflerinin bilinmeyen nicelikler için, B, C, D gibi büyük sessiz harflerin bilinen nicelikler yerine kullanılmasını önerdi.

Viete'nin ölümünden birkaç on yıl sonra René Descartes, *Yöntem Üzerine Söylev* adlı kitabını yayınladı. Kitapta, matematiksel akıl yürütmeyi insan düşüncesine uyguladı. İşe tüm inançlarından şüphe ederek başladı, şüphelendiği her şeyi kafasından uzaklaştırdıktan sonra, tek kesinlik olarak kendi varlığı kalmıştı. Düşünme eyleminin, düşünen bir öznenin varlığını zorunlu kıldığı ve kişinin bu nedenle kendi varlığından şüphe duyamayacağı argümanını *Düşünüyorum, Öyleyse Varım* biçiminde özetledi. Cümle tüm zamanların en çok alıntılanan özdeyişlerinden birisidir ve kitap Batı Felsefesi'nin köşe taşlarından birisidir. Aslında Descartes kitabı diğer bilimsel çalışmalarına üç ek giriş olarak tasarlamıştı. Bu çalışmalardan birisi olan *La Geometrie,* aynı biçimde matematik tarihinin sınır noktalarından birisidir.

La Geometrie kitabında Descartes, daha sonra standart haline gelecek cebir notasyonunu tanıttı. İçinde yer alan *a*'lar *b*'ler *c*'ler ve *x*'ler *y*'ler ve *z*'lerle modern matematik kitaplarına benzeyen ilk kitaptı. Bilinen nicelikler için alfabenin ilk ve bilinmeyenler için son

harflerini küçük olarak kullanmak Descartes'ın kararıydı. Ancak kitap basılırken, matbaacının harfleri tükenmeye başladı ve matbaacı x, y ya da z kullanımın farklılık yaratıp yaratmayacağını sordu, Descartes yaratmayacağını söyleyince, y'ler ve z'lere kıyasla Fransızcada daha az kullanılan x'lere odaklanmaya başladı. Sonuç olarak x matematikte kullanılan sabit bir sembol –ve daha geniş anlamlarda– bilinmeyen nicelikler için bir sembol haline geldi. Bu nedenle sıradışı olaylar X-dosyaları olarak adlandırılır ve Wilhelm Rontgen'in X-ışını teriminin kullanmasının sebebi budur. Kısıtlı matbaa malzemesi sorunu olmasa, kavranamaz yıldız niteliği y-faktörle ve Afrika asıllı Amerikalı siyasi lider Malcolm Z olarak biliniyor olabilirdi.

Descartes'ın sembolleriyle cümlesel ifadelerin hepsi matematikten çıkartıldı.

1494 yılında Luca Pacioli denklemi ifade ediş biçimi olan:

4 Census p 3 de 5 rebus ae 0

Ve Viete'nin 1591 yılında yazacağı biçimiyle:

4 in A quad - 5 in A piano + 3 aequatur 0

1637 yılında Descartes tarafından şu hale getirilmişti:

$4x^2 + 5x + 3 = 0$

Kelimeler yerine harfler ve semboller kullanmak, baskı için kullanışlı olmaktan da öteydi. x sembolü başlangıçta 'bilinmeyen nicelik' için kullanılmış olsa da, icat edildikten sonra düşünce için güçlü bir araç olmuştu. Bir kelime ya da kısaltma, matematiksel işlemlerde x sembolünün kullanıldığı gibi kullanılamaz. Sayılar hesap yapmayı kolaylaştırmıştır ama harf sembolleri matematikçileri dilin çok ötesinde bir etki alanına taşımıştır.

Problemler Mısır'da olduğu gibi cümleler halinde ifade edildiklerinde matematikçiler çözümleri çok kullanışlı ama gelişigüzel yön-

temlerle buluyorlardı. Bu erken dönem problem çözücüler sisler içinde hapsolmuş ve hareket edebilmeleri için birkaç numaraları bulunan kâşifler gibiydiler. Ancak, bir problem semboller kullanılarak ifade edildiğinde, sanki sis kalkıyor ve büyük bir kesinlikle tanımlanmış bir dünya ortaya çıkıyordu.

Cebirin büyüsü, problem bir kere sembollerle ifade edildiğinde problemin genellikle neredeyse çözülmüş olmasıdır.

Örnek olarak Diaphantus'un mezar yazısını yeniden ele alalım. Öldüğünde kaç yaşındaydı? İfadeyi dönüştürürken D harfini Diaphantus'un öldüğü zamanki yaşı olarak alıyoruz. Mezar taşı $\frac{D}{6}$yıl çocuk olduğunu ve sakalının çıkması için $\frac{D}{12}$ yıl geçtiğini ifade ediyor ve ardından $\frac{D}{7}$ yıl sonra evleniyor. 5 yıl sonra + $\frac{D}{2}$ sene yaşayan bir çocuk sahibi oluyor ve dört sene sonra son nefesini veriyor. Tüm bu zaman aralıklarının toplamı D'ye eşit çünkü D, Diophantus'un yaşadığı yıl sayısına eşit. O halde:

$$\frac{D}{6} + \frac{D}{12} + \frac{D}{7} + 5 + \frac{D}{2} + 4 = D$$

Tüm kesirlerin en küçük ortak böleni 84, yani denklem şuna dönüşüyor:

$$\frac{14D}{84} + \frac{7D}{84} + \frac{12D}{84} + 5 + \frac{42D}{84} + 4 = D$$

Şu şekilde bir araya getirilebilir:

$$D(\frac{14 + 7 + 12 + 42}{84}) + 9 = D$$

Ya da:

$$D(\frac{75}{84}) + 9 = D$$

Bu da şuna eşittir:

$D(\frac{25}{28}) + 9 = D$

D'leri aynı yere topladığımızda:

$D - D(\frac{25}{28}) = 9$

$D(\frac{28}{28}) - D(\frac{25}{28}) = 9$

$D(\frac{3}{28}) = 9$

Çarpma işlemini yaptığımızda sonuç:

$D = 9\,\frac{28}{3} = 84$

Cebirin babası 84 yaşındayken öldü.

Artık bölümün başındaki numaraya geri dönebiliriz. Sizden ilk ve son basamağı arasında en az iki fark olan herhangi bir üç basamaklı sayı seçmenizi istedim. Ardından ikinci sayımızı elde etmek için ilk sayıyı ters çevirmenizi söyledim. Ardından küçük sayıyı büyüğünden çıkarmanızı söyledim. Yani eğer 614 sayısını seçtiyseniz, sayının tersi 416 olur. Ardından, 614 – 416 işleminin sonucu 198'e eşittir. Ardından ara basamaklarda bulduğumuz bu sayıyı tersiyle toplamanızı söyledim. Yukarıdaki örneği uygulayacak olursak işlem şöyle olur: 198 + 891.

Daha önce de olduğu gibi cevap 1089'dur. Her zaman bu sonuç çıkar ve nedenini bize cebir söyler. Ama öncelikle kahramanımız olan, ilk ve son basamağındaki rakamlar arasında en az iki fark olan üç basamaklı sayımızı ifade etmek için bir yol bulmamız gerekiyor.

614 sayısını ele alalım. Bu şuna eşittir: 600 +10 + 4. Aslında *abc* şeklinde yazılabilen üç basamaklı sayılar $100a + 10b + c$ biçiminde de

yazılabilir (Not: bu durumda *abc*, *a* x *b* x *c* demek değildir). O halde başlangıçta kullandığımız sayıya *abc* ve *a*, *b* ve *c*'nin birer rakam olduğunu belirtelim. İşlem rahatlığı açısından *a, c*'den büyük olsun.

abc sayısını ters çevirip elde ettiğimiz *cba* sayısını $100c + 10b + a$ şeklinde genişletelim.

Ara basamaktaki sayıyı bulabilmemiz için *cba* sayısını *abc* sayısından çıkarmamız gerekiyor. Öyleyse *abc* – *cba* is: $(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$ olur.

İşlemdeki *b* sayıları karşılıklı olarak birbirlerini götürürler ve ara sonuç olarak elimizde $99a - 99c$, ya da $99(a - c)$ kalır.

Cebirin en temel seviyesinde, öngörülerin değil belli kuralların uygulamaları söz konusudur. Amaç, kuralların, ifade olabildiğince basit bir biçim alana kadar uygulanmasıdır. $99(a - c)$ terimi olabilecek en sade bir ifadedir.

abc sayısının ilk ve son basamağındaki sayılar arasında en az iki fark olması gerektiği için $a - c$ ya 2, 3, 4, 5, 6, 7 ya da 8 olabilir.

O halde, $99(a\ c)$ şunlardan birisidir: 198.297, 396.495, 594, 693 ya da 792. Hangi üç basamaklı sayıyı seçersek seçelim tersinden çıkardığımız zaman ara sonuç olarak yukarıdaki sekiz sayıdan birisini elde ederiz. Son basamakta ara sonucumuzu tersiyle toplarız.

Gelin yaptığımız işlemi tekrar edelim ve bu sefer bulduğumuz ara sonucu da işleme katalım. Ara sonucumuz *def* olsun yani $100d + 10e + f$. Bu sefer *def* ile tersi olan *fed* sayılarını toplamak istiyoruz. Yukarıda bulduğumuz ara sonuçlara daha yakından baktığımızda ortadaki basamağın ve birinci ve sonuncu rakamın toplamlarının daima 9 olduğunu görürüz. Başka bir ifadeyle $d + f = 9$. Böylece, *def* + *fed* :

$$100d + 10e + f + 100f + 10e + d$$

Ya da:

$100(d + f) + 20e + d + f$

Ki bu da şuna eşittir:

$(100 \times 9) + (20 \times 9) + 9$

Ya da:

$900 + 180 + 9$

Vay be! Toplam 1089 ve bilmece tüm çıplaklığıyla ortada.

1089 sayısının şaşırtıcı yanı, tesadüfî seçilmiş tüm sayıların daima aynı sonuca gitmesidir. Cebir bize somut olandan soyut olana gitme olanağı vererek aldatmacanın ötesini gösterir—belirli sayıların davranışlarının izini sürmeyi bırakıp herhangi bir sayının davranışlarının izini sürmemize olanak sağlar. Bu vazgeçilemeyecek bir araçtır ve bu sadece matematik için geçerli değildir. Geri kalan tüm bilimler de denklemlerin diline bel bağlamışlardır.

1621 yılında Diophantus'un başyapıtı *Arithmetica*'nın Latince çevirisi Fransa'da yayınlandı. Bu yeni baskı, daha iyi bir numaralandırma ve sembollerle birleştirilmiş antik problem çözme tekniği üzerine duyulan ilgiyi tekrar alevlendirdi ve yeni bir matematiksel düşünce çağının kapılarını açtı. Daha az karmaşık olan yazım, problemleri ifade ederken büyük bir açıklık sağlıyordu. Toulouse'da yaşayan ve bir yargıç ve memur olan Pierre de Fermat kendi *Arithmetica* kopyasını sayılarla ilgili derin düşüncelerle doldurmuş olan amatör bir matematikçiydi. Pisagor üçlüleri, 3, 4, 5 örneğinde olduğu gibi, $a^2 + b^2 = c^2$ özelliğini

gösteren herhangi üçlü sayı kümesi ile ilgili bölümün bulunduğu sayfanın kenarında kalan boşluğa bazı notlar düşmüştü. $a^3 + b^3 = c^3$'e eşit olan bir a, b ve c değer kümesini bulmanın imkânsız olduğunu fark etmişti. Aynı zamanda $a^4 + b^4 = c^4$ eşitliğini sağlayan a, b ve c sayılarını da bulamamıştı. Fermat, kendi *Arithmetica* kopyasına *n*'in 2'den büyük olduğu herhangi bir değer için $a^n + b^n = c^n$ eşitliğini sağlayacak olası hiçbir değerin olmadığını not etmişti. 'Bunun için gerçekten de muhteşem bir kanıtım var ama bu kenar boşluğuna sığdırmam mümkün değil' diyordu.

Fermat savının –muhteşem ya da başka türlü– herhangi bir kanıtı kitap kenarlarıyla sınırlandırılmadığı zamanlarda da üretemedi. *Arithmetica*'sına düştüğü notlar bir kanıtı olduğunun ya da kanıtladığına inandığının ya da kışkırtıcı gözükmeye çalıştığının bir göstergesi olabilir. Her durumda, arsızca yazdığı bu cümle nesiller boyunca matematikçiler için atılmış bir yem oldu. Bu sav Fermat'ın on teoremi olarak bilinir ve 1995 yılında İngiliz Andrew Wiles tarafından çözülene kadar matematik tarihinin en meşhur çözülemeyen problemlerinden birisiydi. Cebir bu açıdan oldukça aşağılayıcı olabilmektedir. Bir problemin ifade edilmesini kolaylaştırmanın, çözümü kolaylaştırmakla karşılıklı ilişkisi yoktur. Wiles'ın kanıtı öylesine karmaşıktı ki birkaç yüz kişiden başka kimse tarafından anlaşılmamıştır.

***

Matematiksel yazımdaki gelişmeler yeni kavramların keşfedilmesini sağladı. On yedinci yüzyılın başlarında Merchiston'lı toprak sahibi olan ve hayatı boyunca teoloji alanında yaptığı çalışmaları ile daha çok tanınan İskoç matematikçi John Napier tarafından keşfedilen *Logaritma* çok büyük öneme sahip bir buluştu. Napier, papanın deccal olduğunu ve kıyametin 1688 ve 1700 yılları arasında kopacağı kehanetinde bu-

lunduğu ve Protestanlar arasında tartışmalara yol açan çoksatar bir kitap yazdı. Geceleri uzun bir cübbe giymeyi ve kulesindeki odasının etrafında dolaşmayı severdi, bu da ününe bir de büyücülüğü ekledi. Ayrıca, Edinburgh yakınlarındaki geniş arazisinde gübreler üzerinde deneyler yapardı ve 'her yere yıkım saçan' ve 'ateşten ağzı olan' bir araba fikriyle, 'dalgıçlarla ve başka savaş hileleriyle dolu suyun altından ilerleyen bir makine' gibi askerî araçlar fikirlerini ortaya attı—bunlar tank ve denizaltının öncüleriydi. Bir matematikçi olarak ondalık değeri gösteren noktanın kullanımı ile birlikte, Yunanca *logos,* ratio ve *aritmos* kelimelerinden türettiği logaritma düşüncesini geliştirmesiyle tanınır.

Aşağıdaki tanım keyfinizi kaçırmasın: *Bir sayının logaritma, ya da log değeri bu sayının onuncu kuvvetleri şeklinde ifade edilen üssüdür.* Logaritma şu biçimde ifade edildiğinde daha kolay anlaşılır. Eğer $a = 10^b$ ise a'nın logaritması b'dir.

öyleyse, log 10 = 1 (çünkü $10 = 10^1$)
log 100 = 2 (çünkü $100 = 10^2$)
log 1000 = 3 (çünkü $1000 = 10^3$)
log 10.000 = 4 (çünkü $10.000 = 10^4$)

Sayı 10'un kuvvetlerinden biri olduğunda logaritmayı bulmak çok kolaydır. Peki ya bulmaya çalıştığınız sayı 10'un kuvvetlerinden biri değilse? Mesela 6'nın logaritması nedir? 6'nın logaritması 10'un kendisiyle n sayıda çarpıldığında 6 sonucunu veren n'dedir. Ama 10'u kendisiyle belli bir sayıda çarpıp 6 elde edildiğini söylemek kulağa saçma gelir. 10'u kendisiyle kesirle ifade edilen bir miktarda nasıl çarpabilirsiniz? Bu kavram elbette gerçek dünyada karşılığını bulmak istediğinizde saçmadır, ama matematiğin gücü ve güzelliği bizim cebirsel gerçekliğin ötesinde düşünmek zorunda olmayışımızdadır.

6'nın logaritması, üç ondalık basamağı olan 0.778 sayısıdır. Başka bir deyişle, 10 sayısını kendisiyle 0.778 kere çarptığımızda 6'yı elde ederiz.

Aşağıda 1 ile 10 arasındaki sayıların logaritması vardır.

log 1 = 0	log 6 = 0.778
log 2 = 0.301	log 7 = 0.845
log 3 = 0.477	log 8 = 0.903
log 4 = 0.602	log 9 = 0.954
log 5 = 0.699	log 10 = 1

Peki ama logaritmanın amacı nedir? Logaritma zor olan çarpma işlemlerini daha basit toplama işlemlerine dönüştürür. Daha açık bir ifadeyle, iki sayının çarpımı logaritmalar toplamına eşittir. Eğer X x Y = Z ise, log X + log Y = log Z'dir. Bu denklemi yukarıdaki logaritma tablosuyla kontrol edebiliriz.

3 x 3 = 9
log 3 + log 3 = log 9
0.477 + 0.477 = 0.954

Aynı şekilde,
2 x 4 = 8
log 2 + log 4 = log 8
0.301 + 0.602 = 0.903

Dolayısıyla bu yöntem iki sayıyı çarpmak için kullanılabilir: Logaritmalarını alın, üçüncü sayının logaritmasını bulmak için ikisini toplayın. Ve toplamı sayıya dönüştürün. Örnek olarak 2 x 3 nedir? 2

ve 3'ün logaritmalarını alırız ve 0.301 ve 0.477 değerlerini buluruz. Birbirleriyle topladığımızda 0.778 değerini buluruz. Yukarıdaki listeden kontrol ettiğimizde 0.778'in log 6'ya eşit olduğunu görürüz. O halde cevap 6'dır.

Şimdi de 89 ile 62'yi çarpalım.

Öncelikle logaritmalarını bulmamız gerekir ve biz sayıyı bir hesap makinesi ya da Google'a yazarak bulabiliriz. Ancak yirminci yüzyılın sonlarına kadar bunu yapabilmenin tek yolu logaritma tablolarından faydalanmaktı. 89'un logaritması, üç ondalık basamağı olan 1.949'dur. 62'nin logaritması ise 1.792'dir.

O halde logaritmalar toplamı 1.949 + 1.792 = 3.741'dir.

Logaritması 3.741 olan sayı 5518'dir, bu da aynı şekilde logaritma tablolarından faydalanarak bulunur.

O halde, 89 x 62 = 5518'dir.

Anlamlı bir biçimde, bu çarpma işlemini gerçekleştirmek için yaptığımız tek işlem oldukça basit bir toplama işlemidir.

Logaritmalar, diye yazar Napier, matematikçileri usandırıcı zaman dilimlerinden ve çarpma, bölme ve çok büyük sayıların karelerinin ve küplerinin alınması işlemlerindeki gözden kaçan hatalardan kurtarır. Napier'in yöntemini kullanmak sadece çarpma işlemini toplamaya dönüştürmekle kalmaz, bölme işlemini de çıkarma işlemine dönüştürür; bir sayının karekökünün alınması için, sayının logaritması ikiye bölünür, küp kökünün alınması için ise, logaritma üçe bölünür.

Logaritmanın sağladığı kullanışlılık, onu Napier'in zamanının en önemli matematiksel buluşu haline getirdi. Bilim, ticaret ve sanayi dünyası çok büyük oranlarda logaritmadan faydalandı. Örneğin Alman gökbilimci Johannes Kepler, logaritma hesabını kullanarak Mars'ın yörüngesini hızlıca hesapladı. Yakın zamanlarda, gök mekaniğinin üç yasasının Napier yeni sayılarının sağladığı hesabın yardımı olmadan keşfedilemeyeceği ileri sürüldü.

1614 yılında yayınlanan *Hayranlık Uyandıran Logaritma Tablolarının Tarifi* adlı kitabında Napier, modern matematikçilerin kullandığından biraz farklı bir logaritma kullanıyordu. Logaritmalar taban adı verilen sayıların kuvvetleri olarak ifade edilebilir. Napier'in sistemi gereksiz derecede karmaşık bir taban olan $1 - 10^{-7}$ (O zaman 10^7 ile çarpıyordu) tabanını kullanıyordu. Napier döneminde İngiltere'deki en büyük matematikçi olan Henry Briggs, İskoçyalıyı keşfi konusunda tebrik etmek için Edinburgh'u ziyaret etti. Briggs sistemi sadeleştirmek için, halihazırda Briggs logaritmaları olarak bilinen 10 tabanı logaritmasına çevirdi, çünkü 10 tüm zamanların en popüler tabanıydı. Briggs, 1617 yılında 1'den 1000'e kadar olan sayıların 'sekiz ondalık basamağa kadar olan logaritma tablolarını yayınladı. 1628 yılında, Briggs ve Hollandalı matematikçi Adriaan Vlacq logaritma tablosunu on ondalık basamaklı 100.000 sayısına kadar genişlettiler. Hesaplamaları için yoğun bir emek harcadılar—gerçi toplamalar doğru yapılmış olsaydı yeniden yapılmalarına hiçbir zaman gerek olmayacaktı.



Chilias tertia.

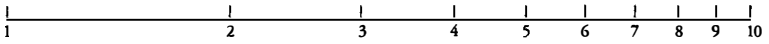
Num. abſolu	Logarithmi.	Num. abſolu	Logarithmi.	Num. abſolu	Logarithmi.
2601	3,41514,03521,9587 16,69400,2969	2634	3,42061,57706,2575 16,48489,2280	2667	3,42602,30156,8987 16,28095,5464
2602	3,41530,72922,2556 16,68758,8367	2635	3,42078,06195,4855 16,47863,7341	2668	3,42618,58252,4451 16,27485,4300
2603	3,41547,41681,0923 16,68117,8692	2636	3,42094,54059,2196 16,47238,7147	2669	3,42634,85737,8751 16,26875,7707
2604	3,41564,09798,9615 16,67477,3939	2637	3,42111,01297,9343 16,46614,1691	2670	3,42651,12613,6458 16,26266,5680
2605	3,41580,77276,3554 16,66837,4103	2638	3,42127,47912,1034 16,45990,0970	2671	3,42667,38880,2138 16,25657,8213
2606	3,41597,44113,7657 16,66197,9176	2639	3,42143,93902,2004 16,45366,4978	2672	3,42683,64538,0351 16,25049,5302
2607	3,41614,10311,6833 16,65558,9155	2640	3,42160,39268,6983 16,44743,3710	2673	3,42699,89587,5654 16,24441,6943
2608	3,41630,75870,5988 16,64920,4034	2641	3,42176,84012,0693 16,44120,7158	2674	3,42716,14029,2597 16,23834,3128
2609	3,41647,40791,0022 16,64282,3806	2642	3,42193,28132,7851 16,43498,5320	2675	3,42732,37863,5725 16,23227,3854
2610	3,41664,05073,3828 16,63644,8467	2643	3,42209,71631,3171 16,42876,8189	2676	3,42748,61090,9579 16,22620,9114

1824 tarihli Briggs'in logaritma tablosundan bir sayfa.

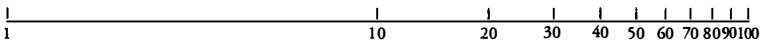
Bu durum 1792 yılında genç Fransız cumhuriyetinin, daha büyük –100.000'e kadar 19 ondalık basamaklı ve 100.000'den 200.000'e kadar 24 ondalık basamaklı– logaritma tabloları ısmarlama kararı alana kadar sürdü. Projenin başında olan kişi Gaspard de Prony için 'logaritma tablolarını bir iğne üretir gibi kolay üretebilecek kişi' deniyordu. Çoğu ihtilal öncesinde, devlet işlerinde ya da peruk yapımcısı olarak çalışmış olan ve yeni yönetimde işleri (haince değilse bile) gereksiz kabul edilen (tabi ihanet sayılmazsa) yaklaşık 90 insan hesap makinesinden oluşan bir kadrosu vardı. Hesaplamaların çoğu 1796 yılında tamamlanmıştı ama o zamana kadar hükümet projeye karşı duyduğu ilgiyi kaybetti ve de Prony'nin devasa tabloları asla yayınlanmadı. Bugün Paris gözlemevinde bulunuyorlar.

Briggs'in ve Vlacq'ın tabloları 1924 yılında İngiliz Alexander J. Thompson 20 ondalık basamak kesinliğindeki yeni değerler üzerinde elle çalışmaya başlayana kadar, 300 yıl boyunca tüm logaritma tablolarının temelini oluşturdular. Ancak eski kavramın üzerine modern bir ışıltı getirmek bir yana, Thompson çalışmasını 1949 yılında bitirdiğinde çoktan çağın gerisinde kalmıştı. O tarihte bilgisayarlar tabloları kolaylıkla üretebiliyorlardı.

1 ile 10 arasındaki değerlerin logaritmalarını bir cetvel üzerine konumlandırdığınızda aşağıdaki desen oluşur:



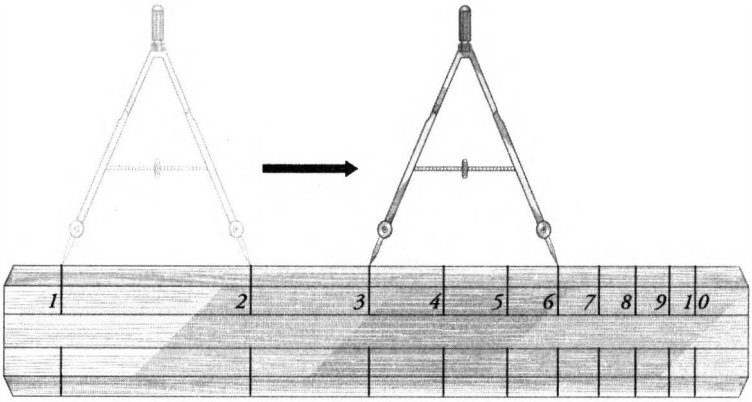
Aynı şekilde, diyelim ki 100'e kadar devam edebiliriz:



Bu, logaritmik ölçek olarak bilinir. Bu ölçekte sayılar yükseldikçe birbirlerine daha da yaklaşırlar.

Bazı cetvel ölçümleri logaritmiktir, bu artan her birimin, ölçümde 10 kat değişiklik meydana getirdiği anlamına gelir. Önceki sayfadaki cetvellerde 1 ile 10 arasındaki mesafeyle 10 ile 100 arasındaki mesafe eşittir. Örnek olarak sismograflar tarafından dalga genişliğini ölçen Richter ölçeği logaritmik ölçeğin en genel kullanıldığı yerdir. Richter ölçeği ile kaydedilen 7 şiddetindeki bir deprem, 6 şiddetinde kaydedilen bir depremden 10 kat daha büyük bir genişlikte kaydedilir.

1620 yılında logaritmik ölçeği bir cetvel üzerine işaretleyen kişi İngiliz matematikçi Edmund Gunter'di. Cetvel üzerindeki değerleri toplayarak çarpma yapabileceğini fark etmişti. Eğer bir pergelin sol ucu 1 noktasına yerleştirilip sağ ucu da bir *a* noktasını gösterdiğinde, pergel bir *b* noktasına kaydırıldığında sağ uç *a* x *b* noktasını gösterir. Aşağıdaki diyagramda iki noktasına yerleştirilen pergel 3 noktasına kaydırıldığında, sağ ucu 2 x 3 yani 6 noktasını göstermektedir.



Gunter çarpımı.

Bu keşfin ardından kısa bir süre sonra Anglikan kilisesinden bir bakan olan William Oughtred, Gunter'in fikrini geliştirdi. Pergeli bir kenara bıraktı ve iki tane logaritma cetvelini birbirine ekleyerek sürgülü hesap cetveli olarak bilinen aleti geliştirdi. Oughtred iki çeşit sürgülü cetvel geliştirdi. Bunlardan biri iki düz cetvelden, diğeri ise üzerinde ibreler bulunan iki yuvarlak diskten oluşuyordu. Ancak Oughtred, bu yeni icadını bilinmeyen nedenlerden ötürü yayınlamadı ama 1630 yılında, öğrencilerinden biri olan Richard Delamain yayınladı. Öfkeden deliye dönen Oughtred, Delamain'i bilgi hırsızlığıyla suçladı ve sürgülü cetvelin kökeni nedeniyle başlayan kan davası Delamain'nin ölümüne kadar devam etti. 'Bu skandal' diye şikâyetlerini belirtti Oughtred yaşamının sonunda, 'bana karşı birçok önyargı ve dezavantaja neden oldu.'

Sürgülü cetvel etkileyici bir hünere sahip bir hesap makinesiydi ve şimdilerde demode olsa da hâlâ fanatik hayranları bulunmaktadır. Onlardan biri olan Braintree, Essex'den Peter Hopp'u ziyaret ettim. '1700'ler ve 1975 arasında meydana gelen her bir teknolojik gelişme sürgülü cetvel kullanılarak icat edilmiştir' dedi Hopp beni istasyonda karşıladığında. Emekli bir elektrik mühendisi olan Hopp bir tutam kirpik, mavi gözleri ve gösterişli bir alt çenesi olan oldukça dost canlısı biriydi. Bana dünyanın en büyüklerinden olan ve bilimsel mirasımızın binden fazla unutulmuş kahramanını barındıran sürgülü cetvel koleksiyonundan bahsetti. Evine giderken yolda koleksiyonculuktan konuştuk. Hopp en iyi parçaların internet üzerinden açık arttırmayla satıldığını ve rekabetin kaçınılmaz olarak fiyatları arttırdığını söyledi. Nadir bulunan bir sürgülü cetvelin kolaylıkla yüzlerce sterline mal olabildiğini anlattı.

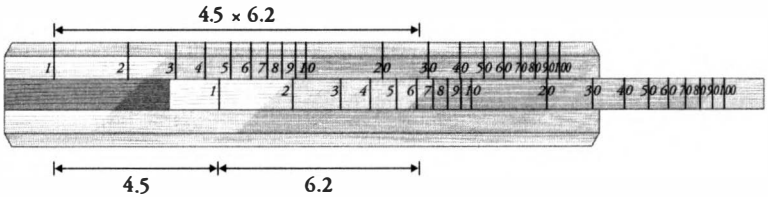
Evine vardığımızda eşi bize çay ikram etti ve çalışma odasına geçtik ve bana 1970'lerden kalma manolya renkli cilalanmış Faber-Castell sürgülü cetvelini gösterdi. Cetvel normal 30 santimlik cetvel boyundaydı ve hareketli bir orta bölümü vardı. Üzerine birçok farklı

ölçek küçük bir yazıyla işaretlenmişti. Üzerinde ayrıca hareket edebilen çok ince şeffaf bir ibresi de vardı. Faber-Castell'in biçimi ve dokusu asosyallerin ortalıkta tişört, spor ayakkabı ve iPod'larla değil gömlek, kravat ve cep koruyucularla dolaştığı savaş sonrası, bilgisayar çağı öncesi bir çağın hesap takıntısı hissini çağrıştırıyordu.

Ben ortaokula 1980'lerde gittim, o tarihlerde sürgülü cetveller artık kullanılmıyorlardı, Hopp bana hızlı bir ders verdi. Başlangıç olarak ana cetvelde ve hareketli orta kısımdaki 1 ile 100 arasındaki logaritma ölçeklerini kullanmam gerektiğini söyledi.

Amerika'da slipstick adıyla bilinen sayıların sürgülü cetvelle çarpılması ana cetveldeki değerlerin ve sürgülü cetveldeki değerlerin belirlenmesiyle gerçekleşiyor. Logaritma değerlerinin ne olduğunu anlamanız bile gerekmiyor, sadece ortadaki hareketli cetveli doğru pozisyona getiriyor ve değeri okuyorsunuz.

Örnek olarak 4.5 ve 6.2'yi çarpmak istiyorum. Yapmam gereken bir cetveldeki 4.5 ve diğer cetveldeki 6.2 değerlerini birbirine eklemek. Bu, orta cetveldeki 1 değerini, ana cetveldeki 4.5 değerinin üzerine kaydırarak yapılıyor. Çarpma işlemimizin cevabı, orta cetvelde 6.2 değerinin, ana cetvelde denk geldiği yerin değeri. Aşağıdaki diyagram çarpma işlemini daha anlaşılır hale getiriyor:

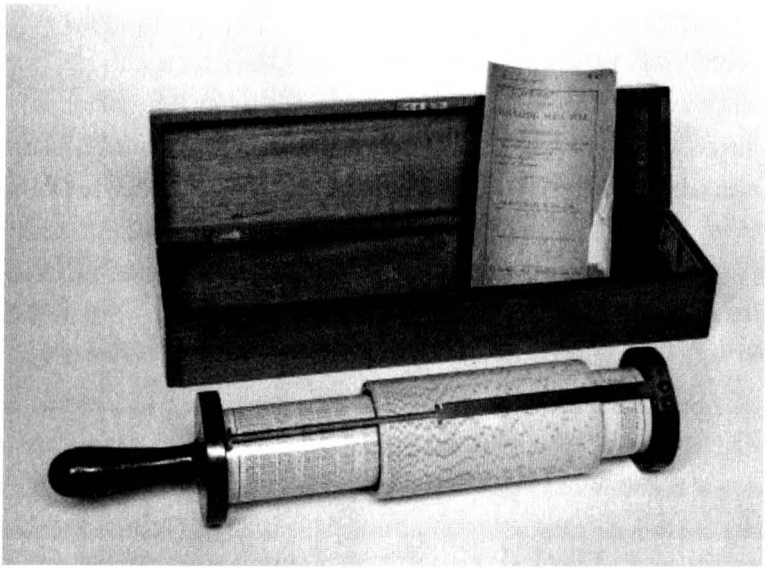


Sürgülü cetvel kullanarak çarpma işlemi.

Şeffaf ibreyi kullanarak ölçeklerin birbirleriyle buluştuğu noktayı gömek çok kolay. Ortadaki cetveli hareket ettirerek 6.2 noktasının 28'in tam altına geldiğini görüyorum, bu da doğru cevap. Sürgülü cetveller hassas aletler değiller. Ya da başka bir ifadeyle, onları kullanmak konusunda tam anlamıyla hassas değiliz. Sürgülü cetveli okurken, kesin sonucu bulmak yerine analog ölçekte sayının nereye geldiğini tahmin ediyoruz. Yine de doğalarında bulunan hassas olmayışa rağmen, Hopp, bir mühendis olarak kendi amaçlarına göre birçok işi yapmaya yetecek kadar hassas olduklarını söylüyor.

Benim kullandığım sürgülü cetveldeki değerler 1 ila 100 arasındaydı. Ayrıca 1 ila 10 arasında ölçekli olan ve rakamlar arasında daha büyük boşluk bulunduğu için daha büyük kesinlik sağlayan cetveller de var. Bu nedenle sürgülü cetvel kullandığınızda orijinal toplamı daima 1 ile 10 arasındaki ondalık bir noktaya taşımak en iyi yöntemdir. Örnek olarak 4576 ve 6231 sayılarını çarpmak için bu çarpma işlemini 4.576 x 6.231 haline çeviririm. Cevabı bulduğumda altı basamak geriye giderim. 4.576 ve 6.231 değerlerini işaretlediğimde yaklaşık olarak 28.5 değerine ulaşırım, bu da 4576 x 6231 sorusunun cevabının yaklaşık 28.500.000 olduğu anlamına gelir. Yukarıdaki hesabın Logaritma kullanarak bulunan cevabı 28.513.056'dır. Hiç de kötü bir değer biçme değil. Genellikle Faber-Castell gibi bir sürgülü cetvel size üç ondalık basamağa kadar kesin bir sayı verir—bu da çoğunlukla ihtiyaç duyulan kadarıdır. Buna karşılık, kesinlikte kaybettiğimi, hızdan kazandım—bu işlemi yapmam 5 saniyeden daha kısa sürdü. Logaritma tabloları kullanarak bu işlemi yapmam on kat daha uzun sürerdi.

Peter Hopp'un koleksiyonundaki en eski parça on sekizinci yüzyılın başlarından kalma, alkol tüketimini hesaplayan bir vergi memurunun kullandığı ahşap bir cetveldir. Hopp'la buluşmadan önce geçmişten kalan sürgülü cetvelleri toplamanın ne kadar ilginç olabileceği konusunda şüphelerim vardı. Fosiller ve pullar en azından güzel görünebilirler. Ama sürgülü cetveller kullanılırlık açısından işlerini gururla yerine



Profesör Fuller'in hesap makinesi.

getiren araçlardır. Ancak, Hopp'un antika sürgülü cetveli kaliteli bir ahşabın üzerine sayıların zarafetle kazındığı güzel bir araçtı.

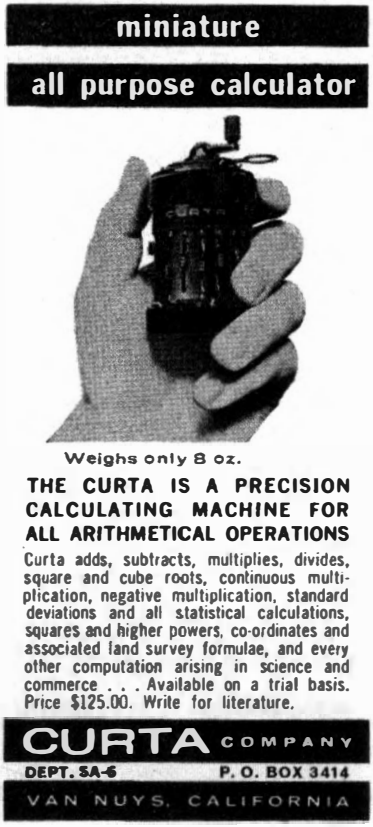
Hopp'un geniş koleksiyonu yüzyıllar içinde kaydedilen küçük ilerlemeleri yansıtıyordu. On dokuzuncu yüzyılda yeni ölçekler eklenmişti. Listeleme takıntısı (zihinsel bir rahatsızlıkla başa çıkma mekanizması olarak), eskimeyen klasik ve eksiksiz *Eşanlamlılar Sözlüğü*'yle sonuçlanan Peter Roget, $3^{2.5}$ gibi kesirli kuvvetlerin ve kareköklerin hesabına olanak sağlayan log-log ölçeğini icat etti. Üretim teknikleri geliştikçe, artan yaratıcılık, hassasiyet ve ihtişamın yeni cihazları tasarlanmıştır. Örneğin, Thacher'ın Hesaplama Aleti, metal bir yuva üzerindeki bir merdaneye benzer, Profesör Fuller'ın Hesap Makinesinin üç eşmerkezli pirinç silindiri ve maun bir sapı vardır. Silindir çevresindeki 12 metrelik helezon beş haneye kadar kesin sonuç verir. Öte yandan kronometreyi

andıran Halden Calculex krom çeliği ve camdan yapılmıştı. Sürgülü cetvellerin, şaşırtıcı bir cazibeye sahip nesneler olduğuna karar verdim.

Diğer nesnelerin arasında, Hopp'un rafında baharat değirmenine benzeyen bir mekanizma gözüme ilişti ve ne olduğunu öğrenmek istedim. Onun bir Curta olduğunu söyledi. Curta siyah, avuç büyüklüğünde, tepesinde çalıştırma kolu olan bir silindirdi ve eşsiz bir buluştu—üretilmiş tek mekanik cep hesap makinesiydi. Nasıl çalıştığını göstermek için Hopp çalıştırma kolunu bir tur döndürerek sıfır pozisyonuna getirdi. Sayılar, Curta'nın yan tarafında bulunan ayarlama düğmeleriyle giriliyordu. Hopp sayıları 346'ya ayarladı ve kolu bir kez çevirdi. Ardından düğmeleri 217'ye ayarladı. Tekrar çevirdiğinde sayıların toplamı olan 563, makinenin üstünde okunuyordu. Hopp, Curta'nın çıkarma, çarpma, bölme ve diğer matematiksel işlemleri de yapabildiğini söyledi. Eskiden araba sporu meraklıları arasında oldukça popüler olduğundan da bahsetti. Yardımcı pilotlar gözlerini yoldan çok fazla ayırmadan sürüş zamanlarını çevirme kollarıyla kolaylıkla hesaplayabiliyorlardı. Sürgülü cetvelleri okumaktan daha kolay, yoldayken bir yere vurmaya daha az sebebiyet verir.

Curta bir sürgülü cetvel olmadığı halde, hesap yapmadaki hüneri ile kendisini matematiksel araç koleksiyoncularına sevdirmiş. Kullanır kullanmaz Hopp'un koleksiyonunda, en sevdiğim araç oldu. Başlangıç olarak hesap gerçek manada yapılıyor, sayıları giriyorsunuz ve bir kol hareketiyle sonuç beliriyor. Buna rağmen, bir İsviçre saati kesinliğinde çalışan 600 parçanın hareketiyle işleyen bir aletin, öğütücü gibi çalışması ise çok kabacaydı.

Daha da ilginç olanı Curta'nın etkileyici tarihi. Mucidi, Curt Herzstark aletin ilk örneğini İkinci Dünya Savaşı'nın son yıllarında Buchenwald toplama kampında esirken tasarlamış. Babası Yahudi bir Avusturyalı olan Herzstark'a, bir mühendislik dehası olduğunu bilen kamp yöneticileri tarafından hesap yapan makinesini geliştirmesi için



Curta reklamı, 1971

özel bir izin verilmiş. Herzstark'a eğer alet çalışırsa Hitler'e hediye edileceğini, ardından arî ırktan olduğu duyurulup hayatının bağışlanabileceği söylenmiş. Savaş sona erdiğinde ve Herzstark serbest kaldığında neredeyse bitirdiği planları kendisinde kalmış. Birçok yatırımcı bulma girişiminden sonra, Liechtenstein prensini ikna etmeyi başarmış ve ilk Curta, 1948 yılında imal edilmiş. O zamandan 1970'lerin başlarına kadar prenslikteki bir fabrikada 150.000 kadar imal edilmiş. Herzstark, 1988 yılına kadar Liechtenstein'daki evinde yaşadı ve 86 yaşında öldü.

Curta, 1950'ler ve 1960'lar boyunca var olan ve tam cevabı verebilen tek cep hesap makinesiydi. Ama hem Curta hem de sürgülü cetvel, elektronik cep hesap makinelerinin doğumuyla, dinozorların göktaşıyla yok olması gibi dehşet verici bir biçimde matematiksel araçlar tarihinden yok olma durumuna geldi.

Sürgülü cetvel kadar uzun süre hâkimiyet sahibi bir araçken bu kadar hızlı ortadan kaybolan başka bir nesne düşünmek zordur. 300 yıl boyunca heybetli bir hâkimiyetten sonra 1972 yılında Hewlett-Packard, HP-35'i piyasaya sürdü. Alet 'Yüksek kesinlikli taşınabilir elektronik sürgülü cetvel' olarak tanıtıldı ama sürgülü cetvele hiç benzemiyordu. Küçük bir kitap büyüklüğündeydi, kırmızı LED ekranı, 35 tuşu, bir açma kapama düğmesi vardı. Birkaç yıl sonra ikinci eller ve koleksiyona eklemek dışında kişisel amaçlı olarak sürgülü cetvel satın almak imkânsızdı.

Her ne kadar elektronik hesap makineleri pek değerli sürgülü cetvelleri yok etse de, Peter Hopp herhangi bir öfke hissetmiyor. Hesap makinelerinin ilk modellerini toplamaktan keyif alıyor. Konu hesap makilerine döndüğünde, bana kendi HP-35 modelini gösterdi ve 1970'li yılların başında makineyi ilk gördüğü zamanki anılarını anlatmaya başladı. O zamanlar, elektriksel iletişim şirketi olan Marconi'de mühendislik kariyerine yeni başlıyormuş. İş arkadaşlarından biri 365 sterline –o zamanda bu, deneyimsiz bir mühendisin yıllık maaşın yarısına eşit– bir HP-35 satın almış. 'O kadar değerliydi ki, masasında kilitli tutardı ve başka kimsenin kullanmasına asla izin vermezdi, dedi Hopp.' Ama arkadaşının bunu gizlilikle saklamasının başka bir nedeni daha vardı. Hesap makinesi kullanarak şirketin yıllık masraflarında % 1'lik bir azalma sağlayacak bir yol bulduğuna inanıyormuş. 'Patronlarla çok gizli bir toplantı yapmış. Her şey çok gizliydi' dedi Hopp. Aslında, iş arkadaşı hata yapmıştı. Hesap makineleri mükemmel araçlar değildirler. Eğer makineye 10 değerini girerseniz ve bunu 3'e bölerseniz 3.3333333 değerini bulursunuz. Ama bulduğunuz bu sayıyı tekrar 3

ile çarptığınızda başlangıçtaki sayıyı elde etmezsiniz; bulduğunuz sayı 9.9999999 olur. Hopp'un arkadaşı dijital hesap makinelerinde hiçten bir şeyler elde etmesine neden olan bir hatayı kullanmıştı. Hopp olayı hatırlarken gülüyordu: 'Plan sürgülü cetvel kullanılarak tekrar gözden geçirildiğinde gelişimin hayali olduğuna karar verilmişti.'

Hikâye Hopp'un neden sürgülü cetvellerin arkasından yas tuttuğunu gösteriyor. Araç kullanıcıya sayıları görsel olarak anlama olanağı sağlıyordu, daha cevabı bulmadan önce sonucun ne olacağına dair aşağı yukarı bir fikri oluyordu. Günümüzde, diyor Hopp, insanlar sayıları hesap makinesine doğruluk ya da yanlışlık herhangi bir sezgileri olmadan giriyorlar.

Yine de, dijital hesap makineleri, analog sürgülü cetveller konusunda bir ilerlemeydi. Cep hesap makinelerini kullanmak daha kolaydı, kesin cevabı veriyordu ve 1978 yılından sonra 5 sterlin altındaki fiyatlarla herkesin alabileceği bir araç oldu.

Sürgülü cetvellerin ortadan kayboluşundan bu yana otuz sene geçmesi, aslında hâlâ ortak olarak kullanıldıkları bir alanın bulunduğunu keşfettiğinizde şaşkınlık yaratacağı anlamına geliyor. Pilotlar uçakları uçururken onları kullanıyor. Pilotların kullandığı sürgülü cetvel dairesel, *'whizz wheel'* olarak biliniyor ve hızı, mesafeyi, zamanı, yakıt tüketimini, sıcaklığı ve hava yoğunluğunu ölçüyor. Bir pilot olabilmek için *whizz wheel* konusunda yeterli olmanız gerekiyor ki, kokpitlerde en son teknoloji bilgisayarlar kullanıldığı düşünüldüğünde kulağa tam manasıyla tuhaf geliyor. *Whizz Wheel* gerekliliği, pilotların üstlerinde bilgisayarları bulunmayan küçük uçakları da uçurabilme zorunluluğundan kaynaklanıyor. Yine de en modern jetleri uçuran pilotlar *Whizz wheel* kullanmayı tercih ediyorlar. Elinizde sürgülü bir cetvel olması, hesapları daha hızlı tahmin edebilip uçuşun sayısal değerleri hakkında görsel bir anlayışınızın olması demek. Jetleri uçurmak, pilotların yeteneği ve on yedinci yüzyılın başında icat edilmiş hesaplama aygıtı sayesinde daha güvenli.

İlk üretilen hesap makinelerinin astronomik fiyatları, onları lüks işletme ürünleri haline getirdi. Mucit Clive Sinclair ilk ürettiği ürüne Executive [Yönetici] adını verdi. Üst düzey Japon iş adamlarına yönelik pazarlama fikirlerinden birinde geyşalar kullanılıyordu. Eğlenceli bir gecenin ardından geyşa kimonosunun altından birdenbire faturayı hesaplaması için hesap makinesini çıkarıyordu. Ev sahibi de kendini makineyi almaya mecbur hissediyordu.

Fiyatlar düşürüldükçe hesap makineleri sadece hesaplama konusunda yardımcı olmaktan çıkıp çok kullanışlı eğlence araçlarına dönüşmeye başladı. 1975 yılında bu ileri teknoloji elektronik harikaları için birçok eğlenceli etkinlikten bahseden *The Pocket Calculator Game Book* kitabı yayınlandı. Kitap, 'Cep hesap makineleri hayatımıza yeni girmişti. Beş sene önce bilinmeyen bu araçlar televizyonlar ya da müzik setleri kadar popüler oldular' diyordu. 'Ancak, pasif eğlence araçlarından farklı olarak zekâ gerektiren girdiler ve belirli bir amaca yönelik kullanım gerektiriyorlar. Cep hesap makinesinin ne yapabileceği, bizim onlarla neler yapabileceğimiz kadar ilgimizi çekmiyor.' 1977 yılında en çok satanlar arasında yer alan *Fun & Games with Your Electronic Calculator* kitabında dijital LED rakamları, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8'i tersten okuyarak O, I, Z, E, h, S, g, L ve B harflerinden oluşan kelimelerin oluşturulabildiği bir sözlük verildi. En uzun kelimeler şunlardı:

Yedi harfliler:

OBELIZE	LEglBLE
ELEgIZE	BESIEgE
LIBELEE	BIgglSh
OBLIgEE	LOOBIES
gLOBOSE	LEgLESS
SESSILE	ZOOgEOg

Sekiz harfliler:	**Dokuz harfliler:**
ISOgLOSS	gEOLOgIZE
hEELLESS	ILLEglBLE
EggShELL	EISEgESIS

Şaşırtıcı bir biçimde, listede 'BOOBLESS' kelimesi bulunmaz—ergenlik çağındaki erkekler tarafından düz göğüslü kızlara karşı kullanılması muhtemel bu sözcük bir neslin matematikten soğumasına neden olurdu. *Fun & Games with Your Electronic Calculator* muhtemelen aritmetik yerine İngilizcenin gelişmesini sağlayan tek kitaptır.

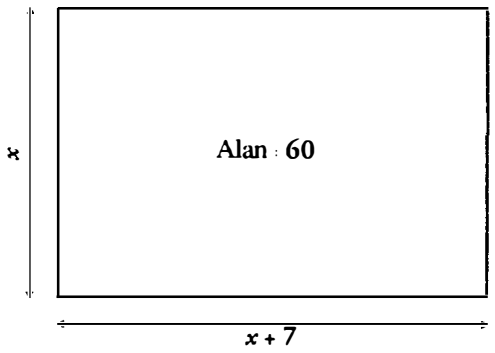
Daha eğlenceli bilgisayar oyunlarının piyasaya sürülmesinden sonra hesap makinesi oyunlarına karşı hissedilen heyecan yok oldu. Kısa süre sonra sayılar üzerinde sevgi oluşturmak yerine tam tersi bir etki yarattığı anlaşıldı—zihinsel aritmetik yeteneklerinin azalmasına neden oldu.

Logaritmik yazımdaki yenilikler sayesinde mümkün olan yepyeni bir keşif olduğu için, ikinci dereceden denklemler yepyeni sembollerle bir kalıba bürünmüş antik matematiğin başlıca ürünüdür. Modern yazımda, ikinci dereceden denklemlerin şuna benzediğini söyleyebiliriz.

$ax^2 + bx + c = 0$, x bilinmeyen a, b ve c herhangi bir sabit.
Örnek olarak, $3x^2 + 2x - 4 = 0$.

İkinci dereceden denklemler, başka bir deyişle x ve x^2 biçiminde yazılan denklemlerdir. Babil kil tabletinde bulunan şu problemi ele alalım:

60 birimkarelik dikdörtgen biçimindeki bir tarlanın bir kenarı diğer kenarından 7 birim büyüktür. Tarlanın kenarları hangi büyüklüktedir. Cevabı bulmak için aşağıdaki diyagramda olduğu gibi bir çizim yapmamız gerekir. Problem ikinci dereceden denkleme indirgenerek çözülür, $x^2 + 7x - 60 = 0$.



$60 = x(x + 7)$
$60 = x^2 + 7x$
$0 = x^2 + 7x - 60$

İkinci dereceden denklemlerin en elverişli özelliği tek bir formüldeki *a, b* ve *c'nin* yerine değerler vererek çözülebilmesidir:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

İşareti bir tane a + ve bir tane a – değeri için iki çözüm olduğu anlamına gelir. Babil probleminde $a = 1$, $b = 7$ ve $c = -60$ bu da bize 5 ve –12 olarak iki sonuç verir. Bir alan tanımlandığı için –12 cevabı anlamsızdır, bu nedenle cevap 5'tir.

İkinci dereceden denklemler alan hesapları dışında da kullanılır, özellikle Galileo Galilei'nin eğik Pisa kulesinden top gülleleri atarak denediği söylenen düşen cisimler teorisinde. Düşen cisimlerin mesafesini tanımlamak için kullandığı denklem ikinci dereceden denklemdir. O

andan itibaren ikinci dereceden denklemler dünyayı anlamak için o kadar önemli oldu ki, modern bilimin temelini oluşturduğunu söylemek hiç abartı olmaz.

Bütün bunlara rağmen, tüm problemler x^2 biçimindeki denklemlere indirgenemez. Bazıları x'in bir sonraki kuvvetini gerektirir: x^3. Bunlara üçüncü dereceden denklemler denir ve biçimi şöyledir:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ bilinmeyen a, b ve c ve d herhangi birer sabittir.

Örnek olarak, $2x^3 - x^2 + 5x + 1 = 0$.

Üçüncü dereceden denklemler, katı bir cismin üç boyutunun çarpılmasını gerektiren hacim hesaplarında ortaya çıkar. İkinci dereceden denklemlerden bir kademe yüksek olsa da üçüncü dereceden denklemleri çözmek çok daha zordur. İkinci dereceden denklemler binlerce yıl önce ortaya çıkmasına rağmen –örneğin Babilliler, cebir keşfedilmeden önce çözebiliyorlardı– on altıncı yüzyılın başında üçüncü dereceden denklemler matematikçilerin yeteneklerinin ötesindeydi. Her şey 1535 yılında değişti.

Rönesans İtalyası'nda bilinmeyen nicelik ya *x cosa* ya da 'şey' olarak adlandırılıyordu. Denklemler bilimi 'cosa sanat' olarak biliniyordu ve bunları çözen uzmanlara cosacılar ya da tam tercüme olarak 'şeyciler' deniyordu. Şeyciler sadece fildişi kulesindeki akademisyenler değildi, ayrıca yeni filizlenen ticaret sınıfının hesap ihtiyaçlarını gidermek için matematiksel becerilerini kiralayan tüccarlardı da. Bilinmeyenle uğraşmak rekabet gören bir işti ve tıpkı usta bir zanaatkâr gibi, cosacılar da tekniklerini gizli tutuyorlardı.

Gizliliklerine rağmen, 1535 yılında, iki cosacının üçüncü dereceden denklemlerin çözümünü keşfettiği söylentisi Bolonya'ya yayıldı. Cosacı topluluk için bu haber oldukça heyecan vericiydi. Üçüncü de-

receden denklemleri fethetmek kendi grupları içinde yükselmesini ve daha yüksek ücretlerle çalışmasını sağlıyordu.

Modern akademilerde çözülmemiş meşhur bir problemin çözüldüğünün duyurulması, makale halinde yayınlanması ya da basın konferansı biçiminde olurdu, ancak Rönesans'ta şeyciler halk karşısında matematiksel düello konusunda hemfikirdi.

13 Şubat'ta kalabalık, Bolonya Üniversitesi'nde Niccolò Tartaglia ve Antonio Fiore'nin mücadelesini izlemek için toplandılar. Yarışmanın kurallarına göre her katılımcı diğerinin yönelteceği 30 tane üçüncü dereceden denklem sorusuna cevap verecekti. Çözülen her denklem için yarışmacı rakibin ödediği bir ziyafete hak kazanacaktı.

Yarışma Tartaglia'nın yıkıcı zaferiyle sonuçlandı (adı 'kekeme' anlamına geliyordu ve aynı zamanda bir kılıç darbesi nedeniyle yüzünde oluşan bozukluk yüzünden bazı kelimeleri telaffuz etme konusunda engelli olduğu için onun lakabıydı da). Tartaglia, Fiore'nin tüm sorularını çözdüğü halde, Fiore, Tartaglia'nın tek bir problemini bile çözemedi. Üçüncü dereceden denklemlerin çözümünü ilk bulan kişi olarak Tartaglia, Avrupa çapındaki tüm matematikçilerin kıskandığı kişiydi, ama nasıl yaptığını kimseye açıklamayacaktı. Özellikle de, matematik tarihinin en renkli ve önemli karakterlerinden birisi olan Girolamo Cardano'nun ricalarına direndi.

Cardano'nun mesleği doktorluktu ve –uyguladığı tedavilerle uluslararası olarak tanınıyordu– bir keresinde İskoçya'ya seyahat edip ülkenin başpiskoposunun astımını tedavi etti. Aynı zamanda üretken bir yazardı. Hayat hikâyesinde, 131 basılmış, 111 basılmamış ve yeterince iyi olduğunu düşünmediği için 170 manuskript olduğunu belirtir. Kederli kişiler için bir inceleme olan *Consolation,* Avrupa'da en çok satılanlar arasında yer aldı ve edebiyat bilginleri tarafından 'Olmak ya da olmamak' monologu sırasında Hamlet'in elinde bulunan kitap olarak düşünülür. Aynı zamanda profesyonel astrologdu ve 'metoposcopy'yi

yani kişinin yüzündeki düzensizliklerden kişinin karakterini okuma yöntemini icat ettiği iddia edilir. Matematikte, Cardano'nun en büyük katkısı daha sonra değineceğim olasılık hesabını bulmasıdır.

Cardano, Tartaglia'nın üçüncü dereceden bir denklemi nasıl çözdüğünü öğrenmek konusunda o kadar istekliydi ki, yazdığı bir kitapta üçüncü dereceden bir denklemin çözümünü anlatıp anlatamayacağını öğrenmek için ona mektup yazdı. Tartaglia reddettiğinde, Cordano kimseye söylemeyeceğine söz vererek tekrar sordu. Tartaglia yine reddetti.

Tartaglia'dan üçüncü derece denklemin formülünü almak Cardano için bir takıntı haline gelmişti. En sonunda bir kurnazlık düşündü—Tartaglia'yı olası bir bağışçı olan Lombardy valisi ile tanıştırma bahanesiyle Milan'a davet etti. Tartaglia bu teklifi kabul etti, ama Milan'a ulaştığında vali şehir dışındaydı. Tartaglia sadece Cordano ile karşılaştı. Cordano'nun verdiği ardı arkası kesilmeyen rahatsızlıklardan yorulan Tartaglia, ona acıyarak eğer formülü kimseyle paylaşmazsa kendisine verebileceğini söyledi. Ama bu bilgiyi Cordano'ya aktardığı zaman, kurnaz bir kişi olan Tartaglia çözümü kasıtlı olarak 25 mısralık anlaşılması güç bir şiir biçiminde verdi.

Bu engele rağmen pek çok konuda yetenekli olan Cordano şifreyi çözdü ve sözünü hemen hemen tuttu. Çözümü sadece tek bir kişiye anlattı, kişisel yardımcılığını yapan Lodovico Ferrari adlı bir gence. Bu daha sonra bir sorun oldu, sebebi Ferrari'nin ağzı gevşek biri olması değildi, sebebi Ferrari'nin Tartaglia'nın metodunu geliştirmesi ve *dördüncü dereceden* denklemlerin çözüm yöntemini bulmasıydı. Bunlar x^4 kuvvetini içeren denklemlerdir. Örnek olarak, $5x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 6x + 3 = 0$. Dördüncü dereceden bir denklem iki tane ikinci dereceden denklemin çarpımı sonucu ortaya çıkar.

Cordano güç bir durumda kalmıştı—Tartaglia'ya verdiği söze ihanet etmeden Ferrari'nin keşfini yayınlayamazdı. Ama Ferrari'nin hak ettiği övgülere kavuşmasına da engel olamazdı. Cordano akıl-

lıca bir çıkış yolu buldu. Tartaglia'ya halk karşısında yenilen Antonio Fiore'nin aslında üçüncü dereceden denklemlerin çözümünü bildiği ve bunu ölüm döşeğinde olan Scipione del Ferro adında yaşlı bir matematikçiden öğrendiği ortaya çıktı. Cordano bunu del Ferro'nun ailesiyle kurduğu ilişki sonucu ve yaşlı matematikçinin yayınlamadığı notları inceleyerek öğrenmişti. Doğal olarak Cordano asıl ilk icat eden kişi itibarını del Ferro'ya ve ikinci icat eden kişi itibarını Tartaglia'ya vererek sonuçları yayınlamanın ahlaki açıdan yanlış olmadığını hissetti. Metod, Cordano'nun on altıncı yüzyılın en önemli cebir kitaplarından biri olan *Ars Magna* adlı kitabında yayınlandı.

Tartaglia, Cordano'yu asla affetmedi, öfkeli ve kederli bir adam olarak öldü. Buna karşılık Cordano 75 yaşına kadar yaşadı. Yıllar önce kendi yıldız falına bakarken kehanette bulunduğu tarih olan 21 Eylül 1576 yılında öldü. Bazı matematik tarihçileri sağlığının mükemmel olduğunu, sadece tahminleri doğru çıksın diye zehir içtiğini söylerler.

Karmaşıklığı arttırmak için x'in daha büyük kuvvetlerini aramak yerine denkleme ikinci bir bilinmeyen sayı da, y, ekleyebiliriz. Okul cebirinin gözdesi olan bu denklemler *eşzamanlı denklemler* olarak bilinirler ve genellikle iki bilinmeyenli iki denklemin çözümü biçiminde olurlar. Örnek olarak:

$y = x$

$y = 3x - 2$

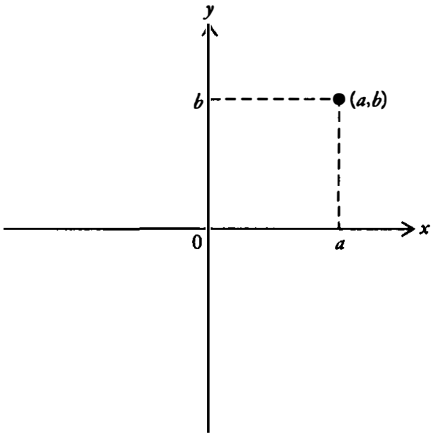
Bu denklemi çözmek için birinci denklemdeki değeri ikinci denklemde kullanırız. Bu durumda $y = x$ olduğu için:

$x = 3x - 2$ olur.

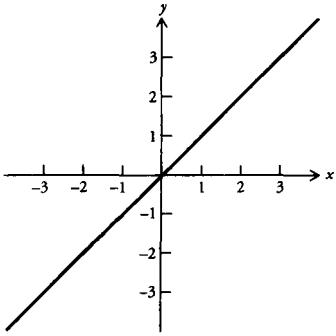
Bu da şuna indirgenir: $2x = 2$

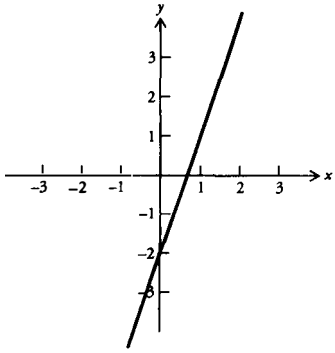
O halde $x = 1$, ve $y = 1$ olur.

İki bilinmeyenli herhangi bir denklemi görsel olarak da anlamak mümkündür. Birbiriyle kesişen bir dikey bir de yatay çizgi çizin. Yatay olanı x ekseni, dikey olanı y ekseni olarak tanımlayın. Eksenler 0 noktasında kesişir. Düzlemdeki herhangi bir nokta bu eksenler referans alınarak belirlenebilmektedir. Konum (a,b) x ekseninin a noktasında geçen yatay bir çizgi ve y ekseninin b noktasından geçen dikey bir çizginin kesişimi olarak tanımlanır.



x ve y biçimindeki herhangi bir denklemde x ve y için değer aldığı ve tanımlı olduğu (x,y) noktaları grafik üzerindeki çizgilerle tanımlanır. Örneğin, (0,0), (1,1), (2,2) ve (3,3) noktalarının tamamı yukarıdaki $y = x$ denkleminde tanımlıdır. Eğer bu noktaları grafik üzerinde işaretleyecek ya da çizecek olursak $y = x$ denkleminin grafiği sağdaki grafikte olduğu gibi doğrusal olur. Aynı şekilde ikinci denklemin, $y = 3x - 2$, grafiğini de çizebiliriz. X'e değerler vererek y değerlerini buluruz, (0, –2), (1, 1), (2, 4) ve (3, 7) noktaları denklemin oluşturduğu grafikteki doğrunun noktaları olur. Bu da y eksenini –2 noktasında kesen doğrusal bir grafiktir.





Eğer iki doğruyu üst üste yerleştirecek olursak ikisinin (1, 1) noktasında birleştiğini görürüz. O halde, eşzamanlı bu denklemin çözümünün, denklemlerin tanımladığı doğruların kesişim noktası olduğunu görebiliriz.

Denklemlerin doğrularla gösterilebileceği düşüncesi Descartes'ın *La Geometrie* kitabının kazandırdığı en büyük gelişmeydi. 'Kartezyen' koordinat sistemi devrimsel nitelikteydi çünkü daha önce haritası çıkarılmamış olan geometri ve cebir arasındaki yolları açığa çıkarmıştı. İlk defa, birbirinden farklı iki çalışma alanı birbiriyle ilişkilendirilmekle kalmamış birbirinin yerine kullanılabileceği ortaya çıkmıştı. Descartes'ı harekete geçiren sebeplerden birisi, hem cebiri hem de geometriyi daha anlaşılır hale getirmekti, kendisinin de söylediği gibi, 'Cebir ve geometri hiçbir pratik uygulaması olmayan son derece soyut konularla ilgili gözüküyorlar, [geometri] her zaman hayal gücünü son derece yormadan anlaşılamayan şekillerin incelenmesine bağlıdır... [cebir] ise kesin kurallar ve sayılara öylesine bağlıdır ki aklı geliştirmesi gereken bir bilim olmak yerine baskı altına alan anlaşılması güç bir sanat haline gelmiştir.' Descartes aşırı çaba harcamanın hayranı değildi. Tarihin gördüğü en uykucu kişiliklerden birisiydi, fırsat bulduğunda gün ortasına kadar yataktan çıkmamasıyla ünlüydü.

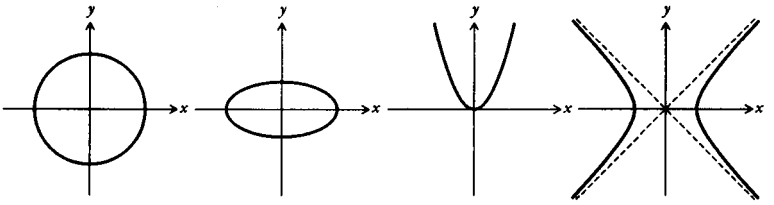
Cebir ve geometrinin Kartezyen evliliği, matematik tarihinde kendini tekrarlayan soyut fikirlerle uzamsal geometrinin etkileşimi için güçlü bir örnektir. Fermat'ın son teoreminin ispatı gibi birçok etkileyici ispat geometriye dayanır. Aynı biçimde, cebirsel bir biçimde ifade edilerek 2000 yıllık geometri sorularına yeni bir yaşam hakkı tanınmıştır. Matematiğin en heyecan verici özelliklerinden birisi de birbirinden farklı gözüken konuların nasıl ilişkili oldukları ve coşku uyandırıcı keşiflere olanak sağlamalarıdır.

Descartes 1649 yılında İsveç kraliçesi Christina'nın akıl hocalığını yapmak için Stockholm'e yerleşti. Kraliçe erkenciydi. Hem İskandinavya'nın kışına hem de sabahları saat 5'te kalkmaya alışık olmayan Descartes yerleştikten kısa bir süre sonra zatürre hastalığına yakalandı ve öldü.

Descartes'ın x ve y biçimindeki denklemlerin doğrular biçiminde yazılabileceği düşüncesinin en belirgin sonuçlarından birisi farklı türdeki denklemlerin farklı türde grafikler oluşturduğudur. Şimdi bunları sınıflandırmaya başlayabiliriz:

$y = x$ ve $y = 3x - 2$ gibi sadece x ve y'lerden oluşan denklemler daima düz çizgiler oluştururlar.

Buna karşılık, x^2 ve/veya y^2 gibi terimlerden oluşan ikinci dereceden denklemler daima şu dört çeşit eğriden birisini oluştururlar: Çember, elips, parabol ya da hiperbol.



Çember *Elips* *Parabol* *Hiperbol*

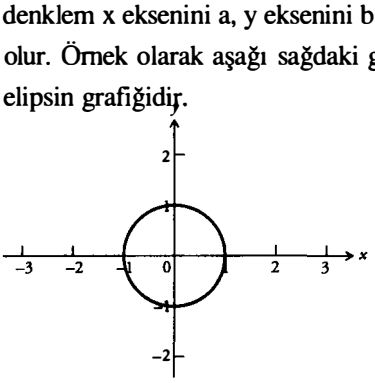
İçinde x'ler ve y'ler olan ikinci derece denklemler ile çizilebilen tüm çember, elips, parabol ya da hiperboller, bu eğrilerin hepsi gerçek dünyada bulundukları için bilime faydaları olmuştur. Parabol havada uçan bir cismin (hava direncini ihmal eder ve tek çeşit bir çekim alanı olduğunu var sayarsak) yörüngesinin biçimidir. Örnek olarak bir futbolcu topa vurduğunda top bir parabolü takip eder. Elips, gezegenlerin güneş çevresinde yaptığı harekettir ve güneş saatinin gölgesinin ucunun gün içinde yaptığı hareket ise hiperboldür.

Aşağıdaki ikinci dereceden denklemi çemberler ve elipsler çizen bir makine gibi düşünün:

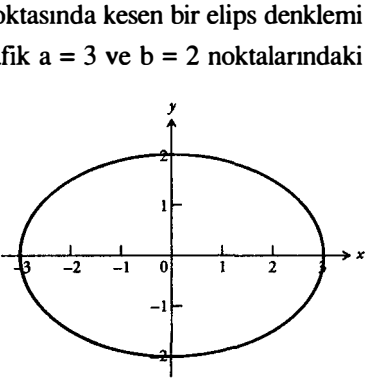
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \; a \text{ ve } b \text{ sabitlerdir.}$$

Makinenin iki düğmesi var, bir tane a ve bir tane b. Şimdi a ve b değerlerini ayarlayarak 0 merkezli istediğimiz herhangi bir çember ya da elipsi çizebiliriz.

Örneğin, a'nın b'ye eşit olduğu durumlarda denklem a yarıçaplı bir çemberdir. a = b = 1, olduğunda denklem $x^2 + y^2 = 1$ olur ve aşağıdaki gibi yarıçapı 1 olan ve birim çember olarak da bilinen çember oluşur. Ve a = b = 4, olduğunda denklem $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$ olur, bu da 4 yarıçaplı çember oluşturur. Diğer taraftan a ve b birbirinden farklı olduğunda denklem x eksenini a, y eksenini b noktasında kesen bir elips denklemi olur. Örnek olarak aşağı sağdaki grafik a = 3 ve b = 2 noktalarındaki elipsin grafiğidir.



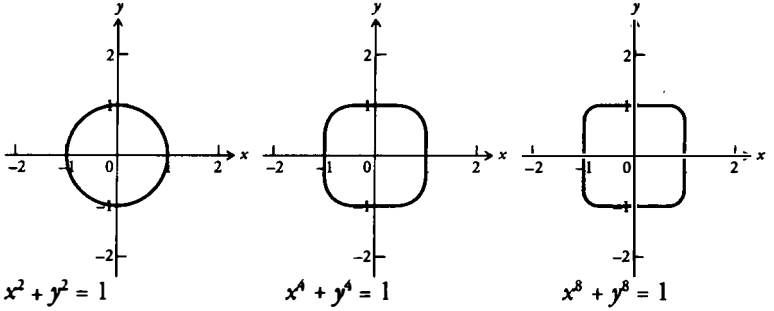
$x^2 + y^2 = 1$



$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

1818 yılında Fransız matematikçi Gabriel Lame çember ve elips formülü üzerinde oynamaya başladı. Eğer a ve b değerleri yerine üsleri değiştirirse neler olacağını merak ediyordu.

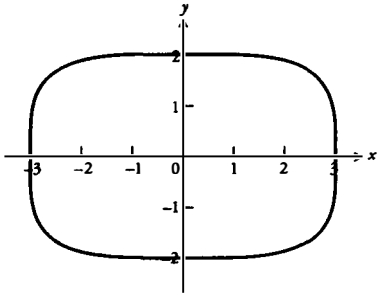
Bu yeni değişikliğin etkisi çok etkileyiciydi. Örnek olarak $x^n + y^n = 1$ denklemini ele alalım. N = 2 iken denklem birim çember oluşturur. Aşağıda n = 2, n = 4 ve n = 8 değerlerini grafiği vardır.



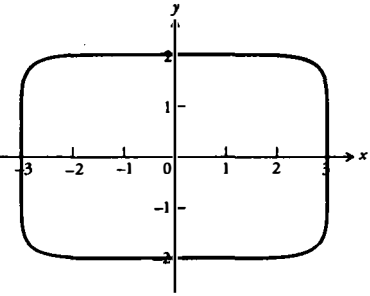
N=4 değeri için eğri Babybel peynirinin kutuya sıkıştırılmış halinin yukarıdan görüntüsü gibidir. Kenarları düzleşmiş ve oval dört köşesi vardır. Sanki daire kare olmaya çalışıyormuş gibidir. N değeri 8 olduğunda eğri kareye daha çok benzer.

Aslında n değerini yükselttikçe eğri kareye daha da yaklaşır, limitte, $x^\infty + y^\infty = 1$ iken denklem karedir (Eğer daireden kare yapma adını hak eden bir durum varsa bu kesinlikle odur).

Aynı durum elips için de geçerlidir. Eğer $(\frac{x}{3})^n + (\frac{y}{2})^n = 1$ olarak tanımlanan elipsi alır ve n değerini arttırırsak elips giderek dikdörtgene dönüşmeye başlar.



$(\frac{x}{3})^4 + (\frac{y}{2})^4 = 1$



$(\frac{x}{3})^8 + (\frac{y}{2})^8 = 1$

***

Stockholm şehir merkezinde Sergels Torg isimli bir halk meydanı vardır. Alt katı yayalara, üstü trafiğe ayrılmış olan dikdörtgen biçiminde bir alandır. Eylemcilerin siyasi gösteriler için ve sporseverlerin İsveç milli takımı büyük bir başarı elde ettiğinde kutlamak için toplandığı alan burasıdır. Meydanın baskın özelliği ise 1960'larda yapılmış olan ve halkın eleştirmeyi çok sevdiği 37 metre yüksekliğindeki geceleri aydınlatılan cam ve çelik dikilitaştır.

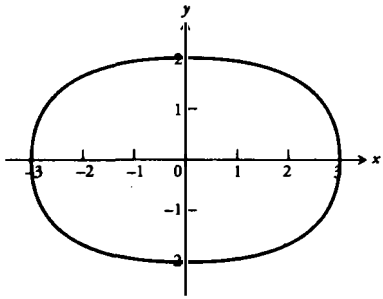
1950'lerde Sergels Torg'u tasarlayan şehir planlamacıları geometrik bir problemle karşı karşıya geldiler. Dikdörtgen biçimindeki bir alana yapılacak en iyi yürüyüş yolu biçimi nedir diye sordular kendilerine. Çember kullanmak istemiyorlardı çünkü dikdörtgen biçimindeki alanı tamamen kullanamıyorlardı. Ama oval ya da elips de kullanmak istemiyorlardı çünkü sivrileşen uçlarda hareket akışı engelleniyordu. Cevap arayışı içinde, projede çalışan mimarlar yurt dışına baktılar ve Danimarka'daki en meşhur üçüncü adam olan (fizikçi Niels Bohr, yazar Karen Blixen'den sonra) Piet Hein'a danıştılar. Piet Hein, İkinci Dünya Savaşı sırasında Nazilere karşı direnmek için yayınlanan vecizeler biçimindeki bir çeşit şiir olan Grook'un yaratıcısıydı. Aynı zamanda bir

ressam ve matematikçi olarak gerekli olan, sanatçı duyarlılığı, detaylı düşünme ve bilimsel anlayış özelliklerinin doğru bir karışımına sahip olduğu için İskandinavya planlama sorununa taze fikirler sağladı.

Piet Hein'ın çözümü basit matematiği kullanarak elips ve dikdörtgen arası bir cisim bulmaktı. Bunu gerçekleştirmek için önceki sayfada açıkladığım yöntemi kullandı. Sergels Torg'daki dikdörtgen biçimindeki alana uygun bir şekil bulabilmek için elips denklemindeki üs değerini değiştirdi. Cebirsel terimler ile, Lame'in elips denklemindeki n değerinde yaptığı değişiklikleri yaptı:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$$

Önceki sayfada gösterdiğim gibi n değeri 2'den sonsuza doğru arttırıldığında çember biçimi kareye ya da elips dikdörtgene dönüşür. Piet Hein, oval ve dik kenarlar arasındaki sanatsal anlamda en iyi uyuşmanın n değerinin 2.5 alındığında meydana geldiğine karar verdi. Bu yeni biçime 'squircle' (karedaire) adını verebilirdi ama o süper elips adını verdi.



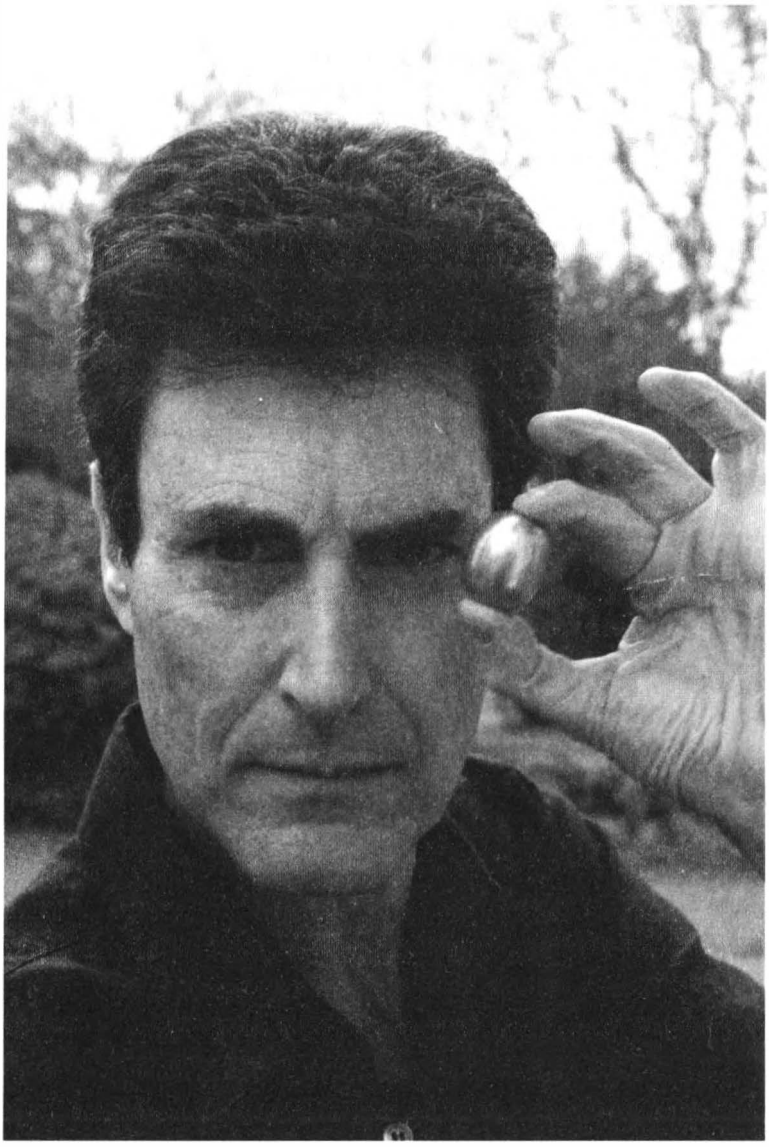
$$\left(\frac{x}{3}\right)^{2.5} + \left(\frac{y}{2}\right)^{2.5} = 1$$

Zarif bir matematik objesi olmanın ötesinde Piet Hein'ın süper elipsi daha derin insani bir noktaya temas etti—çevremizi saran düz ve kıvrımlı nesnelerin süregelen çatışmasına. Kendisi şöyle der: 'Tüm medenileşme süreci içinde iki çeşit eğilim vardır, biri düz çizgiler ve dörtgenler diğeri ise dairesel olanlar. Düz hatları olan nesneler bir arada uyumlu olur ve yerden kazandırırlar. Ve dairesel olanları –fiziksel ve zihinsel olarak– daha rahat hareket ettiririz. Ama ara bir formun daha uygun olduğu zamanlarda birini ya da ötekini seçmekle sınırlanmış durumdayızdır. Bu problemin çözümü süper elipstir. Ne dairesel ne de dörtgendir, ikisinin arasıdır. Ama yine de belirli, tanımlı ve bir bütündür.'

Stockholm'ün süper eliptik yürüyüş yolu başka mimarlar tarafından da kopyalandı, en belirgin olanı 1970 ve 1986 yıllarında dünya kupasının oynandığı Mexico City'deki Azteca stadyumudur. Aslında Piet Hein'ın eğrisi modaya da yayılarak 1970'li yılların İskandinavya mobilya tasarımının bir unsuru haline geldi. Hâlâ Piet Hein'ın oğlu tarafından işletilen şirketten süper eliptik tabaklar, tepsiler ve kapı kolları satın almak mümkün.

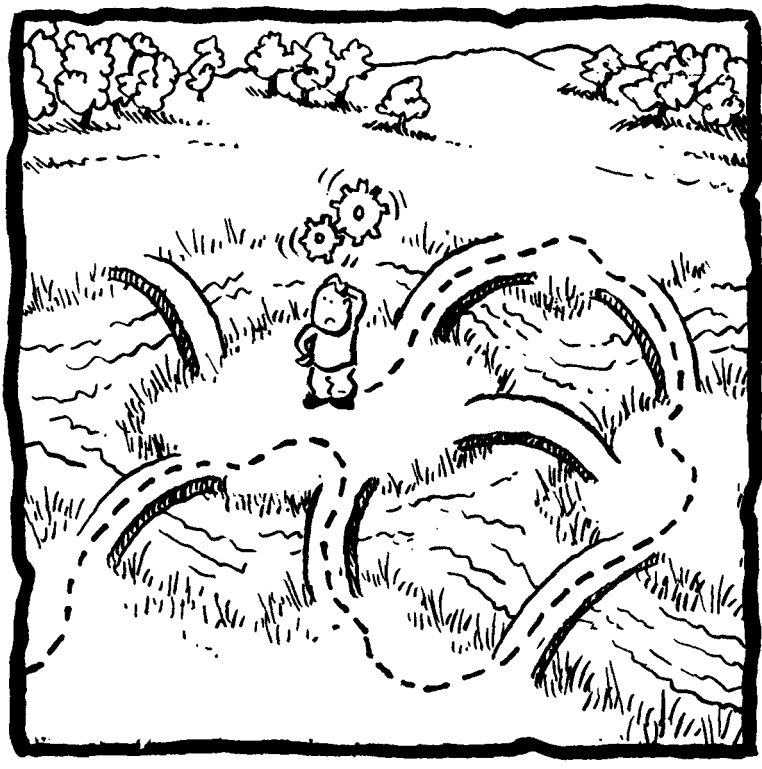
Piet Hein'ın eğlenceli zihni süper elipste durmadı. Bir sonraki proje olarak şeklin üç boyutlu halinin neye benzeyeceğini merak etti. Sonuç küre ve kutu arası bir şey oldu. Buna 'sphox' adını verebilirdi. Ama o buna 'süper yumurta' adını verdi.

Süper yumurtanın beklenmedik özelliklerinden biri düşmeden uçlarının üzerinde durabilmesidir. 1970'lerde Piet Hein, paslanmaz çelikten yaptığı süper yumurtaları 'yontu, takı ya da tılsım' olarak piyasaya sürdü. Merak uyandıran güzel nesnelerdi. Benimki şöminemin üzerinde duruyor. Uri Geller'da da bir tane var. Ona John Lennon vermiş ve verirken New York'daki dairesini ziyaret eden uzaylılardan



Süperyumurta: Uri Geller

aldığını söylemiş. 'Bunu sakla' demiş Lennon Geller'a. 'Benim için fazla tuhaf. Eğer bu benim başka bir gezegene gitme biletimse, oraya gitmeyi istemiyorum.'



BÖLÜM ALTI

Oyun Zamanı

Maki Kaji, Japonya'da sayı bulmacaları üzerinde uzmanlaşmış bir dergiyi yönetiyor. Kaji kendisini, insanları eğlendirmek için rakamları sanatının aracı olarak kullanan biri olarak tanımlıyor. 'Kendimi bir matematikçiden çok bir sinema ya da tiyatro yönetmeni olarak hissediyorum' diyor. Kaji ile Tokyo'daki ofisinde buluştum. Bir matematikçide görmeyi umacağınız biraz ciddi biraz da görev takıntılı karakter özelliği onu başarılı bir işadamına dönüştürmüştü. Kaji son moda bej bir ceketin altına siyah bir tişört giymiş ve John Lennon gözlükleri takmıştı. 57 yaşında uçları kesilmiş beyaz keçi sakalı ve favorileri vardı ve her zaman neşeli bir biçimde gülümsüyordu. Kaji bana hevesle sayı bulmacaları dışındaki diğer hobilerinden bahsetti. Mesela, lastik bant biriktiriyordu ve Londra'ya yakın zamanda yaptığı ziyaretinde kendisi için görkemli bir kazanç saydığı WH Smith'den 25 gramlık ve bağımsız bir kırtasiyeciden de 100 gramlık lastik bant almıştı. Aynı zamanda aritmetik olarak güzel bulduğu araba plakalarının fotoğraflarını çekiyordu. Japonya'da araba plakaları iki basamaklı iki sayıdan oluşur. Kaji yanında her zaman küçük bir fotoğraf makinesi taşıyor ve ilk sayının rakamlarını çarptığında ikinci sayıyı veren bütün plakaların fotoğraflarını çekiyor.

Japonya'daki hiçbir arabanın plakasındaki son iki sayının 00 olmadığını düşünerek Kaji'nin fotoğrafladığı her plakanın rakamı çarpım tablosu üzerinde 1 den 9'a kadar olan aralıkta yer almaktadır. Örnek olarak 11 01, 1 x 1 = 1 olarak düşünülebilir. Buna benzer ola-

rak 12 02, 1 x 2 = 2. Listeyi devam ettirdiğimizde mümkün olan 81 kombinasyonu bulabiliriz. Kaji şimdiden 50 tane fotoğraflamış bile. Çarpım tablosunun hepsini topladığında bunları sergilemeyi düşünüyor.

Rakamların eğlence unsuru olması fikri matematiğin kendisi kadar eskidir. Örnek olarak, Antik Mısır'dan kalan Rhind papirüsü, 79. soruya cevap olarak aşağıdaki listeyi vermektedir. Papirüsteki diğer soruların aksine, bunun belirgin bir pratik uygulaması yoktur.



Kaji, Tokyo araba parkında 3 x 5=15'in fotoğrafını çekti.

Evler 7

kediler 49

fareler 343

buğdaylar 2401 (Orijinal metinde yanlışlıkla 2301 olarak yazılmıştır)

Hekat 16.807 (Antik Mısır'da kullanılan birim ölçüsü)

Toplam 19.607

Liste, her biri yedi farklı yerden gelmiş, yedi buğday yemiş yedi fareyi yiyen yedi kedinin yaşadığı yedi evin envanteridir. Sayılar sabit bir değerin bir önceki terimle çarpılarak hesaplanmasıyla oluşan *geometrik dizi*'yi oluştururlar, bu örnekte sayı yedidir.

Evlerden yedi kat fazla kedi, kedilerden yedi kat fazla fare, farelerden yedi kat fazla buğday, buğdaydan yedi kat fazla hekat vardır. Toplam sayıları $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$ biçiminde yeniden yazabiliriz.

Ancak bu diziye karşı koyamayanlar sadece Mısırlılar değildir. Neredeyse tam olarak aynı Anne Kaz çocuk şarkısının içinde de vardır.

St Ives'e giderken
yedi karısı olan bir adamla tanıştım
her bir kadının yedi tane heybesi vardı
her bir heybede yedi tane kedi
her bir kedinin yedi tane yavrusu vardı
yavrular, kediler, heybeler, kadınlar
St Ives'e kaç kişi gidiyorlardı.

Bu dizeler İngiliz literatüründe gelmiş geçmiş en aldatıcı soruydu, çünkü adam ve onun kadın ve heybe içinde mahsur kalmış kedi ailesinden oluşan güruh büyük ihtimalle St Ives'ten geliyorlardı. Yine de, seyahat yönü ne olursa olsun, yavruların, kedilerin, heybelerin ve kadınların toplam sayısı $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = 2800$'dü.

Başka bir daha az bilinen bulmacalı soru Leonardo Fibonacci'nin on üçüncü yüzyılda yazdığı *Liber Abaci*'de bulunur. Bu versiyon Roma'ya giden yedi kadın ve onların yanındaki artan sayıda eşek, heybe, ekmek somunu, bıçak ve bıçak kınından oluşmaktadır. Ekstra 7^6 sayısı seriyi 137.256 rakamına ulaştırır.

Yedi sayısının artışındaki gücün, çeşitli yüzyıllarda ve çeşitli koşullarda ortaya çıkmasındaki çekicilik nedir? Her bir örnek geometrik dizilerin süper hızlı artışını göstermektedir. Kafiyeler küçük sayılardan nasıl büyük olanlara ulaşılabileceğini şairane bir yolla gösterir. İlk duyduğunuzda heybelerin, kedilerin ve yavruların neredeyse 3000'den küçük bir miktarda olduğunu sanıyorsunuz. Rhind papirüsleri ve Liber Abaci'deki eğlenceli matematik soruları benzer matematiksel bir kavrayışın varlığına işaret eder. Ve yedi sayısı, bu tür problemlerde özel bir nedenden dolayı yer alıyor olarak gözükse de aslında bu konudan tamamen bağımsızdır. Herhangi bir sayıyı alıp kendiyle birkaç kere çarptığınızda sayı hızla artık takip edemeyeceğimiz bir seviyeye ulaşır.

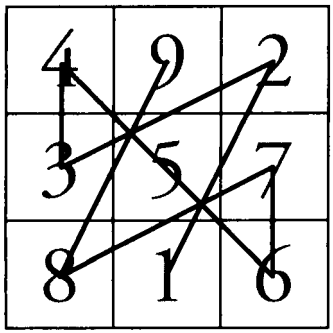
En küçük sayı olan 2'yi kendisiyle çarpmaya başlarsak sonuç baş döndürücü bir hızla gökyüzüne kadar ulaşır. Satranç tahtasının köşesindeki bir kareye bir buğday tanesi yerleştirerek başlayın ve her bir kareye bir öncekinin iki katı olacak şekilde buğday tanesi yerleştirerek devam edin. Son kareyi doldurmak için kaç tane buğday tanesine ihtiyacınız vardır? Muhtemelen birkaç traktör ya da konteynır dolusu mu? Satranç tahtasında 64 kare olduğuna göre bu da 2 sayısını kendisiyle 63 kere çarpmamız gerektiği anlamına gelir yani 2^{63}'e eşittir. Ölçü birimi olarak, bu miktar dünyanın günümüz buğday üretiminin 100 kat fazlasıdır. Diğer bir deyişle siz satranç tahtasına Büyük Patlama'dan hemen sonra buğday tanelerini saymaya başlasaydınız 13 milyon yıl sonra hâlâ 2^{63}'ün onda birini bile saymamış olurdunuz.

Matematik bulmacaları, kafiyeler ve oyunlar şu anda topluca eğlenceli matematik olarak bilinmektedir. Dokunulamayacak kadar karmaşık matematiksel teorilerle ilişkili olabilmelerine rağmen, sıradan bir insanın bile kolayca anlayabileceği kadar geniş ve canlı olma özelliğine sahiptir. Ya da herhangi bir teoriyi içermezler bile ama sayıların ne kadar muhteşem olduklarına dair bir hayranlık duygusu uyandırırlar, tıpkı plakaların fotoğraflarını toplamanın verdiği heyecan gibi.

Eğlenceli matematik tarihindeki dönüm noktasının M.Ö. 2000 yıllarında Çin'in Sarı Nehir kıyılarında meydana geldiği söylenebilir. Efsaneye göre İmparator Yu nehirden dışarıya bir kaplumbağanın çıktığını görür. Kamının altında siyah ve beyaz benekleri olan kutsal bir kaplumbağadır bu. Benekler ilk dokuz sayıyı göstermektedirler ve kaplumbağanın kamında (eğer noktalar Arap sayılarıyla yazılmış olsalardı) A'daki gibi gözüken bir sistem oluştururlar.

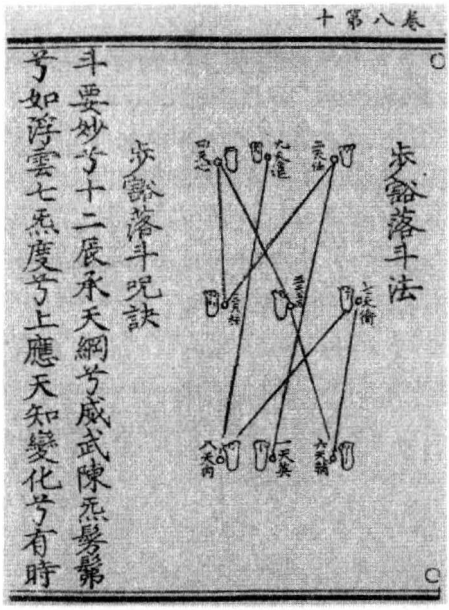
4	9	2
3	5	7
8	1	6

A



B

Bunun gibi 1'den başlayan ardışık sayıların satır, sütun ve köşeden köşeye her bir parçanın toplamının birbirine eşit olacak şekilde yerleştiği kareler *sihirli kare* olarak bilinir. Çinliler bu kareye *Lo Shu* derler (Satır, sütun ve köşeden köşeye toplamları 15 eder). Çinliler *Lo Shu*'nun evrenin iç dengesini sembolize ettiğine inanırlar ve onu kehanetler ve tapınmalar için kullanırlar. Örnek olarak, birden başlayarak sırasıyla karenin üzerindeki sayıların üzerinden bir çizgiyle geçecek olursanız Grafik B'deki gibi bir desen elde edersiniz, bu desen size Taocu rahiplerin tapınaklardaki hareket biçiminin talimatını verir. *Yubu* olarak adlandırılan bu desen aynı zamanda Çin estetik felsefesi olan *Feng Shui*'nin bazı kurallarının altını çizer.



Üstünde yubu olan Taocu tahta kalıp baskısı

Lo Shu'nun mistik tarafını gören tek kültür Çin değildi. Sihirli kare Hindular, Müslümanlar, Yahudiler ve Hıristiyanlar için ruhani önemi olan bir obje olmuştu. İslam kültürü en yaratıcı kullanımlarını bulmuştur. Türkiye'de ve Hindistan'da bakirelerin savaşçıların kıyafetlerinin üstüne bu sihirli kareyi nakşetmeleri gerekliydi. Doğum sırasında bir kadının rahmi üzerine sihirli kare konulursa doğumun kolay geçeceğine inanılırdı. Hindular bunları koruyucu muskalar olarak takarlardı ve Rönesans gökbilimcileri bunu güneş sistemimizdeki gezegenlerle bağdaştırmışlardı. Atalarımızın büyücülüğe olan meyilleriyle alay etmek kolaydır ama modern insanı sihirli kareye duyulan bu ilgiyi anlayabilmiştir. Hem basit hem de kurnazca karmaşık olan sihirli kare matematiksel mantra gibidir, sonsuz düşüncenin nesnesidir ve düzensiz bir dünyada, düzenin ifadesini içinde barındırır.

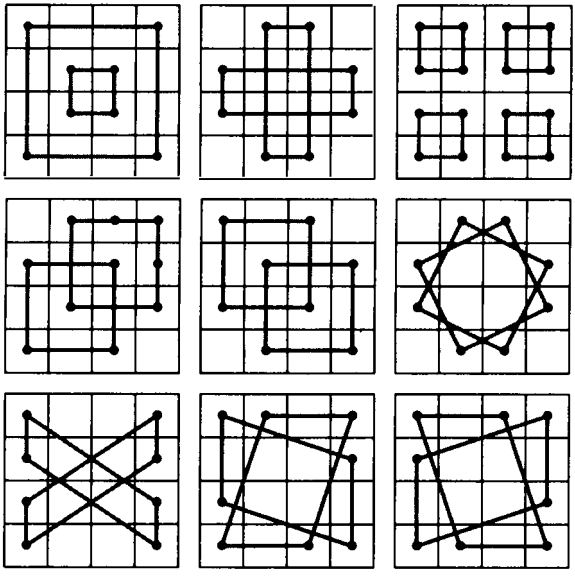
Sihirli karelerin en keyif veren yönlerinden birisi sadece 3 x 3 ölçeğiyle sınırlandırılmamış olmasıdır. 4 x 4'lük çok bilinen bir örnek Albrecht Dürer'in bir çalışmasında yer alır. Dürer, *Melankoli* I'e aşağıda yapıldığı yılla tanınan 4 x 4 bir kare ekler, ağaç baskını n üzerine 1514 yılı kazınmıştır.



Melankoli 1: Dürer'in ünlü ağaç baskısında kendisini çevreleyen bir pergel, bir küre, bir terazi takımı, bir kum saati ve bir sihirli kare gibi matematiksel ve bilimsel nesnelerin arasında düşüncelere dalmış bir melek resmedilmiştir. Sanat tarihçileri, özellikle mistisizme eğilimli olanlar, uzun yıllar boyunca resmin orta sol tarafında bulunan ve Dürer'in beşgeni diye bilinen geometrik objenin sembolik açıklamasını düşünmüşlerdir, uzun yıllar boyunca böyle bir şeyin nasıl olup da yaratılabileceğini düşünmüşlerdir.

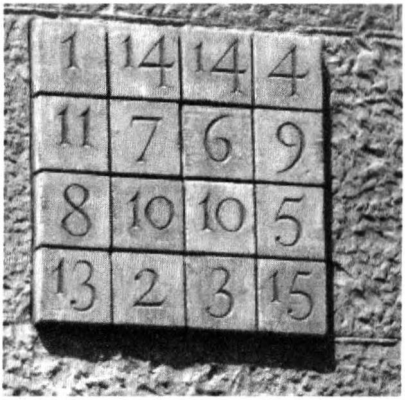
Dürer'in karesi aslında sihir üstü bir çalışmadır. Yalnızca satır, sütün ve çaprazların toplamı 34 olmakla kalmamış, aynı zamanda aşağıdaki karelerde noktalarla işaretlemiş ve birleştirilmiş olan sayıların toplamı da aynı sayıya ulaşmıştır.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1



Dürer'in karesinde ortaya çıkan desenler inanılmazdır ve ne kadar çok bakarsanız o kadar fazlasını görürsünüz. Örnek olarak birinci ve ikinci satırdaki sayıların kareleri toplamı 748'dir. Aynı sonuca 3. ve 4. satırları toplayarak da ulaşırsınız ya da 1. ve 3. satırları ya da 2. ve 4. satırları, ya da iki köşegendeki sayıların karesini. İnanılmaz!

Daha çok şaşırmak isterseniz Dürer'in karesini 180 derece çevirin. 11, 12, 15, 16 sayılarının bulunduğu karelerden 1 çıkartın. Sonuç şu şekilde olacaktır:



İmge, Antoni Gaudi tarafından çizilen, Barselona'daki Sagrada Familia katedralinin duvarından alınmıştır. Gaudi'nin karesi aynı sayı iki kere tekrarlandığı için sihirli değildir ama yine de oldukça özeldir. Satırlar sütunlar ve köşegenlerin toplamı, İsa'nın öldüğü yaş olan 33'e eşittir.

Sihirli karelerle oynayarak ve desenlerin uyumuna hayret ederek eğlence dolu saatler geçirilebilir. Aslında matematiğin hiçbir bölümü bu kadar uzun bir süre boyunca profesyonel olmayan matematikçilerin ilgisini çekmemiştir. Sihirli kareler on sekizinci ve on dokuzuncu yüzyıllarda serpilmişlerdir. En ünlü meraklılarından biri Amerika'nın kurucularından olan Benjamin Franklin, Pennsylvania meclisinde henüz genç bir sözcüyken tartışmalardan o kadar çok sıkılmıştı ki kendi karesini icat etmişti. En iyi bilinen karesi sonraki sayfada gösterilen henüz genç bir çocukken geliştirdiğini söylediği 8 x 8 ölçekli olandı. Bu karede Franklin, sihirli kare teorisine kendi buluşu olan bir sihir daha eklemişti: 'Bozulmuş köşegenler' aşağıdaki şekilde A ve B olarak gösterilen siyah ve gri karelerdeki rakamlardır. Bu karesi köşegenler üzerindeki rakamların toplamı 260 olmadığı için tam bir sihirli kare değildi ama yeni geliştirdiği bozulmuş köşegenlerin toplamı ediyordu. C, D, E'deki siyah karelerin toplamı ve E'deki gri karelerin toplamı ve elbette tüm satır ve sütunların toplamı da 260 yapıyordu.

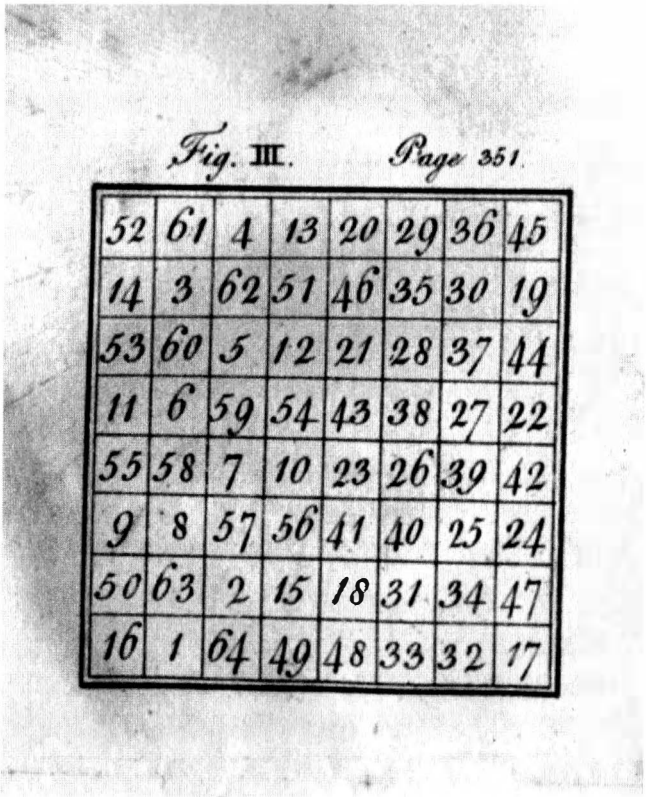
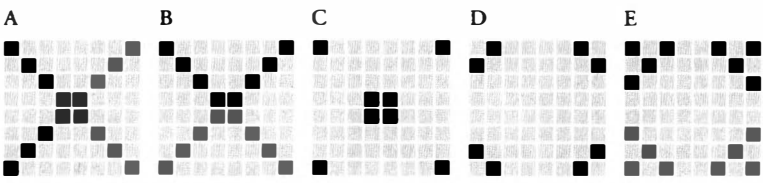


Fig. III. Page 351.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

1769'da yayınlanan bir mektubunda Benjamin Franklin sihirli kareler hakkındaki bir kitaba yorum yapmıştı. 'Gençlik dönemlerimde, bu tarzda sihirli kareleri yapmaktan keyif alırdım, kendimi iyiden iyiye geliştirmiştim, öyle ki makul boyuttaki herhangi bir sihirli karenin içini yazı yazar bir hızla yatay, dikey ve çapraz olarak karelerin toplamının birbirine eşit olacak şekilde doldurabiliyordum, fakat bunları yaygın ve kolay bir şey olarak gördüğüm için beni yeterince tatmin etmiyorlardı. Daha değişik özellikleri olan, daha zorlarını yapmak konusunda başarılı olmalıydım.' 1769 yılında Philadelphia'da yayınladığı Elektrik Üzerine Deneyler ve Gözlemler *adlı kitabında yukarıdaki karesini okuyucularıyla paylaştı.*

Franklin'in karesi çok daha ayartıcı simetrilerden oluşuyordu. Her 2 x 2 ölçekli alt karedeki sayıların toplamı 130'dur, aynı şekilde merkezden aynı uzaklıkta olan her 4 sayının toplamı da. Franklin 40'lı yaşlarında bir başka kare daha geliştirdiğini söylemişti. Tek bir gecede, 'Herhangi bir sihirbazın yapabileceği en sihirli kareden çok daha sihirli bir kare' olduğunu ileri sürdüğü 16 x 16 gibi inanılmaz bir boyutta bir sihirli kareyi geliştirdi (Ekler Üç).

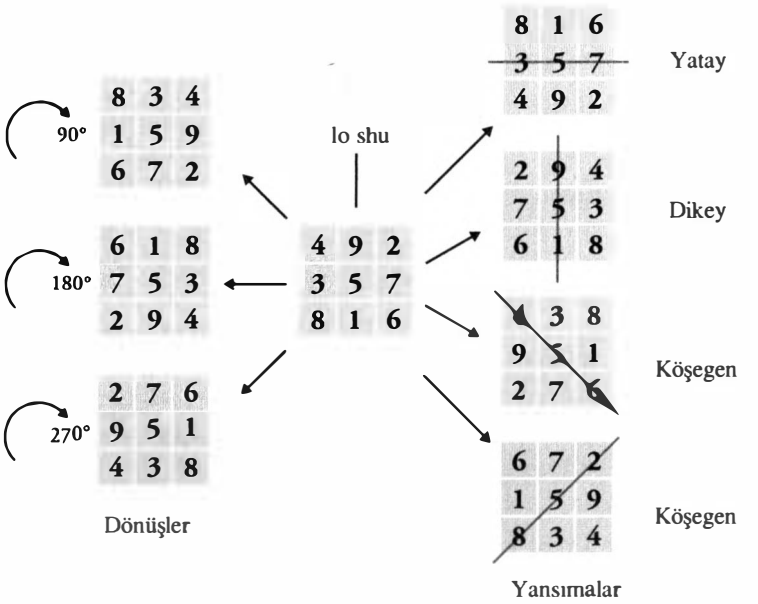


Toplam = 260 Toplam = 260 Toplam = 260 Toplam = 260 Toplam = 260

Sihirli karelerin sürekliliğinin bir sebebi de, şaşırtıcı sayıda sihirli kare olmasıdır. Gelin, en küçüğünden başlayarak sayalım; 1 x 1 ölçekli sadece 1 tane sihirli kare vardır: 1 sayısı. Dört sayıdan oluşan 2 x 2 formatında hiçbir sihirli kare yoktur. 1'den 9'a kadar rakamlardan oluşan 3 x 3 ölçekli sekiz farklı sihirli kare oluşturmak mümkündür, ancak bu sekiz farklı kare ya döndürülmüş ya da simetri yöntemiyle bulunmuştur, bu yüzden aslında 3 x 3 formatında tek bir sihirli kare vardır demek yanlış olmaz. Bir sonraki sayfadaki şekil, *Lo Shu*'yla başlanarak bütün sekiz olasılığı göstermektedir.

Şaşırtıcı bir şekilde, sihirli karelerdeki artış hızı üçlülerden inanılmaz bir boyuta ulaşır. Döndürmeleri ve simetrileri çıkarttıktan sonra bile 4 x 4 ölçekli 880 farklı sihirli kare elde edebiliriz. 5 x 5 ölçekli sihirli karelerin olasılığı olarak ise 1973 yılında bir bilgisayar yardımı ile 275.305.224 tane farklı kare oluşturulabileceği hesaplanmıştır. Bu rakamın çok büyük ölçekli artışına rağmen 1'den 25'e bütün sayıların

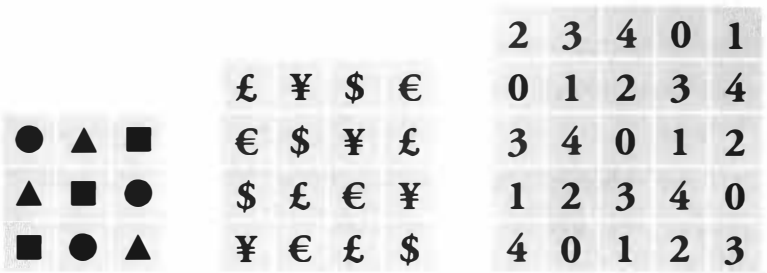
olasılıklarını hesaplayacak olursak, bu da 1'den başlayarak 25'e kadar olan bütün sayıların art arda çarpılması anlamına gelir, bu sayı da 1.5 sayısının yanına 25 tane 0 elde olması demektir ya da bir başka değişle 15 septilyondur.



6 x 6 ölçekli bir sihirli karenin kaç farklı şekilde olabileceği bilinmiyor, yalnız 1 sayısının yanında 19 tane sıfır gibi bir rakama karşılık gelmesi muhtemel. Bu sayı o kadar büyüktür ki geçtiğimiz sayfalarda bahsedilen satranç tahtasının son karesindeki buğdayların sayısından bile fazladır.

Sihirli kareler sadece amatörlerin ilgilendiği bir konu olmamıştır. Ömrünün son yıllarında, ünlü İsviçreli matematikçi Leonhard Euler bu karelere karşı ilgi duymaya başladı (O dönemde neredeyse tamamen kör olduğundan dolayı sayıların uzamsal uygulamalarına yönelik araştırmaları hayranlık uyandırıcıdır). Çalışmalarında her bir sayının her

sırada ve her sütunda bir kere kullanıldığı özel bir çeşidi bulunuyordu. Buna Latin Karesi adını vermişti.



Latin Kareleri

Sihirli karelerin aksine, Latin karelerinin birkaç pratik uygulaması vardır. Bunlar her takımın birbiriyle karşılaşmak zorunda olduğu turnuvaların hesaplanmalarında kullanılabilirler. Ve tarım konusunda da çiftçilere farklı gübreleri test edebileceği kullanışlı bir ölçek oluşturmasında yardımcı olur. Çiftçi eğer altı tane gübreyi test etmesi gerektiğini söylüyorsa, toprağı 6 x 6 ebatlarında karelere bölmesi gerekir. Her bir ürünü Latin karesine dağıtması, topraktaki olası herhangi bir değişikliğin her bir işlemi aynı şekilde etkilemesini garanti altına alır.

Bölümün başına size tanıttığım Japon bulmaca ustası Maki Kaji sayılar ve karelere olan hayranlıkla ilgili yepyeni bir çağ başlattı. Fikir bir Amerikan bulmaca dergisini incelerken aklına geldi. İngilizce konuşamayan biri olarak kelimelerden oluşan anlaşılmaz karelere bakmaktan vazgeçeceği zaman karşısına ilginç görünümlü sayılardan oluşan bir ızgara şekilli bir bulmaca çıktı. Bulmaca 'Rakam Yerleri' başlığıyla verilmişti ve 9 x 9 formatında 1'den 9'a kadar olan sayılardan oluşan bir Latin karesiydi. Her sayıyı bir satır ya da bir sütun içerisinde yalnızca bir kere kullanmak koşuluyla, çözen kişinin mantıksal çıkarımlar yardımıyla boş kareleri doldurması gerekiyordu. Çözen kişiye koşulların

yardımıyla destek veriliyordu, örneğin kare 3 x 3 ebatlarında alt karelere de bölünüyorlardı ve her bir alt kare koyu renklerle işaretleniyordu. 1 'den 9'a kadar olan sayılar alt kareler içerisinde de yalnızca bir kere kullanılabiliyorlardı. Kaji bulmacayı çözmüş ve oldukça heyecanlanmıştı çünkü bu tam olarak kendi yeni dergisine koymak istediği türden bir bulmacanın kaynağıydı.

Rakam yerleri ilk kez 1979 yılında Indiana eyaletinden emekli bir mimar ve bulmaca meraklısı olan Howard Gams'ın buluşu olarak görücüye çıktı. Kaji her ne kadar Gams'ın bulmacalarını çözmekten keyif alsa da bunu değiştirmeye karar verdi, sayıları tıpkı kare bulmacalarda olduğu gibi ölçek çevresine simetrik şablonla dizdi. Bu versiyona Japonca 'bir rakam sadece bir kere görülmeli' anlamına gelen Sudoku adını verdi.

	1	5		4		8		
	8		3				5	
6					5		2	
8				6		5		
		4	8		3	6		
		6		9				1
	2		1					8
	9				8		7	
		8		7		2	1	

Sudoku Kaji'nin bulmaca dergisinin 1980 yılında çıkan ilk yayınlarında göründü ama beklediği ilgiyi görmedi. Bulmacanın bir yangın gibi yayılması ilk deniz aşırı seyahati sırasında oldu.

İngilizce bilmeyen ve yalnızca Japonca konuşan biri Rakam Yerini anlayabildiyse, yalnızca İngilizce konuşan birisi de Sudoku'yu anlayabilirdi. 1997 yılında Wayne Gould adındaki bir Yeni Zelandalı, Tokyo'da bir kitap dükkânına girdi. Başlangıçta tüm yayınların Japonca olmasından dolayı biraz şaşırmış olan Gould'un gözü daha sonra tanıdık bir şeye denk geldi. Kitabın kapağında üzerinde rakamlar bulunan

çapraz bir bulmacanın bulunduğu bir kitap görmüştü, görünüşünden bunun bir bulmaca olduğu çok belliydi, o an kurallarını anlayamamıştı. Yine de kitabı satın aldı çünkü ilerleyen zamanlarda ne olduğunu anlayabileceğini düşünmüştü. Güney İtalya'da tatili sırasında bulmacayı çözene kadar üzerinde çalıştı. Henüz Hong Kong'daki yargıçlık görevinden emekli olduktan hemen sonra bilgisayar programlamayı öğrenmeye başlayan Gould sudoku yapan bir program yazmaya karar verdi. İyi bir programcı için muhtemelen birkaç günde bitecek bu program Gould'un altı yılını aldı.

Fakat çabalarının sonucu buna değdi, 2004 yılında *New Hempshire's Conway Daily Sun* gazetesini, bulmacalarından bir tanesini yayınlamaya ikna etti. Başarı inanılmazdı. Bir sonraki ay İngiliz ulusal basınına ulaşmaya karar verdi. Gould bulmacayı en etkili şekilde yerleştirmenin yolunun, üzerinde sudoku basılı olan bir gazetenin sunumunu yapmak olduğunu düşündü. Hong Kong'da *The Times*'ın yöneticilerini görüşmeye ikna etmesi ve bunu doğruca yönetim ofisine götürmesi gerektiğini biliyordu. Lobide beklediği birkaç saatin ardından Gould yöneticilere bulmacanın baskılarını gösterdi ve yöneticiler fikri beğendiler. Aslında, oradan ayrıldıktan hemen birkaç saat sonrasında *The Times* yöneticilerinden bulmacayı kimseye göstermemesini istedikleri bir e-posta aldı. İki hafta sonra bulmaca ilk kez gazetede yayınlandı ve bundan yalnız 3 gün sonra *Daily Mail* gazetesi kendi versiyonunu yayınladı. Ocak 2005 yılında *Daily Telegraph* da oyuna katıldı ve bundan çok kısa bir süre sonra bütün İngiliz gazeteleri rekabette geri kalmamak için bulmacayı günlük olarak yayınlamaya başladılar. Aynı yıl içerisinde bağımsız raportörler İngiltere'de o yıl içerisinde kalem satışının % 700 arttığını bildirdiler ve bunun bulmaca çılgınlığından kaynaklandığını söylediler. O yaz kitapçıların, gazetecilerin havaalanlarının raflarında sudoku kitapları belirmeye başladı, üstelik yalnızca İngiltere'de değil tüm dünyada. 2005 yılında Amerika'da en çok satan ilk 50 kitaptan 6 tanesi sudoku başlıklıydı. Yıl sonuna kadar bulmaca otuz ülkeye yayıldı

ve *Time* dergisi Wayne Gould'u, Bill Gates, Oprah Winfrey ve George Clooney'le birlikte o yıl dünyayı en çok değiştiren 100 isimden biri olarak açıkladı. 2006 yılının sonunda sudoku 60 ülkede yayınlanmaya başlandı ve 2007 yılı sonunda 90 ülkeye ulaştı. Maki Kaji'ye göre şu anda dünyada düzenli olarak sudoku çözen 100 milyon kişi var.

Herhangi bir bulmacanın tamamlanması ego için oldukça tatmin edicidir, fakat sudoku çözmek Latin karesinin o mükemmel dengesi ve iç güzelliğinden kaynaklanmaktadır. Sudokunun başarısı sayı ve kareye duyulan yüz yıllık kültürler arası bir saplantının kanıtıdır. Ve diğer bulmacaların aksine, sudoku matematikçiler için dikkate değer bir zaferdir. Bu bulmaca gizlice yapılan hesaplamalara dayanır. Sudoku herhangi bir aritmetik içermese de, soyut bir düşünce, şablon tanımlama, mantıksal çıkarımlar ve algoritmik bir üretim gerektirmektedir. Ayrıca bulmaca, problemlerin üzerine saldırgan bir şekilde gitmeye cesaretlendirip matematiksel zarafeti de takdir etmeye teşvik eder.

Örneğin sudokunun kuralları anlaşılır anlaşılmaz, *benzersiz bir çözüm* kavramı önemli bir ölçüde açığa çıkacaktır. Başlangıçta kareler içinde verilen her bir rakam için boş kalan kareleri doldurmanın sadece bir yolu vardır. Ancak bu, kısmen doldurulmuş her kare için bir benzersiz çözüm olacağı anlamına gelmez. 9 x 9 ölçekli kareler içine yerleştirilmiş rakamların bir çözümü olmaması oldukça mümkündür, aynı şekilde birden fazla çözümü olması da muhtemeldir. Sky TV bir sudoku gösterisi yayınladığında, tebeşirle 275 x 275 ölçekli dünyanın en büyüğü olduğunu iddia ettikleri bir sudoku çizdiler. Ancak, verilen rakamlar yerlerine yerleştirildiğinde 1905 tane geçerli çözüm yolu vardı. Dünyanın en büyüğü olduğu iddia edilen sudokunun benzersiz tek bir çözümü yoktu, bu yüzden bu tam bir sudoku değildi.

Sky TV'nin hatalı sudokusunun 1905 olasılığının hesabında olduğu gibi, olasılıkları hesaplamaktan oluşan matematik dalına *kombinatorik* denir. Bu sudoku gibi nesnelerin permütasyon ve kombinasyolarının

konu edildiği çalışmadır fakat en çok bilinen kullanımı gezici satış temsilcilerinin takvimlerinin oluşturulmasıdır. Mesela, diyelim ki ben bir gezici satış temsilciyim ve ziyaret etmem gereken 20 tane dükkân var. Hangi yolu izlemeliyim ki kat edeceğim mesafe en kısa olsun. Çözüme ulaşmak için bana gereken bütün dükkânlar arasındaki mesafenin permütasyonudur ve bu bir klasik (ve aynı zamanda fazlasıyla zor) kombinatoral problemdir. Benzer sorunlar iş ve sanayi dünyasında artmaktadır, örneğin havaalanlarındaki taşıma şirketlerinin uçuş takvimleri ya da etkili bir posta sıralama sistemi.

Kombinatorik çok yüksek rakamlarla sürekli olarak uğraşan matematik dalıdır. Sihirli kareler gördüğümüz gibi, küçük bir sayı kümesi şaşırtıcı derecede çok farklı yollarda bir araya getirilebilir. Her ikisi de aynı biçimde karelere bölünmüş bir biçim kullansa da, aynı ölçekteki Latin karelerinin sayısı sihirli karelerin sayısından daha azdır, buna rağmen Latin karelerinin sayısı devasa boyutlardadır. Örneğin 9 x 9 ebatlarındaki Latin karelerinin sayısı 28 basamaklıdır.

Mümkün olan kaç tane sudoku vardır? Eğer bir Latin karesi bitmiş bir sudokuyu nitelemek için kullanılırsa, bu her 9 alt karede her basamağın bir kere kullanılması anlamına gelir ve bu bizim toplam 9 x 9 olasılık sayımızı 6.670.903.752.021.072.963.960'a düşürür. Bu kalıpların çoğunluğu döndürme ya da simetri'yle elde edilen aynı karelerin farklı versiyonlarıdır. Bu döndürme ve simetrileri de elediğimizde geriye kalan mümkün sudoku sayısı 5.5 milyardır.

Yine de bu, pek çok bitirilmiş sudoku kalıbı birçok diğer kalıp için çözüm oluşturduğu için, hâlâ olası sudoku sayısı toplamı değildir. Örneğin bir gazetedeki sudokunun sadece kendine özel bir çözümü vardır. Karelerden bir tanesini doldurduğunuzda, yeni sayılarla verilmiş yeni bir kalıp oluşturmuş olursunuz, bir başka deyişle aynı özel çözümle yeni bir sudoku oluşturursunuz ve bu her doldurduğunuz kareyle devam eder. Bir sudokuda verilmiş 30 tane rakam olduğunu söylersek, kalıbı tamamlayana kadar aynı benzersiz çözümlü 50 sudoku

oluşturabiliriz (81 karelik bir kalıpta 80 rakam verilene kadar her kare için yeni bir Sudoku ihtimali demektir). Sudokuların toplam sayısını bulmak o kadar da eğlenceli değildir, çünkü bulmaya çalıştığımız şey çoğunluk olarak içi boş bırakılmış karelerdir, ki bu da bulmaca ruhuna aykırıdır. Bunun yerine matematikçiler boş bırakılabilecek karelerin sayısı hakkında daha büyük heyecan duyuyorlar. Kombinatroniklerin sudoku için sorduğu ilk soru, karelere en az kaç tane kareyi boş bırakmalıyız ki sudokunun sadece tek bir özel çözümü olsun?

Gazetelerde yayınlanan sudokular genelde 25 tane verilmiş sayı içerir. Bugüne kadar, hiç kimse 17'den daha az sayıda verilmiş bir sudoku için benzersiz bir çözüm bulamadı. Aslında 17 ipuçlu sudoku kombinatronik kültüründen ilham almıştır. Batı Avustralya Üniversitesi'nden Gordon Royle 17 ipuçlu sudoku veritabanı oluşturdu ve dünyanın her tarafındaki bulmaca hazırlayanlar her gün üç ya da dört tane yeni sudoku ekliyor. Şu ana kadar 50000'in üzerinde sudoku topladı. Ama dünyaca tanınan bir 17 ipuçlu sudoku uzmanı olmasına rağmen, mümkün olan toplam sudoku sayısına ne kadar yaklaştığı konusunda hiçbir fikri olmadığını söylüyor. "Bir süre önce, artık sonuca gerçekten çok yaklaştım diyebileceğim bir anda, yabancı bir katılımcı 5000 tane yeni sudoku gönderdi, dedi. 'Anon17' isimli bu yabancının bunu nasıl başardığını henüz anlayabilmiş değiliz ama çok akıllıca bir algoritma kullandığı kesin."

Royle'a göre henüz kimse 16 ipuçlu bir sudoku bulamadı, ona göre 'Ne biz insanlar o kadar akıllıyız ve ne de bilgisayarlarımız o kadar güçlü.' Büyük ihtimalle, Anon17 kullanmaması gerektiği halde bir başkasına ait olan çok güçlü bir bilgisayarı kullandığı için, metodunu henüz açıklayamıyor. Kombinatroniklerin sorularını cevaplayabilmek genellikle bilgisayara çok fazla sayıyı girmeyi gerektiren sıkı bir çalışmaya bağlı oluyor. Royle, bazı yeni teoriler olmadan, 16 ipuçlu sudokunun toplam sayısını bulmaya çalışmanın sadece küçük bir parçasını bulmaktan öteye geçmeyecek bir çaba olduğunu iddia ediyor. Fakat

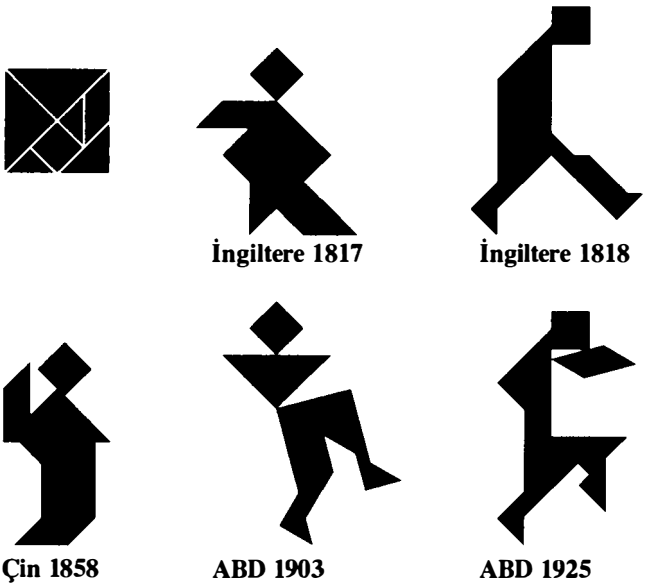
içgüdüsel olarak 16 ipuçlu sudokunun bulunamayacağını düşünüyor ve ekliyor, 'Elimizde 17 ipuçlu o kadar çok sayıda sudokumuz var ki, 16 ipuçlu sudokuya rastlamış olmak bizi gerçekten çok şaşırtır.'

Maki Kaji'nin kartvizitinde *Sudoku'nun Babası* yazmaktadır. Wayne Gould kendini Sudoku'nun üvey babası olarak tanımlar. Sonunda Gould'la batı İngiltere'nin bir meze dükkânında kahve içerken tanıştım. Yeni Zelanda ragbi şapkası takıyordu ve bununla taban tabana zıt gözüken babacan bir görüntüsü vardı. Ön dişlerinin arası boşluktu, ince gözlükleri vardı, kısa gri saçları ve gençleri aratmayan coşkusuyla bana, eski bir hâkimden daha çok genç bir öğretim görevlisini anımsatıyordu. Sudoku, Gould'un yaşantısını değiştirmişti. Emekliliğinde, çalışma hayatında hiç olmadığı kadar meşguldü. Dünya üzerinde 81 ülkede 700'den fazla gazeteye bedava Sudoku vermekte, sadece sattığı kitaplar ve programlardan para kazanmakta ki, dediğine göre bu bütün Sudoku pazarının sadece % 2'si. Yine de bu ona yedi basamaklı bir servet kazandırdı. Ve artık o ünlü birisiydi. Ona karısının beklenmedik bir biçimde bu kadar ünlü olması karşısında nasıl davrandığını sorduğumda bir saniye durakladı ve 'Geçen yıl ayrıldık,' diye kekeledi. '32 yıllık evliliğin ardından, belki o kadar paraya sahip olmak ona daha önce hiç sahip olmadığı bir özgürlük vermiştir.' Sonraki sessizlikten çıkardığım mesaj iç burkucuydu. Kendi çapında bir çılgınlık başlatmış olabilirdi, fakat bu macera kişisel olarak çok ağır bir bedele mal olmuştu.

Amerikalı Howard Garns'ın fikri Indiana'da bulmuş olmasına rağmen Sudoku'nun başarısının hep, doğuya ait romantik bir bilgelik hissi veren adından kaynaklandığını düşünmüşümdür. Aslında bulmaca geleneği doğudan gelmektedir. İlk olarak uluslararası bulmaca çılgınlığı 19. yüzyılın başlarında, Amerikalı ve Avrupalı denizciler Çin'den döndükleri zaman yanlarında tahtadan ya da fildişinden yapılmış 7 parçalı geometrik şekil takımları getirdiklerinde –bu takımlar iki büyük

üçgen, iki küçük üçgen, bir orta boy üçgen, bir eşkenar dörtgen ve bir de kareden oluşuyordu– ortaya çıkmıştır. Bu parçalar bir araya getirildiğinde büyük bir kare elde ediliyordu. Bu takımların yanında düzinelerce kitapçıklar, insan figürlü anahtarlıklar, geometrik şekiller ve daha bir sürü nesneler getirmişlerdi. Bulmacanın amacı verilen tüm 7 nesneyi kullanarak resmedilmiş şekilleri yapabilmekti.

Bulmaca, Çinlilerin ziyafetler için tablolar ve çeşitli düzenlemeler yapma geleneğinden esinlenmişti. 12. yüzyıldan kalma bir Çin kitabında, 76 farklı ziyafet yerleşimi gösteriliyordu, bunlardan pek çoğu, dalgalanan bayrak, çiçekler ya da dağ sıraları gibi görünüyordu. 19. yüzyılın kapanmasına yakın, Aptal Keşiş gibi eğlenceli bir lakabı olan Çinli bir yazar bu tören kareografisini, parmak genişliğindeki geometrik biçimleri küçük el kitaplarına uyguladı ve bu figürleri kitaba koydu. Resimler yedi tane zekice tasarlanmış parçadan oluşuyordu.

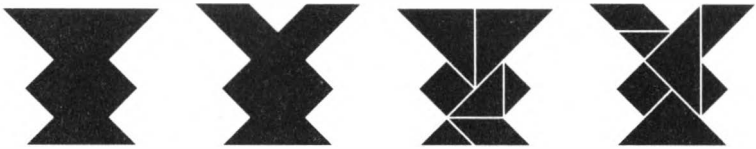


Çağlar boyunca tangram figürleri

Orijinal olarak Çin bulmacası olarak adlandırılan bu setler daha sonra 'Tangram' ismini aldılar. Çin dışında yayınlanan ilk Tangram kitabı 1817 yılında Londra'da basıldı. Kitap hemen bir moda başlattı. 1817 ve 1818 yılları arasında onlarca Tangram kitabı, Fransa, Almanya, İtalya, Hollanda ve İskandinavya'da çıktı. O günün karikatüristleri çılgınlığa kapılmış, karısıyla yatağa girmek istemeyen erkekleri, yemek pişiremeyen aşçıları ve hastasıyla ilgilenmek istemeyen doktorları resmetmişlerdi çünkü yeni üçgenler yapmaya kendilerini fazlasıyla kaptırmışlardı. Çılgınlık Fransa'da kendini daha fazla göstermişti, bunun nedeni büyük olasılıkla Napolyon'un güney Atlantik adalarından St. Helana'da sürgündeyken en keyif aldığı şeyin bu bulmaca olduğu iddiasıydı. Eski imparator ilk benimseyenlerdendi, çünkü Asya'dan dönen gemiler önce oraya uğruyorlardı.

Tangramı seviyorum. Erkekler, kadınlar, hayvanlar sihirli bir şekilde hayat buluyor. Sadece tek bir parçayı bile hafifçe çevirseniz figürün kişiliği tamamıyla değişiyor. Açısal ve genellikle acayip olan dış hatlarıyla figürler inanılmaz ilgi çekiciler. Fransızlar silüetler halinde bu imgeleri tablolarına yansıtarak kişiselleştirmeyi çok ileri bir boyuta taşıdılar.

Bulmacanın ne kadar sürükleyici olduğunu onu çözmeyi denemeden anlamak oldukça zordur. Aslında oldukça kolay gözükseler de, Tangram çözmek inanılmaz derecede zor olabilir. Şekiller kolaylıkla aldatabilir, tamamen aynı görünen iki silüetin yapısı tamamen farklı olabilir. Tangram size bir nesnede ilk gördüğünüz şeyin aslında onun özü olmayabileceğini hatırlatarak gönül rahatlığına karşı bir uyarı olarak hizmet edebilir, sonraki sayfadaki tangramlara bir göz atın. Birinci figürden ikinciyi elde etmek için sadece küçük bir üçgeni çıkartmak yeterliymiş gibi görünüyor. Aslında iki figürde de şekillerin tamamı kullanılmıştır ve birbirinden tamamen farklı bir şekilde yerleştirilmişlerdir.



19. yüzyılın ortalarında tangramlar, hâlâ bir yetişkin eğlencesi olmalarına rağmen, okullar tarafından benimsendiler. Alman şirketi olan Richter, Tangram'ı *Kopfzerbrecher* ya da beyin patlaması olarak yeniden adlandırdı ve ürünün başarısından dolayı, değişik boyutlarda değişik parçaların kesilmesiyle bir düzine kadar daha yeni Tangram tasarlandı. Birinci Dünya Savaşı sırasında, Richter bulmacaları siperlerde sıkışıp kalmış askerlerin arasında daha da çok sevilen bir zaman geçirme eğlencesi olmuştu. Talep o kadar artmıştı ki başka bir 18 Tangram daha piyasaya sunuldu. Bir tanesine *Schutzengraben Geduldspiel* –siper sabır oyunu– deniyordu ve zeplin, revolver ve el bombası gibi askerî şekillerden oluşuyordu. Bazı şekiller cepheden öneri gönderen askerler tarafından geliştirilmişlerdi.

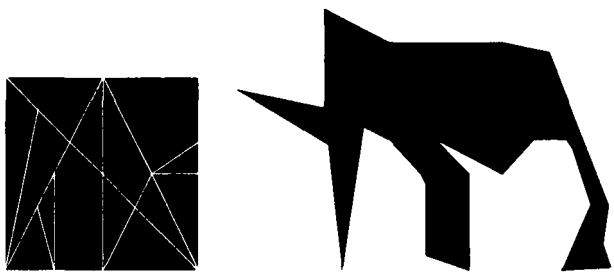


İkinci Dünya Savaşı Lott'un tuğla bulmacalarının reklamı

Richter'in bulmacaları Birinci Dünya Savaşı'ndan önce Alman sınırlarının ötesinde oldukça fazla satılmışlardı. İngiliz hükümeti Alman ürünlerinin ithalini yasaklayınca, Watford Lott tuğla şirketi, yurtsever bir şekilde ileri atıldı ve 1940'lara kadar bunların İngiliz yapımı kopyalarını üretti.

Her kuşak yeni figürler ürettiği için 200 yıl boyunca Tangram modasını hiç kaybetmedi. Hâlâ kitapçılardan veya oyuncakçılardan bunları satın alabilirsiniz. Yayınlanmış Tangram repertuarı şu anda 5900'den daha fazladır.

Bu tarzda bulmacaların Tangram'da bir araya gelmiş olmasına rağmen, tangram yeniden düzenleme bulmacalarının ilki değildir. Antik Yunan'da *stomachion* isimli oyunda bir kareyi 14 parçaya bölerlerdi (*Stomachi* mide anlamına gelir ve bu ismin parçaları sindirmeye çalışmaktan değil bulmacayı çözmeye çalışırken sizde bıraktığı karın ağrısından dolayı verildiği düşünülmektedir). Arşimet *stomachion* üzerine, yalnızca bir parçası günümüze ulaşan bir eser yazmış. Bu eser, kalan parçadan anlaşıldığına göre, mükemmel bir kare elde etmek için *stomachion'un* parçalarının kaç farklı şekilde dizilebileceği hakkına bir metindir. Yalnızca yakın bir süre önce bu problem çözülebildi. 2003 senesinde bilgisayar bilimcisi Bill Cutler 536 yolunun olduğunu buldu (döndürme veya simetriler altında özdeş olan çözümler haricinde).



Stomachion, aynı zamanda 'Arşimet hücresi' olarak da bilinir.

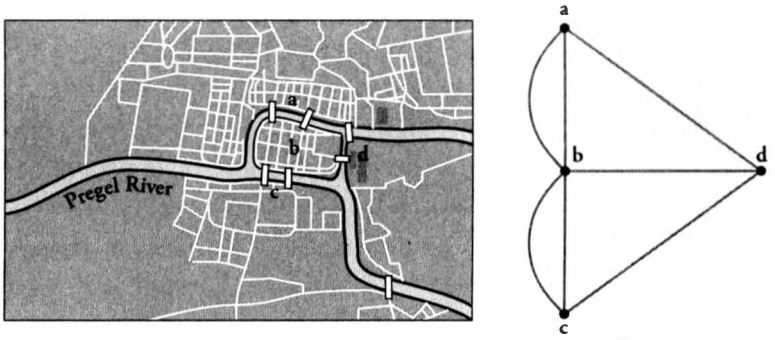
Arşimet zamanından beri, eğlenceli bulmacalara karşı duyulan özel ilgi matematikçilerin ortak noktası olmuştur. 'İnsanlık, hiçbir konuda, oyunlar icat etmekte olduğu kadar usta olmamıştır' der Gottfried Leibniz. Örneğin, delikli damaya olan tutku ikili sisteme ve rakamlara olan saplantısıyla alakalıdır: Bir deliğin içinde bir kazık olabilir ya da olmayabilir, ya 1'dir ya da 0'dır. Ancak, eğlenceyi seven en büyük matematikçi, 18. Yüzyıl muammasını çözmek için tamamen yeni bir matematik dalını bulan Leonhard Euler'dir.

Eski adı Koninsberg ve Prusya'nın başkenti olan, şimdiyse Rusya'nın bir şehri olan Kaliningrad'da, eskiden Pregel Nehri'ni geçmek için yedi tane köprü kullanılırdı. Yerel halk, aynı köprüden 2 kere geçmeden bütün köprüler üzerinde yolculuk yapmanın mümkün olup olmadığını bilmek istiyorlar.

Böyle bir döngünün imkânsız olduğunu ortaya koymak için Euler, bir harita çizdi ve kara parçasını göstermek için nokta ya da düğüm, her bir köprüyü göstermek için bir çizgi ya da hat kullandı. Her bir hattın her düğüm noktasına değerek bir devre oluşturabileceği bir grafik üzerinde çalışmalar yaptı, ama bunu yapmak imkânsızdı.

Euler'in yaptığı kavramsal sıçrama, sorunu çözmek için önemli olanın köprülerin tam yerleri değil, birbirlerine nasıl bağlandıklarıydı. Bu fikir Londra yeraltı haritasında da kullanıldı; harita coğrafi olarak doğru değildi ama tünellerin birbirlerine olan bağlantılarını tam olarak doğru veriyordu. Euler teoremi, grafik teorisi başlattı ve sıkıştırıldıklarında, büzüldüğünde, gerildiğinde özellikleri değişmeyen nesneleri inceleyen çok geniş bir matematik dalı olan topolojinin geliştirilmesine ilham kaynağı oldu.

1817 yılında tangrama olan büyük ilgi dünyanın ikinci uluslararası bulmaca çılgınlığıyla karşılaştırıldığında hiçbir şey değildir. 1879 yılı aralık ayında Boston'da bir oyuncakçı dükkânında Onbeş Bulmacası satışa sunulduğunda, üreticiler talebi karşılayamadılar. 'Ne yaşlılığın

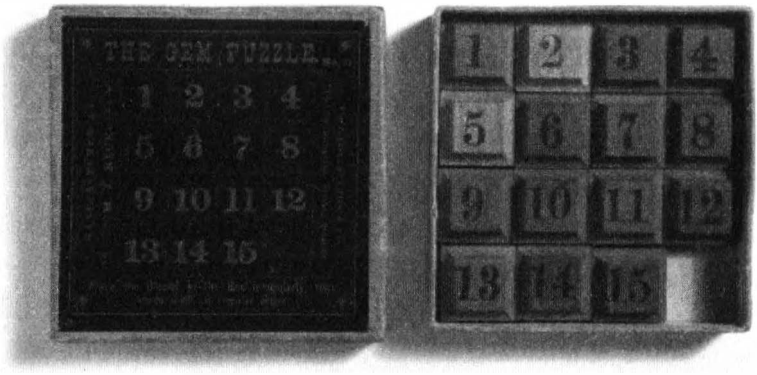


On sekizinci yüzyılda bir harita ve grafik olarak Konigsberg.

getirdiği kırışıklıklar ne de nurtopu gibi bir çocuğun siması bu bulaşıcı hastalığa karşı koyamıyor' diye yayınladı haberi *Boston Post.*

Onbeş Bulmacası kare bir 4 x 4 kalıbın içerisine yerleştirilmiş 15 küp bloktan oluşuyordu, yani demek oluyor ki bir parçası eksikti. Bulmacanın amacı boş olan kareyi kullanarak diğer blokları kaydırıp bulmacayı numara sırasına göre dizerek tamamlamaktı. Onbeş Bulmacasıyla oynamak öylesi eğlenceli ve bağımlılık yapan bir şeydi ki bu bağımlılık Massachusetts'ten New York'a oradan da bütün Amerika'ya yayıldı. 'Ülkeyi doğudan batıya kadar bir kasırga gibi süpürdü, her geçtiği yerde insanın beynini kasıp kavurdu ve geride geçici bir çılgınlık bıraktı' diye yayınladı *Chicago Tribune. New York Times'a* göre, veba bile daha önce ne bu ne de başka bir ülkede bu derece korkunç bir hızla yayılmıştı.

Bulmaca daha sonra deniz aşırı yolculuğuna çıktı, söylendiğine göre Londra'da başka hiçbir şey satmayan bir dükkan vardı. Altı ay içinde bulmaca dünyanın öteki tarafına ulaşmıştı. 'Çılgına dönenlerin sayısı azımsanmayacak kadar' diye yazmıştı, Yeni Zellanda'dan *Otago Witness* gazetesi 1 Mayıs 1880 tarihinde.



Onbeş Bulmacası başlangıçta mücevher bulmacası olarak biliniyordu

Onbeş bulmacası, 4 x 4 sihirli karenin fiziksel bir modelini yapmak için neredeyse 20 yıl boyunca uğraşmış ve New York taşrasından bir posta müdürü olan Noyes Chapman'ın buluşuydu. Her biri üzerinde 16'ya kadar sayılar bulunan küçük tahtadan küpler yapmıştı ve bu küpler bir tahta kutu içerisine kolayca giriyordu. Kutudan bir tane küpü çıkartıp diğer küplerin kayarak hareket edebildiğini gördüğünde sayıları tekrardan dizmenin eğlenceli bir oyun olduğunu fark etti. Chapman bunun birkaç kopyasını ailesi ve arkadaşları için yaptı ama bunu asla sermayeleştirmedi. Bulmaca Bostonlu akıllı bir marangozun bunu ticarete dökme fikrinden sonra ortaya çıkmış oldu.

Onbeş Bulmacası bazen çözülebilir ve bazen çözülemez oluşu yüzünden insanlara işkence olmuştu. Küpler kutuya rastgele dizildiğinde iki sonuçla karşılaşılıyordu: Ya küpler doğru sırasıyla yerleşiyordu ya da ilk üç sırası doğru son sırada ise 13-15-14 olarak sıralanıyordu. Çılgınlık bu 13-15-14 sırlamasının 13-14-15 olarak yeniden düzenlenip düzenlenemeyeceğinin aranmasıyla iyice ateşlenmişti. 1890 yılının Ocak ayında, ilk bulmacanın satışa çıkmasından birkaç hafta sonra, New York Rochester'tan bir dişçi gazeteye bir ilan verdi ve bunu ispatlayacak

olan kişiye 100 $ ve takma dişler vaat etti. Bunun imkânsız olduğuna inanıyordu ama biraz matematik desteğine ihtiyacı vardı.

Onbeş Bulmacası şaşkınlığı oturma odalarından, akademilerin salonlarına kadar bütün dünyaya yayılmıştı ve sonunda profesyoneller işe dâhil olunca bu deliliği tetikleyen çözümsüzlük çılgınlığı tatmin edici memnuniyet veren bir çılgınlığa dönüştü. 1980 yılının Nisan ayında, zamanının seçkin matematikçilerinden Hermann Schubert, bir Alman gazetesinde 13-15-14 konumunun çözümsüz olduğu konusundaki ilk kanıtı yayınladı. Kısa bir süre sonra da, yeni kurulmuş olan *American Journal of Mathematics* tüm başlangıç pozisyonlarına göre, sonuçların yarısının 13-15-14 ile bittiğini diğer yarısının ise 13-14-15 ile bittiğine dair bir kanıt yayınladı. Onbeş Bulmacası her zaman çözülemeyen uluslararası tek bulmaca çılgınlığı olarak kaldı. Bazı insanları çıldırtmasına hiç şaşmamak lazım.

Tangram gibi, Onbeş Bulmacası da tam anlamıyla yok olmadı. Bugün hâlâ oyuncakçılarda, Yılbaşı kurabiyelerinde ve kurumsal pazarlama hediye paketlerinde bulunabilen kayan blok bulmacalarının atası olarak kaldı. 1974 yılında bir Macar bu bulmacayı geliştirmek için çabalarken aklına bunu üç boyutlu olarak yeniden tasarlamak geldi. Ernö Rubik, bütün bulmacalar tarihindeki en başarılı bulmaca olan Rubik küpünün (Sabır küpü) ilk örneğini ortaya çıkardı.

2002 yılında yayınladığı *Bulmaca İçgüdüsü* adlı kitabında, göstergebilim uzmanı Marcel Danesi 'Bulmacaları çözmek için gereken sezgisel yetenek insanlık durumunun bir parçasıdır' diye yazdı. Bir bulmacayla karşılaştığımız zaman içgüdülerimiz tatmin olacağımız bir çözüme ulaşıncaya kadar bizi zorlar. Bulmacalar, Yunan mitolojisinde bilmece soran sfenksten günümüzdeki dedektif gizemlerine kadar, farklı zaman dilimlerinde farklı toplumların ortak özelliği olmuştur. Danesi zor soruların kesin çözümleri olabileceğinin gösterildiği varoluşsal bir terapi biçimi olduğunu savunuyor. İngiltere'nin en büyük bulmaca

derleyicisi olan Henry Ernest Dudeney bulmaca çözmeyi insan doğasının temel öğesi olarak tanımlıyor. 'Aslında hayatımızın büyük bir bölümünü bulmaca çözmeye harcarız; çünkü bulmacalar da kafa karıştırıcı sorular değildir de nedir?' Ve çocukluğumuzdan başlayarak sürekli sorular sorar ve cevaplamaya çabalarız.

Bulmacalar aynı zamanda matematiğin 'şaşkınlık' faktörünü harika bir şekilde taşırlar. Genellikle etraflıca düşünmeyi ya da karşıt sezgisel gerçeklere güvenmeyi gerektirirler. Bir bulmacayı çözmenin verdiği haz bağımlılık yapacak kadar keyifli, çözememenin verdiği yük ise taşınamayacak kadar ağırdır. Yayıncılar eğlenceli matematiğin bir pazara sahip olduğunu hemen fark ettiler. 1612 yılında Fransız Claude Gaspard Bachet *'Rakamlarla Çözülebilecek Eğlenceli ve İlginç Bulmacalar' (aritmetik kullanan her türlü meraklı insan için çok yararlı)* adlı kitabı yayınladı. Kitapta sihirli kareler, kart hileleri, ondalık olmayan tabanlar ve aklınızdan bir sayı tutun tipinde sorular bulunuyordu. Bachet, Diophantus'un *Arithmetica*'sını tercüme etmiş ciddi bir âlimdi. Ama onun popüler matematik kitabı gözle görülür biçimde akademik çalışmalarından daha etkili oldu. Daha sonraki tüm bulmaca kitapları ona borçludur ve önemini yüzyıllar boyunca koruyan kitap en son 1959 yılında basılmıştır. Matematiğin hatta eğlenceli matematiğin belirleyici özelliğini oluşturdu ve güncelliğini asla kaybetmedi.

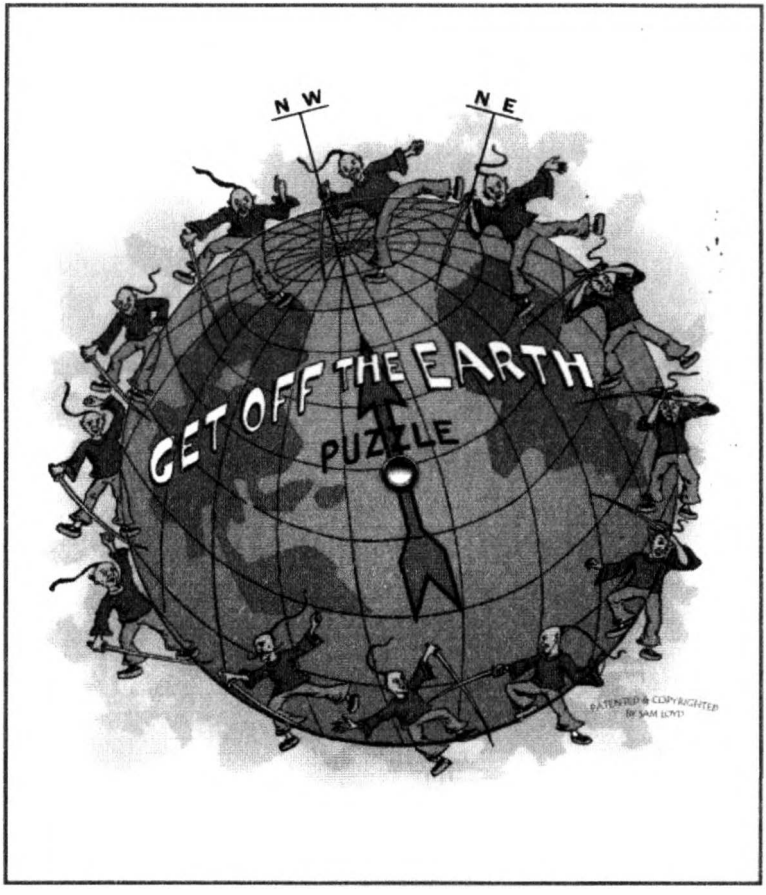
On dokuzuncu yüzyılın ortalarında Amerikan gazeteleri satranç soruları yayınlamaya başladılar. Bu sorunları ilk ve en erken geliştiren tasarımcılarından birisi de Sam Loyd'dur. Bu New York'lu, ilk bilmecesi yerel bir gazetede yayınlandığında henüz 14 yaşındaydı. 17 yaşına geldiğinde bütün Amerika'da en başarılı ve en çok tanınan satranç problemleri tasarlayıcısıydı.

Satrançtan matematik tabanlı bulmacalara geçiş yaptı ve yüzyılın sonunda dünyanın ilk profesyonel bulmaca derleyicisi ve menajeri oldu. Amerikan basınında geniş bir ölçüde yayınlar yapıyordu ve iddiasına göre köşesine günde 100.000 mektup geliyordu. Ancak, biz ona ihtiyatla

yaklaşmalıyız. Loyd profesyonel bir bulmacacıdan beklenilecek tipte bir tavır geliştirdi. Başlangıç olarak, Onbeş Bulmacası'nı kendisinin bulduğunu iddia etti, bu bir yüzyıldan daha uzun bir süre gerçek olarak düşünüldü, ta ki 2006 yılında Jerry Slocum ve Dic Sonneveld adlı iki tarihçinin izleri takip ederek temelinin Noyes Chapman'a dayandığını bulmasına kadar. Loyd aynı zamanda sözde 4000 yıllık bulmaca tarihinin konu edildiği eski bir yazıtın yeni bir versiyonu olan *The 8th Book of Tan Part I*'le Tangram olan ilgiyi yeniden canlandırdı. Başlangıçta matematikçiler tarafından ciddiye alınsa da kitap bir şakadan ibaretti.



Loyd'un matematiksel problemleri, resimli bulmacalara çevirmede benzersiz bir yeteneği vardı. Onun en neşeli buluşu *Brooklyn Daily Eagle için 1986* yılında yaptığı çalışmasıydı. 'Dünyadan Yok Oluş' isimli oyunu o kadar popüler oldu ki, daha sonra bazı firmalar tarafından çeşitli tanıtım hileleri için kullanıldı, buna *The Young Ladies Home Journal*, Büyük Pasifik ve Atlantik Çay şirketi ve 1896 başkanlık seçimleri adayı cumhuriyetçi platform da dâhildi (vermeye çalıştığı mesaj bir manifesto içermemesine rağmen). Bulmaca merkezi etrafında karttan yapılmış bir disk üzerinde dönebilen Dünya'nın etrafında yer

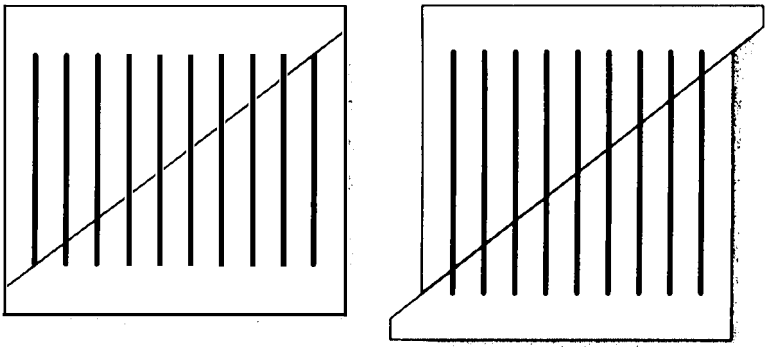


alan Çinli savaşçıların resimlerinden oluşuyordu. Ok kuzey doğuyu gösterdiğinde 13 savaşçı vardı ama ok kuzey batıyı gösterdiğinde 12 savaşçı oluyordu. Bulmaca kafa karıştırıcıydı. Gerçekte 13 savaşçı vardı ama göz açıp kapayıncaya kadar 12 oluyordu. Hangi adam yok oluyordu ve nereye gidiyordu?

Bu bulmacadaki hile geometrik yok olma diye bilinir. Olay ayrıca şu şekilde de ortaya konulabilir. Bir sonraki sayfadaki resimde dikey 10 tane çizgi olan bir kâğıt parçasını görüyoruz. Kâğıt çapraz bir çizgi boyunca kesildiğinde, iki bölüm sadece dokuz satır oluşturacak biçimde tekrar düzenlenebilir. Onuncu çizgi nereye gider? Olan şey, parçaların orijinal parçadan daha uzun olan dokuz çizgi biçiminde yeniden sıralanmasıdır. Eğer ilk şekildeki çizgilerin uzunluğu 10 birimse, yeni oluşturulan şekil eğer bir çizgi eşit şekilde dağıtılacak olursa 9 birim halini alır.

Sam Loyd'un 'Dünyadan Yok Oluş'da yaptığı şeyde geometrik yok olmayı kullanarak aynı işlemin eğrisel olarak çizgilere askerler yerleştirerek bir tanesini dünyadan göndermektir. 10 çizgi örneğine benzer olarak bulmacasında 12 pozisyon vardır. Orijinalde 2 tane savaşçının bulunduğu, sol alt köşe yok olmanın bitiş noktalarına eşdeğerdedir. Ok kuzeydoğudan kuzeybatıya doğru hareket ettiğinde 2 savaşçının bulunduğu konum dışındaki diğer bütün konumlara bir savaşçı daha eklenmiş olur, ölçüsel olarak küçülür ve sanki bir savaşçı tamamen kaybolmuş gibi görünür. Aslında sadece diğerlerinin etrafında dağılmıştır. Sam Loyd 'Dünyadan Yok Oluş'un 10 milyon kopyasının üretildiğini iddia etti. Zengin ve ünlü oldu ve Amerika'nın bulmaca kralı olarak anılmanın keyfini sürdü.

Bu arada, Büyük Britanya'da Henry Ernest Dudeney de benzer bir üne ulaşmıştır. Loyd'un kapitalist küstahlığı ve kendini tanıtma yeteneği, New York'ta bir devri başlatırken kapattıysa, Dunedey daha içedönük olan İngiliz yaşam tarzını benimsedi.



Geometrik yok olma: on çizgi dokuz çizgi halini alır

Sussex'de koyun çiftçiliği yapan bir aileden gelen Dudeney 13 yaşında Londra'daki kamu dairesinde memur olarak çalışmaya başladı. İşinden sıkıldığı için, çeşitli yayın organlarına kısa hikâyeler ve bulmacalar göndermeye başladı. Sonunda kendini tam mesai gazetecilik yapmaya adadı. Eşi Alice kırsal Sussex bölgesindeki yaşam hakkında çoksatar romantik romanlar yazdı ve bu romanların telif hakları sayesinde çift lüks bir hayat sürdü. Dudeney'ler yaşamlarının bir kısmını kırsalda ve bir kısmını tüm edebiyat tarihinin muhtemelen en sembolik bulmaca çözücüsü ve entelektüel edebiyat tarihinin bir parçası olan Sherlock Holmes'un yaratıcısı Sir Arthur Conan Doyle'un da bulunduğu Londra'da geçirdiler.

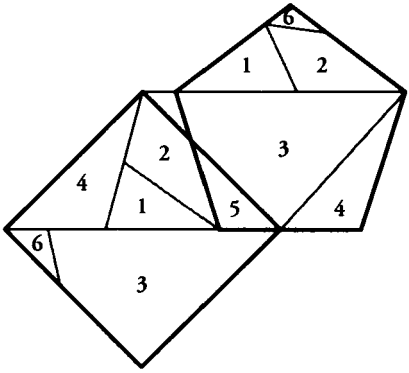
Dudeney ve Sam Loyd'un ilk kez 1894 senesinde, Loyd'un kimsenin çözemeyeceğine inandığı 53 hamlelik satranç sorusu sorduğunda tanıştıkları düşünülüyor. Loyd'dan 17 yaş daha küçük olan Dudeney sonuca 50 hamlede vardı. İkisi bir süre birlikte çalıştılar ama Dudeney, Loyd'un kendi fikirlerini çaldığını fark ettiği zaman kavga ederek yollarını ayırdı. Dudeney Loyd'dan o kadar iğreniyordu ki, onu şeytanla eşdeğer tutuyordu.

Her ikisi de kendi kendilerini yetiştirmiş olsalar da, Dudeney'in daha iyi bir matematik zekâsı vardır. Onun bulmacalarının çoğu daha derin problemler oluşturmuş ve genellikle akademik çevrenin ilgisini çekmiştir. Örneğin, 1962 senesinde matematikçi Mei-ko Kwan sokaklar sisteminden oluşan bir şehirdeki postacının tüm sokakları gezmek koşuluyla en kısa şekilde şehri nasıl dolaşabileceği sorusunu araştırıyordu. Dudeney aynı sorunun bir benzerini bir maden müfettişinin maden içindeki kanallarda dolaşması ile ilgili olanını neredeyse 50 yıl önce bir bulmaca içerisinde oluşturmuş ve çözmüştü.

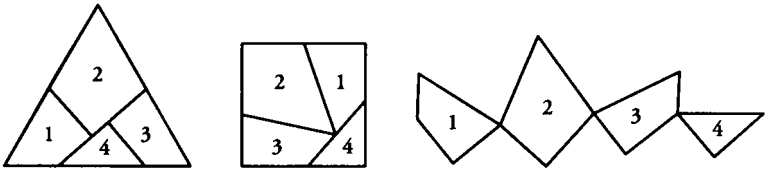
Dudeney sayı teorisine de istemeden katkıda bulunmuştur. Onun Kök Alma isimli bulmacalarının biri, aşağıdaki sayıların küp köklerinin aynı sayıları oluşturan basamakların toplamına eşit olduğu gerçeğinin bulunmasında rol oynamıştır.

$1 = 1 \times 1 \times 1$	$1 = 1$
$512 = 8 \times 8 \times 8$	$8 = 5 + 1 + 2$
$4913 = 17 \times 17 \times 17$	$17 = 4 + 9 + 1 + 3$
$5832 = 18 \times 18 \times 18$	$18 = 5 + 8 + 3 + 2$
$17.576 = 26 \times 26 \times 26$	$26 = 1 + 7 + 5 + 7 + 6$
$19.693 = 27 \times 27 \times 27$	$27 = 1 + 9 + 6 + 8 + 3$

Bu özellikteki sayılar –ve onlardan yalnızca altı tane vardır– Dudeney sayıları olarak bilinir. Dudeney'in en iyi yaptığı bir başka şey de geometrik kesitlemedir, bu tangramın kurallarındaki gibi geometrik bir şekli parçalara ayırarak bir başka geometrik şekil elde etmektir. Dudeney bir kareyi altı parçaya bölerek bir beşgene dönüştürmenin bir yolunu bulmuştur. Metodu popüler bir klasik haline gelmiştir çünkü uzun yıllar boyunca beşgen elde edebilmek için bir kareyi en az yedi parçaya ayırmak gerektiği düşünülüyordu.



Dudeney aynı zamanda bir üçgeni dört parçaya bölerek bir kare elde etmenin yeni bir yolunu bulmuştur. Dudeney, çözümünde, parçalarının birbirine zincir oluşturulacak şekilde menteşelendiğinde bir yoldan gidildiğinde kare, diğer yoldan gidildiğinde ise üçgen elde edilebileceğini fark etti. Buna Haberdasher's Puzzle (Tuhafiyeci Bulmacası) dedi, çünkü parçalar tuhafiyedeki kumaşlardan arta kalan parçaları andırıyordu. Bulmaca böylece 'Menteşeli Kesit' konsepti olarak tanıtıldı ve öyle ilgi gördü ki Dudeney, 1905 yılında İngiliz bilimsel akademisinin bir toplantısında, maun ağaç ve pirinç menteşelerden yaptığı örneği sunduğunda büyük bir ilgi uyandırdı. Tuhafiyeci Bulmacası Dudeney'in en büyük mirasıydı ve matematikçiler için de bir asırdan fazla bir süre için bilgi ve mutluluktu.



Tuhafiyeci Bulmacası

Tuhafiyeci Bulmacası'na tutkuyla bağlanan biri de Kanadalı genç Erik Demaine'dir. Demaine daha henüz 20 yaşındayken MIT'de profesör olmuş bir dâhiydi ve en çok ilgisini çeken şey problemlerin 'evrenselliği' idi. Düzgün kenarlı bir şekli parçalarına ayırıp bunları zincir oluşturacak şekilde birbirlerine menteşeleyip aynı hacimde başka bir düzgün kenarlı şekil elde etmenin mümkün olup olmadığını merak ediyordu. Soruyu çözmek için on yılını harcadı ve Mart 2008'de 27 yaşındayken Atlanta Oteli'nin balo salonunda anlayışları güçlü olan bulmaca sever dinleyicilerine sonucu açıkladı.

Demaine uzun boylu ve sıskaydı, kabarık sakalları ve arkadan atkuyruğuyla toplanmış koyu sarı saçları vardı. Arkasındaki büyük ekrana projektörle bir Tuhafiyeci Bulmacası yansıtılıyordu. Sorunun üzerine kısa bir süre önce doktora öğrencileriyle birlikte gitmeye karar verdiğini söyledi. 'Bunun doğru olduğuna inanmıyordum' dedi. Ancak beklentilerinin aksine, o ve öğrencileri Tuhafiyeci yöntemiyle herhangi başka bir çokgeni aynı alanda başka bir çokgene dönüştürmenin yolunu bulmuşlardı. Salondan alkış yükseliyordu, bilgisayar destekli geometride çok nadir bir olay gerçekleştirilmişti. Fakat bulmaca dünyasında bu gerçekten yapabileceğiniz en heyecan verici atılımlardan biriydi ve zamanın en önemli zekâlarından birinden sembol bir soruya verilen bir çözümdü.

Gardner toplantısı olarak da adlandırılan Atlanta Konferansı Demaine'in konuşması için bir araya gelebilecek en büyük hayran kitlesiydi. Buluşma, matematikçiler, sihirbazlar ve bulmaca severler için dünyanın en önde gelen toplantısı olmuştu. Geçtiğimiz yüzyılın ikinci yarısında eğlenceli matematiğin evrimleşmesini sağlayan adam için yılda iki kere yapılan bir saygı gösterisiydi. Martin Gardner şu anda 93 yaşında, 1957 ve 1981 yılları arasında *Scientific American* dergisinde aylık olarak matematik bölümü yazdı. Bu dönem bilimsel gelişmelerin olduğu bir dönemdi –uzay yolculuğu, bilgi teknolojisi ve genetik– ama okuyucuların hayal gücüne hitap eden şey Gardner'ın

canlı ve berrak düz yazısıydı. Köşesinde platform oyunlarından sihir hilelerine, ilk bilgisayar oyunlarından sayı bilimine kadar her türden konular yer alıyordu ve genellikle dilbilimi ve tasarım gibi konularda yüzeysel yazılar bulunuyordu. Konuşmasından ardından Demanie bana 'Garder'ın matematiğe yaklaşımının çok eğlenceli olduğunu düşünürdüm, bu da çevrelerinin gözünden kaçardı' dedi. 'İnsanlar çok ciddi olmaya çalışıyorlar. Benim amacımsa her şeyi keyifli bir biçimde yapmak.'

Demaine, henüz bir çocukken Gardner'ın sayfasıyla cam ustası ve heykeltıraş olan babası sayesinde tanışmış. Sık sık matematiksel yazılar yayınlayan Demaine'ler, Gardner'ın disiplinler arası ruhunu dışavuruyorlar. Erik, hem matematik hem de sanatın ortak noktası olan bilgisayar destekli origaminin öncüsüdür ve bazı origami modelleri hâlâ New York Modern Sanatlar Müzesi'nde sergilenmektedir. Demanie matematik ve paralel dalların 'güzellik ve basitliğin estetiği' olduğunu düşünüyor.

Demaine Atlanta'da dinleyicilere Tuhafiyeci Bulmacası tarzı kesitlemenin evrenselliği konusundaki kanıtın detaylarını açıklamadı, bir çokgeni hesaplayıp bir başka çokgene dönüştürmek için menteşeleme ve yeniden tasarlamanın her zaman güzel sonuçlar vermediğini ve sıklıkla tamamen işe yaramaz sonuçlar oluşturduğunu söyledi. Demanie şu anda bu metodu kullanarak şekil değiştiren robotlar üzerinde bir çalışma yürütüyor—tıpkı değişik şekillerdeki makinelere dönüşen robotların bulunduğu *Transformers* filmi ve çizgi filminin kahramanları gibi.



Konferans 8. Gardner için Toplanma ya da G4G idi ve logosu da ters çevirme ya da ambigram olarak adlandırılan teknikle Scott Kim tarafından tasarlandı.

Logo ters çevrildiğinde yine aynı şekilde okunur. Daha sonra bulmaca tasarımcısı olan eski bilgisayar bilimcisi Kim, bu simetrik güzel yazı tarzını 1970'li yıllarda icat etti. Ambigramlar, herhangi bir simetri ya da gizli yazının yaptığı gibi 180 derece döndürüldüklerinde aynı görünmek zorunda değillerdir.

Yazar Isaac Asimov, Kim'i, perspektif ve simetrileri kullanarak kendi içinde çelişkili görüntüler oluşturan ve bunların en ünlüsü olan yukarı tırmanarak başladığı noktaya gelen merdivenler olan Hollandalı sanatçı ile kıyaslarak "Alfabenin Escher'i" olarak tanımlar. Escher ve Kim arasındaki bir başka benzerlik ise iki sanatçının çalışmalarının da Gardner toplantılarında en geniş izleyici kitlesine ulaşmış olmasıdır.

Ambigramlar bağımsız ve eşzamanlı olarak yayıncı ve sanatçı olan John Langdon tarafından tasarlandı. Matematikçiler bu tarz harfleri özellikle kendilerine ait simetri ve desen araştırmalarını eğlenceli hale getirdikleri için severler. Yazar Dan Brown ambigramlarla, bir matematik öğretmeni olan babası Richard Brown sayesinde tanıştı. Dan Drown çoksatar eseri olan *Melekler ve Şeytanlar* adının bir ambigram tasarlaması için Langdon'a başvurdu ve onun onuruna kitabın başkahramanının ismini Robert Langdon yaptı. Langdon daha sonra *Da Vinci'nin Şifresi* ve *Kayıp Sembol* kitabının da kahramanı oldu. Ambigramlar aynı zamanda kendilerine beden üstü sanatlarda da yer buldular. Yarı gotik desenler simetrinin de yardımı eklenerek, isimleri ileriye, geriye, yukarıya ya da aşağıya okumanın verdiği mistik enerjiyle dövmelerin estetiğine mükemmel uyum sağladı.

G4G'de matematiğin kişilik bölünmesinin başlamasını engellediğini düşünmemek imkânsızdı. Konukların büyük bir çoğunluğu 70 yaşının üstündeydi, 80 ve hatta 90 yaşının üzerinde olanlar bile vardı. Yarım

yüzyılı aşkın bir süre boyunca Gardner binlerce okuyucusuyla yazıştı, bunların birçoğu ünlü matematikçilerdi ve bazıları yakın dostları olmuştu. 88 yaşındaki Raymond Smullyan, dünyanın en ileri gelen mantıksal paradoks uzmanıdır. Ben ona 'Sizinle bir şey konuşmak istiyorum' diye konuşmama başlamadan önce o konuşmaya başladı. Kambur, çarpıcı şekilde dağınık, beyaz saçlı ve tüylü sakalları olan Smullyan sıklıkla otel piyanosunda konukları eğlendirirdi. Ayrıca yanından gelip geçenlere beklenmedik sihir numaraları yapıyordu ve özellikle akşam yemeğinde yaptığı komedi şovuyla oradakileri gülmekten kırıp geçirdi.



Mark Palmer tarafından tasarlanan bu dövmede melek ters çevrildiği zaman şeytan haline dönüşür.

76 yaşındaki Solomon Golomb fiziksel olarak Smullyan'dan daha az enerjikti ve Paradokslar dışındaki konularda da konuşabiliyordu. Yumuşak bir dede gibi konuşan Golomb, uzay haberleşmesi, matematik ve elektrik mühendisliği alanında önemli buluşlar yapmıştı. Martin Gardner'in yardımları sayesinde de küresel popüler kültüre de katkıda bulunmuştu. Golomb akademik kariyerinin ilk yıllarında ikiden fazla kareden oluşan domino taşı olan polyomino fikrini geliştirmişti. Trio-

mino üç taneden, tetromino dört taneden oluşur ve bu böylece devam eder. Gardner'ın sayfasının ilk yıllarında Golomb'un kitabındaki bu dominoların nasıl bir araya geldikleri uluslararası bir ilgi uyandırmıştı, *Polyominoes* Rusçaya tercüme edildi ve orada çoksatar kitaplar arasına girdi. Bir hayranı düşen tetraminolardan oluşan bir oyun geliştirdi. O oyun, yani tetris, dünyanın en çok sevilen ve en uzun süreli oyunlarından bir tanesi oldu. Tabii ki Golomb da tetris oynadı ama yarım saatten fazla bir süre değil.

Diğer bir katılımcı Ivan Moscovich adeta Vincent Price'ın daha yaşlı bir kopyasıydı. Kusursuz bir koyu siyah renkli takım elbise giymiş, pırıl pırıl gözleri, kalem bıyığı ve arkaya doğru taranmış gri saçları vardı. Moscovich için, bulmacaların cazip yanı yaratıcı düşünme gerektirmeleriydi. Şimdi Sırbistan olarak bilinen bölgede doğmuştu ve İkinci Dünya Savaşı sırasında hem Auschwitz hem de Bergen-Belsen toplama kamplarında bulunmuştu. O doğuştan gelen bir yaratıcılık nedeniyle –sürekli kendini kurtulması gereken durumlara soktuğu için– hayatta kaldığına inanıyor. Savaştan sonra, bir işkolik bulmaca yapımcısı oldu. O kaçınılmazdan kaçabilmek için, sürekli kalıpların dışında düşünmeyi seviyor. Motivasyonu sürekli yeni fikirler geliştirmenin verdiği güdü, şanslı kaçışından sonra oluşan travmanın etkisi olduğunu söylüyor.

Moscovich'in geçtiğimiz yarım yüzyıl boyunca oluşturduğu yaklaşık 150 tane lisanslı bulmacası var ve derlemiş olduğu bulmaca kitabı Loyd ve Dudeney çağının ardından derlenmiş en iyi kitap olarak saygı görüyor. Şimdi 82 yaşında ve en son buluşu olan Sen ve Einstein adında bir kayan kutu bulmacasına sıkı sıkı sarılıyor. Oyunun fikri kare bir ızgara etrafında dönen şekillerle Einstein'in resmini oluşturmak. Moscovich'in akıllı hamlesi ise her bir bloğun üzerine kutuyu yansıtan kıvrımlı bir ayna koymak, yani bloğun aslında bir şeyin yansıması olduğunu düşünüyorsunuz. Moscovich bana, Sen ve Einstein'in uluslararası bir başarıya ulaşabileceği fikrinin onu heyecanlandırdığını söyledi.

Bulmaca endüstrisindeki her insanın rüyası gibi, Moscovich'in rüyası da yeni bir bulmaca çılgınlığı icat edebilmek. Bugüne kadar matematikle bağlantılı olarak dünyada sadece dört tane bulmaca çılgınlığı yaşandı: Tangram, Onbeş Bulmacası, Sabır Küpü ve Sudoku. 1974 yılında buluşu yapıldığından bu yana Sabır küpü 300 milyonun üzerinde satıldı. Ticari başarısının yanı sıra, süslüce boyanmış küp hiç ölmeyecek bir popüler kültür objesidir. Bu bulmaca krallığının emsalsiz bir üyesiydi ve şaşırtıcı olamayan bir şekilde 2008 G4G'de varlığı hissedildi. Dört boyutlu Sabır Küpü üzerine yapılan bir konuşma büyük bir alkış aldı.

Orijinal Sabır Küpü 3 x 3 x 3 boyutlarında sıralı 26 küp ya da küpçükten oluşur. Her bir dikey ve yatay sıralar bağımsız bir şekilde hareket edebilirler. Oyunun amacı küp karıştırıldıktan sonra, küpçükleri her bir yüzeyi aynı renkte olacak şekilde dizmektir. Her bir yüzey için ayrı bir renk vardır. Moscovich, Ernö Rubik'in kesinlikle bir dahi olduğunu söyledi. Sadece küp fikri değil aynı zamanda küpleri birbirine çarpıcı şekilde uydurması da dâhiyane bir mühendisliğin bir parçasıydı. Sabır Küpü'nü parçalara ayırdığınız zaman bütün parçaları bir arada tutan ayrı bir araç yoktur, her bir parça merkezinden çıkan küresel bir kilit mekanizmasıyla ana gövdeye bağlanır.

Bir nesne olarak, küpün kendisi de seksidir. Platonik bir katı cisimdir ve en azından eski Yunanlılardan beri kalıcı, mistik statüsü de vardır. Marka ismi de aynı zamanda rüya gididir: Hoş bir tat bırakan bir ses benzerliği ve uyum vardır. Sabır Küpü (Rubik Cube) isminde doğudan gelen egzotiklik de var ancak bu kez Asya'dan değil soğuk savaş dönemindeki doğu Avrupa'dan. Kulağa, orijinal Sovyet uzay teknolojisinin gözbebeği olan sputnik gibi geliyor.

Başarısındaki bir diğer etken ise bulmacayı çözmenin kolay olmamasına rağmen insanların kendinden soğumasına neden olmaması.

Hampshire'de müteahhit olan Graham Parker 26 yıl boyunca küpü tamamlayabilmek için bekledi. 'Küpü tamamlayabilmek için önemli olayları kaçırdım, bazen geceleri küpü düşünerek uyuyamazdım' diyor ve küpün başında tahmini olarak 27.400 saat geçirdiğini söylüyor. 'Son parçayı da yerine yerleştirdiğim ve küpün tüm yüzeyinin aynı renkte olduğunu gördüğümde mutluluktan ağladım. Bunun nasıl bir rahatlama olduğunu size anlatamam.' Küpü uzun bir sürede çözmeyi başarabilen herkes küpü tekrar çözmeyi ister ama daha kısa bir süre içerisinde. Birinin Sabır Küpü rekorunu kırmak rağbet gören bir spor haline gelmiştir.

Speedcubing yani Sabır Küpü'nün hızla çözülmesi ancak 2000 yılından sonra ortaya çıkmıştır. Bunun bir nedeni de zamana karşı yapılan daha acayip mekanik bulmaca sporlarının ortaya çıkmasıdır. *Speedstacking* plastik bardakların en hızlı şekilde bir kalıba göre dizilmesi çalışmasıdır. Hem büyüleyici hem de muhteşemdir. En hızlı istifçilerin hızı o kadar fazladır ki sanki havaya plastikle resim yapıyor gibi görünürler. Bu spor Kaliforniya'da 1980'li yıllarda çocukların hem sağlıkları hem de el-göz koordinasyonlarını geliştirmek için icat edilmiştir. Dünya çapında 20.000 okulun bu sporu müfredatlarına koydukları iddia edilmektedir. *Speedstacking*'de bir kronometre ile bağlantılı bir dokunmatik sensoru olan özel alet kullanılır. Bu aletler *speedcubing* topluluğuna ilk defa standart bir ölçüm yapabilme olanağı sağlamıştır ve bu tarzdaki bütün yarışmalarda kullanılmaya başlanmıştır.

Aşağı yukarı her hafta, dünya üzerinde bir yerlerde yerel bir *speedcubing* turnuvası düzenlenmektedir. Küplerin çözümüne başlamadan önceki konumlarının herkes için eşit zorlukta olduğundan emin olmak için, küpün bir bilgisayar programı tarafından belirlenen rastgele bir sayıda döndürülmüş olması sağlanmaktadır. Şu andaki mevcut rekor 19 yaşındaki Hollandalı öğrenci Erik Akkersdijk'e ait olan 7.08 saniyedir. Akkersdijk aynı zamanda 2 x 2 x 2 küpe ait olan (0.96 sn), 4 x 4 x 4 küpe ait olan (40,05 sn) ve 5 x 5 x 5 küpe ait olan

(1dk 16.21 sn) rekorlarını da elinde bulundurmaktadır. Aynı zamanda ayaklarıyla da Sabır Küpü çözebilmektedir ve 51.36 saniyelik rekoruyla dünya dördüncüsüdür. Buna rağmen Akkersdijk tek elle çözme konusunda kendisine gerçekten geliştirmeli çünkü bu dalda dünya 33.'sü ve gözler bağlı çözmede dünya 43.'sü. Gözleri bağlı çözmenin kuralları aşağıdaki gibidir: Zamanlayıcı küp yarışmacıya gösterildiği andan itibaren başlar. Yarışmacı küpü incelemeli ve gözlerini bağlamalıdır. Ve çözdüğünü düşündüğü anda jüriye saati durdurmasını söylemelidir. Mevcut rekor 2008 yılında Finlandiyalı Ville Seppiinen'e aittir. Diğer Sabır Küpü çözme disiplinleri de şöyledir, hız treninde, suyun altında, yemek çubuklarıyla, tek tekerlekli bisiklette dengede dururken ve serbest atlama esnasında.

Matematiksel anlamda en çok ilgi uyandıran çözme metodu ise onu mümkün olan en az hamlede çözmektir. Yarışmada özel olarak karıştırılmış bir küp verilir ve yarışmacının en kısa sürede çözümü tarif etmeden önce incelemesi için 60 dakika süresi vardır. 2009 yılında Belçikalı Jimmy Coll 22 hamleyle dünya rekorunu eline geçirmiştir. Bu çok zeki bir insanın karıştırılmış bir kübü çözebilmek için 60 dakika düşündükten sonra yapabileceği hareketin sayısıdır. Peki bu insana aynı küp için 60 saat süre verilirse daha düşük bir hamlede yapabilir mi? Bu soru matematikçilerin Sabır Küpü'yle ilgili en çok ilgisini çeken sorudur: n öyle bir sayı olsun ki her olasılık n kadar ya da daha az hamleyle çözülebilsin. Bir saygı işareti olarak bu soruda n tanrının sayısı olarak adlandırılır.

Tanrının sayısını bulmak aşırı derecede zordur çünkü sayılar oldukça büyüktür. Yaklaşık olarak 43×10^{18} (ya da 43'ün arkasından 18 tane sıfır) küp pozisyonu vardır. Eğer küpün her bir olasılığı yapılıp bu küpler üst üste dizilirse oluşacak uzunluk güneşe sekiz milyondan fazla kez gidip gelmeye yeterli olur. Matematikçiler gibi bütün olası pozisyonlara bakmak yerine, problem üzerinde yirmi yılı aşkın bir süredir çalışan Tomas Rokicki 19.5 milyar hareketin 20 ya da daha az

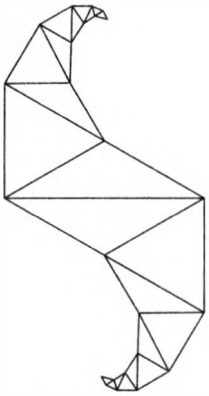
hamlede çözümünü buldu. Şu ana kadar her biri 19.5 milyar hamlesi bulunan bir milyon ya da benzer sayıda pozisyonlara sahip olan başka koleksiyonları inceledi ve tekrar yirmi hareketin çözüm için yeterli hareket olduğunu buldu. Ve 2008 yılında bir koleksiyonundaki diğer bütün hamlelerin 20'den sadece iki hamle uzak olduğunu ispat etti. Böylece tanrının sayısının üst sınırının 22 olduğunu bulmuş oldu.

Rokicki tanrının sayısının 20 olduğuna dair ikna olmuş durumda. 'Tüm küp pozisyonlarının ortalama % 9'unu çözdüm ve onlardan hiç birinde 21 hamleye gerek olmadı. Eğer 21 ya da daha fazla hamle gerektiren bir pozisyon olursa bu oldukça ender rastlanan bir şey olur.' Rockini'nin mücadelesi teorik olmaktan daha çok lojistiktir. Her bir takım küpün olasılıklarını incelemek çok büyük bilgisayar zamanı gerektirir. 'Mevcut tekniğimle tanrının sayısının 20 olduğunu bir yıl içinde ispatlamam için 1000 tane modem bilgisayara ihtiyacım var' dedi.

Küp matematiği Rokicki için uzun süreli bir hobiydi. Ona 'Sudoku gibi diğer matematik bulmacalarıyla ilgilenmeyi hiç düşündün mü' diye sorduğumda bana 'dikkatimi diğer parlak problemlerle dağıtmaya çalışma, zaten başımdaki problem yeterince büyük' diye şaka yaptı.

Ernö Rubik hâlâ Macaristan'da yaşıyor ve çok nadir röportaj veriyor. Ben şans eseri onun eski öğrencilerinden biri olan Atlanta'dan Daniel Erdély ile tanışma şansını yakaladım. Onunla matematiksel objeleriyle dolu bir otelin lobisinde buluştuk. Origami modelleri, geometrik şekiller ve ayrıntılı bulmacalar masamızın üzerinde duruyordu. Erdély kendi üretimlerine bakıyordu, üzerinde giriftli dönen desenlerin olduğu açık mavi renkli kriket topu büyüklüğündeki nesneler. Erdély onlara sanki bir köpek üreticisinin yavru köpeklerine gösterdiği şefkati gösteriyordu. Bir tanesini aldı, avuç içi büyüklüğünde kristal yüzeyli bir gezegendi bu ve 'Spidrons' dedi.

Erdély de Rubik gibi bir matematikçi değil. Rubik bir mimardı ve Erdély bir grafik tasarımcısı ve Rubik'in profesör olduğu Budapeşte Uygulamalı Sanatlar Üniversitesi'nde grafik tasarım eğitimi almıştı. 1979 yılında Erdély Rubik'in eğitim verdiği derslere girmiş. Bu sınıflar için ev ödevi olarak, alternatif bir dizi küçülen, eşkenar ve ikizkenar üçgenden oluşan yeni bir şekil icat etmiş. Bu şekil sarmal gibi kavisli olduğu için ona 'Spidron' adını vermiş. Üniversiteyi bitirdiğinden bu yana spidronlar onun saplantısı haline gelmiş. Üzerlerinde sürekli değişiklikler yapmış, fayanslar gibi estetik bir şekilde hem iki boyutta hem de üç boyutta birbirlerinin içlerine geçebildiklerini fark etmiş. Yaklaşık beş yıl kadar önce, Macar bir arkadaşı ona bilgisayarda spidronlar çizen bir program tasarlamış. Onların mozaik özellikleri daha sonra matematikçiler, mühendisler ve heykeltıraşları büyülemiş ve Erdély bu şekiller için daha sonra bir dünya turu yapmış. Bu uygulamanın güneş panelleri yapımında kullanılabileceğini inanıyor. G4G'de roketler fırlatan bir şirketin sahibiyle tanışmış. Bana anlattığı spidron belki de uzaya gidebilir.





Spidron ve spidron topu

Bir öğleden sonra konferans delegeleri, Tom Rodgers'ın Atlanta'nın banliyösünde olan evine gittiler. Rodgers orta yaşların sonuna gelmiş ve G4G'yi 1993 yılında ilk kez düzenlemiş olan işadamıydı. Çocukluğundan beri Gardner hayranı olan Rodgers'ın en büyük hayali, utangaçlığıyla ünlenmiş olan Gardner'ın yıllardır yazıştığı hayranlarıyla karşılıklı görüşebilmesi için bir toplantı düzenlemekti. Gardner'ın en çok ilgilendiği o üç alan olan matematik, sihir ve bulmaca dalından konuklar davet etmeye karar verdi. Toplantı o kadar başarılı olmuştu ki 1996 yılında ikinci bir toplantı düzenlendi. Gardner ilk ikisine iştirak etmişti ama daha sonra düzenlenenlere katılamayacak kadar güçsüzleşmişti. Rodgers'ı ziyaret ettiğim zaman çiçek, bambu, çam ve meyve ağaçları ile çevrili, Japon tarzı tasarlanmış bir bungalovda yaşıyordu. Bahçe içinde çeşitli konuklar, ahşap ve metalden geometrik heykeller inşa etmek için ekiplerini oluşturmuşlardı. Diğerleri ipuçları evin dış duvarlarına yapıştırılmış ısmarlama bir bulmaca avını çözmeye çalışıyorlardı.

Birdenbire Princeton Üniversitesi matematik profesörü John Horton Conway'in çığlığı herkesin dikkatini çekti. Conway'in kalın bir sakalı, gür gri saçları vardı ve üzerinde denklem olan bir tişört giyiyordu. Kendisi son elli yılın en seçkin matematikçilerinden biriydi. Herkesten spirallerini sayabilmesi için kendine on tane çam kozalağı getirmesini istedi. Kozalak sınıflandırması onun yeni hobisiydi: Birkaç yıl önce başladığından bu yana onlardan 5000 tane saymıştı.

Evin içinde, Port Sunlight'ta yaşayan Avustralyalı Colin Wright'la ile tanıştım. Okul çocuğu tıraşlı kızıl saçları ve gözlükleriyle tam olarak bir matematikçiden beklenecek biçimde görünüyordu. Wright bir hokkabaz, 'Tek tekerlekli sirk bisikletini sürmeyi öğrendikten sonra yapılacak en bariz şey gibi görünüyordu' dedi. Aynı zamanda hokkabazlığın matematiksel yazılımını geliştirme üzerine yardımlarda da bulundu, çok önemli gibi gözükmeyebilir ama uluslararası hokkabazlık topluluğu üzerinde şok etkisi oluşturuyordu. Bu dil sayesinde hokkabazların binlerce yıldır yapamadıkları hareketleri yapabildikleri ortaya

çıktı. 'Bir kere problemleri konuşmak için bir lisana sahip olduğunda bu düşünce sürecine katkıda bulunuyor' dedi Wright, kısa süre önce geliştirdiği hokkabazlık numarasını göstermek için üç topu çıkartırken. 'Matematik sonuçlar, hesaplamalar ve formüller değildir. Matematik işlerin nasıl yürüdüğünü anlamak için şeylerin parçalarını açığa çıkarır.'

Matematikteki en keskin zekâların çam kozalakları sayma, hokkabazlık gibi önemsiz eğlenceler üzerinde çalışma ve hatta bulmaca çözme gibi uğraşlarının aslında keyfi, hatta sonuçsuz ve anlamsız bir zaman kaybı olup olmadığı konusunda 'Matematikçiler ne yapmak istiyorlarsa bırak yapsınlar' dedi. 'Gerçekten de neyin yararlı olup neyin olamayacağını asla bilemeyiz.' Cambridge Üniversitesi profesörü G. H. Hardy 1940 yılında ünlü bir söylevinde (ve gururlu bir şekilde) açıkladığı ve şu anda birçok internet güvenlik programının temeli olan sayı teoreminin hiçbir pratik uygulaması yoktur diye yaptığı açıklamadan alıntı yaptı. Wright'a göre, matematikçiler teoremler ilk olarak keşfedildikten uzun yıllar sonra görünüşte yararsız olan teoremlere uygulama alanları bulmada başarılı oluyorlardı.

G4G'nin en önemli yanlarından bir tanesi de katılımcıların hepsinden Martin'e verilmek üzere bir hediye getirmelerinin istenmesiydi.

Aslında sizden her bir konuğa verilmek üzere hediyenizden 300 tane getirmeniz isteniyordu ve sonunda her kişiye herkesin hediyesinin olduğu bir çanta veriliyordu. Benim ziyaret ettiğim yıl verilen çanta da bulmacalar, sihir numaraları, kitaplar, CD'ler, aletler ile doluydu. Çantalardan bir tanesi Martin Gardner'a aitti ve çantayı ona ben götürdüm.

Gardner, Norman, Oklahoma'da yaşıyor. Oraya vardığım gün eyaletin üzerinde fırtınalar dolaşıyordu. Eyaletler arası yollarda birkaç saat boyunca yanlış dönüşler yaptıktan sonra evini nihayet bulabildim. Texan fastfood dükkanının yan tarafındaki bir destekli yaşam mer-

kezinde yaşıyordu. Odasının kapısı yaşlıların oturdukları ve sohbet ettikleri ortak salonun giriş kapısından sadece birkaç adım uzaktaydı. Gardner'in kapısının yanında bir yazışmalar kutusu duruyordu. E-posta kullanmıyordu. Evin diğer sakinlerinin toplamından daha fazla mektup gönderiyordu.

Gardner kapıyı açtı ve beni içeriye davet eti. Duvarda kendisinin dominolardan yapılmış bir portresi ve onun yanında Einstein'in ve Escher'in özgün büyük birer fotoğrafı vardı. Gardner'ın üzerinde gündelik yeşil bir gömlek ve pantolon vardı. Yumuşak ve açık tenliydi, beyaz saç demeti ve kaplumbağa kabuğundan çerçeveli gözlüğünün altında gözleri parlıyordu. Dünyevi olmayan bir yanı vardı. Muhtemelen her gün masasının başında dikildiği için ise mükemmel bir duruşa sahipti.

Gardner *Oz Büyücüsü*'nden fırlamış gibi görünüyordu. Yaşlı bir büyücüyle tanışmak için çıktığım görevde bir fırtına tarafından orta batıya atılmıştım. Dorothy & co'nun özellikle münasip bir referans olduğu ortaya çıktı. Bunu onunla tanışmadan önce bilmiyordum, Gardner *Oz Büyücüsü*'nün yazarı olan L. Frank Baum hakkında dünya çapında bir uzmandı. Gardner bana on yıl kadar önce onun Dorothy ve arkadaşlarının Manhattan'a gitmeleri üzerine bir devam hikâyesi yazdığını söyledi. Eğer değerli olmasaydı çok önemli gazeteler tarafından incelenmezdi, 'Temel olarak Oz hayranları için yazılmıştı' dedi.

Ona G4G hediye çantasını verdim ve bir konferansın konusu olmanın nasıl bir duygu olduğunu sordum. 'Oldukça gurur duydum ve de şaşırdım' diye cevapladı. 'Bu kadar hızla büyümesine hayret ettim.' Matematikçiler arasındaki ünü hakkında konuşmaktan rahatsız olduğu açıkça belli oluyordu. 'Ben bir matematikçi değilim' dedi. 'Aslında ben bir gazeteciyim. Kalkülüsün ötesinde kaybolurum. Yazılarımdaki başarımın sırrı da budur. Yazdığım şeyleri okuyucunun anlayacağı biçimde yazmayı bildiğimi anlamam uzun sürdü. Gardner'in gerçek

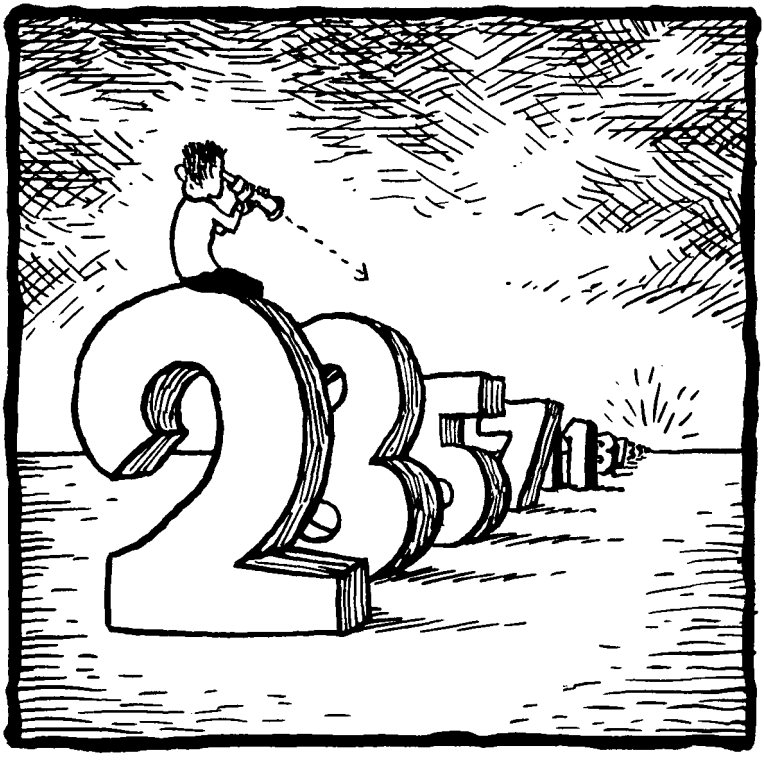
bir matematikçi olmadığını öğrendiğim zaman başta içten içe hayal kırıklığı yaşadım, sanki sihirbaz perdesini kaldırmıştı.

Gardner'ın tercih ettiği konu sihirdi. Onu asıl hobisi olarak tanımlıyordu. Sihir dergilerine abone olmuştu ve eklemlerinin elverdiği kadar sihir numaralarını uygulamaya çalışıyordu. Bana kendi icat ettiği ve adını 'bir çırpıda değişen' koyduğu el çabukluğuna dayalı kart oyunları yapmayı teklif etti, bu numarada kartların rengi göz açıp kapayıncaya kadar değişiyordu. Bir paket kart çıkarttı, avuç içiyle destenin arasına bir siyah kart yerleştirdi ve kart aniden kırmızı oldu. Gardner matematikle ilgilenmeye matematiksel sihir numaraları vasıtasıyla başladı ve henüz daha genç biriyken sosyal döngüsünün oluşmasını sağlayanlar matematikçiler değil sihirbazlardı. Sihri sevdiğini çünkü sihrin dünyada konusunda merak duygusunu uyandırdığını söyledi. 'Havada süzülen bir kadın görürsünüz ve bu size yerçekimi etkisiyle yere düşmemesinin mucizevi olduğunu hatırlatır. Fakat yerçekiminin kadının havada durması kadar gizemli bir şey olduğunu asla düşünmezsiniz.' Ona matematiğin de aynı zevki verip vermediğini sordum. Cevabı 'Kesinlikle evet' oldu.

Gardner matematik üzerine yazdığı yazılar konusunda çok iyi tanınıyor olabilir, ama onlar sahip olduklarının çok azını gösteriyorlar. İlk kitabı sözde bilimi alaşağı etmek konusundaki ilk kitap olan '*Fads and Fallacies*' kitabıydı. Felsefe üzerine yazmış ve din üzerine çok ciddi bir roman yayınlamıştı. En çok satan kitabı *Alice Harikalar Diyarında* için çağlar üstü bir inceleme olan *Annotated Alice* (Açıklamalı Alice) idi. 93 yaşında olmasına rağmen verimliliğinde bir azalma göstermiyordu. Diğer pek çok projeyle birlikte G. K. Chesterton üzerine yazdığı denemelerden oluşan bir kitabı yayınladığı için devasa bir kelime oyunları kitaplığı vardı.

Gardner sayesinde eğlenceli matematik çok iyi bir durumda. Heyecan verici ve farklı bir alanda her yaştan ve her milletten insanlara

keyif vermeye devam etmenin yanı sıra ciddi sorular üzerindeki ciddi araştırmalara da ilham kaynağı olmakta. Gardner'ın bir matematikçi olmadığını öğrendiğim zaman hafif bir hayal kırıklığına uğramıştım, ama destekli yaşam merkezinden ayrılır ayrılmaz aklım başıma geldi. Nihayetinde, Gardner'ın eğlenceli matematik ruhu açısından bugün eğlenceli matematiğin kişiselleştirildiği bir kişi olarak yalnızca hevesli bir amatör olması olağanüstüydü.


2 3 5 7 11 13

BÖLÜM YEDİ

Ardışıklığın Sırrı

Atlanta'da sıradışı hobisi olan bir adamla tanıştım. Neil Sloane sayı biriktiriyordu. Bağımsız sayılar değil ama bu saçmalık olurdu, dizi olarak adlandırılan türden sayı gruplarını topluyor. Örneğin, n'inci sayı n'dir biçiminde tanımlanan doğal sayılar bir dizidir.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 . . .

Sloane koleksiyonuna 1963 yılında, daha bir lisans öğrencisiyken kartların üstüne seriler yazarak başlamıştı. Sıralı listelerden hoşlanan bir kişiden elindekilerin sıralı bir listesini istemek kulağa çok anlamlı geliyordu. 1973 yılına geldiğinde 2400 tane serisi olmuştu ve bunları *Tamsayı Dizileri* adlı bir kitapta yayınladı. Doksanların ortalarında 5500'e ulaştı. İnternetin icadıyla da, koleksiyonu ideal büyüklüğüne ulaştı. Sloane'ın listesi on-line tamsayılar dizisi ansiklopedisine dönüştü, şu anda 160.000 tane başlığın oluşturduğu bir yayın ve her yıl 10.000 yeni başlık açılıyor.

İlk tanıştığınızda, Sloane tipik içine kapalı bir kişi gibi görünüyor. Zayıf, kel ve kalın camlı kare gözlükler takıyor. Yine de bir başka tutkusu olan dağ tırmanışlarından kazandığı, Zen benzeri kaslı ve sert duruşa sahip. Sloane yükselen jeolojik oluşumlara karşılık verdiği mücadele gibi yükselen sayılara karşı verdiği mücadeleden de keyif alıyor. Sloane'ın görüşüne göre sayı dizilerini incelemek ve dağ tırmanışları

benzerliği ikisinin de kurnaz bir bulmaca çözme yeteneği gerektiriyor olmaları. Buna başka bir paralel daha olduğunu söylemek isterim: Seriler de dağcılık gibi insana cesaret verir. Bir n sayısına ulaştığınız zaman n+1 sayısını aramak için insanı cesaretlendirir. Bir sonraki sayıya ulaşma arzusu, her defasında daha yüksek bir zirveye tırmanma arzusuna benzer: Buna rağmen dağcılar coğrafyanın sınırlandırmasıyla karşı karşıyayken, sayı dizileri genellikle sonsuza kadar devam ederler.

Bir plak koleksiyoncusunun nadir bulunan eski kayıtları biriktirmesi gibi, Sloane onun ansiklopedisinin genel olanlar kadar tuhaf taraflarını da kucaklamış. Örnek olarak koleksiyonunda aşağıdaki seri de var. '0 serisi' sadece 0 sayısından oluşur (Ansiklopedideki her serinin başına bir A ön eki koyulmuştur. 0 serisi Sloane'ın topladığı dördüncü seridir bundan dolayı A4 olarak bilinir).

(A4) 0, 0, 0, 0, 0 . . .

En basit olası bitiş dizisi olarak, belirgin bir nihilistik cazibeye sahip olmasına rağmen koleksiyondaki en küçük dinamiğe sahiptir.

On-Line Ansiklopedi'nin bakımını yapmak, Gerçek işi olan New Jersey AT&T Labs'deki matematikçilik görevinin yanında Sloane için tam zamanlı başka bir iş olmuş. Fakat artık yeni seriler için etrafta dolaşmasına gerek yok. Ansiklopedi'nin başarısıyla, sürekli dışarıdan gönderimler almaya başladı. Bunlar profesyonel matematikçilerden ve çok sayıda sayı sevdalısı amatörlerden geliyor. Sloane'ın yeni bir seriyi kulübe kabul etmek için yalnızca tek bir kriteri var: 'iyi tanımlanmış ve ilgi çekici olmalı.' İyi tanımlanmış olması serideki her terimim hem cebirsel hem de retorik olarak tanımlanabilir olması anlamına geliyor. İlgi çekici olması, bir karar verebilme sorunu, emin olamadığı zamanlarda da kabul etme eğilimi sergiliyor. İyi tanımlanmış ve

ilgi çekici olması serinin matematiksel bir değer taşıdığı anlamına gelmiyor. Tarih, folklor ve tuhaflıklar da bu kriterleri sağlayabiliyor.

Ansiklopedi'deki serileri arasındaki en çok eski olan seri:

(A100000) 3, 6, 4, 8, 10, 5, 5, 7. . .

Serinin numaraları dünyada bilinen en eski matematiksel objenin üzerindeki işaretlerin sayılara çevrilmiş hali: Şu anda Kongo Demokratik Cumhuriyeti diye bilinen ülkede bulunan 22.000 yaşındaki İshango kemiği. Maymun kemiğinin başlarda bir çentik çubuğu olduğu düşünülmüştü, ama üzerindeki 3 sayısı ve onu takiben üçün iki katı, 4 sayısı ve dördün iki katı sonra 10 sayısı ve onu takiben 10'un yarısı bunun çok daha gelişmiş bir matematiksel veri olduğuna işaret ediyordu. Koleksiyonda aynı zamanda çok nefret edilen bir seri de var.

(A51003) 666, 1666, 2666, 3666, 4666, 5666, 6660, 6661...

Bu seri, kendi ondalık gelişme dizelerinin içinde 666 sayısını içerdikleri için sevimsiz sayılar olarak da bilinir. Daha hafif bir not olarak, kreş serisi:

(A38674) 2, 2, 4, 4, 2, 6, 6, 2, 8, 8, 16...

Bu sayılar Latin Amerika şarkısı olan 'La Farolera' çocuk şarkısının sayılarıdır: *Dos y dos son quatro, cuatro y dos son seis. Sets y dos son ocho, y ocho dieciseis.*'

Belki de bütün seriler içinde en klasik olanı asal sayılardır:

(A40) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 . . .

Asal sayılar birden büyük olan ve yanlızca kendine ve bire bölünebilen sayılardır. Betimlerken oldukça basit gözükse de dizi bazen oldukça gizemli bazen de oldukça görkemli özellikler sergiler. İlk olarak Öklid'in ispatına göre asal sayılar sonsuzdurlar. Bir sayı düşünün, herhangi bir sayı, her zaman bu sayıdan daha büyük bir asal sayı vardır. İkinci olarak, 1'den büyük herhangi bir doğal sayı, asal sayıların benzersiz bir çarpımı olarak yazılabilir. Başka bir deyişle, her sayı birbiriyle çarpılmış benzersiz asal sayılar topluluğuna eşittir. Örneğin 221 = 13 x 17. Bir sonraki sayı 222 = 2 x 3 x 37. Bir sonraki 223 asal sayıdır, bu yüzden sadece 223 x 1 ile elde edilir ve 224 = 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 7. Bunu sonsuza kadar devam ettirebiliriz ve her bir sayı sadece tek bir benzersiz yolla asal çarpanlarına ayrılabilir. Örneğin milyon sayısı = 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5. Bu özellik sayı aritmetiğinin temel teoremi olarak bilinir ve bu yüzden asal sayılar sayı sisteminin bölünmez yapı taşlarıdır.

Asal sayıları birbirleriyle topladığımız zaman da yapı taşlarıdır. İkiden büyük her çift sayı iki tane asal sayının toplamına eşittir:

4 = 2 + 2

6 = 3 + 3

8 = 5 + 3

10 = 5 + 5

12 = 5 + 7

. . .

222 = 199 + 23

224 = 211 + 13

. . .

Bu, her çift sayı iki asal sayının toplamıdır önermesi, Goldbach Konjektürü olarak bilinir ve adını Leonhard Euler'le bu konuda mek-

tuplaşan Prusyalı matematikçi Christian Goldbach'dan almıştır ve Euler, konjektürün doğruluğundan tamamen emindir. Nerdeyse 300 yıl boyunca hiç kimse bir çift sayının iki asal sayının toplamı olmadığını ispatlayamamıştır, ama şimdiye kadar hiç kimse konjektürün doğru olduğunu da ispatlayamamıştır. Bu en eski ve en ünlü çözülememiş matematik problemlerinden biridir. 2000 yılında, matematiksel dedektiflik hikâyesi olan *Petros Amca ve Goldback Konjektürü*'nün yayıncıları bunun matematik bilgisi sınırlarının çok ötesinde olduğuna olan inançlarından dolayı, Goldbach konjektürünü çözene 1.000.000 $ vaat ettiler ve hâlâ bir çözen çıkmadı.

Goldbach Konjektürü asal sayılarla ilgili çözülememiş tek problem değildir. Araştırmanın bir diğer odak noktası da, bu sayıların sayı doğrusu üzerine, hiçbir kalıba bağlı olmadan nasıl gelişigüzel serpilmiş olmasıdır. Aslında, asal sayıların dağılımını oluşturan düzeni araştırmak en zengin sayı teorileri araştırmasıdır ve çok derin sonuçlara ve varsayımlara yol açmaktadır.

Ancak, bütün üstünlüklerine rağmen asal sayıların matematiksel düzenin (ya da düzensizliğin) sırlarını barındıran serilerde çok önemli hâkimiyeti yoktur. Tüm serilerin, sayıların davranışları üzerinde büyük bir katkısı vardır. Sloane'ın Ansiklopedi'si aynı zamanda şablonlar üzerine bir çalışma, matematiksel DNA'nın kıyamet kitabı, dünyanın temelini oluşturan sayısal düzeninin bir rehberi olarak da görülebilir. Neil Sloane'ın kişisel takıntısından hareketle başlamış olabilir ama bu proje çok önemli bilimsel bir kaynak haline gelmiştir.

Sloane, Ansiklopedi'yi matematiğe eşdeğer olan FBI'ın parmakizi veritabanıyla karşılaştırıyor. 'Suç mahalline gittiğiniz zaman parmak izlerini alırsınız ve bunları suçluyu bulmak için veritabanınızdaki parmak izleriyle karşılaştırırsınız,' dedi. 'Bu Ansiklopedi'yle aynı şeydir, matematikçiler işlerinde doğal yollarla ortaya çıkan serilerle karşılaşırlar ve bunu veritabanında ararlar—ve bunun zaten orada var olduğunu görmek onlar için mutluluk vericidir.' Veritabanının kulla-

nılırlığı sadece matematikle sınırlı değildir. Mühendisler, kimyacılar, fizikçiler ve uzay bilimciler de bakarlar ve ansiklopedide buldukları seriler onlara kendi çalışma sahalarında hiç beklemedikleri bağlantılar ve matematiksel öngörüler sağlar. Akıl almayan matematiksel serilerin ortaya saçıldığı ve anlaşılmaya çalışıldığı bir alanda iş gören herhangi biri için bu ansiklopedi bir altın madeni değerindedir.

Ansiklopedi yardımıyla Sloane birçok yeni matematiksel fikri görüyor ve ayrıca kendisine ait buluşlar yapmak için zaman ayırıyor. 1973 yılında sayıların 'sürekliliği' düşüncesini ortaya attı. Bu tek basamaklı bir sayı elde edebilmek bir önceki basamağın basamaklarını çarpmak, ikinci sayıyı bulmak için önceki basamağın sayılarını, ardından üçüncü sayıyı bulmak için tekrar önceki basamağın sayılarını çarparak yapılan ve birkaç basamak süren bir işlemdir. Örnek olarak:

$$88 \rightarrow 8 \times 8 = 64 \rightarrow 6 \times 4 = 24 \rightarrow 2 \times 4 = 8$$

Öyleyse Sloane'a göre 88 sayısının sürekliliği, tek basamaklı sayıya ulaşmak için üç aşamadan geçtiği için 3'tür. Buna göre daha büyük bir sayının sürekliliği de daha büyüktür. Örneğin 679'un sürekliliği 5'tir.

$$679 \rightarrow 378 \rightarrow 168 \rightarrow 48 \rightarrow 32 \rightarrow 6$$

Aynı çalışmayı 277.777.788.888.899 sayısı üzerinde yaptığımızda sürekliliğini 11 buluruz. Ancak buradaki sorun: Sloane 11'den büyük sürekliliği olan hiçbir sayı bulamamıştır hatta araştırmayı 1 sayısının yanında 233 tane 0 olması anlamına gelecek şekilde 10^{233}'e kadar yapmış olsa da. Bir başka deyişle 233 basamaklı herhangi bir sayı alıp bu süreklilik kavramındaki gibi basamakları birbiriyle çarparsanız sonuçta bulacağınız sayı ya 11 ya da 11'den daha küçük bir sayı olacaktır.

Bu olağanüstü bir biçimde sezgilere aykırıdır. Görünüşe göre içinde 8'ler ve 9'lar gibi birçok büyük rakam bulunan 200 basamaklı ya da çok daha fazla basamaktan oluşan bir sayı aldığınızda bunu tek basamaklı bir sayıya indirgemeniz için yapacağınız işlem sayısı en fazla 11 tanedir. Büyük sayılar her nasılsa kendi ağırlıkları altında parçalanırlar. Bunun sebebi eğer sayıda 0 ortaya çıkarsa, bütün basamakların sonucu 0 olur. Eğer başladığınız sayıda hiç 0 yoksa ve sayı daha önce tek basamağa indirgenmediyse 0 daima 11. basamakta ortaya çıkar. Süreklilik teoremiyle, Sloane inanılmaz derecede verimli 'dev katili' bulmuştur.

Bu noktada durmayıp, Sloane en küçük n süreklilik sayısını veren sayılardan oluşan bir seri oluşturmuştur (En az iki basamaklı sayılar olacak biçimdeki sayıları ele alıyoruz). İlk terim 10'dur, çünkü:

10 → 0 ve 10 bir işlemde tek basamağa ulaşan en küçük iki basamaklı sayıdır.

İkinci terim 25'dir, çünkü:

25 → 10 → 0 ve 25 iki işlemde tek basamağa ulaşan en küçük sayıdır.

Üçüncü terim 39'dur, çünkü:

39 → 27 → 14 → 4 ve 39 sayısı üç işlemde tek basamağa inen en küçük sayıdır.

Tam listesi:

(A3001) 10, 25, 39, 77, 679, 6788, 68889, 2677889, 26.888.999, 3.778.888.999, 277.777.788.888.899

Bu sayı listesini garip bir şekilde büyüleyici buluyorum. Aralarında belirgin bir düzen var ama aynı zamanda karmakarışık bir asimetriklik gösteriyorlar. Süreklilik sanki yalnızca 11 tane merak uyandıracak biçimde şekillendirilmiş sosis üreten bir sosis makinesi gibi.

Sloane'ın yakın arkadaşlarından biri olan Princeton profesörü John Horton Conway de sıradışı matematiksel kavramlardan keyif alıyor. 2007 yılında bir Üs Treni kavramını geliştirdi. *abcd* formunda yazılmış herhangi bir sayı... Üs Treni $a^{b^{c^{d}}}$ olur. Basamak sayısının tek olması durumunda, son basamağın üssü yoktur, böylelikle *abcde* $a^{b^{c^{d}}}e$ olur. 3462 sayısını alalım. $3^{4^{6^{2}}} = 81 \times 36 = 2916$. Üs Treni'ni sadece tek bir sayı kalana kadar uygulayalım.

3462 2916 $2^{9^{1^{6}}} = 512 \times 1 = 512 \rightarrow 5^{1^{2}} = 10 \rightarrow 1^{0} = 1$

Conway yok edilemez rakam - Üs Treni yardımıyla tek basamağa indirilemeyen bir sayı olup olmadığını bilmek istiyordu. Yalnızca bir tane bulabildi.

2592 $2592 = 32 \times 81 = 2592$

Boş boş oturacak biri olmayan Neil Sloane davaya el attı ve bir tane daha buldu:

24.547.284.284.866.560.000.000.000

Sloane artık başka bir yıkılamaz basamak olmadığından emin.

Bir an için düşünün, Conway'in Üs Treni öylesine ölümcül bir makinedir ki evrendeki birbirleriyle alakasız gözüken sonsuz sayılar düzleminde sadece iki noktayı gösteren 2592 ve 24547284284866560000000000'den başka evrendeki tüm sayıları yok edebilir. 'Sonuç muhteşem,' dedi Sloane. Büyük sayılar süreklilikte olduğu gibi Üs Treni hesaplamasında da oldukça hızlı bir şekilde ölmekteler—bir 0 sayısı belirir ve her şey sıfıra ulaşır. Sloane'a Üs Treni'nde kurtulabilecek sağlamlıkta bu iki sayının gerçek dünyada bir işimize yarayıp yaramayacağını sordum. İşe yarayabileceğini düşünmüyordu. 'Sadece eğlenmeye yarar. Bunda bir sorun da yok. Arada eğlenmek de gerek' dedi.

Sloane eğleniyordu. O kadar çok seriyle ilgilenmişti ki kendi sayı estetiğini oluşturmuştu. Onun en sevdiklerinden biri Kolombiyalı matematikçi Bernardo Recamán Santos tarafından geliştirilen Recamán dizisiydi:

(A5132) 0, 1, 3, 6, 2, 7, 13, 20, 12, 21, 11, 22, 10, 23, 9, 24, 8, 25, 43, 62, 42, 63, 41, 18, 42, 17, 43, 16, 44, 15, 45...

Sayılara bakıp kalıbı görmeye çalışın. Onları dikkatlice takip edin. Etrafta dağılmış bir şekilde dolaşıyorlar. Her şey karmakarışık, biri orada, biri burada.

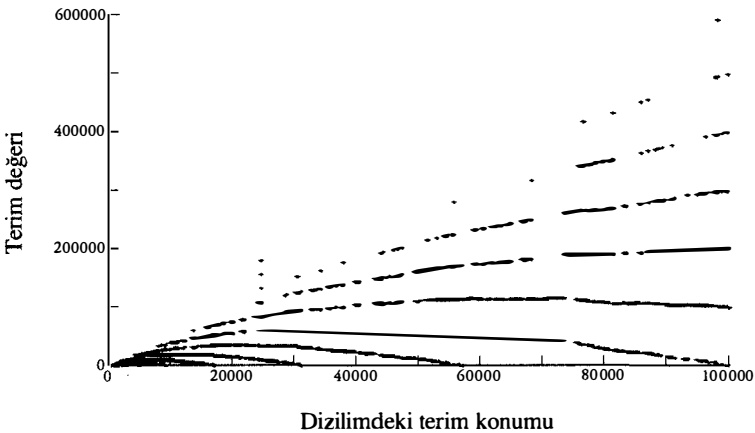
Aslında, numaralar şu basit kurala göre oluşturulmuştur 'çıkarabiliyorsan çıkar yoksa topla.' n'inci terimi bulabilmek için bir önceki terimi alıp n'i ya ondan çıkarır ya da toplarız. Kural ise bir önceki sayıyı çıkartmak için sonucun eksi bir değerde olmaması ya da daha önce seride bulunmamış olmasıdır. Burada ilk sekiz terimin nasıl hesaplandığını gösterelim.

0 ile başlıyoruz

İlk terim = 0'ıncı terim + 1 = 1	*0'dan 1 çıkarttığımızda sonuç –1 olduğu ve buna da izin verilmediği için toplamamız gerekir.*
İkinci terim = ilk terim +2 = 3	*Tekrar 1'den 2 çıkarttığımızda sonuç –1 olduğu için toplamamız gerekir.*
Üçüncü terim = ikinci terim +3 = 6	*Yine 3 sayısından 3 çıkarttığımızda sonuç 0 olduğu ve bu da seride bulunduğu için toplamamız gerekir.*
Dördüncü terim = üçüncü terim – 4 = 2	*6-4 (+) değerde olduğu ve 2 sayısı seride olmadığı için çıkartmamız gerekir.*
Beşinci terim = dördüncü terim +5= 7	*2 - 5 sayısı –3 değerini verdiği için toplama yapmamız gerekir.*
Altıncı terim = beşinci terim +6 = 13	*7 - 6 sayısı 1 ettiği ve 1 sayısı seride bulunduğu için toplamamız gerekrir.*
Yedinci terim = altıncı terim + 7 = 20dir.	*13 - 7 = 6 olduğu ve 6 sayısın seride bulunduğu için toplamamız gerekir.*
Sekizinci terim = yedinci terim – 8 = 12'dir.	*20 - 8 sayısı (+) değerde olduğu ve seride olmadığı için çıkartmamız gerekir.*

Ve böylece devam eder.

Bu oldukça zahmetli işlem tam sayıları alır ve tamamen gelişigüzel görünen cevapları hesaplar. Ortaya çıkan kalıbı görmenin bir yolu da dizinin aşağıda gösterildiği gibi bir grafiğini çizmektir. Yatay eksen terimlerin konumudur ve dikey eksende terimlerin değeridir yani n. terim n'de bulunur. Recamán serisindeki ilk 1000 terimin grafiği muhtemelen daha önce gördüklerinize hiç benzememektedir. Bahçe sulama sistemine ya da bir çocuğun noktaları birleştirmeye çalışmasına benzemektedir (ölçek çok büyük olduğu için, grafikteki kalın çizgiler aslında nokta kümeleridir). 'Karmaşaya böylesi bir düzen getirilebildiğini görmek çok ilginç' diye altını çizdi Sloane. 'Recamán serisi tam olarak matematiğin karmaşası ve güzeliği arasında bulunuyor ve işte bu yüzden çok etkileyici.'



Recamán serisi

Recamán serisindeki düzen ve düzensizliğin arasındaki çatışma müzikal olarak da takdir edilebilir. Encyclopedia'nın herhangi bir seriyi müzikal olarak dinletme fonksiyonu vardır. 88 tuşlu sekiz oktavlı bir piyano hayal edin. 1 sayısı piyanoda en tiz sesi vermektedir, 2 sayısı ikinci tiz sestir ve bu şekilde en güçlü ses olan 88 sayısına kadar devam eder.

Notalar bittiği zaman tekrar en aşağıdan başlarsınız, böylece 89 sayısı ilk notanız olur. Doğal sayılar, 1, 2, 3, 4, 5 . . . Sonsuz bir döngüyle yükselen sesler gibidir. Ancak Recamán serisi tarafından üretilen müzik tüyler ürperticidir. Sanki bir korku filmi müziği gibidir. Uyumsuzdur ama rastgele değildir. Bütün bu ahenksizliğe rağmen sanki gizemli bir elin size arkadan dinlemeye değer kalıplar çaldığını hissedersiniz.

Recamán serisi hakkında matematikçilerin ilgilendiği soru ise serinin tüm sayıları içerip içermediğidir. Serinin 10^{25} terimden sonra eksik en küçük sayı 852.655'dir. Sloane er ya da geç 852.655 de dâhil olmak üzere her sayının seride görüneceğini düşünüyor ama bu henüz ispatlanmış değil. Bu yüzden Sloane'ın, Recamán'ı neden bu kadar merak uyandırıcı bulduğunu anlamak zor olmaz.

Sloane'ın bir diğer gözdesi ise Gijswijt'in serisi, çünkü diğerlerinin aksine bu seri inanılmaz bir hızla büyür. Gijswijt'in serisi akıllara durgunluk veren bir aylaklık hızında artmaktadır. Hiç sonu gelmeyen harika bir döngüdür.

(A90822) 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 2, 1, 1, 2...

3 sayısı ilk defa dokuzuncu pozisyonda ortaya çıkar. 4 ilk defa 221. pozisyonda ortaya çıkar. 5 sayısı ilk defa saklandığı yerden kafasını gösterene kadar geçen sürede cehennem bile soğuyabilir, bu sayı kendini $10^{10^{10^{10^{10^{10^{10^{10^{10^{10}}}}}}}}}$ pozisyonunda gösterir.

Bu oldukça büyük bir sayıdır. Kıyaslama yapılacak olursa kâinat 10^{80} parçadan oluşmaktadır. Nihayetinde, 6 sayısı o kadar uzak bir noktada ortaya çıkar ki bu pozisyonu kuvvetin kuvvetinin kuvvetinin kuvveti olarak tanımlamak daha uygun olur.

$$2^{2^{3^{4^5}}}$$

Diğer rakamlar eninde sonunda gözükecek olmasına rağmen, bu sayıların hiçbir acelesi olmadığının da altının çizilmesi gerekir. 'Karalar ölür, hatta denizler bile ölür,' diyor Sloane şairane bir üslupla, 'ama insan, Dion Gijswijt'in A090822 dizisinin soyut güzelliğine sığınabilir.'

Asal sayılara gösterdikleri ilginin yanı sıra Yunanlılar kendi tabirleriyle mükemmel sayıdan da büyülenmişlerdir. 6 sayısını ele alalım: Onun çarpanları 1, 2 ve 3'tür. Eğer bu çarpanları birbiriyle toplarsanız *ve işte* tekrar 6 sayısını elde edersiniz. Mükemmel sayılar tıpkı 6 gibi çarpanlarının toplamına eşit olan sayılardır (6 sayısı da aslında 6 sayısının bir çarpanıdır, ama mükemmellik söz konusu olduğunda, sadece verilen sayının kendisinden daha düşük çarpanlarını toplanıyor olması anlamlıdır). 6'dan sonraki ilk mükemmel sayı 28'dir çünkü 28'i bölen sayılar 1.2.4.7 ve 14'tür ve bunların toplamı 28 eder. Yalnızca Yunanlılar değil, Yahudiler ve Hıristiyanlar da böyle rakamsal bir mükemmelliğin kozmolojik önemiyle ilgilenmişlerdir. Dokuzuncu yüzyıl Benedikten ilahiyatçısı Rabanus Maurus '6 sayısı tanrı dünyayı, 6 günde yarattığı için mükemmel değildir, aslında, tanrı 6 sayısı mükemmel olduğu için dünyayı 6 günde yaratmıştır,' diye yazmıştır.

Matematikte bir sayının çarpanlarının toplanması çok tuhaf kavramlara yol açar. Eğer iki sayıdan birincisinin çarpanlarının toplamı ikinci sayıyı veriyorsa ve ikinci sayının çarpanlarının toplamı da birinci sayıyı veriyorsa bu sayılar dost sayılardır. Örneğin 220 sayısının çarpanları olan 1.2.4.5.10.11.22.44.55 ve 110 topladığı zaman 284 elde ederiz. 284 sayısının çarpanları olan 1.2.4.71 ve142 toplandığında 220 ederler. Harika! Pisagorcular 220 ve 284 sayılarını kardeşliğin sembolü olarak görürler. Orta çağ boyunca bu rakamlarla aşkı teşvik etmek için çeşitli tılsımlar yapılmıştır. Bir Arap kendisi 220 etiketli bir şey yerken partnerinin 284 etiketli bir şey yediği zaman ortaya çıkan erotik etki üzerinde araştırma yaptığını yazmıştır. 1636 yılında Pierre de Fermat, dost sayıların ikinci setini keşfetti, 17.296 ve 18.416.

bilgisayarın gelişmesi sayesinde günümüzde 11 milyondan daha fazla dost sayı çifti bilinmektedir. En büyük çiftin her bir sayısı 24.000'den daha fazla basamağa sahiptir. Bu sayıları bir baklava dilimi üzerine yazmak biraz zor olacaktır.

1918 yılında Fransız matematikçi Paul Poulet, yeni bir sayısal dostluk çeşidi olarak 'sosyalleşme' terimini uydurdu. Aşağıda verilen sayılar sosyaldir çünkü ilk sayının çarpanlarını toplarsanız ikinci sayıyı verir, ikinci sayının çarpanlarını toplarsanız üçüncü sayıyı verir, üçüncü sayının çarpanlarını toplarsanız dördüncü sayıyı verir, dördün çarpanları size beşinciyi verir ve eğer beşinci sayının çarpanlarını toplayacak olursanız bu sizi en başa döndürür ve ilk sayıyı elde edersiniz:

12.496

14.288

15.472

14.536

14.264

Poulet sadece iki tane sosyal sayı zinciri keşfetmiştir, bunlardan birincisi yukarıda verilen grup ve ikincisi ise daha az özellik taşıyan 14.316 sayısıyla başlayan 28 sayılık bir gruptur. Bir sonraki sosyal sayı grubu ancak 1969 yılında Henri Cohen tarafından bulunmuştur. Her biri dört sayıdan oluşan dokuz tane sosyal zincir bulmuştur ve bunların en küçük değerli olanı 1.264.460, 1.547.860, 1.727.636 ve 1.305.184'tür. Günümüzde 175 tane sosyal sayı zinciri bilinmektedir ve bunların neredeyse tamamı dört sayılı zincirlerden oluşmaktadır. Hiçbir zincir üçlü gruptan oluşmaz (şairane bir tarzda söylemek gerekirse hepimizin bildiği gibi üçlü grup kalabalıktır ama dörtlü grup

sosyaldir). En uzun zincir hâlâ Poulet'in 28'lik zinciridir ve ilginç olanı ise 28'in de bir mükemmel sayı olmasıdır.

Mükemmel sayılarla asal sayılar arasındaki beklenmedik bağlantıyı ortaya çıkaran Yunanlılardır ve bu daha ileri bir matematiksel maceraya yol açmıştır. 1'den başlayan 2'nin kuvvetlerini ele alalım:

(A79) 1, 2, 4, 8, 16 . . .

Elemanlarda, Öklid çift sayılar toplayarak elde ettiğimiz tüm asal sayılar için, topladığımız en yüksek çifti asal sayıyla çarparsak bir mükemmel sayı elde ettiğimizi gösterdi. İsabetli bir şey söylenmiş gibi, gelin örnekler üzerinde bunun ne anlama geldiğini görelim:

1 + 2 = 3'tür. 3 bir asal sayıdır. En yüksek sayımız 2 olduğu için 3 x 2 = 6 ve 6 bir mükemmel sayıdır.

1 + 2 + 4 = 7. 7 de bir asal sayıdır ve en yüksek sayı olan 4 ile çarptığımızda 7 x 4 = 28. 28 diğer bir mükemmel sayıdır.

1 + 2 + 4 + 8 = 15. Bu asal bir sayı değildir bu yüzden burada mükemmel sayı yoktur.

1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31. Bu asal bir sayıdır. 31 x 16 = 496 mükemmel sayı.

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63. Asal değil.

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127. Asal sayı. 127 x 64 = 8128 mükemmel sayı.

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 255. Asal değil.

Öklid'in ispatı tabii ki geometri yoluyla yapılmıştır. Sayıları yazmak yerine onları sayı doğrusu üzerinde göstermiştir. Eğer Öklid'in cebirsel numaralandırma lüksü olsaydı 1+2+4 gibi çiftlerin toplamını ikinin kuvvetleri olarak ifade edebileceğinin farkına varırdı, $2^0 + 2^1 + 2^2 +$ . . . (herhangi bir sayının 0. Kuvveti daima 1 ve herhangi bir sayının 1. Kuvveti ise sayının kendisine eşit olarak kabul edilir) buradan da açık olarak herhangi bir çift serisi toplamının bir sonraki en büyük sayının bir eksiğine eşit olduğu sonucuna varılır. Örneğin:

1 + 2 = 3 = 4 -1

ya da

$2^0 + 2^1 = 2^2 - 1$

1+2 + 4 = 7 = 8 –1

ya da

$2^0 + 2^1 + 2^2 = 2^3 - 1$

Bu, formüle göre $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ olarak genelleştirilebilir, bir başka deyişle çift sayıların serisinden oluşmuş 1'den başlayan n tane sayının toplamı = $2^n - 1$'dir.

Öyleyse, Öklid'in 'çift sayılar toplayarak elde ettiğimiz tüm asal sayılar için, topladığımız en yüksek çifti asal sayıyla çarparsak bir

mükemmel sayı verir' açıklamasını kullanırsak ve buna modern cebirsel numaralandırmayı da eklersek çok daha özgün bir tanım elde ederiz.

> $2^n - 1$'in asal olduğu tüm durumlar için, $(2^n - 1) \times 2^{n-1}$ bir mükemmel sayıdır.

Mükemmel sayılara değer veren uygarlıklar için Öklid'in ispatı müthiş bir haberdir. Eğer mükemmel sayılar $2^n - 1$ asal sayı olduğu zaman üretilebiliyorlarsa bir sonraki mükemmel sayıyı bulmak için bir sonraki $2^n - 1$ formunda olan asal sayıyı bulmak yeterli olacaktır. Mükemmel sayı arayışı belirli bir tip asal sayı arayışına indirgenmiştir.

$2^n - 1$ formunda olan asal sayılara olan ilgi belki mükemmel sayıya olan ilgiden kaynaklanıyor olabilir, fakat on yedinci yüzyılda asal sayılar hak ettikleri hayranlık uyandıran nesneler olma durumunu kazandılar. Aynı yolla bazı matematikçiler pi sayısının daha fazla ondalık bölümünü bulmaya çalışırlarken bazı matematikçiler de daha büyük asal sayıları bulmaya kendilerini adadılar. Çabalar birbirine benzer fakat zıttırlar: pi sayısının ondalık basamakları gitgide küçülürken asal sayıların basamakları göğe doğru yükselir. Bunlar sayıların keşfedilebilecek olası kullanımlarının yanı sıra yolculuğun romantizm yüzünden üstlenilen görevlerdir.

Asal sayıların peşinde $2^n - 1$ oluşturma yöntemi başına buyruktur. Bu n sayısının her biri için bir asal sayı üretmez ama küçük değerlerdeki başarı oranı oldukça yüksektir. Yukarda gördüğümüz gibi n = 2, 3, 5 ve 7 olduğu zaman $2^n - 1$ bir asal sayıdır.

$2^n - 1$ yöntemiyle asal sayılar üretme konusu üzerinde en fazla odaklanmış matematikçi Fransız rahibi Marin Mersenne'di. 1644 yılında 257'ye kadar olan bütün n değerleri için $2^n - 1$'in asal sayı değerini bildiğini söylediği o çarpıcı iddiayı ortaya attı. İddiasına göre sayılar şunlardı:

(A109461) 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257

Mersenne yetenekli bir matematikçiydi ama listesi önemli ölçüde tahminlere dayanıyordu. $2^{257} - 1$ sayısı 78 basamaklıdır ve bu, insan zekâsının bunun asal olup olmadığını kontrol edebileceğinden çok daha büyük bir sayıdır. Mersenne sayılarının karanlığın içine saplanıp kaldığının farkındaydı. Listesi için, 'Bütün zamanlar bunların asal olup olmadığını belirlemek için yeterli olmaz' dedi.

Ama yine diğer matematik konularında olduğu gibi zaman yeterli oldu. Mersenne listesini yazdıktan iki buçuk asır sonra 1876 yılında Fransız sayı kuramcısı Edouard Lucas sayıların $2^n - 1$ formunda yazılmış asal sayılar olup olmadıklarını kontrol edebilecek bir metot buldu ve Mersenne'in 67'de yanıldığını, 61, 89, 107'yi de kullanmadığını buldu.

Buna rağmen Mersenne şaşırtıcı bir şekilde 127 hakkında haklı çıkmıştı. Lucas metodunu kullanarak $2^{127} - 1$'in ya da 170.141.183 .460.469.231.731.687.303.715.884.105.727 sayısının asal olduğunu ispatladı. Bu bilgisayar çağına kadar bilinen en büyük asal sayıydı. Buna rağmen lucas $2^{257} - 1$ sayısının asal olup olmadığını ispatlayamadı çünkü sayı kâğıt ve kalem kullanılarak yazılamayacak kadar büyük bir sayıydı.

Hatalı parçalar bulunmasına rağmen Mersenne'in listesi onu ölümsüzleştirdi ve artık günümüzde $2^n - 1$ şeklinde yazılan asal sayılar Mersenne'in asal sayıları olarak adlandırılır.

$2^{257} - 1$ sayısının asal olup olmadığı ancak 1952 yılında Lucas'ın metodu kullanılarak ispatlandı fakat büyük bir yardımla. Bir bilim insanı grubu Los Angeles Sayısal Analiz Enstitüsü'nde toplandılar ve SWAC olarak bilinen o günün bilgisayarına 8.5 metre uzunluğunda bir kâğıt rulo koydular. Sadece ruloyu koymaları bile biraz zaman aldı. Daha sonra operatör test edilecek sayıyı bilgisayara girdi: 257.

Saniyenin küçük bir bölümünde sonuç geldi. Bilgisayar, $2^{257} - 1$ asal sayı değildir dedi.

1952 yılında aynı gecede $2^{257} - 1$ sayısının asal olmadığı bulundu ve bilgisayara diğer olası Mersenne sayıları girildi. SWAC ilk 42 girdinin asal olmadığını söyledi. Sonra beklenen sonuç geldi. Bilgisayar onaylamıştı evet $2^{521} - 1$ sayısı bir asal sayıydı. Sayı son 75 yılda tanımlanmış en büyük Mersenne asal sayısıydı, buna cevap olarak da $2^{520}(2^{521} - 1)$ son iki yüzyıldan fazla süredir bulunmuş sadece 13. mükemmel sayıydı. Yalnız $2^{521} - 1$ sayısı en büyük asal sayı olma keyfini yalnızca iki saat yaşayabildi. Gece yarısından biraz önce SWAC $2^{607} - 1$ sayısının da aynı zamanda bir asal sayı olduğunu belirledi. İlerleyen birkaç ay boyunca SWAC kapasitesinin sınırlarını zorladı, üç tane daha asal sayı buldu. 1957 ve 1996 yılları arasında 17 tane daha Mersenne asal sayısı bulundu.

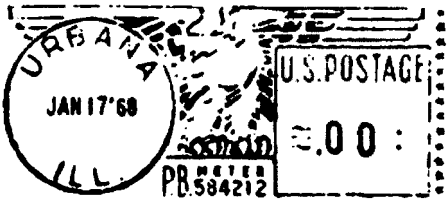
1952 yılından bu yana bilinen en büyük asal sayı hep bir Mersenne asal sayısı olmuştu (1989 ve 1992 yılları arası hariç. Bu yıllarda bilinen en büyük asal sayı, bağımsız bir asal sayı olarak yazılan $[391581 \times 2^{216193}] - 1$ sayısıydı). Var olan bütün asal sayılar arasında ve biz onların sonsuz sayıda olduğunu biliyoruz, Mersenne'in asal sayıları keşfedilmiş asal sayılar tablosunda en yüksek asal sayılar olarak hâkimdir çünkü bu sayılar asal sayı avcılarına nişan alınacak bir hedef verir. Yüksek asal sayılar bulmak için kullanılacak en iyi teknik, Mersenne'in asal sayılarına bakmaktır, diğer bir deyişle $2^n - 1$ sayısını bilgisayara girip n değerine daha yüksek değerler vermektir ve daha önce bahsettiğimiz Edouard Lucas'ın metodunun daha gelişmiş bir hali olan Lucas-Lehmer metoduyla bunun asal sayı olup olmadığı ispatlamaktır.

Mersenne'in asal sayılarında aynı zamanda estetik bir güzellik vardır. Örneğin ikili modda yazılan herhangi bir 2^n sayısı 1 ve peşinden n tane sıfır olarak yazılır. Örneğin $2^2 = 4$ bu ikili 100 ve $2^5 = 32$, bu da 10000 olarak yazılır. Tüm Mersenne sayıları 2^n sayısından 1

eksik olduğundan, Mersenne asal sayılarının tüm ikili tanımlamaları 1'in yanındaki basamak serileri olarak ortaya çıkar.

Modern zamanların en etkili asal sayı avcısının görevine başlamasında, mektup üzerindeki işaretler ilham kaynağı oldu. George Woltman 1960'lı yıllarda henüz daha bir çocukken babası ona posta pulu üzerindeki $2^{11213} - 1$ ne anlama geldiğini açıkladı: En yakın zamanda bulunmuş olan asal sayı. 'O kadar büyük bir sayının asal olduğunun ispatlanmış olmasına çok şaşırmıştım' dedi.





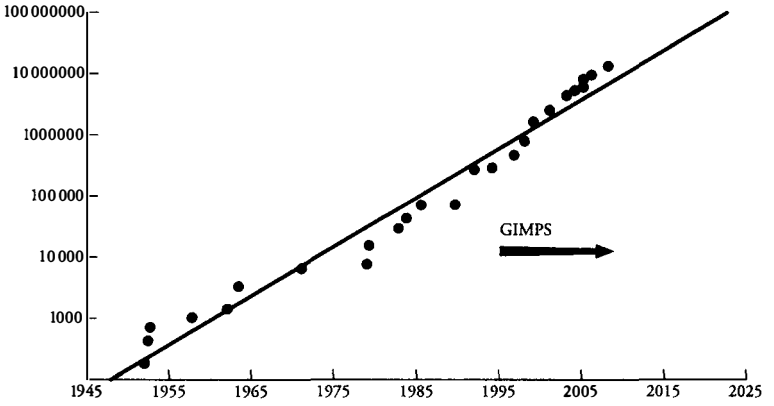
Woltman daha sonra asal sayıların görevinde muazzam katkıda bulunan bir yazılım yazılmasının sorumluluğunu üstlendi. Bütün proje devasa sayılar üzerinde çalışan bir süper bilgisayar çevresinde dönüyordu ve bu bilgisayara giriş sınırlıydı. 1990'lı yıllarda ise birçok büyük görev küçük parçalara ayrılarak internet aracılığıyla birbirine bağlı birçok küçük bilgisayara paylaştırıldı. 1996 yılında Woltman internetten bedava indirilebilinen ve bir kere bilgisayara kurduğunuz zaman araştırılmamış bir asal sayıyı bilgisayarınızda araştırmaya başlayan bir program yazdı. Program işlemciyi sadece boş olduğu zamanlarda kullanıyordu. Siz uyuduğunuz zaman yazılım bilgisayarınızda bilim için asal sayıları araştırıyordu. Büyük İnternet Mersenne Asalları Araştırması ya da GIMPS şu anda 75.000 bilgisayara bağlıdır. Bunlardan bazıları araştırma enstitülerinde bazıları iş merkezlerindedir ve bazıları

da kişisel bilgisayarlardır. GIMPS dağıtılmış bilgisayar yazılımlarında ilklerden birisidir ve en başarılısıdır (Buna benzer en büyük proje Seti@home, uzaydaki yaşam belirtilerini saptamak için kozmik sesleri deşifre eder. Milyonun üzerinde kullanıcısı olmasına rağmen şu ana kadar hiçbir şey keşfedememiştir). GIMPS'in on-line olmasından sadece birkaç ay sonra 29 yaşındaki Fransız programcı 35. Mersenne asal sayısı olan $2^{1.398.269} - 1$ sayısını ağda yayınladı. Bundan yaklaşık bir yıl sonra GIMPS toplamda 11 tane daha Mersenne asal sayısını ortaya çıkardı. Şu an asal sayıların altın çağını yaşıyoruz.

En büyük asal sayı olma rekorunu elinde bulunduran 45. Asal sayı $2^{43112609} - 1$'dir ve bu yaklaşık 13 milyon basamaklı bir sayıya karşılık gelmektedir. 2008 yılında GIMPS'e bağlı olan Los Angeles Kaliforniya Üniversitesi'ndeki bilgisayar tarafından bulunmuştur. Bulunan 46. ve 47. Mersenne sayıları aslında 45. sayıdan küçüktürler. Bunun nedeni farklı hızlardaki farklı bilgisayarların sayı serilerinin farklı yerlerinde çalışıyor olmalarıdır. Bu yüzden daha önce bulunan asal sayıların daha sonra bulunanlardan büyük olması mümkündür.

GIMPS'in vermiş olduğu bilimsel gelişme için kitlesel gönüllü işbirliği mesajı özgür internet anlayışı için de bir örnek olmuştur. Woltman istemeden asal sayı arayışını yarı siyasi bir uğraşa dönüştürdü. Projenin sembolik öneminin bir işareti olarak, bir dijital haklar kampanyası örgütü olan Electronic Frontier Foundation (EFF), 1999 yılından beri bulunan her büyük asal sayı için para ödülü koymuştur. 45. Mersenne sayısı 10 milyon basamağa ulaşan ilk asal sayıydı ve 100.000 $ ödülü kazandı. EFF ilk 100 milyon basamaklı asal sayı için 150.000 $, ilk milyar basamaklı sayı için 250.000 $ ödül koydu. Eğer 1952 yılından bu yana keşfedilmiş en büyük asal sayılar keşfedildikleri yıllara göre logaritmik bir grafik üzerine çizilirse ortaya neredeyse düz bir çizgi çıkar. İşlem gücünün de bu süre içerisinde gözle görülebilir bir tutarlılıkta artış sergilediğini göstermenin yanında bir milyar basamaklı asal sayının bulunacağı zamanı da tahmini olarak gösterir. Bunun 2025

yılında olacağına bahse girerim. Böyle bir sayıyı yazmak için her bir rakamı bir milimetre olarak yazarsanız ortaya çıkacak mesafe Paris'ten Los Angeles'a kadar uzanır.



Keşif yılı ve bilinen en asal sayı grafiği.

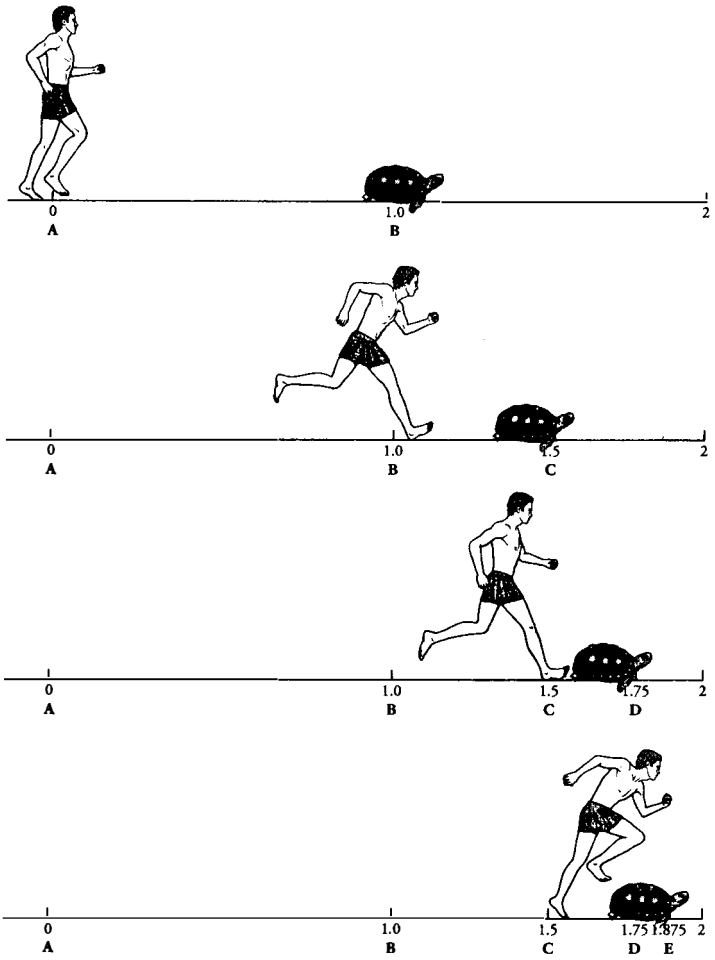
Sonsuz sayıda asal sayı olmasına rağmen (ancak Mersenne asal sayılarının sonsuz sayıda olup olmadığı henüz bilinmemektedir), daha büyük asal sayıları arama görevi hiç bitmeyecek bir görevdir. Çünkü ne kadar büyük bir sayı bulursak bulalım, henüz ulaşmadığımız asal sayı azmimizin azlığı konusunda bizimle alay edecek büyüklükte başka bir asal sayı olacaktır.

Sonsuzluk muhtemelen temel matematiğin en derin ve zorlu fikridir. Zihin bir şeyin sonsuza kadar gideceği fikriyle başa çıkmakta zorlanır. Örneğin eğer 1'den başlayıp hiç durmadan 2, 3, 4, 5 . . . diye saymaya devam etsek ve hiç durmasak ne olur? Bu soruyu basit bir şekilde çocukken sorduğumu hatırlıyorum ve şimdiye kadar henüz düzgün

bir cevap alamadım. Ailelerden ve okul öğretmenlerinden gelen klasik cevap sonsuzluktur ama bu cevap sorunun yeniden sorulmasına neden oluyor. Sonsuzluk basit biçimde saymaya başlayıp hiç durmamamız biçiminde ifade edilir. Yine de erken yaşlarda bize sonsuzluğu bir sayı gibi düşünmemiz gerektiği söylenmişti, garip bir sayı ama yine de diğerleri gibi bir sayı.

Biz sonsuzluğu, sonsuz döngü olan sembolüyle gösteriyoruz (buna lemniskat denir) ve kendine özgü aritmetik biçimi olduğu öğretilir. Herhangi bir sonsuz sayıyı bir başka sonsuz sayıyla toplarsanız yine sonsuzluk elde edersiniz. Bir sonsuz sayıdan diğer bir sonsuz sayıyı çıkartırsanız yine sonsuz bir sayı elde edersiniz. Sonsuz bir sayıyı 0 olmamak koşuluyla çarpar ya da bölerseniz yine sonsuz elde edersiniz. Bize basit bir şekilde sonsuzluğun 2000 yıldan beri gizemli terimler arkasına saklanma zahmetine katlanan bir sayı olduğu anlatılır.

Sonsuzluk sorununun vitrininde ilk boy gösteren kişi, M.Ö. beşinci yüzyılda yaşayan Yunanlı filozof Elea'lı Zenon'dur. Çok meşhur paradokslarından birinde, kaplumbağa ve Aşil arasında olan teorik bir yarıştan bahseder. Aşil kaplumbağadan daha hızlıdır, bu yüzden kaplumbağaya başlangıç için avans verilir. Ünlü savaşçı bir A noktasında, sürüngen rakibi ise daha ilerideki B noktasında yarışa başlar. Aşil B noktasına geldiği zaman Kaplumbağa çoktan C noktasına gitmiştir. Savaşçı C noktasına ulaşır ama rakibi çoktan D noktasına ulaşmıştır. Aşil D noktasına ulaşmalıdır fakat bunu yaptığı zaman Kaplumbağa çoktan E noktasına varmış olacaktır. Zenon'a göre bu kaçma kovalama yarışı sonsuza kadar devam etmek zorundadır ve hızlı Aşil hiçbir zaman dört ayaklı rakibine yetişemeyecektir. Atlet kaplumbağadan çok daha hızlıdır ama onu asla geçemez.



Aşil ve kaplumbağa

Zenon tıpkı bunun gibi, tüm paradokslarında sürekli olan hareketler üzerinde ayrık olaylar yaratarak saçma sonuçlara varmaktadır. Aşil kaplumbağaya yetişmeden önce bu sıçramalardan sonsuz sayıda yapmak zorundadır. Paradoks sonsuz süre içerisinde bu sonsuz atlayışları yapmanın imkânsız olduğu varsayımından meydana gelir.

Ancak Yunanlıların sonsuzlukla ilgili bu varsayımın bir safsata olduğunu görebilmeye yetecek kadar matematiksel derinlikte bir kavrayışları yoktu. Sonsuz süre içerisinde sonsuz sayıda sıçrama yapmak mümkündür. En önemli şartı sıçramaların kısa olması ve daha az zaman almasıdır böylece mesafe ve zaman 0'a yaklaşır. Bu gerekli bir koşul olmakla birlikte, yeterli değildir: Ayrıca sıçramaların da hızlı bir oranda azalması gerekmektedir.

Aşil ve kaplumbağa arasında geçenler şunlardır. Örneğin, diyelim ki Aşil kaplumbağadan iki kat hızlı koşuyor ve B noktası A noktasından 1 metre ötede olsun. Aşil B'ye ulaştığında kaplumbağa $\frac{1}{2}$ metre C'ye hareket etmiştir. Aşil C'ye vardığında kaplumbağa $\frac{1}{4}$ metre hareket edip D'ye varmıştır. Ve bu böyle devam eder. Aşil'in kaplumbağaya yetişmesi için koşması gereken toplam mesafe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \text{ olur.}$$

Aşil'in bu aralıkların her birini geçmesi bir saniye alsa bu yarışı tamamlaması sonsuza kadar devam eder. Fakat durum böyle değildir. Hızın sabit olduğunu varsayarsak, bir metre koşması bir saniyesini alacaktır, yarım metre gitmek için yarım saniye, çeyrek metre gitmesi için çeyrek saniye ve böyle devam eder. Kaplumbağaya yetişebilmesi için gerekli süre aynı toplama işlemiyle hesaplanır.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Hem süre hem de mesafede her seferinde yarıya indirerek sonlu bir mesafe ve zaman elde edilir. Yukarıdaki durumda 2 metre ve 2 saniye olur. Ve aslında Aşil'in kaplumbağayı yakalayabileceği ortaya çıkar.

Yine de Zenon'nun tüm paradoksları matematiğin sonsuz dizileriyle çözülmez. 'Diktomi' paradoksunda bir koşucu A'dan B'ye koşmaktadır. Ancak B'ye varmak için koşucunun iki nokta arasındaki mesafenin yarısını kat etmesi gerekir, biz buna C diyoruz. Fakat C'ye gitmek için öncelikle A ve C arasındaki mesafenin yarısını geçmek zorundadır. Sonuç olarak koşucunun bir noktaya ulaşabilmesi için daima geçmesi gereken bir yarım mesafe olmasından dolayı koşucu asla bir 'ilk nokta'ya ulaşamayacaktır. Eğer Zenon'nun söylediği gibi koşucu hiçbir zaman bir ilk noktasına ulaşamayacaksa koşucu hiçbir zaman A noktasını terk edemez.

Bilgiye göre, bu paradoksu çürütmek için Alaycı Diyojen sessizce ayağa kalktı ve A noktasından B noktasına yürüdü, böylece böyle hareketlerin mümkün olduğunu gösterdi. Fakat Zenon'un Diktomi paradoksu böyle kolay gözardı edilemezdi. İki bin beş yüz yıl boyunca bu kafa karıştıran bulmacayı tam anlamda çözen hiç kimse çıkmamıştır. Karışıklığın sebebi, sonsuz şekilde devam eden çizginin sonsuz sayıda bir seriyle ya da sonsuz sayıda aralıklarla tanımlanmamış olmasıdır. Aynı şekilde, kesintisiz zaman akışı ayrık zaman parçalarıyla mükemmel bir şekilde tanımlanmamıştır. Süreklilik ve ayrıklık kavramları tamamen uzlaştırılabilir değildir.

Onluk sistem Zenon'dan esinlenerek ortaya mükemmel bir paradoks örneği koyar. 1'den daha küçük en büyük sayı nedir? Bu tam bir karmaşadır, 0.9 fakat bu 0.99'dan küçüktür. Bu sayı 0.99 da değildir çünkü o da 0.999'dan küçüktür. Tek olası aday yinelenen ondalık 0,9999... sayısıdır bu da 9 sayıları sonsuza kadar gideceği anlamına gelir. İşte asıl paradoks burada başlar. Sayı 0.99999... da olamaz çünkü bu sayı 1 ile özdeştir.

Bir de şu açıdan düşünelim. Eğer 0.99999... sayısı 1'den farklı bir sayı ise sayı doğrusu üzerinde aralarında bir boşluk olmalıdır. O halde bu boşluğa 0.9999...'dan büyük ve 1'den küçük bir sayı yer-

leştirmek mümkün olmalıdır. Peki, bu sayı hangi sayı olabilir. 1'e 0.9999...'dan daha fazla yaklaşamazsınız. Öyleyse 0.99999... 1'den farklı değilse bu sayılar birbirine eşit olmalıdırlar. Bu da mantığa aykırıdır, 0.99999... = 1.

Öyleyse 1'den küçük en büyük sayı nedir? Paradoksa tatmin edici olarak verilebilecek tek cevap bu sayının var olmadığıdır (Aynı zamanda 2'den ya da 3'ten ya da diğer herhangi bir sayıdan küçük en büyük bir sayı yoktur).

Aşil'in kaplumbağaya karşı olan yarışının paradoksu, sıçrama sürelerinin sonsuz seriler olarak bilinen sonsuz sayıda terimin toplamının yazılmasıyla çözüldü. Bir dizinin elemanları birbirlerine eklendiği zaman buna seriler denir. Hem sonlu hem de sonsuz seriler vardır. Örneğin ilk beş doğal sayıyı birbiriyle toplarsanız bu sonlu bir seri oluşturur.

$$1+2+3+4+5=15$$

Bu toplama işlemini elbette kafamızdan yapabiliriz, fakat seriler daha fazla terime sahip olduklarında asıl mücadele buna kolay bir yol bulmaktır. Buna ünlü bir örnek, daha genç bir çocukken Alman matematikçi Carl Friedrich Gauss tarafından bulundu. Hikâyeye göre okul öğretmeni ondan ilk yüz doğal sayıyı toplamalarını ister.

$$1+2+3+\ldots+98+99+100$$

Öğretmeni Gauss'un anında '5050' cevabını vermesine inanamamıştır. Olağanüstü durum aşağıdaki formülle meydana gelmiştir. Eğer sayıları akıllıca eşlerseniz –ilk sayıyla son sayı ikinci sayıyla sondan ikinci sayı– seri şu şekilde yazılabilir.

$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + ... + (50 + 51)$

Bu da

$101 + 101 + 101 + 101 + ... + 101$

Her birinin değeri 101 olan 50 adet terim elde ederiz bu da 50 x 101 = 5050'dir. Bunu herhangi bir n sayılı serinin toplamını bulmak için genelleştirebiliriz. İlk n tane sayının toplamı tane n + 1'e eşittir. Yukarıdaki örnekte n = 100'dür öyleyse toplamda = 5050'dir.

Sonlu bir serideki sayıları toplarsanız sonuç sonlu bir sayı olur, bu açıktır. Buna rağmen sonsuz serileri toplarsanız sonucun iki farklı senaryosu olabilir. Sonsuz sayıda sayıları ekleye ekleye yaklaştığınız sonuç hem sonlu hem de sonsuz olabilir. Eğer sonuç sonluysa seriye yakınsak seri, değilse ıraksak seri denir. Örnek olarak daha önce gördüğümüz,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Serisi yakınsak bir seridir ve 2'ye yakınsar. Aynı zamanda biz pi sayısına yakınsayan çok fazla seri gördük. Diğer taraftan ise

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$$

Serisi ıraksak bir seridir ve sonsuza kadar gider.

Yunanlılar sonsuzlukla ilgilenmiş olabilirler ama on yedinci yüz yılda matematikçiler konuyu seve seve üzerlerine almışlardır. Sonsuz serilerin anlaşılması Isaac Newton'un matematik tarihinde en önemli bilimsel gelişmelerden biri olan integral hesabını icat etmesi için gerekliydi.

Matematik eğitimi alırken en sevdiğim egzersizlerden bir tanesi bana sonsuz bir terimli bir dizi verilmesi ve serinin yakınsak mı ıraksak mı olduğunu sorulmasıydı. Her zaman yakınsak ve ıraksak sayılar arasındaki farkın çok acımasız olduğunu düşündüm –sonsuz sayı ve sonsuzluğun arasındaki fark sonsuzluktur– ama yine de serilerin yönünü belirleyen unsurlar genellikle çok önemsiz görünür.

Aşağıdaki Harmonik serilere bir göz atın.

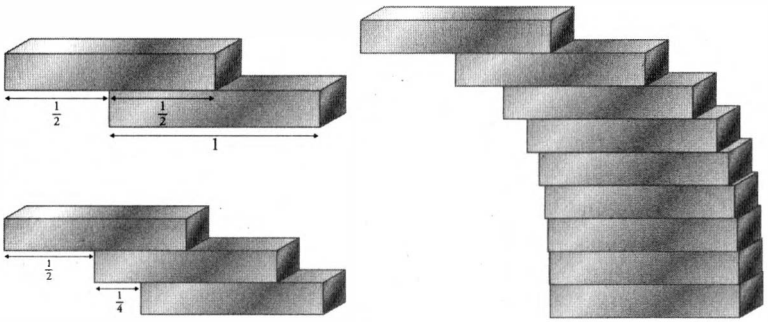
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

Her bir terimin payı 1 ve her terimin paydası ise doğal sayılardır. Harmonik seriler yakınsak olmak zorundaymış gibi görünür. Serideki her terim gitgide küçülür ve terimlerin toplamının sabit bir miktarla sınırlı olduğu izlenimini verirler. Fakat Harmonik seriler tuhaf bir şekilde ıraksak serilerdir ve bir salyangoz gibidir, çok yavaştır ama durmazlar. 100 terim toplandıktan sonra sonuç 5'i biraz geçer. 15.092.688.622.113.788.323.693.563.264.538, 101.449.859.497 terimden sonra toplam 100'ü biraz geçer. Bu inatçı salyangoz hâlâ özgürlük girişimine devam emektedir, işaretlediğiniz her mesafeyi kat eder. Bu seri nihayetinde milyona ve milyara ulaşır ve gitgide sonsuzluğa yaklaşır (Kanıt, Ekler 5'te verilmiştir).

Harmonik seriler biz Jenga bloklarının hesaplarını yapmayı düşündüğümüzde de ortaya çıkarlar. Diyelim ki elinizde iki blok var ve bunları üstteki en geniş yüzeye sahip olacak ve yıkılmayacak şekilde üst üste yerleştirmek istiyoruz. Bunu yapmanın yolu en üstteki bloğu bir altındakinin yarısı mesafesinde koymaktır, bir sonraki sayfadaki şekil (A)'da gösterilmektedir. Bu yolla üstteki bloğun ağırlık merkezi alttaki bloğun kenarlarına denk gelmiş olur.

Elimizde üç blok olduğunda yukarı bakan yüzeyler en büyük olacak ve yıkılmayacak şekilde üst üste yerleştirmek için hangi pozisyonda yerleştirmeliyiz? Çözüm, şekil (B)'de görüldüğü gibi en üstteki alttakinin yarısı kadar yerleştirilirken ortadaki de altındakinin çeyreği kadar mesafeye yerleştirilmektir.

Daha fazla blokla devam etmek için, olası en büyük yüzeyi elde edebilmek için genel yöntem en üsttekinin alttakinin yarısı kadar, onun da altındakinin çeyreği ve onun da alttakinin $\frac{1}{6}$'sı kadar onun altındakinin $\frac{1}{8}$'i kadar olacak şekilde yerleştirilmeli ve bu şekilde devam etmelidir. Böylelikle şekil C'deki görülen gibi eğik bir kule elde ederiz.



Jenga bloklarını yıkmadan mümkün olabilecek en büyük yüzey genişliği olacak biçimde dizilmesi.

Bu kulenin yüzeyleri toplamı, yani her bir yüzeyin ayrı ayrı toplamı aşağıdaki serilerdir:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Ayrıca bu seri şu şekilde de yazılır:

$$\tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots$$

Bu da sonsuz sayıda devam ettirebilmemiz durumunda Harmonik bir serinin yarısı eder.

Şimdi, Harmonik serilerin sonsuza gittiklerini bildiğimiz için, ayrıca Harmonik serilerin sonsuza 2'ye bölünerek gittiğini biliyoruz çünkü sonsuzun 2'ye bölümü yine sonsuz eder. Jenga bloklarının istifleme bağlamında yeniden ifade etmemiz gerekirse, teorik olarak istediğimiz uzunlukta serbest bir şekilde asılı duran bir kule meydana getirebiliriz. İkiye bölünen Harmonik serilerde yeterli miktarlarda terimle istediğimiz bir sayıya ulaşabiliyor olmamız, yeterli sayıda blok sağlandığında, Jenga bloklarını da istediğimiz kadar yükseltebileceğimiz anlamına gelir. Teorik olarak bu mümkün olsa da çok katlı bir kule inşa etmek çabası oldukça yıldırıcı olacaktır. 50 blokluk bir kule yapmamız için gerekli olan blok sayısı 15×10^{42}'dir. Bu da dünyadan gözlemlenebilecek uzayın çok daha ötesinde bir yükseklik elde etmemiz anlamına gelir.

Harmonik serilerin eğlencesi ölçülemeyecek kadar boldur, öyleyse hadi biraz daha eğlenelim. Her bir teriminde 9 sayısı olan bir Harmonik seriyi ele alalım ki bu sonsuz bir seridir. Diğer bir deyişle aşağıdaki terimleri çıkartalım.

$$\tfrac{1}{9}, \tfrac{1}{19}, \tfrac{1}{29}, \tfrac{1}{39}, \tfrac{1}{49}, \tfrac{1}{59}, \tfrac{1}{69}, \tfrac{1}{79}, \tfrac{1}{89}, \tfrac{1}{90}, \tfrac{1}{91}, \tfrac{1}{92} \ldots$$

O halde eksiltilmiş seri şu şekilde görünür:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} + \ldots + \tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{20} + \ldots$$

Harmonik serilerin toplamının sonsuzluğa ulaştığını hatırlayacak olursak, içinde 9 olmayan Harmonik serilerin de oldukça yüksek bir rakama ulaşacağını düşünülür. Yanlış. Toplamları 23'ün hemen altındadır.

Seriden 9'un çıkarılmasıyla sonsuzluğu eğittik, sonsuzluk canavarını katlettik ve ondan geriye kalan tek şey yaklaşık 23 değerinde buruşmuş cesedi oldu.

Bu sonuç dikkat çekici görünür, fakat biraz daha yakından bakarsak onu tamamen anlayabiliriz. 9'u çıkarmak harmonik seriden sadece ilk 10 sayıda 1 tanesini çıkarmamıza neden olur. Fakat ilk yüz sayıdan 19, ilk bin sayıdan 271 sayı çıkarmamıza neden olur. Zamanla sayılar çok büyürler. Diyelim ki 100 haneli sayılar ve bunların büyük bir çoğunluğu 9 sayısını içerir. Sonuç olarak Harmonik seriyi 9 sayısını çıkartarak azaltmak neredeyse onun tamamını ortadan kaldırmak gibidir.

Harmonik serileri özelleştirmek bundan çok daha ilgi çekici bir hale gelir. 9'ları elemek tamamen keyfi bir tercihtir. Eğer Harmonik seriden bütün 8 sayısını içeren terimleri çıkartsaydım sonuç yine sonlu bir sayıya yaklaşırdı. Eğer sadece 7 ya da herhangi bir tek basamaklı sayıyı çıkartsaydım sonuç aynı olacaktı. Aslında kendimizi tek basamaklı sayılarla sınırlamamıza gerek bile yok. Herhangi bir sayıyı içeren bütün terimleri kaldırın, azaltılmış seri yakınsak bir seri olur. Bu 9, 42, 666 ya da 314159 olsun sonuç olarak aynı şey meydana gelir.

666 örneğini kullanayım. 1 ile 1000 arasında 1 kere, 1 ila 10000 arasında 20 kere, 1 ila 100000 arasında 300 kere görülür. Bir başka deyişle ilk 1000 sayı arasında 666 sayısının görülme yüzdesi % 0.1, ilk 10000 sayı arasında % 0.2, ilk 100000 sayı arasında % 0.3'tür. Daha büyük ve daha büyük sayılar dikkate alındığında, 666 rakamı seriye orantılı olarak daha fazla ve daha sık görülür. Sonunda hemen hemen tüm sayıları bir 666 var olacaktır. Yani, harmonik seri içindeki hemen hemen tüm terimlerde bir 666 olacaktır. Bunları Harmonik seriden çıkardığımız zaman, eksiltilmiş Harmonik seri yakınsar.

2008 yılında Thomas Schmelzer ve Robert Baillie 314159 sayısını içeren terimlerin çıkarıldığı harmonik serilerin toplamının 23 milyonun biraz üstünde olduğunu hesapladılar. Bu, büyük bir sayı ama sonsuzdan oldukça uzak.

Bunun doğal bir sonucu olarak, yalnızca 314159 sayısını içeren Harmonik serilerin toplamının sonsuzluğa erişmesi gerekir. Diğer bir deyişle,

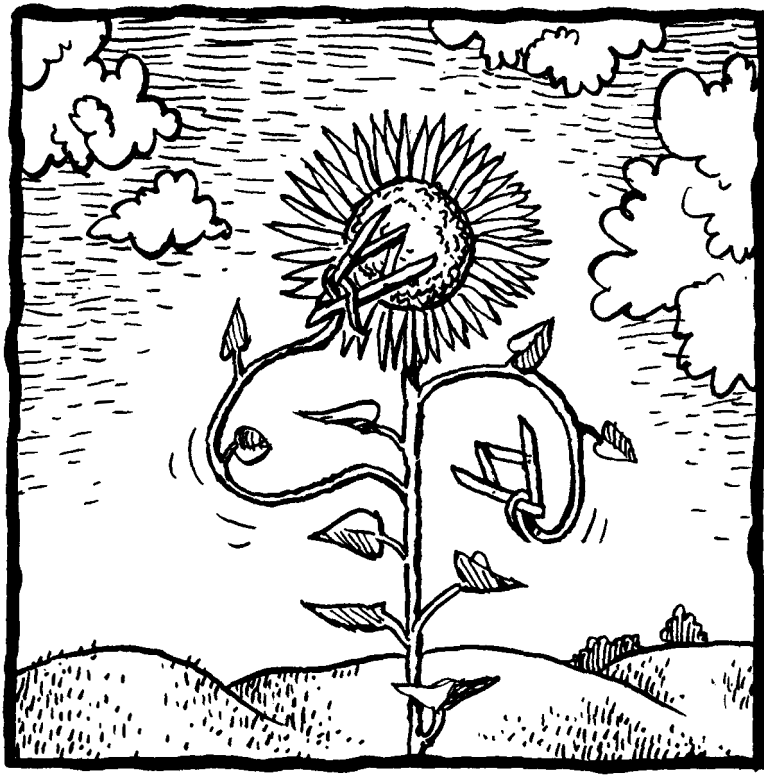
$$\frac{1}{314159} + \frac{1}{1314159} + \frac{1}{2314159} + \frac{1}{3314159} + \frac{1}{4314159} + \cdots$$

serisi sonsuza gider. Çok küçük bir sayıyla başlamasına rağmen ve terimler daha da ufalsa da toplam nihayetinde sizin istediğiniz sayıyı aşacaktır. Bunun nedeni yine sayılar çok büyüseler bile neredeyse sayıların tamamının 314159 sayısını içinde barındırıyor olmasıdır. Hemen hemen tüm birim kesirler 314.159 içerir.

Son olarak bir tane daha sonsuz seriye, bizi tekrardan asal sayıların gizemine götüren seriye bakalım. Asal Harmonik seriler, paydaları asal sayı olan kesir serilerdir.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} \cdots$$

Sayılar büyümeye başladıkça asal sayılar seyrekleşmeye başlar. Bu yüzden bu sayıların sonsuzluğa ulaşacak ivmeye sahip olamayacaklarını düşünülebilir. İnanılmaz olsa da ulaşırlar. Mantık dışı ve muhteşem olarak, sonuçlar bize asal sayıların gücünü ve gerekliliğini gösterir. Sadece doğal sayı bloklarının kurulumunda görünmezler, aynı zamanda sonsuzluğun yapı taşlarında da görünürler.



BÖLÜM SEKİZ

Altın Parmak

Evinin salonunda otururken, Eddy Levin bana boş beyaz bir kâğıt uzattı, büyük harfler kullanarak adımı yazmamı istedi. Gri kirli sakalı, geniş bir alnı ve yüzünde hoca ifadesi bulunan Levin 75 yaşındaydı ve eski bir diş hekimiydi. Londra'nın kuzeyindeki East Finchley'de, İngiltere'nin refah ve tutucu banliyöleri için ideal bir örnek olabilecek bir caddede yaşıyordu. Birinci ve ikinci dünya savaşları arasında inşa edilen süslü bahçe çitleri ve yeni biçilmiş çimleri, tuğla evlerin garaj kapılarında pahalı arabalar vardı. Kâğıdı aldım ve adımı yazdım: ALEX BELLOS.

Levin eline, üç tırnağı bulunan ve kıskacı andıran paslanmaz çelikten bir alet aldı. Titremeyen elleriyle kâğıdın üzerine tuttu ve yazımı analiz etmeye başladı. Aleti, sünnet hazırlığındaki bir hahamın titizliğiyle adımdaki E harfinin üzerine hizaladı.

'Oldukça iyi' dedi.

Levin'in kıskacı kendi icadıydı. Üç tırnak, her biri kıskaç açıldığında aynı hizada ve birbirleri arasındaki mesafe hep aynı oranda kalacak biçimde tasarlanmıştı. Aleti, ortadaki ve ilk tırnak arasındaki mesafenin daima orta ve sondaki tırnak arasındaki mesafenin 1.618 katı olacak şekilde tasarlamıştı. Bu sayı altın oran olarak bilindiği için aracın ismini Altın Oran Ölçme Aleti koymuştu (1.618 sayısının diğer adları, altın ölçü, tanrısal oran ya da fi'dir). Levin ölçme aletini adımdaki E harfinin üzerine yerleştirdiğinde kıskacın uçları E harfi-

nin üst, orta ve alt yatay çizgilerinin üzerine geliyordu. Adımı büyük harflerle yazarken E harfinin orta çizgisini yukarıdan ve aşağıdan tam ortaya hizaladığımı düşünüyordum, ama Levin'in aleti ortadaki çizgiyi bilinçsizce yarısı kadar yukarı-ortadaki çizgiyi, harfi 1'e 1.618 oranında ikiye bölecek şekilde yerleştirdiğimi gösteriyordu.

Adımı gayet neşeli bir acelecilikle yazmış olmama rağmen, altın orana olağanüstü bir kesinlikle bağlı kalmıştım.

Levin gülümsedi ve S harfine yöneldi. Ölçme aletini, üst ve alt tırnakları S harfinin üst ve alt kıvrımlarına gelecek biçimde yeniden ayarladı ve ortadaki tırnağın harfin ortasındaki kıvrıma denk gelmesi benim için daha da büyük bir şaşkınlık oldu.

'Tam tamına' dedi Levin sakin bir biçimde. 'Herkesin el yazısı altın orana uygundur.'

Altın oran, belirli bir oranı temsil eder, öyle ki bir çizgiyi ikiye böldüğünüzde çizginin tamamının oranının büyük olana oranı, büyük olan parçanın küçük olan parçaya oranına eşittir. Başka bir ifadeyle A + B'nin A'ya oranı A'nın B'ye oranına eşittir.

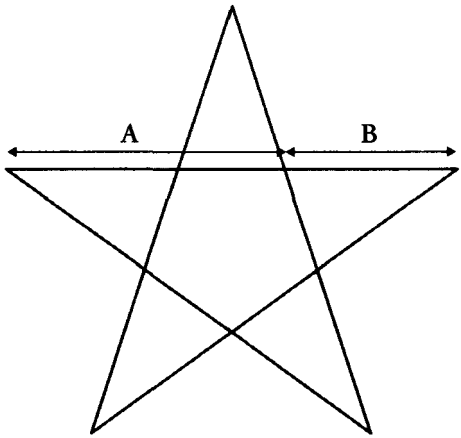


Altın oranla ikiye bölünen çizgi altın kesit olarak bilinir ve büyük ve küçük kesitler arasındaki oran olan fi sayısı, $\frac{(1 + \sqrt{5})}{2}$ olarak hesaplanır. Bu bir irrasyonel sayıdır ve ondalık basamakları aşağıdaki biçimde başlar:

1.61803 39887 49894 84820 . . .

Yunanlılar fi karşısında büyülenmişti. Bunu beş uçlu yıldız ya da Pisagor kardeşliğinin sembolü olan pentagram'da bulmuşlardı. Öklid

buna 'sınır ve orta oran' adını verdi ve pergel ve cetvel kullanarak bu oranı bulma yöntemi geliştirdi. Sayı, Rönesans'tan beri matematikçilerin olduğu kadar sanatçıların da ilgisini çekmektedir. Altın oran üzerine yapılan en temel çalışma, Luca Pacioli'nin 1509 yılında yayınlanan sayının yer aldığı birçok geometrik yapının listesini sunan ve Leonardo da Vinci tarafından resimleri çizilen *Tanrısal Oran* adlı çalışmasıdır. Pacioli, oranın, şeylerin içsel güzelliği hakkında gizli bir bilgi kaynağı olan tanrısal bir mesaj olduğu sonucuna varır.



Antik çağlardan beri mistik bir sembol kabul edilen pentagram altın oranı barındırır.

Fi'ye duyulan matematiksel ilgi matematiğin en meşhur dizisiyle olan ilişkisinden kaynaklanır: 0 ve 1 ile başlayan ve dizideki her sayının önceki iki sayının toplamı olduğu Fibonacci dizisi.

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 . . .

Dizideki sayılar böyle kurulur:

$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 1 = 2$$
$$1 + 2 = 3$$
$$2 + 3 = 5$$
$$3 + 5 = 8$$
$$5 + 8 = 13$$

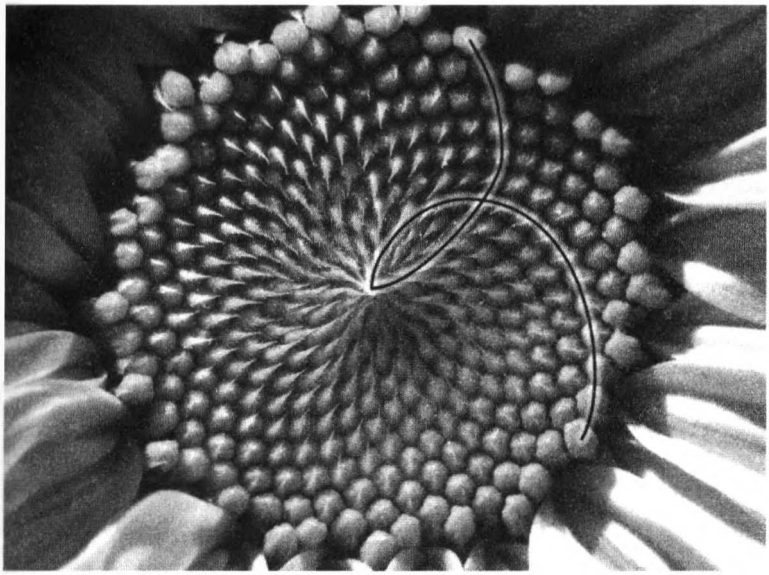
Fi ile Fibonacci'nin nasıl bağlantılı olduklarını göstermeden önce, dizideki sayıları inceleyelim. Doğal dünyanın Fibonacci sayılarına yönelik bir tercihi vardır. Eğer doğaya bakarsanız birçok çiçeğin taç yapraklarının Fibonacci sayısında olduğunu görürsünüz.

3 yapraklı	zambak ve süsen
5 yapraklı	pembe renkli karanfil ve Düğünçiçeği
8 yapraklı	hezaren çiçeği
13 yapraklı	kadife çiçeği ve kanarya otu
21 yapraklı	yıldız çiçeği
55 / 89 yapraklı	papatya

Bu çiçeklerin yaprakları daima bu sayıda olmaz ama ortalama sayıda çiçeğin yaprağı Fibonacci dizisinin sayılarındadır. Örnek olarak, yonca genelde Fibonacci sayısı olan üç yapraklı olur. Sadece nadir sayıda yoncada 4 yaprak olur, bu yüzden dört yapraklı yonca özel kabul edilir. Dört yapraklı yonca özeldir, çünkü 4 Fibonacci sayısı değildir.

Fibonacci sayıları çam kozalağı, ananas ve ay çiçeğinin spiral düzeninde de karşımıza çıkar. Aşağıdaki resimde spirallerin sayısı saat yönünde ve saat yönünün tersinde verilmiştir. İki yönde de saydığınızda spiral sayısı ardışık Fibonacci sayılarına denk gelir. Ananaslarda genellikle 5 ve 8 ya da 8 ve 13 spiral bulunur. Çam kozalakları genelde 8 ve 13 spiralli olma eğilimindedir. Ayçiçekleri 21 ve 34 ya da 34 ve 55 spiralli olabilirler, ancak 144 ve 233 gibi yüksek sayıda spiralli örnekleri de mevcuttur. Çekirdek sayısı arttıkça spiraller dizide daha yukarı çıkarlar.

Fibonacci serisi adı, dizinin Fibonacci'nin *Liber Abaci* isimli kitabında yer alan tavşanlarla ilgili bir problemden ötürü verilmiştir. Dizi, bu ismi 1877 yılında kitap yayınlandıktan, 600 yıldan fazla süre sonra, sayı teorisyeni Edouard Lucas kitabı incelerken aldı, Lucas Fibonacci'ye saygı olarak diziye onun ismini vermeye karar verdi.



Saat yönünde 34 ters yönde 21 spiralli ayçiçeği.

Liber Abaci'de dizi şu biçimde geçer: Diyelim ki bir çift tavşanın var ve bir ay sonra çift, bir çift daha tavşan doğurdu. Eğer her ay tüm yetişkin çiftler bir çift daha doğurursa ve bir çiftin yetişkin olması için bir ay gerekiyorsa, bir sene içinde kaç çift tavşan olur?

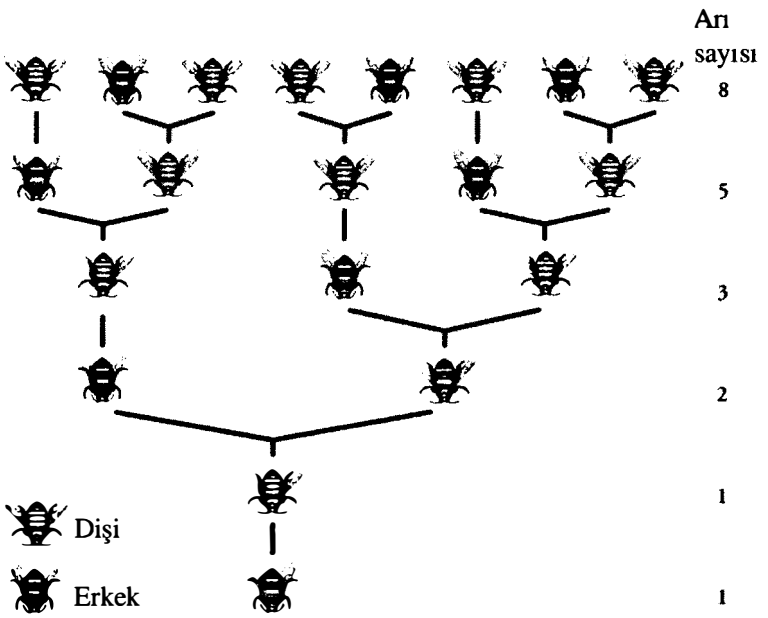
Cevap tavşan sayısını ay ay hesaplayarak bulunur. İlk ay sadece bir çift vardır. İkinci ay da iki çift. Üçüncü ayda üç çift vardır çünkü yavruların yetişkin olması bir ay sürer ve ilk çift bir kez daha yavrular. Dördüncü ayda iki yetişkin çift popülasyona iki yeni çift daha kazandırır. Fibonacci serisi çiftlerin aylık toplamıdır:

	Toplam çiftler
Birinci ay: 1 yetişkin çift	1
İkinci ay: 1 yetişkin çift ve 1 bebek çift	2
Üçüncü ay: 2 yetişkin çift ve 1 bebek çift	3
Dördüncü ay: 3 yetişkin çift ve 2 bebek çift	5
Beşinci ay: 5 yetişkin çift ve 3 adet bebek çift	8
Altıncı ay: 8 yetişkin çift ve 5 bebek çift	13
. . .	

Fibonacci dizisinin önemli bir özelliği *tekrarlanır* olmasıdır, bu her bir terimin bir önceki terimlerin değerleri tarafından meydana gelmesi demektir. Bu durum Fibonacci sayılarına doğal sistemlerde neden bu kadar çok rastlandığını açıklar. Birçok yaşam formu yinelenme işlemiyle büyür.

Doğada Fibonacci sayıları ile ilgili birçok örnek vardır ve benim en çok beğendiklerimden birisi arıların üreme sürecidir. Erkek arının sadece tek ebeveyni vardır: Annesi. Ancak dişi arıların iki tane ebeveyni

vardır: Bir anne ve bir baba. O halde bir erkek arının 3 tane büyük anne ve babası, 5 tane büyük büyük anne ve babası, 8 tane büyük büyük büyük anne ve babası vardır ve böyle devam eder. Erkek arının atalarının haritasını çıkarırken (aşağıdaki diyagramda olduğu gibi) her nesildeki akraba sayısının daima Fibonacci sayısı olduğunu görürüz.



Bir erkek arının ata tarihini izleyen bir tablo

Meyvelerle, çiftleşmek için ayrım gözetmeyen kemirgenlerle ve uçan böceklerle ilişkisine ek olarak, Fibonacci dizisinin merak uyandıran birçok özelliği vardır. İlk 20 sayının listesi özellikleri görmede faydalı olacaktır:

(F_0	0)		
F_1	1	F_{11}	89
F_2	1	F_{12}	144
F_3	2	F_{13}	233
F_4	3	F_{14}	377
F_5	5	F_{15}	610
F_6	8	F_{16}	987
F_7	13	F_{17}	1597
F_8	21	F_{18}	2584
F_9	34	F_{19}	4181
F_{10}	55	F_{20}	6765

Daha dikkatli inceleyince, dizinin kendi başına birçok şaşırtıcı özellik geliştirdiğini görebiliriz. F_3, F_6, F_9, ve devamına bakın, başka bir ifadeyle dizinin her üçüncü sayısına. Hepsi ikiye bölünür. Bu F_4, F_8, F_{12}, . . . sırasıyla karşılaştırın ya da dizinin her dördüncü sayısı 3'e bölünür. Dizinin her beşinci sayısı 5'e bölünür. Her altıncı sayı 8'e bölünür ve her yedinci sayı 13'e bölünür. Bölünen sayıların hepsi tam tamına F- sayılarıdır.

Bir başka şaşırtıcı özellik $\frac{1}{F_{11}}$, ya da $\frac{1}{89}$ sayısından gelir. Bu sayı şu sayıların toplamına eşittir:

.0

.01

.001

.0002

.00003

.000005

.0000008

.00000013

.000000021

.0000000034

.00000000055

.000000000089

.0000000000144

Yani, Fibonacci dizisi kafasını aniden tekrar ortaya çıkarıyor.

Dizinin başka bir ilginç matematiksel örneğine daha bakalım. Ardışık herhangi bir miktarda f sayısı alın. Birinci ve üçüncünün çarpımı daima ikincinin karesinden bir farklıdır:

Örneğin F_4, F_5, F_6:

$F_4 \times F_6 = F_5 \times F_5 - 1$ . . . çünkü 24 = 25-1'dir.

Örneğin F_5, F_6, F_7:

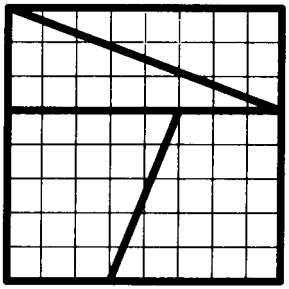
$F_5 \times F_7 = F_6 \times F_6 + 1$ . . . çünkü 65 = 64 + 1'dir.

Örneğin F_{18}, F_{19}, F_{20}

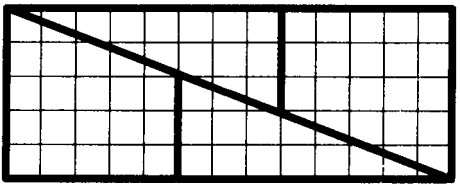
$F_{18} \times F_{19} = F_{19} \times F_{19} - 1$ . . . çünkü 17.480.760 = 17.480.761 – 1'dir.

Bu özellik yüzlerce yıllık bir matematik hilesinin temelini teşkil eder: 64 birimlik bir kareyi dört parçaya bölüp yeniden birleştirerek 65 birimlik

bir dikdörtgen elde etmek. Yapılışı şöyledir; 64 birimlik bir kare çizin. Bir kenarı 8 birim uzunluğunda olur. Dizide 8'den önce gelen iki F sayısı 5 ve 3'tür. Kareyi birinci resimdeki gibi 3 ve 5 uzunluklarından bölün. Parçalar alanı 65 olan ve 5 ve 13 uzunluğunda bir dikdörtgen oluşturacak biçimde bir araya getirilebilir.



8 x 8 = 64



5 x 13 = 65

Hile, şekillerin mükemmel bir uyum içinde birleşmemesiyle açıklanır. Gerçi çıplak göz için çapraz hat boyunca oldukça ince bir şekilde oluşan bir birimlik boşluk çok belirgin değildir.

Aynı şekilde 169 birimden oluşan bir kareden (13 x 13) yeniden birleştirilerek 168 birimlik (8 x 21) bir dikdörtgen elde edilebilir. Bu durumda da katlar ortadaki çapraz hat boyunca hafif bir şekilde üst üste binerler.

On yedinci yüzyılın başlarında Alman gökbilimci Johannes Kepler şöyle yazar: "5'in 8'e yaklaştığı gibi 8, 13'e yaklaşır ve 8'in 13'e yaklaştığı gibi 13, 21'e yaklaşır." Başka bir ifadeyle Kepler ardışık F-sayılarının benzer olduğunu fark etmişti. Bir asır sonra, İskoç matematikçi Robert Simson daha da inanılmaz bir şey keşfetti. Ardışık sayıların oranlarını alır ve onları şu şekilde bir dizi haline getirirseniz her bir terimin değeri fi sayısı, altın orana yaklaşır.

$$\frac{F_2}{F_1}, \frac{F_3}{F_2}, \frac{F_4}{F_3}, \frac{F_5}{F_4}, \frac{F_6}{F_5}, \frac{F_7}{F_6}, \frac{F_8}{F_7}, \frac{F_9}{F_8}, \frac{F_{10}}{F_9} \ldots$$

şuna eşittir:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34} \ldots$$

Ya da (üç ondalık basamaklı değerlerle):

1, 2, 1.5, 1.667, 1.6, 1.625, 1.615, 1.619, 1.618 . . .

Başka bir ifadeyle, Fibonacci sayılarında ardışık olarak ileri doğru gidildikçe sayıların oranı artan bir kesinlikle altın orana yaklaşmaktadır.

Şimdi bu düşünce doğrultusunda ilerleyelim ve rastgele iki sayıyla başlayan Fibonacci benzeri bir dizi ele alalım ve ardışık terimleri toplayarak diziye devam edelim. O halde 4 ve 10 ile başlayalım, bir sonraki terim 14 olur ve daha sonra ki ise 24. Örneğimiz şu diziyi verir:

4, 10, 14, 24, 38, 62, 100, 162, 262, 424 . . .

Ardışık terimlerin oranlarına bakın:

$$\frac{10}{4}, \frac{14}{10}, \frac{24}{14}, \frac{38}{24}, \frac{62}{38}, \frac{100}{62}, \frac{162}{100}, \frac{262}{162}, \frac{424}{262} \ldots$$

Ya da:

2.5, 1.4, 1.714, 1.583, 1.632, 1.612, 1.620, 1.617, 1.618 . . .

Fibonacci ardışık iki sayının toplandığı yinelenme algoritması sıradaki terimi o kadar güçlü yapar ki, *hangi* iki sayıyı seçersek seçelim ardışık terimlerin oranı daima fi sayısına yönelir. Ben bunun büyüleyici bir matematiksel sıradışılık olduğunu düşünürüm.

Fibonacci sayılarının aynı anda birçok yerde bulunması özelliği, fi sayısının da dünyada halihazırda bulunduğu anlamına gelir. Bu da bizi emekli diş hekimi Eddy Levin'a geri getiriyor. Kariyerinin başlarında zamanının çoğunu takma dişler yaparak geçirmiş, bunun can sıkıcı bir iş olduğunu düşünüyormuş, çünkü dişleri nasıl dizerse dizsin, insanların gülüşleri ona doğru gözükmüyormuş. 'Kan ter içinde kalırdım' diye anlatıyor. 'Ne yaparsam yapayım dişler yapay görünürdü.' Ama Levin matematik ve maneviyat üzerine dersler almaya başladığı dönemde fi ile tanışmış. Levin Pacioli'nin *Tanrısal Oran* adlı kitabını okumuş ve ondan ilham almış. Peki ya Pacioli'nin dediği gibi gerçek güzel olduğunu iddia ettiği fi, aynı zamanda takma dişlerdeki güzelliğin de kaynağıysa. 'Bu tam bir evreka ânıydı' diyor. Saat ikiymiş ve o çalışma odasına koşmuş. 'Gecenin geri kalan kısmını çalışma odamda dişleri ölçerek geçirdim.'

Levin, fotoğrafları tarayıp en çekici diş grupları arasında en öndeki büyük dişin (Merkezi kesici diş) yanındaki dişten (Yan kesici diş) fi oranında kadar büyük olduğunu keşfetti. Yan kesici dişler de bitişiğindeki dişlerden (Köpek dişi) fi oranında daha genişti. Ve köpekdişide yanındakinden (Küçük azı dişi) fi oranında genişti. Levin gerçek dişleri ölçmüyordu, kafa fotoğraflarındaki dişleri ölçüyordu. Ama buna rağmen tarihi bir keşifte bulunduğu hissine kapılmıştı: Mükemmel gülümsemenin güzelliği fi tarafından önceden belirlenmişti.

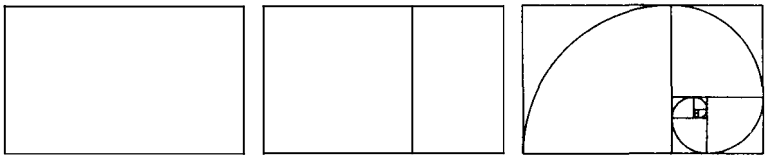
'Çok heyecanlanmıştım' dedi Levin olayı anımsarken. Meslektaşlarına keşfinden bahsettiğinde sanki tuhaf birisi gibi ondan uzak durmuşlar. Ama buna rağmen fikirler üretmeye devam etmiş ve 1978

yılında *Journal of Prosthetic Dentistry*'de fikirlerini açıkladığı bir makale yayınlamış. 'O andan itibaren insanlar ilgi göstermeye başladı' dedi. 'Artık diş estetiği üzerine altın oran kesitinden bahsedilmeden ders verilmiyor.' Levin 1980'lerin başında işlerinde fi sayısını o kadar çok kullandı ki, bir mühendisten iki dişin arasındaki oranın altın oran olup olmadığını anlayabileceği bir araç geliştirmesini istedi. Sonuç üç tırnaklı *Altın Oran Ölçme Aletiydi.* Hâlâ dünya üzerinde birçok diş hekimine bu aleti satıyor.

Levin'in kendi dişlerinin altın oranda olup olmadığını söyleyemem ama içlerinde yeterli miktarda altın vardı. Levin, ölçme aletinin bir iş aracından fazlası olduğunu anlattı, daha sonra dişlerden başka nesneleri de ölçmede kullanmaya başladı. Çiçeklerin desenlerinde, dalların gövde üzerindeki dağılımlarında ve dallar üzerindeki yapraklarda fi sayısını keşfetti. Tatillerde yanına aldı ve binaların oranlarında fi sayısını keşfetti. Fi sayısını ayrıca insan bedeninin geri kalan kısımlarında da keşfetti, muştaların parmaklara olan oranında ve burnun dişlere ve çeneye göre olan pozisyonunda. Ek olarak da tıpkı benimkini gösterdiği gibi birçok insanın el yazısında fi sayısının kullanıldığını keşfetti.

Levin fi sayısını aramayı arttırdıkça daha fazla bulmaya başladı. 'O kadar çok buldum ki, bunun nedenini merak etmeye başladım.' Dizüstü bilgisayarını açtı ve bana fotoğraflardan bir slayt gösterisi izletti, her biri üç tırnaklı ölçme aletinin, oranı tam olarak gösterdiği fotoğraflardı. Kelebek kanatlarının, tavuskuşu tüylerinin, hayvanların üzerindeki renklerin, sağlıklı bir insan kalbinin EKG'sinin, Mondrian tablolarının ve bir arabanın fotoğraflarını gördüm.

Kenarları fi oranında oluşturulan dikdörtgene 'altın dikdörtgen' adı verilir. Bu dikdörtgeni dikey olarak kare biçiminde böldüğünüzde diğer kısmın da bir altın dikdörtgen oluşturmaya uygun bir yapısı vardır. Anne küçücük bir kız çocuk doğurur.



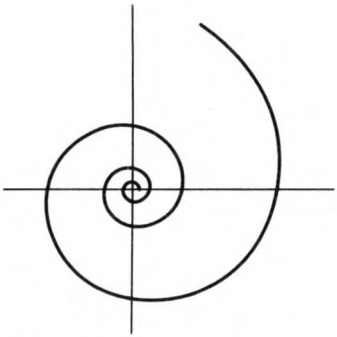
Altın dikdörtgen ve logaritmik spiral

Bu işleme, torunu, torunun çocuğu şeklinde sonsuza kadar devam edebiliriz. Şimdi pergel kullanarak bir çeyrek çember çizelim, pergelin ucunu sağ alt köşeye yerleştirip kalemi bitişikteki köşeden diğerine hareket ettirelim. Aynı işlemi ikinci büyük karede de, pergeli sol alt köşeye gelecek biçimde tekrarlayalım ve kalem başka bir çeyrek çemberin yayını çizsin ve bu işleme daha küçük karelerde de devam edelim. Yay bir *logaritmik spiral* oluşturmaya yaklaşır.

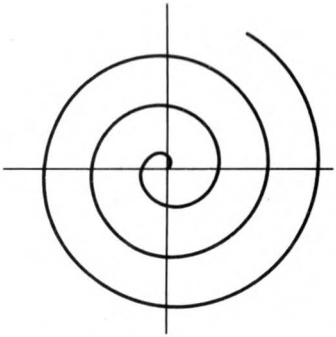
Gerçek bir *logaritmik spiral* çeyrek yayların birleşim yerlerindeki eğimlerde, sıçramaların bulunduğu diyagramdaki spiralin aksine aynı köşelerden geçer, ama kendi üzerinde yumuşak bir sarmal oluşturur. Bir logaritmik spiralde merkezden geçen bir doğru –'kutup'– spiral eğrisini tüm noktalarda aynı açıyla keser, bu nedenle Descartes logaritmik spiral'e 'eş açılı spiral' adını vermiştir.

Logaritmik spiral matematikteki en büyüleyici eğrilerden birisidir. Logaritmik spiralin özelliklerini tam anlamıyla inceleyen ilk kişi on yedinci yüzyıl matematikçilerinden Jakob Bernoulli'ydi. Ona *spira mirabilis*, muhteşem spiral adını vermişti. Mezartaşına bir tane çizilmesini istemişti, ama heykeltıraş yanlışlıkla bir Arşimet spirali kazıdı.

Logaritmik spiralin temel özelliği büyüdükçe şeklinin asla değişmemesidir. Bernoulli bunu mezar taşı yazıtında ortaya koyar: *Eadem mutata resurgo* ya da 'değişimde bile aynı kalırım.' Spiral, kutbuna ulaşmadan önce sonsuz sayıda döngü geçirir. Eğer bir mikroskop alır, logaritmik spiralin merkezine bakarsanız, yukarıdaki spiral bir galaksi



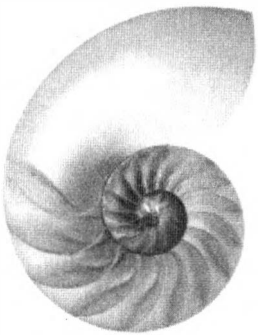
logaritmik spiral — mükemmel.



Arşimet spirali — o kadar mükemmel değil.

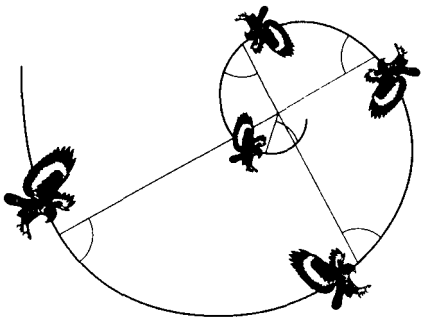
büyüklüğünde de olsa ve siz başka bir güneş sisteminden izleseniz bile göreceğiniz şeklin aynısını görürsünüz. Aslında birçok galaksi logaritmik spiraller şeklindedir. Tıpkı kendini aynı biçimde tekrar eden bir logaritmik spiral olan fraktallar gibi büyük spiralin küçük bir parçası büyük spiralle özdeş biçimdedir.

Doğada bulunan en nefes kesici logaritmik spiral örneği nautilus kabuğudur. Kabuk büyüdükçe ardışık odalardan her biri daha büyük olur ama daima bir önceki odanın şeklindedir. Üzerinde farklı orantılı büyüklüklerde odalar barındıracak tek spiral Bernoulli'nin *spira mirabilis*'idir.



Nautilus kabuğu.

Descartes'ında belirttiği gibi, merkezden geçen bir doğru, spiral eğrisini tüm noktalarda daima aynı açıyla keser ve bu özellik doğanların avlarına saldırırken neden spiral çizdiğini açıklar

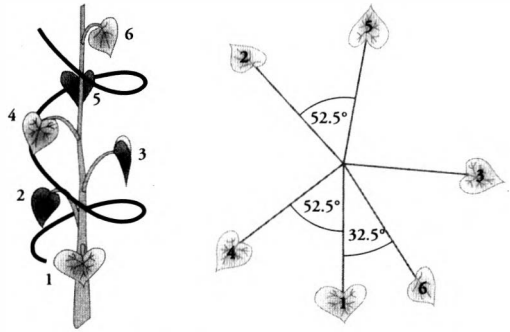


Doğanlar avlarının üzerine spiraller çizerek alçalırlar

Doğanlar düz çizgiler çizerek saldırmazlar, avlarına çevrelerinde spiraller çizerek yaklaşırlar. 2000 yılında Duke Üniversitesi'nden Vance Tucker bunun nedenini keşfetti. Doğanların gözleri kafalarının iki yanındadır, bu da önlerine bakmak istediklerinde kafalarını 40 derecelik bir açıyla döndürmeleri gerektiği anlamına gelir. Vance doğanları rüzgâr tüneli testine sokup rüzgârın doğanları bu açıyla bakan kafa şekliyle dosdoğru ileri bakan hallerine göre % 50 daha fazla sürüklediğini gösterdi. Kuşun avına daima sabit bir açıyla bakarken kafasını aerodinamik olarak mümkün olan pozisyonda tutmasını sağlayan yol logaritmik spiraldir.

Avcı kuşlar gibi bitkiler de, fi müziğiyle hareket ederler. Bir bitki büyürken gövdesini saran yaprakların üzerlerine düşen güneş ışığından en fazla yararlanacağı konumda bulunması gerekir. Bu nedenle bitki yaprakları birbirlerinin tam üstünde bulunmazlar; eğer bu şekilde olursa en alta kalan yaprak hiç güneş ışığı alamaz.

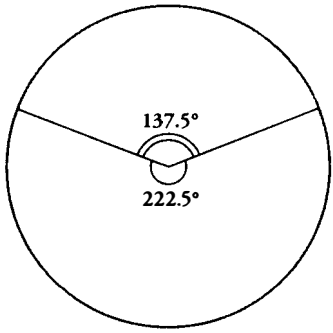
Gövde yükseldikçe, gövde üzerindeki her yaprak, bir öncekine göre belirlenen bir açıda ortaya çıkar. Gövde üzerindeki filizler aşağıda yer alan diyagramda gösterildiği gibi önceden belirlenmiş noktalarda çıkarlar.



Yaprakların gövde üzerinde çizdiği spiral

Yaprakların en fazla güneş görmesini sağlayan, gövdenin üzerindeki yaprakların bir biri üzerine denk gelmelerinin olabilecek en az miktarda olduğu açı nedir? 180 derece ya da gövdenin yarın turu değildir çünkü bu durumda üçüncü yaprak doğrudan ilkinin altında kalacaktır. 90 derece ya da çeyrek tur da değildir, çünkü bu durumda da beşinci yaprak doğrudan ilk yaprağın altında kalacaktır ve ilk üç yaprak gövdenin sadece bir kısmını kullanacak ve bu da diğer taraftaki güneş ışığının boşa harcanması olacaktır. En iyi düzen sağlayan açı 137.5 derecedir, yukarıdaki diyagram arda arda gelen yaprakların bu açı sayesinde nasıl birbirinden ayrı konumlarda bulunduğunu gösterir. İlk üç yaprak birbirinden oldukça ayrı konumlarda bulunurlar. Diğer ikisi kendilerine en yakın yapraktan 50 dereceden fazla bir açıyla ayrıdırlar, bu da onlara yeterli derecede güneş ışığı sağlar. Altıncı yaprak ilk yapraktan 32.5 derece uzaktadır. Bu daha önceki tüm yapraklardan daha yakındır. Böyle olmak zorundadır, çünkü daha çok sayıda yaprak vardır, ama açıklık yine de oldukça geniştir.

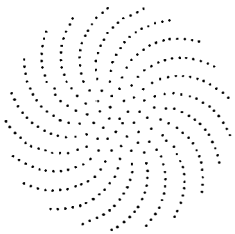
137.5 derecelik açı altın açı olarak bilinir. Açı, bir çemberin tam devrini altın orana göre bölerek bulunur. Başka bir ifadeyle 360 dereceyi, büyük olanın küçüğe oranı 1.618 olacak şekilde böldüğümüzde, bir ondalık basamakla 222.5 ve 137.5 derecelerini elde ederiz. Küçük olan altın açı olarak bilinir. Altın açının neden en iyi yaprak dağılımını belirlediğinin matematiksel nedeni, kesirler biçiminde ifade edilemeyen sayılar olan irrasyonel sayılar kavramıyla ilişkilidir. Eğer bir açı irrasyonel sayıysa, bir çember çevresinde kaç kere döndürürseniz döndürün asla başladığı yere geri dönmez. Bu kulağa sanki George Orwell ifadesiymiş gibi gelebilir, ama bazı irrasyonel sayılar diğerlerinden daha irrasyoneldir. Ve altın orandan daha irrasyonel bir sayı yoktur (Ekler 6'da kısa bir açıklama bulunmaktadır).



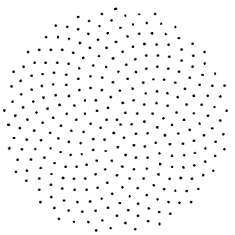
Altın açı.

Altın açı neden genellikle bitki gövdesindeki yaprak sayısının ve ilk yaprağın tam altına denk gelen yaprakların sayısının Fibonacci sayısı olduğunu açıklıyor. Örnek olarak güllerin her iki turda 5 yaprağı, yıldız çiçeklerinin her üç turda 8 yaprağı ve badem ağaçlarının her 5 turda 13 yaprağı vardır. Fibonacci sayıları ortaya çıkar, çünkü altın açıya en yakın tam sayı oranlarını onlar sağlar. Eğer bir bitki her 3 turda 8 filiz veriyorsa her bir yaprak $\frac{3}{8}$ turda bir ya da altın açıya oldukça yakın bir derece olan 135 derecede bir ortaya çıkar.

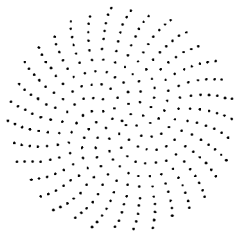
Altın açının eşsiz özellikleri tohum yerleşim düzenlerinde ortaya çıkar. Bir çiçek başının, merkezi çevresinde belirli bir açıyla dönerek tohum ürettiğini hayal edin. Yeni bir tohum ortaya çıktığında, diğer tohumu merkezin daha da dışına iterler. Bu diyagramlar üç farklı belirli açıda tohumların ortaya çıkma desenini göstermektedir: Altın açının biraz altında, altın açıda ve altın açının biraz yukarısında.



Açı = 137.3 derece altın açının biraz altı



Açı = 137.5 derece altın açı



Açı = 137.7 derece altın açının biraz üstü

Şaşırtıcı olan açıdaki küçücük bir değişikliğin tohumların konumunda çok büyük bir çeşitliliğe neden olmasıdır. Altın açıda tohum başları büyüleyici bir biçimde birbirine geçmiş logaritmik spiral desenindedirler. Bu olabilecek en derli toplu biçimdir. Doğa altın açıyı, düzenliliğinden dolayı tercih eder—tohumlar birbirlerine daha yakından bağlıdır ve bu yüzden organizma daha güçlüdür.

On dokuzuncu yüzyılın sonlarında, Alman Adolf Zeising zorlu bir biçimde, altın oranın güzelliğin vücuda gelmiş olduğu görüşünü 'Kozmik ya da bireysel, organik ya da inorganik, akustik veya optik olsun manevi bir ideal olarak, tüm yapılar, fevkalade formlar ve oranlar tam gerçekleşmesini ancak insan formunda bulur' evrensel yasasıyla ileri sürdü. Zeising, Parthenon'un ön cephesinin altın dikdörtgen biçiminde olduğunu iddia eden kişiydi. Aslında Phidias'ın heykelinin de bulunduğu mimari projede çalışan kişilerin altın oranı kullandığına dair

belgesel herhangi bir delil bulunmamaktadır. Eğer dikkatli bakarsanız altın dikdörtgen tam olarak yerine oturur. Ama Phidias'ın Parthenon ile bağlantısı, 1909 yılında Amerikalı matematikçi Mark Barr'e altın orana fi adını verme konusunda ilham verdi.

Zeising'in çalışmasının alışılmamış atmosferine rağmen, deneysel psikolojinin kurucularından olan Gustav Fechner tarafından ciddiye alındı. İnsan zihni için altın dikdörtgenin herhangi bir dikdörtgenden daha güzel olduğuna dair herhangi ampirik kanıtın olup olmadığını keşfetmek için Fechner bir test geliştirdi ve deneklere çok sayıda farklı tipte dikdörtgenler gösterip hangisini tercih ettiklerini sordu.

Fechner'in elde ettiği sonuçlar Zeising'i haklı çıkarır gibi gözüküyordu. Altın orana en yakın olan dikdörtgen küçük bir grubun üçte biri tarafından tercih edildi. Fechner'in yöntemi acemice olsa da, deneysel psikoloji sanatında –daha az kapsamlı 'dikdörtgen estetiği' disiplininde olduğu gibi– yeni bir bilimsel çalışma alanı açmış oldu. Birçok psikolog dikdörtgenlerin çekiciliği ile ilgili kulağa geldiği kadar saçma olmayan benzer anket çalışmaları yaptılar. Eğer 'en seksi' diye bir dikdörtgen varsa, bu şekil tasarımcılar tarafından reklam ürünlerinde kullanılabilirdi. Gerçekten de kredi kartları, sigara paketleri ve kitaplar genellikle altın dikdörtgene yakın orandadırlar. Maalesef fi seviciler üzücü bir gelişme olarak Chris McManus liderliğindeki University College London'dan bir takım tarafından yakın tarihte yürütülen son çalışma, Fechner'in yanıldığını ortaya koyuyor. 2008 yılında yayınlanan makale, yüzyıldan fazla zamandır deneysel psikoloji üzerine yapılan çalışmalar altın kesitin deneklerin dikdörtgen seçimleri üzerinde çok az normatif bir rol oynadığını ortaya koyuyor. Ama yazarlar, dikdörtgen analizi çalışmalarının tam bir vakit kaybı olduğu sonucuna varmadılar. Bunun tam aksi görüşteler. İnsanlar tarafından evrensel olarak tercih edilen bir dikdörtgen olmadığını ama yine de dikdörtgenleri *beğenmek* konusunda önemli bireysel farklılıkların daha detaylı araştırmalar yapmaya değeceğini söylüyorlar.

Zeising'in teorisinden etkilenen Fechner'den daha önemli başka bilim adamları da vardı. New York'dan Frank A. Lone, 65 kadının boy ve kalça çevresi genişliği ölçülerini karşılaştırdı ve oranın 1.618 olduğunu keşfetti. Bu değere uymayan oranlar için bahanesi vardı: 'Ölçüleri bu orana uyumlu olmayan denekler çocukken geçirdikleri kalça yaralanmaları ve başka hasar bırakan kazalar konusunda beyanda bulundular.' Fransız mimar Le Corbusier, mimari ve tasarımda uygun oranları kullanabilmek için 'Birimsel adam'ı yarattı. Bu adamın boyunun kalça çevresine oranı 1829/1130, ya da 1.619 ve adamın göbek çukurundan sağ elini kaldırdığı zamanki yüksekliğine oranı ve göbek çukurunda kafasının yüksekliğine oranı 1130/698, yani, yine 1.619. Le Corbusier'in birimsel adamı yaratmaktaki amacı, bu oranları mimari ve tasarımda kullanmaktı.

53 yaşındaki Gary Meisner, Tennessee'den bir iş danışmanı. Kendisine fi adam diyor ve web sitesinde fi tişörtleri ve fincanları gibi ürünler satıyor. En çok sattığı ürünü ise bilgisayar ekranında ölçü çizgileri oluşturup resimlerin altın oranda olup olmadığını kontrol etmenizi sağlayan PhiMatrix adında bir bilgisayar programı. Alıcıların çoğu programı çatal bıçak takımı, mobilya ve ev yapımı için araç olarak kullanıyor. Bazı alıcılar finansal grafiklerin üzerine yerleştirerek geleceğe dair ekonomik tahminler yapmak amacıyla da kullanıyor. 'Karayiplerden bir adam matriks'imi petrol ticareti için, Çin'den birisi ise döviz kurları üzerinden alım satım yaparken kullanıyor' dedi Gary Meisner. Meisner altın orana kendini kaptırmış çünkü manevi değerlere önem veren bir kişi, ayrıca altın oranın evreni anlamasına yardımcı olduğunu söylüyor, fakat Fi Adam bile takipçilerinin çok ileri gidebileceğini söylüyor. Örneğin bazı tüccarların yaptıkları onu ikna etmemiş. 'Pazar araştırması yaptığınızda fi ile uygunluk gösteren ticari ilişkiler bulmak oldukça kolaydır' diyor. 'Asıl zorluk geçmişe bakmanın pencereden dışarıya bakmaktan daha zor olmasıdır.' Meisner'in web sitesi onu her tipten fi tutkunu için başvurulacak insan haline getirmiş. Bana bir ay önce

iş bulabilmesinin tek yolunun özgeçmişini altın orana göre yazmak olduğuna inanan işsiz bir adamdan bir e-posta aldığını anlattı. Meisner adamın büyük bir yanılgı içinde olduğunu düşünmüş ve ona acımış. Fi biçimleriyle ilgili birkaç ipucu vermiş ama iş ağlarını araştırmak gibi daha geleneksel iş kovalama yöntemlerinin daha iyi meyve vereceği tavsiyesinde bulunmuş. 'Bu sabah bir mektup aldım' dedi birden. 'Bir iş görüşmesi için çağırıldığını söyledi. Sebebinin yeni özgeçmiş tasarımı olduğunu düşünüyor!'

Londra'da Eddy Levin'a altın özgeçmiş hikâyesini, hiç tahmin edilemeyecek tuhaflıklara örnek olarak anlattım. Ama Levin bunun komik olduğunu düşünmedi. Aslında fi oranlı özgeçmişin sıradan özgeçmişe göre daha iyi olduğunu söyledi. 'Daha güzel gözükür, böylelikle okuyan kişi de ona daha fazla dikkat eder.'

Altın oran üzerine yapılan 30 senelik çalışmanın ardından Levin, güzellik nerede olursa olsun fi'nin de orada olduğuna inanmış. 'Güzel gözüken bütün sanatlarda baskın olan oranlar altın orandadır' diyor. Bunun, güzelliğin formülünü sunduğu için pek tutulmayan bir görüş olduğunu biliyor, ama herhangi bir sanat eserinde fi'yi bulacağının garantisini veriyor.

Levin'ın fi saplantısına benim tepkim şüpheyle yaklaşmak oldu. Başlangıç olarak, ölçme aletinin 1.618 oranını yeterli kesinlikte ölçebildiği konusunda ikna olmadım. Eğer hangi parçaları seçeceğinize karar verirseniz bir sanat eserinde ya da bir tabloda 'yaklaşık fi' değeri bulmak çok şaşırtıcı bir şey değildir. Ayrıca ardışık Fibonacci sayıları 1.618 sayısına oldukça yakın bir oran verdiği için ölçülerin 5 x 3 ya da 8 x 5 ya da 13 x 8 olduğu her yerde altın dikdörtgen görebilirsiniz. Bu oran elbette genel bir oran olur.

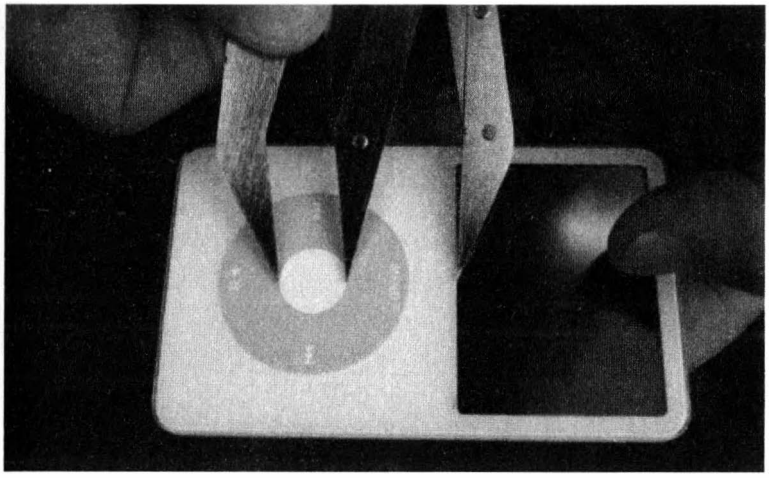
Ama yine de Levin'ın çalışmalarının çok ilgi çekici bir tarafı vardı. Bana gösterdiği her resimde büyük bir şaşkınlık hissettim. Gerçekten her yerde fi vardı. Evet, altın oran tuhaf kişiliklerin ilgisini her zaman

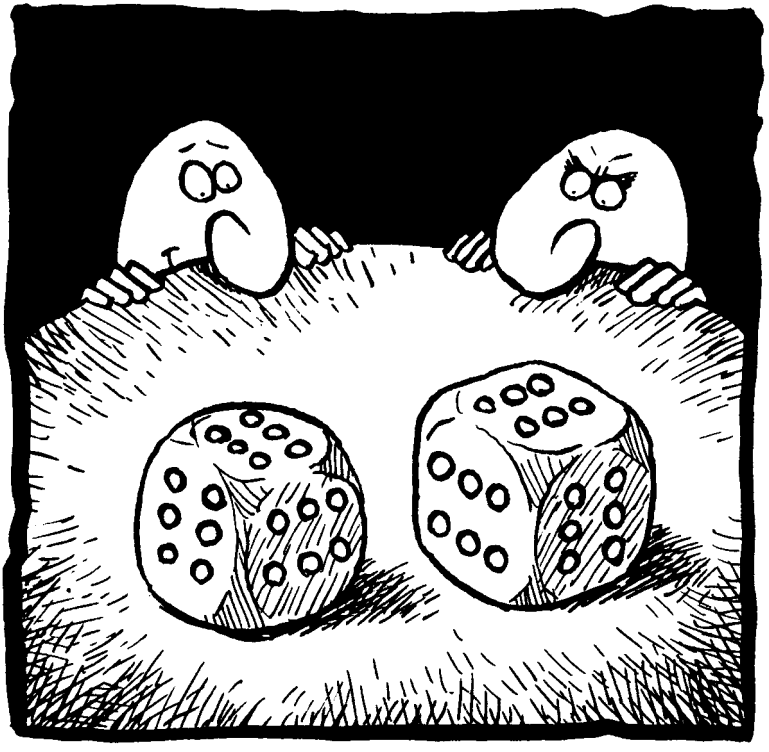
çekmiştir ama bu tüm fi teorilerinin saçma olduğu anlamına gelmez. Gerçekten saygın bazı akademisyenler fi'nin güzellik yarattığını iddia ettiler, özellikle de müzik kompozisyonlarının yapısında. İnsanoğlunun doğal büyümeyi ve yenilenmeyi en iyi açıklayan bu orana kendini kaptırması çok da ihtimal dışı görünmüyor.

Güneşli bir yaz günüydü, Levin ve ben bahçesindeydik. Katlanır sandalyelere oturmuş çaylarımızı yudumluyorduk. Levin bana *limerick*'in başarılı bir şiir biçimi olduğunu söyledi, çünkü her mısradaki hece sayısı (8, 8, 5, 5, 8) Fibonacci sayılarındandı. O anda aklıma bir fikir geldi. Levin'a iPod'un ne olduğunu bilip bilmediği sordum. Bilmiyordu. Benimki cebimdeydi, çıkardım. Onun güzel bir nesne olduğunu söyledim ve onun düşüncelerine göre altın orana uygun olmalıydı.

Levin parlak beyaz iPod'u aldı ve avucunun içinde tuttu. Evet, dedi, güzel bir şey, o halde altın orana uygun olmalı. Beni çok umutlandırmamak için fabrika yapımı nesnelerin genellikle altın orana mükemmel bir biçimde uygun olmadıklarını söyledi. 'Şekiller üretime elverişliliğe göre biçimlendirilir' dedi.

Levin ölçü aletini açtı ve önemli tüm noktaları ölçmeye başladı. 'Tam tamına' diye gülümsedi.





BÖLÜM DOKUZ

Şans iyi bir şey

Eskiden evlenmek için Las Vegas'a, boşanmak için de Reno'ya git denirdi. Şu anda iki şehri de kumar makineleri için ziyaret edebilirsin. 1900 tane kumar makinesine sahip olmasına rağmen, Reno'nun Peppermill kumarhanesi şehrin en büyük kumarhanesi değil. Ana salonda yürürken, rulet ve blackjack masaları, dönen, ışıklar saçan, sesler çıkartan diğer kumar makinelerine göre daha gölgede ve sönük kalıyordu. Teknolojik evrim, en çok tek kollu kumar makinelerinin kollarını ve mekanik parçalarını aldı götürdü. Oyuncular artık bahislerini aydınlatılan düğmeler ya da dokunmatik ekranlarla oynayabiliyorlar. Ara sıra yükselen bozuk para seslerini duyduğum oluyordu, ama bunlar jetonların yerine artık elektronik krediler kullanıldığı için kaydedilmiş örnek elektronik seslerden geliyordu.

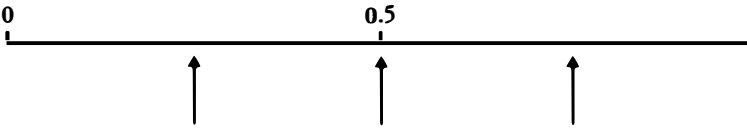
Kumar makineleri kumarhane endüstrisinin dönüm noktasıdır, başladığı ve son bulduğu yerdir. Amerika'da kumar makineleri yıllık 25 milyar dolar kazanıyor (kazanılan tüm paraları ödedikten sonra), bu yaklaşık yıllık toplam sinema bileti satışının iki buçuk katı kadar. Evrensel kumarhane kültürünün merkezi olan Nevada'da yıllık kumar gelirlerinin % 70'ini makineler oluşturuyor ve bu rakam her geçen yıl artmaya devam ediyor.

Olasılık bir çeşit şans bilimidir. Yazı tura attığımızda ya da kumar makinesinin düğmesine bastığımızda, paranın hangi yüzünün üste

geleceğini ya da çarkın nerede duracağını bilemeyiz. Olasılık bize o paranın tura gelme ihtimalini ya da kumar makinesinin büyük ödülünü nasıl kazanabileceğimizi söyleyen lisandır. Matematiksel bir yaklaşım ile, tahmin edilemeyen oldukça öngörülebilir bir hale gelir. Günlük hayatımızda hiç düşünmeden kabul ettiğimiz bu düşünce olduğu halde üstü biraz kapalıdır, örneğin ne zaman bir hava tahmini okusak, matematiğin bize geleceği söyleyebileceği fikrinin yerli yerinde ve insanlık düşünce tarihi içinde görece yeni bir düşünce olduğunu fark ederiz.

Reno'ya dünya üzerindeki kumar makinelerin yarısının olasılıklarını düzenleyen matematikçi ile tanışmak için gelmiştim. Yaptığı işin tarihsel soy ağacı var, olasılık teorisi ilk olarak on altıncı yüzyılda daha önce üçüncü dereceden denklemleri tartışırken tanıştığımız İtalyan kumarbaz dostumuz Girolamo Cardano tarafından tasarlandı. Nadiren de olsa, kendisinden iğrenilecek bir şey matematiksel bir kırılma noktasına sebebiyet verir. 'Satranca ve zar masalarına aşırı derecede bağımlı biri olduğum için en sert biçimde kınanmayı hak ettiğimin farkındayım' diye yazıyordu. Onun alışkanlıkları, *Şans Oyunları Kitabı* adlı küçük bir kitapçıkta yayınlandı ve bu muhtemelen olasılık hesabının ilk bilimsel incelemesiydi. Kitap zamanının o kadar ötesindeydi ki, ölümünden 100 yıl sonrasına kadar yayınlanmamıştı.

Cordano'nun düşüncesi şuydu; eğer rastgele bir olayın birbirine benzer birkaç tane sonucu varsa tek bir sonucun ortaya çıkma olasılığı, bütün sonuçların ortaya çıkması olasılığına eşittir. Bunun anlamı; eğer bir şeyin olma olasılığı altı seferde bir ise, onun olma olasılığı altıda birdir. Öyleyse bir zarı yuvarladığınızda zarın altı gelme olasılığı $\frac{1}{6}$, zarın çift gelme olasılığı $\frac{3}{6}$'dır bu da $\frac{1}{2}$'ye eşittir. Olasılık bir şeyin olma ihtimalinin oranlar ile ifade edilmesi olarak tanımlanabilir. İmkânsızlık olasılığın 0; kesinlik olasılığın 1 olmasıdır ve geriye kalan her şey bunların arasındadır.



Düşük ihtimal, yarı yarıya, yüksek ihtimal

Bu bir bakışta anlaşılır gibi görünüyor ama değil. Yunanlılar, Romalılar ve antik dönem Hintlilerinin hepsi takıntılı kumarbazlardı. Bir rastgele oluşun nasıl da matematik yasaları tarafından yönetildiğini anlamaya çalışmadılar. Örneğin Roma'da anlaşmazlıkları çözmek için yazı tura atılırdı, eğer üzerinde Julius Sezar'ın olduğu taraf üste gelirse bu anlaştıkları anlamına gelirdi. Rastgele olmak tesadüfilik olarak değil, ilahi bir irade gibi anlaşılıyordu. Tarih boyunca, insanlar rastgele olayları yorumlamak için yollar bulma konusunda son derece yaratıcı olmuştur. Örneğin, Rhapsodomancy, edebi bir eserden şans eseri seçilmiş bir bölümden rehberlik arama sanatıydı. Benzer olarak, İncil'e göre, kısa çöpü seçmek sadece tanrının izin verdiği ölçüde tercih etme işiydi: 'İnsan kura çeker ama her kararı Tanrı verir' (Deyişler 16.33)

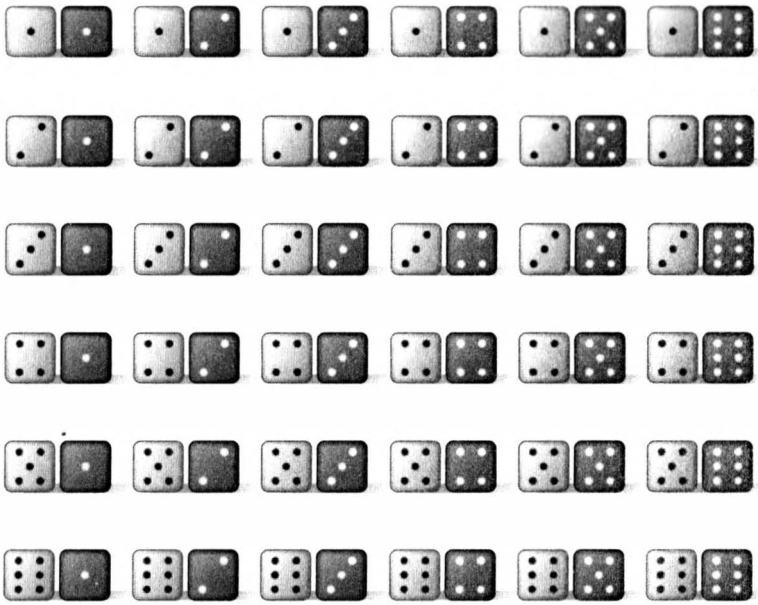
Batıl inançlar, olasılığa yönelik bilimsel bir yaklaşımın önünde büyük bir engel oluşturuyordu, zar atmadan yüz yıl kadar sonra, mistisizm daha güçlü bir insan arzusu tarafından alt edildi; mali kâr arzusu. Girolamo Cardano servete esir düşen ilk adamdı. Aslında, olasılığı icat etmenin temelinin son birkaç yüzyılın dini ve batıl inançlarını reddetmek için gerçekleştirildiği tartışılabilir. Eğer tahmin edilemeyen olaylar matematiksel yasalara uyuyorsa, bunların tanrısal olaylarla açıklanması da gerekmez. Dünyanın laikleşmesi genellikle Charles Darwin ve Friedrich Nietzsche gibi düşünürlere mal edilmişti, ama ilk hareketi başlatan kişinin Girolamo Cardano olması da mümkündür.

Şans oyunları en genel olarak zar oyunlarından oluşur. En popüler olan antik modeli, dört belirgin düzgün yüzeyi olan, keçi ya da koyunun aşık

kemiğinden yapılan *astragalus*'tur. Hintliler, çubukları ve Tobleron şeklindeki zarları severlerdi ve bu zarların yüzeyleri birbirinden farklı biçimlerde işaretlerlerdi, bunun için yapılacak en iyi açıklama bunun günümüz zar sisteminin öncüsü olduğu ve bu geleneğin günümüze kadar devam ettiğidir. En adil zar özdeş yüzeyleri olan zardır ve eğer biri daha ileri gidip her bir kenarın düzgün bir çokgen olması gerektiğini ileri sürerse bu tasarıya uyacak sadece beş tane şekil bulunur, platonik katılar. Tüm platonik cisimler zar olarak kullanılmıştır. Ur oyunu, İ.Ö. üçüncü yüzyıla dayanan geçmişiyle muhtemelen dünya üzerinde bilinen en eski oyundur ve bu oyun için seçilen zar beş platonik cisim arasındaki en kötü tercih olan üçgen piramittir, çünkü bu cismin sadece dört yüzeyi olduğu için yuvarlanması oldukça zordur. Sekiz yüzeyli zarlar antik Mısır'da kullanılmıştır, on iki ve yirmi yüzeyli zarlar bugün hâlâ falcıların çantalarında bulunmaktadır.

Açık bir farkla en popüler olan zar şekli küptür. Yapılması en kolay olandır ve sayısal değeri ne çok küçük ne de çok büyüktür, güzel yuvarlanır ama çok da kolay değildir, hangi yüzeyin üste geldiğini anlamak çok kolaydır. İşaretlenmiş yüzeyli küp zarlar kültürler arası şansın sembolüdür, İngiliz arabalarının dikiz aynalarında asılı olanlardan tutun Çin'in mahjong salonlarına kadar geniş bir alana yayılmışlardır.

Daha önceden de söylediğim gibi bir zarı attığınız zaman altının gelme olasılığı $\frac{1}{6}$. Zarı tekrar attığınızda altı gelme olasılığı yine $\frac{1}{6}$. Bir çift zar atıldığında altı - altı gelme olasılığı nedir? En genel olarak birbirinden bağımsız iki olayda aynı sonucun elde edilmesi olasılığı bir sonucun elde edilmesi olasılığının diğer sonucun elde edilmesi olasılığıyla çarpımına eşittir. Bir çift zar attığımızda ilk zarın değeri ikinci zarın değerinden bağımsızdır. Öyleyse iki tane altı atma olasılığımız $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ ya da $\frac{1}{36}$ olur. Bunu görsel olarak iki zarın tüm olası kombinasyonlarını hesaplayarak görebilirsiniz: Otuz altı farklı olasılık vardır ve bunlardan yalnız bir tanesi bir çift altıdır.



Diğer taraftan 36 olasılık içinde 35 tane olasılık çift 6 değildir. Öyleyse bir çift 6 atmama olasılığı $\frac{35}{36}$'dır. 35 tane örneği saymaktansa bütün olasılıklardan çift gelme olasılığını çıkartabilirsiniz. Örnekte olduğu gibi $1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$ Bir şeyin olmama olasılığı, o şeyin olma olasılığını 1'den çıkartmaya eşittir.

Zar masaları kumar makinelerinin ilk eşdeğerleridir, kumarbazlar bahislerini zarın gelebilecek sonuçları üzerine oynarlar. Bunun klasik bir örneği, dört tane zar yuvarlayıp altı sayısının en az bir tanesinde çıkması üzerinedir. Bu para koymaya razı gelen kişiler için küçük ve güzel bir kazanç yöntemidir ve bunun nedenini görebilmek için yeterli matematik bilgisine sahibiz;

Aşama 1: Dört zarda herhangi bir zarın 6 gelme olasılığı aynı zamanda 1 eksi hiçbir zarın 6 gelmeme olasılığına eşittir.

Aşama 2: Bir zarda 6 gelmeme olasılığı $\frac{5}{6}$ olduğuna göre dört zarda 6 gelmeme olasılığı $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{625}{1296}$'dır, bu da 0.482'dir.

Aşama 3: Öyleyse dört zarda altı gelme olasılığı 1 - 0.482 = 0.518'dır.

olasılığın 0.518 olması; dört tane zarı bin kere yuvarladığınızda 6 sayısını 518 kere görebilir ve 482 kere de görmeyebiliriz anlamına gelir. Eğer paranızı en az bir tane 6 gelme olasılığına oynarsanız kazanma ortalamanız kaybetme ortalamanızdan daha fazla olacaktır, böylece bahsi kazançla tamamlarsınız.

On yedinci yüzyıl yazarlarından Chevalier de Mere, Paris'in en meşhur salonlarındaki zar masalarının düzenli bir müşterisiydi. Chevalier para kazanmaya devam ettikçe zar matematiğine olan ilgisi de arttı. Bahisle ilgili kendisinin de cevaplayamadığı bir çift sorusu vardı, bu yüzden 1654 yılında o dönemin seçkin matematikçilerinden olan Blaise Pascal'a yakınlaştı. Şans üzerine araştırması, rastgelelik çalışmasını doğuran rastgele bir olaydı.

Blaise Pascal, Mere'nin sorularıyla karşılaştığında henüz 31 yaşındaydı fakat yaklaşık 20 yıldır matematik çevrelerince tanınıyordu. Pascal yeteneklerini henüz 13 yaşında bir çocukken babasının izniyle katıldığı ve bir rahip ve asal sayı meraklısı olan Martin Mersenne'in, René Descartes ve Pierre de Fermat gibi pek çok meşhur matematikçiyi bir araya getirdiği bilimsel salon organizasyonlarında göstermişti. Henüz daha genç bir delikanlıyken çok önemli geometrik teoremler ispatlamış ve Pascaline adı verilen ilk mekanik hesap makinesini icat etmişti.

De Mere'nin Pascal'a sorduğu ilk soru çift 6'yla ilgiliydi. Yukarıda da gördüğümüz gibi çift 6 atma olasılığımız her fırlattığımız zarda artar. Chevalier'in bilmek istediği çift 6'nın iyi bir bahis olması için zarı kaç kere fırlatması gerektiğiydi.

İkinci sorusu çok daha karmaşıktı. Diyelim ki Jean ve Jacques zar oyunu oynuyorlar ve yüksek zarı kimin attığını görmek için birkaç tur boyunca zar atıyorlar. Üç kere en yüksek zarı atan oyunu doğrudan kazanıyor. Her biri 32 frank bahis koyuyor böylece toplam bahis 64 frank oluyor. Eğer oyun üç turda bitmek zorundaysa ve Jean iki kere Jacques ise bir kere yüksek zar attıysa toplam ödül nasıl bölüşülmelidir?

Cevapları düşünüp, bunu bir dâhiyle tartışma ihtiyacını duyan Pascal, Mersene salonundan arkadaşı olan Pierre de Fermat'a mektup yazdı. Fermat, Paris'ten uzakta, kumar analizi yapan birinin yaşaması için gayet uygun bir ismi olan Toulouse'ta yaşıyordu. Pascal'dan 22 yaş büyüktü, yerel bir mahkemede yargıç olarak çalışıyordu ve matematikle sadece entelektüel bir merak olarak ilgileniyordu. Bununla birlikte, onun amatör düşünceleri onu on yedinci yüzyılın ilk yarısında en saygın matematikçilerden birisi yaptı.

Pascal ve Fermat arasındaki, kendileri tarafından *rastlantı* olarak adlandırdığı şans üzerine yapılmış bu kısa yazışmalar bilim tarihinde bir dönüm noktası oldu. İkisi de iyi yaşamayı seven bu adamın problemlerini çözmüşlerdi ve böylece modern olasılık teorisinin temellerini atmışlardı.

Chevalier de Mere'nin sorularının cevaplarına gelince: Bir çift zarı kaç kere atmalısınız ki zarda çift altı gelme olasılığı olsun. İlk zar fırlatışımızda zarda çift 6 gelme olasılığı $\frac{1}{36}$ ya da 0.028'dir. İki kere zar attığımızda çift 6 görme olasılığımız 1'den çift altı görmeme olasılığının çıkartılmasına eşittir böylece denklem $1 - (\frac{35}{36} \times \frac{35}{36})$ olur. Bu da $\frac{71}{1296}$ 0.055'e eşittir (Not: iki defa çift altı atma olasılığı $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$ değildir. Bu her iki zarın da çift 6 gelme olasılığıdır. Bizim ilgilendiğimiz *en az bir* tane çift altı atma olasılığımızdır, yani ilk atışta ya da ikinci atışta ya da her ikisinde. Kumarbazın kazanmak için bir tane çift 6'ya ihtiyacı vardır (her atışta gelmesi gerekmez). Üç atışta çift 6 atma olasılığımız 1- hiç

altı atmama olasılığımız bu denklemde $1 - (\frac{35}{36} \times \frac{35}{36} \times \frac{35}{36}) = \frac{3781}{46.656}$ ya da 0.081'e eşittir. Gördüğümüz üzere her bir zar atışımızda çift 6 gelmesi olasılığı artmaktadır. Bir atışta 0.028, iki atışta 0.055 ve üç atışta 0.081. bu nedenle, orijinal soru zarı kaç kere atmalıyız ki çift 6 gelme olasılığı 0.5'ten daha yüksek olsun diye düzenlenebilir. Yarımdan daha büyük olasılık demek bu olayın olma ihtimali olmama ihtimalinden daha fazla demektir. Eğer Chevalier 24 zarda çift 6 atmak üzerine bahis oynarsa bu bahsi büyük ihtimalle kaybeder diyebiliriz, fakat 25. zardan sonra şansı kendi lehine döner ve kazanması beklenir.

De Mere'nin toplam parayı bölüşmek adına sorulan ikinci sorusu *Puan problemleri* olarak adlandırılır, Fermat ve Pascal ele almadan çok daha önce de sorulmuş ama daha önce doğru bir cevap verilememiştir. Gelin soruyu yazı tura olarak değiştirelim. Yazı geldiğinde Jean tura geldiğinde Jacques kazanıyor olsun. Toplamda üç kere kazanan toplam parayı alsın. Jean 2 yazı ve Jacques 1 tura bulduğu zaman oyunun birden sona ermesi gereksin. Eğer durum buysa toplam parayı bölüşmenin en adil yolu nedir? Cevaplardan bir tanesi Jean önde olduğu için bütün parayı almasıdır, ama bu yine de Jacques'ın kazanma şansı olmadığı anlamına gelmez. Bir diğer bölüşme ise Jean'ın 2 pay Jacques'ın bir pay almasıdır ama bu yine de adil olmaz çünkü 2-1'lik bir skor yalnızca bitmiş bir olayı anlatır, gelecekte olacaklar hakkında hiçbir bilgi vermez. Jean yazı veya tura geleceğini tahmin etmede Jacques'dan daha iyi değildir. Her bir fırlatışta yazı veya tura gelme olasılığı 50:50'dir. En adil sonuç paranın iki kere daha atılıp diğer muhtemel sonuçların hesaplanması olacaktır:

Yazı, yazı

Yazı, tura

Tura, yazı

Tura, tura

Bu iki fırlatıştan sonra oyun kazanılır. İlk üç denemede Jean ve dört denemede Jacques kazanmaktadır. Toplam paranın en adil bölüştürülmesi $\frac{3}{4}$'ün yani 48 frankın Jean'a $\frac{1}{4}$'ün yani 16 frankın Jacques'a verilmesidir. Bu günümüzde oldukça dürüst gözükmektedir, ama on yedinci yüzyılda henüz olmamış olayların matematiksel olarak ele alınması önemli kavramsal bir atılımdır. Bu kavram, günümüz modern dünyasında fizikten finansa, sağlıktan pazar araştırmalarına kadar pek çok kavramı bilimsel olarak anlamamızı sağlar.

Pascal, Fermat'a kumarbaz soruşturmalar hakkında ilk mektubu yazdıktan birkaç ay sonra, derin bir dini deneyim yaşadığından bu raporu bir keseye koyup ceketinin içine dikmiş ve ömrünün kalan kısmında bunu üzerinde taşımıştır. Bunun nedeni muhtemelen atının köprüden geçerken korkuluktan atlaması yüzünden hocasının köprüde asılı kalıp ölümle yüz yüze gelmesi ya da devrim Fransa'sında zar masalarının başında meydana gelen ahlaki çöküşe duyduğu bir tepki olabilir. Her iki durum da onun katı bir Katolik mezhep olan Jansenizme sıkı sıkıya bağlanmasına, teoloji ve felsefe için matematiği terk etmesine yol açmıştır.

Yine de Pascal, Matematik hakkında düşünmekten vazgeçememiştir. Felsefeye en büyük katkısı, insan Tanrıya inanmalı mı inanmamalı mıdır konulu tartışmasıdır ve bu Pascal'a Fermat'la yaptığı ilk tartışmanın analizini yapma şansı vermiştir.

Daha sade bir ifadeyle, *beklenen değer* bir bahis sonucunda kazanılması umulan değerdir. Örneğin Chevalier de Mere atılan dört zarın en az birinde 6 gelme olasılığı üzerine oynadığı 10 £ ile ne kadar kazanmayı umuyordu? Altı her geldiğinde 10 £ kazandığını ve gelmediğinde her şeyi kaybettiğini düşünün. Bu bahsi kazanma şansının 0.518 olduğunu biliyoruz. Böylelikle yarıdan daha fazla oranda 10 £ kazanırken yarıdan daha az oranda 10 £ kaybeder. Beklenen değer

ise her bir olasılıkla bu olasılıklar değerlerinin çarpımının toplamına eşittir. Bu olayda kazanması beklenilen rakam:

(10 £ kazanma şansı) x 10 £ + (10 £ kaybetme şansı)x –10 £

ya da

(0.518 x 10 £) + (0.482 x –10 £) = 5.18 £ – 4.82 £ = 36p

(Bu eşitlikte, kazanılan para pozitif ve para kaybı ise negatif değerdedir) Elbette ki de Mere tek bir bahiste 36p kazanmaz, ya 10 £ kazanacaktır ya da 10 £ kaybedecektir. 36p değeri teoriktir fakat bahis oynamaya devam ederse bahis başına kazanacağı yaklaşık değer 36p olacaktır.

Pascal beklenen değer fikrinden faydalanmayı düşünen ilk kişiydi. Ama onun zihni zar masasında maddi kazanç fikrinden çok daha önemli düşüncelerle meşguldü. O, Tanrı'nın varlığının bahse değer olup olmadığını bilmek istiyordu.

Pascal'ın Tanrı'nın varlığı üzerine bir bahis hakkında yazdığını hayal edin. Pascal'a göre böyle bir bahsin beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

(Tanrı'nın var olma şansı) x (varsa kazanılabilecekler) + (Tanrı'nın var olmama şansı) x (yoksa kazanılabilecekler)

Bu durumda tanrının var olma şansı 50:50'dir yani Tanrı'nın var olma olasılığı $\frac{1}{2}$'dir. Eğer tanrıya inanıyorsanız bu denklemden neler elde edebilirsiniz. Formül şu şekilde olur:

($\frac{1}{2}$ x sonsuz mutluluk) + ($\frac{1}{2}$ x hiçbir şey) = sonsuz mutluluk.

Bir başka ifadeyle bahsi tanrının var olduğu fikri üzerine oynamak akıllıca olacaktır çünkü kazanç inanılmazdır. Aritmetik bize hiçbir şeyin yarısının hiçbir şey, sonsuzluğun yarısının ise yine sonsuzluk olduğunu söyler. Aynı şekilde tanrının var olma olasılığını 100'de 1 olduğunu kabul ettiğimizde formül şu şekilde olur.

$$(\frac{1}{100} \text{ x sonsuz mutluluk}) + (\frac{99}{100} \text{ x hiçbir şey}) = \text{sonsuz mutluluk}$$

Tekrar söylemek gerekirse, sonsuzluğun yüzde birinin yine sonsuzluk olduğunu düşünürsek, tanrının var olduğuna inanmanın ödülü yine olağanüstüdür. Buna göre, şansın 0'dan daha büyük olduğunu göz önünde bulundurarak Tanrı'nın var olma şansı minicik bile olsa, eğer Tanrı'ya inanıyorsanız, inanca oynadığınız bahsin karşılığını size sonsuz olarak öder. Karmaşık bir yoldan çıkıp çok önemli bir sonuca ulaştık. Tabii ki Hıristiyanlar bahisleri Tanrı'nın var olduğundan yana oynar.

Pascal kişinin tanrının varlığına inanmadığında olacaklar konusunu daha çok merak ediyordu. Böyle bir durumda Tanrı'nın var olup olmadığı üzerine bahis oynamak iyi bir bahis midir? Eğer Tanrı'nın var olmama şansını 50:50 olduğunu düşünürsek denklem şu şekli alır.

$$(\frac{1}{2} \text{ x sonsuz lanet}) + (\frac{1}{2} \text{ x hiçbir şey}) = \text{sonsuz lanet.}$$

Beklenen sonuç sonsuz cehennemdir ki bu da çok kötü bir bahistir. Tekrardan, eğer tanrının var olma olasılığı yüzde bir ise sonuç önceki denklemin bir benzeri olacaktır. Eğer çok küçük bir şans da olsa tanrı varlığına inanmayanlar için bahsin sonucu sonsuz derecede kötü olacaktır.

Yukarıdaki önerme Pascal Bahsi olarak bilinir. Şu şekilde özetlenebilir: Eğer tanrı çok küçük bir ihtimalle bile var ise, ona inanmak

inanılmayacak derecede faydalı olacaktır. Çünkü, eğer Tanrı yoksa inanmayanların kaybedecekleri hiçbir şey yoktur ama eğer Tanrı varsa inanmayanlar *her şeylerini* kaybedecekler. Bunu bir aptal bile anlar. Hıristiyan olun, hadi durmayın.

Daha yakından incelenecek olursa Pascal'ın önermesi geçersizdir. Başlangıç olarak sadece Hıristiyan Tanrısına inanma seçeneğin konu almıştır. Peki ya diğer dinlerin tanrıları hatta uydurma dinlerin tanrılarına ne olacak? Yaşamdan sonra cennete ya da cehenneme gitmemize yeşil peynirden yapılmış bir kedinin karar verdiğini hayal edin. Çok muhtemel görünmese de yine de böyle bir ihtimal vardır. Pascal'ın tartışmasına göre yeşil peynirden yapılmış bir kediye inanmak gerekir, ki bu elbette çok saçmadır.

Paskal Bahsi ile ilgili olasılık matematiği için çok öğretici olan başka sorular da vardır. Atılan zarda altı gelme olasılığının 6'da 1 olduğunu söylediğimizde, bunu zarın işaretlenmiş 6 yüzeyden oluştuğunu bildiğimiz için yaparız. Matematiğin kavramlarıyla Tanrı'nın var oluşunun 1 olduğu ifadesini anlayabilmemiz için Tanrı'nın içinde gerçekten var olduğu olası bir dünya olması gerekir. Bir başka deyişle, önermenin Tanrı'nın bir yerlerde var olduğunu ileri sürmesi gerekmektedir. Bu önerme sadece inanmayan bir kişi tarafından reddedilemez aynı zamanda Pascal'ın düşünme sisteminin kendine hizmet edecek bir döngüde olduğunu gösterir.

Pascal'ın dindar niyetlerine rağmen, mirası kutsallığından daha çok din dışıdır. Beklenen değer çok kârlı olan kumar endüstrisinin temel kavramıdır. Bazı tarihçiler rulet çemberinin icadını Pascal'a mal eder. İster doğru olsun ister olmasın, ruletin icadının Fransızlar tarafından yapıldığı ve 18. yüzyılın sonlarında Paris'te büyük ilgi gördüğü bir gerçektir. Kuralları şöyledir: Bir top dış çemberde döner ve hızını kaybettiğinde dönmekte olan bir iç çembere düşer. İç çember 1'den 36'ya kadar numaralanmış bölümler (kırmızı ve siyah renklerde) ve

0, 00 (yeşil renkte) iki özel nokta ile 38 cepten oluşur. Top iç çembere ulaştığında sekerek bir noktada sabit kalır. Oyuncular çıkacak sonuca göre pek çok bahiste bulunabilirler. En basit bahis olanı topun düşeceği cebe oynamaktır, eğer top seçtiğiniz cepte kalırsa, kumarhane size bahsinizin 35 katını öder. Eğer 10 £ bahis oynadıysanız, size 350 £ ödenir (ve koyduğunuz 10 £ bahsi geri alırsınız).

Rulet çok etkili bir para kazanma makinesidir çünkü her oynadığınız bahsin negatif bir beklenen değeri vardır. Bir başka deyişle, oynadığınız her bahiste para kaybetmeyi bekleyebilirsiniz. Bazen kazanır ve bazen kaybedersiniz ama uzun süreli bir oyunun ardından kazandığınızdan daha fazla para kaybederek kalkarsınız. Öyleyse, burada sorulması gereken önemli soru şudur: Ne kadar kaybetmeyi umabilirsiniz? Tek bir rakama oynadığınız zaman, kazanma ihtimaliniz 38 farklı sonuç olma ihtimali olduğu için $\frac{1}{38}$'dir: Her 10 £'luk bahis için kazanmayı bekleyeceğiniz rakam:

(seçtiğiniz numaranın gelme şansı) x (kazanacağınız değer) + (seçmediğiniz numaranın gelme şansı) x (kazanacağınız değer)

ya da

$(\frac{1}{38} \times 350\ £) + (\frac{37}{38} \times -10\ £) = -52.6p$

Bir başka ifadeyle oynayacağınız her bir 10 £ bahis için 52.6p kaybedersiniz. Ruletteki diğer bahislere bakacak olursak –birden daha fazla rakama oynama, bölgeye oynama, renge oynama ve kolonlara oynama– bunların hepsinde 52.6p oranında kaybetmeniz beklenmektedir. 0, 00, 1, 2 ya da 3 gibi komşularına oynamayı bunlardan ayrı tuttuk çünkü bu çok daha kötü bir bahis olur, çünkü bunda kaybetmeniz beklenen rakam 78.9p'dir.

Kazanma ihtimallerinin bu kadar kötü olmasına rağmen rulet geçmişte de günümüzde de en çok sevilen eğlence olmuştur. Pek çok insan

için 350 £ kazanma heyecanı 10 £ kaybetme ihtimali yanında adil bir ödemedir. On dokuzuncu yüzyılda kumarhaneler hızla çoğaldılar ve oyunu daha rekabetçi yapabilmek için, rulet çemberinden 00 rakamı çıkartıldı böylece hem kazanma şansı yükselmiş oldu hem de her 10 £ bahiste kaybedilecek rakam 27p'ye düşürülmüş oldu. Bu değişiklik para kaybetme hızınızın yarıya düştüğü anlamına geliyordu. Avrupa kumarhanelerinde rulet çemberlerinde yalnızca 0 varken Amerika kumarhaneleri orijinal çember olan 0, 00'ı tercih ettiler.

Tüm kumarhane oyunları negatif beklenen değer bahisleri üzerine gelişmiştir, bir başka ifadeyle bu tür oyunlarda oyuncuların para kaybetmesi beklenir. Eğer oyunlar bunun tersi bir yöntemle yapılmış olsalardı kumarhaneler iflas ederdi. Yine de hatalar yapıldı. Bir Illinois yüzen kumarhanesi reklam amaçlı olarak 21 oyununda ödenen miktarın yükseltildiğini duyurdu fakat bunu yaparlarken beklenen değerin negatiften pozitife geçtiğini fark etmemişlerdi. Oyuncuların para kaybetmesi beklenecekken her bir 10 $ bahiste oyuncular 20 cent kazanıyorlardı. Söylendiğine göre kumarhane bir günde 200.000 $ kaybetmişti.

Bir kumarhanede bulunabilecek en iyi oyun barbuttur. Oyun bir İngiliz zar oyununun Fransız uyarlamasıdır. Oyuncular iki zar atarlar, kazanç hangi rakamlar geldiğine ve toplamlarına bağlıdır. Barbutta kazanma şansınız 495'te 244 ya da % 49.2929 oluyordu. Oynadığınız her bir 10 £'luk bahiste beklenilen kayıp yalnızca 14.1p olur.

Barbutta aynı zamanda bahsedilmesi gereken ve kumarhaneyle birlikte yapabileceğiniz yan bahisler de vardır, bu oyuncunun atacağı zara göre yapılan bir bahistir. Yan bahisçi asıl bahisçi kaybettiği zaman kazanır ve asıl bahisçi kazandığında da kaybeder. Asıl bahisçi oynadığı her 10 £ için 14.1p kaybettiğini düşünürsek yan bahisçi her bahis için 14.1p kazanır. Fakat barbutta bu yandan bahis olayındaki kazancı önlemek için ekstra bir kural vardır. Eğer asıl oyuncu ilk zarda çift 6 atarsa (bu oyunu kaybettiği anlamına gelir), yan bahisçiler de kazanamazlar, sadece koydukları bahisleri geri alırlar. Bu önemsiz bir

değişiklik gibi görünüyor. Çift 6 atma olasılığı 36'da 1'dir. Böylece zaten çok düşük olan kazanma şansının beklenen değeri de düşer ve her bir 10 £ bahiste 27,8p olur, böylece beklenen değer negatif tarafa doğru hareket eder. Kumarhanelerin yaptığı gibi 10 £'luk bahiste 14.1p kazanmak yerine, yan bahisçiler her 10 £'luk bahiste 14.1p – 27.8p = –13.7p kazanırlar ya da kaybederler. Her bir 10 £ bahis için sadece 0.4 p'lik küçük bir kazancı olsa da yan bahisler kesinlikle daha iyi bahislerdir.

Beklenen kayba diğer bir bakış ise *geri ödeme yüzdesi* terimiyle düşünmektir. Eğer 10 £ bahis oynarsanız geri almayı umacağınız rakam 9.86 £ olur. Bir başka deyişle barbutun geri ödeme yüzdesi 98,6'dır. Avrupa ruletinin geri ödeme yüzdesi 97.3 Amerikan ruletininki ise 94.7'dir. Bu kumarcılar için kötü bir bahis oyunu olarak görünse de kumar makinelerinden çok daha iyi kazandırır.

1893 yılında *San Francisco Chronicle* gazetesi okurlarına, şehrin inanılmaz kazanç sağlayan bin beş yüz tane Nickel-in-the-Slot kumar makinesine ev sahipliği yaptığını duyurdu. 'Birkaç ay önce ortaya çıkan bu makineler, mantar hızında çoğalıyorlar.' Bu makinelerin pek çok çeşidi vardı fakat modern kumar makinelerinin doğuşu, yüzyılın sonunda Alman göçmen Charles Fey'in 3 çemberli kumar makineleri fikrini geliştirmesiyle oldu. Onun Özgürlük Çanı makinesinde makaralarında at nalı, yıldız, elmas, sinek birli ve Philadelphia'nın çatlak özgürlük çanının resmi vardı. Farklı sıralı şekiller farklı ödemeler yapıyordu ve en büyük ödül 3 tane çana veriliyordu. Kumar makinelerine oynayanlar için merak öğesi de eklenmişti, çünkü makaralar sırasıyla duruyordu. Diğer üreticiler de bu makinelerin kopyalarını yapmaya başladılar ve 3 çarklı kumar makinelerinin ünü San Francisco'yu aştı, 1930'lu yıllarda 3 çarklı kumar makineleri Amerikan Toplumu'nun bir parçası haline gelmişti. Oyun yasaları nedeniyle ilk makinelerde vakit geçirdiğiniz için size meyve aromalı sakız veriliyordu. Kiraz ve kavun

sembollerinin makinelere girme sebebi budur ve bu yüzden İngiltere'de kumar makineleri meyve makineleri olarak bilinirler.

Özgürlük Çanı oyununun geri ödemesi ortalama % 75'di, günümüz kumar makineleri eskiye göre çok daha cömertler. "Eğer makine dolar para birimiyle çalışan bir makineyse geri ödeme oranı yaklaşık hesapla % 95'tir" diyor dünya kumar makineleri sektörünün % 60'ını elinde bulunduran uluslararası oyun teknolojileri (IGT) şirketi oyun tasarlama yöneticisi Anthony Baerlocher, en iyi kumar makinelerinin dolarla çalışan makineler olduğundan bahsederken. Eğer 25 cent bahis koyulursa kazanma yüzdesi % 90-92, penny ile yapılırsa bu oran % 88'lere düşüyor. Bilgisayar teknolojisi kumar makinelerinin farklı oranlarda bahisler kabul etmesini sağlar, böylece kumar makineleri farklı oranlardaki bahislere farklı ödemeler yapabilir. Ona insanların para kaybettikleri için oyun oynamayı bıraktıkları bir yüzde olup olmadığını sordum. "Benim kişisel inancıma göre % 85 civarında ayarlanan bir makinenin keyif vermesinin mümkün olmadığı yönünde. Gerçekten şanslı olmanız gerekiyor. Oyunu heyecanlı kılmak için oyuncuya verecek yeterli miktarda para yoktur. % 87.5 - 88'de oldukça iyi bir iş çıkartıyoruz. Ve % 95 – 97 civarına çıkarttığınızda oyunlar gerçekten de çok heyecanlı oluyorlar."

Baerlocher'la, Peppermill kumarhanesinden arabayla 20 dakika uzaklıkta olan Reno iş merkezindeki IGT merkez ofisinde buluştuk. Birlikte, her yıl on binlerce kumar makinesi üreten üretim hattından ve sonrasında da yüzlercesinin güzelce depolandığı depo sahasının yanında yürüdük. Baerlocher, çenesinde çukur olan, koyu renk saçlı, tıraşlı ve güzel giyimli biriydi. Aslen yarım saat mesafedeki Carson City'dendi, (IGT) şirketine Indiana Notre Dame Üniversitesi'nde matematik eğitimini tamamladıktan sonra katılmıştı. Çocukken oyunlar icat etmeyi seven ve üniversitede olasılığa olan yeteneğini fark etmiş bir insan için oldukça uygun bir mesleği vardı.



Kazandığı paraya bakılacak olursa, 19. yüzyıl sonlarında üretime geçen Charles Fey'in Liberty Bell makinesi çok çabuk bir başarı elde etti.

Daha önce, Beklenen Değer'in çok kârlı olan kumar endüstrisinin temel kavramı olduğunu söylediğimde hikâyenin yalnızca yarısını anlatmıştım. Hikâyenin diğer yarısı ise matematikçilerin *büyük sayılar kanunu* adını verdikleri kanundur. Eğer rulet ya da kumar makinelerini sadece birkaç kere oynarsanız sonuçta kârlı çıkabilirsiniz, ama eğer oynamaya devam edecek olursanız, bu büyük ihtimalle kaybedeceğiniz anlamına gelir. Ödeme yüzdeleri sadece uzun süreli oyunlar için geçerlidir.

Büyük sayılar kanununun bize, eğer bir parayı üç kere fırlatırsak her seferinde yazı gelmeyebileceğini, ama üç milyon kez salladığınızda neredeyse % 50'sinin kesin olarak yazı geleceğinden oldukça

emin olabileceğimizi söyler. Matematikçi John Kerrich İkinci Dünya Savaşı'nda, Danimarka ziyareti sırasında Almanlar tarafından tutuklanıp esir alınmıştı. Hapishanede çok fazla zaman geçireceği için, büyük sayılar kanununu test etmeye karar verdi ve 10000 kere yazı tura attı. Sonuç 5067 yazı ya da toplamda % 50.67 oran çıkmıştı. 1900 yıllarında istatistikçi Karl Pearson aynı denemeyi bu sefer 24.000 yazı turayla yaptı. Ve bunun gibi daha birçok artan denemeler yapıldı, sonucun % 50'ye yakın olması gerektiğini bekleniyordu ve öyleydi de. 12012 kere yazı atmıştı ya da sonuç % 50.05 çıkmıştı.

Yukarıda belirtilen sonuçlar, kabullerimizi doğrulayacak niteliktedir—yazı tura attığımızda yazı gelme oranı, tura gelme oranına yaklaşık olarak eşittir. Buna rağmen yakın bir geçinişte istatistikçi Persi Diaconis tarafından yönetilen Stanford Üniversitesi'nden bir ekip gerçekten de yazı ve turanın eşit oranda gelip gelmediğini araştırdılar. Grup bir para fırlatma makinesi geliştirdi ve para havada dönerken bunları ağır çekim kaydettiler. Sayfalar dolusu incelemeden sonra, 5 sentlik bir para 6000 atışta 1 kere dik olarak düştü. Diaconis'in sonuçları bir paranın karşılaşabileceği etkileyici ve sürpriz sonuçları gözler önüne serdi, aslında bir paranın atıldığında atıldığı tarafın gelme oranı % 51 'di. Öyleyse bir parayı yazı tarafından atarsak yazı gelme olasılığı tura gelme olasılığından biraz daha fazladır. Diaconis yaptığı araştırma sonucunda hem rastgele fenomenleri incelemenin ne kadar zor olduğunu ispatlamış oldu, hem de "para fırlatma" üzerine klasik bağımsız varsayımının oldukça sağlam bir varsayım olduğunu ispatlamış oldu.

Kumarhanelerin hepsi büyük sayılarla ilgilenirler. Baerlocher'ın da açıkladığı gibi, tek bir makineden oluşan bir kumarhane yerine birçok makineden oluşmuş kumarhaneyi tercih ederiz çünkü ya kazanır ya da kaybederiz. Ama eğer çok sayıda makine topluluğuna bakıyorsak makineler hakkında daha olumlu düşüncelere sahip oluruz. IGT'nin kumar makinelerinin ödeme yüzdeleri on milyon oyun sonrasında yalnızca % 0,5'lik bir hata payı olacak şekilde tasarlanmışlardır. Reno ziyaretim

süresince kaldığım Peppermill'de her makine günde yaklaşık 2000 oyun yapıyordu ve 2000 makineli bir kumarhane olduğunu düşünürsek bu da yaklaşık günlük dört milyon oyun eder. İki buçuk günün sonunda, Peppermill yüzde 0.5'inin kazanılacağından emin olabilir. Eğer ortalama bahislerin bir dolar ve geri ödemenin 95 sent olduğu düşünülürse her 60 saatte toplamda 500000 $ giriş olur ve aşağı yukarı 50000 $ kâr elde edilir. Bu küçük bir mucizedir ve bu nedenle bu makineler kumarhaneler tarafından çok tercih edilir.

Ruletin ve barbutun kuralları, keşfedildikten beri yüzyıllardır değişmedi. Buna karşılık Baerlocher'ın işinin eğlenceli tarafı, pazara çıkan her IGT ürünü için yeni olasılıklar tasarlıyor olmasıdır. İlk olarak çarklarda ne tür semboller kullanacağına karar verir. Geleneksel olarak kirazlar ve barlar vardır, ama yeni çarklarda çizgi film karakterleri, Rönesans ressamları veya hayvanların bulunması da oldukça mümkündür. Daha sonra sembollerin ne sıklıkta çarkta bulunacağına, hangi kombinasyonlara ödeme yapacağına ve makinenin kazanan kombinasyonlara ne kadar ödeme yapacağına karar verir.

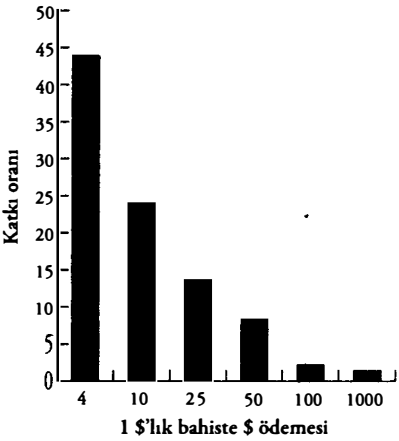
Baerlocher bana basit bir oyun çizdi, bir sonraki sayfadaki A oyunu kirazlar, barlar, kırmızı yediler, bir Jackpot ve boşluklardan oluşan 82 kombinasyonlu üç çarktan oluşmaktadır. Eğer tabloyu okuyacak olursanız ilk çarkta kiraz gelme olasılığının $\frac{9}{82}$ ya da 10.976 olduğunu görürsünüz ve eğer bu olursa 1 $ bahsin ödemesi 4 $ olur. Muhtemel kazanan kombinasyonların ödemeleriyle çarpılmasına Beklenen Katkı denir. Kiraz gibi bir kombinasyonun beklenen katkısı 4 x 10.967 = % 43.902'dir. Bir başka deyişle yaptığınız her 1 $ bahis için kiraz kombinasyonuna makine tarafından 43.902 sent ödenir. Baerlocher oyun tasarlarken bütün ödemeler için toplam beklenen katkı değerinin istenilen ödeme değerine eşitlemesi gerekmektedir.

Oyun A – Düşük Dalgalanma

Simge	Gerçek 1	Gerçek 2	Gerçek 3
Boşluk	23	27	25
Kiraz(CH)	9	0	0
1 Bar (1B)	19	27	25
2 Bar (2B)	12	15	16
3 Bar (3B)	12	7	10
Kırmızı 7'li (R7)	5	4	4
bingo(JP)	2	2	1
Toplam	**82**	**82**	**82**

Ödenebilir puan kartı

Kombinasyon	1 $'lık bahiste $ ödemesi	Olasılık (%)	Katkı (%)
CH Hiç Hiç	4	10.976	43.902
1B 1B 1B	10	2.326	23.260
2B 2B 2B	25	0.522	13.058
3B 3B 3B	50	0.152	7.617
R7 R7 R7	100	0.015	1.451
JP JP JP	1000	0.001	0.725
Toplam vuruş frekansı		**% 13.992**	
Toplam oyuncu ödemesi		**% 90.015**	

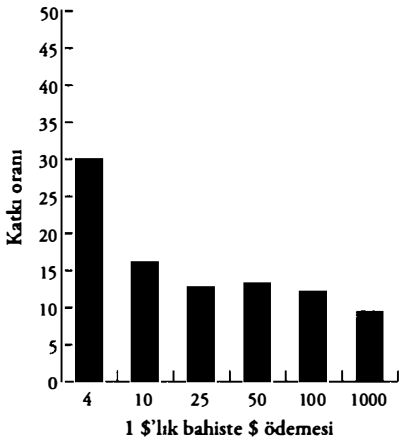


Oyun B – Yüksek Dalgalanma

Simge	Gerçek 1	Gerçek 2	Gerçek 3
Boşluk	20	22	23
Kiraz(CH)	6	0	0
1 Bar (1B)	18	25	19
2 Bar (2B)	13	15	14
3 Bar (3B)	12	9	13
Kırmızı 7'li (R7)	9	7	10
bingo(JP)	4	4	3
Toplam	**82**	**82**	**82**

Ödenebilir puan kartı

Kombinasyon	1 $'lık bahiste $ ödemesi	Olasılık (%)	Katkı (%)
CH Hiç Hiç	4	7.317	29.268
1B 1B 1B	10	1.551	15.507
2B 2B 2B	25	0.495	12.378
3B 3B 3B	50	0.255	12.932
R7 R7 R7	100	0.114	11.426
JP JP JP	1000	0.009	8.706
Toplam vuruş frekansı		**% 9.740**	
Toplam oyuncu ödemesi		**% 90.017**	



Kumar makinesi tasarlamada esneklik, koyacağınız şekiller, kazanma kombinasyonları ve yapılacak ödemelerle çok farklı oyunlar elde edebiliyor olmanızdan gelir. Oyun A -kiraz sektirme- olarak bilinir, bu makineler düzenli olarak ama küçük miktarlarda ödeme yaparlar. Makine aldığı paranın yaklaşık yarısını 4 $ olarak ödeme yapar, Oyun B bunun tam aksine aldığı paranın üçte birini 4 $ olarak ödeme yapar ve kalan miktar büyük ikramiyede toplanır. Oyun A gibi oyunlar düşük dalgalanmalı oyunlardır, Oyun B'de düşük kazanç miktarı azken büyük kazanç çok daha büyüktür bu yüzden yüksek dalgalanmalı oyun denir. Makinelerdeki dalgalanma büyüdükçe, makine yöneticileri için kısa vade riskleri de artar.

Bazı oyuncular düşük dalgalanmalı makineleri tercih ederken bazıları büyük dalgalanmalı makineleri tercih eder. Oyun tasarlayanların ana rolü, makinelerin oyuncuların oynama isteklerini devam ettirecek biçimde ödüyor olmalarını sağlamaktır, çünkü ne kadar çok kişi ortalamanın üzerindeyse o kadar çok kaybedecektir. Yüksek dalgalanmalı makineler çok daha büyük heyecan yaratırlar, özellikte kumarhanelerde büyük ödül kazanıldığında makine insanın içini ürperten ve herkesin dikkatini çekecek bir ölçüde ışık ve ses çıkarır. İyi bir oyun tasarlamak yalnızca gelişmiş grafikler, neşeli ses tonları ve video gösterileri hazırlamak değildir, oyunun iyi olması aynı zamanda altında yatan olasılıkları doğru ayarlamaktır.

Baerlocher'a dalgalanmayla oynayarak düşük ödeme yapan bir makinenin oyuncular için yüksek ödeme yapan bir makineden daha heyecan verici bir hale getirilip getirilemeyeceğini sordum. 'Meslektaşım ve ben bir yılı aşkın bir süredir bunun hesaplarını yapıyoruz ve formüller çıkartıyoruz ve sonunda gerçek geri ödemeyi gizleyecek bir metot bulduk,' dedi. 'Şu anda bazı kumarhanelerin düşük ödemeli makineler çalıştırdığını ve oyuncuların bunu fark edemediklerini duyuyoruz. Bu hiç kolay bir iş değil.'

Bunun etik olmayan bir müdahale olup olmayacağını sordum.

'Bu gerekli bir şey' diye cevapladı. 'Biz hâlâ oyuncularımızın oynarken heyecan duymalarını istiyoruz fakat aynı zamanda müşterilerimizin kazandıklarından da emin olmamız gerek' diye cevapladı.

Baerlocher'ın kullanıcı ödeme tabloları, sadece tek kollu kumar makinelerini iç düzenini anlamamıza değil, aynı zamanda sigorta sektörünün de nasıl çalıştığını anlamamızda yardımcı olmuştur. Sigorta kumar makinelerinde oyun oynamaya çok benzer. Her iki sistem de olasılıklar üstüne kuruludur, çoğunluğun kaybı azınlığın kazancıdır. Fakat geri ödeme yüzdeleri kontrolü sayesinde iki taraf da bu işten şaşırtıcı bir şekilde kârlı çıkar.

Sigorta priminin kumardan hiçbir farkı yoktur. Mesela, evinizin soyulacağına bahse girersiniz. Eğer soyulursa çalınan eşyaya göre geri ödeme alırsınız. Eğer eviniz soyulmazsa tabii ki hiçbir şey alamazsınız. Sigorta endüstrisinde çalışan sigorta uzmanları aynen IGT'de çalışan Anthony Baerlocher gibi davranırlar. Toplamda müşterilerine ne kadar geri ödemesi gerektiğini bilir. Olası her bir ödeme durumunun olasılığını bilir (hırsızlık, yangın, ciddi hastalıklar vb.) ve beklenen katkının toplamı toplam geri ödeme oranına eşit olacak biçimde ödemelerini ayarlar. Sigorta tabloları oluşturmak kumar makineleri yapmaktan çok daha büyük ölçüde karmaşık olmasına rağmen, temel prensip aynıdır. Sigorta şirketlerinin geri ödemeleri, aldığı primlerden daha az olduğu için, geri ödeme yüzdeleri % 100'ün altındadır. Sigorta poliçesi satın almak negatif beklenen bir bahistir ve bu yüzden kötü bir bahistir.

Peki, eğer sigorta kötü bir kumar ise insanlar neden hâlâ sigorta yaptırıyorlar. Sigorta ve kumarhanede kumar oynamak arasındaki fark, kumarhanelerde (umarım) kaybetmeyi göze alabileceğiniz miktarda oyun oynarsınız. Sigortada ise kaybetmeyi göze alamayacağınız şeyleri korumak için kumar oynarsınız. Kaçınılmaz bir şekilde küçük miktarlarda para kaybederken (primler), bu sizi astronomik miktarlarda

paralar kaybetmeye karşı korur (örneğin eviniz ve içindekilerin toplam değeri). Sigorta huzurunuz için iyi bir bedel talep eder.

Bununla birlikte astronomik olmayan bir miktar para için yapılan sigorta anlamsızdır. Örneğin cep telefonunuzu sigortalatmak, telefonunuz diğerlerine göre oldukça ucuzken (mesela 100 £) sigorta bedeliniz yüksektir (mesela aylık £7). Ortalama olarak düşünülürse, kaybolma ihtimaline karşı telefonunuzu sigortalamak yerine kendinize yeni bir telefon almanız daha iyi olacaktır. Bu yolla kendinizi kendiniz sigortalamış ve sigorta şirketinin kâr miktarını kendinize saklamış olursunuz.

Kumar makineleri sektöründeki ilerleyişin bir diğer nedeni ise pazara çıkan aydın sosyal bir politika ile çok az ve anında servet sahibi olma hayalleriyle çok fazla ilişkili olan kademeli makinelerdir. Kademeli makineler bir ağ ile birbirlerine bağlıdırlar, her bir makine toplam büyük ödüle katkıda bulunurlar böylece toplam büyük ödül kademeli olarak büyür. Peppermill'de, on binlerce dolar büyük ödül sunan bağlantılı makineler gördüğümde şaşırmıştım.

Kademeli makineler yüksek dalgalanmalı makinelerdir, bu da kumarhanelerin kısa sürede ciddi miktarlarda para kaybedebileceği anlamına gelir. 'Eğer kademeli makinelerde verilen bir ödülü ele alacak olursak, her yirmi kumarhaneden biri bize oyunun bozuk olacağını söyleyecektir. Çünkü bu oyun haftada iki üç defa kazandırır ve makineler 10.000 $ borca girerler' diyor Baerlocher, olasılıklardan kazanç sağlamaya çalışanların olasılığın en temel ilkesini bile anlamamış olmalarını şaşırtıcı bularak. 'Hepimiz analizler yapıyoruz ve bunun diyelim ki 200'de 1 olduğunu görüyoruz. Sonuç olarak bunun gerçekleşme olasılığı % 50'dir ve herhangi birine denk gelebilir. Onlara, bu normal, oynatmaya devam edin diyoruz.'

IGT'nin en popüler makinesi olan Megabucks Nevada üzerinde yüzlerce makineyi birbirlerine bağlar. Şirket bunun yaklaşık on yıl önce

duyurduğunda verilen en küçük ödül 1 milyon dolardı. Başlangıçta, kumarhaneler bu kadar büyük miktarda paraları ödemenin sorumluluğunu almak istemediler, bu yüzden IGT bütün makinelerden yüzde alarak makinelerin vereceği büyük ödülü kendilerinin ödeyeceğinin altına imzasını attı. Milyonlarca dolar ödül dağıtmış olmasına rağmen IGT'nin Megabucks makineleri hiçbir zaman bir zarara uğramadılar. Büyük sayılar kanunu son derece güvenilirdir, ne kadar büyük bir miktara ulaşırsan, o kadar kesinlik sağlar.

Megabucks'ın büyük ödülü şu anda 10 milyon dolardan başlıyor. Eğer büyük ödül kazanılmadıysa zamanla bu 20 milyon dolara yaklaşıyor, kumarhaneler Megabucks makinelerinde oluşan kuyruğu gördüklerinde IGT'den yeni makineler getirmelerini istemektedirler. 'İnsanlar artık normalde vurması gereken yeri geçti, o halde yakında vuracak diye düşünüyorlar' diyor Baerlocher.

Ancak bu mantık hatalıdır. Kumar makinelerinde oynanan her bir oyun bağımsız bir olaydır. Ödül 10 $, 20 $ hatta 100 milyon dolarken de kazanma ihtimaliniz aynıdır ama içgüdüsel olarak büyük ödül arttığı zaman makinelerin artık bunu verme eğiliminde olduğuna inanılır. Büyük ödülün 'zamanının gelmiş' olması *kumarbaz safsatası* olarak bilinir.

Kumarbaz safsatası inanılmaz güçlü bir insan dürtüsüdür. Kumar makineleri insanların zaaflarından yararlanan bir virüs gibidir, belki de kumarhane oyunları arasında en çok bağımlılığı onların yapması bu yüzdendir. Eğer kısa bir sürede birçok oyun oynamışsanız uzun süre kaybettikten sonra, 'artık bir dahaki sefere kazanacağım' düşüncesine kapılmak çok normaldir. Kumarbazlar makinelere çok ödeme yapmalarına göre 'sıcak' ya da 'soğuk' gibi isimler verirler. Bu da oranlar hep aynı olduğu için bir saçmalıktır. Yine de insanın neden bir parça plastik ve metali insanlaştırıp tek kollu korsan adını verdiklerini anlayabilirsiniz. Kumar makinelerinde oynamak yoğun ve samimi bir

deneyimdir, hazırlanırsınız, ona parmağınızın ucuyla dokunursunuz ve dünyanın geri kalanını artık umursamazsınız.

Beynimiz rastgeleliği anlamakta yetersiz olduğu için olasılık, matematiğin paradokslar ve sürprizlerle en dolu dalıdır. Biz içgüdüsel olarak şablonları olaylara uyarlarız. Bir makine oyuncusunun uzun bir kayıp serisinden sonra artık makinenin ödeme yapacağına inanmasını küçümseyebiliriz, ama kumarbaz safsatası psikolojisi kumar oynamayanlarda bile görülmektedir.

Aşağıdaki parti hilesini düşünün. İki kişi alın ve bunlardan bir tanesine 30 kere yazı tura atıp gelen yüzleri sırasıyla yazmasını söyleyin. Diğeri de hayalinde 30 kere yazı tura atsın ve hayal ettiği yüzeyleri yazsın. İki oyuncu yazdıkları kâğıtları kime ait olduğunu söylemeden size versinler. Bunu annem ve üvey babamdan yapmalarını istedim ve sonuç aşağıdaki gibiydi.

Liste 1

Y T T Y T Y T T T Y Y T Y Y T Y Y Y Y T Y T T Y T Y T T Y Y

Liste 2

T T Y Y T T T T T Y Y T T T Y T T Y T Y Y Y Y T Y Y T Y T Y

Bu oyunun amacı, hangi listenin yazı tura atarak ve hangi listenin hayalden yazıldığını anlamanın çok kolay olduğunu göstermek. Yukarıdaki durumda gerçekten yazı tura atılan listenin ikinci liste olduğunu benim için çok açıktı ve yanılmamıştım. İlk olarak en uzun yazı tura sıralamalarına baktım. İkinci listede en uzun 5 tane tura varken birinci listede en uzun 4 tane yazı vardı. 30 yazı tura atışında 5'li bir sıranın gelme olasılığı neredeyse üçte ikidir, öyleyse 30 atışta 5'li bir sıra gelme olasılığı çok daha yüksektir. İkinci liste gerçek para ile

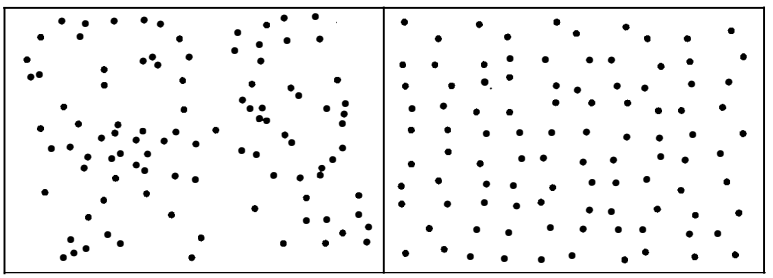
atılmaya çok daha büyük bir adaydı. Aynı zamanda pek çok kişinin ardarda 30 atıştan 5 tanesinin aynı gelmesini rastgele olamayacak kadar planlı bulduklarını biliyordum. Fakat haklı olduğumdan iyice emin olabilmek için iki listede de yazı ve turanın ne sıklıkla değiştiklerine baktım. Parayı her atışınızda yazı veya tura gelme olasılığı bir birine eşit olduğu için, atışların farklı gelme olasılığı da, sıralı gelme olasılığına eşitti. İnsan müdahalesinin bir kanıtı olarak ikinci liste 15 kere değişirken birinci liste 19 kere değişiyordu. Yazı tura attığımızı hayal ederken beynimiz normalde meydana gelebilecek değişimlerden çok daha fazla değişim yapmaya eğilimlidir. Birkaç yazıdan tekrar yazı gelme olasılığı hâlâ eşit olsa da beynimiz otomatik olarak bunu telafi etmek için tura geldiğini hayal etmeye başlar. İşte bu noktada kumarbaz safsatası ortaya çıkmaktadır. Gerçek rastgeleliğin daha önce neyin geldiğiyle ilgili bir hatırası yoktur.

İnsan beyni sahte rastgeleliği imkânsız olarak algılamasa da inanılmaz derecede zor bulur. Ve biz rastgelelikle karşılaştığımızda onu genellikle rastgele değilmiş gibi algılarız. Örneğin, İpod'un şarkıları çalarken kullandığı karıştırma seçeneği rastgele bir olaydır. Fakat Apple bu seçeneği ilk yayınladığında müşteriler makinenin bazı şarkıları kayırıp daha fazla çaldığından şikâyetçi oluyorlardı. Müşteriler kumarbaz safsatası durumundan muzdariptiler. Eğer İpod'un karıştırma seçeneği gerçekten rastgele ise, çalınacak olan her bir yeni parça öncekinden bağımsız olmalıdır. Para atma deneyimizin de gösterdiği gibi mantığa aykırı gelen uzun tekrarlar normaldir. Eğer şarkılar rastgele seçiliyorlarsa, tamamen olmasa da aynı sanatçının pek çok şarkısının peş peşe çalınması oldukça mümkündür. Apple'ın CEO'su Steve Jobs gelen yakınmalara cevap olarak çok ciddi bir şekilde şunu söylemişti: 'Karıştırma seçeneğini daha fazla rastgele gözükmesi için daha az rastgele yapıyoruz.'

Kumarbaz safsatası neden bu kadar güçlü bir insan dürtüsüdür? Bu tamamen kontrolle alakalıdır. Biz çevremizi kontrol altında tutmayı severiz. Eğer olaylar rastgele gerçekleşirse bunların üstünde kontro-

lümüzün olmadığını hissederiz. Tam tersine bizim olaylar üzerinde kontrolümüz varsa bu olaylar rastgele değillerdir. Bu yüzden olmadıkları halde biz olayları kalıplar içerisinde görmek isteriz. Bu kontrol isteğini kurtarmak için çalışıyoruz. İnsanın kontrol etme ihtiyacı çok derinlere kök salmış bir hayatta kalma içgüdüsüdür. 1970'li yıllarda bakımevindeki yaşlı hastalar üzerinde büyüleyici (ayrıca acımasız) bir deney kontrol içgüdüsünün ne kadar güçlü olduğunu sergiledi. Bazı hastaların odalarını istedikleri gibi düzenlemelerine ve bakmaları için bir çiçek almalarına izin verilmişti. Bazı hastalara ise odalarını nasıl yapmaları söylenmiş ve bakmaları için bir çiçek verilmişti. 18 ay sonraki sonuçlar çarpıcıydı. Odaları üzerinde kontrolü olan hastaların % 15'i ölürken kontrolü olmayan hastaların % 30'u ölmüştü. Kontrol sahibi olduğumuzu hissetmek bizi hayatta tutabilir.

Rastgelelik düzgün değildir. Kendisine boş alanlar ve örtüşme alanları oluşturur.



Rastgele noktalar; rastgele olmayan noktalar.

Rastgelelik neden bazı küçük köylerde doğum kusurlarının diğerlerinden daha fazla olduğunu, neden bazı yollardaki kaza oranının daha yüksek olduğunu ve bazı basketbol oyuncularının neden bazı maçlarda tüm serbest atışları sayıya çevirdiklerini açıklayabilir. Ayrıca neden son on dünya kupasının yedisinin finallerinde en az iki oyuncunun doğum günlerinin aynı olduğunu da açıklayabilir.

2006 Patrick Vieira, Zinedine Zidane (Fransa) 23 Haziran

2002 yok

1998 Emmanuel Petit (Fransa), Ronaldo (Brezilya) 22 Eylül

1994 Franco Baresi (İtalya), Claudio Taffarel (Brezilya) 8 Mayıs

1990 yok

1986 Sergio Batista (Arjantin), Andreas Brehme (Batı Almanya) 9 Kasım

1982 yok

1978 Rene ve Willy van de Kerkhof (Hollanda) 16 Eylül, Johnny Rep, Jan Jongbloed (Hollanda) 25 Kasım

1974 Johnny Rep, Jan Jongbloed (Hollanda) 25 Kasım

1970 Piazza (Brezilya), Pierluigi Cera (İtalya) 25 Şubat

İlk bakışta bunlar şaşırtıcı tesadüfler serisi olarak gözükseler de, bu durum matematiksel olarak şaşırtıcı bir durum değildir çünkü eğer rastgele seçeceğiniz 23 kişilik bir grupta (örneğin iki futbol takımı ve bir hakem) iki insanın doğum gününün aynı olma olasılığı olmama olasılığından daha yüksektir. Bu fenomen 'Doğum günü paradoksu' olarak bilinir. Bu sonuçta çelişkili hiçbir şey yoktur, fakat bu ortak algıda bir dalgalanmaya neden olur çünkü yirmi üç sayısı insana saçma gelecek kadar küçük görünür.

Doğum günü paradoksunun ispatı, bu bölümün başında yaptığımız zarın belirli kombinasyonlarda atılmasıyla ilgili yaptığımız ispatlarla aynıdır. Aslında doğum günü paradoksunu 365 yüzeyli bir zar olarak baştan düzenleyebiliriz, 23 atıştan sonra zarın aynı yüzünün iki kere üste gelme olasılığı çok muhtemeldir.

Aşama 1: İki insanın aynı doğum gününü paylaşma olasılığı 1 eksi hiç kimsenin paylaşmama olasılığına eşittir.

Aşama 2: İki kişilik bir grupta aynı doğum günlerini paylaşmama olasılığı $\frac{365}{365} \times \frac{364}{365}$ tir. Çünkü birinci insan 365 gün içerisinde herhangi bir gün doğmuş olabilir ve ikinci kişi birinci kişinin doğmuş olduğu gün haricinde herhangi bir gün doğmuş olabilir. Durumun elverişli olması için Şubat ayının 29 çektiği yılları ihmal ediyoruz.

Aşama 3: Üç kişilik bir grupta kimsenin aynı doğum gününü paylaşmama olasılığı $\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365}$. Dört kişilik bir grupta $\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365}$ olur ve böylece devam eder. Bunları çarptıkça sonuç gittikçe ufalır. Grubunuz 23 kişiyi kapsadığında son sonuç 0.5'e kadar küçülür (tam rakam 0.493).

Aşama 4: Eğer hiç kimsenin doğum günü paylaşmama ihtimali 0,5'ten küçükse, en az iki kişinin doğum günü paylaşma ihtimali 0,5'ten büyüktür (1. Aşamadan dolayı). Bu yüzden 23 kişilik bir grupta en az iki kişinin doğum günlerinin aynı olması olasılığı hiç olmama olasılığından daha yüksektir.

Futbol maçları bu gerçeklerin teoriye uyup uymadığını görmek için mükemmel örneklerdir çünkü sahada her zaman 23 kişi vardır. 23 kişilik bir grupta en az iki kişinin doğum günlerini paylaşma olasılığı 0.507 ya da % 50'nin hemen üstüdür. Buna rağmen bu durum on dünya kupasının yedisinde (van de Kerkhof ikizlerinin dışarıda bırakılması durumunda bile) % 70'lik çarpıcı bir oranla ortaya çıkmıştır.

Bu, kısmen büyük sayılar kanununun bir parçasıdır. Eğer bütün dünya kupalarındaki bütün maçları inceleyecek olsaydım sonuç %

50.7'ye yakın olacaktı. Ancak bir başka değişken daha vardır. Futbolcuların doğum tarihleri yıl üzerine eşit bir şekilde dağıtılmış mıdır? Muhtemelen hayır. Araştırmalar sporcuların yılın belirli bir döneminde doğduklarını göstermektedir, bu dönem okul yılının tam bitimine denk gelmektedir. Böylece bir sonraki yıla kaldıklarından kendi yaşıtları arasında en yaşlı ve en irileri olurlar ve okul sporlarında diğerlerine göre üstünlük sağlarlar. Eğer sporcuların doğum günlerinin yayılmasıyla ilgili bir sapma varsa, daha fazla ortak doğum gününün olması olasılığını bekleyebiliriz. Ve genellikle sapma vardır. Örneğin günümüzde çocukların büyük bir çoğunluğu ya sezaryenle ya da yapay sancı verilerek doğurtulmaktadır. Bu genellikle hafta içlerinde olmaktadır (çünkü doğum personeli hafta sonları çalışmayı tercih etmemektedirler) sonuç olarak doğumlar yıl içerisine rastgele bir dağılım göstermezler. Eğer aynı 12 aylık dönemde doğmuş 23 kişilik bir grup alırsanız, örneğin anaokulundaki bir grup çocuk, öğrencilerin aynı doğum gününe sahip olması olasılığı belirgin bir şekilde % 50,7'den fazla olacaktır.

23 kişilik bir grup bu test için kolay bulunamıyorsa o zaman ailenize bakın. 4 kişilik bir ailede aynı ayda doğmuş 2 kişi olması ihtimali yaklaşık % 70'dir. 2 kişinin aynı hafta doğmuş olması ihtimalinin yüksek olması için 7 kişiye gerek vardır. Ve eğer 14 kişilik bir grubunuz varsa birer gün arayla doğma ihtimali yükselmiş olur. Grup büyüdükçe olasılık ihtimali şaşırtıcı bir şekilde artar. 35 kişilik bir grupta aynı doğum günü olma ihtimali % 85'ken 60 kişilik bir grupta ihtimal % 99'dan fazladır.

Şimdi ise sırada en az doğum günü paradoksu kadar mantığa aykırı bir başka paradoks daha var: Kaç kişilik bir grupta olmalısınız ki gruptan en az bir kişiyle aynı doğum tarihini paylaşıyor olma olasılığınız % 50'den fazla olsun. Bu doğum günü paradoksundan farklıdır çünkü burada belirli bir doğum tarihi vardır. Doğum günü paradoksunda kimin kiminle aynı doğum gününü paylaştığını önemsemeyiz, bizim için önemli olan ortak bir doğum günüdür. Sorumuz şu şekilde yeniden

düzenlenebilir: Belirli tarihi tutturabilmek için 365 yüzeyli zarımızı kaç kere atmalıyız. Cevap 253'tür! Bir başka deyişle grubunuzda eğer aynı doğum tarihini paylaşan en az iki kişi olmasını istiyor ve bundan emin olmak istiyorsanız size gereken en az kişi sayısı 253'tür. Bu büyük bir rakam gibi görünür, 1 ile 365 arasındaki yolun yarısının üzerindedir. Ama yine de rastgelelik kümelenmeler oluşturur—grup bu büyüklükte olmalıdır çünkü üyelerin doğum tarihleri düzenli bir şekilde sıralanmaz. Bu 253 kişinin arasında, sizin doğum gününüzü paylaşmayan ama diğerleriyle paylaşan pek çok kişi vardır ve sizin onları da hesaba katmanız gerekmektedir.

Doğum günü paradoksundan çıkarmamız gereken ders; tesadüflerin tahmin ettiğimizden çok daha fazla meydana geliyor olduğudur. Tıpkı İngiliz ulusal piyangosunda olduğu gibi Alman piyangosunda, kazanma şansınız on dört milyonda birdir. Buna rağmen 1995 ve 1986 yıllarında aynı kombinasyon olan 15-25-27-30-42-48 sayıları büyük ikramiyeyi kazanmıştır. Bu şaşırtıcı bir tesadüf müdür? Pek değildir, böyle şeyler olur. Bu iki kazanan piyango arasında toplam 3016 kere piyango çekilmiştir. Aynı kazanan kombinasyon gelmesi için yapacağımız işlem 3016 kişilik bir grupta en az iki kişinin aynı tarihte doğmuş olması için yapacağımız işlemin aynısıdır ve hesaplamaların gösterdiği burada mümkün olan 14 milyon doğum günü olduğudur. Burada olasılık 0.28 olur. Bir başka deyişle, bu geçen süre içerisinde aynı sayıların tekrar denk gelme olasılığı % 25'ten daha fazladır; öyleyse meydana gelen bu tesadüf aslında abartılacak derecede garip bir olay değildir.

Bundan daha kötüsü, tesadüfleri yanlış anlamak adalet alanında birkaç durumun olumsuz sonuçlanmasına da yol açmıştır. 1964 yılındaki çok ünlü bir Kaliforniya davasında, şahit çalıntı sarı bir araba içerisinde atkuyruklu bir sarışın ile sakallı bir zenci gördüğünü söylemişti. Bu tanıma uyan bir çift yakalanıp suçlanmıştı. Savcı böyle bir çiftin var olma olasılığını hesaplamak için her bir detayın olasılığını

birbiriyle çarptı; sarı araba için $\frac{1}{2}$, sarışın için $\frac{1}{3}$ ve devamı. Savcı böyle bir çiftin olma olasılığını 12 milyonda 1 olarak hesapladı. Bir başka deyişle, ortalama olarak 12 milyon çiftten yalnız bir tanesi böyle bir tanıma uyuyordu. Tutuklanan çiftin suçlu çift olma olasılığının çok büyük olduğunu iddia etti. Çift ceza aldı.

Ancak, savcı yanlış hesap yapıyordu. Onun şahidin tanımına uyan rastgele çifti seçme olasılığını da hesaba katmış olması gerekiyordu. Asıl soru şöyle olmalıydı, tanımda uyan çift için, tutuklanan çiftin suçlu çift olma olasılığı neydi. Olasılık yaklaşık % 40'tı. Yakalanan çiftin tarif edilen çifte benzemesi daha büyük bir oranda tesadüftü.1968 yılında Kaliforniya yüksek mahkemesi, cezanın düşürülmesine karar verdi.

Kumar dünyasına dönecek olursak, New Jersey'den bir kadın 1985-86 yıllarında 4 ay arayla eyalet piyangosunu iki kere kazanmıştı. Böyle bir olasılığın olma ihtimalinin 17 trilyonda 1 olduğu açıklanmıştı. Ancak, her iki durumda da kazanılan tek bir biletin satın alınması ve bu bilete büyük ikramiyenin denk gelmesi olasılığı 17 trilyonda 1 olması doğru bir hesaplama olsa da, bu bir yerde birinin kazanan iki piyango biletini satın almasının mümkün olmayacağı anlamına gelmez. Aslında bu oldukça mümkündür. Purdue Üniversitesi'nden Stephen Samuels ve George McCabe 7 yıllık bir piyango süresi içerisinde Amerika'da iki kere piyango kazanma ihtimalinin yarıya yakın olduğunu hesaplamışlardır. Hatta dört aylık bir sürede ülkenin herhangi bir yerinde iki kere piyango kazanma ihtimalinin 30'da 1 olduğunu hesaplamışlardır. Persi Diaconis ve Frederick Mosteller buna çok büyük rakamlar kanunu derler; 'çok büyük örneklerde, herhangi bir şeyin olma olasılığı mümkündür.'

Matematik diliyle konuşacak olursak, piyangolar yasal bahisler içinde açık ara en kötü olanlarıdır. En cimri kumar makinelerinde bile % 85'lik bir geri ödeme oranı vardır. Buna kıyasla İngiliz Ulusal piyangosunda ödeme miktarı yaklaşık olarak % 50'dir. Piyango, or-

ganizasyon şirketlerine hiçbir risk oluşturmazlar çünkü verilen ödül kazanılan parayla dağıtılmaktadır. Ya da Ulusal Piyango'da olduğu gibi dağıtılan para kazanılanın yarısıdır.

Bununla birlikte, bazı nadir durumlarda, piyango en iyi bahis oyunu olabilir. Bu, piyango katlayarak arttığında kazanılacak miktarın olası tüm numaralar oynandığında harcanan miktardan çok daha fazla olduğunda meydana gelir. Bu gibi durumlarda, bütün olasılıkları kapattığınızda, kazanacağınızdan emin olursunuz. Tek risk başkalarının da kazanan numaralara oynamış olması ihtimalidir, böyle bir durumda ise ödülü kazananlarla paylaşmak zorunda kalırsınız. Her bir olasılığı oynama yaklaşımı bunu yapabilme yeteneğinize bağlıdır, bu teorik ve lojistik olarak önemli bir sorundur.

İngiltere piyangosu 6/49'luk bir piyangodur, bu da her bir bilette 49 sayıdan 6'sını yazabileceğiniz anlamına gelmektedir. Burada 14 milyon olasılık vardır. Bunları aynı olasılıkları tekrar etmeden nasıl yazabilirsiniz. 1960'lı yılların başında Romanyalı ekonomist Stefan Mandel küçük Romanya piyangosu için aynı soruyu kendine sormuştu. Bu sorunun cevabı açık değildi. Mandel birkaç yıllık bir çalışmanın ardından bunu başardı ve 1964 yılında piyangoyu kazandı (Aslında, bu olayda Mandel bütün olasılıkları oynamadı çünkü bunun için çok para gerekiyordu. Bunu başarabilmek için en azından 5/6 garanti edecek ek bir metot olan 'yoğunlaşmayı' kullandı. Genellikle 5 tutturmak ikinci büyük ödülü kazanmanız anlamına gelir fakat Mandel şanslıydı ve ilk denemesinde büyük ikramiyeyi kazanmıştı). Mandel, kazanabilecek kombinasyonları oluşturmak için kullandığı algoritmayı 8000 dosya kâğıdına yazdı. Bundan kısa bir süre sonra ilkin İsrail'e sonra da Avustralya'ya göç etmiştir.

Mandel Melbourne'de iken, uluslararası bir bahis şirketi kurdu, alınabilecek her bir olasılığı aldığından emin olabilmek için üyelerinden para topladı. Dünya çapında harcayacağından üç kat fazla ödülü olan bütün devretmiş piyangoları takip etti. 1992 yılında, bütün kombinas-

yonları her biri 1 $ olan 7 milyon olasılıklı ve büyük ödülü 28 milyon doları aşmış olan Virginia eyaleti piyangosunu buldu. Mandel hemen işe koyuldu. Avustralya'da kuponları bastı, yedi milyon olasılığı bilgisayar vasıtasıyla doldurdu sonra da kuponları uçakla Amerika'ya gönderdi. Büyük ödülü ve 135.000 tane de ikinci ödülü kazandı.

Virginia Eyalet piyangosu Mandel'in kazandığı en büyük ödüldü, Romanya'dan ayrıldığından bu yana 13 tane büyük loto kazanmıştı. ABD iç gelirler servisi, FBI ve CIA birlikte sendikanın Virginia piyangosunu kazanmasını incelediler, fakat yanlış olan hiçbir şey bulamadılar. Aldatmacaymış gibi görünse de, her bir olasılığı satın almanın yasalara aykırı olan bir tarafı yoktu. Mandel şu anda piyango oynama işinden emekliye ayrıldı ve güney pasifikte bir adada yaşıyor.

Rastgeleliğin özellikle yararlı bir görselleştirilmesi, 1888 yılında John Venn tarafından geliştirildi. Venn muhtemelen ünü herkesçe bilinen, muhteşem matematikçiler arasında en aşağı sıradadır. Bir Cambridge profesörü ve İngiliz kilisesi papazı olan Venn, yaşamının ileri yaşlarının büyük bir kısmını üniversitenin 1900 yılı öncesi 136.000 mezununun biyografilerini derleyerek geçirmiştir. Uzmanlık alanının sınırlarını ilerletmezken, yine de farkında olmadan, mantıksal iddiaları kesişen çemberlerle anlatan çok sevimli bir metot geliştirdi. Leibniz ve Euler önceki yüzyıllarda bunun benzeri çalışmalar yapmış olsalar da şema ismini Venn'den aldı. Çok az bilinen şey ise, Venn'in rastgeleliği göstermek için aynı derecede dayanılmaz bir yöntem düşündüğüdür.

Boş bir sayfanın tam ortasında bir nokta düşünün. Noktadan gidebileceğiniz mümkün olan sekiz nokta vardır; kuzey, kuzeydoğu, doğu, güneydoğu, güney, güneybatı, batı ve kuzeybatı. Her bir yöne 0 - 7 arası bir numara verin. 0 ile 7 arasından rastgele bir sayı seçin. Hangi numara geldiyse o doğrultuda bir çizgi çekin. Bir yol oluşturmak için bunu tekrar edin. Venn bunu, bildiği en öngörülemez sayı dizisiyle yaptı; pi sayısının ondalık devamıyla (1415'ten başlayarak 8'ler ve

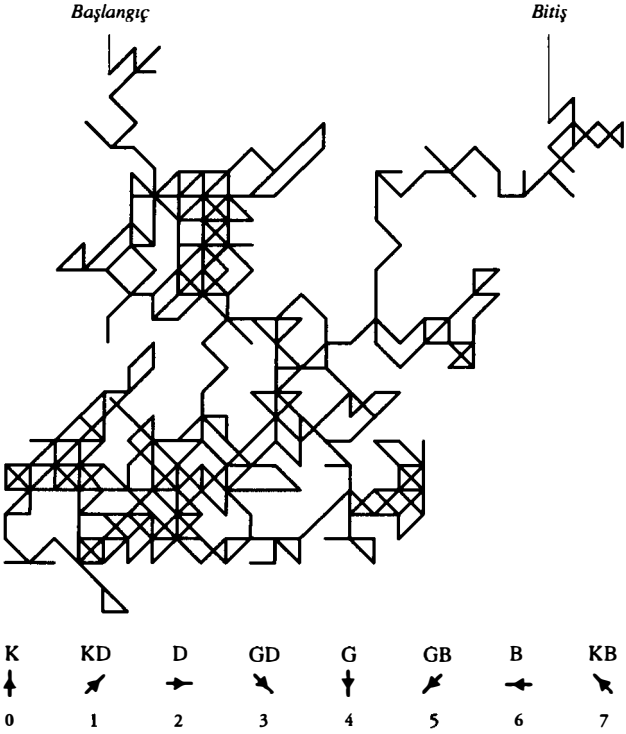
9'lar da dâhil olmak üzere). Sonuç olarak ortaya çıkan, rastgeleliğin oldukça kayda değer bir grafiğiydi.

Venn'in krokisi 'rastgele yürüyüş'ün ilk grafik resmi olduğu düşünülmektedir. Buna genellikle 'ayyaş yürüyüşü' adı verilir çünkü orijinal nokta yerine bir lamba direğini ve izlenen yolu da bir sarhoşun rastgele sendelemeleri olarak hayal etmek çok daha keyiflidir. Sorulması gereken en belirgin soru, sarhoşun düşüp bayılmadan önce ne kadar ileri gideceğidir. Ortalama olarak ne kadar yürürse o kadar uzağa gidecektir. Aldığı mesafenin uzunluğu yürürken geçirdiği zamanın karekökü ölçüsünde artar. Öyleyse, eğer bir saat sendelemenin ardından lambadan sadece bir blok uzaklaşabildiyse, iki blok uzaklaşması dört saat, üç blok uzaklaşması dokuz saat sürecektir.

Ayyaş rastgele yürürken, daireler çizdiği ve izleri üzerinden geçtiği vakitler de olacaktır. Ayyaşın en sonunda başladığı lamba direğine geri dönme şansı ne kadardır? Cevap şaşırtıcı bir biçimde % 100'dür. Yıllar boyunca en ücra köşelerde başıboş gezse de kesin olan şey, eğer yeterince zaman tanırsanız, ayyaş eninde sonunda başladığı yere geri dönecektir.

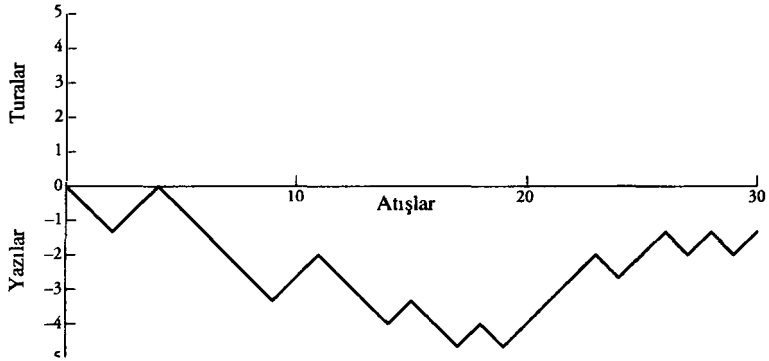
Ayyaşın üç boyutlu hareket ettiğini düşünün. Buna kafası karışmış arı vızıltısı denir. Arı, uzaydaki sabit bir noktadan başlar ve daha sonra sabit bir mesafe içinde rastgele bir yönde düz bir hat üzerinde uçar. Arı durur, biraz kestirir, sonra aynı mesafe içerisinde rastgele bir yöne doğru vızıldayarak uçar. Ve böylece devam eder. Peki arının tekrar başladığı noktada vızıldama ihtimali nedir? Cevap ise sadece 0.34 bir başka deyişle üçte birdir. Garip bir şekilde iki boyutta bir ayyaşın başladığı lamba direğine dönmesi kesinken, arının sonsuza kadar etrafta vızıldaması ve eve dönmesinin pek mümkün gözükmemesi çok daha gariptir.

Luke Rhinehart'ın çok satan romanı '*Zar Adam*'da, romana adını veren karakter yaşamıyla ilgili kararları zar atarak vermektedir.

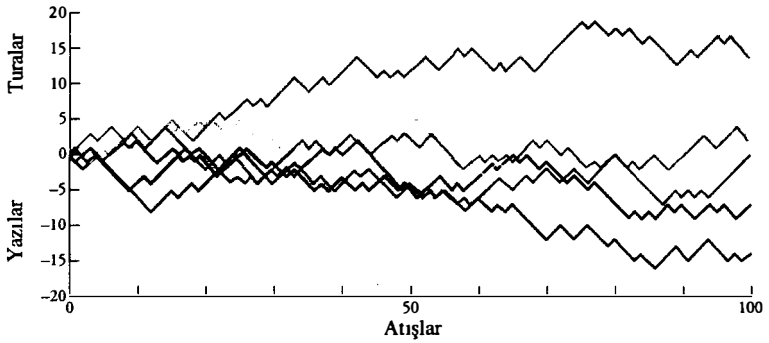


Rastgele yürüyüş ilk olarak John Venn'in Şansın Mantığı *adlı kitabının 3. Baskısında (1888) ortaya çıkmıştır. Yürüyüş yönlerinin kuralı (benim eklerimde) pi sayısının ondalık basamaklarından sonra gözüken 0-7 basamaklarını takip eder.*

Bir Madeni Para Adam'ın kararlarını yazı tura atarak aldığını düşünün. Diyelim ki bu adam yazı atarsa bir sayfa öne gitsin, tura atarsa bir sayfa geriye gitsin. Madeni Para Adam'ın izleyeceği yol, ayyaş adamın yolunun tek boyutlusudur, aynı çizgi üzerinde yalnızca ileri, geri hareket edebilir. Geçtiğimiz sayfalarda 30 kere yazı tura atma sonuçlarının verilmiş olduğu Liste 2'nin çizimini yaparsak aşağıdaki grafiği elde ederiz.



Çizgi, vadiler ve tepelerden oluşan bir çizgidir. Eğer bu çizgiyi çok daha fazla ilerletecek olursanız bir eğim ortaya çıkar. Çizgi aşağı yukarı yönlerde büyük salınımlar gösterir. Madeni Para Adam başlangıç noktasında her iki yöne doğru daha uzağa yol alır. Aşağıdaki yolculuk 6 tane para adamın yüz kere yazı tura atmasıyla ortaya çıkmıştır



Eğer bir doğrultuda başlangıç noktasından belirli bir uzaklıkta bir engel koyduğumuzu düşünürsek, Madeni Para Adam'ın o engele çarpma olasılığı % 100'dür. Bu çarpışmanın kaçınılmaz oluşu kumar kalıplarını analiz ederken bizim için son derece eğiticidir.

Madeni Para Adam'ın rastgele hareketini fiziksel yolculuk yerine onun bir banka hesabını temsil etiğini söyleyelim. Ve oynadığımız kumar da yazı tura olsun. Yazıda 100 £ kazansın, turada 100 £ kaybetsin. Bankadaki parasının değeri artan miktarlarda aşağı ve yukarı salınımlar gösterir. Ve Madeni Para Adam'ın oynamasına engel olacak tek şeyin hesabının 0 £ değerine düşmesi olsun. Biz Madeni Para Adam'ın o noktaya gelişinin kesin olduğunu biliyoruz. Başka bir deyişle; para adamımız daima iflas edecektir. Nihai yoksullaşmanın kesin olduğu bu olgu, *kumarbazın çöküşü* olarak bilinir.

Elbette hiçbir kumarhanenin bahisleri yazı tura (geri ödemesi % 100'dür) kadar cömert değildir. Eğer kaybetme şansı kazanma şansından daha fazlaysa, rastgele yürüyüş haritasının yönü yatay bir eksende hareket etmekten çok aşağıya doğru kayar. Bir başka deyişle iflas etme hızı artmış olur.

Rastgele yürüyüş kumarın neden zenginlerden yana olduğunu açıklar. İflas etme sürenizin çok daha uzun olması, rastgele yürüyüş rotanızın zaman zaman üst bölgeye doğru hareket etmesi olasılığı da artırır. Ancak, hem zengin hem de fakir olanlar için kazanmanın sırrı, nerede durmak gerektiğini bilmektir.

Rastgele yürüyüş matematiği kaçınılmaz olarak bazı kafa patlatan paradokslar içerir. Bir önceki sayfadaki Madeni Para Adam'ın yazı tura atışlarının sonucuna göre hareketinin verildiği grafikte, yürüyüşün yatay ekseni düzenli olarak keseceği sonucu beklenebilir. Yazı tura size % 50 şans verdiği için, biz Madeni Para Adam'ın iki bölgede de eşit zaman geçirdiğini beklemeliyiz. Aslında bunun tam tersi doğrudur. Eğer para sonsuz sayıda atıldıysa, Madeni Para Adam'ın bölge değiştirme sayısı en büyük ihtimalle sıfırdır, bir sonraki en muhtemel sayı 1, sonra 2 olur ve böyle devam eder.

Sınırlı sayıda fırlatmalar için hâlâ bazı garip sonuçlar vardır. William Feller eğer bir yıl boyunca bir parayı her saniye atarsak, Madeni Para Adam'ın haritanın bir tarafında 364 gün 10 saatten fazla kalması

ihtimalinin 20'de 1 olduğunu hesaplamıştır. *Olasılık Teorileri ve Uygulamalarına Giriş* adlı eserinde 'Çok az insan, mükemmel bir paranın milyonlarca başarılı denemede yön değiştirmediği saçma sapan diziler oluşturabileceğine inanır, ama bu iyi bir paranın düzenli olarak yapacağı şeydir' diye yazmıştır. 'Eğer modern bir eğitimci ya da psikolog, uzun vadeli tek bir para atma oyununu tanımlayacak olsalardı, paraların büyük bir kısmını uyumsuz diye tanımlarlardı.'

Rastgeleliğin karşıt sezgiselliği saf matematikçiler için hâlâ bir heyecan kaynağı iken, aynı zamanda onursuzluğa da bir davettir. Temel olasılığın anlamını kavrayamamak kolayca dolandırılabileceğiniz anlamına gelmektedir. Eğer bir kere ayartılırsanız, örneğin bebeğinizin cinsiyetini önceden tahmin edeceğini iddia eden bir şirket tarafından, kitaptaki en eski dolandırıcılığın kurbanı olmuşsunuzdur. Benim *Bebek Tahmini* verdiğim, doğacak bebeklerin kız ya da erkek olacağını öngören bilimsel bir formül yazmış bir şirket kurduğumu düşünün. Bebek Tahmini Şirketi annelere doğacak bebeğin tahmini için bir fiyat belirler. Formülün inanılmaz derecede güvenli ve şirketin CEO'sunun, yani benim, inanılmaz derecede hayırsever ve cömert olmam nedeniyle, şirket aynı zamanda sonucun yanlış çıkması ihtimaline karşı size bir geri ödeme vaat eder. Şirketin tahmini için para ödemek iyi bir anlaşmaymış gibi görünür çünkü tahmin ya doğrudur, ya da yanlıştır. Yanlış olması durumunda ise paranızı geri alacaksınızdır. Ancak, ne yazık ki şirketin tahmin formülü yazı tura atmaktan farklı değildir. Yazı için erkek, tura için kız diyelim. Kızlarla erkeklerin oranı 50:50 olduğu için, olasılık bana % 50 şansla doğruyu bulacağımı söyler. Paranın yarısını geri verirken elbette diğer yarısını kendimde tutarım.

Aldatmaca görevini yapmıştır, çünkü anne büyük resmi görememiştir. Anne kendini bir bütünün parçası yerine tek başına bir örnek olarak görmüştür. Hâlâ bebek tahmini şirketleri ayakta ve iyi durumdalar. Her dakika yeni bir bebek ve de yeni bir enayi doğar.

Daha ayrıntılı bir versiyonunda, bu sefer hamile kadınlar yerine aç gözlü erkekleri hedef alalım, süslü bir web sitesi olan şirketimizin adı Hisse Tahmini olsun. Bir yatırımcı e-posta listesine 32.000 posta gönderelim ve çok karmaşık bir bilgisayarla oluşturulmuş formülle hisse senetlerinin değerinin azalıp azalmayacağını hesapladığımızı ilan edelim. Önümüzdeki hafta için postaların yarısına yükseleceğini, yarısına azalacağını yazalım. Endeks ne olursa olsun, 16.000 yatırımcı doğru tahmin postası almış olacaktır. Böylece Hisse Tahmini şirketi bu 16.000 yatırımcıya bir sonraki hafta için tahmin yollar. Tekrar bu tahminlerin 8000'i doğru olacaktır. Eğer Hisse Tahmini önümüzdeki dört hafta boyunca bu şekilde tahmin göndermeye devam ederse 1000 posta altı haftalık ardışık bir süreçte doğru tahmin edilmiş olacaktır. Daha sonra Hisse Tahmini bu yatırımcılara daha çok tahmin almak için ödeme yapmaları gerektiğini duyurur ve şirketler de bunu kabul eder –neden etmesinler– çünkü şirketin o ana kadar aldığı tahminleri oldukça iyidir.

Hisse Tahmini at yarışı tahminlerine, futbol maçlarına ve hatta hava durumuna da uygulanabilir. Eğer tüm olasılıklar kullanılabilirse, en az bir kişi tüm maçlar, yarışlar ya da güneşli günler hakkında doğru bilgilendirilmiş olur. Bu kişi şöyle düşünür 'Vay be! Böyle bir kombinasyonun doğru olması olasılığı ancak milyonda birdir' ama eğer tüm olasılıkların kapsandığı bir milyon posta gönderildiyse bir yerlerde birileri muhakkak doğru postayı almış olacaktır.

İnsanları dolandırmak hem ahlak dışıdır hem de yasalara aykırıdır. Ancak, kumarhanelerdeki durum genellikle haklı nedenlere bağlanmaktadır. Matematikçilere göre, oranları alt etmek için çabalamak bir boğaya kırmızı bir bez parçası göstermeye benzer ve bunu başarabilenler onurlu bir gelenekten gelirler.

İşe girişme yöntemlerinin ilki dünyanın mükemmel olmadığının farkına varmaktır. Joseph Jagger, Lancashire pamuk fabrikasında bir

makine teknisyeniydi ve kumarhanelerdeki rulet tekerleklerinin dönüşünün mükemmel olamayabileceğini anlayacak kadar da Victoria dönemi mühendislik bilgisine sahipti. Eğer çark mükemmel bir dönüş sergilemiyorsa bazı sayıların diğerlerine göre daha fazla gelebileceğini sezmişti. 1873 yılında 43 yaşındayken teorisini test etmek için Monte Carlo'yu ziyaret etti. Jagger kendisine 6 yardımcı tuttu ve her birini kumarhanedeki altı rulet masasına yerleştirdi ve her birine bir hafta boyunca gelen bütün rakamları not etmelerini söyledi. Rakamların analiz edilmesi sonucunda, bir tekerleğin gerçekten de kusurlu olduğunun farkına vardı. Bu tekerlekte altı sayı diğerlerine oranla daha fazla gelmişti. Bu sık gelen sayıların diğerlerine göre avantajı yüzlerce oyun göz önüne alındığı zaman ortaya çıkacak kadar küçüktü.

Jagger bahislerine başladı ve bir günde yaklaşık 70.000 $ kazandı. Kumarhane sahipleri sonunda onun sadece tek bir masada kumar oynadığını fark ettiler. Jagger'ın hamlesine karşılık olarak bütün tekerleklerin yerlerini değiştirdiler. Jagger yönetimin ne yaptığını anlayana kadar kaybetmeye başlamıştı. Sonra tekrar bozuk tekerleğin olduğu masaya yöneldi çünkü tekerleğin üzerinde ayırt edici çizikler vardı. Tekrar kazanmaya başladı ve kumarhane sahiplerinin çarkları ve üzerindeki rakamları her gün değiştirmeye başlamasıyla oynamayı bıraktı. Bu arada Jagger zaten 325.000 $ kazanmıştı ve bu onu bugünün parasıyla milyoner yapıyordu. Evine geri döndü, fabrikadaki işini bırakıp gayrimenkul yatırımcılığına başladı. 1949-1950 yılları arasında Nevada'da, Jagger'ın yöntemi Al Hibbs ve Roy Walford isimli iki bilim adamı tarafından tekrarlandı. 200 $ borç alarak başladıkları oyunu 42.000 $ dolara çevirmişlerdi, bu da onlara çalışmalarına geri dönmeden önce 12 metrelik bir yat alıp 18 ay boyunca Karayiplere yelken açma olanağı sağladı. Kumarhaneler şu anda tekerlekleri normalde olması gerekenden fazla değiştirmektedirler.

Bahisleri kendi lehinize çevirmenin ikinci yolu rastgeleliğin ne olduğunu sorgulamaktır. Belli bir bilgi kümesiyle değerlendirildiğinde

olaylar rastgele olurken daha büyük bir bilgi kümesiyle değerlendirildiğinde rastgele olmayabilirler. Bu matematiksel bir problemi fizik problemine çevirir. Yazı tura atma olayı rastgeledir çünkü yere hangi yüzeyin düşeceğini bilemeyiz, fakat atılan paralar Newton'un hareket yasalarına uymak zorundadır. Eğer atışın hızını ve açısını net olarak biliyorsak, havanın yoğunluğu ve diğer uygun fiziksel verilerle paranın hangi yüzeyi üzerine düşeceğini kesin olarak hesaplayabiliriz. 1950'li yılların ortalarında genç bir matematikçi olan Ed Thorp, rulette topun nereye düşeceğini tahmin etmek için hangi bilgilerin gerekli olduğunu tartmaya başladı.

Thorp çalışmalarında Massachusetts Teknoloji Enstitüsü'ndeki çalışma arkadaşı olan Claude Shannon'dan yardım aldı. Ondan daha iyi bir suç ortağı bulmayı hayal bile edemezdi. Shannon bir garaj dolusu elektronik ve mekanik aletleri olan, üretken bir mucitti. Ayrıca bilgisayar gelişimine yol açan çok önemli bir atılım olan bilgi teorisinin fikir babası olan Shannon dünyanın en önemli matematikçilerden bir tanesiydi. İki adam bir rulet tekerleği satın aldı ve Shannon'ın bodrumunda deneylerine başladı. Eğer tekerleğin dış halkasında sabit bir şekilde dönen topun ve topun aksi yönünde dönen iç tekerleğin hızlarını bilirlerse topun hangi bölüme düşeceğini oldukça iyi bir biçimde tahmin edebileceklerini keşfettiler. Kumarhaneler oyunculara top atıldıktan sonra da bahis oynattıkları için, Thorp ve Shannon'ın yapması gereken tek şey krupiye bahisleri kapatmadan önceki birkaç saniye içerisinde topun hızını ölçüp gerekli hesaplamaları nasıl yapacaklarını bulmaktı.

Kumar, bir kez daha bilimin bir adım ileri gitmesine sebep olmuştu. Matematikçiler Rulet oyununu doğru tahmin edebilmek için dünyanın ilk giyilebilir bilgisayarını yaptılar. Makine cebe sığacak boyuttaydı, bir kablo anahtarın bulunduğu ayakkabıya iniyordu, diğer bir kablo ise kulaktaki bezelye büyüklüğündeki bir mikrofona çıkıyordu. Bilgisayarı taşıyan kişinin anahtara dört defa basması gerekiyordu, tekerlek

üzerindeki bir nokta referans noktasından geçtiğinde, tekerlek tam bir tur attığında, top aynı noktadan geçtiğinde ve top tam bir tur attığında. Bu bilgiler topun ve tekerleğin hızının hesaplanması için yeterliydi.

Thorp ve Shannon tekerleği her biri 5 sayıdan oluşan 8 bölgeye ayırmışlardı (tekerlekte 38 bölge olduğu için bazı bölgeler çakışıyordu). Cep boyutlu bilgisayar bir oktavlık sekiz nota çalıyordu ve müziğin durduğu nota bilgisayarın topun düştüğü bölgeyi gösteriyordu. Bilgisayar topun hangi bölmeye düşeceğini kesin olarak hesaplayamıyordu ama bu gerekli de değildi. Thorp ve Shannon'un istediği, rastgele yapılan tahminden daha kesin bir hesap yapabilmekti. Bilgisayarı kullanan kişi, çipleri kulaklıktan duyduğu notaya ait olan beş rakama yerleştiriyordu (bu rakamlar tekerlek üzerinde birbirlerine bitişikken çuha üzerinde birbirinden ayrı noktalarda durmaktadır). Bu yöntem şaşırtıcı bir kesinliğe sahipti tek sayılık bahisler için, her bir 10 $ bahiste beklenilen kazanç 4.4 $ oluyordu.

Thorp ve Shannon deneme yapmak için Las Vegas'a gittiklerinde bilgisayarı çalıştırmak tehlikeliydi. Şüphe uyandırıcı gözükmemeleri gerekiyordu, kulaklık kabloları dışarı fırlamıştı ve kablolar o kadar hassastılar ki sürekli kırılıyorlardı. Sistem yine de çalıştı ve küçük bir küme olan bahislerini birkaç kaç kat arttırmayı başardılar. Thorp pratikte çok belirgin olmasa da ruleti teoride yenmiş olmakla yetinmişti çünkü başka bir kumar oyununa yaptığı saldırı da çok daha büyük başarı elde etti.

Blackjack ya da diğer ismiyle 21, bir kart oyunudur va amaç elde üst değer olan 21'e mümkün olduğunca yakın bir el tutmaktır. Kartları dağıtan kişi aynı zamanda kendine de bir el dağıtır. Kazanmak için 21'i geçmemek şartıyla dağıtan kişiden daha büyük bir ele sahip olmak gerekir.

Diğer bütün kumarhane oyunlarında olduğu gibi 21 de ev sahibine küçük bir avantaj verir. Eğer Blackjack oynuyorsanız uzun vadeli oyunlarda para kaybedersiniz. 1956 yılında anlaşılması güç istatistik

dergisinde bir makale yayınlandı ve kumarhanelerin oyunda % 62 oranında avantaj sağlayan bir strateji geliştirdiklerini iddia ediliyordu. Thorp Bu makaleyi okuduktan sonra stratejiyi öğrendi ve Vegas ziyaretleri sırasında bunu test etti. Diğer oyunculara göre çok daha yavaş para kaybettiğini fark etti. Blackjack hakkında daha derin düşünmeye karar verdi ve bu karar hayatını değiştirecek karardı.

Ed Thorp şu anda 75 yaşında ama ben onun yarım yüzyıl öncekinden daha farklı göründüğünden şüpheliyim. İnce, uzun boyunlu, kendine özgü bir siması var, temiz öğrenci tıraşlı, gösterişsiz gözlükler takıyor ve sakin dik bir duruşu var. Thorp Vegas'tan döndükten sonra dergideki makaleyi tekrar okudu. 'Makaleyi okur okumaz, oynanan kartları takip ederek oyunu nasıl kazanabileceğini hemen fark ettim' dedi o günleri hatırlayarak. Blackjack ruletten farklıdır çünkü kâğıtlar dağıtıldığında oranlar değişir. Rulette 7 gelmesi olasılığı her turda 38'de 1'dir. BlackJack'de ilk dağıtılan kâğıdın as olması ihtimali $\frac{1}{13}$'tür. Eğer ilk dağıtılan kâğıt as ise bir sonra dağıtılan kâğıdın as gelme olasılığı artık $\frac{1}{13}$ değil $\frac{3}{51}$'dir, çünkü artık destede 51 kâğıt ve 3 tane as kalmıştır. Thorp oyuncunun lehine olacak bir bahsin olması gerektiğini düşündü. Artık sorun sadece bu teoriyi bulmaktı.

52 kartlık bir deste için 52 x 51 x 50 x 49 x... x 3 x 2 x 1 sayısı kadar sıralanma ihtimali vardır. Bu rakam yaklaşık 8×10^{67} ya da 8'den sonra 67 tane sıfırdır. Sayı o kadar büyüktü ki rastgele karılmış iki destedeki kâğıtların aynı sırada gelme olasılığı dünya tarihi boyunca insanlar Büyük Patlama'dan bu yana kâğıt oynasalar bile mümkün değildir. Thorp çok sayıda permütasyon olduğu ve bu kadar permütasyonu insan zekâsının herhangi bir sistemle ezberlemesinin mümkün olmadığını biliyordu. Bunun yerine kumarhanenin avantajının dağıtılmış olan kâğıtlara göre nasıl değiştiğine bakmaya karar verdi. İlk yapılan bilgisayarlardan birini kullanarak, destedeki tüm

beşlileri –kupa, maça, sinek ve karo– sayan bir oyuncunun destedeki kartlardan olumlu bir tahmin yürütebileceği kanısına vardı. Thorp'un sisteminde, kalan kartlara göre Blackjack % 5 oranında kazanılabilir bir oyun şeklini alıyordu. Thorp 'Kâğıt Saymayı' icat etmişti.

Teorisini yazdı ve bunu Amerikan Matematik Topluluğuna (AMS) sundu. 'Özeti sunduğumda herkes bunun saçma olduğunu düşündü' diye anımsadı. 'Bilim dünyasında, herhangi bir kumar oyununun yenilemeyeceği kutsal bir düşünce gibiydi ve bu düşünce yüz yıllar boyunca yapılmış araştırmalar ve analizlerden çok daha büyük bir destek görüyordu.' Kumarhanedeki oyunları yenebileceğinin kanıtı, çemberin kareye çevrilmesi kanıtıyla kıyaslandığında, kişinin çılgınlığının çok daha kesin bir kanıtıydı. Neyse ki AMS kabul komitesi üyelerinden biri Thorp'un eski bir sınıf arkadaşıydı ve özeti kabul edildi.

Thorp 1961 yılı ocak ayında, AMS'nin Washington kış toplantısında raporlarını sundu. Bu yerel bir gazete olan *Boston Globe*'un ön sayfası dâhil olmak üzere ulusal basında bir ilk sayfa haber haline geldi. Thorp içlerinde kendisini finanse edip kazancın yarısına ortak olabileceği tekliflerini de içeren yüzlerce telefon ve mektup aldı. New York'tan bir sendika kendisine 100.000 $ teklif etti. New York mektubunun üzerindeki numarayı aradı ve bir ay sonra kapısının önüne bir Cadillac yanaştı. Arabanın içerisinden dışarıya vizon kürklü iki muhteşem sarışın eşliğinde orta yaşlı bir adam çıktı.

Bu adam matematiğe kafası çalışan ve yüksek oranlı bahislerin bağımlısı olan New York mafyası Manny Kimmel'dı. Kimmel Doğum Günü Paradoksu'nu anlayabilecek kadar olasılık öğrenmişti ve en çok sevdiği bahislerden birisi de bir grup insan arasında aynı doğum gününe sahip olma ihtimaliydi. Kimmel kendisini New York'ta 64 park bölgesinin sahibi olarak tanıtmıştı ve bu doğruydu. Kızları da yeğenleri olarak tanıtmıştı ki muhtemelen değillerdi. Thorp'a Kimmel'ın mafya bağlantısı olduğundan şüphelenip şüphelenmediğini sordum. "O sıralar kumar dünyası hakkında çok fazla bilgiye sahip değildim;

aslına bakarsanız kumarla ilgili tüm bildiklerim teoriden ibaretti ve aynı zamanda suç dünyasını da araştırmamıştım. Kendisini zengin bir işadamı olarak tanıtmıştı ve bunun kanıtları ezici bir şekilde ortadaydı" yanıtını aldım. Kimmel, Thorp'u bir sonraki hafta Manhattan'daki lüks dairesinde Blackjack oynamaya davet etti. Birkaç oyundan sonra Kimmel Kâğıt saymanın işe yaradığına ikna olmuştu. İki adam birlikte bunu denemek için Reno'ya uçtular. 10.000 $ ile başladıkları turlarını 21.000 $ ile sonlandırdılar.

Bir kumarhanede oyun oynuyorsanız, ne kadar kazanacağınızı ya da kaybedeceğinizi belirleyen iki faktör ortaya çıkar. *Oyun Stratejisi* oyunu nasıl kazanacağınızla ilgilidir. *Bahis Stratejisi* ise para yönetimiyle ilgilidir, bahsi ne kadar ve ne zaman koyacağınızı belirler. Örneğin, paranızın tamamını tek bir bahse oynamak mı daha mantıklıdır? Ya da paranızı olabilecek daha fazla küçük bahse bölmek mi daha önemlidir? Farklı stratejiler kazanmayı umduğunuz paralar üzerinde şaşırtıcı derecede büyük etkiler oluşturabilir.

En iyi bilinen strateji 'martingale' diğer adıyla ikiye katlamaydı ve on sekizinci yüzyılda Fransız kumarbazları arasında oldukça popülerdi. Prensip, kaybettiğinde bahsi iki katına çıkarmaktır. Diyelim ki yazı tura oyunu üzerine bahse giriyorsunuz. Yazıda 1 dolar kazanıp turada 1 dolar kaybediyorsunuz. Diyelim ki tura geldi ve 1 dolar kaybettiniz. Bir sonraki oyun için 2 dolar bahis oynamalısınız. İkinci oyunda kazanmak size 2 dolar kazandırır, böylece ilk oyunda kaybettiğiniz 1 doları geri kazanırsınız ve 1 dolar kâra geçersiniz. Diyelim ki ilk 5 bahiste kaybettiniz:

1 dolar kaybettiniz, sıradaki bahis 2 dolar.
2 dolar kaybettiniz sıradaki bahis 4 dolar.
4 dolar kaybettiniz sıradaki bahis 8 dolar,
8 dolar kaybettiniz sıradaki bahis 16 dolar
16 dolar kaybettiniz

1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 dolar kayıptasınız, bir sonraki turda 32 dolar bahis yapıp kazandığınızda kaybettiğiniz 31 doları geri kazanır ve 1 dolar kâra geçersiniz. Fakat bu kadar büyük rakamları riske etmek yerine asıl bahis olan 1 dolarla da devam edebilirsiniz.

Martingale'in kesinlikle bir cazibesi vardır. Oranın hemen hemen 50:50 olduğu bir oyunda, örneğin yaklaşık olarak % 47 olasılığı olan rulette kırmızıya oynamak gibi, büyük bir olasılıkla uygun bir miktarda kazanç sağlarsınız ve böylece devam etmek size iyi bir şans verebilir. Fakat Martingale sistemi bu kadar güvenli değildir. Başlangıçta kazanırsanız bu küçük miktarlarda olur. Ve bildiğimiz üzere 30 yazı tura atışında 5 kere aynı yüzeyin düşme ihtimali oldukça fazladır. Eğer bahsinize 40 dolar ile başlar ve 5 kere kaybederseniz bir sonraki bahsiniz 1280 dolar olmak zorundadır. Peppermill kumarhanesinde bunu yapmanız mümkün değildir çünkü en yüksek bahis 1000 dolardır. Kumarhanelerdeki maksimum bahis kuralı Martingale gibi sistemleri engellemek içindir. Martingale sistemi kayıplarındaki kuvvetsel artış sıklıkla, kaybettiklerinizi kazanmanızdan, iflasınızı hızlandırmaktadır. Sistemin en ünlü şampiyonu, 18. yüzyıl Venedik çapkını Giacomo Casanova bunu zor yoldan öğrendi. Bir keresinde, 'hâlâ martingale oynuyorum, fakat o kadar şansızım ki elimde tek bir pul bile kalmadı' demişti.

Yine de Peppermill kumarhanesinin rulet masasında 10 dolar bahisle kırmızı renge martingale oynarsanız, eninde sonunda 10 dolar kazanmamak için gerçekten çok şanssız olmanız gerekir. Sistem sadece üst üste altı kez kaybederseniz çöker. Bunun olma olasılığı ise yalnızca 47'de 1'dir. Eğer kazanırsanız kazancınızı nakit olarak alıp oyunu terk etmeniz tavsiye edilir. Çünkü bahislere daha uzun devam ederseniz üst üste kaybetme olasılığı eninde sonunda ortaya çıkacaktır.

Gelin başka bir bahis sistemini ele alalım. Size 20.000 dolar para verildiğini ve bunu rulet oynayarak ikiye katlamanız gerektiği söylendiğini düşünelim. Parayı ikiye katlamak için en iyi strateji nedir? Bütün parayı cesur bir hamleyle tek seferde bahse yatırmak mı, yoksa

ihtiyatlı olup en küçük bahis olan 1 dolarlık olası bahislere yatırmak mı? Başlangıçta düşüncesizce görünse de, bir seferde tüm parayı bahse yatırırsanız, başarma şansınız çok daha yüksektir. Matematik diliyle konuşursak en yerinde olan cesur oynamaktır. Üzerinde biraz düşünürsek daha anlaşılır olur; büyük sayılar kanunu bize uzun oyunlarda kaybedeceğimizi söyler. Oyunu olabildiğince kısa tutmak yapabileceğiniz en iyi şey olacaktır.

Aslında 32 yaşındaki Ashley Revell'in 2004 yılında yaptığı şey tam olarak buydu. Kıyafetleri de dâhil olmak üzere tüm mülkünü sattı ve parası olan 135.300 doları Las Vegas'ta tüm kırmızıya oynadı. Kaybettiğinde en azından Bahsin bir TV realite programında gösterilmesiyle C sınıfı bir televizyon ünlüsü olabilirdi. Fakat top kırmızı 7'ye düştü ve evine 276.600 dolar ile döndü.

Blackjack'de Ed Thorp farklı bir konuyla sunuldu. Onun kart sayma sistemi, oyunun belli bir bölümünde kumarhaneye göre daha avantajlı olunup olunmadığını söyleyebiliyordu. Thorp kendine şu soruyu sordu: Şans kendinden yanayken oynayabileceği en iyi bahis nedir?

Kazanma olasılığının % 55 ve kaybetme olasılığının % 45 olduğu bir bahis düşünün. Basit bir örnekle, oyun çift sayılara ödeme yapıyor ve biz 500 kere oynayacağız. Avantaj sınırı % 10. Uzun vadeli oyunları göz önünde bulundurursak, her 100 dolarlık bahis için kazandığımız rakam 10 dolar olacaktır. Toplam kârı en üst düzeye çıkartabilmek için toplam bahsi de en üst düzeye çıkarmamız gerekmektedir. Bunun nasıl yapılabileceği hemen ortaya çıkmaz, servetimizi en üst düzeye çıkartırken kaybetme şansımızı da en alt seviyede tutmamız gerekir. Bu dört bahis sisteminin çalışma biçimidir;

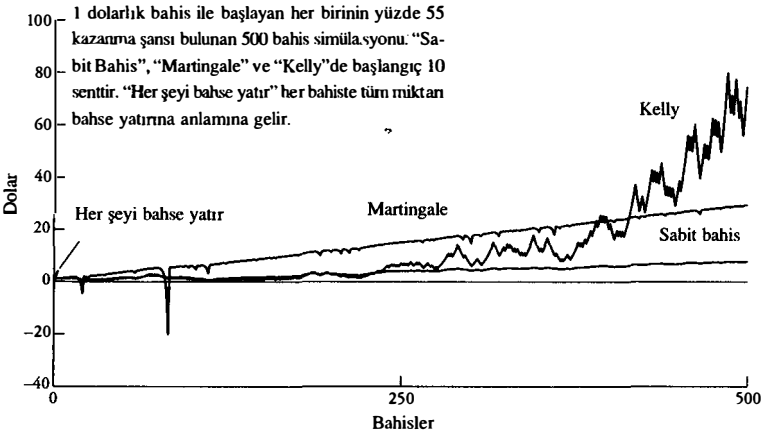
Strateji 1: Her şeyi bahse yatır. Aynı Ashley Revell'ın yaptığı gibi tüm varlığını tek seferde bahse yatır. Kazanırsan paranı ikiye katlarsın kaybedersen iflas edersin. Kazanırsan kazandığının tamamını tekrar bahse yatır. Her şeyi kaybetmemenizin tek yolu

bütün 500 oyunu da kazanmaktır. Bunun olma şansı; kazanma oranının her oyun için % 55 olduğunu düşünürsek 10^{130} ya da 1'den sonra 130 tane sıfır demektir. Bir başka deyişle 500 oyunda iflas etme ihtimaliniz neredeyse kesindir. Görünen o ki uzun süreli oyunlarda bu strateji mantıklı değildir.

Strateji 2: Sabit bahis. Her bir turda belirli bir miktar bahis oynanır. Kazanılınca servet sabit oranda artar. Kaybedince servet aynı oranda azalır. Eğer kazanma sayısı kaybetme sayısından fazlaysa servet toplamda artar, ama artışlar sadece sabit bahis oranının miktarındaki sıçramalarla mümkün olur. Arka sayfadaki şekilde görüldüğü gibi, para çok büyük bir hızla büyümez.

Strateji 3: Martingale. Bu kayıpların ardından bahsi her seferinde iki katına çıkarttığı için sabit bahisten çok daha hızlı bir oranda hareketlilik gösterir fakat beraberinde çok daha büyük risk getirir. Yalnızca birkaç bahis kaybederek iflas edebilirsiniz. Aynı şekilde bu da iyi bir uzun süreli bahis değildir.

Strateji 4: Oransal bahis. Bu durumda, sahip olduğunuz toplam paranın sınırı oranına oynarız. Oransal bahsin birçok çeşidi vardır, fakat sistemde serveti en hızlı arttıran Kelly stratejisidir. Kelly paranızın bir bölümünün oranı ile oynamanızı söyler. Bu koşulda sınır % 10 ve bahis oranları çift sayılardır (ya da 1'e 1) toplam paramızın % 10'una eşitlenir. Yani her bahsimiz toplam paramızın % 10'u kadar olur. Kazanırsanız toplam paranız % 10 artar, böylece bir sonraki bahsin oranı, ilkine oranla % 10 daha büyük olacaktır. Eğer kaybederseniz toplam paranız % 10 oranında azalacaktır, böylece yapacağınız bir sonraki bahsin miktarı ilk bahisten % 10 daha az olacaktır.



Bu çok güvenli bir stratejidir çünkü eğer bir kayıp serisi içine girdiyseniz, yapacağınız bahsin mutlak değeri de küçülür, bu da kayıpların limitli olduğu anlamına gelir. Aynı zamanda, kazanan bir seri yakaladığınızda, bileşik faizde olduğu gibi servetiniz katlanarak arttar. Birbirinden ayrı iki durum da kârlıdır: Düşük risk, yüksek kazanç. Ve görevini yerine nasıl getirdiğine bakalım: Yavaş başlar ama 400 bahis sonrasında diğerlerine göre çok daha fazla öne geçer.

Teksaslı bir matematikçi olan John Kelly Jr 1956 yılında meşhur kumar formülünün ana hatlarını bir kâğıda döktü ve Ed Thorp bunu Blackjack masasında pratiğe geçirdiğinde sonuçlar çok çarpıcı olmuştu. 'Generalin birinin söylediği gibi oraya ilk ve en büyük kuvvetinle sen çık.' Küçük sınırlar ve adil bir para yönetimiyle, çok büyük kazançlar elde edilebilir. Thorp'a hangi yöntemin Blackjack'de para kazanmak için daha önemli olduğunu sordum, kâğıt saymak mı yoksa Kelly kriterini kullanmak mı? 'Sanırım onlarca yıl süren bu sorunun incelenmesi ardından vardığım sonuç' diye cevapladı, 'bahis stratejisi dörtte iki ya da dörtte üçü oluştururken, oyun stratejisi diğer dörtte birini oluşturur. Öyleyse Bahis stratejisi çok daha önemlidir.' Kelly stratejisi daha sonra Thorp'a finansal pazarda 80 milyon doların üzerinde bir servet elde etmesini sağladı.

Ed Thorp kart sayma stratejisini 1962 yılında '*Krupiyeyi Yen*' adlı kitabında duyurdu. Daha sonra 1966 yılında ikinci bir baskı için metodunu geliştirdi, bu da 10 değerindeki kartları saymak demekti (Vale, kız, kral ve on). Her ne kadar on kart oranı beş karttan daha az değiştirse de on değerinde kâğıtlardan daha çok olduğu için avantajları tespit etmek daha kolay oluyordu. *Krupiyeyi Yen* dünya çapında bir milyondan fazla sattı, kumarbaz ordularına ilham kaynağı oldu ve hâlâ olmakta.

Kart sayma tehlikesini ortadan kaldırmak için kumarhaneler çeşitli taktikler denediler. Bunların en yaygını birçok desteyle oyun oynatıp kart sayma işini hem daha zorlaştırıp hem de kârını azaltmaktı. Birçok desteyi tek seferde karıştırmaya yarayan düzeneğe 'profesör durdurucu' adı Thorp'un onuruna verilmişti. Ve kumarhaneler rulette bilgisayarla tahmini kullanmayı engellemek için bir savunma geliştirmeye zorlandı.

Thorp en son, 1974 senesinde Blackjack oynadı. 'Ailece Spokane Dünya Fuarı'na bir geziye gitmiş ve dönüş yolunda Harrah kumarhanesine uğramıştık, çocuklarıma bana birkaç saat süre vermelerini çünkü çıktığımız seyahatin masrafını karşılamak istediğimi söylemiştim.'

'Krupiyeyi Yen' yalnızca bir kumar klasiği değildi. Ekonomi ve finans dünyasında da yankılandı. Thorp'un kitabından esinlenen bir matematikçiler nesli finansal pazar modelleri oluşturup bahis stratejisini bunlara uyguladılar. Bunlardan ikisi, Fischer Black ve Myron Scholes, finansal türevleri nasıl fiyatlandıracaklarını gösteren Wall Street'in en tanınmış (ve adı kötüye çıkmış) denklemi olan Black-Scholes formülünü geliştirdiler. Thorp, akıllıca yatırım yolları bulmak için bankalara çalışan matematikçilerin yani miktar analistlerinin diğer adıyla 'quant'ların kral olduğu dönemde yeni bir dönem başlattı. 'Krupiyeyi Yen' 'quant' tarzında yazılmış ilk kitaptı ve oldukça büyük bir devrime yol açtı' dedi Thorp ve biraz gerekçelendirmeyle ilk 'quant' olduğunu iddia edebilirdi. Bir sonraki kitabı 'Piyasayı Yen' menkul kıymetler piyasa-

sının şekillenmesine yardımcı oldu. 1970'li yılların başında o ve bir iş arkadaşı, herhangi bir piyasa riskini ortadan kaldıran, koruma fonları türevi olan 'piyasa nötrleme' çalışmasına başladılar. O zamandan bu yana Thorp, onu çok zengin eden (en azından bir matematikçi için) birçok matematiksel karmaşık finansal ürünler geliştirdi. Çok bilinen bir koruma fonu yönetmiş olsa da, şimdi sadece kendi ailesi tarafından yönetilen kendi parasıyla yatırım yaptığı bir fonu var.

Thorp'la Eylül 2008'de tanıştım. Newport sahilinde Pasifik Okyanusu'na bakan yüksek bir kulede yer alan ofisinde oturduk. Berrak mavi gökyüzüyle enfes bir Kaliforniya günüydü. Thorp sadece bilimsel anlamda çok mütevazı, dikkatli ve düşünceli değil ayrıca kurnaz ve eğlenceliydi. Sadece bir hafta önce, Lehman Brothers bankası iflas başvurusu yapmıştı. Ona, yıllardan bu yana yaşanılan en büyük mali krizin oluşmasında etkisi olan bazı mekanizmaların yaratılmasında katkısı olduğu için kendini suçlu hissedip hissetmediğini sordum. 'Sorun türevlerin kendileri değil, bu türevlerin düzenlenmesiydi' diye cevapladı, belki de tahminde bulunuyordu.

Bu bana, global finans dünyasının arkasındaki matematik böylesine karmaşık olduğu için, politikacıların ondan tavsiye alıp almadıklarını düşündürdü. 'Hayır, bildiğim kadarıyla olmadı!' diye cevapladı gülümseyerek. 'Eğer gelirlerse onlar için çok miktarda var, ama bunların çoğu aşırı derecede siyasi ve aynı zamanda bir toplumun kültürüne göre.' Eğer sesinizin duyulmasını istiyorsanız, doğu kıyılarında golf oynayıp, bankerler ve politikacılarla yemek yemelisiniz, demek istiyordu. 'Fakat ben Kaliforniya'da durup olaylara daha geniş çerçeveden bakıyorum . . . matematiksel oyunlar oynuyorum. Bu insanların yoluna çıkmak istemezsin, bir kerelik bile olsa.' Thorp dışarıda durduğu konumundan keyif alıyordu. Kendini finans dünyasının bir parçası olarak bile görmüyordu, ama yaklaşık 40 yıldır parçasıydı. 'Kendimi bilgisini mali piyasalara uygulayan bilim adamı olarak görüyorum.' Aslında, geleneksel bilgeliğe karşı verdiği mücadele onun hayatının

konusunu tanımlıyordu ve bunu her gün başarıyla tekrar ediyordu. Ve zeki matematikçilerin her zaman oranları yenebileceğine inanıyordu.

Aynı zamanda, olasılığı böyle entelektüel bir şekilde anlamanın ona birçok konuda karşıt sezgiden uzaklaşmasına yardımcı olup olmadığıyla ilgileniyordum. Daha önce hiç kurban olmuş muydu, örneğin Kumarbaz safsatasına? 'Sanırım öylece hayır demekte oldukça iyiyim, fakat bu epey zamanımı aldı. Hisse senetleri hakkında bilgi almak istediğimde aldığım eğitim çok pahalıya mal olmuştu. Rasyonel sayılmayacak kararlar aldım' dedi.

Ona hiç piyango oynayıp oynamadığını sordum.

'Kötü bahisler mi demek istiyorsun?' dedi.

Öyle bir şey yapmadığını tahmin ettiğimi söyledim.

'Karşı koyamadım. Bir kere denemek zorundasın. Sahip olduğunuz her şeyin eviniz olduğunu varsayalım. Beklenen değer mantığıyla evinizi sigorta ettirmenin kötü bir kumar olduğunu biliyoruz, fakat uzun süre boyunca devamlılık sağlamak için bu ihtiyatlı bir yaklaşım olur.'

Böylece, evini sigortalatıp sigortalatmadığını sordum.

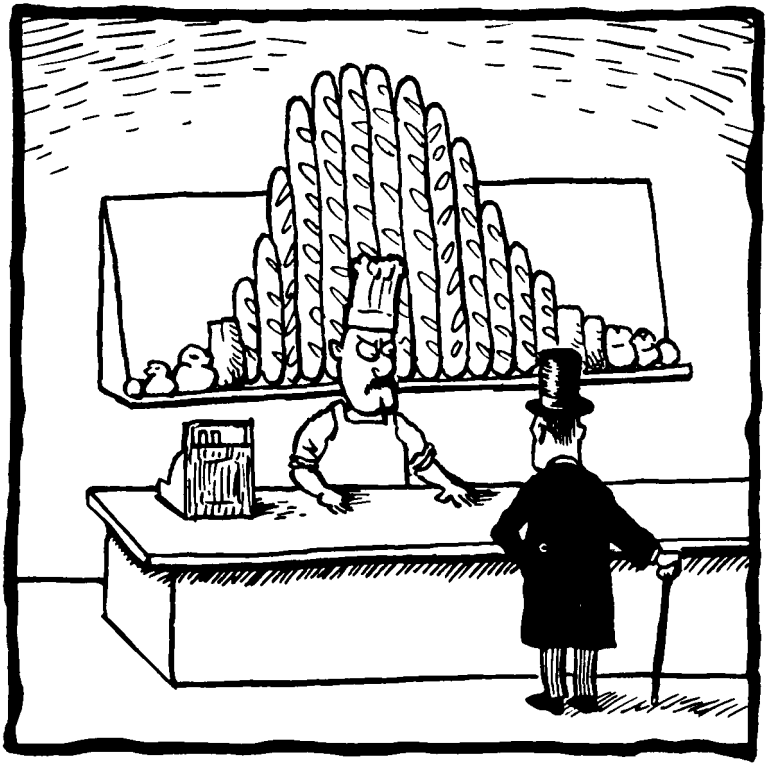
Bir süre durakladıktan sonra 'evet' dedi.

Duraklamıştı çünkü tam olarak ne kadar zengin olduğunu düşünüyordu. 'Eğer yeterince zenginseniz küçük eşyayı sigortalamanıza gerek yoktur. Eğer bir milyarderseniz ve milyonluk bir eviniz varsa, onu sigortalamanız ya da sigortalamamanız önemli değildir, en azından olaya Kelly kriterinden bakıyorsanız. Kendinizi servetinize kıyasla bu küçük kayıp için korumaya almanıza gerek yoktur. Parayı başka yatırımlarda değerlendirmeniz daha akıllıca olur' dedi.

'Gerçekten de evimi sigortalattım mı? Evet, sanırım sigortalattım.'

Thorp'un öldüğü zaman bedenini dondurtacağı ile ilgili bir makale okumuştum. Ona bunun bir kumar olduğunu, üstelik tam da Kaliforniya tarzı olduğunu söyledim.

Pekala, bilimkurgu dostlarından birinin dediği gibi; 'Şehirdeki tek oyun, bu.'



BÖLÜM ON

Her Şey Normal

Yakın bir zamanda bir mutfak tartısı satın aldım. Cam bir kefesi ve mavi aydınlatmalı kolay okunur bir ekranı var. Satın alma sebebim hassas ölçüleri olan özenle hazırlanmış tatlılar yapmak değildi. Evimin yerel uyuşturucu çetelerinin zula evi olması gibi bir niyetim de yoktu. Sadece bir şeyleri tartmakla ilgileniyordum. Tartıyı kutusundan çıkarır çıkarmaz, mahallemdeki fırına, Greggs'e gidip bir tane baget ekmek aldım. Ağırlığı 391 gramdı. Ertesi gün tekrar Greggs'e gittim ve bir baget daha aldım. Bu biraz daha ağırdı ve 398 gramdı. Greggs, İngiltere'de binden fazla şubesi bulunan bir zincirdir. Fincan çayı, köfteli rulolar ve pudra şekerli poğaça konusunda uzmandırlar. Ama benim gözüm sadece bagetlerdeydi. Üçüncü gün bagetin ağırlığı 399 gramdı. Her gün tüm bir baget yemekten çoktan sıkılmıştım ama günlük tartı rutinime devam ettim. Dördüncü baget 403 gram ağırlığındaydı adeta çok büyük bir balık yakalamışım gibi hissedip onu duvara asmak istedim. Elbette ağırlığını sonsuza dek tartamayacağı biliyordum ve haklıydım. Beşinci somun bir yem balığı çıkmıştı, 384 gramdı.

On altıncı ve on yedinci yüzyıllarda Batı Avrupa veri toplama sevdasına tutulmuştu. Termometre, barometre ve perambulator –yol üzerinde ilerlerken mesafeyi ölçen bir tekerlek– gibi ölçüm aletleri hep bu yüzyıllarda icat edilip büyük bir yenilikmiş gibi kullanıldılar. Sonuç elde etmek için etkili bir yazım olanağı sağlayan Arap sayıları en sonunda eğitimli sınıf için faydalı ortak bir kullanım alanına sahiptiler. Sayıların

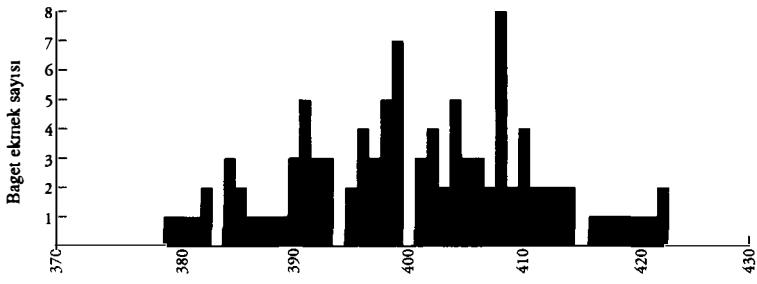
toparlanması medeniyetin zirvesiydi ve gelip geçici bir heves değildi; bu çılgınlık modern bilimin başlangıç noktası oldu. Dünyayı niteliksel olarak değil de niceliksel ifadeler olarak tarif edebilme becerisi çevremizi saran şeylerle olan ilişiğimizi tamamen değiştirdi. Sayılar bize bilimsel araştırmalar için bir dil verdi ve nesnelerin gerçek doğasını daha derinden anlayabileceğimize dair daha derin bir güven kazandırdı.

Günlük ekmek alma ve tartma ritüelimi şaşırtıcı derecede keyifli buluyordum. Greggs'den eve dönerken o günkü bagetin kaç gram geleceğini görmek coşkusuyla hızlı adımlarla yürüyordum. Duyduğum heyecan futbol maçının sonucunu öğrenmek için televizyonu açarken ya da finans piyasasını takip ederken –takımınızın nasıl oynadığını ya da hisselerinizin değerinin ne olduğunu keşfetmek gerçekten heyecan vericidir– duyduğunuzla aynıydı. Bense bu heyecanı bagetler ile yaşıyordum.

Her gün fırına gitme konusundaki bu heyecanımın arkasında ağırlık dağılımının bir tablosunu oluşturabilmek vardı ve onuncu günün sonunda ağırlığın en düşük değerinin 380, en yüksek değerinin 410 gram olduğunu ve 403 gram ağırlığın kendini tekrarladığını görebiliyordum. Dağılımın oldukça geniş olduğunu düşünüyordum. Bagetlerin hepsi aynı dükkândan alınıyordu, fiyatları aynıydı ama en ağırı en hafiften neredeyse % 8 daha ağırdı.

Deneyime devam ettim. Yenmeyen ekmekler mutfağımda yığılmaya başladılar. Yaklaşık bir ay sonra, Greggs'in Somalili müdürü Ahmet ile arkadaş oldum. Bana günlük baget stokunu arttırdığını için teşekkür etti ve karşılık olarak *çikolatalı poğaça* ikram etti.

Ekmek ağırlıklarının tablo üzerindeki dağılımını görmek harikaydı. Herhangi bir bagetin kaç gram geleceğini tahmin edemesem de, toplu halde ele alındığında ortaya bir şablon kesinlikle çıkmıştı. 100 bagetten sonra deneye son verdim, o zamana kadar sadece dört istisnayla 379 gr ve 422 gr gram arasındaki her sayı en az bir kere ortaya çıkmıştı:



Ekmek projesine matematiksel nedenlerle başlamıştım, ama ilginç kişisel psikolojik yan etkiler keşfettim. Her bir somunu tartmadan önce her bir ekmeğe bakıp, rengi, boyu, çevre ölçüsü ve dokusu üzerine –ki günden güne çeşitlilik gösteriyorlardı– düşünüyordum. Kendi kendime şampiyon bir *uzman fırıncı* gibi şöyle diyordum, 'İşte bu ağır bir ekmek' ya da 'kesinlikle ortalama bir somun.' Yanıldığım kadar haklı da çıkıyordum. Ama içler acısı tahmin kayıtlarım baget değerlendirme konusundaki uzmanlık inancımı azaltmıyordu. Aynı şey spor ve ekonomi uzmanlarının başına da geliyor, onlar da rastgele olayları tahmin edemiyorlar ama bunun üzerine kariyer yapıyorlar diye akıl yürütüyordum.

Greggs hakkındaki en şaşırtıcı duygusal tepkileri, ekmekler aşırı derecede hafif veya ağır çıktığında veriyordum. Nadir durumlarda aşırı yüksek ya da aşırı alçak ölçümlerde heyecanlanıyordum. Ekmeğin ağırlığı ekstra özel olduğunda günüm ekstra özel gözüküyordu, sanki bagetlerdeki bu istisnai durum hayatımın diğer yönlerine de aktarılıyormuş gibi. Mantıken, bazı ekmeklerin normalin üzerinde ve bazılarının normalin altında olduğunu biliyordum. Yine de yüksek bir ağırlığın tespiti bana ekstra bir coşku veriyordu. Ruh halimin bir parça ekmek ile bu kadar kolay değişebilmesi korkutucuydu. Batıl bir tarafı olmayan birisi olduğumu düşünürüm ama rastgele değerlerden anlamlar

çıkarına konusunda kendime engel olamıyordum. Bu bana, aslında hepimizin asılsız inançlar konusunda ne kadar eğilimli olduğumuzu hatırlamak için güçlü bir etken oldu.

Sayılar, aydınlanma bilimcilerine bir kesinlik vaadinde bulunmasına rağmen, bu bilimciler her zaman o kadar kesinlik içinde değillerdi. Bazen aynı şey iki kere ölçüldüğünde iki farklı sonuç elde ediliyordu. Bu durum, doğal olaylara açık ve net açıklamalar getirmek isteyen bilimciler için tuhaf bir sıkıntıydı. Örnek olarak Galileo Galilei, teleskopuyla yıldızlar arasındaki mesafeleri ölçtüğü zaman hesaplarının çeşitlilik göstermeye yatkın olduğunu fark etmişti ve bunun sebebi hesaplarındaki hatalar değildi. Sebebi ölçümlerin doğası itibariyle belirsizlik göstermeleriydi. Sayılar umuldukları kadar kesin değillerdi.

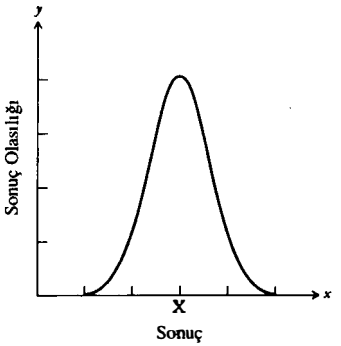
Bagetlerle yaşadığım şey de aynen buydu. Muhtemelen ekmeklerin ağırlığına etki eden birçok etken vardı—kullanılan unun yoğunluğu, fırında kaldığı zamanın uzunluğu, ekmeğin merkezi fırından mahallemdeki dükkâna gelişi sırasında yaptığı yolculuk, havadaki nem ve bunun gibi etkenler. Aynı şekilde, Galileo'nun teleskopunu etkileyen birçok sebep vardı—mesela atmosfer koşulları, kullanılan aletlerin sıcaklıkları ve okumaları kaydederken Galileo'nun ne kadar yorgun olduğu gibi kişisel etkenler.

Yine de Galileo sonuçlardaki çeşitliliğin belirli kurallara uyduğunu görebildi. Farklılıklara rağmen, her bir ölçümün verisi merkezi bir değerin etrafında bir araya toplanma eğilimdeydi ve merkezi değer ile kıyaslandığında, küçük hatalar büyük hatalara göre daha yaygındı. Dağılımın simetrik olduğunu da fark etti—bir ölçümün merkezi değerden daha az olması büyük olması kadar olasıydı.

Aynı şekilde, benim baget verilerim 20 gr eksik ve 20 gr fazla aralıklarla, yaklaşık olarak 400 gramlık bir merkezi değer etrafında biraraya gelen bir ağırlık değeri gösteriyordu. Her ne kadar 100 ba-

getten hiçbiri tam olarak 400 gr gelmese de, yaklaşık olarak 400 gr gelen bagetler 380 gr ya da 420 gram gelen bagetlerden daha fazlaydı. Dağılım oldukça simetrik görünüyordu.

Bu tip bir ölçümün ortaya koyduğu şablonu ilk fark eden kişi Alman matematikçi Carl Friedrich Gauss'du. Şablon çan eğrisi olarak bilinen aşağıdaki eğriyle tarif edilmişti:



Gauss'un grafiğinin biraz açıklanması gerekir. Yatay eksen sonuçlar kümesidir, mesela bagetlerin ağırlığı ya da yıldızların uzaklığı gibi. Yatay eksen bu sonuçların olabilirliliğidir. Böyle bir grafikle ifade edilen eğriye *dağılım eğrisi* adı verilir. Sonuçların dağılımını ve her birinin ne kadar olası olduklarını gösterir. Çan eğrisi aynı zamanda *normal dağılım* ya da *Gauss tipi dağılım* olarak da bilinir. Aslen *hata eğrisi* olarak da tanınır ancak belirgin biçimiyle *çan eğrisi* terimi daha genel bir kullanım haline gelmiştir. Çan eğrisi ortalama bir değerdir, ben burada X ile işaretlediğim yere *ortalama* adını veriyorum. Ortalama en kısa sonuçtur. Ortalamadan uzaklaştıkça, sonuçların olabilirliği azalır. Aynı şeyin iki ölçümünü aldığınızda ve süreçte rastgele bir hata olasıysa aynı sonucu almamanız muhtemeldir. Ama daha fazla ölçümde bulundukça, sonuçların dağılımı çan eğrisine benzemeye başlar. Bu sonuçlar ortalama değerin etrafında bir araya gelirler. El-

bette, bir ölçümler grafiği sürekli bir eğri vermeyecektir—size (benim bagetlerimde görmüş olduğumuz gibi) belirli oranların inişli çıkışlı bir tablosunu verecektir. Çan eğrisi rastgele bir hata tarafından ortaya konan ideal teorik bir şablondur. Daha çok veriye sahip olduğumuzda, sonuçlarımızın inişli çıkışlı tablosu bir eğriye daha çok benzeyecektir.

On dokuzuncu yüzyılın sonlarına doğru Fransız matematikçi Henri Poincaré rastgele bir hataya tabi bir sonuç dağılımının bir çan eğrisine yaklaşacağını biliyordu. Aslında Poincaré, aynı sonuca benim yaptığım gibi bagetler sayesinde, ama farklı nedenlerle ulaştı. Mahallesindeki fırının olması gerekenden hafif ekmekler satarak kendisini kazıkladığından şüphelendi, bu nedenle adalet arzusuyla matematiği harekete geçirdi. Bir sene boyunca her gün 1 kg'lık somun ekmeği tarttı. Poincaré birkaç kere ortaya çıkan 1 kilodan az ekmeğin yolsuzluğa delil olamayacağını biliyordu, çünkü 1 kg olarak belirlenmiş ağırlığın biraz aşağısında ve biraz yukarında olması beklenir bir şeydi. Ve ekmek yapımında meydana gelen ne kadar un kullanıldığı ve ne süre pişirildiği gibi hataların rastgele olması nedeniyle ekmek ağırlığının grafiğinin normal bir dağılım göstereceğini tahmin ediyordu. Bir yıl sonra topladığı verilere bir göz attı. Gerçekten de ekmek ağırlıklarının dağılımı çan eğrisine yaklaşmıştı. Ama eğrinin tepe noktası 950 gramdı. Başka bir ifadeyle ortalama değer, söylendiği gibi bir kilo değil 950 gramdı. Poincaré'nin şüpheleri doğru çıkmıştı. Bu saygın bilim adamı, somun başına günde ortalama 50 gram dolandırılıyordu. Söylenenlere göre Poincaré, Parisli yetkilileri harekete geçirdi ve fırıncıya sert bir uyarıda bulunuldu.

Tüketici hakları konusundaki bu küçük zaferin ardından Poincaré işin peşini bırakmadı. Bir sonraki sene de her gün somunları tartmaya devam etti ve ikinci yılın sonunda grafiğin biçiminin düzgün bir çan eğrisi olmadığını, daha çok sağa doğru giden bir eğri olduğunu gördü.

Tam olarak rastgele olan bir hatanın çan eğrisi üreteceğini bildiği için, satın aldığı ekmeklerde rastgele olmayan bir hata meydana geldiği sonucunu çıkardı. Poincaré, fırıncının pintiliğinden ve daha az ekmek satma alışkanlığından vazgeçmediğine, kendine elinde bulunan en büyük ekmeklerin satıldığına ve eğrideki sapmanın bundan kaynaklandığına karar verdi. Maalesef *fırıncının* müşterisi Fransa'daki en zeki adamdı. Poincaré, durumu polise tekrar bildirdi.

Poincaré'nin fırıncıyı alt etme yöntemi ileriyi gören bir yöntemdi; günümüzde tüketici haklarının teorik tabanını oluşturuyor. Dükkânlar belirlenmiş ağırlıklarda ürünler sattığında, ürünün yasal olarak tamtamına belirlenen miktarda olması zorunlu değildir—Olamaz da, üretim aşaması kaçınılmaz olarak bazı ürünlerin daha hafif, bazılarının ise daha ağır olmasına neden olur. Ticari standart görevlilerinin işlerinden birisi de, satışa çıkan ürünlerden rastgele örnekler alıp ağırlık grafiklerini çıkarmaktır. Ölçümlerini yaptıkları her bir ürün için, ağırlık dağılımları duyurulan ortalamanın çevresinde bir eğri oluşturmalıdır.

Poincaré ekmek somunlarında eğriyi görmeden yarım yüzyıl önce, baktığı her yerde çan eğrisini gören başka bir matematikçi vardı. Adolphe Quételet dünyadaki en etkili Belçikalı olarak bilinir (Bunun bir rekabet alanı olmadığı gerçeği onun başarılarını azaltmaz). Geometri ve gökbilimci olan Quételet, verilere –daha belirgin olarak sayılar içinde şablonlar– bulmaya duyduğu hayranlıkla başka taraflara yönelmiştir. İlk projelerinden birinde Quételet hükümetin 1825 yılında yayınlamaya başladığı ulusal suç istatistiklerini inceledi. Quételet cinayet sayısının her sene neredeyse sabit bir seyirde olduğu fark etti. Kullanılan silahların oranları bile –cinayetler ister silahla, ister kılıçla, ister bıçakla ya da elle işlensin– aşağı yukarı aynıydı.

Günümüzde böyle bir gözlem önemsiz gözükebilir—Gerçekten, kamu kuruluşlarını idare etme biçimimizin temelinde, her sene kıyasla-

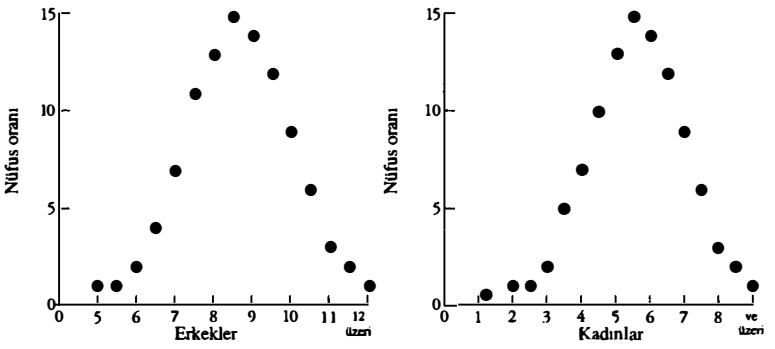
nabilir olmalarını beklediğimiz örneğin suç oranları, sınavlardan geçme oranları ve kaza oranları bulunur. Ama popülasyonu bir bütün olarak kabul ettiğimizde meydana gelen sosyal olayların şaşırtıcı bir düzen izlediğini keşfeden ilk kişi Quételet oldu. Herhangi bir sene kimin bir katil olacağını söylemek imkânsızdır. Ama bir sene içinde kaç tane cinayetin meydana geleceğini oldukça yakın bir isabetle söylemek mümkündür. Quételet, bu bilgilerden kaynaklanan kişisel sorumlulukla ve ek olarak ceza etiği ile ilişkili derin düşüncelere boğulmuştu. Eğer toplum bir makine gibi belirli sayıda cinayet vakası üretiyorsa bu cinayetin bireyin değil de toplumun suçu olduğunu işaret etmez miydi?

Quételet'in düşünceleri orijinal manası sayılarla pek alakalı olmayan *istatistik* kelimesinin kullanımını değiştirdi. Kelime, önceleri devlet ile ilgili genel gerçekleri ifade etmek için kullanılırdı; devlet adamlarının ihtiyaç duydukları bilgi tipleri gibi. Quételet istatistiği, devlet idaresiyle daha az alakalı ve kolektif davranışla daha ilişkili olan daha geniş bir disiplin haline getirdi. Veriler içerisindeki rastgeleliği analiz etmeye yarayan teknikleri veren olasılık teorisindeki gelişmeler olmadan bunu gerçekleştiremezdi. 1853 yılında Brüksel'de istatistik üzerine ilk uluslararası konferansını verdi.

Quételet'in kolektif davranış ile ilgili düşünceleri başka bilim dallarında da yankılarını buldu. Eğer insan popülasyonu verilerine bakarak güvenilir şablonlar bulabiliyorsanız, atom popülasyonun da öngörülebilir bir düzen içinde davrandığını kestirmeniz küçük bir sıçrama olur. James Clerk Maxwell ve Ludwig Boltzmann gaz basıncının farklı hızlarda rastgele hareket eden atomların çarpışması sonucu meydana geldiğini belirten kinetik gaz kuramını ileri sürdüklerinde, Quételet'in istatistikî düşüncelerine minnet borçluydular. Tek bir molekülün bireysel hızının bilinememesine rağmen, toplamda moleküller tahmin edilebilir bir biçimde hareket ederler. Kinetik gaz kuramının kökeni, sosyal bilimlerdeki gelişmelerin kaynağı doğa bilimlerindeki

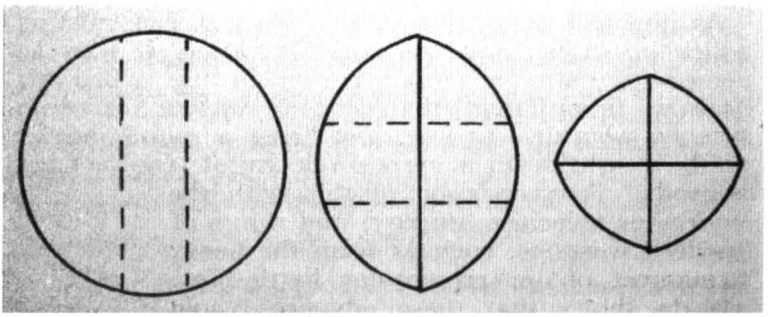
gelişmelerdir genel kuralı için bir istisnadır. Bu durumda bilgi diğer yöne doğru akmıştır.

Quételet'in bütün çalışmalarında yer alan ortak şablon çan eğrisidir. Buna, insan nüfusu ile ilgili veriler incelendiğinde çok sık rastlanır. O zamanlar veri gruplarına ulaşmak bugünkünden daha zordu, bu nedenle Quételet, bir dünya veriyi bir koleksiyoncunun inat ve azmiyle araştırdı. Örneğin, 1814 yılında *Edinburgh Medical Journal*'da yayınlanan 5738 İskoç askerinin göğüs ölçüleriyle ilgili bir çalışmaya rastladı. Quételet sayısal bir grafik hazırladı ve göğüs ölçüsü grafiğinin ortalama olarak yaklaşık 1 metre değeri etrafında çan eğrisi çizdiğini gördü. Başka veri gruplarından erkek ve kadın boylarının da çan eğrisi çizdiğini gösterdi. Günümüzde bile perakende sektörü sırtını Quételet'in keşiflerine dayamıştır. Giyim mağazalarında, orta boy bedenin küçük ve büyükten çok bulunmasının nedeni insan beden ölçüsü dağılımının da kabataslak çan eğrisi çiziyor olmasıdır. Yetişkin İngilizlerin ayakkabı ölçüsü üzerine en son veriler de oldukça benzer bir şekil ortaya koymaktadır:



İngiliz ayakkabı ölçüleri.

Quételet 1874 yılında öldü. On sene sonra, kanalın bu tarafında, İngiltere caddelerinde sıklıkla görünmeye başlayan kel ve bakımlı Victoria tarzı bıyığı olan 60 yaşındaki bir adam, kadınlara aval aval bakıp cebinde detaylı bir araştırma yapıyordu. Bu saha çalışması yürüten saygın bilim adamının adı Francis Galton'dı. Kadın çekiciliğini ölçümlüyordu. Geçen kadınlar hakkındaki düşüncelerini, 'çekici', 'sıradan', 'itici' olup olmadığını gizli bir biçimde kaydetmek için cebine çapraz biçimde bir kâğıt dikmişti. Çalışmasını tamamladıktan sonra ülkenin görünüşü üzerine haritasını çıkardı. En yüksek değerlerin olduğu şehir Londra, en düşük değerlerin olduğu şehir Aberdeen'di.



'Yuvarlak bir keki bilimsel prensiplere göre kesmek' adlı diyagramda Galton nasıl kesilmesi gerektiğini kesikli çizgilerle ve kesikleri düz çizgilerle göstermeyi tercih etti. Bu yöntem geleneksel dilimlemenin (Bunun kusurlu olduğunu söylüyor) neden olduğu kekin içinin kurumasını en aza indiriyor. İşlemin ikinci ve üçüncü aşamalarında kek elastik bir bantla bir arada tutuluyor.

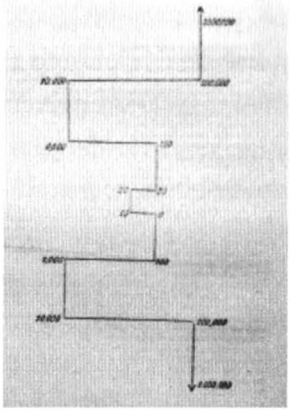
Galton, muhtemelen on dokuzuncu yüzyıl Avrupasında veri toplama konusunda Quételet'den daha takıntılı olan tek adamdı. Genç bir bilim adamıyken, günlük olarak çaydanlığın sıcaklığı, kullanılan kaynar su miktarı ve çayın ne kadar lezzetli olduğuna dair veriler topladı.

Amacı mükemmel lezzetli bir fincan çayın nasıl yapılacağını bulmaktı (Bir sonuca varamadı). Aslında beş çayı matematiği onun için yaşam boyu bir tutku olmayı sürdürdü. Yaşlı bir adamken bir keki mümkün olabildiğince uzun süre taze tutmak amacıyla en iyi nasıl kesileceğini göstermek için *Nature* dergisine yan sayfadaki diyagramı yolladı.

Ve kitabın adında sayı kelimesi bulunduğu için, Galton'ın 'sayı formu' teorisinden –her ne kadar bu bölümün konusuyla çok az alakalı olsa da– bahsetmemek hiç centilmence olmazdı. Galton zeki insanlara hayranlık duyuyordu—% 5'inin sayıları otomatik ve istemsiz olarak zihinsel haritalar biçiminde kafasında canlandırdığını tahmin ediyordu. Bu haritaları açıklamak için *sayı formu* kelimesini uydurdu ve 'Tam olarak tanımlanmış sabit konumlarda' olduklarını ve öyle ki bu bireyler, bir sayıyı kendi zihinsel görüş alanlarındaki doğal yaşam alanıyla ilişkilendirmeden düşünemezler. Sayı formlarının ilginç tarafı genel olarak kendilerine özgü bir desen çizmeleridir. Beklendiği gibi doğrular oluşturmak yerine, genellikle daha ilginç kıvrımlar meydana getiriyorlar.

Sayı formları Victoria tarzı acayipliğin, belki de bastırılmış duyguların ya da uyuşturuculara gösterilen aşırı hoşgörünün esintilerini taşır. Buna rağmen bir asır sonra bilişsel yolların birbirlerini istemsiz uyarmasından meydana gelen nörolojik bir fenomen olan sinestezinin bir çeşit olarak kabul edilip akademik araştırmalara konu olmuştur. Bu durumda, sayılara uzayda bir mekân atfedilir. Sinestezinin diğer türlerinde harflerin, renklerin ya da haftanın günlerinin kişilikleri olduğuna inanılır. Aslına bakılırsa, Galton, sayıların insanlardaki sayı formalarını eksik hesaplamıştır. Günümüzde % 12 kadarımızın sayıları bu şekilde tecrübe ettiği düşünülmektedir.

Ama Galton'ın asıl tutkusu ölçümler üzerineydi. Londra'nın merkezinde, halktan insanların geçerken uğrayıp boylarının, kilolarının, kavrama güçlerinin, soluk alma şiddetlerinin, görüş mesafelerinin Gal-



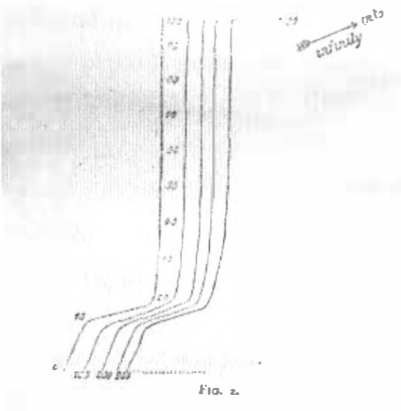
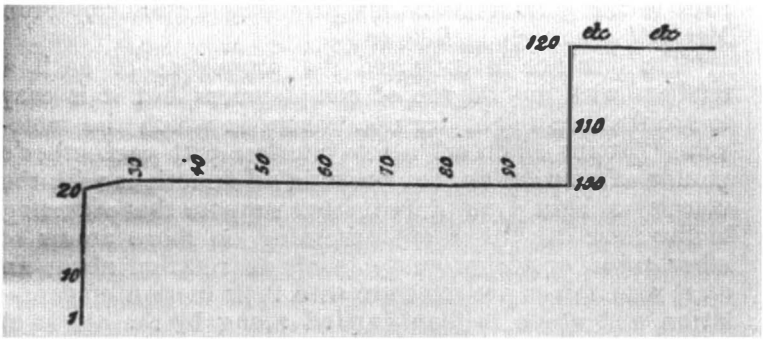
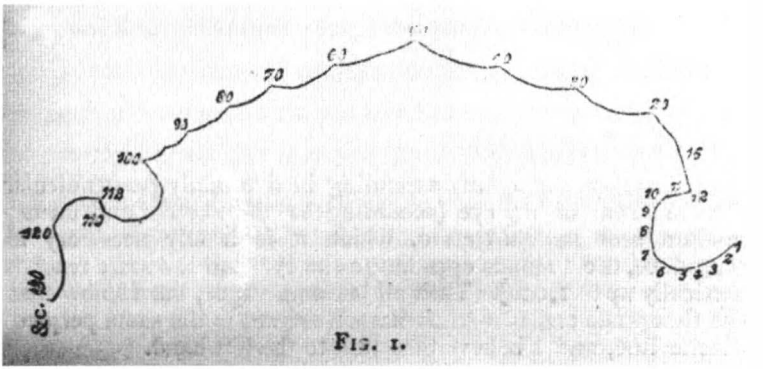


Fig. 2.





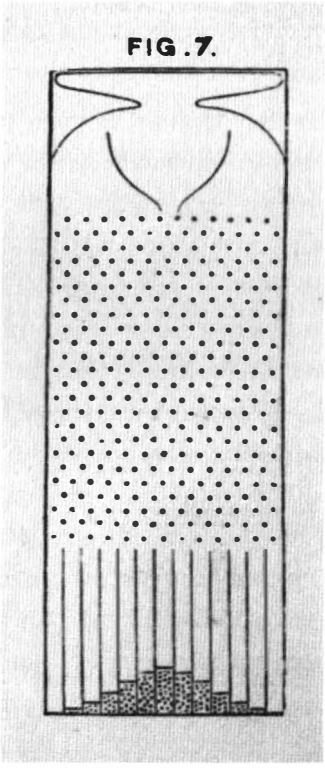
Galton'un 'sayı formlarına' dair dört örnek: Sayıların tuhaf uzamsal gösterimleri.

ton tarafından ölçülebileceği bir 'antropometrik kütüphane' oluşturdu. Kütüphanede 10.000'den fazla insanın ölçümlerinin bir derlemesi vardır ve Galton öyle bir şöhrete ulaşmıştı ki kafasının ölçümleri için başbakan William Gladstone bile kütüphaneye uğramıştı ('Biraz basık olsa da güzel bir kafa' demişti Galton). Aslına bakılırsa, Galton ölçüm konusunda öylesine takıntılı bir kişiydi ki, ölçülecek herhangi bir şey olmadığında bu açlığını gidermek için ölçecek bir şeyler bulurdu. 1885 yılında *Nature*'da yayınlanan bir makalede, sıkıcı bir toplantı sırasında meslektaşlarının kıpırdanmalarını ölçümlediğini yazmıştı. Bundan böyle bilim adamlarının sıkıcı toplantılardan faydalanmaları gerektiğini, böylelikle dinleyicilerin sıkılma ifadelerini sayısal olarak açıklayacak bir yöntem geliştirebileceklerini söylemiştir.

Galton'ın araştırması, Quételet'in insan toplulukları içindeki çeşitliliğinin kesin bir biçimde belirli olduğu yönündeki görüşünü destekliyordu. O da baktığı her yerde çan eğrileri görüyordu. Aslına bakılırsa, çan eğrisinin ortaya çıkmasındaki sıklık, Galton dağılıma uygun bir isim olarak 'Normal' kelimesinin kullanılmasına ön ayak oldu. İnsan kafasının çevre ölçüsü ve beynin büyüklük ölçüleri hep çan eğrisi oluşturur, ama Galton fiziksel olmayan, zekâ gibi özelliklerle ilgileniyordu. O sıralar IQ testleri henüz icat edilmemişti, bu nedenle Galton başka çeşit zekâ ölçümlerinin peşindeydi. Aradığını Sandhurst kraliyet askerî akademisine giriş sınavlarında buldu. Sınav sonuçlarının da çan eğrisine uyduğunu gözlemledi. Bu onda bir hayranlık duygusuna neden oldu. 'Hemen hemen her şeyin bir çan eğrisiyle ifade edilen kozmik bir düzen içinde olduğunu biliyorum' diye yazmıştı. 'Yunanlılar tarafından bilinseydi, bu yasa onların bir simgesi haline gelirdi ve tanrısallaştırılırdı. Bu, çılgın karışıklığın ortasında kendini geri planda tutarak tam bir huzur ile hükmeder. İzdiham ve karmaşa arttıkça, onun egemenliği daha mükemmel olur. Bu, saçmalığın en yetkin yasasıdır.'

Galton, el üstünde tutulan eğrisinin arkasındaki matematiği açıklayan güzel ve basit bir makine icat etti ve adını *quincunx* koydu. Kelimenin

ilk anlamı, üzerinde beş nokta bulunan zar desenidir, mekanizma dikey olarak her biri diğerinin orta noktasında olacak biçimde konumlandırılmış pimlerin bulunduğu bir çeşit tilt makinesine benzer. *Quincunx*'ın üstünden bir top düşer ve pimler arasından sekerek tabanda bulunan sıralı parmaklıkların üzerine düşer. Birçok top bırakıldıktan sonra sütunlarda doğal olarak oluşan şekil çan eğrisine benzer.

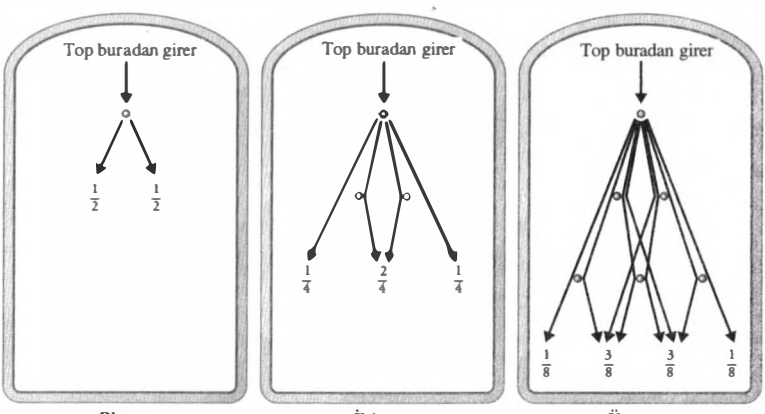


quincunx.

Olasılığı kullanarak neler olduğunu anlayabiliriz. İlk olarak *quincunx*'ın sadece bir pimi olduğunu hayal edin ve topun pime çarptığında sonucun rastgele, % 50 sağa, % 50 sola düşme ihtimalinin olduğunu söyleyelim. Başka bir deyişle, topun sağa düşme olasılığı, sola düşme olasılığı $\frac{1}{2}$'dir.

Şimdi ise ikinci sıradaki pimleri ekleyelim. Top ya sol ya da sağa düşecektir, ben bunları LL, ya da LR ya da RL ya da RR olarak ifade edeceğim. Şimdi sağa ve sola yönelmek aynı konumda kalmaya eşit olduğu için sağ ve sol birbirlerini iptal ederler (aynı biçimde sol ve sağ da), o halde topun $\frac{1}{4}$ sola düşme, $\frac{2}{4}$ ortada kalma ve $\frac{1}{4}$ sağa düşme ihtimali vardır.

Aynı şeyi üçüncü sıra pimler için tekrar edersek topun eşit derecede düşme olasılıkları LLL, LLR, LRL, LRR, RRR, RRL, RLR, RLL olur. Böylece topun en sola düşme olasılığı $\frac{1}{8}$, ilk sola düşme olasılığı $\frac{3}{8}$, ilk sağa düşme olasılığı $\frac{3}{8}$ ve en sağa düşme olasılığı $\frac{1}{8}$'dir.

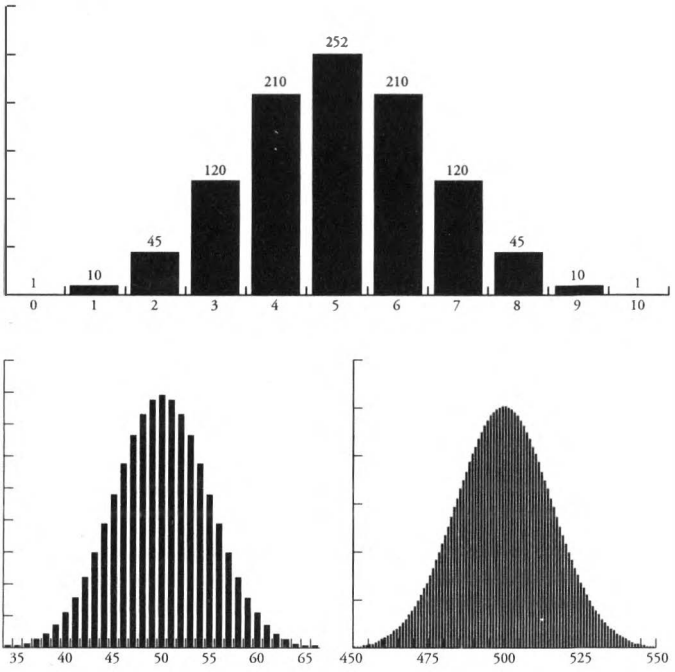


Bir sıra **İki sıra** **Üç sıra**

Başka bir ifadeyle, eğer *quincunx* içinde tek sıra pim varsa ve makinenin içine çok sayıda top atarsak, büyük sayılar yasası, dibe düşen topların sayısının 1:2:1 oranına yaklaştığını söyler.

Eğer üç sıra olursa, düşen topların oranı 1:3:3:1 olur.
Eğer dört sıra olursa, düşen topların oranı 1:4:6:4:1 olur.
Eğer on sıralı bir *quincunx* için olasılıklara devam edersem düşen topların oranı 1:10:45:120:210:252:210:120: 45:10:1 olur.

Bu sayıların grafiğini çizdiğimizde aşağıdaki şekillerin ilkini elde ederiz. Daha fazla sıra eklediğimizde ortaya çıkan şekil daha da tanıdıktır. Aşağıda aynı zamanda 100 ile 1000 sıralık grafikler de bulunmaktadır (Bu tabloların sadece orta kısımları grafiklerde verilmiştir, çünkü sağ ve soldaki değerler görülemeyecek kadar küçüktür).



Pekâlâ, bu tilt oyunu ile gerçek dünyada olan biten nasıl ilişkilidir? *Quincunx*'ın her sırasının, ölçümde hataya neden olacak rastgele bir değişken olduğunu hayal edin. Bu doğru ölçüme, ya küçük bir miktar ekleme ya da doğru ölçümden küçük bir miktar çıkarma biçiminde meydana gelir. Galileo ve teleskopu söz konusu olduğunda tek sıra, aletlerin ısısını temsil eder, bir diğer sıra ise havada geçiş halinde bulunan bir sıcak hava kütlesinin bulunup bulunmadığını, başka bir tanesi de hava kirliliğini temsil eder. Her bir değişken öyle ya da böyle bir hatanın meydana gelmesinde bir katkı sağlar, tıpkı *quincunx*'ın içinde topun sağa ya da sola sekmesi gibi. Herhangi bir ölçümde gözlemlenemeyen milyonlarca rastgele hata olabilir, ancak toplam hata çan eğrisini andıran bir ölçüm verecektir.

Eğer popülasyon karakteristiği normal dağılmışsa, başka bir ifadeyle çan eğrisi biçiminde bir araya getirilmişse ve çan eğrisi rastgele bir hata nedeniyle meydana geldiyse, Quételet, insan özelliklerinin paradigmada meydana gelen rastgele hatalar gibi görülebileceğini savunuyordu. Bu paradigmaya *l'homme moyen* ya da 'Ortalama insan' adını verdi. Popülasyonların bu prototipteki sapmalardan meydana geldiğini söylüyordu. Quételet'e göre ortalama olmak amaç edilebilecek bir şeydi, çünkü bu toplumu kontrol altında tutmanın bir yoluydu—ortalamadan herhangi bir sapmanın 'Vücuttaki bir çirkinlik gibi ahlakta da bir kusur' olduğunu yazmıştı. Her ne kadar *l'homme moyen* kavramı bilim tarafından asla kabul görmese de toplum arasında kısıtlanarak kullanıldı. Sık sık ahlaktan ya da toplumun ortalama bir temsilcisinin ne düşünebileceğinden ya da hissedebileceğinden bahsederiz: Sanki 'ortalama insanın gözlerinden görünen' kabul edilir bir şeymiş gibi.

Quételet ortalama olmayı överken, Galton onu hakir görür. Galton daha önce de bahsettiğim gibi sınav sonuçlarının normal bir dağılıma

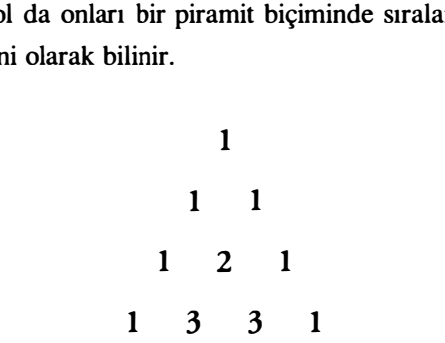
sahip olduğunu görmüştü. Çok az kişi çok yüksek ve çok düşük puan alırken birçok kişi ortalama bir puan almıştı.

Laf arasında, Galton, ortalamanın üstü bir aileden geliyordu. Birinci kuzeni Charles Darwin'di ve iki adam bilimsel düşünceleri hakkında sürekli olarak yazışıyorlardı. Darwin doğal seleksiyon teorisini ortaya attığı *Türlerin Kökeni*'ni yayınladıktan on sene sonra, Galton insan evriminin kendi kendine nasıl rehber olabileceği konusunda kuram oluşturmaya başlamıştı. Zekânın kalıtımsal oluşuyla ilgileniyor ve popülasyonun tamamının zekasının nasıl iyileştirilebileceğini merak ediyordu. Yapmak istediği, çan eğrisini sağa doğru kaydırmaktı. Bu amaçla Galton 'Irk ekimi' ya da üreme yoluyla toplumun zekâ birikimini iyileştirme üzerine yeni bir çalışma alanının açılması önerisinde bulundu. Bu yeni çalışma alanına Latince hayat anlamına gelen 'vita' kelimesinden türeyen *viticulture* (bağcılık) ismini vermeyi düşündü ama Yunanca iyi anlamına gelen *eu* ve doğum anlamına gelen *genos* kelimelerinden türeyen *eugenics* (soy aktarımı) kelimesini tercih etti (Viticulture'ın genel anlamı olan, üzüm bağcılığı, Latince şarap anlamına gelen *vitis* kelimesinden gelir ve kökeni yaklaşık aynı tarihe dayanır). On dokuzuncu yüzyılın sonlarında ve yirminci yüzyılın başlarında birçok liberal entelektüel soy aktarımını toplumsal iyileştirme yöntemi olarak destek verse de, daha zeki insanlar üretimi düşüncesi daha sonra bozuldu ve itibarsız bir konuma geldi. 1930'lu yıllarda soy aktarımı eli kanlı Nazi subaylarının üstün aryan ırkı yaratmak isteği ile aynı anlama gelmişti.

Geçmişe bakarak, zekâ ve ırksal saflık gibi en yüksek özelliklerin nasıl ayrımcılığa ve bağnazlığa neden olduğunu görmek oldukça kolaydır. İnsan özellikleri ölçüldüğü zaman çan eğrisi ortaya çıktığı için, bu eğri doğası gereği bazı insanların diğerlerinden daha iyi olduğu biçimde bir sınıflandırma ile aynı anlama gelmeye başladı. Bu konuda en iyi bilinen örnek Richard J. Herrnstein ve Charles Murray tarafından 1994 yılında yayınlanan ve son yılların en çok tartışma

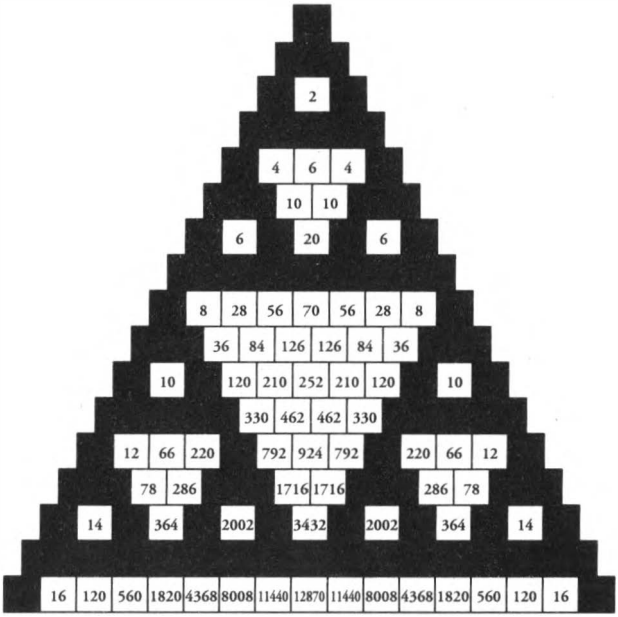
yaratan kitaplarından olan *Çan Eğrisi*'dir. IQ sonuçlarının dağılımını konu alan kitap, ırksal gruplar arasındaki zekâ farklılıklarının biyolojik farklılıkların kanıtı olduğunu iddia ediyor. Galton çan eğrisinin 'Kendini ortaya çıkarmadan gizlilik içinde' hüküm sürdüğünü yazıyordu. Ama bıraktığı miras tamamen farklıydı.

Quincunx tarafından üretilen sayıların kıymetini anlayabileceğimiz başka bir yol da onları bir piramit biçiminde sıralamaktır, sonuçlar Pascal üçgeni olarak bilinir.



Pascal üçgeni, Victoria dönemine ait bir fasulye makinesine rastgele bırakılan topların dağılımını hesaplamaktan daha kolay bir biçimde elde edilebilir. Birinci sıraya 1 koyarak başlayın ve altına üçgen oluşturacak biçimde iki tane 1 yerleştirin. Ve her sıranın başına ve sonuna bir yerleştirecek biçimde alt sıralar kurmaya devam edin. Ortadaki sayıların değerleri üstlerindeki iki sayının toplamına eşittir.

Her ne kadar kendisinden çok önceki bir döneme ait olsa da üçgene Blaise Pascal'ın adı verildi. Hintli, Çinli ve İranlı matematikçilerin hepsi bu deseni kendisinden yüzlerce yıl önceden biliyorlardı.



Sadece ikiye bölünebilen karelerin beyaz olduğu Pascal üçgeni.

Ama daha önceki hayranların aksine Pascal '*le triangle arithmetique*' ismini verdiği üçgen ile ilgili bir kitap yazdı. Keşfettiği desenlerdeki matematiksel zenginliğe hayrandı. Kitaba eklediklerinden daha fazlasını hariç tuttuğunu da ekleyerek 'özellikleri bakımından bu kadar bereketli olması çok şaşırtıcı' diye yazmıştı.

Pascal Üçgeni'ndeki en sevdiğim özellik şudur: Her bir sayıyı kare içine alalım ve tüm tek sayıları siyaha boyayalım. Bütün çift sayılar beyaz kalsın. Sonuç olarak yukarıdaki olağanüstü mozaik ortaya çıkar.

Bir dakika, dediğinizi duyar gibiyim. Bu desen bir yerden tanıdık geliyor. Doğru. Bölüm İki'deki karenin dokuz alt kareye ayrıldığı ve ortadakinin çıkarılıp aynı işlemin tüm alt karelere sonsuza kadar yeniden uygulandığı matematiksel bir döşeme olan Sierpinski halısını anımsatıyor. Sierpinski halısının üçgen versiyonu, dört alt üçgene bölünmüş ve ortadaki çıkarılmış bir eşkenar üçgenden oluşan Sierpinski

üçgenidir. Kalan üç parça aynı işleme tabi tutulur, dörde bölünür ve ortadaki çıkarılır. Aşağıda ilk üç tekrar yer almaktadır:

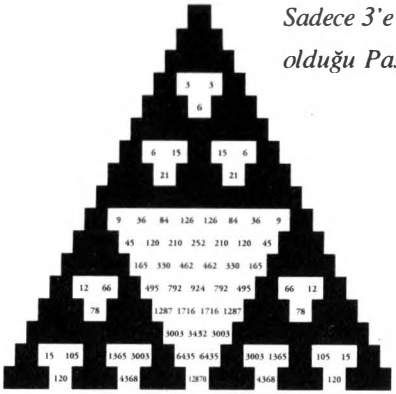


Eğer Pascal üçgenini renklendirme işlemini tekrar tekrar yaparsak desenler Sierpinski üçgenine gittikçe daha da fazla benzer. Aslına bakarsanız, limit sonsuza yaklaşırken, Pascal üçgeni Sierpinski üçgeni haline gelir.

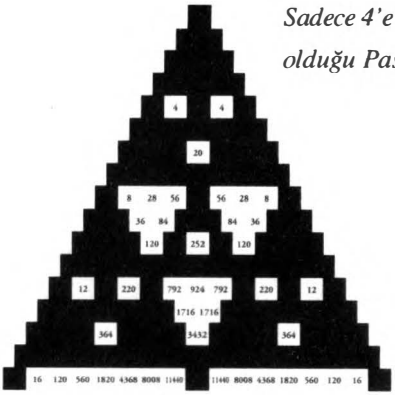
Sierpinski, bu siyah beyaz kareler içinde karşılaştığımız tek dost değildir. Birinci şekil bir kareden yapılmıştır, ikincisi altı kareden, üçüncüsü 28 kareden ve diğerleri 120 ve 496 kareden. Bu sayılar size bir şey hatırlatıyor mu? Üç tanesi –6, 28 ve 496– Bölüm Yedi'deki mükemmel sayılardır. Birbirleriyle ilişkileri yokmuş gibi görünen soyut düşüncelerin görsel olarak ortaya çıkması olağanüstü.

Pascal üçgenindeki sayıları boyamaya devam edelim. Öncelikle 3'e bölünen tüm sayıları beyaz olarak bırakalım. Ardından işlemi dörde bölünen sayılar için tekrarlayalım. Ve tekrar 5'e bölünen sayılar için tekrarlayalım. Bir sonraki sayfadaki sonuçların hepsi ters yönü gösteren simetrik üçgen desenleridir.

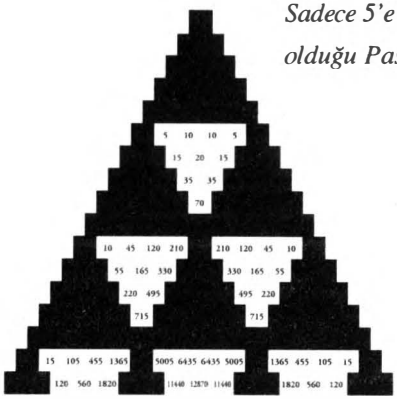
On dokuzuncu yüzyılda, Pascal üçgeninde başka bir tanıdık daha keşfedildi: Fibonacci serisi. Belki de bu –üçgeni önceki aynı işlemi tekrarlayarak oluşturduğumuz için– kaçınılmazdı, sıradaki rakamları bulmak için önceki iki terimi toplamaya devam ettik. Art arda gelen iki sayıyı toplama işi Fibonacci serisini elde etmek için yaptığımız işlemin kendisidir. Fibonacci dizisindeki ardışık iki sayının toplamı üçüncü sayıya eşittir.



Sadece 3'e bölünen karelerin olduğu Pascal üçgeni

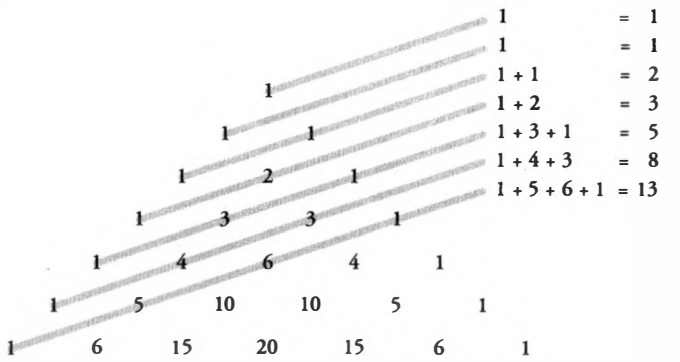


Sadece 4'e bölünen karelerin olduğu Pascal üçgeni



Sadece 5'e bölünen karelerin olduğu Pascal üçgeni

Fibonacci sayıları, üçgende 'hafif eğimli' çapraz çizgiler adını verdiğimiz sayıların toplamında saklıdır. Hafif eğimli bir köşegen herhangi bir sayıdan başlayarak soldaki sayının altına ve daha sonra bir boşluğa doğru sola ya da üst sağa ya da bir boşluk boyunca sağa hareket eder. İlk ve ikinci çapraz çizgiler sadece 1 içerirler. Üçüncünün üzerinde 1 ve 1 vardır bu da 2 eder. Dördüncü üzerinde toplamları 3'e eşit olan 1 ve 2 bulunur. Beşinci çapraz çizgi bize 1 + 3 + 1 = 5'i verir. Altıncı 1 + 4 + 3 = 8'i. Şu ana kadar 1, 1, 2, 3, 5, 8'i elde ettik ve daha elde edilen basamaklar sırasıyla sonraki Fibonacci sayılarıdır.



Pascal üçgeni içindeki hafif eğimli çapraz çizgiler Fibonacci serisini vermektedir.

Antik Hindistan'da Pascal üçgenine duyulan ilgi nesnelerin bileşimini içeriyordu. Mesela üç tane meyvemiz olduğunu hayal edin: Mango, liçi ve muz. Üç meyvenin sadece bir bileşimi vardır: Mango liçi ve muz. Eğer sadece iki meyve seçecek olursak bunu üç değişik şekilde yapabiliriz. Mango ve liçi, mango ve muz, liçi ve muz. Aynı şekilde meyveleri tek tek almak için sadece üç yol vardır, her bir meyveyi tek olarak almak. Son seçenek ise hiçbir meyveyi seçmemektir ve bunu yapmanın sadece bir yolu vardır. Başka bir ifadeyle üç farklı

meyve ile elde edilen kombinasyon sayı dizisi 1, 3, 3, 1 yani pascal üçgeninin üçüncü sırasıdır.

Eğer dört tane nesnemiz varsa, bir kerede hiç birini seçmeme, tek tek seçme, ikişerli, üçerli ve dörderli seçme kombinasyonları dizisi 1, 4, 6, 4, 1 olur, bu da pascal üçgeninin dördüncü sırasıdır. Bunu daha da fazla sayıdaki nesnelerle denersek pascal üçgeninin şeyleri bir araya getirmek için bir referans tablosu olduğunu görürüz. Eğer elimizde *n* sayıda nesne varsa ve bu nesnelerden *m* tanesinden kaç değişik olarak bir araya getirebileceğimizi bilmek istiyorsak, cevap tam olarak pascal üçgenindeki *n.* sıranın, *m.* değeridir (Not: Uygunluk açısından en soldaki 1'inci sıranın hiçbirini seçmeme kombinasyonu olduğunu unutmayın). Örnek olarak, yedi meyve arasından seçilen üç meyveyi sıralamanın kaç değişik yolu vardır? 35 yolu vardır, çünkü yedinci sıradaki üçüncü konum 35'dir.

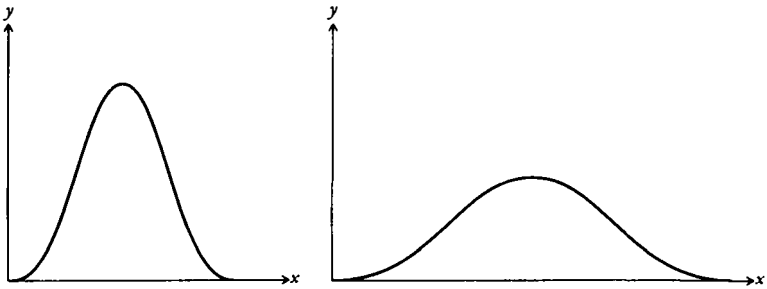
Şimdi de matematiksel nesnelerin kombinasyonlarına gelelim. $x + y$ terimini ele alalım. $(x + y)^2$ nedir? $(x + y)(x + y)$ ile aynıdır. Bunu genişletmek için ilk sıradaki sayıları ikinci parçadaki sayılar ile çarpmamız gerekir, bu durumda $xx + xy + yx + yy$, ya da $x^2 + 2xy + y^2$ elde ederiz. Dikkatinizi çeken bir şey oldu mu? Eğer işleme devam edersek şablonu daha net görebiliriz.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$(x + y)$ sayısını daha da fazla çarptığınızda elde edilen şeklin eğri oluşturacağını ilk gören kişi Fransız Protestan bir göçebe olarak Londra'da yaşayan matematikçi Abraham de Moivre'ydi. Bu eğriye daha sonra verilecek olan çan eğrisi, hata eğrisi, normal dağılım ya da Gauss dağılımı isimlerini vermedi. Eğri, matematik eserleri arasında ilk defa

1718 yılında yayınlanan şans oyunları hakkındaki *Şans Öğretisi* adlı kitapta yer aldı. Kitap, olasılık teorisi ve kumar oyunları sayesinde bilimsel bilginin nasıl serpildiği üzerineydi.

Çan eğrisini, var olan tek eğri gibi ele aldım ancak çan eğrisi eğriler ailesinin bir üyesidir. Hepsi çana benzerler fakat bazıları diğerlerinden daha geniştir (aşağıdaki diyagrama bakın.)



Farklı sapmaların olduğu çan eğrileri.

İşte size neden farklı genişliklerde olduklarının açıklaması. Eğer Galileo, örneğin gezegen yörüngelerini yirmi birinci yüzyıl teleskopuyla inceleseydi, hata payı on altıncı yüzyıl teleskopu kullanırken olduğundan daha az olurdu. Modern araçlar antik araçlara göre çok daha dar çan eğrileriyle üretilirler, ama yine de normal dağılım sergilerler.

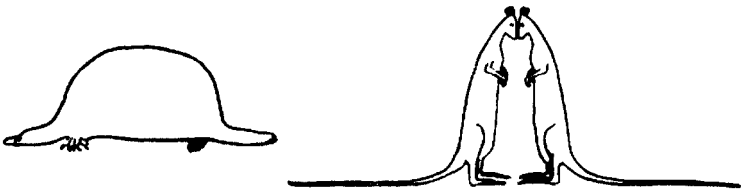
Çan eğrisinin averaj değerine ortalama denir. Genişliğe sapma adı verilir. Eğer sapmayı ve ortalamayı biliyorsak, eğrinin şeklini de biliriz. Normal eğrinin sadece iki parametre kullanılarak tanımlanması inanılmaz derecede pratiktir. Belki de fazla pratiktir. İstatistikçiler genellikle verilerinde çan eğrisi bulma eğilimdedirler. KPMG'nin adli hesaplama bölümünün başkanı ekonomist Bill Robinson durumun bundan ibaret

olduğunu kabul ediyor. 'Normal dağılımlarla çalışmayı seviyoruz, çünkü [Normal dağılım] oldukça iyi araştırılmış matematiksel özelliklere sahiptir. Bir kere dağılımın normal olduğunu bildiğimizde, ilgi çekici her çeşit verileri ortaya koyabiliyoruz.'

Robinson'un işi, basit bir ifadeyle, birileri üzerlerinde tahrifat yapsa bile devasa veri kümelerine bakarak çıkarımda bulunmak. Poincaré'nin her gün ekmeklerini tartarken kullandığı stratejiyi uyguluyor ancak Robinson gigabaytlarca veriye bakıyor ve elinin altında daha karmaşık aletler var.

Robinson, bölümünün herhangi bir veri kümesi için varsayılan dağılımın normal dağılım olduğu varsayımı üzerine çalışma eğiliminde olduğunu söylüyor. 'Normal dağılımın iş gördüğünü varsaymayı seviyoruz, çünkü o zaman önümüzü görebiliyoruz. Aslında, bazen iş görmüyor ve bazen karanlıktan bakmamız gerekiyor. Sanırım finans piyasalarında iş görmediği zamanlarda da normal dağılım olduğunu farz ediyoruz.' Aslına bakılırsa son yıllarda hem akademik çevre hem de finans çevrelerinde normal dağılıma duyulan tarihi güven sarsılıyor.

Dağılımın ortalama değerin etrafında çan eğrisinden daha az odaklandığı durumlara, Yunanca düz anlamına gelen 'paltus' ve geniş anlamına gelen 'kurtos' kelimelerinden türeyen platykurtic (azbasık) adı verilir. Öte yandan, dağılımın ortalama değerin etrafında daha yoğun olduğu durumlara, Yunanca ince anlamına gelen 'leptos' kelimesinden türeyen *leptokurtic* adı verilir. Dublin'deki Guinness bira fabrikasında çalışan istatistikçi William Sealy Gosset, 1908 yılında hangisinin hangisi olduğunun kolayca anımsanması için yan sayfadaki şekilleri çizdi: gagalı memeli platykurtic ve öpüşen kangurular da leptokurtic eğrilerdi. Kanguruları tercih etti, çünkü kangurularının sıçrama kabiliyetleriyle meşhur oldukları aynı sebepten belki de onların tavşan olması gerektiğini yazar. Dağılım eğrilerinin en sağı ve en solundaki kısımlar için kuyruk teriminin kullanılmasının sebebi Gosset'in bu çizimleridir.



Platykurtic ve leptokurtic dağılımlar.

Ekonomistler dağılımların kalın kuyruklu ya da ağır kuyruklu olarak nitelendirdiğinde sanki Gosset'in hayvanları ortalamadan daha büyükmüş gibi eğrilerin eksenlerden normalden daha yüksekte olduklarını söylerler. Bu eğriler beklenmedik olayların dağılımın normal olduğu zamanlardan daha olası olduğunu gösterirler. Mesela eğer hisse fiyatlarının dağılımı kalın kuyrukluysa, belirgin bir düşüşün ya da fırlamanın dağılımın normal olduğu zamanlardan daha olası olduğu anlamına gelir. Bu nedenle bazen çan eğrisini kalın kuyruklu bir eğriye tercih etmek pervasızlık olabilir. Ekonomist Nassim Nicholas Taleb'in çok satanlar arasında yer alan *Siyah Kuğu* adlı kitabında kuyrukların dağılım eğrilerindeki boylarını ve önemlerini önemsememek eğiliminde olduğumuzu ortaya koyar.

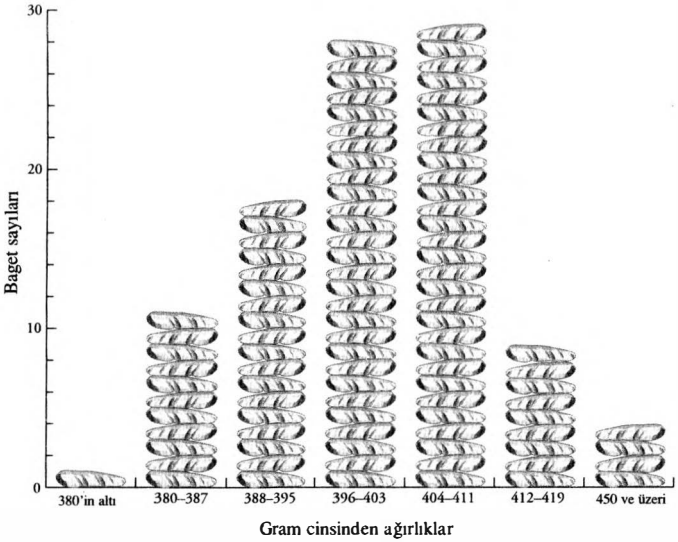
Çan eğrisinin tarihsel olarak kusurlu bir model olduğunu iddia eder, çünkü internetin icadı gibi bilimsel gelişmeleri ya da 11 Eylül terör saldırısı gibi oldukça nadir ve beklenmedik olayların ortaya çıkışını tahmin edemez ve etkilerini öngöremez. Aynı anda her yerde gerçekleşme, dünyanın [Normal dağılımın] bir özelliği değil' diye yazar, 'ona bakış açımızdan kaynaklanan ve aklımızın içinde yer alan bir problemdir.'

Verilerde çan eğrisi görme arzusu belki de en çok güçlü biçimde eğitimde görülmektedir. Yılsonu sınavlarından notları A ile E arasında ödüllendirilmesi öğrencilerin sonuçlarının çan eğrisi altına düşen notların

beklenen notlara benzerliğiyle belirlenir. Eğri en yüksek notun A ve bir alt kesitin B olduğu ve bu biçimde devam eden kesitlere ayrılır. Eğitim sistemini pürüzsüz bir biçimde devam ettirebilmek için her sene A'dan E'ye kadar not alan öğrencilerin yüzdelerinin kıyaslanabilir olması önemlidir. Eğer herhangi bir yıl sonuçlarında –aynı derse giren yetersiz ya da çok sayıda öğrenci arasında– sayıca çok fazla A ya da çok fazla E varsa kaynaklar arasında büyük bir sapma var demektir. Sınavlar, zekânın gerçek bir göstergesi olup olmadığına bakılmaksızın özellikle sonuçların çan eğrisine olabildiğince uyması umuduyla hazırlanırlar (Genel olarak bu kabul görse de bazı durumlar için geçerli değildir).

Bazı bilim insanlarının çan eğrisine gösterdiği saygının baştan savma uygulamalara neden olduğu görüşü de tartışılmaktadır. *Quincunx*'da rastgele hataların normal dağılım sergilediğini gördük. Doğal olarak ölçümlere daha fazla rastgele hata eklersek, ölçümlenen fenomen normal dağılım göstermiyor olsa da veriden bir çan eğrisi elde etme olasılığımız yüksektir. Bir veri kümesi içinde normal dağılım bulunduğu zaman bunun sebebi ölçümlerin aşırı kaotik bir biçimde bir araya getirilmesidir.

Bu da beni bagetlerime geri getiriyor. Acaba ağırlıkları gerçekten de normal bir dağılım mı sergiliyordu? Kuyruklar çok ince ya da çok mu kalındı? Tekrar özetleyelim. Ağırlıklarının dağılımı daha önce verilmişti. Grafik umut verici bazı eğilimler gösteriyor—yaklaşık 400 gr civarı bir ortalama mevcut ve 380 ve 420 gr arasında aşağı yukarı bir simetrik bir dağılım mevcut. Eğer ben yorulmak bilmeyen Henri Poincaré olsaydım, deneye bir sene devam ederdim ve kıyaslayacağım 365 tane (fırının kapalı olduğu günler hesaba katılırsa belki birkaç tane eksik) ölçümüm olurdu. Dağılım daha fazla veriyle daha belirgin olurdu. Ama yine de benim daha küçük olan örneğim biçimlenen model konusunda fikir sahibi olmak için yeterliydi. Başka bir numara kullandım ve grafiğimi 1 g yerine 8 gramlık gruplar halinde yeniden çizdim. Sonuç olarak yan sayfadaki grafik oluştu:



Bu grafiği ilk çizdiğimde baget deneyim gerçekten de bir çan eğrisi çiziyor göründüğü için rahatlık hissetmiştim. Olgular deneye uyuyor gözüküyordu. Bu uygulamalı bilimin adına bir başarıydı. Ama daha yakından baktığımda grafiğin çan eğrisine hiç benzemediğini fark ettim. Evet, bir ortalama etrafında kümelenen değerler vardı, ama eğri kesinlikle simetrik değildi. Eğrinin sol tarafı sağ tarafı kadar dik değildi. Sanki görünmez bir çekim gücü eğriyi sola doğru biraz çekiyordu.

Doğal olarak iki sonuçtan birisine varabilirdim. Ya Greggs'in bagetleri normal bir dağılım sergilemiyordu ya da normal dağılım sergiliyorlardı ama benim deney yapma sürecimde bazı sapmalar gerçekleşmişti. Bu sapmanın ne olabileceğine dair bir fikrim vardı. Yenmemiş bagetler mutfağımda bekliyordu ve birkaç günlük olanlardan birisini tekrar tartmaya karar verim. Oldukça şaşırtıcı bir biçimde 321 gr geldi, tarttığım en hafif ekmekten bile ciddi biçimde hafifti. O an ağırlıkların sabit olmadığını, ekmeklerin kurudukça hafifliklerini fark ettim. Başka bir ekmek daha satın aldım ve bagetin sabah saat 8'den akşama kadar 15 gr hafiflediğini keşfettim.

Deneyimin kusurlu olduğu çok açıktı. Ölçümleri yaparken günün hangi saatinde olduğumuzu hesaba katmamıştım. Bu tür bir çeşitliliğin ağırlıkların dağılımı üzerinde etkili olduğu neredeyse kesindi. Çoğu zaman dükkâna ilk giden kişi bendim ve somunlarımın sabah 8.10 civarında tartıyordum, ama bazen daha geç kaldığım da oluyordu. Bu tesadüfî çeşitlilik normal olarak dağılmıyordu, çünkü ortalama saat 8 ve 9 arasında değişiyordu, ama kuyruk saat 8'den önce asla olmamıştı çünkü dükkân kapalıydı. Diğer taraftaki kuyruk öğle yemeğine kadar gidiyordu.

Ardından aklıma başka bir şey geldi. Peki ya ortam ısısı? Deneye ilkbaharın başında başlamıştım. Ve havanın ciddi biçimde sıcak olduğu yazın başında bitirmiştim. Grafiğime baktım ve baget ağırlıklarının proje sonuna doğru belirgin biçimde hafiflediğini gördüm. Yaz sıcağının ekmekleri daha hızlı kuruttuğunu fark ettim. Tekrar bu çeşitlilik eğrinin sola doğru bozulmasında etkili olabilirdi.

Deneyim, baget ağırlıklarının hafif bozulmuş bir çan eğrisine benzediğini göstermiş olabilir, ama bu deneyden öğrendiğim şey ölçüm yapmanın o kadar da basit bir şey olmadığı. Normal dağılım teorik bir ideal ve kimse tüm sonuçların ona uygun geleceğini ileri süremez. Henri Poincaré'yi merak ediyorum. Acaba ölçümleri yaparken Paris'in hava şartlarından ya da ölçümleri yaptığı saatten kaynaklanan sapmaları dışarıda bırakabilmiş miydi? Belki de kendisine 1 kg yerine 950 gr ekmek satıldığı değil de, 1 kg ekmeğin 50 gram kayba uğradığını ispatlamıştı.

Çan eğrisinin tarihi, gerçekte saf ve uygulamalı bilimin merak uyandıran akrabalığı konusunda olağanüstü bir kıssadır. Poincaré, bir keresinde Fransız fizikçi Gabriel Lippmann'dan normal dağılımın neden bu kadar övgü hak ettiğine dair bir mektup almıştı: 'Çan eğrisine herkes inanıyor: Deneyciler, çünkü matematik yoluyla ispatlanabiliyor, matematikçiler, çünkü gözleme dayalı olduğuna inanıyorlar.' Tıpkı başka bir alanda olduğu gibi bilimde de en çok ilgilendiğimiz şeyleri görmeyi tercih ediyoruz.

Francis Galton kendisini bilime ve keşiflere sadece çok talihli bir insanın adayabileceği bir biçimde adamıştı. Yetişkinlik döneminin başlarını Afrika'nın bilinmeyen kısımlarına yapılan ve kendisine büyük şöhret kazandıran bir keşif gezisinde geçirdi. Ustaca bir beceriyle ve bilimsel araçların sayesinde, bir keresinde, uzak bir mesafeden balıketli bir Hotanto'nun vücut ölçülerini sekstant kullanarak ölçmüştü. Bu olay kadın ile mesafeyi koruma arzusunun bir göstergesiydi. Kabile şefi daha sonra cinsel ilişki için hazırlık olarak tereyağı ve kırmızı toprak boya sürülmüş genç bir kadını ona sunduğunda Galton bu teklifi beyaz keten elbisesini lekeleme ihtimaliyle geri çevirmişti.

Soy arıtımı Galton'ın en kalıcı yeniliği olmamasına rağmen en kötü şöhretli mirası oldu. Galton, anketleri psikolojik testler için kullanan ilk kişidir. Parmak izleri için polis araştırmalarında bir araç olarak kabul gören ve bugün hâlâ kullanılan bir sınıflandırma sistemi geliştirdi. Ve hava şartlarını resmetme düşüncesi 1875 yılında ilk halka açık hava durumu haritası olarak *The Times*'da yayınlandı.

Aynı yıl, Galton bazı arkadaşlarını bezelyeler üzerine deney yapmak için bir araya getirdi. Tohumları yediye ayırdı ve arkadaşlarına ekmelerini ve büyüyenleri geri getirmelerini istedi. Galton yavru tohumların çevre ölçülerini aldı, ebeveynleri ile kıyasladı. Başlangıçta mantık dışı görünen bir olguyla karşılaştı: Geniş tohumlar kendilerinden daha küçük döller üretme eğilimindeydiler. On sene sonra antropometrik laborotuvarının sağladığı verileri inceledi, aynı eğilimi insanların boy uzunluklarında da fark etti. 205 ebeveyn ve 928 yetişkin çocuğu inceledikten sonra, çok uzun ebeveynlerin kendilerinden kısa çocukları olduğunu gördü, aynı biçimde oldukça kısa ebeveynlerin kendilerinden uzun çocukları oluyordu.

Biraz düşündükten sonra bunun nedenini anlayabiliriz. Eğer çok uzun ebeveynlerin kendilerinden daha uzun ve çok kısa ebeveynlerin kendilerinden daha kısa çocukları olsaydı şimdiye kadar devlerden ve cücelerden oluşan bir insan ırkı içinde yaşıyor olurduk. Ama böyle bir

şey gerçekleşmiş değil. İnsan ırkı daha iyi beslenme ve sağlık şartları nedeniyle artık toplamda daha uzun olabilir, ama popülasyon içinde uzunluk dağılımı hâlâ belli sınırlar içinde.

Galton bu olguya 'kalıtsal boy uzunluğunda vasata geri gitme' adını verdi. Bu kavram *ortalamaya geri gitmek* olarak daha iyi bilinir. Matematiksel bağlamda, ortalamaya geri gitme, beklenmeyen bir durum sonunda az beklenmeyen bir durumun meydana gelmesinin daha olası olduğu anlamına gelir. Örnek olarak, bir tane Greggs bagetini ölçüp 380 gr bulduğumda, ki bu oldukça düşük bir ağırlık, bir sonraki bagetin ağırlığının 380 gramdan fazla olması daha muhtemeldir. Aynı şekilde 420 gramı ölçtükten sonra, bir sonraki bagetin 420 gramdan daha hafif olması daha olasıdır. *Quincunx*, bize geri dönmenin mekanizmasını görsel bir sunumunu verir. Eğer yukarıdan bırakılan top en soldaki konuma düşerse, ardından bırakılan top muhtemelen daha orta bir konuma düşecektir, çünkü topların çoğu ortadaki konumlara inerler.

Ancak insan boyundaki çeşitlilik, baget ağırlığının hafta içindeki çeşitliğinden ya da *quincunx*'daki topun ineceği konumdan farklı bir yol takip eder. Tecrübe vasıtasıyla biliyoruz ki ortalamanın üstünde boya sahip ailelerin çocukları ortalamanın üstünde boyu olan çocuk sahibi olma eğilimdedir. Aynı zamanda sınıfımızdaki en kısa boylu çocuğun aynı şekilde kısa boylu bir aileden geldiğini biliriz. Başka bir ifadeyle, çocuğun boyu ebeveynlerinin boyuyla tamamen rastgele bir ilişki içinde değildir. Diğer taraftan, salı günü aldığım ekmeğin ağırlığı pazartesi günü aldığım ekmeğin ağırlığı ile tamamen rastgele bir ilişki içindedir. *Quincunx* içindeki bir top (pratik tüm amaçlar için) bırakılan tüm diğer toplar ile rastgele bir ilişki içindedir.

Ebeveyn boyu ve çocuğun boyu arasındaki güçlü ilişkiyi anlamak için, Galton başka bir fikir geliştirdi. Ebeveyn boyunu bir eksene, çocuğun boyunu diğerine işaretlediği bir grafik oluşturdu ve en uygun dağılımı belirlemek için bu noktalardan geçen düz bir çizgi çizdi (Her ebeveyn kümesi anne ve babanın ortasındaki bir boy ile temsil ediliyordu ve

Galton buna orta ebeveyn adını vermişti). Çizgiler $\frac{2}{3}$ eğimliydi. Başka bir ifadeyle orta ebeveynden büyük her inç için çocuk ortalamadan $\frac{2}{3}$ inç uzun olabilirdi. Orta ebeveynden küçük her inç için çocuk ortalamadan $\frac{2}{3}$ inç kısa olabilirdi. Galton çizgideki bu eğime *korelasyon katsayısı* adını verdi. Katsayı iki değişken kümesinin ne kadar güçlü olduğunu gösteren sayıdır. Korelasyon, Galton'ın himayesinde bulunan ve 1911 yılında dünyanın ilk üniversite istatistik bölümünü açan Karl Pearson tarafından daha da geliştirildi.

Geri gitme ve korelasyon, bilimsel düşünce açısından büyük kırılma noktaları oldu. Isaac Newton ve çağdaşları için evren neden sonuç ilişkisinin belirlenmiş kurallarına itaat ediyordu. Olmuş olan her şeyin bir nedeni vardı. Ama bütün bilimler bu kadar indirgemeci değildir. Örneğin, biyolojide ortaya çıkan belirli şeylerin –akciğer kanseri gibi– karmaşık bir biçimde bir araya gelen birden fazla nedeni olabilir. Korelasyon birbirleriyle karmaşık ilişkiye sahip veri kümelerini analiz edebilmeye olanak verir. Örneğin, sigara içen herkes akciğer kanserine yakalanmaz ancak matematikçiler sigara içme ve akciğer kanseri vakalarını inceleyerek eğer sigara içerseniz akciğer kanserine yakalanacağınız riskini hesaplayabilirler. Aynı şekilde, bir okulun üst sınıflarındaki her çocuk kendinden alt sınıflardaki çocuklardan daha düşük bir performans sergilemez ama bulunulan sınıfların sınav sonuçlarında etkisi vardır. İstatistikî analiz, tıp'tan sosyolojiye, psikolojiden ekonomiye tamamen yeni bir araştırma alanı açmıştır. Bize kesin nedenleri bilmeden bilgiyi kullanabilme olanağı sağladı. Galton'ın orijinal görüşleri istatistiği saygın bir alan haline getirdi: 'Bazı insanlar istatistik adından bile nefret ederler, ama ben onda tam bir güzellik ve önem buluyorum' diye yazar. 'Merhametsizce ele alınmayıp, daha büyük yöntemlerle birlikte hassas bir biçimde ele alındıklarında ve dikkatli bir biçimde yorumlandıklarında, karmaşık olguların üstesinden gelme güçleri olağanüstüdür.'

2002 yılı Nobel ekonomi ödülünü kazanan, bir ekonomist değildi. Bir psikolog olan, kariyerini (büyük bir kısmını meslektaşı Amos Tversky ile) karar verme sürecinin arkasındaki bilişsel faktörler üzerine yapan Daniel Kahneman tarafından kazanıldı. Kahneman, ortalamaya geri dönüş anlayışının kendisi için en doyurucu 'Evreka anı' olduğunu söylüyor. 1960'lı yılların ortasında İsrail hava kuvvetleri uçuş eğitmenlerine ders veriyordu. Onlara öğrencilerin öğrenmesi için cezalandırma yerine ödüllendirmenin daha faydalı olduğunu söylüyordu. Konuşmasını bitirmek üzereyken, en deneyimli eğitmenlerden birisi ayağa kalktı ve Kahneman'a yanıldığını söyledi. Adam şöyle söylemişti: 'Birçok durumda öğrencileri akrobatik bir manevrayı başarıyla gerçekleştirdikleri için ödüllendirdiğimde ve genel olarak tekrar yapmayı denediklerinde daha kötüsünü yaparlar. Öte yandan, kötü uygulayan öğrencilere bağırdığımda genellikle daha iyi sonuçlar alırlar. Bu nedenle lütfen bize desteklemenin işe yaradığını ve cezalandırmanın yaramadığını söyleme, çünkü bunun tersi işe yarıyor.' O an Kahneman durumu kavradı. Uçuş eğitmeninin cezalandırmanın ödüllendirmeden daha etkili olduğu düşüncesi, ortalamaya geri dönme anlayışındaki yanlışlıktan kaynaklanıyordu. Eğer bir öğrenci oldukça kötü bir manevra yaptığında, bir sonraki manevra, eğitmen ödüllendirmesi ve cezalandırmasına bakılmaksızın elbette daha iyi olacaktı. Aynı biçimde, eğer öğrenci bir manevrayı aşırı iyi bir biçimde yaptıysa, bir sonraki muhtemelen daha az iyi olacaktır. 'Çünkü başarılı olduklarında başkalarını ödüllendirmek başarısız olduklarında ise cezalandırmak eğilimdeyizdir ve ortalamaya geri gitme nedeniyle başkalarını ödüllendirdiğimiz için cezalandırılmak ve başkalarını cezalandırdığımız için ödüllendirilmek insan oluşumuzun bir parçasıdır' diyor Kahneman.

Ortalamaya geri gitme karmaşık bir fikir değildir. Bir olayın sonucunun rastgele faktörlerle bir yere kadar belirlenebileceğini söyler ve bu durumda sıradışı bir olayın ardından daha az sıradışı bir olay gelmesi olasıdır. Ama sadeliğine rağmen geri gitme birçok insan tarafından takdir

görmez. Aslında diyebilirim ki, geri gitme en az anlaşılan ama dünyayı anlamak için en kullanışlı matematik kavramlarından birisidir. Bilim ve istatistik hakkındaki şaşırtıcı derecede çok sayıda yanlış düşünce, ortalamaya geri gitmeyi hesaba katmada başarısızlığa neden olur.

Hız kameraları örneğini ele alalım. Eğer bir caddenin bir noktasında çok sayıda kaza olursa, bunun için bir sebep vardır—örnek olarak bir grup afacan genç yola tel bağlamışlardır. Gençleri tutuklarsanız kazalar durur. Ya da rastlantısal olarak bir araya gelen daha fazla sebep vardır—zorlu hava şartları, yolun durumu, yerel futbol takımının galibiyet alması o bölgede oturan birisinin köpeğini gezdirme kararı. Kazalar sıradışı olaylara eş değerdirler. Ve sıradışı bir olaydan sonra olası olan, daha az sıradışı bir olay olmasıdır: Rastgele faktörler daha küçük çaplı kazaların olması için bir araya gelirler. Hız kameraları genellikle birden fazla ciddi kazanın meydana geldiği noktalara yerleştirilirler. Amaç, şoförlerin daha yavaş gitmesini sağlayarak kaza sayısının azaltılmasıdır. Evet, hız kameraları yerleştirildikten sonra kaza düşme eğilimi gösterir, ama bunun sebebinin kameralarla ilgisi çok az olabilir. Çünkü ortalamaya gerileme yüzünden kameraları yerleştirseniz de yerleştirmeseniz de, bir kaza gerçekleştikten sonra aynı noktada tekrar kaza olma olasılığı zaten daha azdır (Burada bahsedilen hız kameralarına karşıt bir görüşün dile getirilmesi değil, çünkü gerçekten de etkili olabilirler. Burada bahsedilen istatistiğin yanlış kullanımlarını ortaya koyan hız kameraları taraftarı bir söylem).

Geri dönme konusunda benim en sevdiğim örnek, sporcuların muzdarip olduğu ve Amerika'nın en büyük spor dergisinde kapak olduktan sonra başarısızlık getiren '*Sports Illustrated* laneti.' Lanet, derginin ilk sayısı kadar eski. 1954 yılının Ağustos sayısına beysbol oyuncusu Eddie Mathews kapak olmuştu ve takımı Milwaukee Braves'i ard arda dokuz galibiyete taşımıştı. Ama dergi yayınlanır yayınlanmaz takım kaybetti. Bir hafta sonra Mathews yedi maçı kaçırmasına neden olan bir yara aldı. Ama lanet en meşhur biçimde 1957 yılında saldırıya

geçti. Oklohama futbol takımı 47 maçtır mağlubiyet almamıştı bunun ardından dergi 'Oklohama neden yenilemez' başlığıyla yayınlandı. Dergi yayınlandıktan sonraki Cumartesi günü Oklahama, Notre Dame karşısında 7-0 mağlup oldu.

Sports Illustrated laneti için bir açıklama, kapağa çıkmış olmanın yarattığı psikolojik baskıdır. Sporcu ya da takım halkın gözü önünde daha ön plana çıkar ve mağlup edilmesi gereken bir örnek haline gelir. Bazı durumlarda, en gözde olmanın baskısının zarar verici olduğu doğru olabilir. Ama çoğunlukla *Sports Illustrated* laneti sadece ortalamaya geri gitmenin bir göstergesinden ibarettir. Derginin kapağında yerlerini alabilmek için bazıları genellikle formlarının zirvesinde olurlar. Sıradışı bir sezon geçiriyor olabilirler ya da şampiyon olmuş ya da bir rekoru kırmış olabilirler. Sporda başarı yetenekten kaynaklanır ama daha başka birçok rastgele etken de vardır, mesela rakibinizin nezle olup olmaması, yara alıp almamanız ya da gözünüze güneş girmesi gibi. Alınmış en iyi sonuç, sıradışı bir olayla kıyaslanabilirdir ve ortalamaya geri dönme, sıradışı olaydan sonra daha az sıradışı bir olayın olmasının olası olduğunu söyler.

Elbette, bazı istisnalar vardır. Bazı sporcular yarışmalardan çok daha iyidir ve rastgele etkenlerin performansları üzerinde çok az etkisi vardır. Şanssız oldukları halde kazanabilirler. Ama biz yine de rastgeleliğin sportif başarılardaki katkısını görmezden gelme eğilimindeyizdir. 1980'li yıllarda istatistikçiler basketbol oyuncularının sonuçlarını analiz etmeye başladılar. Belirli bir oyuncunun atışı başarmasının veya kaçırmasının tamamen rastlantısal olduğunu bulduklarında hayrete düştüler. Elbette bazı oyuncular diğerlerinden daha iyidir. Ortalama % 50 sayı yapan bir A sporcusunu ele alalım; başka bir ifadeyle sayı yapma ya da kaçırma oranı eşit olsun. Araştırmacılar, A oyuncusunun basket atma ve kaçırma diziliminin tamamen rastgele olduğunu keşfettiler. Yani oyuncu şut atmak yerine yazı tura da atabilirdi.

% 60 sayı yapma ve % 40 kaçırma şansı olan B oyuncusunu ele alalım. Basket atma dizilimi tekrar rastgeledir, sanki oyuncu topu atmak yerine 60-40 oranında yazı tura atmış gibidir. Oyuncu sayı yaptığında uzmanlar ona iyi olduğu için övgüler yağdırırlar ve sayıları kaçırdığında onu kötü bir gün geçirdiği için eleştirirler. Ama sayıyı yapması ya da kaçırmasının bir sonraki atışın sayı olması ya da kaçması üzerinde hiçbir etkisi yoktur. Her atış tıpkı yazı tura atmak gibi bir öncekinden bağımsızdır. B oyuncusu birçok oyunda 60-40'lık bir sayı ortalaması olduğu için övülür, ama onu ard arda beş basket attığı için övmenin ard arda beş kere tura atan herhangi birinin yeteneğini övmekten bir farkı yoktur. İki durumda da üst üste beş atış şanstan ibarettir. Ayrıca maç içinde daha fazla oynamış olan A oyuncusunun –her ne kadar akla yatkın olmasa da– toplamda B oyuncusundan daha fazla sayı yapması mümkündür. Rastgele olma durumu, A oyuncusuna şanslı bir zaman dilimi, B oyuncusuna da şansız bir zaman dilimi sağlar.

Kısa bir süre önce Simon Kuper ve Stefan Szymanski, İngiltere futbol takımının 1980'den bu yana oynadığı 400 maçını incelediler. *İngiltere Neden Kaybediyor*'da şöyle yazıyorlar: 'İngiltere'nin kazanma dizilimi, bir dizi yazı tura atılışından ayırt edilebilir. İngiltere'nin son oyununun ya da İngiltere'nin yakın zamanda oynadığı oyunların tahmin edilebilir herhangi bir değeri bulunmamaktadır. Bir maçta olanların bir sonraki üzerinde herhangi bir etki sahibi gibi gözükmüyor. Tahmin edebileceğiniz tek şey, orta ya da uzun vadede, İngiltere maçlarının yarısını doğrudan kazanacaktır.'

Spor performanslarının inişleri ve çıkışları genellikle rastgelelikle açıklanır. Oldukça büyük bir çıkışın ardından *Sports Illustrated* tarafından aranabilirsiniz. Ve performansınızın düşüşe geçeceği neredeyse garantilenmiş olur.


ASANSÖR
BOZUK
LÜTFEN
MERDİVENLERİ
KULLANIN
ODA 7

BÖLÜM ON BİR

Yolun Sonu

Birkaç yıl önce Daina Taimina, ders verdiği Cornell Üniversitesi'nin bulunduğu Ithaca, New York'taki evinde kanepeye uzanmıştı. Ailesinden birisi ona ne yaptığını sordu.

Neredeyse iki yüz yıl boyunca matematikçiler için bir gizem ve hayranlık olan kavrama atıfta bulunarak "Hiperbolik düzleme tığ örgüsü yapıyorum" diye cevapladı.

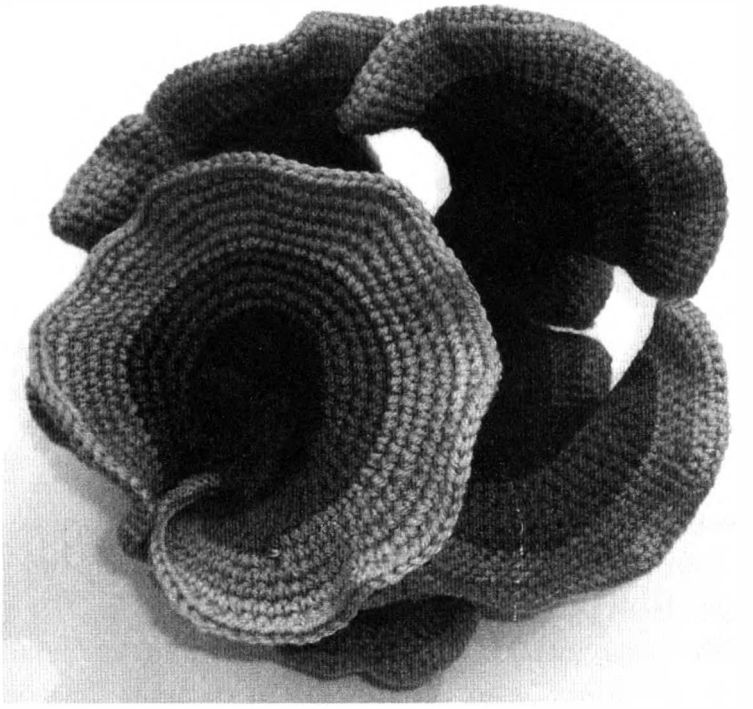
"Daha önce hiç tuğ örgüsü yapan matematikçi görmüş müydün?" diye gelmişti kayıtsız yanıt.

Ancak, bu karşılık Daina'yı bilimsel ilerleme içerisinde el sanatları kullanma konusunda daha da kararlı hale getirmişti. Tam olarak yaptığı bu oldu: 'Hiperbolik tığ işi' diye bilinen şeyi, yün iplikten ilmeklerle daha önce WI'nın yaptığı kadar güzel ve karmaşık objeler üretme metodu keşfetmek ve bu da daha önce hiçbir matematikçinin mümkün olabileceğini bile düşünmediği bir biçimde geometri anlayışına katkıda bulundu.

Hiperbol'ün tanımına ve Daina'nın tığ işi modellerinden elde edilen kavrayışlara birazdan detaylı bir biçimde değineceğim, ancak şu an için bilmeniz gereken şey, hiperbolik geometrinin tümüyle karşı sezgisel bir tip geometri olmasıdır ve on dokuzuncu yüzyılda Öklid'in *Elemanlar* yapıtında çok dikkatli bir şekilde ortaya koyduğu kurallar kümesinin yanlış kabul edilmesiyle ortaya çıkmıştır. 'Öklidyen olmayan" geometri dünya deneyimimizle tamamen çelişen fiziksel

alan teorisini tanımlamasıyla matematikçiler için bir dönüm noktası olmuştur ve bu nedenle hayal etmesi zordur ama yine de matematiksel çelişki içermez ve bu yüzden matematiksel olarak kendinden önceki Öklid sistemi kadar geçerli bir sistemdir.

On dokuzuncu yüzyılın sonlarına doğru benzer bir öneme sahip entelektüel bir atılım, sonsuzluğun farklı boyutlarda ortaya çıktığını ispatlayarak sonsuzluğa olan sezgisel anlayışımızın alaşağı eden Georg Cantor tarafından gerçekleştirildi. Öklidyen olmayan geometri ve Cantor küme teorisi, tuhaf ve muhteşem iki farklı dünyaya geçiş kapısı oluşturuyordu ve ben ilerleyen sayfalarda iki dünyayı da ziyaret edeceğim. Tartışmalı da olsa, bu ikisi birlikte modern matematiğin başlangıcı oldular.



Hiperbolik tığ işi

Yunan geometrisi temellerini ortaya koyan *Elemanlar*'ın tüm zamanların en etkili matematik ders kitabı olduğu kolaylıkla söylenebilir. Kitap ayrıca aksiyomatik sistemi de kuruyordu. Öklid önce kullanılacak terimlerin ve uygulanacak kuralları açıkça tanımlıyor ve bunlardan kendi teoremlerini oluşturuyordu. Kurallar ya da aksiyomlar bir sistemin kanıt gerektirmeksizin kabul edilen tanımlarıdır, bu yüzden matematikçiler aksiyomları her zaman mümkün olduğu kadar basit ve apaçık yapmaya çalışırlar.

Öklid *Elemanlar*'da 465 teoremin tamamını genel olarak Öklid'in beş postulatı olarak bilinen 5 tane aksiyomla ispatlamıştı:

1. İki nokta arasındaki en kısa mesafe bir doğrudur
2. İki nokta arasındaki sürekli doğru sonludur
3. Herhangi bir noktayı merkez kabul ederek herhangi bir çapta çember çizilebilir
4. Tüm dik açılar birbirine eşittir
5. Eğer bir doğru belirli iki doğrunun üzerinden geçiyorsa aynı yönde dik açıdan daha küçük iç açılar oluşturur, eğer verilen iki doğru belirsiz ise kesişim iki dik açıdan daha küçük açı olacak tarafta olur.

Beşinci aksiyoma geldiğimizde bir şeyler bizi rahatsız eder. Postulatlar oldukça hareketli başlarlar. İlk dördünü açıklamak, anlamak ve kabullenmek kolaydır. Ancak beşinciyi partiye davet eden kim? Beşinci postulat, uzun soluklu, karmaşık ve özellikle de açık değildir. Ve hatta bu temel esaslar kadar açık değildir; *Elemanlar* ilk defa önerme 29'a gereksinim duyar.

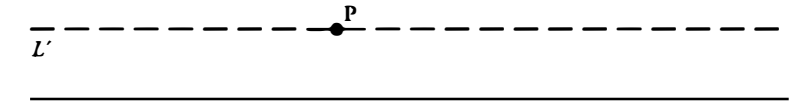
Öklid'in tümdengelim yöntemine duydukları sevgiye rağmen, matematikçiler beşinci önermeden nefret eder; sadece estetik duygularına

aykırı geldiği için değil, aynı zamanda bir aksiyom için çok fazla kabul barındırdığını hissetmelerinden dolayı. Aslında, 2000 yıl boyunca birçok büyük zekâ beşinci postulatın yerini, onu diğer postulatlardan çıkarıp bir teorem olarak yeniden sınıflandırabilmek için değiştirmeye çalışmıştı. Fakat kimse bunu başaramadı. Belki de Öklid'in zekâsının en büyük kanıtı, onun beşinci postulatın kanıt olmaksızın kabul edilmesi gerektiğini anlamasıydı.

Matematikçiler postulatı farklı terimler kullanarak yeniden ifade etmek konusunda çok daha başarılı olmuşlardı. Örneğin, 17. Yüzyılda İngiliz John Wallis *Elemanlar*'ın ilk dört postulatı aynen alıp beşinciyi aşağıdaki ifadeyle değiştirdiğinde ispatlanabildiğinin farkına varmıştı; herhangi bir üçgen, kenarlarının birbirlerine olan oranları ve kenarlar arasındaki açılar sabit kalacak şekilde istenilen bir ölçüde genişletilip daraltılabilirler. Beşinci postulatı doğrular yerine üçgenlerle açıklayarak yeniden şekillendirmek oldukça büyük bir sezgi olmasına rağmen, matematikçilerin kaygılarını yine de azaltmamıştır: Wallis'in alternatif postulatı belki beşinci postulattan biraz daha anlaşılır olmasına rağmen, yine de bu ilk dört postulat kadar basit ve ispatı kendi içinde değildi. Ayrıca beşinci postulat'ın başka eş değerleri de bulunmuştu.

Öklid'in teoremleri, beşinci postulat, üçgenin iç açıları toplamı 180 derece olduğu yani Pisagor'un teoreminin doğru olduğu ya da tüm çemberlerde, çemberin çevresinin çapına olan oranı pi olduğu ifadeleriyle değiştirilse bile hâlâ geçerlidir. Şaşırtıcı gelebilir fakat bu ifadelerin her biri matematiksel olarak birbirleriyle değiştirilebilir. Ancak, beşinci postulatın özüne en uygun eş değeri, paralel çizgilerin davranışlarıyla ilgili olanıdır. Öklid üzerine çalışan on sekizinci yüzyıl matematikçilerinden itibaren matematikçiler, paralel postulat olarak bilinen versiyonunu kullanmayı tercih etmeye başlamışlardır: Verili bir doğru ve doğrunun üzerinde olmayan bir noktadan, verilen doğruya paralel olan yalnızca bir doğru çizilebilir.

Bu paralel postulatın, 'en fazla bir doğru" matematiksel ifadeyle 'ya bir doğru vardır ya da yoktur' ifadesinden yola çıkılarak iki ayrı yüzeye gönderme yaptığı gösterilebilir. Tabloda gösterilen ilk durumda, herhangi bir L çizgisi ve p noktasından, L çizgisine paralel olan ve p noktasından geçen yalnızca bir doğru vardır (L' ile işaretlenen). Paralel postulatın bu biçimi en çok bilinen yüzeye, mesela masanızın üstünde duran bir kâğıt gibi düz bir yüzey uygulanmıştır.



Paralel postulat

Şimdi verilen bir L çizgisi, bu L çizgisi üzerinde olmayan bir P noktasını ve P den L'ye hiçbir paralel doğru çekilemeyen bir düzlem olan ikinci paralel postulat şekli düşünelim. Başta bu yüzeyin nasıl bir yüzey olduğunu anlamak oldukça zordur. Acaba hangi ...? Dünya üstünde varsa tam olarak nerede? Örnek olarak, Düşünün ki L noktamız ekvator olsun ve P noktamız da kuzey kutup noktası olsun. Kuzey kutup noktasından geçebilecek doğrular sadece Greenwich meridyeni gibi olan boylam çizgileridir ve bütün boylam çizgileri ekvatorun üzerinden geçer. Öyleyse kuzey kutup noktası üzerinden geçip ekvatora paralel olabilecek hiçbir çizgi yoktur.

Paralel postulat bize iki çeşit yüzey için geometri sağlar; düzgün yüzeyler ve küresel yüzeyler. Elemanlar, düzgün yüzeyle ilgilenmektedir ve 2000 yıl boyunca matematiksel araştırmaların ana odağı olmuştur. Dünya gibi küresel yüzeyler ise teorisyenler için, rotacılar ve astronomlar için olduğundan çok daha az ilgi çekici olmuştur. Matematikçiler düz ve küresel yüzeyleri kapsayan daha geniş bir teori bulduklarında

daha henüz 19. yüzyılın başlarıydı ve bu üçüncü bir tür yüzey olan hiperbolik yüzeyle karşılaşmalarından hemen sonra olmuştu.

Paralel postulatın aslında bir önerme değil bir teorem olduğunu, ilk dört postulatla ispatlama arayışı içinde olan en kararlı adaylardan biri, Transilvanya'da mühendislik eğitimi gören Janos Bolyai'ydi. Bir matematikçi olan babası Farkas kendi başarısız girişimlerinden dolayı zorluğun ölçüsünü biliyordu ve oğlunu durdurmak için ona yalvardı; 'Tanrı aşkına, sana yalvarıyorum, vazgeç. Ondan tensel isteklerinden korktuğun gibi korkmalısın çünkü hem seni sağlığından hem de huzur ve mutluluğundan mahrum eder.' Fakat Janos inatla babasının tavsiyelerini gözardı etti ve bu onun tek isyanı da değildi; Janos önermenin yanlış olabileceğini düşünmeye cesaret etmişti. Hıristiyanlık için İncil neyse Matematik için de *Elemanlar* öyleydi, değiştirilemeyen kutsal gerçekler kitabı. Beşinci postulatın bir aksiyom mu ya da bir teorem mi olup olmadığı hakkında tartışmaların devam etmesine rağmen, kimse bunun aslında doğru olmayabileceğini söylemeye cüret edememişti. Ve bu cüretin, yeni bir dünyanın anahtarı olduğu ortaya çıktı.

Paralel postulat, verilen bir doğru ve o doğru üzerinde olmayan bir noktadan, verilen doğruya paralel olan yalnızca bir tek doğru çizilebileceğini söylüyordu. Janos'un cesareti, verilen bir doğru ve o doğru üzerinde olmayan bir noktadan bu doğruya paralel birden fazla doğru çizilebileceğini önermekti. Her ne kadar bu açıklamanın gerçek olduğunu göstermek için görsel bir yüzey oluşturmak zor olarak gözükse de, Janos dört postulatla birlikte yaratılan bu geometrinin matematiksel olarak hâlâ tutarlı olduğunun farkına varmıştı. Bu devrim yaratacak bir buluştu ve o bunun ciddiyetinin farkındaydı. 1823 yılında babasına yazdığı mektubunda 'hiçlikten yeni bir evren yarattım' demişti.

Janos muhtemelen herhangi bir matematik enstitüsünden bağımsız olarak çalışması ve geleneksel öğretilerin propagandasına maruz

kalmamasının faydasını görmüştü. Keşfi yaptıktan sonra bile, o bir matematikçi olmayı tercih etmedi. Mezun olduktan sonra meslektaşları arasında en iyi silahşor ve dansçı olarak gösterildiği Avusturya-Macaristan ordusuna katıldı. Ayrıca olağanüstü bir müzisyendi, rivayete göre bir keresinde kazanması durumunda kaybedenlere kemanda bir parça çalması koşuluyla on üç subayı düelloya davet etmiştir.

Janos'tan habersiz bir şekilde, Avrupa akademisine Transilvanya'dan çok daha uzak bir bölgede başka bir matematikçi bağımsız olarak benzer ilerlemeleri kaydetmişti fakat matematik kuruluşları bu çalışmalarını reddetmişti. 1826 yılında Rusya'da Kazan Üniversitesi'nden bir Profesör olan Nikolay İvanoviç Lobaçevski, dünyaca ünlü St Petersburg Bilimler Akademisi'ne paralel postulatın ihtilaflı gerçeğiyle ilgili bir rapor sundu. Raporu geri çevrildi, bu yüzden Lobaçevski daha sonra, raporu yerel gazetelerden biri olan Kazan Messenger'da yayınlamaya karar verdi ve sonuçta hiç kimse farkına bile varmadı.

Ancak, Öklid'in beşinci postulatının dokunulmaz gerçekler kaidesinden düşüşündeki en büyü ironi, Janos Bolyai ve Nikolai Lobaçevski'den onlarca yıl önce matematiksel gelişimin kalbinde duran birisi tarafından aynı buluşun yapılmış olmasıydı, ancak bu kişi sonuçlarını akranlarından esirgemişti. Zamanının en büyük matematikçisi olan Carl Friedrich Gauss'un neden paralel postulat üzerine yaptığı çalışmaları gizli tuttuğu anlaşılabilmiş değildir, ama hakim olan görüş fakülte üyeleriyle Öklid'in üstünlüğü konusunda bir kavgaya tutuşmaktan kaçınmak istediği yönündedir. Babası Farkas'ın 1831 yılında yazdığı, Janos'un sonuçları hakkında ekleri okuduktan sonra Gauss kendisinin de paralel postulatın yanlışlığını kabul ettiğini herkese açıkladı. Gauss eski bir üniversite sınıf arkadaşı olan Farkas'a, oğlu Janos'u 'birinci sınıf bir dahi' olarak tanımladığı bir mektup yazdı, yine de mektubuna onun bu atılımını övmenin mümkün olmadığını ekledi: "Çünkü onu övmek aslında kendimi övmek olur. Denemenin tüm içeriği benim buluşlarımla örtüşüyor, bunların bazıları 30-35 yıl önce yapılmış buluşlardı.

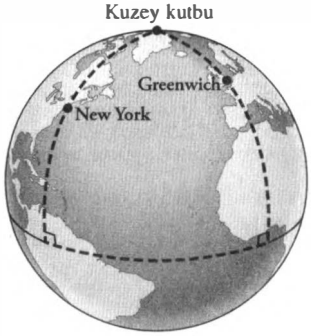
Daha sonra bunların hepsini yazmaya niyetliydim, böylece bu bilgiler benimle birlikte yitip gitmeyecekti. Bu yüzden böylesi bir sıkıntıdan kurtulmak benim için çok hoş bir sürpriz oldu, ayrıca bu konuda öncülüğü benim yerime eski bir dostumun oğlunun yapması benim için büyük bir mutluluk oldu.' Janos, Gauss'un bu sonuçlara varan ilk kişi olduğunu öğrendiğinde sıkılmıştı. Ve yıllar sonra Lobaçevski'nin de kendisinin önünde olduğunu öğrendiğinde, Lobaçevski'nin, Gauss tarafından kendisini buluşundan mahrum etmek için kurnaz bir hile olarak yaratılmış kurgusal bir karakter olduğu saçma fikrine kendini kaptırmıştı.

Gauss'un beşinci postulat üzerine yapılan araştırmalara son katkısı, ölmeden kısa bir süre önce geldi, o sıralar çok ciddi şekilde hastaydı, araştırmanın başlığını onun en parlak öğrencilerinden biri olan 27 yaşındaki Bernhard Riemann'ın derslerinden biri için attı; 'Geometrinin temellerinde yatan hipotezler üzerinde'. Lüteriyen papazı olan bir babanın hastalıklı sayılacak kadar utangaç oğlu olan Riemann ilk başlarda ne söyleyeceği konusunda kendiyle çok yıkıcı bir mücadeleye girdi fakat sonunda söyledikleri matematikte devrim yaratmıştı. Daha sonra fizik alanında devrim yarattı, çünkü getirdiği yenilikler genel izafiyet teorisini formüle etmek için Einstein'ın ihtiyaç duyduğu şeylerdi.

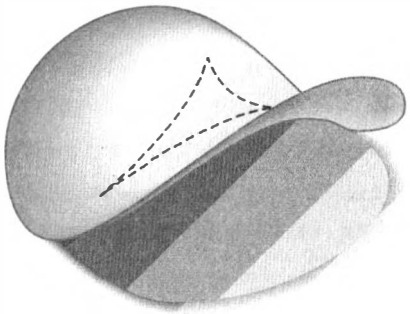
Riemann'ın 1854 yılında verdiği dersler, paralel postulatın çöküşü ve yerine Öklid ve Öklid dışı tüm teorileri kapsayan yeni bir teori oluşturmasıyla geometri anlayışımızdaki paradigma değişimine sağlamlık kazandırdı. Riemann teorisinin arkasındaki anahtar kavram, uzayın eğriliğiydi. Bir yüzeyin eğriliği sıfırsa, yüzey düzdü ya da Öklid geometrisiydi ve *Elemanlar*'ın tüm sonuçları geçerliliğini sürdürüyordu. Eğer yüzey pozitif ya da negatif eğrilikte ise, yüzey eğriydi ya da Öklid dışı geometriydi ve *Elemanlar*'ın sonuçları geçerliliklerini yitiriyordu.

Eğriliği anlamanın en basit yolu, üçgenlerin davranışını dikkate almaktır diye devam etti Riemann. Sıfır eğrilikteki bir yüzeyde bir üçgenin iç açıları toplamı 180 derece, Pozitif eğrilikteki bir yüzeyde açılar toplamı 180 dereceden büyük, negatif eğrilikli bir yüzeyde açılar toplamı 180 dereceden küçük oluyordu.

Kürenin eğriliği pozitiftir. Bunu aşağıdaki şemada bulunan üçgenin iç açılarını toplayarak görebiliriz, bu üçgen ekvator, Greenwich meridyeni ve Greenwich'in 73 derece batısından (New York'tan) geçen boylamdan oluşmaktadır. Her iki boylam da ekvatoru 90 derecelik dik açıyla keserler yani üç iç açının toplamı 180 dereceden daha büyük olmak zorundadır.



Küre üzerindeki üçgen: Açıların toplamı 180 dereceden büyük



Pringle üzerindeki üçgen: Açıların toplamı 180 dereceden küçük

Nasıl bir yüzey negatif eğrilikte olur? Bir başka değişle açılarının toplamı 180 dereceden küçük olan üçgenler neredediir? Bir paket Pringles açın cevabı göreceksiniz. Patates cipsinin eğri kısmı üzerine bir üçgen çizin (mümkünse iyi bir Fransız hardalıyla), üçgen, kürede gördüğümüz gibi şişkin değil sanki emilmiş gibi görünecektir. Açılarının toplamı açık bir biçimde 180 dereceden azdır.

Negatif eğrilikteki yüzeylere hiperbolik yüzeyler denir. Öyleyse bir Pringle'ın yüzeyi hiperboliktir. Buna rağmen, Pringle sınırlara sahip olduğu için hiperbolik geometri anlamında yalnızca bir mezedir. Bir matematikçiye sınır gösterirseniz, onun üstüne gitmek isteyecektir.

Şu şekilde düşünün. Herhangi bir kenarı olmayan ve sıfır eğrilikteki bir yüzey hayal etmek basittir: Örneğin masanın üzerinde bulunan ve her yönde sonsuz genişlikte uzanan bu kâğıt. Eğer böyle bir yüzeyde yaşıyor olsaydık ve herhangi bir doğru üzerinde düz bir biçimde herhangi bir yöne doğru yürümeye başlasaydık bir kenara asla ulaşamazdık. Aynı şekilde elimizde eğriliği pozitif olan ve hiçbir kenarı olmayan bariz bir örneğimiz var: Küre. Eğer bir küre üzerinde yaşıyor olsaydık, bir yöne doğru kadar yürüyebilir ve kenara asla ulaşamazdık (elbette pürüzlü bir küre üstünde yaşıyoruz. Eğer dünya tamamen düzgün olsaydı, üzerinde yolumuzu engelleyecek dağlar ve okyanuslar olmasaydı, yürüyüşe başlar, başlangıç noktamıza geri döner daireler çizerek yürüyüşümüze devam ederdik).

Peki, kenarları olmayan negatif eğrilikte bir yüzey neye benzer? Bir Pringle gibi görünemez, eğer dünya büyüklüğünde bir Pringle üzerinde yaşıyor olsaydık ve bir yöne doğru yürümeye başlasaydık, sonunda mutlaka kenarından düşerdik. Matematikçiler uzun süredir kenarsız bir hiperboliğin, üzerinde sonuna gelmeksizin istediğimiz kadar uzağa yürüyebileceğimiz ve hiperboliklik özelliğini kaybetmeyecek bir şeklin nasıl görüneceğini merak ediyorlar. Bunun sürekli bir Pringle gibi eğrilere sahip olması gerektiğini biliyoruz, öyleyse Pringle'ları

uç uca yapıştırmaya ne dersiniz? Ne yazık ki bu işe yaramaz çünkü Pringle'lar birbirlerine düzgün bir biçimde uymaz ve eğer boşlukları başka bir yüzeyle doldurmaya kalkarsak bu şekil artık hiperbolik bir yüzey olmaz. Diğer bir deyişle, Pringle bize hiperbolik özelliklerini sadece belli bölgelerde gösterir. En parlak matematik beyinleri için bile hayalde canlandırması bu kadar zor olan şey sonsuza kadar giden hiperbolik bir yüzeydir.

Küresel ve hiperbolik yüzeyler matematiksel olarak birbirlerinin tersidir, işte size neden böyle olduğunu gösteren pratik bir örnek. Küresel bir yüzeyden bir parça kesin, örneğin bir basket topundan. Elimizdeki malzemeyi düzleştirmek için zemine ya gerilecek ya da yırtılacaktır, çünkü düzgün bir zemine yayılacak kadar yeterli materyal yoktur. Şimdi elimizde lastik bir Pringle olduğunu düşünün. Düzleştirmek istediğimiz Pringle'da materyal fazlası bulunur ve bir kısmı kendi üzerine katlanır. Küresel yüzey kendi içine kapanırken hiperbolik yüzey genişler.

Hadi bize düz, küresel ve hiperbolik yüzeylerin sınıflandırılmasını kestirme bir yol sağlayan paralel postulata geri dönelim.

Verilmiş bir doğru ve bu çizgi üzerinde olmayan bir nokta:

Düz bir yüzeyde bu noktadan geçen ve doğruya paralel olan yalnızca tek bir doğru vardır.

Küresel bir yüzeyde bu noktadan geçen ve doğruya paralel olan hiçbir doğru yoktur.*

Hiperbolik yüzeyde bu noktadan geçen ve doğruya paralel olan sonsuz sayıda doğru vardır.

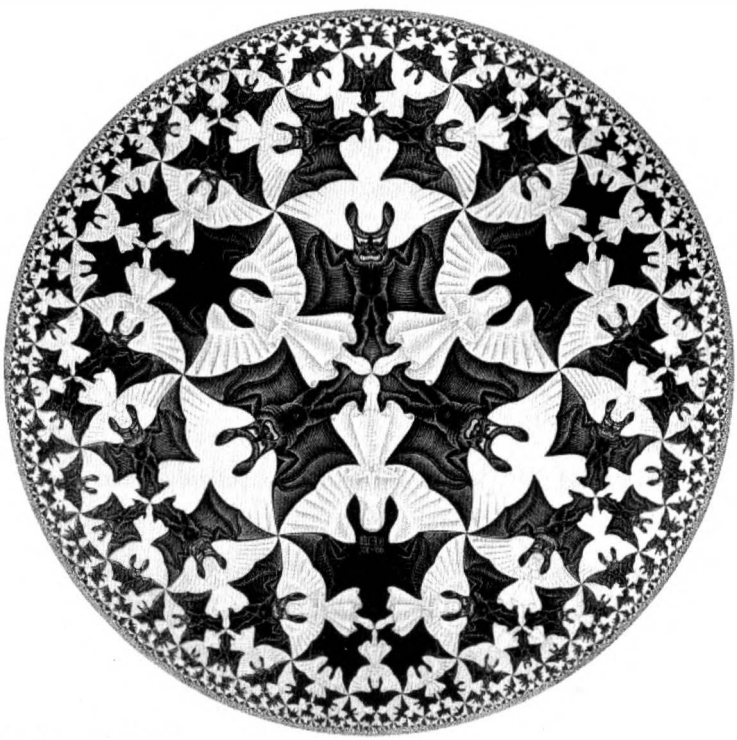
---

* Enlem çizgilerinin ekvatora paralel olduğunu düşünebilirsiniz. Bu doğru değildir, çünkü enlem çizgileri (ekvator dışında) düzgün çizgiler değillerdir ve yalnızca düzgün çizgiler paralel oluşturabilir. İki nokta arasındaki en kısa mesafe düz bir çizgidir, bu yüzden aynı enlem üzerinde olan New York ve Madrid arasında uçan bir uçak enlem çizgisi üzerinde değil, iki boyutlu bir harita üzerinden bakıldığında eğri gözüken bir rota üzerinde uçarlar

Sezgisel olarak düz ve küresel yüzeylerin üzerindeki paralel doğruların davranışlarını anlayabiliriz, çünkü sonsuza kadar uzanan düz bir yüzeyi kolaylıkla hayal edebiliriz ve hepimiz kürenin ne olduğunu biliriz. Hiperbolik yüzeyler üzerindeki paralel doğruların davranışlarını anlamak çok daha zordur çünkü sonsuzluğa uzanan bir hiperbolun neye benzediğini tam olarak bilmemekteyiz. Hiperbolik yüzeyler üzerindeki paraleller gittikçe birbirlerinden uzaklaşırlar. Birbirlerinden eğrilerek uzaklaşmazlar çünkü iki doğrunun paralel olması için aynı zamanda düzgün olmaları gerekmektedir, ancak sapma gösterirler çünkü hiperbolik yüzey sürekli olarak eğrilerek kendisinden uzaklaşmaktadır ve hiperbolik yüzey eğrilerek kendisinden uzaklaştıkça paralel doğrular arasındaki boşluk sürekli artar. Yine, bu fikir akla tamamen aykırıdır, dehasına rağmen Riemann'ın özelliklerini tanımladığı yüzeyin şeklini ortaya koyamayışı şaşırılacak bir durum değildir.

19. yüzyılın sonlarında hiperbolik düzlemin görselleştirilmesi çabası pek çok matematikçiyi harekete geçirmiştir. Henri Poincaré'nin bir girişimi, Frenchman'ın hiperbolik yüzey "disk model"inden esinlenilerek ünlü Çember Limiti serisi gravürünün sahibi Maurits Cornelis Escher'i büyüledi. Çember Limiti IV'de, dairesel bir disk üzerinde iki boyutlu bir evren ve bu evrenin üzerinde diskin dış çemberine yaklaştıkça aşamalı olarak küçülen melekler ve şeytanlar bulunmaktadır. Ancak, melekler ve şeytanlar, daraldıkça küçüldüklerini anlamazlar çünkü kendi ölçüm aletleri de küçülmektedir. Disk sakinlerine göre, hepsi aynı ölçülerdedir ve evrenleri sonsuza kadar devam etmektedir.

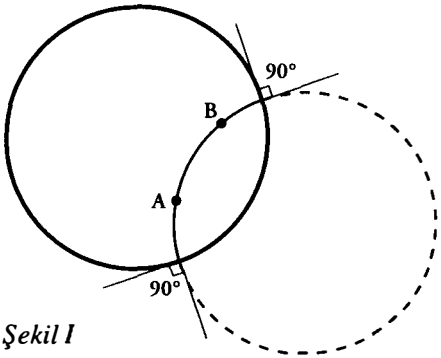
Poincaré disk modelinin marifeti paralel doğruların hiperbolik uzayda nasıl davrandığını güzel bir şekilde göstermesidir. İlk olarak disk üzerinde ne tip düz çizgilerden bulunduğunu net bir biçimde bilmemiz gerekir. Küre üzerindeki düz bir çizginin düzlem haritasında eğri olarak gözüktüğü gibi (örneğin, uçuş rotaları düzdür ama harita üzerinde eğri gözükürler) disk dünyası üzerindeki düzgün çizgiler de bize eğri olarak gözükürler. Poincaré disk üzerindeki doğru hattı, diske dik açıyla giren



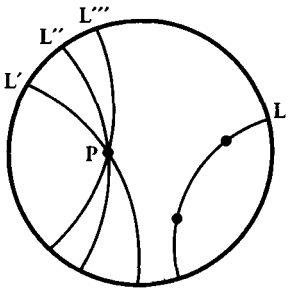
Çember Limit IV

çember kesiti olarak tanımlıyordu. Bir sonraki sayfadaki Şekil 1, A ve B noktalarından geçen ve diske dik açıyla giren bir çemberle yapılmış A ve B noktaları arasındaki doğruyu göstermektedir. Paralel postulatın hiperbolik uyarlaması, her bir L doğrusu ve bu doğru üzerinde olmayan P noktası için, L doğrusuna P noktasından geçen sonsuz sayıda paralel bulunduğunu belirtir. Bu durum, her biri P noktasından geçen ve L doğrusuna paralel olan - L', L" ve L"' işaretlenmiş doğrularının bulunduğu Şekil 2'de gösterilmektedir (iki çizgi doğrusalsa ve hiçbir zaman kesişmiyorlarsa paraleldirler). L', L" ve L"' doğrularının tümü diske dik açılarla giren farklı çemberlerdir. Artık diske baktığımızda P noktasından geçen ve L doğrusuna paralel olan sonsuz sayıda doğ-

runun nasıl olduğunu anlayabiliriz, çünkü diske dik açıyla giren ve P noktasından geçen sonsuz sayıda çember çizebiliriz. Poincaré modeli aynı zamanda bize iki paralel doğrunun nasıl ıraksadığını anlamamıza da yardımcı olur; L ve L' birbirlerine paraleldir ancak diskin çevresine yaklaştıkça birbirlerinden uzaklaşırlar.



Şekil I



Şekil II

Poincaré'nin disk dünyası aydınlatıcıydı, ama sadece bir noktaya kadar. Bize oldukça tuhaf bozuk bir lens aracılığıyla Hiperbolik uzayın kavramsal model bir bize sunmasına karşın, hiperbolik bir yüzeyin neye benzediğini ortaya koymaz. On dokuzuncu yüzyılın sonların daha da umut verici gözüken daha gerçekçi hiperbolik modellerin arayışına 1901 yılında Alman matematikçi David Hilbert tarafından, formül kullanarak hiperbolik bir yüzeyin tanımlanmasının imkânsız olduğu ispatıyla büyük bir darbe vuruldu. Hilbert'in kanıtı matematik topluluğu tarafından mecburen kabul edildi, çünkü şöyle bir sonuca varmışlardı: Eğer böyle bir yüzeyin formülle tarif edilmesi imkânsızsa, böyle bir yüzeyin de var olmaması gerekir. Bu yüzden Hiperbolik yüzeyler oluşturmaya olan ilgi azaldı.

Bu bizi, Londra'daki, tiyatroların, sinemaların, sanat galerilerinin bulunduğu nehir kıyısı yerleşimi olan South Bank'de tanıştığım Daina Taimina'ya geri getiriyor. Taimina, bana kısaca Cornell Üniversitesi'nde misafir doçent olarak öğrettiği hiperbolik uzay tarihinden bahsetti. Hilbert'in, hiperbolik alanın bir formül tarafından oluşturulamayacağı ispatının sonucu olarak, bilgisayarların da hiperbolik yüzeylerin görüntüsünü oluşturamayacaklarını çünkü bilgisayarların sadece formüller yardımıyla görüntüler oluşturabildiğini söyledi. Ancak, 1970'li yıllarda, geometrici William Thurston çok daha verimli olan düşük teknolojili bir yaklaşım buldu. O hiperbolik yüzey yapmak için formüle değil, kâğıt ve makasa ihtiyacımız olduğu inancındaydı. 1981 yılında Fields Madalyası (matematikte en yüksek ödül) ile ödüllendirilen ve şimdi Daina'nın Cornell Üniversitesi'ndeki meslektaşı olan Thurston, atmalı şeklinde kâğıt şeritlerinin birbirine yapıştırılmasıyla yapılmış bir model geliştirdi.

Daina öğrencilerine ders verirken Thurston modelini kullanıyordu ama bu model o kadar kırılgandı ki her seferinde parçalanıyordu ve her seferinde yeni bir tane yapmak zorunda kalıyordu. 'Kâğıt yapıştırmaktan nefret ediyorum, beni çılgına çeviriyor,' diyordu. Sonra aklına parlak bir fikir geldi. Kâğıt yapıştırmak yerine hiperbolik düzlem modelini örgüyle örmek mümkün olabilir miydi?

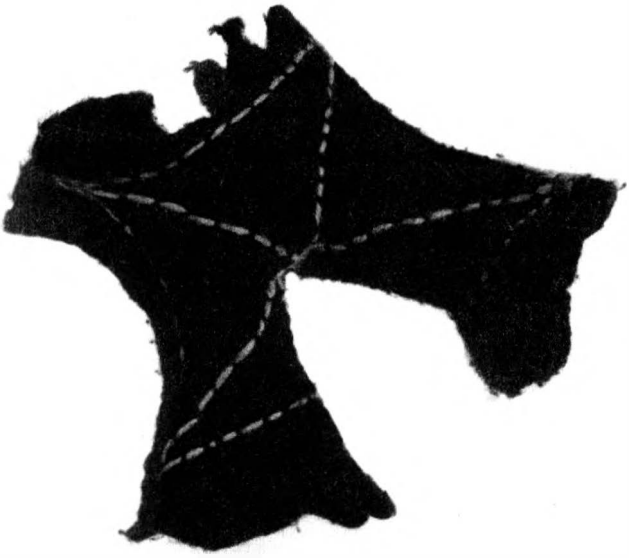
Fikri oldukça basitti: Bir ilmik hattı ile başla ve sonra devam eden her bir hat için önceki hattaki ilmik sayısına bağlı olarak sabit bir miktarda ilmik ekle. Örnek olarak, önceki hattaki her iki ilmik için bir tane ilmik. Bu durumda eğer ilk hatta 20 ilmikle başlarsan ikinci hatta 30 ilmik olur (10 tane ek), üçüncü hatta 45 ilmik olur (15 tane ek) ve böyle devam eder (Dördüncü hatta fazladan 22,5 ilmik olmalıdır, yarım ilmik yapamayacağımız için ilmik sayısını ya yukarı ya da aşağı yuvarlamamız gerekir). Bununla adeta hiperbolik olarak dışarı doğru gittikçe genişleyen, bir kumaş parçası oluşturmayı hayal ediyordu. Ancak örgü çok dikkat gerektiren bir işti, herhangi bir hata-

dan sonra o bütün hattı sökmek gerekiyordu. Bu yüzden örgü şişlerini tığ ile değiştirdi. Tığ ile her seferinde yalnız bir tane ilmik ördüğünüz için, sökme ihtimali yoktur. İşin sırrını çok çabuk kapmıştı. 1960'lı yılların Sovyetler Letonya'sında geçirdiği çocukluğu onun el işlerinde bir şeytana dönüşmesine çok yardımcı olmuştu.

İlk tığ modelinde, önceki hatta yer alan her iki ilmik için 1 ilmik eklemişti. Ancak sonuç olarak ortaya, sıkı birçok fırfırı olan bir malzeme çıkmıştı. "Çok kıvrımlıydı" diyordu.

"Sorunun ne olduğunu göremiyordum." Bu yüzden bir sonraki denemesinde oranları değiştirdi ve önceki hatta bulunan her beş ilmik için bir yeni ilmik eklemişti. Beklediğinden daha iyi bir sonuç elde etmişti. Malzeme artık düzgün bir şekilde kendi üzerine katlanıyordu. Malzemeyi aldı ve içeri ve dışarı doğru genişleyen kanatlar üzerindeki düzgün doğruları takip etti ve çabucak birbirlerinden ıraksayan paralel doğruları görebildiğini fark etti. 'Bu daima görmeyi hayal ettiğim resimdi" demişti heyecanla. "Benim için çok heyecan vericiydi. Aynı zamanda bilgisayarların yapamadığı bir şeyi ellerimle yapmanın verdiği heyecanı yaşıyordum" derken gözlerinin içi gülüyordu.

Daina hiperbolik tığ modelini eşine gösterdi, o da Daina kadar heyecanlanmıştı. David Henderson Cornell Üniversitesi'nde geometri profesörüydü. Onun uzmanlık alanı Daina'nın hakkında hiçbir şey bilmediğini iddia ettiği topolojiydi. David ona topolojicilerin uzun süredir, hiperbolik düzlemde çizilen sekizgeni pantolona benzeyecek biçimde katlayabileceğini açıklamıştı. "O sekizgeni oluşturmak zorundayız" demişti karısına ve yaptıkları tam da buydu. "Hiperbolik bir pantolonu daha önce hiç kimse görmemişti" dedi Daina heyecanla ve yanında taşıdığı spor çantasını açtı, içinden tığ işi sekizgen bir parça çıkarttı ve modelin nasıl oluşturulduğunu göstermek için katlamaya başladı. Yeni yürümeye başlamış bir bebek için yünden örülmüş çok şirin bir şorta benziyordu.



Daina'nın zincirli tasarımları hakkındaki konuşmalar Cornell Üniversitesi matematik bölümünün her yerine yayılmıştı. Çalışmalarını Hiperbolik düzlemlerle ilgili yazılarıyla tanınan bir meslektaşına gösterdiğini söyledi. 'Modele baktı ve onunla oynamaya başladı. Sonra yüzü aydınlandı. "Horocycle işte tam da böyle görünür!" demişti elindeki modelin daha önce hiç resmedilememiş çok karmaşık bir eğri modeli olduğunu fark ederek. "Tüm kariyeri boyunca onlar hakkında yazılar yazmıştı" diye ekledi Daina. "Ama onlar sadece hayal gücünün içindeydi."

Daina'nın hiperbolik modellerinin, matematiğin kavramsal olarak yorucu bir alanına yeni ve önemli bir kavrayış imkânı getirdiğini söylemek pek de abartı sayılmaz. Bu modeller öğrencilere daha önce sadece soyut yollarla anlaşılabilen yüzeylere dokunma olanağı tanıyarak hiperbolik düzlem konusunda organik bir tecrübe yaşama fırsatını tanıyorlardı. Ancak, modeller mükemmel değillerdi. Sorunlardan bir tanesi, ilmiklerin

kalınlığı yüzünden teoride pürüzsüz olması gereken bu yüzeyi sadece yaklaşık kaba bir modeli olmasıydı. Yine de bunlar Pringle'dan çok daha kullanışlı ve daha doğruydular. Eğer hiperbolik tığ işinin sonsuz sayıda sırası olsaydı, böyle bir yüzeyde yaşamak ve sınırına ulaşmadan herhangi bir yönde sonsuza kadar yürümek mümkün olabilirdi.

Daina modellerinin etkileyici taraflarından biri şeklen idrak edilebilen bir şey için beklenmedik organik bir görünüş sağlamasıdır. Hatlar göreceli olarak küçük dikişler halinde arttırıldığında model lahana yaprakları gibi görünüyordu. Artış daha büyük olduğunda, malzeme doğal mercan görünümlü parçalar biçiminde kendi üzerlerine kıvrılır. Daina'nın Londra'ya gelmesinin asıl amacı onun modellerinden esinlenen dünya denizlerinin yok olması konulu Hiperbolik Mercan Resifi Tığ İşi, sergisinin açılışıydı. Getirdiği matematiksel yenilik sayesinde Daina farkında olmadan küresel bir tığ aktivizmi hareket oluşturdu. Geçtiğimiz on yıl içerisinde Daina yüzden fazla hiperbolik model ördü. Bunlardan en büyüğünü Londra'ya getirdi. Bu, pembe renkte 5,5 km uzunluğunda 4,5 kilogram iplik kullanılarak yapılmış bir modeldi ve yapımı altı ay sürmüştü. Tamamlanması tam bir çileye dönüşmüştü. "Büyüdükçe döndürmek için daha fazla enerji gerekiyordu," diyordu. Modelin dikkat çekici bir özelliği de Daina'nın kendisinin yaklaşık iki katı olan 3,2 metrekarelik büyüklükte yüzeye sahip olmasıydı. Hiperbolik düzlemler minimum hacimde maksimum yüzey oluştururlar, bu yüzden bazı bitkiler ve deniz organizmaları tarafından tercih edilirler. Bir organizma, mercanlarda olduğu gibi beslenmek için geniş bir yüzeye ihtiyaç duyan canlılar hiperbolik bir büyüme gösterirler.

Eğer Daina dünyaya bir erkek olarak gelmiş olsaydı hiperbolik tığ örgüsü fikrini düşünmesi düşük bir ihtimal olurdu, bu yüzden onun bu keşfi, kadınların uzun zamandır yeterince temsil edilmediği matematiğin

kültürel tarihinde takdire değer bir sanat eseridir. Aslında Tığ işi, son yıllarda geleneksel yeni teknikleri keşfetmek için matematikçilere ilham sağlayan kadın zanaatlarından sadece bir tanesidir. Matematiksel örgü, nakış ve dokuma hep beraber Matematik ve Fiber Sanatlar olarak da bilinen akademik bir disiplini oluşturmaktadır.

Hiperbolik uzay ilk düşünüldüğü zaman, gerçeklik algısına tamamen karşı görünüyordu ama bugün düz veya küresel yüzeyler kadar 'gerçek' olarak kabul edilir oldu. Her yüzeyin kendine ait bir geometrisi vardır ve biz kendimize en uygun olanı seçeriz ya da Henri Poincaré'nin bir zamanlar dediği gibi; 'Bir geometri, bir diğerinden asla daha doğru olamaz, sadece daha kullanışlı olabilir.' Örneğin Öklid geometrisi cetveller, pergeller ve düzlem kâğıtları kuşanmış ilkokul çocukları için en uygun geometriyken, uçuş rotalarını hesaplayan pilotlar için en uygun olan küresel geometridir.

Fizikçiler de hangi geometrinin kendi amaçları için en uygunu olduğunu merak ederler. Riemann'ın yüzeylerin eğriliği hakkında fikirleri Einstein'a en büyük atılımlarından birisini gerçekleştirmesine olanak sağladı. Newton yasaları uzayı Öklidyen ya da düz varsayar. Ancak Einstein'ın genel izafiyet teorisi, uzay-zaman geometrisinin (3-boyutlu uzay ve dördüncü boyut olarak kabul edilen zaman) Öklid dışı eğri geometrisine uyduğunu belirtir. 1919 yılında, Brezilya'nın kuzeydoğusunda bulunan Sobral şehrine düzenlenen bilimsel bir keşif gezisinde, güneş tutulması sırasında güneşin arkasında kalan yıldızların görüntülerini çektiler ve yıldızların gerçek konumlarından biraz kaydığını keşfettiler. Bu Einstein'ın yıldızlardan gelen ışıkların dünyaya ulaşmadan önce güneşin etrafında büküldüğü teorisiyle açıklanmıştı. Işık üç boyutlu uzayda güneşin etrafında bükülüyor gözükmesine rağmen ki bu bir şeyleri görebilmemizin tek yoludur, eğri uzay zaman geometrisine aslında doğrusal bir yol kat eder. Aslında Einstein'ın teorisinin yıldızların konumunu doğru tahmin edebiliyor olması genel görelilik teorisini haklı çıkartıyordu ve ona dünya çapında büyük bir ün

kazandıran da buydu. *London Times* başlığından şunu ilan ediyordu: 'Bilimde devrim, Yeni Evren Teorisi, Newton yasaları yıkıldı.'

Einstein, eğri olduğunu gösterdiği uzay-zaman üzerine kafa yoruyordu. Peki, zamanın bir boyut olarak kabul etmeden evrenimizin eğriliği? Hangi geometrinin en geniş anlamda bizim boyutlu düzlemimizin davranışlarına en uygun olduğunu görmek için, doğruların ve şekillerin çok büyük uzaklıklarda nasıl davrandığını görmemiz gerekir. Bilim insanları bunu Mayıs 2009 yılında fırlatılan ve Büyük patlama sonrası 'akşam kızıllığı' olarak tabir edilen kozmik arka plan radyasyonunu her zamankinden daha yüksek bir çözünürlük ve hassasiyet ölçen Planck uydusu tarafından toplanmış veriler aracılığıyla keşfetmeyi umuyorlardı. Her ne kadar evrenin hiperbolik olma olasılığı hâlâ mümkün olsa da genel kanı evrenin düz ve ya küresel olduğu yönündedir. Aslında başlangıçta saçma olduğu düşünülen bir teorinin aslında gerçekleri yansıtıyor olabilme ihtimali kaderin bir cilvesidir.

Matematikçilerin Öklid dışı uzayın karşı sezgisel bölümlerini keşfettikleri sırada, bir adam başka bir matematiksel kavramı tepetaklak ediyordu: Sonsuzluk. Almanya Halle Üniversitesi'nde öğretim görevlisi olan Georg Cantor, sonsuzluğun birden fazla boyutu olabileceğini gösteren bir sayıların teorisini geliştirmişti. Cantor'un fikirleri alışılmışın o kadar dışındaydı ki başlangıçta birçok meslektaşı tarafından alaya alındı. Örneğin Henri Poincaré onun çalışmalarını 'Matematiğin bir gün tedavisini bulabileceği bir illet' diye tanımlarken, Cantor'un eski öğretmeni ve Berlin Üniversitesi'nde matematik profesörü Leopold Kronecker, onu "şarlatanlık" ve gençliği yozlaştırmakla suçlamıştı.

Bu söz düellosu muhtemelen, 1884 yılında 39 yaşında olan Cantor'un sinirlerini çökerterek, birçok defa meydana gelen ruh sağlığının bozulması ve hastaneye yatırılma olayının ilki olmuştu. Cantor hakkındaki

Her Şey ve Daha Fazlası kitabında, yazar David Foster Wallace şunları söylemektedir: 'Ruhsal yönden rahatsız olan matematikçi günümüzde, çağlar boyunca maceracı şövalye, mahcup aziz, işkence görmüş sanatçı ve deli bilim nasıl görüldülerse öyle görülmektedir. Bir bakıma yasaklanmış bölgelere gidip hepimizin kullanabileceği bir hediyeyle geri dönüp cezasını tek başına çeken Prometheus gibi.' Edebiyat ve filmler matematik ve delilik arasında bağlantıyı romantikleştirdikleri için suçludur. Bu Hollywood senaryolarının anlatım gereksinimlerine uygun bir klişedir (sunum A: Akıl oyunları), fakat elbette bu haksız bir genellemedir. Ancak klişenin icat edildiği büyük matematikçilere ilk örnek Cantor'dur. Bu klişe özellikle ona uygun gelir çünkü matematiklere, felsefe ve dini birbirine bağlayan bir kavram olan sonsuzlukla boğuşmuştur. Sadece matematiksel bir doktrinle uğraştığı için değil, aynı zamanda yeni bir bilgi teorisi ve kendi aklınca insanın yeni bir tanrı algılayışı teorisini ortaya koyduğu içindir. Bu yolda ilerlerken birkaç kişiyi hayal kırıklığına uğrattığına da şaşırmamak gerekir.

Sonsuzluk matematik içerisinde insan beynini en çok kurcalayan kavramlardan biridir. Daha önce, Zenon paradoksunda giderek azalan mesafeler içindeki sonsuz sayının bulunduğunu öngörmenin matematiksel ve felsefi tuzaklarla dolu olduğunu görmüştük. Yunanlılar sonsuzluktan ellerinden geldiğince uzak durmaya çalışmışlardı. Öklid sonsuzlukla ilgili görüşünü olumsuz savlar ile ifade etmişti. Örneğin, onun sonsuz sayıda asal sayı olduğu ispatı, aslında daha büyük bir asal sayı bulunamayacağının ispatıdır. Eskiler, sonsuzluğu kendi başına yeten bir kavram olarak kabullenmekten kaçınıyorlardı, bu yüzden Zenon paradokslarına içkin olan sonsuz seriler onlar için sorunluydu.

On yedinci yüzyıla gelindiğinde, matematikçiler, sonsuz adım içeren işlemleri kabul etmeye istekliydiler. 1655 yılında, Sonsuz küçüklükler (sonsuz derecede küçülen nesneler için) üzerine yaptığı çalışmada sonsuzluk için ∞ sembolünü kullanan John Wallis'in çalışması, Isaac Newton'ın kalkülüs çalışmasının zeminin oluşturdu. Sonsuz sayıda

terimden oluşan = 1 - ... gibi yararlı denklemlerin bulunması bize sonsuzluğun bir düşman olmadığını, öyle bile olsa dikkat ve şüpheyle yaklaşılması gerektiğini gösterdi. 1831 yılında Gauss sonsuzluğun kimsenin asla ulaşamayacağı bir mesafeden bahsettiği, sadece hiç durmadan devam edebilmeyi ifade eden 'bir tür konuşma biçimi' olduğunu belirtirken genelgeçer bir bilgiyi dile getiriyordu. Cantor'un sapkınlığı, sonsuzluğu kendi içinde bir varlık gibi muamele etmesiydi.

Cantor öncesi matematikçilerin neden sonsuzluğa herhangi bir diğer sayı gibi davranmaktan bu kadar rahatsızlık duydukları bugün bile hâlâ bir muammadır, bunların en meşhuru Galileo'nun İki Yeni Bilim'de yazdığı, Galileo paradoksudur:

1) 1, 4, 9 ve 16 gibi bazı sayılar karedir ve 2, 3, 5, 6, 7 gibi bazı sayılar ise kare değillerdir.

2) toplamda bütün sayılar, toplam kare sayılardan daha büyük olmalıdır çünkü bütün hem kareleri hem de kare olmayanları kapsamaktadır.

3) Ancak her bir sayı için kendisi ve karesini arasında birebir eşleme belirlenebilir.

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \ldots & n^2 & \ldots \end{array}$$

4) O halde, aslında bilinen sayılar kadar da kare sayılar vardır. Bu da bir çelişkidir çünkü ikinci madde de tüm sayıların toplamda kare sayılardan daha fazla olması gerektiğini ortaya koymuştuk.

Galileo'nun vardığı sonuç, sonsuzluk söz konusu olduğunda, 'eşit', 'daha fazla' ve 'daha az' gibi sayı kavramları pek bir anlam ifade etmediğidir. Bu terimler sonlu miktarları tartışırken anlaşılabilir ve tutarlı olabilirler, sonsuz miktarları tartışırken değil. Toplamda, bütün sayıların ve kare sayılardan fazla olduğunu ya da her sayı kadar kare sayı bulunduğunu söylemek anlamsızdır hem sayılar hem de kare sayılar topluluğu sonsuzdur. Georg Cantor Galileo'nun paradoksu gereksiz kılan yeni bir sonsuzluğu düşünme yöntemi geliştirdi. Cantor sayıları tek tek ele almak yerine 'kümeler' adını verdiği sayı topluluklarını dikkate aldı. Herhangi bir kümenin sırasallığı o topluluk içindeki elemanların sayısı kadardır. O halde {1, 2, 3} dizisinin eleman sayısı üç ve {17, 29, 5, 14} dizisinin eleman sayısı dörttür. Sonsuz sayıda üyesi bulunan kümeler ele alındığında Cantor 'küme teorisi'nin nabzı tavan yapar. İbrani alfabesinin ilk harfini sıfır alt indisi ile kullanarak ($\aleph_0$) (alef sıfır olarak telaffuz edilir), kullanarak sonsuzluk için yeni bir sembol ortaya koydu ve bunun doğal sayılar kümesi eleman sayısı ya da {1, 2, 3, 4, 5,...} olduğunu söyledi. Elemanları doğal sayılar kümesiyle birebir eşleme yapılabilen her bir sayı kümesinin eleman sayısı $\aleph_0$ olur. O halde, doğal sayılar ve kareleri arasında bire bir eşleme olduğu için, {1, 4, 9, 16, 25 . . .} kare kümesinin eleman sayısı $\aleph_0$ olur. Aynı şekilde tek sayılar kümesi {1, 3, 5, 7, 9 . . .}, asal sayılar kümesi {2, 3, 5, 7, 11 . . .} ve içerinde 666 sayısını barındıran sayılar kümesi {666, 1666, 2666, 3666 . . .}, her birinin eleman sayısı $\aleph_0$ olur. Eğer elinizde sonsuz elemandan oluşan bir küme olsa ve bu elemanların tamamını tek tek saymak mümkün olsa, bu kümenin eleman sayısı $\aleph_0$ olur. Bu sebepten dolayı $\aleph_0$ aynı zamanda 'sayılabilir sonsuzluk' olarak bilinir. Bunun heyecan verici olmasının nedeni, Cantor'un bunu daha da arttırabileceğini göstermeye çalışmış olmasıdır. Büyük olsa bile $\aleph_0$, Cantor'un sonsuzlar ailesi içerisinde sadece bebektir.

Sizi, David Hilbert'ın derslerinde anlattığı söylenilen sayılabilir sonsuzlukta odalara yani $\aleph_0$ tane odası olan bir otel hikayesinin yardımı

ile $\aleph_0$'dan daha büyük bir sonsuzlukla tanıştırayım. Matematikçiler tarafından çok sevilen ünlü kuruluşa Hilbert Oteli de denir.

Hilbert'ın otelinde 1, 2, 3, 4... şeklinde numaralandırılmış sonsuz sayıda oda vardır. Bir gün bir otelin resepsiyonuna gelen bir gezgin bütün odaların dolu olduğunu görür. Kendisi için bir oda ayarlamanın bir yolu olup olmadığını sorar. Resepsiyoncu böyle bir yolun elbette olduğunu söyler. Yönetimin tüm yapması gereken, konukları şu biçimde yeni odalara yerleştirmektir; 1. odadaki konuğu 2. odaya, 2. odadaki konuğu 3. odaya yani n. odadaki tüm konukları n+1'e yerleştirmektir. Eğer bu yapılırsa, her konuk hâlâ bir odaya sahip olacaktır ve yeni gelen misafir içinde 1. oda boşaltılmış olacaktır, Mükemmel!

Ertesi gün daha karmaşık bir durum meydana gelir. Bütün yolcularının odaya ihtiyacı olduğu bir otobüs otele yanaşır. Bu otobüsün her birisi dolu olan 1, 2, 3... şeklinde numaralandırılmış sonsuz sayıda koltuğu vardır. Yolcuların her biri için bir oda bulunabilmesinin herhangi bir yolu var mıdır? Bir başka deyişle, otel dolu olsa da resepsiyon görevlisi odalardaki ziyaretçileri, sonsuz sayıdaki yeni müşterilerine sonsuz sayıda yeni oda açabilecek şekilde yeniden yerleştirebilir mi? Resepsiyoncu cevabı çocuk oyuncağı diye cevap verir. Bu sefer yönetimin tüm yapması gereken konuklarını içinde oldukları odanın numarasının iki katı numaralı olan odalara taşımak olacaktır, böylece odalar 2, 4, 6, 8 . . . numaralı odalar kullanılır. Bu da oteldeki tüm tek sayılı odaların boşalmasını sağlar ve otobüs yolcularına bu odalarının anahtarları verilebilir. 1 numaralı koltuktaki yolcu, ilk terk rakam olan 1 numaralı odayı, 2 numaralı koltuktaki yolcu ikinci tek sayı olan oda 3'ü alır ve bu böylece devam eder.

Üçüncü gün Hilbert'in oteline çok daha fazla otobüs yanaşır. Aslında otobüsler sonsuz sayıdadırlar. Otobüsler dışarıya sıralanır, otobüs 1'in yanına otobüs 2, otobüs 2'nin yanına otobüs 3 gelir ve bu böylece devam eder. Her otobüste, bir gün önce gelen otobüste olduğu gibi sonsuz sayıda yolcu vardır. Ve elbette her yolcunun da bir odaya

ihtiyacı vardır. (Zaten dolu olan) Hilbert Oteli'ne gelen her otobüsteki her yolcu için bir oda bulmak mümkün müdür?

Sorun değil diye cevaplar resepsiyon görevlisi. İlk yapması gereken sonsuz sayıda oda boşaltmaktır. Bunu bir önceki gün kullandığı numarayı kullanarak yapar, oteldeki herkesi kendi oda numarasının iki katı olan odalara yerleştirir. Bu bütün tek sayılı odaları boşaltır. Sonsuz sayıdaki otobüs kafilesini yerleştirmek için tüm yapması gereken tüm yolcuları saymanın bir yolunu bulmaktır ve daha önce bir metot geliştirdiği için, ilk yolcuyu 1. odaya, 2. yolcuyu 3. odaya, 3. yolcuyu 5. odaya yerleştirebilir.

Bunu şu şekilde yapar: her otobüs için, her yolcuyu aşağıdaki tabloda olduğu gibi listeler. Böylece her bir yolcu *m/n* biçiminde numaralandırır, burada m otobüsün numarasını ve n ise oturduğu koltuğu temsil eder. Eğer biz ilk otobüsün ilk yolcusundan saymaya başlarsak (yolcu 1/1) ve sonra aşağıdaki kalıpta olduğu gibi zikzak bir yol uygularsak, ikinci kişi birinci otobüsteki ikinci yolcu olur (yolcu 1/2) ve üçüncü kişi ikinci otobüsteki birinci kişi (yolcu 2/1) olur sonuç olarak her bir yolcuyu saymış oluruz.

	koltuk 1	koltuk 2	koltuk 3	koltuk 4	koltuk 5	...
otobüs 1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	
otobüs 2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	
otobüs 3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	
otobüs 4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	
otobüs 5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	
...						

Hadi şimdi Hilbert'ın otelinden ne öğrendiğimizi matematik sembollerine aktaralım.

Bir kişi bir oda bulduğunda bunun eş değer gösterimi $1 + \aleph_0 = \aleph_0$ olur

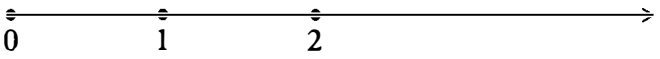
Sayılabilir sonsuzluktaki insanlar oda bulduklarında $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ olduğunu görürüz.

Sayılabilir sonsuzluktaki otobüslerdeki her biri sayılabilir sonsuzluktaki yolcular oda buldukları ortaya $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$ olduğu çıkar

Sonsuzluktan beklediğimiz kurallar şunlardır; sonsuz ile sonsuzu toplarsak sonsuz elde ederiz, sonsuzla sonsuzu çarparsak sonsuz elde ederiz.

Tam burada kısa bir süre duralım. Çoktan hayret verici bir sonuca vardık. Koltuklar ve otobüsler tablosuna tekrar bakın. *m/n* şeklinde ifade edilen her kişiyi $\frac{m}{n}$ kesri olarak düşünün. Sonsuz şekilde genişletildiğinde Tablo, tüm pozitif kesirleri kapsar çünkü pozitif kesirler aynı zamanda $\frac{m}{n}$ olarak da tanımlanır. Örneğin, $\frac{5628}{785}$ kesri 5628. satır ve 785. sütunda yer alır. O halde, her bir otobüsteki her yolcu saymak için kullandığımız zikzak sayma yöntemi, pozitif tüm kesirleri saymak için de kullanılır. Başka bir ifadeyle, tüm pozitif kesirler kümesi ve tüm doğal sayılar kümesi aynı eleman sayısına sahiptir yani, $\aleph_0$. Sezgisel olarak doğal sayılardan daha fazla kesirli sayılar olması gerektiği düşünülebilir, ancak Contor bize sezgilerimizin yanıldığını gösterir. Doğal sayılar kadar pozitif kesir vardır (yukarda görüldüğü gibi, doğal sayılar kadar pozitif ve negatif kesir vardır $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ çünkü $\aleph_0$ kadar pozitif kesir ve $\aleph_0$ kadar negatif kesir bulunmaktadır).

Bir doğru üzerindeki noktaların sayılar olarak kabul edildiği Sayı Doğrusu üzerinde durarak bunun ne kadar tuhaf bir sonuç olduğunu anlayabiliriz. Aşağıdaki, 0'dan başlayarak sonsuza kadar giden bir sayı doğrusudur.



Tüm pozitif kesirler bu çizgi üzerinde bir nokta olarak kabul edilebilir. Daha önceki bölümde, 0 ile 1, ya da 1 ile 2 ya da herhangi iki başka sayı arasında sonsuz sayıda kesir olduğunu öğrenmiştik. Şimdi bu çizgi üzerine bir mikroskoptan bakıp noktalar arasında $\frac{1}{100}$ ve $\frac{2}{100}$ şeklinde ifade edilen kesirleri görebildiğinizi hayal edin. Daha önce aynı şekilde gösterdiğimiz gibi, bu iki nokta arası da sonsuz sayıda kesir ile ifade edilir. Aslında mikroskobu bu iki nokta arasına nereye yerleştirirseniz yerleştirin, bu noktaların arası ne kadar küçük olursa olsun, bu aralıkta kesirlerle ifade edilen sonsuz sayıda nokta bulunur. Nereye bakarsanız bakın kesirleri temsil eden sonsuz sayıda nokta bulunduğu için, bunların her birinin istisnasız bir şekilde düzenli bir liste halinde sayılabilmesinin mümkün oluşu inanılmaz derecede şaşırtıcıdır.

Şimdi büyük bir olaya gelelim: $\aleph_0$'dan daha büyük niceliğin olduğunun ispatına. Hilbert'in oteline geri dönelim. Bu sefer, boş oda isteyen sonsuz sayıda insanın ortaya çıktığı oteldeki odalar boş olsun. Fakat bu sefer her biri 0 ve 1 sayı aralığında ondalık genişlemeyi gösteren bir tişört giymiş olan ziyaretçiler otobüslerle gelmemiş olsun. Herhangi iki kişi aynı iki ondalık genişlemeyi üzerlerinde taşımasın ve 0 ve 1 aralığındaki tüm ondalık sayılar kapsanmış olsun (Tabii ki ondalık sayılar sonsuz genişlikte olacakları için bu numaraları taşıyan tişörtlerin genişlikleri de sonsuz olmalıdır ve hazır sonsuz sayıda odaları olan bir oteli hayalimizde canlandırmaya dair tüm inançsızlığımızı askıya almışken, sizden bu tişörtleri hayal etmenizi istemenin çok fazla olmadığını düşünüyorum). Ziyaretçilerden birkaçı resepsiyona gelip otelde kendilerini ağırlamanın bir yolu olup olmadığını sorar. Bunu başarmak için resepsiyon görevlisinin tüm yapması gereken şey, 0 ve

1 arasındaki her ondalık sayıyı listeleyebilecek bir yöntem bulmaktır, bunu yaptığında tüm müşterileri odalarına yerleştirebilir. Sonsuz sayıdaki otobüsün sonsuz sayıdaki yolcularını listelemenin bir yöntemini bulduğunu düşündüğünüzde, bu resepsiyon görevlisine makul bir sıkıntı gibi görünür. Ancak bu sefer, görev imkânsızdır. 0 ve 1 arasındaki her bir ondalık haneyi, herkesi sıralı bir biçimde listeleyerek saymanın bir yolu yoktur. Bunu ispatlamak için 0 ve 1 arasındaki her bir sonsuz liste için her zaman 0-1 arasında olan ve listede olmayan bir sayının olduğunu size göstereyim.

Bu işlem şu şekilde yapılır. İlk gelen müşterinin tişörtünde 0.6429657... ikincisinin tişörtünde 0.0196012..., sayıları olduğunu ve bu yolcuların resepsiyoncu tarafından resepsiyoncunun 1 ve 2 numaralı odalara yerleştirildiklerin düşünelim. Ve böylece resepsiyoncu tüm gelen yolcuları odalarına yerleştirirken aşağıdaki gibi başlayan sonsuz bir liste oluşturur. (her bir aralığın sonsuza kadar gittiğini hatırlayın):

Oda 1	0.6429657...
Oda 2	0.0196012...
Oda 3	0.9981562...
Oda 4	0.7642178...
Oda 5	0.6097856...
Oda 6	0.5273611...
Oda 7	0.3002981...
Oda ...	0...

Daha önce de belirttiğimiz gibi hedefimiz 0 ve 1 arasında olup listemizde bulunmayan ondalık sayıyı bulmak. Bunu aşağıdaki metodu kullanarak yaparız. İlk olarak, 1. odadaki ilk ondalık yeri alacak olan sayıyı oluşturur, sayının ikinci ondalık basamağı 2. odaya, sayının

üçüncü ondalık basamağı 3. Odaya...vb. Bir başka deyişle burada altını çizdiğimiz çapraz rakamları seçeriz:

0.**6**429657...

0.0**1**96012...

0.99**8**1562...

0.764**2**178...

0.6097**8**56...

0.527361**1**...

0.3002981...

Bu numara;

0,6182811... Olur.

Neredeyse başardık. Resepsiyon görevlisinin listesinde bulunmayan ondalık sayıyı oluşturmak için yapmamız gereken son bir şey daha var: bu sayıdaki her bir basamağı değiştiririz. Gelin sayıdaki her bir basamağa 1 ekleyelim. Böylece 6, 7 olur, 1, 2 olur, 8'de 9 olur ve böyle devam eder ve şu sayıyı elde ederiz: 0,7293922...

Ve artık başardık. Bu ondalık sayı bizim aradığımız istisna olan sayıdır. Resepsiyon görevlisinin listesinde olamaz çünkü onu yapay olarak biz oluşturduk. Bu sayı 1. odada olamaz çünkü ilk basamağı 1. odanın ilk basamağından farklıdır. Oda, 2. odada da olamaz çünkü ikinci basamağındaki sayı 2. odanın ikinci basamağındaki sayıdan farklıdır, bunu sayımızın herhangi bir n. odada olamayacağına görecek kadar uzatabiliriz, çünkü sayımızın n. basamağı her zaman n. odadaki ondalık kesrin n. basamağından farklı olacaktır. Bizim özellikle ayarladığımız 0.7293922... dolayısıyla her zaman o odaya atanan sayıdan en az bir

rakam farklı olur, bu nedenle oda için atanan herhangi bir sayıya eşit olamaz. Listede pekala da ilk yedi basamağı 0.7293922 olan bir sayı bulunabilir ama bu sayı listede olsa da bizim tasarladığımız sayı bu sayıdan en az bir basamak bile olsa daha sonraki basamaklarda farklı olacaktır. Bir başka deyişle, resepsiyoncu müşterilerine sonsuza kadar odalar atamaya devam etse bile tişörtünün üzerinde bizim verdiğimiz 0.7293922 numarasını taşıyan müşteri için bir oda bulamayacaktır.

Ben listeye başlarken gelişigüzel sayılar olan 0.6429657 ile 0.0196012. . . seçtim fakat aynı şekilde listeye başlamak için herhangi iki sayı da seçebilirdim. Bunu her liste için yapmak mümkündür, her zaman, 'diyagonal' yöntemin tersini kullanarak, listede yer almayan bir sayı oluşturmak mümkün olacaktır. Hilbert'in otelinde sonsuz sayıda oda olabilir ama yine de 0 ve 1 arasında ondalık olarak tanımlanmış sonsuz sayıda insanı odalara yerleştiremez. Her zaman açıkta kalan birileri olacaktır. Basitçe söylemek gerekirse otel yeterince büyük değildir.

Cantor'un doğal sayıların sonsuzluğundan daha büyük sonsuzlukların olduğunu keşfi on dokuzuncu yüzyılın en büyük matematiksel atılımlarından biriydi. Bu akıllara durgunluk veren bir sonuçtu ve bu sonuç gücünün bir kısmını, doğrudan açıklanabilir oluşundan alıyordu: Bazı sonsuzlukları sayılabilirdir ve $\aleph_0$ boyutundadır, bazı sonsuzluklar ise sayılabilir değildir ve dolayısıyla daha büyüktürler. Bu sayılamayan sonsuzlukların boyutları çok farklıdır.

Sayılamayan en basit sonsuzluğa *c* adı verilir ve bu sayı Hilbert'in oteline gelen ve üzerinde 0 ve 1 aralığındaki ondalık sayılar olan tişörtleri giyen müşterilerin sayısıdır. Aynı biçimde, bu c sayısının ne anlama geldiğini sayı doğrusuna bakarak yorumlamak oldukça öğreticidir. 0 ve 1 arasındaki ondalık genişlemenin yazılı olduğu tişörtleri giyen her bir kişi aynı zamanda 0 ve 1 arasındaki noktalar olarak da düşünülebilir. C harfinin kullanılmasının sebebi ise sayı doğrusu üze-

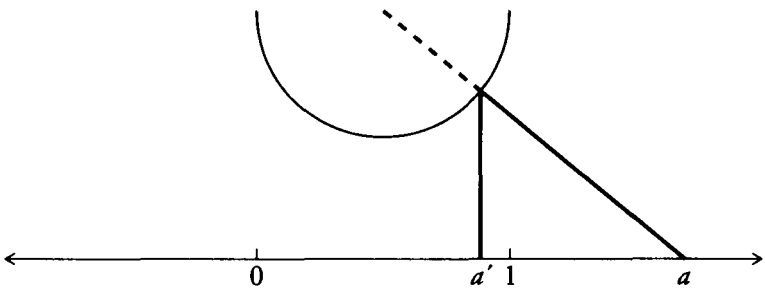
rindeki noktaların 'sürekliliği' anlamına gelen [continuum] kelimesinin yerine kullanılmaktadır.

İşte bu noktada başka bir garip sonuca varırız. 0 ve 1 arasında c noktaları olduğunu biliyoruz ve aynı şekilde sayı doğrusunun üstünde toplamda $\aleph_0$ tane kesirin bulunduğunu da biliyoruz. Daha önce c'nin $\aleph_0$ den büyük olduğunu ispatladığımız için, bu durumda sayı doğrusu üzerinde, 0 ve 1 arasında bütün sayı doğrusu üzerinde tanımlanan kesir noktalarından daha fazla nokta olması gerekmektedir.

Cantor bizi tekrardan sezgilere çok aykırı olan bir dünyaya götürür. Kesirler, sayısal olarak sonsuz olsalar da, sayı doğrusu üzerinde çok çok küçük bir alandan sorumludurlar. Sayı doğrusu üzerinde doğruyu oluşturan diğer türlü sayılardan çok daha serbestçe yayılmış sayılar vardır, bunlar eski dostlarımız irrasyonel sayılardır ve kesirlerle ifade edilemezler. Sonunda anlaşılır ki, irrasyonel sayılar öylesine yoğun olarak gruplanmışlardı ki, herhangi bir sonlu doğru parçası üstündeki irrasyonel sayılar, tüm sayı doğrusu üzerindeki kesirli sayılardan daha fazladır.

Yukarıda c'yi sayı doğrusu üzerindeki 0 ve 1 arasındaki noktaların sayısı olarak belirtmiştik. 0-2 ya da 0-100 aralığında kaç tane sayı vardır? Tam olarak c tane. Aslında birbirine ne kadar uzak ya da yakın olursa olsunlar, sayı doğrusu üzerindeki herhangi iki nokta arasında tam olarak c tane sayı vardır. Daha da ilginci bütün sayı doğrusu üstündeki sayılar toplamda c kadardır ve bunun ispatı şekilde bir sonraki sayfadaki gösterildiği gibidir. Burada temel fikir 0 ve 1 aralığındaki tüm sayılarla kalan sayı doğrusu üzerindeki tüm sayıların arasında birebir eşleme olduğunu göstermektir. Bu, sayı doğrusu üzerindeki her bir sayıyı 0 ve 1 aralığındaki her bir sayıyla eşlemek yoluyla yapılır. İlk olarak 0 ve 1 aralığının üstünde duracak biçimde bir yarım daire çizin. Bu yarım daire 0 ve 1 aralığı ile kalan sayı doğrusu arasında, çiftler oluşturan bir çöpçatan gibi iş görür. Sayı doğrusu üzerinde herhangi

bir nokta alın ve a ile işaretleyin ve bu a noktasından yarım dairenin merkezine doğru düz bir doğru çizin. Doğru yarım daireyi üzerine 0-1 aralığında benzersiz bir konumda olan keser ve bu noktadan sayı doğrusu üzerinde a' olarak işaretlenen bir dik çizilir. Bu şekilde her bir a noktasını benzersiz a' noktasıyla eşleyebiliriz. Eğer seçtiğimiz a noktası artı sonsuza doğru ilerliyorsa ona 0-1 aralığında karşılık gelen nokta 1'e doğru yaklaşır ve eğer seçtiğimiz a noktası eksi sonsuza doğru ilerliyorsa ona 0 ve 1 aralığında karşılık gelen nokta 0'a yaklaşır. Eğer sayı doğrusu üzerindeki her bir nokta, benzersiz bir noktayla eşleşebiliyorsa ve 0 ve 1 aralığındaki her bir nokta sayı doğrusu üzerinde benzersiz bir noktayla eşleşebiliyorsa, sonuç olarak sayı doğrusu üzerindeki noktaların sayısı, 0 ve 1 aralığındaki noktaların sayısına eşit olmalıdır.



$\aleph_0$ ile c arasındaki fark, sayı doğrusu üzerindeki kesirlerin miktarının, kesirlerin, irrasyonel sayıların ve diğer tüm sayıların toplamdaki miktarından farkına bğlıdır. $\aleph_0$ ile c arasındaki sıçrama o kadar büyüktür ki, sayı doğrusu üzerinden rastgele herhangi bir nokta seçtiğimizde seçti-

ğimiz noktanın kesir olma olasılığı % 0 olur. Sayılamayacak kadar çok irrasyonel sayıyla karşılaştıracak olursak, elimizde yeterince kesir yoktur.

Cantor'un fikrini başlangıçta kabul edilmesi çok zor bir fikir olsa da, buluşu olan alef'in hakkı tarih tarafından iade edildi: Günümüzde sayısal kat halinde evrensel olarak kabul edilmekle kalmadı, ayrıca zikzak ve çapraz ispatları genel olarak bütün matematiğin içerisinde en göz kamaştırıcı şeylerden biri olarak takdir topladı. David Hilbert şöyle diyordu: 'Cantor'un bizim için yarattığı bu cennetten kimse bizi dışarı çıkartamaz.'

Ne yazık ki bu cennet Cantor'un ruh sağlığına mal olmuştu. İlk ruhsal çöküşünden kurtulduktan sonra, teoloji ve Elizabeth tarihi gibi başka konular üzerine odaklanmaya başladı, William Shakespeare'in oyunlarını bilim adamı Francis Bacon'ın yazdığına inanıyordu. Bacon'ın yazarlığını kanıtlamak onun için kişisel kutsal bir savaş halini aldı ve giderek düzensiz davranışlarının kaynağı haline geldi. 1911 senesinde matematik hakkında konuşmak için davet edildiği St Andrews Üniversitesi'ndeki bir konferansta, ev sahibini çok utandıracak bir şey yaptı ve matematik hakkında konuşmak yerine Shakespeare üzerine görüşlerini anlattı. Cantor 1918 yılında ölene kadar daha pek çok kez ruhsal bunalıma girdi ve birçok kez akıl hastanesine yatırıldı.

Dindar bir Luteriyen olan Cantor, din adamlarına bulduğu sonuçların önemi hakkında birçok mektup yazdı. Sonsuzluk yaklaşımının, insan zekâsının sonsuzluğu düşünülebileceğini gösterdiğine ve bu sayede insanın tanrıya bir adım daha yaklaştığına inanıyordu. Cantor'un ataları Yahudi soyundan geliyorlardı, sonsuzluk sembolü olarak Alef'i seçmesinde bunun etkisi olabilir –bu konu tartışmalıdır– çünkü Cantor mistik Yahudi geleneği Kabala'da ve Alef'in tanrının birliğini temsil ettiğinden haberdardı. Cantor Alef'i seçtiği için kendiyle gurur duy-

duğunu söylüyordu, çünkü İbrani alfabesinin ilk harfi olan Alef yeni bir başlangıç için mükemmel bir semboldü.

Alef aynı zamanda yolculuğumuzu bitirmek için de mükemmel bir yer. Kitabın ilk bölümlerinde yazdığım gibi matematik, insanın kendi çevresine anlam kazandırma arzusundan ortaya çıkmıştır. Atalarımız ahşap üzerine çentikler açarak ya da parmaklarla sayarak sayıları icat ettiler. Tarımda ve ticarette ondan faydalandık ve bizleri 'medeniyet' ile buluşturdu. Daha sonra matematik geliştikçe, konu somut kavramlardan çok soyut kavramlara doğru yönelmeye başladı. Yunanlılar nokta ve doğru gibi kavramları keşfi ve Hintlilerin sıfırı icadı negatif sayılar gibi daha radikal soyutlamalara kapı açtı. Başlangıçta bu kavramlar sezgiye aykırıyken hızla sindirilerek günlük yaşantımızın birer parçası haline geldiler. On dokuzuncu yüzyıl sona erdiğinde matematikle kendi deneyimlerimizi birleştiren göbek bağı tamamen kopmuştu. Riemann ve Cantor'dan sonra, matematik dünyanın herhangi bir sezgisel *beğenisiyle* bağlantısını kaybetti.

Cantor, c'yi bulduktan sonra araştırmalarına devam etti ve çok daha büyük sonsuzlukların olduğunu kanıtladı. Gördüğümüz gibi c bir doğru üzerindeki noktaların sayısıdır. Aynı zamanda iki boyutlu bir yüzey üzerinde noktaların sayısına da eşittir (Bu bana güvenmek zorunda olduğunuz bir başka şaşırtıcı sonuçtur). İki boyutlu bir yüzey üzerine çizilebilir eğri ve büğrü bütün olası çizgilerin sayısına *d* diyelim, (bu eğri büğrü çizgiler, kalemi sayfadan hiç kaldırmazsanız ya sürekli olur ya da en azından bir kere kalemi sayfadan kaldırırsanız süreksiz olur ve aynı çizginin farklı kesimleri arasında bir boşluk bırakır). Küme teorisini kullanarak *d*'nin *c*'den daha büyük olduğunu ispatlayabiliriz. Ve bir adım daha ileri giderek *d*'den daha büyük sonsuzluklar olduğunu gösterebiliriz. Ancak, bugüne kadar hiç kimse doğal olarak meydana gelen ve *d*'den daha büyük elemanı olan bir küme bulmayı başaramamıştır.

Cantor bizi hayal edilebilir olanın ötesine taşıdı. Burası olağanüstü bir yer ve eğlenceli bir şekilde kitabın başında belirttiğim Amazon kabilesinin durumuna ters. Munduruku'lar pek çok şeye sahipti ama bunları saymak için yeterli sayısı yoktu. Cantor bize istediğimizden çok daha fazla sayı sağladı ama artık elimizde sayacağımız kadar şey yok.



SÖZLÜKÇE

Aksiyom: Genellikle kanıtını kendi içinde taşıdığı için, kanıta gerek olmayan ön kabuller. Mantık sisteminin kurulmasında kullanmışlardır.

Algoritma: Problemi çözmek için tasarlanmış kurallar ya da talimatlar kümesi.

Ambigram: İçinde ters çevrildiğinde genellikle aynı kelimeyi saklayacak biçimde yazılan kelime ya da kelimeler grubu.

Asal sayı: Sadece 1 ve kendisine tam olarak bölünebilen doğal sayı.

Bağdaşık sayı: Kendileri hariç çarpanlarının toplamı birbirine eşit olan sayılar.

Beklenen değer: Bir bahiste ne kadar kazanıp ne kadar kaybetmeyi umabileceğinizi gösteren teorik değer.

Bölen: Kesrin alt tarafında yer alan sayı.

Bölünen: Kesirin üst kısmında yer alan sayı.

Büyük sayılar yasası: Olasılığın büyük sayılarda iş gördüğü kuralı, örneğin yazı tura atma çok defa tekrarlanan rastgele bir olayda, elde edilen sonucun beklenen sonuca çok yaklaşması durumu.

Büyüklük mertebesi: En yaygın haliyle, en soldaki rakamın ondalık değerine göre sıralanan sayı dizisi. Yani 1 ile 9 arasındaki herhangi bir sayının büyüklük mertebesi bir 10 ile 99 arasındaki herhangi bir sayının büyüklük mertebesi iki ve 100 ile 9999 arasındaki herhangi bir sayının büyüklük mertebesi üçtür ve bu şekilde devam eder.

Çap: Bir çemberin genişliği.

Çarpan: Belirli bir sayının böleni.

Çarpanlarına ayırma: Bir sayıyı kendisini tam bölen sayılara ayırma işlemi, bu sayılar genellikle asal sayılardır.

Çok büyük sayılar yasası: Eğer örnek yeterince büyükse ne kadar ihtimal dışı gözükse her olayın gerçekleşebileceği kuralı.

Çokgen: Sonlu sayıda doğrudan oluşan iki boyutlu kapalı şekil.

Dağılım: Olası sonuçların ve bunların meydana gelme ihtimallerinin yayılımı.

Dairenin çevresi: Çemberin çevrel uzunluğu.

Değişken: Değişik değerler alabilen nicelik.

Diskalküli: Kişinin sayıları kavramasına engel olan rahatsızlık.

Dizi: Bir sayı listesi.

Doğal sayı: 0'dan itibaren sayarak ulaşılabilen tüm sayılar.

Düzgün çokgen: Eşit kenarlı ve eşit iç açılı çokgen.

Eğri: Özellikleri üçgenler ve paralel doğruların davranışları aracılığıyla belirlenen uzay.

Eleman sayısı: Bir kümenin büyüklüğü.

Eşsiz çözüm: Sadece ve sadece tek bir cevabın bulunduğu durum.

Fi: Ondalık açılımı 1.618..., olarak devam eden matematiksel sabit, altın oran, ya da ilahi oran olarak da bilinir.

Fibonacci sayısı: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 . . . biçiminde devam eden Fibonacci serisinin bir sayısı,

Gauss dağılımı: Normal dağılım.

Geometrik dizi: Her bir terimin bir önceki terimin sabit bir sayıyla çarpılarak bulunduğu sayı dizisi.

Hiperbolik düzlem: Negatif eğrilikteki, sonsuz büyüklükteki düzlem.

Hipotenüs: Dik açılı bir üçgende dik açının karşısındaki kenar.

Iraksak seriler: Toplamı sonlu bir sayı olmayan sonsuz seriler.

İkinci dereceden denklem: *a, b,* ve *c*'nin birer sabit ve a'nın sıfırdan farklı olduğu, $ax^2 + bx + c = 0$ biçimindeki denklem.

İnversiyon: Ambigram ile aynı durum.

İrrasyonel sayı: Kesir biçiminde ifade edilemeyen sayı.

Kombinatorik: Kombinasyon ve permütasyon çalışmalarını yürüten matematik dalı.

Korelâsyon: Rastgele iki değişkenin ilişkilik ölçüsüdür.

Köşe: İki doğrunun bir açı meydana getirecek şekilde birleşimi ya da üç boyutlu bir nesnenin açı oluşturan noktaları.

Kumarbaz safsatası: Rastgele sonuçların rastgele olmadığına dair yanlış bir düşünce.

Kumarbazın çöküşü: Uzun süre oynanması durumunda iflasın kaçınılmaz olma durumu.

Kuvvet: Bir sayının kaç defa kendiyle çarpılacağını belirleyen işlem. Yani eğer 10 sayısı kendisiyle 4 defa çarpılacak olursa, bu 10^4 biçiminde yazılır ve "onun dördüncü kuvveti" biçiminde telaffuz edilir. Kuvvetler daima doğal sayı olmazlar. Ancak 'x'in kuvvetlerinden' bahsedildiğinde sözü edilen sadece x'in var olan kuvvetleridir.

Küme: Şeyler toplamı.

Latin karesi: Her elemanın satırlarda ve sütunlarda sadece bir kere ortaya çıktığı ölçekli kare.

Logaritma: Eğer $a = 10^b$ ise a'nın logaritması b'dir ve log a = b biçiminde yazılır.

Mersenne asalı: $2^n - 1$ formunda yazılan asal sayılar.

Mısır üçgeni: 3:4:5 üçgeni.

Mozaik işi: Mozaiklerin iki boyutlu bir düzleme hiçbiri birbirinin üstüne gelmeyecek biçimde döşenmesi.

Mükemmel sayı: Kendisi hariç tüm bölenlerinin toplamı yine kendisine eşit olan sayı.

Normal dağılım: Çan eğrisi üreten en genel dağılım türü.

Normal sayı: Ondalık basamağında aynı rakamların bulunduğu sayı (0'lar, 1'ler, 2'ler, 3'ler, 4'ler, 5'ler, 6'lar, 7'ler, 8'ler ve 9'lar)

Olasılık: Bir olayın meydana gelme ihtimalinin 0 ile 1 arasında bir kesir ile ifade edilmesi.

Ondalık kesir: Ondalık basamakla yazılan kesir, örneğin 1.5, $\frac{3}{2}$'ye eşit olan ondalık kesirdir.

Ortalamaya geri gitmek: Beklenmeyen bir durum sonunda az beklenmeyen bir durumun meydana gelmesinin daha olası olma durumu.

Paralel: Birbirleriyle asla kesişmeyen iki doğru birbirine paraleldir.

Pi: Ondalık açılımı 3.14159265358979323846 . . ., olarak devam eden matematiksel sabit, ayrıca çemberin çevresinin çapına oranına eşittir.

Platonik katılar: Kenar uzunlukları birbirine eşit olan beş katı cisim, başka bir ifadeyle üçgen piramit, küp, sekiz yüzlü, yirmi yüzlü ve on iki yüzlü.

Postulat: Doğru olduğu kabul edilen ve aksiyom olarak kullanılan ifade.

Rastgele yürüyüş: Her hareketin rastgele bir yöne doru gerçekleştiği rastgelelik durumunun görsel olarak yorumlanması.

Rasyonel sayı: Kesir biçiminde ifade edilebilen sayı.

Sabit: Belirlenmiş değer.

Sayı doğrusu: Sayıların üzerinde görsel olarak temsil edildiği sürekli bir doğru.

Sayılabilir sonsuz: Elemanları doğal sayılarla birebir eşleştirilebilen sonsuz küme.

Sayılamaz sonsuzluk: Elemanları doğal sayılarla birebir eşleştirilemeyen sonsuz küme.

Seri: Bir dizideki terimler toplamı.

Sınır: Bir kumar oyununu kaybetme ihtimalinin kazanma ihtimalinden farkı.

Sihirli kare: Başlayan ardışık sayıların satır, sütun ve köşeden köşeye her bir parçanın toplamının birbirine eşit olacak şekilde yerleştirdiği karelerdir.

Sonsuz seriler: Sonsuz sayıda terim bulunan seriler.

Süreklilik: Devam etmekte olan bir doğru üzerindeki noktalar.

Taban: Bir sayı sisteminde, taban sayı grubunun genişliği gösterir, Arap rakamları kullanıldığında taban sistemde kullanılmasına izin verilen rakamların sayısına eşittir. İkili sistemde 0 ve 1 kullanılır ve taban ikidir, onluk sistemde ise 0 ile dokuz arasındaki rakamlar kullanılır ve taban ondur.

Tam bölen: Başka bir sayısı kalansız olarak bölen sayı, örneğin 5, 20'nin tam bölenidir.

Tam sayı: Sıfır da dâhil olmak üzere negatif ve pozitif doğal sayılar kümesinden bir sayı.

Teorem: Başka teoremler ya da aksiyomlar aracılığıyla ispat edilebilen önerme.

Transandantal sayı: Sonlu bir denklemin çözümü olarak ifade edilemeyen sayı.

Üçüncü derece denklem: *a, b, c* ve *d*'nin birer sabit ve a'nın sıfırdan farklı olduğu, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ biçimindeki denklem.

Üs: Sayının sağ üstüne yazılan kuvveti, 3 sayısının x kuvveti 3^x olarak gösterilir.

Yakınsak seri: Sonsuz terimden oluşan ve toplamı sonlu bir sayı olan seri.

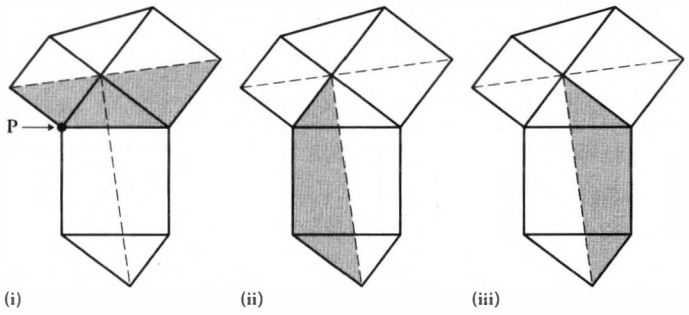
Yarıçap: Dairenin merkezinden dairenin çevresine çizilen düz çizgi.

EKLER 1

Annairizi'nin mozaiklerinin Pisagor teoremini nasıl ispatladığını görmek için, sayfa 103'teki işaretli üçgene bakın. Yapmamız gereken tek şey, hipotenüsün karesini diğer dik kenarların karesi şeklinde düzenlemektir. Hipotenüsün karesi beş kesitten meydana gelir; üçü koyu, ikisi açık gridir. Desenin kendini açık gri kesitlerin, üçgenin kenarlardan birinin ve koyu gri kesitlerin diğer kenarın karesini oluşturacak biçimde nasıl tekrarladığını düşünerek görebiliriz.

Leonardo'nun kanıtı için ise, (i) ve (ii) nolu grafiklerde gölgelendirilmiş kesitlerin ikisinin de eşit olduğunu göstermemiz gerekir. Bunu kesiti P. noktası çevresinde döndürerek yaparız. İki kesitin de kenar uzunlukları ve açıları eşittir ve dolayısıyla eşit olmak zorundadırlar. Ardından bu kesitin (iii) kesitine eşit olduğunu göstermeliyiz. Bu da doğru olmak zorunda çünkü parçalar birbirine eşittir.

Elimizdeki bu bilgiyle, kanıtı tamamlayabiliriz. Gölgeli ilk kısmın yansıması ve onun noktalı çizgiler boyunca oluşan simetrik görüntüsünde iki dik açılı üçgen ve küçük kenarlarında iki kare vardır. Bu alan, içinde iki dik açılı üçgen ve hipotenüsün karesinin bulunduğu (ii) ve (iii) grafiklerinde gölgelendirilen alanların toplamına eşit olmak zorundadır. Eğer iki üçgenin alanını iki taraftan da çıkaracak olursak, hipotenüsün karesi diğer iki kenarın karesine eşit olmak zorundadır.



EKLER 2

Bir birim karede köşegen uzunluğu $\sqrt{2}$'dir. Bunun irrasyonel olduğunu göstermek için $\sqrt{2}$'nin rasyonel olduğunu kabul edeceğim çelişki ispat yöntemini kullanacağım ve bunun bir çelişkiye neden olduğunu göstereceğim. Eğer $\sqrt{2}$ rasyonel yani başka bir ifadeyle çelişki çıkarsa, sonuç olarak irrasyonel demektir.

Eğer rasyonelse, öyle iki a ve b doğal sayıları bulunmalıdır ki $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ olsun. Gelin bunun kesirin en sadeleştirilmiş biçimi olduğunu iddia edelim ve $\frac{a}{b}$, a ve b'den daha küçük olan m ve n sayıları için $\frac{m}{n}$ biçiminde yazmak mümkün olmasın.

Eğer $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ise iki tarafın karesini aldığımızda $2 = \frac{a^2}{b^2}$ olur ve bunu $a^2 = 2b^2$ biçiminde yeniden yazabiliriz.

b^2 sayısının tüm değerleri için $2b^2$ sayısı çift olmak zorundadır, çünkü hangi sayıyı ikiyle çarparsak çarpalım sonuç çift olur. Eğer $2b^2$ çiftse a^2 de çift olmak zorundadır. Şimdi de, bir tek sayının karesi daima tek ve çift sayının karesi daima çift sayı olduğu için, a sayısı çift olmak zorundadır.

Eğer a sayısı çiftse, $a = 2c$ biçiminde a'dan küçük bir c sayısı bulunmak zorundadır ve dolayısıyla $a^2 = (2c)^2 = 4c^2$ olur.

Yukarıdaki denklemde a^2 ile $4c^2$'nin yerlerini değiştirdiğimizde $4c^2 = 2b^2$ olur. Buradan da sadeleştirme yoluyla $b^2 = 2c^2$'yi buluruz. Aynı nedenlerden ötürü bu da b^2'nin çift sayı olduğu anlamına gelir o halde b sayısı da çifttir. Eğer b çift sayıysa b = 2d biçiminde b'den küçük bir d sayısı bulunmak zorundadır.

Sonuç olarak, $\frac{a}{b}$, $\frac{2c}{2d}$ ya da $\frac{c}{d}$ biçiminde yazılabilir çünkü 2'ler sadeleşir. Çelişkimizi bulduk! Yukarıda $\frac{a}{b}$'nin kesirin en sadeleşmiş biçimi olduğunu ön görmüştük, yani $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ biçiminde $\frac{a}{b}$ yazılabilecek a ve b'den küçük herhangi bir c ve d değerinin bulunmadığını söylemiştik. Sonuç olarak $\sqrt{2}$ değerinin yazılabileceği çelişkisine ulaşarak, $\sqrt{2}$'nin asla böyle bir biçimde yazılamayacağını ve $\sqrt{2}$'nin irrasyonel olduğunu ispatladık.

EKLER 3

Franklin'in 16 x 16 sihirli karesinde tüm satırlar ve sütunların toplamı 2056'dır. Bu gerçek bir sihirli kare değildir çünkü köşegenlerin toplamı 2056 değildir, ama özellikleri bakımından o kadar zengindir ki, Clifford A. Pickover, 'Kişinin bir ömrü bu muhteşem yapıyı inceleyerek geçirebileceğini söylemek hiç abartı olmaz,' diye yazmıştır. Örneğin her bir 2 x 2 alt karenin (ve bunlardan toplam olarak 225 tane vardır) toplamı 514 eder, ki bu da her bir 4 x 4 alt karenin toplamının 2056 olduğu anlamına gelir. Bu karede başka birçok simetri ve şablonlar bulunmaktadır.

200	217	232	249	8	25	40	57	72	89	104	121	136	153	168	185
58	39	26	7	250	231	218	199	186	167	154	135	122	103	90	71
198	219	230	251	6	27	38	59	70	91	102	123	134	155	166	187
60	37	28	5	252	229	220	197	188	165	156	133	124	101	92	69
201	216	233	248	9	24	41	56	73	88	105	120	137	152	169	184
55	42	23	10	247	234	215	202	183	170	151	138	119	106	87	74
203	214	235	246	11	22	43	54	75	86	107	118	139	150	171	182
53	44	21	12	245	236	213	204	181	172	149	140	117	108	85	76
205	212	237	244	13	20	45	52	77	84	109	116	141	148	173	180
51	46	19	14	243	238	211	206	179	174	147	142	115	110	83	78
207	210	239	242	15	18	47	50	79	82	111	114	143	146	175	178
49	48	17	16	241	240	209	208	177	176	145	144	113	112	81	80
196	221	228	253	4	29	36	61	68	93	100	125	132	157	164	189
62	35	30	3	254	227	222	195	190	163	158	131	126	99	94	67
194	223	226	255	2	31	34	63	66	95	98	127	130	159	162	191
64	33	32	1	256	225	224	193	192	161	160	129	128	97	96	65

EKLER 4

Gijswijt dizisinin arkasındaki ilke, serinin bir önceki teriminde tekrarlanan rakamlar dizisini aramaktır. 'Blok' bir önceki terimin dizisinin sonunda olmak zorundadır ve tekrarlanma sayısı bir sonraki terimi verir.

Matematiksel olarak dizi aşağıdaki gibi tanımlanır. 1 ile başlayın ve alt dizi değerlerinin her biri *k* olsun, önceki terimler sırayla çarpıldığında mümkün olan en büyük k değeri için xy^k değeri yazılır.

Dizi şu şekildedir: 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 2, 1 ...

Sanırım burada olup biteni anlamanın en kolay yolu 3'ün ilk kez gözüktüğü zamanı ele alarak olur, bu da dokuzuncu pozisyondur. Önceki terimler sırasıyla 1 x 1 x 2 x 1 x 1 x 2 x 2 x 2 biçiminde çarpılırlar. Gijswijt'in bizden yapmamızı istediği şey, en büyük k değeri için toplamı xy^k biçime dönüştürmemizdir Bu durumda (1 x 1 x 2 x 1 x 1) X 2^3'ü elde ederiz. O halde sıradaki terim 3'tür. Bir önceki terimde tekrar eden en büyük sayı bloğunu arıyoruz, bu durumda blok tek bir sayıdan, 2, oluşur, ve üç kere tekrarlanır. Ama genellikle blokta çok sayıda rakam olur. 16. sırayı ele alalım. Bir önceki terim çarpım haline dönüştüğünde 1 x 1 x 2 x 1 x 1 x 2 x 2 x 2 x 3 x 1 x 1 x 2 x 1 x 1 x 2. Bu da (1 x 1 x 2 x 1 x 1 x 2 x 2 x 3) x $(1 \times 1 \times 2)^2$ biçiminde yeniden yazılabilir. O halde 16. terim 2'dir.

Başlangıca dönersek ikinci terim 1'dir çünkü bir önceki terim olan 1 hiçbir şeyle çağrılmış değildir. Üçüncü terim 2'dir önceki terimler sırayla çarpıldığında $1 \times 1 = 1^2$ sonucu elde edilir. Ve dördüncü terim 1'dir çünkü önceki terimlerin sonucu (1 x 1 x 2) x 1'dir ve sondaki 1 kendisiyle çarpılmamıştır.

EKLER 5

Harmonik serilerin yakınsadığını göstermek istiyoruz, başka bir ifadeyle

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

Değerinin sonsuza yaklaştığı bu harmonik serilerin aşağıdaki serilerden daha büyük olduğu yani toplamın sonsuza yaklaştığı gösterilerek ispatlanabilir:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

Gelin bu terimleri üçüncü terimden başlayarak ikili, dörtlü, sekizli ve bu biçimde devam eden gruplar halinde kıyaslayalım. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$'den büyük olduğu için $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$'den büyük olmalıdır. Aynı şekilde $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ ve $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$'den büyük olduğu için, $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$ toplamı $\frac{1}{8}$ yani $\frac{1}{2}$'den büyüktür. Eğer bu şekilde terimlerin sayısını iki katına çıkararak devam edersek, bu sayıları toplamaya devam ettikçe $\frac{1}{2}$'den büyük bir değer buluruz.

3. ve 4. terimler: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

5. terimden 8. terime kadar, $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4(\frac{1}{8}) = \frac{1}{2}$

9. terimden 16. terime, $\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16} > 8(\frac{1}{16}) = \frac{1}{2}$

O halde harmonik seriler yani $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$ şeklindeki sonsuza kadar devam eden yarım değerinin toplamından büyüktür. O halde harmonik seriler sonsuzdan büyüktür, başka bir ifadeyle sonsuzdur.

EKLER 6

Sürekli kesir, sonsuz bir toplama ve bölme işleminden oluşan tuhaf bir kesir türüdür. Fi sayısı sürekli kesir biçiminde ifade edildiğinde aşağıdakine benzer:

$$fi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

Bu işlemin nasıl olduğunu anlamak için gelin satır satır açalım ve fi sayısına nasıl yaklaştığını görelim

$$1$$

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + \frac{1}{1 + 1} = 1.5$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1}} = 1 + \frac{2}{3} = 1.66\ldots$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1}}} = 1.6$$

Bu şekilde devam eder.

Sürekli kesirler matematikçilere irrasyonel sayıları derecelendirebilme olanağı verirler. Fi sayısının ifadesinde sadece 1'ler bulunduğu için, bu var olan en saf kesirdir ve bu nedenle 'en irrasyonel' kesir kabul edilir.

BÖLÜMLER ÜZERİNE NOTLAR

Bu kitabı yazdığım sırada masamın üzerinden indirmediğim ve tüm bölümlerde faydalandığım dört cilt vardı. Martin Gardner'ın bilgeliği zekâsı ve açıklığı popüler matematik içinde hâlâ rakipsizdir. Tobias Dantzig'in *Sayı* adlı kitabı matematiğin kültürel evrimi için bir klasiktir. Hem Ifrah hem de Cajori, titizlikle araştırılmış ve sonsuz derecede büyüleyicidir.

Cajori, F., *A History of Mathematical Notations*, Dover, 1993 (Open Court, Illinois, 1928/9 orijinal baskı)

Dantzig, T., *Number,* Plume, New York, 2007 (originally Macmillan, 1930)

Gardner, M., *Mathematical Games: The Entire Collection of His Scientific American Columns,* Mathematical Association of America, 2005

Ifrah, G., The Universal History of Numbers, John Wiley, New York, 2000

BÖLÜM SIFIR

Bu bölüm Brian Butterworth ile Londra'da Stanislas Dehaene and Pierre Pica ile Paris'te yapılan konuşmalara dayanmaktadır. University College London'da Teresa Luculano ve Marinella Cappelletti'nin yanında okullarda kullanılan bilgisayar programında sayı körlüğünü inceledim. Sayı körü değilim, ki bu da bir sürpriz olmasa gerek. Eğer Munduruku doğal çevre ve kültürü korumaya katkıda bulunmak isterseniz, bağışlarınızı The Munduruku Fund, The Arrow Rainforest Foundation, 5 Southridge Place, London SW20 8JQ,

United Kingdom adresine gönderebilirsiniz. Daha fazla bilgiye www.thearrowrainforestfoundation.com adresinden ulaşabilirsiniz

Butterworth, B., *The Mathematical Brain,* Macmillan, London, 1999

Dehaene, S., *The Number Sense*, Oxford University Press, Oxford, 1997

Matzusawa, T. (ed.), *Primate Origins of Human Cognition and Behavior,* Springer, Tokyo, 2001

Angier, N., 'Gut Instinct's Surprising Role in Math', New York Times, 2008

Dehaene, S., Izard, V., Spelke, E., and Pica, P., 'Log or Linear?', Science, 2008

Inoue, S., and Matsuzawa, T., 'Working memory of numerals in chimpanzees', Current Biology, 2007

Pica, P., Lerner, C, Izard, V., and Dehaene, S., 'Exact and Appropriate Arithmetic in an Amazonian Indigene Group', Science, 2004

Siegler, R.S., and Booth, J.L., 'Development of Numerical Estimation in Young Children', Child Development, 2004

BÖLÜM BİR

12 tabanı hakkında daha fazla bilgiye ulaşmak isteyenler contact@Dozenal.org Dozenal Society of America ya da 5106 Hampton Avenue Suite 205, Saint Louis, Missouri 63109-3115, USA adresinden ulaşabilirler. Küçük on iki parmaklar 1970'lerde yapılan, matematik bilim ve gramer konularını işleyen bir çizgi film dizisidir ve bir Schoolhouse Rock klasiğidir, isteyenler internet üzerinde

seyredebilirler. Abaküs dünyasına girişim sadece bir soroban vaizi olan ve Sherlock Holmes gibi giyinerek Tokyo demiryolu istasyonunda benimle buluşan Kouzi Suzuki ile mümkün hale gelebildi.

Andrews, F.E., *New Numbers*, Faber & Faber, London, 1936 Duodecimal Society of America, Inc., Manual of the Dozen System,

Duodecimal Society of America, New York, 1960 Elbrow, Rear-Admiral G., *The New English System of Money, Weights and Measures and of Arithmetic,* P.S. King & Son, London, 1913

Essig, J., Douze, *notre dix future,* Dunod, Paris, 1955

Glaser, A., History of Binary and Other Nondecimal Numeration, Southampton, PA, 1971 Kawall Leal Ferreira, M. (ed.), Ideias Matemdticas de Povos Culturalmente Distintos, Global Editora, Sao Paulo, 2000

Suzuki, K., *Lectures on Soroban*, Institute for English Yomiagezan

Dowker, A., and Lloyd D., 'Linguistic influences on numeracy', Education Transactions, University of Bangor, 2005

Wassmann, J., and Dasen, P.R., 'Yupno Number System and Counting', Cross-cultural Psychology Journal, 1994 Hammarstrom, H., 'Rarities in Numeral Systems', 2007

BÖLÜM İKİ

Proof Without Words gerçek bir hazine ve benim için bu başka bir Pisagor kanıtı kaynağı oldu. Tom Hull'a origaminin arka planı hakkında verdiği bilgiler için teşekkürler. Kartvizitlerle yapılan

üçgen piramitlerin ve küplerin çizimlerinde onun kitabından esinlenilmiştir. Kayda değer başka bir Japon dinsel geometri uygulamasının adı sangaku, bu bölümde yer almasa da burada bahsetmeye değecek kadar muhteşemdir. Sangaku, Budist ya da Şinto mabetlerinde asılı olarak bulunan ve üzerinde geometrik bir problemin çözümü bulunan ahşap bir tablettir. On yedinci ve on dokuzuncu yüzyıllar arasında geometri problemleriyle uğraşan ve bunu bir kitapta yayımlayacak parası olmayan Japonlar tarafından binlerce sangaku yapılmıştır. Çözümleri tahta bir tabletin üzerine çizmek ve onu mabede asmak, hem dini bir sunuş hem de sonuçları duyurma yoluydu.

Kitap baskıya girmeden kısa bir süre önce Jerome Carter'ın 2009 yılında bir motosiklet kazasında öldüğünü öğrendim.

Balliett, L.D., *The Philosophy of Numbers,* L.N. Fowler, 1908

Bell, E.T., *Numerology,* Century, 1933

Dudley, U., *Numerology,* Mathematical Association of America, 1997 du Sautoy, M., Finding Moonshine, Fourth Estate, London, 2008

Ferguson, K., *The Music of Pythagoras,* Walker, New York, 2008

Hull, T., *Project Origami,* A.K. Peters, Wellesley, MA, 2006

Kahn, C.H., *Pythagoras and the Pythagoreans, a Brief History,* Hackett, Indianapolis, IN, 2001

Loomis, E.S., *The Pythagorean Proposition,* Edwards Bros, Ann Arbor, MI, 1940

Maor, E., *The Pythagorean Theorem,* Princeton University Press, NJ, 2007

Mlodinow, L., *Euclid's Window,* Free Press, New York, 2001 Nelsen, R.B., *Proofs Without Words,* Mathematical Association of America, Washington DC, 1993

Riedwig, C, *Pythagoras, His Life, Teaching and Influence*, Cornell University Press, Ithaca, NY, 2002

Schimmel, A., *The Mystery of Numbers,* Oxford University Press, New York, 1993

Simoons, F.J., *Plants of Life, Plants of Death,* University of Wisconsin Press, Madison, WI, 1998

Sundara Rao, T., *Geometric Exercises in Paper Folding,* Open Court, Chicago, IL, 1901

Bolton, N.J., and MacLeod, D.N.G., "The Geometry of the Sri Yantra', Religion, vol. 7, 1977 Burnyeat, M.F., 'Other Lives', London Review of Books, 2007

BÖLÜM ÜÇ

Her ne kadar Liber Abaci ilk kez 1202 yılında yayınlanmış olsa da ilk İngilizce tercümesi 2002 yılında, 800. yıldönümüne kadar ortaya çıkmadı. Pazarda yer alan hızlı aritmetik yöntemleri arasındaki tek tür Veda matematiği değildir. Aynı numaraları paylaşan birçok sistem bulunmaktadır. En çok bilinenlerden biri Jakow Trachtenberg tarafından geliştirilen Nazi toplama kampında siyasi esir olarak tutulduğu sırada geliştirilen Trachtenberg sistemidir. Kendine özgü bir 'matematik sihirbazı' olan Arthur Benjamin hızlı hesaplama sanatının en son temsilcisi.

Fibonacci, L., *Fibonacci's Liber Abaci*, Springer, New York, 2002

Joseph, G.G., *Crest of the Peacock*, Penguin, London, 1992

Knott, K., *Hinduism: A Very Short Introduction,* Oxford University Press, 1998

Seife, C, Zero, Souvenir Press, London,

2000 Tirthaji, Jagadguru Swami S. B. K., Vedic Mathematics, Motilal Banarsidass, Delhi, 1992

Dani, S.G., *'Myths and reality: On "Vedic mathematics"'*

BÖLÜM DÖRT

Leipzig'deki en aptal yarışmacı okulda matematikten kalmış olan eski bir vücut geliştirme sporcusu Rüdiger Gamm'dı. Büyük pazılı abartılı bir kariyerden sonra, şimdi abartılı büyük bir beyni var, hesaplama becerileri kendisine Almanya'da küçük bir ün sağlayan GAMM, bana belleğinin onun en büyük varlığı olduğunu söyledi. Kafamda 200.000 - 300.000 arası sayının [saklı] olduğunu düşünüyorum.

(Bu bölümün oldukça zor olduğunu düşünüyorum çünkü pi ile ilgili korkunç kelime oyunları yapma konusunda kendime birçok sınırlamalar getirdim. Matematikçilerin kelime oyunları konusunda doğuştan gelen bir eğilimleri var. Bir kelime gördüğümüzde onu parçalara ayırıp yeniden oluşturma konusunda kendimize engel olamıyoruz, bu da dünyanın en iyi Scrabble oyuncularının neden dilbilimciler değil matematikçiler ve bilgisayar bilimciler olduğunu açıklıyor).

Arndt, J., and Haenel, C., *Pi Unleashed*, Springer, London, 2002

Beckmann, P., *A History of Pi,* St Martin's Press, New York, 1971

Berggren L., Borwein J., and Borwein P., *Pi: A Source Book,* Springer, London, 2003 Bidder, G., *A Short Account of George Bidder, the celebrated Mental Calculator: with a Variety of the most difficult*

Questions, Proposed to him at the principal Towns in the Kingdom, and his surprising rapid Answers!, W.C. Pollard, 1821

Colburn, Z., *A memoir of Zerah Colburn,* written by himself, G. & C. Merriam, Springfield, MA, 1833 Rademacher, H., and Torplitz, O., The Enjoyment of Mathematics, Princeton University Press, NJ, 1957

Aitken, A.C., "The Art of Mental Calculation; with Demonstrations', Society of Engineers Journal and Transactions, 1954 Preston, R., "The Mountains of Pi', New Yorker, 1992.

BÖLÜM BEŞ

Acheson, D., *1089 and all that,* Oxford University Press, Oxford, 2002

Berlinski, D., *Infinite Ascent, The Modern Library,* New York, 2005

Dale, R., *The Sinclair Story,* Duckworth, London, 1985

Derbyshire, J., *Unknown Quantity,* Atlantic Books, London, 2006

Hopp, P.M., *Slide Rules, Their History, Models and Makers,* Astragal Press, New Jersey, 1999

Maor, E., E: *The Story of a Number,* Princeton University Press, NJ, 1994

Rade, L., and Kaufman, B.A., *Adventures with Your Pocket Calculator,* Pelican, London, 1980

Schlossberg, E., and Brockman, J., The Pocket Calculator Game Book, William Morrow, New York, 1975

Vine, J., Fun & Games with Your Electronic Calculator, Babani Press, London, 1977 (published in the US as Boggle, Price, Stern, Sloane Publishers, Los Angeles, CA, 1975)

BÖLÜM ALTI

Kitabın birinci baskısından sonra Mayıs 2010'da, Martin Gardner öldü. 95 yaşındaydı ve hâlâ çalışmaya devam ediyordu. İki ay sonra Tom Rokicki ve iş arkadaşları Google'ın bağışladığı bilgisayar ile 35 yıllık bilgisayar zamanı hesaplama ardından tanrının sayısının 20 olduğunu hesapladı.

Dudeney'in makalesini *Strand Magazine* dergisinde buldum, bulmacaların dehasına bakmaksızın çok iyi yazılmıştı ve okumaya değiyordu. Henry Dudeney konusunda uzman olan, Angela Newing'e ve bulmacalar hakkındaki diğer bulmacaları çözen Jerry Slocum'a minnettarım. Eğer Ambigram dövme yaptırmak isteyen herhangi bir kişi olursa Mark Palmer'ın çalışmalarına www.wowtattoos.com adresinden bakabilirler.

Bachet, C.G., *Amusing and Entertaining Problems that can be Had with Numbers* (very useful for inquisitive people of all kinds who use arithmetic), Paris, 1612

Bodycombe, D.J., *The Riddles of the Sphinx,* Penguin, London, 2007

Danesi, M., *The Puzzle Instinct,* University of Indiana Press, Indianapolis, IN, 2002

Elffers, J., and Schuyt, M., Tangram, 1997

Gardner, M., *Mathematics, Magic and Mystery,* Dover, New York, 1956

Hardy, G.H., *A Mathematician's Apology,* Cambridge University Press, Cambridge, 1940 Hooper, W., *Rational Recreations, in which the principles of Numbers and Natural Philosophy are clearly and copiously elucidated by a series of easy, entertaining, interesting experiments, among which are all those commonly performed with the cards,* London, 1774 Loyd, S., The 8th Book of Tan Parti, 1903; new edition Dover, New York, 1968

Maor, E., *Trigonometric Delights,* Princeton University Press, NJ, 1998 .

Netz, R., and Noel, W., *The Archimedes Codex,* Weidenfeld & Nicolson, London, 2007 Pasles, P.C., *Benjamin Franklin's Numbers,* Princeton University Press, NJ, 2008

Pickover, C.A., *The Zen of Magic Squares, Circles and Stars,* Princeton University Press, NJ, 2002

Rouse Ball, WW., *Mathematical Recreations and Problems,* Macmillan, London, 1892 Slocum, J., The Tangram Book, Sterling, New York, 2001 Slocum, J., and Sonneveld, D., The 15 Puzzle, Slocum Puzzle Foundation, California, 2006

Swetz, F.J., *Legacy of the Luoshu,* Open Court, Chicago, IL, 2002

Dudeney, H., 'Perplexities', column in Strand Magazine, London, 1910-30 Singmaster, D., "The unreasonable utility of recreational mathematics', lecture at the First European Congress of Mathematics, Paris, July 1992

BÖLÜM YEDİ

On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (www.research.att.com/-njas/ sequences/) ilk bakışta uzman olmayan kişiler için oldukça yıldırıcı gözüküyor ama bir kere kavradıktan sonra, gezinmek gerçekten heyecan verici. Chris Caldwell's online encyclopedia of primes'ın da (www.primes.utm.edu) olağanüstü bir kaynak olduğunu düşünüyorum.

Doxiadis, A., *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture*, Faber & Faber, London, 2000

Du Sautoy, M., *The Music of the Primes*, Fourth Estate, London, 2003 Reid, C, From Zero to Infinity, Thomas Y. Crowell, New York, 1955

Schmelzer, T., and Baillie, R., 'Summing a curious, slowly convergent series', American Mathematical Monthly, July 2008

Sloane, N.J.A., 'My Favorite Integer Sequences', 2000

BÖLÜM SEKİZ

Dilsel kökenleri tamamen ayrı olmasına rağmen pi, fi ve Fibonacci'nin kulağa bağlantılıymış gibi gelmesi oldukça tuhaf bir durum ama komplo teorisi sevenler pek ikna olmayacaklardır. İş altın orana geldiğinde, kafadan çatlak olanları, olmayandan ayırmak pek kolay bir iş değil. Çatlak olmayanlardan birisi de Ron Knott ve internet sitesinde 1.618... ile ilgili merak ettiğiniz her şey var. www.computing.surrey.ac.uk/personal/ext/ R.Knott/Fibonacci/

Livio, M., *The Golden Ratio*, Review, London, 2002 Posamentier, A.S., and Lehmann, I., The (Fabulous) Fibonacci Numbers, Prometheus Books, New York, 2007

McManus, I.C., Cook, R., and Hunt, A., *'Beyond the Golden Section and normative aesthetics: why do individuals differ so much in their aesthetic preferences for rectangles?'*, Perception, vol. 36, 2007

BÖLÜM DOKUZ

Kelly stratejisi kesirleri hatırlamanın da ötesinde bir şey çünkü kumarhanedeki koşullar benim tarif ettiğim basit birkaç tanesinden çok daha karmaşık. Röportaj sırasında Kelly hakkında yeterli

detay verip veremeyeceğimi soran Ed Thorp'dan özür diliyorum. Üzgünüm Ed ama bu kitabın içeriği için çok karmaşık bir strateji bu. William Poundstone'un dehşete düşüren kitabı yol gösteren bir ışıktı ve kendisine 412. sayfadaki yer alan grafiği sağladığı için minnettarım.

Aczel, A.D., *Chance,* High Stakes, London, 2005

Bennett, D.J., *Randomness,* Harvard University Press, Cambridge, MA, 1998

Devlin, K., *The Unfinished Game,* Basic Books, New York, 2008

Haigh, J., *Taking Chances,* Oxford University Press, Oxford, 1999

Kaplan, M., and Kaplan, E., *Chances Are,* Penguin, New York, 2006

Mlodinow, L., *The Drunkard's Walk,* Allen Lane, London, 2008

Paulos, J.A., *Innumeracy,* Hill & Wang, New York, 1988

Poundstone, W., *Fortune's Formula,* Hill & Wang, New York, 2005

Rosenthal, J.S., *Struck by Lightning*, Joseph Henry Press, Washington DC, 2001

Thorp, E.O., *Beat the Dealer,* Vintage, New York, 1966

Tijms, H., *Understanding Probability,* Cambridge University Press, 2007

Venn, J., *The Logic of Chance,* Macmillan, London, 1888

BÖLÜM ON

İstatistik bu kitapta yer alan alanlar arasında okulda ya da üniversitede çalışmadığım tek alan, bu yüzden birçoğu benim için çok yeni. Birçok matematikçi için istatistik doğru düzgün bir matematik alanı bile değil, ölçümler gibi dağınık bir yer işgali. Her ne ka-

dar uzun bir süre daha Greggs'e gitmeyecek olsam da ellerimi bulaştırmaktan büyük keyif aldım.

Blastland, M., and Dilnot, A., *The Tiger That Isn't,* Profile, London, 2007

Brookes, M., *Extreme Measures,* Bloomsbury, London, 2004

Cline Cohen, P., *A Calculating People: The Spread of Numeracy in Early America*, University of Chicago Press, IL, 1982

Cohen, I. B., *The Triumph of Numbers,* W. W. Norton, New York, 2005 Edwards, A.W.F., Pascal's Arithmetical Triangle, Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1987

Kuper S., and Szymanski S., *Why England Lose,* HarperCollins, London, 2009

Taleb, N.N., The Black Swan, Penguin, London, 2007

BÖLÜM ON BİR

Evrenin, düz, eğik ya da hiperbolik olup olmadığı hâlâ açık bir soru olmasına rağmen, söyleyebilirim ki evren oldukça düz, eğer eğimli olsaydı sapması sıfır olurdu. Ama çok hafif bir sapması var. Evrenin eğimli olup olmadığını test etmenin bir cilvesi olarak ölçümlerde daima hatalar olacaktır. Buna karşılık, teorik olarak evrenin eğik olduğunu ispat etmek mümkün, bu sıfır olmayan ölçüm hatasını hesaba katarak eğer sonuçlar eğimliyse mümkündür.

Hilbert Otel bazen Sonsuzluk Oteli olarak anılır ve hikâyesinin birçok farklı versiyonu vardır. Benim tercihim tişört giyen konuklar.

Aczel, A.D., *The Mystery of the Aleph*, Washington Square Press, New York, 2000 Barrow, J.D., The Infinite Book, Jonathan Cape, London, 2005

Foster Wallace, D., *Everything and More,* W. W Norton, New York, 2003

Kaplan, R., and Kaplan, E., *The Art of the Infinite,* Allen Lane, London, 2003

O'Shea, D., *The Poincaré Conjecture*, Walker, New York, 2007

Taimina, D., and Henderson, DW., 'How to Use History to Clarify Common Confusions in Geometry', Mathematical Association of America Notes, 2005

İNTERNET

Wikipedia ve Wolfram MathWorld (www.mathworld.wolfram.com) bakmadan matematik ile ilgili herhangi bir şeyi araştırmak mümkün değil, ki ben onlara her gün danıştım.

GENEL KAYNAKLAR

Göz attığım kitapların sayısı burada sıralanamayacak kadar çok, bu aşağıdakiler öyle ya da böyle kitaba doğrudan katkı sağlayanlar. Keith Devlin, Clifford A. Pickover ya da Ian Stewart'ın herhangi bir çalışması okumaya değer.

Bell, E.T., *Men of Mathematics,* Victor Gollancz, London, 1937

Bentley, P.J., *The Book of Numbers,* Cassell Illustrated, London, 2008

Darling, D., *The Universal Book of Mathematics,* Wiley, Hoboken, NJ, 2004

Devlin, K., *All the Math That's Fit to Print,* Mathematical Association of America, Washington DC, 1994

Dudley, U. (ed.), *Is Mathematics Inevitable?,* Mathematical Association of America, Washington DC, 2008

Eastaway, R., and Wyndham, J., *Why Do Buses Come in Threes?,* Robson Books, London, 1998

Eastaway, R., and Wyndham, *How Long is a Piece of String?,* Robson Books, London, 2002

Gowers, T, *Mathematics: A Very Short Introduction,* Oxford University Press, Oxford, 2002 Gullberg, J., Mathematics, W W. Norton, New York, 1997

Hodges, A., *One to Nine,* Short Books, London, 2007

Hoffman, P., *The Man Who Loved Only Numbers: The Story of Paul Erdos and the Search for Mathematical Truth,* Fourth Estate, 1998

Hogben, L., *Mathematics for the Million,* Allen & Unwin, London, 1936

Mazur, J., *Euclid in the Rainforest,* Plume, New York, 2005

Newman, J. (ed.), *The World of Mathematics,* Dover, New York, 1956

Pickover, C.A., *A Passion for Mathematics,* Wiley, Hoboken, NJ, 2005

Singh, S., *Fermat's Last Theorem,* Fourth Estate, London, 1997

TEŞEKKÜR

Öncelikle, cesaretlendirmeleri olmasa bu kitabı asla yazamayacağım Janklow & Nesbit'den Claire Paterson'a ve Londra'daki editörüm Richard Atkinson ve New York'daki editörüm Emily Loose'a teşekkürler. Ayrıca muhteşem illüstrasyonları için Andy Riley'ye minnettarım.

Seyahatlerimin başarısı eski ve yeni arkadaşlarımın katkısına bağlıydı: Japonya'da Chieko Tsuneoka, Richard Lloyd Parry, Fiona Wilson, Kouzi Suzuki, Masao Uchibayashi, Tetsuro Matsuzawa, Chris Martin ve Leo Lewis. Hindistan'da, Gaurav Tekriwal, Dhananjay Vaidya ve Kenneth Williams. Almanya'da, Ralf Laue, ABD'de Colm Mulcahy, Tom Rodgers, Tom Hull, Neil Sloane, Jerry Slocum, David Chudnovsky, Gregory Chudnovsky, Tom Morgan, Michael de Vlieger, Jerome Carter, Anthony Baerlocher ve Ed Thorp. İngiltere'de Brian Butterworth, Peter Hopp ve Eddy Levin.

Taslaklarıma yapılan yorumlar sayesinde daha iyi oldular bu nedenle Robert Fountain, Colin Wright, Colm Mulcahy, Tony Mann, Alex Paseau, Pierre Pica, Stefanie Marsh, Matthew Kershaw, John Maingay, Morgan Ryan, Andreas Nieder, Daina Taimina, David Henderson, Stefan Mandel, Robert Lang, David Bellos ve Ilona Morison'a teşekkürler. Ayrıca Natalie Hunt, Simon Veksner, Veronica Esaulova, Gavin Pretor-Pinney, Justin Leighton, Jeannine Mosely, Ravi Apte, Hugo de Klee, Maura O'Brien, Peter Dawson, Paul Palmer-Edwards, Elaine Leggett, Rebecca Folland, Kirsty Gordon, Tim Glister, Hugh Morison, Jonathan Cummings, Raphael Zarum, Mike Keith, Gareth Roberts, Gene Zirkel, Erik Demaine, Wayne Gould, Kirk Pearson, Angela Newing, Bill Eadington, Mike LeVan, Sheena Russell, Hartosh Bal, Ivan Moscovich, John Holden, Chris Ottewill, Mariana Kawall Leal Ferreira, Todd Rangiwhetu, William Poundstone, Frank Swetz ve Amir Aczel'e ve son olarak, bu kitabın bir yerinde adından bahsedersem matematikten yıldızlı A almaya söz veren yeğenim Zara Bellos'a.

RESİM İZİNLERİ

S. 32 © Tetsuro Matsuzawa.

s. 58 Jürg Wassmann.

ss. 60-65 Dozenal Society of America.

s. 70 Musée international d'horlogerie, La Chaux-de-Fonds, İsviçre.

s. 119 © Sir Roger Penrose.

s. 124 © Ravi Apte.

s. 226 Science Museum / Science & Society Picture Library.

s. 232 Science Museum / Science & Society Picture Library.

s. 252 © Justin Leighton.

s. 256 © Maki Kaji.

s. 263 © Jose / Fotolia.

s. 264 History of Medicine Library, University of Kansas Medical Center.

s. 276 Jerry Slocum.

s. 280 Jerry Slocum.

ss. 283-4 Sam Loyd Company.

s. 290 Scott Kim'in izniyle.

s. 292 Mark Palmer, Wow Tattoos.

s. 298 © Daniel Erdely, Walt van Ballegooijen ve Spidron Team, 2008.

s. 324 Paul Bateman.

s. 343 Shutterstock.com lisansı altında.

s. 361 © Alex Bellos.

s. 379 Scott W. Klette, Nevada State Museum, Carson City, NV.

s. 412 William Poundstone.

s. 456 © Daina Taimina.

s. 467 © M.C. Escher Company, Hollanda, 2009.

s. 471 © Daina Taimina

Tam sayılar ilginizi çekiyor mu?
Dörtgenlere meraklı mısınız?
Olasılık hesapları kafanızı karıştırıyor mu?
Sarmallar sizi ürkütüyor mu?

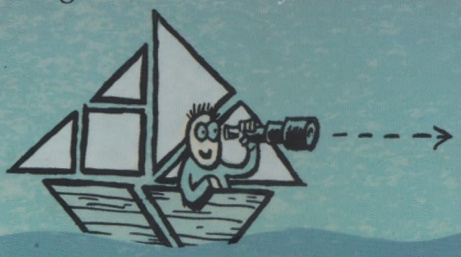
KENDİNİZİ YETERSİZ HİSSETMEDEN MATEMATİĞİN HARİKA YÖNLERİNİ KEŞFEDİN...

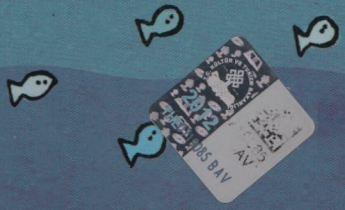
"Alex'in matematiğe olan hevesi her sayfada kendini gösteriyor. Kitap hemen klasikler arasına girmeyi hak ediyor."
–Ian Stewart, yazar

"Kültürlerarası gerçek bir Büyülü Gizem Turu, unutulmaz bir entelektüel keşif yolculuğu."
–Apostolos Doxiadis, yazar

"Gerçekten mükemmel bir modern matematik araştırması... Lewis Carroll'ın okumaktan keyif alacağı bir kitap."
–Martin Gardner

"Özgün ve eğlenceli." *–Sunday Times*





www.pegasusyayinlari.com
ISBN: 978-605-5289-90-4