

Keyifli Okumalar Dileriz

Binlerce kategoride milyonlarca PDF e-kitap, ders kitapları, dergiler ve romanlara platformumuz üzerinden ücretsiz ulaşabilirsiniz.

RESMİ WEB SİTEMİZ

<https://rantey.org>

Yedek ve Duyuru Kanallarımız

Sitemize erişim engeli gelmesi veya adres değişikliği durumunda aşağıdaki kanallardan güncel giriş adresine erişebilirsiniz:

- Telegram: <https://t.me/birkitapbir>
- WhatsApp Kanalımız : <https://whatsapp.com/channel/0029VbDHv8uE50Us4lvMoc0Y>

Matematiksel Bir Doğa Yürüyüşü

John A. Adam

Matematiksel Bir Doğa Yürüyüşü

John A. Adam



TÜBİTAK

POPÜLER BİLİM KİTAPLARI

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - <https://rantey.org>

Bulutlar ne kadar ağır? Yağmur damlasının yere düşüş hızı ne? Örümcek ağının üzerindeki damlacıklar neden birbirine eşit uzaklıkta? Böyle sorular soruyorsanız bu kitap tam size göre. Matematiksel Bir Doğa Yürüyüşü doğayı ve matematiği ya da her ikisini seven okurlara hitap ediyor.

John Adams, kitapta doğa olayları ile ilgili doksan altı soru soruyor ve temel matematik kullanarak bunları yanıtlıyor. Basit anlatımlar farklı matematik altyapılarına sahip okurların problemleri anlamalarına ve çözmelerine yardımcı oluyor. Matematiksel Bir Doğa Yürüyüşü doğanın eşsiz güzelliğini ve arkasında yatan muhteşem matematiği gözler önüne seriyor.



ISBN 978-605-312-086-5



Fiyatı: **₺18,5** (KDV dahil)

Basılı fiyatından farklı satılamaz.

Ücretsiz PDF Kitap Arsivi - <https://rantey.org>





Matematiksel Bir Doğa Yürüyüşü

John A. Adam



TÜBİTAK

POPÜLER BİLİM KİTAPLARI

TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları 830

Matematiksel Bir Doğa Yürüyüşü
A Mathematical Nature Walk

John A. Adam

Çeviri: Nur Savaşçı

Redaksiyon: Özge Özgür

Türkçe Metnin Bilimsel Danışmanı: Prof. Dr. Yusuf Yaylı

Tashih: Sinan Onuş

Copyright © Princeton University Press, 2009

Türkçe Yayın Hakkı © Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu, 2014

Türkçe yayın hakları Akcalı Telif Hakları Ajansı aracılığı ile alınmıştır.

Tüm hakları saklıdır. Bu kitabın hiçbir bölümü, yayıncının yazılı izni olmaksızın tekrar üretilemez, bir erişim sisteminde tutulamaz, herhangi bir biçimde elektronik, mekanik, fotokopi, ses kaydı ya da diğer yollarla iletilemez.

*TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları'nın seçimi ve değerlendirilmesi
TÜBİTAK Kitaplar Yayın Danışma Kurulu tarafından yapılmaktadır.*

ISBN 978 - 605 - 312 - 086 - 5

Yayıncı Sertifika No: 15368

1. Basım Temmuz 2018 (5000 adet)

Genel Yayın Yönetmeni: Bekir Çengelci

Mali Koordinatör: Adem Polat

Telif İşleri Sorumlusu: Tuba Akoğlu

Yayıma Hazırlayan: Muhammed Said Vapur

Kapak Tasarımı: Elnârâ Ahmetzâde

Sayfa Düzeni: Şeyma Sırakaya

Basım İzleme: Duran Akca

TÜBİTAK

Kitaplar Müdürlüğü

Akay Caddesi No: 6 Bakanlıklar Ankara

Tel: (312) 298 96 51 Faks: (312) 428 32 40

e-posta: kitap@tubitak.gov.tr

esatis.tubitak.gov.tr

Gökçe Ofset Matbaacılık Yay. San. Ltd. Şti.
İvedik OSB 21. Cad. 1372. Sok. No: 22 Yenimahalle Ankara
Tel: (312) 395 93 37 Faks: (312) 395 93 39 Sertifika No: 15397

Matematiksel Bir Doğa Yürüyüşü



John A. Adam

Çeviri
Nur Savaşçı

TÜBİTAK POPÜLER BİLİM KİTAPLARI



Önsöz	I
Teşekkür	VII
Giriş	1
Başlangıçta...	15
(Gözlem, tahmin ve fiziksel sezgi gücüm üze meydan okuyan genel sorular)	
1 – 6. Soru: Gökkuşağı	16
7. Soru: Gölge	16
8 – 9. Soru: Bulutlar ve su damlacıkları	16
10. Soru: Işık	16
11. Soru: Ses	16
12 – 13. Soru: Dünya'nın dönüşü	17
14. Soru: Ufuk çizgisi	17
15. Soru: Uzak tepelerin görünüşü	17
“Oyun Alanında”	19
(Yavaş yavaş ısınalım...)	
16. Soru: Loch Ness Gölü'nü boşaltmak ne kadar zamanımızı alır?	20
17. Soru: Büyük Kanyon'u kumla doldurmak ne kadar zamanımızı alır?	21
18. Soru: Bir milyon akrelik bir arazi tam olarak ne kadar büyüklüktedir?	22
19. Soru: Yirmi beş milyon hamburger — siz kaç tane yediniz?	23
20. Soru: ABD'nin (1978 yılındaki) günlük et ihtiyacını karşılamak için kaç büyükbaş hayvana ihtiyacı vardı?	24
21. Soru: King Kong neden asla var olamaz?	24
22. Soru: Neden küçük böcekler düş almaktan hoşlanmaz?	26
23. Soru: Şu yağmur damlasının yere düşüş hızı nedir?	27
24. Soru: Neden devasa saman yığınları ansızın alev alabilir?	29
Bahçede	35
25. Soru: Nasıl oluyor da küçük bahçe küremin içinde “tüm evreni” görebiliyorum?	36
26. Soru: Şuradaki arı daha ne kadar balözünü toplayacak?	37
27. Soru: Örümcek ağının üzerindeki şu damlacıklar neden birbirlerinden eşit uzaklıkta?	40
28. Soru: Fibonacci dizisi nedir?	45
29. Soru: Şu “altın aç” dedikleri de nedir?	50
30. Soru: Yapraklar arasındaki açılar neden “o şekildedir”?	50

Mahallede	59
31. Soru: Sadece yanından geçmekle çitlerin (ya da köprülerin) “şekillerini” anlayabilir misiniz?	60
32. Soru: Bir balkabağının ağırlığını, sadece dikkatle bakarak ölçebilir misiniz?	66
33. Soru: Alçaktan uçan ördek sürülerinin rotasını saptayabilir misiniz?	73
Gölgede	79
34. Soru: Şu ağacın yüksekliği nedir? (Eliptik ışık benekleriyle yapılan bir kestirim)	80
35. Soru: Gölgem hızlanır mı?	82
36. Soru: Dünya'nın gölgesi ne kadar uzunluktadır?	84
37. Soru: Peki ya Jüpiter'in gölgesi? Neptün'ün gölgesi?	85
38. Soru: Ay'ın gölgesi ne kadar genişliktedir?	86
Gökyüzünde	87
39. Soru: Ufuk çizgisi (ışığın kırılmasını varsaymazsak) ne kadar uzaktadır?	88
40. Soru: Şu bulut bizden ne kadar uzaktadır?	90
41. Soru: Dingin bir su birikintisi, yıldız ışıklarını ne derece iyi yansıtır?	92
42. Soru: Şu bulutun ağırlığı ne kadardır?	97
43. Soru: Uzağı sisli havalara oranla yağmurda neden daha iyi görürüz?	98
44. Soru: Şu “su birikintisi” serabı ne kadar uzaklıktadır?	99
45. Soru: Gökyüzü neden mavidir?	105
46. Soru: Mor ışık, kızıl ışıktan ne kadar fazla saçılır?	108
47. Soru: Kelebeğin kanatlarındaki, kuşun tüylerindeki ya da petrol tabakalarındaki renk çeşitliliğinin sebebi nedir?	109
48. Soru: Şu buluttaki metalik renklerin sebebi nedir?	114
49. Soru: Gökkuşağı nasıl meydana gelir? Birincil yayın altında beliren şu saçaklar nedir?	116
50. Soru: Peki, ikincil gökkuşağı nedir?	124
51. Soru: Yüksek mertebe gökkuşağı diye bir şey var mıdır?	125
52. Soru: Peki, üçlü gökkuşağı nedir?	127
53. Soru: “Sıfırıncı” mertebe gökkuşağı var mıdır?	132
54. Soru: Baloncuklar “gökkuşağı” yapabilir mi?	132
55. Soru: Acaba “elmaskuşağı” neye benzerdi?	134
56. Soru: Güneş'in etrafındaki halkanın sebebi nedir?	135
57. Soru: Günbatımında Güneş'in üzerinde beliren ışık demeti nedir?	145
58. Soru: Güneş'in yanındaki şu renkli ışık lekesi nedir?	148
59. Soru: Gökyüzündeki şu “gülen yüz” nedir?	149
60. Soru: Düzlemimin gölgesi etrafındaki şu renkli halkalar nedir?	153
61. Soru: Geometrik optik, gökkuşağı açısında neden sonsuz sonsuzluğa işaret eder?	156

Yuvada	161
62. Soru: Kuş yumurtalarının şeklini nasıl modelleyebilirsiniz?	162
63. Soru: Küresellik endeksi nedir?	163
64. Soru: Kuş yumurtasının şekli trigonometrik olarak modellenenebilir mi?	164
65. Soru: Kuş yumurtasının şekli cebirsel olarak modellenenebilir mi?	168
66. Soru: Kuş yumurtasının şekli analiz bilgisi kullanılarak modellenenebilir mi?	171
67. Soru: Kuş yumurtasının şekli geometrik olarak modellenenebilir mi?	176
Suyun İçinde (veya Üzerinde)	181
68. Soru: Sudaki parıltıların ardındaki sebep nedir?	182
69. Soru: Dalgalar nasıl bir kesişim yolu izleyerek birbirine karışır?	186
70. Soru: Dalgaların su yüzeyinde ilerleme hızı nedir?	187
71. Soru: Seyir hâlindeki gemiler o dalga örüntüsünü nasıl meydana getirir?	195
72. Soru: Akarsuyun içindeki kayalar suda farklı örüntüleri nasıl yapar?	200
73. Soru: Dalgalar zıt yönlü akıntılarla durdurulabilir mi?	203
74. Soru: Fırtına ne kadar uzalıktadır?	206
75. Soru: Dairesel bir dalga hareketinin dingin halkası ne kadar hızlı genişleyip yayılır?	208
76. Soru: Okyanus dalgaları ne kadar enerjiye sahiptir?	211
77. Soru: Bir dalga, suyun ortalama derinliğini artırır mı?	214
78. Soru: Dümen suyu, Dünya'nın "yuvarlak" olduğunu nasıl kanıtlayabilir?	216
Ormanda	221
79. Soru: Ağaçlar ne kadar uzayabilir?	222
80. Soru: Bir yaprak adacığı, altındaki yaprak adacığı için ne kadarlık gölge oluşturur?	228
81. Soru: "Ormanın uğultusu" nedir?	230
82. Soru: Bir orman ya da ağaçlık bir alan ne kadar ışık geçirimsizdir?	233
83. Soru: Neden bazı ağaçlarda "tümörler" bulunur?	235
Ulusal Parkta	241
84. Soru: Nehir kıvrımları hangi şekillerdedir? (Nehir kıvrımlarının şekilleri nasıldır?)	242
85. Soru: Dağ gölgeleri neden üçgen şeklindedir?	249
86. Soru: Zion Kemerli neden dairesele görünür?	251

Geceleyin Gökyüzü	255
87. Soru: Yıldızların büyüklüğü nasıl ölçülür?	256
88. Soru: Bir el feneriyle yıldızlara nasıl bakabilirim?	259
89. Soru: Bir yıldız nasıl modelleyebilirsiniz?	260
90. Soru: Güneş'in çökmesi ne kadar zaman alır?	270
91. Soru: Ay'ın etrafındaki şu küçük halkalar nedir?	273
92. Soru: Güneş tutulmasını nasıl modelleyebilirsiniz?	276
Bitirirken...	285
93. Soru: Yürümek nasıl modellenebilir?	286
94. Soru: Şu ağacın "uzunluğu" nedir?	291
95. Soru: Bazen günbatımında ya da hemen ardından gördüğüm "ışınlar" nedir?	295
96. Soru: Alacakaranlıktan yararlanarak atmosferin yüksekliği nasıl belirlenebilir?	299
Ek-1: Matematik terimleri ve fonksiyonlarla ilgili küçük bir terimler sözlüğü	301
Ek-2: 1–15. soruların cevapları	305
Ek-3. Newton'ın soğuma yasası	311
Ek-4: Doğadaki diğer matematiksel örüntüler	315
<i>Kaynakça</i>	319
<i>Dizin</i>	323

Sadece kitabın başlığından da anlaşılabileceği gibi uzun yürüyüşler yapmayı çok severim! Havada, suda ve gittiğim her yerde de pek çok büyüleyici olguyla karşılaşırım. Bu küçük kitaptaki bazı sorulardan da fark edileceği üzere eşim Susan ile birlikte ulusal parkları ziyaret etmeye bayılırız. Belki de bu yüzden, bir akşam tam uykuya dalmak üzereyken aklıma gelen şu soruya fazla şaşırmamalıydım: Neden kitap çalışmamın teması “matematiksel bir doğa yürüyüşü” olmasın? Çok yorgun olma- ma rağmen bu bana gayet akla yatkın gelmiş, ertesi sabah, kitabımı bu şekilde düzenleme fikrinin heyecanı ile uyanmıştım. Ayrıca akşamki düşüncemi hâlâ hatırladığım için çok da rahatlamıştım!

Peki, bu kitap kimin için kaleme alındı? Açık havada bir şeylerle uğraşırken, örneğin bahçeyle ilgilenirken, yürüyüş yaparken ya da araba kullanırken “Bu da nedir?” sorusunu soran herkes için. Güneş'in yanındaki şu renk lekesi nedir? Şu bulut neden renkli?

İlerideki dalgalar neden öyle? Şu gölgenin bu kadar sıra dışı görünmesinin sebebi nedir? Kitapta (örneğin, Loch Ness Gölü'nü boşaltmakla ya da kendiliğinden alev alan saman yığınlarıyla ilgili) akla hemen gelemeyebilecek ancak okuru meraklandırıp belirli bir konu üzerinde düşünmesi için cesaretlendirebilecek sorular da bulunuyor. Kısacası bu kitap, doğaya ilgi duyan ve bu ilgiden hareketle düşünüp sorgularken biraz matematikle uğraşmaya da istekli olan herkes için. Elbette böylesi bir okur grubu, matematik ve fen bilimleri eğitmenlerini de kapsıyor olsa gerek! Bu kitap sayesinde okurun, hem doğanın güzelliğini hem de bu güzelliğin ardındaki fizik ilkelerini ve matematiksel yapıyı daha iyi anlayacağını umuyorum. Bu da kitabı neden yazdığım sorusunun cevabını beraberinde getiriyor: Doğaya ilgi duyuyorum ve matematiksel hesap ile tanıştığım on altı yaşımdan bu yana, matematiğin tabiat âlemine uygulanmasını her zaman büyüleyici bulmuşumdur. Doğayla ve matematikle ilgili sorular hiç bitmiyor ve bence hiçbir şeyin eksiksiz bir açıklaması bulunmuyor. Bu açıklama ister sadece genel hatlarıyla ister son derece ayrıntılı olarak anlaşılabilir, belirli bir olgunun daha fazla incelenmeye muhtaç ve hemen göze çarpmayan çok sayıda özellikleri bulunuyor. Genel anlamda bilimi, özelde uygulamalı matematiği böylesine büyüleyici kılan da (zorluk düzeyi ne olursa olsun) bu. Kitabın yapısı, aşağıda belirtilmekle birlikte okuru şu konuda cesaretlendirmek isterim: Kitabı soru sıralamasına sadık kalarak okumak kesinlikle gerekme de elbette bazı sorular birbirleriyle bağlantılı. Bu, sorunun bağlamından da açıkça görülebilir.

Kitabı okumanın matematiksel ön koşulları nelerdir? Bazı sorular (örneğin, 1–23. Sorular) için sadece aritmetik bilgisi yeterliyken, hesap (cebir ve trigonometri) bilgisi, kalan soruların büyük çoğunluğunu kolay anlaşılır kılacaktır. Diğer sorular, temel analiz ve basit diferansiyel denklem bilgisi gerektirse de bu konulara aşina olmayan okurlar tarafından atlanmalarına hiç gerek yok; denklemlerin birlikte sunulduğu tanımlamalar ve açıklamalar da öğrenmeye değer pek çok şey sunuyor. Peki, bu kitap, daha

önce kaleme aldığım *Mathematics in Nature (Doğadaki Matematik)* başlıklı çalışmamdan hangi yönleriyle farklı? Önceki kitabımda yer alan başlıkların birçoğu, bu kez daha geniş bir okur kitle-sine, daha anlaşılır bir dille ulaşmak amacıyla ve daha ayrıntılı bir şekilde ele alınmış olsa da *Matematiksel Bir Doğa Yürüyüşü*, bir devam kitabı olarak yazılmadı. *Mathematics in Nature (Doğadaki Matematik)* adlı çalışmada amacım, çeşitlilik gösteren, doğal olarak meydana gelen örüntülere son derece teknik bir dille işaret et-mekti. *Matematiksel Bir Doğa Yürüyüşü* içinse konuyu, amaçları ve modelleme nesnelerini daha yalın ve belki de kışkırtıcı bir şekil-de açıklayarak sorular sormanın iyi olacağını düşündüm. Kitapta okurlar için sorular ve cevaplar temelinde hazırlanan birkaç alış-tırma mevcut. Her iki kitabım da ders kitabı olarak tasarlanmadı ancak sözgeliimi modelleme konulu bir ders kapsamında, tamamlayıcı eser olarak okutulmalarının önünde hiçbir engel bulunmuyor. Aslında *Mathematics in Nature (Doğadaki Matematik)* kitabı için eğitimcilere yönelik bir kılavuz kaleme alınmış durumda.

Giriş bölümünde, kitabın geneli için zemin hazırlamak amacıyla, eriyen kartopu gibi basit bir model üzerinden, matematiksel modellemenin ardındaki felsefe ve geniş metodoloji ele alınıyor. Ardından özelde uygulamalı matematiğin tarihi, genelde de tüm bilimler için çoğu zaman sanıldığından çok daha önemli olan *ters problemlere* dair bazı değerlendirmeler takip ediyor.

Giriş bölümünün ardından kitap, yürüyüş seyirlerini yansıtacak şekilde bölümlere ayrılıyor. Bu bölümlerin bazıları oldukça uzun-ken diğerleri hayli kısa; zaman zaman birbirleriyle temas ettikleri de oluyor. İlk bölüm, *Başlangıçta* gibi biraz iddialı ve gösterişli bir başlık taşımasına rağmen, okurun gözlem, tahmin ve fiziksel sez-gi gücüne meydan okumak ve ilerleyen sayfalardaki eğlence için okuru heyecanlandırmak amacıyla hazırlanmış bir dizi genel soru-dan ibaret. *“Oyun Alanında”* en azından benim için tam da böy-le bir eğlence sunuyor çünkü büyük oranda bu bölüm adını, prob-lemler geliştirip çözmekten büyük haz duymuş efsane fizikçi En-rico Fermi'den alan Fermi problemlerinin (benzer pek çok prob-

lem, Weinstein ile Adam'ın birlikte kaleme aldığı kitapta yer alır) ruhuna uygun bir şekilde, deyim yerindeyse “basit” sayılarla zıplayıp oynamayı içeriyor.

Bu oyun alanında suya ya da kuma ya da her ikisine dokunarak yavaş yavaş ısınmış olacağız. Bu bölümü sırasıyla *Bahçede*, *Mahallede* ve *Gölgede* bölümleri izliyor. Kulağa tekinsizmiş gibi gelse de Gölgede, gerçekten de yalnızca gölgelerle ilgili. Ancak gölgeler gizemlidir; maddeden yoksundur ama kuşkusuz gerçektir ve varlıklarını çoğu zaman hiç sorgulamadan kabul ederiz. Yukarıda, bazı konuların birden fazla bölümde ele alındığından söz etmiştik; bu konulardan biri de gölgeler.

Takip eden *Gökyüzünde*, kitabın en uzun bölümüdür. Ancak başımızı kaldırıp yukarı baktığımızda, uçup giden bir kuşun ya da ağaç tepelerindeki bir kuş yuvasının görüntüsü, çok geçmeden dikkatimizi bir diğer konuya kaydıracaktır: Kuş yumurtalarına. *Yuvada* bölümünde, geçmişte basit ancak yine de büyüleyici tekniklerden yararlanarak ve birbirini tamamlar nitelikte oluşturulmuş bir dizi matematiksel modellemenin, neden ve nasıl geliştirildiği ele alınıyor. *Suyun İçinde* (veya *Üzerinde*) başlıklı bölüm, dalgalara ve bunların bazılarını sebep olan ördekler ve gemilere işaret etse de bu bölümde, bundan çok daha fazlası var. Sonrasında *Ormanda*, *Ulusal Parkta* ve *Geceleyin Gökyüzü* başlıklı bölümler geliyor. Bunlardan sonuncusu, bir tam güneş tutulmasının nasıl modellenebileceğiyle ilgili bir soru içeriyor; tutulma anında gökyüzü, gece karanlığına bürünse de bu elbette gündüzleri meydana gelen bir doğa olayıdır. Son bölümün, *Bitirirken* başlığına sahip olması şaşırtıcı olmasa da bu ismi almasının başka nedenleri de var.

Kitap boyunca, sorulara ve açıklamalara netlik kazandırılmaları için pek çok çizim ve fotoğraftan yararlanıldı. Renkli fotoğraflar kitabın ortasında yer alan özel bir kesitte, ilgili soruların numaralarına göre sıralanarak bir araya getirildi. Okuru bu bölüme yönlendirmek için ilgili soruların yanında, köşeli parantez içinde, renkli sayfalara gönderme yapıyor.

Kitapta, ilki metin boyunca söz edilen matematiksel terimler ve fonksiyonlardan bazılarını içeren çok kısa bir terimler sözlüğü olmak üzere, dört ek bulunuyor. Bu ilk ekte sadece birkaç fonksiyona yer vermeyi tercih ettim: Hiperbolik tanjant fonksiyonu, trigonometrik ters sinüs ile kosinüs fonksiyonları ve belki de beklenmedik bir misafir olan sıfırıncı mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu. Elbette sıradan trigonometrik fonksiyonlar, kitap boyunca pek çok kez karşımıza çıkıyor ancak son derece sık rastlanan türden oldukları için bunları terimler sözlüğüne eklemeye gerek görmedim. İki numaralı ek, *Başlangıçta* başlıklı bölümde yer alan soruların (bir kısmı, zorunlu nedenlerle kesinlikten uzak olan) “cevaplarını” içeriyor. Üçüncü ek, Newton'ın soğuma yasasını, özellikle de bu kitabı kaleme alırken kendini iyiden iyiye hissettiren kahve düşkünlüğüm bağlamında ele alıyor. İlgisizmiş gibi görünse de bu eki kitaba dâhil etme nedenim, “ağaç tümörü” veya yumrusu konusuyla ilgili basit bir modelin geliştirilmesiyle bağlantılı olmasından kaynaklanıyor (83. Soru). Nihayet 4 numaralı ek, çevremizdeki tabiat âleminde fark edilmesi muhtemel pek çok doğal örüntünün bir derlemesini sunuyor. Bunlardan bazıları, kitapta etraflica ele alınmış olsa da ekteki liste uzayıp gidebilir; okuru, bu listede olan ve olmayan örüntüleri arayıp incelemesi için yüreklendirmek isterim!



Teşekkür

92. Soru'da, K.-P. Möllman'la birlikte hazırladığı, güneş tutulması modellemesine ilişkin makalesinden kapsamlı alıntılar yapmama izin verdiği için Michael Vollmer'e; 81. Soru'daki (81.2) numaralı denklemde Rayleigh'nin ulaştığı sonuçları sağlayan özlü bir argümana işaret ettiği için Roger Pinkham'a teşekkür ederim.

Bu kitap yayına hazırlanırken Old Dominion Üniversitesi Matematik ve İstatistik Bölümü'nün başkanlığını yürüten Mark Dorrepaal, ders programımı yoğun konferans, araştırma ve yazım işlerime göre düzenlemede, son derece anlayışlı davrandı. Dorrepaal'ın açık fikirliliği ve desteği olmaksızın bu kitabı ve diğer projelerimi tamamlayamazdım. Genellikle elde çizilmiş şekilleri ve şemaları tarayıcıdan geçirdiği için Barbara Jeffrey'e minnettarım; bu şekilleri ve şemaları dikkatli ve zahmetli bir çalışma ortaya koyarak kitaptaki son görünümüne kavuşturan Don Emminger'a da teşekkür ederim.

Yerbilimleri öğretmeni, sıra dışı bir doğa tutkunu ve tıpkı benim gibi bir “EPODçu”¹ olan arkadaşım Heather Renyck'a, beni daima desteklediği ve yüreklendirdiği için müteşekkirim. Onun bitkiler, hayvanlar ama özellikle mineraller dünyasına olan tutkulu merakı, bende her zaman hayranlık uyandırmıştır. Cathleen Horne ile çok iyi anlaşılan iki dost olduk; matematiğin doğayla buluşmasından en az benim kadar heyecan duyuyor! Değerli birer armağan olan dostlukları için her ikisine de teşekkür ederim. Editörüm Vickie Kearn'ün varlığı, her zaman olduğu gibi bu çalışmam sırasında da benim için bir lütuftu. Bölümler için belirlediğim bitiriş tarihlerini, başka yükümlülüklerim nedeniyle ertelediğimde bile yazma sürecinden kopmamam için yardımcı olduğu, bilgeliği dolu öğütler verdiği ve beni kolayca anlayabildiği için ona teşekkür ederim. Asistanı Anna Pierre–Humbert, taslak üzerinde son derece ayrıntılı bir çalışma yaptı –sanırım bundan, kitabı gerçekten de okuduğu sonucunu çıkarmalıyım– ve çalışmamı geliştirmeye yarayacak pek çok değerli öneride bulundu. Ayrıca kitabın daha önceki taslağını kendiliğinden inceleyerek ayrıntılı yorumlarda bulunan ve yapıcı eleştiriler getiren iki gönüllü eleştirmenime, Will Wilson ve Brian Sleeman'a da müteşekkirim. Her ikisi, ancak özellikle Will sayesinde, kitabı yeniden ve daha iyi olduğunu umduğum bir şekilde düzenleme cesareti buldum. Üçüncü eleştirmenim de pek çok yararlı öneride bulundu ve inanıyorum ki böylece çok daha iyileştirilmiş bir taslak ortaya çıkmış oldu.

Ancak en çok da eşim Susan'a minnettarım; hedeflediğim okur kitlesini dikkate almam için uyarılarını esirgemediği gibi kitapta hangi konuların olması (ve olmaması!) yönünde pek çok değerli öneride bulundu. Susan; benim için hem kişisel hem de profesyonel anlamda daima en iyisini istemiş, sevgi dolu yol arkadaşım...

1 EPOD (Earth Science Picture of the Day): ABD'deki Uzay Araştırmaları Üniversiteler Birliği'nin, Günün Yerbilimleri Fotoğrafı adlı internet sitesi. Sitede pek çok farklı doğa olayına ilişkin fotoğraflar, grafikler, sanat işleri ve diğer görseller paylaşılmaktadır. [ç.n.]

Matematiksel Bir Doğa Yürüyüşü



İnsanın sıradan bir yürüyüş sırasında karşılaştığı; hatta sadece birkaç adım mesafede bir gökyüzü açıklığı, yol kenarlarını süsleyen ağaç sıraları ve su birikintileri varsa yoğun yerleşim bölgelerinde bile rastlayabileceği doğa harikaları beni daima büyülemiştir. Virginia eyaletine bağlı Norfolk şehrinde yaşıyorum ve orada da manzara böyledir. Doğa yürüyüşlerimin çoğunu, yakın çevrede yapsam da hem ABD'deki hem de diğer ülkelerdeki çok daha uzak yerleri gezip görme fırsatım oldu. Bu kitaptaki çoğu konu da bu fırsatların bir sonucu olarak zihnimde belirdi. Tıpkı bazı yürüyüşlerin kısa bazılarının uzun –hatta hatırı sayılır zorlukta– olması gibi kitaptaki bölümler de farklı uzunluklarda.

Söylemeye gerek yok, kitaptaki soruları ve cevapları, bazen sadece arka bahçeye bazen de daha iyi bir görüş açısı kazanmak için sokağın karşı tarafına yaptığım *çok sayıdaki* yürüyüş sonucu hazırladım. Kitaptaki soruların pek çoğunu düşünmek için tek bir

yürüyüşün, ne kadar uzun olursa olsun, yeterli olacağını sanmıyorum. Matematiksel açıdan bazı sorular ve cevaplar diğerlerine oranla daha derinlikli; bazılarıysa basitçe, eldeki konuya temas edip geçen, kâğıda dökülmüş bir çeşit zihin alıştırması niteliğinde. Bu nedenle kısa tutulmuş cevapları, okuru meraklandırmak ve konu üzerinde sonrasında etraflıca düşünmesi için cesaretlendirmek üzere geliştirilmiş “oyuncak” modeller olarak görmek daha doğru olur. En azından kendi tecrübeme dayanarak söyleyebilirim ki çoğu zaman bir soru hakkında düşünmek, başlangıçta zihni hiçbir yere götürmez; bu nedenle soruyu, bir süreliğine bir kenara koymak gerekir. Ancak daha sonra bu soru, konunun büyüleyici ve kıymetli, belki de pedagojik değer taşıyan bir şekilde kavranmasına neden olabilir. Bu tür “cevapları” konunun daha iyi anlaşılmasında bir başlangıç noktası olarak kullanması için okuru yürekletmek isterim.

Ancak böylesi bir kitabın henüz başındayken yanıtlanması gereken önemli bir soru var: “*Böyle bir şeyi açıklamak için gerçekten de matematikten yararlanılabilir mi?*” “*Böyle bir şey*” ile kastedilen ne olursa olsun, bu sorunun, konunun eğitimi veren çoğu insanın dikkatini çektiğini düşünüyorum. Matematik konusunda mütevazı ancak başka alanlarda eğitim görmüş kişiler, arkadaş sohbetlerinde, benim tecrübeme göre, çoğu zaman biyoloji problemleriyle ilgili, matematiksel modellemenin gündeme gelmesini şaşkınlıkla karşılar. Çoğu kişi, belki de okul yıllarında yaşadıkları talihsiz karşılaşmalar nedeniyle, matematiğin örneğin fizik, kimya ve astronomi alanları için ne derece önem taşıdığının, belli belirsiz de olsa farkındadır. Ancak başka konuların da matematiksel modellemeye benzer şekilde bağlı olduğu pek bilinmez. Beni, bu kitabı yazmaya teşvik eden etkenlerden biri de bu türden sorulara temas eden, eklektik bir “[buraya en sevdiğiniz konu başlığı gel-sin] nasıl modellenebilir?” derlemesi hazırlamak oldu. Bu sorular da iki ortak temada birleşiyor: *Matematiksel modelleme ve doğa*.

Peki, matematiksel model nedir? Hangi varsayımlardan yola çıkarak böyle bir model oluşturulabilir ve bu model, ne derece ger-

çekçi olur? Sorunun cevabını iki aşamada ele almaya çalışalım. İlk aşamada, başka bir kaynakta (Adam, 2006) konu edilmiş basit bir modelden hareketle, şu problemi çözelim: *Bir kartopu kütesinin yarısı bir saatte eriyorsa, kartopunun geri kalanı ne kadar zamanda eriyecektir?* Ardından daha genel bir modellemeyi inceleyeceğiz. Analiz'e giriş niteliğindeki ders kitaplarında sıklıkla rastlanan bu ve benzeri problemlerin çözümü için temel matematiğin, zincir kuralı ve basit seviyede integral alma gibi, basit birkaç konusunu bilmek yeterlidir. Ancak böylesi bir modelleme alıştırmasını asıl ilginç ve bilgilendirici kılan, eldeki matematiksel malzemeyle ne yaptığımızdır. Eriyen bir kartopuyla ilgili bir model oluşturmak için akla yatkın pek çok varsayıma başvurulabilir ancak temellendirilmesi mümkün olmayan varsayımlar da olasıdır! Okur, yukarıdaki probleme ilişkin varsayımların bir kısmını ya da tamamını bu ikinci kategoride değerlendirebilir ancak sonuçta bir model, eldeki verilere ne derece uygun düştüğü ve yeni olguları ne derece öngörebildiğiyle sınanır. Buradaki modelimiz fazla iddialı değil (hatta pek sağlam bir model olduğu da söylenemez); amacımız sadece bir probleme nasıl yaklaşabileceğimizi ortaya koymak. Ancak sınıf ortamında sıcak bir tartışma başlatmaya yarayabilir; özellikle de soğuk kış günlerinde. Şimdi, bazı akla yatkın varsayımları ele alalım.

(i) Kartopunun, yarıçapı daima $r(t)$ olan bir kürecik olduğunu varsayalım. Bu, neredeyse hiçbir zaman böyle olmayacaktır ancak böyle bir varsayım, şu soruyu da basitleştirmemize yarıyor: Başlangıçta kartopu, kabaca bile olsa, küre şeklinde midir? Yoksa zamanla mı bu şekli almıştır? Başlangıçta küre şeklinde olsa bile, kartopunun öncelikli olarak belirli bir yüzeyinin ısınma ve erime olasılığı var mıdır? Bu son sorunun cevabı olumludur: Evet, kartopu gölgede durmuyorsa ya da gökyüzü homojen bir şekilde bulutlarla kaplı değilse, kartopunun doğrudan güneş ışığına maruz kalan tarafında öncelikli erime meydana gelmesi olasıdır. Bu varsayımda bulunabiliyorsak, ulaşılan yüzey alanı ve hacim değerlendirmelerimiz sadece tek bir uzamsal değişkene bağlı olacaktır; r değişkenine.

(ii) Kar/buz karışımının yoğunluğunun, kartopunun tamamında sabit olduğunu, diğer deyişle “kar istiflenişinin” kürecik genelinde farklılık göstermediğini varsayalım. Bu, küçük (örneğin, avuç içi boyutlarındaki) kartopları için akla yatkın bir varsayım olsa da yuvarlanarak büyütülen kartoplarında, ağırlık arttıkça büyük olasılıkla daha yoğunluklu bir sıkışma söz konusu olacaktır. Ancak sabit yoğunluk varsayımının önemli bir avantajı, kartopunun kütlesini (ve ağırlığını), hacmiyle doğru orantılı olarak ortaya koymasındır.

(iii) Kartopunun kütlesinin, yüzey alanıyla orantılı olarak azaldığını varsayalım ve tek varsayımımız bu olsun. Kartopunun dış yüzeyinin, erimeye yol açan sıcak havayla temas ettiğini düşünürsek bu, akla yatkındır. Diğer deyişle, ısı aktarımı yüzeyde gerçekleşir. Özellikle bu varsayımı, modelin öngörülleri ışığında inceleyeceğiz. Ancak bu iyi bir varsayım olsa bile, orantısallığın “sabit”, gerçekten sabit midir? Havadaki nem oranına, erimeye sebep olan güneş ışınlarının geliş açısına ve kuvvetine, dış sıcaklığa vb. etkenlere bağlı olamaz mı?

(iv) Kartopunun “yaşamı” boyunca hiçbir dış etkenin değişiklik göstermediğini varsayalım. Bu, (iii) numaralı varsayımımızla da ilgilidir ve belki de tüm varsayımlarımız içinde en zayıf olanıdır. Kartopunun erime süresi bir günden çok daha kıysa, dış etkenlerin değişiklik göstereceğini de rahatlıkla söyleyebiliriz! Güneş ışınlarının açısının ve kuvvetinin, muhtemelen yukarıda söz edilen diğer etkenlerle birlikte zaman içinde değişeceği açıktır.

Bu dört varsayımdan ve ortaya koydukları bazı matematiksel sonuçlardan hareketle bir model geliştirelim. Bunu, daha başka sorular sorarak yapabiliriz. Örneğin,

(i) Kartopunun kütlesini, hacmini ve yüzey alanını nasıl ifade edebiliriz?

(ii) Modelimizin dayanacağı denklemleri nasıl oluşturabiliriz? Bizim için uygun olan başlangıç koşulları ve sınır koşul-

ları nelerdir? Eldeki verileri, modellememize nasıl dahil edebiliriz?

(iii) Denklemlerden yararlanarak (analitik, yaklaşık ya da sayısal) bir çözüme ulaşabilir miyiz?

(iv) Çözümün fiziki yorumu nedir ve akla yatkın mıdır? Eldeki verilerle tutarlı mıdır ve modelin ortaya koyduğu öngörüler mantıklı mıdır?

Kartopunun, “deneyimizin” başlangıcından t saat geçtikten sonraki yarıçapı $r(t)$; başlangıçtaki yarıçapı ise $r(0) = R$ olsun. Yarıçapı r olan bir kürenin yüzey alanı $4\pi r^2$ iken hacmi $4\pi r^3 / 3$ olur. Kartopunun homojen yoğunluğunu ρ olarak ifade edersek, kartopunun herhangi bir t zamandaki kütlesi de

$$M(t) = \frac{4}{3} \pi \rho r^3(t) \quad (I.1)$$

olur.

Bu durumda kartopu kütlesinin anlık değişim oranı $[M(t)]$ 'nin t 'ye göre türevi]

$$\frac{dM}{dt} = 4\pi \rho r^2 \frac{dr}{dt} \quad (I.2)$$

olur.

(iii) numaralı varsayıma göre dM/dt ile $S(t)$ arasında orantısallık bir ilişki varken yüzey alanının t zamandaki ifadesi

$$\frac{dM}{dt} = -4\pi r^2 k \quad (I.3)$$

olur. Buradaki k , orantısallığın (pozitif) sabitidir ve eksi işareti, kütlenin zamanla azaldığını gösterir. Son iki ifadeyi denklem hâline getirdiğimizde

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{k}{\rho} = -\alpha \quad (I.4)$$

olur. Bu modele göre, kartopunun yarıçapı zamanla düzgün (homojen) şekilde azalır. Bu, $r(t)$ yarıçapının, t 'nin $-\alpha$ eğimine sahip bir doğrusal fonksiyonu olduğu anlamına gelir. Başlangıçtaki yarıçap R iken

$$r(t) = R - \alpha t = R \left(1 - \frac{t}{t_m}\right) = 0 \text{ iken } t = \frac{R}{\alpha} = t_m \quad (1.5)$$

ifadesindeki t_m kar topunun başlangıçta, yarıçapı sıfırken, erimesi için gereken zamandır. Elimizde veri olmadığı için α 'nın değerini bilmiyor olsak da bir saat sonra kartopunun yarısının eridiğini *biliyoruz*. Bu nedenle (1.5) numaralı denklemden hareketle $r(1) = R - \alpha$ sonucuna ulaşıyoruz. (1.5)'teki doğrusal denkleme başvurduğumuzda ve benzer üçgenlerden (*Şekil 1.1.*) yararlandığımızda şunu görüyoruz:

$$t_m = \frac{R}{R - r(1)} \quad (1.6)$$

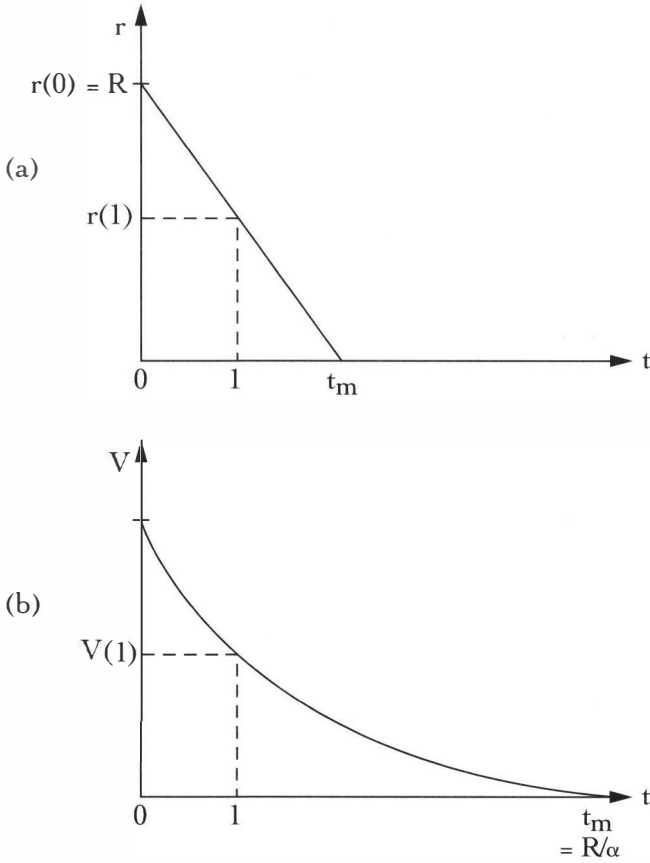
Üstelik,

$$\frac{V(1)}{V(0)} = \frac{1}{2} = \frac{r^3(1)}{R^3} \quad (1.7)$$

Böylece,

$$r(1) = 2^{-1/3} R \approx 0,79R$$

Bu nedenle $t_m \approx 4,8$ saattir. Bu modele göre, kartopunun tamamen erimesi için dört saatten biraz daha fazla zaman geçmesi gerekecektir. Bu oldukça uzun zaman zarfında hiç kuşkusuz güneşin konumu da (yaklaşık 70 derecelik bir yay boyunca) değişiklik gösterecektir. Öyleyse, başlangıçtaki varsayımlarımıza geri dönecek olursak (iv) numaralı varsayımımızı temellendiremeyiz. (1.5) numaralı denklemin bir diğer çıkarımı da kartopunun hacminin (ve (ii) numaralı varsayıma göre kütesinin) t zamanda, bir kübik polinom gibi azaldığıdır. Diğer deyişle,



Şekil 1.1. Kartopunun yarıçapı $r(t)$ ve hacmi $V(t)$

$$V(t) = V(0) \left(1 - \frac{t}{t_m}\right)^3 \quad (1.8)$$

Buna göre, $V'(t) < 0$ olmalıdır ve $V'(t_m) = 0$ 'dır. $V''(t) > 0$ olduğundan, Şekil 1.1. (b)'de de gösterildiği gibi, kartopunun öncele-
ri $-|V'|$ değeri daha büyükken— daha hızlı eridiği, zaman geçtikçe
erimenin yavaşladığı açıktır. Çocukken annemin, “kar, yukarıdaki
arkadaşlarını da beklediği için yerde kalır” dediğini hatırlıyorum
ancak elimizdeki modelin, aşağıdaki açıklamalarımıza rağmen an-

nemi haklı çıkardığı pek söylenemez! Modelimiz bazı koşullar altında yeterli görülebilir ancak (benim ortaya attığım) başlangıçtaki verileri düşünürsek bu modelin bazı eksiklikleri olduğu da ortadadır. Peki, burada göz ardı edilen diğer etkenler nelerdir? İşte bunlardan bazıları.

Hepimizin bildiği gibi karın kıvamı, “ıslak” mı yoksa “kuru” mu olduğuna göre değişir; ıslak karla daha rahat kartopu yapılır. Islak kar çok daha kolay bir şekilde istiflenebilir ve dış yüzeyinde bir buz tabakası oluşabilir. Bu, kartopunu sıcak havayla temas etmekten (bir şekilde) koruyan bir yüzey yalıtımı da sağlamış olur. Kirli kardan yapılmış bir kartopuna kıyasla, düzgün ve temiz bir kartopu güneş ışınlarını yüksek ölçüde yansıtabilir (diğer deyişle, yüksek bir *aklık derecesine* sahiptir) ve bu, kartopunun erime hızını daha da azaltacaktır. Elbette bu tabloda eksik olan başka pek çok etken vardır.

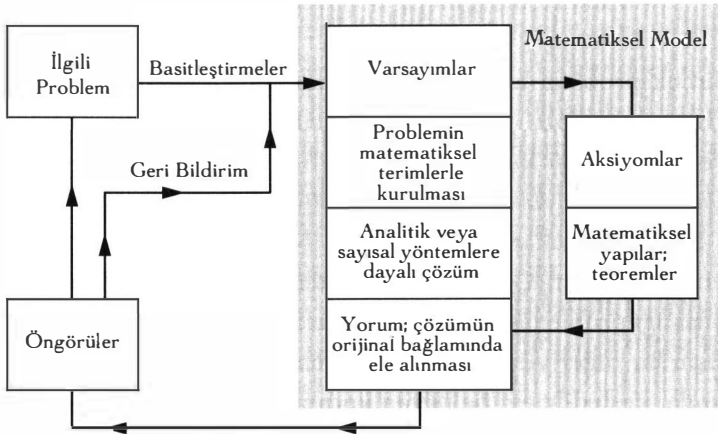
Kartopunun β kadar bir miktarının h saatte eridiğini varsayarak eldeki problemi genellediğimizde, modelimizin başka bazı yönlerinin kullanışlılığı daha iyi anlaşılacaktır. Buna göre,

$$t_m = \frac{h}{1 - \sqrt[3]{1 - \beta}} \quad (1.9)$$

olarak bulduğumuz erime zamanı, h değerine doğrusal bağımlı ve β değerine ise monoton azalmayla bağlıdır. h değerine olan bağımlılık şaşırtıcı değildir; eğer verili bir β miktarı yarı zamanda eriyorsa, toplam erime zamanı da yarılanacaktır. Verili bir h değeri için β değerine bağımlılık da makuldür: h zamanda eriyen miktar arttıkça, erime zamanı da kısalacaktır.

Kartopumuz eriyedursun, bu örnekle, matematiksel bir modeli geliştirirken atılması gereken bazı temel adımların olduğunu basit bir şekilde gördük (*Bkz. Şekil 1. 2.*): Uygun ve basitleştirici varsayımlardan yararlanarak gerçek dünyada olan bir problem oluşturmak; ortaya konulan problemi çözmek ya da en azından problemden, yeterli bilgi elde etmek ve son olarak çözümü, başlangıçtaki problemin bağlamına uygun bir şekilde yorumlamak. Bu ba-

kımdan iyi modelleme “sanatı” (i) örneğin kartopunun erime hızını hangi faktörlerin etkilediği gibi, problemin doğru anlaşılması ve değerlendirilmesine, (ii) probleme ilişkin önemli olguların gerçekçi ancak gereğinden fazla matematikselleştirilmemiş bir şekilde ifade edilmesine, (iii) yararlı, tercihen niceliksel çözümler bulmaya ve (iv) kartopunun ne zaman tamamen eriyeceğiyle ilgili görüşler, tahminler gibi matematiksel sonuçların yorumlanabilmesine dayanır. Başvurduğumuz matematik bazen, yukarıdaki örnekte olduğu gibi, son derece basit olabilir; hatta bir matematiksel modelin yararlılığı, gerektirdiği matematiğin karmaşıklığına göre değil, sağladığı öngörme gücüne göre değerlendirilmelidir. Matematiksel modellerin mutlaka “doğru” olmaları gerekmez (ancak temel süreçlere ilişkin temel sonuçların görmezden gelinmesi nedeniyle yanlış olmaları da mümkündür). Bir model, diğerinden açıklayıcı niteliği nedeniyle ya da bir ölçüde buna bağlı olarak daha belirgin öngörülerde bulunmaya izin verdiği ölçüde daha iyi olabilir. Bazen modeller tartışmalı da olabilir; bu iyi bir şeydir çünkü bilimsel ve matematiksel tartışmanın önünü açtıkları anlamına gelir. Aslında biraz daha ileri gidip tüm matematiksel modellerin bir ölçüde



Şekil 1.2. Matematiksel bir model geliştirmenin aşamaları

hatalı olduğunu söyleyebilirim: Modelin oluşturulması sırasında yararlanılan isabetsiz varsayımlar ya da (aynı anlama gelebilecek şekilde) modelin dayandığı denklemdeki bazı terimlerin atlanması hatta matematiksel sonuçların problemin orijinal bağlamına uygun olmayarak, yanlış yorumlanması nedeniyle çoğu model hatalıdır. Bazı durumlarda modeller, temel varsayımlar geçerli olsa bile matematiksel analizdeki hatalar nedeniyle yanlış olabilir. Paradoksal olarak, daha az doğru bir modelin, matematiksel olarak daha karmaşık bir modele tercih edilmesi de söz konusu olabilir. Matematiksel istatistikçi John Turkey, “Doğru soruya verilmiş yaklaşık bir cevap, yanlış bir soruya verilmiş tam cevaptan daha iyidir” der. Ancak modelleme ve genel olarak da matematiksel problemlere dair bir noktaya daha değinmemiz gerekiyor.

Ters problemler: Cevabı ... olan soru nedir

Matematikte genellikle bir denkleminiz olur ve bir çözümü ulaşmak istersiniz.

Buradaysa bir çözüm verilmiş ve ilgili denklemi bulmamız istenmişti. Bundan hoşlanmıştım.

– Julia Robinson (C. W. Groetsch'ten alıntı)

Birçok problem formel şekilde ifade edilebilir; örneğin $A \Rightarrow ?$ yazdığımızda A 'nın neye işaret ettiğini sorarız. Ayrıca 47 kere 59 kaç eder ya da bir kuş yumurtasının biçimini matematiksel olarak tanımlayabilir miyiz gibi sorular da sorabiliriz (Bkz. 62–67. Sorular). Sorumuz, yukarıda olduğu gibi, bir kartopu ne kadar zamanda erir de olabilir. Çoğu kişinin, matematik eğitimi aldığı yıllarda karşılaştığı problemler yalnızca bu türden, düz problemlerdir. Ancak işin bir diğer yüzü daha vardır; hatta A neye işaret ediyor sorusunda, keşfedilmeyi bekleyen kocaman bir sorular evreni saklıdır. Biz farkına varmasak da yaşam, ters problemler adı verilen bu tür problemlerle doludur. Tıp doktorları, bir röntgen filmindeki “noktayı” inceleyerek, ardındaki sebebi saptamaya çalışır. Ana

rahmindeki bebeğin cinsiyetini öğrenmek için ultrason görüntülemesi yapılır. Radar (ya da sonar) teknolojisinden yararlanılarak “orada ne olduğu” sorusuna ya da daha net bir ifadeyle, eldeki elektromanyetik (ya da akustik) dalga yansıması örüntüsünü oluşturan nesnenin ne olduğu sorusuna yanıt aranır. Ters problemler ve düz problemler, uzun zamandır ilgimi çekmekte. Bunlarla ne kastettiğimi anlatmaya çalışayım. Birçok şekilde açıklanabilirler ancak en kolayı, bunları çarpım işlemi üzerinden anlatmak olur. Yukarıdaki soruyu tekrar edelim: *47 kere 59 kaç eder?* Cevabınız hemen, 2773 olur. Şimdi, 9831 sayısını verecek iki çarpan arayalım. 87 ve 113 çarpanlarını bulmak öyle pek kolay değildir (ve başka olası çiftler de bulunur çünkü 3 kere 29 eşittir 87, yani asal çarpanlar 3, 29 ve 113 olduğundan tek çözümlü bir ayrıştırma ile karşı karşıya değiliz).

Tesadüf eseri örneğimiz bizi, bir başka noktaya götürüyor: Birçok düz problemde olduğu gibi, ters problemlerin yanıtları da tek çözümlü olmayabilir. Bu problemlere ilişkin etkileyici makalesinde Joseph Keller, bu noktayı sözlü üç ters problemle ele alır. Bu ters problemlerden biri,

Cevabı, 9W olan soru nedir, şeklindedir. Sınıf ortamında bu soru, neredeyse her zaman aynı standart soruyu da beraberinde getirir: 9 kere W kaç eder? Ancak (doğru olmasına rağmen) bu soru, fazla basit olduğu için derhal elenir! Öğrencilerimi, biraz daha “kalıplarını kırarak” düşünceleri yönünde cesaretlendirmeye çalıştığım için bizim sınıfta, *Kaç numara ayakkabı giyiyorsun* (belki de mesele ayak kalıbımızdır) ya da “A” noktasından “B” noktasına gitmek için hangi rotayı izliyorsun, gibi sorular gündeme gelir. Bunlar, oldukça tatminkâr sorulardır. Keller'in son derece yaratıcı (ve bana göre çok da komik) sorusuysa şudur: *İsminizi “V” ile mi yazıyorsunuz Bay Wagner? Bay Wagner, hayır; W, yanıtını verir.*²

² Almanca nein (hayır) ve neun (dokuz) kelimeleri arasındaki ses benzerliğine gönderme yapılmaktadır. [ç.n.]

Bir başka basit ve bu kez balistik alanından vereceğimiz örnek, özellikle havanın direncini, eğrilik faktörünü ve dünyanın dönüş hareketini bir yana bırakıp sadece yerçekimi kuvvetini dikkate aldığımızda oldukça değerlidir. Bu durumda düz problemimiz, fırlatılan cismin (sözgelimi bir top mermisinin) başlangıç hızından ve namlunun yükselme açısından yola çıkarak, menzilin belirlenmesidir. Bu problemin, Newton'ın ikinci hareket yasasına dayanan tek çözümü mevcuttur: Hava direncinin yok sayılması durumunda, yükselme açısı α ($0 < \alpha < \pi/2$) ve başlangıç hızı u_0 olan bir top mermisinin kat edeceği mesafe (d) de

$$d = \frac{u_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad (I.10)$$

formülüyle ifade edilir. Bu nedenle (u_0 ve α değerleri veriliyken d 'yi bulun şeklindeki) düz problemin tek bir çözümü vardır. Öte yandan, top mermisinin menzilin u_0 ile sabit olduğu düşünülürse, ters problemin sıfır, bir ya da iki muhtemel çözümü olabilir: Eğer $d < u_0^2/g$ belirtilmişse, bu çözümler denklem grafiğinde de (I.10) görülebilir ve yaklaşık $\alpha = \pi/4$ doğrusunda, maksimum d menzilin açısında simetrik olarak bulunurlar. Çözümler analitik olarak

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{gd}{u_0^2} \right), \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{gd}{u_0^2} \right) \quad (I.11)$$

çıkar ve sağlamaları da kolaylıkla yapılabilir.

Alıştırma: (I.10) ve (I.11) numaralı denklemlerin sonuçlarını ortaya koyun.

Sözü edilen Groetsch kitabında da işaret edildiği gibi, bilim tarihindeki belli başlı dönüm noktalarının çoğu, özünde ters olan bir problemin çözülmesi sonucu kaydedilmiştir. Hatta Platon'un öğrencisi olan Aristoteles (MÖ 384–322) Ay tutulması sırasın-

da, Ay'ın yüzeyine düşen Dünya gölgesinin kavisli oluşundan hareketle, (başka argümanların yanı sıra) Dünya'nın küre şeklinde olduğu sonucuna varmıştır. Bu dolaylı akıl yürütme, yine gökbilim bağlamında, Newton tarafından kullanılmış ve Kepler'in (Tycho Brahe'nin gözlemlerine dayanan) gezegenlerin hareket yasalarından yola çıkarak yerçekiminin ters kare kanununa ulaşmasını sağlamıştır. Dahası genç İngiliz matematikçi John Couch Adams (1819–1892) ve Fransız matematikçi Urbain LeVerrier (1811–1877) birbirlerinden bağımsız olarak, o dönem için bilinen en uzak gezegen olan Uranüs'ün önceden gözlemlenmiş konumu üzerinde sapmalar kullanmış, böylece Uranüs'ün ardında yörüngesini bozucu etkiye sahip gökcisminin, Neptün'ün varlığını ve konumunu tespit etmişti. Teleskoplar, gökyüzünün matematiksel öngörülerle belirlenen bölgelerine çevrildiğindeyse, ters problem ve çözümü doğrulanmış oldu; işte, yeni gezegen oradaydı!

Bu basit modeller, büyük ölçüde, kitap boyunca çıktığım “yürüyüşlerde” benimsediğim temel bakış açısını yansıtıyor. Hiçbiri geniş kapsamlı ya da eksiksiz değil; bu nedenle hepsi, geliştirilmeye açık. Bazıları (“çalakalem” denebilecek türden) son derece basit ve temel nitelikte, diğerleriye daha karmaşık özellikte. Bazıları düz, bazılarıysa ters problemler (hangilerinin düz, hangilerinin ters olduğunu siz saptamaya çalışın). Evimin arka bahçesinden Rocky Dağlarına ve ötesine, matematiksel yürüyüşlerimde bana eşlik etmeye davet ediyorum sizleri...

Kaynakça

Adam, J. A (2006 ciltsiz baskı). Mathematics in Nature: Modelling Patterns in the Natural World. Princeton University Press, Princeton, NJ.

Groetsch, C. W. (1999) Inverse Problems: Activities for Undergraduates. The Mathematical Association of America, Washington, DC.

Keller, J. B. (1976). "Inverse Problems". The American Mathematical Monthly 83, 107–118.



Başlangıçta...

*(Gözlem, tahmin ve fiziksel sezgi gücümüze
meydan okuyan genel sorular)*

Aşağıdakiler, gözlem, tahmin ve fiziksel sezgi gücümüzü test eden genel sorulardır. Bunların, çevremizde olup bitenin gerçekte ne kadarını fark ettiğimizi değerlendirmek için faydalı olduklarını düşünüyorum. Sorular, sözgelimi sınıf ortamında ele alındıklarında da yararlı bir tartışma zemini sağlayacaktır. (Bir kısmı zorunlu olarak belirsiz olan) "cevaplar" 2 numaralı Ek'te verilmiştir. Sözü daha fazla uzatmadan, başlıyoruz.

1. Soru: Tek bir parlak gökkuşağına (birincil yaya) bakıyorsunuz. Yayın tepesinde hangi renk vardır?
2. Soru: Sizce tipik bir gökkuşağında kaç renk bulunur?
3. Soru: Çifte gökkuşağı gördüğünüzü hayal edin; üst kemerin (ikincil yayın) en tepesindeki renk hangisidir?
4. Soru: İki yay arasında kalan kısım, genellikle daha mı karanlık, daha mı aydınlık yoksa gökyüzüyle aynı mıdır?
5. Soru: Peki ya birincil yayın altındaki kısım?
6. Soru: Birincil yayla yakından ilişkilendirilebilecek başka bir şey gördüğünüz oldu mu hiç?
7. Soru: Güneşli bir günde gölgeniz kesin hatlara mı sahiptir, yayılmış mı görünür yoksa ikisinin arasında bir yerde midir? Mümkün olduğunca net yanıtlamaya çalışın.
8. Soru: Küçük bir kümebulut orijinal şeklini (bulutu ilk fark ettiğimiz andaki şeklini) genellikle ne kadar süre korur?
9. Soru: (i) Şiddetli bir sağanakta ve (ii) hava sisliyen oluşan su damlacıklarının boyutunu (çapını) tahmin edin.
10. Soru: En yakın büyüklük sıralamasına göre, tırnağınıza kaç ışık dalgası sığar?

11. Soru: İnsanın konuşma becerisine özgü, tipik bir ses dalgası ne kadar uzunluktadır?
12. Soru: Dünya'nın (doğu yönündeki) dönüş hızı ekvator çizgisinde ne kadardır? Peki ya kutuplarda?
13. Soru: Dünya'nın dönüş hızı, hangi enlem üzerinde, bir önceki soruya ait iki cevabın aritmetik ortalamasını verir?
14. Soru: Kumsaldan denize doğru bakarken, ufuk çizgisi ne kadar uzaklıktadır?
15. Soru: Gün ortasında, birbirine benzeyen ancak birinin diğerinden biraz daha uzakta olduğu iki tepeye baktığınızı varsayalım. Bu tepelerin hangisi biraz daha koyu renkli görünür? (i) Daha yakın olan mı? (ii) Daha uzak olan mı? (iii) İkisi de aynı koyulukta mı görünür? Yoksa (iv) güneş gözlüklerini çıkarsana şaşkın!



“Oyun Alanında”

(*Yavaş yavaş ısınalım...*)

“Her bir alanda ancak konunun doğal yapısı izin verdiği ölçüde kesinlik aramak, eğitim görmüş kişinin özelliğidir.”³

– Aristoteles, Nikomakhos'a Etik

Hazırlıklar tamam, doğa yürüyüşümüze başlayabiliriz.

3 Saffet Babür'ün çevirisi (Aristoteles. Nikomakhos'a Etik. İstanbul, Ayraç Yayınevi, 1997) [ç.n.]

Bu bölümde, biraz “uygulamalı aritmetik” ile biraz da cebirle ilgileneceğiz. Aşağıdaki kestirim problemlerinin bazıları (ama çoğu değil) kesin olarak hesaplanabilir olsa da burada başka bir amacımız var: *Çoğu şey kesin olarak hesaplanamaz ve ihtiyacımız olan sıklıkla, basit bir kestirimdir.* Gerçekten de bir problemi daha basit alt problemlere ayırıp makul varsayımlarda bulunarak ve temel aritmetikten yararlanarak bir cevabı yaklaşık olarak “tahminle hesaplayabiliriz.” Elbette, hepimizin bir şekilde farklılık gösteren varsayımlarda bulunması mümkündür. Ancak benim bütün tahminlerimin *abartılı* olması pek muhtemel olmadığı gibi, sizin tahminlerinizin tamamının *eksik* olması da pek muhtemel değildir. Bu durumda, yaklaşım farklılıklarımız birbirini eşitleyecek, ulaştığımız sonuçlar büyük ölçüde birbirine yakın olacaktır. Christian von Baye, *The Fermi Solution (Fermi Çözümü)* adlı kitabında bu süreci, art arda yazı tura atmaya benzetir: Örneğin, on kez yazı tura attığımızda arka arkaya hep yazı ya da hep tura gelmesi son derece düşük bir ihtimaldir. (Binde bir ihtimalden bile düşük bir olasılıktan söz ediyoruz; neden böyle olduğunu anlayabiliyor musunuz?)

16. Soru: Loch Ness Gölü'nü boşaltmak ne kadar zamanımızı alır?

Loch Ness Gölü, yaklaşık 2 mil küp hacminde. Bir galonluk tek bir kovayla kaç tur yaparsak gölü boşaltabiliriz (ve canavarı ortaya çıkarabiliriz)?

Örnek seçimimden de anlaşılacağı gibi İngiliz terbiyesiyle yetiştirilmiş biriym ancak işleri karıştırmak bu kadar kolayken neden metrik sistemle yetinelim ki?*

 Şimdi, bir fut küp su yaklaşık 7,5 galon olduğuna göre bir galon $\approx 0,1$ fut küptür. Loch Ness Gölü'nün hacmi yaklaşık $2 \times (5 \times 10^3)^3 \approx 3 \times 10^{11}$ olacaktır ve bu da 3×10^{12} kova su eder. Konuyu basitleştirmek için su kovalarını taşıyacak olan kamyonu gölün (alçalan) kıyısından yükleme yaptığımızı varsayalım. Bir galon su, tekrar tekrar taşımak için oldukça ağırdır ancak “Nessi'yi Yakalama Derneği” gönüllülerinin bi-

ze yardımcı olduğunu ve kaslarımız ağrımaya başladığında devreye girdiklerini de düşünelim. Bu “doldur–boşalt” operasyonunun her bir kova için yaklaşık 10 saniye sürdüğünü, buna göre (biraz nefeslenme payı da bırakırsak) saatte 300 kova su doldurup boşalttığımızı varsayalım. Bu, gayet uygundur: Toplamda yaklaşık $(3 \times 10^{12}) \div 300$ ya da 10^{10} saatlik bir işten söz ediyoruz! Bir yıl (yukarı yuvarlayarak) 400 gün ve günü (aşağı yuvarlayarak) 20 saat olarak aldığımızda, $10^{10} \div (400 \times 20) \approx 10^6$ yıla ulaşıyoruz. O zamana dek Nessie (ve tabii biz de) muhtemelen ölmüş oluruz. İlmm... Pekâlâ, arkadaşlar tekrar tahtamızın başına geçelim.

° Tamam, biraz mahcup olduğumu itiraf ediyorum. Fut küpün galona nasıl çevrileceğini kim bilebilir ki? 2 mil yaklaşık $2 \times (1,6)^3 \approx 10$ (km)³ = $10 \times (10^5)^3$ cm³ = 10^{16} cm³ ve 10^3 cm³ de bir litre olduğuna göre 10^{13} litre ya da önceden olduğu gibi 3×10^{12} kova söz konusudur.

17. Soru: Büyük Kanyon'u kumla doldurmak ne kadar zamanımızı alır?

(i) Gary Larson'ın Far Side karikatürlerinden birinde “Larry” karakterini, Büyük Kanyon'a kimseler fark etmeden kamyonla kum doldururken görürüz ☺. Böyle bir şeyin gerçekte ne kadar zamanımızı alacağını tahmin edin!

(ii) Arizona'daki büyük başarısının ardından Larry, bu kez de Fuji Dağı'ndaki toprak ve taşları topluyor olsun. Tüm dağı kamyonu yükleyip ortadan kaldırması ne kadar sürer?

(i) Yukarıdaki her iki durum için de fiziksel verilere ihtiyacımız olduğu açıktır! Büyük Kanyon'un resmi internet sitesinde yer alan bilgilere göre, Kanyon'un 227 mil boyunca derinliği ortalama 4000 futtur (en derin yeriye yaklaşık 6000 futtur). Kanyon'un en geniş yeri 15 mil olarak ölçülmüştür ancak ortalama genişliği belirtilmemiştir. Bu durumda, ihtiyatlı bir tahminde bulunup, ortalama ge-

nişliği 5 mil olarak alalım. Tipik bir yük kamyonu ne kadar büyüklüktedir? Bir kamyon kasasını aşağı yukarı $12 \text{ ft} \times 6 \text{ ft} \times 4 \text{ ft} \approx 300$ fut küp olarak hesaplıyorum (bu, düşük bir tahmin de olabilir) ve böylelikle Büyük Kanyon'u zihnimde $1 \text{ mil} \times 200 \text{ mil} \times 5 \text{ mil}$ ölçülerinde ya da 1000 mil küplük, dikdörtgen şeklindeki bir kutuya sığdırmış oluyorum. Bu, yaklaşık $10^3 \times (5 \times 10^3)^3 \approx 10^4$ fut küp ya da yaklaşık 3×10^{11} dökümlük kamyon yükü eder. Larry'nin ve gerektiğinde ailesinin, kamyonu kum yüklemek, Büyük Kanyon'a gidip kumu boşaltmak ve yükleme alanına (bu alan her neredeyse (ii) numaralı bölüme bakın, belki de Japonya'dadır; her durumda zaman aralığını uzatmamız gerekir) geri dönmek için her seferinde bir saat harcadığını düşünürsek, gün boyu çalıştıkları takdirde tüm Kanyon'u doldurmaları aşağı yukarı $[(3 \times 10^{11}) / 24] \approx 10^{10}$ gün $\approx 3 \times 10^7$ yıl sürecektir!

(ii) Çeşitli bilgi ve fotoğraflardan yola çıkarak Fuji Dağı'nı, 12.000 fut yüksekliğinde ve aşağı yukarı bunun iki katı ölçülerindeki bir taban çapına sahip, dik bir dairesel koni olarak düşünüyorum. Buna göre, dağın fut küp üzerinden hacmi yaklaşık $(\frac{1}{3}) \times 3 \times (10^4)^2 \times 10^4 = 10^{12}$ olur, bu da yaklaşık 3×10^9 kamyon yüküne denk gelir. (i)'deki çalışma hızını temel alırsak bu, 10^8 gün $\approx 3 \times 10^5$ yıl eder. Biraz hedef küçültmesi Larry için belki de daha iyi olur.

18. Soru: Bir milyon akrelik bir arazi tam olarak ne kadar büyüklüktedir?

Yetkililer, Arizona yangınlarının birleşip yerleşim bölgelerine doğru ilerlemesi durumunda, alevlerin 1 milyon akrelik bir alanı sarabileceğini belirtiyor.

– *Virginian Pilot*, 24 Temmuz 2002 tarihli manşeti

Yanıt: 1 milyon akre. Yanıt, doğru olmakla birlikte, soruya yeni bir yaklaşım kazandırmıyor. Soruyu bir matematikçi yanıtlamış olmalı!

Neyi biliyoruz?

1 akre = 4840 yarda kare = $4840 \times (3)^2$ fut kare = 43.560 fut kare.

En yakın on bine yuvarladığımızda $43.560 \approx 40.000$ ve $40.000 = 200 \times 200$ olduğuna göre, bir kenarı 200 fut olan bir karenin alanı yaklaşık bir akre olacaktır. 1 milyon (10^6) akre 1000×1000 yarda (10^3)² olduğuna göre, bir kenarı 200×1000 ya da 200.000 fut olan bir karenin alanı aşağı yukarı 1 milyon akre olur. 1 mil, en yakın bine yuvarladığımızda, 5000 fut (tam olarak 5280 fut) olduğuna göre, 1 milyon akrelik bir karenin kenar uzunluğu yaklaşık

$$\frac{200.000}{5.000} = \frac{2 \times 10^5}{5 \times 10^3} = 40 \text{ mil}$$

söz konusu alan da $\approx (40)^2 = 1600$ mil karedir. Bu, oldukça büyük bir karedir ancak gazete manşetinde vurgulandığı kadar etkileyici bir büyüklük gibi gelmeyebilir. Bu arada, karenin kenar uzunluğu (2 ondalık basamağa göre düzeltildiğinde)

$$\frac{(4,356 \times 10^4 \times 10^6)^{1/2}}{5,28 \times 10^3} \text{ mil} \simeq 39,53 \text{ mildir! Alan ise } \simeq 1563 \text{ mil kare olur.}$$

(Ayrıca 1 akre kenar uzunluğu yaklaşık 208,7 fut olan bir karenin içine sığar.)

19. Soru: Yirmi beş milyon hamburger— siz kaç tane yediniz?

Amerika Birleşik Devletleri'ne yerleştiğim yıllarda, ünlü bir hazır yemek zincirinin iddia ettiği satış rakamlarıyla karşılaşmış ve ne çok hamburger yendiğine hayret etmiştim. Söz konusu rakam “100 milyarın üzerinde” miydi, tam olarak hatırlamıyorum ancak 1978 yılında gerçekten de “25 milyarını” hamburgerin satıldığı iddia ediliyordu. Satılan hamburger sayısının kaydını tutma geleneği bugün devam etmese bile tam da bununla ilgili bir sorum var: Bir restoran zinciri için 25 milyar hamburger (ya da genel olarak yemek) satmış olduğu iddiası, akla yatkın bir iddia mıdır?

30 yıl önceki bir iddiadan yola çıktığıımıza göre, ABD nüfusu için daha düşük ve daha uygun bir değer alalım; (her ne kadar 1978 yılında yaklaşık 225 milyon olsa da) ülke nüfusu 250 milyon olsun. Bu durumda, kişi başına düşen yemek sayısı, 25 milyar bölü 250 milyon olacaktır. Yani

$$2,5 \times 10^{10} \div 2,5 \times 10^8 = 100 \text{ yemek.}$$

Bu, oldukça akla yatkın görünüyor; restoran zincirinin ilk açıldığı tarihte bir kişi pekâlâ ortalama 100 yemek yemiş olabilir. Bu da bizi bir başka ilgili soruya götürüyor:

20. Soru: ABD'nin (1978 yılındaki) günlük et ihtiyacını karşılamak için kaç büyükbaş hayvana ihtiyacı vardı?

Otuz yıl önceki Amerikan nüfusunu yine 250 milyon olarak alalım ve her bir kişinin günlük ortalama $\frac{1}{4}$ lb sığır eti tükettiğini varsayarak yanıtımız için bir üst sınır belirleyelim. “Amerikan kısa tonu” 2000 lb olduğuna göre, eldeki rakamı pound üzerinden 2000'e bölerek ton cinsinden bir kestirimde bulunabiliriz. Buna göre, tüketilen etin toplam ağırlığı,

$$2,5 \times 10^8 \times \left(\frac{1}{4}\right) \div 2 \times 10^3 \approx 30.000 \text{ tondur.}$$

Şimdi: Bu, kaç sığra karşılık gelir? Hiçbir sığrın, tek başına bir ton et vermeyeceği açıktır ancak belki de bir tonun üçte biri kadar et verdiğini düşünebiliriz. 30.000'i üçte bire böldüğümüzde, o yıllar için günde 90.000 sığra ulaşmış oluruz! Bu rakam üst sınırdır çünkü nüfusun tamamı etçil değildir ve insanlar sadece sığır eti tüketmez.

21. Soru: King Kong neden asla var olamaz?

Ama King Kong var, yaşıyor! Televizyonda gördüm. Öyleyse size biraz daha bilgi vermeliyim. Dev gorilimize kısaca K² diyelim.

Sanırım filmin yapımcıları 5 fut boyunda bir erkek gorilin ölçülerinden yararlanarak (ve oranlarına sadık kalarak) 30 fut boyunda bir beyazperde kahramanı yarattı. Şimdi, bu tahminden yola çıkarak ağırlık, kuvvet, alan ve güç hakkında düşünebilir ve ardından K^2 'nin neden Hollywood'un kolektif hayal gücünün eseri olduğunu görebiliriz.

Burada *geometrik benzerlik* fikrinden yararlanacağız. Aynı malzemeden yapılmış ve geometrik olarak birbirine benzeyen nesnelerin ağırlıkları, kütleleri ile orantılıdır; kütleleriye hacimleri ile orantılıdır; bunun sonucunda hacimleri de doğrusal büyüklüklerinin küpü ile orantılıdır (bir küpün hacmini düşünelim; örneğin, King Kong'un da binlerce küçük küpten yapılmış olduğunu düşünebiliriz). Bir nesnenin, özellikle K^2 gibi bir nesnenin gücü, vücut ağırlığını taşıyan kemiklerinin kesit alanı ile orantılıdır; bu da alanıyla orantılıdır. Biz de geometrik benzerlik taşıyan nesnelerden yola çıkmış olduğumuza göre gorilimizin alanı, doğrusal büyüklüğünün karesi ile orantılı olacaktır (örnek olarak, bir karenin alanını düşünebiliriz). Burada *büyüklik* derken, yükseklik ya da genişlik (çoğunlukla da yükseklik) gibi belirli bir boyuttan söz ettiğimizin altını çizmek isterim. K^2 ayaktayken, omurgasının ve bacak kemiklerinin kahramanımızı destekleyip taşıyor olması gerekir. Özetlemek gerekirse şunları biliyoruz:

Ağırlık, büyüklüğün *küpüyle* orantılıdır; *güç* ise büyüklüğün *karesiyle* orantılıdır. Bu nedenle, 5 futluk gorilimizi alıp büyüklüğünü kademe kademe artırdığımızda, gorilimizin hem ağırlığı hem de gücü artacak ancak ağırlığı, gücüne kıyasla, *daha hızlı* bir artış gösterecektir (tıpkı $h > 1$ iken, h^3 'ün h^2 'ye kıyasla daha hızlı artış göstermesi gibi). Zamanla, K^2 *öyle bir büyüklüğe ulaşacaktır ki kemikleri bu ağırlığı taşımayacak* ve gorilimiz yerinden bile kıpırdayamaz hâle gelecektir! (Türden türe farklılık gösterse de buradaki kritik boy sınırı, 8 ile 10 fut arasındadır.) Bu nedenle *hayvanlar, birtakım biçimsel değişikliklere uğramaksızın sınırsız şekilde büyüyemez* (elbette, sınırsız şekilde büyümeleri zaten mümkün değildir!) Fillerin, dev sıçanlar olmamasının sebebi de budur; bir

filin gövdesine oranla bacak kalınlığı, bir sıçanın gövdesine oranla bacak kalınlığından daha fazladır. Bu konuyla ilgili genel değerlendirmeler için J. T. Bonner'ın kaleme aldığı ve kaynakçada belirtilen *Why Size Matters (Büyüklik Neden Önemlidir)* başlıklı kitabı bakılabilir.

22. Soru: Neden küçük böcekler düş almaktan hoşlanmaz?

Hiç banyoda vurduğunuz bir sineğin nereye kaybolduğunu merak edip, klozetin içine düştüğünü fark ettiğiniz oldu mu? Bunun, sadece benim başıma gelmiş olması mümkün değil. Sineğin, bir kez ıslandıktan sonra kurtulması saatler alabilir. Haydi, bu durumu biraz düşünelim.

100 kilogram (yaklaşık 220 lb) ağırlığında, yetişkin bir insan olan Balthazar, banyo küvetinden çıkarken, bir an için vücudu yaklaşık $\frac{1}{2}$ milimetre kalınlığında (ve 1 kilogram ağırlığında*) ince bir su tabakasıyla kaplanır. Bundan sonra Balthazar'a, B diyelim. Su tabakasının kalınlığına yönelik kestirimim, kendi banyo maceralarıma dayanıyor! Sineği ya da herhangi bir böceği, bir minyatür-insan gibi düşünebiliriz; B'ye geometrik açıdan benzerlik gösteren ancak onun $1/200$ büyüklüğünde olan ve aynı kalınlıktaki su tabakasından kurtulmaya çalışan bir minyatür – B. Bu iş, sinek için ne ölçüde kolay olacak? Bu noktada biraz hesap yapmamız gerekiyor; bu arada, her ne kadar B ile sinek geometrik olarak benzer değilse de bu basitleştirmemiz, aradığımız yanıtın doğruluğunu değiştirmeyecek. B için suyun ağırlığının, kendi ağırlığına oranı $1/100$ 'dür; dolayısıyla 1 kilogramlık bir ağırlık artışı B'nin su dolu küvetten çıkma çabası için önemli bir engel oluşturmaz. Ancak sinek için bu oran çok daha fazladır. Ağırlık hacimle ve dolayısıyla büyüklüğün küpüyle orantılı olduğuna göre sineğin ağırlığı $(1/200)^3 \times 100$ kilogramdır. B'ye kıyasla sineğin yüzey alanı $(1/200)^2$ daha küçüktür; böylece sineğin üzerindeki suyun ağırlığının, sineğin ağırlığına oranı $[(1/200)^2 \times 1 \text{ kg}] / [(1/200)^3 \times 100 \text{ kg}] = 200 / 100 = 2$ olur. Bu nedenle sinek, “küvetinden” çıkmaya çalışırken önemli ölçüde zorlanacaktır!

* Bunu nasıl mı biliyoruz? Bu nicelikleri kaba ancak çabuk bir kestirimle belirleyebilmek için Balthazar'ı, r yarıçapında ve h yüksekliğinde bir silindiri olarak düşünelim: Eğer $r \approx 15 \text{ cm}$ ve $h \approx 2 \text{ m}$ ise yüzey alanı $S = 2\pi rh \approx 6 \times 0,15 \times 2 \approx 2 \text{ m}^2$ olur. $1 \text{ mm } 10^{-3} \text{ m}$ olduğuna göre, bu su tabakasının hacmi yaklaşık 10^{-3} m^3 ; suyun yoğunluğu 10^3 kg/m^3 olduğu için kütlesi de yaklaşık 1 kilogramdır.

23. Soru: Şu yağmur damlasının yere düşüş hızı nedir?

Bir nesne, yeterince yüksekte düşüyorsa, limit hız olarak bilinen bir sabit hıza erişecektir. Bu, hava direnci nedeniyle aşağıya kuvvetin (ağırlığın), yukarı sürüklenme kuvveti ile tamamen dengelendiği hızdır. İster paraşütünü henüz açmamış bir serbest atlayıcı olsun ister uçaktan düşen bavulunuz, isterse bir yağmur damlası, düşmekte olan bir nesnenin limit hızının $m^{1/6}$ oranında olduğunu (m, nesnenin kütlesidir) elemanter boyut analizinden yararlanarak gösterebiliriz. En çok yağmur damlasına rastladığımızdan –umarım öyledir!– onları ele alalım. Yağmur damlası üzerinde etkili olan atmosferik sürüklemenin, yağmur damlasının yüzey alanı ile düşüş hızının karesinin çarpımıyla orantılı olduğunu varsayacağız; bu, deneysel olarak oldukça sağlam bir şekilde ortaya konulmuş bir ilişkidir.*

Sadece orantısal bir ilişkiyle ilgilendiğimiz için çarpımsal sabitleri bir kenara bırakacak, sürüklemeyi L büyüklüğünde ve v_l limit hızındaki tipik bir yağmur damlasıyla ilişkilendireceğiz. Yukarıda da söz ettiğimiz gibi v_l 'ye yağmur damlası üzerindeki sürüklenme kuvveti, yağmur damlasının ağırlığıyla dengelendiğinde ulaşılır. Boyutsal ya da değil, tüm sabitleri bir kenara koyduğumuzda, ağırlık $\propto$ kütle (m) $\propto L^3$ olduğu için

$$\text{sürüklenme} \propto \text{yüzey alanı} \times (\text{hız})^2 \propto \text{ağırlık} \propto L^3$$

$$\text{yani, } L^2 v_l^2 \propto L^3, \text{ ya da } (v_l) \propto L^{1/2}$$

olacaktır; ancak $L \propto m^{1/3}$ olduğundan $(v_l) \propto m^{1/6}$ 'ya ulaşırız. Buna göre, birinin büyüklüğü (çapı), diğerinin büyüklüğünün (çapının) dört katı olan, bu nedenle diğerinden 64 kat daha büyük olan iki

yağmur damlası söz konusu olduğunda, daha büyük olan yağmur damlasının limit hızı, diğerinin limit hızının sadece *iki katı* kadar olacaktır. Bu, oldukça kolaydı öyle değil mi? Ancak elbette, sorumuza sadece genel bir yanıt vermiş oluyoruz. Öyleyse biraz da sayıları devreye sokalım.

Aerosollar, bulutlardan yavaşça süzülerek düşmekte olan küçük damlacıklar ya da göl dibine çöken tortul maddeler gibi küçük parçacıkların nasıl hareket ettiği Stokes yasasında etraflıca ele alınmıştır; tabii, parçacıkların iniş hızı, hareket ettikçe hiçbir türbülans yaratmayacak kadar düşük olduğunda. Bu, havanın yoğunluğu ρ_a ve dinamik akma viskozitesi μ iken *Reynolds sayısı* $Re = v_t r \rho_a / \mu > 1$ olduğunda meydana gelecektir. Bu yasaya göre, yarıçapı r olan küre biçiminde bir nesne için nesnenin karşılaştığı sürükleme kuvveti (F)

$$F = 6\pi r v_t \mu \quad (23.1)$$

olur. Bu nedenle, eğer parçacığın kütlesi m ise

$$6\pi r v_t \mu = mg \quad (23.2)$$

ve buna göre, parçacığın yoğunluğunu ρ_p olarak ifade edersek,

$$v_t = \frac{2\rho_p g r^2}{9\mu} \quad (23.3)$$

olur. Şimdi bu sonucu, sıcaklığın 5°C , havanınsa hareketsiz olduğu 1 km yükseklikte ve $20\text{ }\mu\text{m}$ (ya da $(2 \times 10^{-5})\text{ m}$) çapında olan tipik bir *bulut damlacığının* limit hızını hesaplamak için kullanalım. Uluslararası Birimler Sistemi'ne göre, $g \approx 9,8\text{ m/s}^2$, $\rho_p \approx 10^3\text{ kg/m}^3$ ve $\mu \approx 1,8 \times 10^{-5}\text{ Ns/m}^2$ 'dir. Bu nedenle,

$$v_t = \frac{2 \times 10^3 \times 9,8 \times (10^{-5})^2}{9 \times 1,8 \times 10^{-5}} \approx 1,2 \times 10^{-2}\text{ m/s}$$

ya da yaklaşık bir cm/s 'dir. Bu damlacık için Reynolds sayısı

$$\text{Re} \approx \frac{1,2 \times 10^{-2} \times 10^{-5} \times 1,1}{1,8 \times 10^{-5}} \approx 7 \times 10^{-3}$$

olacaktır (burada havanın ağırlığı $\rho_a \approx 1,1 \text{ kg/m}^3$ 'tür); böylelikle Stokes yasası da kesin biçimde doğrulanmış olur. $v \propto r^2$ olduğundan, 100 kat daha küçük ($0,1 \mu\text{m}$ yarıçapındaki) bir damlacık yaklaşık 10^{-6} m/s hızla düşecektir. Buna karşın, 100 kat daha büyük ($0,1 \text{ mm}$ yarıçapındaki) bir damlacığın düşüş hızı 1 m/s olur. Böyle bir damlacık için Reynolds sayısı yaklaşık on olduğuna göre, Stokes yasası bu örnek için geçerli değildir ve çok daha karmaşık hesaplamalar gereklidir. A. F. Spilhaus tarafından kaleme alınan bir makaleye göre (Bkz. Kaynakça), yaklaşık 2 mm ($0,08 \text{ inç}$) çapındaki bir yağmur damlası $6,5 \text{ m/s}$ ($14,5 \text{ mph}$) hızla düşerken, 5 mm ($0,2 \text{ inç}$) çapındaki – küçük bir karasinek boyutlarında – bir yağmur damlası, yaklaşık 9 m/s (20 mph) hızla düşer. Daha ince yağmur damlacıkları daha yavaş, yaklaşık 2 m/s ($4,5 \text{ mph}$) hızla düşer.

* Bu sonuca “boyutsal analizden” yararlanarak da varılabilir; sürüklenme (tıpkı ağırlık gibi bir kuvvet olarak) $(\text{uzunluk})^4 / (\text{zaman})^2$ ile orantılıdır ve boyutsal olarak buna, yüzey ile $(\text{hız})^2$ 'nin çarpımı ile ulaşılır.

24. Soru: Neden devasa saman yığınları ansızın alev alabilir? [Bkz. Renkli fotoğraflar kesiti]

İngiltere'de bir çiftlik işçisinin çocuğu olarak büyüdüm. Babam mandıralarda çalışır, hayvanları sağır ve sütün, tüketiciye ulaştırılacağı yolculuğun bir sonraki aşaması için hazır olmasını sağlardı. Küçük bir çocukken evimizin yakınlarındaki tarlalarda oynardım ancak bir keresinde bir talihsizlik sonucu arkadaşımınla beraber saman yığınlarıyla dolu bir ambarı ateşe vermiştik (bütün suç, elbette arkadaşımıydı). Babam bu olay sonucunda işinden olmadığı için şanslıydı; ben de kaba etlerimin üzerine ağrısız sızısız oturabildiğim için şanslıydım. Sağımhaneyi çevreleyen tarlalarda, tek tek duran yığın-

lar bulunurdu: *saman yığınları*. Eğer çok büyük yığınlarsa, yardım etmeme hiç gerek kalmadan birdenbire alev alırlardı. [Bir de kendiliğinden yanma vakaları için şehir efsanesi derler!]

Peki ama böyle bir şey nasıl meydana gelir? Görünüşe göre, samanın iç sıcaklığı 130°F'ın (55°C) üzerine çıktığında başlayan bakteriyel fermentasyon süreci, sıcaklığın yeterince yüksek olması durumunda tutuşabilen yanıcı gaz üretmeye başlar; özellikle samanlar, yeteri kadar nemliyse. Hatta bir internet sitesine göre:

Saman yangınlarıyla genellikle, balyalamayı izleyen altı hafta içinde karşılaşılır. Nem oranı yüzde 15'in üzerinde olan bütün yığınlarda ısınma meydana gelse de sıcaklığın 125–130°F'a kadar çıkması, genellikle üç ilâ yedi gün içinde görülür... 150°F (65°C), tehlikeli bölgenin başlangıcıdır. Bu noktadan sonra sıcaklığı her gün kontrol edin... 160°F'lık (70°C) [bir sıcaklık] tehlikelidir. Her dört saatte bir sıcaklığı ölçün ve yığınları kontrol edin. Sıcaklık 175°F (80°C) olduğunda itfaiyeyi arayın... Sıcaklık 185°F (85°C) olduğunda, yığın içinde sıcak yer ve bölgelerin oluşması beklenebilir. Isınmakta olan saman yığınları havayla temas ettiğinde büyük olasılıkla alevler oluşmaya başlar. 212°F (100°C) kritik seviyedir. Bu noktadan sonra sıcaklık hızla artmaya başlar. Saman yığınının alev alacağı neredeyse kesindir.

Oldukça korkutucu. Bu ilginç olgudan hareketle, ideal bir saman yığını için aşağıdaki problemi ortaya atabiliriz: *Bir çiftçi, zamandan kazanmak amacıyla küçük ve çok sayıda saman yığını istiflemek yerine çok büyük ve tek bir saman yığını yapmaya karar verir. Ne yazık ki bu yığın öylesine çabuk alev alır ki sonunda patlar! Öyleyse aşağıdaki bilgilerden hareketle, bir saman yığını için güvenli olan azami büyüklüğü bulabilir miyiz?*

(i) Saman yığını, yarıçapı $R > 0$ olan bir yarımküredir; (ii) b kalori/hr/m³ oranında ısı üretir; (iii) ısı kaybı a kalori/hr/m² oranındadır. (İpucu: Saman yığınının yüzeyi aracılığıyla kaybettiği ısı-

dan, yığının içinde üretilen ısıyı çıkararak düşünün ve tabandan kaybedilen ısıyı dikkate almayın.)

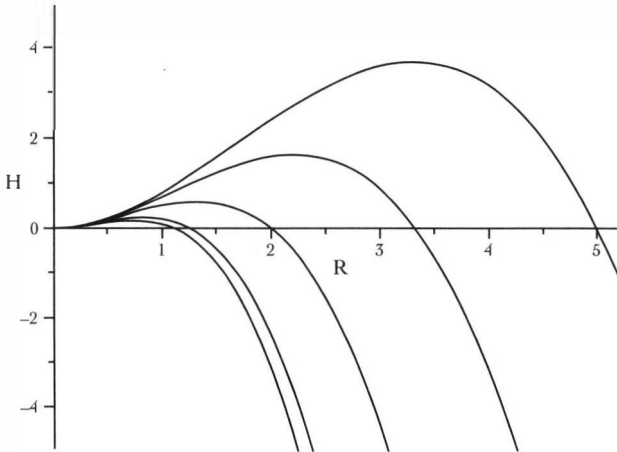
Pekâlâ. İpucundaki üretilen ısı ile kaybedilen ısı arasındaki farkı $D(R)$ olarak gösterecek olursak, denkleminiz,

$$D(R) = 2\pi R^2(a - bR/3) \quad (24.1)$$

olur. Aşağıdaki önemli uyarının da işaret ettiği gibi, R için “güvenli büyüklük” alanı, kaybedilen ısı, üretilen ısıyı aştığı alandır; bir diğer deyişle $D(R) > 0$, $D(R) = 0$ eşitliği, saman yığınının “piroteknik açıdan dengesiz” olmasından hemen önceki azami yarıçapı tanımlar! Bu kritik değerde, $R \equiv R_c = 3a/b$ olur. $D(R)$ grafiği hem öğreticidir hem de kolaylıkla çizilebilir (*Bkz. Şekil 24.1*); çünkü

$$D'(R) = 0 \Rightarrow R \equiv R_m = 2a/b, D''(R_m) = 0 \Rightarrow R \equiv R_i = a/b \quad (24.2)$$

ve $D''(R_m) < 0$ olduğundan, (R_i, ∞) üzerinde $D(R)$ aşağı doğru içbükeydir ve $D(R_m) = 8\pi a^3 / 3b^2$ şeklinde tek bir maksimuma erişir.



Şekil 24.1. Saman yığınının, farklı δ değerleri için $H(R)$ fonksiyonu

Böylelikle en güvenli yarıçap $D(R)$ değerinin azami seviyede olduğu $(R_m) < (R_c)$ olarak tanımlanabilir. Ardından (24.1) numaralı şekilden hareketle kurulacak olan

$$D(R) = 2\pi R^2 (a - bR/3) = 2\pi a R^2 (1 - bR/3a) \equiv 2\pi a H(\delta; R) \quad (24.3)$$

denkleminde

$$H(\delta; R) = R^2 (1 - \delta R) \quad (24.4)$$

saman yığınının fonksiyonu, $\delta = b/3a$ parametresi, üretilen ısının kaybedilen ısıya olan ölçüm değeridir. Farklı δ değerleri, yukarıdaki $H(\delta; R)$ ile gösterilmiştir. $a = 900$ kalori/ hr/m² ve $b = 108$ kalori/ hr/m³ olduğu özel bir durumda, $R_c = 3a/b = 25$ m ve $(R_m) = 2a/b \approx 17$ m olur.

Daha önce belirtildiği üzere, $R_c (= \delta^{-1}) = 3a/b$ için saman yığınının fonksiyonu sıfırdır (burada, önemsiz olması nedeniyle $R_c = 0$ sonucunu dikkate almıyoruz). Nihayet, bu basit sonuç bize, birim zamanda ve birim hacimde üretilen ısı ile kaybedilen ısı arasındaki farkın $(0, R_c)$ aralığında pozitif olduğunu, dolayısıyla ısı kaybı ısı artışından fazladır; bu aralıkta durumda bir değişiklik yoktur. δ değeri büyüdükçe R_c küçülür ve saman yığını için “kabul edilebilir” büyüklük aralığı azalır. Yukarıdaki durumda δ değeri olan 0,04, şekilde gösterilmemiş olsa da bu tür küçük değerlerin belki de daha gerçekçi olduğunu söylemek mümkündür. Belki de bu yüzden tarla ve çayırarda, eskiden çok daha büyük ebatta olan saman yığınları yerine bugün daha küçük ve dürülerek hazırlanmış saman yığınlarına rastlıyoruz. Bu geometriye sahip (ve kilim gibi dürüldükten sonra yan yatırılmış) saman yığınlarına, yarımküre biçimindeki saman yığınları için yapılan hesaplar kolayca uygulanabilir. Varılan sonuçlar, geometrik faktörler dışında birbirine çok benzer.

Uyarı: İster bir saman yığını olsun ister bir fincan kahve, bir nesnenin ısı yayımı *Newton'ın soğuma yasasına* göre meydana gelir. Şeklen bu yasa, bir nesnenin ısısının, kendi ısısı ile çevresinin ısısı arasındaki *farkla* orantılı olarak değiştiğini ortaya koyar. Bu, kapalı bir ortamdaki sıcak bir nesne için önemlidir zira böyle bir durumda dışarının ısısı, nesne soğudukça artacak ve ısı oranı düşecektir. Bu durum (ısı kaynağının içeride olduğu) saman yığınlarındaki ısı artışının çok daha fazla olması anlamına gelir ve belki de bu nedenle, alev almanın çok daha çabuk olmasına yol açar. Çok daha sıklıkla karşılaşılacağı gibi, saman yığınının doğa unsurlarına açık hâlde bir tarlada bulunması durumunda, Newton'ın yasası buradaki (kuşkusuz basit) resmin bütününde belirgin bir değişiklik yaratmayacaktır. Elbette bu Newton'ın soğuma yasası, çevresine kıyasla düşük ısıya sahip nesneler için de geçerlidir; her iki durum da çok daha matematiksel bir şekilde, Ek-3'te ele alınmıştır.



Bahçede

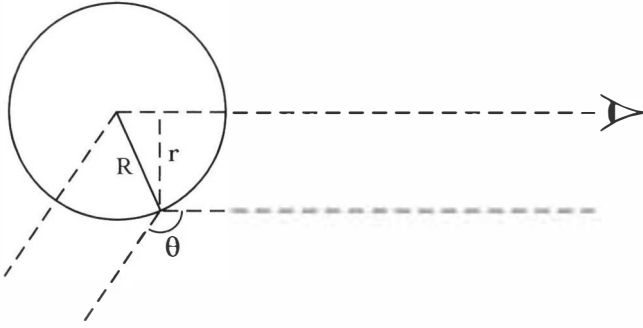
Modellemeyi, deyim yerindeyse kullanıma hazırladığımıza göre, bu bölümde, gerçek hayattan alınmış problemlere daha fazla yoğunlaşabiliriz. Pek çok şeyin farkına varmayı bahçedeyken öğrendim; bu arada, uzayan çimlerin biçilmesi gerektiği gibi başka bazı şeyleri unutmak da işime geldi tabii...

25. Soru: Nasıl oluyor da küçük bahçe küremin içinde “tüm evreni” görebiliyorum? [Bkz. Renkli fotoğraflar kesiti]

Kum tanesinde görebilmek dünyayı
Ve cenneti bir kır çiçeğinde,
Sonsuzluğu avuçlarının içinde tutabilmek
Ve ebediyeti bir saatliğine...
– William Blake, “Masumiyet Kehanetleri”

Yaklaşık 1 fut çapında, içi boş ve biraz aynalı, camdan bir bahçe kürem var. Küreye bakarken, beni çevreleyen gökyüzünün de yeryüzünün de yansımaları görebiliyorum; dış dünya, oldukça sıkışmış (ve bozuk) bir şekilde de olsa küreme sığmayı gerçekten başarmış gibi! Bu yansımada gördüğüm şey elbette bir daire ve dairenin çevresine doğru Dünya ve gökyüzü, giderek daha da sıkıştırılmış bir görüntü çiziyor.

Kürenin yarıçapının R olduğunu ve hem benim hem de gördüğüm nesnelerin, bu yarıçapa kıyasla, küreden çok daha uzak olduğunu farz edelim. Güneş “ışınlarını” paralel olarak ele almamıza izin verdiği için en basit analitik durum budur. Dolayısıyla gözümüzden kürenin merkezine doğru uzanan çizgiyle θ açısı yapan her nesne, kürenin merkezine $r = \sin(\theta / 2)$ uzaklıkta olacaktır (Bkz. Şekil 25.1). Bariz simetri nedeniyle, kürenin sadece bir yarısını dikkate almamız yeterlidir. θ değeri, 0'dan 180°'ye doğru arttıkça r de 0'dan R 'ye doğru artacak, böylelikle etrafımı çevreleyen yeryüzü ve gökyüzünün neredeyse tamamı, küçük küreme yansyacaktır! Buradaki tek istisna (i) benim engellediğim, arkamdaki kısım ve (ii) yansımamın engellediği kürenin diğer tarafındaki kısımdır.



Şekil 25.1. Bahçe küresinin geometrisi

26. Soru: Şuradaki arı daha ne kadar balözü toplayacak?

Bahçede, günlük işlerinin peşinde vızıldayan bir arıyla karşılaş-tığımızı farz edelim: *Balözü toplamaya koyulmuş olsun*. Herhangi bir çiçeğin üzerinde ne kadar süreyle kalacağını belirleyen ne ola-bilir? İşte, ilginç bir basit matematik alıştırması. Bir çiçekten ba-lözü toplamaya başladıktan sonra çiçekteki balözü de azalacak ve arı, giderek daha yavaş emiyor olacaktır. Yine insanbiçimci bir dil kullanarak, arımızın uçuş süresi ile beslenme süresini optimize et-mek “istediğini” düşünelim ve şu soruyu soralım: *Ne zaman bir çi-çeği bırakıp diğer çiçeğe geçmesi uygun olur?*

Elbette bu, sıradaki çiçeğin ne kadar uzaklıkta olduğuna bağlıdır ancak yine de genel bazı gözlemlerde bulunabiliriz. Bir bölge-de fazla kalması durumunda, daha az sayıda çiçeği ziyaret edecek-tir ancak çiçek ziyaretlerini kısa tutarsa zamanının büyük bölümü-nü uçarak geçirecektir. Durumu biraz daha basitleştirerek çiçek-lerin birbirlerine eşit mesafede durduğunu ve τ olarak ifade edece-ğimiz, çiçekler arasındaki uçuş süresinin sabit olduğunu varsaya-lım (bir diğer seçenek τ değerini, farklı mesafelerdeki çiçekler ara-sındaki uçuş süresinin *ortalaması* olarak almaktır). Ayrıca arının “mesai bitiminden” önce mümkün olduğunca fazla miktarda ba-lözü toplaması gerektiğini varsayalım. Buna göre arının (çiçekler arasındaki uçuş süresi dahil) her ziyarette, topladığı balözünü aza-

mi oranda tutması gerekir. Bir çiçekten t zamanda topladığı balözü miktarı $F(t)$ olsun (burada, amacımıza uygun olarak, F 'nin türevlenebilir bir fonksiyon olduğunu varsayıyoruz). Arı emdikçe, çiçekteki balözü miktarı da azalacağından bu fonksiyonun $F(0) = 0$ ile aşağı doğru içbükey olacağını tahmin ediyoruz. Ek olarak, balözü toplama hızını $R(t)$ ile tanımlıyor, aşağıdaki gibi ifade ediyoruz (R 'nin de türevlenebilir olduğunu varsayıyoruz):

$$R(t) = \frac{\text{yiyecek / ziyaret}}{\text{süre / ziyaret}} = \frac{F(t)}{t + \tau}$$

Burada “ziyaret”, arının (bir önceki çiçekten) diğer çiçeğe ulaşmak için uçtuğu süre ile çiçek üzerinde geçirdiği süreyi kapsar. R 'nin azamidede tutulması gerektiği akla yatkın bir varsayımdır ve buna göre $t^* > 0$ için $R''(t^*) = 0$ ve $R''(t^*) < 0$ olması gerekir. $R(t)$ 'nin türevini aldıktan sonra ilk koşula göre,

$$F'(t^*) = R(t^*) \quad (24.4)$$

Şekil 26.1, t^* 'in bu bağlamda ne anlama geldiğini gösterir. İkinci koşul ise F 'nin akla yatkın pek çok biçiminde (örneğin, $\lambda > 0$ iken $F = 1 - \exp(-\lambda t)$ gibi bir limitli büyüme fonksiyonunda) geçerliliğini koruyacaktır. Gerçekten de bir diğer basit hesaplamaya göre,

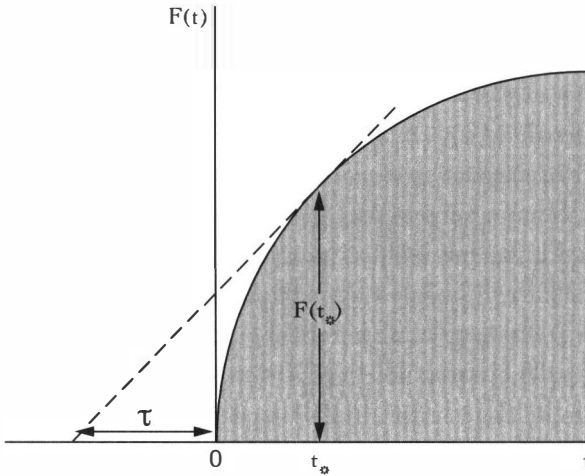
$$R''(t^*) = \frac{F''(t^*)}{t^* + \tau}$$

olduğundan, ikinci koşuldan hareketle, $F(t^*)$ aşağı doğru içbükey olduğu sürece $t = t^*$ noktasında R 'nin bir yerel maksimumu ortaya çıkacaktır. Peki ama ilk koşul bizim açımızdan ne anlam taşıyor ve arı için ne demek oluyor? R , bir çiçeğe yapılan ziyarette toplanan ortalama balözü miktarı olduğuna göre, anlık balözü miktarı, söz konusu ortalama miktarla eşit olduğunda arının yeni bir çiçeğe doğru kanat çırpma zamanı geldi demektir! Bu türden sonuçlara, *marjinal değer kuramı* denildiği de olur: Arı için kısaca bu “Başka yerde daha iyisini bulabilecekken yola koyul!” demektir. Bu

durum, grafikte gösterildiğinde daha kolay anlaşılacaktır (*tekrar Bkz. Şekil 26.1*); τ daha küçükken, t^* olarak ifade ettiğimiz optimal beslenme süresinin de daha küçük olduğuna dikkat edin. $F(t)$ aşağı doğru içbükey olduğu sürece, verili bir τ için tek bir t^* vardır. Şekil 26.1'de görüleceği gibi, t^* 'nin keyfi değerleri için noktalı çizginin eğrisi $R(t)$ 'dir ve (26.1) numaralı denklem kurulduğunda $R(t)$, $F(t)$ grafiğinde tanjantken (teğetken) bir maksimumdur.

Sonuç olarak, balözü toplamaya ilişkin ilginç bazı gerçeklerin farkına varmış olduk. Bir "Nova" internet sitesine göre, bir kovan-daki işçi arılar 1 pound (yaklaşık yarım kilogram) bal için 55.000 mil uçup 2 milyon çiçekten balözü toplar; dahası, bir işçi arı tek bir uçuşta yaklaşık 50 ilâ 100 çiçeği ziyaret eder. İş bittiğindeyse, kendi ağırlığının yarısı kadar polen ve balözüsüyle kovanına geri döner.

İnternet sitesine göre, 1 ons bal, arımıza dünyanın çevresinde uçmasına yetecek kadar enerji sağlayacaktır! Saatte sadece 15 millik bir hızla uçtuğu ve hiç mola vermediği takdirde bu, dünya turunu yaklaşık 70 günde tamamlayacağı anlamına gelir! Ancak bir arının yaklaşık ağırlığı sadece 0,1 gram ve 1 ons da 28,25 gram



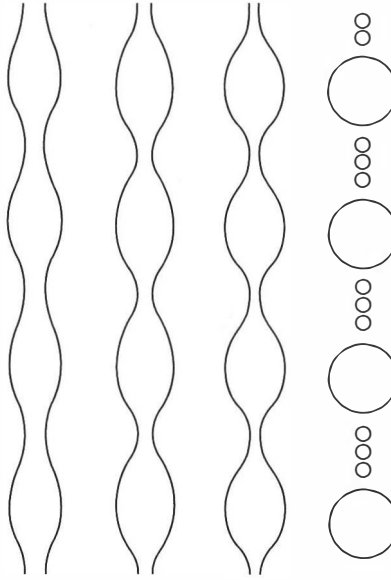
Şekil 26.1. (26.1) numaralı denklemin grafik olarak yorumu

olduğundan bu molalara ihtiyaç duyacaktır!

**27. Soru: Örümcek ağının üzerindeki şu damlacıklar
neden birbirlerinden eşit uzaklıkta?**

Bir örümcek ağının üzerinde düzenli aralıklarla sıralanmış yapışkan taneler fark ettiğiniz oldu mu? Bu madde, dolaşmaya çıkmışken tuzağa düşen bahtsız böceklerin örümcek ağından kurtulmasını engelleyen bir tür “yapıştırıcı”dır. Philip Ball'ın *The Self Made Tapestry (Kendi Kendine Yapılan İşleme)* adlı kitabında da ele aldığı gibi bu “inci tanesi dizilimi”, örümceğin öyle büyük zahmetlerle tasarladığı bir dizilim değildir; dizilim, silindir biçimindeki akışkan sütunlarının, bu sütunların yüzeyindeki dalgalanmalara bağlı olarak gösterdiği kararsızlığın bir sonucudur. Basitçe, yüzeydeki her bir ufak “dalga hareketi” durumunda, sıvının yüzey gerilimi de bu eğriliği yansıtacak şekilde hareket eder; sonuçta her bir dalgalanma, benzerlerinden ayrılan bir “damlacık” şeklini alır. Damlacıklar inci tanesi gibi dizildiğinde, durumdan habersiz böcekler bu yapışkan tanelere yakalanır, sonra da örümceklerle yem olur. Örümceğin bu yapışkan maddeyi, ağının yalnızca sarmal oluşturan iplerine bırakması ilginçtir; ağının ilk önce ördüğü radyal iplerinde bu yapışkana rastlanmaz. Bu da örümceğin, öğlen yemeği geldiğinde, ağının çeperinden merkeze doğru çabuk hareket etmesini sağlar.

Bu kararsızlık, 19. yüzyılın sonunda Lord Rayleigh tarafından çalışılmış, bu nedenle zaman zaman *Rayleigh kararsızlığı* adıyla anılmıştır. Ancak bunun, yerçekimsel bir alanda birbirine yakın konumda bulunan farklı yoğunluktaki akışkanlara ilişkin *Rayleigh–Taylor* kararsızlığı ile karıştırılmaması gerekir. Akışkanlar dinamiğine (ve başka konulara) ilişkin pek çok kararsızlığın ilginç bir özelliği, bir dalgalanmanın (tıpkı burada olduğu gibi) tüm dalga boylarında (ya da en azından süreklilik gösteren bir alt kümesinde) ortaya çıkabilirken, genellikle içlerinden en kararsızının belirli bir λ dalga boyu (ya da denk düşen bir $k = 2\pi / \lambda$ dalga sayısı) olmasıdır. Bu, söz konusu dalga boyundaki dalga hareketine benzer pertürbasyonların çok kısa zaman-



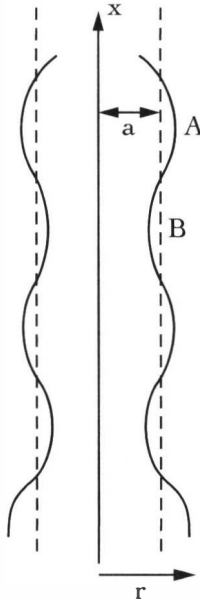
Şekil 27.1(a). “İnci tanesi dizilimi” olgusu

da (bu örnekte de görüldüğü üzere) silindirik biçimindeki yapıdan ayrılacakları anlamına gelir. Örümcek ağının üzerindeki damlacıkların büyüklüğünü ve ayrı konumlanışını belirleyen de λ_c olarak ifade edilen bu kritik dalga boyudur. Bir musluktan türbülanssız ve ip gibi ince ince akan suyun damlalara ayrılmasının ardında da temelde aynı kararsızlık yatar (Bkz. Şekil 27.1(a)) ancak yerçekimi de damlaları akan sudan “çekip kopararak” bu kararsızlığı hızlandırır. Eski sayaçlarda kullanılan sigorta telini erittiğimizde de aynı sonuçlarla karşılaşırız. Birdenbire ortaya çıkan kararsızlıkların, örüntü meydana getiren bu tür süreçleri nasıl harekete geçirebileceğini Ball, net bir şekilde açıklar: “Kararsızlık genellikle kritik bir parametre aşıldığında baş gösterir... Örüntü oluşturan kararsızlıkların sıkça karşılaşılan iki özelliği, simetri kırılmasıyla ilgili ... ve örüntünün özellikleri belirli boyutta olacak şekilde karakteristik bir *dalga boyuna* sahip olmasıdır.” Elimizdeki örnekte, kırılan simetri, ağ eksenindeki akışkanın silindirik biçimindeki simetrisidir.

Bu kararsızlığı matematiksel terimlerle ele almak için, α yarı-
 çapında ve silindir biçiminde bir akışkanımız (ya da sabun kat-
 manımız) olduğunu düşünelim ve yerçekimi kuvvetini hesaba kat-
 mayalım; yukarıdaki şeklin, dikey olarak çizilmiş olmasının hiçbir
 önemi yoktur. Simetrisinin eksen x -ekseni olsun ve radyal yönünü
 de r ile gösterelim. Şimdi, sütunun λ dalga boyundaki (k dalga sa-
 yısındaki) belirli aralıklarla tekrarlayan ya da dalgalanma niteliği
 taşıyan ufak bir müdahale ile pertübrasyona uğramasına izin vere-
 lim; böylece r yarıçapı, x eksen konumunun bir fonksiyonu olarak
 aşağıdaki gibi bozunuma uğramış olsun:

$$r = a + b \cos \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) = a + b \cos kx, \quad b \ll a \quad (27.1)$$

Burada $b \ll a$ olarak ifade edilen güçlü eşitsizlik, müdahalenin
 gerçekten de ufak olduğu anlamına gelir; ortam yarıçapı a 'yı sa-



Şekil 27.1(b). (27.1) numaralı denklemin gösterimi

dece küçük ve göreceli bir miktarda değiştirmiştir (birazdan göreceğimiz gibi bu, problemimizi esasen doğrusal bir probleme indirgemiş olur). Herhangi bir noktadaki eğrilik, bir basınçla ilişkilidir ve yüzey gerilimindeki farkları telafi eder. Artık paralel girinti ve çıkıntıları bulunan silindir şeklinden (*Şekil 27.1(b)*) yola çıkarak, eğer A gibi noktalardaki basınç, B gibi noktalardaki basınçtan büyükse, bu sistemin kararlı olduğunu söyleyebiliriz (diğer bir deyişle, düzgün silindir şekli *yeniden sağlanmıştır*). Bunun nedeni basıncın eşitlenme eğilimi göstermesi ve bu noktalarda bir karşı eğrilik doğurarak sütunu, başlangıçtaki pertübrasyona uğramamış şekline geri döndürmesidir.

Akışkanın yüzeyindeki herhangi bir nokta için bu pertübrasyon etkisi altında mümkün olan azami radyal uzama $R_1 = a + b$ olur; dik kestiği yönde (simetri eksenine paralel) eğriliğin yarıçapı (herhangi bir Analiz kitabının da göstereceği gibi)

$$R_2 = \left[1 + \left(\frac{dr}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} \left(\frac{d^2r}{dx^2} \right)^{-1} \quad (27.2)$$

olacaktır. Yeterince küçük ve başlangıç niteliğindeki bozulmalar için $|dr/dx| \ll 1$ varsayımında bulunabileceğimize göre,

$$R_2 \approx \left(\frac{d^2r}{dx^2} \right)^{-1} \quad (27.3)$$

Pertübrasyonun biçiminden hareketle

$$\frac{d^2r}{dx^2} = -k^2b \cos kx \leq k^2b \quad (27.4)$$

öyleyse en büyük uzama noktasında (örneğin, A 'da), dış (atmosferik) basıncın üzerindeki azami basınç (σ yüzey gerilimi katsayısı cinsinden) Young–Laplace denklemiyle verilmiştir,

$$\sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \sigma \left(\frac{1}{a+b} + k^2b \right) \quad (27.5)$$

Benzer şekilde B gibi noktalarda, dış basıncın üzerindeki asgari basınç da

$$\sigma \left(\frac{1}{a-b} - k^2 b \right) \quad (27.6)$$

olur. Bu nedenle, A ve B gibi noktalar arasındaki basınç farkı

$$\sigma \left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} + 2k^2 b \right) = \sigma \left(2k^2 b - \frac{2b}{a^2 - b^2} \right) \approx 2b\sigma \left(k^2 - \frac{1}{a^2} \right) \quad (27.7)$$

olarak ifade edilecektir; zira hipotez gereği $b \ll a$ 'dır. Söz konusu basınç farkı, $ka > 1$ ya da $2\pi a = \lambda_c > \lambda$ olduğunda pozitifdir. Yukarıda tartışmamıza göre bu, kararlı bir duruma işaret eder; $\lambda < \lambda_c$ ile her müdahale, etkisiz kalma eğilimi gösterir. Öte yandan eğer $\lambda > \lambda_c$ ise ki bu kritik dalga boyudur, silindir biçimindeki sütun kararsız hâle gelecek ve yapışkan ip üzerinde, belirli şekle sahip, ayrı ayrı damlacıklar oluşacaktır. Böylece yukarıdaki ölçüte uygun olarak, dalga boyunun çok büyük ya da sütunun fazla dar olması durumunda kararsızlık baş gösterir. Gerçekten de Lord Rayleigh, en kararsız dalga boyunun $\lambda \approx 9a$ olduğunu göstermiştir. Elbette bu analizin, kararsızlığın sadece nasıl belirdiğini açıklamaya yaradığını vurgulamak gerekir; takip eden (ve yalnızca üstünkörü bir açıklama getirmiş olduğumuz) kararsızlık durumunun ayrıntılı incelemesi, bütünlüklü bir doğrusal olmayan analiz yapmayı gerektirir. Bu kararsızlığın, musluktan ince ince akmakta olan suyun yakınında bir yere, titreşim hâlindeki bir diyapazon yerleştirerek tetiklenebilecek olması da ilginçtir; eğer frekans yeterince düşükse, su yüzeyinde oluşan kıvrımlar da ayrışıp damlacıklar oluşturmaktadır. Yeni yapılmış örümcek ağlarında sıklıkla karşılaşılan da işte budur! Gerçekten de C. Isenberg'e göre, örümcek ağı boyunca beliren damlacıklar, biri diğerinin yaklaşık üç katı büyüklüğünde iki temel boyutta olsa da yapışkan boncuklar yaklaşık 10^{-3} cm yarıçapındadır. Bunlar, düzenli bir sıra izler ve (her bir eğrilik yarıçapıyla ilişkili olan) silindir biçimindeki yapışkan tüpü niteleyen iki dalga boyundan kaynaklanır.

28. Soru: Fibonacci dizisi nedir?

Bu ve sıradaki soru, kendi bahçenizde bile rastlayabileceğiniz pek çok bitki yapısında bulunan ve (H. S. M. Coxeter'in deyişiyle) "büyüleyici derecede yaygın" bir örüntüyle ilgili 30 numaralı soruyu yanıtlamak için matematiksel zemini hazırlamak üzere tasarlandı. Ancak bu soruya yanıt vermek için hemen belirtelim; aşağıdaki sayı dizisine Fibonacci dizisi denir:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots \quad (28.1)$$

Bu dizide, üçüncü sayıdan itibaren, göze çarpan şey nedir? Muhtemelen iki şey dikkatinizi çekmiş olmalı; bunlardan ilki çok daha açıktır: Üçüncü terimden itibaren dizideki her sayı, *kendisinden önceki iki sayının toplamıdır*. Diğer bir deyişle eğer f_n dizideki n . terimi temsil ediyorsa ($n = 1, 2, 3, \dots$) böyleyse $n \geq 3$ için

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (28.2)$$

Bu, yapacak daha iyi bir işimiz yoksa diziyi sonsuza kadar geliştirmeye devam etmenin mümkün olduğu anlamına gelir. Dikkat çeken bir diğer nokta da ilk terimden başlayarak dizideki her bir sayıyı bir sonrakine bölecek olduğumuzda, ilginç bir şeyle daha karşılaşacak olmamızdır. Neyle mi?

$$1/1 = 1, \quad 1/2 = 0,5, \quad 2/3 = 0,66666 \dots, \quad 3/5 = 0,6, \quad 5/8 = 0,625,$$

$$8/13 = 0,61538 \dots, \quad 13/21 = 0,61904 \dots,$$

Öte yandan (beklendiği gibi), bu oranların tersi de benzer bir örüntü ortaya koyar. Böylece,

$$1/1 = 1, \quad 2/1 = 2, \quad 3/2 = 1,5, \quad 5/3 = 1,66666 \dots,$$

$$8/5 = 1,6, \quad 13/8 = 1,635, \quad 21/13 = 1,61538 \dots,$$

Yukarıdaki oranların ilki 0,6'dan biraz daha büyük bir sayıya, ikincisiyse birden büyük bir sayıya yaklaşıyormuş *gibi görünüyor*. Elbette bu, pek kesin bir matematiksel ifade değil, bu yüzden elde ki sayıları düzgün bir şekilde tanımlamaya koyulalım. İfade (28.2) aslında ikinci mertebeden bir doğrusal *fark denklemidir* ve ikinci mertebe olmasının sebebi, alt indis farktan kaynaklanır (söz konusu fark, burada ikidir). Fibonacci dizisindeki, sözgelimi 95. sayıyı yani f_{95} 'i, öncesindeki tüm terimleri tespit etmek zorunda kalmadan bulabilmek harika olurdu, öyle değil mi? Neyse ki bunu yapmanın bir yolu var.

Ancak gelin, biraz daha matematik çalışalım. Eğer elimizde daha basit, $n \geq 1$ iken $f_n = af_{n-1}$ şeklinde bir birinci mertebeden fark denklemi olsaydı, açıkça $f_2 = af_1 = a^2f_0$, $f_3 = af_2 = a^3f_0$, vs. olurdu; böylece genel olarak $f_n = a^n f_0$ diyebilirdik. Bu basit tablodan hareketle (28.2) gibi denklemleri çözmenin standart yolu, aşağıdaki ikinci dereceden denklemi verecek olan $f_n \propto \lambda^n$ 'yi ilgili denkleme yerleştirmekten geçer.

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Buradaki köklerse şöyledir:

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \equiv \beta \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \equiv \tau \quad (28.3)$$

Dikkat ederseniz,

$$-1 < \lambda_1 < 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_2 > 1,$$

böylelikle λ_2 'nin kuvvetleri artacak, λ_1 'in kuvvetleri ise (işareti değişse bile) azalacaktır. Yine dikkat ederseniz,

$$\lambda_1 = 1 - \lambda_2 = -\tau^{-1}$$

(28.2) numaralı denklemin genel çözümü, bulmuş olduğumuz iki çözümün doğrusal bileşimiyle mümkündür;

$$f_n = A_1 \beta^n + A_2 \tau^n \quad (28.4)$$

Buradaki A_1 ve A_2 birer keyfi sabit olup

$$(0), 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

şeklindeki Fibonacci dizisinden herhangi iki terimi “başlangıç koşulları” olarak almak suretiyle saptanabilirler. Dizinin başlangıcına $f_0 = 0$ şeklinde bir terimin yerleştirilmiş olduğunu fark etmişsinizdir; bu, gerekli olmasa da fark denkleminin (şimdi $n \geq 0$ için) karşılanmasına yarar ve bizi bekleyen cebir işlemlerini büyük ölçüde basitleştirmek gibi bir avantaj da sağlar. Böylece $f_0 = 0$ ve $f_1 = 1$ olduğuna göre şu iki denklemin (28.4) numaralı denklemin sonuçları olması gerekir:

$$A_1 + A_2 = 0 \quad \text{ve} \quad \beta A_1 + \tau A_2 = 1 \quad (28.5)$$

Bu denklemleri çözdüğümüzde aşağıdaki katsayılara ulaşırız

$$A_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -A_2$$

ve böylece sonunda,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau^n - \beta^n) \quad (28.6)$$

Buna, *Binet formülü* denir. Çok daha büyük n değerleri için bu formülü kullanmak, (28.2) numaralı denklemi elde hesaplamak kadar zahmetli olacağından, f_n 'ye doğru basit bir yaklaştırım kabul edilebilir. Hatta $n \rightarrow \infty$ olduğuna göre, $\beta_n \rightarrow 0$ durumunda bu zaten mümkündür; diğer bir deyişle, yeterince büyük n değerleri için

$$f_n \approx \frac{\tau^n}{\sqrt{5}} \quad (28.7)$$

Burada akla hemen gelebilecek soru şudur: Ne kadarlık bir büyüklükten bahsediyoruz? Pekâlâ, buna siz karar verin. 14. Fibonacci sayısı, yani f_{14} , 377'dir ve $\tau^{14}/\sqrt{5} \approx 377,0006$ 'dır. Bu hiç de fena sayılmaz, özellikle de tüm f_n değerlerinin tamsayı olduğunu bildiğimizi düşünürsek!

Dahası (28.6) numaralı denklemden hareketle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803398... \quad (28.8)$$

Bu sayıya altın oran (ya da altın sayı, altın ortalama, ilahi oranı) denir. Bu büyüleyici sayının birçok geometrik ifadesi vardır ve bunların bazıları düzgün beşgenle ilintilidir ancak en basitini aşağıdaki doğru kesitinde görebiliriz. Yunanlar buna, bir doğruyu “uç orana ve orta orana” göre bölmek diyordu. AB kesiti C 'de bölündüğünde kesitin daha büyük olan bölümünün (AC 'nin), daha küçük olan bölüme (CB 'ye) oranı, tüm kesitin (AB 'nin), daha büyük olan bölüme (AC 'ye) oranıyla aynıdır. Eğer $AC = \tau$ birimse ve $CB = 1$ birim uzunluğundaysa,

$$\frac{\tau + 1}{\tau} = \frac{\tau}{1} \quad \text{veya} \quad \tau^2 - \tau - 1 = 0 \quad (28.9)$$

şeklinde önceden aşına olduğumuz bir denklemlle karşılaşırız. Pozitif kök, yeniden, $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ 'dir. Dikkat ederseniz, $1/\tau = \tau - 1 = 0,61803398 \dots$

A ————— C ————— B

FİBONACCI'YLE İLGİLİ BİR ARASÖZ

Bu arada, 95. Fibonacci sayısı:

$f_{95} = 31.940.434.634.990.099.905$ 'tir. Bu, $3,2 \times 10^{19}$ ya da yaklaşık otuz iki kentilyondur. Bu sayıyı, gezegenimizin tahmini böcek nüfusuyla (10^{18} ya da yaklaşık bir kentilyon) veya Rubik küpündeki farklı permütasyonların sayısıyla ($4,3 \times 10^{19}$) kıyaslayın. Hep-

si de en azından, oldukça büyük sayılardır. Onları saymak gerçekten çok uzun sürer! Ancak sadece (i) bir değişiklik yapmak ve (ii) biraz eğlenmek amacıyla ilgilenen okurlar için bu işin ne kadar zaman alacağını tahmine koyuluyorum...

1, 2, 3, 4, 5, ... diye saymak 946.383; 946.384; 946.385; ... diye saymaktan kolaydır. Bu uzun sayıları söylemek bile en az 2 saniye alabileceğine göre, gereken süreyi sayı başına ortalama 2 saniye olarak kabul edelim ve yemek, uyku ya da tuvalet ihtiyacımız için bile hiç ara vermediğimizi (sadece problemin çözümü için) düşünelim. Tamsayıların ilk bir milyonu (10^6) için aşağı yukarı 2 milyon saniye gerekeceğine göre.... bunu, bir gündeki toplam saniye sayısına, $24 \times 3.600 = 86.400$ 'e böldüğümüzde, gerekli süre yaklaşık 23 gün çıkacaktır. Ancak 1 milyar (10^9) sayıyı sayarken, basitçe 23 günü 1.000 ile çarpamayız; sözgelimi 792.468.247 gibi sayıları söylemek iki saniyeden fazla zamanımızı alır. Haydi, bir deneyin! Bunun gibi büyük sayıları söylemek 3 saniye hatta daha uzun sürer! 1 milyar-da, 1 milyonu aşan 999 milyon sayı olduğuna göre, büyük sayıların küçük sayılardan çok daha fazla olduğunu söyleyebiliriz. Örneğin, $1.000.000.000 - 1.000.000 = 999.000.000$ ya da $10^9 - 10^6 = 9,99 \times 10^8$

Neyse ki bilimsel gösterim var! Buna göre, sayı başına 3 saniye gibi bir ortalamayla, 3 milyar saniye ya da (aşağı yukarı)

$$\frac{3 \times 10^9}{8,6 \times 10^4} \text{ gün} \approx 35.000 \text{ gün}$$

ya da yaklaşık 100 yıllık bir süre söz konusu demektir! Tekrar edelim, hiç ara vermiyoruz hatta (doğanın yavaşlamanızı söyleme şekli olan) ölüme bile izin yok. Tabii aynı sorunla, 1 trilyon (10^{12}) sayıyı sayarken de karşılaşacağız. 792.468.247.139 sayısını yüksek sesle söylemeyi deneyin. Genelde hızlı konuştuğum söylenir ancak benim bile bu sayıyı okumam 5-6 saniyemi alıyor. Bu nedenle 6 trilyon saniye, 3 milyar saniyeden 2000 kat uzun olduğuna göre, bu iş yaklaşık 200.000 yılımızı alacaktır, hah hah ha! Okur henüz uyuymadıysa bir katrilyona (10^{15}), sonra da gördüğümüz gibi 10^{18} olan bir kentilyona kadar saymak için bu verileri kullan-

maya hazır olmalı. Hesaplamayı size bırakıyorum ancak sonuçların sağlamasını, arkadaşlarınızın önünde sesli sayarak yapmaya kalkmayın lütfen.

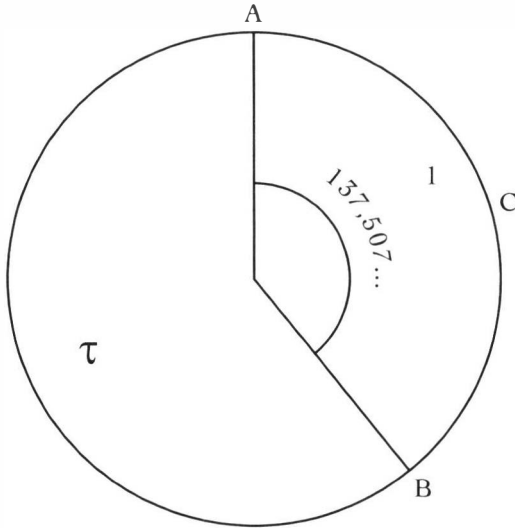
Son bir şey daha: Konumuzun ne olduğunu unuttuysanız; altın orana ek olarak bir de *altın açı* meselesi var . . .

29. Soru: Şu “altın açı” dedikleri de nedir?

Bir dairede α *altın açısı*, “1” uzunluğundaki bir yayın, yani $AC-B$ kesitinin, merkezden geçirilmesiyle elde edilir. Çemberin kalan yayı τ uzunluğundadır. Böylelikle (29.1) numaralı şekildeki BA yayı, $2\pi - \alpha$ radyan ölçülerinde ve elbette α değerini aşan, bir açı meydana getirir. Böylece (28.9) numaralı denkleme karşılık gelen,

$$\frac{2\pi - \alpha}{\alpha} = \frac{2\pi}{2\pi - \alpha} \text{ veya } \alpha^2 - 6\pi\alpha + 4\pi^2 = 0 \quad (29.1)$$

ortaya, en küçük kökün $\alpha = (3 - \sqrt{5})\pi$ radyanlar ya da $\approx 137,507^\circ$ olduğu bir ikinci dereceden denklem çıkarılır (*Bkz. Şekil 29.1*).



Şekil 29.1. Altın açiyı gösteren geometri

Dikkat ederseniz derece ölçümünde, $2\pi - \alpha = 360^\circ - 137,507^\circ \dots = 222,492^\circ \dots$ Tıpkı altın oranda olduğu gibi altın açıdan da bitkibilimdeki pek çok alanda yararlanılır; 30 numaralı sorumuz da bunlardan biri olan filotaksi ile ilgili...

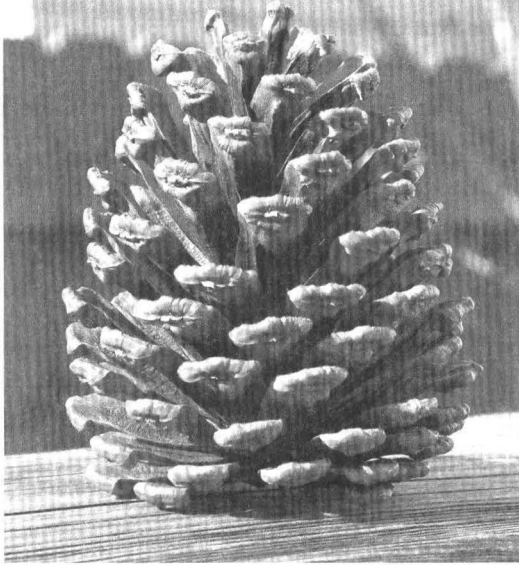
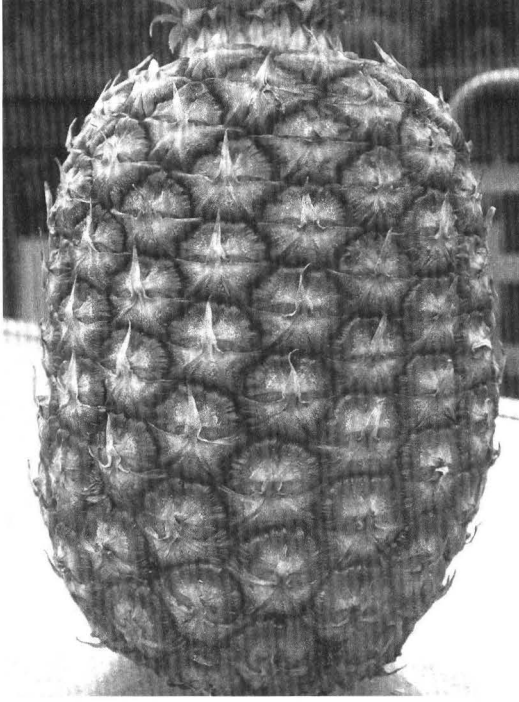
30. Soru: Yapraklar arasındaki açılar neden “o şekildedir”?

Bir dal üzerindeki yaprakların dağılımına ya da dizilimine ve bunun ardında yatan mekanizmalara filotaksi denir. Bitkibilimciler ve matematikçiler, bu terimi sadece yaprakların değil aynı zamanda tohumların, çiçeklerin, taçyaprakların ve (bazen) dalların tekrara dayalı dizilimini açıklamak için kullanır. Bu dizilimler, iyi bilinen ve önceki sayfalarda ele aldığımız 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 ... seyrindeki Fibonacci sayılarıyla ve ilgili altın sayıyla veya $\tau = (1 + \sqrt{5}) / 2 \approx 1,618034$ oranıyla da yakından ilişkilidir (τ değerinin tersi olan $\tau^{-1} \approx 0,618034$ 'e de zaman zaman altın oran denir). Bu sayılara dayanan sayısal ya da geometrik örüntüler doğada sıklıkla görülür ve yüzlerce yıldır incelenmektedir; sadece bu nedenle bile, başlangıç düzeyindeki çoğu metinde filotaksinin temel özelliklerinin ele alındığını görmek mümkündür.

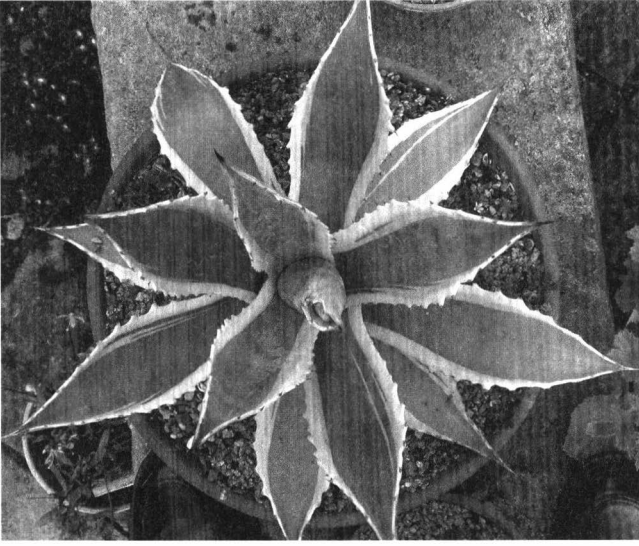
Örnek olarak, bazı taçyaprakları inceleyelim. Zambakların 3, düğünçiçeklerinin 5, bazı hezaren çiçeklerinin 8, kadife çiçeğinin 13, yıldızçiçeğinin 21 ve papatyaların 34, 55 hatta 89 taçyaprağı bulunur. Elbette istisnalar da vardır: Geometri uzmanı H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry (Geometriye Giriş)* başlıklı kitabında “filotaksi, aslında evrensel bir yasa değildir sadece büyüleyici derecede yaygın olma eğilimindedir” diye yazar. Bitkiler genellikle, belirli bir yerin ele geçirilip sahiplenilmesi, güneş ışığına erişilmesi ve çevreyle ideal bir etkileşimin sağlanması gibi biz insanların da anlayabileceği türden sorunlarla baş etmek durumundadır. Bir dal yukarıya doğru büyürken, düzenli açılar aralıklarında yapraklar üretir. Elbette bu açılar 360° 'nin tam rasyonel çarpanları olduğunda, yapraklar da (yukarıdan bakıldığında) bir ışın demeti görünümü verecek şekilde doğrudan birbirle-

rinin üzerinde büyüyecek, altlarında kalan yaprakların güneş ışığından ve nemden bir ölçüde mahrum kalmasına neden olacaktır (her 180° 'de ($\frac{1}{2}$ devir) ya da 90° 'de ($\frac{1}{4}$ devir) filizlenen yapraklar düşünün). Oysa bitkiler, yaprak dizilimlerini en iyi hâle getirmek amacıyla “en irrasyonel” sayı için rasyonel yaklaşımları seçiyor gibidir! Bu tuhaf ifadeyi biraz sonra inceleyeceğiz ancak şimdilik şunu söylemekle yetinelim: Bitkiden bitkiye değişiklik göstermekle birlikte (meşe, kiraz, elma, çobanpüskülü ve erik ağacında) yapraklar (bu noktada çok önemli bir sözcük kullanırsak) *yaklaşık olarak* $\frac{2}{5}$ 'lik bir devir ya da dairesel hareketten sonra (karaağaç, bazı otlar, misket limonu ve ıhlamur ağacında) $\frac{1}{2}$, (kayın ve fındık ağacında) $\frac{1}{3}$, (gül, kavak, armut ve söğüt ağacında) $\frac{3}{8}$; (badem ağacında) $\frac{5}{13}$ 'lük bir devirden sonra üretilir. Diğer yaklaşımlar $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{5}{13}$ 'tür ve bunlara filotaktik oran denir ve fark edeceğiniz üzere kesirlerin pay ve paydası (her durumda ardışık olmasa da) Fibonacci sayılarından oluşur. Garland'ın *Fascinating Fibonacci* adlı kitabında (başka pek çok örnekle beraber) $\frac{3}{8}$ 'lik bir filotaktik oran örneğine rastlanabilir; buradaki bitki 3 tam dönüşle, ana sap dışında 8 yaprak sapı üretmiştir.

Filotaksinin belki de en çarpıcı örneği, büyük bir ayçiçeği üzerindeki çekirdek diziliminde görülür. Çekirdekler, iki ayrı sarmal grubu hâlinde dağılım gösterir: Bu, saat yönünde 34, saatin ters yönünde 55 ya da aynı düzende (55, 89) seyredebilir hatta özellikle büyük türlerde (89, 144) olarak görülür. Papatyalarda da benzer örüntülere rastlanır ancak onlardaki dizilim, ayçiçeklerine kıyasla elbette çok daha yoğundur. Brousseau, özellikle çam kozalakları üzerinde durarak, bu sarmalların ayrıntılı bir incelemesini sunar. Kozalaklarda da yine birbirine paralel, iki bürgü sarmalı bulunur: Bunlardan biri, dik bir meyille aşağı sağdan yukarı sola uzanır, diğeriye daha yumuşak bir meyille aşağı soldan yukarı sağa doğru seyreder; belki de ilki için 8, ikincisi için 5 ya da (3, 5) ya da (8, 13) şeklinde. Brousseau'ya göre, çam kozalaklarındaki sarmal sayılarının en az %95'i Fibonacci dizisinden gelmektedir. Bu tür sar-



30. Soru - Ananas, çam kozalağı ve kaktüsteki sarmal Fibonacci örüntüleri



30. Soru (devam)

mallar, tıpkı kozalak bürgülerinde olduğu gibi, kuşkonmazdaki taçyapraklarda ve ananas “kabuklarında” da karşımıza çıkar. Karşılıklı üç çift kenardan oluşan altıgen biçimindeki kabukları nedeniyle, ananasta üç sarmal seti bulunur. Bu üç paralel sarmal, genellikle Fibonacci sayılarını verir (8, 13, 21 gibi) ve simetri eksenine sırasıyla yumuşak, orta ve sert meyilli açılar yapacak şekilde konumlanırlar.

Ancak sorumuz, daha çok altın açıyla ilgili. Mesele de bu sarmalların neden ve nasıl ortaya çıktığından kaynaklanıyor. Soruya yanıt vermek için Ian Stewart'ın *Life's Other Secret (Yaşamın Diğer Sırrı)* başlıklı kitabında yaptığı son derece net açıklamadan yararlanacağım (burada ele almayacak olsak da Stewart, aynı kitapta filotaksi çalışmalarının tarihini de özetler). Bir bitki, güneş ışığı arayışı içindeki uç noktasında yeni hücreler oluşturarak yukarı doğru büyür. Sarmal oluşum gösterme potansiyeli, yeni hücrelerin eskilerin yanında belirip onlarla komşuluk yapmaya başladığı bu aşamada ortaya çıkar. Uç noktanın merkezinde apeks denilen, yuvarlak biçimli küçük

bir doku bölgesi vardır ve apeksin etrafında, *primordia* denilen ufak yumrular oluşur. Apeks büyüyüp *primordia*'dan uzaklaştıkça, bu yumrular da “kendi işlerini yapıp” gelişir ve yaprak, tohum, taçyaprak, çiçek, dal ya da başka bitki kısımlarına dönüşür. Ancak görülen, *helikoid* denilen sarmallar, bitkinin gelişim örüntüsündeki bir dizi olayın “sadece” bir yan ürünü, çarpıcı bir göz yanılmasıdır. Burada asıl önemli olan, *primordia*'nın nasıl bir sırayla belirdiğidir. Sıkı örülmüş bir sarmal – jeneratif sarmal– görüntüsü oluştururlar. *Primordium*, apeks-ten ne kadar uzaktaysa o kadar erken oluşmuş demektir.

Yukarıdan ya da apeksin merkezinden bakıldığında, birbirini izleyen *primordia* arasındaki açı aşağı yukarı her zaman aynıdır ($\approx 137,5^\circ$; *Bkz. Şekil 30.1*). Sapma açısı denen bu açı, altın oran τ ile yakından ilgilidir. Ancak şimdilik, Fibonacci dizisinde art arda gelen sayıların oranlarını alıp 360° ile çarpar ve elde ettiğimiz sonuçları (180° 'den küçük olan iç açıyı kullandığımız için) 360° 'den çıkarırsak (idealize edilmiş sapma açısının matematiksel bir eşdeğeri olduğunu gördüğümüz) altın açının çok daha doğru bir ifadesi olan $137,50776 \dots^\circ$ civarında bir dizi yaklaştırmayı elde ederiz. Buradan hareketle (3, 5) çiftinden başlayarak şu diziyi oluşturabiliriz:

$$360^\circ (1 - \frac{3}{5}) = 360^\circ \times 2/5 = 144^\circ$$

$$360^\circ (1 - \frac{5}{8}) = 360^\circ \times 3/8 = 135^\circ$$

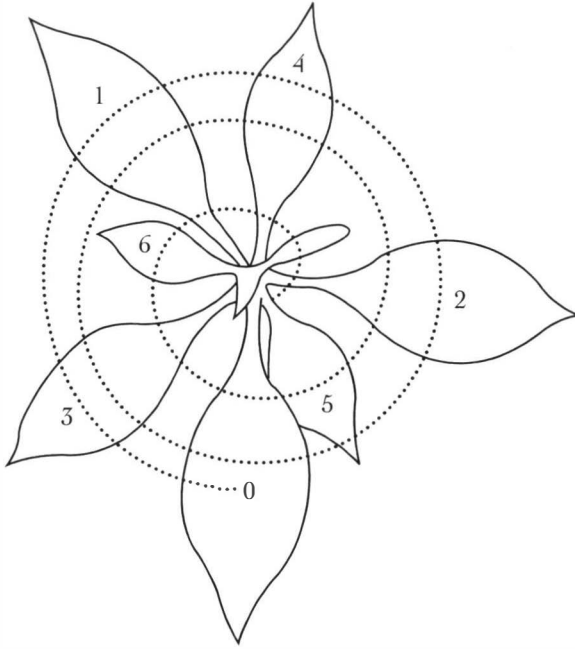
$$360^\circ (1 - \frac{8}{13}) = 360^\circ \times 5/13 = 138,5^\circ$$

$$360^\circ (1 - \frac{13}{21}) = 360^\circ \times 8/21 = 137,1^\circ$$

$$360^\circ (1 - \frac{21}{34}) = 360^\circ \times 13/34 = 137,6^\circ$$

$$360^\circ (1 - \frac{34}{55}) = 360^\circ \times 21/55 = 137,5^\circ$$

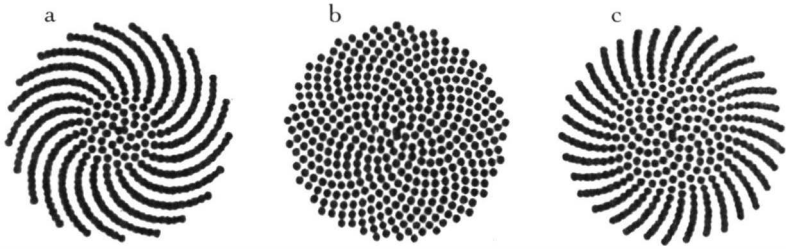
Böylelikle, art arda gelen ve Fibonacci sayılarından oluşan her bir oran, altın açığa daha yakın bir yaklaştırım vermiş olur. Sapma açısı $137,5^\circ$ 'den küçükse, tohum başında boşluklar oluşur ve sadece saat yönünde seyreden sarmal grubu göze çarpar. Sapma açısının $137,5^\circ$ 'den büyük olması durumunda da boşluklar oluşur; ancak bu kez, sadece saatin ters yönündeki sarmal grubu fark edilebilir (Bkz. Şekil 30.2). Böylelikle altın aç ayçiçeğini deyim yerin-



Şekil 30.1. Altın açının yaprakta dağılımı

deyse tam başından vurmuş olur çünkü bu, tohumların hiç boşluk bırakmadan bir araya geldiği tek açıdır ve bu açıda, her iki sarmal da eşzamanlı meydana gelir. Stewart'ın işaret ettiği gibi, bu en verimli bir araya gelme sayesinde sağlam ve dayanıklı bir tohum başı olur. Şimdi dikey boyutu yeniden dahil edelim ve her yaprağın, güneş görebileceği bir yere ihtiyaç duyduğunu, bunun en iyi aşağıdaki başka bir yaprak tarafından işgal edilmemiş bir yönde elde

edileceğini hatırlayalım. Böylece kalan en büyük boşluklar sosyal sorumluluk sahibi bir yaprak tarafından teker teker dolduruldu-
 ça, ortam iyice kalabalıklaşacak ancak bu yavaş ve dengeli bir şe-
 kilde meydana gelecek; bu durum ancak sapma açısının altın aç-
 ı olmasıyla mümkün olacaktır (*Bkz. Şekil 29.1*). Theodor Cook, ki-
 tabının 1914 tarihli ilk basımında şöyle yazar: “Bitkilerin, yaprak
 dizilişini Fibonacci sayılarıyla ifade etmesi ve bunun, olağan karşı-
 lanacak denli sık karşımıza çıkması, baskın gelişim gösteren yap-
 rakları için asgari düzeyde üst üste binme ve azami düzeyde gü-
 neş ışığı sağlayacak Fibonacci açısından yararlanmayı hedefledik-
 lerini göstermektedir.” Bitkileri, bu şekilde hareket etmeye teş-
 vik eden şeyin ne olduğu konusunda görüş ayrılığına düşebiliriz,
 ancak mekanizmanın tamamı olmasa da ardındaki temel görüşler,
 günümüzde de geçerliliğini korumaktadır.



Şekil 30.2. “Neredeyse altın açısı”na dayanan sarmal örüntüler (a) 137,3° ; (c) 137,6° ;
 137,5° altın açısı (b)’de kullanılmıştır. Kaynak: Adam (2006).

Daha önce 360° ’nin (ya da 2π radyanlarının) herhangi bir ras-
 yonel çarpanının, arada boşluklar olduğu sürece etkili bir tohum
 ya da yaprak dizilişini meydana getirmeyeceğine dikkat çekmiştik.
 Sözgelimi, eğer p ve q birer pozitif tamsayıysa, $(360p / q)^\circ$ bize q
 radyal çizgilerini verir. Diğer bir deyişle, 360° ’nin çarpanı *irrasyo-*
nel olmalıdır, tam bir kesir değil. Peki ama (sonsuz sayıda oldukla-
 rını düşünürsek) en iyi irrasyonel çarpan hangisidir? Hemen veri-
 lebilecek bir yanıt, bir *rasyonel yaklaşımda* fazla vakit geçirme-
 yen çarpandır ancak biz yine Stewart’ın konuyla ilgili tartışması-

na dönelim. “En rasyonel” sayı diyebileceğimiz bir sayı gerçekten de vardır ve görünüşe göre bu (sıkı durun) altın sayıdır. Altın sayı (ya da tanımladığımız üzere bu sayının tersi) art arda gelen Fibonacci sayılarına ait oran dizisinin limitidir; diğer bir deyişle, 28 numaralı sorunun başında ele aldığımız sayı kümesidir:

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \dots,$$

buradaki her bir oran, $0,6180339 \dots = \tau^{-1}$ ’e daha da yaklaşmaktadır. Bunlar, τ^{-1} ’e doğru rasyonel yaklaşıtımlardır. Bir sayının ne kadar irrasyonel olduğunu belirlemenin yolu, yaklaşıtımlar ile sayının kendisi arasındaki hataları inceleyerek anlaşılabilir. Bu fark –hata– ne kadar hızla sifıra inmektedir? Hataların τ (ya da tersi) için diğer tüm irrasyonel sayılara kıyasla daha yavaş küçüldüğü kanıtlanabilir. “Rasyonel sayılarla yaklaşıtımları yapılabilecek” en kötü sayıdır bu! Bu “kötülüğüne” rakip olabilecek tek şey bir önceki cümlemin tuhaflığı olsa gerek. Uzun lafın kisası altın sayı, gerçekten de çok özel, şaşırtıcı ve tuhaftır.

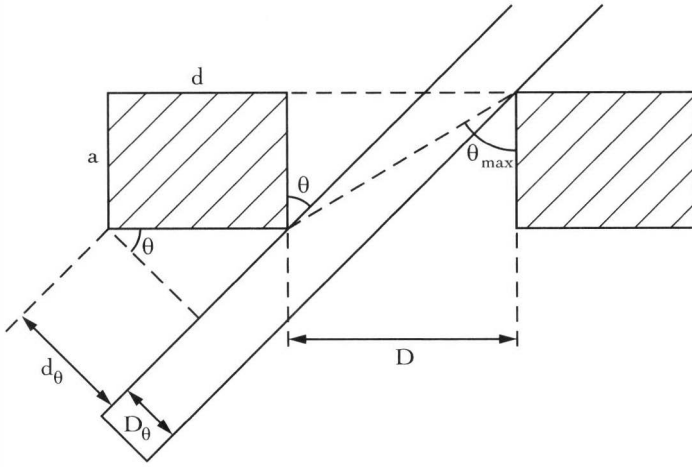


Mahallede

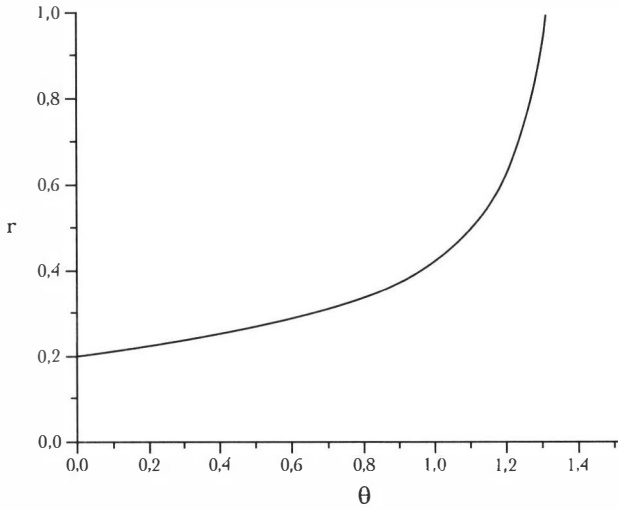
31. Soru: Sadeceyanından geçmekle çitlerin (ya da köprülerin*) “şekillerini” anlayabilir misiniz?

Pekâlâ, bu biraz tuhaf bir soru olabilir ancak *şekil* derken her bir çit direğinin kesit alanını kastediyorum. Evi arkamda bıraktım ve sıra dışı bir ters problemle karşı karşıyayım. Mahallede yürürken ya da şehir dışında araç kullanırken, bazıları dikdörtgen bazıları daire biçiminde enkesitlere(kesitlere) sahip direklerden yapılma pek çok çitle karşılaşsınız. Elbette saatte 5 milden daha hızlı gidiyorsanız bu direkleri birbirinden ayırmak kolay olmayabilir; ayrıca neden böyle bir şey yapmak isteyesiniz? Bu sorunun cevabını sonraya bırakalım. Oyun sahalarının, stadyumların ya da bazen çatıların çevresinde de tel örgü veya kafeslerle karşılaştığımız olur; uzaktan bakıldığında bunları ayrı ayrı algılamak mümkün değildir ve teller, gri renkli bir cam tabakasını andırır. Bu tellere (tellerle düşey doğrultudaki düzleme göre) artan bir dar açıyla bakıldığında, arka plandaki gökyüzünde giderek koyulaşıyor gibi görünebilirler. Minnaert'e göre (1994) bu durum, örgüde boylamasına uzanan tellerin (küçük ve yassı bantlardan farklı olarak; *bkz. grafikler*) dairesel bir enkesite(kesite) sahip olduğunu kanıtlar (ne kadar iddialı bir sözcük!). Eğer çitimiz, ikinci durumdakine benzer şekilde, *çok ince* ve yassı çitalardan yapılmış olsaydı, bu çitalar göze çarptıkları her açıdan aynı ölçüde koyu renkli görünürlerdi (sorumuzu, dik uzanan parçaları olan panjur örneğiyle de düşünebiliriz). Dikdörtgen şeklindeki keyfi enkesitlerin(kesitlerin), bu son sonucu genel anlamda etkileyeceği açıktır; öyleyse eldeki ifadeleri incelemeye başlayalım ve onları geometrik açıdan temellendirmeyi deneyelim. Bu (ve 32 numaralı) soru, girişte bahsettiğimiz o can sıkıcı ters *problemlerden* biri.

İlk durumu ele alalım: Küçük yassı bantlar. *Şekil 31.1*, d genişliğine ve a kalınlığına sahip olan ve D genişliğindeki bir aralıkla yerleştirdiğini varsaydığımız iki yassı parçanın yukarıdan bir görünümünü verir; bu bütün tel örgüyü temsil eder. θ açısından bakıldığında,



Şekil 31.1. Düz çıta geometrisi

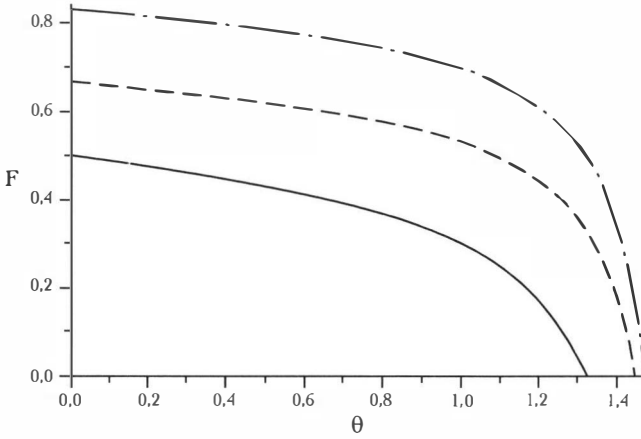


Şekil 31.2. $d/a = 2$ ve $D/d = 5$ için $r(\theta)$

bir parça ve bir aralık için “koyu renkli” ve “açık renkli” genişlikler, sırasıyla $d_\theta + a_\theta = d \cos \theta + a \sin \theta$ ve $D_\theta = (D - a \tan \theta) \cos \theta$ olarak ifade edilir.

Bu genişliklerin oranı r (Bkz. Şekil 31.2)

$$r(\theta) = \frac{d_\theta + a_\theta}{D_\theta} = \frac{d \cos \theta + a \sin \theta}{D \cos \theta - a \sin \theta} = \frac{d + a \tan \theta}{D - a \tan \theta} \quad (31.1)$$



Şekil 31.3. d/a ve D/d değeri için $F(\theta)$

ancak elbette $\theta < \arctan D/a$ olduğunda $\theta = \theta_c = \arctan D/a$ iken ışık tamamen kapanmıştır. Dikkat ederseniz $a \rightarrow 0$ olduğundan $r \rightarrow d/D$.

Dahası, θ açısının fonksiyonu olarak iletilip geçmiş ışık parçası (iletilmiş ışık parçası) F_θ (her bir “aralık/ parça çifti” için) en iyi şu oranla belirlenecektir:

$$F(\theta) = \frac{D_\theta}{D_\theta + d_\theta + a_\theta} = \frac{D - a \tan \theta}{D + d} \quad (31.2)$$

ışık tamamen engellendiğinde, yani $\theta = \arctan D/a$ olduğunda bu, sıfırdır. Bu fonksiyonun d/a ve D/d değerleri için grafiği Şekil 31.3'te gösterilmiştir.

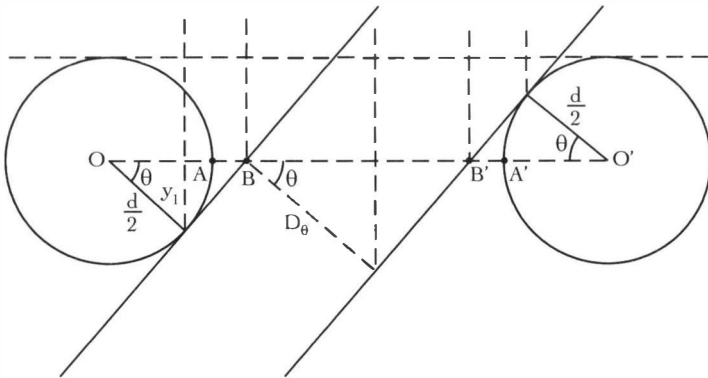
Elbette burada, n sayıda bandın ve aralarındaki $n - 1$ boşluğun etkilerine bakıyoruz; dolayısıyla her türlü katkıyı hesaba katmamız gerekir. Diğer bir deyişle,

$$\begin{aligned} F_{\theta}(n) &= \frac{(n-1) D_{\theta}}{(n-1) D_{\theta} + n(d_{\theta} + a_{\theta})} \\ &= \frac{(n-1)(D \cos \theta - a \sin \theta)}{n(D+d) \cos \theta - D \cos \theta + a \sin \theta} \\ &= \frac{(n-1)(D - a \tan \theta)}{(n-1)(D+d) + d + a \tan \theta} \end{aligned} \quad (31.3)$$

burada $n \rightarrow \infty$ olduğundan F_θ 'ya yaklaşılr. Yine, dikkat ederseniz $a \rightarrow 0$ olduğundan,

$$F_{\theta}(n) \rightarrow \frac{(n-1) D}{(n-1) (D+d) + d} \quad (31.4)$$

θ açısından bağımsızdır ve Minnaert'in çok ince parçalarla ilgili yukarıdaki ifadesini doğrular.



Şekil 31.4. Silindir biçimindeki çit direklerinin geometrisi

Sırada, d yarıçapında ve düzenli olarak D aralığında seyreden silindirik biçimindeki parçaların durumu var. Şimdi eldeki problemin analizi açısından, Şekil 31.4'ten hareketle birkaç farklı mesafeyi tanımlayacağız.

Çapı d olan her bir parça arasındaki mesafeyi D olarak alalım. Şekil 31.4'ten yola çıkarak,

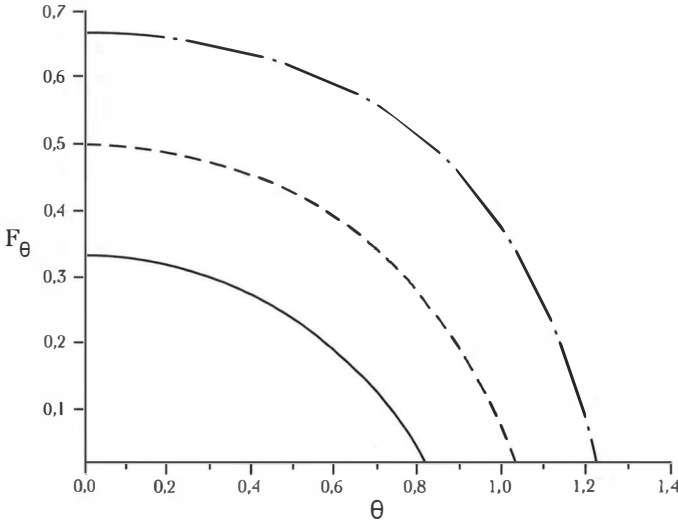
$$D_{\theta} = BB' \cos \theta = (D - 2AB) \cos \theta \quad (31.5)$$

ancak

$$AB = OB - OA = \frac{d/2}{\cos \theta} - \frac{d}{2} \quad (31.6)$$

bu nedenle

$$D_{\theta} = \left(D - \frac{d}{\cos \theta} + d \right) \cos \theta = D \cos \theta + d(\cos \theta - 1) \quad (31.7)$$



Şekil 31.5. D/d değerleri için F_{θ}

$\theta = \theta_c = \arccos (D + d)$, $D_\theta = 0$ iken iki parça arasındaki bütün ışık engellenmiş durumdadır. Buna karşılık gelen iletilip geçmiş ışık parçası (iletilmiş ışık parçası) F_θ (yine her bir “aralık/ parça çifti” için) şu oran ile verilir (Bkz. Şekil 31.5):

$$F_\theta = \frac{D_\theta}{D_\theta + d} = 1 - \frac{d \sec \theta}{(D + d)} \quad (31.8)$$

Bu durum, yukarıda incelenen sınırlayıcı dikdörtgen örnekten farklı olarak, açıkça θ açısına bağlıdır ve Minnaert'in daire biçimindeki enkesitlere (kesitlere) sahip teller için yaptığı tespiti haklı çıkarır. Dikdörtgen parçaların durumuna benzer şekilde şöyle gösterebiliriz:

$$F_\theta (n) = \frac{(n-1)D_\theta}{(n-1)D_\theta + nd} \rightarrow F_\theta \text{ gibi } n \rightarrow \infty \quad (31.9)$$

Öyleyse, burada tam olarak neyi başarmış oluyoruz? Temelde, Minnaert'in bazı genel ifadelerini doğrulamış, bu esnada da önceden verilmemiş bazı ayrıntıları açıklığa kavuşturmuş olduk (modelleme işinin güzel taraflarından biri de budur). Özetle, biz yaından geçip giderken bir tel örgü ya da kafes, arka plandaki gökyüzünde giderek koyu bir renk alıyorsa, örgüde boylamasına uzanan teller ya daire biçimindeki enkesitlerden (kesitlerden) ya da kalın parçalardan yapılmış olmalıdır. Diğer taraftan, görüntüde bir renk değişikliği yoksa çitimiz ince parçalardan oluşuyor demektir!

* Aslına bakarsanız, yakın zamanda bu durumu açıklamaya çok uygun bir örnekle karşılaştım ancak ben olduğum yerde dururdum, hareket hâlinde olansa “çitti”. Pazar sabahları eşim Susan ile birlikte otomobille kiliseye giderken orta kısmı katlanan iki metal ızgaradan yapılmış bir köprüden geçeriz. Bu iki parça, menteşeler sayesinde yukarıya ve birbirlerinden uzaklaşacak şekilde hareket edebiliyor, böylelikle yüksek direkli gemilerin geçişine imkân sağlıyordu. O pazar sabahı trafiğe takılmıştık çünkü gemilerin geçebilmesi için köprü yukarıya kaldırılmıştı. Arabamda, bu büyük ızgara-

lara neredeyse dikey konumda oturuyor olduğum için olan bite-ni mükemmel bir şekilde izleyebiliyordum; kısa süre sonra ızgaralar (trafiğin yeniden açılması için) aşağı inmeye başladı. Dikkatlice, ızgaraların arasından geçen ışığın yeğînliğini arka plandaki gökyüzüyle karşılaştırmaya koyuldum. Oldukça büyüleyiciydi; ızgaraların arasından geçen ışık giderek koyulaştı, azaldı ve sonunda görünmez oldu; en azından benim oturduğum yerden! Bundan şu sonucu çıkarmalıyım: Metal köprü, kısmen de olsa, silindir biçimindeki metal tüplerden (veya muhtemelen kalın parçalardan) yapılmıştır ve bunlar yol yönüne dik uzanmaktadır!

32. Soru: Bir balkabağının ağırlığını, sadece dikkatle bakarak ölçebilir misiniz?

Farklı büyüklükteki balkabaklarına bakarken insanın aklına şu soru gelebilir: *Acaba bir balkabağını sadece çapını ölçerek "tartmak" mümkün müdür?* Bu soruyu, eldeki problemimiz için ma-



32. Soru - Mahalleden arkadaş canlısı bir balkabağı.

tematiksel bir model geliştirerek cevaplamaya çalıştığımızı hayal edelim. Hatta bunun için iyi bir de sebebimiz olsun; bir balkabağı tarlasının ortasına düştüğümüzü, her bir balkabağının ağırlığını sadece bir mezura ve aşağıdaki ayrıntılara dayanarak kurduğumuz matematiksel modelimiz yardımıyla bulmak istediğimizi düşünelim.

Neyin peşinde *olmadığımızı* netleştirmek, işimizi kolaylaştırabilir: Amacımız, balkabağının ağırlığını *zamanın bir fonksiyonu olarak* tanımlayan bir model değil, zamanın bir kesitinde aşağıdaki verilerle tutarlı bir model oluşturmak. Ev ödevi olarak vereceğim sıradan bir problem için ipuçları sıralıyor olsaydım aşağı yukarı şunları sıralardım...

Balkabağının şekliyle, iç yapısıyla (örneğin, kof olup olmadığıyla), kabuğunun kalınlığıyla (eğer kofsa) vd. ile ilgili varsayımlarınızı net bir şekilde ifade edin. Her balkabağının etli kısmının yoğunluğu için (aynı) sabiti varsaymak gayet akla yatkındır. Muhtemelen, kabuğun kalınlığı ya da (eğer kofsa) göbeği ile “büyüklüğü” (yani “yarıçapı” ya da “çapı”) arasında fonksiyonel bir ilişki olduğunu varsaymanız gerekecektir. Bir balkabağı bulup kendi gözlemlerinizi yapmak isteyebilirsiniz. Muhtemel ilişkiler logaritmik, üssel ya da kuvvet yasasına dayalı olabilir (Bu, tamamen size kalmış.). Eğer bu ilişkilerden biri işe yaramazsa diğerini deneyin. Ek olarak, modelinizdeki serbest parametrelerin sayısını da en aza indirmeniz gerekir. Unutmayın, bunlar ampirik (= “gerçek”) veriler olduğundan biraz veri dağılmasına hazırlıklı olmalısınız! Ayrıca çoğu matematiksel modelde olduğu gibi, tek bir “doğru” cevap yoktur, bazı cevaplar kaçınılmaz şekilde, diğerlerinden daha az “doğru” olabilir!

Modelimizi *Tablo 32.1*'de yer alan balkabaklarından edindiğimiz verilere dayandıracağız.

BİR YAKLAŞIM

Yıllar içinde epeyce balkabağı oymuş biri olarak üzerime düşeni yaptığımı inanıyor, her balkabağının, büyüklüğünden bağımsız olarak, ρ sabit kabuk yoğunluğuna sahip ve içi boş bir küre olduğunu varsayıyorum. Teknik olarak, balkabağının iç boşluğundaki havanın yoğunluğunu da hesaba katmamız gerekir ancak bu, ρ ile karşılaştırıldığında son derece küçük bir değer olduğundan onu sıfır olarak alacağım. Öyleyse iç yarıçapı R_1 , dış yarıçapı R_2 olan bir balkabağının kütlesi

Tablo 32.1 Balkabağı Verileri

Yarıçap (cm)	Kütle (kg)
14	6
16	10
19	19
21	20
23	26
25	30
30	50

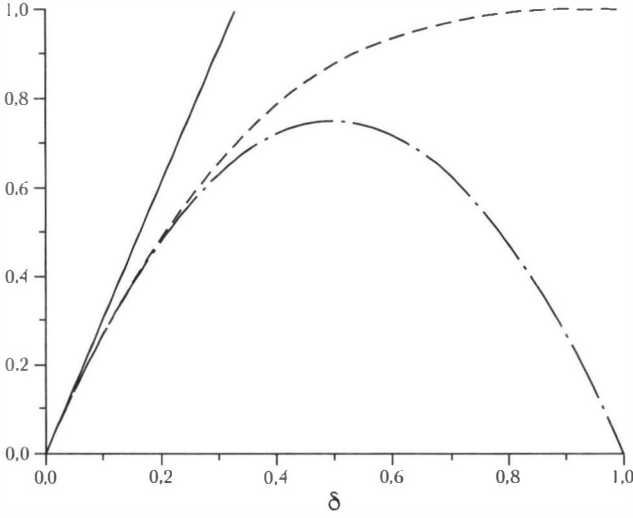
$$M = \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3) \rho \quad (32.1)$$

ağırlığı ise $W = Mg$ olur; burada g (lokal) yerçekimi ivmesidir ve yaklaşık $9,8 \text{ m/s}^2$ değerindedir. Ağırlık kütle ile orantılı olduğundan, M üzerinden devam edeceğiz. Küre biçimindeki kabuğun kalınlığı $T = R_2 - R_1$ olsun; tecrübeye dayanarak genellikle, T 'nin neredeyse kesin bir şekilde R_2 dış yarıçapının bir fonksiyonudur. Ayrıca balkabaklarının tastamam gelişmiş (ancak tıpkı yetişkinler gibi, çeşitli büyüklüklerde) olduğunu ve R_2 büyüklüğüne göre değişen çeşitli T kalınlıklarında olduğunu da farz edeceğiz. Öyleyse, $R_1 = R_2 - T$ ve R_1^3 için biraz cebire başvurduktan sonra (32.1) numaralı denklemimiz şöyle olacaktır:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{4}{3} \pi \rho R_2^3 \left[3 \left(\frac{T}{R_2} \right) - 3 \left(\frac{T}{R_2} \right)^2 + \left(\frac{T}{R_2} \right)^3 \right] \\
 &= \frac{4}{3} \pi \rho R_2^3 [3\delta - 3\delta^2 + \delta^3]
 \end{aligned} \tag{32.2}$$

Burada $\delta = T/R_2'$ dir. Açık ki $0 < \delta \leq 1$ olduğundan balkabağının tamamen katı olduğu (hayli ihtimal dışı) durumda $\delta = 1$ 'dir. Ancak T ile ilgili ufak bir sorununuz var: Sabit olsaydı bile, değerini bilmiyoruz! Peki, elimizdeki verilerin yardımı dokunabilir mi? Bir bakalım. δ , karesel ve küpsel terimleri yok saymamıza izin verecek denli küçük olsaydı iyi olurdu; 3δ , $3\delta - 3\delta^2$ ve $3\delta - 3\delta^2 + \delta^3$ 'ü gösteren *Şekil 32.1*'den hareketle $\delta \lesssim 0,1$ olması akla yatkındır. Hem doğrusal hem de karesel terimleri koruyarak M 'ye bir yaklaşım uygularsak $\delta \lesssim 0,3$ olduğunda bu, akla yatkındır. Öyleyse ilk yaklaşıtırmamız $M \approx 4\pi\rho TR_2^2$ olsun (elbette bu, diferansiyeller aracılığıyla bir kürenin kütlesinden yararlanarak da yazılabilirdi). Eğer $T = T(R_2)$ ise hangi fonksiyonel bağımlılığı seçmeliyiz? Muhtemel bağımlılıklar, bir kuvvet yasası ($T = aR_2^b$), bir logaritmik yasa ($T = a \ln bR_2$) ya da üssel ($T = ae^{bR_2}$) olacaktır. Bunlar başlangıç için oldukça basit ilişkilerdir ve belki de içlerinde en basit olanı kuvvet yasasıdır, bu yüzden onunla ilerleyelim. (Diğerlerinin “okura alıştırmaya bırakıldığını” belirtmeden geçemeyeceğim!)

Kolaylık olması açısından, sıradaki işlemlerimizde R_2 için ' R 'yi kullanıyor olacağız. Eldeki verilerin bu hâliyle, özellikle de kuvvet yasası açısından a ve ρ birimleri biraz tuhaf, hatta biraz da hantal kaçtığı için gelin her şeyi boyutsuz yapalım. Bu, belirli bir birim sisteminden bağımsız çalışma avantajı sağladığından, bilimsel çalışmalarda kullanılan yaygın bir yöntemdir. Bu amaçla, veri tablomuzdaki ilk veriler olan R_0 yarıçapı ve M_0 kütleyi temel alıp boyutsuz yarıçapı



Şekil 32.1. 3δ , $3\delta - 3\delta^2$ ve $3\delta - 3\delta^2 + \delta^3$ grafiği

$R = R/R_0$, kütleli $m = M/M_0$ olarak tanımlarsak, birkaç sadeleştirmeden sonra 32.2'deki denklemimizi yeniden yazabiliriz. δ değerinin doğrusal yaklaşımımızı geçerli kılacak kadar küçük olduğunu varsayalım. Boyutsal terimlerle düşündüğümüzde

$$M = 4\pi\rho TR^2 = 4\pi\rho aR^{b+2} \text{ ve bu nedenle } M_0 = 4\pi\rho aR_0^{b+2} \quad (32.3)$$

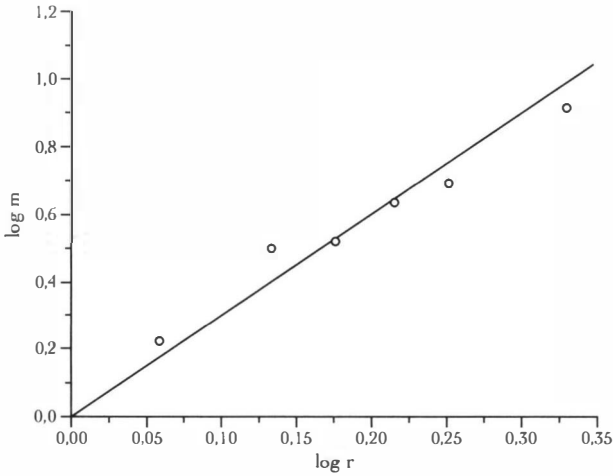
olacağından, artık elimizde çok daha basit görünen bir “model” var

$$m = r^{b+2} \quad (32.4)$$

ve bu model için eldeki verilerden hareketle, yaklaşık bir b değeri bulmamız gerekecektir. Tanımladığımız hâliyle m görelî kütlenin, dolayısıyla hacmin bir ölçüsü olduğuna göre, b 'nin teoride 1 olması bizleri şaşırtmamalı; aşağıda belirtildiği gibi verilerimiz de bu durumu doğrular. Bayağı logaritma terimleriyle ifade edecek olursak (32.4) numaralı denklemimiz

$$\log m = (b + 2) \log r \quad (32.5)$$

hâline dönüşür, bu da koordinatların başlangıcından geçen bir düz doğrunun $y = cx$ şeklindeki klasik formudur. Şekil 32.2'de yer alan ve Tablo 32.2'ye dayanan grafik, $y = \log m$ ve $x = \log r$ ile bunlardan “göz kararıyla” geçirilmiş bir düz doğruya karşılık gelen noktaları (daireleri) gösterir. Bunun, bir istatistikçinin kâbusu olacağına şüphe yok!



Şekil 32.2. Tablo 32.2'deki logaritmik veri noktaları ve “göz kararı” bir doğrusal giydirme

Tablo 32.2 Standart Yarıçap ve Kütle Verileri

r	$\log r$	m	$\log m$
1	0	1	0
1,143	0,058	1,667	0,222
1,357	0,133	3,167	0,501
1,500	0,176	3,333	0,523
1,643	0,216	4,333	0,637
1,786	0,252	5	0,699
2,143	0,331	8,333	0,921

Bu durum, uygun bir regresyon doğrusu ya da en küçük kareler analizi gerektirir ancak gözlerimin bu iş için yeterli olacağını umuyorum.

Doğrumuzun eğimiyle biraz uğraştım ve $c = b + 2 \approx 3$ olduğunu buldum, dolayısıyla beklenildiği gibi $b \approx 1$ 'dir. Bu nedenle, a sabiti boyutsuzdur; zira hem T hem de R , uzunluk boyutlarına sahiptir. Doğrudan (32.2) numaralı denkleme başvurarak a 'nın büyüklüğünü belirleyebiliriz:

$$a = \frac{M_0}{4\pi\rho R_0^3} \quad (31.6)$$

Tablo 32.3 Tablo 32.1'deki Veriler için Modelden Hareketle Belirlenmiş T Kalınlığı

Yarıçap (cm)	T (cm)	Kütle (kg)
14	2,4	6
16	2,7	10
19	3,2	19
21	3,6	20
23	3,9	26
25	4,3	30
30	5,1	50

M_0 kilogram ve R_0 santimetre cinsinden olduğu için ve her ikisi de bir balkabağı tarlasında gayet ölçülebilir birimler oldukları için ρ yoğunluğu da kg/cm^3 olarak ifade edilmelidir. Çoğumuz gibi balkabağı da ağırlıklı olarak sudan oluştuğundan, balkabağının ρ yoğunluğu yerine, suyun bu birimlerdeki yoğunluğunu kullanabiliriz: 10^{-3} kg/cm^3 . Öyleyse $M_0 = 6 \text{ kg}$ ve $R_0 = 14 \text{ cm}$ ve iken

$$a \approx \frac{6}{4\pi} \left(\frac{10}{14}\right)^3 = 0.174 \text{ ve bu yüzden } M = M_0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^3$$

$$\approx \frac{6R^3}{(14)^3} \approx 2 \times 10^{-3} R^3 \text{ ve } T \approx 0.17R$$

Artık başlangıçtaki tablomuza, (32.3)'teki modelden hareketle öngördüğümüz T değerlerine dayalı, yeni bir veri ekleyebilecek durumdayız. İşte okurlara bir alıştırma: Benzer bir analiz için birkaç balkabağı edinin (komşularınızdan da ödünç alabilirsiniz) ve T değerlerine ilişkin tahminlerimiz ne ölçüde doğru çıkıyor, bir bakın!

Son bir nokta: Balkabağının kütlesinin, yarıçapının küpüyle orantılı olduğu açıktır. Burada yaptığımız şey eldeki veriden hareketle bu ilişkideki orantısallığın sabitini (yaklaşık olarak) bulmak ve yarıçapın doğrusal bir fonksiyonu olarak balkabağının kalınlığını saptamaktır. Tabii bu arada, eğlenceli bir matematiksel modelleme projesiyle de uğraşmış olduk!

33. Soru: Alçaktan uçan ördek sürülerinin rotasını saptayabilir misiniz?

Çoğu sabah, tempolu bir şekilde birkaç mil yürümeye gayret ederim ve alışkanlıklarına sadık biri olduğumdan her seferinde aynı rotayı izlerim. Aslına bakarsanız bu, (arabamdaki yol sayacına göre) $2_{1/4}$ millik bir mesafedir ve hiç mola vermezsem yürüyüşümü genellikle yarım saatte tamamlarım –yani ortalama hızım... bunun hesabını size bırakıyorum! (Yine de 93. Soru'ya bakıp yanıtınızı kontrol edin.) Yürüyüşüm sırasında bir su kıyısından da geçtiğim için sıklıkla ördeklerle, Kanada kazları ve martılarınla karşılaşırım; bazen suyun üzerinde ağır ağır gezinen balıkçılara, karabataklara hatta pelikanlara da rastlarım. Bir defasında, yaklaştığımı fark edince küçük bir şaşkınlık yaşayıp korkan iki ördek sudan havalandırılmış ve sanki aynı düz çizgiyi takip ediyormuş gibi arka arkaya uçup gitmişlerdi. Elbette ortada pek de sıra dışı bir şey yoktu ancak bu olay beni, gözümle ördekler arasındaki açının, zamanın bir fonksiyonu olarak nasıl değiştiği üzerine düşünmeye itti. Sabahın yedisini için belki de tuhaf bir düşüncedydi bu ancak şüphesiz hayatta bundan daha tuhaf şeyler de oluyor.

Bu soruyu, *Şekil 33.1*'i göz önünde bulundurarak ele alalım. Ben O konumunda (şu an hareketsiz bir şekilde) duran bir göz-

lemciyim ve D_1 ile D_2' 'de, $t = 0$ zamanda, sırasıyla *arkadaki* ve *ön-deki* iki ördeğin konumu. Burada $t = 0$ zamanı, D_1 'in (“arkadaki” ördeğin) uçarken bana en yakın olduğu mesafeden tanınılıyorum. Zaman ilerledikçe değişen konumlarını D_1' ve D_2' ile gösterelim. Aynı v hızında seyrettiklerini ve bu nedenle aralarındaki l mesafesinin sabit kalıp değişmediğini varsayıyorum. Ördekler yetişkin ve kıyaslanabilir büyüklükte oldukları için bu, akla yatkın bir varsayım gibi görünüyor. Bu küçük modelle, herhangi bir hız farklılığı da rahatlıkla ifade edilebilir. Gözümle ördekler arasındaki $D_1' OD_2'$ açısının $\theta(t)$ ve $D_1' D_2' O$ açısının da $\phi(t)$ olduğunu farz edelim. İşin bundan sonraki kısmı için A, B, C köşe noktalarına sahip bir üçgenin sırasıyla a, b, c uzunluğunda karşı kenarları olduğunu hatırlayarak, sinüs yasasından yararlanmamız gerekiyor.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Bu nedenle, ($t = 0$ iken) ördek D_1 ile aramdaki asgari mesafe d ise sinüs yasasını $D_1' OD_2'$ üçgenine uyguladığımızda,

$$\frac{\sin \theta}{l} = \frac{\sin \phi}{\sqrt{d^2 + v^2 t^2}} \quad (33.1)$$

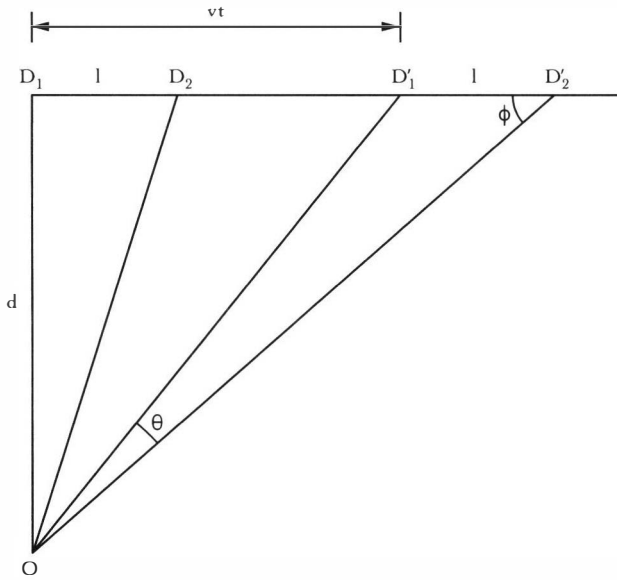
Daha büyük olan $D_1' D_2' O$ üçgeninden hareketle

$$\sin \phi = \frac{d}{\sqrt{d^2 + (1 + vt)^2}}$$

öyleyse (33.1) numaralı denklemden hareketle

$$\sin \theta = \frac{l}{\sqrt{d^2 + v^2 t^2}} \frac{d}{\sqrt{d^2 + (1 + vt)^2}} \quad (33.2)$$

Ördek D_1' 'in $D_1 O$ doğrusu üzerinde bana ulaşması için gereken asgari zamanın $t_0 = d/v$ olduğunu düşünelim. O hâlde sırasıyla $\delta = l/d$ ve $\tau = t/t_0$ olarak tanımladığımız boyutsuz “mesafe” ve “zamanı” da işin içine katabiliriz. Artık (33.2) numaralı denklem, çok daha uygun bir şekilde ifade edilebilir:

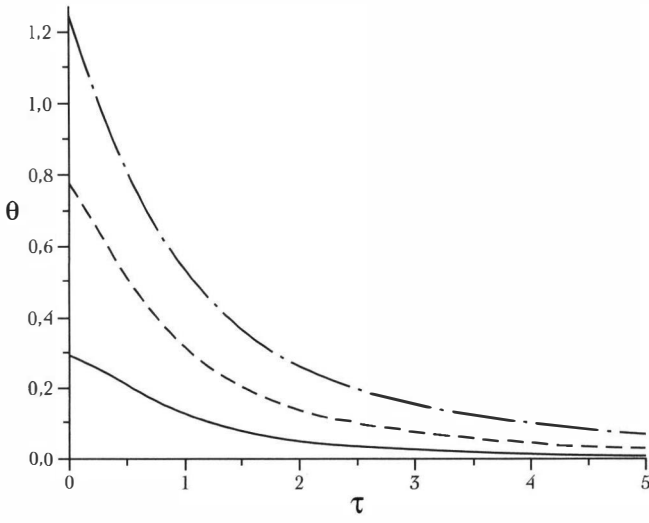


Şekil 33.1. Ördek uçuşunun geometrisi

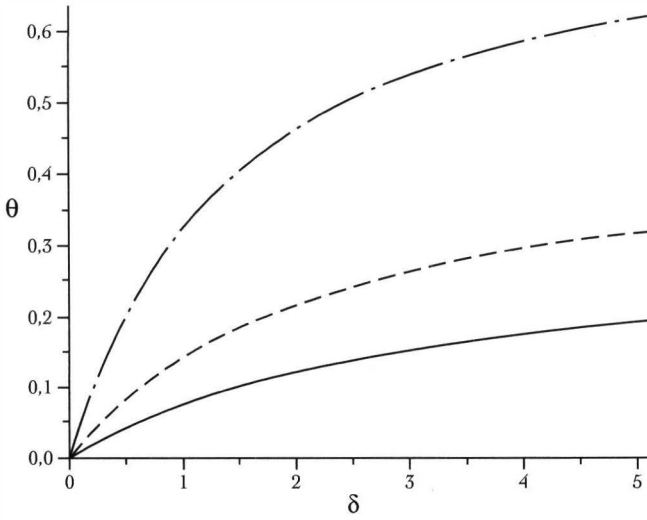
$$\sin \theta = \frac{\delta}{\sqrt{1+\tau^2} \sqrt{1+(\delta+\tau)^2}} \quad (33.3)$$

δ bir sabit olduğu için, t sonsuzluğa doğru meylettikçe denklemin sağ tarafının da tıpkı τ^{-2} gibi sıfıra doğru meylettiğine dikkat edin. Elbette o zamana değin ben epey yaşlanmış, üstelik de acıkmış olacağım ve ördekleri de sonsuzluktaiken seçmek biraz zor olacak... Okurlar, θ 'nın zamana bağlı olarak değişme oranının ne olduğunu sorabilir; ne de olsa asıl sorumuz bu değil miydi? Pek sayılmaz ancak bu, yerinde bir soru ve cevabını okurlara bırakıyorum. Ben, okurların sorusundan farklı olarak, θ 'nın zaman içinde nasıl değişip farklılaştığını görmek istemiştım ve bu da δ 'nın göreceli ayrılışına, açının kendisine ait birkaç değer için çizilebilir (Şekil 33.2). Diğer bir deyişle

$$\theta(\tau) = \arcsin \left(\frac{\delta}{\sqrt{1+\tau^2} \sqrt{1+(\delta+\tau)^2}} \right) \quad (33.4)$$



Şekil 33.2. $\theta(\tau)$ için birkaç δ seçeneği



Şekil 33.3. $\theta(\delta)$ için birkaç τ seçeneği

Alttaki eğri $\delta = 0,3$ için, ortadaki eğri $\delta = 1$ için, üstteki eğri de $\delta = 3$ için çizilmiştir. Açıkça θ açısı, zaman geçtikçe monoton bir biçimde daralmaktadır; bekleneceği gibi başlangıçta bu daralma son derece anidir. Bu hiç şaşırtıcı değildir. Ancak hazır buradayken θ farklı τ zamanlarında –ancak δ 'nın bir fonksiyonu olarak– nasıl bir davranış sergiliyor, bir bakalım. *Şekil 33.3*'teki eğriler serinde, en küçük eğri $\delta = 1$ içindir, bunu $\delta = 2$, onu da $\delta = 3$ izler. Ortaya çıkan şekil yine şaşırtıcı değildir; δ sınırsızca arttıkça eğriler de $\theta = \pi/2$ yatay asimptotuna yaklaşıyor. δ 'nın bu şekilde davranması oldukça akla yatkındır çünkü su kenarına hayli yakın bir konumdaydım ve kuşları istemsizce korkutup kaçırdığım bu deneye birkaç çift ördek de katılmıştı!

Acaba kanatlı dostlarımız, kendilerini korkutup kaçıran adamın eve döndükten sonra ördeklerin uçuş rotalarına dair niceliksel bir açıklama peşine düştüğünü bilseler ne derlerdi, merak ediyorum. Ancak ailemin ne diyeceğini sanırım biliyorum...



Gölgede

34. Soru: Şu ağacın yüksekliği nedir? (Eliptik ışık benekleriyle yapılan bir kestirim)

Şekil 34.1(a) ve (b)'yi kullanarak, benim “ağaçların iğne deliği kamerası” dediğim durumla ilgili Minnaert'in *Light and Colour in the Outdoors* (Açık Havada Işık ve Renk) başlıklı enfes kitabında ileri sürülen bir fikri kanıtlayabiliriz. Buradaki anafikir, ağaçların yaprakları arasında kalan küçük boşlukların “iğne deliği” vazifesi görerek, yerde aşağı yukarı eliptik bir şekle sahip ışık benekleri oluşturmalarıdır. Bir ağacın altında geniş bir gölgelik alan olması, yapraklarının aslında son derece meşgul olduğunu gösterir; ne de olsa, ışıktan yararlanıp fotosentez yapmak ve ağaca besin sağlamak, yaprakların görev tanımı kapsamındadır. Yaprakların oluşturduğu bu “perdeleme etkisi” 80 numaralı soruda ele alınmıştır.

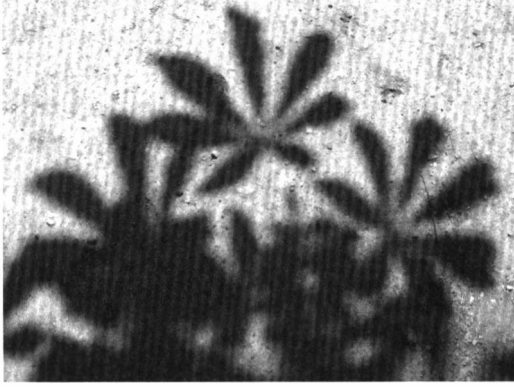
Yer seviyesinden h yüksekliğinde belirli bir iğne deliği bulunduğunu, bu deliğin tam altındaki bir nokta ile iğne deliğinin yarattığı ışık beneğinin merkezi arasındaki yatay mesafeninse d olduğunu düşünelim. Bu ışık beneğinin b büyük eksenine ve k küçük eksenine sahip bir elips olduğunu, küçük eksenin de iğne deliğinin karşısında bir θ küçük açısı yaptığını varsaydığımızda, şekildeki α ve β açıları dolaylı olarak şu şekilde tanımlanacaktır:

$$\sin \alpha \approx \frac{h}{L} \quad \text{ve} \quad \sin \beta \approx \frac{k}{b} \quad (34.1)$$

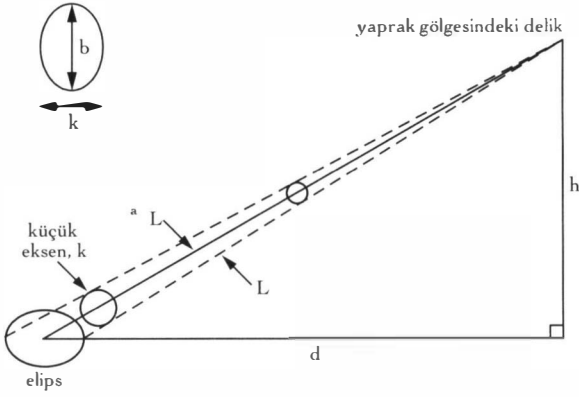
$\alpha \approx \beta$ olduğundan $h \approx Lk/b$ 'dir ve Güneş'in, Dünya'daki açısal çapı yaklaşık $1/108$ radyan olduğu için benzer üçgenlerden yararlanarak $L/k \approx 108$ diyebiliriz; o hâlde

$$h \approx \frac{108k^2}{b} \quad (34.2)$$

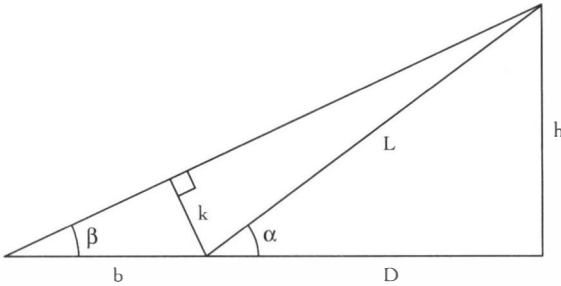
Bir gün işten eve doğru mersin ağaçlarının sıralandığı bir yoldan yürürken, bu tür ışık beneklerini ölçmek için biraz durdum: Tipik b ve k değerleri sırasıyla 3 inç [yaklaşık 7,5 cm] ve 2 inçti [yaklaşık 5 cm] ve h için aşağı yukarı 12 fut [yaklaşık 3,65 m] değerini veriyorlardı; bu da oldukça doğru görünüyordu!



34. Soru: Yarı gölgeleri nedeniyle dağınık ve bulanık görünen yaprak gölgeleri (Tam gölgesel ve yarı gölgesel karaltılarla ilgili ayrıntılar için bkz. 36 – 38. Sorular).



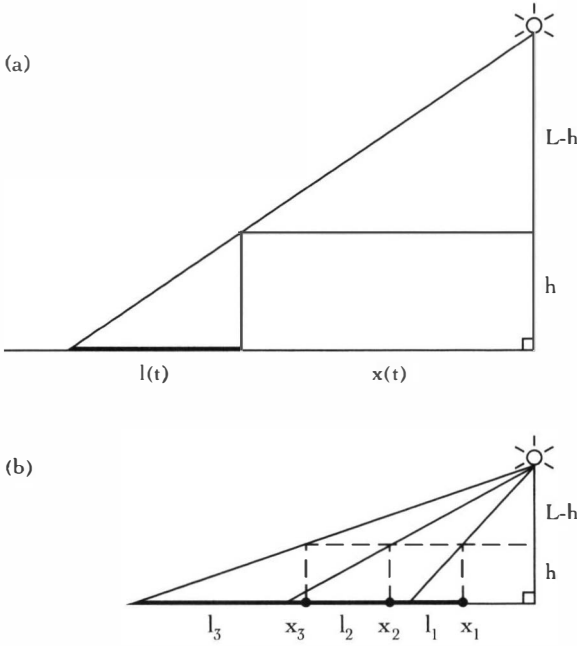
Şekil 34.1 (a). Bir ağacın boyunu, yerdeki ışık beneklerinden hareketle belirleme geometrisi



Şekil 34.1(b). Şekil 34.1(a)'dan alınmış ışık kümesi ayrıntısı

35. Soru: Gölge hızlanır mı?

Karanlıkta eve doğru yürürken, bir sokak lambasından v sabit hızında uzaklaştıkça gölgem giderek hızla uzar gibi görünür. *Peki, bu gerçekten doğru mudur? Şekil 35.1'den hareketle yapacağımız geometri ve/veya analiz hesaplarıyla bu varsayımın geçerli olup olmadığını kanıtlayabiliriz. Daha verimli olduğunu düşündüğüm için önce analiz hesaplarıyla başlayalım.*



Şekil 35.1. Sokak lambası ve gölge probleminin geometrisi

Şemadan yola çıkarsak, benzer üçgenler vasıtasıyla,

$$\frac{l}{h} = \frac{l + x}{L} = \frac{x}{L - h} \quad (35.1)$$

yazabiliriz; burada l gölgenin uzunluğu, h benim boyum, x lambanın tabanına olan uzaklığım ve L lambanın uzunluğudur. Öyleyse,

$$l = \frac{hx}{L - h} \quad (35.2)$$

ve $v = dx / dt$ 'den yararlanırsak gölgenin uzunluğunun artış oranı

$$dl / dt = hv / (L - h) \quad (35.3)$$

olacaktır; bu da bir sabittir.

Bu sonucun geometrik kanıtı, esasen yukarıdaki oran yaklaşımımızın ayrı bir biçimidir. Eğer l_n gölgenin, ben x uzunluğundan n birim yürüdüktan sonraki, yani nx mesafesinden sonraki uzunluğuyorsa, o zaman,

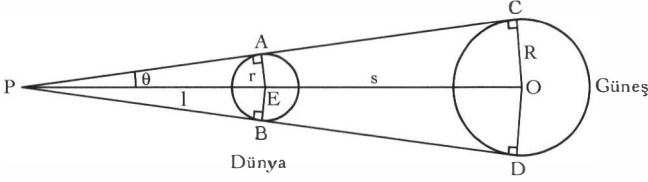
$$l_n - l_{n-1} = x / (L - h) = l_{n-1} - l_{n-2} = \text{sabit}, \quad n \geq 3 \quad (35.4)$$

Aslında

$$l_n - nx / (L - h) = nvt / (L - h) \quad (35.5)$$

dolayısıyla gölgenin uzunluğu, sabit hızda kat edilen mesafeyle ya da geçen zamanla orantılıdır. Bu nedenle gölgenin uzunluğunda gözlemlenen bariz hızlanmanın, fizik veya matematik yardımıyla değil algıya dayanarak açıklanması gerekir.

36. Soru: Dünya'nın gölgesi ne kadar uzunluktadır?

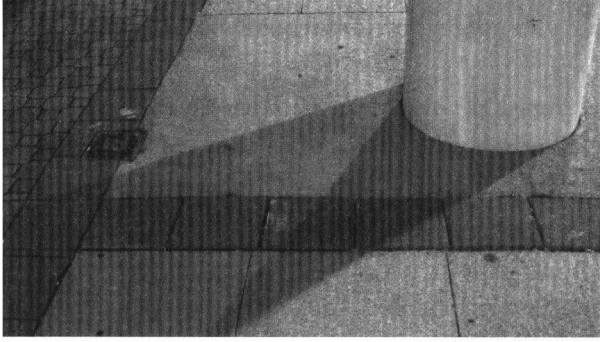


Şekil 36.1. Gölge geometrisi

Sınıf ortamında bu soruya sıklıkla verilen yanıt en azından, “uzundur”. Gelin, biz biraz daha net bir yanıt bulmaya çalışalım. *Şekil 36.1'e göre* PCO ile PAE üçgenleri benzerdir, öyleyse *şekil*deki simgelemden yararlanarak $d = PO$ ve gölgenin uzunluğu $l = rd/R'$ dir. Aslında bu, Dünya'nın merkezinden yapılan bir ölçümdür ancak tahmin edebileceğiniz gibi gezegenimizin yarıçapı, Güneş'in yarıçapına kıyasla öylesine küçüktür ki yaklaştırmamız her şeye rağmen oldukça iyidir. $d = 1 + s$ olduğuna göre

$$l = \frac{rs}{R - r} \approx \frac{rs}{R} \quad (36.1)$$

ve $R \approx 4,3 \times 10^5$ mil, $r \approx 4 \times 10^3$ mil öyleyse $R \gg r$. Dünya ile Güneş arasındaki ortalama uzaklık olan s , $9,3 \times 10^7$ mildir ve sayıları yerlerine yerleştirdiğimizde $l \approx 8,7 \times 10^5$ mil çıkacaktır. Neredeyse bir milyon mil! Hesabın bu denli basit olmasının verdiği keyifle, aynı soruyu bir de Ay için soralım: *Ay'ın gölgesi ne kadar uzunluktadır?* Bu hesaplamadaki sayısal farklılıkların artık bir Ay–Dünya–Güneş sistemiyle ilgileniyor olduğumuzdan kaynaklandığı açıktır; bu nedenle $r \approx 1,08 \times 10^3$ mil, s de aşağı yukarı Dünya için olduğu kadardır; ne de olsa Dünya ile Ay arasındaki ortalama uzaklık ($2,4 \times 10^5$ mil) s 'ye kıyasla daha azdır. Bu kez, $l \approx 2,34 \times 10^5$ mildir yani Dünya ile Ay arasındaki ortalama uzaklıktan biraz daha azdır. Bu durum, üç gök cisimi de aynı doğru üzerinde bulunsa bile (yeniay ve dolunayda *bile* genellikle değildir-



36-38. Sorular - Bir sütunun, bir sokak lambasından gelen ışığı kısmen engellemesi sonucu oluşmuş tam gölgesel (en karanlık) ve yarı gölgesel karaltı.

ler), yeryüzünden tam bir Güneş tutulması izlemenin neden kesin olmadığını açıklar. Bu koşullar altında sadece halkalı Güneş tutulması kesin olarak görülebilir; Ay genellikle çok uzaktadır. Neyse ki Ay ile Dünya arasındaki mesafe değişiklik gösterdiğinden, arada sırada tam tutulmalar meydana gelebiliyor! (Bkz. 92. Soru)

37. Soru: Peki ya Jüpiter'in gölgesi? Neptün'ün gölgesi?

(i) Jüpiter ve (ii) Neptün gezegeninin, Güneş sistemine düşürdüğü (tam gölgesel) karaltıların uzunluğu olan l 'yi, önceki sorudaki geometri konusundan yararlanarak bulun. Bu gezegenlerin (yaklaşık) yarıçaplarını sırasıyla $4,4 \times 10^4$ ve $2,5 \times 10^4$ mil olduğunu varsayabilirsiniz; Güneş'e olan uzaklıklarını yine sırasıyla $4,8 \times 10^8$ ve $2,8 \times 10^9$ mil olarak alabilirsiniz. Soruyu, yukarıda yaptığımız gibi, bilimsel gösterim kullanarak anlamlı iki sayı için doğrularak ifade ediniz.

Cevap: (i) Jüpiter için $l \approx 4,9 \times 10^7$ mil; (ii) Neptün içinse $l \approx 10^8$ mildir. Doğal olarak bunlar, 36 numaralı sorudaki gölgelerden çok daha uzundur.

38. Soru: Ay'ın gölgesi ne kadar genişliktedir?

Elbette, genişliği tam olarak nereden ölçeceğimizi belirtmediğimizde, bu epey anlamsız bir sorudur; tabii ki Dünya yüzeyinden ölçeceğiz. Eğer Ay, Dünya'ya en yakın olduğu mesafedeyse, diğer deyişle $\approx 2,26 \times 10^5$ mil uzaklıktaysa, bir Güneş tutulması sırasında ki tam tutulma bölgesinin genişliğini, Ay'ın gölgesinin (ortalama) uzunluğuna ilişkin bilgimizi kullanarak hesaplayacağız. Gölgenin genişliği üstünde Dünya'nın düz olduğunu varsayabilirsiniz.

Şekil 36.1'de açıkça yaptığımız bir değişiklikle (çünkü r artık tam gölgesel karaltının yarı genişliği ya da Dünya'nın yüzeyindeki tam tutulma bölgesidir) $r = RI/(l+s)$ diyebilir, buradan da gölgenin genişliğini $2r \approx 74$ mil olarak buluruz. Elbette bu üst sınırdır çünkü Ay genellikle bundan çok daha uzaktadır. Bu sonuca Ay'ın, Dünya'ya olan uzaklığıyla kıyaslanan yarıçapını dikkate almaya-rak ulaşılır; bu varsayımda hiç bulunmadan yapılabilecek daha iyi bir yaklaşıtımsa 72 mildir.



Gökyüzünde

**39. Soru: Ufuk çizgisi (ışığın kırılmasını varsaymazsak)
ne kadar uzaktadır?**

Aslında bu soru, 14 numaralı sorunun bir tekrarıdır ve bizi bir sonraki soruya götürecektir.

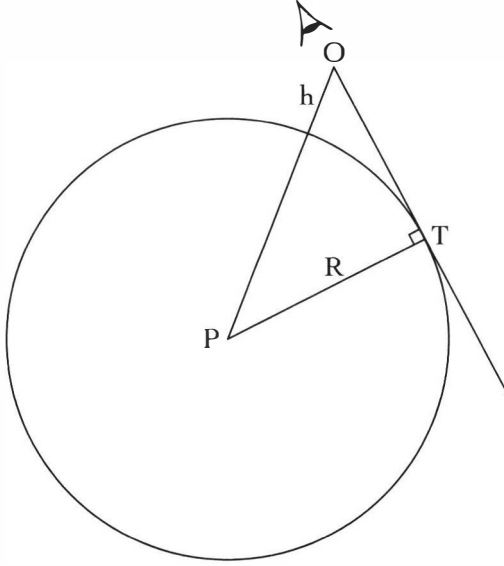
Şekil 39.1'den yola çıkarak, deniz seviyesinden h yükseklikte O konumunda bulunan bir gözlemcinin T 'deki ufuk çizgisine olan mesafesini (x) yaklaşık olarak bulabiliriz. Tabii burada, atmosferik kırılmanın etkisini yok saymış oluyoruz ancak atmosferik kırılma, algıladığımız “mesafeyi” yaklaşık %9 artıracığından (Bkz. French'in makalesi) elde edeceğimiz sonuç, bir alt sınırı temsil ediyor olacak. Sisin sınırlayıcı etkisini hesaba katmadığımızı da belirtelim. Pisagor teoremine göre, söz konusu mesafe $OT = x$ ise,

$$x = [(R + h)^2 - R^2]^{1/2} \approx \sqrt{2Rh} \quad (39.1)$$

olacaktır, çünkü $h \ll R$. Eğer h değerinin (çoğu zaman olduğu gibi) fut cinsinden ölçüldüğünü ve R değerinin mil cinsinden ifade edildiğini varsayarsak (yukarıda olduğundan çok daha kesin bir şekilde burada $R = 3960$ mil diyeceğiz), yararlı bir temel ilke de belirlemiş olacağız. Öyleyse,

$$x \approx \sqrt{2Rh} \approx \sqrt{2 \cdot 3960 \cdot \frac{h}{5280}} = \sqrt{1,5h} \quad \text{mil} \quad (39.2)$$

Böylelikle, uzun boylu bir yetişkin, kıyıdan denize bakarken $h = 6$ fut dediğimizde $x \approx 3$ mil olacaktır. Aynı kişi küçük bir tepenin üzerindeyse ($h = 150$ fut), $x \approx 15$ mil olur. $h \ll R$ yaklaştırımı, Everest'in zirvesindeki bir gözlemci için bile geçerliliğini koruyacağından, $h \approx 29.000$ fut ile $x \approx 200$ mil sonucunu buluruz. Zirveden manzara, şüphesiz harika olmalı (Bkz. 85. Soru) ancak kendi gözlerimle gördüğümü söyleyemem! Burada, özellikle şehir sakinlerinin çok daha kolaylıkla canlandırabilecekleri, yüksek yapılar da örnek olarak verilebilir. Chicago'daki Sears Kulesi'nin zemin-den yüksekliği yaklaşık 1450 futtur; New York'taki Empire State



Şekil 39.1. Ufuk çizgisine uzaklık probleminin geometrisi

binası ise yaklaşık 1250 fut yüksekliğindedir. Soruda varsaydığımız türden (mükemmel görüş koşulları gibi) ideal koşullarda ufuk çizgisi, bu binalardan sırasıyla 47 ve 43 mil uzaklıkta görünür.

Ancak dahası da var. Aynı şekilden yararlanarak Ay'ın her saniye, Dünya'nın ne kadar uzağına düştüğü ya da daha genel olarak, yeterince kısa bir zaman aralığında herhangi bir gezegenin Güneş'in ne kadar uzağına düştüğü de belirlenebilir. Burada Ay'ın, yarıçapı $R \approx 2,4 \times 10^5$ mil olan daire şeklinde bir yörüngesi olduğunu varsayalım (mevcut amacımız için yeterince iyi bir varsayım) ve dönüşünü de 27,3 günde tamamladığını düşünelim. Aslına bakarsanız bunlar akla yatkın ortalama değerlerdir. Öyleyse Ay'ın yörüngesindeki hızı,

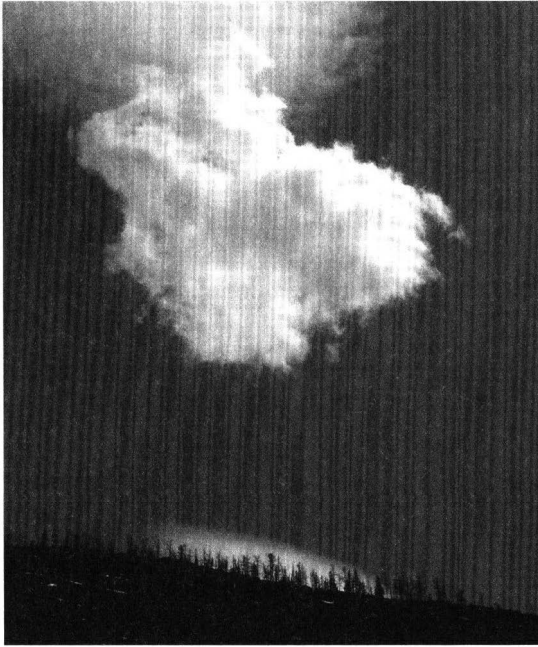
$$v = \frac{2\pi \times 2,4 \times 10^5}{27,3 \times 24 \times 60 \times 60} \approx 0,64 \text{ mi/s} \quad (39.3)$$

olur. Öyleyse Dünya'nın yerçekimi etkisi bu anda mevcut değilse, Ay bu ilk saniye içinde teğetsel olarak $x = 0,64$ millik bir mesafe kat edecektir. Daha önce yaptığımız gibi Pisagor teoremini kullanarak,

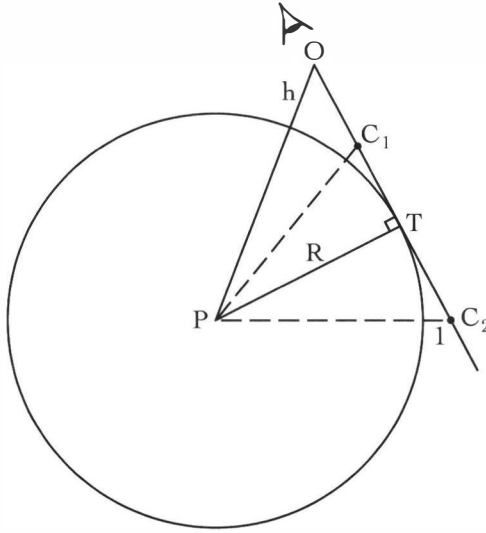
$$h \approx \frac{x^2}{2R} \approx 8 \times 10^{-7} \text{ mi} \approx \frac{1}{20} \text{ th inç} \quad (39.4)$$

40. Soru: Şu bulut bizden ne kadar uzaktadır?

39. Soru'yu yanıtlarken benimsediğimiz yaklaşımdan yararlanarak bu kez biraz daha net bir yanıtın peşine düşelim. 800 fut yüksekliğindeki bir tepenin üzerinde duran biri, (önü açık) ufuk çizgisinde bir bulut görüyor olsun. Eğer bu kişi, derin meteoroloji



40. Soru - Kanada'nın Alberta eyaletindeki, Banff Ulusal Parkı; bir tepenin üzerinde süzülen küçük bir kümebulut (kümülüs). Tepenin hemen altında bir mercersel (lentiküler) bulut da görülmektedir.



Şekil 40.1. Bulutun uzaklığı probleminin geometrisi

bilgisi sayesinde, bulutun asgari yüksekliğinin 1 mil olduğunu biliyorsa, gözlemci ile bulut arasındaki olası en düşük mesafe ne olabilir? (Bkz. Şekil 40.1.)

Keyfî bir h değeri için (oldukça abartılarak) çizilmiş şemadan hareketle ve önceki sorunun yanıtlarını da uygulayarak, $OT \approx \sqrt{1,5h}$ mil çıkarsamasında bulunabiliriz; burada $h = 800$ fut olduğundan $OT \approx \sqrt{1200} \approx 35$ mildir. Bu, (kırılma etkisini yok saydığımızda) ufuk çizgisine olan uzaklıktır. Elbette, bulut bu kadar uzakta olamaz ve gözlemciye olan mesafesi ufuk çizgisine göre (OC_1 mesafesinde) daha yakındır; öyleyse, ufuk çizgisinin ötesinde bir görüş çizgisinde ve en az

$$\begin{aligned} OC_2 &= OT + TC_2 \approx \sqrt{1200} + \sqrt{(R+1)^2 - R^2} \approx \sqrt{1200} + \sqrt{2R} \\ &= \sqrt{1200} + \sqrt{7920} \approx 124 \text{ mil} \end{aligned} \quad (40.1)$$

mesafesinde olmalıdır; burada R Dünya'nın yarıçapıdır. Gerçekte bu, atmosferik sönmlemeye bağlı kontrast yokluğu nedeniyle görünmeyecektir (Bkz. Bohren ve Fraser, 1986).

41. Soru: Dingin bir su birikintisi, yıldız ışıklarını ne derece iyi yansıtır?

Bazen sabahın erken saatlerinde ya da akşamüzeri, yanından yürüyüp geçtiğim su birikintilerinin üzerinde Ay'ın ya da sokak ışıklarının yansımaları fark ederim. Elbette bu yansımalar, çoğu zaman biraz eğri büğrüdür, çünkü yansımalarını gördüğüm Ay ya da sokak lambaları tam tepemde değildir. Yunan mitolojisine göre, Narkissos adında genç bir adam, kibri ve kendini beğenmişliğiyle kızdırdığı tanrıların lanetine uğrar ve berrak bir su birikintisinde gördüğü yansımasına âşık olur. Kendisine öylesine hayran kalmıştır ki suyun başından bir türlü ayrılamaz. Gelin bu beyefendiyle biraz matematiğe eğilelim; tabii, şimdilik biraz daha basit (ya da sıradan) bir durumla ilgileniyoruz: doğrudan su yüzeyine bakmakla.

Elektromanyetik kuramının dayandığı Maxwell denklemlerinden hareketle (ve bunları dalgaların düz bir arayüzdeki yansıma

Tablo 41.1 Zenit Açısının Bir Fonksiyonu Olarak Işığın Yansıma Özelliği

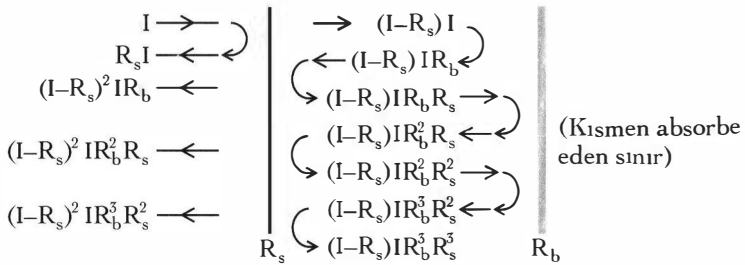
Zenit mesafesi (derece)	% Yansıma (yansıtırlık)
0	2,0
10	2,0
20	2,1
30	2,4
40	2,4
50	3,5
60	5,9
70	13,2
80	34,7
90	100

ve kırılmalarına uygulayarak) ışığın, genellikle dingin bir su birikintisi üzerinde kaydedilen yansıması (ya da *yansıtırlığı*) olan R

$$R(n) = \left(\frac{n - 1}{n + 1} \right)^2 \quad (41.1)$$

şeklinde ifade edilir; burada R , hava/su arayüzündeki (ve diğer yönde giden su/hava arayüzündeki) geliş yenginliğinin fraksiyonu-
dur; n ise suyun kırılma endeksidir ($n = 4/3$ olarak alabiliriz). Eğer ışık, su yüzeyinin altından (örneğin, havuzun zemininden) yansıyor, kırılma endeksi n^{-1} ya da $3/4$ olur; ancak elbette $R(n) = R(n^{-1})$ olduğundan, sıradan bir yansıma durumunda R değişmeyip olduğu gibi kalacaktır. (Diğer durumlardaki R değerleri için *bkz. Tablo 41.1.*)

Sorular: (i) Önce havuzun dibindeki sıfır yansıma durumunu değerlendirelim (siyah renkli, iğrenç bir balçık ve kim bilir havuzun dibinde başka ne varsa ışığın tamamını emerek engelliyor olsun). Bu durumda, başlangıçtaki ışık yenginliğinin ne kadarlık bir fraksiyonu Narkissos'a yansıyacaktır? (ii) Ardından, havuz dibinin %20'lik bir yansımaya sahip olduğunu düşünelim (belki de zeminde bir cam parçası ya da yansıtma özelliğine sahip başka bir malzeme vardır). Şimdi, başlangıçtaki ışık yenginliğinin ne kadarlık bir fraksiyonu Nar-



Şekil 41.1. Su dolu havuzdaki yenginlik yansıması ve iletimi

kissos'a geri yansıyacaktır? Kendi yansımasını görmesi muhtemel midir? Neden evet ve neden hayır? Narkissos'un suda gördüğüyle arasına girecek hiçbir harici yansıma olmadığını varsayabilirsiniz. Suyun yüzeyinden yansıyan ışığın ve dip-ten Narkissos'un gözüne gelen ışığın aynı yeğinlikte olması için dip yansıması ne olmalıdır?

Bu soruları iki aşamada ele alacağız: Önce yaklaştırım yapacağız, sonra da daha kısa ancak kesin bir ifade oluşturacağız. Su yüzeyinin yansıma özelliği R_s havuz dibinin yansıma özelliği R_b olsun. Eğer yansıyan ışığın geliş yeğinliği (Narkissos'un yüzünden) 1 ise yüzeyden yansıyan yeğinlik $R_s I$ olacaktır; iletilen yeğinlik $(1 - R_s)I$, bu son terimin havuz dibinden yansıma orantısı $R_b (1 - R_s)$ 1 ve onun iletim orantısı $R_b (1 - R_s)^2 I$ olacaktır, vs. *Şekil 41.1*'den de anlaşılacağı gibi bu yöntem, süresiz olarak devam ettirilebilir.

Şimdi

$$R_s (4 / 3) = R_s (3 / 4) = 1 / 49 \approx 0,02$$

diğer bir deyişle dip, sıfır yansımaya sahipse ($R_b = 0$) Narkissos'un yüzünün yansıyan yeğinliği sadece %2 civarında olacaktır. İkinci soruyla ilgili olarak, eğer $R_b = 0,2$ ise ilk iletim $R_b (1 - R_s)^2 I \approx 0,19 I$ olacak ya da başlangıçtaki yeğinliğin yaklaşık %19'unu verecektir. Bu da sorunun (i) kısmında geçen %2'lik yansıma yeğinliğine baskın çıkar.

Gelin, bu hesaplamaları suya yansıyan yıldız ışıkları için de yapalım. Daha sonra 87. Soru'da ele alacağımız gibi, yıldızların gözlemlenen parlaklığı, *görünen parlaklık kadri*, m ile ifade edilir; parlaklık azaldıkça ilgili sayısal ölçekteki değerler artış gösterir:

$$m = 6 - 2,512 \log_{10} \left(\frac{L}{L_0} \right) \quad (41.2)$$

Burada L , yıldızın (ya da gezegenin) ışık akısı (ışıklılığı ya da parlaklığı) ve L_0 da (ortalama insan tarafından) çıplak gözle görülebilecek en sönük yıldızın parlaklığıdır. Öyleyse, tepedeki bir yıldızın m parlaklığındaki ışığı, bir su yüzeyine % 2'lik bir yansımaya yeğinliğiyle düşerse, yani $L/L_0 = 0,02$ ise yıldız ışığının görünen parlaklığı da (Bkz. 87. Soru)

$$m_{\text{refl}} = m - 2,512 \log_{10} (0,02) \approx m + 4,3 \quad (41.3)$$

olur. Buna göre 1,0 kadir parlaklığındaki bir yıldızın yansımaları da beşinci kadirde olur. -2 kadir parlaklığındaki Mars ya da Jüpiter gezegeninin, diyelim ki sudan bu şekilde yansımaları durumunda, yansımaları ikinci kadir aralığında olacaktır. Suyun yansıtma özelliği, ufuk çizgisine daha yakın yıldızlar için kayda değer ölçüde daha fazladır; ufuk çizgisinin yaklaşık 40° üzerindeyken $R \approx 0,06$; ufuk çizgisinin yaklaşık 5° üzerindeyken $R \approx 0,6$ olur. Ancak bu değerler, ışığın, gökyüzündeki daha yüksek noktalara kıyasla, atmosfer boyunca daha fazla yol kat ediyor olması nedeniyle verili bir parlaklıktaki yıldız ışığının artan soğurulmasını hesaba katmaz.

Yorum 1: Elbette, sorunun (i) kısmındaki ayrıntılar, eldeki problemi kısmen ele alır ve çoğu durumda muhtemelen yeterli olacaktır. Bununla beraber, problemin bütünü ($R_b \neq 0$ iken) havuz dibindeki kısmen yansıtan sınır nedeniyle, havuz yüzeyinde sonsuz sayıda yansımalar ve iletimlerle ilgilidir. Şemadan hareketle, suyun yüzeyinden Narkissos'a doğru hareket eden ışık yeğinliğinin toplam orantısını hesaplayabiliriz; bu da

$$I_L = R_s I + R_b (1 - R_s)^2 I \left[1 + (R_b R_s) + (R_b R_s)^2 + (R_b R_s)^3 + \dots \right]$$

Suyun içinde Narkissos'tan uzaklaşan yeğinliğin toplam orantısı (başlangıç yeğinliğini hariç tutarak)

$$I_R = (1 - R_s) I \left[1 + (R_b R_s) + (R_b R_s)^2 + (R_b R_s)^3 + \dots \right]$$

Her iki denklemin de sağ tarafı, geometrik dizilerden oluşur,

$$\left[1 + (R_b R_s) + (R_b R_s)^2 + (R_b R_s)^3 + \dots \right] = (1 - R_b R_s)^{-1}$$

ve üstteki eşitliği (i) kısmı için verilen yanıtlara düşürür ($R_b = 0$ iken).

Yorum 2: (41.1) numaralı denklemlerle oynarken fazla maceraya atılmadık. Bu denklemin nereden çıktığını sorgulayıp biraz geriye gidebilir ve Maxwell'in denklemleriyle olan bağlantısına bakabiliriz. Aslında, yansıtırlığı *keyfi* geliş açılarına göre tanımlayan denklem (*Fresnel Denklemi*) şöyledir:

$$R(i, r) = \frac{1}{2} \left[\frac{\tan^2(i - r)}{\tan^2(i + r)} + \frac{\sin^2(i - r)}{\sin^2(i + r)} \right] \quad (41.4)$$

Bu denklemde i , geliş açısını; r de kırılma açısını ifade eder ve elbette Snell yasasından hareketle,

$$\sin i = n \sin r \quad (41.5)$$

Güneş ya da bir yıldız (ya da Narkissos'un yüzü) doğrudan tepedeyken, $i = r = 0$ 'dır ancak çok küçük açıların sınırındayken $i \approx nr$ 'dir; dolayısıyla bunu (41.2) numaralı denkleme yerleştirip formel limiti aldığımızda, (41.1) numaralı denkleme ulaşırız. Çeşitli geliş açıları (ya da doğrudan tepe noktadan aşağı doğru ölçülen zenit açıları) için bir R tablosu oluşturmak amacıyla (41.2) numaralı denklemden yararlanabiliriz.

Bu tablo (su için biraz daha doğru bir tercih olan $n = 1,34$ değerine dayanır), yansımanın, zenit açısına, en azından başlangıçta, oldukça duyarsız kaldığını ve Güneş ya da yıldız ufuk çizgisine yaklaştıkça, neredeyse teğetsel yansıma ya denk gelecek şekilde, açıkça arttığını ortaya koyar. Bu,

yine, dümdüz yüzeyler için geçerli olan ve gerçekte nadiren meydana gelen bir durumdur. Ufuk çizgisine yakın yıldızların 45° 'den küçük açılı yansımalarını görebileceğimiz kadar büyük su birikintileri, nadiren tamamıyla dingindir. Bu da gerçekte, alçaktaki yıldızların görüntülerini fark etmenin çok zor olduğu anlamına gelir.

42. Soru: Şu bulutun ağırlığı ne kadardır?

Peki ya bir bulutun ağırlığı? *The Weather Book (Hava Durumu Kitabı)* adlı kitabın yazarı Jack Williams'a göre meteorolog Margaret LeMone, Colorado Boulder'ın doğusunda kalan düzlüklerin üzerinde süzülen küçük bir kümebulutu (kümüls) "tartmıştı". ABD'nin Apalaşlar Dağlarının batısından itibaren, çoğunlukla yollarıyla dikkat çeken ve kenarları bir mil olan karelere bölünmüş olması da LeMone'un işini kolaylaştırmış olmalıydı. Söz konusu bulut yaklaşık 0,6 mil karelik (ya da aşağı yukarı 1 kilometrekarelik) bir gölgeye sahipti ve geniş olduğu kadar yüksektiydi de. Bu, yaklaşık 1 km^3 ya da 10^9 m^3 'lük bir hacme denk gelir. Genellikle, böyle bir bulutun her bir metre küpünde sıvı hâlde yarım gram su bulunur; buna göre, söz konusu bulutta da toplamda yaklaşık 5×10^8 gram, yani 500 metrik ton ağırlığında su bulunuyordu. Karşılaştırma yapabilmek açısından, yakıt deposu ve tüm koltukları dolu (524 kişilik) bir Boeing 747 – 400 yolcu uçağının azami kalkış ağırlığı, yaklaşık 400 metrik tondur. Bu nedenle, orta boy pofuduk bir bulut bile tüm yükünü almış bir Jumbo'dan daha ağırdır! Elbette, bulut boyutlarında bir uçağın içinde, hareket etmek için biraz daha fazla alan olacaktır! Öyleyse, bu sonucu küçük bir buluta, sözgelimi 50 metrelik bir buluta göre düzenlediğimizde, 60 kg sonucunu buluruz; aynı hesabı hacmi yaklaşık $50 \times 25 \times 2 = 2500 \text{ m}^3$ olan bir olimpik yüzme havuzu için yaptığımızda, havuzumuzun Margaret'in bulutundan yaklaşık beş kat daha ağır (2500 metrik ton) ve doğrusal olarak $(5)^{1/3} \approx 1,7$ kat daha büyük ya da yaklaşık bir mil genişliğinde olduğunu görürüz.

43. Soru: Uzağı sisli havalara oranla yağmurda neden daha iyi görürüz?

Bazı basit tanımlamalarla başlayalım. Küre biçimindeki bir su damlacığının çapının, santimetre cinsinden, L olarak gösterildiğini düşünün. 1 gram suyun (hacmi: 1 cm^3) sis ya da sağanak yağış olarak dağıldığını farz edin. N özdeş yağmur damlacığını meydana getirecek olan bu durum

$$N = \frac{\text{suyun hacmi}}{\text{damlacığın hacmi}} = \frac{1 \text{ cm}^3}{\pi L^3/6 \text{ cm}^3} \approx \frac{2}{L^3} \quad (43.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada N , damlacık ebadı L 'nin bir fonksiyonudur; böylelikle L , santimetre cinsindense, $N(10^{-1}) \approx 2 \times 10^3$; $N(10^{-2}) \approx 2 \times 10^6$ ve $N(10^{-3}) \approx 2 \times 10^9$ 'a ulaşırız. Şimdi, verili bir hacim birimdeki havada (örneğin 1 m^3 'te) bulunan suyun *görelili hacmi*, V olsun. Yukarıdaki suyun hacmi $V = 10^{-6}$ olacaktır, bu da Vergara'nın kitabına göre (Bkz. Kaynakça) yoğun bir sis ya da yağışta için aşağı yukarı doğrudur. Şimdi L 'yi metre cinsinden ifade ettiğimizde

$$N \approx \frac{2V}{L^3} \quad (43.2)$$

olur; görüş hattımızda birbiriyle çakışan hiçbir yağmur damlası olmadığını varsaydığımızda her bir damla

$$A = \pi \left(\frac{L}{2} \right)^2 \approx \frac{3}{4} L^2 \text{ m}^{-2} \quad (43.3)$$

kadarlık bir alanı kaplayıp görüşümüze engel olacaktır. (Damlaların *çakışması durumunda* bu, görüşümüzün engellendiği alanın üst sınırıdır).

Görüşümüzün engellendiği *toplam alan*

$$N \times A \approx \frac{2V}{L^3} \times \frac{3}{4} L^2 \approx 1,5 \frac{V}{L} \text{ m}^{-2} \quad (43.4)$$

olarak ifade edilir. Bu da aynı görelî hacim için *daha küçük damlacıkların daha büyük bir alanı kapladıkları*, diğêr bir deyişle, daha büyük damlalardan oluşan bir buluta kıyasla, kümülatif olarak daha az geçîrgen oldukları anlamına gelir. Şimdi bu durumu sayılarla ete kemiğêe büründürelim: s sayıda ve bir metre küplük, doğrusal bir yığından doğru baktığımızı hayal edin. Bu yığının toplam hacmi $s m^3$, toplam su hacmi de Vs olsun. Bu durumda, görüşümüzün engellendiğı toplam alan, bir üst sınır olarak,

$$A_{\text{toplam}} \approx 1,5 \frac{Vs}{L} \quad (43.5)$$

Şimdi, sadece %10'luk bir görüş olduğunu, diğêr deyişle görüş alanının %90'ının engellenmiş olduğunu farz edelim. Önümüzdeki bu sis tabakasının ya da sağanak yağmurun “uzunluğu” nedir? Pekâlâ,

$$0,9 = 1,5 \frac{Vs}{L} \quad (43.6)$$

ve $V = 10^{-6}$ şeklindeki tipik değêrimizden yararlandığımızda da

$$s = 6 \times 10^5 L \quad (43.7)$$

sonucuna ulaşırız.

Büyük damlalar için ($L \approx 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$), $s \approx 600 \text{ m}$; hafif bir sis için ($L \approx 10^{-2} \text{ mm} = 10^{-5} \text{ m}$), $s \approx 6 \text{ m}$ olur. Sonuçlar benim deneyimimle örtüşüyor, ya sizinkiyle?

44. Soru: Şu “su birikintisi” serabı ne kadar uzaklıktadır?

Işık, düz doğrular hâlinde mi, doğru parçaları hâlinde mi yoksa bükey olarak mı yayılır? Doğrusu bu, ortamdaki *ışık hızı c'nin* çeşitlilik gösterip göstermediğıne bağılı olarak değışir. Genellikle, ışık hızı (ya da ses hızı) bir ortamda yayılırken sabit kalmaz. Bir ortamın *kırılma endeksi*, eğer sabitse, boşluktaki ışık hızının ortamdaki ışık hızına olan oranı şeklinde tanımlanabilir. (Gökkuşacağını sadece “beyaz bir

kuşak” olarak değil, yedi renkli görmemizi sağlayan) n , dalga boyuna biraz bağımlı olsa da su söz konusu olduğunda bu oran genellikle, 41. Soru'da ele alındığı gibi, yaklaşık $4/3$, cam içinse aşağı yukarı $3/2$ 'dir. Kırılma endeksi n , verili hâliyle çeşitlilik gösteriyorsa, sözgelimi y 'nin (basit olması açısından) düz bir Dünya'nın yüzeyinin üzerindeki yükseklik olduğu $n=n(y)$ durumunda, c 'yi $n(y)$ cinsinden yazabilir ve

$$c(y) = \frac{c_0}{n(y)} \quad (44.1)$$

şeklinde ifade edebiliriz: Burada c_0 (ışık için) boşluktaki ışık hızıdır (yaklaşık 186.000 mi/s ya da 300.000 km/s). Serap görülmesine neden olan n 'nin (dolayısıyla c 'nin) bu değişimidir.

Serap, büyüleyici bir doğa olayıdır ve tanımı gereği, sıradan bir gözlemciyi yanıltır. Bunun belki de en iyi örneği, 1906 yılında (Kuzey Kutbu'na varmayı umduğu yolculuğu sırasında) bir zirvede durup kuzeybatı yönünde 120 mil (olduğuna inandığı) uzaklıkta “buz ufkunun üzerinde karla kaplı zirveler” gören Robert E. Peary'nin yazılarında saklıdır. Bu esrarengiz ancak davetkâr “kara” parçası zaman içinde “Crocker Adası” adıyla ün kazanır ve keşfedilip kayıtlara geçirilmesi için 1913 yılında, Donald B. MacMillan önderliğinde bir keşif gezisi düzenlenir. Adanın görünürdeki konumuna yaklaştıklarında şöyle yazar MacMillan: “Buna hiç şüphe yok. Ulu Tanrım, ne müthiş bir yer! Ufuk çizgisinin en az 120 derecelik bir alanı boyunca yayılıp giden tepeler, vadiler, karla kaplı doruklar.” Ancak bu olağanüstü karaya doğru 30 mil ilerledikten sonra hiçbir şey bulamazlar. Bazıları bunu, optik yasalarının zalim bir şakası olarak değerlendirebilir ancak bir optik yanılsama söz konusu değildir; görüntü yeterince gerçektir, sadece bir nesneyle örtüşmez. Bu olguyu tanımlamanın uygun bir yolu vardır: Ekip *serap* görmüştür.

Muhtemelen Peary ve Macmillan, tüm serap türlerinin en etkileyicisi olan *Fata Morgana*'nın bir örneğiyle karşılaşmışlardı. İtalyan-cada Fairy Morgan anlamına gelen bu isim, efsaneye göre gökyüzünde kaleler yapabilen Kral Arthur'un kız kardeşinin adıdır (kimileri, matematikçilerin bu türden şeyler yapmayı adet edindiğini id-

dia eder ancak en azından bizler sonradan bu kalelerin içinde yaşıyoruz). Bu sözcüğün İtalyancayla ilgisi, Peder Angelucci'nin 14 Ağustos 1643'te Messina Geçiti'nden Sicilya Adası'na doğru bakarken sabah saatlerinde yaptığı gözlemleri ve bu esnada karşılaştığı “kaleleri” anlattığı bir mektuptan gelir. Peder Angelucci önünde sütunların, kemerlerin, kulelerin ve pencerelerin bulunduğu, dağ sırasına benzeyen bir şekilde karşılaştığından söz eder. (Kaynaklar ve ayrıntıları Fraser ile Mach'ın kaleme aldığı makalede bulunabilir.)

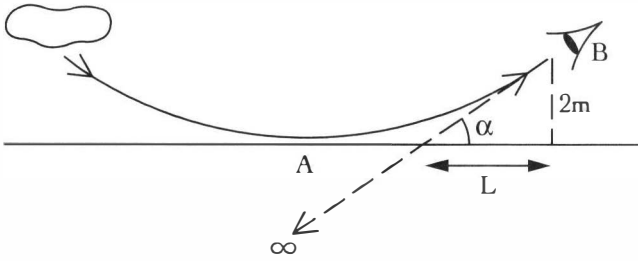
Burada farklı türlerdeki serapları anlatmaya girişmeyeceğiz; şu “*su birikintisi*” serabı ne kadar uzaklıktadır, sorusunu açık ve anlaşılır bir bağlamda cevaplamak bizim için yeterlidir. “Yoldaki su” gibi sıkça karşılaşılan *alt serap* olayını inceleyeceğiz: İmge, kendisine neden olan nesnenin altında belirttiği için (bu durumda nesne, gökyüzü parçasıdır) bu tür seraplara alt serap denir. Zihnimizde canlandırmak için sıcak bir günde yol kenarında yürürken bu sıradan olayla karşılaştığımızı hayal edelim. Yol ve üzerindeki komşu hava tabakası güneş sayesinde ısınmış ve bu tabaka, havanın daha az sıcak olduğu yüksek seviyelerde yoğunluk kaybına uğramıştır. Bir hava sütununun ağırlığı yüksekliğe bağlı olarak yalnızca yavaşça değiştiğinden, hava basıncı bu tabakalar boyunca aşağı-yukarı sabit kalır. (Daha önce (41.5) numaralı denklemde ele aldığımız) Snell yasasını, sürekli değişim gösteren bir ortam kullanımı için

$$n(y) \sin \theta(y) = \text{sabit} = D \quad (44.2)$$

olarak genelleyelim. Burada θ , ışık “ışınının” dikey doğrultuyla (ya da y ile) yaptığı ve sürekli çeşitlilik gösteren açıdır (burada dünyayı düz olarak düşünüyoruz). Bu denklemi, (44.1) numaralı denklemden hareketle

$$\sin \theta(y) = Kc(y) \quad (44.3)$$

şeklinde tekrar yazabiliriz; burada K bir başka sabittir. Denklemlerimizi fizik açısından yorumlamak için mevcut örneğimizde ol-



Şekil 44.1. Alt serap geometrisi

duğu gibi, hava yoğunluğunun yol yüzeyinden h yükseklikte (yüzeze yakın konumda) artış gösterdiğini düşünelim. Bu durumda, kırılma endeksi n de artar ve (44.2)'den hareketle, θ açısı da azalacağından ışın izleği dikleşip yukarıya içbükey olur. (Hava yoğunluğunun yükseklikle beraber azalması durumunda tersi meydana gelecek ve ışın izleği aşağıya bükülecektir.)

Yoğunluk ve sıcaklık arasındaki ilişkiyi (ideal gaz yasası olarak da bilinir), kırılma endeksi cinsinden ifade etmemiz de gerekecek. *Gladstone–Dale yasası* olarak bilinen bu formülasyona göre, bir gazda, $(n - 1)$, ρ ve T^{-1} değişkenlerinin hepsi de birbirleriyle orantılıdır (“oranlıdır” anlamına gelen $\propto$ sembolü kullanılır). Diğer bir deyişle,

$$(n - 1) \propto \rho \propto T^{-1} \quad (44.4)$$

durumunda ρ , gazın herhangi bir noktadaki yoğunluğu, T de buna karşılık gelen mutlak sıcaklıktır (basıncın aşağı yukarı sabit olduğunu hatırlayalım). Buradaki $n - 1$ niceliği, uzayda bir noktadaki kırılma endeksi ile bunun boşluktaki değeri arasındaki farkı ifade eder. Bu örnekte tanımlanan koşulların –sıcaklığın yukarıya doğru azalması ve yoğunluğun yukarıya doğru artması nedeniyle– bir alt serap imgesi yaratacağına ve bu nedenle ışın izleğinin, (44.1) numaralı şekilde gösterildiği gibi, yukarıya içbükey olacağına dikkat edin. Aslına bakarsanız, bir ışının izleği üzerinde bulunan herhangi bir noktadaki içbükeylik durumunun, daima yoğunluğu daha yüksek alanlara doğru seyrettiğini savunan bir “serap teoremi” de vardır.

Biraz daha ayrıntıya inecek olursak, burada söz edilen türden sıcak bir günde hava sıcaklığı, yoldan altı fut ya da yaklaşık iki metre yükseklikte $T_B \approx 30^\circ\text{C}$ (86°F) ve yol yüzeyine yakinken $T_A \approx 50^\circ\text{C}$ (122°F) olabilir. Bu sıcaklıklarda, gözünüzdeki kırılma endeksi $n_B = 1,00026$ değerini alabilir. Yoldaki serap ne kadar uzaklıkta belirir acaba...

Yukarıda söz edildiği gibi $n \sin \theta = D$ durumundan ve Gladstone–Dale yasasından (44.4) yararlanalım ancak bir farkla. Bu kez n ve T deki sürekli değişim için bir yaklaşıtımda bulunacağız ve bunu, her iki değerin de farklı ancak sabit n_A , n_B ile T_A , T_B eğgerilerine sahip olduğu, iki katmanlı bir modelle yapacağız. 44.1 numaralı şeklindeki (oldukça abartılı) çizimden yola çıkarsak, gözlemcinin gözüne yatay olarak gelen ışının açısal sapması α olduğuna göre, Snell yasasından hareketle (44.2) numaralı denklem,

$$n_B \times \sin (\pi / 2 - \alpha) = n_A \times \sin (\pi / 2) \quad (44.5)$$

diğer bir deyişle,

$$\cos \alpha = n_A / n_B \approx 1 - \alpha^2 / 2 \quad (44.6)$$

olur (genellikle $\alpha \ll 1$ olduğundan); burada α , radyan cinsindendir ve $\cos \alpha$ yaklaşıtırimımız Taylor dizisi açılımındaki ilk iki terime dayanır. Buradan ve Gladstone–Dale yasasının

$$(n_A - 1)T^A = (n_B - 1)T_B \quad (44.7)$$

hâlindeki ifadesinden hareketle

$$\alpha^2 \approx 2(1 - n_B^{-1})(1 - T_B/T_A) \quad (44.8)$$

buluruz.

Kelvin birimiyle ifade edilen sıcaklık değerleriyle, $T_A \approx 323$ K, $T_B \approx 303$ K ve n_B verili değer olarak $\alpha \approx 5,7 \times 10^{-3}$ radyan ya da

$\approx 0,32^\circ$ olur. α radyan cinsinden alındığında $\alpha \approx \tan \alpha = 2/L$ olduğundan, yolda serabın belirdiği noktaya olan mesafe $L \approx 2/\alpha \approx 350$ metredir (1150 fut). Nasıl, sonuç size doğru gibi geliyor mu?

Bu soruyu bitirirken, en sık karşılaşılan seraplardan ikisinin nadiren serap olarak algılandıklarını belirtelim: güneşin doğuşu ve batışının. Güneş diskinde göze çarpan biçimsel bozulmaların, ufuk çizgisine yakın havanın kırılma endeksindeki farklılıklardan kaynaklandığı açıktır. Ancak güneşin alt tarafı (veya kenarı) ufuk çizgisine değip görünmeye başladığında, aslında güneş diski hâlâ ufkun altındadır! Tam tersi durumda da –güneşin alt tarafı, ufuk çizgini yeni sıyırmaya başlıyormuş gibi görüldüğünde– aslında güneş, çoktan batmaya başlamış olur. Bu durum, güneş ufka yaklaştıkça tayfında meydana gelen diferansiyel kırılma ve soğurmalar nedeniyle meydana gelen renk değişimlerinden bağımsızdır. Gerçekten de yeşil ışık olarak bilinen oldukça ender meydana gelen doğa olayı kısmen bu etkiler nedeniyle görülür. Atmosfer bilimci Andrew Young, kendisine ait internet sitesinde (Bkz. Kaynakça) “Yeşil ışıklar (yanılsama değil), güneşin doğuşu ve batışı sırasında görülen gerçek olaylardır; Güneşin bazı kısımları aniden renk değiştirdiğinde (günbatımında kırmızı ya da turuncudan yeşil ya da maviye) meydana gelirler. 'Flaş ışığı' deyimi, bu yeşil rengin aniden ve kısa süreliğine, orta yüksekliklerde genellikle sadece birkaç saniyeliğine belirmesi demektir.” Dahası, Young, bu olguyu açıklarken şöyle yazar:

Renklerin ardındaki temel neden atmosferik dağılımdır: Daha kısa dalga boylarında, hava yollu kırılma daha büyük olur. Bu nedenle günbatımında, gurubun kırılma gecikmesi, mavi ve mor renkler için kırmızıya kıyasla birkaç saniye daha uzun sürer. Dolayısıyla, ilk batan ya da kaybolan genellikle güneşin kızıl imgesi (ya da serap görüntüsünün bir kısmı) olur ve bunu da sarı, yeşil, mavi ve mor izler. Öyleyse neden günbatımında en son görülen renk mor değildir? Çünkü bir başka etmen daha söz konusudur: atmosferik sönmüleme. Hem hava molekülleri hem de aerosol parçacıklarının en

güçlü saçılması, en kısa dalga boylarında meydana gelir... Ufuk çizgisinde, havadaki izlek uzunluğu çok fazladır ve en kısa dalga boyları neredeyse tamamen kaybolup gider. Moleküllerin saçılması bu en kısa dalga boylarını görünmez kılmaya yetmez; bu sebeple, havanın açık olması durumunda, en son görülen renk mor olacaktır. Ancak çoğu zaman, havada mor rengin, hatta mavinin bile kaybolmasına neden olmaya yetecek kadar sis bulunur; bu nedenle günbatımında en son, gün doğumunda ise ilk görülen renk yeşildir.

Okurlara, Andrew Young'ın internet sitesini ziyaret etmelerini hararetle tavsiye ederim: Burada yeşil (ve başka renkteki) flaş ışıklarının tarihi, yanlış “açıklamaları” ve bilimsel değerlendirmeleriyle ilgili kapsamlı bilgilerin yanı sıra tahmin edeceğiniz üzere serap gibi konuyla ilgili başka doğa olayları hakkında bağlantılar da sunuluyor.

45. Soru: Gökyüzü neden mavidir? [Bkz. Renkli fotoğraflar kesiti]

Robert Ehrlich'in kaleme aldığı *The Cosmological Milkshake (Kozmolojik Milkshake)* adlı harika kitapta, babasıyla beraber bankta oturan küçük bir kız karikatürü vardır: Altında “Umut vaat eden şehircilik uzmanımız soruyor, 'Babacığım, gökyüzü neden kahverengi?'” yazar. Biz, sorumuza dönecek olursak Dünya'nın atmosferine giren güneş ışığının, havada bulunan ve ışığın dalga boylarına kıyasla küçük olan moleküller sayesinde saçıldığına dikkat edelim. Gelen güneş ışığının elektrik alanı, moleküllerdeki elektronların salınmasına ve tekrar-ışınımına neden olur; “saçılma” derken kastettiğimiz de budur. Saçılma derecesi, *ışığın dalga boyunun dördüncü kuvveti* ile ters orantılıdır; kırmızı ışığa kıyasla daha kısa dalga boyuna sahip olduğu için en fazla saçılan mavi ışık olur. Bunun sonucunda da güneş yönüne doğru baktığımızda –ışığın geçtiği uzun izleğin mavi ışığı tüketip azalttığı daha uzun dalga boyundaki kırmızı ışığın ağır bastığı günbatımı ya da gün doğumu dışında– gökyüzünü mavi görürüz. Bu uyumlu saçılma olayı, adını

ilgili kuramsal açıklamayı geliştirmiş olan Lord Rayleigh'den alır ve sıklıkla Rayleigh saçılımı olarak adlandırılır. Ayrıca günbatımı renkleri, atmosferdeki toz (ya da genel olarak aerosol) miktarına bağlı olarak da belirlenir; büyük volkanik patlamalar sonrasında günbatımı renkleri, tıpkı gün doğumu gibi, gerçekten de büyüleyici bir manzara oluşturabilir ve “mavi ay” olarak bilinen durumla (ender olarak) karşılaşılabilir.

Bu sonuçların nasıl ortaya çıktığını görmek için şu basitleştirilmiş açıklamaya bir bakalım. Biraz teknik ayrıntıları olsa da dayanın! Pek çok değişkene bağlı olduğundan, V hacmindeki bir parçacıktan saçılan ışınım yeğінliği I' 'yi,

$$I = f(V, r, \lambda, n_1, n_2, I_0)$$

olarak tanımlayalım; burada r , saçılgaç ile gözlem noktası arasındaki uzaklık; λ , saçılan ışınımın dalga boyu; n_1 ve n_2 sırasıyla, harici ve dahili ortamın kırılma endeksi ve I_0 ise gelen ışınımın yeğінliğidir. Işık hızının farklı ortamlardaki oranları olan kırılma endeksleri boyutsuzdur ve biraz daha net olmak için cebirsel bir ifade kullanırsak:

$$I \propto V^\alpha r^\beta \lambda^\gamma I_0$$

$[L]^3$ olarak yazılan hacim, uzunluk boyutlarına sahip olduğundan, r ve λ de aynı şekilde uzunluk boyutlarına sahip olduklarından, bu denklemin iki tarafındaki boyutları eşitleyerek son derece basit bir sonuca ulaşırız ve

$$[L]^{3\alpha} [L]^\beta [L]^\gamma = [L]^0$$

boyutları iki tarafta da “iptal” olacaktır. Saçılmış ışınımın genliği, (kompozit) parçacığın hacmiyle orantılı olduğundan ve yeğінlik genliğin karesine eşit olduğundan, $\alpha = 2$ diyebiliriz. Dahası, bir dipol (örneğin, artı ve eksi yükün çakışmadığı bir molekül) tüm yön-

lere doğru enerji ışıyacağından (yayılm gösteren bir ışık küresinin yüzeyini düşünün; (yarıçap) -2 olduğundan birim alan başına düşen enerji azalacaktır) $\beta = -2$ olur. Bu da

$6 - 2 + \gamma = 0$ ya da $\gamma = -4$ anlamına gelir. Böylece, özelve,

$$I_{\text{saçılım}} \propto \lambda^{-4}$$

Bu, saçılımın dördüncü kuvvetine ilişkin Rayleigh'nin ters bağıntı yasasıdır. Rayleigh'nin saçılım kuramına göre, parçacıklar küçükse, $\lesssim 0,1\lambda$ gibi, bu durumda bu parçacıklar nokta dipoller olarak kabul edilebilirler. Bundan daha büyük olmaları hâlinde, parçacığın bir kısmından saçılan ışık, bir başka kısmından saçılan ışık ile faz dışı olabilir; sonuç olarak meydana gelen girişim saçılan ışının yeğinliğini azaltır. Artık ileri yönde daha fazla yeğinlik söz konusudur çünkü küçük saçılım açıları için faz farklılıklarının kümülatif etkisi, küçük saçılım açıları için en küçüktür. Tüm bu özellikleri hesaba katan *Mie kuramı*, Maxwell'in elektromanyetik kuramı denklemlerinden yararlanır ve saçılma yeğinliği, sonsuz bir *kısmi dalga* dizisi olarak ifade edilebilir. Rayleigh saçılımı, bu dizinin *ilk* terimiyle temsil edilir; diğer deyişle Mie kuramı açısından kesinlikle özel (ya da sınırlandırıcı) bir vakadır! Daha büyük parçacıklar için başka terimlerin de analize dahil edilmesi gerekir; gerçekten de (bir sonraki bölümde ele aldığımız, yağmur damlalarından saçılan ışığın meydana getirdiği) gökkuşağı için hesaba katılması gereken terim sayısı, damlanın çember uzunluğunun, dalga boyuna oranı olan *beş bin* seviyesinde!

Şu noktada, dikkatli okurlar merak ediyor olmalı: *Madem mor ışığın dalga boyu, mavi ışığın dalga boyundan daha kısa, o hâlde neden gökyüzü mor değil?* Bunun nedeni hem iç hem de dış birçok etkene dayanır; ilk olarak, güneş ışığı tüm dalga boylarında birörnek yeğinliğe sahip değildir (öyle olsaydı, atmosfere girmeden önce bembeyaz olurdu). Güneş ışığı, en yüksek yeğinliğe, görünür özellikteki tayfın yeşil kısmında sahiptir, dolayısıyla mor ışığın giriş yeğinliği maviye kıyasla önemli ölçüde düşüktür. Ancak

kökeni fizyolojiye dayanan bir sebep daha vardır: İnsan gözünün mor ve tonlarına olan hassasiyeti, mavi ve tonlarına olan hassasiyetinden daha azdır. Tabii, güneş ışığının moleküller ve toz zerrecikleri tarafından saçılması burada ele aldığımızdan çok daha karmaşıktır. Güneş açısının bir fonksiyonu ve ışığın kutuplaşması olarak renk ve yeğînliğin incelikli bağılılıkları vardır ve toz zerrecikleri, ışığın dalga boylarına kıyasla genellikle küçük *olmadığından* Rayleigh saçılımı meydana gelmez. Bir başka deyişle, işler biraz karmaşıktır! Kaynakça'da yer alan Bohren, Hoeppe, Naylor, Petic ve Lynch ile Livingston'a ait kitaplarda, konuyla ilgili hem kolay okunur hem de bilgilendirici nitelikte mükemmel tartışmalar bulunabilir.

46. Soru: Mor ışık, kızıl ışıktan ne kadar fazla saçılır?

[Bkz. Renkli fotoğraflar kesiti]

Aslına bakarsanız bu soru, yukarıda geçen, saçılımın dördüncü kuvvetine ilişkin Rayleigh'nin ortaya koyduğu ters bağıntı yasasını uygulamak için bir fırsat. Tek bilmemiz gereken de bu: Soru, sadece saçılımın etkileriyle ilgili bir kıyaslama (ve dolayısıyla oran) gerektirdiğinden, hesaplamamızda orantısallık sabitlerinden yararlanmayacağız; benim için iyi haber, yoksa notlarımı karıştırmak zorunda kalacaktım! Öğrencilik yıllarımda, görünür tayftaki dalga boyları için sıklıkla başvurulmuş ölçek angstorm (Å) idi; 1 Å 10^{-10} m'dir.

Günümüzde nanometre tercih ediliyor (1 nm = 10^{-9} m). Yapacağımız aritmetik işlemleri basit tutmak adına iki aşırı değer alalım; bunlar $\lambda_r = 700$ nm (7000 Å) dalga boyunda kızıl ışık ile $\lambda_v = 400$ nm dalga boyunda mor ışık olsun. Saçılan mor ışığın, saçılan kızıl ışığa oranını bulmak için ne yapmamız gerektiği ortada:

$$\frac{S_v}{S_r} = \left(\frac{\lambda_v}{\lambda_r} \right)^{-4} = \left(\frac{7}{4} \right)^4 = \frac{2401}{256} \approx 9,4$$

Bunu, bir çeşit “anlaşılabilir” problem olarak da düşünebiliriz. Basit ancak durumu güzel örneklendirecek bir ters problem şöyle olabilir: Eğer dalga boyu 7000 Å, diğer deyişle 700 nm olan kızıl ışık, belirli bir miktarda Rayleigh saçılımına neden oluyorsa, bunun tam üç katı kadar saçılıma neden olacak dalga boyu kaçtır? Aradığımız dalga boyu λ , yine Rayleigh yasasından hareketle aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\frac{S_v}{S_r} = 3 = \left(\frac{\lambda_v}{\lambda_r} \right)^{-4} \Rightarrow \lambda = \lambda_r \left(\frac{S_\lambda}{S_r} \right)^{-1/4} = 700 \times (3)^{-1/4} \text{ nm} \approx 532 \text{ nm}$$

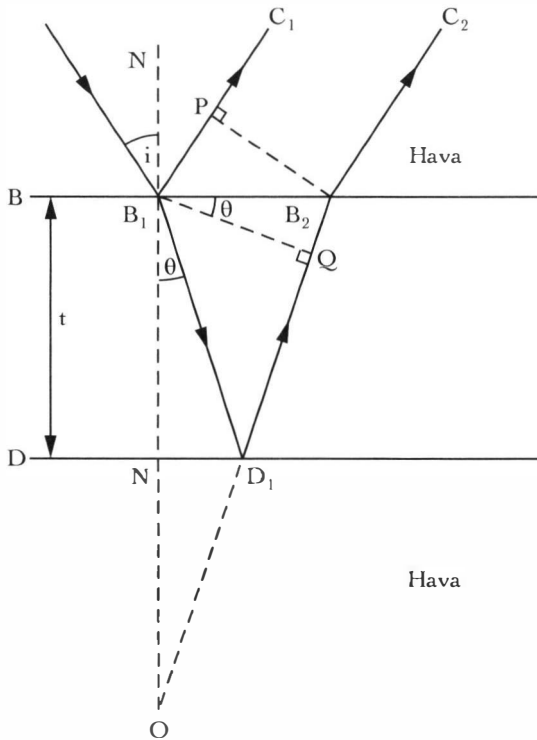
diğer bir deyişle, tayfin yeşil kısmıyla karşı karşıyayız. İlk problem, elektromanyetik tayfin görünür kısmını büyük ölçüde kapsar ve böylelikle, saçılım meselesinin bizi kuşatan dünyada ne kadar önemli olduğunu görmemizi sağlar.

47. Soru: Kelebeğin kanatlarındaki, kuşun tüylerindeki ya da petrol tabakalarındaki renk çeşitliliğinin sebebi nedir? [Bkz. Renkli fotoğraflar kesiti]

Havada giden bir sabun köpüğünün üzerindeki renk cümbüşünü veya kanat çırpın bir sinekkuşunun tüylerinde parlayıp sönen renkleri zevkle seyretmeyen var mıdır? Ya tavus kuşunun kuyruğunu süsleyen o büyüleyici “gözlere” ne demeli? Peki, bir yabanördeğinin boyun tüyleri? Tropik bir kelebeğin kanatları? Petrol birikintileri de yüzeydeki yağlı tabaka zamanla inceldikçe şahane renkler sergiler. Hangisine bakarsak bakalım, tüm bu değişip dönüşen, parlayıp sönen renklerin ardında yatan gerçek, ışığın bir dalga olduğu ve dalgaların da çok ilginç bir etkileşim ve girişim içinde bulunduğuudur. Göreceğimiz gibi bu tür girişimler, yansıtmakta olan katmanların, birbirlerinden bir veya iki dalga boyu uzak olmaları durumunda ortaya çıkar. Girişime bağlı olarak gözlemlenen renkler, katman ya da tabakanın inceliğine karşı son derece duyarlıdır; bir sabun tabakasının sürekli hareket hâlindeki yüzeyinde, incelmekte olan bir petrol tabakasının ya da gazya-

ğı birikintisinin üzerinde, görüş yönümüz değiştikçe birbirine karşıyan renkler görmemizin nedeni işte budur.

Bazı kelebeklerin kanat pullarında da benzer bir etkiyle karşılaşılabilir: Bu pullar, birtakım böceklerin kabuk ve dış iskeletinde de bulunan, kitin adındaki sert maddeden oluşmuştur. Kelebek kanatlarını dikkatlice inceleyecek olursak, bu kitin tabakalarından



Şekil 47.1. Işığın ince bir tabaka üzerindeki girişimi

yansıyan ışığın değişip dönuşen renkler yarattığını görürüz. Orta ve Güney Amerika'ya özgü bir tür olan *mavi morfo kelebeği* öylesine göz alıcı kanatlara sahiptir ki kimi doğa meraklıları yüzlerce adım uzakta olmasına rağmen yanıp söndüğü belli olan mavi ışıklarla karşılaştıklarından bahseder. Morfo kelebeklerinin kanatlarındaki kitin tabakası, bir insanın tek bir saç telinden yaklaşık bin

kat daha incedir; bu da aşağı yukarı 10^{-7} m (veya 100 nm), yani mavi ışığın dalga boyunun dörtte biri eder. Kanatlardaki katmanlar, tıpkı bir çatıdaki kiremitler gibi sıkı bir şekilde istiflenmiş, üst üste sıralanmıştır. Mücevher böceği, kara kanatlı kızböceği ve tavus kuşunun kuyruğunda da yanardöner pırıltılara rastlanır; tıpkı yüzeyinde, ışık girişimine izin veren ince bir demir oksit tabakasının bulunduğu (demir ve sülfür bileşimi) demir pirit gibi. Denizkulağı olarak bilinen yumuşakçanın kabuğunun içinde yer alan dalgalı kalsiyum karbonat ve su katmanları da yanardöner pırıltılar yapar; bu büyük ve düz kabukların içi, sedef kaplıdır.

Şekil 47.1'de, bir örnek t kalınlığındaki bir tabakanın üzerine i geliş açısıyla düşen ışığın, λ olarak ifade edeceğimiz tekrenkli (monokromatik) dalga boyunda olduğunu düşünelim. Işğın bir kısmı yansıyacak, bir kısmı da iletilecektir (ve ardından yansıtılacaktır, bkz. Şekil). Burada θ , kırılma açısıdır. Girişim örüntüsü, B üst yüzeyinden gelen iki paralel ışın, B_1C_1 ve B_2C_2 tarafından belirlenecektir. Havanın kırılma endeksinin bir, tabakanın kırılma endeksininse $n > 1$ olduğunu varsayacağız. Doğrudan yansıma sayesinde (yönünde) ulaşan ışınlar ile $B_1D_1B_2C_2$ izleğı boyunca kırılma ve yansıma ile beliren ışınlar arasındaki optik izlek farkını Γ olarak ifade edeceğiz. Işğk hızı c , dalğa boyu λ ve (sabitlenmiş) frekans ν birbirleriyle $c = \lambda\nu$ denklemiyle bağlantılı olduğundan, sabun tabakasındaki (ya da hangi kırılma ortamı söz konusuysa) dalğa boyu azalır çünkü ortamdaki ışğk hızı azalmıştır. Bu, tabakadaki birim uzunluk başına düşen dalğa boyu sayısının arttığı, insanbiçimci bir şekilde ifade edecek olursak, ışğnın havadaki eşit bir kalınlığa kıyasla— tabaka içinde kat edilecek daha fazla mesafe “gördüğü” anlamına gelir. Bu geçerli mesafe, bir n faktörü ile artar. Öyleyse, problemimizin geometrik ifadesinden yola çıkarak şöyle yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\Gamma &= n(B_1D_1 + D_1B_2) - B_1P \\ &= n(OD_1 + D_1B_2) - B_1P \\ &= n(OQ + QB_2) - B_1P\end{aligned}\tag{47.1}$$

Açıktır ki $QB_2 = B_1B_2 \sin \theta$ ve $B_1P = B_1B_2 \sin i$; bu nedenle

$$n = \frac{\sin i}{\sin \theta} = \frac{B_1P}{QB_2} \quad (47.2)$$

ya da $n \times QB_2 = B_1P$. Bu durumda C_1 ile C_2 arasındaki izlek farkına aşağıdaki gibi ulaşılır:

$$\begin{aligned} \Gamma &= nOQ = n(2NB_1 \cos \theta) \\ &= 2nt \cos \theta \end{aligned} \quad (47.3)$$

Bu, sorumuzun cevabı için ihtiyaç duyduğumuz başlıca ilişkidir ancak devam etmeden önce birkaç noktaya daha değinmemiz gerekiyor. Normal gelişte ($i = 0$), Snell yasası gereği $\theta = 0$ ve $\Gamma = 2nt$ olur; bu da tabakanın optik kalınlığının tam iki katıdır. Ek olarak ışık, hava/ortam sınırında yansıtıldığında (diğer bir deyişle, havadaki ışın daha yoğun ortamın sınırıyla karşılaştığında) π radyan kadar (ya da yarım dalga boyunda) bir faz değişikliği meydana gelir; bu durum bir ortam/hava sınırında meydana gelmez. Bu nedenle, iki ışın arasında

$$\tilde{\Gamma} = 2nt \cos \theta + \frac{\lambda}{2} \quad (47.4)$$

ile gösterilen bir “geçerli” izlek farkı söz konusudur.

Eğer $\tilde{\Gamma} = N\lambda$ ise iki ışın arasında yapıcı girişim gerçekleşecektir; diğer bir deyişle

$$2nt \cos \theta = (N - \frac{1}{2})\lambda \quad (47.5)$$

Burada maksimumlar maksimumlara denk geleceği için $N = 1, 2, 3, \dots$ ve bu da girişim örüntüsünün bir maksimumuna karşılık gelecektir. Benzer şekilde aşağıdaki durumda, bu kez yıkıcı girişimin bir sonucu olarak, örüntünün bir minimumu ortaya çıkacaktır:

$$2nt \cos \theta = N\lambda \quad (47.6)$$

Herhangi bir izlek farkı, faz δ için de bir değişik anlamına geleceğinden, bu durumu C_1 ve C_2 'de ortaya çıkan ışınların sırasıyla, A ve $A_r = A(1 + e^{i\delta})$ genliğine sahip olduklarını düşünerek hesaplayalım. Burada A 'yı genelliği kaybetmeden bir gerçek sayı olarak alabiliriz. Faz farkı:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \tilde{\Gamma} = \frac{2\pi}{\lambda} \left(2nt \cos \theta + \frac{\lambda}{2} \right) \quad (47.7)$$

Bu ışınlarla ilintili olan toplam ortaya çıkma yeğlinliği $I_r = |A_r|^2 = A_r A_r^*$ olacaktır ve buradaki yıldız imi, karmaşık sayı eşleniğine işaret eder, böylece

$$\begin{aligned} I_r &= A^2 (1 + e^{i\delta})(1 + e^{-i\delta}) = A^2(2 + e^{i\delta} + e^{-i\delta}) \\ &= 2A^2 (1 + \cos\delta) = 4A^2 \cos^2 \frac{\delta}{2} = 4A^2 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} nt \cos \theta + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 4A^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} nt \cos \theta \right) \end{aligned} \quad (47.8)$$

Her dalga boyunun karşılığında bir I_r değeri olacağı açıktır. *Son derece* ince tabakalar için yani $t/\lambda \ll 1$ iken, elimizde $I_r \approx 0$ vardır; bu, gördüğümüz “rengin” yansıtılan iki dalganın neredeyse tamamen faz dışı olması nedeniyle ortaya çıktığı anlamına gelir (yansıtılan yeğlilik sıfırdır). Tabakanın kalınlığı artarsa, yapıcı girişim içerisine girecek ilk dalga boyları, daha kısa olanlar olacaktır; bunlar parlak mor renkli saçaklar oluşturacak, onları mavi, yeşil ve diğer renkler izleyecektir. Minnaert, bu renklerin çeşitli durumlarda (şemsiye kumaşı ve pencere camındaki buz gibi!) ele alındığı ilginç bir değerlendirme kaleme almıştır. N tamsayılarıyla ilintili farklı renk girişim *mertebeleri* vardır ve (örneğin) süzülüp akmakta olan bir sabun tabakası üzerinde aynı anda birden çok mer-tebe görmek mümkündür.

Sırada, tüm bunlarla yakından ilgili bir soru var...

48. Soru: Şu buluttaki metalik renklerin sebebi nedir?
[Bkz. Renkli fotoğraflar kesiti]

Güzel bir soru. Bu tür bulut görüntüleri son derece zarif bir güzelliktedir ve çok çabuk dağılıp kaybolur. Konumuz olan doğa olayına *yanardönerlik* ya da *irizasyon* denir. Temelde buradaki mesele, kırınımıdır; yani nesnelerle karşılaşan dalgaların bükülmesi. Kırınım, tüm dalga tiplerinde gözlemlenebilen bir durumdur. Su dalgaları, payanda ya da dalgakıran gibi engellere çarparak kırınıma uğrayabilir. Belki siz de fark etmişsinizdir; bir konser salonu ya da kilisedeyken, konuşmacı ile aramızda bir sütun olmasına rağmen ne söylenildiğini *işitebiliriz*, öyle değil mi? Peki, kulaklarımız işitsel sinyalleri alabiliyorken gözlerimiz neden görsel sinyalleri benzer şekilde alamıyor? (Tabii bu, üstün görüş kabiliyetine sahip Süpermen'i ilgilendirmeyen bir soru.) Bunun sebebi, ses ve ışık dalgalarının sırasıyla $\simeq 1$ m ve $\simeq 10^{-7}$ m olan uzunluğudur. Aslında ışık dalgaları, daha çok parçacık gibi *saçılırken* ses dalgaları, dalga boylarıyla kıyaslanabilir bir nesne etrafında kırınım yoluyla (bükülerek) hareket eder. Bu nedenle, ışık dalgalarının ufak nesneler etrafında *kırınım* yoluyla hareket edebilmesini bekleriz ve ince bulutlar hızlıca geçip giderken Ay'ın etrafında gördüğümüz yumuşak renkli halkaların da (korona ya da taç, bkz. 91. Soru) gösterdiği gibi gerçekten de böyle olur. Kuş tüylerindeki, kelebek kanatlarındaki ya da yağ tabakalarındaki yanardönerliğe ilişkin bir önceki sorumuz, bu soruyla yakından ilgilidir; zira ışığın girişimi, kırınım ile yakından bağlantılıdır. Kısaca, dalgaların girişimi kırınım saçaklarının ortaya çıkmasına neden olur: Aslında fizik açısından bu iki olgu arasında pek az fark vardır ancak etkileşim hâlindeki dalga sayısı küçük olduğunda tercih edilen terim girişim, bu gibi pek çok dalganın etkileşimini tanımlamak için kullanılan terimse kırınımıdır.

Elbette buluttaki damlacıklar, bu soru özelinde, güneş ışığı için engel oluşturur ve dalga boyu ne kadar uzunsa kırınım miktarı da o kadar fazla olur. Kızıl ışığın mor ışıktan daha fazla bükülmesi de

işte bu yüzdendir. Bu diferansiyel kırınım etkisine bağlı olarak, ışığın yapıcı ve yıkıcı girişimi renk kemerlerinin oluşmasına neden olur. Bu etkiyi en belirgin olarak bir bulutun kenarında görmek mümkündür; bulutun bu kısmı incedir ve onu oluşturan damlacıklar da yeni oldukları için boyut bakımından birörnek seyrediyor olabilir. Söz konusu etki, bulutun diğer kısımlarında daha az görülür; zira damla boyutları farklılık gösterir ve damlacıklar nedeniyle çoklu saçılma hâli söz konusudur. Damlaların büyüklüğü birörnek olduğunda, renkler daha saf ve parlak olma eğilimindedir. Damlalar farklı boyutlardaysa renkler de daha soluk ve beyaza çalıyor-muş gibi görünür. Esasen bu doğa olayı, bir koronaya (taç) sebep olan olayla aynıdır; yanardöner bulutlar aslında korona kesitleri oldukları için şimdi biraz da bunların ardında yatan matematiğe bakalım. Daha sonra bu konuyu 91. Soru'da Ay koronası (Ay tacı) özelinde ve biraz daha ayrıntılı bir şekilde ele alacağız.

λ dalga boyunda olan ve R yarıçapındaki bir damlacık tarafından θ açıda kırılıma uğramış ya da bükülmüş ışığın yeğînliği

$$x = \frac{2\pi R}{\lambda} \sin \theta \quad (48.1)$$

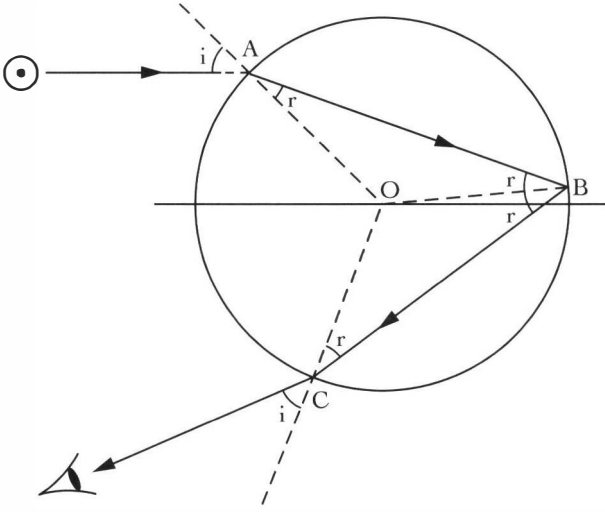
niceliğinin bir fonksiyonudur; diğer bir deyişle damlanın çember uzunluğunun, dalga boyuna olan oranının $\sin \theta$ tarafından modüle edilmiş hâlidir. Aslında bir Bessel fonksiyonu olarak x fonksiyonunun kendisi salınımlıdır (Bkz. 91. Soru ve Ek-1) ancak şu anda bununla ilgilenmiyoruz. $|x|$ sıfırdan yukarı doğru arttıkça, kırınımına uğramış ışığın yeğînliği de sert bir şekilde azami değerinden sıfıra düşecek, bunu da genliği azalış gösteren bir salınım dizisi izleyecektir (Bkz. Şekil 91.1). Bu nedenle, yeterince küçük (ilk sıfırın konumundan daha az olan) $|x|$ değerleri, daha fazla ışık yeğînliği anlamına gelir. Gereksiz matematiksel ayrıntılara girmeksizin (48.1)'deki ifadeden işimize yaracak bazı önemli bilgiler elde edebiliriz. Verili θ açısı ve λ dalga boyu için daha küçük $|x|$ değerlerinin de daha küçük R değerlerine, yani daha küçük bulut damlacıklarına karşılık geldiğine dikkat edin. Verili R ve θ değerleri için

daha büyük dalga boyları (örneğin, kızılımsı ışık) daha küçük $|x|$ değerleri, dolayısıyla da daha yüksek yeğlilik anlamına gelir. Verili R ve λ değerleri için $(0, \pi/2)$ aralığındaki daha küçük θ değerleri de yine daha yüksek yeğlilikler demektir. Elbette bir bulutta ki damlacıkların boyutları çok çeşitli olabilir ve farklı renklerdeki yanardöner kesitlerinin yeğliliği de açı ve damla boyutuna oldukça hassas bir şekilde bağlıdır.

49. Soru: Gökkuşağı nasıl meydana gelir? Birincil yayın altında beliren şu saçaklar nedir? [Bkz. Renkli fotoğraflar kesiti]

OLUŞUM

Gökkuşağı *tam olarak nedir?* Gökkuşağı, bir gözlemcinin (uygun koşullarda) sırtı güneşe dönükken gördüğü, kırılma yoluyla yer değiştirmiş ve yağmur damlalarının yarattığı kırınım etkisiyle dağılmış güneş ışığıdır. Görülmesi muhtemel iki gökkuşağından en parlak ve yere en yakın olanı *birincil* gökkuşağı, sayısız yağmur damlası içinde meydana gelen iki kırılma ve bir de yansıma ile oluşur (Bkz. Şekil 49.1). Görülüp fotoğraflanması mümkün olsa da belirli bir yerde oluşmaz, yalnızca belirli bir yönde olur. Ancak elbette gökkuşağına sebep olan yağmur damlaları, gözlemcinin önündeki belirli bir yerde bulunur. *İkincil* gökkuşağının benzer bir izleği olsa da bu tür bir gökkuşağı, bir dahili yansıma daha içerir. Teorik olarak tek bir yağmur damlasından sınırsız sayıda yüksek mertebe gökkuşağı doğabilir ancak her yansımada ışık kaybı meydana geldiğinden gökkuşağı sayısı iki ile sınırlı kalır. (Üçüncül yay gözlemlerine ilişkin iddialar söz konusu olmakla birlikte böylesi bir yay ancak güneş etrafında oluşacak ve yapısı gereği soluk olması bir yana, gözlemlenebilmesi son derece güç olacaktır.) Her bir damla kendi birincil gökkuşağını yaparken, gözlemcinin gördüğü şey sayısız yağmur damlasından kaynaklanan kümülatif görüntülerdir; bunların bazıları, yayın kırmızı kısmına, bazıları da yayın turuncu, sarı, yeşil ve diğer renkteki kısımlarına katkıda bulunur. Her bir damla



Şekil 49.1. Birincil yay için küre biçimindeki bir yağmur damlasının içindeki ışık izleği

düşüyor olsa da belirli bir konumdan ayrıldığında yerini alacak çok sayıda başka damla olduğu için var olduğu süre boyunca gökkuşağı, her bir gözlemciye neredeyse sürekli devam eden damlalar tarafından üretilen bir renk sürekliliği olarak görünür.

Gelin önce küre biçimindeki bir yağmur damlasına giren ışık ışınının basit geometrisini inceleyelim. *Şekil 49.1*'e bakarak, iki kırılma ve bir yansımadan sonra gökkuşağına katkıda bulunduğunu gördüğümüz ışık ışınının, sırasıyla (i) geliş açısı ve (r) kırılma açısı cinsinden, $D(i)$ radyanlık bir toplam sapmaya uğradığına dikkat edin:

$$D(i) = \pi + 2i - 4r \quad (49.1)$$

Kırılma açısı, geliş açısının bir fonksiyonu olup bu ilişkiyi Snell yasasıyla

$$\sin i = n \sin r \quad (49.2)$$

olarak ifade edebiliriz; burada n görelî kırılma endeksidir (bu örnekte suyun).

Bu görelî endeks şöyle tanımlanır:

$$n = \frac{\text{I ortamında (havada) ışığın hızı}}{\text{II ortamında (suda) ışığın hızı}} > 1 \quad (49.3)$$

Işğın havadaki hızı neredeyse boşluktaki hızıyla aynı olduğundan, işleri daha basitleştirmek için n 'yi kırılma endeksi olarak alacağız; bu endeksin su için genel değeri $n \approx 4/3$ 'tür ancak bu elbette, az da olsa dalga boyuna da bağılıdır. (Bu dağılma olgusudur; o olmasaydı sadece parlak “beyaz kuşak”larımız olurdu!)

Şimdi, $D(i)$ 'nin nasıl davrandığına bakalım. $D(0) = \pi$ olduğuna dikkat edin. Önce biraz türevleme yapmamız gerekiyor. Öyleyse,

$$\frac{dD}{di} = 2 - 4 \frac{dr}{di} \quad (49.4)$$

ve Snell yasasını da türevlediğimizde

$$\cos i = n \cos r \quad \frac{dr}{di} \quad (495)$$

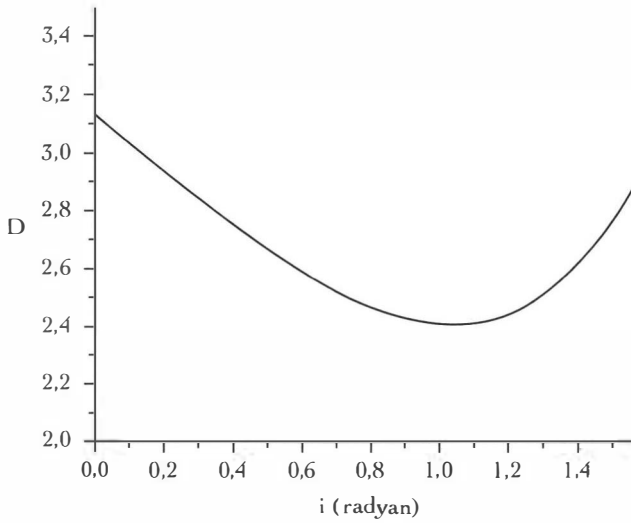
buluruz; buradan hareketle

$$\frac{dD}{di} = 2 - \frac{4 \cos i}{n \cos r} \quad (49.6)$$

$i \in [0, \pi/2]$ tanım kümesinde hiç kritik sayı var mıdır? Eğer varsa bu, i 'nin bu kritik i değeri için (sözelimi i_c 'de) D 'nin durağan olduğu anlamına gelir. Fizik açısından bu, $D(i_c)$ yakınlarındaki açısal bölgede bir sapmaya uğramış ışınların yoğunlaşması demektir. Bir bakalım: Yeni bir düzenlemeye gitmemiz ve Snell yasasından tekrar yararlanmamız durumunda $D'(i) = 0$

$$\frac{1}{4} = \frac{\cos^2 i}{n^2 - 1 + \cos^2 i} \quad (49.7)$$

anlamına gelir. Niceliklerin karesini alarak istenmeyen sonuçlar elde etmeyeceğimizden, bir uçdeğerde şuraya varırız:



Şekil 49.2 (49.9) numaralı denklem ile tanımlanan $D(i)$ sapma açısı

$$\cos i = \left(\frac{n^2 - 1}{3} \right)^{1/2} \equiv \cos i_c \quad (49.8)$$

$D''(i_c) > 0$ durumu gösterilebilir olduğundan, $D(i_c)$ defleksiyo-
nu bir minimumdur. (*Gösterilebilir olduğundan* ifadesi, kuşaklar
boyunca ben dahil pek çok öğrenciyi rahatsız edip kızdırsa da şu
nuktada vereceğim tek yanıt eşit şekilde rahatsız edici: Bu alıştır-
ma, ilgilenen okurlar için burada.)

$D(i)$ 'nin tamamen i 'ye bağımlı bir şekilde

$$D(i) = \pi + 2i - 4 \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right) \quad (49.9)$$

olarak yazılabileceğine dikkat edin; bu durum suyun kırılma en-
deksinin $n = 4/3$ olarak alındığı (ve eksenlerin, radyan cinsinden
yazıldığı) *Şekil 49.2*'de gösterilmiştir.

“Genel” bir tekrenkli (monokromatik) gökkuşağı (yukarıda sö-
zü edilen beyaz kuşak) için $n = 4/3$ seçimi

$$i_c = \arccos \sqrt{\frac{7}{27}} \approx 1,04 \text{ radyan} \approx 59,4^\circ$$

sonucunu verir ve $D(i_c) \approx 2,41$ radyan $\approx 138^\circ$ 'dir. Bu açının bütünler derecesi olan $180^\circ - D(i_c) \approx 42^\circ$, gözlemcinin gözündeki tepe nokta (apeks) ile oluşan gökkuşağı "konisinin" yarım açısıdır. Eksen, gözü anti solar noktaya bağlayan doğru boyunca uzanır.

Artık biraz da bir gökkuşağındaki *renk dağılmasına* değinelim. (Anlayabildiğim kadarıyla) herkesi memnun edecek şekilde standart hâle getirilmemişse de elektromanyetik tayfın görünür kısmı, kırmızı ucundan (700 – 647 nm) mor ucuna (424 – 400 nm) değin uzanır; bir *nanometre* (nm) 10^{-9} m'dir. $\lambda \approx 656$ nm dalga boyundaki kırmızı ışık için kırılma endeksi $n \approx 1,3318$ iken, $\lambda \approx 405$ nm dalga boyundaki mor ışık için kırılma endeksi $n \approx 1,3435$ 'tir; küçük ama önemli bir fark! Tek yapmamız gereken görünür tayfın bu iki ucu ve aradaki fark için (i_c) ve $D(i_c)$ 'yi hesaplamak. İşte karşınızdaki birincil gökkuşağının açısal genişliği! Hatta kırmızı ve mor uçlar için $D(i_c) \approx 137,75^\circ$ ve $139,42^\circ$ olduğundan açısal genişlik $\Delta D \approx 1,67^\circ \approx 1,7^\circ$ 'dir ya da aşağı yukarı üç dolunay açısal genişliğidir.

ŞU SAÇAKLAR DANE? SÜPERNÜMERER (ARTI) YAYLAR

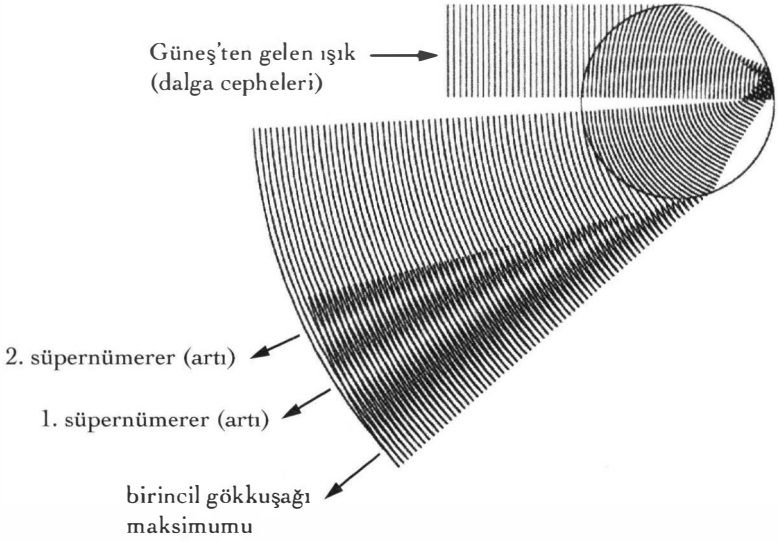
Bu gökkuşağı modelinin matematiksel karmaşıklık düzeyiyle ilgili önemli bir noktaya değinmemiz gerekiyor. Şimdiye değin *geometrik optik* adıyla bilinen, ışığın dalga doğasından bağımsız olarak, nesnelerle ışın yoluyla girdiği etkileşimi ele alan optik dalından yararlandık. Bu hâliyle geometrik optik, hem gökkuşağı renklerinin açısal dağılımını hem de gözlemci ve güneşe göre görünür konumunu tahmin etmemizi sağlasa da *süpernümerer (artı) yayların* varlığını öngöremez ya da bunları açıklayamaz. Bunlar, zaman zaman birincil yayın mor kısmının altında, pastel renklere sahip bir dizi saçak olarak görünürler. Teknik olarak, ikincil yayın üzerinde de ortaya çıkabilirler ancak bu, nadiren gerçekleşir. Işığın parçacık kuramı olarak bilinen teorinin savunucularından olan Newton, bu süpernümerer (kelimenin tam anlamıyla *fazladan*) yayların varlığına bir açıklama getirememiştir.

Bu yaylar, ışık dalgalarının girişimi sonucu meydana gelir. Dahası, gökkuşağı ışınının (asgari sapma ışınının) iki yanından bi-

rindeki iki ışın, damlanın içine girip, paralel izlekler takip ederek damladan çıkabilirler; bu, uygun bir şekilde geliş ışınları olan ışınlar için geçerlidir. Girişim dalgaları (ışınlara dikey konumda-ki) dalga cephelerini dikkate alarak, faz içinde olacaktır (diğer de-yişle tepe ve çukurlar, tepe ve çukurlarla hizalanacaktır). Ancak bunların, damlanın içinde takip ettiği izlekler, farklı uzunluklara sahiptir. Bu izlek farkının dalga boylarına ait bir tamsayı mı yok-sa yarı dalga boylarına ait tek tamsayı mı olduğuna bağlı olarak, dalgalar da birbirini güçlendirecek (yapıcı girişim) ya da birbiri-ni iptal edecektir (yıkıcı girişim). Elbette, izlek yolunun yukarıda sözü edilen ölçütlere uymaması durumunda kısmen yapıcı/yıkıcı girişim meydana gelebilir. Dalgaların birbirini güçlendirdiği du-rumda, ışık yeğirliği de artacak; tam tersi durumda, yani dalga-ların birbirini yok etmesi hâlinde yeğirlik azalacaktır. Bu ışık de-metleri, “gökkuşağı” ışınına kıyasla damladan, eksene daha küçük bir açıyla çıkacağı için bu yöne doğru bakmakta olan bir gözlemci de birincil yayın hemen içinde beliren bir dizi açık ve koyu renk-li kuşak görecektir. Onlar da en az birincil yay kadar “gökkuşağı-nın” bir parçasıdır.

Aslında yukarıdaki açıklama bile kesin olarak doğru sayılmaz; açıklamanın sınırlılığı, girişimi *iki dalga üzerinden* düşünmekten ileri gelir. Süpernümerer (artı) yayların (ve birincil yayların), *aynı* dalga girişiminin farklı kısımlarından kaynaklandığını, bunun so-nucunda da *Şekil 49.3*'teki gibi bir Moire desenine neden olduğ-u-nu düşünmek daha doğru olur.

Damla büyüklüğüyle ilgili nedenlerden ötürü, süpernümerer (artı) yaylar nadiren, tamamen görünür kemerin etrafına kadar uzanır. Bu kuşakların arasındaki açısal boşluk, onları meydana getiren damlacıkların boyutuna bağlıdır. Damlalar irileştikçe, tek tek kemerlerin genişliği ve aralarındaki boşluk da daralır. Eğer farklı boyutta damlalar varsa bu süpernümerer (artı) kemerler üst üste binme eğilimi gösterir ve birörnek boyuttaki damlacıklardan kaynaklanacak girişim kuşaklarına bulaşır. Bu soluk mavi, pem-be ya da yeşil kuşakların en fazla gökkuşağının tepesinin yakın-



Şekil 49.3. Dalga cephesi kırılımı ve süpernümerer (artı) yaylar

larında görünmesinin sebebi budur: Yayın bu kısmına, daha küçük ebattaki damlalar katkıda bulunur ve aralarındaki boyut farklılıkları fazla çeşitlilik göstermez. Ufuk çizgisine daha yakın noktada, yaya katkıda bulunan çok çeşitli boyutta damlacıklar vardır ancak bu da girişim kuşaklarının bulanık bir görüntü vermesi anlamına gelir.

Geometrik optik, optik alanının önemli ve yararlı bir alanı olsa da “aydınlık ve karanlık” kısımlarla ilgili savunduğu yetersiz bir diğer görüş, gökkuşağının sonsuz yeğînliğe sahip olduğudur. Elbette bu yetersizlik, modelin bu gibi sınırlardaki yetersizliğinden kaynaklanır; aksi hâlde, gökkuşağına bakan birinin görme yeteneğini kaybetmesi gerekirdi! Bu konuyla – geometrik optiğin ortaya koyduğu tekillik meselesiyle– ilgili özel bir tartışma da mevcut ancak bunu, bölüm sonundaki 61. Soru'ya dek bir kenara bırakalım.

Son olarak, Minnaert'in kitabından uyarlanmış *Tablo 49.1*'de gökkuşağının renkleri ve onları meydana getiren yağmur damlacığının boyutuyla ilgili niceliksel tanımlamalar yer alıyor.

Tablo 49.1 Damla Boyutuna Göre Gökkuşağı Renklerinin Görünümü

Damlanın çevresi	Gökkuşağındaki renklerin tanımı (mm)
1-2	Son derece parlak mor ve canlı yeşil; kuşakta saf kırmızı da bulunur ancak pek az maviye rastlanır. Çok sayıda süpernümerer (artı) yayla karşılaşılır (bunlar beş ya da daha fazla bile olabilir); mor-pembe renklerle yeşil birini izler ve birincil yaya karışırlar.
0,5	Kırmızı renk, dikkate değer ölçüde zayıf görünür ve daha az sayıda süpernümerer (artı) gökkuşağına rastlanır. Bunlarda mor-pembe renkleri ve yeşil saçaklar yine birbirini izler.
0,2-0,3	Görünen kırmızı renk yoktur; yay gelişkin ve geniştir. Süpernümerer (artı) yaylar sarıya çalar. Yaylar arasında bir boşluk söz konusuysa bu, damlaların çevresinin 0,2 mm'den fazla olmadığı anlamına gelir. Birincil yay ile birincil süpernümerer (artı) yay arasında, gözle görülür bir boşluk varsa, damlaların çevresi 0,2 mm'den azdır.
0,08-0,10	Yay artık daha geniş ve soluktur, sadece mor renk canlı görünür. İlk süpernümerer (artı) yay ile birincil yay arasında oldukça geniş bir boşluk bulunur ve beyaz tonlar da rahatlıkla fark edilebilir durumdadır.
0,06	Birincil yay, belirgin bir beyaz şerit içerir.
<0,05	Yay artık biraz daha renksiz bir bulut kuşağı ya da sis kuşağı gibidir.

50. Soru: Peki, ikincil gökkuşağı nedir?
[Bkz. Renkli fotoğraflar kesiti]

Bu kez, fazladan bir yansımamız daha olduğu için *Şekil 50.1*'deki geometrinin vereceği toplam ışın sapması şöyle olur:

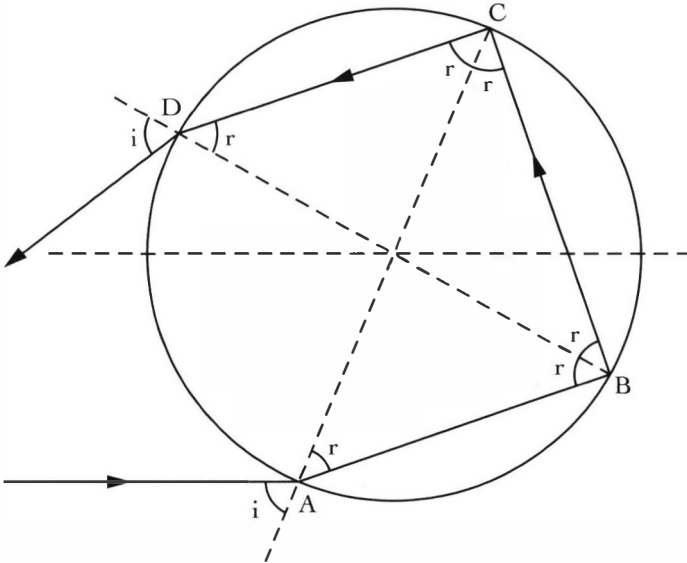
$$D(i) = 2\pi + 2i - 6r = 2i - 6r \text{ (modulo } 2\pi) = 2i - 6 \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right) \quad (50.1)$$

Önceki gibi devam ettiğimizde,

$$\frac{dD}{di} = 2 - 6 \frac{dr}{di} = 2 - 6 \frac{\cos i}{n \cos r} \quad (50.2)$$

olduğunu buluruz, böylece kritik sayılar karşımıza

$$\frac{1}{9} = \frac{\cos^2 i}{n^2 (1 - \sin^2 r)} = \frac{\cos^2 i}{n^2 - \sin^2 i} \quad (50.3)$$



Şekil 50.1 İkincil yay için küre biçimindeki bir yağmur damlasının içindeki ışın izleği

durumunda ya da aşağıdaki durumda çıkar:

$$\cos i = \left(\frac{n^2 - 1}{8} \right)^{1/2} \equiv \cos i_c \quad (50.4)$$

4/3 olarak belirlediğimiz genel n değerimiz için

$$\cos i_c = \sqrt{\frac{7}{27}} \approx 0,3118, \text{ yani } i_c \approx 71,8^\circ$$

böylelikle

$$D(i_c) = 2i_c - 6 \arcsin(0,7125) = 143,6^\circ - 276,6^\circ = -129^\circ \quad (50.5)$$

Işın geometrisi, merkezi eksen civarında silindirik simetri özelliği gösterdiğinden, yukandaki eksi işaretinin hiçbir önemi yoktur. Ancak aynı nedenle $D(i_c)$ zaman zaman buradaki ifadenin negatif olarak tanımlanır. Tıpkı birincil yay için $D(i_c)$ bütünlerinin yaklaşık 42° olması gibi, ikincil yay için söz konusu olan bütünler açısı da 51° 'dir; bu nedenle ikincil yay birincil yaya kıyasla gökyüzünde aşağı yukarı 9° daha yüksektedir.

51. Soru: Yüksek mertebe gökkuşağı diye bir şey var mıdır?

Daha önce yaptığımız gibi devam edersek, k dahili yansımaları için

$$D_k(i) = k\pi + 2i - 2(k+1) \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right) \quad (51.1)$$

olduğunu rahatlıkla gösterebiliriz ve aşağıda açıklanan ilginç bir trigonometrik hesaplamadan sonra $k=1$ için

$$D_1(i_c) = 2 \arccos \left[\frac{1}{n^2} \left(\frac{4 - n^2}{3} \right)^{3/2} \right] \quad (51.2)$$

sonucuna varabiliriz; böylelikle, asgari sapmayı ("gökkuşağı açısını") da salt kırılma endeksine dayanarak ifade etmiş oluruz. Bu, ilk olarak Huyghens tarafından 1652 yılında ortaya konmuştur. Teorik olarak bu hesaplama, yüksek mertebe gökkuşağı için

de yapılabilir ancak bildiğim kadarıyla, bu daha önce yapılmış bir şey değil (Bkz. Adam, 2008); ayrıca ışın cebirsel kısmı oldukça karmaşıktır (istediğiniz takdirde ayrıntıları sağlanır). Yukarıdaki denkleme $n = 4/3$ 'ü yerleştirdiğimizde,

$$D_1(i_c) = 2 \arccos \left[\frac{9}{16} \left(\frac{20}{27} \right)^{3/2} \right] = 2 \arccos (0,3586) \approx 138^\circ \quad (51.3)$$

Küre biçimli yağmur damlalarındaki gökkuşağı oluşumlarına ilişkin, matematiksel hesap temelli ışın kuramına dayalı yaklaşım, Newton'ın zamanından beri bilinmektedir (hatta Newton bu yaklaşım üzerinde çok çalışmış olsa da altında yatan ışın kuramına asıl büyük katkısı Descartes yapmıştır). *Şekil 49.1* ve *50.1*'de $k=1$ ve 2 için ışın izleklerini görüyoruz. Daha önce de belirttiğimiz gibi, bir gökkuşağının oluşmasının sebebi (ve tayfsal dağılımın yokluğunda bile bir “beyaz kuşakla” karşılaşacak olmamızın nedeni) $D_k(i)$ 'de, $D'_k(i)$ 'nin kaybolmasıyla tanımlanan $i_{(c)}$ gelişinin kritik açısında, bir uçdeğer – daha açık olmak gerekirse, bir minimum– olmasıdır. Yine standart bir işlem yaparak şunu ortaya koyabiliriz:

$$i_c = \arccos \left[\frac{n^2 - 1}{k(k + 2)} \right]^{1/2} \quad (51.4)$$

Belirli sayıda k yansıması için n 'nin alabileceği değerlerin de bir sınırı olduğu açıktır ($1 \leq n \leq k + 1$) ancak su için $n \approx 4/3$ olmasıyla nedeniyle bu, uygulamada üzerinde durulacak bir mesele değildir (en azından dünya üzerinde). Elbette n , optik tayftaki dalga boyuna az da olsa bağımlıdır ve gökkuşağına renklerini (hatta genişliğini) veren budur; yine de daha önce gördüğümüz gibi bu, gökyüzündeki “kostik” kavisli görüntü için zorunlu bir koşul değildir... ($k = 1$ ve $n = 4/3$ için (51.4) numaralı denklemin $i_{(c)} \approx 59^\circ$ sonucunu verdiğini görmüştük.) Burada dikkat etmemiz gereken bir diğer nokta, geometrik optik kuramının bir başka önemli sonucudur: Bu kuram, $D(i_c)$ gökkuşağı açısında ışık yeğinliğinin sonsuz olduğunu öngörür! (Ayrıntılar için Bkz. 61. Soru) Bu üstünkörü tahminin ötesine geçebilmek için çok daha karmaşık bir kurama – ışın-

ğın dalga kuramına – ihtiyaç olduğu açıktır. Bu kitabın ilgi alanının dışında olmakla birlikte ilgili eserler Kaynakça'da bulunabilir.

BİR ÜÇLÜ GÖKKUŞAĞI MI?

Sık sık, “üçlü gökkuşağı” gördüğünü söyleyen ve ardından, belki de yüzümdeki şüpheli ifadenin etkisiyle, bunun ne kadar büyüleyici bir manzara olduğunu vurgulama ihtiyacı hisseden birleyle karşılaşırım. Müthiş bir görüntü olduğundan elbette kuşku yok. Ancak beni asıl şüphelendiren, bunun ikincil gökkuşağının ötesinde görüldüğü, yani üçüncül bir gökkuşağı olduğu imasıdır. Bu satırları yazarken bile, şüpheliğimin asılsız olduğunu sezinleyebiliyorum; ne de olsa çoğu kişi, bu tür bir kuşakla karşılaşmanın son derece düşük bir ihtimal olduğunun farkında bile değildir ve daha çok, birincil yay ile ikincil yay yakınlarında gördükleri bir şeyden bahsediyor olmalıdır. Sıradaki sorumuz, üçüncül gökkuşağı ile karşılaşmanın bu denli ihtimal dışı olmasının nedenlerine ilişkin. Ancak sözünü ettiğim ilginç sohbete dönecek olursak, “üçlü gökkuşağı” gördüğünü söyleyen biriyle karşılaştığım zaman bu gözlemi sırasında, arkasında ya da önünde bir su birikintisi olup olmadığını sorarım. Çoğunlukla “Bilmem” yanıtını verdikleri için konu, gizemini korur; en azından biz, aşağıdaki soruyu inceleyinceye dek (tabii, bu benim fikrim)!

52. Soru: Peki, üçlü gökkuşağı nedir?

Teorik olarak her bir yağmur damlasının içinde ikiden fazla dahili yansıma meydana gelebileceğinden daha önce söz etmiştik; bu nedenle yüksek mertebe gökkuşakları (üçüncül, dördüncül vs.) pekâlâ mümkündür. Verili yansıma sayılarından hareketle bu türden bir gökkuşağının açısal boyutuna ilişkin çıkarsamada bulunmak da mümkündür (bunu ilk yapan, Newton olmuştur). Newton'ın çağdaşlarından olan Edmund Halley, üçüncü bir gökkuşağı yayının, Güneş'in etrafında, yaklaşık 42°'lik açısal yarıçapa sahip bir çember olarak belirmesi gerektiğini saptamıştır. Bu yakınlıkta

gökyüzünün son derece açık ve parlak, kuşağınsa yapısı gereği soluk olacağı gerçeği, böylesi bir gökkuşağını görmeyi, olanaksız değilse de son derece güç kılacaktır (yine de Pedgely'nin ilgili iddiası için bkz. Kaynakça). Ancak titizlikle denetlenen bir laboratuvar ortamında durum çok farklıdır. Jearl Walker, tek bir su damlasını aydınlatmak amacıyla bir lazer ışını demetinden yararlanmış ve on üçüncü mertebeye dek uzanan bir dizi gökkuşağının izini sürmeyi başarmıştır. Üstelik bunların konumları, ilgili tahminlerle de örtüşür niteliktedir. Benzer laboratuvar koşullarında on dokuz gökkuşağına ulaşmayı başarmış başka bilim insanları da vardır.

Gelin, üçüncül yay için “ışın matematiğine” eğilelim. (51.4) numaralı denklemden ve $k = 3$ ile $n = 4/3$ 'ten hareketle, üçüncül yay için kritik geliş açımız:

$$i_c = \arccos \left(\frac{7}{135} \right)^{1/2} \approx 1,34 \text{ radyan} \approx 76,8^\circ \quad (52.1)$$

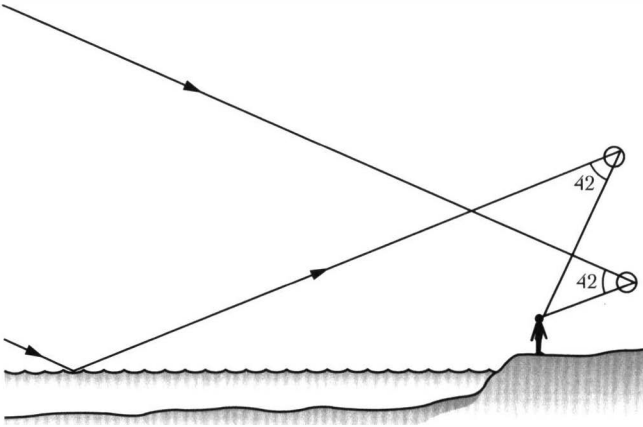
Ardından (51.1) numaralı denklemden yararlanarak, karşılık gelen ışının sapmaya uğradığı açığı buluruz:

$$D_k(i_c) = 3\pi + 2i_c - 6 \arcsin \left(\frac{3 \sin i_c}{135} \right) \approx (-)41,6^\circ \quad (52.2)$$

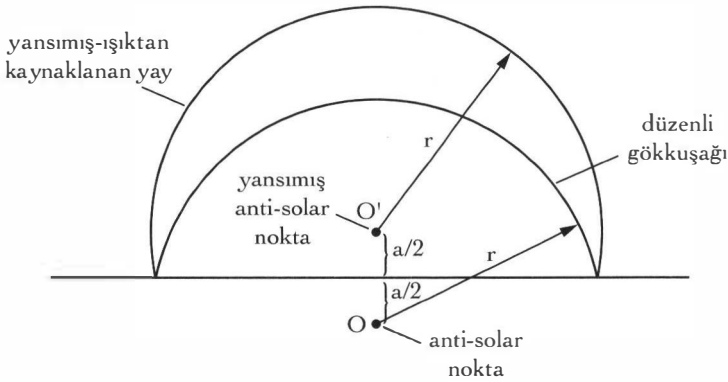
Eldeki problemin silindirik simetri özelliği nedeniyle eksi işareti, bir kez daha bizim için hiçbir önem taşıyor. Ancak tesadüf bu ya, bu yayın açısız yarıçapı, birincil yayın açısız yarıçapına yakın olmakla beraber onun tam tersi yönündedir! Az önce de belirttiğimiz gibi, yayın böylesi bir açısız çapla, Güneş'in etrafında son derece soluk bir halka olarak belirmesi gerekir, tabii *eğer* gökyüzünün o kısmındaki güneşin göz kamaştırıcı parlaklığından fırsat kılırsa (bu pek olası değildir). 56. Soru'ya geldiğimizde göreceğimiz gibi, Güneş'in etrafında sık sık halkalar oluşur ancak bunların sebebi yağmur damlaları değil buz kristalleridir!

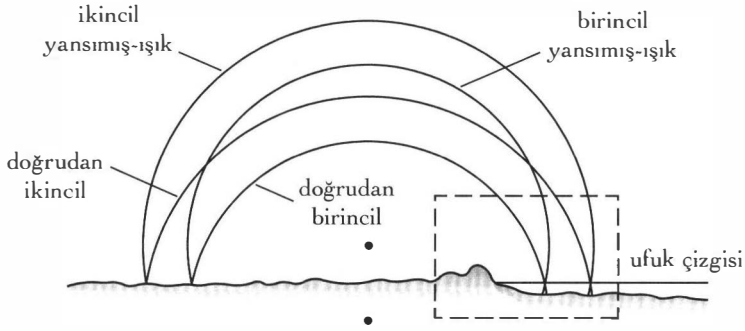
Peki, kimilerinin gördüğünü söylediği şu sıra dışı “üçlü gökkuşakları” nedir? Yakınlarda bir su birikintisi olup olmadığına ilişkin sorumu hatırlıyor musunuz? Eğer su birikintisi, gözlemcinin

arkasındaysa – diğer bir deyişle gözlemci ile Güneş'in arasındaki bir konumdaysa – kişi, yansımış bir ışık ya da bir yansıma gökkuşağı görmüş olabilir. Bu durumda, gözlemcinin ardında kalan bir su birikintisinin yüzeyinden yansıyan güneş ışığı, birincil ve ikincil gökkuşağlarına sebep olan yağmur damlalarından farklı bir dizi yağmur damlası tarafından saçılma uğramış olacaktır (*Bkz. Şekil 52.1*). Bu yansıma gökkuşağı, gökyüzünde birincil gökkuşağından daha yüksekte belirecek ancak birazdan göreceğimiz gibi, ufuk çizgisinde onunla buluşacaktır. Aslında bu yay da bir “birincil” yaydır (yine de teorik olarak daha yüksek bir ikincil yay görülebilir); bu nedenle kırmızı renk, kemerin dışında kalacak şekilde renkler aynı şekilde sıralanmıştır. Gökkuşağımız, “birincil” birincile kıyasla, muhtemelen daha soluk renkli olacaktır, zira suyun mükemmel bir yansıtıcı olduğu pek söylenemez. Birlikte, üç hatta dört yay bile görülebilir ve eminim bu, muhteşem bir manzaradır. Yine de bu yayın sadece daha aşağıdaki kısmının görülmesi ve bunun da birincil yayın ayağından çıkıyormuş gibi neredeyse dikey bir görüntü vermesi, çok daha sık karşılaşılabilecek bir durumdur (özellikle de su birikintimiz, fazla büyük değilse). Söz konusu “üçlü gökkuşağı” gözlemlerinin ardındaki en yaygın neden, bu olabilir.



Şekil 52.1. Düzenli ve birincil yansımış-ışık yayları için ışın izlekleri (Greenler'den (1980) alınarak yeniden çizilmiştir.)

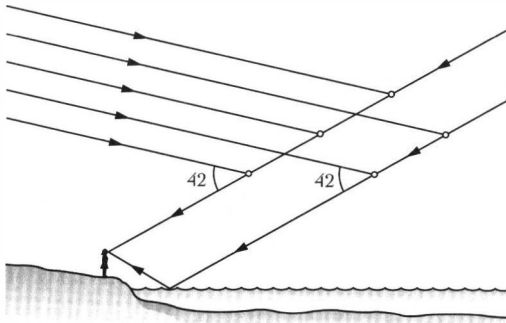




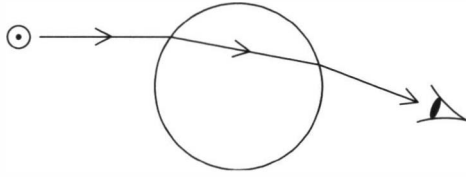
Şekil 52.3. Birden fazla gökkuşağı "kolunun" biçimleniş (Greenler'den (1980) alınarak yeniden çizilmiştir)

terildiği gibi, hem birincil hem de ikincil düzenli (doğrudan) ve yansımış-ışık yayları olabilir.

Nihayet, yansımış gökkuşağı örneğimize dönebiliriz (Bkz. Şekil 52.4). Su birikintisinin, bu kez gözlemcimizin önünde olması gerekecek ancak ne gariptir ki bu durumda gözlemcimizin gökyüzünde karşılaşacağı yansıma bir gökkuşağı olmayacak! Işık, bu "görünmez" gökkuşağından su yüzüne yansıyıp gözlemciye ulaşacak ve sonuçta ortaya, elbette, görünür birincil yaydan tamamen ayrı ve ters çevrilmiş bir gökkuşağı görüntüsü çıkacaktır. "Görünmez" gökkuşağının, görünür birincil yayın gerçek bir yansıması olması durumundan farklı olarak, bu kez "ayaklar" da buluşmayacaktır.



Şekil 52.4. Düzenli ve birincil yansımış-ışık yayları için ışın izlekleri (Greenler'den (1980) alınarak yeniden çizilmiştir)



Şekil 53.1. Doğrudan damlanın içinden geçen bir ışın izleği

53. Soru: “Sıfırıncı” mertebe gökkuşağı var mıdır?

Ya da şöyle soralım: Işınlr bir yağmur damlasına çarpıp, damlanın içine doğru kırılıma uğrayabilir, sonra da dışarı, doğrudan havaya çıkarak bir gökkuşağı oluşturabilir mi? (Bkz. Şekil 53.1.) Bu tür bir süreç meydana gelebilir ancak gökkuşağına neden olmaz. Şekilde de görülebileceği üzere, sapma açısı $D_0(i) = 2(i - r)$ olduğundan, Snell yasasından yararlanarak

$$D'_0(i) = 0 \iff dr/di = 1 \Rightarrow \cos i = n \cos r \quad (53.1)$$

yazabiliriz ancak bunun anlamı,

$$\cos^2 i = n^2 - \sin^2 i \Rightarrow n^2 = 1$$

Matematiksel olarak $n > 1$ bir çelişkiye işaret eder; fizik açısından baktığımızdaysa $n = 1$, kırılma olmadığı anlamına gelir. Her iki durumda da, gökkuşağı olmaz!

54. Soru: Baloncuklar “gökkuşağı” yapabilir mi?

[Bkz. Renkli fotoğraflar kesiti]

Hava baloncukları için bir “gökkuşağı” açısı (ve buna karşılık gelen bir geliş açısı) var mıdır? Diğer bir deyişle hava baloncukları, ışığın suda kırılması sonucunda, gökkuşakları (veya *balonkuşakları*) oluşturabilir mi? (Bkz. Şekil 54.1) Su/hava etkileşimi için kırılma endeksini $n = 3/4$ olarak alalım. Ayrıca ışık için toplam dahili yansımının, yoğun bir ortamın daha az yoğun bir ortamın içine girmesi durumunda meydana gelebileceğini belirtmemiz gerekiyor.

Buradaki en basit olasılık, ışınların baloncuğa girdikten sonra baloncuğun içine doğru kırılıma uğraması ve sonra da bu kırılımla dışarı, suya ulaşmasıdır. Bu bizi, yukarıdaki soruda ele aldığımız sıfırıncı yay problemine götürür; yani iki kırılmanın olduğu ancak hiç yansımanın *olmadığı* duruma (sapmaya uğramış ancak bir yağmur damlasının içinden geçen doğrudan iletim). Bu, bir gökkuşağı doğuracaksa, bir ikincil yay görünebilir (sıfırıncı yay ile karşılaşsak ona birincil yay diyeceğiz!). Bu, fazladan bir dahili yansımanın bir sonucudur (*Bkz. Şekil 54.1*).

Daha az yoğun bir ortama giren ışınlar için $n = (4/3)^{-1} = 3/4$. Toplam dahili yansıma $\sin i \geq n$ durumunda ya da (burada)

$$i \geq \arcsin (3/4) \approx 48,6^\circ = i_c$$

meydana gelir. Aksine, iletimin meydana gelebilmesi için $i < i_c = 48,6^\circ$ olmalıdır. Bu koşula bağlı olan sapma açısı $D_1(i) = 2(r - 1)$ 'dir; Snell yasasından hareketle şöyle yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \sin i = n \sin r (dr/di > 0 \text{ dikkate alındığında}) &\Rightarrow dD/di = 2 \left(\frac{\cos i}{n \cos r} - 1 \right) \\ &= 0 \text{ eğer } \cos i = n \cos r \end{aligned} \quad (54.1)$$

Ancak (53. Soru'da olduğu gibi) biraz cebire başvurduğumuzda bunun, $n^2 = 1$ demek olduğunu görürüz; oysa sudaki hava baloncukları için bu doğru olamaz çünkü problemimizde $n < 1$ demiştik. Bu nedenle, bu durumda balonkuşağı meydana gelmez.

Peki, bir ikincil yay olasılığı var mıdır? Sıradaki (yağmur damlasındaki birincil yayla ilgili) olasılığa gelecek olursak, iki kırılma ve bir yansıma için sapma

$$D_2(i) = 2(r - i) + (\pi - 2r) = \pi - 2i, \text{ yani } D'_2(i) = -2 \quad (54.2)$$

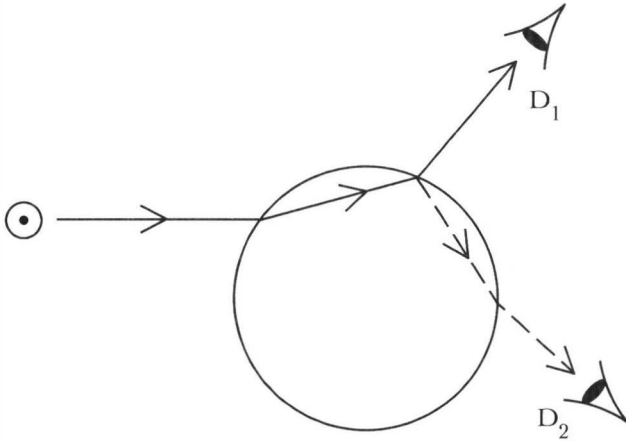
olur ve hiç uçdeğer bulunmaz; sapma açısı, i 'nin monoton, hatta doğrusal bir şekilde azalan bir fonksiyonudur.

55. Soru: Acaba “elmaskuşağı” neye benzerdi?

Bir an için yağmur damlalarının su yerine elmastan oluştuğunu hayal edelim (kim demiş matematik günlük hayatta işe yaramaz diye!). Elmasın kırılma endeksi $n \approx 2,42$ 'dir (genel “renksiz” gökkuşağımız için). Birincil ve ikincil “elmaskuşağının” anti-solar yönde yapacağı açıyı, bir derecenin en yakın onuncu dilimine göre hesaplayalım. Elmaslarımızın küre biçiminde olduğunu varsayacağız! Hatırlayalım, bir dahili yansıma için denkleminiz

$$\cos i_c = [(n^2 - 1)/3]^{1/2} \quad (55.1)$$

oluyordu ve ic kritik geliş açıydı. θ gerçek bir sayı olduğundan, $|\cos \theta| \leq 1$, buradan hareketle de yalnızca $n^2 > 1$ ve $n^2 - 1 \leq 3$ diğer bir deyişle $1 < n \leq 2$ durumunda tek bir dahili yansımadan bir “birincil” yay ortaya çıkacaktır. Böylesi bir n değeri söz konusuysen, bunun bir elmas tanesi için geçerli olamayacağı açıktır: Aşağıda da



Şekil 54.1. Bir baloncuktan geçen ışın izlekleri

gösterildiği üzere bir “birincil” elmaskuşağının, geliş ışınının iki dahili yansıması için meydana gelmesi gerekir. Öyleyse uygun sonuç

$$\cos i_c = [(n^2 - 1)/8]^{1/2} \quad (55.2)$$

olur ve $n = 2,42$; $i_c = \arccos(0,78) \approx 38,7^\circ$ olduğundan sapmayı

$$D(i_c) = 2i_c - 6 \arcsin(\sin i_c/n) \approx -12,5^\circ \quad (55.3)$$

buluruz; bu, Güneş'in etrafında $12,5^\circ$ 'lik bir açısız yarıçapa sahip küçük bir halka demektir. İkincil elmaskuşağını üç dahili yansıma neden olacaktır çünkü artık

$$\cos i_c = [(n^2 - 1)/15]^{1/2} \approx 55,3^\circ \quad (55.4)$$

ve modülo 2π ,

$$D(i_c) = \pi + 2i_c - 8 \arcsin(\sin i_c/n) \approx 131,6^\circ \quad (55.5)$$

olur. Aslına bakarsanız birincil gökkuşağı için bulduğumuz değerden çok da uzak bir sonuç değil bu. Hmm... Gerçekten de Lucy gökyüzünde elmaslarla olmasın sakın?

56. Soru: Güneş'in etrafındaki halkanın sebebi nedir?

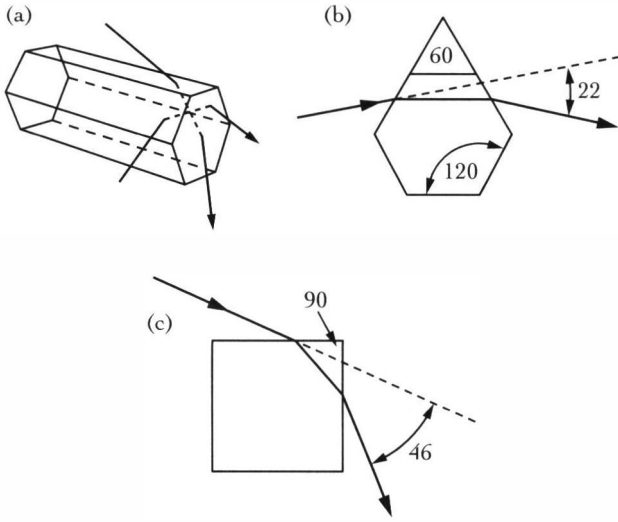
Gökyüzünün, Güneş'in yakınlarında görünen birkaç ince ve ufak tefek tüybulut (sirrüs) ya da tülbulut (sirrostratüs) dışında, açık olduğu zamanlarda Güneş'in (ya da Ay'ın) etrafında dairesel bir halka gördüğünüz oldu mu hiç? Çoktan kayıplara karışmış, eski bir internet sitesinde okuduğuma göre, *buz kristali halesi* olarak bilinen bu gibi harika manzaralar, Avrupa'da ve ABD'nin bir bölümünde haftada ortalama iki kez gözlemlenebiliyormuş. Benim de tecrübem aşağı yukarı bu yönde, ancak ben, bu haleleri ayda ortalama iki kez görüyorum. Güneş'in ya da Ay'ın etrafındaki bir halkanın "yarıçapı" doğal olarak, görünür yarıçaptan gözlemciye uzanan yay derecesi ile ifade edilir. Bu internet sitesinde, en sık karşılaşılan görüntünün 22° 'lik dairesel hale, ardından *parheli* (ya da yalancı güneş, bkz. 58. Soru), sonra da *üst teğet yay* olduğu yazıyordu. Benim da-



56. Soru - Tülbulutlardaki (ya da tüybulutlardaki) altıgen levha benzeri buz kristallerinin, güneş ışığını kırılıma uğratması sonucu meydana gelmiş 22° 'lik bir buz kristali halesi. Renkli fotoğrafta halenin iç sınırında kırmızımsı bir iz göz görülür.

ha sınırlı tecrübeme göreyse, bunlar arasında en sık görülen yalancı güneşlerdir; en azından Güneydoğu Virginia'da işe yürürken yaptığım gözlemler bu yönde. Bunlar Güneş ile aynı yükseklikte görünürler ve 22° 'lik haleye yakındır (ancak onun hemen altında olurlar). Göz kararıyla, parmaklar gergin bir şekilde yan yana tutulduğunda aynı açı elde edilir; bu nedenle başparmak Güneş'in üzerindeyken, serçe parmağı da aşağı yukarı 22° 'lik haleye (veya yalancı güneşe) denk gelir. Okurlara konuyla ilgili olarak Les Cowley'nin ansiklopedi niteliğindeki saygın internet sitesini incelemelerini haretle tavsiye ederim (ayrıntılar için bkz. Kaynakça).

Güneş ışığı atmosferin yukarı kısmında buz kristalleri sayesinde kırılıma, yansımaya ya da ikisine birden uğradığı ve *dikkatli* bir gözlemcinin gözüyle bulunduğu, haleler oluşur (ve görülür). Dikkatli dedim çünkü en yaygın hale türleri bile kolayca gözden kaçırılabilir. Daha önce belirttiğimiz gibi, bu haleler genellikle birörnek ve ince bir tüybulutu (sirrüs) ya da tülbulutu (sirrostratus) tabakası gökyüzünde büyük bir bölgeyi kapladığında görülür;



Şekil 56.1. Altıgen buz kristali ve 22° ile 46°'lik haleler için bu kristallerin içinden geçen ışın izlekleri

özellikle de bu bulutlar Güneş'in yakınlarındayken. Şaşırtıcı bir biçimde yılın hemen her zamanında gözlemlenebilirler; hatta 10 kilometrenin üzerinde bir yükseklikte hava her zaman buz kristallerinin oluşumuna izin verecek kadar soğuk olduğu için bu halelere yazın bile rastlanabilir. Bu kristallerin çoğu, altıgen prizmalardır; bazıları ince ve düz tabakalar hâlindeyken diğerleri, zaman zaman mermi ya da kalem ucunu andıran, uzun kolonlar şeklinde olabilir. Bu kristallerin dikkat çeken bir özelliği, herhangi bir türü çeşitli boyutlarda olabilirken, cepheleri arasındaki açının aynı olmasıdır. Tabii, *mükemmel* bir altıgen simetrisine sahip değildirler ancak ilgili oldukları pek çok farklı yay ve hale oluşumuna ilişkin geometrik açıklamalar yapmamıza izin verecek kadar altıgen sayılırlar. Bu tüybulutu (sirruse) kristallerinden kaynaklanan halerin oluşumunu belirleyen iki ana etmen vardır: şekilleri ve düştükleri sıradaki yönelimleri. Kristallerin şekilleri büyük ölçüde atmosferdeki yolculuk maceralarına, diğer bir deyişle, yerçekiminin etkisiyle aşağı çekilirlerken, rüzgârların ve konveksiyon akımlarının etkisiyle süzülürken geçtikleri bölgelerdeki sıcaklığa göre belirlenir.

22° derece gibi farklı açılarının ardında yatan nedenleri açıklamak için kristal geometrisini biraz daha yakından incelememiz gerekiyor. *Şekil 56.1*'e göre, altıgen buz kristallerinin, yönelimlerine bağlı olarak, içlerinden geçen ışınlar için 60°, 90° veya 120°'lik “prizma açıları” sunduklarını düşünebiliriz. Bu kristaller ile gökkuşaklarının yağmur damlaları içindeki oluşumu arasında hem benzerlikler hem de farklılıklar vardır. Önce γ tepe açısına ve (havaya göre) n kırılma endeksine sahip prizmalardan geçen ışığın kırılımla ilgili (ispatı burada verilmeyen; bkz. Adam (2006)) teoremlerden yararlanalım.

Teorem 1: Bir prizmadan geçerek kırılıma uğrayan ışığın sapma veya defleksiyon açısı, simetrik ışın izlekleri için bir minimumdur.

Hatırlarsanız, bir ışının bir yağmur damlasının içinden geçtiği açısının bir uçdeğer olması hâlinde, gökkuşağının meydana geldiğinden söz etmiştik. Bu teorem bize, *prizmalar* söz konusu olduğunda, ilgili uçdeğerin – esasen bir minimumdur – kristalden geçen ışın izleğinin simetrik olması hâlinde gerçekleştiğini söyler. İkinci teoremse bu minimum sapma açısının büyüklüğünü (D_m), diğer bir deyişle halenin, güneş ile gözlemciyi buluşturan çizgiye göre olan konumunu tanımlar.

Teorem 2: Bir prizma için minimum sapma açısı D_m şu ilişkiyi karşılar:

$$n = \frac{\sin \left[\frac{1}{2} (\gamma + D_m) \right]}{\sin \frac{1}{2} \gamma} \quad (56.1)$$

Bu sonuçtan hareketle D_m için çözümümüz de aşağıdaki gibi olur:

$$D_m = 2 \arcsin \left(n \sin \frac{\gamma}{2} \right) - \gamma \quad (55.2)$$

22°'lik ve onlar kadar sık görülmeyen 46°'lik halelerin oluşumunu açıklamak için bu sonuçtan yararlanabiliriz. *Şekil 56.1(b, c)*'de gösterildiği üzere, altıgen şeklindeki bir buz kristalinde üç prizma açısı vardır: 60° (kenar-1'den girip kenar-3'ten çıkan ışık), 90° (bir üst ya da alt yüzden girip bir kenardan çıkan ışık) ve 120° (kenar-1'den giren ve kenar-2'de tamamen dahili yansımaya uğrayan ışık). Bunlardan ilk ikisi, güneş ışığının dağılımı sonucunda, renkleri meydana getirir; sonuncusu ise haleye doğrudan bir katkıda bulunmaz; en azından burada ilgilendiğimiz şekilde. Sarı ışık için buzun kırılma endeksi $n \approx 1,31$ 'dir. Tepe açısı $\gamma = 60^\circ$ için

$$D_m = 2 \arcsin (1,31 \sin 30^\circ) - 60^\circ = 21,8^\circ \approx 22^\circ$$

ve $\gamma = 90^\circ$ için

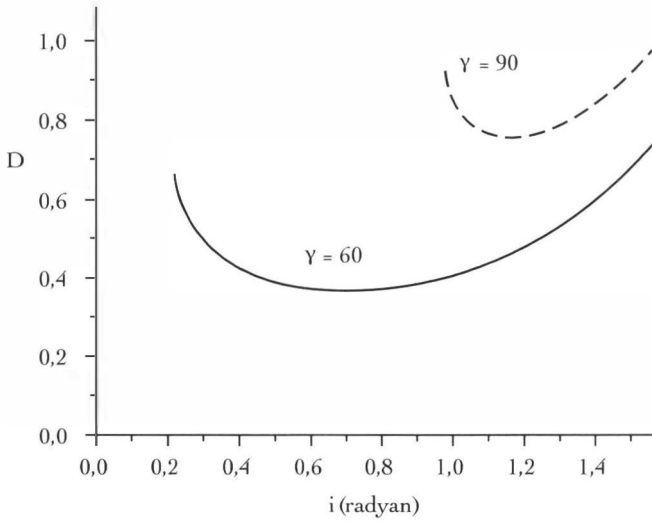
$$D_m = 2 \arcsin (1,31 \sin 45^\circ) - 90^\circ = 45,7^\circ \approx 46^\circ.$$

Tepe açısı γ olan bir prizmanın içinde, i geliş açısına sahip ışının uğradığı kırılımı şöyle ifade ederek bu durumu daha da karmaşık gösterebiliriz:

$$D(i; \gamma) = i - \gamma + \arcsin \left\{ n \sin \left[\gamma - \arcsin \left(\frac{\sin i}{n} \right) \right] \right\} \quad (56.3)$$

Tüm bunlar bize, buz kristallerinin gökyüzünde ara sıra karşılaştığımız muhteşem görüntülerden sorumlu olmakla kalmadığını, aynı zamanda oldukça etkileyici bazı transandantal denklemlerle de ilişkili olduklarını gösterir! *Şekil 56.2*'de yukarıda sözü edilen iki tepe açısı, 60° (aşağı eğri) ve 90° için $D(i)$ taslakları verilmiştir.

Bunların her birinde D_m minimum değerinin, sırasıyla 22° ve 46° konumu yakınlarında görüldüğüne dikkat edin. Gökkuşağı durumunda, olası tüm sapmalar gerçekte mevcuttur ancak hallerin gözlemlenen yeşinliğini sağlayan, sapmaya uğramış ışınların minimum yakınlarındaki “istiflenişidir”. (Ancak gökkuşağından farklı olarak, bu iki durumdaki oluşumlarına sebep olan hiçbir



Şekil 56.2. Prizma tepe (apeks) açıları $\gamma = 60^\circ$ ve 90° için $D(i)$ i (radyan)

yansıma yoktur.) Bir gerçek minimumun olduğunu analitik olarak doğrulamanın bir yolu da elbette, (56.3) numaralı denklemden hareketle $D'(i) = 0$ iken $D''(i) > 0$ olduğunu göstermektir ancak bunu ilginç bir alıştırmaya olarak bir kenara bırakalım; görüldüğü kadar kötü değildir. Ayrıca grafikte, geliş açısı α üzerinde bazı sınırlamalar olduğuna, bu sınırlamalar dışında, gerçek n ve γ parametreleri için bunlar dışında hiçbir D değerinin tanımlanamayacağına dikkat edin. Bu sınırlamalar, (56.3) numaralı denklemin gerektirdiği koşuldan kaynaklanır, özellikle,

$$\left\{ n \sin \left[\gamma - \arcsin \left(\frac{\sin i}{n} \right) \right] \right\} \leq 1 \quad (56.4)$$

durumundan (burada i , ilk kuadrant dahilindedir). Bu eşitsizlik, (56.3) numaralı denklemdeki ifadeyi açar ve i üzerine bir alt sınır koyarak şu denkleme ulaşmamızı sağlar:

$$i \geq \arcsin \left\{ n \sin \left[\gamma - \arcsin \left(\frac{1}{n} \right) \right] \right\} \quad (56.5)$$

Burada $\sin \theta$ 'nın $(0, \pi/2)$ değer kümesinde, bir birebir fonksiyon olduğuna, bu nedenle de $\arcsin$ fonksiyonunun, alanında artan bir monoton olduğuna dikkat edin. Sırasıyla $\gamma = 60^\circ$ ve 90° olduğundan $i \geq 13,5^\circ$ ve $57,8^\circ$ 'dir. Daha geniş tepe (apeks) açıları üzerindeki sınırlamalara gelince, ikinci teoreme göre,

$$n \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \leq 1 \quad (56.6)$$

ya da

$$\gamma \leq 2 \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \quad (56.7)$$

olmalıdır ve $n = 1,31$ olduğundan $\gamma \leq 99,5^\circ$ olur. 120° 'lik bir tepe (apeks) açısının bunu aştığı açıktır; fizik bakımından bu durum, prizma içinde toplam dahili yansıma anlamına gelir. Bu tür görüşler, güneşin yüksekliğine ya da belirli tip halelerin görülebilmesi için gözlemcinin bulunması gereken enleme ilişkin bazı sınırlar belirlemeyi sağlar (atmosferik koşulların izin verdiği ölçüde). *Bu durumu* tepe çevresi yayı olarak bilinen çok güzel bir hale tipi örneğinde 59. Soru'da göreceğiz. Hale türü başka pek çok doğa olayı vardır ve bunların bazılarını çok ender rastlanır. Bunlarla ilgili daha fazla ayrıntı için okura yine Les Crowley'nin internet sitesini ziyaret etmesini öneririm.

Buz kristali halesi konusunu kapatmadan önce başka pek çok başlığı ele almak mümkündür ancak konuyu, neden 46° 'lik halesinin, kardeşi 22° 'lik haleye kıyasla, genellikle daha soluk görüldüğüyle kapatmak istiyorum. Bu duruma katkıda bulunan olası pek çok mekanizmadan söz edilebilir ancak en basit açıklaması, kristallerden saçılma uğrayan mevcut ışığın, önceki duruma kıyasla çok daha büyük bir yarıçapa sahip bir çembersel imgeye yönlendirildiği ve yayıldığıdır. Pek mükemmel sayılamayacak (ancak yine de yararlı) bir benzetme yapacak olursak, bir havuzun ya da su birikintisinin yüzeyinde dairesel şekilde yayılan bir dalga, gideerek artan bir yarıçapla dışarıya doğru hareket ettikçe, genliğini de

kaybeder. Elbette bunun sebebi, dalga enerjisinin korunumudur ancak haleler için de benzer bir durum söz konusudur. Daha büyük bir hale durumunda, verili bir ışık kaynağı için birim yay başına düşen yegînlik daha az olacaktır.

Bir başka önemli neden, 46°'lik hale söz konusu olduğunda, ona katkıda bulunabilecek, diğêr bir deyişle kristalde gerekli olan yönde çıkış yapabilecek geliş ışınlarının uzanımında dikkate değêr ölçüde kısıtlama olmasıdır. Hale oluşumuna sebep olan geliş açıları üzerindeki bu kısıtlamaları bulabiliriz. Şekil 56.3'ten, Snell yasasını hem giriş hem de çıkış yüzüne uyguladığımızda şunu elde ediyoruz:

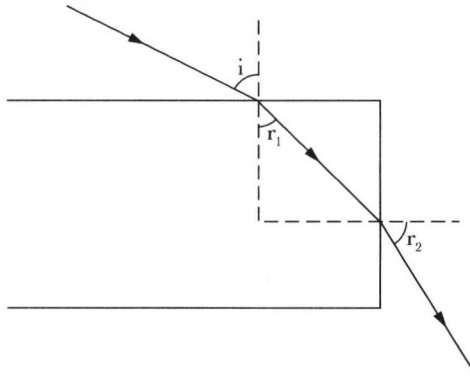
$$\begin{aligned} \sin i &= n \sin r_1 \text{ ve} \\ \sin (90^\circ - r_1) &= \cos r_1 = n^{-1} \sin r_2 \end{aligned} \quad (56.7)$$

$r_2 = 90^\circ$ olduğunda çıkış yüzünde toplam dahili yansıma meydana gelecektir, bu nedenle yukarıdaki denklemlerden hareketle

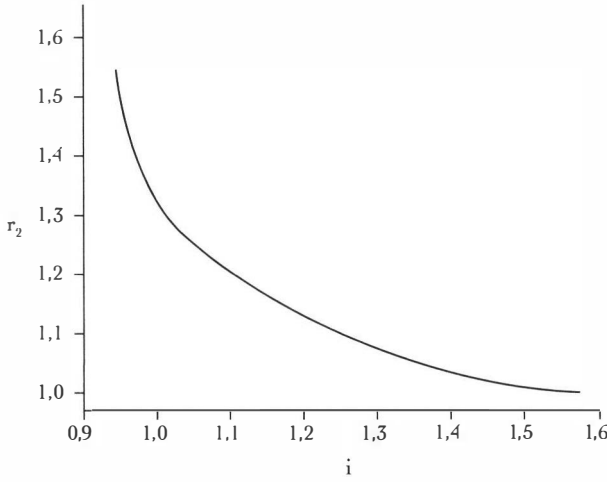
$$n \cos r_1 = 1 \quad (56.8)$$

dolayısıyla

$$\sin i = n \sin (\arccos n^{-1}) = \sqrt{n^2 - 1} \quad (56.9a)$$



Şekil 56.3. 46°'lik hale için 90°'lik bir prizmadan geçên ışın izleği



Şekil 56.4. (56.11)'de verilmiş olan $r_2(i)$ çıkış açısı

Bu da söz konusu haleye neden olacak minimum i değerine karşılık geldiğinden,

$$i_{\min} = \arcsin \left(\sqrt{n^2 - 1} \right) \quad (56.9b)$$

Buz için genel bir $n = 1,3$ değeri ile $i_{\min} \approx 56^\circ$ olur. Elbette, i için kabul edilebilecek azami değer, yani teğetsel geliş 90° 'dir. Sırada, bunun r_2 için ne anlama geldiği var. Açıkça, $i = 90^\circ$ için

$$r_1 = \arcsin n^{-1}, \text{ öyleyse } r_2 = \arcsin (n \cos r_1) = \arcsin \left(\sqrt{n^2 - 1} \right) \quad (56.10)$$

Yine $n = 1,3$ için, r_2 için minimum değer yaklaşık 56° 'dir. Bu sonuçları özetlersek, geliş açısının $56^\circ \leq i \leq 90^\circ$ ya da radyan cinsinden ifade edecek olursak $0,98 \leq i \leq \pi/2$ aralığında olabileceğini, çıkış yüzündeki kırılma açısının ise $56^\circ \leq r_2 \leq 90^\circ$ ($0,98 \leq i \leq \pi/2$) aralığında seyredebileceğini görüyoruz; her iki alan da oldukça kısıtlayıcıdır. Şekil 56.4'teki $r_2(i)$ aşağıda elde edilen sonuca dayanır:

$$\sin r_2 = n \cos r_1 = n \cos \left[\arcsin \left(\frac{\sin i}{n} \right) \right] = \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \quad (56.11)$$

Şekil 56.5'ten yararlanarak 90° 'lik bir prizmanın içinde ortaya çıkan demetin görelî genişliği üzerindeki sınırları da elde edebiliriz. Keyfî (ancak elbette kabul edilebilir $[51^\circ, 90^\circ]$ aralığındaki) bir geliş açısı i için, $r_2(i)$ 'nin nasıl olması gerektiğini (56.11) numaralı denklemden biliyoruz. Eğer kristalin kalınlığı h ise ortaya çıkan demetin genişliği W de Şekil 56.5'ten hareketle,

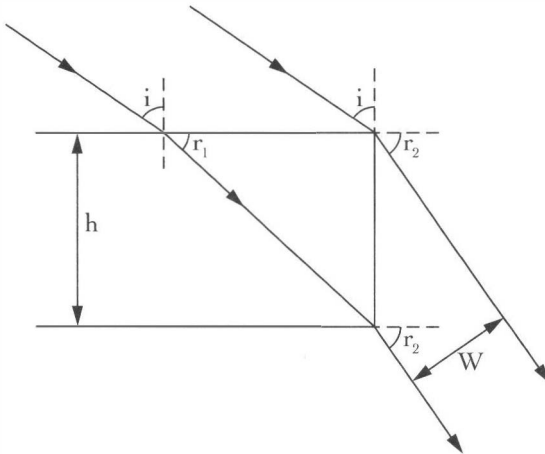
$$W = h \cos r_2 \quad (56.12)$$

olacaktır. Öyleyse görelî genişlik,

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= \frac{W}{h} = \cos[\arcsin(n^2 - \sin^2 i)^{1/2}] \\ &= (1 - n^2 + \sin^2 i)^{1/2} \end{aligned} \quad (56.13)$$

$\tilde{W}$ 'nin bir gerçek sayı olması gerekliliği i tanım kümesi için daha da dar bir kısıtlama anlamına gelir; ilk kuadrantdaki i için bunun anlamı açıkça şudur:

$$i \geq \arcsin |n^2 - 1|^{1/2} \quad (56.14)$$



Şekil 56.5. 46° 'lik hale için ortaya çıkan demet üzerindeki kısıtlamalar

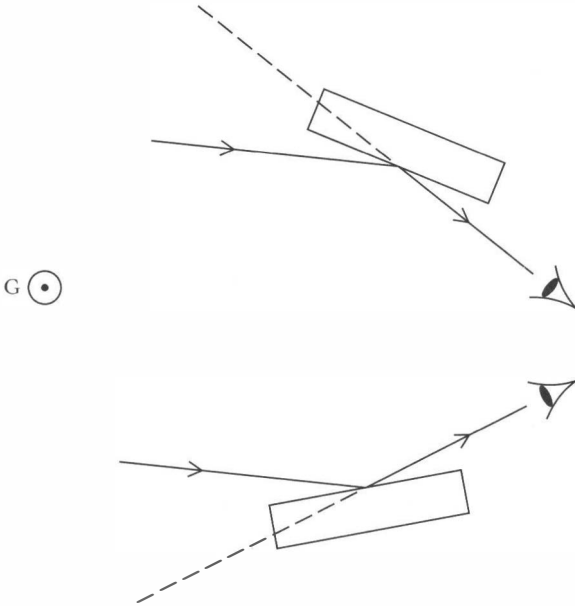
Bu da $n= 1,3$ için $i \geq 56^\circ$ demektir. Öyleyse,

$$56^\circ \leq i \leq 90^\circ, \quad 0 \leq \tilde{W} \leq (2 - n^2)^{1/2} \approx 0,56 \quad (56.15)$$

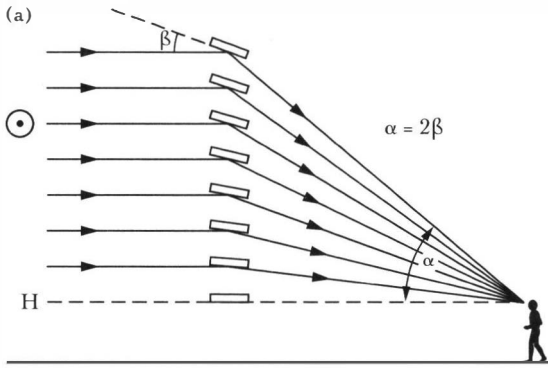
Bu nedenle, ortaya çıkan demetin görelî genişliği üzerindeki bu kısıtlama, geliş açıları üzerindeki kısıtlama ve 46° 'lik halenin daha büyük olan çevre ölçüsü (böylece mevcut ışık daha büyük bir imge olarak kırılır), bu halenin, çok daha yaygın olarak görülen 22° 'lik haleye kıyasla daha solgun olmasına katkıda bulunur.

57. Soru: Günbatımında Güneş'in üzerinde beliren ışık demeti nedir? [Bkz. Renkli fotoğraflar kesiti]

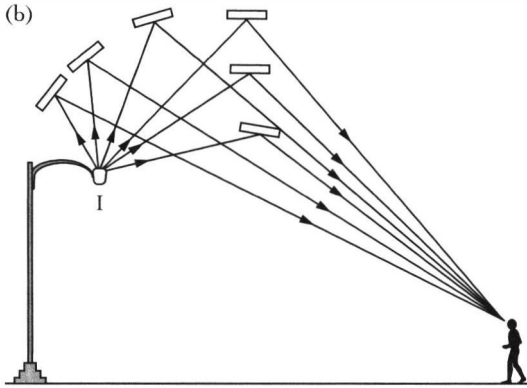
Bunlara *Güneş sütunları* denir. Üniversitem akli evvelik edip, çalışma odamın bulunduğu binanın arkasına devasa bir yurt binası dikene kadar, birbirinden güzel günbatımı manzaraları izleyebiliyor



Şekil 57.1. Alt ve üst Güneş sütunlarının oluşumuna katkıda bulunan levha kristalleri



Şekil 57.2(a). Bir üst Güneş sütununun açısal uzanımı (gözlemci sağ taraftadır) (Lynch ile Livingston'dan (2004) alınarak yeniden çizilmiştir.)



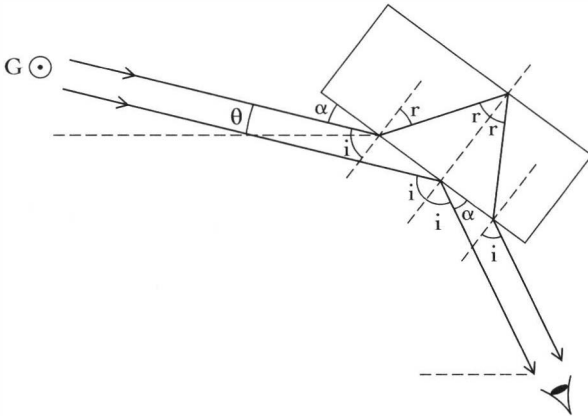
Şekil 57.2(b). Işık sütunları yakınlardaki ışık kaynakları tarafından yapılabilir (Lynch ile Livingston'dan (2004) alınarak yeniden çizilmiştir.)

ve hiç olmazsa bir kısmını ölümsüzleştirmek için sık sık dışarı koşup fotoğraf çekiyordum. Bazen oldukça etkileyici görünen Güneş sütunları fotoğrafladığım da oldu. Peki Güneş sütunları nasıl oluşur?

Levha benzeri buz kristalleri, düşerken, güneş ışığını yansıtıp kırılıma uğratabilir. Bir önceki soruda belirttiğimiz, bir sonraki soruda da göreceğimiz gibi, kırılım hem *hem de* yalancı güneş oluşumuna neden olur. Özellikle de daha sık karşılaşılan üst sütunlar güneş ışığının bu kristallerin *daha alt* yüzlerinden aşağı doğru yansımaya uğramasından kaynaklanır; daha alttaki sütunlarsa gü-

neş ışığının, eğik kristallerin daha üstteki yüzeylerinden yukarı doğru yansımaya uğramasıyla meydana gelir (Bkz. Şekil 57.1). Güneş, ufuk çizgisinin altına doğru iniş geçip batarken daha üstteki sütunlar daha parlak bir görüntü çizebilir ve daha üstteki kristaller, aşağıdakilere kıyasla daha eğikse, gökyüzünde çok daha yükseklerde uzanmış görüntüsü verebilirler (Bkz. Şekil 57.2(a)). Sütunun açısal uzanımının, en geniş eğiklik açısının yaklaşık iki katı olduğu, Şekil 57.2(a)'da görülebilir. Yapay ışık kaynakları da ışık sütunları üretebilir (Şekil 57.2(b)).

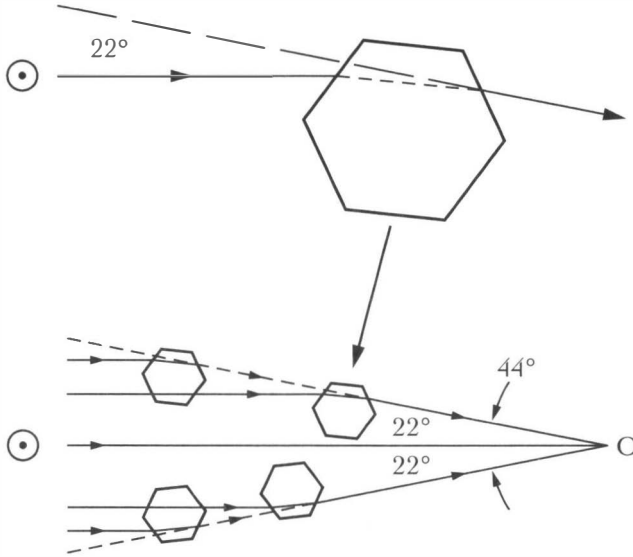
Şekil 57.3'teki geometride de görülebileceği üzere, güneş θ yüksekliğindeyse ve daha alttaki kristal yüz, gelmekte olan ışın ile bir α açısında hizalanmışsa, gözlemci söz konusu ışıktan bir imgeyi, yataya $2\alpha + \theta$ bir açıda görecektir. İlgili şeklin de gösterdiği gibi bu açı, gelmekte olan ışının kristalin içine doğru kırılıma uğrayıp, daha üstteki yüzeyin içi tarafından yansıtıldıktan sonra dışarı, (muhtemelen başka) bir gözlemciye doğru kırılıma uğrayıp uğramamasından bağımsızdır. Dolayısıyla kırılıma uğramış ışın ve ortaya çıkan ışın birbirine paraleldir. Teorik olarak, bu gibi paralel ışınlar girişim gerçekleştirebilir ve yanardöner örüntüler meydana getirebilirler (tıpkı, önceki petrol tabakaları ve kelebek kanatları örneklerinde gördüğümüz gibi) ancak uygulamada bu, gözlemlenmemiştir. Sizce neden?



Şekil 57.3. Bir üst Güneş sütununun oluşumuna katkıda bulunan ışın izlekleri

58. Soru: Güneş'in yanındaki şu renkli ışık lekesi nedir?
[Bkz. Renkli fotoğraflar kesiti]

Buna *yalancı güneş* (ya da *parheli*) denir ve oldukça sık görülen bir manzaradır ancak sık görülmesi, etkileyciliğinden bir şey kaybettirmez. Bu oluşumun ardında yatan mekanizma, Şekil 56.1(b) ve 58.1'de ele alınmıştır. Yalancı güneşler, ışığın aşağı doğru süzülen ve yatay olarak hizalanmış altıgen biçimindeki levha benzeri kristallerin içinden doğru kırılıma uğramasıyla meydana gelir ve zaman zaman son derece parlak olabilirler. Sıklıkla, güneş batarken 22° 'lik halenin konumuna yakın bir yerlerde (Bkz. 56. Soru; matematiksel kısım aynıdır) ancak genellikle bu halenin hemen dışında gözlemlenebilirler (hale de görünüyorsa). Güneş ile daima aynı yükseklikte görülen yalancı güneşler, daha fazla solar yüksekliklerde hale konumunun oldukça dışında kalabilirler. Bunun sebe-



Şekil 58.1. Yalancı güneşlerin Güneş'e göre açısal konumu
(Lynch ile Livingston'dan (2004) alınarak yeniden çizilmiştir.)

bi, oluşumlarında rol oynayan ışınların, kristal eksenine göre gide-
rek çarpıklaşması ve minimum sapmanın ışın izlekleri, artık krista-
lin içinden geçmediği için bunların zaman zaman Güneş'ten uzak-
laşan uzun "kuyruklara" neden olmasıdır. Tülbulutların (sirrostra-
tüs) Güneş'e olan konumuna bağlı olarak yalancı güneşler, aynı an-
da Güneş'in her iki yanında ya da sadece bir yanında görülebilir.

Hem yalancı güneşler hem de 22°'lik hale aşağı yukarı altıgen
biçimindeki kristaller nedeniyle ortaya çıktığına göre, pek çok buz
kristali halesinin, özellikle de sıkça karşılaşılan 22°'lik halenin, al-
tında yatan mekanizma ile yalancı güneşin altında yatan mekaniz-
ma arasındaki fark nedir? Bu sorunun yanıtı, hale oluşumunun
meydana gelebilmesi için, kristal yönelimlerinin birörnek dağılım
göstermesi gerektiğidir. Bu, ışığı mümkün olan her yönde kırılıma
uğratan sütun biçimli kristallerin havada yuvarlanarak düşmeleri-
nin bir sonucudur. Buna karşın yalancı güneşler (daha önce belirt-
tiğimiz gibi) kırılma yaratan yüzleri aşağı yukarı dikey konumda
olan, daha büyük ve levha benzeri kristaller tarafından meydana
getirilir. Aradaki "kararlılık" farkı, daha küçük sütun biçimli kris-
tallerin yuvarlanarak düşmeye daha yatkın olmasından ileri gelir;
daha büyük kristaller, tıpkı bir serbest atlayışçı gibi tereddütsüz
ve sabit bir yönelimle düşer.

59. Soru: Gökyüzündeki şu "gülen yüz" nedir?

Kampüsün diğer tarafındaki İnşaat ve Çevre Mühendisliği Bö-
lümü'nden bir fincan kahve almış, odama geri dönüyordum. Ka-
sım ayının güzel ve soğuk günlerinden biriydi; oraya buraya da-
ğılmış ince tüybulutlar (sirrus) dışında, gökyüzü açık ve maviy-
di. Tam odama varmak üzereyken birinin bana seslendiğini duy-
dum. "Profesör Adam; yukarıdaki şu gökkuşağına bakın!" Doğa-
daki Matematik adlı dersimi alan öğrencilerden biri, epey yüksek-
te belirmiş, güzel bir yayı gösteriyordu. Sınıfta, gökkuşağının olu-
şumuna dair tartışmalarımızdan, bunun bir gökkuşağı olmadığını
bilmesi *gerekirdi*; zira (i) yağmurlu bir gün değildi, (ii) bir gökku-

şığı için fazla yüksekteydi ve nihayet (iii) aşağı doğru değil, yukarı doğru kıvrılmış, gülen bir yüze benziyordu! Aslına bakarsanız bu, bir *tepe çevresi yayı* idi (TÇY). Diğer yandan, bu yayı ben değil öğrencim fark etmişti; zira o sırada yalancı güneşlere bakmakla meşguldüm; evet, tam iki taneydiler! Fotoğraf makinemi almak için hemen odama koştum ve “benim” TÇY de bir süre sonra aynı manzaradan başka karelerle birlikte, Günün Yerbilimleri Fotoğrafı adlı internet sitesinde yer aldı (<http://epod.usra.edu/>). Fotoğrafı şöyle tanımlamıştım:

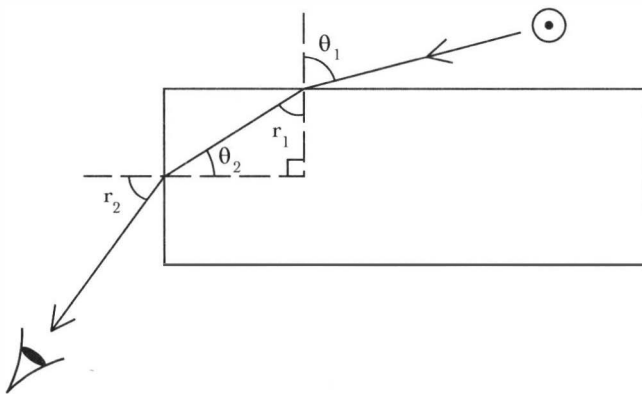
Bu tepe çevresi yayı (TÇY), Norfolk Virginia'da 27 Kasım'da öğleden sonra gözlemlenmiş muazzam bir yay ve parheli manzarasından. TÇY ve parheli, birkaç dakika arayla fotoğraflandı. Kısa süreliğine de olsa soluk renkli bir üst teget yay da görünür durumdaydı. Aynı öğleden sonra ilerleyen saatlerde, günbatımından hemen sonra, soluk bir “yalancı güneş sütunu” da günbatımı noktasının kuzeyinde belirdi: Dr. Les Cowley'e göre bu tuhaf görüntünün sebebi, bir parheli ile alt parhelinin üst üste binerek, bir parheli sütunu manzarası yaratmasıydı (bir başka olasılık da bunun bir çeşit Lowitz yayı olmasıdır.)

TÇY, yalnızca Güneş'in yüksekliğinin 32,3°'den az olduğu durumlarda oluşur ve güneş battıkça farklı bir görüntüye bürünür: Üst yükseklik limiti yakınlarındayken yay soluk ve yayınlıktır ve nerdeyse zenitsel bir konumdadır. Ancak güneş battıkça yay da zenitten uzaklaşır (Güneş'e doğru simetrik olarak dışbükey kalmayı sürdürür) ve açısal uzanımı bir şekilde artarken kendisi darlaşır. Fotoğrafı çektiğim sırada Güneş'in 25 ilâ 30 derece yüksekliğinde olduğunu tahmin ediyorum. Bu TÇY'nin ortaya çıkmasına neden olan tüybulut (sirus) kristalleri, çok geçmeden dağılıma uğradı ve yay da gözden kayboldu. TÇY'ler güneş ışığının yönelimli, altıgen biçimindeki levha kristallerinin en tepedeki bazal yüzlerinden geçip kenar yüzlerden doğru çıkmasıyla meydana gelir. Bu iki

dik yüzey, renklerin daha küçük “prizma açlarına” kıyasla daha geniş bir dağılım göstermesine neden olur. Bunun sonucunda da renkler pek az üst üste biner, renk tür ve tonları son derece saf görünür, bir gökkuşağındakilere göre çok daha saftır.

Tepe çevresi yayı, gözlemcinin zenit (doruk) noktasının merkezinde konumlanmış, dairesel bir haledir. Bu doğa olayının güzel bir tanımına Les Cowley'nin internet sitesinden ulaşılabilir (Bkz. Kaynakça): “Tüm haleler içinde en güzeli, tepe çevresi yayıdır. İlk karşılaşma her zaman şaşırtıcıdır; son derece nazlı ve bu dünyaya ait değilmiş gibi görünen bir gökkuşağı, suya borçlu olduğu köklerinden kaçıp zenit (doruk) çevresine belli belirsiz sarılmış gibidir. Bu manzarayla ilk kez karşılaşan gözlemciler tarafından çoğu zaman “ters dönmüş bir gökkuşağı” olarak tanımlandığı olur. Hatta bir defasında, ilginç bir şekilde “gökyüzünde bir sırtışı” olarak tarif edildiğini de duydum. Güneş oldukça alçakta olduğunda, hele de görünürde yalancı güneşler varsa tam yukarı, zenit (doruk) yakınlarına bakın. Yayın merkezi daima Güneş'e dönüktür ve kırmızı renk, dış çizgisindedir.”

Şimdi biraz geometri ve trigonometri zamanı. Güneş ışığı buz kristalinin tepesinden girer (Şekil 59.1'de gösterildiği gibi) ve kenardan çıkar.



Şekil 59.1. Tepe çevresi yayı için ışın izleği

Halenin görünür olabilmesi için Güneş'in yüksekliği θ için bir koşul belirleyebiliriz; diğer bir deyişle θ , belirli bir açıdan büyük (ya da küçük) olmalıdır. Önceden yaptığımız gibi, buzun kırılma endeksini 1,31 olarak alacağız. *Şekil 59.1*'e baktığımızda toplam dahili yansımanın çıkış noktasında gerçekleşmesi durumunda hiçbir ışının gözlemciyle buluşmayacağını kestirebiliyoruz. Bu, (normalden dikey yüze doğru ölçülen) dahili geliş açısı θ_2 için dolayısıyla da yatay yüzeye harici geliş açısı θ_1 için kısıtlamalar getirir. Eğer $r_2 \geq \pi / 2$ ise toplam dahili yansıma meydana geleceğinden, eşitliği limit durumu olarak aldığımızda elimizde

$$\sin \theta_2 = n_2 \sin r_2 = n_2 = n_1^{-1} = (1,31)^{-1} \approx 0,76 \quad (59.1)$$

vardır zira bu, buzdan havaya doğru bir girişimdir. Öyleyse,

$$\theta_2 \geq \arcsin (0,76) \approx 49,7^\circ \quad (59.2)$$

Bu nedenle $r_1 \leq 40,3^\circ$ 'dir ve hava–buz girişimi için $\sin \theta_1 = n_1 \sin r_1$ olduğundan toplam dahili yansıma şu durumda gerçekleşecektir:

$$\theta_1 \leq \arcsin [1,31 \sin (40,3^\circ)] \approx 57,9^\circ \quad (59.3)$$

Bu şartlar altında, hiçbir ışın gözlemcinin gözüyle buluşmayacak, dolayısıyla tepe çevresi yayı sadece $\theta_1 \geq 57,9^\circ$ durumunda, diğer bir deyişle, Güneş'in yüksekliği $\theta (= 90^\circ - \theta_1)$ 32° 'den az olduğunda görülebilecektir. Benzer hesaplamalara diğer hale türleri için de başvurarak, solar yükseklik üzerindeki ilgili sınırlamaları (ve görünürlük enlemlerini) veya buz yönelimini öğrenmek mümkündür. Aslına bakarsanız *ufuk çevresi yayı* için yapılan hesaplamalar, burada yapmış olduklarımızı tamamlayıcı niteliktedir (ayrıntılar için bkz. Adam (2006)). İsminden de anlaşılabilceği üzere bu yay, ufuk çizgisine paraleldir ve yine dağılım nedeniyle renklidir. Görüp görülebilecek en muhteşem yaylardan biri olduğu söylenebilir (şimdiye değin okurlar, “ateş gökkuşağı” gibi yanlış bir

tabirle isimlendirilen bu tür manzaraların fotoğraflarını içeren e-postalar almış olabilirler; bana da aşağı yukarı ayda bir kez bu e-postalardan geliyor!). Ufuk çevresi yayı, ışığın, yatay konumdaki çok sayıda altıgen biçimli buz kristali levhasının dikey yüzünden geçerek kırılma uğraması ve alt zeminden çıkması sonucu meydana gelir. Bu yay, sadece 58°'den fazla olan (ve yukarıda ele alındığı üzere 32°'yi tümleyen) solar yükseklikler için gerçekleşebilir ve elbette bu da söz konusu yayın görülebileceği enlemler için bazı sınırlamaların olduğu anlamına gelir.

60. Soru: Düzlemimin gölgesi etrafındaki şu renkli halkalar nedir? [Bkz. Renkli fotoğraflar kesiti]

Buna *ışık halkası* denir. Siz hemen itiraz etmeden söyleyeyim; uçmakla yürümenin aynı şey olmadığıнын farkında olsam da bu doğa olayıyla ayaklarımız sıkı bir şekilde toprağa basarken de pekâlâ karşılaşabiliriz! Dağcılık ve tırmanış sporlarıyla ilgilenenler fark etmiştir; bazen sırtları alçakta seyreden Güneş'e dönük bir şekilde durup, altlarındaki kalın sis örtüsüne bakarken, kendi başlarının gölgesi etrafında bir dizi renkli dairesel halka (ya da yay) görür. Herhangi biri, arkadaşının gölgesini görürken, bir gözlemci sadece kendi başının üzerinde halkalar fark edecektir. Işık halkalarına ilişkin ayrıntılı bilgiye yine Les Cowley'nin internet sitesinden ulaşılabilir (<http://atoptics.co.uk/>).

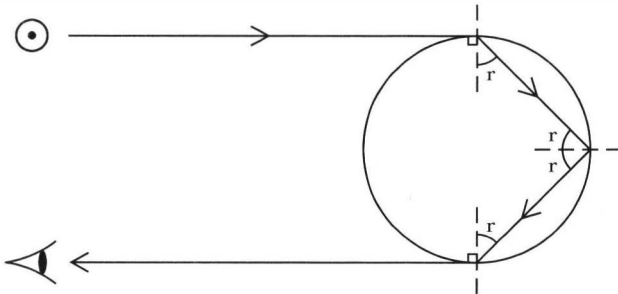
19. yüzyıl boyunca, orta Almanya'daki Brocken Dağı'nın tepesinden ışık halkalarıyla ilgili pek çok gözlem yapılmış, bu nedenle de bu doğa olayı Brocken yayı ya da "Brocken Hayaleti" adıyla bilinir olmuştur (ne de olsa söz konusu halkalarla, sıklıkla orta Almanya'nın dağlık Harz bölgesindeki bu yüksek zirvede karşılaşılıyordu). Romantik yazarların gözdesi olmuş bu imgeyi, Coleridge de "Constancy to an Ideal Object" (*İdeal bir Nesneye Bağlılık*) adlı şiirinde selamlamıştı. Işık halkalarının sıcak hava balonlarından gözlemlendiği de oluyordu; halka, balonun bulutların üzerine düşen gölgesi etrafında belirirdi. Gökkuşağı kadar sık olmasa

da, bu halkalarla bugünlerde çoğunlukla havadayken, uçağın gölgesi etrafında rastlanabilir. Gözlemci bu halkayı saptamak için bir kez dikkatlice baktıktan sonra isterse sonraki pek çok uçuşunda da aynı manzarayı yakalayacaktır (elbette, uçağın gölgede kalan tarafında oturuyor olması şartıyla!)

Bu doğa olayı en basit şekliyle, ışığın buluttaki damlacıklarla geriye doğru saçılma uğraması olarak anlaşılabilir. Işık, gözlemciye doğru gelirken sıra dışı bazı dönüşümlere uğrar (eş karmaşıklıkta bir matematiksel açıklamayla); gökkuşağı oluşumuna ilişkin temel açıklamalardan farklı olarak bunlar, standart geometrik optiğin *öngöremediği* dönüşümlerdir. Bunun geçerli olduğunu, popüler meteoroloji metinlerinden en az birindeki (örneğin, Ahren'in kaleme aldığı *Meteorology Today (Günümüzde Meteoroloji)* adlı kitapta) yanılığı işaret ederek rahatlıkla kanıtlayabiliriz. Bu metinde ışık halkası, küre biçimindeki bir yağmur damlası üzerinde teğetsel gelişe sahip bir ışık ışınının, damlanın içine doğru kırılma uğraması, arka yüzeye yansıtılması ve damladan, gözlemcinin gözüne tamamen anti paralel bir yönde, tekrar ortaya çıkmasıyla açıklanır (*Bkz. Şekil 60.1*).

Böyle bir tablo doğruysa, ışının geliş açısının 90° olması ve Snell yasasından hareketle kırılma açısının

$$r = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \quad (60.1)$$



Şekil 60.1. Işık halkası için yansış bir ışın izleği

olması gerekir; burada n yağmur damlasının kırılma endeksidir. Bir hava/su sınırı için $n \approx 4/3$, bu nedenle $r \approx 48,6^\circ$ 'dir (meydana geldiğini yukarıda belirtmiş olsa da burada dağılmanın etkilerini görmezden geliyoruz; ayrıca bir su/hava sınırı için n 'nin tersinin kullanılması gerektiğine de dikkat etmeliyiz). Bu, (yansıma kanunu uyarınca) ışının, damlanın arkasında bir dik açıdan daha fazla sapmaya uğradığı anlamına gelir; zira $2r \approx 97,2^\circ$ 'dir ve simetri uyarınca, çıkış hâlindeki ışın için damlanın *içindeki* geliş açısı yine $48,6^\circ$ 'dir; böylelikle toplam sapma açısı (tıpkı birincil gökkuşağı örneğinde gördüğümüz gibi)

$$\begin{aligned} D(i) &= \pi + 2i - 4 \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right) \\ &= -4 \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) \approx -194,4^\circ \text{ or } +165,6^\circ \end{aligned} \quad (60.2)$$

olur; $i = 90^\circ$ olduğundan (mod 2π). Bu, çıkış hâlindeki ışının “anti paralel” olmayı aşağı yukarı 14° ile kaçırdığı anlamına gelir. Bu, ışık halkaları mekanizmasında işlemeyecektir! Bu durumdan çıkmanın iki olası yolu var. Yukarıdaki grafiğin doğru olması için kırılma endeksi n için hangi değere ihtiyacımız olduğunu sorabiliriz; önceden olduğu gibi yine $i = 90^\circ$ ancak bu kez $r \approx 45^\circ$ 'dir. Öyleyse,

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \sqrt{2} \approx 1,4 \quad (60.3)$$

Su ile cam arası bir şeye ihtiyacımız var, belki de plastik işimizi görür! Ancak bulutların plastik küreciklerden oluştuğu yönünde sağlam bir kanıtımız olmadığına göre, bu ihtimali gözden çıkarabiliriz. Peki, elimizde ne kaldı? Bir başka olasılık da ışının yolculuğu boyunca (veya yolculuğunun bir kısmında) yüzeyin etrafında (bir yüzey dalgası olarak) bir şekilde seyrettiğidir. Yüzey kısmının kayıp parça θ 'yı kapsadığını da varsayarsak

$$\theta = 180^\circ - 2(180^\circ - 2r) = 4r - 180^\circ \approx 14,4^\circ \quad (60.4)$$

olur; zira $r \approx 48,6^\circ$ 'dir. Bu durumda damlacıktaki izleğin, çıkış hâlindeki anti paralel bir ışının parçası olması için simetrik olması gerekmez. Ne yazık ki ışık halkalarının ayrıntılı bir matematiksel incelemesi, bu kitapta ele alınmayacak derecede karmaşıktır ancak ilgilenen okurlar, daha fazla bilgi için Kaynakça'ya başvurabilir. Ayrıca Philip Laven tarafından hazırlanmış ve pek çok optik doğa olayının, özellikle de gökkuşağı ve ışık halkalarının ele alındığı mükemmel bir internet sitesi mevcuttur. Optik ışık halkaları için son derece ikna edici bir açıklamanın yer aldığı bu internet sitesi de yine Kaynakça'da bulunabilir.

Alıştırma: (60.4) numaralı denklemi türetmeye çalışın.

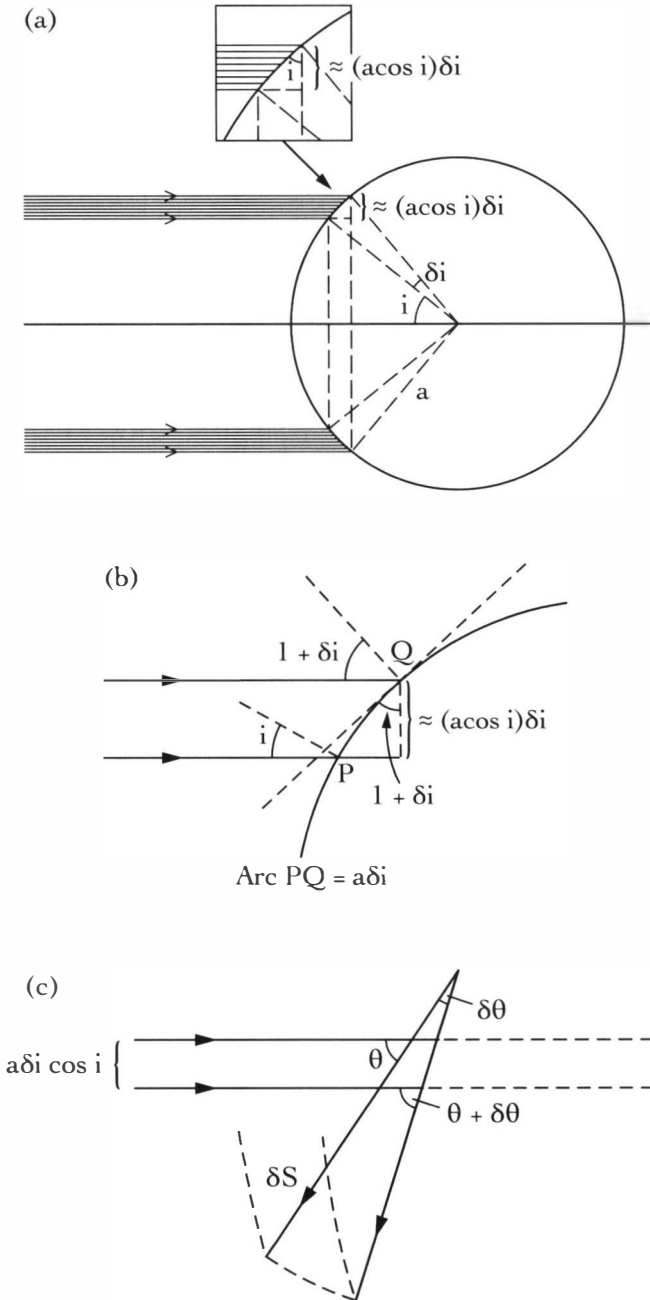
61. Soru: Geometrik optik, gökkuşağı açısında neden sonsuzluğa işaret eder?

“Gökyüzünde” adlı bu bölümü, 49. Soru'da ele aldığımız konuyla, geometrik optiğin (herhangi bir sırada) gökkuşağı açısına gelince esasen tıkanması, gökkuşağının yönüne karşılık gelen sapma açısı karşısında çaresiz kalması durumuyla kapatalım.

İnce bir ışın “demetinin” tıpkı *Şekil 61.1(a)*'da ve içindeki kısımda olduğu gibi, küre biçimindeki (ve a yarıçapındaki) bir yağmur damlasına etki ettiğini düşünelim. Bu demeti oluşturan ışınların geliş açıları (i , $i + \delta i$) aralığında seyrediyor olsun. Grafik, giren ışınların yönüne paralel olan eksen civarında silindirik simetri özelliği gösterir; bu nedenle silindirik demet tarafından “görülen” alan,

$$\delta A \approx (2\pi a \sin i)(a \cos i) |\delta i| = \pi a^2 |\delta i| \sin 2i \quad (61.1)$$

Bu ışınlar aşağıda belirleyeceğimiz bir tam açıyı işgal eden bir açısal aralığa (θ , $\theta + \delta\theta$) saçılmıştır. Bu küçük aralıkla ilişkili bir “soğan halkası” yüzey alanı elemanı δS de *Şekil 61.1(c)*'den hareketle



Şekil 61.1. Işık ışınları saçılımının basit geometrisi

$$\delta S \approx (2\pi a \sin \theta) (a |\delta \theta|) = 2\pi a^2 \sin \theta |\delta \theta| \quad (61.2)$$

olur ve bir tam açı elemanına denktir:

$$\delta \Omega = 2\pi \sin \theta |\delta \theta| \quad (61.3)$$

Şimdi eğer I_0 geliş ışık enerjisinin giriş açısına dik bir birim alana düşme oranıysa, damladan çıkan bir birim tam açığa girme oranı şu olur:

$$I \approx I_0 \frac{(\pi a^2 \sin 2i) |\delta i|}{(2\pi \sin \theta) |\delta \theta|} \quad (61.4)$$

ve sınıra doğru geçtiğinde, görelî enerji oranını buluruz:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{a^2 \sin 2i}{2 \sin \theta} \left| \frac{d\theta}{di} \right|^{-1} \quad (61.5)$$

49. Soru'da ele aldığımız gökkuşağı probleminde, gelen ışının sapmasını $D(i)$ ile göstermiştik; burada da $\pi - \theta(i)$ 'dir. Öyleyse $D(i)$ 'de (gökkuşağı açısını tanımlayacak) bir uçdeğerin koşulu sadece $D'(i) = 0$ 'dır. Bu da $\theta'(i) = 0$ anlamına gelir ve geometrik optikten yararlanıldığında gökkuşağı kostiğinde ortaya çıkan tekilliği açıklar.

(61.5) numaralı denkleme dayanarak geometrik optik konusunda söylenebilecek birkaç şey daha var. Görünüşe göre bu denklem, aynı zamanda, $\theta = 0^\circ$ ve 180° derecelerde (yani sırasıyla $D(i) = 180^\circ$ ve 0° 'de) bir sonsuz yeğînlîk de öngörüyor. Ancak θ (dolayısıyla D) geliş açısının yalnızca $i = 0$ olması durumunda bu değerleri alabilir; özellikle bir dahilî yansıma için (bunun için $\theta = 0^\circ$ 'dir)

$$\frac{\sin 2i}{\sin \theta} \approx \frac{2i}{\theta} \quad (61.6)$$

Ancak $i \approx 0^\circ$ olduğunda

$$\theta = 180^\circ - D(i) \approx 180^\circ - (2i - 4r + 180^\circ) = 4r - 2i \quad (61.7)$$

Bu nedenle, Snell yasası i 'yi nr 'ye indirgediğinden,

$$\frac{\sin 2i}{\sin \theta} \approx \frac{i}{2r - i} \approx \frac{nr}{2r - nr} = \frac{n}{2 - n} \quad (61.8)$$

Su için $n \approx 4/3$ demiştik; o hâlde bu oran, ikiye eşittir. (61.7) numaralı denklemden hareketle, bu dar geliş açılarını limitinde

$$\frac{d\theta}{di} = 4 \frac{dr}{di} - 2 = \frac{4}{n} - 2 = 1 \quad (61.9)$$

olur, dolayısıyla bu durumda I için dikkate değer bir artış söz konusu değildir.

Son olarak, Airy kuramı olarak bilinen kuramın, gökkuşağı açısının yakınlarındaki asıl yeğirlik dağılımı için daha iyi bir yaklaşıtırm sunduğunu not düşebiliriz. İngiltere Kraliyet Astronomu Sir George Biddell Airy tarafından 1838'de geliştirip yayımlanan bu kuram, gözlem açısından tam olarak uygun değillerse de, ışığın dalga doğasıyla da bağlantı kurar. Ancak gökkuşağının matematiksel modeli için büyüleyici bir ilerleme anlamına gelen bu kuramı burada ele almak bizi kitabın odağından, ne yazık ki fazlasıyla uzaklaştıracaktır...



62. Soru: Kuş yumurtalarının şeklini nasıl modelleyebilirsiniz?

Evimin önünde üç sütunlu bir veranda var ve her sütunun içeri bakan kısmı, yuva yapmak için yer arayan kuşların gözde mekânı; şimdiye değin pek çok güvercin, serçe ve sakaya ev sahipliği yaptık. Ne yazık ki doğru yönden güçlü bir rüzgâr estiğinde yuvalar çoğu zaman dağılıp bozuluyor. Ancak anne baba kuş, bu durumdan dersler çıkarmayı ihmal etmiyor: Askılı sepet biçimindeki çiçek saksılarımızın yeni aileleri için çok daha uygun olduğuna karar verdiklerinden beri, kedi nüfusunun keyfi kaçtı. Bu nedenle “kuş yuvalarının” olduğu, askılı sepet saksılarımızdaki çiçekleri sularken çok dikkatli olmamız gerekiyor; çoğu zaman sepetlerin içinde yumurtalar buluyoruz. Bu bir konum, konum, konum meselesi...

Kuş yumurtalarının geometrik özelliklerinin, kabuk geçirgenliği, kuluçka süresi hatta tavuk yetiştiriciliğinde kullanılan yumurta tepsilerinin tasarımı ile ilgili hesaplamalarda yararlı olabileceğini öğrendiğimde, bunu çok ilginç bulmuştum. O yüzden, kuş yumurtalarının şekli ve bu yumurtaların yüzey alanı ile hacmi arasındaki ilişkiyle ilgili matematiksel modeller olması hiç de şaşırtıcı değildir. Herhangi bir kapalı yüzey için bu yüzeyin alanı A ile hacmi V arasındaki ilişki aşağıdaki gibi

$$A = kV^{2/3} \quad (62.1)$$

olarak ifade edildiğinde k , söz konusu kapalı yüzeyin şekline bağlı olan, bir boyutsuz sabittir. Boyutla ilgili bazı noktalar nedeniyle bu açıktır: her iki yan da (uzunluk)² boyutlarına sahip olmalıdır, zira hacim V ve yüzey alanı A , doğrusal bir boyutun sırasıyla küpü ve karesi olarak ölçeklenir. Bir küp söz konusu olduğunda $k = 6$ olduğu açıktır. Bu durum, küresellik endeksi olarak bilinen son derece yararlı bir nicelikle ilişkilidir çünkü belirli bir üç boyutlu şeklin, küresel özellik göstermeye ne derece yakın olduğunu ölçmeye yarar (ayrıntılar için bkz. 63. Soru). 64–67 numaralı sorularda, sırasıyla trigonometri, cebir, analiz ve geometri kavramlarının yön

verdiği matematiksel modelleri inceleyeceğiz. Bir yumurtaya bu kadar farklı açılardan bakılabileceğini kim bilebilirdi?



62. Soru - Saka yumurtaları; yuva askılı bir çiçek sepetinin içinde.

Alıştırma: Bir küre için $k = \sqrt[3]{36\pi} \approx 4,836$ olduğunu gösterin. Sonra da 63. Soru'ya geçin!

63. Soru: Küresellik endeksi nedir?

Küresellik endeksi, hacmi alan yüzeyine göre belirlemeyi sağlayan, yararlı bir ölçümdür. Hacim V ile alan yüzeyi A , doğrusal bir boyutun sırasıyla küpü ve karesi olarak ölçeklenir; bu nedenle, bir nesnenin hacminin yüzey alanına olan oranını ölçmek için kullanılacak uygun bir *boyutsuz* ölçünün, $V^{2/3}A^{-1}$ oranının bir kuvvetini içermesi gerektiği açıktır. İşte küresellik endeksi de böyle bir ölçüdür ve şöyle tanımlanır:

$$x = \frac{4,836 V^{2/3}}{A} \quad (63.1)$$

Hmm... Bu 4,836 da nereden çıktı? Ne de olsa herkesin aşına olduğu bir sayı değildir. Bu sayı, bir küreye ait küresellik endeksinin

bir olması gerekliliğinden kaynaklanır, öyleyse geçici olarak, yukarıdaki sayı yerine α yazacak olursak, R yarıçapındaki bir küre için

$$x = 1 = \frac{\alpha V^{2/3}}{A} = \alpha \frac{\left(\frac{4}{3} \pi R^3\right)^{2/3}}{4\pi R^2} = \alpha \frac{\left(\frac{4}{3} \pi\right)^{2/3}}{4\pi} \quad (63.2)$$

olur; buradan da $\alpha = (4\pi)^{1/3} \cdot 3^{2/3} \approx 4,836$ olduğunu buluruz. Herhangi bir kapalı yüzey için, hacmin yüzey alana olan en yüksek oranına küre sahip olduğundan, başka şekiller için $0 < x < 1$ olur. Birkaç örnek üzerinden düşünelim: Bir küp için $x \approx 0,806$ olduğunu gördük; “öpüşen” (diğer deyişle, teğetsel temas hâlindeki) iki küre içinse $x = 2^{-1/3} \approx 0,794$ Her zaman derecede bir olduğu için küresellik endeksine başvurmayı severim ancak biyolojiyle ilgili bazı durumlarda *yassılık endeksi* γ olarak bilinen bir başka endeks kullanıldığı da olur:

$$\gamma = \frac{A^3}{V^2} \propto x^{-3} \quad (63.3)$$

ve genellikle bu nedenle x 'ten büyüktür; bir küre için aşağı yukarı 113, bir küp için 216'dır. Dikkatli okurlar hemen fark etmiş olmalı (1) yukarıdaki örneklerin hiçbirinde kürenin yarıçapı ya da küpün kenar uzunluğu belirtilmemiştir ve (2) buna gerek de yoktur çünkü (tasarım nedeniyle) tüm boyutsal nitelikler değerlendirmemizin dışında kalır.

64. Soru: Kuş yumurtasının şekli trigonometrik olarak modellenebilir mi?

Farklı boyut ve şekillerdeki yumurtalara ait bir dizi A ve V ölçülerini inceleyerek, çoğu yumurta için $k \approx 4,951$ olduğunu, diğer bir deyişle yumurtaların bir küreden çok “küp biçiminde” olduklarını ortaya koyan bir çalışma mevcut! Her ne kadar yumurtaların nadiren yayvan sferoit (küremsi) simetrisine sahip olduğu bi-

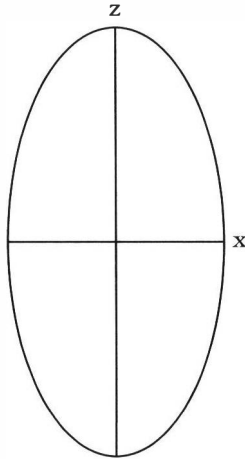
linse de başarılı bir yaklaşıtımda bulunmak için bu durumdan yararlanılabilir. Bu amaçla, tam da böyle bir nesne için k değerini belirleyeceğiz: Nesnemiz, bir elipsin, kendi *büyük* eksenı etrafında döndürölmesi sonucu elde edilmiş bir dönel elipsoit olan bir yayvan sferoit olsun (küçük eksen etrafında döndürölmesi durumunda bir *basık* sferoit elde edilmiş olurdu). Bu tür elipsoitlerin yüzey alanı kolaylıkla hesaplanır (Bkz. 64.4 numaralı denklem). k değeri teorik olarak belirlendikten sonra yumurtanın hacmini, toplam daldırma gibi dolaylı yöntemlerle ölçerek elipsoit modelin doğruluğu tahmin edilebilir. Sadece ufak bir hata yüzdesi söz konusysa, yüzey alanı da benzer bir hata payıyla hesaplanabilir.

Öyleyse, yarı büyük eksen uzunluğu a , yarı küçük eksen uzunluğu $b < a$ olan bir elipsimiz olduğunu düşünelim (Bkz. Şekil 64.1). $(x - z)$ düzlemindeki elips için denklem:

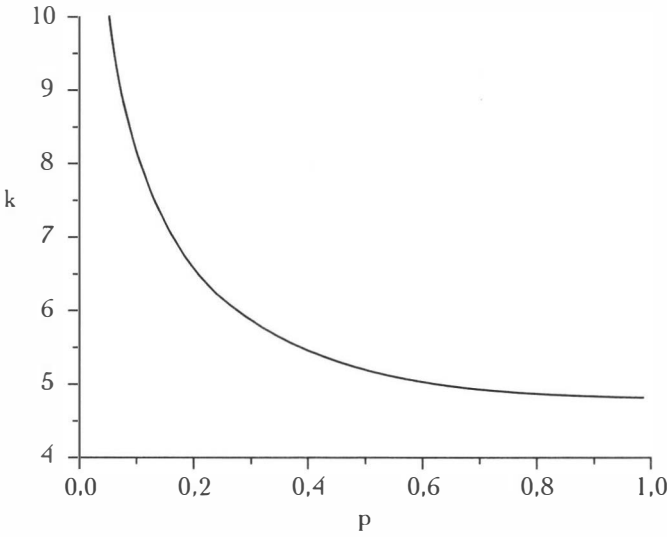
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \quad (64.1)$$

Karşılık gelen yayvan elipsoitin denklemi,

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \quad (64.2)$$



Şekil 64.1. Eksen uzunlukları a ve $b < a$ olan elips



Şekil 64.2. $p = b/a$ durumunda $k(p)$

İlgili literatürde “uzama” parametresi $a / b = p^{-1}$ olarak tanımlanır; açık ki elipsoitin eksen kayıklığı ϵ , $\epsilon = \sqrt{1 - p^2}$ ilişkisi yoluyla p ile alakalıdır. Burada (dikey yönelime sahip) elips odaklarının $(0, \pm c)$ ve $c^2 = a^2 - b^2$ ’de olduğuna ve ϵ ’un, c/a olarak tanımlandığına dikkat edin. Şimdi, basit hesaplamalara başvurarak yayvan elipsoitin hacmini

$$V = \frac{4}{3} \pi a b^2 = \frac{4}{3} \pi p^2 a^3 \quad (64.3)$$

buluruz; yüzey alanıysa,

$$A = 2\pi b \left(b + \frac{a}{\epsilon} \arcsin \epsilon \right) = 2\pi a^2 \left(p^2 + \frac{p}{\sqrt{1 - p^2}} \arcsin \sqrt{1 - p^2} \right) \quad (64.4)$$

(62.1) numaralı denklemden hareketle, k yalnızca p ’ye dayanarak

$$k = C p^{-1/3} \left(p + \frac{\arcsin \sqrt{1 - p^2}}{\sqrt{1 - p^2}} \right) \quad (64.5)$$

olarak tanımlanır; burada C sabiti $2\pi (4\pi/3)^{-2/3} \approx 2,418$ ’dir. İlgili

li $k(p)$ grafiğı ise *Şekil 64.2*'de gösterilmiştir. Burada k 'yi $p \rightarrow 1^-$ limiti olarak düşünebiliriz; bu bir kürenin limit durumudur. $k(1)$ belirsiz olsa da, limit vardır ve $k = 2C \approx 4,836$ 'dır; yani yukarıda karşılaştığımız sayıdır.

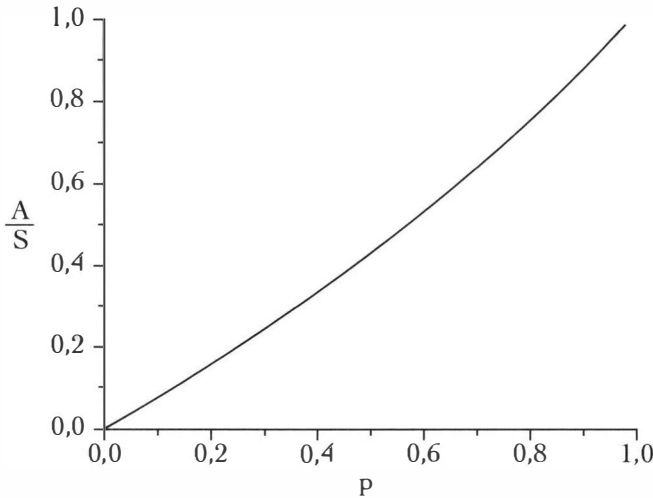
Alıştırma: (64.5) numaralı denklemin aşağıdakine denk olduğunu gösterin

$$k = \left(\frac{9\pi}{2p} \right)^{1/3} \left(p + \frac{\arccos p}{\sqrt{1-p^2}} \right) \quad (64.6)$$

Ayrıca a yarıçapında ve sferoiti içine alan bir küre düşünürsek, bu kürenin yüzey alanı $S = 4\pi a^2$ olacak, alanların oranıysa

$$\frac{A}{S} = \frac{1}{2} \left(p^2 + \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \arcsin \sqrt{1-p^2} \right) \quad (64.7)$$

Bunu *Şekil 64.3* üzerinde görmek de mümkündür; grafiğindeki değer kümesinde neredeyse bir doğrusal fonksiyondur; $b \rightarrow a$ olduğundan bire yaklaşır, böylelikle küre de geri kazanılmış olur.



Şekil 64.3. p 'nin bir fonksiyonu olarak A/S alan oranı

Bildiğim kadarıyla uçan kuşlara ait yumurtalar, küre şeklinde olmaz (görünüşe göre bu, yumurtlama yönteminin bir sonucudur). a/b uzamalarının değer aralığı 1,19 ile 1,64 arasında seyrederek, buna karşılık gelen p ise 0,84'ten başlayıp 0,61'e dek inen bir aralıkta bulunur ve 0,70 ile 0,75 arasında dikkat çekici bir yoğunlaşma göze çarpar. Şekil 64.2'deki $k(p)$ grafiğinde de görülebileceği üzere k , bu değer aralığında oldukça yavaş bir çeşitlilik gösterir, böylece $k(0,70) \approx 4,94$ ve $k(0,75) \approx 4,90$ 'dır. Bu değer aralığı, bir küre için söz konusu olan (ve daha önce gösterdiğimiz) 4,836'nın çok üzerinde değildir. Bazı sinekkuşu yumurtaları, yayvan sferoit şeklinden belirgin şekilde farklıdır; yumurtalar, daha çok fasulye tanelerine benzer. *Stellula calliope* türü sinekkuşunun yumurtasına ait bir model, l uzunluğundaki ve d çapındaki bir silindiri kaplayan r yarıçapındaki iki yarım küreden oluşur; aslında bu yumurtanın geometrisi eczane raflarında gördüğümüz “jel kapsül” şeklindeki ağrıkescicilere benzer!

65. Soru: Kuş yumurtasının şekli cebirsel olarak modellenenebilir mi?

Salt matematiksel bir düzeyde, bir dairedeki koordinat dönüşümlerinin (distorsiyondan çok daha net bir sözcük!) nasıl yumurta benzeri, kesitsel şekiller meydana getireceğini görmek ilginçtir. Birim çember denklemini ele alalım: $X^2 + Y^2 = 1$. Şimdi, aşağıdaki genel zorunluluğa uygun olarak (X, Y) düzlemi için koordinat dönüşümleri yapmaya geçiyoruz

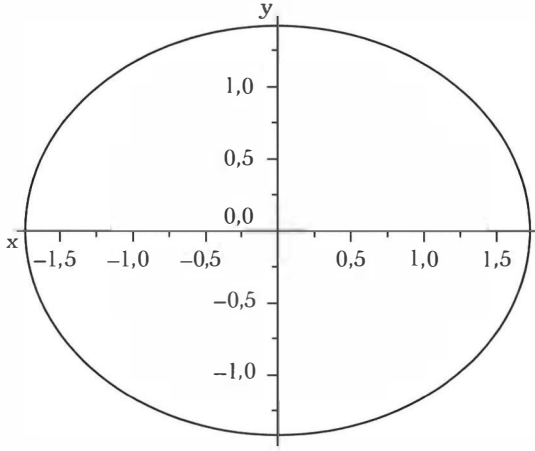
$$X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{af(x)} \quad (65.1)$$

böylelikle yeni koordinatlarıyla birim çember

$$x^2 + \frac{y^2}{[f(x/a)]^2} = a^2 \quad (65.2)$$

ya da kendimizi $y \geq 0$ ile sınırlandıracak olursak

$$y = af\left(\frac{x}{a}\right)\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (65.3)$$



Şekil 65.1. $f = k = b/a$ dönüşümü sonrasında birim çember

Yumurtalar (x eksenı civarında) aksi simetrik olduğundan, bunu yaparken genelliği kaybetmeyiz. İki basit dönüşüm şöyledir: (i) $f(X) = k = b / a$, aşağıdaki elipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (65.4)$$

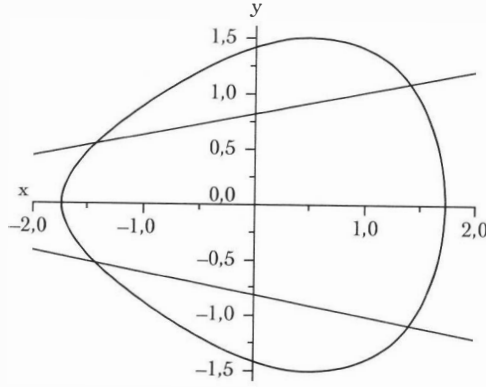
ve (ii) $f(X) = k + cX$ aşağıdaki “ovoit” (yumurtamsı) şekli verir:

$$x^2 + \frac{y^2}{\left(k + c \frac{x}{a}\right)^2} = a^2 \quad (65.5)$$

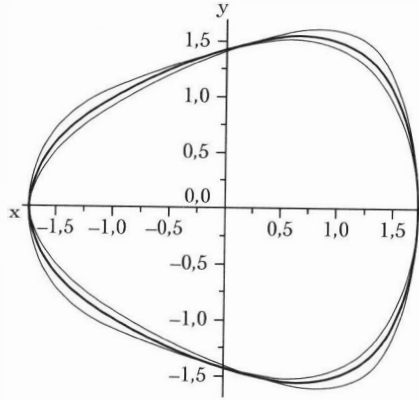
veya

$$y = a \left(k + c \frac{x}{a}\right) \sqrt{-1 \frac{x^2}{a^2}} \quad (65.6)$$

Şekil 65.1, $a = \sqrt{3}$ ve $b = \sqrt{2}$ parametre seçeneklerini, Şekil 65.2 ise aynı a değeri için $c = 1/\sqrt{3}$ ve $a = \sqrt{2/3}$ parametre seçeneklerini gösterir. Düz çizgiler, bu koordinat dönüşümü altında sabit kalan $Y = \pm$ doğrularına aittir.



Şekil 65.2. $f = k + cX$ dönüşümü sonrasında birim çember



Şekil 65.3. $f = k + cX + dX^2$ dönüşümü sonrasında birim çember

Şekil 65.3 çeşitli d değerleri (ve aynı a ile c değerleri) için karesel $f(x)$ seçeneklerine dayanır:

$$y = a \left(k + c \frac{x}{a} + d \frac{x^2}{a^2} \right) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (65.7)$$

$$x^2 + \frac{y^2}{\left(k + c \frac{x}{a} + d \frac{x^2}{a^2} \right)^2} = a^2 \quad (65.8)$$

66. Soru: Kuş yumurtasının şekli analiz bilgisi kullanılarak modellenenabilir mi?

Bir elipsi, ovoit bir yumurta elde edecek şekilde bozup şekillendirmenin bir başka ilginç tekniğini Carter'ın tavuk yumurtaları üzerinde yaptığı çalışmalara borçluyuz (bkz. Kaynakça). Burada yumurtanın çarpıklık derecesi, modelin parametrelerinden biridir. Başlangıçtaki elips, yumurtanın simetri ekseninden, bir enkesit temsil edecek şekilde modüle edilir. Elbette bu tür bir enkesit, eliptik değildir çünkü yumurtanın (eksene dikey konumdaki) azami genişliği eksenin orta noktasında değildir. Uygulanan dönüşüm elipsin, bir kutba doğru uzamasına neden olurken diğer kutba doğru onu bastırır.

Büyük eksen birim uzunluk ($a = 1$) ve küçük eksen $b < 1$ uzunluğu olarak ölçeklendirilmiş ve orijinde merkezlenen bir elips için yukarı (+) ve aşağı (–) yarıların y koordinatı aşağıdaki gibidir:

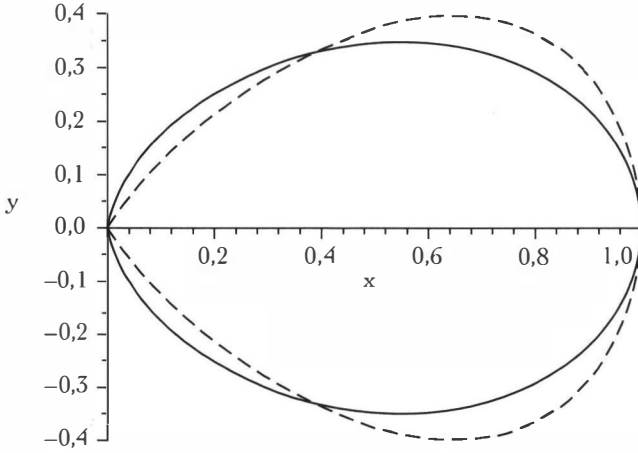
$$y = \pm b \left(\frac{1}{4} - x^2 \right)^{1/2} \quad (66.1)$$

Orjini daha “sivri” uca doğru kaydıracak (sözgelimi) $X = x + 1/2$ yerleştirmesiyle

$$y = \pm b \left[\frac{1}{4} - \left(X - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (66.2)$$

elde edilir; burada $X \in [0, 1/2]$. Doğrusal olmayan değişken değişimi $z = X^p$, $p > 0$ ile bu asimetri ya da çarpıklık da resme dahil edilebilir. Dikkat ederseniz $z(0) = 0$ ve $z(1) = 1$ olduğundan, büyük eksen uzunluğu bu dönüşümde korunur. Dahası, eğer $0 < p < 1$ ise $z > X$ ve $p > 1$ ise $z < X$ 'tir. Öyleyse, X 'in yerine resmen z yerleştirildiğinde, (66.2)'deki ifade X bakımından şöyle olur:

$$y = \pm b \left[\frac{1}{4} - \left(X^p - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (66.3)$$



Şekil 66.1. (66.3) numaralı denklemin iki b ve p değeri için grafiği

(Bu ifade, Şekil 66.1'de gösterilmiştir.) $X_m^p = 1/2$ olduğu $X = X_m$ durumunda, diğer bir deyişle

$$p = \frac{\log 2}{\log (1/X_m)} \quad (66.4)$$

olduğunda y uçdeğerlerinin ortaya çıktığı açıktır, böylelikle yumurtanın ölçülerinden hareketle bir p kestiriminde bulunmak da mümkün olur.

Yumurtaı X simetri eksenine sahip bir dñnel katı cisim olarak aldığımızda, yumurtanın hacmi

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 y^2 (X) dX \\ &= \pi b^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \left(X^p - \frac{1}{2} \right)^2 \right) dX \\ &= \pi b^2 \int_0^1 (X^p - X^{2p}) dX \\ &= \frac{\pi b^2 p}{(p+1)(2p+1)} \end{aligned} \quad (66.5)$$

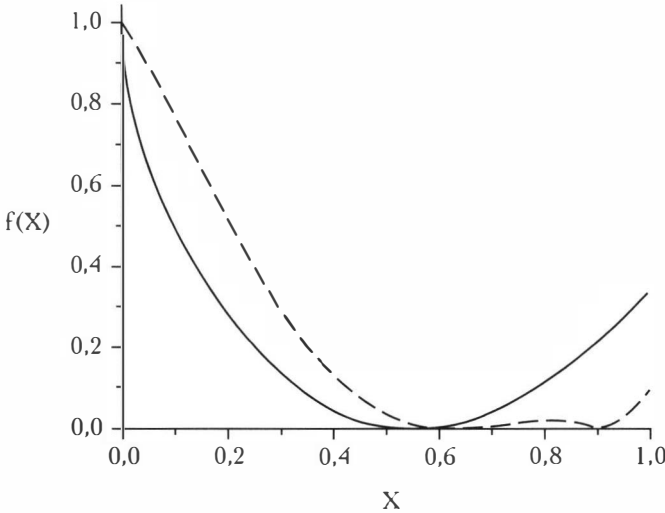
$p = 1$ iken bu, $V = \pi b^2/6$ 'ya düşecek, birim büyük eksen ve küçük eksen b uzunluğunda olan bir yayvan sferoitin (küremsinin) hacmini verecektir. Genellikle kapalı biçimde olmamakla beraber, bu ovoitin yüzey alanı S de belirlenebilir:

$$S = 2\pi \int_0^1 y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dX}\right)^2} dX$$

$$= \pi b \int_0^1 \left[1 + 4 \left(X^p - \frac{1}{2} \right)^2 (b^2 p^2 X^{2p-2} - 1) \right]^{1/2} dX \quad (66.6)$$

Bu integrali kapalı formda değerlendirmek genellikle zor olabilir ancak ikinci terimin büyüklüğünün birden daha az olması durumunda biraz ilerleme kaydedilebilir. Bu amaçla, S ifademizi kısaltarak

$$S = \pi b \int_0^1 \left[1 + f(X) \right]^{1/2} dX \quad (66.7)$$



Şekil 66.2. $p = 1,16$, $b = 0,7$ ve (kesikli eğriyle gösterilmiş) $p = 1,5$, $b = 0,7$ için $f(X)$ grafiği

yazalım; elbette burada $f(X)$, yukarıdaki integranddan hareketle tanımlanmıştır. Eğer $|f(X)| < 1$ ise integrand da bir yakınsak kuvvet serisi olarak açılabilir ve terim terime integrallenebilir.

$|f(X)|$ 'in büyüklüğüne bağlı olarak, açılımın sadece birkaç terimini korumak gerekebilir.

Şekil 66.2'de de görülebileceği gibi, $X \in (0,1)$ için $|f(X)| < 1$ 'dir ve X değer kümesinin büyük kısmı için integranda ilişkin seri de oldukça çabuk yakınsayacaktır. Bu nedenle

$$S = \pi b \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}f - \frac{1}{8}f^2 + \frac{1}{16}f^3 - \frac{5}{128}f^4 + \dots \right) dX \quad (66.8)$$

yazıyoruz; buradaki her bir terim, X 'in kuvvetlerini içerdiği müddetçe, doğrudan integrallenebilir.

Alıştırma: Genel b ve p değerleri için $|f(X)|$ 'in özelliklerini inceleyin.

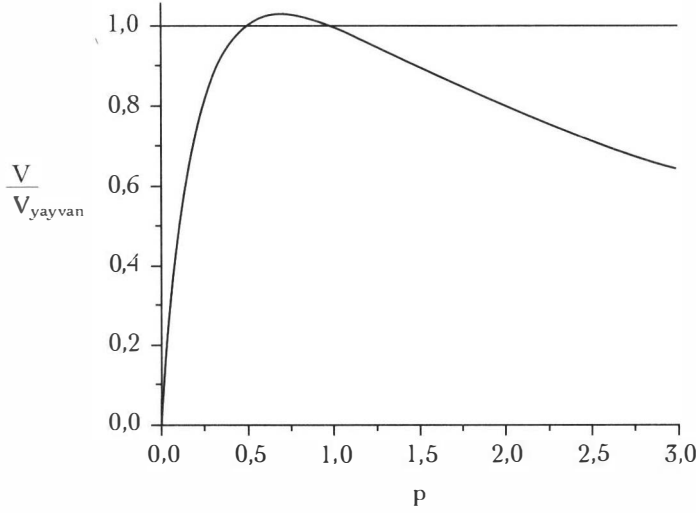
Alıştırma: Ovoitin uzun ekseni bire ölçeklenmediğinde, bunun yerine L uzunluğunda kaldığında ilgili p , V ve S değerlerinin de $\tilde{p}$, $\tilde{V}$, $\tilde{S}$ olacağı şu durumu gösterin:

$$p = \frac{\log 2}{\log (L/X_m)} ; \tilde{V} = L^3 V \text{ ve } \tilde{S} = L^2 S$$

Carter, yumurta şekillerine ilişkin iki önemli parametre tanımlar: Şekil endeksi ve çarpıklık endeksi.

Bu endekslerden ilki, ovoitin azami genişliğinin, uzunluğuna olan oranı olarak tanımlanır. Çarpıklık endeksi, ovoitin daha düz olan ucundan azami genişlik çizgisine olan uzaklığın, şeklin uzunluğuna bölünmesi ile ifade edilir. Bunun, son derece pratik bir nedeni vardır: Yumurtayı ölçmek için kumpas (kalınlık ölçer) kullanırken, yumurtanın daha düz olan ucundan başlamak daha kolaydır!

Şimdi gelin, modelimizdeki tavuk yumurtasının görelî hacimlerini, bir p fonksiyonu olarak karşılaştıralım. $p = 1$ iken enkesit elip-



Şekil 66.3. (66.9) numaralı denklemin grafiği

tiktir ve yumurta $V = \pi b^2/6$ hacmindeki bir yayvan sferoitir. Şekil 66.3'te de görülebileceği gibi

$$\frac{V}{V_{\text{yayvan}}} = \frac{6p}{(p+1)(2p+1)} \quad (66.9)$$

oranının biri geçmesi durumunda, dar bir p değer aralığı söz konusudur. Bu, en rahat şu fark incelendiğinde görülür:

$$D = \frac{V - V_{\text{yayvan}}}{\pi b^2} = \frac{p}{(p+1)(2p+1)} - \frac{1}{6} \quad (66.10)$$

Açıktır ki

$$2p^2 - 3p + 1 = (2p-1)(p-1) < 0 \quad (66.11)$$

diğer deyişle bir $1/2 < p < 1$ durumunda $D > 0$ olur çünkü $0 < p < 1/2$ ya da $p > 1$, $D < 0$ ve yayvan sferoitin hacmi, ovoitin hacmini aşar.

Carter, tavuk yumurtaları için suyla yer değiştirme yöntemi-ne dayalı hacim ölçümlerinin şunu gösterdiğini bulmuştu: Sonuç-

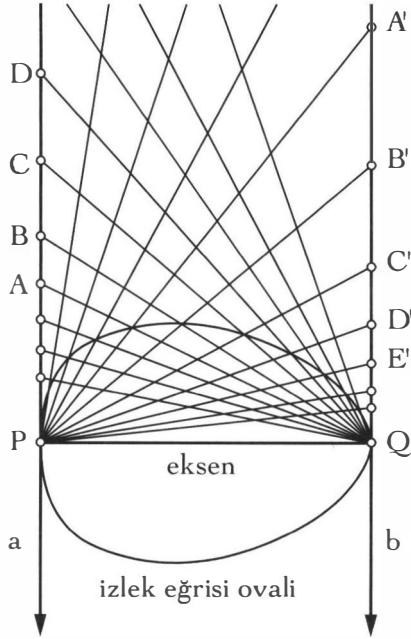
ların, neredeyse istisnasız bir şekilde ilgili yayvan sferoitin (küremsinin) hacminden küçük çıkmasına bakılırsa $p > 1$ olmalıydı. Ancak yukarıdaki cebrin de açıkça ortaya koyduğu gibi bir başka olasılık $0 < p < 1/2$ olmasıdır. Yine de uygulamada bu sadece, X eksenini orijininin yumurtanın daha yassı ucunda olduğu anlamına gelir.

67. Soru: Kuş yumurtasının şekli geometrik olarak modellenabilir mi?

Kuş yumurtalarının şekline ilişkin, yakın zamanda yayınlanmış D. E. Baker imzalı bir makale (bkz. Kaynakça), izdüşümsel geometriden yararlanan bir yaklaşım kullanır ve izlek eğrilerine dayanır. İzlek eğrilerinin temelindeki matematiksel kavram, izdüşümsel geometrinin bir parçasıdır; uzay (ister iki boyutlu ister üç boyutlu olsun) kendi üzerine doğru “haritalanır” ya da “yansıtılır”. Bir izlek eğrisi de doğrusal bir dönüşüm ile sürekli olarak hareket ettirilen bir noktanın geometrik yeridir. İzlek eğrileri, tomurcuk, yumurta, organ boşlukları (ventrikül) hatta embriyo şekilleri gibi doğada sıkça karşılaşılan şekilleri üretmekle ilgilenen Lawrence Edwards tarafından, Rudolph Steiner'in bir çalışmasından hareketle geliştirilmiştir. Bu konuyla ilgili ayrıntılı bir tartışma bizi, konumuzdan hayli uzaklaştıracaktır; bu nedenle, çalışmanın iki boyutlu uzaydaki izlek eğrileriyle ilgili olduğunu, daha fazla ayrıntı ve başka alıntılar için söz konusu makaleye bakılabileceğini söylemekle yetinelim.

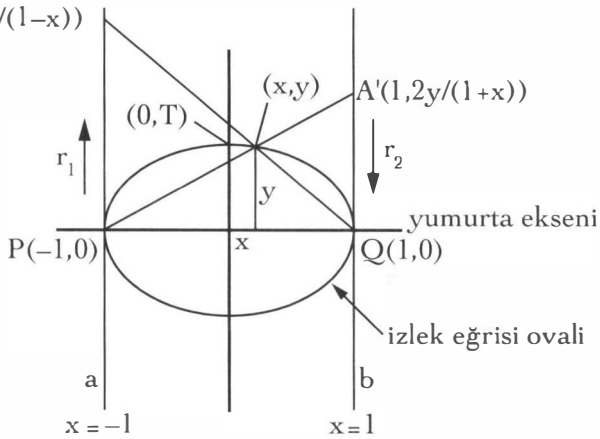
Buradaki temel fikir, yumurtanın enkesitine ait oval profilin, oval simetri eksenine düşey konumdaki iki doğru üzerinde bulunan noktaların (ve onları birleştiren doğruların) geometrik serisi ile belirlendiğidir. İddiaya göre, ortaya çıkan denklem, bir kuş yumurtası profili için mevcut en basit analitik tanımlamayı verir. Bu denkleme ulaşmak için, *Şekil 67.1*'deki Kartezyen düzlemde konumlanmış, $[-1, 1]$ x – eksenini aralığı üzerindeki simetri eksenine bakalım. Yumurta profili üzerindeki keyfi bir nokta, sahip olduğu

(a)



$A(-1, 2y/(1-x))$

(b)



Şekil 67.1. A ve A' için izlek eğrisi ovali ve geometrisi
(Baker'dan (2002) alınarak yeniden çizilmiştir)

koordinatlarla (x, y) tanımlanır ve şekildeki benzer üçgenlerden yararlandığımızda A' ve A noktalarına ait $y -$ koordinatlarının şöyle bulunabileceği görülür:

$$A_1 = \frac{2y}{1+x} \quad \text{ve} \quad A_2 = \frac{2y}{1-x} \quad (67.1)$$

*Şekil 67.1'*de de işaret edildiği üzere, PA' ve QA doğrularının kesişim noktalarından çıkan bir t parametresi kullanıyoruz; bu noktalar, oval profilin üzerinde bulunuyor. Öyleyse,

$$\frac{2y}{1-x} = cr_1' \quad \text{ve} \quad \frac{2y}{1+x} = dr_2^{-t} \quad (67.2)$$

olsun; bunlar sırasıyla, P ve Q 'daki, dikey doğrular üzerindeki nokta dizilerine ait parametrik denklemlerdir; diğer bir deyişle, yine sırasıyla, A ve A' noktalarına aittirler. $t = 0$ iken, başlangıçtaki konumlar sırasıyla c ve d 'dedir. Bu iki denklemden hareketle, t parametresi elenebilir ve böylece

$$\lambda \ln \left(\frac{2y}{c(1-x)} \right) + \ln \left(\frac{2y}{d(1+x)} \right) = 0 \quad (67.3)$$

denklemini elde edilir; burada $\lambda = (\ln r_2) / (\ln r_1)$. Bu ifadeyi sadece y 'yi çözmek için ters çevirdiğimizde

$$y = T(1-x)^{\lambda/(1+\lambda)} (1+x)^{1/(1+\lambda)} \quad (67.4)$$

buluruz; burada $T = \frac{1}{2} (cd)^{1/(1+\lambda)}$ Yumurta profili, bu izlek eğrisi tarafından, farklı şekillerse λ ve T şekli parametreleri tarafından belirlenir. Bunlardan ilki, yumurtanın simetrisine ilişkin bir ölçüdür ve T , yumurtanın (simetri eksenine düşey olan) ölçeklendirilmiş ekvatorial yarıçapıdır. Her ikisi de açık bir biçimde yumurtanın doğal geometrik şekliyle ilişkilidir. Özellikle λ , yumurta şekilleri ile modelleri kıyaslamada, başka modellerde ortaya çıkan bazı sabitlerden çok daha doğal ve işe yarar sonuçlar verir. Burada,

sayısal ayrıntılar bizim ilgi alanımıza girmiyor; $\lambda = 1$ için izlek eğrisi ovalinin bir elips olduğunu ve $\lambda > 1$ ise izlek eğrisinin bir ucunun daha küt, diğerininse daha sivri olduğunu not etmemiz, bizim için yeterli. Baker, bu iki parametreye yönelik istatistiksel bir yöntemden (en küçük kareler doğrusal olmayan regresyonundan) yararlanarak, 250 farklı yumurta türüyle uyumlu oldukça isabetli izlek eğrileri bulmuştur.

Tamamlarken

Son dört soruda, kuş yumurtalarının şekillerini modellemek için benimsenebilecek farklı yaklaşımlar üzerinde durmuş olduk. Bu modelleri birbirleriyle ve gerçek yumurtalara ait mevcut verilerle kıyaslamak ilginç olabilir. Böylesi bir proje, gösterilecek çabaya bağlı olarak, oldukça anlamlı ve içerikli bir çalışmaya da dönüşebilir; bu nedenle devamı, “ilgilenen okurlar için bir alıştırmadır” olarak bırakılmıştır!



Suyun İçinde (veya Üzerinde)

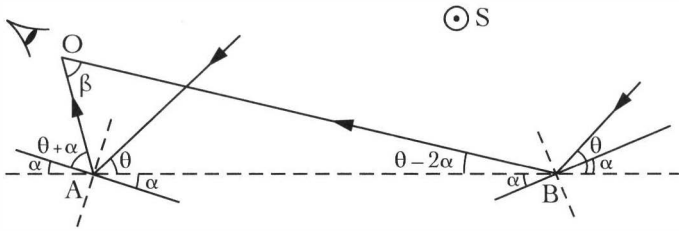
68. Soru: Sudaki parıltıların ardındaki sebep nedir?

[Bkz. Renkli fotoğraflar kesiti]

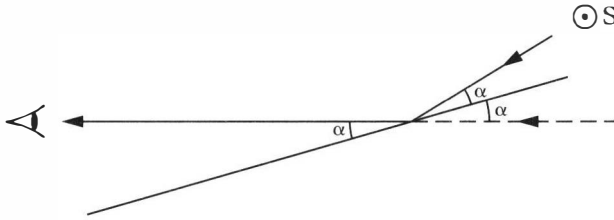
Güneş doğudan doğarken ya da batıdan batarken, suyun üzerinde altın rengi “güneş silindirleri” fark ettiğiniz oldu mu hiç? Bu büyüleyici “sıvı altın” görüntüsü, elbette, güneş ışığının su yüzeyinden yansımalarıyla meydana gelir ancak ardındaki sebep, *o kadar da* basit değildir. Bu doğa olayı, genellikle düz bir yüzey yansımaları şeklinde olmaz; su yüzeyi dalgaların etkisiyle yoğunlukla hareketlidir. Bu dalgacıkların her biri güneş ışığını (ya da başka kaynaklardan gelen ışığı) yansıtan ayrı birer yüzey olabileceğinden, sayısız küçük “ışıldan” ya da güneşin, şekil bozukluğuna uğramış imgesinden oluşmuş bir “parıltı yolu” ile karşı karşıyayızdır. Aslında, bir parıltı yolunun ardında yatan mekanizma, bir ışık sütunu meydana getiren mekanizmaya çok benzer (bkz. 57. Soru). Tabii yüzeyin “engebeli” hâli, yer yer çeşitlilik gösterebilir; bir su birikintisinin bir kısmı görece dinginken suyun başka kısımları, rüzgârın etkisiyle “kedi pençesi” biçiminde, engebeli bir görüntü verebilir, suyun başka kısımlarıysa dalgacık oluşumunu sınırlandıran tabakalarla kaplı olabilir. Bu nedenle, her gözlem doğadaki çoğu şey gibi kesinlikle benzersizdir. Yansıma ile ilgili bir olgu olduğundan, günbatımında görülen belki altın sarısı, kırmızı hatta somon pembesi parıltılar, daha da nefes kesici güzellikte olabilir.

Önce tüm parıltı yollarında görülen temel özellikler üzerinde duralım; sonra da bazı basit geometrik yaklaşımlardan yararlanarak bunları açıklamaya çalışalım. Havadan bakıldığında parıltı yolları, genellikle eliptik bir görüntü verir. Bu sebeple, suyun kenarında duran bir gözlemci çoğu kez uzamış bir elips görecektir; bu, parıltı yoludur. Güneş yüksekte olduğunda parıltı yolunun açılma uzunluğu (gözlemcinin dönük olduğu yönde), maksimum dalga eğimi α 'nın *dört katıdır*. Bunun nedeni, dalgaların hem gözlemciye doğru gelmesi hem de gözlemciden uzaklaşmasıdır (2α 'lık bir fark) ve yansımanın ışınları, geliş açısının iki katıyla sapmaya uğratmasıdır.

Bu durumu farklı bir biçimde gösteren *Şekil 68.1*, ışınların, gözlemciye, 4α 'lık bir açıyla uzanarak görüldüğünü ortaya koyuyor. Ancak parıltının, $4\alpha \sin \theta$ olan açısal genişliği (güneşin yüksekliğini θ ile göstermiş oluyoruz) “uzunluğundan” ya da dikey uzantısından azdır, dolayısıyla



Şekil 68.1. Parıltı patikasının “dikey” açısal uzantısını belirleme geometrisi



Şekil 68.2. Güneşin 2α olan yüksekliğinde, parıltı yolu ufuk çizgisine dek uzanır

Güneşin yüksekliği azaldıkça, bu açısal genişlik net bir şekilde daralır. Böylece, eğer maksimum dalga açısı, son derece küçük bir 5° ise ve güneşin yüksekliği 30° ise parıltı patikası 20° , yolunun genişliği de 10° olacaktır. *Şekil 68.2*'den de anlaşılabilir gibi, güneşin yüksekliği 2α 'ya eşit olduğunda, parıltı patikası ufuk çizgisine dek uzanır. Bu açının daha küçük olması durumunda, bir miktar dalga “gölgelemesi” meydana gelebilir, parıltılar o kadar da parlak görünmez ve yolun uzunluğu kısalmır. Güneş'in yüksekliği α 'dan az olduğundaysa, yalnızca daha küçük ve gözlemciyle karşı karşıya olan dalga eğimleri ışıklı ve aydınlıktır, yavaş yavaş sadece en yüksek dalgaların tepesi güneş ışığını yakalar duruma gelir; parıltı yolu kaybolur.

Şekil 68.1'de görüldüğü üzere A ve B noktaları, parıltı yoluna katkıda bulunan, sırasıyla, en yakın ve en uzak dalgacıkları temsil eder (ya da daha doğru bir şekilde ifade edecek olursak bunlar, maksimum eğim noktalarıdır). Öyleyse eğer AB izleğinin, gözlemcinin gözüne karşıdan yaptığı açı β ise sadece OAB üçgeninin iç açılarını toplayarak şunu görürüz:

$$\beta + (\theta - 2\alpha) + 180^\circ - (\theta + 2\alpha) = 180^\circ, \text{ yani, } \beta = 4\alpha \quad (68.1)$$

Şimdi, parıltı patikamızın genişliğini (AB 'ye diktir, bkz. *Şekil 68.2*($a - c$)) ele alalım: Eğer sudan h yükseklikte olan gözlemci, aşağıda kalan parıltı yoluna yukarıdan, dik bir şekilde bakıyorsa açısal genişliği yine gözlemciye, güneş ışığını yansıtan dalgacıklar (sözgelimi P ile P') arasındaki maksimum uzantıyla belirlenebilir. Yukarıda değindiğimiz hususlar, burada da geçerlidir; değerimiz bir kez daha 4α 'dır. Yine h yüksekliğinde duran ancak bu kez, PP' segmentine l yatay uzaklığında bulunan bir gözlemci için PP' segmentinin karşıdan yaptığı açısal genişlik, *Şekil 68.3(c)*'den de gördüğümüz gibi 2ϕ olur; burada

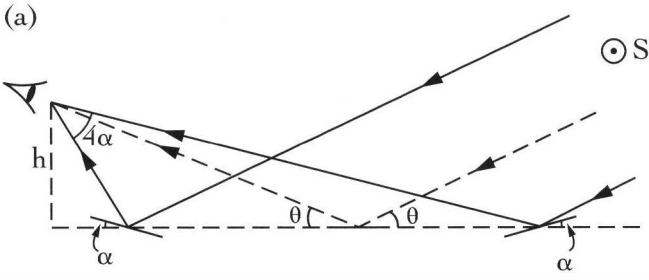
$$\tan\phi = \frac{h \tan 2\alpha}{(l^2 + h^2)^{1/2}} \quad (68.2)$$

Bu nedenle, açısal genişliğin parıltı yolunun açısal uzunluğuna olan oranı r

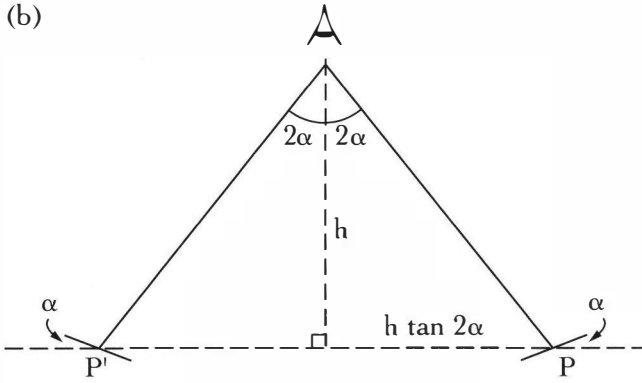
$$r = \frac{2\phi}{4\alpha} = \frac{\arctan [h(l^2 + h^2)^{-1/2} \tan 2\alpha]}{2\alpha} \approx \frac{h}{(l^2 + h^2)^{1/2}} \equiv \sin \theta \quad (68.3)$$

olur; tabii, genellikle olduğu gibi, eğer α küçükse (sözgelimi, 10° 'den azsa). Öyleyse denk bir şekilde, parıltı yolunun açısal genişliği şudur:

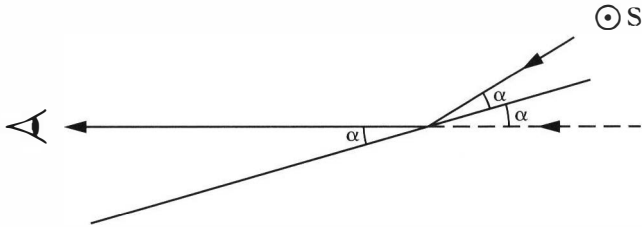
$$2\phi = 4\alpha \sin \theta \leq 4\alpha \quad (68.4)$$



Şekil 68.3(a). Parıltı yolunun dikey uzantısı



Şekil 68.3(b). Şekil 68.3(a)'nın ortogonal (dik) bir görüntüsü



Şekil 68.3(c). Parıltı yolu geometrisinin yatık bir görüntüsü

Bunun sonucunda, gözlemcimiz sudan daha yüksekte duruyorsa ($h \gg 1$ olacak kadar), $\sin \theta \approx 1$ olur ve yolun şekli dairesel bir görüntüye yakındır. Çok yatık gözlemlerde $l \gg h$ olduğundan yolun şekli çok uzun görünür.

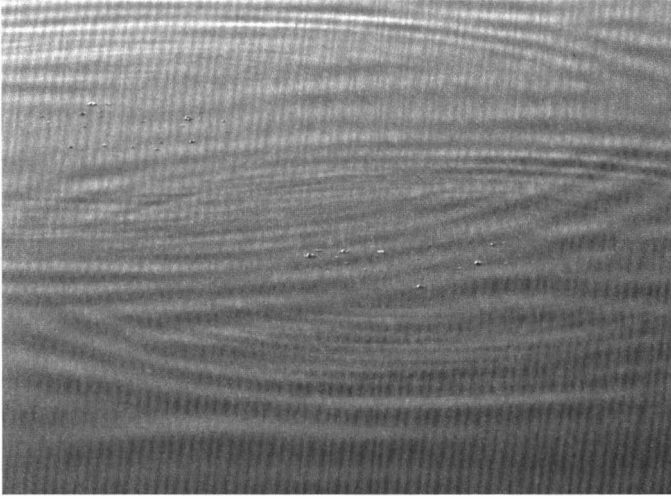
69. Soru: Dalgalar nasıl bir kesişim yolu izleyerek birbirine karışır?

Su kenarında yürüyüş yaptığım bir sabah, yaklaşık otuz yarda [yaklaşık 28 metre] mesafede, tek başına oturan bir ördek fark ettim. Ayak seslerimi duyar duymaz yerinden kalktı ve “suda yürümeye” başladı; kalkışa geçmek için sudan koşu pistinde hızla koşarak kanatlarını çırpıyordu. Elbette ördeğin perdeli ayakları, suyun yüzeyine her temas ettiğinde, dalgalar oluşuyordu. Ah, keşke o gün fotoğraf makinemi evde bırakmış olmasaydım! Yine de bu manzara, aklıma yukarıdaki soruyu getirdi. Eğer bir su birikintisine arka arkaya iki çakıl taşı atılırsa (böylece taşlar, iki ayrı ve belirgin dalga kaynağı “noktası” olursa), dalgaların kesişim noktasının (ya da noktalarının) geometrik yeri ne olur? Uygulamada, bunun böyle olduğunu görmek zor olsa da aşağıdaki matematiksel işlemler, izleğin, şaşırtıcı biçimde, iyi bildiğimiz bir eğri olduğunu ortaya koyuyor.

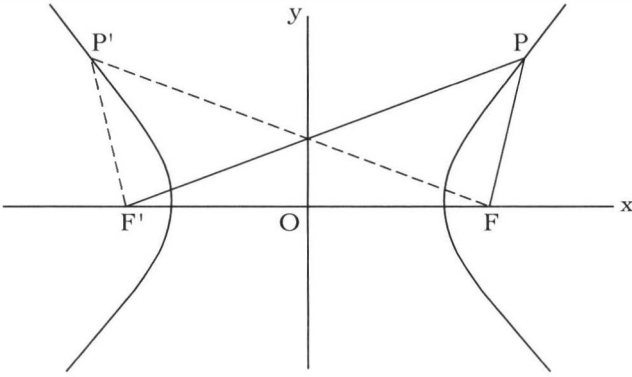
Kesişim noktaları, daire-1'e bir $|F'P| = r_1(t)$ mesafesi uzaklığında ve daire-2'ye de bir $|FP| = r_2(t)$ mesafesi uzaklığındadır. Daha-
sı, dalga hızının sabit olması durumunda

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{dr_2}{dt}, \text{ yani, } r_1 - r_2 = \text{sabit} \quad (69.1)$$

Bu sadece, kesişim noktalarının hiperbolik bir izleği takip etmesinin koşuludur çünkü bir hiperbol şöyle tanımlanır: İki ayrı ve belirgin nokta (odaklar) söz konusuysen, her iki odağa olan mesafe farkının sabit olduğu geometrik yere, hiperbol denir (*Şekil 69.1*). İki dalga seti için bunun sonucunda ortaya çıkan kesişimler *Şekil 69.2'*de gösterilmiştir.



69. Soru - Bir su birikintisinin yüzeyinde kesişen dairesel dalgalardan oluşan bir hiperboldür. Dalga kesişimlerinin geometrik yeri bir hiperboldür.

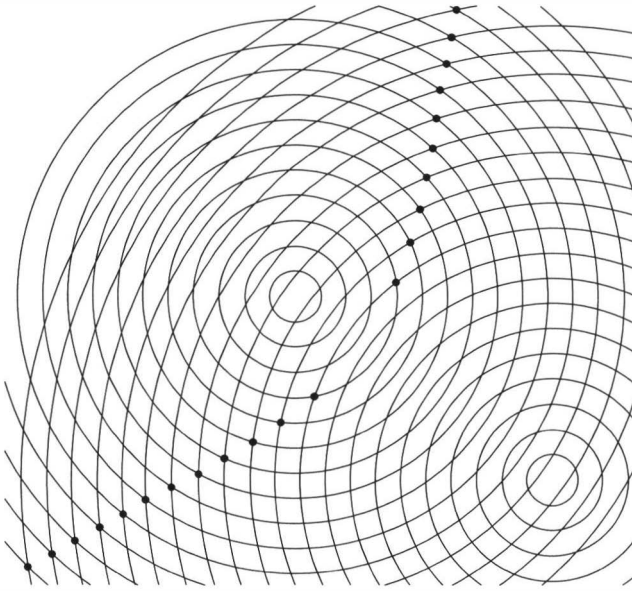


Şekil 69.1. (69.1) numaralı denklem tanımının çizimi

Güzel! Eminim, ördek bunu biliyordu!

70. Soru: Dalgaların su yüzeyinde ilerleme hızı nedir?

Tıpkı dedikleri gibi, “(şuna ya da buna göre) değişir...” Mahallede yürüyüşe çıktığım sabahlarda çok çeşitli dalga tipleri fark ettiğim olur, hele de yakın zamanda yağmur yağmışsa. Ufacık bir



Şekil 69.2. Bir su birikintisinin yüzeyindeki kesişen dalgalar

esinti, su birikintilerinin yüzeyinin dalgalanması için yeterlidir; ağaç dalından düşen tek bir yağmur damlası, merkezden dışarı doğru düzgünce yayılan, büyüleyici bir eş merkezli halkalar setini başlatmaya yeter. Bir de Lafayette Nehri'nin iç kesimlerinde sıklıkla görülebilen ve çok daha uzun soluklu rüzgârların oluşturduğu dalgalar vardır; nehrin suları nadiren tamamıyla durgun olur ve böyleyken bile derinliklerdeki bir nehir sakini, yüzey yakınlığında vızıldayan bir sineği yakalamak (ya da sadece benim dikkatimi çekmiş olmak) için bu durgunluğu bozar. Toplantı hâlindeki ördeklerin, yaklaştığımı fark edince suya girdiğine de şahit olurum sık sık; zannediyorum her türlü toplantıdan sakındığımı pek bilmiyorlar. Suya girerken meydana getirdikleri dalgalar geçtikten sonra ördekler de suyun öte yanında, çok daha uygun bir toplantı köşesine doğru yola koyulur; arkalarında, etkileşim hâlinde olan ve tıpkı gemilerin dümen suyuna benzeyen izler bırakır. Ancak bu sabah, onlara bir haberim var: Görüşmelerine devam etmek için tam sudan çıkacakları sırada, bir adamın gezdirdiği köpek, tüyle-

rini didikleyip vaklayan bu gruba dişlerini göstermek için sabırsızlanıyor gibi. Tasmasının ucunda geriniyor ve birden zıpkın gibi fırlayıp ördek şenliğine doğru hamle yapıyor; hepsini çil yavrusu gibi dağıtıp, yeniden suya kaçmalarına neden oluyor. Daha önce kendinden bu kadar hoşnut bir köpek görmemiştım hiç... ve perdeli ayakların toplantısı, bir kez daha, ileri bir tarihe bırakılıyor.

Dalga tipleri ile gemilerin ve ördeklerin arkalarında bıraktığı dümen suyu örüntülerini ve hareketsiz nesnelerin (örneğin, kayaların ya da su yatağına saplanmış ağaç dallarının – bkz. 71-72. Soru)



70. Soru - Bir su birikintisi üzerindeki yüzey yerçekimi dalgaları örüntüsü. Dalgalar dışarı doğru hareket ettikçe genişleyen bir durgun su bölgesi bırakır.

önünde oluşan örüntüleri ele almadan önce su *yüzeyinde beliren dalgaların* ya da yüzey yerçekimi dalgalarının bazı genel özelliklerinden söz etmemiz gerekiyor. Bunlar, yerçekiminin ve yüzey geriliminin etkilerinin bir araya gelmesiyle tetiklenen dalgalardır. Sıklıkla, bu etkilerden birinin (ya da geri çağırım kuvvetlerinin) diğerine baskın çıktığı olur ve bu durumda, hangi kuvvet birincil dercede sorumluyorsa, yerçekimi ya da yüzey gerilimi olabilir, dalgalar da onun ismiyle anılır. *Kılcalık*, yüzey gerilimi ile ilgili bir olgu olduğu için (burada, ince bir cam tüpün içindeki suyun, camın ve suyun yapışma (adezyon) kuvvetleri nedeniyle yükselmesini düşün-

biliriz), yüzey geriliminden kaynaklanan dalgalara kılcallık dalgaları ya da kılcal dalgalar denildiği de olur. Her iki dalga tipi de doğada rahatlıkla gözlemlenebilir.

Bu iki kuvvetin birleşik etkileri için bir boyutta yayılım gösteren tek bir dalga tepesinin hızı:

$$c = \lambda v = \left[\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda} \right) \tan h \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right) \right]^{1/2} \quad (70.1)$$

burada λ = dalga boyu, v = dalga frekansı, ρ = akışkan yoğunluğu ve h ile y sırasıyla, akışkan (su!) derinliği ile yüzey gerilimi katsayısıdır. Yerçekimi ivmesi, g büyüklüğüne sahiptir. Bir başka formülasyonda λ dalga boyundaki bireysel bir dalganın hızı olan c , $c = \omega / k$ ile verilir ve bir dalgalar grubunun hızı c_g ise $c_g = d\omega / dk$ olarak tanımlanır; zira (70.1) numaralı denklem, açılal frekans $\omega (= 2\pi\nu)$ ve dalga sayısı $k (= 2\pi/\lambda)$ ile şöyle ifade edilebilir:

$$\omega = ck = k \left[\left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho} \right) \tan h kh \right]^{1/2} \quad (70.2)$$

Şimdi, (70.1)'in bazı özel durumlarını ele alalım.

DERİN SU DALGALARI

Amaçlarımız bakımından, buradaki “derin” kelimesini, dalga boyunun, suyun derinliğine kıyasla daha küçük olması şeklinde tanımlayalım; diğer bir deyişle,

$$\frac{h}{\lambda} \gg 1$$

bunun anlamı,

$$\tan h \frac{2\pi h}{\lambda} \approx 1$$

Bu koşullar altında

$$c^2 \approx \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda} \quad (70.3)$$

yazarız. Bu, yerçekiminin ve yüzey geriliminin etkilerini hisseden ancak kanal dibini, havza'yı ve diğerlerini "hissetmeyen" bozulmalar için (dalga hızı)²¹yi temsil eder. Dahası, bu kategorideki "uzun" dalgalar için yani

$$\frac{g\lambda}{2\pi} \gg \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}$$

durumunda şöyle yazarız

$$c^2 \approx \frac{g\lambda}{2\pi} \quad (70.4)$$

ve böylelikle

$$c \propto \sqrt{\lambda} \quad (70.5)$$

Okyanus dalgaları için hız (velosite) ile dalga boyu arasındaki doğru ilişki budur; zira okyanus dalgaları tamamen yerçekiminin hükmü altındadır. Kabaca söyleyecek olursak, dalga boyu ne kadar uzunsa, dalga da o kadar hızlı hareket eder.

SİĞ SU DALGALARI

Bir başka uç örneğimiz olan "kısa" dalgalar için, diğer bir deyişle,

$$\frac{g\lambda}{2\pi} \ll \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}$$

durumunda

$$c^2 \approx \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda} \quad (70.6)$$

Öyleyse

$$c \propto \lambda^{-1/2} \quad (70.7)$$

Bu dalgalar, yüzey gerilimi tarafından tamamen ele geçirilmiştir ve ne kadar kısalarsa o denli hızlı hareket eder. Şimdi gelin, bir uç örneğe daha bakalım, sıg su dalgaları için durum neymiş, inceleyelim. Burada, suyun derinliğinin dalga boyuna kıyasla küçük bir değere sahip olmasından söz ediyoruz; diğer bir deyişle,

$$\frac{h}{\lambda} \ll 1$$

Bu koşullar altında, orijine ilişkin bir Taylor serisi açılımından hareketle (bir Maclaurin serisine başvurarak) şöyle gösterebiliriz:

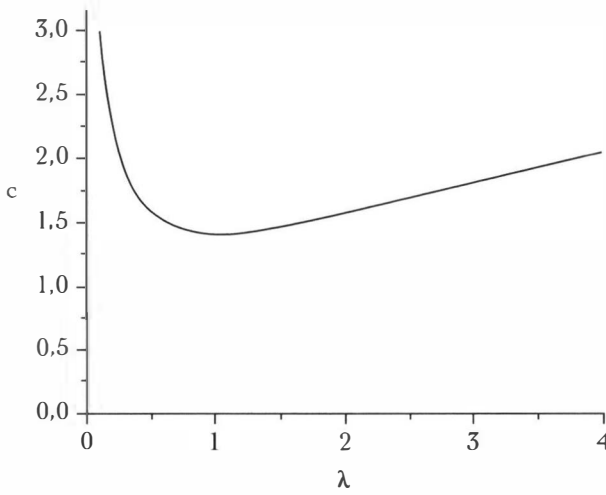
$$\tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \approx \frac{2\pi h}{\lambda}$$

Bu dalgalar dibi “hisseder”. Bu dalga konusuyla ilgili çoğu problem için (70.1) numaralı denklemin ikinci terimi önemsiz olduğundan sıg sulardaki yerçekimi dalgaları için geçerli sonucumuz şudur:

$$c^2 \approx gh \quad (70.8)$$

Önemli bir sonuçla karşı karşıyayız: Bu, dalga hızının dalga boyundan bağımsız olduğu anlamına gelir. Tüm dalgaların aynı hızla yol kat ettiği ve herhangi bir karmaşık başlangıç dalga biçimleniminin, hayli zaman sonra bile tanınıp teşhis edilebilir bir şekli koruyabildiğini gösterir. Aslında, derin su dalgalarını sıg su dalgalarından ayırmak için yararlandığımız güçlü eşitsizliklerin (“ $\ll$ ” ve “ $\gg$ ”) bu denli katı bir şekilde uygulanmasına gerek yoktur; örneğin, bazen sıg sular için $h < \lambda / 2$ durumunu incelemek yeterli olur. Her şey bağlama göre değişir.

Gelin, derin sulardaki kılcallık – yerçekimi dalgalarıyla ilgili (70.3) numaralı denkleme geri dönelim ve biraz daha bilgi edinelim. (70.5) ve (70.7) numaralı denklemlerde değindiğimiz uç durumlarda, hızın karesinin, dalga boyunun fonksiyonları olarak sırasıyla (i) doğrusal ve (ii) dikdörtgensel hiperbolik şekilde davrandığını görmüştük. Orta bölgede, yani $g\lambda / 2\pi$ ile $2\pi\gamma / \rho\lambda$ ’nın kıyaslanabilir ol-



Şekil 70.1. $c(\lambda)$ 'nin (70.3) numaralı denkleme dayalı niteliksel davranışı

duğu yerde, her iki geri çağırım kuvveti de kıyaslanabilir durumdadır ve ilgili $c(\lambda)$ grafikleri birbirine bağlanmalıdır. Bu çok genel bir biçimde, Şekil 70.1'de $c \sim (\lambda + \lambda^{-1})^{(1/2)}$ olarak gösterilmiştir.

Hız c 'nin bir minimum olduğu açıktır zira kritik dalga boyu λ_c 'deki $c'(\lambda) > 0$ durumu, şu çözümle ortaya konur:

$$c'(\lambda) = 0$$

bu da demektir ki

$$\lambda_c = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{g\rho}} \quad (70.9)$$

Su için, cgs cinsinden, $\lambda_c \approx 1,72$ cm'dir. Bundan daha küçük ya da daha büyük dalga boyları için baskın olan geri çağırım kuvveti sırasıyla, yüzey gerilimi ya da yerçekimi olur. Eğer (70.9) numaralı denklemi, geri götürüp (70.3) numaralı denkleme yerleştirecek olursak, buna denk gelen minimum hız şu olur:

$$c_{\min} = \sqrt[4]{\frac{48\gamma}{\rho}} \approx 23 \text{ cm/s} = 0,23 \text{ m/s} \quad (70.10)$$

Bu, saniyede 0,23 m'den daha az hıza sahip hiçbir esinti ya da rüzgârın yayılım gösteren dalgalar yaratmayacağı, sadece geçici bir kıpırdanmaya sebep olacağı anlamına gelir. Bu minimum üzerindeki rüzgâr hızları, teorik olarak, dalga boyları λ_c 'nin her bir yanında, iki dalga setine neden olacaktır; diğer bir deyişle $\lambda < \lambda_c$ ile bir set (kılcık dalgalar) ve $\lambda > \lambda_c$ (yerçekimi dalgaları). Bu sonuçların, hesaplamalara başvurmadan da elde edilebileceğine dikkat edin: Aritmetik–geometrik eşitsizlik, gerekli sonucu verir. Bu eşitsizliğin özellikle işaret ettiğiyse, eğer $a > 0$ ve $b > 0$ ise

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

olur; yalnızca ama yalnızca $a = b$ durumunda eşitlik ortaya çıkar. Aritmetik ortalamasının hiçbir zaman geometrik ortalamadan daha küçük olmadığını gösteren bu sonuç, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ eşitsizliği değerlendirilerek de kolaylıkla belirlenebilir ve n sayıda pozitif sayılardan oluşan bir küme oluşturarak genelleştirilebilir ancak burada, sadece iki sayıya ihtiyacımız bulunur. Sonrasında, (70.3) numaralı denklemi kısa tutarak aşağıdaki gibi yazdığımızda (70.10)'daki sonucu tekrar elde edebiliriz.

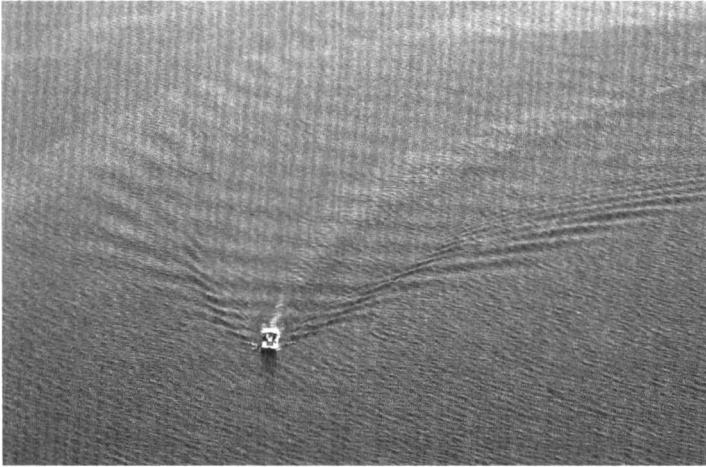
$$c^2 = \alpha\lambda + \frac{\beta}{\lambda}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad (70.11)$$

Yukarıdaki eşitsizlikten, bu iki terimin toplamının, hiçbir zaman $2\sqrt{\alpha\beta} = 2\sqrt{g\lambda/\rho}$ eşitliğinden küçük olmayacağı görülür. c^2 'nin minimumu, c 'nin minimumu belirlediği zaman belireceğinden, yukarıda cmin için verilmiş sonuç da elde edilmiş olur. Teorik olarak, dalga boyları yeterince küçük olduğu takdirde, su dalgalarının maksimum hızı için limit yoktur. (Uygulamada, bir limit olmalıdır elbette.) Benzer bir sonucun, çok uzun dalgalar içinde geçerli olduğu düşünülebilir ancak er ya da geç, bu limitin içindeki dalgaların sığ kabul edilmesi gerektir ve bu durumda c için maksimum hız, yukarıda görmüş olduğumuz gibi, sadece $\sqrt{gh}$ 'dir.

Bu noktada, dalga kırılımına ilişkin bir noktaya değinmek yerinde olur: Artık, okyanus dalgalarının, çok açık sularda yandan geliyor olsalar bile, neden kıyıya paralel bir şekilde sıralandıklarına ilişkin basit bir modele sahibiz. İlginizi çeken herhangi bir dalga tipi için bir dalga boyu belirleyin. Açıklardaki dalgalar, derin sularda olduğundan ($\lambda \ll h_{\text{derin}}$) ve bu nedenle $c \propto \sqrt{\lambda}$ Daha yakınlarda, dalgamız sığ sularda olduğundan ($\lambda \gg h_{\text{sığ}}$) ve bu nedenle $c \propto \sqrt{h_{\text{sığ}}}$, bu da, elbette $\sqrt{\lambda}$ 'dan küçüktür. Diğer bir deyişle, kıyıya en yakın konumdaki dalga cephesinin o bölümü, daha uzakta olana kıyasla yavaşlar ve dalganın tamamı “dönüp sallanır”.

71. Soru: Seyir hâlindeki gemiler o dalga örüntüsünü nasıl meydana getirir?

Bir süs havuzuna, iri bir taş ya da bir ördek (ya da bir analiz kitabı) gibi ağır bir nesne “fırlatıldığında” başlangıçta çok karmaşık bir örüntü meydana gelir. Burada bu karmaşık örüntüyü tanımlamaya kalkışmayacağız; bunun yerine önce su yüzeyindeki etkinin ya da gemi, ördek gibi hareket hâlindeki bir kaynağın neden oldu-



71. Soru - Yellowstone Ulusal Parkı'ndaki bir göldeki dümen suyu örüntülerinin yukarıdan görünümü.

ğu karmaşık başlangıç bozulmasından doğan dalgalara odaklanacağız. Dalgaların tek başlarına sahip oldukları hızlar ile bir dalgalar grubunun hızı arasındaki ayrımı yukarıda yapmıştık ancak hemen hatırlatalım: Yüzey gerilimi etkilerinin önemsiz olması durumunda (diğer bir deyişle, birkaç santimetreden uzun dalga boyu söz konusuysa) (70.1) numaralı denklemi

$$c(\lambda) = \lambda v(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right) (2\pi v) \equiv \frac{\omega}{k} = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \right)^{1/2} \quad (71.1)$$

şeklinde basitleştirebileceğimize dikkat edin; burada v , dalga frekansı (ya da dalga periyodunun tersi); ω , dalganın açısal frekansı ve k dalga sayısıdır. Dalgaların, sahip oldukları dalga boylarına uygun olarak, ne hızla etrafa yayılacağını ya da dağılacığını tanımlayan bu ifadeye *dağılma ilişkisi* denir. Artık dalga boyu λ olan bireysel bir dalganın hızı c için (71.1) numaralı denkleme başvurabiliriz. c , λ ve bir dalgalar grubunun hızı olan c_g arasında, ilginç bir ilişki vardır:

$$c_g = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} \quad (71.2)$$

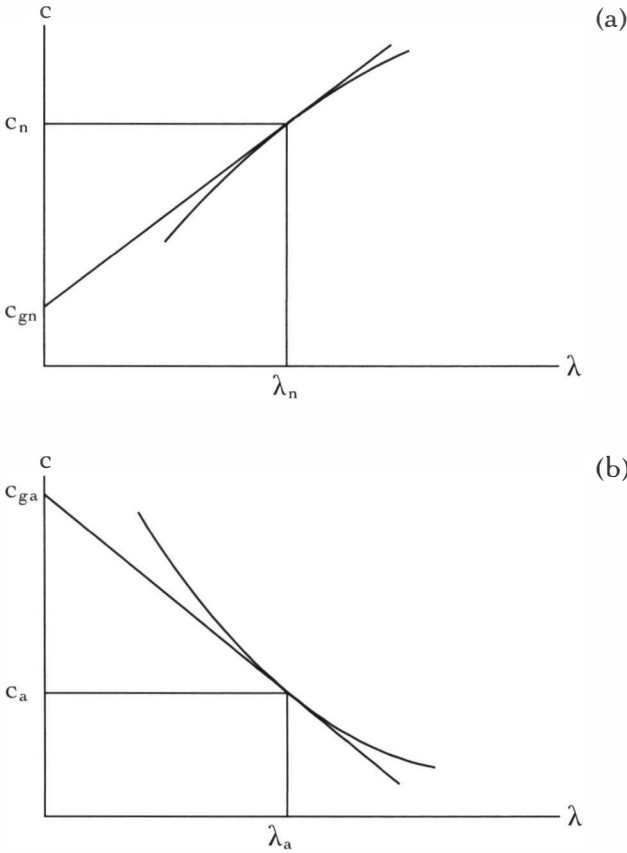
Bu denklemin türetilmesi, aşağıdaki alıştırmaya bırakılmıştır ve denklemin bazı grafiksel çıkarımları *Şekil 71.1* üzerinden ayrıca ele alınacaktır.

Bu durum, verili bir $c(\lambda)$ grafiğinden yola çıkarak, belirli bir dalga hızı olan c_0 için grup hızını, doğrudan grafiğe bakarak bulabileceğimiz anlamına gelir. Şöyle yapıyoruz: $c(\lambda)$ grafiğinin ilgili noktasına, yani $(c_0, (\lambda_0))$ da teğet çizgi çiziyoruz ve c -kesimini, çizgiyi tekrar c -eksenine götürerek okuyoruz (c -ekseninde, elbette, $\lambda = 0$ 'dir). Yukarıdaki (71.2) numaralı denklemden hareketle, bu c değeri, sadece c_g 'dir.

Alıştırma: (71.2) numaralı denklemi türetin. [*İpucu:* $c_g = d\omega / dk$, burada $\omega = 2\pi v$ ve $k = 2\pi/\lambda$.]

(71.2) numaralı denklemde dikkate değer bir başka nokta vardır ve bu, elbette teğetin çizimiyle ilgilidir: Eğer $dc/d\lambda > 0$ ise

$c_g < c$, buna karşın $dc/d\lambda < 0$ ise $c_g > c$. İlk durumda (yüzey gerilimi dalgaları için söz konusu olduğu gibi), verili bir dalga boyunda ki bireysel dalgaların hızı, bu dalgalardan oluşan grubun hızından daha fazla olur (ya da daha net bir şekilde ifade edecek olursak, bu grubun *zarfından* daha fazla olur). Diğer durumun bir örneği, kılcal dalgalar arasında bulunabilir; bu dalgalar için grup hızı, dalga hızını aşar. Aslına bakarsanız, yerçekimi dalgaları için dalga hızı, grup hızının (aşağıda da belirtildiği gibi) tamı tamına *iki katıdır*; öte yandan, kılcal damarlar için grup hızının *üçte ikisidir*. Optik alanında bu durumlara sırasıyla *normal* ve *anormal* (kuraldışı)



Şekil 71.1. Dalga ve grup hızı arasındaki ilişki

dağılma denir ve *Şekil 71.1*'deki (c_0, λ_0) koordinatlarının sırasıyla, n ve a alt indis etiketlenmesinin sebebi budur.

(70.8) ve (70.4) numaralı denklemlerde yararlı iki uç duruma değinmiştik: Uzun dalgalar için $c \approx \sqrt{gh}$; diğer bir deyişle dalga hızı, dalga boyundan bağımsızdır ve hiç dağılma yoktur ve dalgalar, dalga boyundan bağımsız olarak, aynı hızda yol kat eder. Yine, (71.2) numaralı denklemden hareketle $c_g = c$. Esasen tsunamiler, bu sığ su dalgaları kategorisine girer ancak biz, yukarıda bahsettiğimiz diğer uç durum olan kısa dalgalar üzerinde duralım. Öyleyse $c \approx \sqrt{g\lambda/2\pi}$ yani dalga ne kadar uzunsa o kadar hızlı hareket eder. (71.2)'den yararlanarak göstermiş olduğumuz üzere bu kez grup hızı, $c_g = c/2$ 'dir.

Bu sonuç, gemilerin (ve ördeklerin) neden olduğu dalga örüntülerine ilişkin tartışmalar için son derece önemlidir. Bir grup yüzey yerçekimi dalgasını G olarak ifade edelim ve bu dalgalar grubu, t zaman sonra r mesafe kat ederek “sıçrama” kaynağından uzaklaşmış olsun; burada $c_g = r/t$ 'dir. Şimdi, başlangıçta bozulmuş sudan dışa doğru hareket eden belirli bir *dalga tepesini* izlemek üzere baktığımızı düşünelim. Grup hızının iki katı bir hızla hareket ettiğinden, radyal olarak dışa doğru yaptığı yolculuğu boyunca pek çok dalga grubuna girerek bunların içinden geçecektir; öyleyse bu dalga tepesi, G grubuyla karşılaştığında, dalga hızı $c = 2r/t$ olur ancak temel analiz bilgileri sayesinde bu, dr/dt türevine eşittir. Öyleyse zamanın bir fonksiyonu olarak dalga tepesinin konumu için elde edilen diferansiyel denklem, gayet basittir:

$$\frac{dr}{dt} = 2 \frac{r}{t} \quad (71.3)$$

ve çözümü de

$$r = Ct^2 \quad (71.3)$$

(burada C bir sabittir, en azından zamandan bağımsız bir niceliktir). (Bu analize dayanarak, farklı dalga tepeleri için farklı bir sa-

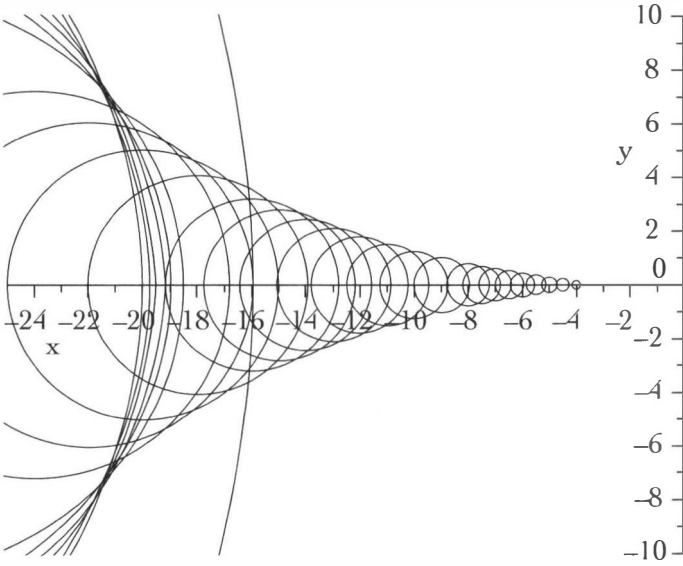
bitin olup olmayacağını belirleyemeyiz.) (71.4) numaralı denklem, meydana gelmiş bir dalga tepesinin kat ettiği radyal mesafenin, geçen zamanın karesi kadar arttığını gösterir ve $r/t = Ct$ dalga hızını verir; öyleyse tepe dışarı doğru hareket ettikçe ivme kazanmak zorundadır, dairesel dalga tepesinin alanıysa zamanın *dördüncü kuvveti* olarak artar!

Şimdi de suyu hareketlendirip bozan kaynağın (bir gemi ya da ördek gibi) *hareketli olması* durumunda, ardışık dalga tepelerinin birleşerek nasıl örüntüler oluşturduğuna bakalım. (Çok küçük olduğunu varsaydığımız) Bir geminin, hayali bir x – eksenini boyunca soldan sağa, sabit bir hızda ilerlediğini ve şu anki zamanı $t_0 = 0$ olarak alıp gemiyi Kartezyen koordinat sisteminin orijinine yerleştirmizi düşünelim; önceki zaman aralıkları $t_1 = -1, t_2 = -2, \dots, t_n = -n, n = 1, 2, 3, \dots$ vs. olsun ve geçmişteki zaman birimlerini temsil etsin. Gemimiz, bir birim mesafeyi, buradaki bir birim zamanımızda kat ediyor olduğu için hızı 1'dir. $n = 0$ iken (şimdi!) dalgaların etrafa dağılıp yayılmaya zamanı olmamış demektir, bu nedenle hepsinin yarıçapı $r = 0$ 'dır. Ancak önceki tüm zamanlarda ortaya çıkmış olan dalgalar, $t_n = -n$ (71.4) numaralı denklemin de işaret ettiği üzere, n^2 'ye orantılı yarıçaplara sahip dalgalar olarak genişleyip yayılmıştır. Elbette burada, işleri basitleştirmek adına ayrık zaman aralıkları ile düşünüyoruz; oysa seyir hâlindeki bir gemi, sürekli bir dalga akıntısı yaratır. Yine de bu dalga akıntısının örüntüsü, esasen aynı olacak ve aynı dalga zarfını ortaya çıkaracaktır.

Peki, (önceden olduğu gibi, yine belirli bir dalga tepesine karşılık gelen) bu bireysel dairelere ait denklemleri nasıl yazabiliriz? Geminin pruvası $(-n, 0)$ noktasındayken, $t = -n$ 'de meydana gelen dairenin denkleminin

$$(x + n)^2 + y^2 = (Cn^2)^2 = An^4 \quad (71.5)$$

olacağını görmek zor değildir; burada A aşağıda, örüntünün uzamsal gelişimini açıklamak için seçeceğimiz bir ölçekleme sabitidir. Örüntüye dair genel görüntü, bir ok başına benzer.

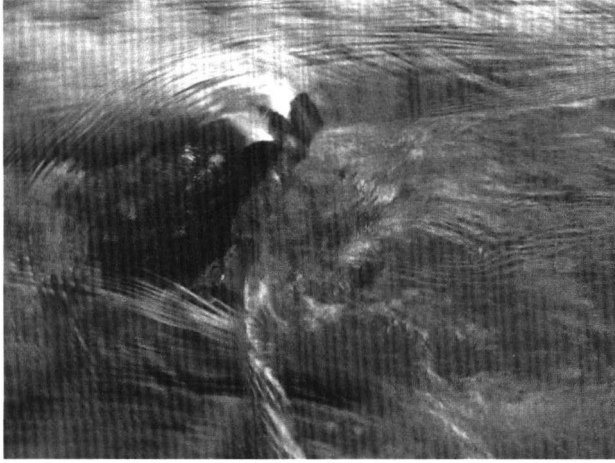


Şekil 71.2. Hareketli bir kaynak noktanın meydana getirdiği yüzey yerçekimi dalgaları zarfı.

Şekil 71.2'ye bakarak, daha yüksek n değerleri için dairesel yay yoğunlaşmasının nasıl olacağını kestirmek mümkündür; (A seçeneği için) bir ok başının arka kısmını andıran bir örüntü meydana gelecektir. Dalga tepeleri, çok daha yüksek n değerleri için bile dümen suyunun meydana getirdiği daha düşük n değerlerinin *ilerisinde* olacaktır çünkü gemiden (ya da enerji patlaması yaşayan ördekten; böyle bir dalga tepesi şekilde gösterilmiştir) daha hızlı hareket eder. Dümen suyunun tepe (apex) açısı ve ilgili “yan kol” dalgalarına dair ayrıntılı bir analiz, Adam'ın çalışmasında (2006) bulunabilir.

72. Soru: Akarsuyun içindeki kayalar suda farklı örüntüleri nasıl yapar?

Şimdi, h/λ 'nın büyük olduğu çok kısa dalgaları ya da sudaki kıpırdanmaları incelediğimizde, (70.6) numaralı denkleme karşılık gelen dalga hızı



72. Soru - Bir kayanın yukarı akıntısında meydana gelmiş kılcak dalgalar (kıpırtılar).
(Akıntı, soldan sağa doğrudur).

$$c = \sqrt{\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}} \quad (72.1)$$

olur; burada γ , yüzey geriliminin katsayısı ve ρ suyun yoğunluğudur. Bu yaklaşımda c , λ 'nın karekökü ile ters orantılı olduğu için daha kısa dalgalar, daha uzun dalgalara kıyasla daha hızlı yol alır. (71.2) numaralı denklemden yararlanarak, grup hızının dalga hızını aştığı kolaylıkla gösterilebilir; aslında $c_g = 3c/2$ 'dir, dolayısıyla bireysel dalgacıklar, bu tür kılcak dalga grupları tarafından ele geçirilir. Yukarıda, yerçekimi dalgaları için yapmış olduğumuz çıkarsamaları, yerçekiminin değil yüzey geriliminin hükmü altındaki bu yeni dalga sınıfına uyarlayabiliriz. Bireysel bir dalgacık, t zamanda r yarıçapındaysa, hızı (ortalama) r/t olan bir grubun parçasıdır ancak dalgacığın hızı, grubun hızının sadece $2/3$ 'ü kadardır ve bu dr/dt türeviyle gösterilir. Öyleyse artık

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2r}{3t} \quad (72.2)$$

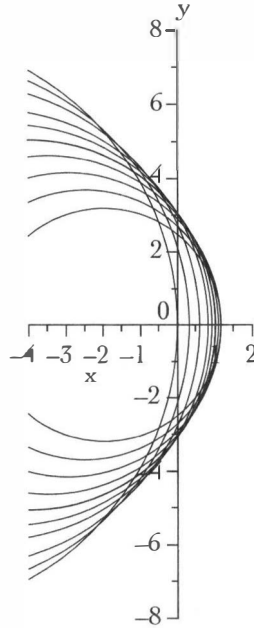
yazılır ve bunun çözümü

$$r = Bt^{2/3} \quad (72.3)$$

olur; burada B, bir başka sabittir ve genellikle dalga boyunun bir fonksiyonudur. Bu gibi dalgacıklar için geminin pruvası $(-n, 0)$ noktasında iken, $t = -n'$ 'de meydana gelen dairenin denklemi şöyledir:

$$(x + n)^2 + y^2 = (Bt^{2/3})^2 = Dn^{4/3} \quad (72.4)$$

Bu dalgaların zarfı, ördek dalgalarına kıyasla çok farklıdır; düzgün ve yuvarlak kavislidir ve niceliksel olarak, sözgelimi bir kayanın hatta olta ucundaki bir misinanın *ilerisindeki dalga* örüntüsünü tanımlar. Bu türden engellerin ardında, gemi dalgalarının alışıldık örüntüsüne sıklıkla rastlanır; önceki sayfalarda açıkladığımız gibi bunlar, daha uzun dalga boyuna sahip olan yerçekimi dalgaları tarafından meydana getirilmiş örüntülerdir. Genelliği kaybetmeden, ha-



Şekil 72.1. Hareketli bir kaynak noktanın meydana getirdiği bir kılcal dalgalar zarfı

reket hâlindeki dalga kaynaklarımızı (ya da isterseniz, durgun su-
da seyreden bir kayayı) ele alarak, bu örüntülere ilişkin başka çıkar-
samalarda da bulunabiliriz. (72.2) numaralı denklemden hareketle,
dalga tepesinin hızının $2r/3t$ olduğunu ya da (72.3) numaralı den-
lemden yararlanarak, $2B/3t^{1/3}$ niceliğinin zamanla birlikte açıkça
azaldığını biliyoruz. Yüzey yerçekimi dalgalarıyla ilgili önceki tar-
tışmamızdan, geminin, ördeğin ya da olta ucundaki misinin hızı-
nın birim zamanda 1 birim mesafe, $v = 1$, olduğunu da biliyoruz. Bu
nedenle $2B/3t^{1/3} \leq 1$ ya da $t \geq (2B/3)^3 \equiv t^*$ iken, izleyen bozulmalar-
dan kaynaklanan dalgacıklar da geminin hemen ilerisinde ya da ge-
risinde, *Şekil 72.1*'de de gösterildiği gibi pekişir ($t = t^*$ 'de, dalga-
cıkların hızı, geminin hızına eşittir).

73. Soru: Dalgalar zıt yönlü akıntılarla durdurulabilir mi?

Bu kesinlikle mümkün görünüyor ve cevabımız olumlu ancak ge-
lin, yanıtımızı biraz daha niceliksel kılmaya çalışalım. Akıntının po-
zitif bir x – yönünde hareket ettiğini ya da düzgün olmayan, özelli-
kle de derin (H_1) – sığ (h) – derin (H_2) şeklinde seyreden derinlikteki
bir su yatağında hareket ettiğini düşünelim (bunun simetrik olarak
meydana gelmesi gerekmiyor). Eğer uç durumlar büyükse, doğru-
sal akışkan momentumun korunumundan yola çıkarak, derin böl-
gelerdeki akıntı hızının, sığ bölgelere kıyasla çok daha az olacağını
söyleyebilir; hatta çok derin bölgeler için bu hızı, buradaki amaç-
larımız bakımından, rahatlıkla 0 olarak alabiliriz. Su yatağının sığ
bölgelerinde, akıntı hızı $V > 0$ olur. Ayrıca (durgun) derin sularda
 $c_1 > 0$ hızında olan dalgaların, sığ (ve suyun hareketli olduğu) böl-
gelere doğru seyrettiğini de düşünelim: Bu seyirde, dalgaların hı-
zı nasıl değişecektir? Eğer derin sulardaki dalga boyu λ_0 ise dalga
frekansı $\nu_0 = c_0 / \lambda_0$ olur ve bu aynı zamanda, sığ suların uzağında
kalan derinlerdeki dalga frekansıdır. Eğer sığ sulardaki dalgala-
rın hızı, akıntıya göre c ise o hâlde durgun suya (ya da hareketsiz
gözlemciye) göre bu, $c + V$ 'dir; dalga boyları artık λ ise frekansla-
rı da bu kez $(c + V) / \lambda$ olur. Eğer dalgalar, su yatağının bu iki yeri



73. Soru - Sağdan sola doğru hareket eden bir akıntının yüzeyinde oluşmuş dalgalar.

arasında meydana gelmemiş ya da yok olmamışsa, o hâlde her bir noktadan aynı sayıda dalga geçmelidir; bu da dalga frekanslarının eşdeğer olduğu anlamına gelir. Öyleyse,

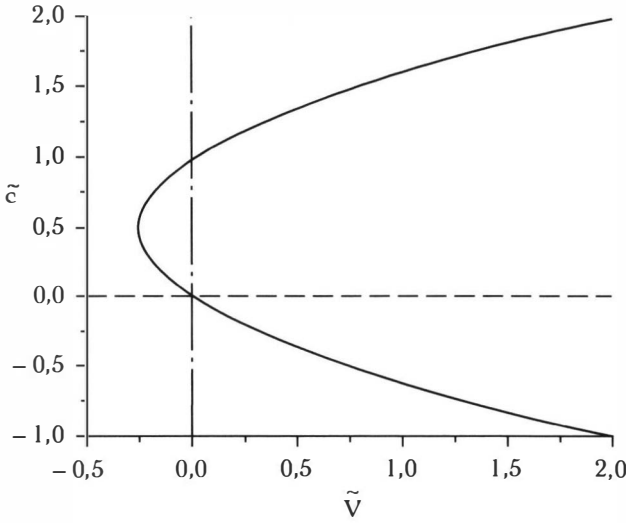
$$\frac{c_0}{\lambda_0} = \frac{c + V}{\lambda} \quad (73.1)$$

Bu noktada, değerlendirebileceğimiz iki seçenekle karşı karşıyayız: Bunların ilki için tüm (H_1) , (H_2) ve h derinlikleri, hem λ_0 hem de λ 'ya kıyasla daha büyük olduğundan, (70.4) numaralı denklemden hareketle şöyle yazarız:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{g} c_0^2 \quad \text{ve} \quad \lambda = \frac{2\pi}{g} c^2 \quad (73.2)$$

Bu ifadeleri, (73.1) numaralı denkleme yerleştirdiğimizde, ufak birkaç düzenlemeden sonra istenen c hızı için aşağıdaki ikinci dereceden denklemi buluruz:

$$c^2 - cc_0 - Vc_0 = 0 \quad (73.3)$$



Şekil 73.1. $\tilde{V}$ akıntı hızının bir fonksiyonu olarak $\tilde{c}$ dalga hızı

Bunun kökleri

$$c = \frac{1}{2} c_0 \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4V}{c_0}} \right) \quad (73.4a)$$

olur ya da ve $\tilde{V} = V/c_0$ boyutsuz nicelikleri bakımından,

$$\tilde{c} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4\tilde{V}} \right) \quad (73.4b)$$

Bu durum dalgaların, her bir kök için her iki yönde hareket etmesine olanak sağlıyor mu? Şekil 73.1, $\tilde{c}$ 'nin her iki dalını da gösterir.

Burada c – kesimlerinin sadece 0 ve 1 olduğuna ve parabolün köşe noktasının (verteksinin) $(-1/4, 1/2)$ 'de olduğuna dikkat edin. grafiğin, $\tilde{V} < 0$ ve $0 < \tilde{c} < 1$ olan (köşe noktasını da kapsayan) bölümü, akıntıya karşı hareket eden dalgaları gösterir; burada boyutsal bakımdan $c < c_0$ olduğu açıktır ve dalga hızı, akıntıya göreli olarak, azalır. Ayrıca, eğer $\tilde{V} < -1/4$ (ya da $V < -c_0/4$) ise c için

çözüm olmayacağına dikkat edin. Bu, yüzey yerçekimi dalgalarının ters yöndeki bir akıntıyı, eğer akıntının hızı $c_0/4$ 'ü aşıyorsa, kat edemeyeceği anlamına gelir. Köşe noktasında, $\tilde{c} = 1/2$ olduğundan $c = c_0/2$ 'dir ve bireysel dalgalar hâlâ akıntıya karşı hareket edebilir ancak grup hızı, bunun yarısı kadardır ve bu hızdaki dalga grupları ilerleyemez. Bireysel dalgalar akıntıya karşı hareket ederken, bu sınırlandırıcı grubun içinden geçerek ilerler ancak tıpkı yaşlı askerler gibi kaybolup giderler çünkü ileride onların yerine geçecek dalga grubu yoktur. Ancak bu küçük dalgaların enerjisi elbette ortadan kaybolmaz, öyle değil mi? Dalga grupları akıntıya karşı hareket ederken (V, c) parametre uzayındaki limit noktasını geçemezler, bu yüzden $c_0/4$ 'ten daha hızlı hareket eden grupların bir süre sonra yavaşlayıp orada birikmesi gerekir. Böylelikle, enerji öyle bir şekilde yoğunlaşır ki dalgaların yüksekliği artar (ancak dikkat ederseniz burada çok kaygan bir zeminde ilerliyoruz zira dalga hızı için kullanmış olduğumuz formül, çok küçük genlikteki dalgalar içindir.) Eğer bu doğruysa, dalgalar da bir süre sonra kırılacak, enerjileriye sürtünmeyle ilgili burada değinmediğimiz süreçlere bağlı olarak hızla yok olacaktır. Bu noktadan sonrası, sıkı durun, artık dalga yoktur. (Üst dalın gösterdiği gibi $\tilde{V} > 0$, $c > c_0$ olduğundan [aşağı dal, negatif $\tilde{c}$ değerlerine işaret eder] ve bu nedenle $\tilde{c}$ ve hipotezimiz gereği, burada $c > 0$ 'dır.)

74. Soru: Fırtına ne kadar uzaklıktadır?

Belki de birkaç günlüğüne deniz kıyısındaınız ve hava oldukça rüzgârlı. Bir Orta-Atlantik fırtınasının meydana getirdiği dalgaların, 15 saniyelik periyotlarla İngiltere kıyılarına ulaştığını düşünün. Bir gün sonra son derece dikkatli bir gözlemci olduğunuz için dalgaların gelişi periyodunun kısalıp 12,5 saniyeye düştüğünü fark ettiniz (dalga boyu azaldı ve bununla birlikte dalga hızı da düşmüş oldu). Fırtına, (en yakın 100 mile) aşağı yukarı ne kadar uzaklıktadır?

Burada, dalgaların belirli bir $T = 2\pi/\omega$ periyodunda, c_g grup hızıyla ilerlediğini düşünmek işimize yarayacaktır; böylelikle T periyodundaki dalgaların kıyıya olan d mesafesine $t = ?$ zamanda geldiğini bulabiliriz. Okyanus dalgaları için

$$\omega = \sqrt{gk} = \sqrt{2\pi g/\lambda} \Rightarrow T = \sqrt{2\pi\lambda/g} \quad (74.1)$$

Fırtına enerjisinin hızıysa

$$c_g = c/2 = \omega/2k = (\sqrt{g/k})/2 = (\sqrt{g\lambda/2\pi})/2 = \left[(\sqrt{g/2\pi})/2 \right] \times (\sqrt{g/2\pi})T = gT/4\pi \quad (74.2)$$

Grup hızıyla, d mil mesafesinden gelen dalga gruplarının kıyıya varması için gereken zaman $t = d/c_g$ olarak ifade edilir; buna göre (74.2) numaralı denklem şunu gösterir:

$$t = 4\pi d / gT$$

ve burada T sırasıyla 15 ve 12,5 saniyedir. Her iki grubun kat ettiği mesafeyi eşitlediğimizde:

$$d = c_g t = gTt/4\pi = (32 \times 15) \times t/4\pi \equiv (32 \times 12,5) \times (t + 24 \times 3600)/4\pi \quad (74.3)$$

buradan ulaştığımız sonuç $t = 4,32 \times 10^5$'s'dir. Geri dönüp bu değeri, iki d ifademizden *herhangi birine* yerleştirdiğimizde $d \approx 3100$ mil (ya da yaklaşık 5000 km) elde ederiz.

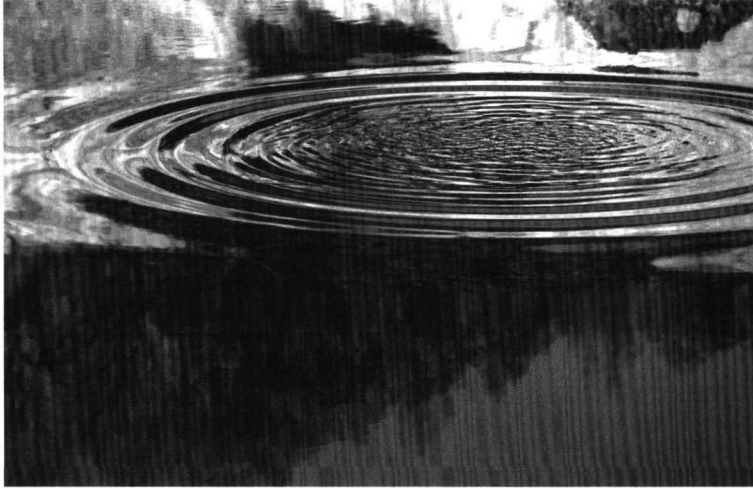
Artık fırtınanın bizden 3100 mil uzakta olduğunu bildiğimize göre, aldığımız onca önleme gerek yokmuş meğer!

75. Soru: Dairesel bir dalga hareketinin dingin halkası ne kadar hızlı genişleyip yayılır?

Burada neden söz ediyorum acaba? Pekâlâ, *Şekil 75.1*'e bakmanızı rica ediyorum. Şekil, küçük bir yağmur damlasının, bir su birikintisine düştüğünde oluşan örüntüyle ilgili; dalgalar hızla yayılırken arkalarında, yine hızla yayılan ancak sakin bir bölge bulunur. Baskın geri çağırım kuvveti, yüzey gerilimi olduğu için bunlar genellikle kılcal kategorisindeki dalgalardır; bu nedenle sorumuz için kılcal dalgalara ilişkin önceki denklemlerden yararlanacağız.

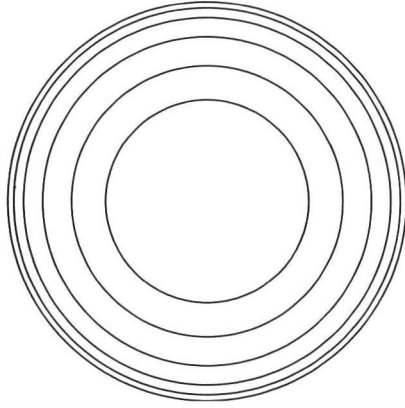
İşleri basitleştirmek adına, su birikintisinin derin olduğunu varsayacağız; burada derinlikten kastedilen, birikintinin derinliğinin, yüzeyinde gözlemlediğim en uzun dalga boyunun yarısından fazla olmasıdır. Sonrasında yüzey geriliminin etkilerini de hesaba katarak, (70.2) numaralı denkleme başvurabilir ve

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right) = gk + bk^3 \quad (75.1)$$



75. Soru - Bir süs havuzunun yüzeyinde, radyal olarak dışarı doğru hareket eden kılcal dalgaların meydana getirdiği daireSEL örüntü.

Fotoğraf: istockphotos.com



Şekil 75.1. Su birikintisine düşen bir yağmur damlasının meydana getirdiği dalga örüntüsü

şeklinde yazabiliriz; burada $b = \gamma/\rho$. Bu ifadeyi, olduğu gibi diferansiyelleyerek derin sulardaki yerçekimi – kılcılık dalgalarının hızını buluruz:

$$c_g(k) = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g + 3bk^2}{2(gk + bk^3)^{1/2}} \quad (75.2)$$

Eğer bu grup hızı, dalga sayısı k için bir minimum değere sahipse, sudaki bozulmanın meydana geldiği merkezden uzaklaşan son dalga grubu bu hızla hareket eder ve enerji de grup hızıyla hareket ettiği için

$$r < (c_g)_{\min} t$$

bölgesi sakindir. Biraz daha diferansiyellediğimizde,

$$\frac{dc_g}{dk} = 0 \quad \text{ne zaman ki} \quad k = \left(\left[\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right] \frac{g\rho}{\gamma} \right)^{1/2} = k^* \quad (75.3)$$

Dahası, ilk türev testinin de açıkça ortaya koyduğu gibi, bu kritik sayı c_g için bir *minimum* tanımlar. Bu, dalga gruplarının ardında, suyun sakin olduğu bir bölge bulunması gerektiği ve bu sakin

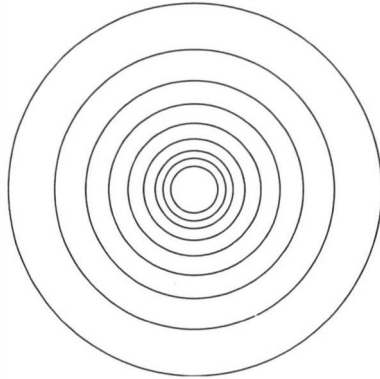
bölgenin de en yavaş dalga grubunun hızında yayıldığı anlamına gelir. Diğer bir deyişle,

$$(c_g)_{\min} = c_g(k^*) = \frac{\sqrt{3} - 1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^{1/4}} \left(\frac{g\gamma}{\rho}\right)^{1/4} \approx 1,09 \left(\frac{g\gamma}{\rho}\right)^{1/4} \quad (75.4)$$

Artık, denklemlere sayıları yerleştirebiliriz. $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $\gamma = 0,074 \text{ N/m}$, $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ değerlerini kullanarak $(c_g)_{\min} \approx 18 \text{ cm/s}$ buluruz (ya da ölçü birimlerimizi karıştırarak, yaklaşık 0,4 mil/saat.) Bu minimum hıza karşılık gelen dalga boyu sadece

$\lambda^* = 2\pi/k^* \approx 4,4 \text{ cm}$ 'dir. Bu, derin su yaklaşımının geçerli olabilmesi için $h \gtrsim 2\text{cm}$ olması gerektiği anlamına gelir ve böyle olması da mümkündür (o anda ölçüm yapmamıştım). Değilse bile ve süs havuzunun “derin” olmaması durumunda, yine benzer bir sonuç söz konusudur.

Son olarak, burada ele aldıklarımızdan daha büyük bir nesnenin, örneğin, bir kayanın, ne tür bir dalga örüntüsü meydana getireceğini Şekil 75.2'de görebileceğimizi belirtelim. Başlangıçta meydana gelen yüzeydeki bozulma ve hareketlenme dairesel dalga biçimleri aldığında, dalgalar uzar, yerçekimi tarafından ele geçirilir ve bu nedenle daha uzun olan dalgalar daha hızlı hareket eder.



Şekil 75.2. Süs havuzuna düşen bir kayanın meydana getirdiği dalga örüntüsü

Elbette bu, kılc algalarda görülen davranış biçiminin tam tersidir zira daha kısa kılc algalarda hızla ilerler. Her durumda, su yüzeyine taşınan enerji, dalgalarla dışarı doğru yayılım gösterir.

76. Soru: Okyanus dalgaları ne kadar enerjiye sahiptir?

Dalga enerjisi demişken, tam da bu konuya ilişkin birkaç hesap yapabiliriz diye düşünüyorum. Ne kadar enerjileri vardır? İşin matematiksel tarafını basitleştirmek için önce derin sulardaki doğrusal yüzey yerçekimi dalgalarını ele alacağız ve sonra denklemlerimize, dalgalar için birtakım sayısal değerler yerleştireceğiz. İlgilendiğimiz sonuçları elde etmenin fiziğe dayanan çabuk, adil olmayan ve değerli bir yolu var; bir de daha uzun ancak matematiksel anlamda daha tatmin edici bir yöntem mevcut. Taraf tutmayıp her ikisinden de yararlanmak güzel olurdu ancak bu kitabın sınırlarını gözeterek, burada biraz daha fizikle ilgili bir yaklaşımdan yararlanacağız.

(Hiç dalganın olmadığı) Ortalama seviyeden z yüksekliğinde bulunan bir dalgada, ince bir su kolonu olduğunu hayal edin; δx genişliğinde ve y uzunluğunda, dalga tepesinin çizgilerine paralel olsun (siz bu sayfayı okurken üstünüzü başınızı ıslatmasın!) Kütle $\times$ yerçekimi $\times$ yükseklik ya da $\rho z \times x \times g \times z'$ 'ye eşit olan bir miktarda potansiyel enerji kazanmış olsun; tüm dalga tepesini temsil etmesi için tüm $\lambda/2$ uzunluğunun üzerinde integrallenmesi gerekir. Böylelikle, eğer dalga profili (doğrusal kuramın gerektirdiği üzere) sinüs biçimli olursa, o zaman $z = A \sin kx$ 'tir; burada A , şimdilik gerçek olarak kabul edeceğimiz, dalga genliğidir. Bir dalga boyundaki potansiyel enerji,

$$\int_0^{\lambda/2} \rho g y A^2 \sin^2 kx dx = \frac{1}{2} \rho g y A^2 \int_0^{\lambda/2} (1 - \cos 2kx) dx = \frac{1}{4} \rho g y A^2 \lambda \quad (76.1)$$

Durun bir dakika; peki ya dalga boyunun geri kalanı? Peki, dalga çukurunu unutmadık mı? Ayrıca dalga çukuru, ortalama yüzeyin altında olduğuna göre toplam potansiyel enerjinin sıfır olması

gerekmez mi? Düşünmeye değer bir soru bu... Doğrusal kuramda dalga çukurları ve tepeleri simetrik olduğundan, her bir dalga boyunu, düz yüzeyden (bir çukur oluşturacak şekilde) kaşıklanmış ve bir tepe oluşturacak şekilde istiflenmiş gibi düşünebiliriz; dolaşısıyla dalganın potansiyel enerjisi için daha fazla hesaplama yapmamıza gerek yoktur. Elbette bu, pek de böyle olmaz ancak size çabuk olacağını ama adil olmayacağını söylemiştim... Öyleyse geriye bir tek, dalganın kinetik enerjisini hesaplamak kalıyor. Bu kolay; yukarıdaki sonucu iki ile çarpmamız yeterli! Ancak (bir kez daha) durun bir dakika; neler oluyor? Son derece kabul edilebilir, küçük bir matematiksel el çabukluğu sergiledik ancak biraz daha açıklama gerektiriyor. Eşit iki doğrusal dalga katarının bir duran dalgaya denk olduğunu iyi biliyoruz çünkü, örneğin,

$$A \cos (kx - \omega t) + A \cos (kx + \omega t) = 2A \cos kx \cos \omega t \quad (76.2)$$

böylece her x konumunda, yüzey de zaman içinde yükselir ve iner. Ancak amaca uygun şekilde seçilmiş iki duran dalganın, yayılım hâlindeki (ya da ilerlemeci) bir dalgaya denk olduğu, daha az bilinen bir gerçektir. Bu, örneğin, eşit genlikte, bir dalga boyunun dörtte biri kadar faz dışı ve bir periyodun dörtte biri kadar faz dışı iki dalga için geçerlidir çünkü

$$A \cos kx \cos \omega t + A \sin kx \sin \omega t = A \cos (kx - \omega t) \quad (76.3)$$

Bunlardan biri azami genlikteyken, diğeri bir an için “düz” olur, net potansiyel enerjisi sıfırdır ve enerjinin tamamı parçacık hareketi biçimindedir. Ancak bir periyodun dörtte biri kadar zaman geçtikten sonra bu profiller birbiriyle yer değiştirir; öyleyse ortalaması alınmış potansiyel enerji ile ortalaması alınmış kinetik enerji arasında bir “eşbölüşüm” olmalıdır. Bu sebeple, toplam enerji $\frac{1}{2} \rho g A^2 \lambda'$ 'dir ya da birim yüzey alan başına (γ ile böldüğümüzde)

$$E = \frac{1}{2} \rho g A^2 \quad (76.4)$$

olur; bu, dalganın frekansından ya da dalga boyundan bağımsızdır ve “derin” su varsayımı dışında, derinlik hiçbir yerde devreye girmez. Bu sonuç, tüm dalgalar için bir yönden standart sayılır: Enerji, genliğin karesi ile orantılıdır. Hesaplamaya devam edecek olursak, 1 metrelik bir A genliği ve 1000 kg m^{-3} ’lük suyun yoğunluğu için bu tür bir dalga söz konusu olduğunda metre kareye düşen enerji

$$E = \frac{1}{2} \times 10^3 \times 9,8 \times 1 = 4900 \text{ joule m}^{-2}$$

ya da bina yıkımında kullanılan, çelikten bir güllenin duvara vurduğu zamanki enerjisinin onda biri olur. Bu enerji, dalga hızının yarısı kadar olan, diğer bir deyişle $c/2$ ile grup hızıyla yerine ulaşır. Sözelimi 100 m olan bir dalga boyu için dalga periyodu T, 8 sn ve grup hızı yaklaşık 6 m/sn ise y-yönündeki bir dalganın her bir metrelik uzunluğu için enerji, metrede yaklaşık 30 kW (kilovat) olur. Bu da Britanya Adası'nın yaklaşık 2000 kilometrelik kıyı şeridi için bir tahminde bulunacak olursak, sadece bu düşük frekans dalgaları için yaklaşık $6 \times 10^4 \text{ MW}$ ’lık (megavat) bir enerji anlamına gelir (adanın etrafı boyunca, tamamen aynı olması beklenemez elbette), dolayısıyla gerçek enerji akışı muhtemelen bundan çok daha fazladır.

İlginç bir enerji karşılaştırması için, ortalama bir yetişkinin güç çıktısını düşünelim. Genellikle günde 2500 gıda kalorisi (Kalori) alırız ve $1 \text{ Kalori} = 4 \times 10^3 \text{ Joule}$ ’dür; bir günde aşağı yukarı 10^5 olduğuna göre, güç çıktımız P de

$$P \approx 2,5 \times 10^3 \text{ kal/gün} \times \left(\frac{4 \times 10^3 \text{ J}}{1 \text{ kal}} \right) \times \left(\frac{1 \text{ gün}}{10^5 \text{ s}} \right) = \frac{10^7 \text{ J}}{10^5 \text{ s}} = 100 \text{ J/s} = 100 \text{ W}$$

olur; yani 100 W’lık bir ampul kadar! Bu nedenle, metrelik dalga enerjisine ilişkin yukarıdaki kestirimimiz, $3 \times 10^4 \text{ W}$ bir konser salonunu doldurmuş üç yüz kişilik bir insan topluluğunun güç çıktısına eşdeğerdir. Güzel... Daha doğrusu, biraz bunaltıcı...

77. Soru: Bir dalga, suyun ortalama derinliğini artırır mı?

Hayır, ancak suyun kütlesinin merkezini yükseltir. Gelin, bu ifadeleri ve ne anlama geldiklerini biraz daha yakından inceleyelim. Şekil 77.1, basit (ve ideal) bir dalganın yüzey profilini gösteriyor. İlk olarak, tek bir dalga boyunun, daha önce durgun olan bir



Şekil 77.1. Bir dalganın neden olduğu yüzey dalgalanmasının bir bölümü

suyun ortalama derinliği üzerindeki etkisine bir bakalım. Kütlenin korunumu yasasına göre hiçbir değişiklik olmayacaktır, öyle değil mi? Bu doğru. Ancak mümkün olan her yerde kullanmadıktan sonra analiz dersi almanın ne anlamı var? Pekâlâ, ben ikna oldum. Bozulup hareketlendirilmemiş su yüzeyini $y = 0$ olarak alalım ve dalga “segmentinin” üzerine bindirelim; bu segmentin genliği olan A ve dalga boyu λ , şöyle tanımlanır:

$$y(x) = A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (77.1)$$

Ayrıca bozulup hareketlendirilmemiş suyun derinliğini H olarak alalım; özellikle dip sınırı $y = -H$ ile tanımlanır. Bir dalga boyu üzerinde yüzey dalgalanmasına sahip olan derinliğin ortalama değeri

$$\bar{H} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda (H + y(x)) dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \left(H + A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right) dx = H \quad (77.2)$$

Burada şaşırtıcı bir durum yok. Ancak eğer integral aralığını iki eşit parçaya bölersek, çukur ve tepe için ortalama ne kadarlık bir derinliğin, H ’den saptığını hiç olmazsa görebiliriz. Böylece $[0, \lambda/2]$ üzerinde

$$\bar{H} = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} \left(H + A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right) dx = H + \frac{2A}{\pi} \quad (77.3a)$$

ve benzer şekilde, $[\lambda, \lambda/2]$ üzerinde

$$\bar{H} = \frac{2}{\lambda} \int_{\lambda/2}^{\lambda} \left(H + A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right) dx = H - \frac{2A}{\pi} \quad (77.3b)$$

Öyleyse tepe, suyun ortalama derinliğini $2A/\lambda \approx 0,64A$ kadar artırır ve çukur aynı miktarda azaltır. Ancak daha önce durgun olan su yüzeyine eklenmiş su miktarı nedeniyle, tepenin altındaki su, çukurun altında kalandan daha fazladır; dolayısıyla su kütlesinin merkezinin yüksekliği pekâlâ değişir. İlk ifademizi doğrulamak için grafiğimizin sinüs fonksiyonunu (77.1) incelemek yeterlidir...

Dibin üzerindeki su kütlesinin merkezinin yüksekliği bir dalga boyunun üzerindedir,

$$\bar{H} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^{\lambda} (H+y(x))^2 dx}{\int_0^{\lambda} (H+y(x)) dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^{\lambda} \left(H + A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right)^2 dx}{\int_0^{\lambda} \left(H + A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right) dx} = H + \frac{A^2}{2H} > H \quad (77.4)$$

tabii ufak bir oynamadan sonra (trigonometrik özdeşlikler dersinize çalıştıysanız eğer!)

Alıştırma: (77.4) numaralı denklemdeki sonucu ortaya koyun.



78. Soru - Dünya'nın yaklaşık yarıçapını belirlemek için kullanılan dümen suyu.
Fotoğraf: istockphotos.com

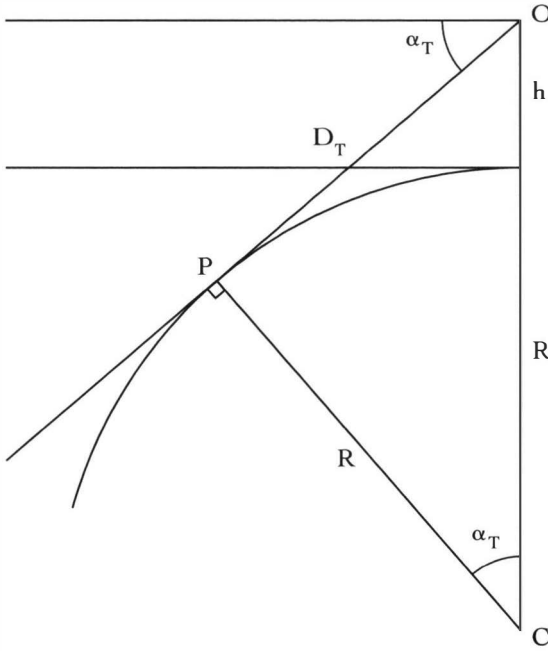
78. Soru: Dümen suyu, Dünya'nın “yuvarlak” olduğunu nasıl kanıtlayabilir?

Bir dostum (Dave Lynch), Hint Okyanusu'nda seyahat ederken çektiği ve bir geminin dümen suyuna ait fotoğraf sayesinde Dünya'nın yuvarlak olduğu çıkarımında bulunabilmiş ve yerkürenin yarıçapını kestirebilmişti (gerçi, bu hesaplamaları yapmadan önce Dünya'nın yuvarlak olduğunu bildiğini sanıyorum). Peki, Dave bunu nasıl başardı? Akıllıca ancak basit bir şekilde; nasıl yaptığının ayrıntılarına (ve çekmiş olduğu fotoğrafa) gelince, onları bu soru başlığı altında inceleyeceğiz.

Eğer Dünya düz, ufuk çizgisi de sonsuz uzaklıkta olsaydı, uzun ve dümdüz bir dümen suyunun paralel kenarları ufuk çizgisindeki bir noktada birleşiyor gibi görünürdü (uzaktaki yolun her türlü atmosferik küçülme etkisini göz ardı ediyoruz); gözlemcinin perspektifinin açık bir etkisidir bu. Elbette, düz ancak sonlu bir Dünya (örneğin, dairesel bir disk) için durum farklıdır ancak burada bu olasılık üzerinde durmayacağız; ne de olsa Dave'in gemisi, Dünya'nın sonu olan bir kıyı ucundan yuvarlanıp düşmedi ancak belki de yeterince uzaklara seyahat etmediği içindir bu...

Yine de fotoğrafın işaret ettiği üzere, dümen suyu genişliğinin gözlemlenebilir ufuk çizgisinde sıfır olmaması, ufka sonlu bir mesafede bulunulduğunu gösterir çünkü Dünya'nın yüzeyi, gözlemcinin yatay teğet düzleminin sürekli olarak “uzağına düşmektedir”. Eğer, aynı etki orijinal yöne 90° 'de de gözlemlenebilseydi, silindirik biçiminde değil, sferoit (küremsi) bir gezegende olduğumuz anlamına gelirdi bu! Sıradaki hesaplamalarımız *küre biçiminde bir Dünya* varsayımına dayanacak.

Gözlemcinin (dostum Dave'in) Dünya'nın yüzeyinden (bu durumda, okyanusun yüzeyinden) bir h yüksekliğinde bulunduğunu düşünelim ya da daha kesin bir ifadeyle, Dave'in gözleri bu yükseklikte olsun. O noktasındaki gözlemcinin gördüğü hâliyle, ufuk çizgisine olan mesafenin uzunluğunu $D_T = OP$ olarak ifade edelim (bkz. Şekil 78.1); denizcilerin dalma açısı dediği α_T ise adından da



Şekil 78.1. Küre biçimindeki bir Dünya'nın basit geometrisi

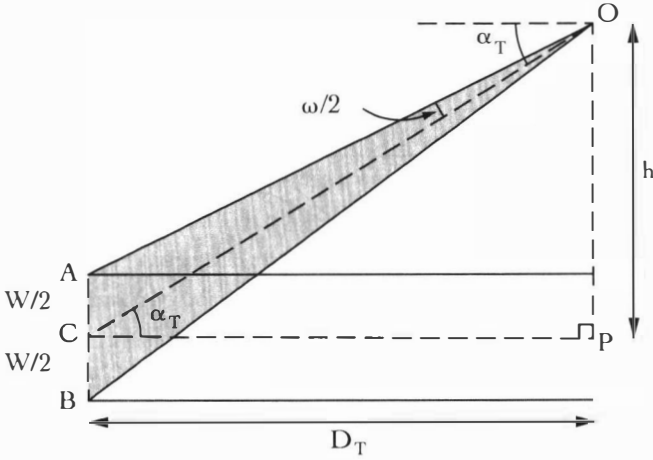
anlaşılacağı gibi, gözlemciden ufuk çizgisine uzanan hattın oluşturduğu ve ufuk çizgisinin altında kalan açıdır.

Dünya'nın yarıçapını R olarak gösterdiğimizde, Pisagor teoremi, bize şu ilişkiyi verecektir:

$$D_T = (2Rh + h^2)^{1/2} \quad (78.1)$$

(Bu sonuçla daha önce de karşılaşmıştık; nerede olduğunu hatırlıyor musunuz?) Şeklin geometrisinden hareketle varabileceğimiz bir başka yararlı sonuç şudur:

$$\sin \alpha_T = \frac{D_T}{R + h} \quad (78.2)$$



Şekil 78.2. Dümen suyu gözleminin basit bir üç boyutlu geometrisi

Şekil 78.2, W genişliğindeki dümen suyuna ait PC orta çizgisinin tam üzerindeki bir gözlemci için geçerli olan üç boyutlu geometriyi gösterir. Ufuk çizgisinde dümen suyu genişliğinin, gözlemcinin gözüne karşıdan yaptığı açı ω 'dır.

Bu şekillerden hareketle şöyle gösterilebilir:

$$\omega = 2 \arctan \left[\frac{1}{2} \frac{W}{(D_T^2 + h^2)^{1/2}} \right] \quad (78.3)$$

Birazdan bu ifadelere sayısal değerleri de yerleştireceğiz ancak iki akla yatkın yaklaşımla, son sonucumuzu, uygulamada çok daha kolay anlaşılır kılacaktır. Burada ω , çok küçük bir açı olduğundan ve h/D_T oranı küçük bir orana karşılık geldiğinden, yukarıdaki (78.3) numaralı denklem Dave'in yaklaşıtlımına indirgenmiş olur;

$$\omega \approx \frac{W}{D_T} \quad (78.4)$$

Artık, peşinde olduğumuz R 'yi, fotoğraftan da ölçülebilecek ω , W ve h 'den yararlanarak ifade edebiliriz. (78.1) ve (78.4) numaralı denklemlerden hareketle yazalım:

$$R = \frac{W^2 - \omega^2 h^2}{2h\omega^2} \quad (78.5)$$

Matematikçiler genellemeler yapmayı sevdiğinden, işte okur için bir başka alıştırmaya daha: Yukarıdaki yaklaşımları kullanmadan şunu ispat edin:

$$R = \frac{W^2}{8h} \cot^2 \frac{\omega}{2} - h \quad (78.6)$$

Dünya'nın tahmin etmiş olduğumuz yarıçapı R , (özellikle) W ve h ile nasıl bir çeşitlilik gösterir? İster (78.5) numaralı denklemi kullanalım, ister (78.6) numaralı denklemi, $(\delta R / \delta W) > 0$ olması gerektiği açıktır; diğer bir deyişle, dümen suyu genişliğine ilişkin abartılı bir tahmin, R tahminini de artırır. Tekrar edelim, ister (78.5) numaralı denklemdeki yaklaşımları, ister (78.6)'daki kesin sonucu kullanalım, $(\delta R / \delta h) < 0$ olur; böylelikle gözlemcinin h yüksekliğine ilişkin abartılı bir tahmin, R için *düşük bir tahmin* anlamına gelir.

Gelin şimdi, Dave'e borçlu olduğumuz sayıları yerlerine koyalım (ayrıntılar, Kaynakça'daki *Applied Optics* makalesinde bulunabilir): $W = 30$ m, $h = 32$ m ve $\omega = 4,6$ dakikalık yay (bir derecede, yayın altmış saniye olduğunu hatırlayalım). (78.5) numaralı denklem dışında bir şey kullanmamıza gerek yok; bu denklem sayesinde $R \approx 7850$ km sonucuna ulaşıyoruz. Bu da bir fotoğraftan yola çıkarak doğru ölçümlerde bulunmanın ne kadar zor olduğu düşünülürse, gerçek yarıçap değeri olan 6380 km'ye oldukça yakın bir sonuçtur.



Ormanda

79. Soru: Ağaçlar ne kadar uzayabilir?

Bir ağaç gövdesinin kendi ağırlığı altında bükülüp bükülmeyeceğini, üzerine yük binmiş bir dalın kırılıp kırılmayacağını belirleyen, ağacın mekanik ya da elastik özellikleridir. Bu nedenle bükülmezlik ve güç, yapının esnekliği tarafından belirlenen niteliklerdir. Ağaçlarla ilgili bazı gerçekleri ele alalım: (i) Yoğunluğu ile ilişkili olarak tahta –ış, eğilmeye bükülmeye geldiğinde– betondan, dökme demirden, alüminyum alaşımından ya da çelikten daha sert ve güçlüdür; (ii) ağaçlar, büyürken ihtiyaç duydukları kaynakları idareli kullanır; (iii) “asgari ağırlık” ilkesini “kullanır”; adından da anlaşılabilceği gibi bu ilkenin anlamı şudur: Bir yapıyı güçlendirmek ya da ona destek sağlamak için kullanılan her malzeme, aynı yapının taşımak zorunda olduğu toplam yüke ekleneceğinden, (örneğin, büyümede olduğu gibi) yükseklik eklemek, yapının gücü ile ağırlığı arasında bir değiş tokuş içermelidir (üçüncü bölümde belirtildiği gibi, King Kong ve dev karıncaların dünyayı ele geçiremeyecek olmalarının sebebi de budur çünkü var olamazlar). Ayrıca bu, neden Dünya'nın en yüksek, en iri ve en uzun ömürlü organizmalarının ağaçlar olduğunu en azından kısmen açıklar. Bu yüzden, Dünya'nın en büyük hayvanı olan mavi balina nadiyen 110 futtan [33,5 m] daha uzun, 180 tondan daha ağırdır; oysa dev sekoya ağaçları (*Sequoiadendron giganteum*!) 310 futa (94 metreye) kadar büyüyebilir, gövdelerinin çevre ölçüsüyse 100 futa (30 metreye) ulaşabilir. California'nın General Sherman sekoyası 270 futtan [82 m] uzundur, ağırlığının da en az 2500 ton olduğu tahmin edilmektedir. Gövdelerinin çevre ölçüsü diğer sekoyalar kadar olmasa da en boylu ağaçlar kızıl kıyı sekoyalarıdır (*Sequoia sempervirens*). En yaşlı ağaçların bazıları 2000 yıldan uzun bir zamandır bu dünyada; en yaşlı Bristlecone çamı (*Pinus longaeva*) 4700 yaşında, belki daha da yaşlı! Müdahale edilmezlerse ağaçlar, ölümlerinden sonra bile on yıllar boyunca ayakta kalabilir.

Tamamen mekanik açıdan bir tartışma bizi bekliyor; dolayısıyla ağaç gelişiminin (en önemli değilse bile) temel bir etmenini hesaba

katmadığımız, sınırlı bir tartışma bu. Bu etmen, ağaçların boy gelişiminin, besin yönünden zengin suyun (terleme yoluyla) ağaçlar tarafından ne kadar alınabildiğine bağlı olmasıdır. Ancak burada, en az onun kadar ilginç bir mekanik mühendisliği problemiyle yetimeceğiz: *Düzgün bir kolonun (ağacımızın) kendi ağırlığı altında bükülmesi problemiyle*. Mekanik tartışmalardan (bu sorunun sonunda özetlenmiştir) yararlanarak ve ilgili diferansiyel denklemleri devreye sokarak, $R_{\max}$ yarıçapına sahip düzgün bir silindirin $H_{\max}$ maksimum yüksekliğinin $R_{\max}^{2/3}$ ile orantılı olduğu söylenebilir ya da daha kolay anlaşılır bir ifadeyle, “ağacımızın” yarıçapı R 'nin $H_{\max}^{3/2}$ ile orantılı olduğunu ortaya koyabiliriz. (Her iki yaklaşım da Adam'ın eserinde (2006) ele alınmıştır.) Bu nedenle H ,



79. Soru - Kanada'nın Alberta eyaletindeki bir ormanda bulunan çam ağaçları

zaman içinde ($H_{\max}$ 'a kadar) artış gösterdikçe, R daha da büyük bir oranda artacaktır; yükseklik iki katına çıkarsa, yarıçap $2^{2/3}$ 'ün bir çarpanı kadar artış gösterecektir, $\approx 2,8$. Elbette, karmaşık dal yapısı, yaprak örtüsü ve bazı ağaçların tepeye doğru sivri bir görünüm kazandığı düşünülecek olursa, bir ağacın basitçe bir dikey silindir (bile) olmadığı iddia edilebilir. Ancak elimizdeki bu basit model, herhangi bir ağaç türü için şaşırtıcı derecedeyararlıdır; $H_{\max}$ denkleminde kullanılan orantısallık sabiti k 'nın biliniyor olması hâlinde:

$$H_{\max} = k(R_{\max})^{2/3} \quad (79.1)$$

Buradaki k sabiti, her bir ağacın kendi mekanik özelliklerine bağlıdır (yoğunluk ve doğrusal esneklik ya da gerilimin gerinime olan oranı gibi); dişbudak, karamişe ve sekoya ağaçları için $H_{\max}$ değerleri, aşağıdaki küçük tablodaki gibidir:

Ağaç (ve tahmini tipik R ölçüsü)	$H_{\max}$ (m)	$H_{\max}$ (fut)
Dişbudak ($R_{\max} = 9$ inç = 0,23 m)	60,8	200
Karamişe ($R_{\max} = 18$ inç = 0,46 m)	90,2	296
Sekoya ($R_{\max} = 1$ m)	164,0	538

Modelimiz, ağaçların büyük bir emniyet katsayısı esas alınarak inşa edildiğini açıkça ortaya koyuyor! Bilinen en uzun sekoya ağacı olan, California kıvıl kıvı sekoyası Hyperion'un boyu 379 futtur [115,5 metre]. Rekor sahibi başka bazı ağaçlar şunlardır: 302 fut ile Douglas köknarı [92 metre], 310 fut ile dev sekoya General Grant [95 metre], 223 fut ile ponderosa çamı [67,9 metre], 291 fut ile sedir ağacı [88,6 metre], 216 fut ile Sitka ladini [65,8 metre] ve 161 fut ile kayın ağacı [49 metre]. Karamişe ve beyaz dişbudak ağacı için tipik değerler, sırasıyla 50–80 fut (çap 1 ilâ $2\frac{1}{2}$ fut) ve 80 futtur (yaklaşık çap 2 fut). [karamişe için 15,2– 24,3 metre ve 0,30 ila 0,76 m çap; beyaz

dişbudak için 24,3 metre ve 0,60 m çap] Sekoyalar genellikle 350 fut [106,6 m] yüksekliğindedir.

Bu $H_{\max}$ üst sınırı, tamamen mekanik değerlendirmelere göre belirlenmiştir. Bu bölümün başında da değindiğimiz gibi göz ardı etmiş olduğumuz, ilgili ancak farklı bir koşul daha vardır; ağacın, gövdesi boyunca dallarına ve yapraklarına su ulaştırabilme becerisi. Bu işlem terleme yoluyla yapılır ve bu mekanizmanın ne kadar yüksekliğe değin etkili bir şekilde işleyebileceğine ilişkin elbette bir sınır mevcuttur. Bu (sınırım) $H_{\max}$ 'tan *daha düşük* ve bu nedenle daha gerçekçi bir üst sınır olacaktır. Emniyet katsayılarıyla çalışmaktan mühendisler de hoşlanır! Dahası, salt mühendisliğe dayalı bir analiz temelinde düşünerek, bir ağacın yarıçapı ile yüksekliği arasındaki ilişkiye dair basit bazı çıkarımlarda bulunmayı başarmış olduk. İlginçtir ki bu model, hayvanlara ilişkin modeller için de uygun olabilir; zira bir gövdeden alınan çoğu kesit, kabaca, silindir biçimindedir ve bükülmeye karşı dayanıklı olacak şekilde inşa edilebilir.

BOYUTSAL TARTIŞMALAR VE (79.1) NUMARALI DENKLEMİN MEKANİK “TÜREVİ”

Kolaylıkla eğilip bükülebilen sırtıklarla denemeler yapmış herkesin tahmin edebileceği gibi, eğer kendini destekleyen dikey bir kolonda, yüksekliğin yarıçapa oranı çok büyükse, kolon sapmaları karşısında kararsızlaşacaktır. Zira eğer önceden dikey olan bir kırışte bir “eğilme” varsa maksimum yanlara sapma noktasının üzerindeki kolon ağırlığı nedeniyle bir tork (ya da dönüşe sebep olma eğiliminde moment) var demektir. Denge durumunda bu, kolonun iki yanından birindeki ilgili basma ve çekme gerilimleri tarafından dengelenir. Bu esnek tork (τ_e) yerçekimi torku denilen torku (τ_g) dengelemeye yetmediğinde, kolon bükülür. Bu nedenle, kararlılık durumu için şöyle olmalıdır:

$$\tau_e > \tau_g \quad (79.2)$$

böylelikle

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{\theta D}{H} \sim \left(\frac{aD}{H^2} \right) \quad (79.5)$$

zira $\sin \theta \sim \theta$ ve bu sebeple $\theta \sim 2a/H$. Dolayısıyla, (79.4) ve (79.5) numaralı denklemlere dayanarak

$$Wa < E \left(\frac{aD}{H^2} \right) D^5$$

ya da

$$H < \left(\frac{EHD^4}{W} \right)^{1/3} = \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/3} D^{2/3} = H_{\max} \quad (79.6)$$

yazarız; burada ρ kolonun yoğunluğu olacak şekilde, $W \sim HD^2\rho$ eşitsizliğini kullanmış oluyoruz. Boyutsal bir tartışma yürütüyor olduğumuzu hatırla tutalım ancak yine de bu, bir merteye çarpımsal sabitlere kadar ve hemen sonrası için de geçerlidir. $K = (4E / \rho)^{1/3}$ 'ü tanımlamak, (79.1) numaralı denklemde $H_{\max}$ için bir üst sınır koymaya yarar.

Son olarak, ağaç büyüyüp gelişirken basıncın sabit kalacağı gibi mantıklı bir varsayıma dayanan, daha basit bir iddia ileri sürülebilir. Daha çok *kemik* büyümesi için geçerli olsa da bu varsayımı tartışmamızı tamamlamak için konuya dahil ediyoruz. Basınç, birim alana düşen kuvvet olarak tanımlanır ve dikey bir sütun için herhangi bir yatay enkesit üzerindeki kuvvet, üzerindeki kolon ağırlığı kadardır. Ağırlık hacimle, hacim de (ebat)³ ile orantılı olduğu için basınç da H^3 / R^2 niceliği ile orantılıdır. Eğer basınç, ağaç (ya da kemik) büyüyüp gelişirken sabit kalırsa ve bu durumda bu varsayım geçerliyse, ağacın (esasen büyüyüp gelişirken geçtiği her aşamadaki) yüksekliği, yarıçapının üçte ikilik kuvveti ile orantılıdır.

80. Soru: Bir yaprak adacığı, altındaki yaprak adacığı için ne kadarlık gölge oluşturur?



80. Soru - Yaprak gölgeleri.

Her bir ağacın, güneş ışığını kesip engellemekte ne kadar etkili olduğuna dikkat edin.

Bu, önemli bir soru çünkü tercihen, yaprakların bütün kısımlarının fotosentezden en iyi şekilde yararlanmak için güneş ışığını görmesi gerekir. Her ne kadar yapraklar genellikle daire şeklinde olmasa da bu çok önemli değildir çünkü burada, yaprağın ışığı tamamen engelleyen en büyük dairesel alanıyla ilgileniyoruz. Öyleyse uygulamada, *efektif olan* bir çapla, diğer bir deyişle, yaprağın sınırları içindeki en büyük dairenin çapıyla ilgileniyoruz. Bir çam ağacının ince ve uzatılmış yaprağın çapı, aynı alana sahip ancak yuvarlak ya da eliptik bir yaprağa kıyasla genellikle daha küçüktür. Ayrıca yapraklar tamamen ışık geçirimsiz de değildir; çoğunlukla gelen ışığın %95'ini emerler; yani ışık filtresi gibi çalışırlar. Gelin, geçerli yarıçapı r olan dairesel yapraklar alalım ve bunları n tabakalar hâlinde etrafa "saçalım"; tabakamızın ortalama yoğunluğu, zeminde birim alan başına ρ (sayıda) yaprak olsun. Bu, ρ yoğunluğun n tabakalar arasında düzgün bir biçimde dikey olarak dağılım gösterdiği anlamına gelir; dahası, işleri basitleştirmek adına her tabakada yapraklar arasında eşit mesafe olduğunu, diğer deyişle yaprakların üst

üste binmediğini de varsayıyoruz. Elbette bu tam anlamıyla savunulabilir bir varsayım değildir yine de yapraklar bütünüyle kaplanmış olan alan için bir üst sınır koymamızı sağlar.

Şimdi, yaprakların izdüşümünü, yaprak gölgeleri tarafından kaplanmış zeminin, yaprakların bulutsuz bir günde, güneş ışığı ile aydınlatıldığı zamanki orantısı olarak tanımlıyoruz; bir başka deyişle bu, yaprakların kesintiye uğrattığı ışık akısının orantısıdır. Bu nedenle her bir n tabakasının ortalama izdüşümü $\rho\pi r^2 / n$ 'dir. Eğer tabakalar birbirlerinden yeterince uzaksa, gelen ışığın

$1 - \rho\pi r^2 / n$ kadarlık bir oranı ilk tabakadan geçecek, bunun da yine aynı oranı, $1 - \rho\pi r^2 / n$ ileilecek ve n . tabakaya değin bu, böyle devam edecektir. Öyleyse tüm n tabakadan (çoklu tabakalardan) geçen ışığın oranı P_n

$$P_n = \left(1 - \frac{\rho\pi r^2}{n}\right)^n \quad (80.1)$$

Bu noktada sorumuz bakımından anlamlı olan iki sınırlayıcı durum ya da aşırı durum söz konusudur. Bunlardan ilki olan tek bir tabaka için $n = 1$ 'dir (bazı palmiye ağaçların da olduğu gibi bu pek sıra dışı değildir); ikincisi, sınırlayıcı durum bir olan $n \rightarrow \infty$ için ise aşağıdaki denklemimiz geçerlidir:

$$P_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\rho\pi r^2}{n}\right)^n = e^{-\rho\pi r^2} \quad (80.2)$$

Böylelikle, yaprakların n tabakalar arasında (ve pek çok yaprak olduğuna göre sonsuzluk boyunca) eşit bir şekilde dağılım gösterdiğini ve tabakaların birbirlerinden bağımsız olacak kadar ayrı olduklarını varsayarak, bu yaprak filtrelerinden geçen geliş ışığının üstel bozunumuna ilişkin iyi bilinen bir sonuç elde etmiş olduk. Bu türden bir sonuçla, ormanın ışık geçirimsizlik özelliğiyle ilgili olan 82. Soru'da yine karşılaşacağız. Herhangi bir sınırlı sayıdaki yaprak grubu için n 'nin bir üst sınırı olduğuna dikkat edin; tabaka başına birden az yaprak düşüyor olamaz! Bu sınırlayıcı biçimin (80.2) neye işaret ettiğiyse hiç şaşırtıcı değildir: Birim alana düşen yaprak

yoğunluğu (ρ) ne kadar fazlaysa, yaprakların geçerli yarıçapı r de o kadar büyük olur ve zeminde (ya da verili her düzeyde) daha fazla gölge olur. Çözümümüzün daha zor fark edilir bir sonucuysa, aynı yaprak alanı ortalamasına sahip ancak yaprak biçimleri farklı olan iki ağaçtan, yaprakları daha uzun olanın (dolayısıyla r değeri daha küçük olanın) zemine daha fazla ışık düşmesine izin vereceğidir.

81. Soru: “Ormanın uğultusu” nedir?

Rüzgâr, gerili bir teli keserken (diğer bir ifadeyle bu tele düşey konumda eserken) notalar ya da uğultu benzeri birtakım sesler meydana gelebilir. Bu seslere, *rüzgâr tonları* denir; örneğin, rüzgârın, telleri arasında gezinerek “çaldığı” ve bu nedenle rüzgâr arpi olarak bilinen basit bir çalgı vardır. Sesler, *hortum saçılması* denilen ve bir engelin her bir yanından dönüşümlü olarak ayrılıp uzaklaşan burgaçların oluşturduğu, tekrara dayalı bir örüntünün sonucudur. Bu nedenle, çam iğnelerinin, yapraksız çalıların ve küçük dalların aynı prensiple ve uygun koşullar altında rüzgâr tonları çalabileceğini söylemek gerçektir olmaz. Ayrıca ağaçların kendi türlerine özgü sesleri de vardır. Nispeten daha iri olan dallara sahip meşe ağacının, sayısız iğnesi olan çam ağacına kıyasla çok daha pes tonlarda ses üretmesi beklenebilir; çam ağacının, daha tiz tonlardan oluşan bir ses aralığı vardır. Bu ağaç seslerinin notaları birbirine nasıl karışır? Notaların birleşiminden oluşan senfoninin sonucu olan ses yeğlinliği ve perde, her bir “müzişyenin” kendi bireysel özellikleriyle nasıl bir ilişki içindedir?

Bu soruları yanıtlamak üzere ufak bir gezintiye çıkalım. Eşit a genliğinde ve sırasıyla ω_m , ω_n açılal frekanslarında ve yine sırasıyla δ_m , δ_n fazlarında olan, sinüs biçimli iki dalga katarımız olduğunu düşünelim. Öyleyse

$$a \left[\cos(\omega_m t - \delta_m) + \cos(\omega_n t - \delta_n) \right] = 2a \cos \frac{1}{2} \left[(\omega_m + \omega_n)t - \delta_m - \delta_n \right] \\ \times \cos \frac{1}{2} \left[(\omega_m - \omega_n)t - \delta_m + \delta_n \right] \quad (81.1)$$

Bilindiği gibi, eğer $|\omega_m - \omega_n|$ yeterince küçükse, bu denklem bir “vuruş” olgusunu tanımlar. Burada, frekans ve fazıyla, orijinal iki salınının ortalamasına (sağdaki ilk kosinüs) tamı tamına eşit olan bir salınım, yavaş yavaş değişip çeşitlenen bir “taşıyıcı dalga” (sağdaki ikinci kosinüs) tarafından modüle edilir. Ancak genellikle, daha yüksek frekanslı kısmın (eğer $\omega_m > 0$ ve $\omega_n > 0$ ise) frekansının, ω_m ile ω_n toplamına bağımlı olduğunu, daha düşük frekanslı kısım için belirleyici olanınsa bu ikisi arasındaki fark olduğunu görebiliriz. Örneğin, eğer 256 Hz ve 254 Hz frekansındaki iki ses dalgası, aynı anda çalınacak olursa, 2 Hz frekansında bir vuruş duyulur (insan kulağı 7 Hz ve altındaki frekanslarda olan vuruşları duyabilir). Çoğu zaman, birleşim “notasının” öğeleri arasında, orta seviyede bir perde olacaktır. Bunun gibi pek çok sesin, bireysel bileşenlerinin yaklaşık bir ortalaması olan perdeye sahip bir “notamsı” olacak şekilde birleşmesi beklenir. Öyleyse, Humphrey'nin *Physics of Air (Havanın Fiziği)* adlı eserinde de işaret ettiği gibi, “bir ağacın fısıltısı... bireysel dallarının ya da iğnelerinin perdesiyle aynı perdeye sahiptir; tıpkı bir arı kolonisindeki uğultunun, içerideki sıradan bir arının vızıltısıyla aynı perdeye sahip olması gibi.” Şimdi, birbirine karışmış notaların *yeğînliği* aşağı yukarı nasıldır, ona bakalım.

Temel olarak, birim genlikte, aynı perde ya da frekansta ancak (en azından kısa süreliğine) keyfi fazda olan bireysel n seslerini ele alıyoruz. Bu, bir ağacın rüzgâr karışımı için makul bir yaklaşımdır. Eğer tüm notalar, verili bir anda aynı faza sahip olsaydı, birleşik genlik n 'ye eşit, birleşik yeğînlik ise n^2 olurdu. Bunun yerine, eğer notaların tam yarısı verili bir fazda olsaydı (n , çift sayı olsaydı) ve diğer taraf da tamamen karşı fazda olsaydı (diğer bir deyişle 180° ’lik bir fark), birleşik yeğînlik sıfır olurdu. Basit olmak adına, n seslerin, eşit olasılığa sahip, ya “+” ya da bunun tam tersi (“-”) fazlara sahip olduğunu biliyoruz. Bu, $1/2$ olan bir olma olasılığına sahip bir binomal (iki terimli) dağılım (sözgelimi, X) örneğidir. Fazları sadece bu seçeneklerle sınırlandırarak, basit matematik yoluyla bu durum hakkında çok daha gerçekçi bir fikir edine-

biliriz. Eğer n sesleri (ya da salınımları) aynı faza sahipse (sözgelimi +), birbirlerini pekiştirirler ve ortaya çıkan yoğunluk n^2 olur. Ancak eğer salınımlardan biri (–) fazına sahipse, kalan $n - 1$ (+) salınımlarından birini iptal edip götürecek ve geriye $n - 2$ kalacaktır. Bu şekilde devam ettiğimizde, (–) fazlı *iki* salınım, iki (+) sesi iptal edip götürecek, bu sefer geriye $n - 4$ kalacaktır vs. Öyleyse istatistiksel olarak, yeğlilik I_{avg} için ortalama (ya da *beklenen*) E değerine, $E[(n - 2X)^2]$ ifadesiyle ulaşılır. Beklenen değerlerin özellikleri sayesinde (Rothenberg'in kitabı için bkz. Kaynakça)

$$I_{avg} = E[(n - 2X)^2] = E[n^2 - 4nX + 4X^2] = E[n^2] - 4nE[X] + 4E[X^2] \quad (81.2a)$$

Ancak bu problem için $E[X] = n/2$ ve $E[X^2] = (n + n^2) / 4$ böylelikle

$$I_{avg} = n^2 - 4n(n/2) + 4[(n + n^2)/4] = n \quad (81.2b)$$

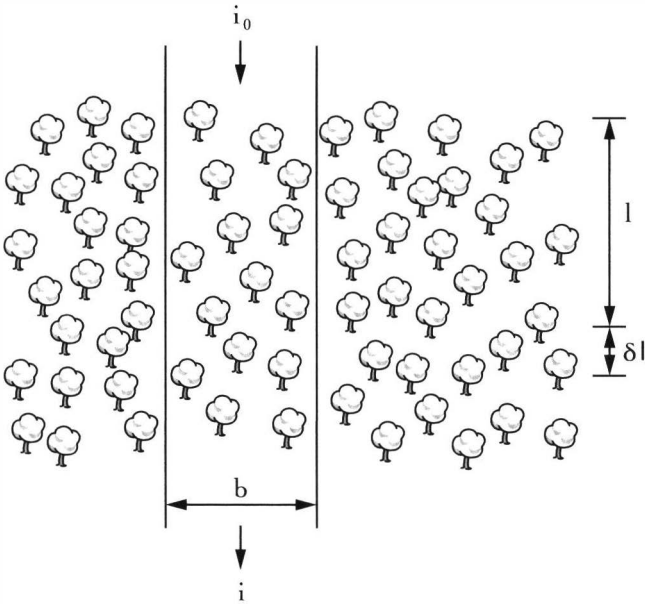
Ortalama olarak bu, birim genlikte ve iki zıt fazla kısıtlanmış rasgele fazlara sahip verili n seslerinin sonuçta ortaya çıkan yeğliliğinin her zaman n olacağı anlamına gelir. Uzun hesaplamalar sonrasında, fazların tamamen rasgele olması (yani sadece iki değerle sınırlandırılmış olmamaları) durumunda aynı sonucun geçerli olacağını göstermek mümkündür. Bu, 0'dan n^2 'ye kadar olan olası bir değer aralığı içinde sadece bir ortalama yeğliliktir ancak eğer değişimler hızlıysa, bu ortalamadan ayrılmalar da aynı ölçüde küçük olacaktır.

Öyleyse, biz burada neyi göstermiş olduk? İlk olarak, birleşik bir notanın perdesinin, bileşenlerinin ortalaması ile aşağı yukarı bulunabileceğini ortaya koyduk ve ikinci olarak ortalama yeğliliğin, bireysel yeğliliklerin aşağı yukarı toplamı olduğunu gördük. Uygulamada bu, sözgelimi bir çam ağacına ait rüzgâr “fısıltısının”, aşağı yukarı ağacın ortalama “yaprağı” ya da iğnesiyle aynı olduğu anlamına gelir; dahası, insan kulağı tek bir çam iğnesinin sesini duyamasa bile, ağacın sesi uzaktan pekâlâ duyulabilir. Bir ağaç-

ta pek çok dal ya da iğne bulunur; peki, çok sayıda ağaçtan oluşan bir ormanda durum nedir? Yukarıda belirtilen nedenlerle çok sayıda dal, iğne ve ağaç sesinin birleşip, o ünlü “orman uğultusunu” yaratacağını görebiliriz.

82. Soru: Bir orman ya da ağaçlık bir alan ne kadar ışık geçirimsizdir? [Bkz. Renkli fotoğraflar kesiti]

Ağaçlık bir alanın içine doğru biraz yürüdüğünüzü hayal edin (belki de köpeğiniz, tasmaından kurtulup yine kaçtı; kim bilir belki de sadece ağaçlarla konuşmayı seviyorsunuzdur...) Ağaçlarla kaplı, dar bir şeritten baktığınızda, ilerdeki ışığı ağaçların gövdele-



Şekil 82.1. Ağaçlık alanın bir bölümüne ait plan görüntüsü

ri arasından görebildiğinize göre, mevcut ışık (ağaçlık alanın köşesinden gelen ışık), köşeye olan uzaklığınıza neden ve nasıl bağlıdır? Bu soruda, yukarıdan gelen ışıkla değil kalın yaprak örtüsünün akşam karanlığında ya da gün ağarırken sahip olduğu du-

rumla, mevcut ışığın çoğunun, ağaçlık alanın çevresinden gelmesiyle ilgileniyoruz.

Ağaçlık alanın içine doğru l mesafede, b genişlikte ve h yükseklikte dikdörtgen biçimli bir ışık demeti olduğunu düşünelim (*bkgz. Şekil 82.1*). Ağaçlar araziye, birim alana ortalama N ağaç yoğunluğuyla rasgele dağılmış olsun ve gözlerimizle aynı seviyede, ortalama D çapında olsunlar. Dahası, birim alanda, görüş çizgimize normal görünen ışığın (diğer bir değişle ışık yeğirliğinin) başlangıçta i_0 olduğunu ve ağaçlık alanın içine doğru kat edeceğimiz l mesafe sonrasında (ağaçların ışığı engellemesi nedeniyle) azalıp i olduğunu düşünelim. Öyleyse, ağaçlık alanın içine doğru biraz daha (δl mesafesi kadar) yürümemiz, ışık yeğirliği δi bakımından ufak bir değişim anlamına gelir ve bu değişim, görüş “penceremizdeki” ağaçların engellediği alan ile bulunur. Bu,

$\delta i = - \text{ağaç yoğunluğu} \times \text{zemin alanı} \times \text{ağaç kalınlığı} \times \text{“pencere” yüksekliği}$

ya da $\delta i = -Nb\delta l Dh$ ’dir. (82.1)

Ağaçlık alanın içine doğru l mesafede, $i = bh$ olduğundan

$$\frac{\delta i}{i} = -ND\delta l \quad (82.2)$$

olur ya da (ağaçlar ayrıık nesneler oldukları için elbette çok katı bir şekilde yapamasak da) limite geçip göstermelik değişkenler kullandığımızda

$$\int_{i_0}^i \frac{d\xi}{\xi} = - \int_0^l ND d\eta \quad (82.3)$$

ya da eğer N ve D sabitse

$$i = i_0 e^{-NDl} \quad (82.4)$$

Şimdi ağaçlık alanda bir keşif gezisi yapıp bazı tahminler yapmamız gerekiyor. Güney Almanya’daki Kara Orman’a ne dersiniz?

Oraya kadar gidemeyeceğimize göre, genç köknarlarla kaplı bir alan düşünelim; yard kare başına (sözgelimi) $N = 1$ ve $D \approx 0,14$ yard (yaklaşık 5 inç) olsun. O hâlde, aşağıdaki tabloyu oluşturabiliriz:

1 yard	$\frac{i}{i_0} = e^{-0,14l}$
10	0,25
15	0,12
20	0,06
25	0,03

bu da demek oluyor ki ağaçlık alanın içine doğru 10 yard [9,14 m] gittiğimizde görelî ışık yeğînlîğî %25, 25 yard [22,86 m] gittiğimizdeyse sadece %3 olacaktır. Işık geçirimsizliğı açısından bu, son derece çarpıcı bir artıştır. Elbette okurlar, kendi konumlarına göre, N ve D için farklı değerler kullanabilirler ancak Avrupa ormanlarında gezintiye çıkacaksa metrik sistem kullanmamız gerekecektir...

Tüm bunların bir başka sonucu da bir çeşit ters problemi, kaba da olsa, çözebileceğimizdir. (82.4) numaralı denklemden yararlanarak ve bulunduğumuz yerden bakınca, ufuk çizgisinin ağaçlar tarafından kesintiye uğramamış görünen bir bölümüne dair (bu bölüm, i/i_0 ile orantılıdır) kaba bir tahminden hareketle

$$l = - \frac{1}{ND} \ln \left(\frac{i}{i_0} \right) \quad (82.5)$$

formülünü kullanabilir, böylelikle ağaçlık alanın derinliğini (gidebildiğimiz kadarıyla) aşağı yukarı hesaplayabiliriz.

83. Soru: Neden bazı ağaçlarda “tümörler” bulunur?

Ormanda yürüyüş yaparken bazı ağaçların gövde ya da dallarında sferoit (küremsi) şeklinde yumru ya da çıkıntılar fark ettiğiniz oldu mu? Tümör benzeri bu oluşumların bazıları ol-

dukça büyük olabilir. Aşağıdaki tanımın da işaret ettiği gibi bu yumru ve çıkıntılar, gerçekten de birer tümörmüş gibi düşünülebilir:

Tümörler, normal denetim süreçleri bir nedenle işlemez olduğu için hücrelerin bölünmeye devam etmesiyle meydana gelen, büyük çaplı ve düzensiz gelişimin sonucudur ve bitki, hayvan ya da insanda görülebilir. Tümör belirli bir konumdaysa ve bedenin genel işleyişi açısından ciddi bir tehlike oluşturmuyorsa bu, “iyi huylu” bir tümördür. Ancak tümörün konumu ya da gelişim seyri, bedene zarar verecek şekildeyse bu “kötü huylu” bir tümördür ve “kanser türlerine” yol açabilir. Tümörlerin, çeşitli parazitler ve enfeksiyonlar da dahil olmak üzere, pek çok nedeni ola-



83. Soru - Neredeyse yarı küremsi bir ağaç “tümörü.”

bilir. Ancak genellikle “kanser” terimi, açıkça tespit edilemeyen bir nedenden ötürü ortaya çıkan tümörlerle ilgili olarak kullanılır: Bedendeki hücreler, kalıcı bir değişikliğe uğrayarak hücreler üzerindeki normal gelişim kısıtlamalarından etkilenmez olur ve değişikliğe uğrayan bu hücreler, bir parazit ya da enfeksiyon taşıyıcısı gibi davranmaya başlar. Tümörler, çok hücreli yaşam formlarının tamamında görülebilir. Bitkilerde, esasen kötü huylu olan tümörlerin kalıtsal nedenlere, bakteri ya da virüslere bağlı olarak ortaya çıktığı bilinmektedir.

Philip R. White, sıra dışı bir ağaç tümörü türüne ilişkin kaleme aldığı 1958 tarihli makalede böyle yazar. Makale elli yıllık olsa da bu genel tanım, biyokimya ve genetik araştırmalarında tümörler ve nedenlerine ilişkin büyük ilerleme kaydedilmiş olmasına rağmen şaşırtıcı bir şekilde geçerliliğini koruyor. Burada modellemek istediğim, tümör gelişiminin *erken evrelerindeki* bu genel “kontROLSÜZ hücre çoğalması”. Elbette kendimizi ağaçlarla sınırlandırmamız gerekmiyor. Model yeterince basit olduğundan, her türlü hayvan ya da bitki örneği için uyarlanıp kullanılabilir. Bununla ilgili olarak, aşağıda daha çok biyolojik veri içeren ve hayvanlardaki tümör oluşumu çalışmaları açısından tarihsel bir anlam taşıyan bir modeli kısaca inceleyeceğiz.

ZAMANA BAĞIMLI BİR MODEL

Eğer elimizdeki sıradan “yumru” ya da “tümör” oluşumunun zaman içindeki davranışını (*son derece* basit bir biçimde) modelleyeceksek, tümör hacminin, zamanın t fonksiyonu olarak nasıl değiştiğini ortaya koyan bir denklem oluşturmamız gerekir. Belki de bu iş için uygun olan en basit model, ilgili değişimi hücrelerin çoğalma ve ölme hızıyla ilişkilendiren bir modeldir. Bu kez denklemi sözel olarak kuracak olursak bu model şöyledir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\text{tümör}}{\text{hacim}} \right) = \left(\frac{\text{hücre çoğalmasına}}{\text{bağlı hacim artışı hızı}} \right) - \left(\frac{\text{hücre ölümüne}}{\text{bağlı hacim azalışı hızı}} \right) \quad (83.1)$$

İlk olarak, bu matematiksel modeli oluştururken yararlanacağımız varsayımları tanımlayalım:

- (i) Tümör, tüm zamanlarda küresel olarak simetriktir ve $R(t)$ yarıçapındadır (çoğu zaman ağaç tümörleri yarı-küremsi olurlar ancak bu durum şu anda çok önemli bir sorun değildir).
- (ii) Yeni hücrelerin oluşma hızı, tümörün besin edinme hızıyla orantılıdır.
- (iii) Tümörün besin edinme hızı, yüzey alanı ile orantılıdır. (Kartopu problemimizi hatırladınız mı? Bu, kartopu modelindeki varsayıma benzer.) Bir ağaç tümörü durumunda bu, tümörün ağaçtaki damar sistemiyle temas hâlinde olan dahili alanının bir bölümü demektir. Her durumda bunu, matematiksel olarak $4\pi k_1 R^2$ şeklinde ifade ederiz ve buradaki k_1 bir orantısallık sabitidir. Genelliği kaybetmeden, 4π 'yi bu sabite katabileceğimiz açıktır ancak 4π sayısını seviyorum...
- (iv) Tümör hücrelerinin (besin yokluğuna bağlı olarak) ölme hızı, tümör hacmi ile orantılıdır; diğer bir deyişle, $4\pi k_2 R^3 / 3$ ve orantısallık sabiti k_2 'dir.

Bu koşullar altında yukarıdaki sözel denklemimiz

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = 4\pi R^2 \frac{dR}{dt} \equiv 4\pi k_1 R^2 - \frac{4}{3} \pi k_2 R^3 \quad (83.2)$$

olur ya da

$$\frac{dR}{dt} = k_1 - \frac{1}{3} k_2 R = k(K - R) \quad (83.3)$$

yazarız; burada $K = k_2 / 3$ ve $K = 3k_1 / k_2$ (Bu arada, 4π 'den neden vazgeçmediğimi *şimdi* anladınız mı?) “Integralle beni” diye adeta yalvaran bir denklem bu; öyleyse daha fazla bekletmeyelim: Eğer başlangıçtaki bir $t = 0$ zamanda, tümörün yarıçapı R_0 ise

$$\int_{R_0}^R \frac{d\xi}{K - \xi} = \int_0^t k dt \Rightarrow \ln \left| \frac{K - R}{K - R_0} \right| = -kt \quad (83.4)$$

ve buradan şu denkleme ulaşırız:

$$|K - R(t)| = |K - R_0| e^{-kt} \quad (83.5)$$

Yukarıdaki sonucun anlamı nedir? Tümör, başlangıçtaki ebadından bağımsız olarak, sınırlandırıcı bir K ebadına doğru dönüşüm geçirir demektir bu; zira

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = K \quad (83.6)$$

Ancak daha belirgin bir biçimde görülebileceği ve rahatlıkla doğrulanabileceği gibi

$$R(t) = K + (R_0 - K)e^{-kt} \quad (83.7)$$

Bu nedenle eğer $R_0 < K$ ise (diğer bir deyişle, tümörün başlangıçtaki ebadı yeterince küçükse) tümör de sınırlayıcı bir K ebadına doğru büyüyecektir; elbette bu, k_1 ve k_2 sabitlerinin, eğer biliniyorsa, belirli değerleri tarafından belirlenir. Diğer taraftan, eğer $R_0 > K$ ise (tümörün başlangıçtaki ebadı yeterince büyükse) tümör de sınırlayıcı K ebadına doğru küçülecektir. (Hücrelerin hangi hızda çoğaldığının bir ölçüsü olan) k_1 değerini artırmanın ve/veya (hücrelerin hangi hızda öldüğünün bir ölçüsü olan) k_2 değerini düşürmenin, sınırlayıcı K ebadını artıracığına dikkat edin. Aynı şekilde, eğer k_1 azaltılır ve/veya k_2 artırılırsa K ebadı da azalacaktır.

Alıştırma: $\theta(t) = R(t) - K$ olsun. Bu kısa yoldan yararlanarak (83.7) numaralı denklemdeki sonucu türetin.

Elbette bu “sabitler” genellikle, besin yoğunluğunun (konsantrasyonunun) fonksiyonu olacaklardır ve besin yoğunluğunun kendisi de tümörün konumuyla ilişkilidir. Bu uzamsal yapı, problemin yayınımla ilgili noktalarıyla bağlantılıdır ancak biz bunları irdemeyeceğiz. Yine de bu tür bir matematiksel problemin pek çok farklı bağlamda karşımıza çıkacak kadar yaygın olduğunu belirtmek gerek; bunlardan biri olan kahve fincanım ve nasıl soğuduğu meselesi, 3 numaralı Ek'te sizi bekliyor!



Ulusal Parkta

**84. Soru: Nehir kıvrımları hangi şekillerdedir?
(Nehir kıvrımlarının şekilleri nasıldır?)**

Uçaktaki koltuğum cam kenarındaysa nehir kıvrımlarını izlemeyi severim. En az üç nedenden şimdiye değin bu manzaranın bir fotoğrafını çekmeyi başaramadım: (i) Dünyanın en iyi fotoğrafçısı olduğum söylenemez, (ii) koltuğum cam kenarında olsa bile, çoğu zaman uçağın kanadı üzerindeyimdir ve (iii) yer ile aramdaki hava miktarı nedeniyle, çok fazla ışık saçılması olduğu için saçılıma uğramış mavi ışık, nehir ile çevresi arasındaki kontrastı düşürür. Nehir kıvrımlarının, kopuk menderes göllerinin yakınında yürüyüşe çıkmışsam, görüş açım oldukça sınırlıdır zira boyum 100 fut [30,5 metre] değildir! Ancak şikâyetlerimi bir kenara bırakırsak, nehir kıvrımları büyüleyici bir doğa olayıdır. Öyleyse gelin, Luna Leopold ve meslektaşlarının elliden fazla nehir üzerine yaptığı bir çalışmadan derlediğim bazı gözlemsel ayrıntılarla başlayalım. Bunlar, dünyanın pek çok nehrinde karşılaşılan düzenli “kıvrımlılık” bakımından sorumuzla ilişkili ayrıntılardır. Elliden fazla nehri kapsayan bu araştırmaya dayanarak şunları söyleyebiliriz:

- (i) Hangi boyutlarda olursa olsun hiçbir nehir, genişliğinin 10 katından fazla bir mesafe boyunca düz akmaz.
- (ii) Bir nehir kıvrımının yarıçapı neredeyse her zaman, nehrin o noktadaki genişliğinin 2–3 katıdır.
- (iii) Dalga boyu (benzer kıvrımlardaki benzer noktalar arasındaki mesafe) (ortalama) genişliğin 7 ila 10 katıdır.

Buradan çıkarılacak sonuç, boyutları ve su yatağı koşulları arasında dikkate değer hatta son derece büyük boyutta farklılıklar bulunsa bile, özellikleri bakımından nehirler arasında çarpıcı benzerlikler olduğudur. Dahası, nehir kıvrımları doğanın birer “kaza-sı” değildir; bir teoriye göre, nehrin en az çabayla dönüşünü yapacak şekilde meydana gelir (sözgelimi, suyun, yukarı yöndeki A noktasından aşağı doğru olan B noktasına ilerlemesi gibi) ve bu da nehrin alabileceği en olası biçimi belirler.

Nehir kıvrımı anlamına gelen *menderes* kelimesi, bugün Türkiye'de bulunan ve eski Yunan'da Maiandros olarak bilinen, dolambaçlı bir nehrin adından gelir. (Nehrin günümüzdeki ismi Menderes'tir). İlk bakışta, hem nehrin içindeki hem de nehrin sınırlarındaki yerel düzensizliklerin, akarsuyu düz bir rotada ilerlemekten alıkoymak için yeterli olduğu düşünülebilir. İri kayalar, devrilmiş ağaçlar ya da nehrin yarılarak ilerlemesine neden olan kayaçlar gerçekten de bu türden kıvrımlara neden olabilir ancak bunların hiçbir *gerekli* koşullar değildir ve doğada da laboratuvar ortamında da menderes geometrisini açıklamaya yetmezler. Menderesler, (tıpkı körfez akıntısı gibi) okyanus akıntılarında ve bir buz dağının yüzeyindeki su kanallarında gözlemlenebilir. Nehirler söz konusu olduğunda, bitmek bilmeyen toprak aşınımı, taşınımı ve birikmesi süreçleri, nehirlerin ve mendereslerin sürekli değişen şekillerini belirler.

Bir nehirde hafif bir kıvrım olduğunu düşünelim. Su, bu kıvrım etrafında akarken “merkezkaç kuvveti” de nehrin dış kısmındaki,



84. Soru - Bir uçağın penceresinden görülen nehir kıvrımları

içbükey kıyıyı süpürüp aşındırır. (Bunun hayali bir kuvvet olduğuna dikkat edin, yine de bu hayali kuvvet, gerçek bir doğa olayıyla alakalıdır; Newton'un, etki ve tepki meselesiyle ilgili üçüncü yasasının ve *merkezci* kuvvetin bir sonucudur.) Su daha sonra bu nehir kıyısından aşağı doğru ilerler (gidecek başka yeri yoktur) ve nehir yatağının karşısına geçip nehrin diğer kıyısına yönelir. Bunu yaparken, dipteki sürtünme, akışı yavaşlatarak, ince kum ve taşların orada birikmesine neden olur; ancak söz konusu birikme nehrin, bu “çapraz” ya da “uçtan uca” akış üzerinde etkili olan, ileriye doğru hızı nedeniyle akıntı yönündedir. Bunun sonucunda, akışkan “parçacıklar”, sarmal andıran izlekler oluşturur ve süpürülüp aşındırılan nehir kıyısı, karşı kıyının daha yumuşak meyillerine kıyasla, daha dik olur. Zamanla bu durum, mendereslerin çok daha belirgin bir şekil almasına neden olur; ta ki nehir yukarı doğru hareketlenmeye başlayınca kadar; akarsular açısından bu kabul edilemez bir durumdur! Böylelikle yerçekimi, nehir suyunu potansiyel enerjinin daha düşük olduğu bir seviyeye çektikçe nehrin kıvrılma hareketi de yeniden ortaya çıkar. Bu tür menderesler, zaman içinde, akıntı yönünde “hareket etmeye” başlar. Görünüşe göre mendereslerin ortaya çıkması için en iyi koşul, nehir ince taneli, kolaylıkla aşınabilir ancak sıkı kıyıların oluşumuna izin verecek bağlayıcılıktaki (kohezyon) malzemeden oluşan hafif bir eğimi kat ettiğinde ortaya çıkar.

Araştırmacıların vardığı sonuca göre, verili bir dizi menderes, kavisin “dalga boyu” (burada kavis kelimesini, en yaygın anlamıyla kullanıyoruz) ile eğriliğin yarıçapı arasında sabit bir orana sahiptir. Eğer bu oran açıkça sabitse, menderes de şaşırtıcı olmayan bir şekilde, düzenli olur. Tipik değerler, sinüs tipi eğriler için 5:1 ile döngüleri daha sıkı dizilmiş olan menderesler için 3:1 arasında değişmektedir; farklı nehir ve akarsularda bulunan ancak tipik özellikteki elliden fazla menderesten oluşan örneklem grubunda ortalama 4,7:1'dir. Bir kıvrımın “sıklığı” (σ *kıvrımlılığı*) verili bir kavisteki kanalın uzunluğunun, dalga boyuna oranı olarak tanımlanır. Bu oldukça değişkendir; (çoğu menderes için) 1,3:1 ile 4:1 arasında farklılık gösterir.

Literatürdeki matematiksel modellerden hareketle aşağıdaki kavis, çoğu menderes için merkezi doğrunun şekline ilişkin iyi bir yaklaşıtırm olacaktır:

$$\theta(l) = \theta_0 \cos \left(\frac{2\pi l}{L} \right) \quad (84.1)$$

burada l , bir başlangıç noktasından ölçülmüş nehir uzunluğu, L söz konusu nehre özgü karakteristik bir uzunluk ve θ merkezi doğrunun, belirli her bir l değeri ile nehrin aşağı yönünde yaptığı açıdır. (84.1) numaralı denklemin, akıntının (eğer x – eksen düz bir hayali akıntının merkezi doğrusuysa) “ y ” – yerini tanımlayan ampirik bir denklem olmadığına dikkat edin; denklem, menderes-
teki yön değişikliğinin kavis boyunca söz konusu olan mesafe ile nasıl bir ilişki içinde olduğunu ortaya koymaktadır.

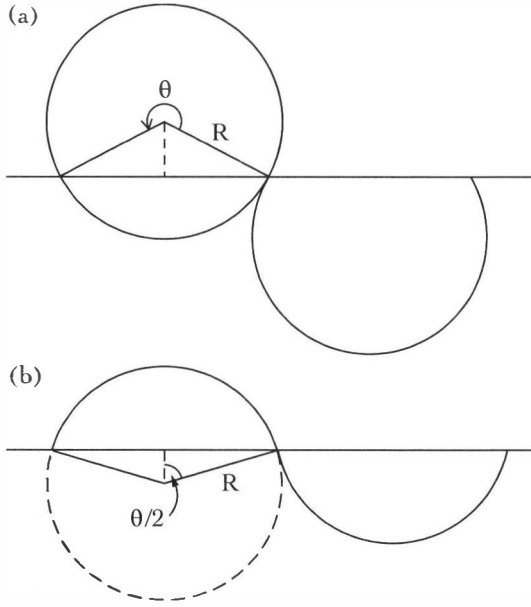
Mendereslerin, açısız bağımlılıkla (84.1) ilgili ileri düzey matematiği yerine, daha mütevazı bazı modelleri ele alalım. Bir menderesteki yay uzunluğunun, “dalga boyuna” olan oranını, α parametresi olarak tanımlıyoruz. Bunu bazı basit menderes şekilleri üzerinde analitik olarak kolayca şöyle inceleyebiliriz. İlk olarak mendereslerin, düzgün biçimde eşleşmiş *dairesel* yaylardan meydana geldiğini düşünelim; bunların her birinin yarıçapı R ve uzunluğu l ve $0 < l < 2\pi R$ olsun (*Bkz. Şekil 84.1*).

Bu ya da başka bir durum için sadece böyle bir “döngüyü” ele alarak α 'yı belirlememiz yeterlidir ve bu durumda,

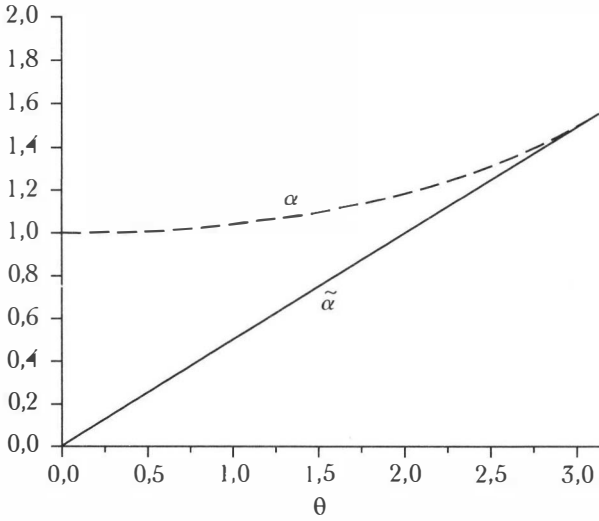
$$\alpha(\theta) = \frac{R\theta}{2R \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \quad (84.2)$$

olur; burada θ şekilde gösterilen açıdır (pozitif anlamda) ve menderesin iki noktasının, x – eksen ile yaptığı kesişimin karşısındadır. Elbette bu tanım, hem $\theta < \pi$ hem de $\pi < \theta < 2\pi$ için geçerlidir ancak ikinci durumda bir başka olasılık, dalga boyunu menderesin azami genişliği olarak tanımlamaktır; bir başka deyişle,

$$\tilde{\alpha}(\theta) = \frac{R\theta}{2R} = \frac{\theta}{2} \quad (84.3)$$



Şekil 84.1(a, b). Dairesel yay menderesleri



Şekil 84.2. (84.2) ve (84.3) numaralı denklemlerden hareketle $\alpha(\theta)$ ve $\tilde{\alpha}(\theta)$

Şekil 84.2'de açıkça görüldüğü üzere $\tilde{\alpha}$, doğrusal olarak artış gösterir, α ise bunun tam tersi bir şekilde davranır. $0 = \pi$ radyan olduğunda, bu ikisi de eşit olur.

Öte yandan, parabolik bir menderes üzerinden düşünecek olursak

$$y = (b/2)x^2 \quad (84.4)$$

parabolün köşe noktasındaki orijin ve $\alpha > 0$, $b > 0$ ile orijinden $(\sqrt{(2a/b)}, a)$ noktasına kadar olan yay uzunluğu, şu integral ile bulunur

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2a/b}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx &= \int_0^{\sqrt{2a/b}} \sqrt{1 + b^2 x^2} dx \\ &= \frac{\sqrt{2ba(1+2ba)} + \ln(\sqrt{2ba} + \sqrt{1+2ba})}{2b} \end{aligned} \quad (84.5)$$

Artık, α değeri için denklemimizi yazabiliriz

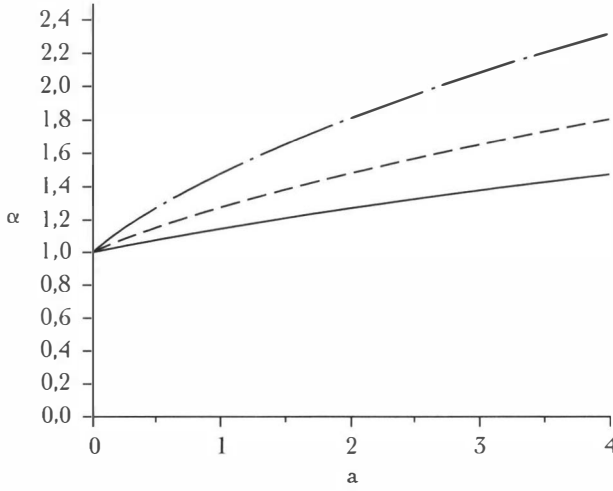
$$\alpha = \frac{\sqrt{2ba(1+2ba)} + \ln(\sqrt{2ba} + \sqrt{1+2ba})}{2\sqrt{2ab}} \quad (84.6)$$

$\alpha(a; b)$ grafiklerinin gösterildiği Şekil 84.3'te, b için birkaç değer verilmiştir: $b = 1$ (devamlı çizgi) ; $b = 2$ (kesikli çizgi) ve $b = 0, 5$ (kesikli ve noktalı çizgi). Ayrıca, α 'nın a ve b 'de simetrik olduğuna dikkat edin.

Her ne kadar (84.1) numaralı denkleme dayanan menderes matematiğinin büyük bölümü, bu kitabın kapsamı dışında olsa da (daha fazla ayrıntı için bkz. Adam (2006)), bu matematikten yararlanarak biraz daha bilgi edinmemiz mümkündür. Bir modelde, (84.1)'e benzeyen bir denklem üzerinde çalışan araştırmacılar, kıvrımlılık σ ile (radyan cinsinden) başlangıç açısı θ_0 arasında yaklaşık bir ampirik ilişki kurmuşlardır:

$$\theta_0 = 2,2\sqrt{1 - \sigma^{-1}} \quad (84.7)$$

(Derece olarak, 2,2 sayısal çarpanı yaklaşık 126° dir.) Bu ifadeyi ters çevirdiğimizde



Şekil 84.3. Birkaç h değeri için (a) grafiği

$$\sigma = \left[1 - \left(\frac{\theta_0}{2,2} \right)^2 \right]^{-1} \quad (84.8)$$

Bir diğer modelde, *kıvrılma yarıçapı* R için yaklaşık ifade, dalga boyu L_x ile bulunmuştur

$$R = \frac{L_x}{13} \frac{\sigma^{3/2}}{\sqrt{\sigma - 1}} \quad (84.9)$$

ve buradan şu orana ulaşılmıştır

$$\Omega(\sigma) = \frac{L_x}{R} = 13 \sqrt{\sigma - 1} \sigma^{-3/2} \quad (84.10)$$

$\Omega(\sigma)$ grafiği $(1, \infty)$ aralığında sıfırdan $\sigma = 1,5$ 'te bir maksimum değer olan yaklaşık 5'e çıkar, ardından sıfıra doğru azalır. Kolaylıkla (ancak belki biraz sıkıcı bir şekilde) gösterildiği gibi, $\sqrt{(\sigma - 1)} = \tan \theta$ ile eşdeğer olan bir dizi değişken değişimi sonrasında

$$\int \Omega(\sigma) d\sigma = 26 \ln |\sqrt{\sigma} + \sqrt{\sigma - 1}| - 26 \sqrt{1 - \sigma^{-1}} + C \quad (84.11)$$

olur ve buradan $[1,1, 2]$ aralığındaki yaklaşık Ω değerine varılır:

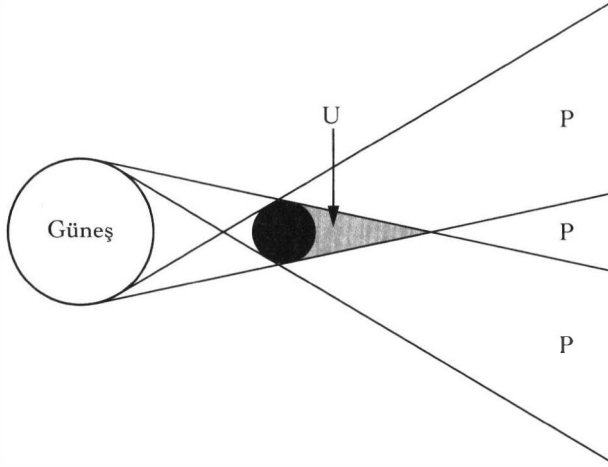
$$\frac{10}{9} \int_{1,1}^2 \Omega(\sigma) d\sigma \approx 4,76 \quad (84.12)$$

Bir makalede kullanılan verilere göre, kıvrımlılıkların 1,1 ile 2,0 arasında olduğu menderesler için, menderes uzunluğunun, eğriliğin yarıçapına (Ω) olan ortalama değeri 4,7'dir ve bu, elimizdeki model ile gerçek ölçümler arasında bir uyum olduğunu gösterir. Elbette menderes oluşumunu, nehrin aktığı bölgenin fiziksel özellikleri gibi başka faktörler de etkiler. Ancak uçak yolculuğu yapmış hemen herkesin fark edeceği gibi, yukarıdan görülebilecek böyle güzel pek çok yarı periyodik örüntü örneği vardır.

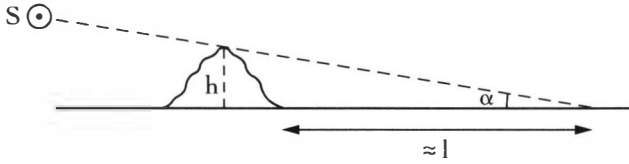
85. Soru: Dağ gölgeleri neden üçgen şeklindedir?

[Bkz. Renkli fotoğraflar kesiti]

Güneş ufuk çizgisinin altındayken, bir dağ zirvesi yakınlarındaki gözlemci harikulade, belki de şaşırtıcı bir manzarayla karşı karşıya kalabilir: Dağın asıl şekli ne olursa olsun, gölgesi üçgen şeklindedir! Bu etki, iki olgunun birleşiminden kaynaklanır: Perspektif ve Güneş'in sonlu açısal genişliği. Önce ikincisini ele alacak olursak Güneş, *Şekil 85.1*'den de anlaşılacağı üzere, gezegen, Ay ya da dağ gibi ışık geçirimsiz bir nesneden hem tam gölge konisi hem de yarı gölge konisi üretir. Dahası, Güneş tüm nesnelerden daha büyük olduğu için tam gölge konisinin uzunluğu sonludur ve perspektifin etkisiyle gölge, dağın tepesindeki bir gözlemciye daha da hızlı bir şekilde yakınsar gibi görünür. Bu ilkenin belki de en sık karşılaşılan örneklerinden biri, Güneş ufuk çizgisine yakın ve arkanızdayken, gölgenizin önünüzde uzayıp gitmesidir; “toplulaştırma” gibi görünen başınız ayaklarınızdan çok uzakta kalmıştır ve *Şekil 85.1*'deki tam gölge konisinin sergilediği “üçgensel yakınsama” durumuna ilişkin bazı işaretler vardır: Elbette, kollarınız ve başınız hâlâ görünür durumdadır ancak perspektifin etkisiyle şekil bozukluğu söz konusudur.



Şekil 85.1. Güneş'in meydana getirdiği tam gölge (U) ve yarı gölge (P) konisi.



Şekil 85.2. Dağ gölgesinin basit geometrisi

Öyleyse böyle bir gölgenin uzunluğu ne kadar olabilir? Eğer gölgenin düz bir Dünya üzerindeki yansımaya ait uzunluk olarak l 'yi, yanal yakınsamayı dikkate almaksızın, inceleyecek olursak iyi bir tahminde bulunabiliriz. Güneş ufuk çizgisinin altında, sözgelimi yüksekliği $\alpha \leq 5^\circ$ olduğunda, h km yüksekliğindeki bir dağ için Şekil 85.2'de de görebileceğimiz gibi

$$l \approx h \cot \alpha \approx \frac{h}{\alpha} \quad (85.1)$$

yazarız; burada α , artık radyan cinsindendir ve son derece akla yatkın bir varsayımda bulunarak dağın zemin yarı-genişliğini, l 'ye kıyasla, göz ardı edebiliriz. 4 km (ya da yaklaşık 13.000 fut) yüksekliğinde bir dağ düşünelim; Güneş, gökyüzünün son derece al-

çak bir noktasında bulunuyor olsun – sözgelimi $\alpha = 2^\circ$ (ya da $\approx 0,035$ radyan)– ve (85.1) numaralı denkleme göre gölge uzunluğunu $l \approx h/\alpha \approx 110$ km alalım. Aynı Güneş yüksekliği için dağın yüksekliğini ikiye çarptığımızda, gölgenin uzunluğu da ikiye katlanır ve verili bir dağ için, bu denli ufak güneş yüksekliklerinde, yüksekliği ikiye bölmek l 'yi ikiye katlamak anlamına gelir. Elbette böyle bir dağın tepesindeyken, gözlemci için ufuk çizgisine olan mesafe (atmosferik kırılmayı göz ardı etmemiz durumunda) $d \approx \sqrt{(1,5h)}$ mil yaklaşık formülüyle elde edilecektir; bu kez h , dağın fut cinsinden yüksekliğini ifade eder (Bkz. 14. ve 39. Sorular). Öyleyse bu durumda $d \approx \sqrt{(1,5 \times 13.000)} \approx 140$ mil (≈ 220 km) sonucuna varırız; gölge yine “yere düşer”! Bu nedenle, eğer Güneş ufukta olsaydı ve dağımızın da Sydney Opera Binası hatta Mickey Mouse şeklinde bir enkesiti olsaydı, dağın gölgesi son derece uzun ve neredeyse uzaktaki bir noktayla birleşen, ışısız bir hava tüneli gibi olurdu. Dağın tepesindeki gözlemciyse, hem uzaklık hem de Güneş'in açısal genişliğinden kaynaklanan bulanıklaştırma etkisi nedeniyle, gölgenin şekil özelliklerini seçemezdi.

Bu basit çıkarımları kullanarak ve bir teleskopun yardımıyla, Ay'daki dağların yüksekliği (teorik olarak) tahmin edilebilir; gölgenin, Ay yüzeyindeki uzunluğunu ve Güneş'in o konumdaki yüksekliğini bilmemiz yeterlidir ancak bunu bir gece *yürüyüşünde* yapmak zor olacaktır!

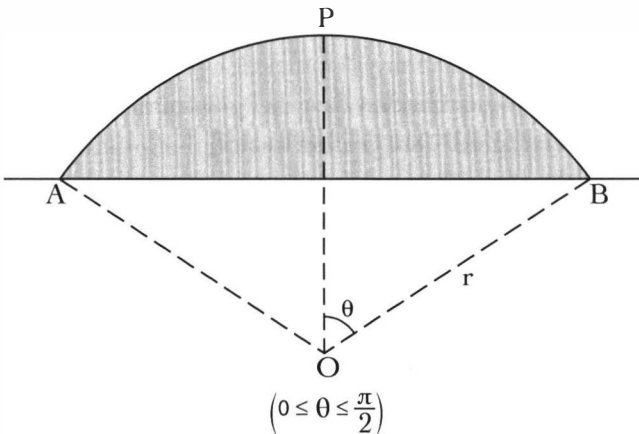
86. Soru: Zion Kemerı neden dairesel görünür?

[Bkz. Renkli fotoğraflar kesiti]

Amerika'nın Utah eyaletindeki Zion Ulusal Parkı'na giden bir ziyaretçi, başka pek çok büyüleyici jeolojik şeklin yanı sıra kayalarda birçok kemer ve oyukla karşılaşır. Doğal bir kemer, kaya parçalarının kopup düşmesine neden olan doğal jeolojik kuvvetlerin bir ürünüdür; kaya parçası kopsa bile geride bıraktığı kemer yapısı ayakta kalır. Yerçekimi sebebiyle sürekli olarak tansiyonel gerilimlere maruz kalan kayada kemer oluşumları meydana gelir. Kaya parçalarının kopması ve kayması oldukça yaygındır.

Yerçekiminin etkileri ve yapıştırıcı güçler, çeşitli şekillere sahip kemerler üzerinde ilginç bir mücadeleye girer. Bir kaya, yerçekiminin etkisiyle iki parçaya ayrılıp bir kemer ya da oyuk meydana getirdiğinde, yapıştırıcı güçler kayanın ağırlığı tarafından kırılmış demektir. Verili bir kaya hacmi için bir silindirin yanal alanının minimize olduğunu biliyoruz– tabii, silindir daire biçimindeyse. Buna denk bir şekilde, iki boyutta, kapalı bir eğrinin çevre uzunluğu da verili bir alan için minimize olur –söz konusu eğri, bir daireyse– ve dairesel bir yay ile kapatılmış herhangi bir bölge de aynı özelliklere sahip olur. Bu son sonucu, (burada varsaydığımız) sabit bir kaya kalınlığı için kullanabiliriz.

Şimdi, işleri basit tutmak adına, bir oyukun “arka” yüzündeki kopmaya bağlı gerilimleri bir kenara bırakıp yalnızca bağlayıcı üst yüzeyle ilintili olan dik (ortogonal) yapıştırıcı kuvvetleri ele alacağız. Bunun fazla basitleştirilmiş bir yaklaşım olduğu açıktır ancak bilim insanlarını ve mühendisleri Zion Ulusal Parkı'nı ziyaret etmeye teşvik edecekse, buna değer! Çok daha gerçekçi bir model, bizim göz ardı ettiğimiz kopmaya bağlı gerilimlerin yanı sıra ilgili kuvvetlerin bağlayıcı yüzey boyunca değişip çeşitlenen dikey bileşenlerini de hesaba katacaktır.



Şekil 86.1 . Zion Kemer'i'nin (dairese) segmenti

Şekil 86.1'den görüldüğü gibi, açık nedenlerle $0 < \theta \leq \pi/2$ 'dir, $OAPBO$ sektörünün alanı, simetriden dolayı $r^2\theta$ 'dır ve $APBA$ bölgesinin alanı, AOB üçgeninin alanının, daire diliminin alanından çıkarılmasıyla elde edilir: Bu üçgenin alanı (yine, simetriden dolayı) $r^2 \cos \theta \sin \theta$ 'dır. Öyleyse, segmentin alanı $r^2 (\theta - \cos \theta \sin \theta)$ ve APB yay uzunluğu $2r\theta$ olur. Bu nedenle, alan–yay uzunluğu (ve ağırlık–temas yüzey alanı) oranı şöyle ifade edilir:

$$\frac{r}{2} \left(1 - \frac{\cos \theta \sin \theta}{\theta} \right) = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{\sin \theta}{2\theta} \right) \equiv \frac{r}{2} G(\theta) \quad (86.1)$$

Buradaki $G(\theta)$ fonksiyonu bizim için özellikle önemlidir; zira $r/2$ terimi sadece bir ölçeklendirme faktörüdür. Gelin, biraz daha eğri esnetmesi yapalım; $G(\theta)$ salınımlı olsa da sadece fiziğin ilgi alanı dışında durum böyledir (bunu yukarıda $0 < \theta \leq \pi/2$ ile ifade etmiştik).

Aslında,

$$0 < \theta < \theta_m \text{ için } G'(\theta) = \frac{\cos 2\theta}{2\theta^2} (\tan 2\theta - 2\theta) > 0 \quad (86.2)$$

Buradaki $\theta_m \approx 2,25$ radyan ($\approx 129^\circ$), G 'nin ilk yerel maksimumunun konumudur. Bu sebeple, yerbilim açısından G , limit koyan sıfır değerinden uzaklaşarak monoton artış gösterir; $\theta \rightarrow 0^+$.

Alıştırma: (i) Yukarıdaki θ_m değerini doğrulayın ve (ii) θ_m 'de G 'nin, tüm θ değerleri için bir *mutlak* maksimum olduğunu gösterin.

Böylelikle, kaya parçasının ağırlığının, toplam üst yüzey kum taneli yapıştırıcı kuvvetini aştığı θ açısında, kaya parçasının kopacağını görüyoruz. Bunu örneğin, dikdörtgen biçimindeki bir açık bölgeyle kıyaslayalım; yüksekliği L , genişliği $(1 + \alpha)L$ olsun; burada $\alpha \geq 1$ 'dir. Bu durumda, alan – çevre uzunluğu oranı $(1 + \alpha) (3 + \alpha)^{-1L}$ olur. Aynı alana ve kalınlığa (dolayısıyla ağırlığa) sahip dairesel bir parçasının (başka herhangi bir şekle kıyasla) “kopup dü-

şecek” ilk parça olduğunu biliyoruz çünkü temas yüzeyi alanı daha azdır ancak aşağıdaki durumda, ağırlık – yüzey alanı oranları eşit olacaktır.

$$\frac{r}{2} G(\theta) = \frac{1 + \alpha}{3 + \alpha} L \quad (86.3)$$

L ve α , θ , r parametrelerinden herhangi birinin verili değeri için diğeri belirlenebilir; bu da Zion Ulusal Parkı'na bir gezi sonrasında uğraşmak için ilginç bir alıştırma olur!



Geceleyin Gökyüzü

87. Soru: Yıldızların büyüklüğü nasıl ölçülür?

On dört ya da on beş yaşındayken, arkadaşım Miffy (namı diğer Paul Smith) ile beraber, Fransızca dersinde vakit geçirmek için Sir James Jeans'in *Astronomy and Cosmogony* [4] (*Gökbilim ve Kozmogoni*) adlı kitabında yer alan ve oldukça karmaşık görünen formüllere dayalı hesaplamalarla uğraşırdık. Günümüzde (hatta o zaman bile) geçerliliğini kaybetmiş bir astrofizik kitabı olmasına rağmen, hem tarihsel hem de bilimsel anlamda büyüleyici bir kitaptı; bendeki baskısını hâlâ saklarım. Fransızca dersinde oldukça başarılıydım, sınıfa da ev ödevimi bitirip gelirdim; bu yüzden biz arka sırada hiç gürültü yapmadan çalıştığımız sürece, öğretmenimizin geleceğin astrofizikçileri olacağımızdan haberi bile yoktu ayrıca Fransızca kitaplarımız eski, sayfaların uçları kıvrıktı oysa Jeans'in 1928 tarihli bu klasik eserinin elimdeki Dover baskısı yepyeni, gıcır gıcırdaydı. Kitabın sayfaları arasında gezinmek ve son derece etkileyici birtakım formüllerle karşılaşmak, müthiş bir heyecan veriyordu; o zamanlar, çoğunun ne anlama geldiğini bilmiyordum bile. Ancak bir gün hepsini öğrenmekte kararlıyım (umarım, bir gün başaracağım).

Kitabın (*The Light from the Stars – Yıldızlardan Gelen Işık başlıklı*) ikinci bölümündeki ilk formül, iki yıldız arasındaki parlaklık farklarını (*görünür büyüklüklerini*) bize ulaşan ışıklarından hareketle hesaplamanın yollarını gösteriyordu (tabii her iki yıldızın da bize aynı uzaklıkta olduğu varsayımına dayanarak). Bir yıldız ne kadar soluk görünüyorsa, büyüklüğü de o kadar fazladır. Gelin bunu, büyüklük ölçeğinin standart bir logaritmik modeline dayanarak inceleyelim. 41. Soru'da da değinmiştik, yıldızların gözlemlenen parlaklığı, *görünen büyüklük kadri* m ile ölçülür; parlaklık azaldıkça bu sayısal ölçek artar:

$$m = 6 - 2,512 \log_{10} \left(\frac{L}{L_0} \right) \quad (87.1)$$

burada L , yıldızın (ya da gezegenin) ışık akısı (ışıklılık ya da parlaklık) ve L_0 (ortalama bir insan için) çıplak gözle görülebilecek en soluk yıldızın parlaklığıdır. Bu nedenle, $L = L_0$ iken $m = 6$ ve

$$L = L_0 (10^{(6-m)2,512}) \quad (87.2)$$

olduğu için, $m = 1$ büyüklüğündeki bir yıldız, $m = 6$ büyüklüğündeki bir başka yıldızla kıyasla, göze ≈ 100 kat daha parlak görünecektir. Gerçekte, $m \leq 1$ durumunun söz konusu olduğu her yıldız, birinci kadir sınıfında; $1 < m \leq 2$ ise ikinci kadir sınıfında kabul edilir. Bu nedenle m değeri $-1,6$ olan Sirius, Köpek Yıldızı, Güneş'ten sonra bizim gökyüzümüzün en parlak yıldızdır. Boötes takımyıldızındaki Arcturus, $m = 0,2$ ile birinci kadir sınıfındadır; Kutupyıldızı $m = 1,9$ ile ikinci kadir sınıfına girer (bu değerler, başvuru astronomi takvimine göre çok az değişiklik gösterebilir!) Elbette gezegenlerin büyüklükleri her zaman aynı kalmaz çünkü Dünya ile aralarındaki uzaklık değişir.

Peki, yıldız büyüklüğü dediğimiz bu niceliksel kavram nereden geliyor? MÖ 2. yüzyılda bu kavram, Hipparkhos tarafından, bir yıldız parlaklığı ölçüsü olarak ortaya atıldı ve daha sonra (MS 2. yüzyılda) Batlamyus (Ptolemaios) *Büyük Bileşim* adlı eserinde, yıldızları her biri ayrı büyüklüğe sahip altı gruba ayırdı. En parlak 20 yıldız, ilk kadir sınıfında yer alıyordu ve en soluk olanlar altıncı kadir sınıfındaydı. Batlamyus'un parlaklıkta beş eşit fark olarak gördüğü şey (birinci– altıncı kadir sınıfları), bize ulaşan ışığın logaritmalarındaki değişikliklerdi (standart bir fizyolojik uyaran–tepkisi “yasasına” (*Fechner* yasası göre). (Daha yakın zamanlı çalışmaların ortaya koyduğu üzere, bu tür tepkileri kuvvet yasasıyla tanımlamak aslında daha iyi olur ancak logaritmik tanımlama da buradaki amaçlarımız için oldukça yeterlidir.)

1830 yılında Sir John Herschel, 1 büyüklüğündeki bir yıldızın, 6 büyüklüğündeki bir yıldızla kıyasla yaklaşık 100 kat daha parlak olduğunu ortaya koyduğunda, Batlamyus'un beş basamağı, ulaşan ışığın logaritmalarında ikisinin farkına karşılık geldi; her birim

büyüklik farkı, $(100)^{(1/5)} \approx 2,512$ kadarlık parlaklık farkı anlamına geliyordu. Bu yaklaşık ilişki daha sonra 1856 yılında, Norman Pogson tarafından kesinleştirildi ve böylelikle büyüklük kavramı yeniden tanımlanmış oldu. Bu nedenle yukarıdaki (87.1) numaralı denklemin, sırasıyla m_1 ve m_2 büyüklüğündeki herhangi iki yıldız için genellemesi şöyle olur:

$$m_1 - m_2 = -2,512 \log_{10} \left(\frac{L_1}{L_2} \right) \quad (87.3)$$

Bir yıldızın *mutlak büyüklüğü* M , yıldızın bizden 10 parsek (yaklaşık 32,6 ışık yılı) uzaklıkta olması durumunda sahip olacağı görünür büyüklüktür. Bu özel uzaklık, gökbilimde kullanılan paralaks kavramına dayanır ilgilenen okurlar bu konuda daha fazla araştırma yapabilir! Bir parsek; yıldızın, ortalama bir Dünya-Güneş mesafesine eşit olan bir mesafeden, Dünya'ya karşıdan bir yay saniyesi iraklığında olan mesafesidir. Burada, ışık yeğinliğinin ters kare kanunundan yararlanarak, M 'yi yıldız uzaklığı r ile (parsek cinsinden) ilişkilendirebiliriz. (87.1) numaralı denklemde, bariz değişiklikleri yaptıktan sonra parlaklığı (ya da ışıklılığı) $L(r)$ olan bir yıldız için

$$m - M = -2,512 \log_{10} \left[\frac{L(10)}{L(r)} \right] \quad (87.4)$$

buluruz ve $L(r) \propto r^{-2}$ ters kanunundan hareketle

$$\frac{L(10)}{L(r)} = \left(\frac{r}{10} \right)^2 \quad (87.5)$$

Öyleyse

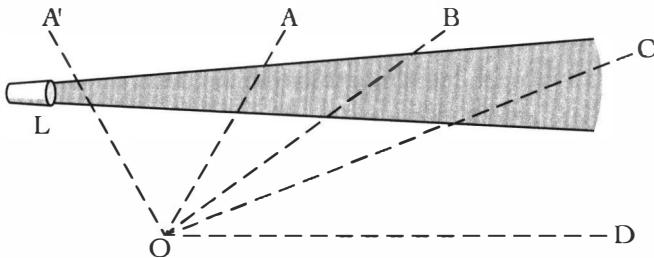
$$m - M = -5,024 \log_{10} \left(\frac{r}{10} \right) \quad (87.6)$$

Devasa bir m değerine sahip olan Güneş için ($m = -26,7$) $M = +4,9$ olacaktır; diğer deyişle eski dostumuz Güneş standart 10 parsek uzaklığından çıplak gözle zor görülebilecektir!

88. Soru: Bir el feneriyle yıldızlara nasıl bakabilirim?

Belirli yıldızları, yıldız gruplarını ya da gezegenleri çevrenizdekilere göstermek için gökyüzüne bir el feneri tuttuğunuz oldu mu? Belki de etrafınızda kimse yoktu. Hiç önemli değil; fenerinizden çıkan ışık demetinin, gökyüzü açıkken bile belirli bir yönde hızla yitip gittiğini fark etmiş olmalısınız. Peki ama her şeyden önce ışık demetini neden görüyorsunuz? Bunun açıklaması, Güneş kaynaklı ışık demetlerinin görünürlüğüne ilişkin açıklamayla aynıdır; demetteki toz zerrecikleri ve yağmur damlaları, ışığın saçılmasına neden olur ve elbette, bu ışığın bir kısmı da gözlemcinin gözüne ulaşır. *Şekil 88.1*'de gözlemcimiz – bu, sizsiniz – O noktasında durur ve ışık demeti L 'den başlayıp (bir miktar sapmayla beraber) C 'ye ve ilerisine dek uzanır. Işık, ilerideki A, B, C vd. noktalarından gözlemciye doğru saçılıma uğrar ancak demet ne kadar ileri uzanır- sa uzansın, farklı konumdaki gözlemci hiçbir zaman demetin, OD yönünün ilerisine (demetin simetri eksenine paralel olarak) uzandığını görmeyecektir. Elbette, görüş yönü ilgili yöne ne kadar yakınsa demet o kadar geniş, saçılma parçacıkları o kadar fazla olur; bu da demetimizin o yönde O 'dan biraz daha uzakta kaldığı gerçeğiyle bir ölçüde çatışır.

Değinmemiz gereken bir nokta daha var. Eğer OA' yönüne doğru bakar ve saçılıma uğramış ışığın yoğunluğu ile (OA' 'ya yaklaşık 90° deki) OB yönüne doğru baktığınız zamanki saçılıma uğramış ışık



Şekil 88.1. El feneri ışığı geometrisi

yeğinliğini kıyaslayacak olursanız, bunlardan ilkinin dikkate değer biçimde daha fazla olduğunu fark edersiniz: İleri yöndeki ışık saçılımı, arkaya kıyasla çok daha fazladır. Bunun açıklaması şudur: Işığın saçılıma uğratan parçacıklar yeterince büyük olduğundan, saçılımı asimetrik şekilde gerçekleştirir; ileri yönde çok daha fazla ışık saçılıma uğrar. Gökyüzü mavisinin, toz, kül, tuz parçacıkları ve atmosferdeki su damlalarının değişen oranlarına bağlı olarak ton değiştirmesi de bu yüzdendir. Ayrıca tropik bölgelerdeki ya da Avrupa'nın güneyindeki bir mavi gökyüzü manzarası ile İngiltere'nin kuzeyindeki bir mavi gökyüzü manzarası arasındaki bazı farklar yine bu durumla ilgilidir. Basit bir şekilde ifade edecek olursak, küçük ($\approx 10^{-8}$ m ebadındaki) parçacıklar en çok mavi ve mor ışığı saçılıma uğratır ve bunu neredeyse tüm yönlerde eşit olan bir yeğinlikle yapar. Buna karşın büyük ($\approx 10^{-6}$ m ebadındaki) parçacıklar, tüm renkleri aşağı yukarı eşit biçimde saçılıma uğratır ancak bunu, çoğunlukla küçük açılarla (diğer bir deyişle ileri yönde) gerçekleştirir.

89. Soru: Bir yıldızı nasıl modelleyebilirsiniz?

Aslan Kral filminin bir sahnesinde, mirket Timon ile yabandomuzu Pumbaa uzanmış, gökyüzünü izlemektedir. Timon, arkadaşına, yıldızların aslında ateşböceği olduğunu söyler. “Ateşböcekleri, ee şey, yukarıdaki şu mavimsi kara şeyin içine sıkışıp kalmış.” Duyduklarıyla büyülenen Pumbaa yanıt verir, “Vay canına, ben onları milyarlarca mil uzakta yanan gaz topları sanırdım hep.” Timon'a kıyasla Pumbaa'nın gökyüzü ve yıldızlardan biraz daha iyi anladığı açıktır. Ancak hiç olmazsa başlarını kaldırıp yukarı bakıyor ve geceleyin gökyüzünün tadını çıkarıyorlar. Çocuklarım küçükken, yazları bir eyalet parkına gider, bir hafta kulübede kalırdık. Geceleyin gökyüzü genellikle açık ve bulutsuz olurdu; karanlıkta Samanyolu, elmaslarla kaplı kadife bir halıda telaşsızca kıvrılan ışıklı bir patika gibi görünürdü. Yıldızlar beni on iki yaşımdayken büyülemişti; üç yıl sonra kendime, bakırdan yapılma, gü-

zel (ancak biraz hasarlı) üç inçlik bir ışıkkıran (refraktör) aldım. Önceki sorudan hatırlayacağınız gibi, yıldızlarla ilgili formüllerle oynadığım Fransızca dersleri, benim için çok keyifli geçiyordu...

Temel bir soruyla başlayalım. Güneş'in ya da başka yıldızların, kendi ağırlıkları altında çökmesini engelleyen bir şey olmalı, öyle değil mi? Bir yıldız (ya da gezegeni) bir bütün olarak tutan şey yerçekimi kuvvetidir ancak direnç olmaksızın bu kuvvet yıldızın görece kısa zaman içinde çökmesine neden olur (Güneş için bu süre yaklaşık 27 dakikadadır; bkz. 90. Soru). Söz konusu direnci sağlayan, yıldız malzemesinin (plazmanın) termal *basıncıdır* ve yıldızların uzun süreler boyunca kararlı kalabilmesi için bu iki fiziksel etkinin yaklaşık bir denge içerisinde olması gerekir. Buradaki temel varsayımlardan biri de yıldız özelliklerinin zamanla değişmediğidir; en azından, siz bu bölümü bitirinceye dek değişmeyecekleri kesindir! Burada fiziğin dehlizlerine girmeyecek, yalnızca dönmeyen yıldızlara ilişkin bazı basit modeller geliştirmemize yarayacak kadarıyla yetineceğiz (aslında muhtemelen tüm yıldızlar dönüyor olsa da çoğu durumda bu, yeterince belirgin değildir: daha fazla açıklamayı, son bir alıştırma olarak bırakılmış 90. Soru'da bulabilirsiniz).

Küresel olarak simetrik bir dönmeyen yıldızın merkezinden r mesafe uzaklaştığınızı düşünün; burada $r \leq R$ ve R de yıldızın (iyi tanımlanmış olduğunu varsayacağımız) yarıçapıdır. Eğer $M_r(r)$, r yarıçapındaki bir kürenin içerisindeki kütleyse, o hâlde $\delta r \ll r$ kalınlığına sahip, ince ve küre biçimindeki bir kabuğun içerisindeki kütle olan δM

$$\delta M_r \equiv M_r(r + \delta r) - M_r(r) \approx 4\pi r^2 \rho(r) \delta r \quad (89.1)$$

olarak tanımlanır; burada $\rho(r)$, yıldız malzemesinin yoğunluğudur. Limitin olması durumunda

$$\frac{dM_r}{dr} = \lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{\delta M_r}{\delta r} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (89.2)$$

Buna zaman zaman kütle korunumu denklemi de denir. $M_r(r)$ 'nin r ile birlikte artış göstereceği açıktır. Denklemi bir integral olarak gösterelim:

$$M_r = \int_0^r 4\pi \xi^2 \rho(\xi) d\xi \quad (89.3)$$

Şimdi, yıldızın içerisindeki basınç gradyanı ile birim hacim başına düşen yerçekimi kuvveti arasındaki dengeyi tanımlayan denkleme geçelim. Basınç, küre biçimindeki bir kabuk üzerinde, radyal olarak (aşağıdan) *dışa doğru* ve (yukarıdan) *içe doğru* çalışacağı için kabuk boyunca görülen basınç farkı (ya da birim alana düşen kuvvet farkı) $\delta P = P(r) - P(r + \delta r)$ 'dir. Diğer yandan, δm kütleindeki bir kabuk ile kabuğun *içindeki* kütleinin arasındaki içe doğru yerçekimi kuvveti $-GM_r \delta m / r^2$ ile ifade edilir; burada G evrensel yerçekimi sabitidir. Simetriden dolayı, kabuğun *dışındaki* malzemeden, kabuğun üzerindeki net yerçekimi kuvveti sıfırdır (ancak burada bunu kanıtlamaya-çağır). Bu türden her kütle elemanı için (birim alan başına) $\delta m = \rho(r) \delta r$ olduğundan bunu, kabuk üzerindeki basınç farkından ve yerçekiminden kaynaklanan kuvvetleri eşitleyerek bir yıldızın denge biçimlenimini ifade etmek için kullanabiliriz. Öyleyse,

$$\delta P = - \frac{GM}{r^2} \rho(r) \delta r \quad (89.4)$$

buradan da

$$\frac{dP}{dr} = \lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{\delta P}{\delta r} = - \frac{GM_r}{r^2} \rho(r) \quad (89.5)$$

Bu, hidrostatik denge denklemdir. Tanımı gereği, bir yıldızın her “parçası” üzerindeki kuvvetlerin tamamının dengede olduğunu, diğer bir deyişle net kuvvetin sıfır olduğunu gösterir. Basınç gradyanı negatif olduğundan, bekleneneği üzere basınç da yıldızımızın merkez bölgesinden dışa doğru azalır.

Sırada, enerji korunumu (çok iyi bir fikir) bulunuyor. Dünya üzerindeki tüm yaşam biçimleri, varlıklarını güneş enerjisine borçludur.

Mikroplardan kasırgalara, ne var ne yoksa her şeyi bu enerji çekip çevirir ve bu enerjinin bir yerlerden geliyor olması gerektiği açıktır. O “bir yer” de, Güneş'in ve diğer yıldızların merkezinde meydana gelen nükleer füzyon tepkimeleridir. Bir kez daha eski dostumuz küre biçimindeki kabuğa dönelim ve enerji nakli oranı ile enerji salınımlarını ilişkilendiren bir denklem oluşturalım. $L(r)$ ile bu kez, r yarıçapındaki bir kürenin yüzeyi boyunca cereyan eden radyal enerji akısını ifade edeceğiz (uygun birimimiz Watt'tır). Ayrıca r yarıçapında, birim kütle başına enerji salınım oranının $\varepsilon(r)$ olduğunu da düşünelim; bu durumda, küre biçimindeki ince kabuğumuz boyunca cereyan eden enerji akısındaki farkın, kabuğun içerisinde üretilen ya da salınan enerji tarafından dengelenmesi gerekir. Öyleyse

$$L(r + \delta r) - L(r) = 4\pi r^2 \rho(r) \varepsilon(r) \delta r \quad (89.6)$$

böylece

$$\frac{dL}{dr} = \lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{\delta L}{\delta r} = 4\pi r^2 \rho(r) \varepsilon(r) \quad (89.7)$$

Bu denklem bize, enerji akısı oranının dışa doğru artış gösterdiğini söyler. Peki ya enerji nakli – bu nasıl meydana gelir? Güneş'in merkezi, yüzeyine (fotosfere) kıyasla daha sıcak olduğundan, ısı enerjisi dışa doğru akar. (Ancak fotosfere kıyasla son derece narin olsa da Güneş koronasının (tacının) çok daha sıcak olduğunu unutmamak gerekir, en az bir milyon derece Celcius mertebesinde [hatta güneş lekelerinin üzerinde, bundan daha da fazla olan] bir sıcaklık söz konusudur. Oysa fotosferdeki sıcaklık 5700 derece Celcius'tur). Ama bu, başka bir konu.

Enerji bir yerden başka bir yere, üç temel mekanizma ile nakledilebilir: Bunlar iletim, taşınım ve ışıdır. Taşınım, daha büyük ölçekli bir süreçtir ve miktarının belirlenmesi, bizim amaçlarımız bakımından zordur; buna karşın diğer iki mekanizma, doğaları gereği daha küçük ölçeklidir ve parçacıklar arasında (çarpışma yoluyla gerçekleşen) enerji alışverişiyle ilgilidir. İletimde, enerjiyi taşıyan

elektronlardır ancak ışıınımda taşımadan fotonlar sorumludur ve çoğu durumda geçerli olan mekanizma budur. Bu iki sürecin her biri için enerji akısı (ya da saniyede, metrekaare başına düşen enerji) olan $F(r)$, sıcaklık $T(r)$ kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$F(r) = -\kappa \frac{dT}{dr} \quad (89.8)$$

burada κ bir iletkenlik katsayısıdır. Genel olarak bu katsayı, yıldızların çeşitli özelliklerine bağlıdır. Denklemimizdeki eksi işareti, ısının sıcaklığı yüksek olan bölgelerden sıcaklığı düşük olan bölgelere doğru, tıpkı olması gerektiği gibi aktarılmasını sağlar. Yukarıdaki niceliklerden radyal enerji akış hızı $L(r)$ ile akı arasındaki ilişki aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$L(r) = 4\pi r^2 F(r) \quad (89.9)$$

Böylece,

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{F(r)}{4\pi r^2 \kappa} \quad (89.10)$$

BASİT BİR YILDIZ MODELİ

Doğrusal (linear) davranış, değişen fiziksel ve biyolojik niceliklerle ilgili birçok matematiksel yöntemde, basit bir sabitlikten sapma olarak karşımıza çıkar. Ancak bu durumda bile modeller, matematiksel olarak oldukça karmaşık bir görüntü verebilir. Bu başlıkta, yıldızın yoğunluğunun yıldızın merkezinden “yüzeyine” doğru doğrusal olarak değiştiğini varsayacağız; elbette bu, hiç de gerçekçi olmayan bir varsayımdır, yine de gerçek yıldızların özelliklerine ilişkin niteliksel fikirler edinmemize yarayabilir. Buna göre, R yarıçaplı yıldızımızın merkezi yoğunluğu ρ_c ise denklemimiz aşağıdaki gibi olur:

$$\rho(r) = \rho_c \left(1 - \frac{r}{R}\right) \quad (89.11)$$

Şimdi, hidrostatik denge denklemini (89.5) kullanarak bazı hesaplamalar yapalım. Ancak önce M_r için yoğunlukla ilgili bir ifade bulmamız gerekiyor. Öyleyse (89.2) numaralı denklemden hareketle

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho_c \left(1 - \frac{r}{R}\right) \quad (89.12)$$

yazdığımız bu denklemin integralinin alınması ile aşağıdaki ifadeye dönüşür;

$$M_r = \frac{4\pi\rho_c}{3} r^3 - \frac{\pi\rho_c}{R} r^4 \quad (89.13)$$

ve integral sabiti sıfırdır. Yıldızın toplam kütlesi M doğrudan aşağıdaki gibi olur:

$$M \equiv M_r(R) = \frac{\pi\rho_c}{3} R^3 \quad (89.14)$$

bu da bize, yıldızın merkezi yoğunluğu olan ρ_c için yıldızın kütleşiyle ilgili bir ifade verir. Artık (89.5) numaralı denklemden yola çıkarak basınç gradyanını yazabiliriz:

$$-\frac{dP}{dr} = -\pi G\rho_c^2 \left(\frac{4}{3} r - \frac{7r^2}{3R} + \frac{r^3}{R^2}\right) \quad (89.15)$$

İntegralini aldığımızda, bizim “doğrusal” yıldızımızın içindeki basınç dağılımı, merkezi basınç P_c bakımından aşağıdaki gibi olur:

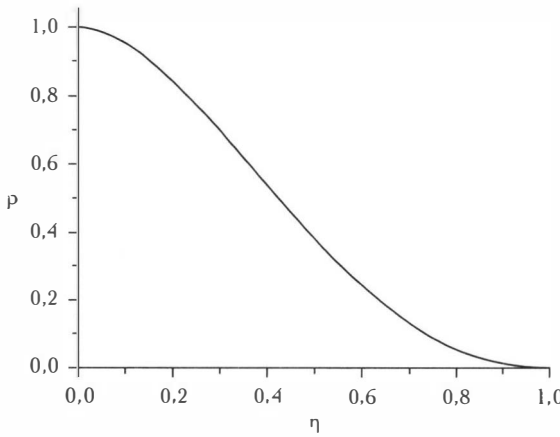
$$P(r) = P_c - \pi G\rho_c^2 r^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{7r}{9R} + \frac{r^2}{4R^2}\right) \quad (89.16)$$

Burada, yıldızın yüzeyindeki basınç

$$P(R) = P_c - \frac{5}{36} \pi G\rho_c^2 R^2 \quad (89.17)$$

olacaktır ancak tanım gereği bu sıfırdır; bu nedenle merkezi basınç;

$$P_c = \frac{5}{36} \pi G\rho_c^2 R^2 \quad (89.18)$$



Şekil 89.1. Boyutsuz basınç profili $\rho(\eta)$

Öyleyse modelimize göre merkezi basınç, hem yarıçapın karesi ile hem de merkezi yoğunluğun karesi ile orantılıdır. Bu durum, (89.14) numaralı denklem yardımıyla, yıldız kütlesi bakımından da ifade edilebilir:

$$P_c = \frac{5}{4\pi} \frac{GM^2}{R^4} \quad (89.19)$$

Bunu (89.16) numaralı denklem ile birleştirdiğimizde, basınç dağılımını görelî (ve bu nedenle boyutsuz olan) yarıçap $\eta = r/R$ ve basınç $\rho(\eta) = P/P_c$ cinsinden rahatlıkla ifade edebiliriz:

$$\rho(\eta) = 1 - \frac{24}{5} \eta^2 + \frac{28}{5} \eta^3 - \frac{9}{5} \eta^4 \quad (89.20)$$

Bu, *Şekil 89.1*'de gösterilmişti.

Radyasyon basıncı olarak bilinen bir niceliği göz ardı ettiğimizde sıcaklık dağılımı için de bir ifade elde edebiliriz. Gerçek hayatta bunun dikkate alınmaması söz konusu değildir ancak radyasyon basıncını hesaba katmamız, yıldızın iç yapısının derinliklerinde kaybolmamız anlamına gelir ve bu durum, o ölümsüz ifadeyi kullanacak olursak, “bu kitabın kapsamı dışında kalır!” Burada doğa olaylarını, matematiksel olarak anlamak için modellerle oynadığımızı aklımız-

dan çıkarmamız gerekiyor. Bu nedenle, *ideal gaz yasası* adı verilen yasayı devreye sokacağız; bu yasaya göre sıcaklık

$$T(r) = k \frac{P(r)}{\rho(r)} \quad (89.21)$$

burada k sabitinin bizim için hiçbir önemi yoktur. Sıradaki adımda, yıldızın merkezindeki sıcaklık $T_c = kP_c/\rho_c$ olarak bulunur ve sonrasında η bakımından

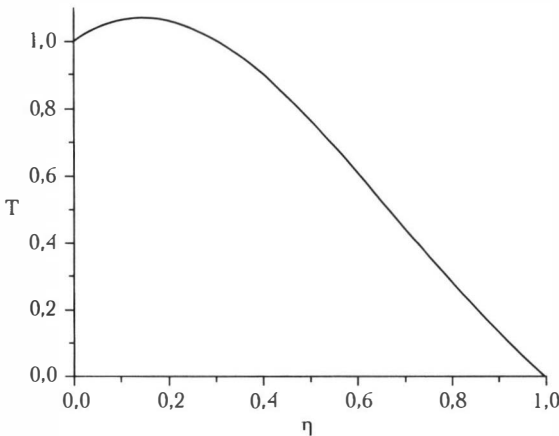
$$\frac{T}{T_c} = \left(\frac{P}{P_c}\right) \left(\frac{\rho_c}{\rho}\right) 1 + \eta - \frac{19}{5} \eta^2 + \frac{T}{T_c} \eta^2 + \frac{9}{5} \eta^3 \quad (89.22)$$

olarak yazılır; tabii biraz bölme işleminin ardından! Bu nicelik *Şekil 89.1*'de gösterilmiştir. İlginçtir, elimizdeki ifade bize en yüksek sıcaklığın yıldızın merkezinde değil

$$\eta = \frac{19 - \sqrt{226}}{27} \approx 0,147 \quad (89.23)$$

görelî yarıçapında oluştuğunu göstermekte.

Alıştırma: Bu sonucu ispat edin.



Şekil 89.2. Boyutsuz sıcaklık profili $T(\eta)$

Ancak radyasyon basıncının göz ardı edildiği bu modeli, tam da bu sebeple, gerçek yıldızların sıcaklık yapısı hakkında önemli sonuçlara varmak için kullanamayız.

Şimdi daha “genel” bir yıldıza dönelim ve yıldızın yapısıyla ilgili hiçbir bilginiz olmaksızın minimum merkezi basıncı hakkında şaşırtıcı derecede sağlam sonuçları nasıl çıkarabileceğimize bir bakalım; burada bilmemiz gereken tek şey, yıldızımızın kütlesi ve yarıçapıdır. Minimum merkezi sıcaklık hakkında da benzer sonuçlara varılabilir ancak bunun için *halkalanma teoreminin* incelenmesi gerekir; bu da bizi, yine konumuzdan uzaklaştıracaktır. (89.2) ve (89.5) numaralı denklemlerden yola çıkarak ve zincir kuralını kullanarak

$$\frac{dP}{dM} = \left(\frac{dP}{dr} \right) \left(\frac{dM}{dr} \right)^{-1} = - \frac{GM}{4\pi r^4} \quad (89.24)$$

buluruz.

Bu denklemin integralinin M 'ye göre, merkezi (alt indis c) ile yüzeyi (alttaki s) arasında alınması,

$$-\int_0^{M_s} \frac{dP}{dM} dM = P_c - P_s = \int_0^{M_s} \frac{GM}{4\pi r^4} dM \quad (89.25)$$

denklemini verecektir; artık P_s sıfır olmak zorunda değildir ve elbette M_s de yıldızın toplam kütlesidir. Bir sonraki adımda, yıldızın içindeki bütün noktalarda $r < r_s (= R)$ olduğu gerçeğine dayanan bir eşitsizliği kullanıyoruz (bu çok da zor değildir) ve $r^{-4} > r_s^{-4}$ yazabiliyoruz. Böylece

$$\int_0^{M_s} \frac{GM}{4\pi r^4} dM > \int_0^{M_s} \frac{GM}{4\pi r_s^4} dM = \frac{GM_s^2}{8\pi r_s^4} \quad (89.26)$$

Bunu, (89.25) numaralı denklemlerle birleştirdiğimizde şu sonucu elde ediyoruz:

$$P_c > P_s + \frac{GM_s^2}{8\pi r_s^4} \geq \frac{GM_s^2}{8\pi r_s^4} \quad (89.27)$$

Bu, bütün yıldızlar ve elbette Güneş için de geçerlidir; Güneş için $M_s \approx 2 \times 10^{30}$ kg ve $r_s \approx 7 \times 10^8$ m olduğunu biliyoruz. Bunları sırasıyla $M_{\odot}$ ve $r_{\odot}$ ile göstereceğiz. Ayrıca, yerçekimi sabiti $G \approx 6,7 \times 10^{-11}$ N m²/kg². Bu nedenle, Güneş için P_c değerini $P_{\odot}$ ile gösterirsek,

$$P_{\odot} \geq \frac{(6,7 \times 10^{-11}) \times (2 \times 10^{30})^2}{8\pi \times (7 \times 10^8)^4} \text{ N/m}^2 \approx 4,4 \times 10^{13} \text{ N/m}^2 \quad (89.28)$$

ya da buna eşdeğer olarak

$$P_{\odot} \geq 4,4 \times 10^8 \text{ atmosfer} \quad (89.29)$$

yazabiliriz; zira bir atmosfer, yaklaşık 10⁵ N/m²'dir (veya 10⁵ Pa). (89.27)'deki bu eşitsizlik, Güneş dışındaki yıldızlar için şu şekilde tekrar yazılabilir:

$$\begin{aligned} P_c &\geq \frac{GM_s^2}{8\pi r_s^4} = \frac{GM_{\odot}^2}{8\pi r_{\odot}^4} \left(\frac{M_s}{M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{r_{\odot}}{r_s} \right)^4 = P_{\odot} \left(\frac{M_s}{M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{r_{\odot}}{r_s} \right)^4 \\ &= 4,4 \times 10^{13} \left(\frac{M_s}{M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{r_{\odot}}{r_s} \right)^4 \text{ N/m}^2 \end{aligned} \quad (89.30)$$

Sorumuzun, “*Bir yıldız nasıl modellenebilir*” olduğunu hatırlıyorsunuz? Temel ilkelerden hareketle ve bazı basit fikirlerden yararlanarak bir “oyuncak” yıldızın yapısı hakkında bazı temel bilgiler edinmiş olduk. Ancak bu son sonuç, şaşırtıcı biçimde genel niteliktedir. Herhangi bir yıldızın minimum merkezi basıncını bulabileceğimizi, bunun için sadece yıldızın kütesinin ve yarıçapının, Güneş'in kütesine ve yarıçapına olan oranını bilmemizin yeterli olduğunu gördük. Elbette bu sonuç, Güneş'in merkezi basıncı için hemen bir alt sınır koyar ancak bu, birkaç yüzdenin biri kadar düşüktür. Yine de modelimizin pek incelikli olmadığı (ve bunun bir alt sınır olduğu!) dikkate alınırsa bu sonuç hiç de fena değildir.

90. Soru: Güneş'in çökmesi ne kadar zaman alır?

Dengedeki bir yıldızın basınç gradyanı ile yerçekimi arasındaki dengeyi ifade eden (89.5) numaralı hidrostatik denge denklemin-den aşağıdaki denkleme ulaşırız:

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{GM_r}{r^2} \rho(r) \quad (90.1)$$

Şimdi, her şeyden önce bu kuvvetlerin dengede olmadığını varsayalım:

$$- \frac{dP}{dr} - \frac{GM_r}{r^2} \rho(r) \neq 0 \quad (90.2)$$

Newton'un ikinci hareket yasası (kuvvet eşittir momentum değişme hızı veya burada sadece $F = ma$) sayesinde bu dengesizlik, belirli bir radyal kabukta r ivme cinsinden yazılabilir; diğer bir deyişle

$$\rho(r) \frac{d^2r}{dt^2} = - \frac{dP}{dr} - \frac{GM_r}{r^2} \rho(r) \quad (90.3)$$

Eğer yerçekimi kuvvetine direnç gösteren bir basınç gradyanı olmasaydı, Güneş (ya da bir başka yıldız) çökerdi; bu durumu şöyle yazabiliriz:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = - \frac{GM_r}{r^2} \quad (90.4)$$

Teorik olarak bu denklem, herhangi bir verili yoğunluk profili $\rho(r)$ için çözülebilir ancak bizim amaçlarımız bakımından bu, gerekli değildir. İvme negatif olduğuna göre (yerçekimi kuvveti radyal olarak içe doğrudur),

$$\frac{d^2r}{dt^2} = - \left| \frac{d^2r}{dt^2} \right|$$

ve boyutsal olarak, (90.4)'ten hareketle,

$$\frac{R}{T^2} \sim \frac{GM}{R^2} \quad (90.5)$$

yazabiliriz; burada R ve T , bu çökme senaryosunun yıldızı için karakteristik uzunluk ve zaman ölçekleridir ve M yıldızın kütlesini ifade eder. Buna göre,

$$T \sim \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2} \quad (90.6)$$

Astrofizik terimiyle T , dinamik zaman ölçeği olarak bilinir ve bir yıldızın “yüzeyinin” $r = 0$ durumuna “serbest düşmesi” için geçen zamanın bir ölçüsüdür. Güneş için $M \approx 2 \times 10^{30}$ kg ve $R (= r_s$ Bkz. 89. Soru) $\approx 7 \times 10^8$ m değerlerini kullanmıştık; şimdi bu değerleri ve G değerini (90.6)'ya yerleştirelim:

$$T \sim \left(\frac{[7 \times 10^8]^3}{6,7 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}} \right)^{1/2} \text{ s} \approx (2,56 \times 10^6)^{1/2} \text{ s} \approx 1600 \text{ s}$$

ve işte, T nin yaklaşık 27 dakika olduğunu bulmuş olduk! Güneş için yaklaşık 10^{10} yıl olan bu süre, özellikle Güneş gibi yıldızlar için “nükleer zaman ölçeği” düşünüldüğünde, oldukça kısadır!

Bu görüşlerle biraz daha ilerleyebiliriz. Eğer bir ortalama yoğunluk **SEMBOL** tanımını (Denklem (89.3)'ten hareketle)

$$M = M_R = \int_0^R 4\pi \xi^2 \rho(\xi) d\xi \equiv \frac{4}{3} \pi R^3 \bar{\rho} \quad (90.7)$$

olarak yaparsak; diğer bir deyişle

$$\bar{\rho} = \frac{3}{R^3} \int_0^R \xi^2 \rho(\xi) d\xi \quad (90.8)$$

(90.6) ve (90.7) numaralı denklemler üzerinden, serbest düşüş zaman ölçeğini bulabiliriz:

$$T \sim \left(\frac{3}{4\pi G \bar{\rho}} \right)^{1/2} \quad (90.9)$$

Shude Mao'nun internette yayımlanan bir makalesinden (Bkz. Kaynakça) esinlenerek hazırlanmış birkaç ilginç alıştırma ile bu konuyu kapatabiliriz.

Alıştırma: $R \approx 100R_{\odot}$ ve $M \approx 1M_{\odot}$ değerlerine sahip bir kıızıl dev için serbest düşüş zamanını hesaplayın.

Alıştırma: Bir yıldızın içindeki basınç gradyanının yok olması yerine diğer uç noktayı düşünün: Yıldızımızın yerçekimi ortadan kaybonsun! Bu durumda yıldız “içe çökmek” yerine dışarı doğru “patlayacaktır”. Bu senaryonun olması için gereken zaman ölçeğini R , ρ ve P cinsinden hesaplayın.

Alıştırma: Yoğunluğu **SEMBOL** olan homojen bir kürenin serbest düşüş zamanının $T_e = (3\pi/32G\bar{\rho})^{1/2}$ tam olarak bulunabileceğini ve bunun olduğunu ortaya koyun. Sonucu, (90.9) ile karşılaştırın ve

$$\frac{T}{T_e} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \quad (90.10)$$

olduğunu gösterin.

Bu sonucu yorumlayın. Son alıştırmaımız, dönüş hareketinin, Güneş'teki küresel simetri ekseninden uzaklaşmada bir etkisinin olup olmamasıyla ilgili.

Alıştırma: Güneş'in dönüş süresi yaklaşık 27 gündür. Güneş ekvatoru üzerindeki merkezci (santripetal) ivme oranını ve yerçekimi ivmesini hesaplayın ve bu sonucun ne anlama geldiğini yorumlayın.

91. Soru: Ay'ın etrafındaki şu küçük halkalar nedir?

[Bkz. Renkli fotoğraflar kesiti]

Ayın dolunay evresinde (ya da buna yakın bir evrede) olduğu bulutsuz bir gecede karşılaşılması muhtemel bu güzel doğa olayına Ay koronası (ya da Ay tacı) denir. Bu korona, Ay'ın çoğunlukla sadece ince bir bulut tarafından örtülmüş ancak tamamen kapatılmamış olduğu zamanlarda görülen, yumuşak renkli birkaç halkadan oluşur. Güneş'in (ya da teknik olarak, yeterince parlak herhangi bir ışık kaynağının) etrafında da görülebilir ancak gözde kalıcı hasar bırakma tehlikesi olduğundan, buna hiçbir zaman doğrudan bakılmamalıdır. Ayrıca Ay tacı, 89. Soru'da söz edilen tam tutulma sırasında görülen, Güneş'in narin görünümlü dış atmosferi olan *Güneş koronası (tacı)* ile karıştırılmamalıdır.

Cowley ve diğerleri tarafından kaleme alınmış olan makalede, Ay tacının renkleri şöyle anlatılır: “Merkezde çok parlak, neredeyse beyaz bir *ayla (aurole)* vardır; bu aylanın sarı ve kırmızı saçakları bulunur. Bazen tüm manzara, bundan ibarettir ancak daha iyi koronalarda, aylanın etrafında gittikçe soluklaşan ve yumuşak renkli bir veya daha fazla sayıda halka da görülebilir. Bunların ilki, içeride ve mavimsidir; renkler, dışarıya doğru yeşillerden ve sarılardan geçerek en dışta kırmızıya ulaşır... Gökkuşağı renklerindeki keskin ve belirgin tonlardan farklı olarak, Ay tacındaki tüm renkler, daha narin karışımlar hâlinindedir.”

Peki, bir koronanın ardında yatan sebep nedir? Deyim yerindeyse, bunun “suçlusu” kırınımıdır: Işığın, dalga boyu ile kıyaslanabilecek ebatlarda bir nesne tarafından engellenmesinden kaynaklanan bir durumdur (kırınım ile ilgili önceki açıklamalar için bkz. 47-48. Sorular). Bu örnekteki engeller, ebatları 1 ile 100 mikron arasında değişen, ortalama çapları 10 ile 15 mikron arasında olan sayısız bulut damlacığıdır. Her ne kadar görülebilir ışığın dalga boylarından (λ) daha yüksek bir büyüklük mertebesi olsa da (0,45 ila 0,70 mikron) bu, kırınım etkilerinin görülmesi için yeterlidir ve sesin bir konser salonunda sütunların etrafında dolaşırken eğilip

bükülmesini andırır. Daha büyük ebattaki yağmur damlaları, gözlemlenebilir bir kırınım olayına sebep olmaz ancak elbette ışığın “saçılmasına” neden olarak gökkuşağı meydana getirir.

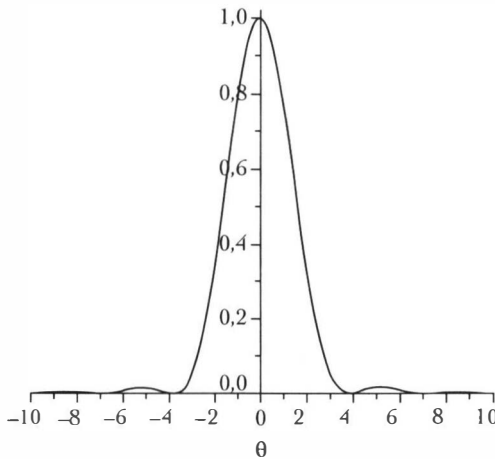
Yarıçapı R olan ve örtücü konumdaki bir disk için saçılma açısının bir fonksiyonu θ olarak kırınıma uğrayan ışığın yeğirliğı $I(\theta)$, çok ilginç bir fonksiyonla (Bessel fonksiyonuyla; bkz. Ek-1) ifade edilir. Tarihsel sebeplerden ötürü $J_1(x)$ ile gösterilen bu fonksiyon bu bağlamda şöyle ifade edilir:

$$x = \frac{2\pi R \sin \theta}{\lambda} \text{ veya } \theta = \arcsin \left(\frac{x\lambda}{2\pi R} \right) \quad (91.1)$$

Açıkça görüldüğü üzere, verili bir θ değeri için x , örtücü diskinin çember uzunluğunun, üzerine düşen ışığın dalga boyuna olan oranıdır. Aslında,

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{2J_1(x)}{x} \right)^2 \quad (91.2)$$

$I(0)$ ışığın “ileri” yöndeki yeğirliğı ($\theta = 0$) olup, diskin alanı ile orantılıdır. Göreli yeğirlik, Şekil 91.1’de $I(\theta) / I(0)$ x ’in bir fonksiyonu olarak gösterilmiştir.



Şekil 91.1. Göreli yeğirlik $I(\theta)/I(0)$

Görüldüğü gibi bu nicelik, salınımlıdır ancak büyük bir de merkezi genliğe sahiptir; ardışık maksimumlar çok daha küçüktür, dolayısıyla ayladan radyal olarak, dışarıya doğru baktığımızda halka yeğniliği hızla azalır. Aslında $x \neq 0$ için birinci ve ikinci maksimumlar, $x = 0$ noktasındaki merkezi maksimumun, sırasıyla sadece % 1,75 ve % 0,42'sidir. Bunların, yine sırasıyla, $x = 5,14$ ve $x = 8,42$ 'de meydana gelmesinden hareketle, birinci ve ikinci maksimumlar için θ_1 ve θ_2 'yi şöyle belirleyebiliriz:

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{x\lambda}{2\pi R}\right) = \arcsin\left(\frac{5,14\lambda}{2\pi R}\right) = \arcsin\left(0,82 \frac{\lambda}{R}\right) \text{ ve} \quad (91.3)$$

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{8,42\lambda}{2\pi R}\right) = \arcsin\left(1,34 \frac{\lambda}{R}\right) \quad (91.4)$$

Elbette, tıpkı gökkuşağının, güneş ışığının sayısız yağmur damlasıyla saçılma uğramasının bir sonucu olması gibi, Ay koronasının da sayısız bulut damlacığıyla meydana gelen kırınımının bir sonucu olduğu unutulmamalıdır. Damlacıklar, aşağı yukarı aynı büyüklükte olduğunda bu kırınım etkileri birbirini kuvvetlendirir; ortaya çıkan koronalar da çoğunlukla belirgin hatlara sahip ve parlak olur. Damlacıkların bu derece bir örnek olması, bulut henüz “yeniyen”, diğer bir deyişle damlacıklar aynı “geçmişe” sahipken, tek tek damlacıkları etkileyen küçük çevre farklılıklarının birikmesi için yeterli zaman henüz geçmemişken söz konusudur. Cowley ve makalenin diğer yazarlarına göre bu şartlar, en yaygın olarak yamalı yayvan bulut (altokümülüs), yumakbulut (sirrokümülüs) ve mercekse (lentiküler) bulutlarda bulunur.

Diğer taraftan buluttaki damlacıkların ebadı, geniş bir aralıkta seyrediyorsa kırınım örüntülerinin çakışması nedeniyle korona genellikle kaybolur ve yalnızca ayla kolaylıkla görünür. Ebat dağılımının dar olduğu ancak bulutun içinde bölgeden bölgeye değişiklik gösterdiği durumlardaysa başka bir manzara ile karşılaşılır; farklı yarıçaplara sahip korona kemerleri meydana gelebilir ve bunun sonucunda dairesel olmayan, hatta düzensiz kemerler görü-

lebilir. Eğer parçalar yeterince rasgele ise korona, bulut yanardönerliği adı verilen bir duruma yol açabilir; bu yanardönerlik, gündüz vakti Güneş'in civarındaki bulutlarda sıklıkla görülür (Bkz. 48. Soru).

92. Soru: Güneş tutulmasını nasıl modelleyebilirsiniz?

Çocukluğumda, onlu yaşlarımdan itibaren astronomiye ilgi duymaya başlamıştım ve her zaman, tam bir güneş tutulmasını görebilmeyi hayal ederdim. Beklediğim tutulma, otuz sekiz yıl ilerdeki, 11 Ağustos 1999 tarihindeki tutulmaydı. Gökyüzünün açık olması durumunda, tutulmanın Cornwall'dan ve Devon'un güney bölgesinden görülebileceği söyleniyor, İngiltere'nin geri kalan bölümündeyse kısmi tutulma gözlemleneceği belirtiliyordu. Bir önceki tam tutulma, 30 Haziran 1950 tarihinde (bu gibi şeyleri takdir etmek için çok küçük olduğum bir zamanda) meydana gelmişti ve sadece İskoçya'nın Unst Adası ile Shetland Adalarından tam olarak görülmüştü. O zaman da İngiltere'nin geriye kalan kısmında, bekleneneği üzere bir kısmi tutulma gözlemlenmişti.

Ancak bu kadar geriye gitmeyelim: 1984 yılında ailemle birlikte kalıcı olarak (en azından şimdilik) Amerika Birleşik Devletleri'ne yerleştik. Görünürde, uzun zamandır beklediğim tutulmayı nihayet görebilmek için uçağa atlayıp yola çıkmamı engelleyecek hiçbir şey yoktu, ancak gitmedim – ah, gençlik hayalleri orta yaşın meşguliyetine ve hissizliğine nasıl da kurban ediliyor! Olaylar öyle bir şekilde gelişti ki tutulma, çoğu kişi için tam bir hayal kırıklığı oldu; gökyüzünün o bölümü çoğu gözlemci için neredeyse tamamen bulutluydu. Yine de Kanal Adalarındaki Alderney'den, kısa süreliğine bile olsa, bir kısmi tutulma görülebilmisti.

İşte size, (bu satırların yazıldığı günden itibaren) 2020 yılının sonuna dek meydana gelecek tam güneş tutulmalarının bir listesi (ister görülsün, ister görülmesin!):

- (i) 1 Ağustos 2008 (Kuzey Kanada'nın bir bölümü, Grönland, Sibiry, Moğolistan ve Çin)

- (ii) 22 Temmuz 2009 (Hindistan'ın bir bölümü, Çin ve Pasifik Okyanusu)
- (iii) 11 Temmuz 2010 (Güney Amerika'nın bir bölümü ve Tahiti)
- (iv) 13 Kasım 2012 (Avustralya'nın bir bölümü, Yeni Zelanda, Güney Amerika ve Güney Pasifik)
- (v) 20 Mart 2015 (Atlantik Okyanusu, Norveç ve Kuzey Kutbu)
- (vi) 9 Mart 2016 (Asya'nın bir bölümü ve Pasifik Okyanusu)
- (vii) 21 Ağustos 2017 (ABD'de Oregon'dan Güney Carolina'ya kadar)
- (viii) 2 Temmuz 2019 (Güney Amerika'nın bir bölümü)
- (ix) 14 Aralık 2020 (yine Güney Amerika'nın bir bölümü)

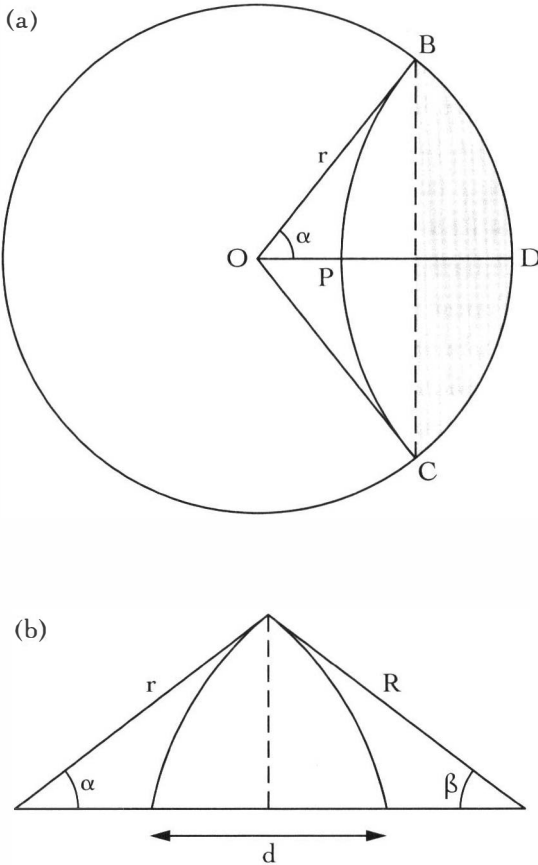
ABD'de yaşayan ve diğer yerlere gidemeyecek olanlar için en iyi tarih 2017 gibi görünüyor yine de 2010 yılında Tahiti'den görülecek olan tutulma bana daha cazip geliyor!

Bir kısmı veya tam tutulma esnasında *aydınlıkta* meydana gelen değişikliklerle ilgili olarak yakın zamanda yayımlanmış (ve Mollmann ile Vollmer tarafından kaleme alınmış) bir makale mevcuttur. Aydınlık (burada L ile gösterilecektir) oldukça teknik bir fotometrik terimdir; bunu “sıradan” insan gözünün algılayabileceği aydınlık ölçüsü olarak almak, bizim için yeterlidir. İlgili ölçüm birimleri *lüks* (lx) ya da metrekaşe başına lümen olarak verilir. Tipik aydınlık aralıklarını anlaşılır kılmak bakımından, dolunayın 0,25 lx olduğunu, sokak lambalarının 1 ile 16 lx arasında değiştiğini (en azından Almanya'da; bu veriler Mollmann ve Vollmer'in makalesinden alınmıştır), oturma odası ışıklarının yaklaşık 120 lx, iyi aydınlatılmış bir çalışma odası içinse ilgili değerin yaklaşık 1000 lx olduğunu belirtmek gerekir. Kapalı gökyüzü için Güneş'in yüksekliğine ve bulut kalınlığına bağlı olarak, 10.000 lx ve açık gökyüzü için yine Güneş'in yüksekliğine bağlı olarak, 70.000 lx'ten söz edebiliriz.

Burada önerilen matematiksel model, her şeyden önce bir tutulma esnasında aydınlığın, Güneş diskinin örtülmemiş alanıyla doğru orantılı olduğu varsayımına dayanıyor; gökyüzü ışığının (saçılma uğramış güneş ışığının) da ufak bir katkısı vardır ancak hayli küçük

olduğundan bu basit modelde dikkate alınmayacaktır. Diğer varsayımlar şöyledir:

(i) Güneş ve Ay (sırasıyla r ve R açısal yarıçaplarına sahip) dairesel diskler olarak ele alınır, böylelikle diğer özelliklerin yanı sıra tam tutulmadan bir iki saniye önce o muhteşem “elmas yüzük etkisini” yaratabilen Ay dağlarının varlığı da hesaba katılmaz. Bir tutulmanın tam tutulma olabilmesi için gerekli koşullardan birinin $R \geq r$ olduğuna dikkat edin. Elbette bu, tek başına yeterli bir koşul değildir ve şunu belirtmek



Şekil 92.1(a, b). Güneş'in, Ay tarafından örtülen kısmının geometrisi

gerekir: Güneş, Ay ve Dünya eşdoğrusal (kolineer) olduğunda bile Ay'ın, Dünya'ya uzaklığı değişken olduğundan (işleri basitleştirmek adına sabit olduğunu varsaydığımız) r değeri $0,90R \leq r \leq 1,06R$ aralığında seyredebilir.

(ii) Dünya'dan görüldüğü şekliyle Güneş'in ve Ay'ın izleklerinin, tutulma süresince düz çizgiler olduğu varsayılır.

(iii) Güneş ile Ay arasındaki göreceli hızın sabit olduğu varsayılır.

(iv) Güneş diskinin birörnek parlaklığa sahip olduğu varsayılır.

Modele ilişkin temel parametreler ve çizimler, Mollmann ile Vollmer'in makalesiyle aynıdır. Herhangi bir tutulmada (kısmi, halka şeklinde ya da tam tutulma), zamanın herhangi bir noktasında, *PBDCP* çift bölgenin alanı, *Şekil 92.1*'e temel trigonometri bilgilerinin uygulanmasıyla şöyle bulunur:

$$A = r^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) + R^2 (\beta - \sin \beta \cos \beta) \quad (92.1)$$

Kosinüs teoremi R , r , α ve d 'yi ilişkilendirir; burada $d = PD$ 'dir. Böylelikle,

$$R^2 = r^2 + (R + r - d)^2 - 2r(R + r - d) \cos \alpha \quad (92.2)$$

buradan da şu denkleme varırız:

$$\cos \alpha = \frac{r^2 + (R + r - d)^2 - R^2}{2r(R + r - d)} \quad (92.3)$$

Yukarıdaki denklemde, simetriden dolayı, r ile R 'nin yerlerini değiştirerek $\cos \beta$ ifadesini buluruz,

$$\cos \beta = \frac{R^2 + (R + r - d)^2 - r^2}{2R(R + r - d)} \quad (92.4)$$

Bu bağlamda örtme derecesi p 'nin önemli bir nicelik olduğu açıktır ve Güneş'in, Ay tarafından örtülen kısmının, Güneş diskinin alanına olan oranıyla (πr^2) tanımlanır.

Böylece,

$$p = \frac{A}{\pi r^2} = \frac{r^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) + R^2(\beta - \sin \beta \cos \beta)}{\pi r^2} \quad (92.5)$$

Normalize edilmiş aydınlık, maksimum aydınlık L_{max} cinsinden basitçe şöyle ifade edilir:

$$\frac{L}{L_{max}} = 1 - p \quad (92.6)$$

Burada *görelî* hızla (v) çalıştığımız için Güneş'in, tutulma boyunca sabit olduğunu ve Ay'ın v hızında hareket ettiğini varsaymak mantıklıdır. Makalenin yazarları, parçacık fiziğinde *etki parametresi* (a) olarak bilinen bir kavramı kullanır; bu, Ay ve Güneş disklerinin merkezleri arasındaki asgari mesafedir (elbette, gözlemci tarafından yapılan projeksiyona göre). s ile gösterilen, *Ay hareketinin yönündeki* merkezler arası mesafe (*Bkz. Şekil 92.2*) bakımından,

$$(R + r - d)^2 = a^2 + s^2 \quad (92.7)$$

olduğu açıktır ve

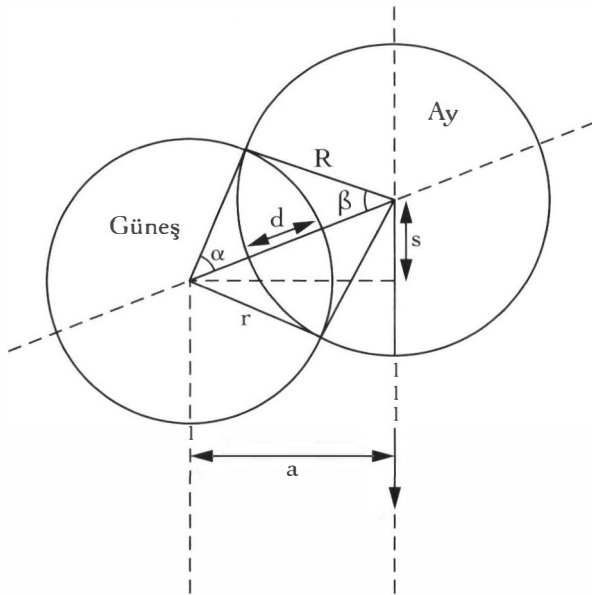
$$d = R + r - (a^2 + s^2)^{1/2} \quad (92.8)$$

anlamına gelir (çünkü $d < R + r$).

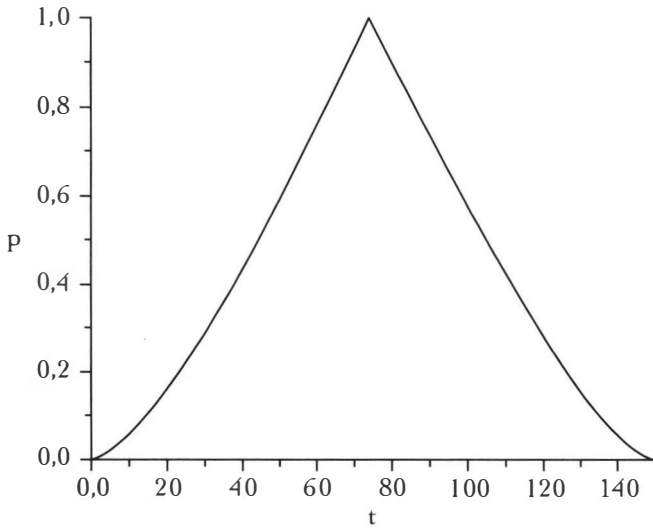
Diskler arasındaki ilk temas, sözgelimi, $s = s_0$ olduğunda meydana gelirse, ilk ve son temaslar arasında kat edilen toplam mesafe, simetriden dolayı $2s_0$ olur.

Dahası, bu temaslar arasındaki zaman aralığı $2T$ ise (burada yine tutulma simetrisine izin veriyoruz) $v = s_0 / T$ olur. Maksimum örtmede (ister tam isterse kısmi olsun), s aşağıdaki basit ilişki ile t zamanın bir fonksiyonu olarak temsil edilebilir:

$$s(t) = s_0 \left(1 - \frac{t}{T} \right) \quad (92.9)$$



Şekil 92.2. Bir tutulma sırasındaki Güneş örtülmesinin temel geometrisi



Şekil 92.3. Güneş örtülmesinin derecesi $p(t)$

zira $s(T) = 0$ 'dır. Artık tüm d , α , β ve elbette aydınlık L parametrelerini t 'nin fonksiyonları olarak ifade edebiliriz.

Şimdi teorik olarak, herhangi bir tip tutulma için aydınlığı hesaplamak mümkündür; halka şeklinde tutulma söz konusu olduğunda, iki diskin için dört temas noktası vardır ve bunlar hesaplamalarımıza dahil edilebilir. Ancak bu kitabın ruhuna uygun olarak, basit bir analitik çözüme, çok kısa süreli (tam tutulma süresi sıfır olan!), diğer bir deyişle $R = r$ ve $a = 0$ olan bir tutulmaya odaklanacağız. Şimdi, $\alpha = \beta$ olduğundan (92.5) numaralı denklemden hareketle

$$p = \frac{2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}{\pi} \quad (92.10)$$

ve (92.8) numaralı denklemden hareketle,

$$d(t) = 2R - s(t) \quad (92.11)$$

yazabiliriz; burada $s_0 = 2R$ olduğu için

$$d(t) = 2R \frac{t}{T} \quad (92.12)$$

Böylece (92.3) ya da (92.4) numaralı denklemden,

$$\cos \alpha = 1 - \frac{t}{T}; \quad \sin \alpha = \left[2 \frac{t}{T} - \left(\frac{t}{T} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (92.13)$$

yazabilir, buradan da nihayet aşağıdaki ifadeye ulaşabiliriz:

$$\begin{aligned} \frac{L(t)}{L_{\max}} &= 1 - p(t) \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \left\{ \arccos \left(1 - \frac{t}{T} \right) - \left(1 - \frac{t}{T} \right) \left[2 \frac{t}{T} - \left(\frac{t}{T} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (92.14)$$

İlgili $p(t)$ fonksiyonu için keyfi (ancak mantık dışı olmayan) 75 dakikalık T orta nokta değeri, *Şekil 92.3*'te gösterilmiştir (artık

bu, ilk temastan tam tutulmaya kadar olan zamandır). Görüldüğü üzere, $75 \leq t \leq 150$ aralığındaki p grafiği, $t = 75$ çizgisi yakınında simetriktir.

Bu soruda değindiğimiz makalenin yazarları, bu analitik model üzerinden yaptıkları genelleme ile birkaç tutulmadan toplanan verilerin son derece uyumlu olduğunu ortaya koymuşlardır.

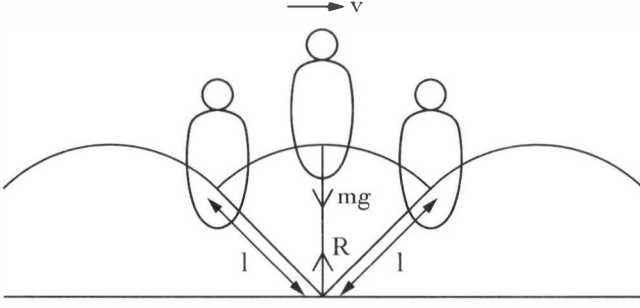


Bitirirken...

Bu kitaptaki sorular, yıllar boyunca yaptığım, bazıları kısa bazıları uzun, çok sayıda yürüyüş esnasında dikkatimi çeken ya da beni meraklandıran şeyler sayesinde ortaya çıktığı için kapanışı özellikle yürüyüş ve bitişlerle ilgili bazı noktalara değinerek yapmanın uygun olduğunu düşünüyorum. Öyleyse, hiç vakit kaybetmeden, gezmekle ilgili bir soruyla son bölümümüze başlayalım!

93. Soru: Yürümek nasıl modellenebilir?

Yürüyüşün sağlığımız için sayısız faydası olduğunu herkes bilir. Her şeyden önce yürüyüş kalbimize iyi gelir. Yakın zamanda yapılmış bir araştırmaya göre, haftada 3 saate kadar (ya da günde 30 dakika) orta hızda (saatte yaklaşık 3 mil) yürüyüş yapmak, hem erkeklerde hem de kadınlarda kalp hastalığı riskini önemli oranda, belki de %40'a kadar düşürebiliyor. Bu, aerobik, hafif koşu ve diğer hareketli egzersizlerin faydası ile karşılaştırılabilir bir orandır. Bununla ilgili olarak yürüyüşün, başka pek çok yararının yanı sıra dolaşım, solunum ve bağışıklık sistemlerini iyileştirmeye, vücut ağırlığını kontrol altında tutmaya, şeker hastalığını önlemeye ve kontrol altında tutmaya yardımcı olduğu bilinmektedir. O hâlde yürüyüşün iyi bir egzersiz olduğu konusunda hepimiz aynı fikirdeyiz. Sabahları erken saatlerde yaptığım yürüyüşlerdeki hızımdan 33. Soru'da söz etmiştim. Bu hız, aşağı yukarı saatte 4,5 mil kadardır ve bu da sabah egzersizlerimi tam olarak hızlı yürüyüş kategorisine sokar. Hızlı yürüyüş nedir? Basitçe ifade edecek olursak, hızlı yürüyüş –bazen güç yürüyüşü, form tutma yürüyüşü, sağlık yürüyüşü, egzersiz yürüyüşü veya uzun adım yürüyüş denildiği de olur– çok hızlı ancak koşmadan yapılan yürüyüştür. Kollar, adımlarla birlikte gövdenin iki yanında hızlıca hareket ettirilir ve bir ayak daima yerde olur. Adımlar, keyif için yapılan yürüyüşlerdeki adımlara kıyasla biraz daha uzun ve ciddi oranda daha hızlıdır. Hızlı yürüyüşçüler, genellikle saatte 3,5 ile 5,5 mil arasında bir hızla yürür. Bu, koşmanın getirdiği eklem zorlayıcı etkiler olmaksızın, vücudun kalori yakma hızını artıran bir tempodur. Ancak yarış yürüyüşçüleri, daha da hızlı yürüyerek saatte 5 ile 9 mil arasında hızla gider, bazı yarış yürüyüşçüleriye bir mili altı dakika gibi kısa bir sürede kat edebilir. Meraklılarına göre, yarış yürüyüşünün amacı, koşmadan ve normal yürüyüşteki yukarı aşağı hareketleri yapmadan vücudu mümkün olduğunca hızlı bir şekilde ileriye götürmektir. Bütün bu muhteşem bilgileri aklımızda tutarak, yürüyüş modelleri geliştirmeden önce gelin bir soru soralım. Bu bir biyomekanik sorusudur: *Hangi hızda yürüyüş koşmaya döner, diğer bir deyişle, ne kadar hızlı yürüyebiliriz?*



Şekil 93.1. Basit bir yürüme modeli [Alexander'dan (1996) alınarak yeniden çizilmiştir.]

BAŞLANGIÇ MODELİ

Aşağıdaki bilgileri basit bir modele (*Bkz. Şekil 93.1*) dayandırarak kullanabiliriz: Vücut, düz bir hat üzerinde v hızında ileriye doğru hareket ederken, vücudun kütle merkezinin bir dizi dairesel yay hareketi yaparak devindiğini varsayalım. Bunların yarıçapı, pivot vazifesi gören bacağın uzunluğu l kadar olsun ve bunun merkezi de yerde, ayağın üzerinde olsun. Kütlesi m olan vücudun ağırlığını dengelemek için Newton'ın ikinci yasasını kullanabiliriz, yolun yürüyüşçü üzerindeki reaksiyonu R olur ve buna karşılık gelen merkezci kuvvet mv^2/l 'dir.

Bu merkezci (santripetal) kuvvet, yürüyüşçünün ağırlığı $W = mg$ tarafından sağlanır ve Newton'ın üçüncü yasasına göre (etki ile tepki eşittir ve zıt yönlerdedir) bu, $R > 0$ 'a hem eşittir hem de onunla zıt yöndedir; $R = 0$ durumunda, koşma meydana gelir. Böylelikle fark,

$$mg - \frac{mv^2}{l} = R \geq 0 \quad (93.1)$$

olur; burada yürüyüş için $R > 0$ ve koşma için $R = 0$ 'dır (çünkü pivot vazifesi gören bacak geçici olarak yerden kesilmiştir; eğer geçici bir durumdan söz etmiyorsak uçuşa geçilmiş demektir!) Bu nedenle yürüyüş için biraz kaba olan şu eşitsizliği elde ederiz:

$$v < v_{\max} = \sqrt{gl} \quad (93.2)$$

(Aslında boyutsuz v^2/gl sayısına [yürüyüş için < 1], adını dalgaların gemilere karşı direncini incelemiş bir Viktorya dönemi mühendisinden alan, *Froude sayısı* denir.)

Burada $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ ve l 0,8 ile 0,9 m aralığında olursa, $v_{\max}$ değerinin 2,8 ila 3,0 m/s (9,2 ila 9,8 feet/sn ya da 6,3 ila 6,7 mil/saat arasında olduğu buluruz; bu, bir yarış yürüyüşü için doğru bir hızdır. Bu model temelinde, basit sarkaç kullanımını “yürüyüş analizi” için bir ilk yaklaşım olarak “gerekçelendirebileceğimize” dikkat edin: Bu modelde pivot vazifesi gören bacağın, dairesel bir yay hareketi ile devindiği varsayıldığı için açısal hız $\omega = v/l$ ve sallanma “periyodu” $T = 2\pi/\omega$ olarak tanımlanabilir. Ancak

$$\omega = \frac{v}{l} < \frac{v_{\max}}{l} = \frac{\sqrt{gl}}{l} = \sqrt{\frac{g}{l}} \equiv \omega_{\max} \quad (93.3)$$

Bu nedenle,

$$T > T_{\min} = \frac{2\pi}{\omega_{\max}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (93.4)$$

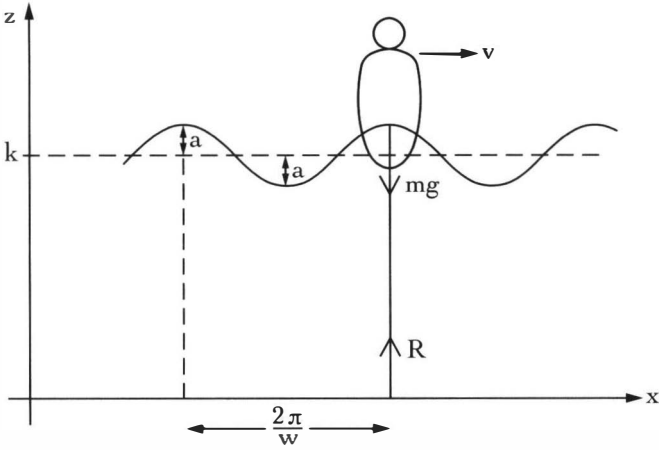
bu formül basit bir sarkacın (burada $T_{\min}$) periyodu olarak bilinir.

GELİŞMİŞ BİR MODEL

Dikkatli izlerseniz, yürüyüş yapan bir kişinin (özellikle) başının tepesinde, düzenli yatay devinimle ilgili küçük genlikli bir sallanım olduğunu fark edersiniz. İnsan yürüyüşü ile ilgili araştırmalar, kişinin kütle merkezine ait $y(x)$ izleğinin, *Şekil 93.2*'de gösterildiği gibi $y = k + a \sin wx$ eğrisi ile modellenebileceğini ortaya koyar. Burada $w = 2\pi/s$ denkleminde, w niceliği ile adım uzunluğu s arasında bir ilişki vardır çünkü bitişik maksimumların, 2π açısal ölçüsü ile birbirinden ayrılması gerekir (ω ve w 'nin farklı nicelikler olduğuna dikkat edin).

Kemerin maksimumlardaki eğrilik yarıçapının ρ olduğunu varsayalım; bu noktalarda açıkça,

$$y'(x) = aw \cos wx = 0 \quad (93.5)$$



Şekil 93.2. Gelişmiş model [Alexander'dan (1996) alınarak yeniden çizilmiştir.]

ve

$$y''(x) = -aw^2 \sin wx = -aw^2 \quad (93.6)$$

Bu nedenle eğrilik, bir maksimumda şöyle olacaktır:

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} = aw^2 \quad (93.7)$$

dolayısıyla

$$\kappa^{-1} = \rho = (aw^2)^{-1} \quad (93.8)$$

Newton'ın ikinci hareket yasasına (Bkz. (93.1)) başvurduğumuzda,

$$mg - R = \frac{mv^2}{\rho} = mav^2 w^2 \quad (93.9)$$

denklemini elde ederiz; böylece yürüyüş için

$$R = mg - mav^2 w^2 > 0 \quad (93.10)$$

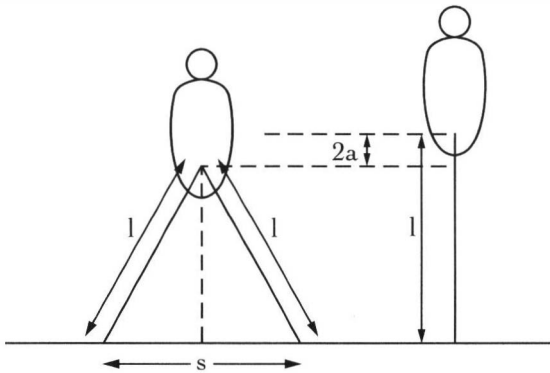
eşitsizliği geçerli olur, bu da

$$v < v_{\max} = \sqrt{\frac{g}{a}} \frac{1}{w} \quad (93.11)$$

anlamına gelir; işte, yürüme hızı v ile ilgili ikinci eşitsizliğimiz. Her ikisini de koruduğumuzda bu eşitsizlikler, hız yürüyüşçülerinin adımlarında gözlemlenenler ile tutarlı sonuçlara işaret edecektir; diğer bir deyişle, yere temas eden bacak için kalçada belirgin bir *geriye doğru dönüş* (rotasyon) olduğunu, bu esnada da kişinin vücudunun diğer tarafının “aşağıya düştüğünü” gösterecektir. Bunların ilki, bacağın küçük bir etkin uzanımı anlamına gelir ve eşitsizlikteki (93.2) l değerinin artırılması, $v_{\max} = \sqrt{gl}$ için de artış demektir. Diğer ifade, a genliğinin azaldığına işaret eder ve yine ikinci eşitsizlik yoluyla $v_{\max}$ için bir artış anlamına gelir.

Maksimumların bir bacak yerde olduğu zaman meydana geldiğini dikkate alarak ve minimumların, vücut ağırlığının her iki ayak arasında eşit olarak taşındığı zaman meydana geldiği şeklinde mantıklı bir varsayımda bulunarak devam edelim. *Şekil 93.3*'teki çizime göre,

$$2a = l - \left(l^2 - \frac{s^2}{4} \right)^{1/2} \quad (93.12)$$



Şekil 93.3. Adım uzunluğunun uygulanması [Alexander'dan (1996) alınarak yeniden çizilmiştir.]

Bu sonucu, (93.11) numaralı denklemdeki eşitsizlikte kullanarak şunu rahatlıkla gösterebiliriz:

$$v^2 < v_{\max}^2 = \frac{g}{\pi^2} \frac{s^2}{2l - (4l^2 - s^2)^{1/2}} = \frac{g}{\pi^2} [2l + (4l^2 - s^2)^{1/2}] \quad (93.13)$$

$s < 2l$ olduğu açıktır ve adım uzunluğu s azaldıkça $v_{\max}$ değeri artacaktır ya da buna denk bir şekilde, maksimum hızın artması hâlinde adım uzunluğunun azalması gerekir; şu aşamada bu belki de sezgisel olarak açıktır. Uygulamada, s değeri l değerinden küçük olduğu için, (93.13)'e göre $v_{\max}$ değeri önemli ölçüde çeşitlilik göstermez; eğer $l = 0,8$ m ve $s = 0,6$ m olursa $v_{\max} \approx 1,8$ m/s olur (hızlı yürüyüş aralığında bulunan, saatte yaklaşık 4 mil) ve aynı l değeri için $s = 0,3$ m olursa $v_{\max}$ hemen hemen aynı olacaktır; her ikisi de önceki kaba modele kıyasla belirgin biçimde daha düşük değerlerdir.

94. Soru: Şu ağacın “uzunluğu” nedir?

Her ne kadar “Ormanda” başlıklı bölüm için daha uygunmuş gibi görünse de bu soruyu burada ele almak istedim çünkü bir tür sona işaret ediyor. Bu soru, annemin eskiden İngiltere’de



94. Soru - İngiltere, Reading'de bir köy yakınlarındaki “fraktal” bir meşe ağacı.
(Daha fazla ayrıntı için 94. Soru'daki tanıma bakınız.)

yaşadığı yerin yakınlarında bulunan ve benim “fraktal meşe” adını verdiğim, en sevdiğim ağaçla ilgili. Bu ağaç, annemin küçük apartman dairesinin bulunduğu köşeyi dönünce, birkaç dakikalık bir yürüme mesafesindeydi. Ne zaman annemi ziyaret etmeye gitsen bu ağacın fotoğrafını çektim; en sevdiğim fotoğrafıysa ağaç “çıplak” olduğu için etkileyici dal yapısının da açıkça görülebildiği bir kış günü çekmiştim. Annemi 2007 yılının Mart ayında kaybettim, bu açıdan benim için bir sona işaret ediyor; artık bu ağacı ziyaret etmek için bir nedenim kalmadı. Bu fotoğrafın renkli baskısı, 2004 yılının Kasım ayında “Günün Yerbilimleri Fotoğrafı” adlı site (EPOD; <http://epod.usra.edu/>) şu açıklamayla yayınlanmıştı:

Bu yaşlı ve heybetli meşe ağacının fotoğrafı, 2003 yılının Mart ayında, İngiltere'nin (Reading yakınlarındaki) Woodcote köyünde çekildi. Yüksekliği yaklaşık 50 fut (15 m) ve ayırt edebildiğim en küçük ince dalları yaklaşık 1/2 inç (1,25 cm) uzunluğunda. Yaklaşık üç büyüklük mertebesi üzerindeki istatistiksel kendine benzerliği nedeniyle, fotoğrafa “Fraktal Meşe” adını verdim. Fraktal esas olarak, daha küçük parçalara bölünebilen ve her bir parçanın, en azından yaklaşık olarak, ana şeklin küçük ölçekli bir kopyası olduğu, parçalı bir geometrik şekildir. Bulut kenarları ve kıyı şeritleri bu tanıma uyan birçok doğa olayından sadece ikisidir.

Bu fotoğrafı incelediğimde, durumu basitleştirmek için her bir dalın, yarıçapları eşit iki küçük dal oluşturacak şekilde çatallandığını varsayıyorum: Eğer $r_1 = r_2$ ise $r_0^3 = r_1^3 + r_2^3$ ifadesi $r_1 = 2^{-1/3} r_0 \approx 0,794 r_0$ ile eşdeğerdir. Başka bir deyişle artık, benim sıradan “meşe ağacımdaki” her bir dalın, daha büyük dalların eşit bir şekilde çatallanmasıyla oluştuğunu düşüneceğiz. Bu gibi çatallanmalar, insanların ve diğer hayvanların damar sistemlerinde de yaygın olduğu için bazı ilginç karşılaştırmalar yapabiliriz. Tipik bir hayvan damar sistemiyle kıyaslayacak olursak, sıradan bir kılcal damarın yarıçapı yaklaşık 5 mikrondur. Bu nedenle, belirli bir ana

damardan (ya da ağaç gövdesinden) bu yarıçapa ulaşmak için kaç çatallanma gerektiğini hesaplamak yararlı olacaktır. Bu tür bir kılcal damar oluşumu için sözgelimi yarıçapı r_0 olan bir şahdamarında belirmesi gereken çatallanma sayısı n aşağıdaki gibi ifade edilir

$$(0,794)^n r_0 = 5 \times 10^{-6} \text{m} \quad (94.1)$$

Köpek gibi bir hayvan söz konusu olduğunda $r_0 \approx 0,5 \text{ cm} = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$ 'dir, dolayısıyla

$$(0,794)^n = 10^{-3}, \text{ yani } n = \frac{-3}{\log_{10}(0,794)} \approx 30 \quad (94.2)$$

Buradan hareketle, 30 çatallanmadan sonra sistemdeki damar sayısının $2^{30} \approx 10^9$ olacağını söyleyebiliriz. Gelin, kendimize geometrik serilerin bazı özelliklerini hatırlatalım. Aşağıdaki $n + 1$ terimli seri

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n$$

bize şu toplamı verecektir:

$$S_n = a \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, \quad r \neq 1 \quad (94.3)$$

(Aslında bu toplam için S_{n+1} yazmamız çok daha doğru olur ancak S_n bize n adet çatallanma olduğunu hatırlatır.) Serideki son terimin, toplama oranı sadece $r^n (r - 1) / (r^{n+1} - 1)$ 'dir; incelediğimiz durumda $r = 2$ 'dir ve yeterince büyük n değerleri için bu oran, yaklaşık $1 / 2^n$ 'dir. Bu değer $n = 30$ için son derecede doğru olduğu açıktır. Bu yüzden, son çatallanma bu sayının yarısı kadar damar olduğu sonucunu, 5×10^8 'i verir; bu da literatürdeki $1,2 \times 10^9$ sayısından çok uzak değildir (Bkz. Rosen). Rosen'in belirttiği gibi, son çatallanmadaki damarlar ile önceki (29. hatta 28. çatallanma gibi) birçok çatallanmayı ayırt etmenin muhtemelen zor olduğu, gözlem yoluyla bir kez anlaşıldıktan sonra bu yakınlık daha da çarpıcı olur.

Gelin şimdi dallanma sisteminin toplam *uzunluğunu* hesaplamaya çalışalım. Fazla fizyolojik bilgiye sahip olmadığımızı göz önünde bulunduralım ve “çalakalem” hesaplamanın ruhuna uygun olarak, gövdenin (ya da şahdamarının) uzunluğunun L_0 olduğunu, her çatallanmadan (k) iki kat daha fazla dal çıktığını, her dalın $L_k = \alpha L_{k-1}$ uzunluğunda olduğunu düşünelim; burada $0 < \alpha < 1$ olduğu varsayıyoruz. Buna göre n sayıda çatallanmadan sonra sistemin toplam uzunluğu aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{aligned} L_n &= L_0 + 2\alpha L_0 + (2)^2\alpha L_1 + (2)^3\alpha L_2 + \dots + 2^n\alpha L_{n-1} \\ &= L_0 [1 + 2\alpha + (2\alpha)^2 + (2\alpha)^3 + \dots + (2\alpha)^n] \\ &= L_0 \frac{(2\alpha)^{n+1} - 1}{2\alpha - 1}, \quad \alpha \neq \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (94.4)$$

Tahminime göre en ince dal, yaklaşık 1 mm *yarıçapında* olmalı ve $r_0 \approx 1$ m tahminiyle birlikte, (94.1) numaralı denklemden

$$(0,794)^n r_0 = 10^{-3} \text{ m},$$

diğer bir deyişle,

$$n = \frac{-3}{\log_{10}(0,794)} \approx 30 \quad (94.5)$$

elde ederiz; ilginç bir şekilde karşımızda, bir köpeğin damar sistemindeki çatallanma ile aynı sayıda olan bir çatallanma var; tabii ağaç hakkındaki gözlemlerim, kabul edilebilir bir doğruluk payı taşıyorsa. Uzunluk hesabına geri dönecek olursak, gövde için $L_0 = 3$ m ve $\alpha = 2/3$ değerlerini seçersek,

$$L_0 = 3 \frac{(4/3)^{31} - 1}{1/3} \text{ m} \approx 7 \times 10^4 \text{ m} = 70 \text{ km} \quad (94.6)$$

buna karşın $\alpha = 7/8$ durumunda şu sonucu elde ederiz:

$$L_0 = 3 \frac{(7/4)^{31} - 1}{3/4} \text{ m} \approx 10^8 \text{ m} = 10^5 \text{ km} \quad (94.7)$$

Bu da epey bir ağaç olurdu!

95. Soru: Bazen günbatımında ya da hemen ardından gördüğüm “ışınlar” nedir?

Genellikle dönüşümlü aydınlık ve karanlık bantları şeklinde seyreden bu ışınlar *alacakaranlık ışınları* (krepüsküler ışınlar) ya da sadece basitçe, güneş huzmeleri olarak bilinir. “Krepüsküler” kelimesi Latince alacakaranlık anlamına gelen *crepusculum* sözcüğünden türetilmiştir. Karanlık bantlar bulutların gölgeleridir, aydınlık bantlar da bu gölgelerle kontrast oluşturan güneş ışığıdır.

Alacakaranlık ışınlarının en sık, güneşin batmasından sonra bile, güneşin bulunduğu yerden yayıldıkları görülür ancak aşağıda söz edeceğim bir akşam, bunların sadece *doğudaki* uzanımları görünüyordu; bunlar *anti alacakaranlık ışınları* olarak bilinir. Anti solar (güneşin tam aksi yönündeki) noktada birleşir gibi görünse-

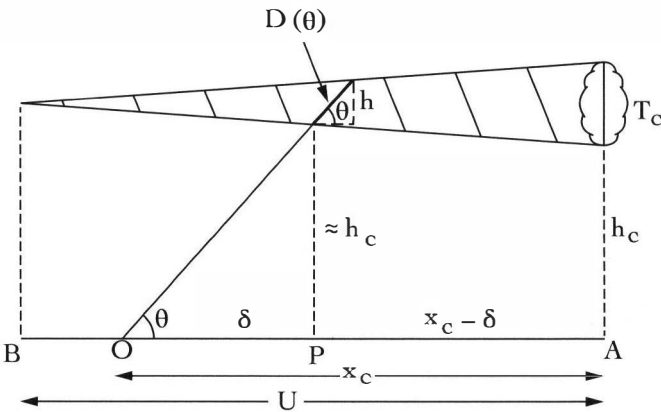


95. Soru - Alacakaranlık ışınları. Karanlık bantlar, bulutların (kimizaman da dağların) gökyüzüne yansımış gölgeleridir. Aydınlık bantlarsa bu gölgelerle kontrast oluşturan güneş ışığıdır ve ışığı saçılıma uğratan atmosferik parçacıklar yoluyla gözlemciye görünür.

ler de paralel oldukları için bu sadece perspektifin etkisiyle böyle görünür. Bu bakımdan, 85. Soru'da ele aldığımız dağ gölgeleri ile pek çok ortak yönleri vardır; gerçekten de dağ gölgeleri, bir çeşit anti alacakaranlık ışınları örneği olarak düşünülebilir.

Eğer ışın, bulutların arasındaki bir boşluktan geçerse bir aydınlık görüntüsü verir; bir bulut gökyüzüne bir gölge yansıtırsa “ışın” da kontrast nedeniyle karanlık bir görüntü oluşturur. Her durumda, ışının bir gözlemci tarafından görülebilmesi için, Dave Lynch'in de belirttiği gibi (Bkz. Kaynakça) saçılma neden olan toz, yağmur, kar ve hatta sadece hava molekülleri gibi parçacıklara ihtiyaç vardır. Bu ışınlar arasında bazı ortak özellikler olduğunu saptayan Lynch, ışınların görünürlüğüne ilişkin birçok özelliğin, saçılım mekanizmasından bağımsız olduğunu ve gölgelerin geometrisiyle, özellikle tam gölge konisinden geçen görüş hattı uzaklığı D ile açıkla- nabileceğini belirtir (Bkz. 85. Soru). Dikkatli okurların, bir kısmını fark etmiş olabileceği bu özellikler arasında şunlar yer alır:

- (i) Işınlar en sık Güneş'in alçak ve havanın açık olduğu zamanlarda görülür.
- (ii) En yüksek ışın görünürlüğü (veya kontrastı) Güneş'in 15° içerisinde ve anti solar noktada olur ve ikinci durumda



Şekil 95.1. Bulut konumunun ve bulutun tam gölge konisinin basit geometrisi

bu noktadan itibaren birkaç derece içinde maksimum görünürlüğe ulaşır.

(iii) Genellikle anti alacakaranlık ışınları, ya tam tepede ya da anti solar noktanın yakınında bulunan büyük bulutlarla ilintilidir; anti solar noktanın yakınında olmadıkça, nadiren küçük bulutlarla ilgilidirler.

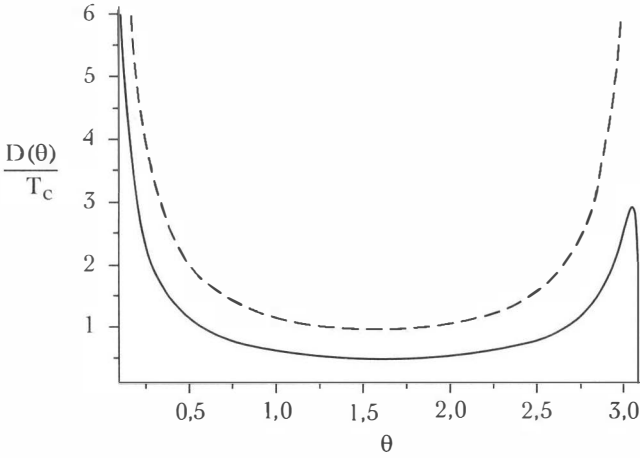
(iv) Maksimum *yeğnilik* kontrastı Güneş'in yakınında, maksimum *renk* kontrastı anti solar noktanın yakınında meydana gelir.

Bir bulutun tam gölge konisinin yaklaşık uzunluğu olan U 'yu hesaplamak için 36. Soru'daki formülü kullanabiliriz. Aşağıda, T_c bulutun dikey kalınlığıdır ve tabanı h_c yüksekliğindedir; x_c bulutun gözlemciye olan yatay uzaklığıdır. Bu formülü, *Şekil 95.1*'deki simgelere göre yeniden yazdığımızda,

$$U \approx \frac{T_c s}{2R} \quad (95.1)$$

olduğunu buluruz; burada $s \approx 9,3 \times 10^7$ mil, Dünya–Güneş arasındaki yaklaşık mesafedir ve $R \approx 4,3 \times 10^5$ mil Güneş'in yarıçapıdır. Öyleyse, $U \approx 100T_c$ mil olacağından 1 mil yükseklikteki büyük bir bulutun gölge uzunluğu 100 milden daha fazladır. Bu nedenle $U:T_c$ oranı yaklaşık olarak yüzdür, tam gölge konisinin sivrililiği küçüktür; dolayısıyla *Şekil 95.1*'de de gördüğümüz gibi $h_c \approx \delta \tan \theta$ 'dır (burada δ değeri, OP uzaklığıdır). Aynı sebeple, tam gölge konisinin dikey kalınlığı, o noktadan $h \approx D(\theta) \sin \theta$ olur; burada $D(\theta)$ mesafesi, yerden ölçülen, gözlemcinin görüş açısı θ 'nın bir fonksiyonu olarak ışının bir kontrast ölçüsüdür. Benzer üçgenlerle,

$$\frac{h}{T_c} \approx \frac{U - (x_c - \delta)}{U} = 1 - \frac{x_c - \delta}{U}$$



Şekil 95.2. İki veri seti için (x_c, h_c, u) için $D(\theta) / T_c$ grafikleri

Böylece,

$$D(\theta) \approx h \csc \theta \approx T_c \left(1 - \frac{x_c - \delta}{U} \right) \csc \theta = T_c \left(1 - \frac{x_c - h_c \cot \theta}{U} \right) \csc \theta \quad (95.2)$$

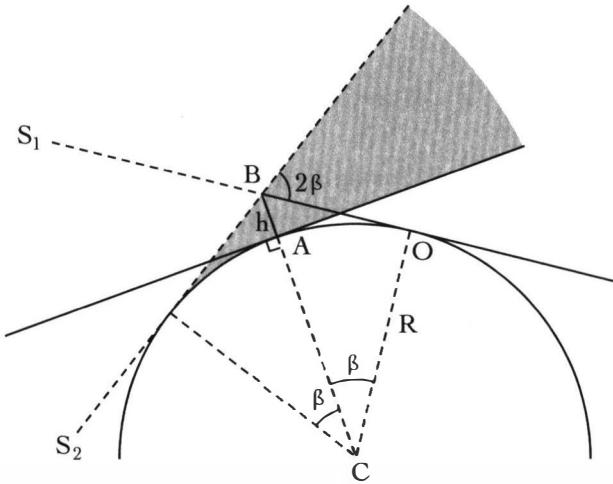
Bu formül, Güneş'in ufuk çizgisine yakın olduğu durum için, diğer bir deyişle günbatımı (ya da gün doğumu) için türetilmiştir. Şekil 95.2'de $D(\theta)$ fonksiyonu, (95.2) numaralı denkleme göre gösterilmiştir.

Üstteki (kesikli) eğri, mil birimi cinsinden, keyfi bir şekilde seçilmiş $x_c = 10$, $h_c = 2$ ve $U = 200$ değerleri içindir. Alttaki (kesiksiz) eğri içinse değerler $x_c = 70$, $h_c = 3$ ve $U = 140'$ dir. θ açısı radyan cinsinden gösterilmiştir. $\theta = 2\pi$ yakınında eğriler, keskin bir biçimde aşağıya doğru döner. Bunun sebebi, θ aşağıdan π' ye yaklaşırken $D(\theta)$ 'in özel bir davranış içine girmesidir; bu limitte $\csc \theta \rightarrow \infty$ ve $\cot \theta \rightarrow -\infty$ olur. Elbette $\theta \rightarrow 0$ 'a pozitif değerler içerisinde yaklaşırken buna karşılık gelen (pozitif) tekil davranış da vardır. Bu yaklaştırım seviyesine değin her iki durum da yukarıda belirtilen (ii) – (iv) özellikleri ile tutarlılık sergiler.

Ancak bu kitabın sondan bir önceki sorusu niçin alacakaranlık ışınlarıyla ilgilenen bu sorudur? Buna “alacakaranlık yüzün-

den" yanıtını vereceğim... Bu soruyu buraya, kitabın son sayfalarına sakladım çünkü sen, sevgili okur, bu kitabın alacakaranlığında-sın! Ancak hiçbir mecazın mükemmel olmadığını göstermek bakımından hatırlatmak isterim; bu ışınlar gündüz de sık sık görülmele beraber ışık ile gölge arasındaki kontrast, daha önce de belirttiğimiz üzere en iyi gün doğumunda veya günbatımında anlaşılır. Soruyu, kişisel bir örnek vererek bitirmek isterim. Haziran ayı ortasında, eşimle birlikte Yellowstone Ulusal Parkı'nda tatil yaparken, güçlü teleskopları ve dürbünleriyle yolun kenarından uzaktaki vahşi yaşamı (kurtları ve ayları) gözlemleyen yaklaşık yirmi kişilik bir gruba katılmıştık. Günbatımından hemen sonraydı, aniden yukarıya, doğu yönünde gökyüzüne baktım ve muhteşem anti alacakaranlık ışınlarıyla karşılaştım. Manzarayı gruptakilere de gösterdiğimde çoğu, yaptıklarına ara verip bu şahane gösterinin tadını çıkarmıştı!

96. Soru: Alacakaranlıktan yararlanarak atmosferin yüksekliği nasıl belirlenebilir?



Şekil 96.1. Alacakaranlık hesaplaması için geometri

Götz Hoeppe, *Why the Sky is Blue (Gökyüzü Neden Mavidir?)* adlı kitabında, 11. yüzyıl matematikçisi Ebu Abdullah Muhammed ibn Muadh Al Jayyani'nin alacakaranlıkta, Güneş'in ufuk çizgisi altına "dalma açısı"nın, atmosfer yüksekliğini belirlemek için kullanılabileceğini ortaya koyduğundan söz eder. Elbette atmosferin aniden sona ermediğini biliyoruz ve aşağıda açıklandığı üzere, çağımızda bu yüksekliği belirlemenin çok sayıda yöntemi vardır. Al Jayyani'nin, alacakaranlığın süresini esas alarak, *Şekil 96.1'* de 2β olarak gösterilen bu açı için bulduğu değer 18° 'ydi.

O noktasına bulunan bir gözlemci için Güneş'in ufuk çizgisinin altına inmesi (şekildeki S_1 konumu) ile birlikte akşam alacakaranlığı da bastırmış olur ve Güneş battıkça, giderek daha yüksek atmosfer tabakaları Dünya'nın gölgesine girer. Sonunda, Güneş S_2 konumuna geldiğinde atmosferin "tepesi" (B noktası) gölgede kalır ve bu, astronomik alacakaranlığın bitip gecenin başladığını gösterir. Şeklimizde de açıkça görüldüğü gibi Dünya'nın yarıçapı CO , R ise,

$$\cos \beta = \frac{R}{R + h} \quad (96.1)$$

buradan hareketle,

$$h = R(\sec \beta - 1) \quad (96.2)$$

$R \approx 6370$ km ve $\beta = 9^\circ$ (ya da $\pi/20$ radyan) değerlerinden yararlandığımızda (96.2) numaralı denklem, h için yaklaşık 79 km (49 mil) sonucunu verir. Bu sonuç, bizi atmosfer yüksekliğinin iki farklı tanımına ulaştırır (başka tanımlar da mevcuttur ancak sorumuzla ilgili olan bu ikisidir). NASA'nın tanımlamasına göre "dış uzay" 50 mil yükseklikte başlar; buna karşın uluslararası tanım, dış uzayı 100 km (62 mil) yükseklikten başlatır. Sonuçta, Al Jayyani'nin bulduğu β tahmini, doğru bir R değeriyle bir araya geldiğinde, bizler de son derece mantıklı bir h değerine kavuşuruz!



Ek-1

Matematik terimleri ve fonksiyonlarla ilgili
küçük bir terimler sözlüğü

Küremsi (sferoit), yayvan elipsoit

Bir elipsin, sahip olduğu asal eksenlerden biri etrafında döndürülmesi sonucu elde edilen üç boyutlu yüzeye *küremsi (sferoit)* denir. Elipsin, büyük eksen etrafında döndürülmesi durumunda yüzey, bir yayvan elipsoit olacaktır (bu, bir rugby topuna ya da Amerikan futbolunda kullanılan topa benzer.)

Hiperbolik tanjant fonksiyonu ($\tanh x$)

Bu fonksiyon, aşağıdaki gibi tanımlanır (*Bkz. Şekil G.1*):

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (\text{A1.1})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1 \quad (\text{A1.2})$$

Ters sinüs ve ters kosinüs fonksiyonları

Bu fonksiyonlar, aşağıdaki gibi tanımlanır (*Bkz. Şekil G.2*):

$$y \in \left[-\left(\frac{\pi}{2}\right), \frac{\pi}{2} \right] \text{ için, } x = \sin y \text{ ise } y = \arcsin x, \text{ ve} \quad (\text{A1.3})$$

$$y \in [0, \pi] \text{ durumunda, } x = \cos y \text{ ise } y = \arccos x \quad (\text{A1.4})$$

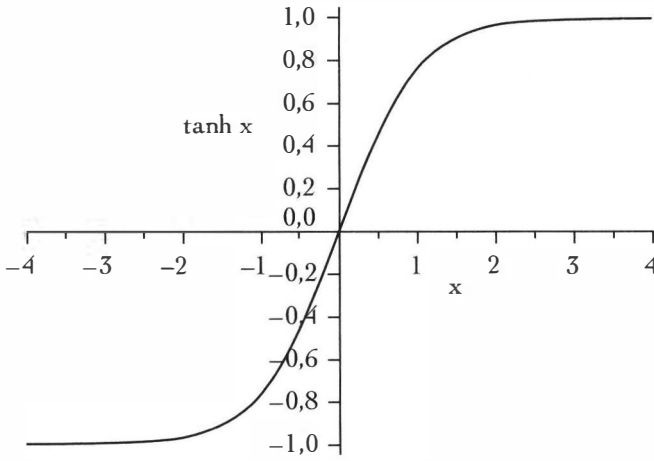
Bir başka seçenекse

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad |x| < 1 \quad (\text{A1.5})$$

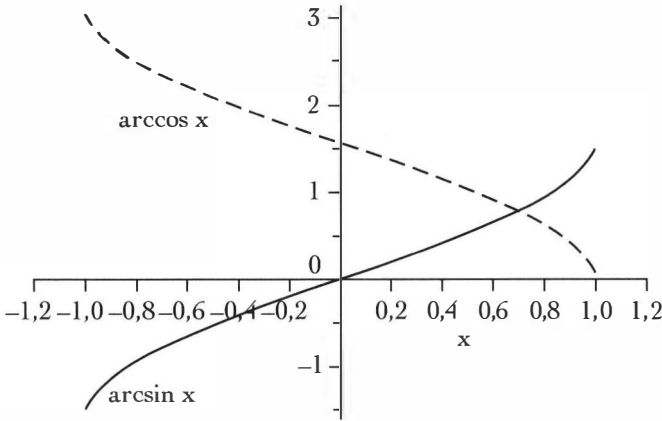
Zira

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (\text{A1.6})$$

bunu, $\arccos x$ 'e karşılık gelen bir integral formu izleyecektir.



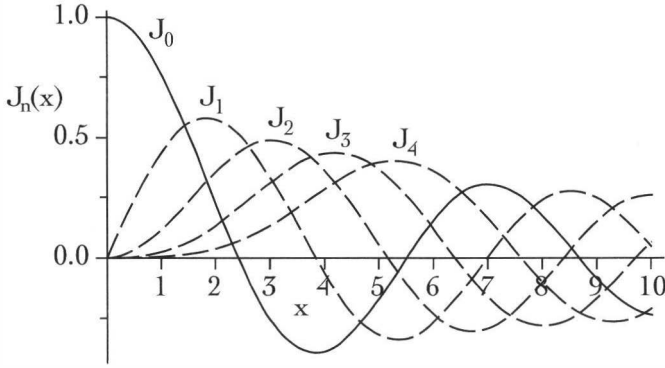
Şekil G.1. $\tanh x$



Şekil G.2. $\arcsin x$ (devamlı çizgi) ve $\arccos x$ (kesikli çizgi)

Birinci mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu

Birinci mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu $J_1(x)$, bu kitapta geçen tek Bessel fonksiyonudur) tıpkı tüm Bessel fonksiyonları gibi, sonsuz bir dizi olarak ifade edilebilir ancak



Şekil G.3. Birinci tür Bessel fonksiyonlarının grafiği $J_n(x) = 0, 1, 2, 3, 4$

91. Soru ile ilgili olarak akılda tutmamız gereken tek şey, büyük x değerleri için $J_1(x)$ 'in biraz, sönümlü kosinüs fonksiyonu gibi hareket edeceğidir. Özellikle de $x \rightarrow \infty$ olduğundan,

$$J_1(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) \quad (A1.7)$$

buradaki “ $\sim$ ” işareti, amacımız bakımından, “gibi hareket eder” şeklinde yorumlanabilir. 91. Soru'daki grafiğin, Şekil G.3'teki J_1 fonksiyonuna pek benzememesinin nedeni, bunun temelde bir $[2 J_1(x)/x]^2$ grafiği olmasıdır; bu nedenle daha küçük x değerleri için özellikle büyüktür ve kare üs, bu etkiyi daha da artırır. Üstelik x , koronal örüntünün merkezinden alınan açının bir ölçümü olduğu için grafik $x = 0$ civarında simetriktir. Yine de J_1 fonksiyonuyla ilişkili salınım davranışı, açıkça görünür durumdadır. Kıyaslama için Şekil G.3'e 0, 2, 3 ve 4. mertebeden Bessel fonksiyonları da dahil edilmiştir.



Ek-2

1 – 15. Sorular'ın cevapları

1. Soru: Tek bir parlak gökkuşağına (birincil yaya) bakıyorsunuz. Yayın en tepesinde hangi renk vardır?

Cevap: Kırmızı. Kırılıp damlanın içinde yansıması nedeniyle mor ışık, kırmızı ışıktan daha fazla sapmaya uğrar. Bunun sonucunda, gözlemcinin de fark edeceği üzere, gökkuşağının kırmızı bölümü (açısal anlamda) Güneş'e daha yakın görünür.

2. Soru: Sizce tipik bir gökkuşağında kaç renk bulunur?

Cevap: Doğrusu, yedi değil! KTSYMLM ya da MaLıM YaS-TıK gibi kısaltmalar gökkuşağı renklerini hatırlamaya yardımcı olsa da gerçekte, en azından matematiksel anlamda, sonsuz sayıda "renk" söz konusudur – zira görünür tayf, bir süremdir. Elbette, algısal nedenlere bağlı olarak, göz/beyin bağlantımızın sahip olduğu renk çözünürlüğü, sonsuz değildir. Bu nedenle algıladığımız renkleri, ayrı ayrı renkler olarak yorumlama eğilimi gösteririz. Aranızda *çivit mavisini* gören var mı?

3. Soru: Çifte gökkuşağı gördüğünüzü hayal edin; üst kemerin (ikincil yayın) en tepesindeki renk hangisidir?

Cevap: Mor. Bunun nedeni damlanın içindeki ek yansımanın, birincil yaya kıyasla renk sıralamasını tersine çevirmesidir.

4. Soru: İki yay arasında kalan kısım, genellikle daha mı karanlık, daha mı aydınlık yoksa gökyüzüyle aynı mıdır?

Cevap: Genellikle daha karanlıktır çünkü iki yay arasında kalan yağmur damlaları, ışığı kırıp gözlemciye yansıtmaz. *Aleksander'ın koyu kuşağı* denen bu açısal bölge, yayların özellikle açık ve parlak renkli olduğu durumlarda, kontrast sayesinde kolaylıkla fark edilebilir.

5. Soru: Peki ya birincil yayın altındaki kısım?

Cevap: Gökkuşağına neden olan damlalardan gelen ışık, bakan

kişinin gözünde saçıldığı için bu bölge, genellikle daha açık renkli ve aydınlıktır. Gökkuşağının kendisi, ışığın dar bir açısal bölgede yoğunlaşması sonucu meydana gelir; bu bölge dışında kalan ışık, yayın hem altında hem de üstündeki yönlerde saçılım gösterir.

6. Soru: Birincil yayla yakından ilişkilendirilebilecek başka bir şey gördüğünüz oldu mu hiç?

Cevap: Güzel soru, evet gördüm! Bazen birincil yayın yukarı kısımlarının altında, pastel renkli iki ya da daha fazla sa-
çağa rastlanabilir. Newton'ın da Descartes'ın da gökku-
şağı kuramları bu görüntüyü açıklamakta yetersiz kaldı-
ğı için bu saçaklar 18. yüzyılın ortalarından itibaren bi-
lim dünyasında hayli merak uyandırmıştır. Aslında bun-
lar, fizikte girişim olarak adlandırılan, ışığın dalga doğa-
sının bir sonucudur ve gökkuşağının ayrılmaz bir parça-
sıdır. Hatta *The Rainbow Bridge (Gökkuşağı Köprüsü)*
kitabındaki güzel bir ifadede, Lee ve Fraser şöyle der:
“Süpernümerer (artı) gökkuşakları, 19. yüzyılda hâkim
bir konumda bulunacak, ışığın dalga kuramının doğma-
sına yardımcı olan ebelerdir.”

7. Soru: Güneşli bir günde gölgeniz kesin hatlara mı sahiptir, yavaş yavaş mı görünür yoksa ikisinin arasında bir yerde midir? Mümkün olduğunca net yanıtlamaya çalışın.

Cevap: Gölgemin, gövdemin yakınında olan kısımları keskin hatlara sahip olsa da başım biraz bulanık (!) görünebilir. Bu durum, özellikle Güneş'in çok yüksekte olmadığı ve ağaçların yaprak döktüğü sonbahar ve kış aylarında, ağaçların gölgelerinde iyice fark edilebilir. Görüntüdeki bu “bulanıklık” hâli yarı (ya da kısmi) gölge konisiyle ilgilidir ve Güneş'in geniş bir ışık kaynağı olmasının bir sonucudur (gölgelerle ilgili daha fazla ayrıntı için bkz. 36. ve 85. Soru).

8. Soru: Küçük bir kümebulut orijinal şeklini (bulutu ilk fark ettiğimiz andaki şeklini) genellikle ne kadar süre korur?

Cevap: Atmosferik koşullar çok fazla değişebildiği için kesin bir yanıt vermenin zor olduğu bir soru bu. Ancak gözlemlerime dayanarak, şeklin genellikle beş dakikalık bir süre içinde fark edilir şekilde değişeceğini söyleyebilirim.

9. Soru: (i) Şiddetli bir sağanakta ve (ii) hava sisliyen oluşan su damlacıklarının boyutunu (çapını) tahmin edin.

Cevap: (i) 1–2 mm; (ii) 0,01–0,1 mm. Bunlar, yağmurlu ya da sisli havada kişinin gözlük camında biriken su zerreciklerinden hareketle kabaca tahmin edilebilir (tabii gözlemcimizin gözlük kullandığını varsayıyoruz!)

10. Soru: En yakın büyüklük kertesine göre, tırnağınıza kaç ışık dalgası sığar?

Cevap: Bir tırnak, yaklaşık 1 cm ebadındadır ve görünür tayf 400 nm (mor) ile 700 nm (kırmızı) arasında seyreden (λ) dalga boyunda dalgalara sahiptir. Bu nedenle, hesabı basit tutmak adına $\lambda \approx 500$ nm şeklinde tipik bir değer belirlersek ya da 5×10^{-5} dersek, 10^{-5} kertesinden bu tür dalgaların tırnağımızı kaplayabileceğini söyleyebiliriz.

11. Soru: İnsanın konuşma becerisine özgü, tipik bir ses dalgası ne kadar uzunluktadır?

Cevap: Bu soruyu, 10. Soru ile doğrudan bir karşılaştırma yapabilmek için hazırladım. İnsan sesinin olağan frekans aralığı (ν) yaklaşık 500 ila 2500 Hz'dir ve işitme aralığından çok daha dardır. Eğer sesin oda sıcaklığındaki hızı, c ise ($c \approx 330$ m/s) o hâlde $\lambda = c/\nu$ olduğundan, dalga boyu 10 cm ile 1 cm arasında seyredecek denli kısa olacaktır (burada en yakın büyüklük kertesine göre kabaca bir hesap yapıyoruz). İnsanın işitme aralığının buna karşılık gelen dalga boyu yaklaşık 1 cm ile 10 cm arasındadır.

12. Soru: Dünya'nın (doğu yönündeki) dönüş hızı ekvator çizgisinde ne kadardır? Peki ya kutuplarda?

Cevap: Tanım gereği, Dünya kendi etrafındaki dönüşünü bir günde tamamladığına göre, hızı v de günde bir çevre olacaktır; diğer bir deyişle, günde $v = 2\pi R$ (R , Dünya'nın yarıçapıdır) ya da $v \approx (6 \times 4000) / 24 = 1000$ mil/saat ya da ekvator çizgisinde yaklaşık 1600 km/saattir. Kutuplardaysa sıfırdır!

13. Soru: Dünya'nın dönüş hızı, hangi enlem üzerinde, bir önceki soruya ait iki cevabın aritmetik ortalamasını verir?

Cevap: $60^\circ K$ (ya da G) açısındaki θ enleminde. Zira Dünya'nın geçerli "yarıçapı" $R \cos\theta = R/2$ 'dir. (Burada birim çember trigonometrisini de düşünebiliriz.)

14. Soru: Kumsaldan denize doğru bakarken, ufuk çizgisi ne kadar uzaklıktadır?

Cevap: Burada okuru sınıyorum; cevabı 39. Soru'dan bilmelisiniz! Atmosferik kırılmanın etkilerini yok saydığımızda, 39. Soru'daki basit geometrik tartışmanın da gösterdiği gibi, gözlemcinin gözü yerden h fut yukarıdaysa, ufuk çizgisine olan d mesafenin mil cinsinden ifadesi de, güzel bir yaklaşımla, $d \approx \sqrt{1,5h}$ olur. Ayrıca $h = 6$ ft ise, $d \approx 3$ mil, eğer $h = 150$ ft ise $d \approx 15$ mil olacağını da görmüştük. Atmosferik kırılmayı hesaba katmamız durumunda, bir gözlemcinin yere yakın noktada göreceği mesafe yaklaşık %9 oranında artacaktır.

15. Soru: Gün ortasında, birbirine benzeyen ancak birinin diğerinden biraz daha uzakta olduğu iki tepeye baktığınızı varsayalım. Bu tepelerin hangisi biraz daha koyu renkli görünür? (i) Daha yakın olan mı? (ii) Daha uzak olan mı? (iii) İkisi de aynı koyulukta mı görünür? Yoksa (iv) güneş gözlüklerini çıkarsana şaşkın!

Cevap: (i) Daha yakın olan çünkü (gündüz gökyüzünün mavi görünmesini sağlayan) Rayleigh saçılımının etkileri, daha çok tepeler için çok daha azdır. Bu da, gözlemcinin görüş çizgisinde daha az hava olacağından, saçılma derecesinin yakındaki tepeler için çok daha küçük olmasından ileri gelir.



Ek-3

Newton'ın soğuma yasası

83. Soru'daki bir “ağaç tümörünün” nasıl ortaya çıktığını açıklayan basit bir denklem oluşturmuştuk. Bu denklemle başka pek çok bağlamda karşılaşmak mümkündür ve bunların çoğu eldeki kitabın ilgili alanın dışında kalır. Ancak burada bu bağlamlardan özellikle birine değinebiliriz: Bu kitabı yazarken içtiğim fincan fincan kahvenin nasıl soğuduğu meselesi! Burada *Newton'ın soğuma yasası* ile ilgileniyoruz: Bir nesnenin $T(t)$ ısısı, kendisi ile ortam, T_s , arasındaki ısı farkıyla orantılı bir şekilde değişir. $T'(t)$ değişim oranının bir sürekli fonksiyon olduğunu (diğer bir deyişle $T(t)$ 'nin, zamanın (t) türevlenebilir bir fonksiyonu olduğunu) düşünmek tamamıyla akla yatkındır ve nesneden çevresine doğru sıcaklık kazancı ya da kaybı göz ardı edilebileceğinden, T_s sabittir. Mutfak masasında duran bir fincan sıcak kahve (ya da ısısı sabitlenmiş bir fırında bekleyen bir hindi) örneğinde de durum budur. $T(t) = T_0$ olarak tanımlıyoruz.

Bu durumun

$$\frac{dT}{dt} = -K(T - T_s) \quad (\text{A3.1})$$

şeklindeki matematiksel ifadesinde K , orantısallığın bir pozitif sabitidir. Neden pozitif? Pekâlâ, bir düşünelim: Eğer nesnemiz, çevresinden *daha sıcaksa* ($T > T_s$) bu küçük denklemin sağ tarafı $K(T - T_s) < 0$ olacak, dolayısıyla nesne, beklenildiği gibi soğuyacaktır. Eğer nesne, çevresinden *daha soğuksa* ($T < T_s$) bu durumda denklemin sağ tarafı, ısıнын zaman içinde *arttığını* gösterecek şekilde, pozitif olacaktır. Öyleyse aynı denklem, her iki olasılığı da açıklamaktadır, işte *bu* güzel! Söz konusu denklem ayrılabilir olduğundan, aşağıdaki gibi rahatlıkla integral alabiliriz:

$$\int \frac{dT}{T - T_s} = -K \int dt$$

yani, $\ln |T - T_s| = -Kt + \ln D \quad (\text{A3.2})$

bu denkleme $t = 0$ yerleştirildiğinde $D = |T_0 - T_s| > 0$ olduğunu görürüz. Bu nedenle,

$$|T - T_s| = |T_0 - T_s| e^{-Kt} \quad (\text{A3.3})$$

Önce nesnenin soğuduğunu düşünelim; dolayısıyla tüm sınırlı zamanlar için $(T_0 \geq T > T_s)$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} T = T_s$. Bu durumda (A3.3), T_s 'ye doğru üstel bozunmaya karşılık gelecek şekilde

$$T = T_s + (T_0 - T_s)e^{-Kt} \quad (\text{A3.4})$$

hâlini alır. Eğer nesnenin sıcaklığı artıyorsa önceden olduğu gibi $T_s > T \geq T_0$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} T = T_s$ olur. Kolaylıkla görülebileceği üzere, (A3.4) numaralı denklem geçerliliğini korur.

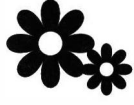
Bir kısa yol: Eğer (A3.1) numaralı denklemden, değişkendeki farklılaşmayı $\theta = T - T_s$ yaparsak, elde edeceğimiz

$$\frac{d\theta}{dt} = -K\theta \quad (\text{A3.5})$$

denkleminin çözümü

$$\theta = \theta_0 e^{-Kt} \quad (\text{A3.6})$$

şeklinde olacaktır ve başlangıçtaki T değişkeni cinsinden bu denklem (A3.4) numaralı denklemin ta kendisidir. Peki, bunu neden daha önce söylemedim? Söyleseydim, çözüm üzerinde düşünürken bu denli eğlenceli vakit geçirmezdik, öyle değil mi? Haydi şimdi geri dönüp 83. Soru'ya tekrar bakın!



Ek-4

Doğadaki diğer matematiksel örüntüler

Aşağıda, dikkatli bir gözlemcinin bir “doğa yürüyüşü” sırasında karşılaşılabileceği örüntülerin, elbette sadece kısmi bir listesi var. Tabii bu örüntülerden bazıları, kitabın önceki bölümlerinde ele alındı. Doğadaki (yaklaşık) iki boyutlu basit geometrik şekillerden bazıları şunlardır:

- Havuz veya su birikintileri üzerindeki dalgalar daire şeklinde yayılır.
 - Güneş'in etrafında sıklıkla görülebilen buz kristali haleleri genellikle daireseldir.
 - Gökkuşağı dairesel yay şeklindedir.
 - Ağaç gövdelerinde bulunan yaş halkaları neredeyse daireseldir.
- Ancak başka pek çok dairesel olmayan ve düzlemsel olmayan örüntü de vardır:

- Altıgenler: Kar taneleri genellikle altıgen şeklinde bir simetriye sahiptir.
- Çam kozalakları, ayçiçekleri ve papatyalar (başka çiçeklerin yanı sıra) ünlü Fibonacci dizisi ile ilişkilendirilen sarmal örüntülere sahiptir.
- Havuzlar, su birikintileri ve göller (gözlemcinin konumuna bağlı olarak) yaklaşık bir yansıma simetrisi manzarası sunar.
- Pek çok meyvenin enkesit alanında da ilginç simetri örnekleriyle karşılaşırız.
- Örümcek ağları çokgen, radyal ve spiral benzeri görüntüler sunar.
- Uzun ve eğilip bükülebilen otların parabolik bir şekli vardır.
- Denizyıldızı, beşgen simetrisine sahiptir.
- “Gökkuşağı” ışığını, gözlemcinin gözüne görünecek şekilde saçan yağmur damlaları, tepe noktası göz hizasında olan koniler şeklinde yayılır.
- Bulut örüntüleri, çamur çatlakları ve ağaç gövdelerindeki çatlaklar, karşımıza çokgen örüntüler çıkarabilir.
- Bulutlar, belirgin dalga boylarına sahip ve “dalga görüntüsü” veren yapılar oluşturabilir; tıpkı süratle akan bir nehirdeki taşların etrafında oluşan küçük dalgacıklar gibi.

- Üç boyutlularda, salyangoz kabukları ya da pek çok deniz kabuğu ve kıvrık yapraklar, sarmal şeklinde, ağaç kütükleri yaklaşık silindir biçimindedir.

Bu örnekler ışığında, çok basit bir düzeyde bile (hatta özellikle basit bir düzeyde), benzer örüntülerle ilgili pedagojik değer taşıyan pek çok matematiksel inceleme geliştirilebilir, örneğin, tek bir değişken için kestirim, ölçüm, geometri, fonksiyonlar, cebir, trigonometri ve analiz hesaplamaları yapılabilir. Temel geometri bilgisi düzeyinde ele alınabilecek bazı basit örnekler şunlardır:

- Benzer üçgenlerin ve basit orantının kullanımı.
- Ağaçların boylarını tahmin etmek için yararlanılacak bir tangent tablosu.
- Erişilmez uzaklıktaki yatay mesafelerin ölçümü için eş üçgenlerin kullanımı.

Aşağıdaki gibi kestirim problemleri için de yine basit orantıdan yararlanılabilir:

- Belirli bir alandaki ot sayısını ya da bir ağacın kaç yaprağı olduğunu bulmak.

Şu tip konuları ele alırken daha geometrik temelli fikirlerden de yararlanılabilir:

- Beyaz civanperçemi (*Achillea ptarmica*) gibi bazı bitkilerin dalları arasındaki ilişki ve Fibonacci dizisi incelenebilir.
- Bununla ilgili “altın aç” araştırılabilir ve (defne ağacı gibi) pek çok bitkide nasıl karşımıza çıktığı incelenebilir.
- Elin yumruk yapılmış ve bir kol mesafesinde uzatılmış hâlinin karşılık geldiği açığa ilişkin bir kestirimde bulunulabilir ve bu açılardan yararlanarak yalancı güneşin (parheli'nin) ve Güneş yakınlarında tüybulutların (sirrur) olduğu günlerdeki buz halelerinin konumu tanımlanabilir.

Ölçek ve geometrik benzerlik problemlerin sonuçları da bu şekilde incelenebilir. Bu özellikle kara hayvanlarının boyutları, yüzey alanının hacim ile olan ilişkisi ve bunun hayvanların görecü gücü açısından ne anlama geldiği gibi konular için geçerlidir. Çeşitli boyutlarda küpleri düşünerek (ve inşa ederek), hayvanlar âle-

minin temel biyomekaniği hakkında çok şey öğrenilebilir ve *King Kong neden asla var olamaz* ya da *Fillerin neden dev sıçanlar değildir* gibi sorular üzerinde düşünerek eğlenceli (ve öğretici!) vakit geçirilebilir. Üstelik ölçek gibi basit konular bize, çok temel bir düzeyde, metabolizma ve (güç gibi) diğer biyolojik özellikler bakımından örneğin, sivrifare, sinekkuşu, böcekler ve Afrika filleri gibi hayvanları karşılaştırma olanağı sunar!



Kaynakça

- Acheson, D. J. *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford: Clarendon Press, 1990.
- Adam, J. A. "Like a Bridge over Colored Water: A Mathematical Review of *The Rainbow Bridge: Rainbows in Art, Myth and Science*" (R. Lee, Jr., ve A. Fraser) *Notices of the AMS*, 49 (2003): 1360–1371.
- Adam, J. A. (2003). "Mathematical Models of Tumor Growth: From Empirical Description to Biological Mechanism." *Advances in Experimental Medicine and Biology: Mathematical Modeling in Nutrition and the Health Sciences* 537 (2003): 287–300 (Kluwer Academic / Plenum Publishers).
- Adam, J. A. *Mathematics in Nature: Modeling Patterns in the Natural World*. Princeton NJ: Princeton University Press, 2006 (ciltsiz baskı).
- Adam, J. A. "Geometric optics and rainbows: generalization of a result by Huygens." *Applied Optics* 47 (2008): H11.
- Adler, F. *Modeling the Dynamics of Life*. California Pacific Grove: Brooks/ Cole, 1998.
- Alexander, R. M. "Walking and Running." *American Scientist* 72 (1984): 348–354.
- Alexander, R. M. "Walking and Running." *The Mathematical Gazette* 80 (1996): 262–266.
- Ahrens, C. D. *Meteorology Today: An Introduction to Weather, Climate, and the Environment*. (6. baskı). California Pacific Grove: Brooks/Cole, 2000.
- Austin, J. D. ve Dunning, F. B. "Mathematics of the Rainbow." *The Mathematics Teacher* (Eylül 1988): 484–488.
- Baker, D. E. "A Geometric Method for Determining Shape of Bird Eggs." *The Auk* 119(4) (2002): 1179–1186.
- Baldock, G. R. ve Bridgeman, T. *The Mathematical Theory of Wave Motion*. Chichester: Ellis Horwood, 1981.
- Ball, P. *The Self-made Tapestry*. Oxford: Oxford University Press, 1999.
- Barber, N. F. *Water Waves*. Wykeham Press, London, 1969.
- Bascom, W. *Waves and Beaches*. New York: Anchor Press, 1980.
- Bohren, C. *Clouds in a Glass of Beer*. New York: Wiley, 1987.
- Bohren, C. *What Light Through Yonder Window Breaks?* New York: Wiley, 1991.
- Bohren, C. ve Fraser, A. (1986) "At What Altitude Does the Horizon Cease to Be Visible?" *American Journal of Physics* 54:222.
- Bohren, C. F. ve Huffman, D. R. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*. New York: Wiley: 1983.
- Bonner, J. T. *Why Size Matters*. Princeton NJ: Princeton University Press, 2006.
- Bowers, R. L., ve Deeming, T. *Astrophysics, I: Stars*. Boston: Jones & Bartlett, 1984.
- Boyer, C. B. *The Rainbow, from Myth to Mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1987.
- Bryant, H. C. ve Jarmie, N. (1974). *Light from the Sky* içinde tekrar basım. (1980; *Scientific American*'dan okumalar), 66–74. San Francisco: W. H. Freeman, 1974.
- Byrne, H. "The Role of Mathematics in Solid Tumour Growth." *Mathematics Today* (Nisan 1999): 48–53.
- Callander, R. A. (1978). "River Meandering." *Annual Review of Fluid Mechanics* 10 (1978): 129–158.
- Carter, T. C. (1968). "The Hen's Egg: A Mathematical Model with Three Parameters." *British Poultry Science* 9 (1968): 165–171.
- Cowley, L. <http://www.atoptics.co.uk>
- Cowley, L., Laven P. ve Vollmer, M. "Rings Around the Sun and Moon: Coronae and Diffraction." *Physics Education* 40(1) (2005): 51–59.
- Curle, S. N. ve Davies, H. J. *Modern Fluid Dynamics* (Cilt 1). Wokingham UK: Van Nostrand Reinhold, 1968.
- Elmore, W. C. ve Heald, M. A. *Physics of Waves*. New York: Dover, 1969.
- Ehrlich, R. *The Cosmological Milkshake*. Piscataway, NJ: Rutgers University Press, 1993.

Ferguson, R. I. "Regular Meander Path Models." *Water Resources Research* 9 (1973): 1079–1086.

Ferguson, R. I. "Disturbed Periodic Model for River Meanders." *Earth Surface Processes* 1 (1976): 337–347.

Fraser, A. B. "Inhomogeneities in the Color and Intensity of the Rainbow." *Journal of the Atmospheric Sciences* 29 (1972): 211–212.

Fraser, A. B. ve Mach, W. H. "Mirages." *Light from the Sky* içinde tekrar basım. (1980; *Scientific American*'dan Okumalar), 29–37. San Francisco: W. H. Freeman, 1976.

French, A. P. "How Far Away Is the Horizon?" *American Journal of Physics* 50 (1982): 795.

Gallant, R. A. *Rainbows, Mirages and Sundogs*. New York: MacMillan, 1987.

Garland, T. H. *Fascinating Fibonacci*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1987.

Greenler, R. G. *Rainbows, Halos and Glories*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1980.

Greenler, R. G. ve Mallmann, A. J. "Circumscribed Halos." *Science* 176 (1972): 128 – 131.

Herd, T. *Kaleidoscope Sky*. New York: Abrams, 2007.

Hoeppe, G. *Why the Sky Is Blue: Discovering the Color of Life*. Princeton NJ: Princeton University Press, 2007.

Hoyt, D. F. "The Effect of Shape on the Surface–Volume Relationships of Bird's Eggs." *The Condor* 78 (1977): 343–349.

Humphreys, W. J. *Physics of the Air*. New York: Dover, 1964.

Isenberg, C. *The Science of Soap Films and Soap Bubbles*. New York: Dover, 1992.

Jans, J. H. *Astronomy and Cosmogony*. New York: Dover, 1961.

Laven, P. <http://www.philiplaven.com/index1.html>

Laven, P. "How Are Glories Formed?" *Applied Optics* 44 (2005): 5675–5683.

Lee, R. L. ve Fraser, A. B. *The Rainbow Bridge: Rainbows in Art, Myth and Science*. University Park PA: Pennsylvania State University Press, 2001.

Lemons, D. S. *Perfect Form: Variational Principles, Methods, and Applications in Elementary Physics*. Princeton NJ: Princeton University Press, 1997.

Leopold, L. B. *Water, Rivers and Creeks*. Sausalito CA: University Science Books, 1997.

Leopold, L. B. ve Langbein, W. B. "River Meanders." *Scientific American* 214 (1966): 60–70.

Livingston, W. C. ve Lynch, D. K. "Mountain Shadow Phenomena," *Applied Optics*, 18 (1979): 265 – 269.

Lynch, D. K. "Atmospheric Halos." *Light from the Sky* içinde tekrar basım. (1980; *Scientific American*'dan Okumalar), 38–46. San Francisco: W. H. Freeman, 1978.

Lynch, D. K. "Mountain Shadow Phenomena, 2: The Spike Seen by an Off–Summit Observer." *Applied Optics* 19 (1980): 1585–1589.

Lynch, D. K. "Optics of Sunbeams," *Journal of the Optical Society of America A* 4 (1987): 609– 611.

Lynch, D. K. "Turbulent Ship Wakes: Further Evidence That the Earth Is Round." *Applied Optics* 44 (2005): 5759–5762.

Lynch, D. K. ve Livingston, W. *Color and Light in Nature* (2. baskı). Cambridge UK: Cambridge University Press, 2004.

Mao, S. <http://www.jb.man.ac.uk/~smao/starHtml/stellarEquation.pdf>

Mayo, N. "Ocean Waves—Their Energy and Power." *The Physics Teacher* 35 (1997): 352–356.

Minnaert, M. G. J. *Light and Colour in the Outdoors*. New York: Springer, 1993.

Mollmann, K–P. ve Vollmer, M. (2006). "Measurements and Predictions of the Illuminance During a Solar Eclipse." *European Journal of Physics* 27 (2006): 1299–1314.

- Naylor, J. C. *Out of the Blue*. Cambridge UK: Cambridge University Press, 2002.
- Nussenzweig, H. M. (1977). "The Theory of the Rainbow." *Light from the Sky* içinde tekrar basım. (1980; *Scientific American* 'dan Okumalar), 54–65. San Francisco: W. H. Freeman, 1977.
- Paganelli, C. V., Olszowka, A. ve Ar, A. "The Avian Egg: Surface Area Volume and Density." *The Condor* 76 (1974): 319–325.
- Pedgely, D. E. "The Tertiary Rainbow." *Weather* 41 (1986):401.
- Pesic, P. *Sky in a Bottle*. Cambridge MA: The MIT Press, 2005.
- Preston, F. W. "The Shapes of Birds' Eggs." *The Auk* 70 (1953): 160–182.
- Preston, F. W. "The Shapes of Birds' Eggs: Mathematical Aspects." *The Auk* 85 (1968): 454–463.
- Preston, F. W. "The Volume of an Egg." *The Auk* 91 (1974): 132–138.
- Roper, T. E. "Mathematics and the Motion of the Human Body." *The Mathematical Gazette* 74 (1990): 19–26.
- Rosen, R. *Optimality Principles in Biology*. London: Butterworth, 1967.
- Rothenberg, R. J. *Probability and Statistics*. New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1991.
- Shott, A. R.; Preston, F. W. "The Surface Area of an Egg." *The Condor* 77 (1975): 103–104.
- Spilhaus, A. F. "Raindrop Size, Shape and Falling Speed." *Journal of Meteorology* 5 (1974): 108–110.
- Stevens, P. S. *Patterns in Nature*. Boston Brown: Atlantic–Little, 1974.
- Stewart, I. *Life's Other Secret: The New Mathematics of the Living World*. New York: Wiley, 1999.
- Taffe, W. J. "Mathematics in a Pumpkin Patch." *The Mathematics Teacher*, (Ekim 1978): 603–607.
- Tape, W. "The Topology of Mirages." *Scientific American* 252 (1985) 120–129.
- Tape, W. *Atmospheric Halos*. Washington DC: American Geophysical Union, 1994.
- Tatum, J. B. "Egg Volume." *The Auk* 92 (1975): 576–580.
- Tatum, J. B. "Area–Volume Relationship for a Bird's Egg." *The Condor* 79 (1977): 129–131.
- Taylor, R. J. *The Stars: Their Structure and Evolution*. London: Wykeham Press, 1970.
- Thompson, D'Arcy W. *On Growth and Form*. New York: Dover, 1992.
- Todd, P. H. ve Smart, I. H. "The Shape of Birds' Eggs." *Journal of Theoretical Biology* 106 (1984): 239–243.
- Tricker, R. A. R. *Bores, Breakers, Waves and Wakes*. New York: M. & B. Elsevier, 1964.
- Tricker, R. A. R. *Introduction to Meteorological Optics*. New York: M. & B. Elsevier, 1970.
- Vergara, W. C. *Mathematics in Everyday Things*. New York: Harper, 1959.
- Weinstein, L. ve Adam, J. A. *Guesstimation: Solving the World's Problems on the Back of a Cocktail Napkin*. Princeton NJ: Princeton University Press, 2008.
- Whitaker, R. J. "Physics of the Rainbow." *The Physics Teacher* 12 (1974): 283 – 286.
- White, P. R. "A Tree Tumor of Unknown Origin." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 44 (1958): 339–344.
- Williams, J. *The Weather Book*. New York: Vintage, 1997.
- Young, A. <http://mintaka.sdsu.edu/GF/index.html>



- Ağaçlar
yükseklikleri, 168–172
uzunlukları, 221–224
tümörleri, 179–182
- Alacakaranlık ışınları, 224–228
- Alacakaranlık, 224, 228–229
- Altın açısı, 35
- Altın oran, 34
- Arılar, 25–27
- Atmosfer yüksekliği, 228–229
- Bahçe küresi, 24–25
- Balkabaklarının kütlesi, 48–53
- Baloncuklar tarafından kırılım, 99
- Binet formülü, 33
- Bulutlar, 66, 71
- Büyük Kanyon, 14–15
- Çitler, 43–47
- Dalgalar
kılcıl, 143–147
enerjisi, 162
okyanus, 160–162
kayaların neden olduğu, 152–154
gemilerin neden olduğu, 148–152
akıntı dalgaları, 154–155
yüzey yerçekimi, 143–147
su birikintilerinin yüzeyindeki, 158–160
- Damar sisteminin çatallaşması, 223
- Dinamik zaman ölçeği, 206
- Dümen suyu 164–167
- Fark denklemi, 32
- Fata Morgana, 74
- Fırtına, dalgalar, 157
- Fibonacci dizisi, 31–34
- Filotaksi, 36
- Fraktal, 222
- Froude sayısı, 218
- Fuji Dağı, 15
- Geometrik optik, 89; sınırlılığı, 118–121
- Girişim, 80–83; 89
- Gökkuşağı
birincil gökkuşağının oluşumu, 85–89
yüksek merteye, 93–94
yansıtılmış, 98
yansımaya uğramış ışık, 96
ikincil, 92–93
süpernümerer, 89
üçüncül, 94–95
üçlü, 94–95
sıfırıncı merteye, 98
- Gölge, yaprak gölgesi, 172–174
- Gölgeler
Dünya'nın gölge uzunluğu, 61
Jüpiter'in gölge uzunluğu, 63;
dağın gölge uzunluğu, 189–191;
benim gölgem,
hızı, 59;
Ay'ın, 62;
Neptün'ün, gölge uzunluğu, 63
Gökyüzü, rengi, 77
Güneş sütunları, 109–111
Günün Yerbilimleri Fotoğrafı (EPOD), 222
- Haleler
22–açısı, 101–103
46–açısı, 104
Hamburgerler, 16
Hidrostatik denge, denklemi, 199
Hiperboller, 140–141
- Işık halkası, 116–118
Işık, hızı, 73
- Kartopu erimesi, 2–6
Kelebek, mavi morfo, 81
Kırılma endeksi, 73, 87
Kırınım, 84
King Kong, 17
Kuş yumurtaları, 122–136
- Loch Ness, 13–14
- Matematiksel modelleme, 2, 6
Mie saçılımı, 79
- Nehir menderesleri, 183–189
- Orman
uğultusu, 174–176
geçirimsizliği, 176–178
- Ördekler, 53
Örümcek ağları, 27–31
- Parheli, 101, 111–113
Parlıt yolu, 137–142
- Rayleigh kararsızlığı, 28
Rayleigh saçılımı, 78
Rüzgâr tonları, 174

Saman yığınları, 20–23
Seraplar, 73
Sis, 72
Soğuma (Newton'ın soğuma yasası), 238–239

Taç (korona), 84
 Ay tacı (koronası), 207–210
Tepe çevresi yayı, 113–115
Ters problemler, 7–10
Tutulma, Güneş, 210–216

Ufuk çevresi yayı, 115
Ufuk, 12, 64

Üst teğet yay, 101

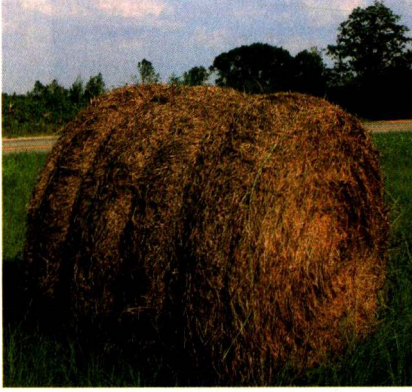
Yağmur damlaları, 18–20, 235
Yağmur, 72
Yalancı güneş, 111–113
Yanardönerlik, 84
Yayvan elipsoit, 124
 hacmi 125
 yüzey alanı, 125
Yıldız ışığı, 67
Yıldızlar
 büyüklükleri, 194–196
 modelleri, 197–205
Yıldızları izlemek, 196–197
Yürümek
 yariş yürüyüşü, 217
 hız, 217

Zion kemeri, 191–193

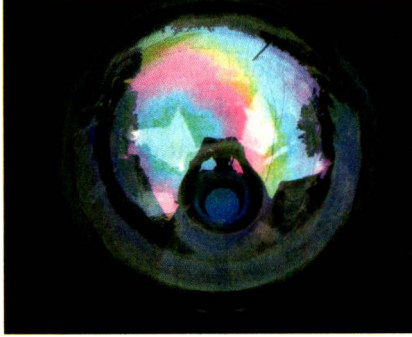
Yazar Hakkında

Old Dominion Üniversitesi Matematik ve İstatistik Bölümü'nde öğretim üyesi olan John Adam, uygulamalı matematik ve özellikle biyoloji ve atmosfer optiği alanlarında, matematiksel modelleme çalışmaları yapmaktadır. *Mathematics in Nature: Modeling Patterns in the Natural World* başlıklı kitabı, 2003 yılında Princeton Üniversitesi tarafından yayımlanmıştır (kitabın ciltsiz basımı 2006 yılında yapılmıştır). Ayrıca 1997 yılında Birkhäuser tarafından yayımlanan *A Survey of Models for Tumor/ Immune System Dynamics* başlıklı kitabın da yazarlarından biridir. (Elbette) Yürüyüş yapmaktan ve doğa fotoğrafçılığından hoşlanan John Adam, Günün Yerbilimleri Fotoğrafı adlı siteye de fotoğraflarıyla sıklıkla katkıda bulunmaktadır (EPOD: <http://epod.usra.edu/>). Yazarın çektiği fotoğrafların bazılarını kendi internet sayfası üzerinden erişilebilir. (<http://www.odu.edu/~jadam>). İngiliz vatandaşı olan Dr. Adam, kuramsal astrofizik alanındaki doktora derecesini Londra Üniversitesi'nden almıştır. Lisans öğrenciliği, Monthy Python dizisinin revaçta olduğu yıllara denk gelen Adam, Old Dominion Üniversitesi'nde 25 yılı aşkın bir süredir ders veriyor olmasına rağmen, dizinin etkisinden hâlâ kurtulabilmiş değildir. Evli ve her biri Birleşik Krallık'taki başka bir ülkede dünyaya gelmiş ve artık birer yetişkin olan, üç çocuk babasıdır; ayrıca John Mark ve Caroline Grace adında iki torun sahibidir. Bir büyükbaba olarak yerel üniversitelerde, kolejlerde, liselerde, sivil toplum örgütleri ve yurttaş girişimlerinde konferanslar vermiştir. 2007 yılında Virginia Eyaleti Yüksek Eğitim Konseyi tarafından Üstün Eğitimci Ödülü'ne layık görülmüştür. Larry Weinstein ile birlikte kaleme aldığı *Guesstimation: Solving the World's Problems on the Back of a Cocktail Napkin* başlıklı kitap, 2008 yılında Princeton Üniversitesi Yayınları tarafından yayımlanmıştır.

Renkli Fotoğraflar Kesiti



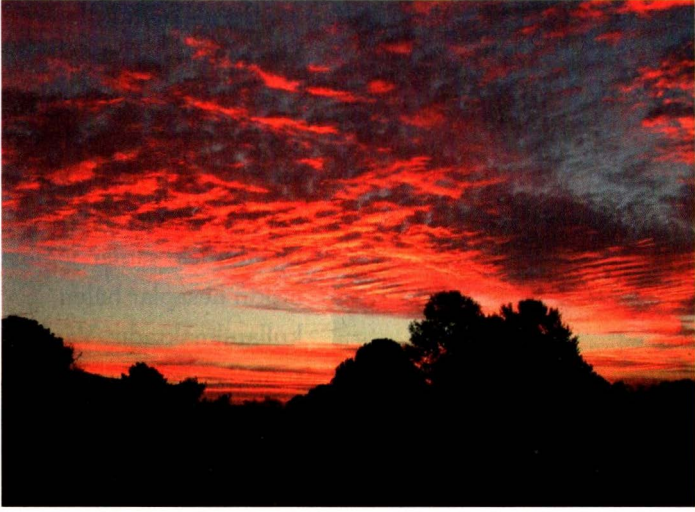
24. Soru - Silindir biçimindeki bir "saman balyası"; bu geometriyle karşımıza çıkan (ve kilim gibi dürüldükten sonra yan yatırılmış) saman yığınlarında, yarımküre biçimindeki saman yığınlarına ilişkin hesaplar hâlen kullanılmaktadır. Varılan sonuçlar, geometrik etmenler dışında birbirine çok benzer.



25. Soru - Bir bahçe küresinin yansımadaki "evren". Yazar, görüntüye girmekten kaçamamış!



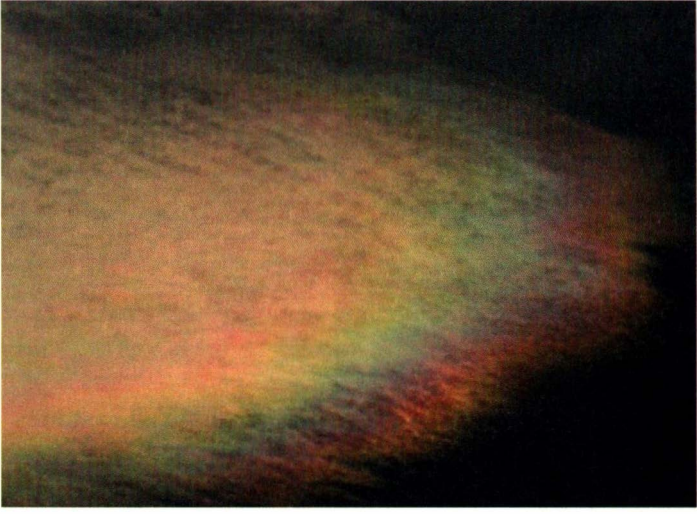
45. Soru - Mavi gökyüzünde, kule yapan bir kümebulut (kümülüs kongestus) parçası.



46. Soru - Yazarın Norfolk, Virginia'daki evinden görüntülediği, büyüleyici bir gün doğumu manzarası. Buradaki kırmızı ve turuncu renklerin sebebi, gün doğumu (ve günbatımı) esnasında güneş ışığının atmosferde görece uzun bir yol kat etmesidir. Ayrıca (mor ve mavi gibi) daha kısa olan dalga boylarının çoğu, görüş çizgisinde saçılıp dağılmış durumdadır.



47. Soru - Bir mavi morfo kelebeği. Kanatlardaki zengin yanardöner renkler, ışık dalgaları girişiminin bir sonucudur.
Fotoğraf: Barbara Tierney.



48. Soru - Güneşe yaklaşık 30° 'lik konumdaki bir bulutta görülen yanardönerlik. Bu hassas doğa olayını, güneş ışığının buluttaki damlacıklar sayesinde kırınımına uğramasına borçluyuz.



49. Soru - Yellowstone Ulusal Parkı'nın Aşağı Şelalelerinde görülen bir (birincil) gökkuşağı.



50. Soru - Yellowstone
Ulusal Parkı'nın Yukarı
Şelalelerinde görülen birincil
ve ikincil gökkuşağı.



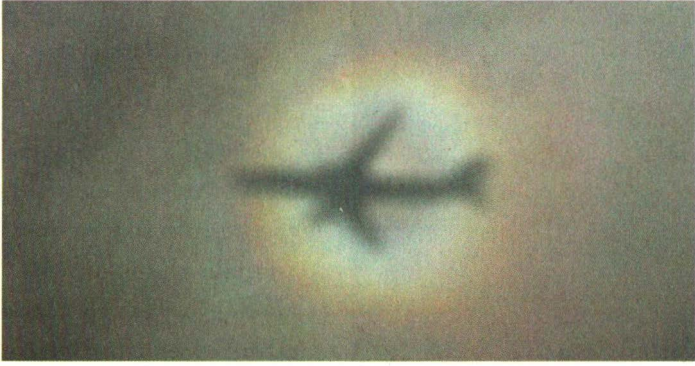
54. Soru - Ne çok balon!



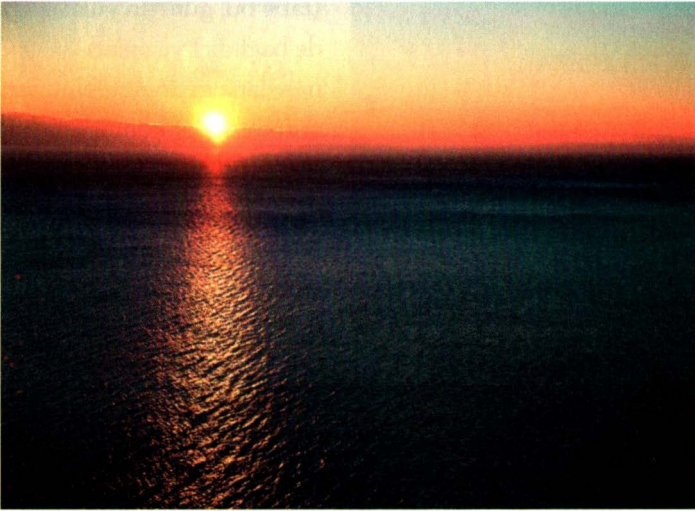
57. Soru - Batmakta olan güneşin üstünde, eğik ve levha benzeri sayısız buz kristalinin alt yüzünden aşağı doğru yansıyan ışınlar tarafından meydana getirilmiş bir güneş sütunu. Eğiklik ne kadar fazlaysa, sütun da o denli uzun olur.



58. Soru - Güneş ile aynı yükseklikte görülen bir yalancı güneş (parheli). Yalancı güneşler, güneşten en 22° derece uzaklıkta görülebilir (tabii bu, güneşin yüksekliğine de bağlıdır) ve onları meydana getiren tülbulutların (sirrostratüs) konumuna bağlı olarak, güneşin bir ya da her iki yanında olabilirler. Tıpkı 22° 'lik hale gibi, yalancı güneşler de bu bulutlardaki (veya tülbulutlardaki, yani sirrus bulutlarındaki) altıgen, levha benzeri buz kristallerinin, güneş ışığını kırılıma uğratmasıyla meydana gelir. Ancak haleden farklı olarak bu levhalar, neredeyse yatay konumdaki geniş altıgen yüzleriyle aşağı doğru sürüklenip süzülür.



60. Soru - Londra'daki Gatwick Havalimanı'nda, kalkıştan kısa süre sonra çekilmiş bir “ışık halkası” fotoğrafı. Uçak, bulut dizisine yeterince yakın olduğu için gölgesi oldukça net görülebiliyor. Bu halkalar, ışık, buluttaki tekil damlalar marifetiyle geri saçılma uğradığında görülür ancak ışık halkalarının ardında bundan biraz daha karmaşık bir dizi mekanizma yatar.



68. Soru - Bir parıltı patikası. Fotoğraf: Istockphotos.com



82. Soru - Kanada'nın Alberta eyaletindeki
Banff Ulusal Parkı'ndan bir orman köşesi.



86. Soru - Zion Kemerli, Amerika'nın Utah eyaletindeki
Zion Ulusal Parkı.



91. Soru - Calgary–Houston uçağının inişe geçtiği sırada çekilmiş eliptik biçiminde bir korona (taç) fotoğrafı. Bu görüntünün altında yatan birçok neden vardır. Fotoğraf, güneşin uçağın kanadına düşen yansımasını gösteriyor ancak iç pencere camlarından birindeki ince su damlalarının oluşturduğu tabakalar arasından! Buradaki yansımanın eliptik olmasının sebebi, metalik yüzeyin kavisli olması ve bu kaynaktan gelen ışığın küçük damlacıklar yoluyla kırınıma uğramasıdır (gördüğümüz girişim örüntüsünü de bu duruma borçluyuz). Bu kırınım sonucunda, kaynağın çevresinde eliptik bir tayf meydana gelir.